6
А-65

3.21

М В и С С О - У С С Р

ЛЬВОВСКИЙ ОРДЕНА ЛЕНИНА ПОЛИТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

На правах рукописи

Д - 31

Л.А.СИНИЦКИЙ

МЕТОДЫ АНАЛИЗА УСТАНОВИВШИХСЯ РЕЖИМОВ В НЕЛИНЕЙНЫХ ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ ЦЕПЯХ

(специальность № 276 - „Теоретические основы электротехники")

Автореферат диссертации
на соискание ученой степени доктора
технических наук

Львов - 1971

М В и С С О - У С С Р

ЛЬВОВСКИЙ ОРДЕНА ЛЕНИНА ПОЛИТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

На правах рукописи

Д - 31

Л.А.СИНИЦКИЙ

МЕТОДЫ АНАЛИЗА УСТАНОВИВШИХСЯ РЕЖИМОВ В НЕЛИНЕЙНЫХ ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ ЦЕПЯХ

(специальность № 276 - „Теоретические основы электротехники")

Автореферат диссертации
на соискание ученой степени доктора
технических наук

Львов - 1971

465

Направляем Вам для ознакомления автореферат диссертационной работы Л.А.Синицкого на тему: „Методы анализа установившихся режимов в нелинейных электрических цепях", представленной на соискание ученой степени доктора технических наук.

Работа выполнена на кафедре „Теоретические основы электрорадиотехники" Львовского ордена Ленина государственного университета им. Ив.Франко.

Официальные оппоненты: академик АН УССР ПУХОВ Г.Е.
/Институт электродинамики АН УССР, Киев/.
член-кор. АН УССР ДЕНИСЕНКО Г.И.
/Львовский ордена Ленина политехнический институт/
д.т.н., проф. ДАНИЛОВ Л.В.
/Ленинградский электротехнический институт им. В.И.Ульянова (Ленина)/.

Ведущее предприятие: указано в решении Ученого Совета.

Автореферат разослан "____"______________ 1971 года.
Защита диссертации состоится "____"______________ 1971 года на Совете электромеханического и энергетического факультетов Львовского ордена Ленина политехнического института, г.Львов, ГСП-5, ул. Мира, 12.

С диссертацией можно ознакомиться в научно-технической библиотеке института (ул. Профессорская, 1).

Просим Вас и сотрудников Вашего учреждения принять участие в заседании Совета или прислать свои отзывы в 2-х экземплярах ученому секретарю Совета института.

УЧЕНЫЙ СЕКРЕТАРЬ СОВЕТА

Возникновение теории нелинейных цепей, ее первые успехи и разработка математического аппарата для исследования были связаны с изучением ограниченного класса цепей, главным образом автоколебательных и параметрических цепей с одной степенью свободы. Даже теперь, спустя почти полстолетия, трудно переоценить значение работ Ван-дер-Поля, Мандельштама, Папалекси, Андронова и Витта в этой области.

Круг проблем, изучаемый теорией нелинейных цепей, в последние годы необычайно расширился. Причиной этому служат как внутренние факторы, такие как совершенствование методов исследования, так и внешние – стремительное развитие радиоэлектроники, базирующейся на использовании нелинейных явлений.

Развитие теории цепей происходило, главным образом, за счет разработки количественных методов анализа. В основе этого направления лежат классические работы Н.М.Крылова, Н.Н.Боголюбова, Ю.А.Митропольского. Применение их к исследованию нелинейных цепей позволило обосновать метод медленно изменяющихся амплитуд Ван-дер-Поля и обобщить его настолько, что он стал одним из основных методов анализа. Характерным для этого направления является предположение о близости колебаний к синусоидальным или же к модулированным, но с синусоидальной несущей. Выполнение этой предпосылки для множества радиоэлектронных устройств обеспечило столь широкое распространение метода Крылова – Боголюбова – Митропольского. Примерно 70% работ, посвященных расчету нелинейных цепей, опирается в той или иной степени на эту группу методов.

Для исследования систем с резко выраженной нелинейностью, когда предпосылка о близости колебаний к синусоидальным оказывается мало пригодной, получил распространение метод припасовывания, основы которого были заложены в работах Папалекси и Андронова. Особенно широко этот метод применяется при анализе выпрямительных, инвертирующих и импульсных устройств.

Наряду с применением традиционных методов численного анализа для расчета нелинейных цепей были разработаны специально приспособленные методы. Здесь в первую очередь следует отметить метод точек, созданный благодаря работам В.Ю.Ломоносова и Г.Е.Пухова. Роль количественных методов значительно возросла в результате внедрения ЦВМ.

Достижения в области качественной теории не столь велики, более того, новые результаты в области качественной теории дифференциальных уравнений не всегда находят отклик в теории цепей. Иногда это относится даже к тем задачам, постановка которых была обусловлена запросами теории цепей.

Что касается качественных результатов, полученных на основе специфических методов теории цепей, то они весьма немногочислены.

Можно предположить, что сложившееся положение вполне соответствует внутренней логике развития теории цепей и запросам практики. Однако такой вывод был бы неверным. Прежде всего именно широкое развитие численных методов расчета с использованием ЦВМ требует более внимательного качественного анализа задачи на предварительной стадии расчета. Можно привести несколько примеров, иллюстрирующих это положение.

Пусть рассматривается задача о расчете цепи, содержащей

нелинейное отрицательное сопротивление. Вследствие неоднозначности вольтамперной характеристики последнего возможны случаи, когда решение дифференциальных уравнений задачи не существует при $t>t_e$, где t_e – момент достижения экстремума на вольтамперной характеристике нелинейного элемента. Известно, что при такой ситуации обычно вводится гипотеза „скачка", которая может быть подтверждена только путем рассмотрения другой, более сложной цепи, учитывающей малые реактивные параметры. Очевидно, что численное решение подобных задач на ЦВМ возможно только в случае, когда в рассматриваемой цепи решения не обрываются в точках экстремума, иначе в программу должен быть введен алгоритм для распознавания характера поведения системы в критических точках. В обоих случаях необходимо предварительное изучение качественных особенностей рассматриваемой цепи.

Второй пример. Рассмотрим задачу о расчете периодического режима нелинейной цепи. Так как обычно начальные условия, соответствующие периодическому режиму, заранее неизвестны, то при анализе задаются некоторыми, в достаточной степени произвольными, начальными условиями, затем каким-либо численным методом производится интегрирование дифференциальных уравнений до тех пор, пока решение не приблизится к искомому периодическому режиму. Такой способ расчета безупречен и позволяет полностью выяснить свойства периодического режима, когда последний единственен, т.е. система обладает свойствами конвергенции.

Для неконвергентных систем подобный путь, вообще говоря, неприемлем. В этом случае, задавая различные начальные условия, можно получить различные стационарные режимы. Причем, если заранее не получены хотя бы наиболее общие сведения о их числе и характере, решение задачи путем перебора достаточно большого количества начальных условий не сулит успеха.

Можно привести еще большое число примеров, свидетельствующих о том, что качественные особенности исследуемой цепи в значительной степени предопределяют численные методы анализа. Точно так же правильная интерпретация численных методов расчета и исключение неверных результатов тем более эффективны, чем большим количеством сведений о цепи обладает исследователь.

Роль качественных сведений также чрезвычайно велика при поиске новых явлений и устройств, могущих найти применение в радиоэлектронике. Качественные данные относительно того или иного класса схем позволяют более сознательно подходить к проблемам синтеза нелинейных цепей с заданными свойствами. К примеру, выделение класса цепей, в которых возможно только одно положение равновесия или один периодический режим, дает возможность не рассматривать подобные цепи при разработке триггеров или других многоустойчивых элементов. С другой стороны, только этот класс схем может использоваться при разработке усилителей, функциональных преобразователей и других устройств, характеризующихся однозначной зависимостью между входным и выходным воздействием.

Изложенное позволяет сделать вывод о целесообразности более интенсивного развития качественной теории нелинейных цепей. При этом представляется возможность продвижения в этой области, по крайней мере, по трем направлениям: во-первых, интерпретация на языке теории цепей многочисленных результатов, полученных качественной теорией дифференциальных уравнений;
во-вторых, развитие собственных качественных методов теории цепей и, в третьих, получение качественных закономерностей на основе

количественного изучения отдельных достаточно узких классов цепей.

Роль последнего направления следует особо подчеркнуть. Необходимость его обусловлена двумя обстоятельствами. С одной стороны, чисто качественные методы далеко не так могущественны, чтобы можно было рассчитывать на получение с их помощью достаточно большого числа закономерностей; с другой стороны, при использовании современной вычислительной техники имеется опасность „утонуть" в огромном потоке получаемой информации, если не использовать его для выявления качественных закономерностей.

Разумеется, часть выводов, полученных таким образом, может носить эвристический характер, но это следует рассматривать скорее как положительную особенность. Такого типа выводы служат побудительным фактором для проведения более строгих исследований и в то же время могут приниматься как вполне обоснованные для конкретной рассмотренной задачи.

