

ИЗВЕСТИЯ
СИБИРСКОГО ОТДЕЛЕНИЯ
АКАДЕМИИ НАУК
СССР



СЕРИЯ ТЕХНИЧЕСКИХ НАУК

ВЫПУСК I

НОВОСИБИРСК
1966

п-167/2

АКАДЕМИЯ НАУК СССР

ИЗВЕСТИЯ СИБИРСКОГО ОТДЕЛЕНИЯ АКАДЕМИИ НАУК СССР

②

СЕРИЯ ТЕХНИЧЕСКИХ НАУК

Вып. 1

ИЗДАТЕЛЬСТВО «НАУКА»
СИБИРСКОЕ ОТДЕЛЕНИЕ
1966

$$pX = AX; X = \begin{vmatrix} x_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ x_n \end{vmatrix}; A = \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}, \quad (1)$$
$$\begin{aligned} px_1 &= f_1(x_1, \dots, x_n) = \sum_{j=1}^n a_{1j}x_j + \varphi_1(x_1, \dots, x_n) \\ &\vdots \end{aligned} \quad (2)$$

$$px_n = f_n(x_1, \dots, x_n) = \sum_{j=1}^n a_{nj} x_j + \varphi_n(x_1, \dots, x_n).$$

$$S(p) = \sum_{s=0}^n a_s p^{n-s} = 0, \quad (3)$$

Трудность анализа такой системы связана как с вычислением коэффициентов характеристического уравнения, так и с применением самих критериев устойчивости, которые для уравнений высоких степеней довольно громоздки и требуют затраты значительного времени для их проверки. Применение электронных цифровых вычислительных машин

П 35205
Центральная научная
БИБЛИОТЕКА
Академии наук Киргизской ССР

Адрес редакции: г. Новосибирск, ул. Советская, 20, комн. 302.

(ЭЦВМ) требует построения оптимальных алгоритмов, которые давали бы возможность решать вышеуказанные вопросы с наименьшей затратой времени, а в некоторых случаях и памяти машины, при этом желательно использовать готовые стандартные программы линейной алгебры.

В настоящей статье рассматриваются возможные методы построения областей устойчивости линейной системы автоматического регулирования в пространстве параметров регулирования с использованием ЭЦВМ, а также методы получения коэффициентов характеристического уравнения.

Коэффициенты характеристического уравнения (3) не зависят от времени, но зависят от совокупности параметров регулирования $k_1, \dots, k_n$, изменяющихся в некоторой ограниченной замкнутой области $\bar{K}$. Задача исследования состоит в отыскании такой замкнутой области $\bar{G} \subset \bar{K}$, где корни характеристического уравнения имели бы только отрицательные вещественные части.

При отыскании такой области (области устойчивости) обычно используются методы D -разбиения [1, 2]. Если число параметров регулирования не превышает двух, то границу области устойчивости в параметрическом виде получить сравнительно просто [3].

Хотя в принципе и возможно применение метода D -разбиения при большом числе параметров [4], однако вычисления в этом случае связаны со значительными трудностями, особенно если уравнение (3) имеет высокую степень. Анализ полученных результатов сильно затрудняется. Применение ЭЦВМ хотя и снижает расчетные трудности, но необходимость изменения частоты в широких пределах, необходимость выбора оптимального шага и т. д. приводит к неэкономичному использованию машины.

Поэтому вполне обоснована тенденция непосредственного использования критериев Рауса, Гурвица, Ю. И. Неймарка [1, 2] для анализа устойчивости и выделения границы устойчивости в области параметров регулирования [5, 6].

Методы построения области устойчивости, рассмотренные в работе, основываются на применении алгебраических критериев устойчивости, поэтому предварительно рассмотрим возможные методы вычисления коэффициентов характеристического уравнения.

МЕТОДЫ ПОЛУЧЕНИЯ КОЭФФИЦИЕНТОВ ХАРАКТЕРИСТИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ

Характеристическое уравнение возмущенного движения сложной энергосистемы обычно может быть представлено в виде определителя матричного полинома степени r [7, 8]

$$S_1(p) = |A_0 p^r + A_1 p^{r-1} + \dots + A_r| = 0, \quad (4)$$

где $A_0, A_1, \dots, A_r$ — квадратные матрицы порядка m .

Для составления программы расчетов устойчивости и электромеханических переходных процессов сложной энергосистемы на ЭЦВМ необходимо представить такой определитель в виде скалярного многочлена. Для этой цели могут быть использованы алгоритмы двух основных видов. К первому виду относятся алгоритмы, основанные на линейризованных уравнениях возмущенного движения, предварительно приведенных к разрешенному относительно производных виду. Тогда коэффициенты характеристического уравнения находятся путем раскрытия определителя «векового» уравнения.

Другой вид алгоритмов, не связанных с необходимостью приведения исходных уравнений к нормальной форме, разработан Л. В. Цукерником [9—11].

Для представления определителя (4) в виде многочлена может быть использовано в числе возможных методов и непосредственное разложение его путем разложения по элементам какой-либо строки или столбца, а также приведение определителя (4) к треугольной форме. Однако эти методы требуют или значительного числа операций или сложной программы*.

Рассмотрим некоторые возможные случаи получения коэффициентов характеристического уравнения.

1. Преобразование уравнения (4) к виду $|B - \lambda E| = 0$

Для получения характеристического полинома может быть использован один искусственный прием, основанный на теоремах матричной алгебры.

Определитель m -го порядка, элементы которого являются многочленами степени r , можно всегда преобразовать в определитель порядка mr , элементы которого линейны относительно p , при условии, что матрица коэффициентов при p^r неособенная.

Пусть данное уравнение имеет вид (4), тогда корни его, как легко непосредственно проверить, равны характеристическим числам матрицы

$$B = \begin{vmatrix} -A_0^{-1}A_1 & -A_0^{-1}A_2 & \dots & -A_0^{-1}A_{r-1} & -A_0^{-1}A_r \\ E & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & E & 0 \end{vmatrix} \quad (5)$$

где A_0^{-1} — обратная матрица от A_0 ;

E — единичная матрица m -го порядка.

Характеристическое уравнение матрицы (5) может быть найдено по методу Данилевского. Благодаря специальному виду матрицы (5) процесс вычисления проходит значительно быстрее по сравнению с другими методами [12].

