

6
A-65
Киевский инженерно-строительный институт

На правах рукописи

МАМИН А.П.

ПРИЛОЖЕНИЯ ТЕОРИИ СЛУЧАЙНЫХ ФУНКЦИЙ ДЛЯ
АНАЛИЗА ТОЧНОСТИ ГЕОДЕЗИЧЕСКИХ
ИЗМЕРЕНИЙ

Специальность № 05.500 - геодезия

Автореферат
диссертация, представлен-
ной на соискание ученой
степени кандидата техни-
ческих наук.

Киев - 1971 .

Киевский инженерно-строительный институт

На правах рукописи

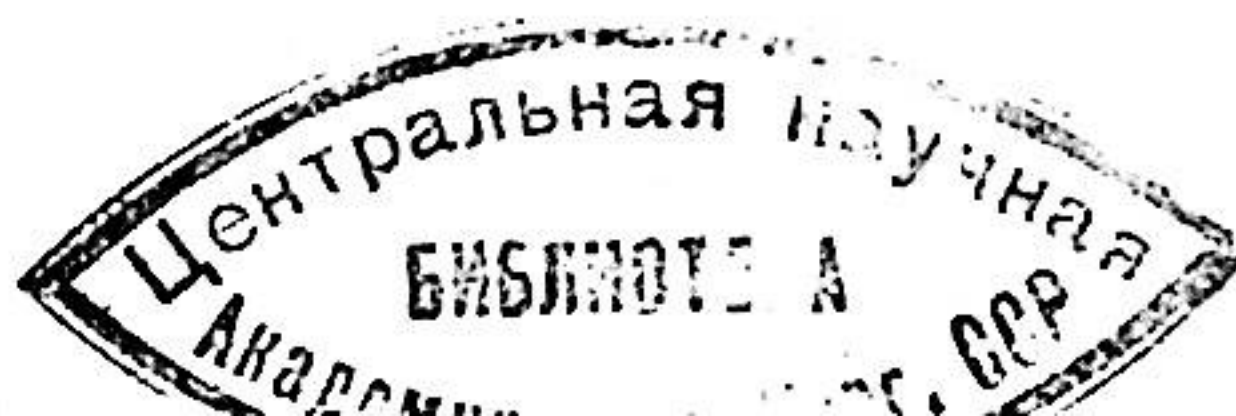
МАМИН А. П.

ПРИЛОЖЕНИЯ ТЕОРИИ СЛУЧАЙНЫХ ФУНКЦИЙ ДЛЯ
АНАЛИЗА ТОЧНОСТИ ГЕОДЕЗИЧЕСКИХ
ИЗМЕРЕНИЙ

Специальность № 05.500 - геодезия

Автореферат
диссертации, представлен-
ной на соискание ученой
степени кандидата техниче-
ских наук.

Киев - 1971 .



Работа выполнена на кафедре инженерной геодезии Киевского инженерно-строительного института.

Научный руководитель: доктор технических наук, профессор
И.Г. ВИДУЕВ.

Официальные оппоненты:

1. Заслуженный деятель науки и техники, доктор технических наук, профессор А.В. МАСЛОВ
2. Доктор технических наук, профессор В.Г. БАГРАТУНИ

Ведущее предприятие: Предприятие № 13

Автореферат разослан "20" апреля 1971 г.

Защита диссертации состоится "21" мая 1971 г. в 13 час

на заседании Ученого Совета факультета городского строительства Киевского инженерно-строительного института, в зале заседаний Совета / г. Киев, 37, Воздухофлотский проспект, 31 /.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке Института.

Ученый секретарь Совета
факультета городского строительства
кандидат технических наук
доцент


В.В. ВЕРБИЦКИЙ

"20" апреля 1971 г.

Процессы автоматического регулирования протекают в условиях непрерывных возмущений - помех. Такие неизбежные помехи представляют собой случайные функции.

Физическая природа возмущений имеет много общего с процессом возникновения погрешностей измерений. Случайная функция является обобщением случайной величины.

Для определенного значения аргумента случайная функция обращается в случайную величину, в результате опыта она превращается в обычную функцию.

Использование математической модели случайных функций, вместо схемы случайных величин, приводит к значительному расширению круга задач погрешностей измерений. Вновь развиваемая теория случайных функций погрешностей измерений как бы перекрывает классическую и современную теорию погрешностей измерений. Она является дальнейшим этапом в создании общей теории математической обработки результатов измерений.

В этом направлении в диссертации ставится задача о возможности приложения теории случайных функций для анализа точности геодезических измерений.