Возможность извлечения качественных выводов из результатов количественного анализа зависит от применяемого метода. С этой точки зрения очень эффективным следует считать метод припасовывания. По существу на эту сторону метода припасовывания обращали внимание в свое время Л.И.Мандельштам и А.А.Андронов, когда указывали, что в отдельных случаях сама „физика подсказывает применение этого метода".

Аппроксимация нелинейных зависимостей небольшим числом (два-три) линейных отрезков уже предполагает, что свойства нелинейных элементов учитываются, если можно так выразиться „в большом", т.е. выделяются наиболее характерные свойства зависимости. Это, в свою очередь, облегчает качественную интерпретацию полученных результатов. Именно вследствие этого при дальнейшем изложении предпочтение при исследовании отдается методу припасовывания. Высказанные соображения вовсе не означают, что метод припасовывания обладает бесспорными преимуществами по сравнению с другими. Напротив, ему присущи многие, зачастую трудно преодолимые, недостатки. Среди них следует упомянуть недостаточную приспособленность метода для применения ЦВМ при поиске периодических режимов.

Нужно отметить, что вообще вопрос о выборе метода расчета того или иного класса цепей с учетом обьема вычислительной работы еще не получил надлежащего решения. Если говорить о расчете установившихся режимов, то прежде всего нужно выяснить, что целесообразнее: непосредственно искать установившийся режим или производить расчет неустановившегося режима, постепенно приближаясь к установившемуся.

Первый путь сначала кажется предпочтительней. Однако в общем случае это не так, потому что известные методы расчета установившихся режимов, как правило, пригодны для режимов, близких к синусоидальным. Учет же большого количества высших гармоник приводит к увеличению обьема вычислений, а иногда и к расходимости процесса вычислений.

С этой точки зрения расчет установившегося режима через переходный процесс более универсален. В основу его могут быть положены хорошо отработанные алгоритмы численного решения дифференциальных уравнений. Вопросы сходимости при этом отступают на второй план, а в некоторых случаях не возникают вовсе. Очевидно, этим обусловлено, что все известные универсальные программы расчета цепей основываются на численном интегрировании

дифференциальных уравнений при заданных начальных условиях.

Наибольший недостаток такого направления - это возрастание обьема вычислений по мере повышения порядка цепи, т.е. порядка дифференциальных уравнений, которыми описывается цепь. С этой точки зрения большие преимущества имеют методы первой группы, основывающиеся в той или иной степени на методе гармонического баланса, для которых сложность расчета не так уж сильно связана с порядком цепи. Таким образом, в первом приближении можно оценить область применимости этих двух направлений. С некоторым основанием справедливо утверждение, что взаимоотношение между ними аналогично взаимоотношению между расчетами цепи в частотной и временной области.

Однако проблема эта настолько важна, что заслуживает более тщательного рассмотрения и выделения более четкой границы предпочтительного применения каждого из направлений.

В пределах каждого из направлений имеются свои проблемы довольно общего характера. Для первого из них - это сопоставление различных методов нахождения периодических режимов. Имеющиеся здесь результаты относятся к случаю, когда задачи решались чисто аналитическим путем. Между тем важно выяснить насколько хорошо приспособлены те или другие методы к численным расчетам.

Для второго направления также важно установление критериев выбора того или иного метода численного интегрирования. Задача эта, вообще говоря, носит чисто математический характер. Однако, при ее решении целесообразно учитывать некоторые специфические стороны уравнений, используемых в теории цепей.

Поэтому важно иметь критерии, позволяющие по виду исследуемой цепи, оценить степень сложности и трудоемкости при решении ее на ЦВМ. При расчете линейных цепей, методы расчета которых хорошо разработаны, трудоемкость расчета определяется наименьшей постоянной времени цепи, или, точнее, наибольшими по величине действительными и мнимыми частями характеристических показателей. В связи с этим возникает задача оценки последних и идеализации исследуемой цепи с тем, чтобы понизить трудоемкость расчетов.

Оценка трудоемкости расчета для нелинейной цепи более сложна, чем для цепей линейных, т.к. она может в значительной степени определяться характером изменения переменных в установившемся режиме, который заранее не известен. Имеющиеся здесь результаты относятся к сравнительно ограниченному кругу задач.

Изыскание способов быстрейшего приближения к установившемуся режиму в процессе счета также представляет немаловажный интерес, особенно для систем с большой длительностью переходного процесса. Очевидно, что в том случае, когда расчет последнего не является самоцелью, на первом этапе счета нужно заботиться не о точности вычислений в пределах периода внешней эдс, а о быстрейшем приближении к установившемуся режиму. Это означает, что должен выбираться оптимальный шаг интегрирования, который может изменяться в процессе вычислений, обеспечивающий минимум операций. Кроме того, исходя из тенденций развития переходного процесса, устанавливаемых в процессе вычислений, возможно изменение начальных условий на другие, более близкие к начальным условиям, соответствующим установившемуся режиму.

Приведенные соображения позволили оформулировать основные задачи данной работы следующим образом:

1. Разработка элементов качественной теории нелинейных цепей, опирающейся на качественную теорию дифференциальных уравнений.

2. Получение качественных сведений относительно установившихся режимов отдельных классов цепей на основе анализа качественных результатов расчета (главным образом, при использовании метода припасовывания).

3. Анализ численных методов расчета нелинейных систем и выявление области рационального использования методов на основе изучения особенностей их применения при исследовании различных классов цепей.

Глава первая. „Элементы качественной теории электрических цепей" состоит из пяти параграфов. Первый из них посвящен исследованию структуры уравнений состояний, описывающих электрическую цепь.

Предполагается, что уравнения состояния представлены в виде

$$\frac{dx}{dt} = f(x,t), \qquad (1)$$

где x n-мерный вектор состояний; $f(x,t)$ n-мерная вектор-функция. В качестве переменных состояния цепи, принимаются заряды емкостей и потокосцепления индуктивностей или их линейные комбинации. Последнее имеет место для цепей с вырождениями, т.е. в том случае, когда цепь содержит замкнутые контуры или сечения, образованные реактивными элементами одного вида (индуктивностями или емкостями). При наличии в цепи замкнутых контуров, образованных емкостями, или сечений, состоящих из индуктивностей, предлагается говорить о вырождениях Д-типа. Порядок n системы (1) при вырождениях Д-типа меньше числа реактивных элементов на величину $n_Д$, равную количеству вырождений.

Вырождения В-типа характеризуются наличием контуров из индуктивностей и сечений из емкостей. Порядок n системы (I) при наличии только вырождений В-типа, вообще говоря, совпадает с числом реактивных элементов. Однако уравнения подобного класса цепей имеют первые интегралы вида

$$\sum x_i = C_s \qquad s = 1, 2, \dots, n_B , \qquad (2)$$

(n_B - количество вырождений В-типа) выражающие очевидный факт, что сумма зарядов, относящихся к емкостному сечению, и сумма потокосцеплений индуктивного контура постоянны.

Поэтому порядок исходной системы уравнений может быть понижен до $n - n_B$. Однако при этом новая система уравнений содержит n_B произвольных постоянных C_s .

Условия, при которых система (I) имеет единственное решение на некотором интервале (t_0, t_k) , удовлетворяющее начальным условиям $t = t_0$; $x = x^{(0)}$, для широкого класса цепей получены Дезором и Катценелсоном.

Выполнение этих условий не означает, однако, возможности получения правых частей (I), в явном виде. Обычно требуется для определения $f(x,t)$ решать систему нелинейных алгебраических уравнений. Только в отдельных частных случаях возможно получение $f(x,t)$ в явном виде. Это имеет место, во-первых, для цепей не содержащих нелинейных резисторов; во-вторых, для цепей в которых контуры, определяемые резистивными хордами, не содержат резистивных ветвей. В реферируемой работе показано, что для автономной цепи без вырождений, в которой нелинейны только реактивные элементы и отсутствуют управляемые резисторы, уравнения состояния (I) приводятся к виду

$$\frac{dx}{dt} = -\tilde{A} f(x) , \qquad (3)$$

где $\tilde{A}$ - положительная полуопределенная матрица;

$f(x)$ - вектор-функция, отдельные составляющие которой описывают зависимости напряжение-заряд, ток-потокосцепление для реактивных элементов цепи. Поэтому каждая из составляющих $f(x)$ зависит только от одной составляющей вектора x .

Наличие в цепи нелинейных резисторов приводит к тому, что матрица $\tilde{A}$ становится переменной, зависящей от x . Однако, если в цепи отсутствуют управляемые резисторы, то свойство неотрицательности матрицы $\tilde{A}$ сохраняется для всех значений вектора x.