Характеристическое уравнение матрицы (5) может быть представлено в виде

$$S(\lambda) = (-1)^n \sum_{s=0}^n a'_s \lambda^{n-s} = 0. \quad (5a)$$

После замены в уравнении (5a) λ на p получим характеристическое уравнение рассматриваемой системы.

Однако в ряде случаев матрица A_0 в уравнении (4) может не иметь обратной матрицы. Если заменить в уравнении (4) p на $\frac{1}{p_1}$, то получим уравнение

$$|A_r p_1^r + A_{r-1} p_1^{r-1} + \dots + A_0| = 0, \quad (6)$$

* Кроме того, при приведении определителя к треугольной форме возможно изменение порядка характеристического уравнения за счет ошибок вычисления.

корни которого, очевидно, равны обратным величинам характеристических чисел матрицы

$$B_1 = \begin{vmatrix} -A_r^{-1}A_{r-1} & -A_r^{-1}A_{r-2} & \dots & -A_r^{-1}A_1 & -A_r^{-1}A_0 \\ E & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & E & 0 \end{vmatrix} \quad (7)$$

где A_r^{-1} — обратная матрица от A_r , которую всегда можно сделать неособенной, если выбрать соответствующее значение параметров регулирования.

Характеристическое уравнение матрицы (7) также может быть представлено в виде уравнения (5a), тогда характеристическое уравнение системы автоматического регулирования получается из уравнения (5a) при замене λ на $\frac{1}{p}$.

2. Применение метода интерполирования к уравнению (4)

Так как функция $S_1(p)$ в уравнении (4) является многочленом степени меньшей или равной n , то интерполяционный полином $S(p)$ должен быть тождествен $S_1(p)$. Это вытекает из теоремы единственности интерполяционного многочлена.

Развертывание определителя (4) порядка m дает многочлен степени n не выше m относительно p . Этот многочлен содержит $n+1$ коэффициент при различных степенях, которые могут быть определены, если известны значения $S_1(p)$ для $n+1$ значений p . Для этого можно воспользоваться интерполяционной формулой или решить систему линейных уравнений для коэффициентов. Если разность между двумя последовательными значениями p постоянна, то для получения многочленного выражения может быть использована первая интерполяционная формула Ньютона [12]

$$S(p) = S(\delta) + \frac{x}{1!} \Delta S(\delta) + \frac{x(x-1)}{2!} \Delta^2 S(\delta) + \dots + \frac{x(x-1)\dots(x-n+1)}{n!} \Delta^n S(\delta), \quad (8)$$

где $x = \frac{p-\delta}{h}$, а разности $\Delta^k S(\delta)$ берутся из следующей таблицы:

$S(\delta)$			
	$\Delta S(\delta)$		
$S(\delta+h)$		$\Delta^2 S(\delta)$	
	$\Delta S(\delta+h)$		$\Delta^3 S(\delta)$
$S(\delta+2h)$		$\Delta^2 S(\delta+h)$	
	$\Delta S(\delta+2h)$		
$S(\delta+3h)$			
$S(\delta+nh)$			

где $\Delta S(\delta) = S(\delta+h) - S(\delta)$, $\Delta^2 S(\delta) = \Delta S(\delta+h) - \Delta S(\delta)$ и т. д.

Значение коэффициентов матрицы P

$\begin{smallmatrix} k \\ s \end{smallmatrix}$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
1	+1000000+01															
2	-5000000+00	+5000000+00														
3	+3333333+00	-5000000+00	+1666667+00													
4	-2500000+00	+4583333+00	-2500000+00	+4166667-01												
5	+2000000+00	-4166667+00	+2916667+00	-8333333-01	+8333333-02											
6	-1666667+00	+3805556+00	-3125000+00	+1180556+00	-2083333-01	+1388889-02										
7	+1428571+00	-3500000+00	+3222222+00	-1458333+00	+3472222-01	-4166667-02	+1984127-03									
8	-1250000+00	+3241071+00	-3256944+00	+1678819+00	-4861111-01	+7986111-02	-6944444-03	+2480159-04								
9	+1111111+00	-3019842+00	+3255180+00	-1854167+00	+6186342-01	-1250000-01	+1504630-02	-9920635-04	+2255732-05							
10	-1000000+00	+2828968+00	-3231647+00	+1994268+00	-7421875-01	+1743634-01	-2604167-02	+2397486-03	-1240079-04	+2755731-06						
11	+9090909-01	-2662698+00	+3195040+00	-2106757+00	+8560130-01	-2259838-01	+3952546-02	-4546957-03	+3306877-04	-1377866-05	+2505210-07					
12	-8333333-01	+2516561+00	-3150678+00	+2197447+00	-9602417-01	+2784862-01	-5506366-02	+7461833-03	-6820436-04	+4018774-05	-1377866-06	+2087675-08				
13	+7692307-01	-2387085+00	+3101899+00	-2270772+00	+1055411+00	-3309289-01	+7225001-02	-1112351-02	+1203566-03	-8956126-05	+4363242-06	-1252605-07	+1605903-09			
14	-7142857-01	+2271524+00	-3050842+00	+2330139+00	-1142223+00	+3826777-01	-9072708-02	+1548963-02	-1912133-03	+1691330-05	-1044881-05	+4279734-07	-1043837-08	+1147073-10		
15	+6666667-01	-2167708+00	+2998887+00	-2378186+00	+1221417+00	-4333140-01	+1101904-01	-2050552-02	+2817304-03	-2853330-05	+2102776-05	-1096029-06	+3827405-07	-8029518-10	+7647154-12	
16	-6250000-01	+2073893+00	-2946939+00	+2416980+00	-1293715+00	+4125718-01	-1303857-01	+2611082-02	-3922817-03	+4435812-05	-3754685-05	+2341763-06	-1043837-07	+3144895-09	-5735363-11	+4779472-13

Примечание. Каждое число состоит из следующих элементов: знак мантиссы, мантисса, знак порядка, порядок. Например, $-9072708-02 = -0,009072708$.

Разность k -го порядка многочлена степени k равна нулю, что позволяет сразу определить порядок характеристического уравнения.