Диссертация состоит из введения, четырех глав, введения и перечня использованной литературы (278 страниц машинописного текста, включая 48 рисунка и 114 расчетных таблиц).

В главе 1, погрешность характеризуется как случайная функция. По формулам (19) - (28) определяются характеристики случайной функции - математическое ожидание, дисперсия

и корреляционная функция.

Приводятся два экспериментальных примера на исследование бокового рефракционного искажения визирного луча, проходящего вблизи поверхностей, имеющих различную температуру.

Вычисленные при этом математические ожидания, дисперсии и корреляционные функции представлены в таблице для сравнения их результатов.

Обозначения	t_1	t_2	t_3	t_4	t_5
1. $\bar{m} \{x(t)\}_1$	10,2	12,0	10,8	14,1	14,6
2. $\bar{m} \{y(t)\}_2$	10,4	12,1	11,0	14,0	15,0
1. $\bar{D} (t_j)_1$	0,18	0,17	1,50	0,25	0,58
2. $\bar{D} (t_j)_2$	0,15	0,25	1,85	0,87	0,59
1. $\bar{\sigma} (t_j)_1$	0,88	0,41	1,28	0,50	0,78
2. $\bar{\sigma} (t_j)_2$	0,88	0,50	1,36	0,61	0,77

Из таблицы видно, что случайные функции $x(t)$ и $y(t)$ обладают почти одинаковыми математическими ожиданиями, дисперсиями и стандартами. Однако, коэффициенты корреляции представленные (в диссертации), табл. 6 и 11, имеют значительные отклонения. В первом случае коэффициенты корреляции изменяются в интервале от $\pm 0,14$ до $\pm 1,0$, указывая при этом на периодичность случайной функции. Во втором случае коэффициенты корреляции все положительные и по значениям близки к единице, т.е. $0,89 - 1,0$. Это свидетельствует о

связи между измеренными направлениями и температурными градиентами. Следовательно, случайные функции $x(t)$ и $y(t)$ имеют различную внутреннюю структуру. Далее, на примерах показывается преимущество достоверных оценок в сравнении с точечными. При малых выборках точечная оценка параметров без указания степени точности мало-вероятна, так как полученные числа представляют собой лишь частные значения некоторых случайных величин.

Разработан параболический метод построения полинома пятой степени. Определение его коэффициентов производится с помощью формул (53) - (56) и таблиц 21 и 22.

Полином (67), составленный по данным эксперимента, дает хорошую точность при интерполировании в пределах табл. 22, о чем свидетельствуют полученные данные в табл. 23.

Рекомендуется формула (77) для подсчета степени параболического полинома в зависимости от числа циклов наблюдений.

Эмпирическая формула $N = 84,0222 - 49 e^{0,8665t}$, составленная по табличным данным, представила возможность выйти за пределы этой таблицы и методом экстраполяции найти значение осадки сооружения при $t = 1,2$.

Инструментальные определения осадки сооружения для $t = 1,2$ показали хорошую сходимость в значениях N_7 . Расхождение в отметках N_7 , полученных инструментально и экстраполирующей не превысило 0,5 мм.

Делается вывод о том, что при удачно подобранном полиноме осадки сооружений можно определять с помощью

этого полинома и отказать от инструментальных определений на период прогнозирования.

Во второй главе "Построение канонических разложений при геодезических измерениях" разработаны рабочие формулы и схемы для вычисления дисперсий D_i и координатных функций $f_{i,j}$.

Рабочие формулы представлены в следующем виде :

$$\begin{aligned}
D_1 &= K_{\Delta}(t_1, t), \\
f_1(t) &= \frac{1}{D_1} K_{\Delta}(t_1, t) \\
D_2 &= K_{\Delta}(t_2, t_1) - f_1^2(t_2) D_1, \\
f_2(t) &= \frac{1}{D_2} [K_{\Delta}(t_2, t) - f_1(t_2) f_1(t) D_1], \\
D_3 &= K_{\Delta}(t_3, t_1) - f_1^2(t_3) D_1 - f_2^2(t_3) D_2, \\
f_3(t) &= \frac{1}{D_3} [K_{\Delta}(t_3, t) - f_1(t_3) f_1(t) D_1 - f_2(t_3) f_2(t) D_2], \\
D_i &= K_{\Delta}(t_i, t_i) - \sum_{k=1}^{i-1} D_k f_k^2(t_i), \\
f_i(t) &= \frac{1}{D_i} [K_{\Delta}(t_i, t) - \sum_{k=1}^{i-1} D_k f_k(t_i) f_k(t)].
\end{aligned}
\tag{173}$$

На экспериментальных примерах §§ 4 и 11 иллюстрируется каноническое разложение случайных функций $x(t)$, $y(t)$ и $\Delta(t)$.