В неавтономной цепи, то есть, при наличии внешних воздействий, которые являются функциями времени t , правая часть уравнений состояния также зависит от t . При этом для цепей, не содержащих нелинейных резисторов, уравнения состояния принимают вид

$$\frac{dx}{dt} = -\tilde{A} f(x) + F(t) , \qquad (4)$$

то есть, переменные x и t входят в правую часть в виде, не связанных между собой, функций $f(x)$ и $F(t)$. Это свойство не имеет места для цепей с нелинейными резисторами, для которых уравнение неавтономной цепи представимо в форме:

$$\frac{dx}{dt} = -\tilde{A}(x,t) f(x) + F(x,t) , \qquad (5)$$

Причем матрица $\tilde{A}(x,t)$ и в этом случае сохраняет свойство неотрицательности для всех x и t . Что касается $F(x,t)$, то показано, что норма $F(x,t)$ ограничена при всех x , если внешние воздействия ограничены.

Уравнение цепи с вырождениями В-типа получается из (5) путем исключения $n_в$ переменных. В результате соответствующая система принимает вид

$$\frac{dx^*}{dt} = -A^*(x^*, c_s, t) f(x^*) + F^*(x^*, c_s, t),$$

где A^* - матрица ($n \times n - n_в$) и F^* - вектор-столбец $n - n_в$ получены из $\tilde{A}$ и F путем удаления последних $n_в$ строк;

$$x^* = (x_1, x_2, \ldots, x_{n-n_в})'.$$

Вырождения Д-типа также приводят к изменению структуры уравнений состояния. При выборе в качестве переменных состояния зарядов емкостей дерева и потокосцеплений индуктивных хорд, правая часть уравнений состояния цепи без вырождений умножается слева на матрицу вида:

$$M = \begin{bmatrix} D_1 & 0 \\ 0 & D_2 \end{bmatrix},$$

причем элементы ненулевых блоков D_1 и D_2 определяются дифференциальными индуктивностями и ёмкостями цепи.

Во втором параграфе изучаются условия, при которых решения системы при $t \to \infty$ ограничены и предельно ограничены (система диссипативна, или принадлежит к Д-типу). Подчеркивается, что установление ограниченности (предельной ограниченности) необходимо для правильной идеализации задачи при рассмотрении явлений в различных устройствах радиоэлектроники, а также для облегчения поиска установившихся режимов и контроля за процессом вычисления при решении задач на ЦВМ.

Исследование проводится на основании известного обобщения второго метода Ляпунова на задачи по установлению ограниченности

и диссипативности. Применение теоремы Йошизава и результатов Н.Н.Красовского, устанавливающих свойства функции Ляпунова, показало, что если автономная цепь экспоненциально устойчива в целом, то соответствующая неавтономная цепь диссипативна при ограниченных внешних воздействиях.

Таким образом, задача об установлении диссипативности сводится к задаче об экспоненциальной устойчивости в целом автономных цепей. Эта задача рассматривалась ранее в работах Даффина и Данилова.

Использование в качестве функции Ляпунова энергии цепи позволило установить диссипативность цепей с двухполюсными резистивными элементами, при условии, что в цепи отсутствуют вырождения В-типа. Этот результат получен при существенном использовании того обстоятельства, что матрица $\tilde{A}(x)$ для указанного класса цепей полуопределенно положительна для всех x.

В цепях с управляемыми элементами матрица $\tilde{A}(x)$, вообще говоря, не удовлетворяет требованиям знакоопределенности. Поэтому установление свойства диссипативности в этом случае оказывается более трудным. В реферируемой работе доказана диссипативность цепей, для которых матрица $-\tilde{A}$ гурвицева, а недиагональные элементы $\tilde{A}$ неположительны.

Параграф третий посвящен исследованию условий, при которых нелинейные цепи обладают свойством конвергенции, то есть при периодических внешних воздействиях в них может наблюдаться единственный, устойчивый в целом, периодический режим, частота которого совпадает с частотой внешнего воздействия. Поведение конвергентных цепей в качественном отношении аналогично поведению устойчивых линейных цепей. Этим обусловлена особая их роль при построе-

...ми усилителей, умножителей частоты, выпрямительных и детектирующих устройств.

Диссертантом в 1959 г. была доказана конвергентность цепей, не содержащих реактивных нелинейных элементов, при условии, что нелинейные резисторы не имеют падающих участков на вольтамперной характеристике. При доказательстве использовался энергетический метод. В 1967 г. Л.В.Даниловым эти результаты были существенно расширены. Им выделены обширные классы цепей с нелинейными реактивными элементами, для которых соблюдается свойство конвергентности.

Известны также результаты по исследованию свойства конвергентности в качественной теории дифференциальных уравнений. В работе произведено сопоставление различных критериев конвергентности. Показано, что наиболее эффективными из них являются критерии Данилова и Якубовича, причем на примере цепей с реактивными элементами показана их эквивалентность.

В четвертом параграфе рассмотрены возможные типы установившихся движений в нелинейных цепях. Если воспользоваться определением термина "установившийся" режим, данным В.В.Немыцким, то установившиеся режимы в автономных нелинейных цепях и при периодических внешних воздействиях, сводятся к положениям равновесия, периодическим и почти-периодическим режимам. При симметричных характеристиках элементов цепи получено несколько дополнительных результатов относительно возможных установившихся режимов. Показано, что в конвергентных цепях с симметричными нелинейностями вынужденные колебания обязательно симметричны, т.е. выполняется условие $x(t+\frac{T}{2}) = -x(t)$, если $F(x,t+\frac{T}{2}) = -F(x,t)$.

Известно, что частота периодического режима может не совпадать с частотой внешнего воздействия. В том случае, когда эти величины кратны, принято говорить о субгармонических или ультрасубгармонических колебаниях, частота которых равна $\frac{p}{q}\omega$ (p, q - целые, ω - частота внешнего воздействия). Субгармонические колебания всегда выступают в q различных модификациях, сдвинутых на угол $\frac{2\pi}{q}$ одна относительно другой, а появление той или иной модификации обусловлено начальными условиями. Показано, что в цепи с симметричными нелинейностями субгармонические колебания не обязательно симметричны. Более того, субгармонические колебания четного порядка обязательно несимметричны.

Характерной особенностью несимметричных субгармоник нечетного порядка с симметричной нелинейностью является удвоение числа различных модификаций, т.е. оно равно $2q$ для колебаний порядка q. Этот факт, известный в теории параметрона на магнитных элементах, обобщен на произвольные симметричные цепи.

Несмотря на возможность существования в нелинейных цепях режимов с частотой, несоизмеримой с частотой внешнего воздействия, возможность их реализации и применения в литературе не обсуждалась. Между тем, используя аналоговые вычислительные машины, можно легко реализовать подобного типа режимы. Приведены уравнения, позволяющие осуществить режим колебаний с несоизмеримой частотой на АВМ, и обсуждается возможность применения этого режима для создания генераторов незатухающих колебаний.

Рассмотрение почти-периодических режимов произведено на основании работ А.А.Андронова и А.А.Витта, из которых вытекает, что в цепях с сосредоточенными параметрами могут иметь место только квази-периодические и предельно квази-периодические режимы. Первые характеризуются тем, что частоты всех составляющих колебаний выражаются через конечное число линейно независимых элементов базиса

$$\omega_s = C_{1s}\omega_1 + C_{2s}\omega_2 + \dots + C_{ks}\omega_k ,$$

где C_{is} – целые числа; для предельно квазипериодических колебаний C_{is} – произвольные рациональные числа.

До сих пор еще не известны устройства, в которых реализуются процессы, приближающиеся к предельно квази-периодическим.

В 1933 г. по поводу колебаний такого рода А.А.Андронов писал, что "...с точки зрения физики они поистине ужасны". Однако, если бы удалось реализовать систему, в которой существовали предельно квази-периодические колебания, то она, бесспорно, нашла бы множество применений. В первую очередь, как универсальный делитель частоты. Поэтому вопрос об индентификации предельно квази-периодических колебаний представляет некоторый интерес. Обсуждению его посвящена заключительная часть параграфа.

<u>В главе второй</u> "Метод припасовывания в теории нелинейных цепей" приведены некоторые результаты, полученные диссертантом и его сотрудниками (И.Н.Лисицкая, Ю.М.Шумков), по анализу нелинейных цепей упомянутым методом.

Приведенные примеры наглядно демонстрируют возможности метода припасовывания при анализе нелинейных систем с несколькими возможными установившимися режимами. Одновременно показана ограниченность метода при анализе систем высокого порядка. Рассмотренные в диссертации задачи составляют часть проблем теории цепей,

изучавшихся в работах автора в течение 1957-1970 г. методом припасовывания . Большая часть результатов в этой области приведена в [49].

Параграф I содержит изложение основных особенностей метода припасовывания при анализе цепей. Детально рассмотрен физический смысл условий скачков М.А.Айзермана и Ф.Р.Гантмахера.

Так как применение метода припасовывания предполагает кусочно-линейную аппроксимацию характеристик нелинейных элементов, в § 2 изучено поведение нелинейной цепи в окрестности излома нелинейной характеристики. Для этой цели используются условия скачков.

В зависимости от параметров линейной части цепи и свойств нелинейного элемента переход изображающей точки с одного участка характеристики на другой может происходить двояко:

I. Изображающая точка подходит к точке излома характеристики и проходит на следующий ее участок. Величины, определяющие положение изображающей точки на нелинейной характеристике могут при этом оставаться непрерывными, либо иметь скачки (даже при непрерывной характеристике нелинейного элемента). Такой переход получил название нормального переключения.

