НАЦИОНАЛЬНАЯ АКАДЕМИЯ НАУК
КЫРГЫЗСКОЙ РЕСПУБЛИКИ

ИНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ

Диссертационный совет Д 01.02.183

На правах рукописи

**ТУГАНБАЕВ МАРАТ МАНСУРОВИЧ**

УДК 517.9

# РЕГУЛЯРИЗАЦИЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ГИПЕРБОЛИЧЕСКОГО ТИПА С НЕСТАНДАРТНЫМИ УСЛОВИЯМИ ГУРСА

01.01.02 – дифференциальные уравнения

## АВТОРЕФЕРАТ

Диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Бишкек - 2002

Работа выполнена на кафедре высшей математики и образовательных технологий Кыргызского государственного национального университета

Научный руководитель: доктор физико-математических наук доцент Омуров Т. Д.

Официальные оппоненты: доктор физико-математических наук, старший научный сотрудник Алексеенко С.Н., кандидат физико-математических наук, старший научный сотрудник Байзаков А.Б.

Ведущая организация: Казахский национальный университет имени Аль-Фараби

Защита диссертации состоится «9» июня 2002г. в ____ часов на заседании Диссертационного совета Д 01.02.183 по присуждению ученых степеней доктора и кандидата физико-математических наук при Институте математики НАН Кыргызской Республики.

С диссертацией можно ознакомиться в Центральной научной библиотеке НАН Кыргызской Республики.

Автореферат разослан «06» июня 2002г.

Отзывы на автореферат просим присылать по адресу: 720071, Бишкек - 71, проспект Чуй 265а, Институт математики НАН Кыргызской Республики, Диссертационный совет Д 01.02.183

Ученый секретарь диссертационного совета, кандидат физико-математических наук, старший научный сотрудник Искандаров С.



## ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

**Актуальность темы.** Многие проблемные вопросы в задачах прикладного характера математической физики, в частности, динамической теории упругости, технические проблемы в машиностроении и строительстве, связаны с краевыми задачами для дифференциальных уравнений гиперболического типа. В связи с этим в работе рассматривается следующая задача:

$$u_{xt}(x,t)+a(x,t)u_t(x,t)=f(x,t,u(x,t)), \tag{1.1.1}$$

$$u(0,t)=0,\ \forall t\in[0,\beta], \tag{1.1.2}$$

$$F(x,u(x,0))+\int_0^{\beta}Q(x,\eta)u_x(x,\eta)d\eta=g_0(x),\ \forall x\in[0,X]. \tag{1.1.3}$$

Отметим, что равенство (1.1.3) эквивалентным образом приводится к виду

$$p_0(x)u_x(x,0)+F(x,\int_0^x K(x,s)(\alpha u(s,0)+\gamma u_s(s,0))ds+\int_0^{\beta}\int_0^{\eta}Q(x,\eta)u_{x\tau}(x,\tau)d\tau d\eta=$$
$$=g_0(x) \tag{1.1.3*}$$

где $K(x,s)\equiv\frac{1}{\gamma}e^{-\frac{\alpha}{\gamma}(x-s)}$ в конкретном случае (1.1.3*), $p_0(x)=\int_0^{\beta}Q(x,\eta)d\eta$.

Вопросы корректности частных случаев задачи (1.1.1) – (1.1.3) (например, $F(\cdot)\equiv u(x,0), Q(x,\eta)\equiv 0$ или $F(\cdot)\equiv u(x,0)$, $Q(x,\eta)\equiv const$, $g_0(0)=0$, $f(\cdot)\equiv u(x,t)$) полностью изучены в работах Динника А.Н., Савина Г.Н., Горошко О.А. Случай, когда $p_0(x)\neq 0$, $\forall x\in[0,X]$, рассматривался в работах Михлина С.Г., Манжерона Д., Мамедова Я.Д., Акиева С.С., Фернандеса Д.Л., Кривошеина Л.Е., Омурова Т.Д. и других и построено решение этой задачи итерационными методами, например, методом последовательных приближений, методом Ньютона – Канторовича и его модификацией и методами на основе спецфункций($\Theta$–фундаментальность).

Однако, так как в задаче о динамических усилиях, возникающих в подъемном канате при его работе [a], длина стальных канатов имеет определенный смысл, то может задаваться дополнительная информация о решении уравнения (1.1.1) вида $a_1)$ $u(X,0)=C_0=const$ ( в частности, $C_0=g_0(X)$ при $F(\cdot)\equiv u(x,0)$, а в общем случае $C_0$ – это решение уравнения $F(X,u(X,0))=g_0(X)$), при $a_2)$ $p_0(x)|_{x=X}=0$, ($Q(x,\eta)|_{x=X}=0$). Иногда, задача (1.1.1) – (1.1.3) рассматривается с условием ($a_2$) без информации ($a_1$). И в первом и во втором случае задача (1.1.1) – (1.1.3) мало изучена (оставалась нерешенной).

Поэтому работа посвящена изучению именно этого случая.

**Целью работы** является исследование вопросов регуляризации и установление единственности решения краевой задачи для

* Савин Г.Н. Механика деформируемых тел..– Киев: Наук. думка, 1979. –466с.