Разработанные схемы вычислений, табл. 42, 44, 45, дают возможность быстро определять коэффициенты D_i и $f_{i,j}$. Графики координатных функций показаны на рисунках 16, 17 и 18.

В главе III "Стационарные случайные функции погрешностей геодезических измерений", проведено исследование определения характеристик стационарной случайной функции по реализациям различной продолжительности. Для этой цели использованы экспериментальные данные, представленные таблицами 66, 68, и рис. 26.

По одной реализации, малой продолжительности (16 измерений) вычислены : математическое ожидание, дисперсия и корреляционная функция. Эти же характеристики определены вторично - по реализации значительной продолжительности (191 измерение), и в третий раз они определены по семейству 12-ти реализаций случайной функции $\Delta(t)$.

По формуле (211) вычислены нормированные корреляционные функции по указанным реализациям различной продолжительности.

Таким образом, на основании анализа результатов, полученных при решении примеров 14, 15 и 16 следует, что нормированные корреляционные функции, определенные по реализации значительной продолжительности и по семейству 12-ти реализаций, близки по своим значениям (см. табл. 69, строка $\rho_{\Delta k}(\tau)$ и табл. 75); они расходятся в пределах 0,1 - 0,2.

Полученные результаты по реализации малой продолжительности, табл. 67, строка 20-я, $\rho_{\Delta k}(\tau)$, имеют большие отклонения от результатов нормированной корреляционной функции, определенных по семейству 12-ти реализаций.

Следовательно, вполне целесообразно, характеристики стационарной случайной функции определять по реализации

значительной продолжительности. Этого делать нельзя, если возникнет необходимость вычислять характеристики по реализации малой продолжительности, так как реализация малой продолжительности не может дать полной информации о свойствах случайной функции.

В диссертации подчеркивается, что если корреляционная функция стационарного случайного процесса при увеличении τ не убывает, а с некоторого τ остается, примерно, постоянной, то среднее по времени не равно среднему по множеству наблюдений. Отсюда следует вывод, что при сложившейся ситуации, одна реализация не может заменить множество реализаций, и при определении характеристики стационарной случайной функции следует пользоваться их семейством.

Даются рекомендации по применению векторного метода практического гармонического анализа при разложении случайной функции в тригонометрический ряд, заданной графически, а также и формулы, лежащие в основе векторного метода, в виде

$$a_0 = 2/n \sum_{m=0}^{n-1} y_m \quad (278)$$

$$a_k + ib_k = 2/n (y_0 + y_1 e^{i \frac{2\pi}{n} k} + \dots + y_{n-1} e^{i \frac{2\pi}{n} (n-1)k}). \quad (282)$$

В работе дана методика построения векторов; на числовом материале указаны правила и последовательность их построения.

Нормированная корреляционная функция, табл. 78, представлена тригонометрическим полиномом дважды: аналитически и векторным методом. Результаты сравнения даны таблицей 79.

Дается вывод. Векторный метод практического гармонического анализа по точности определения коэффициентов a_i и b_i мало уступает аналитическому.

При использовании формул (286) - (288) и нормированной корреляционной функции

$$P_0(\tau) = D e^{-\beta\tau} \cos \beta\tau \quad / 289 /$$

определены дисперсии D_0 и D_k , необходимые для построения спектра, по формулам

$$D_0 = \frac{D}{T} \int_0^T e^{-\beta\tau} \left[\frac{e^{i\beta\tau} + e^{-i\beta\tau}}{2} \right] d\tau = \frac{1}{T} D \frac{\beta(1 - e^{-\beta T})}{\beta^2 + \beta^2} \quad (290)$$

$$D_k = \frac{2D}{T} \int_0^T e^{-\beta\tau} \left[\frac{e^{i\beta\tau} + e^{-i\beta\tau}}{2} \cdot \frac{e^{i\omega\tau} + e^{-i\omega\tau}}{2} \right] d\tau = \frac{1}{T} D \left[\frac{\beta(1 - e^{-\beta T})}{\beta^2(\beta - \omega)^2} + \frac{\beta(1 - e^{-\beta T})}{\beta^2(\beta + \omega)^2} \right] \quad (291)$$

Для примера 20 получены расчетные данные, представленные табл. 80; нарис. 32 построен спектр-распределение дисперсий по частотам.