2. Условия скачков указывают на невозможность перехода изображающей точки на следующий участок в момент подхода ее к границе двух участков характеристики.

Показано, что в цепи, содержащей нелинейные резисторы с монотонной характеристикой всегда реализуется нормальный режим переключения. При этом возможны:

I. Скачки тока, если характеристика резистора имеет участки параллельные оси u , а входное сопротивление линейной части со стороны зажимов нелинейного резистора удовлетворяет условию

$$\lim_{\omega \to \infty} Z(j\omega) = 0 \qquad (6)$$

2. Скачки напряжения, если характеристика резистора имеет участки параллельные оси i , а входное сопротивление линейной части удовлетворяет условию

$$\lim_{\omega \to \infty} Z(j\omega) = \infty . \qquad (7)$$

В случае нелинейных емкостей и индуктивностей при монотонности характеристик $i(\psi)$ и $u(q)$ также имеет место нормальное переключение. При этом в цепи с индуктивностью возможен скачок тока при переходе на участок с нулевой дифференциальной индуктивностью при условии, что характеристики линейного двухполюсника таковы, что выполняется (6). Аналогично в случае наличия в цепи нелинейной емкости возможен скачок напряжения при переходе на участок с нулевой дифференциальной емкостью, если при этом соблюдается соотношение (7).

Для цепей с нелинейным резистором, характеристика которого содержит падающие участки, переключение остается нормальным при соблюдении условий

а) $$\lim_{\omega \to \infty} Z(j\omega) > |r_f|$$

для нелинейного резистора, управляемого током (S - образная характеристика);

б) $$\lim_{\omega \to \infty} Z(j\omega) < |r_f| ,$$

где r_f - дифференциальное сопротивление падающего участка ,

для нелинейного резистора, управляемого напряжением (N - образная характеристика).

Нарушение этих условий приводит к тому, что изображающая точка, определяющая состояние нелинейного резистора, скачком переходит на несмежный участок характеристики с положительным наклоном, минуя участок отрицательного сопротивления. Этим доказывается, что поведение цепей с нелинейными резисторами или при кусочно-линейной и гладкой характеристиках качественно совпадают.

В заключительной части § 2 получены условия скачков для цепи с несколькими нелинейными элементами. Эти условия могут оказаться полезными при анализе процессов в цепях, в которых переход изображающей точки с одного участка характеристики нелинейного элемента на другой, приводит к скачкам переменных, характеризующих состояние второго нелинейного элемента.

Последующие параграфы этой главы посвящены применению метода припасовывания к анализу конкретных нелинейных устройств. Примеры, отобранные для этой главы, относятся к тем схемам, в которых наличие нелинейного элемента приводит к новым качественным особенностям, а целью исследования является выяснение основных свойств, которые не удается получить при использовании результатов, качественной теории, рассматривавшейся в гл. I.

В § 3 на основе метода припасовывания изучаются возможные установившиеся режимы в цепи, содержащей нелинейный резистор с немонотонной характеристикой. Рассмотрение ограничивается случаем, когда в цепи содержится два реактивных элемента. При этом уравнение цепи имеет вид:

$$\frac{d^2 i}{dt^2} + \frac{a_1 + b_1 u'(i) + b_0 u''(i)\frac{di}{dt}}{a_0 + b_0 u'(i)} \cdot \frac{di}{dt} + \frac{Ri + u(i)}{a_0 + b_0 u'(i)} = 0, \qquad (8)$$

где $u(i)$ – уравнение вольтамперной характеристики нелинейного резистора; a_i и b_i коэффициенты в соотношении, определяющем операторное сопротивление линейной части

$$Z(p) = \frac{a_0 p^2 + a_1 p + R}{b_0 p^2 + b_1 p + 1} .$$

В зависимости от соотношения между параметрами линейной части возможны следующие случаи, которым соответствуют различные виды установившихся режимов:

Непрерывные движения в системе:

а) $a_0 - b_0 \rho > 0$; $a_1 - b_1 \rho > 0$; $R > \rho$,

б) $a_0 - b_0 \rho > 0$; $a_1 - b_1 \rho > 0$; $R < \rho$,

в) $a_0 - b_0 \rho > 0$; $a_1 - b_1 \rho < 0$; $R > \rho$,

г) $a_0 - b_0 \rho > 0$; $a_1 - b_1 \rho < 0$; $R < \rho$,

где ρ абсолютная величина отрицательного сопротивления на падающем участке вольтамперной характеристики при кусочно-линейной аппроксимации последней. Если первое неравенство заменить на $a_0 - b_0 \rho < 0$, то получающиеся четыре случая соответствуют разрывным движениям.

В случае а), исходя из условий конвергенции, приведенных в главе 1 (§3), устанавливается единственность установившегося режима, который является положением равновесия. Причем это заключение справедливо для произвольной формы вольтамперной характеристики, при условии, что для всех точек падающего участка характеристики соблюдается условие $R > \rho$.

В случае б) суждение о характере движений может быть также сделано для произвольной формы нелинейной характеристики. Исполь-

зуя критерий Дюлака, можно показать, что периодические движения в этом случае отсутствуют. Поэтому все возможные периодические режимы ограничиваются тремя положениями равновесия, два из которых устойчивы, а одно, соответствующее падающему участку, неустойчиво.

Для случая в) уже трудно установить в общем виде количество и возможные типы установившихся режимов. Только при симметрии характеристики относительно положения равновесия на падающем участке и единственной точке перегиба на этом участке, используя результаты Льенара, показано, что в системе возможен единственный периодический режим.

В случае г) суждение о поведении цепи при вольтамперной характеристике произвольной формы оказывается еще труднее, и до сих пор какие-либо результаты общего характера не получены.

Поэтому применение кусочно-линейной аппроксимации для выяснения характера движений в тех случаях, когда общие методы теории колебаний оказываются малоэффективными, представляет интерес. Проведенный анализ (с И.Н.Лисицкой) показал, что в случае г) наряду с существованием двух положений равновесия возможен устойчивый предельный цикл. Этот результат получил затем экспериментальное подтверждение.

Исследование режимов при разрывных движениях позволило установить, что для рассматриваемого класса цепей существенного различия в виде и числе установившихся режимов по сравнению с непрерывными режимами не наблюдается.

Параграф четвертый посвящен изучению вынужденных колебаний в последовательном феррорезонансном контуре. Задача рассматривалась в предположении идеальной кривой намагничивания сердечника нелинейной индуктивности. Напряжение питания принималось прямоугольной формы. Указанные предпосылки позволили упростить расчетные соотношения, благодаря чему оказалось возможным достаточно полно изучить различные типы установившихся режимов. В частности была показана возможность существования симметричных устойчивых субгармонических колебаний сколь угодно высокого порядка (нечетного). Однако по мере повышения порядка область параметров, при которых возможен данный тип субгармонических колебаний, резко сужается. При этом колебаниям высокого порядка соответствует меньший уровень допустимых потерь в контуре и меньшие значения напряжения возбуждения.

Наряду с симметричными колебаниями было проведено исследование возможных видов несимметричных колебаний при тех же предпосылках. В частности, как было показано в гл. I, четные субгармонические колебания могут быть только несимметричными. Показано, что в принципе возможно существование несимметричных субгармонических колебаний высокого порядка. Однако области параметров, при которых они возможны, весьма малы, за исключением субгармонических колебаний второго порядка.

При изучении возможных типов колебаний в феррорезонансном контуре основное внимание было обращено на зависимость возможных режимов от значений параметров схемы. Задача о выделении областей притяжения в пространстве начальных условий, соответствующих тому или иному режиму, не ставилась.

Определение областей притяжения в пространстве начальных условий при использовании метода припасовывания иллюстрируется на примере анализа трехстабильного параметрона. Эти результаты изложены в § 5. Прежде всего показано, что в параметроне на магнитных элементах при возбуждении заданным током возможно существование четных субгармонических колебаний сколь угодно высокого порядка. Другие типы режимов отсутствуют, за исключением устойчивого положения равновесия. Построены области притяжения установившихся режимов в плоскости начальных условий для субгармонических колебаний второго и четвертого порядков.

<u>Глава третья</u> „Анализ нелинейных электронных цепей на ЦВМ" посвящена исследованию численных методов анализа нелинейных цепей в установившемся режиме.

Рассмотрена задача об установлении качественного соответствия между поведением исследуемой цепи и ее математической моделью, применяемой при численном анализе.

Для линейной цепи с постоянными или периодически изменяющимися параметрами вопрос о качественном соответствии сводится к исследованию устойчивости положения равновесия в отсутствие внешних воздействий. Предлагается говорить о том, что исходная цепь и ее дискретная модель находятся в качественном соответствии, если положения равновесия для них одновременно устойчивы (неустойчивы).

