

33
4
МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
имени М. В. ЛОМОНОСОВА
Экономический факультет
Отделение экономической кибернетики

В. А. ВОЛКОНСКИЙ
А. И. КУЗОВКИН

**ОБОСНОВАНИЕ МАКСИМИЗАЦИИ
ВЫПУСКА В ЗАДАННЫХ ПРОПОРЦИЯХ
КАК КРИТЕРИЯ ДЛЯ ОПТИМАЛЬНОГО
ПЛАНИРОВАНИЯ ПРОИЗВОДСТВА**

Лекция 2.

Цикл лекций по курсу «Моделирование народнохозяйственных процессов»

ИЗДАТЕЛЬСТВО
МОСКОВСКОГО УНИВЕРСИТЕТА
1968

1°. Как известно, широкий класс задач оптимального планирования производства может быть сведен к моделям линейного программирования. Линейные модели имеют ряд преимуществ перед нелинейными, связанных с простотой математической схемы и наличием эффективных алгоритмов решения. Возможность использования линейных ограничений в таких моделях определяется тем, что, как правило, 1/ они отражают ограниченность или необходимость балансировки затрат и выпуска различных ресурсов (сырья, продукции, рабочей силы, времени работы оборудования и т. п.) и 2/ затраты и выпуск разных ресурсов при применении каждого производственного способа в широких пределах можно считать пропорциональными интенсивности применения этого способа.

Меняя, если надо, знак неравенств и знаки коэффициентов на обратные, ограничения модели производства можно записать в виде

$$By \leq b, \quad y \geq 0 \quad (1)$$

где: B — матрица технологических коэффициентов (коэффициенты затрат);
 b — объемы имеющихся ресурсов (может быть, взятые со знаком минус);
 y — интенсивности производственных способов.
 Конечный выпуск и затраты внешних ресурсов можно представить в виде

$$x = Ay \quad (2)$$

Критерий оптимальности должен быть функцией от вектора x . Обозначим его $U(x)$:

$$U(x) \rightarrow \max \quad (3)$$

Если речь идет о небольшой производственной единице, для которой можно считать известными цены на сырье и продукцию, то естественным критерием является прибыль:

$$U(x) = (c, x), \quad (4)$$

где: C — вектор цен. Другим случаем, когда вопрос о критерии оптимальности решается просто, является такое производство, выпуск которого должен удовлетворять условию комплектности. Тогда критерием может быть максимизация выпуска в заданных пропорциях (максимизация числа комплектов):

$$U(x) = \min_j \frac{x_j}{\lambda_j}, \quad (5)$$

где: x_j — j -я компонента вектора x ; $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ — заданные пропорции выпуска. Такой вид критерия широко используется в книге Л. В. Канторовича /1/. Задача /1/ — /3/, /5/ сводится к линейной, если заменить /3/, /5/ на соотношения

$$x \geq \theta \lambda, \quad (6)$$

$$\theta \rightarrow \max. \quad (7)$$

Когда речь идет о всем народном хозяйстве или о крупном подразделении производства, цены и пропорции выпуска продукции могут существенно зависеть от изменений его собственного выпуска, указанные виды критерия оказываются непосредственно неприменимыми. Более общим является предположение о существовании некоторой нелинейной целевой функции, или функции предпочтения, со стороны общества или хозяйства в отношении планов производства данного производственного комплекса. Однако математическая формализация такой функции в общем случае представляется весьма сложной, не говоря уже о том, что полученные нелинейные модели во многом уступали бы линейным с точки зрения возможностей их анализа и алгоритмизации. Поэтому, как правило, при постановке задачи оптимального планирования целесообразно использовать следующее соображение. Как известно, для нахождения экстремума функции нет необходимости иметь ее полное матема-

тическое выражение. Достаточно, например, иметь механизм, определяющий ее градиент в любой точке пространства, и алгоритм движения в соответствии с полученным градиентом. При этом нет необходимости знать, как именно определяет механизм значение градиента ("черный ящик"). Такой метод можно интерпретировать следующим образом (см. /2/).