дифференциальных уравнений в частных производных гиперболического типа с нестандартно заданными граничными условиями типа Гурса, когда $p_0(x)|_{x=X}=0$, $p_0(x)>0$, $\forall x\in[0,X)$, $p_0(x)$–невозрастающая недифференцируемая функция,и системных случаев этой задачи

**Методы исследования.** Применяются интегральное преобразование и эквивалентное преобразование интегрального уравнения Вольтерра третьего рода к уравнению первого рода, элементы функционального анализа, аппарат математического анализа, теория регуляризации интегральных уравнений Вольтерра первого рода, теория дифференциальных уравнений в частных производных.

**Научная новизна и выносимые на защиту основные положения.** В диссертации получены следующие результаты:

- класс краевых задач для дифференциальных уравнений гиперболического типа сведен к системе двух интегральных уравнений смешанной структуры,
- предложено эквивалентное интегральное представление, которое позволило получить уравнение Вольтерра первого рода, с ядром в классе суммируемых функций, позволяющим построить резольвенту;
- осуществлена регуляризация изучаемой задачи на основе эквивалентной системы двух интегральных уравнений смешанной структуры,
- доказана сходимость решения регуляризованной задачи к решению исходной задачи в рассматриваемых пространствах при стремлении параметра регуляризации к нулю,
- полученные результаты обобщены для системы "n" дифференциальных уравнений гиперболического типа с неклассическими условиями Гурса.

**Теоретическая и практическая ценность.** Работа носит в основном теоретический характер. Её результаты дополняют исследования по теории регуляризации дифференциальных, интегро-дифференциальных уравнений, интегральных уравнений Вольтерра, некоторых задач математической физики. В частности, исследование задач о динамических усилиях, возникающих в подъемном канате при его работе, приводит к рассмотрению дифференциального уравнения [а]: $\frac{q}{g}u_{tt}-EFu_{xx}=q(1\pm\frac{\dot{\vartheta}_c}{g})$ с условиями: $u(0,t)=\int_0^l u_\tau(\tau,t)d\tau$, $(\frac{Q}{g}u_{tt}+EFu_x)_{x=l}=Q(1\pm\frac{\dot{\vartheta}_c}{g})$ и начальными условиями: $u(x,0)=f_1(x)$, $u_t(x,0)=f_2(x)$, которые после замены независимых переменных являются частным случаем задачи (1.1.1) – (1.1.3).

**Апробация работы.** Основные результаты диссертационной работы докладывались и обсуждались на международных и республиканских конференциях:

- Международная научная конференция, посвященная 45-летию образования строительного факультета КГУСТА «Проблемы строительства и архитектуры на пороге XXI века.», Бишкек, 2000 г.;



- Научно-практическая конференция «Современные исследования молодых ученых», Бишкек, 1999 г.;
- Международная научная конференция «Проблемы математики и информатики в XXI веке», Бишкек, 2000 г.;
- Международная научная конференция, посвященная 70-летию академика М.И.Иманалиева «Асимптотические, топологические и компьютерные методы в математике», Бишкек–Бозтери, 2001 г.;
- на семинаре Института математики НАН КР (руководитель семинара - академик НАН КР М.И.Иманалиев), Бишкек, 2001 г.;
- на семинарах факультета математики, информатики и кибернетики и кафедры высшей математики и образовательных технологий КГНУ, Бишкек, 1997–2001 г.г.

**Публикации.** Основные результаты диссертации опубликованы в работах [1-9]. В совместных работах [1–5] постановка задач и обсуждение результатов принадлежат соавторам, соискателю - разработка методов и доказательство теорем.

**Структура и объем диссертации.** Работа состоит из введения, двух глав, разбитых на три параграфа каждая, заключения и списка литературы, содержащего 56 наименований. Объем текста 92 страницы. Нумерация формул производится в виде: номер главы, номер параграфа, номер формулы. Нумерация теорем и лемм аналогична.

## Краткое содержание работы

В первой главе диссертации рассматривается скалярное дифференциальное уравнение (1.1.1) с условиями (1.1.2) и (1.1.3$_1$),(1.1.23),(1.1.3),(1.3.6).

В §1.1 изучаются вопросы регуляризации и условия единственности решения задачи (1.1.1), (1.1.2) и ,соответственно,

$$1)\ p_0(x)u_x(x,0)-\int_0^x K(x,s)g(s,(T_0u)(s))ds=g_0(x), \qquad (1.1.3_1)$$

$$2)\ p_0(x)u_x(x,0)-\int_0^x K(x,s)u(s,0)ds=g_0(x), \qquad (1.1.23)$$

где $(T_0u)(s)\equiv\int_0^\beta u(s,\eta)d\eta+(1-\beta)u(s,0)$.

Функции, входящие в (1.1.1), (1.1.3$_1$), (1.1.23) удовлетворяют условиям:

а) $K(x,t)$, $a(x,t)$, $p_0(x)$, $f(x,t,u)$, $g_0(x)$ - известные непрерывные по своим аргументам функции и $f(x,t,u)$ по третьему аргументу является липшицевой с коэффициентом $L_f>0$ в $D_1=D_0\times R$, $D_0=[0,X]\times[0,\beta]$,

б) $p_0(x)$- невозрастающая и недифференцируемая функция и $p_0(x)|_{x=X}=0$, $p_0(x)>0$, $\forall x\in[0,X)$,

в) для любых фиксированных $x\in[0,X]$: $K(x,s)\in L^q(0,x)$, $q\geq1$,

г) $g(t,l_3)\in C(D_2)$, $D_2=D_1\setminus[0,X]$ и липшицева по $l_3$ в $D_2$ с коэффициентом $L_g>0$, $g(t,0)=0$.