Для линейной цепи с постоянными параметрами, описываемой уравнением

$$\frac{dx}{dt} = Ax, \qquad (10)$$

при использовании одношагового метода численного интегрирования (Рунге – Кутта, разложения в ряд матричной функции e^{At} и др.) вопрос о качественном соответствии задачи и модели имеет исчерпывающее решение . Нарушение качественного соответствия наступает при шаге интегрирования $h_к$, величина которого определяется

„наихудшим" собственным числом матрицы λ. Для метода Рунге-Кутта определение наихудшего характеристического числа производится по известным из литературы диаграммам.

В диссертации получены аналогичные соотношения для многошаговых методов, широко применяющихся при расчете цепей на ЦВМ. В частности, для метода прогноза и коррекции значения h_κ определяются из условия, что уравнение вида:

$$z^2-\left(1+\frac{h_\kappa\lambda}{2}+h_\kappa^2\lambda^2\right)z-\frac{h_\kappa\lambda}{2}=0 \qquad (11)$$

имеет один из корней на окружности $|z| = 1$, где λ – „наихудшее" собственное число матрицы A, т.е. такое, при котором h_κ имеет минимальное значение.

Обращено внимание на то, что в случае чисто мнимых характеристических чисел матрицы A качественное соответствие невозможно ни при одном значении шага h, в то время как наличие нулевых характеристических чисел не приводит к какому-либо изменению условий качественного соответствия, приведенных выше.

Показано, что для линейных систем при наличии внешнего воздействия, независимо от характера последнего, условия качественного соответствия определяются соответствующей автономной системой.

Далее рассмотрена задача о качественном соответствии для линейных систем с переменными параметрами:

$$\frac{dx}{dt}=A(t)x \qquad (10a)$$

При исследовании одношаговых алгоритмов для решения линейных уравнений с переменными параметрами расчетные соотношения

имеют вид линейного разностного уравнения:

$$x^{(m+1)}=\tilde{\mathcal{F}}(m)x^{(m)},$$

где $x^{(m+1)}$, $x^{(m)}$ – значения переменных в точках $t=(m+1)h$ и mh соответственно, $\tilde{\mathcal{F}}(m)$ – квадратная матрица размера n, периодическая по дискретному времени m с периодом $N=\frac{T}{h}$ (предполагается, что шаг h выбирается кратным периоду T).

Тогда приближенное значение фундаментальной матрицы решений при $t=T$ определяется соотношением

$$\tilde{\mathcal{F}}_N=\prod_{m=1}^{N-1}\tilde{\mathcal{F}}(m), \text{ где } N=\frac{T}{h}. \qquad (12)$$

Исходя из (12), устанавливается достаточное условие качественного соответствия для устойчивых систем с периодическими параметрами:

$$\|\tilde{\mathcal{F}}(m)\|<1. \qquad (13)$$

В случае спектральной нормы для симметрической матрицы $\tilde{\mathcal{F}}$ условие (13) означает, что все собственные числа $\tilde{\mathcal{F}}(m)$ должны по абсолютной величине быть меньше единицы.

Для метода Эйлера

$$\tilde{\mathcal{F}}(m)=E+hA(mh)$$

(E – единичная матрица) в соответствии с (13) достаточное условие качественного соответствия принимает вид

$$h|\lambda|_{cp.}<2 \quad \text{или} \quad h_\kappa \geqslant \frac{2}{|\lambda_{cp.}|}, \qquad (14)$$

где $|\lambda_{cp}|$ среднее значение наибольшего из собственных чисел $A(t)$ на интервале $(0,T)$.

Следует иметь в виду, что соотношение (14) применимо только для систем с симметрической матрицей $A(t)$. Подобное совпадение условий качественного соответствия для систем с переменными и постоянными параметрами является скорее исключением, чем правилом. При других численных алгоритмах или при несимметричной матрице установление аналогии между этими двумя классами систем в отношении качественного соответствия затруднительно.

Между тем, симметрическая матрица $A(t)$ при анализе [illegible] – явление редкое. Поэтому необходимо установление критериев более эффективных, чем (13). С этой целью используется известное представление [illegible] фундаментальной матрицы решений в виде

$$X(t) = \Phi(t) e^{Bt},$$

где $\Phi(t)$ квадратная T-периодическая матрица размера n, причем $\Phi(0)=E$; B – квадратная постоянная матрица размера n.

При замене $x(t)=\Phi(t)y$ система (11а) сводится к уравнению с постоянными параметрами

$$\frac{dy}{dt} = By. \qquad (15)$$

Показано, что применение метода Эйлера для интегрирования эквивалентно численному решению (15) с помощью соотношения

$$y^{(m+1)} = \left[E + hB + h^2 D(t)\right] y^{(m)}, \qquad (16)$$

где $D(t)$ некоторая T-периодическая квадратная матрица. Вследствие того, что последнее слагаемое имеет порядок малости h^2 можно полагать, что качественное соответствие, по крайней

мере, в некоторых случаях, определяется собственными значениями матрицы B, т.е. есть характеристическими числами системы с периодическими параметрами.

Это имеет место, если h_{kr}, найденное исходя из наибольшего собственного числа матрицы B, таково, что влияние [illegible] слагаемых в (16) при $h < h_{kr}$ невелико.

Структура матрицы $D(t)$ такова, что ее влияние в (16) тем больше, чем больше гармонических составляющих элементов матрицы $\Phi(t)$.

Если характер изменения элементов $\Phi(t)$ близок к гармоническому, то при шаге h меньшем, чем $\frac{T}{4} \div \frac{T}{8}$, роль слагаемого $h^2 D(t)$ весьма невелика.

При необходимости считаться с гармониками, приведенное соображение остается справедливым, если шаг T [illegible] гармоники, существенно влияющей на элементы матрицы $\Phi(t)$. Тогда, если значение h_{kr} по [illegible] собственных чисел матрицы B приводит к величине меньшей $\frac{T}{8\nu}$, где ν – номер [illegible] гармоники $\Phi(t)$, то это значение [illegible]. В [illegible] h_{kr} [illegible] $\Phi(t)$, можно только утверждать, что h_{kr} [illegible] $\frac{T}{8\nu}$. [illegible] h_{kr} [illegible].

[illegible]

Установление условий качественного соответствия для всего [illegible] пространства в случае нелинейных систем, задача трудная и не всегда имеющая решение. Если рассматривать [illegible] ритмы с постоянной величиной шага, то нетрудно показать, что качественное соответствие не может быть соблюдено для всего фазового пространства даже при исследовании простейших нелинейных цепей.

В качестве примера приводится последовательная r-L -цепь с нелинейным резистором, вольтамперная характеристика которого описывается соотношением

$$u = ri + ci^3.$$

При расчете нелинейных цепей с переменным шагом h для оценки его значения обычно рекомендуется ориентироваться на собственные значения матрицы Якоби правых частей уравнений состояния. Строгое обоснование этого положения отсутствует. Приводятся результаты численного эксперимента с уравнением Ван-дер-Поля, свидетельствующие, что оценка подобного типа весьма приближенна. Так, истинное значение критического шага для уравнения Ван-дер-Поля (метод Рунге-Кутта четвертого порядка) в 1,7 ÷ 3,5 раза меньше, чем то, которое получается исходя из значений собственных чисел матрицы Якоби. На ряде примеров показано, что подобный подход должен приниматься с большой осторожностью также и при оценке погрешности расчета численными методами.

В § 2 рассматривалась оценка степени сложности решения задачи по нахождению установившегося режима при использовании числовых методов. Предполагается, что установившийся режим определяется в результате решения задачи Коши для уравнений состояния цепи при произвольном выборе начальных условий. Если длительность переходного процесса в системе велика, то такой путь может привести к большой трудоемкости расчета. Вопрос о трудоемкости

естественно связывается с погрешностью расчета и влиянием на нее параметров вычислительного процесса и применяемого метода.

При оценке погрешности расчета на одном шаге прежде всего рассмотрены линейные системы с постоянными параметрами. Показано, что в отличие от результатов предыдущего параграфа, в котором было показано, что критическое значение шага для системы с внешним воздействием, определяется только свойствами автономной системы, расчетный шаг может существенно зависеть от характера внешних воздействий.

Величину расчетного шага для линейной системы с переменными параметрами рекомендуется выбирать основываясь на соотношении:

$$h = \min\left(\alpha_1 h_к\ ,\ \alpha_2 T_{min}\right), \qquad (17)$$

где α_1, α_2 некоторые постоянные, зависящие от применяемого метода и необходимой точности. Так, для метода Рунге-Кутта четвертого порядка при погрешности расчета $\sim 0{,}1\%$

$$\alpha_1 = 0{,}2\ ,\ \alpha_2 = 0{,}15\ ,$$

T_{min} – период наивысшей гармоники внешнего воздействия. Таким образом, если критическое значение шага $h_к$ меньше, чем T_{min}, то возможно при расчете неавтономной системы использовать то же значение шага, что и автономной. При несоблюдении этого условия величина шага определяется характером внешнего воздействия.

Для линейных параметрических систем соотношение (17) сохраняется. Достаточно строгое обоснование этого положения в общем виде получить трудно, однако численные эксперименты для ряда характерных задач и эвристические рассуждения подтверждают его.