Целевая функция $U(x)$ заменяется ее линейной аппроксимацией (4), где C есть вектор цен, и имеется способ корректировать вектор C в соответствии с предпочтением $U(x)$. При этом на каждой итерации решается задача линейного программирования (1) — (4). Доказывается, что при строго выпуклой функции $U(x)$ существует простой алгоритм движения, который приводит к оптимуму (см. /3/).

Критерий максимизации выпуска в заданных пропорциях также может рассматриваться как упрощенная модель критерия общего вида, если указан способ корректировки пропорций в соответствии с действительным предпочтением. В работе В. Г. Медницкого /4/ описан итеративный алгоритм нахождения оптимума, состоящий в решении на каждой итерации задачи на максимизацию выпуска в заданных пропорциях и последовательном уточнении этих пропорций.

В настоящей работе рассматривается итеративный процесс, близкий к процессу, описанному В. Г. Медницким, и доказывается его сходимость к оптимуму в условиях строгой выпуклости и гладкости целевой функции $U(x)$ и границы множества X . Предположение гладкости границы множества X , которое существенно для доказательства сходимости, не позволяет гарантировать сходимость данного алгоритма в важнейшем практическом случае, когда производство описывается моделью линейного программирования. Однако это не означает, что предлагаемый алгоритм не может оказаться сходящимся во многих практически важных ситуациях. В основном же доказательство сходимости

следует рассматривать как некоторый теоретический ориентир при разработке и исследовании итеративных процессов, применяемых при практических плановых расчетах.

2⁰. Предлагаемый алгоритм выглядит наиболее естественным в следующей интерпретации. В планировании личного потребления большое значение имеют функции зависимости спроса на предметы потребления от дохода потребителя. Пусть X — вектор объемов потребляемых товаров и $U(x)$ — функция предпочтения, к максимизации которой стремится потребитель. Если S — доход потребителя и p — вектор розничных цен, то потребитель выбирает вектор $X_p(S)$; удовлетворяющий условию

$$U(X_p(S)) = \max \{U(x) : (p, x) \leq S\}. \quad (8)$$

Для простоты будем предполагать, что функция $X_p(S)$ однозначна. Очевидно, $U(X_p(S))$ не убывает с ростом дохода S . Легко проверить, что если $U(x)$ есть многочлен второго порядка, то $X = X_p(S)$ при фиксированном векторе цен p есть прямая линия.

Кривая $X = X_p(S)$ (при фиксированных ценах p) есть функция зависимости спроса от дохода. Будем называть ее функцией спроса.

Функции спроса определяют как по временным рядам, характеризующим изменение товарооборота, так и по статистике семейных бюджетов, содержащей данные о потреблении семей с разными доходами. Предполагая, что цены изменяются достаточно медленно, можно в первом приближении пренебречь влиянием этих изменений на потребление и считать, что вектор потребления X всегда принадлежит найденной кривой спроса $X_p(S)$.

Пусть множество производственных возможностей (допустимых значений вектора X) есть X . Например, оно может описываться неравенствами (1) — (2). В дальнейшем будем предполагать его выпуклым, замкнутым и ограниченным. Оптимальным планом производства, соответствующим ценам p , можно называть вектор X ,

1/ который максимизирует прибыль, т.е. является решением задачи

$$(p, x) \rightarrow \max_{x \in X} \quad (9)$$

или

2/ соответствует максимальному значению дохода S при условиях

$$x \in X, \quad x = X_p(S)$$

Тогда задача, решением которой он является, должна быть записана в виде

$$S \rightarrow \max_{X_p(S) \in X} \quad (10)$$

Заметим, что если множество X задается уравнениями (1) и (2) и функция спроса $x = X_p(S)$ есть прямая, то задача (10) есть задача линейного программирования.

Назовем производственными оценками такой вектор v , что решение задачи

$$(v, x) \rightarrow \max_{x \in X}$$

совпадает с решением задачи (10). Когда решение $\hat{x}$ задачи (10) лежит на границе множества X , то v есть вектор нормали гиперплоскости, опорной к множеству X в точке $\hat{x}$. Если X задается неравенствами (1) — (2), то оценки v есть просто оценки ограничений (2) в задаче (10). Заметим, что сама кривая $X = X_p(S)$ в пространстве значений вектора X не зависит от масштаба "розничных" цен p , а зависит только от их соотношений. Если соотношения полученных оценок v совпадают с соотношениями "розничных" цен p , то легко про-