Формула (8) не дает непосредственно многочленную форму, поскольку каждый член в ней является многочленом относительно p . Рассмотрим интерполяционный многочлен (8) по возрастающим степеням $p - \delta$ так, чтобы коэффициенты можно было вычислить непосредственно при помощи табл. 1*, для чего преобразуем его к виду

$$S(p) = \sum_{k=0}^n b_k (p - \delta)^k = b_0 + b_1 (p - \delta) + b_2 (p - \delta)^2 + \dots + b_n (p - \delta)^n, \quad (9)$$

$$\text{где } b_k = \frac{1}{h^k} \sum_{s=k}^n \rho_{k(s)} \Delta^s S(\delta), \quad (k = 1, 2, \dots, n), \quad b_0 = S(\delta). \quad (10)$$

Для удобства вычислений следует положить $\delta=0$, $h=1$, что приводит к некоторому упрощению выражений (9) и (10).

Если δ было выбрано отличным от нуля, переход к степени p вместо $(p - \delta)$ легко выполнить при помощи схемы Горнера, либо по прилагаемой ниже схеме.

$$\begin{aligned} a_0 &= \alpha_{nn} b_n \\ a_1 &= \alpha_{n-1, n-1} b_{n-1} + \alpha_{n-1, n} b_n \delta \\ a_2 &= \alpha_{n-2, n-2} b_{n-2} + \alpha_{n-2, n-1} b_{n-1} \delta + \alpha_{n-2, n} b_n \delta^2 \\ &\dots \dots \dots \\ a_{n-1} &= \alpha_{11} b_1 + \alpha_{12} b_2 \delta + \dots + \alpha_{1, n} b_n \delta^{n-1} \\ a_n &= \alpha_{00} b_0 + \alpha_{01} b_1 \delta + \dots + \alpha_{0, n} b_n \delta^n. \end{aligned}$$

Или в общем случае

$$a_{n-k} = \sum_{v=0}^{n-k} \alpha_{k(k+v)} b_{k+v} \delta^v; \quad k = 0, 1, 2, \dots, n. \quad (11)$$

Здесь $\alpha_{0j} = (-1)^j$, $\alpha_{ij} = 0$, $i > j$,

$$\alpha_{ij} = (-1)^{i+j} \sum_{k=i-1}^{j-1} |\alpha_{(i-1)k}| = (-1)^{i+j} \sum_{s=i-1}^j |\alpha_{s(j-1)}|, \\ i \leq j, \quad (i, j = 0, 1, \dots, n).$$

* Коэффициенты $\rho_{k(s)}$ могут вычисляться по следующей рекуррентной формуле:

$$\rho_{k(s+1)} = \frac{\rho_{k-1(s)} - s \rho_{k(s)}}{s+1}; \quad \rho_{1(1)} = 1; \quad s = 0, 1, 2, \dots, n; \quad k = 1, 2, \dots, n.$$

При использовании ЭЦВМ для вычисления коэффициентов более удобна формула

$$\rho_{k(s+1)} = (-1)^{s+k+1} \frac{\sum_{v=k-1}^s |\rho_{k-1(v)}|}{s+1}; \quad s = 0, 1, 2, \dots, n; \quad k = 1, 2, \dots, n.$$

Здесь $\rho_{0(0)} = 1$, $\rho_{0(i)} = 0$, $i = 1, 2, \dots, n$.

представляет собой, по сути дела, более рациональную форму решения задачи, чем по методу неопределенных коэффициентов при равностоящих значениях p .

Для решения системы уравнения (13а) можно применить известные методы

$$a = P^{-1}S. \quad (13б)$$

В том случае, когда интервал между соседними значениями p равен 1 и $p_1 = 0$, система уравнений может быть записана в виде

$$Pa = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 2 & 2^2 & \dots & 2^n \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & n & n^2 & \dots & n^n \end{vmatrix} \begin{vmatrix} a_n \\ a_{n-1} \\ a_{n-2} \\ \vdots \\ a_0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} S(0) \\ S(1) \\ S(2) \\ \vdots \\ S(n) \end{vmatrix} \quad (13в)$$

Матрица P в выражении (13в) не зависит от числовых значений $S(p_i)$. Можно вычислить заранее обратную матрицу P^{-1} , и тогда решение системы (13в) сводится к перемножению матриц, согласно выражению (13б).

На рис. 1 приведено число операций, необходимых для вычисления характеристического полинома различными методами при $r=2$ в зависимости от порядка матрицы m .

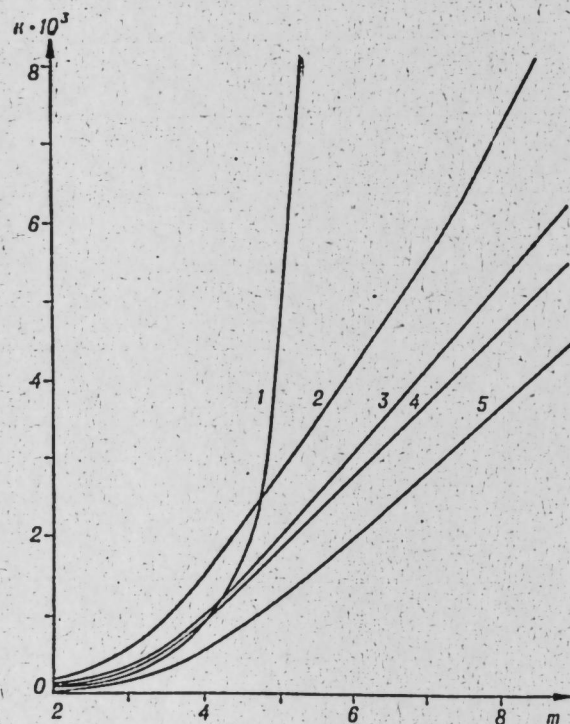


Рис. 1. Зависимость числа вычислительных операций от порядка определителя.

1 — прямое разворачивание; 2 — метод неопределенных коэффициентов; 3 — метод интерполяционной формулы; 4 — преобразование к диагональному виду; 5 — метод неопределенных коэффициентов при постоянном шаге и наличии обратной матрицы.

Как видно из рис. 1, прямое разворачивание дает наименьшее число операций, если определитель будет четвертого порядка, интерполяционный метод и преобразование к диагональной форме предпочтительны для всех более высоких порядков. Интерполяционный метод, однако, наиболее удобен, даже если он требует несколько большего числа операций. Этот метод позволяет по характеру изменения функции разностей предвидеть порядок характеристического уравнения. Значения функции $p_k(s)$ могут сравнительно просто вычисляться ЭЦВМ при минимальном числе входных данных.

Хотя метод неопределенных коэффициентов при равностоящих значениях p и требует меньшего числа операций, чем метод

преобразования к диагональной форме, однако необходимость обращения матрицы высокого порядка делает его менее желательным при использовании ЭЦВМ.