В соответствии с изложенным, трудоемкость задачи расчета цепи в значительной степени определяется наименьшей постоянной времени и наивысшей собственной частотой изучаемой цепи, так как именно они обусловливают значение шага меньшее, чем необходимо, исходя из требуемой формы представления результата расчета. Поэтому разумная идеализация цепи, позволяющая устранить малые постоянные времени без ущерба для правильности постановки задачи, всегда желательна. Для этого необходимо учеть оценить наименьшую постоянную времени и наивысшую собственную частоту на первом этапе рассмотрения цепи еще до составления дифференциальных уравнений.

Приведенное решение задачи основывается на предположении о том, что можно выделить в цепи реактивный элемент, который мал по сравнению с другими. Тогда при оценке наименьшей постоянной времени цепи или наивысшей собственной частоты, допустимо считать все емкосные ветви закороченными, а индуктивные - разорванными, за исключением тех, в которых находятся малые реактивные параметры.

Искомые величины находятся исходя из расчета цепи невысокого порядка. В частности наименьшая постоянная времени цепи может быть представлена в виде

$$\tau_{min} = Z(j\infty)\,C \quad \text{или} \quad \tau_{min} = \frac{L}{Z(j\infty)} .$$

Первое соотношение относится к случаю, когда малый параметр - емкость, второе - индуктивность; $Z(j\infty)$ сопротивление схемы со стороны малого реактивного элемента при $\omega \to \infty$.

Если малый реактивный элемент приводит к повышению степени характеристического уравнения на два, по сравнению с цепью, в которой им пренебрегают, то для этой цепи характерно наличие пары комплексно сопряженных собственных чисел с большой мнимой частью. Наивысшая собственная частота подобной цепи определяется соотношением

$$\omega_{max} = \frac{1}{\sqrt{LC}} ,$$

где $L(C)$ - индуктивность (емкость) малого реактивного элемента, а $C(L)$ - емкость (индуктивность) элемента (не обязательно малая), шунтирующая остальную часть цепи.

Если в цепи невозможно выделить малый реактивный элемент, то для оценки наибольшей вещественной части собственного числа матрицы А получено соотношение

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\tau_k^*} \le |Re\lambda|_{max} < \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\tau_k^*} ,$$

где τ_k^* - парциальные постоянные времени цепи, то есть постоянные времени цепи первого порядка, полученные из исходной закорачиванием всех емкостных ветвей и разрывом индуктивных, за исключением ветви, содержащей к-тый реактивный элемент.

Приведенные выше оценки наименьшей постоянной времени цепи переносятся на цепи с периодически изменяющимися параметрами. Однако, для этого класса цепей несколько труднее оценить максимальное значение мнимой части собственных чисел.

Подробное рассмотрение трудоемкости расчета линейных систем обусловлено возможностью перенесения полученных результатов на нелинейные системы. Это прежде всего оказывается возможным при рассмотрении заключительного этапа расчета, когда значения переменных близки к соответствующим установившемуся режиму, и, следовательно, возможна линеаризация исходных соотношений на всем последующем интервале времени. Однако, получившая некоторое распространение точка зрения о том, что погрешность расчета нелинейной системы определяется свойствами линеаризованной системы в окрестности данной точки, вообще говоря, неверна. Приводятся элементарные примеры, опровергающие такой подход. Только, когда расчетный шаг таков, что на интервале длительностью h линеаризация исходной нелинейной системы допустима, можно говорить о равенстве погрешностей при использовании численного алгоритма применительно к этим двум системам.

Затем рассматриваются алгоритмы, позволяющие установить окончание переходного процесса и наступление установившегося режима, при поиске последнего путем решения задачи Коши. Наиболее просто установить алгоритм, когда рассматривается система с периодическим внешним воздействием, а установившийся режим тоже периодический (в частном случае положение равновесия).

Тогда, принимая во внимание, что в установившемся режиме переменные состояния удовлетворяют соотношению

$$x(t_0 + kT) = x(t_0),$$

где kT - период установившегося режима (то есть не исключается возможность, что имеют место субгармонические колебания). Нетрудно заметить, что алгоритм окончания переходного процесса должен основываться на проверке выполнения неравенства:

$$\| x(t_0 + t) - x(t_0) \| < \varepsilon \qquad (18)$$

через определенные промежутки времени, кратные T. При этом наибольшую трудность представляет разумный выбор величины ε. Показано, что величина ε не может быть правильно выбрана, если не учитываются характеристики переходного процесса. Принимая во внимание, что на заключительной стадии переходного процесса до-

пустима линеаризация соотношений, получено уравнение для погрешности вычисления начальных условий периодического режима Δ за счет неточной оценки окончания переходного процесса ξ и погрешности интегрирования на одном периоде η. Это уравнение имеет вид

$$(J - E)\Delta = -(\xi + \eta), \qquad (19)$$

где J матрица размера $n \times n$, определяющая точечное преобразование $x(t_0) \rightarrow x(t_0 + kT)$, E - единичная матрица. Очевидно, J совпадает с матрицей монодромии системы уравнений, линеаризованных в окрестности периодического режима.

Из (19) следует, что

$$\| \Delta \| \leq \| (J - E)^{-1} \| \left(\| \xi \| + \| \eta \| \right). \qquad (20)$$

Соотношение (20) показывает, что погрешности расчета на одном периоде η и неточность в оценке окончания переходного процесса ξ одинаково влияют на значение погрешности установившегося режима. Причем это влияние тем сильнее, чем больше норма матрицы $\|(J-E)^{-1}\|$. Резкое возрастание последней величины обычно имеет место, когда одно из собственных чисел матрицы J приближается к единице, что означает наличие характеристического показателя линеаризованной системы с малой вещественной частью. Таким образом, резкое возрастание погрешности Δ по сравнению с η и ξ может иметь место в системах, в которых длительность установления переходного процесса намного превышает период установившихся колебаний. Отсюда вытекает вывод о том, что допустимые значения $\|\eta\|$ и $\|\xi\|$ не могут быть выбраны заранее, их определение должно производиться на основе изучения характера переходного процесса при решении задачи. Предложен простой алгоритм для выбора допустимых значений $\|\eta\|$ и $\|\xi\|$.

Построение алгоритма окончания переходного процесса затрудняется для автоколебательных систем, так как в этом случае заранее неизвестен период колебаний; поэтому непосредственное применение неравенства (I8) оказывается невозможным. Это препятствие преодолевается путем замены (I8) на соотношение вида

$$\| x_{-1}^{(m+1)} - x_{-1}^{(m)} \| < \varepsilon ,$$

где x_{-1} вектор, полученный из x путем исключения составляющей x_1, а значения $x_{-1}^{(m+1)}$ и $x_{-1}^{(m)}$ соответствуют моменту времени, для которого $x_1 = 0$ и $\frac{dx_1}{dt} > 0$. Подобная методика проверена на практике при поиске периодического решения уравнения Ван-дер-Поля.

Далее, рассматривается задача об отыскании установившихся режимов в том случае, когда последние представляют собой квазипериодические колебания. Установление в общем случае критерия окончания переходного процесса, когда в системе имеют место квазипериодические колебания, наталкивается на серьезные трудности, главным образом, вычислительного порядка. Только для колебаний близких к амплитудно модулированным с частотой огибающей, малой по сравнению с частотой несущей, получен необходимый критерий.

Параграф 4 посвящен сопоставлению эффективности двух методов поиска установившихся режимов: первый - рассматривавшийся выше расчет через переходный процесс, второй - непосредственного отыскания периодического режима по методу точек Г.Е.Пухова. Как известно, расчет по методу точек приводит к решению системы трансцендентных уравнений, в которой в качестве неизвестных выступают точечные изображения переменных на нелинейных элементах. При

расчете цепи с одним нелинейным элементом количество неизвестных систем трансцендентных уравнений равно числу точек на периоде (или полупериоде в случае симметричных колебаний). При увеличении количества нелинейных элементов число неизвестных пропорционально увеличивается. Поэтому метод точек оказывается наиболее эффективным в случае цепей с одним нелинейным элементом и сложной линейной частью.

При сравнении эффективности упомянутых методов делалось предположение, что решение трансцендентных уравнений производится методом простой итерации (условия сходимости метода итерации в этом случае приведены в диссертации).

Показано, что метод точек позволяет значительно снизить трудоемкость переходного процесса, если отношения $\frac{p}{a}$ и $\frac{m}{b}$ меньше единицы, где p - число итераций при решении уравнений метода точек; a - длительность переходного процесса в исследуемой системе в единицах периода установившегося режима; m - номер наивысшей гармоники, учитываемой в методе точек; b - количество операций, требуемых для вычисления правой части уравнений состояния.