верить, что план $\hat{x}$ является оптимальным для задачи $u(x) \rightarrow \max_{x \in X}$ (11)

Действительно, из определения оценок v следует, что для всех $x \in X$

$$(v, x) \leq (v, \hat{x}).$$

Следовательно,

$$(p, x) \leq \hat{S}, \quad \text{где } \hat{S} = (p, \hat{x}),$$

и так как $\hat{x} = x p(\hat{S})$, то $u(x) \leq u(\hat{x})$

Таким образом, для совпадения плана x с оптимальным планом задачи (11) надо, чтобы производственные оценки v совпадали с "розничными" ценами p (т.е. с ценами, по которым действует потребитель).

Если оценки v оказываются отличными от цен p , то оценки могут быть использованы для уточнения цен p . Для полученных новых значений цен $p(1)$ могут быть определены новые функции спроса и новое решение $x(1)$ задачи (10) и т.д. Изменение функций спроса вслед за изменением "розничных цен" p есть ответ на это изменение цен всей совокупности потребителей продукции. Зависимость их изменения от изменения цен может изучаться статистически как работа "черного ящика", что и применяется обычно при прогнозировании спроса.

Методы корректировки цен p по оценкам v могут быть различны. В п. 3^о будет рассмотрен простейший способ:

$$p(1) = (1 - \alpha)p + \alpha v,$$

где α - "шаг итерации" ($0 < \alpha \leq 1$). Учитывая, что масштаб цен p в рассматриваемой модели не-

существен, запишем

$$p(1) = p + \alpha v \quad (12)$$

Вообще говоря, оценки v могут быть не единственными. Однако, как уже говорилось, доказательство проводится в предположении гладкости границы множества X , которое обеспечивает их единственность.

Основной факт, который доказывается в п. 3^о, состоит в том, что при достаточно малом положительном шаге α величина $\frac{u(x(1)) - u(x)}{\alpha}$ положительна, какова бы ни была исходная система цен p , если только она не оптимальна (теорема 1). Из этого утверждения можно получить следующую теорему сходимости.

Пусть корректировка цен происходит по формуле

$$p(t+1) = p(t) + \alpha_t v(t),$$

где t - номер итерации, и пусть $\alpha_t \rightarrow 0, \sum \alpha_t = \infty$

Тогда при $t \rightarrow \infty$ $x(t)$ (решение задачи (10) на t -й итерации) стремится к точке оптимума.

Этот вывод получается из теоремы 1 вполне аналогично тому, как в работе [3] выводится из основной леммы утверждения о сходимости здесь не приводится.

3^о. Предположим, что функция $u(x)$ строго выпукла вверх и дважды непрерывно дифференцируема и что множество X выпуклое с непрерывно дифференцируемой границей Γ . Предположим далее, что ни в какой точке границы Γ кривая спроса не является касательной к границе, а пересекает ее под некоторым ненулевым углом. Наконец, предположим, что значение $u(x p(S))$ строго возрастает по S вдоль функции спроса в окрестности точки ее пересечения с границей Γ . Последние два предположения можно записать аналогично в виде следующего соотношения. Запишем аппроксимацию функции $u(x)$ в окрестности некоторой точки, принятой за начало координат, с помощью

разложения в ряд Маклорена до второго порядка в виде

$$u(x) = u(0) + (a, x) - \frac{1}{2} (x, Ax) + O(|x|^2),$$

где Q и $-A$ есть градиент и матрица вторых моментов в нулевой точке. Так как $u(x)$ строго выпукла вверх, то квадратичная форма (x, Ax) положительно определена. Через точку $x = 0$ проходит кривая спроса

$x = x_p(S)$ при $p = a$. Из определения функции спроса получаем ее параметрическую запись в окрестности этой точки:

$$p - Ax + O(|x|) = \lambda p,$$

где λ — переменный параметр. С точностью до малых высшего порядка

$$x = -A^{-1} p (\lambda - 1)$$

(Эта прямая есть касательная к функции спроса в точке $x = 0$).