С помощью подстановки

$$u(x,t)=\int_0^x\sigma(s)w(s)ds+\int_0^x\int_0^t\vartheta(s,\eta)\,d\eta\,ds\equiv(A[w,\vartheta])(x,t), \tag{1.1.4}$$

где $\sigma(x)$ - заданная неотрицательная, суммируемая функция такая, что $p(x)=p_0(x)\sigma(x)\in L^1(0,X)$, $|p^{-1}(x)|<+\infty$, $\forall x\in[0,X]$, задача (1.1.1), (1.1.2), (1.1.3$_1$) сводится к системе двух интегральных уравнений смешанной структуры :

$$\begin{cases}\vartheta(x,t)=-a(x,t)\int_0^x\vartheta(s,t)ds+f(x,t,(A[w,\vartheta])(x,t))\equiv(H_1[w,\vartheta])(x,t),\\ p(x)w(x)=\int_0^x K(x,s)g(s,(B[w,\vartheta])(s))ds+g_0(x),\ w(0)=q_1,\end{cases} \tag{1.1.5}$$

где $(B[w,\vartheta])(s)\equiv\int_0^s\sigma(\tau)w(\tau)d\tau+\int_0^s\int_0^\beta(\beta-\eta)\vartheta(\tau,\eta)d\eta d\tau$.

Предполагая для простоты $q_1=0$, выбираем функцию

$$h(x)=G_0(x)p(x)\in L^1(0,X), \tag{1.1.6}$$

удовлетворяющую следующим условиям

$$|H(x,s)-H(y,s)|\le\lambda(s)\int_y^x h(\tau)d\tau,\quad y\le x, \tag{1.1.7}$$

$$|g_1(x)-g_1(s)|\le N|\varphi_0(x)-\varphi_0(s)|,\quad N=const,\ \forall x\in[0,X], \tag{1.1.8}$$

где $H(x,s)\equiv\int_s^x G_0(\tau)K_0(\tau,s)d\tau$, $\varphi_0(x)=\int_0^x h(s)ds$, $\lambda(s)\in L^1(0,X)$.

Регуляризация производится на основе системы (1.1.5), точнее на основе второго уравнения этой системы, которое предварительно эквивалентно преобразуется в интегральное уравнение Вольтерра первого рода

$$\begin{cases}\vartheta(x,t)=-a(x,t)\int_0^x\vartheta(s,t)ds+f(x,t,(A[w,\vartheta])(x,t)),\\ \int_0^x h(s)w(s)ds=\int_0^x H(x,s)g(s,(B[w,\vartheta])(s))ds+g_1(x).\end{cases} \tag{1.1.9}$$

Затем рассматривается система интегральных уравнений с малым параметром

$$\begin{cases}\vartheta_\varepsilon(x,t)=-a(x,t)\int_0^x\vartheta_\varepsilon(s,t)ds+f(x,t,(A[w_\varepsilon,\vartheta_\varepsilon])(x,t)),\\ \varepsilon w(x)=-\int_0^x h(s)w_\varepsilon(s)ds+\int_0^x H(x,s)g(s,(B[w_\varepsilon,\vartheta_\varepsilon])(s))ds+g_1(x).\end{cases} \tag{1.1.10}$$



Доказаны:

**Теорема 1.1.1**. Пусть выполняются условия (а – г; (1.1.7), (1.1.8)). Тогда регуляризованная система (1.1.10) разрешима в $(C(D_0),C[0,X])$ и это решение сходится равномерно при $\varepsilon\to0$ к решению системы (1.1.9) с оценкой

$$\mathrm{E}(\varepsilon)\le(1-q_*)^{-1}\|\Delta(w,\varepsilon)\|_C,\quad \text{где } \|\Delta(w,\varepsilon)\|_C\le3\|w(x)\|_C e^{-\frac{1}{\varepsilon^{1-\delta}}}+W_{\overline{w}}(\varepsilon^\delta),$$

$W_{\overline{w}}(\overline{\varepsilon})=\sup_{|y-\upsilon|\le\overline{\varepsilon}}\left|w(\varphi_0^{-1}(y))-w(\varphi_0^{-1}(\upsilon))\right|$, $0<\delta<1$, $\varphi_0^{-1}(y)$- обратная к функции $\varphi_0(x)$. В этой теореме $\mathrm{E}(\varepsilon)\equiv\|\vartheta_\varepsilon(x,t)-\vartheta(x,t)\|_C+\|w_\varepsilon(x)-w(x)\|_C$.

**Следствие 1.1.1.** При условиях теоремы 1.1.1 решение задачи (1.1.1), (1.1.2), (1.1.3$_1$) единственно в $C^{1,1}(D_0)$.

В других параграфах диссертации единственность решения изучаемых задач не приводится, так как она доказывается аналогично следствию 1.1.1.