Расчет R - L цепи с нелинейной индуктивностью методом точек, выполненный на ЦВМ, подтвердил полученные соотношения и показал эффективность метода точек для решения подобного класса задач. Трудоемкость метода точек для той области параметров, в которой имеет место сходимость метода простой итерации, оказалась примерно в 8-I0 раз меньше, чем метода расчета через переходной процесс. Интересно отметить, что сходимость процесса практически не зависела от числа учитываемых гармоник. (При решении упомянутой задачи оно изменялось от четырех до шестидесяти). В дальнейшем было получено теоретическое обоснование этого факта.

Показано, что уравнение метода точек при расчете цепи с одним нелинейным резистором сводятся к виду

$$\vec{u} = -B\vec{i}(\vec{u}) + \vec{u}_e , \qquad (21)$$

где $\vec{u}, \vec{i}$ - точечные изображения напряжения и тока на нелинейном резисторе; B - определенно положительная матрица размера n ; $\vec{u}_e$ - точечное изображение внешнего воздействия. При монотонной характеристике $i(u)$ уравнение (21) удовлетворяет условию теоремы Сандберга и, следовательно, имеет единственное решение. Этот факт может быть интерпретирован, как сохранение свойства конвергентности при переходе от исходной непрерывной системы к дискретной.

Итак, несмотря на возможность применения методов непосредственного отыскания установившихся режимов для решения некоторых классов цепей, эти методы не могут претендовать на универсальность. Поэтому совершенствование способов определения установившихся режимов путем решения задачи Коши для уравнений состояния крайне необходимо.

В параграфе 5 рассматривается один из возможных путей, позволяющий существенно снизить трудоемкость расчета в системах с большой длительностью переходного процесса. Это достигается за счет применения экстраполяционных формул, определяющих значение начальных условий,соответствующих периодическому режиму.

Построение экстраполяционных формул основывается на процедуре Эйткена-Стеффенсена, применяемой для ускорения итерационных процессов. Для построения экстраполяционных соотношений в системе, описываемой уравнением n -го порядка, требуется выполнить интегрирование на интервале длительностью $(n+1)T$,

где T - период внешнего воздействия. Используя значения переменных $x(kT)$ $k = 0, 1, \dots, n-1$

$$z^{(k)} = x(kT) ,$$

вычисляются приращения $\Delta z^{(k)} = z^{(k+1)} - z^{(k)}$ и затем вычисляется матрица

$$\tilde{F} = Z_\omega Z_\alpha^{-1} ,$$

где

$$Z_\omega = \left(\Delta z^{(n)}, \dots , \Delta z^{(1)}\right) ,$$

$$Z_\alpha = \left(\Delta z^{(n-1)}, \dots , \Delta z^{(0)}\right) ,$$

то есть столбцами матриц Z_ω и Z_α служат векторы $\Delta z^{(k)}$. Матрица $\tilde{F}$ является приближением фундаментальной матрицы решений для линеаризованных уравнений, описывающих заключительную часть переходного процесса. Определив $\tilde{F}$, можно найти приближенное значение начальных условий, соответствующих периодическому режиму

$$\bar{x} = \left(E - \tilde{F}\right)^{-1}\left(z^{(k)} - F z^{(k-1)}\right) , \qquad (25)$$

где в качестве $z^{(k-1)}$ и $z^{(k)}$ принимаются два произвольных последовательных вектора из совокупности $z_1, \dots, z^{(n+1)}$. Для линейных, в том числе и параметрических цепей, подобная методика обоснована совершенно строго. Поэтому установившийся режим в линейной цепи всегда может быть определен в результате расчета переходного процесса на отрезке длительностью $(n+1)T$. Для нелинейной цепи экстраполяция может быть обоснована только для заключительной части переходного процесса.

Тем не менее, применение этой методики на начальной стадии переходного процесса нелинейной цепи, хотя и не может быть строго обосновано, позволяет также значительно сократить трудоемкость расчета.

Описанная экстраполяция применялась для нахождения периодических режимов в нелинейной R – L цепи и нелинейном колебательном контуре при периодических внешних воздействиях. Была показана ее эффективность (объем расчета уменьшался в 3 ÷ 10 раз), несмотря на резко выраженную нелинейность. При этом применение экстраполяционных формул оказывалось целесообразным спустя 5 ÷ 10 периодов внешней эдс, хотя длительность переходного процесса составляла несколько десятков и даже сотен периодов.

ОСНОВНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ РАБОТЫ

1. Изучена структура правых частей уравнений состояния нелинейных электрических цепей в зависимости от свойств элементов цепи и ее топологических особенностей.
2. На основе второго метода Ляпунова и установленной структуры уравнений состояния выделены обширные классы цепей, удовлетворяющие условиям диссипативности.
3. Произведено сопоставление критериев конвергентности, установленных на основе энергетических соотношений, с критериями, основывающимися на результатах качественной теории дифференциальных уравнений. Показана их эквивалентность при решении характерных задач теории цепей.
4. Установлены особенности периодических режимов в нелинейных цепях с симметричными нелинейностями. Систематизированы сведения о возможных типах неустановившихся режимов.
5. Изучено поведение нелинейных цепей с кусочно-линейными характеристиками. На основе условий скачков рассмотрено поведение нелинейной цепи в окрестности точки перехода с одного линейного участка на другой. Приведена матричная форма уравнений скачков и дано их обобщение на цепи с несколькими нелинейными элементами.
6. На основе метода припасовывания исследованы возможные установившиеся режимы для ряда неконвергентных цепей: схем с нелинейными резисторами с немонотонными характеристиками, нелинейных колебательных контуров, дифференциально-трансформаторных схем с емкостной нагрузкой.

   Для двух последних типов цепей показана принципиальная возможность существования субгармонических колебаний сколь угодно высокого порядка. Выделены области существования субгармонических колебаний различных порядков в пространстве параметров цепи, а также в пространстве начальных условий.
7. Введено понятие о качественном соответствии численного алгоритма исходной модели цепи. Исследовано качественное соответствие различных численных алгоритмов при анализе линейных цепей с постоянными параметрами и параметрических цепей. Показано, что для большинства нелинейных цепей возможно только локальное качественное соответствие, ввиду нарушения этого свойства при возрастании начальных отклонений.
8. Для установления степени сложности задачи при расчете цепи численными методами получены соотношения, определяющие погреш-

ность расчета установившегося режима.

Разработаны приемы для оценки минимальной постоянной времени цепи и наивысшей собственной из частот, не требующие проведения сложных вычислений.

9. Предложены алгоритмы для определения окончания переходного процесса, необходимые при поиске установившихся режимов через переходный процесс. Эти алгоритмы могут использоваться при расчете периодических, а также квазипериодических режимов в автономных и неавтономных цепях. Произведена оценка погрешности расчета, обусловленная погрешностью расчета на одном периоде и неточностью определения конца переходного процесса.

10. Произведено сравнение эффективности поиска периодических режимов при помощи метода точек и путем поиска через переходный процесс. Показано, что при сходимости метода простой итерации при решении систем уравнений, полученных по методу точек, последний метод оказывается весьма эффективным. Выведены условия, когда действительно имеет место сходимость метода итераций для цепи с одним нелинейным элементом. Полученные условия обеспечивают сходимость в целом, то есть независимо от выбора начальных значений искомого вектора; кроме того выполнение указанных условий обеспечивает сходимость независимо от числа точек на периоде.

11. На основе процедуры Эйткена-Стеффенсена разработан метод ускорения расчета периодического режима при поиске его через переходный процесс. Показано, что дополнительные операции, необходимые для составления экстраполяционных формул, обычно составляют незначительную часть от сэкономленных операций благодаря применению указанного приема.

12. Основные результаты работы были получены в процессе разработки ряда устройств измерительной техники и автоматики, выполнявшихся по договорам с НПО „Термоприбор" и Научно-исследовательским институтом производственно-технического объединения имени В.И.Ленина г. Львова.

Основные результаты диссертационной работы докладывались на Международных конференциях по теории нелинейных колебаний (Варшава, 1962; Берлин, 1964; Киев, 1969), на Всесоюзных конференциях по методу анализа нелинейных цепей (Ташкент, 1962; 1965; 1967), на Всесоюзных совещаниях по магнитным элементам (1963, 1964, 1966), на республиканских конференциях по методам анализа электрических цепей (1967, 1969 г. Львов), на семинарах по расчету нелинейных цепей на ЭВМ (Москва, 1968; Ереван, 1969), и опубликованы в трех монографиях и статьях диссертанта:

1. Л.А.Синицкий. Некоторые вопросы расчета и применения нелинейных цепей в измерительной технике. Автореферат диссертации кандидатской, Львовский политехнический институт, 1954.
2. Л.А.Синицкий, К.Б.Карандеев. Расчет переходных процессов в цепях постоянного тока с условно нелинейными элементами. Доклады Львовского политехнического института, 1955.
3. Л.А.Синицкий, К.Б.Карандеев. Об одном методе расчета переходных процессов в цепях, содержащих условно нелинейные элементы. Автоматика и телемеханика, № 5, 1955.
4. В.П.Сигорский, Л.А.Синицкий. Расчет электрических цепей с выпрямителями. „Электричество", № 4, 1956.
5. В.П.Сигорський, Л.А.Синицький, Б.М.Пушков. Визначення моментів перемикання випростувачів в електричній схемі n-го порядку. Доповіді АН УРСР, № 11, 1958.
6. Л.А.Синицкий, К.Б.Карандеев. К вопросу об избирательности выпрямительных измерителей. „Автоматика и телемеханика", № 3, 1958.