Метод преобразования к диагональной форме выгодно применять при выделении хотя и «неточных» (несколько суженных против обычных областей устойчивости, определяемых неравенствами Рауса — Гурвица), но зато легко обозримых областей устойчивости [13].

Таким образом, использование интерполяционного метода Ньютона весьма удобно для программирования ЭЦВМ, так как он дает возможность использовать стандартные программы линейной алгебры. Кроме того, этот метод выгодно отличается от других еще и тем, что требует значительно меньшего объема памяти за счет построения формирования матрицы преобразования.

Укажем порядок получения характеристического полинома, если параметры регулирования $k_1, \dots, k_n$ линейно входят в уравнение (3), т. е. регулирование осуществляется по индивидуальным параметрам.

Если положить $k_1, \dots, k_n$ равными нулю и привести определитель (4) к многочленной форме, получим коэффициенты характеристического уравнения, не зависящие от K . Положив в выражении (4) все K равными нулю, кроме одного, можем получить коэффициенты характеристического уравнения, зависящие только от данного параметра, и т. д.*

АНАЛИЗ УСТОЙЧИВОСТИ И ПОСТРОЕНИЕ ОБЛАСТЕЙ УСТОЙЧИВОСТИ ЭНЕРГОСИСТЕМ

Характеристическое уравнение (3) можно представить в виде

$$S_0(p) = u_0(p) + v_0(p), \quad (14)$$

где $u(p)$ — полином с нечетными коэффициентами при p ;
 $v(p)$ — полином с четными коэффициентами при p .

Для анализа устойчивости в числе возможных алгебраических критериев может быть применен критерий Ю. И. Неймарка [1]

$$S_i(p) = [u_i(p) - \lambda_{i-1} p v_i(p)] + v_i(p), \quad (i = 1, 2, \dots, n-2) \quad (15)$$

либо модификация критерия Ю. И. Неймарка [14]

$$S_i(p) = \left[u_i(p) - \lambda_{i-1} \frac{1}{p} v_i(p) \right] + v_i(p), \quad (i = 1, 2, \dots, n-2), \quad (16)$$

где u_i и v_i — полиномы с четными и нечетными степенями. Число λ_i и λ' -переходов для выявления устойчивости системы неодинаково и зависит от того, при каких частотах нарушается чередование корней характеристического полинома. Это обстоятельство может быть использовано для нахождения границы области устойчивости в пространстве двух параметров.

Процесс вычисления границы области устойчивости состоит в последовательном обходе области с постоянным шагом. Сначала делается

* Если коэффициенты характеристического уравнения зависят от постоянных времени регуляторов, системы или каких-либо других параметров, то определение коэффициентов характеристического уравнения в функции от этих параметров необходимо производить с учетом того, что степень характеристического полинома будет изменяться.

шаг по k_1 и k_2 , проверяется устойчивость двумя критериями (15) и (16), выбирается критерий с минимальным числом переходов, и затем выбранный критерий используется при движении по k_1 . При достижении $k_1 = k_{1\max}$ делается шаг по k_2 , при этом движение по k_1 начинается сначала: выбирается оптимальный критерий и т. д. Процесс заканчивается при $k_2 = k_{2\max}$. На границе области устойчивости последний определитель Гурвица δ обращается в нуль. Значения δ могут вычисляться одновременно с проверкой устойчивости по критериям (15) или (16) [14]. Значение параметра регулирования, при котором последний определитель Гурвица обращается в нуль, определяется по следующей формуле:

$$k = k_1 - \frac{h}{1 + \left| \frac{\delta_l}{\delta_{l-1}} \right|}, \quad (17)$$

где h — шаг обхода пространства параметров.

При движении внутри области устойчивости вычисляется ближайший корень к мнимой оси (критерий Бромберга — Цыпкина).

Критерий Бромберга — Цыпкина может вычисляться по смещенному уравнению [1, 2], методом Бернулли [15], итерационным методом [16]. Для вычисления коэффициентов смещенного уравнения могут быть использованы выражения (11).

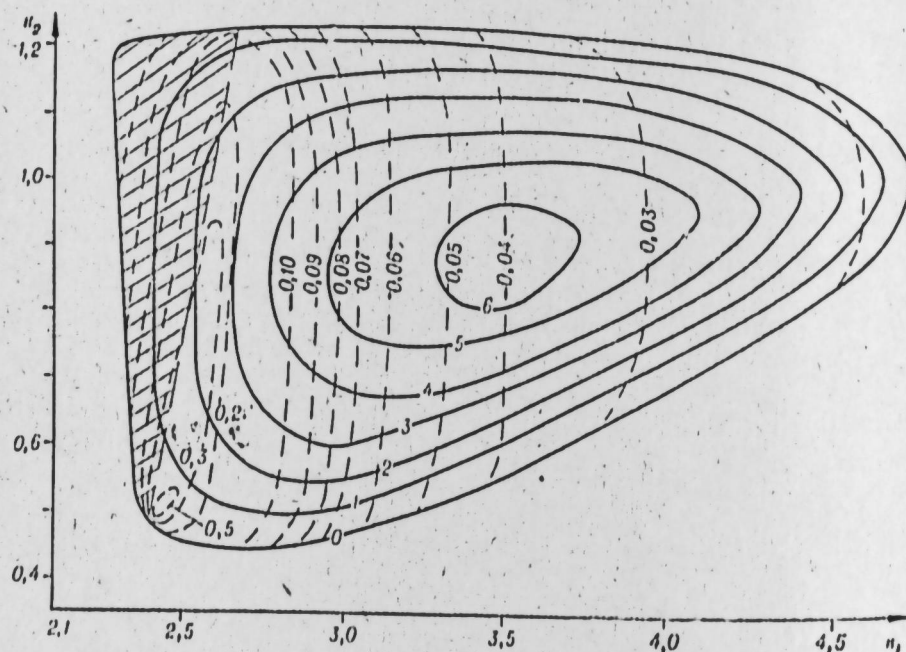


Рис. 2. Область устойчивости в плоскости параметров при $k_0=0.7$; k_0 — отклонение; k_1, k_2 — производные регулируемого параметра. — линии равного значения предпоследнего определителя Гурвица ($\times 10^4$); - - - - - линии равной степени устойчивости.

На рис. 2 показана область устойчивости эквивалентного генератора, работающего на шине неизменного напряжения при сильном регулировании напряжения по углу линии в области параметров k_1, k_2 .