**Лемма 1.1.1**. Если имеют место условия теоремы 1.1.1, то приближенное решение задачи (1.1.1) – (1.1.3$_1$) строится по правилу

$$u_\varepsilon(x,t)=\int_0^x\sigma(s)w_\varepsilon(s)ds+\int_0^x\int_0^t\vartheta_\varepsilon(s,\eta)d\eta ds,$$

где $w_\varepsilon(x)$, $\vartheta_\varepsilon(x,t)$ - решение системы (1.1.10). Кроме того имеет место оценка

$$\|u_\varepsilon(x,t)-u(x,t)\|_C\le L_0(1-q_*)^{-1}\|\Delta(w,\varepsilon)\|_C,\ \text{где } L_0=\max(\|\int_0^X\sigma(s)ds\|_C,X\beta).$$

**Теорема 1.1.2**. Пусть система (1.1.9) имеет решение $\vartheta(x,t)\in L^q(0,X)$, $w(x)\in L_h^q(0,X)$, $q>1$, $w(0)=0$ при выполнении:

1) условий (а – г; (1.1.7), (1.1.8)) и $L=\max(L_1,L_2)<1$ ($L_1,L_2$ – выражаются через известные постоянные)

2) $(\sigma(s))^{q_0}/(h(s))^{q_0-1}\in L^1(0,X)$, $q_0>1$, $\frac{1}{q}+\frac{1}{q_0}=1$.

Тогда решение системы (1.1.10) сходится при $\varepsilon\to0$ к решению системы (1.1.9) в смысле $\vartheta_\varepsilon(x,t)\to\vartheta(x,t)$ по норме $L^q(0,X)$, $w_\varepsilon(x)\to w(x)$ по норме $L_h^q(0,X)$ с оценкой $\|\vartheta_\varepsilon(x,t)-\vartheta(x,t)\|_q+\|w_\varepsilon(x)-w(x)\|_{q,h}\le2\|\Delta(w,\varepsilon)\|_{q,h}/(1-L)$,

где $\|\Delta(w,\varepsilon)\|_{q,h}\le\left[\int_0^{\varepsilon^\delta}\left|w(\varphi_0^{-1}(y))\right|^q dy+\|w(x)\|_{q,h}^q e^{-\frac{q}{\varepsilon^{1-\delta}}}\right]^{\frac{1}{q}}+$

$$+\left(\frac{2}{q_0}\right)^{\frac{1}{q_0}}\left[\frac{2}{q}W_{\overline{w}}^q(\varepsilon^\delta)+\frac{2^{q+1}}{q}\|w(x)\|_{q,h}^q e^{-\frac{q}{2\varepsilon^{1-\delta}}}\right]^{\frac{1}{q}},\ \|w\|_{q,h}=\left(\int_0^X h(s)|w(s)|^q ds\right)^{\frac{1}{q}}.$$

**Лемма 1.1.2**. Если решение задачи (1.1.1) – (1.1.3$_1$): $u(x,t)\in L^q(0,X)$, а по $t$ непрерывное, то при выполнении условий теоремы 1.1.2 имеет место оценка

$$\| u_\varepsilon(x,t) - u(x,t) \|_q \le 2L_3 \| \Delta(w,\varepsilon) \|_{q,h} / (1-L),$$

$$L_3 = \max\left( X^{\frac{1}{q}} \left( \int_0^X (\sigma(s))^{q_0} / (h(s))^{q_0-1} ds \right)^{\frac{1}{q_0}}, \beta X \right).$$

Аналогичным образом задача (1.1.1), (1.1.2), (1.1.23) сводится к интегральному уравнению

$$\vartheta(x,t) = -a(x,t) \int_0^x \vartheta(s,t)\, ds + f(x,t,(A[w,\vartheta])(x,t)).$$

При этом новая неизвестная функция $w(x)$ в (1.1.4) определяется из интегрального уравнения Вольтерра третьего рода

$$p(x)w(x) = \int_0^x K_0(x,s) w(s) ds + g_0(x), \quad w(0) = q_1, \tag{1.1.25}$$

где $K_0(x,s) = \int_s^x K(x,\tau)\, d\tau \times \sigma(s)$, $q_1 = g_0(0) p^{-1}(0)$.

Предполагая, что при условиях (а - в) существует функция $G_0(x)$, при которой имеют место (1.1.7), (1.1.8), для интегрального уравнения (1.1.25) построено регуляризованное интегральное уравнение и доказываются:

д) регуляризованное уравнение имеет единственное решение в $C[0,X]$, устойчивое к малым изменениям правой части, если (1.1.5) имеет решение $w(x) \in C[0,X]$ (или $C_\varphi^\gamma[0,X]$),

е) это решение равномерно сходится к решению уравнения (1.1.25) при $\varepsilon \to 0$ ($\varepsilon$ - параметр регуляризации),

ж) если (1.1.25) имеет решение $w(x) \in L^q(0,X)$, $(\lambda(s))^{q_0} / (h(s))^{q_0-1} \in L^1(0,X)$, $q_0 > 1$, $\frac{1}{q} + \frac{1}{q_0} = 1$, то решение регуляризованного уравнения сходится к $w(x)$ по метрике $L^q(0,X)$ при $\varepsilon \to 0$,

з) на основе результатов (д–ж) получено регуляризованное решение $u_\varepsilon(x,t)$, сходящееся к решению задачи (1.1.1), (1.1.2), (1.1.23) при $\varepsilon \to 0$ равномерно в случае (д-е) и по метрике $L^q(0,X)$ в случае ж).

Все утверждения пункта (д – з) сформулированы в виде теорем и лемм.

В конце этого параграфа рассматривается пример.