Для нормированной корреляционной функции (239) нормированная спектральная плотность вычислена дважды - по формулам (305) и (306).

$$\begin{aligned} S(\omega) &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \rho_{\Delta}(\tau) \cos \omega \tau d\tau = \\ &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} D e^{-\beta \tau} \cos \beta \tau \cdot \cos \omega \tau d\tau = \\ &= \frac{1}{\pi} D \int_0^{\infty} e^{-\beta \tau} [\cos(\beta - \omega)\tau + \cos(\beta + \omega)\tau] d\tau = \\ &= \frac{1}{\pi} D \left[\frac{\beta}{\beta^2 + (\beta - \omega)^2} + \frac{\beta}{\beta^2 + (\beta + \omega)^2} \right]. \end{aligned} \quad (305)$$

$$\begin{aligned} S_{\Delta}(\omega) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} K_{\Delta}(\tau) e^{i\omega \tau} d\tau = \\ &= \frac{1}{2\pi} D \left[\frac{\beta}{\beta^2 + (\beta - \omega)^2} + \frac{\beta}{\beta^2 + (\beta + \omega)^2} \right] \end{aligned} \quad (306)$$

Для примеров 21 и 22 расчетные данные представлены таблицами 80 и 81 ; На рис. 33 построен график нормированной спектральной плотности.

Нормированная спектральная плотность более полно характеризует стационарную случайную функцию.

Глава IV " Математическая обработка результатов геодезических измерений " исследуются вопросы осадок инженерных сооружений и высокоточных угломерных геодезических инструментов.

Математическая обработка результатов геодезических наблюдений за осадками инженерных сооружений представлена

двумя способами. Первый способ посвящен математической обработке наблюдений одной марки, валоженной в сооружении.

Результаты осадки марки № 6 представлены в виде реализаций случайной функции $x(t)$ в табл. 84.

В этом случае математическая обработка произведена по формулам (307)-(342) последовательно с фиксацией расчетных данных в таблицах 83-96. На рисунках 34-38 дана графическая интерпретация результатов наблюдений, реализации случайной функции $\delta(t)$, доверительных интервалов, накрывающих математические ожидания и стандарты.

Второй способ дан в виде совместной математической обработки наблюдений за осадками 16-ти марок, валоженных в колоннах инженерного сооружения.

Осадки марок, относительно первого цикла наблюдений, представлены вертикальным краевяном. (348)

Суммы произведений краевянов-столбцов, разделенные на $n-1$, даны таблицей 99, в виде дисперсий и корреляционных функций. В таблице 100 вычислены коэффициенты корреляции и построена нормированная корреляционная функция $\tau(t)$.

Для реализаций $\bar{M}\{h(t), h_2, h_3, h_4, h_5, h_6, h_7, h_8, h_9, h_{10}\}$ подобраны полиномы (352) второй степени и определены их коэффициенты в табл. 103. Согласованность полученных эмпирических формул с экспериментальными данными указана в табл. 104.

В результате исследования осадок инженерного сооружения установлено следующее :

1. Марки, валоженные в колоннах промышленного объекта, имеют неравномерную скорость осадки.

2. С увеличением времени наблюдений стандарты увеличиваются. Это указывает на осадки реперов, от которых велись наблюдения за положением марок.

3. Построенная формула (353) подсчета времени затухания осадки сооружения, при ваданном исследовании, дала положительные результаты.

Даются рекомендации по построению типа наиболее рациональной эмпирической формулы.

Указываются недостатки ныне существующего метода обработки наблюдений за осадками инженерных сооружений, основанного лишь на теории ошибок измерений.

В результате исследования эксцентриситета алидады горизонтального круга теодолитов OT-02 и TT 2"/6" установлено следующее:

1. Первый член полиномов (353) и (363) представляет собой погрешность в отсчете, происходящую в силу наличия эксцентриситета алидады горизонтального круга, т.е.

$$\delta_1 = 30''.958 ; \quad \delta_2 = -0''.547.$$

2. Коэффициенты при $\cos x$ и $\sin y$ полиномов (353) и (363) есть не что иное, как вспомогательные величины, необходимые для определения угловой величины двойного ($2\ell''$) и линейного эксцентриситетов, например:

$$a_1 = -0.143 = y ; \quad b_1 = 2.844 = x.$$

3. Доверительные интервалы, построенные в таблицах 111 и 112, характеризуют точность определения результатов произведенных измерений.

4. Значения коэффициентов корреляции, полученные в таблице 110, указывают на слабое влияние колебаний алидадной оси на отсчет по одному микроскопу при исследовании всех установок алидады / $0^\circ - 360^\circ$ /.

Исследования показали, что случайные функции могут успешно использоваться при расчетах и анализах результатов геодезических измерений.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Основные результаты, полученные в диссертационной работе, можно охарактеризовать следующими положениями:

1. Дано обобщенное понятие использования математической модели случайных функций, приводящее к значительному расширению круга задач погрешностей измерений, отысканию источников случайных погрешностей и определению закономерностей совместного появления случайных и систематических погрешностей.