Характеристическое уравнение имеет вид

$$0,152p^5 + (4,32 - 2,88k_2)p^4 + (25,1 - 2,88k_1)p^3 + (-27 - 2,88k_0 + 86,2k_2)p^2 + (-197 + 86,2k_1)p + (-56,1 + 86,2k_0) = 0.$$

На рис. 3 приведены области устойчивости в функции от k_0 . При построении областей устойчивости по изложенному выше методу время счета сокращается в 1,5—2 раза по сравнению с методом без выбора оптимального критерия устойчивости.

Построение областей устойчивости по данному методу весьма просто в программировании, однако он применим только тогда, когда заранее известны границы изменения регулируемых параметров, и, кроме того, он требует все же значительного времени, если необходимо производить построение областей устойчивости в пространстве многих параметров регулирования.

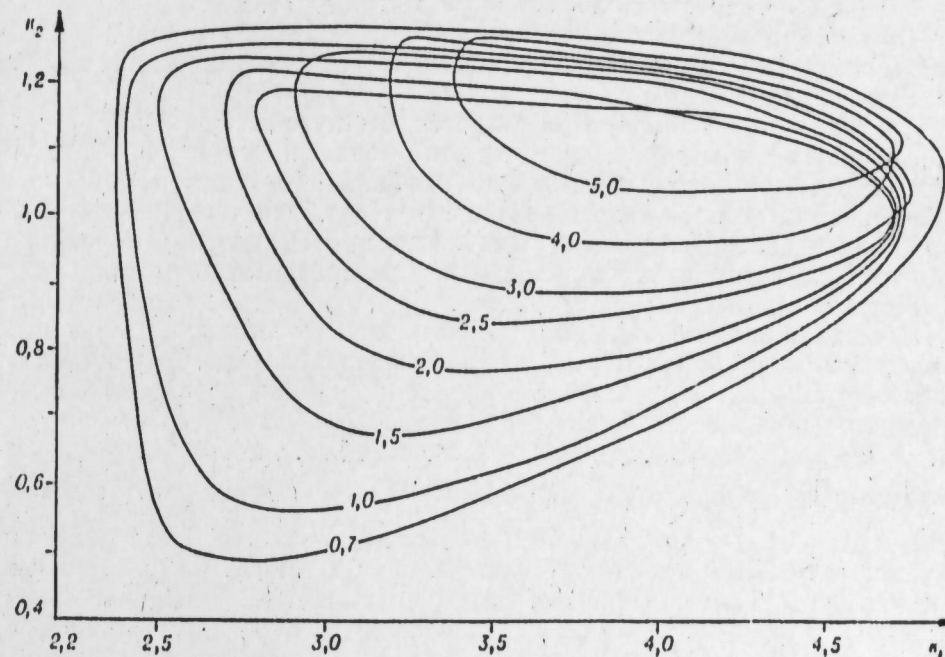


Рис. 3. Семейство областей устойчивости при различных значениях k_0 .

Рассмотрим матрицу Гурвица, образованную из коэффициентов характеристического уравнения (3),

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_1 & a_3 & \dots & 0 & 0 \\ a_0 & a_2 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & a_{n-1} & a_n \end{vmatrix} \quad (18)$$

В устойчивой области $\det \Delta = \delta > 0$, $\delta < \prod_{i=1}^n a_i$, т. е. матрица (18) положительно определенная*. Максимальное приращение, которое можно дать элементам матрицы Δ , чтобы она оставалась положительно определенной, согласно теореме Л. Островского [13], равно

$$\max |\varepsilon_{ij}| \leq \frac{1}{\sum_{ij} |\bar{a}_{ij}|}, \quad (i, j = 1, 2, \dots, n), \quad (19)$$

* Матрица называется положительно определенной (отрицательно определенной), если ее спектр расположен в правой (левой) части комплексной плоскости корней.

где $|\varepsilon_{ij}|$ — то максимальное число, при добавлении которого к элементам матрицы Δ она еще остается неособенной;
 $|\bar{a}_{ij}|$ — элементы матрицы Δ^{-1} , обратной к матрице Δ .
 Выражение (19) можно преобразовать к виду [12]

$$\max |\varepsilon_{ij}| \leq \frac{\delta}{\sum_{ij} |\bar{A}_{ij}|}, \quad (i, j = 1, 2, \dots, n), \quad (19a)$$

где δ и $|\bar{A}_{ij}|$ — определитель и миноры матрицы (18).

Таким образом, максимальное приращение, которое можно дать элементам матрицы Δ , прямо пропорционально значению последнего определителя Гурвица.

Предположим, что область G является замкнутой, а функция $\delta(k_1, \dots, k_n)$ непрерывной в любой точке этой области. Эти условия необходимы и достаточны для существования наибольшего (наименьшего) значения функции (вторая теорема Вейерштрасса). Эти условия для энергетических задач, как правило, выполняются [17], поэтому функция δ в области параметров регулирования имеет строгий максимум.

Итак, $\delta = f(k_i)$, $(i = 1, 2, \dots, n)$.

Идея метода построения области устойчивости состоит в следующем. Найдем вектор K , при котором последний определитель Гурвица имеет максимальное значение. Теперь в эту точку нужно перенести начало координат и произвести сечение области плоскостями $k_1 k_2, k_1 k_3, \dots, k_1 k_n; k_2 k_3, k_2 k_4, \dots, k_2 k_n; k_3 k_4, k_3 k_5, \dots, k_3 k_n; \dots; k_{n-1} k_n$ число которых в общем случае определится как $\frac{1}{2} N(N-1)$, где N — число параметров регулирования. Построение области устойчивости в двух каких-либо параметрах производится аналогично рассмотренному выше, однако движение при этом всегда начинается из точки с максимальным значением δ . Так как в устойчивой части число переходов по уравнениям (15), (16) одинаково, отпадает надобность в отыскании оптимального алгоритма.

Для нахождения максимума функции δ можно использовать метод скорейшего спуска. Это метод последовательного приближения вектора K к его оптимальному значению $K_{\text{опт}}$, при котором последний определитель Гурвица имеет максимальное значение. При этом на каждом приближении вектор K_i изменяется на величину ΔK_i , где ΔK_i — поправка к вектору предыдущего приближения.