В §1.2 рассматривается задача (1.1.1) – (1.1.3) в предположении

а) $f(x,t,u) \in C(D_1)$, $F(x,z)$ непрерывна по $x$ и непрерывно дифференцируема по $z$, $Q(x,\eta) \in C(D_0)$, $D_1 = D_0 \times R$, $D_0 = [0,X] \times [0,\beta]$,

б) $p_0(x) = \int_0^\beta Q(x,\eta) d\eta$, $p_0(x) \in C[0,X]$ и $p_0(x) > 0, \forall x \in [0,X]$, $p_0(X) = 0$. (1.2.4)

С помощью преобразования вида (1.1.4) задача (1.1.1) – (1.1.3) приводится к системе



$$\begin{cases} \vartheta(x,t) = (H_1[w,\vartheta])(x,t), \\ p(x)w(x) = (H_2[w,\vartheta])(x) + g_0(x), \end{cases} \tag{1.2.8}$$

где $(H_2[w,\vartheta])(x) = -F(x, \int_0^x \sigma(s) w(s) ds) - \int_0^x \int_0^\beta Q(x,\eta) \vartheta(x,\tau) d\tau d\eta$.

Допуская существование неотрицательной функции $K(x)$, при которой $h(x) = K(x)p(x) \in L^1(0,X)$, система (1.2.8) приводится к виду

$$\begin{cases} \vartheta(x,t) = (H_1[w,\vartheta])(x,t), \\ \int_0^x h(s) w(s) ds = \int_0^x K(s)(H_2[w,\vartheta])(s) ds + F(x), \end{cases} \tag{1.2.10}$$

где $F(x) = \int_0^x K(s) g_0(s) ds$.

Указывается условие, при котором существует элемент $w_{\delta_0}(0)$, подчиняющийся условию $| w_{\delta_0}(0) - w(0) | \le Q(\delta_0)$ и $Q(\delta_0) \to 0$, при $\delta_0 \to 0$.

Вводя малый параметр $\varepsilon$, для (1.2.10) получим систему

$$\begin{cases} \vartheta_\varepsilon(x,t) = (H_1[w_\varepsilon, \vartheta_\varepsilon])(x,t), \\ \varepsilon w_\varepsilon(x) = -\int_0^x h(s) w_\varepsilon(s) ds + \int_0^x K(s)(H_2(w_\varepsilon, \vartheta_\varepsilon))(s) ds + \varepsilon w_{\delta_0}(0) + F(x). \end{cases} \tag{1.2.11}$$

Доказаны следующие теоремы:

**Теорема 1.2.1**. Пусть выполняются условия (а, б) и

1) существует суммируемая функция $\sigma(x)$, удовлетворяющая условию $p(x) = p_0(x)\sigma(x) \in L^1(0,X)$, $|p^{-1}(x)| < +\infty$, $\forall x \in [0,X]$,

2) $0 < q_0 = q_1 + q_2 < 1$, где $q_1 = \max(q_1^0, q_2^0)$, $q_2 = \max(q_1^1, q_2^1)$, $q_1^0 = L_f \gamma_1$, $q_2^0 = (\| a(x,t) \|_C + L_f \beta) X$, $q_1^1 = (C_0 + e^{-1}) L_F \gamma_1 N_0$, $q_2^1 = (C_0 + e^{-1}) N_0 N_1 \beta$, $\| p_0(x) \| \le N_1, \| p^{-1}(x) \| \le N_0, \forall x \in [0,X], L_F = \sup_{\forall (x,z) \in D_2} | F_z(x,z) |$, $D_2 = [0,X] \times R$.

Тогда решение системы (1.2.11) при $\varepsilon \to 0 (Q(\delta_0) \underset{\varepsilon \to 0}{\to} 0)$ равномерно сходится к решению системы (1.2.10) с оценкой $(0 < \delta < 1)$

$$\| w(x) - w_\varepsilon(x) \|_C + \| \vartheta(x,t) - \vartheta_\varepsilon(x,t) \|_C \le (1-q_0)^{-1} \left[ 4 \| w(x) \|_C e^{-\frac{1}{\varepsilon^{1-\delta}}} + W_{\overline{w}}(\varepsilon^\delta) + 2Q(\delta_0) \right]$$

**Теорема 1.2.2**. Пусть выполняются условия теоремы 1.2.1. и $w(x) \in C_\varphi^\gamma[0,X]$, $0 < \gamma \le 1$, $w(0) = 0$.

Тогда имеет место оценка $E_\varepsilon \le (1-q_0)^{-1} M_0 \gamma_0 \varepsilon^\gamma$,

где $M_0 = \sup_{(x,s) \in D} | w(x) - w(s) | / | \varphi_0(x) - \varphi_0(s) |^\gamma$, $\gamma_0 = \gamma \int_0^\infty e^{-\upsilon} \upsilon^{\gamma-1} d\upsilon$, $\varphi_0(x) = \int_0^x h(\upsilon) d\upsilon$.

**Лемма 1.2.1.** Если выполняются условия теорем 1.2.1, 1.2.2, то имеют место оценки: $\| u_\varepsilon(x,t)-u(x,t)\|_C \le L_4(1-q_0)^{-1}[\| \Delta(\varepsilon,w)\|_C + 2Q(\delta_0)]$,

$\| u_\varepsilon(x,t)-u(x,t)\|_C \le L_4(1-q_0)^{-1}M_0\gamma_0\varepsilon^\gamma$, соответственно, где $L_4=\max(\gamma_1,\beta X)$.