Для наглядности удобно перейти к другому параметру — доходу:

$$S = (p, x) = -p A^{-1} p (\lambda - 1)$$

и

$$x = \frac{A^{-1} p}{p A^{-1} p} S \quad (13)$$

Если $x = 0$ — точка границы Γ , то сформулированные выше предположения можно записать в виде

$$p A^{-1} v > 0 \quad (14)$$

где v — вектор нормали к касательной гиперплоскости. На экономическом языке это означает, что положительный прирост дохода без изменения розничных цен p вызывает положительный прирост спроса x , исчисленного в производственных оценках:

$$\frac{(v, x)}{(p, x)} = \frac{v A^{-1} p}{p A^{-1} p}.$$

Обозначим через $\hat{x}_\alpha$ решение $x(l)$ задачи (10) при $p(l) = p + \alpha v$.

Лемма.

$$\frac{\partial u(x_\alpha)}{\partial \alpha} \Big|_{\alpha=0} = \frac{(v A^{-1} v)(p A^{-1} p) - (p A^{-1} v)^2}{v A^{-1} p}$$

Доказательство. Вектор $x(l)$ есть точка пересечения границы Γ и кривой спроса, соответствующей ценам $p(l)$ и удовлетворяющей уравнению

$$p - Ax_\alpha + \beta(x_\alpha) = \lambda (p + \alpha v), \quad (15)$$

где $\beta(x) = O(|x|)$.

С точностью до малых высшего порядка границу Γ можно заменить касательной гиперплоскостью

$$(v, x) = 0 \quad (16)$$

Решая систему (15) — (16), имеем:

$$v A^{-1} p + v A^{-1} \beta(x_\alpha) = \lambda_\alpha (v A^{-1} p + \alpha v A^{-1} v)$$

и

$$\lambda_\alpha = \frac{1 + O(|x_\alpha|)}{1 + \alpha \frac{v A^{-1} v}{v A^{-1} p}}$$

Из (15) и (17) получаем последовательно:

$$-Ax_\alpha + O(|x_\alpha|) = O(\alpha)$$

$$|x_\alpha| = O(\alpha),$$

$$\lambda \alpha = 1 - \alpha \frac{v A^{-1} v}{v A^{-1} p} + O(\alpha),$$

$$x \alpha = \alpha \left(\frac{v A^{-1} v}{v A^{-1} p} A^{-1} p - A^{-1} v \right) + O(\alpha),$$

$$\frac{\partial u(x \alpha)}{\partial \alpha} \bigg|_{\alpha=0} = \lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{(p, x \alpha) + O(\alpha)}{\alpha} = \frac{(v A^{-1} v)(p A^{-1} p) - (p A^{-1} v)^2}{v A^{-1} p}$$

что и требовалось доказать.

Теорема 1. В любой точке границы Γ , за исключением точки оптимума,

$$\frac{\partial u(x \alpha)}{\partial \alpha} \bigg|_{\alpha=0} > 0$$

Доказательство. Пусть $x = 0$ есть точка границы Γ , не являющаяся точкой оптимума. Обозначим через γ угол между векторами $A^{-1} p$ и $A^{-1} v$, соответствующими этой точке. Как известно,

$$\cos \gamma = \frac{p A^{-1} v}{\sqrt{(p A^{-1} p)(v A^{-1} v)}}$$

Поэтому согласно лемме

$$\frac{\partial u(x \alpha)}{\partial \alpha} \bigg|_{\alpha=0} = \left(\frac{1}{\cos^2 \gamma} - 1 \right) \cdot v A^{-1} p$$

Так как векторы p и v коллинарны только в точке оптимума, то $\cos^2 \gamma < 1$ Теорема доказана.

Л и т е р а т у р а:

1. Л.В. Канторович. Экономический расчет наилучшего использования ресурсов. М., 1959.
2. В.А. Волконский. Система текущего планирования с помощью оценок ресурсов на основе матричных моделей. Сб. "Планирование и математические методы", Изд-во "Наука", М., 1963.
3. В.А. Волконский. Оптимальное планирование в условиях большой размерности. "Экономика и математические методы", т. 1., 1965, вып. 2.

4. В.Г. Медницкий. Алгоритм планирования и управления. (Об использовании критерия максимизации выпуска в заданных пропорциях на промежуточных уровнях планирования). Сб. "Модели и алгоритмы оптимального планирования" ЦЭМИ АН СССР., М., 1966 (ротапринт).