Поправка ΔK_i по направлению совпадает с направлением наибольшего возрастания δ . Направление, в котором функция $\delta(k_i)$ возрастает быстрее всего, определяется градиентом $\nabla \delta$, т. е. вектором, компоненты которого суть частные производные функции δ по регулируемым параметрам k_i

$$\nabla \delta = \left(\frac{\partial \delta}{\partial k_1}, \dots, \frac{\partial \delta}{\partial k_n} \right). \quad (20)$$

Изменение вектора регулируемых параметров определится как

$$\Delta K = \nabla \delta \cdot t, \quad (21)$$

где t — шаг (достаточно малое число).

По новым параметрам

$$K_i = K_{i-1} + \Delta K_i \quad (22)$$

определяется функция δ и процесс повторяется, пока значение последнего определителя Гурвица не приблизится с достаточной степенью точности к максимуму.

Признаком достаточного приближения к максимуму функции является

$$|\nabla \delta| \leq \xi_v, \quad (23)$$

$$\frac{\delta_v - \delta_{v-1}}{\delta_v} \leq \xi_n,$$

где ξ_v — достаточно малое число, ξ_n — допустимая относительная погрешность отыскания экстремума функции.

Операторная схема алгоритма, реализующего метод скорейшего спуска, имеет вид

$$\begin{array}{ccccccc} & \downarrow & & \uparrow & & & \\ A_1 & A_2 & P_3 & A_4 & A_5 & P_6 & A_7 \\ & \uparrow & & & & & \downarrow \end{array} \quad (24)$$

Здесь A_1 — нахождение первой устойчивой точки;

A_2 — формирование коэффициентов характеристического полинома (3);

P_3 — проверка устойчивости по формулам (15) или (16) (если система не устойчива, управление передается оператору A_1 , устойчива — A_4);

A_4 — вычисление градиента функции δ по формуле (20);

A_5 — вычисление шага и нового вектора;

P_6 — проверка достигнутой точности вычисления по условию (23) (если заданная точность достигнута, управление передается оператору A_7 , если нет — оператору A_2);

A_7 — построение сечений области устойчивости. Граница устойчивости находится по формуле (17).

Одно из важных условий сходимости вычислительного процесса — рациональный выбор шага. Движение с постоянным шагом иррационально, так как при большом шаге есть опасность пройти точку максимума и выйти за область устойчивости или вычислительный процесс будет колебаться около точки максимума с большой амплитудой, не достигая заданной точности. При малом шаге процесс будет очень медленно сходиться.

Рассмотрим возможные методы, позволяющие менять шаг при нахождении точки максимума, основанные на работах Л. А. Круммы.

По первому методу шаг меняется в зависимости от угла поворота вектор-градиента в двух соседних точках и шаг принимается обратно пропорциональным кривизне силовой линии. Такой метод неприменим при малой кривизне силовой линии, а при большой кривизне этот метод также не дает больших преимуществ.

По второму методу используется для вычисления каждого последующего шага способ касательных. При этом вектор K рассматривается как функция одного переменного l , вызывающего изменение K в направлении наибольшего возрастания функции δ в точке исходного приближения, т. е. в направлении $\nabla \delta$. Таким образом, функцию δ будем рассматривать как функцию одного параметра l . Максимум этой функции

определяется уравнением $\frac{\partial \delta}{\partial t} = 0$, которое решается методом Ньютона

$$t_{i+1} = t_i + \frac{\frac{\partial \delta_i}{\partial t}}{\frac{\partial^2 \delta_i}{\partial t^2}}, \quad (i = 1, 2, \dots, n) \quad t_0 = 0, \quad (25)$$

где

$$\frac{\partial \delta_i}{\partial t} \approx \frac{\Delta \delta_i}{\Delta t}, \quad \frac{\partial^2 \delta_i}{\partial t^2} \approx \frac{\frac{\partial \delta_{i+1}}{\partial t} - \frac{\partial \delta_i}{\partial t}}{\Delta t}.$$

Оптимизация в данном направлении идет до тех пор, пока производная $\frac{\partial \delta}{\partial t}$ с заданной точностью не приближается к нулю, т. е. до выполнения условия

$$\left| \frac{\partial \delta}{\partial t} \right| \leq \xi, \quad (26)$$

где ξ — достаточно малое число.

Это можно геометрически интерпретировать как нахождение максимума функции одного переменного $\delta(t)$, причем t меняется вдоль направления, заданного начальным градиент-вектором $\nabla \delta_0$. В точке максимума K' функции $\delta(t)$ векторы $\nabla \delta_0$ и $\nabla \delta'$ становятся ортогональными и их скалярное произведение равно нулю:

$$\frac{\partial \delta}{\partial t} = \frac{\partial \delta}{\partial k} \cdot \frac{\partial k}{\partial t} = \nabla \delta_0 \nabla \delta' = 0. \quad (26a)$$

В этой точке направление оптимизации меняется и идет по направлению, определяемому вектор-градиентом в точке K' . Смена направлений идет до тех пор, пока режим достаточно близко не приближается к оптимальному, определяемому выражением (23).

При выполнении условия (26) не требуется высокой точности. От точности выполнения этого условия зависит только момент смены направления движения.

Этот метод обеспечивает достаточно быструю сходимость.

По третьему методу функция δ рассматривается как функция одного параметра t , но в этом случае t меняется не по прямой, а по кривой линии, заданной дифференциальным уравнением

$$\frac{\partial K}{\partial t} = F(K). \quad (27)$$

Производная $\frac{\partial \delta}{\partial t}$ в i -й точке имеет вид

$$\frac{\partial \delta}{\partial t} = \frac{\partial \delta}{\partial K} \cdot \frac{\partial K}{\partial t} = \nabla \delta F(K). \quad (28)$$

В качестве расчетной кривой можно выбрать силовую линию поля, которая быстрее всего приводит к максимуму. Уравнение такой кривой

$$\frac{\partial K}{\partial t} = \nabla \delta, \quad (29)$$

т. е. в данном случае $F(K) = \nabla \delta$. Тогда для производной имеем

$$\frac{\partial \delta}{\partial t} = \nabla \delta \cdot \nabla \delta = (\nabla \delta)^2.$$

В этом случае шаг, согласно выражению (25), определится как

$$t_{i+1} = t_i + \frac{|\nabla \delta|}{2 \frac{\partial |\nabla \delta|}{\partial t}}. \quad (30)$$

Процесс идет до тех пор, пока не будет выполняться условие (26), т. е. шаг выбирается аналогично рассмотренному выше случаю. По четвертому методу шаг вычисляется в предположении, что функция $\delta(k_1, \dots, k_n)$ линейна в сферической окрестности любой точки с радиусом, равным длине шага. Тогда шаг вычисляется по формуле

$$t = \frac{\Delta k}{|\nabla \delta|},$$

где Δk — величина пробного шага при вычислении градиента функции; $|\nabla \delta|$ — модуль градиента.