В §1.3 изучаются вопросы регуляризации задачи (1.1.1), (1.1.2) и

$$p_0(x)u_x(x,0)-F(x,u(x,0))-\int_0^x\int_0^\beta K(x,s,\eta)g(s,(N[u_s,u])(s,\eta))d\eta ds=g_0(x), \quad (1.3.6)$$

$(N[u_s,u])(s,\eta)\equiv\alpha\, u(s,0)+\gamma u_s(s,\eta)$, где $F(x,u_0)\in C(D_1)$ и липшицева по $u_0$ с коэффициентом $L_F(x)\ge 0$, $K(x,s,\eta)\in L^1(0,x)$ при любых фиксированных $(x,\eta)\in D_0$, $p_0(x)$ - невозрастающая функция и $p_0(x)>0$, $\forall x\in[0,X)$, $p_0(x)|_{x=X}=0$.

Этот случай существенно отличается от (1.1.3$_1$) и (1.1.23), рассмотренных в §1.1. Как было отмечено выше, используемый нами метод позволил регуляризовать задачу (1.1.1) – (1.1.3) в пространстве непрерывных функций. Однако, этот метод можно применить для регуляризации задачи (1.1.1), (1.1.2), (1.3.6) не только в пространстве непрерывных функций,но и в пространстве суммируемых функций. Доказаны:

**Теорема 1.3.2**. Пусть выполняются условия ( а, б; (1.3.10) – (1.3.12)) и система (1.3.13) имеет решение $w(x)\in L_h^q(0,X)$, $w(0)=0$, $\vartheta(x,t)\in L^q(0,X)$.

Тогда, если $\left(1+(\lambda(x))^{q_0}\right)(\sigma(x))^{q_0}/(h(x))^{q_0-1}\in L^1(0,X)$, $\frac{1}{q_0}+\frac{1}{q}=1$, $q_0>1$, то $w_\varepsilon(x)\to w(x)$ по норме $L_h^q(0,X)$ и $\vartheta_\varepsilon(x,t)\to\vartheta(x,t)$, $\forall t\in[0,\beta]$ по норме $L^q(0,X)$ при $\varepsilon\to 0$, где $w_\varepsilon(x)$, $\vartheta_\varepsilon(x,t)$ - решение системы (1.3.15). При этом имеет место оценка

$$\|w_\varepsilon(x)-w(x)\|_{q,h}+\|\vartheta_\varepsilon(x,t)-\vartheta(x,t)\|_q\le 2(1-Q)^{-1}\|\Delta(w,\varepsilon)\|_{q,h}. \quad (1.3.25)$$

**Лемма 1.3.2**. Если выполняются условия теоремы 1.3.2, то имеет место оценка

$$\|u_\varepsilon(x,t)-u(x,t)\|_q\le 2Q_3\|\Delta(w,\varepsilon)\|_{q,h}/(1-Q), \quad (1.3.27)$$

где $Q_3=\max\left(X^{\frac{1}{q}}M_1,\beta X\right)$, $u_\varepsilon(x,t)=\int_0^x\sigma(s)w_\varepsilon(s)ds+\int_0^x\int_0^t\vartheta_\varepsilon(s,\eta)d\eta ds$,

$Q=Q_1+Q_2<1$, $M_1=\left(\int_0^X(\sigma(s))^{q_0}/(h(s))^{q_0-1}ds\right)^{\frac{1}{q_0}}$, $0<Q_1,Q_2=const$.

Здесь:

$$|L_F(x)G_0(x)|\le Q_0h(x), \quad (1.3.10)$$

$$|H(x,s,\eta)-H(y,s,\eta)|\le\lambda(s)\int_y^x h(\tau)d\tau,\ y\le x, \quad (1.3.11)$$



$$|g_1(x)-g_1(s)|\le N_0|\varphi_0(x)-\varphi_0(s)|,\ N_0=const,\ \forall(x,s)\in G=\{0\le s\le x\le X\}, \quad (1.3.12)$$

где $g_1(x)\equiv\int_0^x G_0(s)g_0(s)ds$, $\lambda(x)\in L^1(0,X)$, $\varphi_0(x)=\int_0^x h(s)ds$,

$H(x,s,\eta)\equiv\int_s^x G_0(\tau)K(\tau,s,\eta)d\tau$,

$$\begin{cases}\vartheta(x,t)=-a(x,t)\int_0^x\vartheta(s,t)ds+f(x,t,(A[w,\vartheta])(x,t)),\\ \int_0^x h(s)w(s)ds=(L_1w)(x)+(L_2[w,\vartheta])(x)+g_1(x),\end{cases} \quad (1.3.13)$$

$$\begin{cases}\vartheta_\varepsilon(x,t)=-a(x,t)\int_0^x\vartheta_\varepsilon(s,t)ds+f(x,t,(A[w_\varepsilon,\vartheta_\varepsilon])(x,t)),\\ \varepsilon w_\varepsilon(x)=-\int_0^x h(s)w_\varepsilon(s)ds+(L_1w_\varepsilon)(x)+(L_2[w_\varepsilon,\vartheta_\varepsilon])(x)+g_1(x).\end{cases} \quad (1.3.15)$$

В главе II рассматриваются системы дифференциальных уравнений гиперболического типа с нестандартными условиями Гурса.