2. Развиваемая теория случайных функций погрешностей измерений является дальнейшим этапом в создании общей теории математической обработки геодезических измерений.

3. Отмечены особенности характеристик случайной функции погрешностей измерений, разработаны рекомендации для их определения с теоретической и практической точек зрения.

4. Предложен широкий диапазон сглаживания эмпирических зависимостей, представленный на практическом иллюстрационном материале.

5. На конкретном цифровом материале показано построение канонических разложений функций геодезических измерений. Даны рекомендации по представлению случайной функции в виде конечно суммы элементарных случайных функций.

6. Рассмотрен ряд критериев, позволяющих производить оценку точности характеристик случайной функции.

7. Построенный критерий нормального распределения χ^2 позволяет установить стационарность центрированной случайной функции погрешностей измерений, а критерий дисперсионных отношений F дает суждение о постоянстве дисперсий. В этом отношении рекомендуется использовать пары дисперсий, составленные по положительным и отрицательным флуктуациям геодезических измерений.

8. Рассмотрен вопрос эквивалентной замены множества реализаций - одной, значительной продолжительности по времени. Даны результаты исследования в этом отношении. Предложены рекомендации по проверке на коррелированности временных рядов и дан критерий определения максимального лага L . Все это иллюстрировано на конкретном цифровом материале.

9. Разработан вопрос разложения нормированной корреляционной функции в тригонометрический ряд векторным методом практического гармонического анализа, а это создает возможность изучать эту функцию на любом интервале длины.

Векторный метод практического гармонического анализа приводит к цели значительно быстрее других существующих ныне приближенных способов определения коэффициентов Фурье.

10. Разработаны вопросы спектра нормированной корреляционной функции - распределения дисперсий по различным частотам. Даны рекомендации по определению дисперсий D_0 и D_k и спектральной плотности стационарной случайной функции погрешностей геодезических измерений.

11. На практическом материале разработаны вопросы:
- математической обработки результатов геодезических наблюдений за осадками инженерных сооружений,

- математической обработки исследования высокоточных угломерных геодезических приборов.

12. В результате исследования наблюдений за осадками инженерных сооружений установлено:

а/ применение теории доверительных интервалов, различных приемов проверки статистических гипотез, дисперсионного и корреляционного анализа, способствует повышению качества исследования осадок инженерного сооружения и определяет надежность и долговечность его;

б/ если с увеличением времени наблюдений стандарты нормированной корреляционной функции увеличиваются, то это указывает на осадки исходных реперов, от которых велись наблюдения за положением марок, заложенных в сооружении;

в/ параболический метод определения полинома и его параметров, разработанный в § 8, не требует большого числа вычислений, экономит время и дает точные результаты аппроксимирования;

г/ разработанная формула / 258 / определяет время / t / приближенного затухания осадок инженерного сооружения.

13. Исследования алиады горизонтального круга теодолитов ОТ-02 и ТТ 2"/6" показало, что:

а/ удачно подобранный полином для аппроксимирования математических ожиданий разностей V_{Δ} , позволяет найти одновременно δ - погрешность в отсчете, происходящую от эксцентриситета алиады и вспомогательные величины X и Y , необходимые для вычисления угловой величины двойного эксцентриситета / 21" / и линейного;

б/ по значениям коэффициентов корреляции, табл. 110, можно судить об отсутствии систематических погрешностей в ланных измерениях.

14. Теоретические положения диссертации проиллюстрированы на примерах из практики геодезических измерений и исследований.

15. Выводы и рекомендации, данные в диссертационной работе при их осуществлении, будут способствовать, безусловно, дальнейшему развитию теории и практики геодезических измерений.

Основное содержание диссертации опубликовано в следующих статьях:

1. Н.Г. ВИДУЕВ "Определение уравнения осадки сооружения". Сб. "Инженерная геодезия". вып. 6, 1969, Киев.
А.П. МАМИН
2. Н.Г. ВИДУЕВ "Математическая обработка результатов геодезических наблюдений за осадками сооружения". Сб. "Инженерная геодезия", вып. 6, 1969, Киев.
А.П. МАМИН
3. А.П. МАМИН "Применение стационарной случайной функции для обработки геодезических измерений". Сб. "Инженерная геодезия", вып. 7, 1970, Киев.

БФ-01311. Тираж 150 экз. Заказ № 607.

Подписано к печати 15.04.71 г.

Отпечатано в Минлегпроме УССР,
ул. Загородняя, 15