7. В.П.Сигорский, Л.А.Синицкий. Определение постоянных составляющих токов и напряжений в цепях с выпрямителями. „Электричество", № I, 1959.
8. Л.А.Синицкий. К расчету схем двухполупериодного выпрямления. „Электричество", № I, 1960.
9. Л.А.Синицкий, Ю.М.Шумков. Расчет погрешности измерительных трансформаторов постоянного тока. „Вестник электропромышленности", № I, 1960.
IO. Е.Н.Курилов, Л.А.Синицкий. Частотная погрешность выпрямительных схем с разделительной емкостью. „Измерительная техника", № 9, 1960.
II. Л.А.Синицкий, Ю.М.Шумков. Расчет установившихся режимов в цепях с периодически скачкообразно изменяющимися параметрами. Труды Всесоюзной межвузовской конференции по теории и методам расчета нелинейных электрических цепей. Ташкент, 1960.
I2. Л.А.Синицкий. О периодическом режиме электрической цепи, содержащей нелинейные сопротивления. Сб. „Автоматический контроль и измерительная техника", № 4, 1960. Издат. АН УССР, Киев.
I3. Л.А.Синицкий, Ю.М.Шумков. О рациональной аппроксимации вольтамперной характеристики полупроводникового диода. „Радиотехника", № I2, 1960.
I4. Л.А.Синицкий. Расчет дифференциальных выпрямительных схем. „Измерительная техника", № 7, 196I.
I5. Л.А.Синицкий, Ю.М.Шумков. Деякі якісні особливості нелінійних кіл з кусково-лінійною характеристикою нелінійного елемента. „Автоматика", № 6, 196I.
I6. Л.А.Синицкий, Ю.М.Шумков. Динамические свойства синхронного детектора. „Автоматика и телемеханика", № I, 1962.
I7. Л.А.Синицкий. Применение теории цепей с переменными параметрами к расчету магнитных модуляторов с выходом на удвоенной частоте. Сб. „Автоматический контроль и измерительная техника", № 6, 1962. Изд. АН УССР, Киев.

I8. Л.А.Синицкий, Ю.М.Шумков. Динамические свойства синхронного детектора со сложной нагрузкой. Сб. „Автоматический контроль и измерительная техника" № 6, 1962, Издат. АН УССР, Киев.
I9. Л.А.Синицкий, Р.Я.Беркман. О максимальном коэффициенте усиления магнитного модулятора с выходом на удвоенной частоте. „Автоматика и телемеханика", № IO, 1962.
20. Л.А.Синицкий, В.А.Школьный. О стабильности частоты полупроводникового генератора прямоугольного напряжения. „Радиотехника и электроника", № I, 1963.
2I. Е.Н.Курилов, Л.А.Синицкий. Частотные зависимости выпрямительных схем. Изд. АН УССР, Киев, 1963. (6 п.л.).
22. Л.А.Синицкий, Ю.М.Шумков. О режимах работы схем двухполу… ного выпрямления. Сб. „Автоматический контроль и изме… тельная техника", № 7, 1963. Изд. АН УССР, Киев.
23. Н.С.Пилипенко, Л.А.Синицкий. Переходные характеристики фазового детектора второй гармоники. „Автоматика и телемеханика", № 7, 1963.
24. И.Н.Лисицкая, Л.А.Синицкий. Исследование генераторов с отрицательным сопротивлением. Изд. ВУЗ"ов „Радиофизика",№ 3, 1963.
25. И.Н.Лисицкая, Л.А.Синицкий. О возможности существования скользящих режимов в электрических цепях с нелинейными сопротивлениями. Сб. „Автоматический контроль и измерительная техника",№ 7, 1962. Изд. АН УССР, Киев.
26. Л.А.Синицкий. Динамические свойства модуляторов. „Автоматика и телемеханика", № I2, 1963.
27. Л.А.Синицкий. Устойчивость систем регулирования с переменными периодически изменяющимися параметрами. Труды Казанской конференции по аналитической механике и прикладной теории устойчивости. Казань, 1963.
28. Л.А.Синицкий. Об энергетических соотношениях в цепях, содержащих нелинейный реактивный элемент. Сб. „Автоматический контроль и измерительная техника", № 8, 1964. Издат. АН УССР, Киев.

29. И.Н.Лисицкая, Л.А.Синицкий. Анализ генераторных схем на элементах с отрицательными сопротивлениями. Труды Второй Всесоюзной межвузовской конференции по теории и методам расчета нелинейных электрических цепей. 1963, Ташкент.
30. И.Н.Лисицкая, Л.А.Синицкий. Расчет быстродействия схем на туннельных диодах. Труды Второй Всесоюзной межвузовской конференции по теории и методам расчета нелинейных электрических цепей. 1963, Ташкент.
31. И.Н.Лисицкая, Л.А.Синицкий. Анализ триггерных схем на туннельных диодах. „Радиотехника", № 12, 1964.
32. Л.А.Синицкий. Применение теории цепей с переменными параметрами к анализу некоторых нелинейных схем. Second Conferense on Nonlinear Vibrations, Warszawa, 1964.
33. Л.А.Синицкий (ред). Измерительные преобразователи постоянного тока. „Наукова думка", 1965, Киев.
34. Л.А.Синицкий. О работе параметрона в режиме заданного тока возбуждения. Изд. ВУЗ"ов „Радиофизика", № 2, 1965.
35. Л.А.Синицкий. Анализ систем с модуляцией при негармонической форме несущей. „Автоматика и телемеханика", № 7, 1965.
36. Л.А.Синицкий, Ю.М.Шумков. Анализ работы магнитных усилителей с самонасыщением при активно-емкостной нагрузке. „Электричество", № 11, 1965.
37. Л.А.Синицкий, Ю.М.Шумков. О единственности периодического режима в нелинейных электрических цепях. III Konferenz über Nichtlineare Schwingungen, Berlin, 1966.
38. И.Н.Лисицкая, Л.А.Синицкий. Исследование периодических режимов в автономных цепях с нелинейными отрицательными сопротивлениями. III Konferenz über Nichtlineare Schwingungen, Berlin, 1966.
39. И.Н.Лисицкая, Л.А.Синицкий. Исследование периодических режимов в автономных цепях с отрицательными нелинейными сопротивлениями. Сб. „Математическое моделирование и теория электрических цепей". „Наукова думка", Киев, 1965.
40. Л.А.Синицкий, Н.И.Пилипенко. Работа магнитного модулятора с выходом на удвоенной частоте на синхронный детектор. Сб. „Магнитные аналоговые элементы", 1965.
41. Л.А.Синицкий. Динамические свойства систем фазовой автоподстройки частоты. Сб. „Теоретическая электротехника", № 1, 1966. Изд. Львовского университета, г. Львов.
42. Э.И.Павлюк, Л.А.Синицкий. Динамические свойства частотного детектора с емкостным накопителем энергии. Сб. „Теория и практика устройств для преобразования электроизмерительной информации". „Наукова думка", Киев, 1966.
43. Л.А.Синицкий. Определение областей притяжения для различных режимов трехстабильного параметрона. Изв. АН СССР. „Техническая кибернетика", № 1, 1966.
44. Е.Д.Васильев, Л.А.Синицкий. Влияние неполной фильтрации несущей ее гармоник на погрешность коэффициента усиления усилителя с модуляцией. „Измерительная техника", № 4, 1968.
45. Л.А.Синицкий, Ю.М.Шумков. Анализ переходных процессов в схемах выпрямления. Сб. „Теоретическая электротехника", № 4, 1967. Изд. Львовского университета, Львов.
46. Н.С.Пилипенко, Л.А.Синицкий. О точности расчета магнитных модуляторов при учете ограниченного числа гармоник выходного сигнала. Сб. „Теоретическая электротехника", № 6, 1969. Изд. Львовского университета, Львов.
47. Л.А.Синицкий, Ю.М.Шумков. О поиске периодических режимов в нелинейных цепях численными методами. Сб. „Теоретическая электротехника", № 9, 1970. Изд.Львовск.университета, Львов
48. Л.А.Синицкий. Об оценке наименьшей постоянной времени и наивысшей собственной частоты электрической цепи. Сб. „Теоретическая электротехника", № 10, 1970. Изд. Львовского университета, Львов.
49. И.Н.Лисицкая, Л.А.Синицкий, Ю.М.Шумков. Анализ нелинейных цепей с магнитными и полупроводниковыми элементами. „Наукова думка", Киев, 1969.

БГ 10505. Подписано к печати 28.VI.1971 г.
Формат 60x84/1/16.
Услов.печатн.листов 2,7. Учетно-изд.лист.2
Тираж 200. Бесплатно. Зак.132.

Машинно-офсетная лаборатория Львовского
университета, Львов, Университетская, 1