В §2.1. изучается следующая задача

$$u_{xt}(x,t)+a(x,t)u_t(x,t)=f(x,t,u(x,t)), \quad (2.1.1)$$

$$u(0,t)=0,\ \forall t\in[0,\beta], \quad (2.1.2)$$

$$p_0(x)u_x(x,0)=\int_0^x\int_0^\beta K(x,s,\eta)(\alpha u(s,0)+\gamma u(s,\eta))d\eta ds+g_0(x), \quad (2.1.3)$$

где $\alpha,\gamma=const$, $g_0(x)$, $f(x,t,u)$ - известные функции, $u(x,t)$ - искомая вектор–функция, $K(x,s,\eta)$ - диагональная, $a(x,t)$ - квадратная заданные матричные функции порядка $n$, $p_0(x)$ - известная функция. Эти данные удовлетворяют следующим условиям:

а) $f(x,t,u)\in C_n(D_1)$, $D_1=D_0\times R^n$, $D_0=[0,X]\times[0,\beta]$ и липшицева по $u$ в $D_1$ с коэффициентом $L_f>0$;

б) $a(x,t)\in C_n(D_0)$, $K(x,s,\eta)\in L_n^1(0,X)$ для любых фиксированных $(x,\eta)\in D_0$, $g_0(x)\in C_n[0,X]$, $p_0(x)$ - недифференцируемая невозрастающая функция и $p_0(x)>0$, $\forall x\in[0,X)$, $p_0(x)|_{x=X}=0$.

Пусть существует известная суммируемая функция $\sigma(x)$:

$p(x)=p_0(x)\sigma(x)\in L^1(0,X)$, $\left|p^{-1}(x)\right|<+\infty$, $\forall x\in[0,X]$. Введем матричную функцию $h(x)=diag(h_1(x),...,h_n(x))$, где $h_i(x)=G_i(x)p(x)$, $i=\overline{1,n}$, $0\le h_i(x)\in L^1(0,X)$ такую, что

1) $\|h(x)\|\le C_1\lambda(x)$, $0<C_1=const$, (2.1.6)

$\lambda(x)=\min\limits_{1\le i\le n}\lambda_i(x)$, $\lambda_i(x)$ - собственные значения матрицы $h(x)$, $0\le\lambda(x)\in L^1(0,X)$;

2) $\|H(x,s,\eta)-H(y,s,\eta)\|\le C_2(s)\int\limits_y^x\lambda(\tau)d\tau$, $y\le x$, (2.1.7)

где $0\le C_2(s)\in L^1(0,x)$, $H(x,s,\eta)=diag(H_1(x,s,\eta),...,H_n(x,s,\eta))$,

$H_i(x,s,\eta)=\int\limits_s^x G_i(\tau)K_{0i}(\tau,s,\eta)d\tau$, $K_{0i}(\tau,s,\eta)=\int\limits_s^\tau K_i(\tau,y,\eta)dy$, $i=\overline{1,n}$;

3) для вектор – функции $g_1(x)=\int\limits_0^x G(s)g_0(s)ds$ имеет место условие

$\|g_1(x)-g_1(s)\|\le\overline{Q}_0|\varphi(x)-\varphi(s)|$, $0<\overline{Q}_0=const$, $\varphi(x)=\int\limits_0^x\lambda(\tau)d\tau$.

Тогда с использованием преобразования вида (1.1.4) задача (2.1.1.) – (2.1.3) сводится к системе интегральных уравнений

$$\begin{cases}\vartheta(x,t)=-a(x,t)\int\limits_0^x\vartheta(s,t)ds+f(x,t,(A[w,\vartheta])(x,t)),\\ \int\limits_0^x h(s)w(s)ds=\int\limits_0^x\int\limits_0^\beta H(x,s,\eta)(A_0[w,\vartheta])(s,\eta)d\eta ds+g_1(x),\end{cases}\qquad(2.1.8)$$

где $(A_0[w,\vartheta])(s,\eta)\equiv(\alpha+\gamma)\int\limits_0^s\sigma(\tau)w(\tau)d\tau+\gamma\int\limits_0^\eta\vartheta(s,z)dz$.

Для простоты допуская $w(0)=0$, в выше приведенных предположениях доказывается, что полученная система регуляризуема и решение регуляризованной системы при выполнении определенных условий сходится к её решению по норме пространств $C_n$, $C^\gamma_{n,\varphi}$, $L^q_n$, если $\varepsilon\to0$.

**Теорема 2.1.1**. Если выполняются условия (а,б,(2.1.6), (2.1.7)) и система (2.1.8) имеет решение $w(x)\in C_n[0,X]$, $\vartheta(x,t)\in C_n(D_0)$, причем $q_3=q_1+q_2<1$, то регуляризованная система разрешима и это решение $(w_\varepsilon(x);\vartheta_\varepsilon(x,t))$ сходится при $\varepsilon\to0$ по норме $C_n[0,X]$ и $C_n(D_0)$ к решению $(w(x);\vartheta(x,t))$ системы (2.1.8), с оценкой

$\|w_\varepsilon(x)-w(x)\|_C+\|\vartheta_\varepsilon(x,t)-\vartheta(x,t)\|_C\le(1-q_3)^{-1}\|\Delta(w,\varepsilon)\|_C$,

где $\|\Delta(w,\varepsilon)\|_C\le(2C_1+1)e^{-\frac{1}{\varepsilon^{1-\delta}}}\sqrt{n}\|w(x)\|_C+(1+C_1)W_{\overline{w}}(\varepsilon^\delta)\sqrt{n}$, $0<\delta<1$,

$W_{\overline{w}}(\overline{\varepsilon})=\sup\limits_{|y-\upsilon|\le\overline{\varepsilon}}\|w(\varphi^{-1}(y))-w(\varphi^{-1}(\upsilon))\|$ - модуль непрерывности, $\varphi^{-1}(y)$ - обратная к функции $\varphi(x)$, где $q_1$ и $q_2$ выражаются через известные постоянные.