На рис. 2 приведены линии равного значения предпоследнего определителя Гурвица (линии равного значения последнего определителя Гурвица отличаются только масштабом) и линии равного значения критерия Бромберга — Цыпкина. Заштрихованная часть — область комплексных значений корня. Необходимо отметить, что если точка принадлежит области устойчивости, то последний определитель Гурвица всегда положителен. Но возможны и такие случаи, когда δ положителен, а система не устойчива [1].

При использовании градиентного метода построения областей устойчивости движение необходимо начинать с устойчивой точки. Эту точку можно найти различными способами: выбор координат по закону случайных чисел, применение «приближенных» методов [13], минимизация специального функционала и т. д. [8, 19].

Значения параметров регулирования при этом ограничиваются исходя из условия положительности величины коэффициентов характеристического уравнения, наибольшей величины параметров регулирования и т. д.

Очевидно, что задача нахождения области устойчивости в пространстве многих параметров регулирования может решаться и тогда, когда $k_{l \min} \leq k_l \leq k_{l \max}$, т. е. при заранее заданных ограничениях. Разумеется, вместо рассмотренного случая максимизации функции δ может быть максимизировано выражение (19). Процесс максимизации будет протекать аналогично рассмотренному выше, однако необходимость обращения матрицы делает его менее желательным. Следует отметить, что благодаря специальному виду матрицы Δ , обратную матрицу в этом случае целесообразно находить приведением матрицы Δ к единичной матрице E [18] путем элементарных преобразований строк.

При сравнении вариантов системы с различными параметрами можно избежать построения областей устойчивости, если вписать в данную область гиперсферу, радиус которой определяется минимальным значением параметров регулирования, а центр расположен в точке с максимальным значением δ или $|\varepsilon|$. Для наглядного представления многомерной области устойчивости целесообразно строить границы области в двухмерных ортогональных сечениях этого пространства.

При построении области устойчивости в пространстве двух каких-либо параметров k_i и k_{i+1} в большинстве случаев достаточно найти восемь точек, находящихся на границе области (положительных k_i и k_{i+1} , отрицательных $\bar{k}_i$ и $\bar{k}_{i+1}$, сочетания $k_i k_{i+1}$, $k_i \bar{k}_{i+1}$, $\bar{k}_i k_{i+1}$, $\bar{k}_i \bar{k}_{i+1}$). Шаг движения по координатам k_i и k_{i+1} при этом предполагается одинаковым.

При этом точек, принадлежащих области устойчивости, будет $4N$, где N — число регулируемых параметров.

Для рассматриваемого примера компоненты вектора $k_{i \text{ опт}}$ ($i = 0, 1, 2$), при которых $\delta_{\text{max}} = 0,487961 \cdot 10^7$, равны 2,502203; 3,801518; 1,013100. Если принять $k_{\text{опт}}$ за начало координат, то граница области устойчивости определится координатами $k_0 = 1,8$; $\bar{k}_0 = -1,81$; $k_1 = 1,01$; $\bar{k}_1 = -0,98$; $k_2 = 0,222$; $\bar{k}_2 = -0,215$.

В заключение необходимо отметить простоту и экономичность изложенного выше метода.

ВЫВОДЫ

1. Для получения характеристического уравнения сложной многомашиной энергосистемы целесообразно использовать первую интерполяционную формулу Ньютона, дающую возможность эффективно программировать расчет характеристического уравнения такой системы на ЭЦВМ.

2. При исследовании устойчивости сложных энергетических систем характеристическое уравнение получается высокого порядка. Поэтому при выделении границы области устойчивости необходимо производить выбор оптимального критерия устойчивости, что приводит к сокращению времени решения задачи.

3. Применение градиентного метода для нахождения максимума последнего определителя Гурвица в пространстве параметров регулирования позволяет произвести сечение области устойчивости рядом плоскостей, проходящих через найденную точку, или вписать в данную область устойчивости гиперсферу с центром в этой точке. Это позволяет наглядно представить область устойчивости и эффективно использовать счетную технику.

Новосибирский
электротехнический институт

Поступила в редакцию
8/V 1964

ЛИТЕРАТУРА

1. М. А. Айзерман. Теория автоматического регулирования двигателей. М., Гостехиздат, 1952.
2. Е. П. Попов. Динамика систем автоматического регулирования. М., Гостехиздат, 1954.
3. И. В. Линткенс, С. Н. Гамазин, Н. Джанардан. Анализ статической устойчивости сложных электросистем на ЭЦВМ средней мощности. — Изв. АН СССР, Энергетика и транспорт, 1964, № 6.
4. Г. С. Иоффе, Н. П. Лапшин. Построение области устойчивости линейной системы автоматического регулирования в пространстве ее параметров. — Докл. ТСХА (Моск. с.-х. акад.), 1963, вып. 81.
5. Л. А. Цукерник, Н. А. Качанова. Анализ статической устойчивости сложных энергосистем при помощи электронных счетных машин. — Электричество, 1957, № 7.
6. Б. М. Каган, Т. М. Тер-Микаэлян. Решение инженерных задач на автоматических цифровых вычислительных машинах, ГЭИ, 1958, Энергия, 1964.