**Теорема 2.1.2**. Пусть выполняются условия (а, б, (2.1.6), (2.1.7)) и



система имеет решение $w(x)\in C^\gamma_{n,\varphi}[0,X]$, $\vartheta(x,t)\in C_n(D_0)$, $w(0)=0$ и $q_3=q_1+q_2<1$. Тогда решение регуляризованной системы сходится при $\varepsilon\to0$ к решению системы (2.1.8) по норме $C_n[0,X]$ и $C_n(D_0)$, причем $\|w_\varepsilon(x)-w(x)\|_C+\|\vartheta_\varepsilon(x,t)-\vartheta(x,t)\|_C\le(1-q_3)^{-1}Q_3\varepsilon^\gamma$,

где $Q_3=Q_0(1-C_1|\gamma_1+C_1\gamma_0)\sqrt{n}$, $\gamma_1=\sup\limits_{\upsilon\in[0,\infty)}\upsilon^\gamma e^{-\upsilon}=e^{-1}$, $\gamma_0=\gamma\int\limits_0^\infty e^{-\upsilon}\upsilon^{\gamma-1}d\upsilon$,

$Q_0=\sup\limits_{(x,s)\in[0,X]}\|w(x)-w(s)\|/|\varphi(x)-\varphi(s)|^\gamma$, $0<\gamma\le1$.

**Теорема 2.1.3**. Если имеют места условия (а, б, (2.1.6), (2.1.7)) и существует решение системы (2.1.8): $w(x)\in L^q_{n,\lambda}(0,X)$, $w(0)=0$, $\vartheta(x,t)\in L^q_n(0,X)$ и $(\sigma(x))^{q_0}/(\lambda(x))^{q_0-1}\in L^1(0,X)$, $Q=Q_1+Q_2<1$, где $Q_1$ и $Q_2$ - выражаются через известные постоянные, то решение $w_\varepsilon(x)\in L^q_{n,\lambda}(0,X)$, $\vartheta_\varepsilon(x,t)\in L^q_n(0,X)$ регуляризованной системы сходится при $\varepsilon\to0$ к решению $(w(x);\vartheta(x,t))$ системы (2.1.8), соответственно по норме $L^q_{n,\lambda}(0,X)$ и $L^q_n(0,X)$, причем $\|w_\varepsilon(x)-w(x)\|_{q,\lambda}+\|\vartheta_\varepsilon(x,t)-\vartheta(x,t)\|_q\le2(1-Q)^{-1}\|\Delta(w,\varepsilon)\|_{q,\lambda}$.

На основе этих теорем и интегрального преобразования (1.1.4) построено регуляризованное решение $u_\varepsilon(x,t)$ задачи (2.1.1) – (2.1.3) и доказаны

**Лемма 2.1.1**. Если выполняются условия теоремы 2.1.1, то имеет место оценка $\|u_\varepsilon(x,t)-u(x,t)\|_C\le M\left[(2C_1+1)\|w(x)\|_C e^{-\frac{1}{\varepsilon^{1-\delta}}}+(C_1+1)W_{\overline{w}}(\varepsilon^\delta)\right]\sqrt{n}/(1-q_3)$,

где $M=\max(\int\limits_0^X\sigma(s)ds,\beta X)$, $u_\varepsilon(x)=\int\limits_0^x\sigma(s)w_\varepsilon(s)ds+\int\limits_0^x\int\limits_0^t\vartheta_\varepsilon(s,\eta)d\eta ds$, $u(x,t)$ - решение задачи (2.1.1) – (2.1.3), $(w_\varepsilon(x);\ \vartheta_\varepsilon(x,t))$ -решение регуляризованной системы.

**Лемма 2.1.2**. Если выполняются условия теоремы 2.1.2, то имеет место оценка $\|u_\varepsilon(x,t)-u(x,t)\|_C\le Q_5(1-q_3)^{-1}Q_3\varepsilon^\gamma$, а при выполнении условий теоремы 2.1.3 справедлива оценка $\|u_\varepsilon(x,t)-u(x,t)\|_q\le2Q_6(1-Q)^{-1}\|\Delta(w,\varepsilon)\|_{q,\lambda}$,

где $Q_5=\max(\int\limits_0^X\sigma(s)ds,\beta X)$, $Q_6=\max\{X^{\frac{1}{q}}M_1,\beta X\}$, $w_\varepsilon(x)$, $\vartheta_\varepsilon(x,t)$ - решение регуляризованной системы, $u(x,t)$-решение задачи (2.1.1)–(2.1.3).

В §2.2. исследуется система дифференциальных уравнений (2.1.1) с условиями (2.1.2) и