7. В. А. Веников. Электромеханические переходные процессы в электрических системах. ГЭИ, 1958.
8. В. Ф. Куров. Матричные алгоритмы для анализа устойчивости в «малом» сложной энергосистеме. — Изв. АН СССР, Энергетика и транспорт, 1965, № 10.
9. Л. В. Цукерник. Обобщение уравнений динамики сложной энергосистемы и применение электронной счетной машины для анализа устойчивости. — Изв. АН СССР, № 3, ОТН, 1956.
10. Л. В. Цукерник. Анализ матрицы коэффициентов уравнений возмущенного движения сложной энергетической системы и определение порядка характеристического уравнения. — Вопросы устойчивости и автоматизации энергосистем (Сб. трудов Ин-та электротехники АН УССР, 1959, вып. 16).
11. Л. В. Цукерник. Матричные алгоритмы характеристических уравнений для анализа устойчивости в «малом» сложной энергосистеме. — Научные доклады высшей школы, «Энергетика», 1959, № 1.
12. Б. И. Демидович, Н. А. Марон. Основы вычислительной математики. М., Физматгиз, 1960.
13. М. Пароди. Локализация характеристических чисел матриц и ее применение. М., ИЛ, 1960.
14. В. Ф. Куров. Модификация критерия Ю. И. Неймарка. — Изв. СО АН СССР, сер. техн. наук, 1964, № 10.
15. В. Л. Загускин. Справочник по численным методам решения уравнений. Физматгиз, 1960.
16. М. А. Айзерман. Лекции по теории автоматического регулирования. М., Физматгиз, 1958.
17. В. М. Матюхин. О существовании областей устойчивости регулируемой синхронной машины. — Изв. АН СССР, ОГН, Энергетика и транспорт, 1963, № 3.
18. А. П. Мишина, И. В. Проскуряков. Высшая алгебра. Физматгиз, 1962.
19. Г. А. Дидук. Решение некоторых задач анализа и синтеза линейных стационарных систем корневыми методами с помощью электронных цифровых вычислительных машин. Автореф. канд. дис. Л., 1964.

Ю. Т. БОРЩЕВСКИЙ
ЗАВИСИМОСТЬ ФОРМЫ ГРЯД
ОТ СТРУКТУРЫ ТУРБУЛЕНТНОСТИ
НАНОСОНЕСУЩЕГО ПОТОКА

Выявлению закономерностей формирования и движения волнистого рельефа в пустынях и руслах рек посвящено большое количество исследований [1, 2 и др.]. Ощутимых результатов в решении этого вопроса достигла Н. С. Знаменская [3], которая на основе обширного экспериментального материала установила некоторые критериальные связи. В работе [4] К. П. Месхели приводит безразмерные критерии, характеризующие процесс формирования волнистого рельефа. Однако им указано, что установить характер зависимости между критериями «теоретическим путем пока не представляется возможным».

Выявление критериальных взаимосвязей важно для практики, так как на их основе можно вести надежные инженерные расчеты. В связи с этим в настоящей работе поставлена задача — на основании [5] выявить зависимость формы и относительных размеров гряд от критериев, связанных с макротурбулентностью естественных потоков.

В работе [5] было показано, что при движении квазиравномерных двухфазных потоков, насыщенных твердыми частицами, появляются устойчивые, т. е. незатухающие во времени, крупномасштабные пульсации компонент скорости жидкой фазы. Для угловой частоты ω_m гармоник устойчивых пульсаций было получено выражение

$$\omega_m = 2\sqrt{2} m_* \sqrt{av_* \alpha (c + iav_* \alpha)} + iab, \quad (1)$$

$$m_* = 2m + 1, m = 0, 1, 2, 3, \dots,$$

где $\alpha = \frac{2\pi}{l}$ — волновое число (l — длина волны);

v_* — динамическая скорость;

b — придонная скорость;

a — опытная постоянная.

Величина c определяется из формулы

$$v_1 = b + cx_3$$

(x_3 — поперечная, x_1 — продольная координаты), аппроксимирующей профиль продольных осредненных скоростей v_1 жидкой фазы с непрерывной кривизной профилем, составленным из отрезков прямых.

Выражение (1), устанавливающее зависимость ω_m от условий движения, существующих на дне потока, может быть записано в следующем виде:

$$\omega_m = 2\sqrt{2} m_* \sqrt{\rho_*} e^{\frac{\theta}{2}} + iab, \quad (3)$$

где $\rho_* = av_* \alpha [c^2 + (av_* \alpha)^2]^{1/2}$, $\theta = \arctg \frac{av_* \alpha}{c}$.

В случае устойчивых пульсаций величина ω_m должна быть чисто мнимой.

Из (3) следует, что это возможно при

$$\theta = n\pi \quad (n = 1, 3, 5, \dots). \quad (4)$$

Поэтому, используя известное соотношение

$$\theta = \arctg(-ith\theta),$$

выражение (1) в окончательном виде можно переписать так:

$$\omega_m = 2\sqrt{2} m_* ci \sqrt{\tanh n\pi (1 + \tanh n\pi)} + iab. \quad (5)$$

При соблюдении условия (4) длина волны l пульсаций должна быть достаточно большой по сравнению с величинами a и v_* . Если длина рельефных образований определяется длиной волны устойчивых пульсаций скорости жидкой компоненты, то, в силу малой скорости перемещения гряд w_* , равной $w_* = \frac{\omega_m}{\alpha}$, можно положить, что $\omega_m = 0$. Тогда для α имеем выражение

$$\alpha = -2\sqrt{2} m_* \frac{c}{b} \sqrt{\tanh n\pi (1 + \tanh n\pi)} = (2m + 1) D \frac{c}{b}. \quad (6)$$

Из аппроксимирующей формулы (2) следует, что величина c , входящая в (6), равна производной $\partial v_1 / \partial x_3$. Для определения v_1 и $\partial v_1 / \partial x_3$ могут быть применены следующие известные формулы [6]:

$$v_1 = \frac{v_*}{a} \sqrt{\ln \frac{x_3}{\gamma(x_3)}}, \quad \frac{\partial v_1}{\partial x_3} = \frac{v_*^2}{v} \cdot \frac{1}{1 + \gamma(x_3)}, \quad (7)$$

где a — опытная константа;

v — кинематический коэффициент вязкости;

$\gamma(x_3)$ — функция, которая на некотором расстоянии от дна принимает постоянное значение, равное крупности твердых частиц δ_s [6].

Поэтому одно из значений c будет равно

$$c \approx \frac{\partial v_1}{\partial x_3} = A(\delta_s) v_*^2 \lambda_t, \quad (8)$$

где A — постоянная, зависящая от δ_s ;

λ_t — единичный множитель, имеющий размерность $[t]^{-1}$;

t — время.

На основании (2) и (7) можно найти жидкий расход Q через единицу длины фронта сечения потока, для чего необходимо их проинтегрировать в интервале $0 < x_3 < H$, где H — глубина потока. Используя далее формулы для Q , нетрудно получить для коэффициента c другое выражение:

$$c = \frac{2v_*}{aH} \left[\int_0^H \sqrt{\ln \frac{x_3}{\delta_s}} dx_3 - \frac{aHb}{v_*} \right] = B v_* \lambda_t, \quad (9)$$

где $B(H, \delta_s)$ — величина, зависящая от глубины потока и крупности твердых частиц.

Перемножив почленно (8) и (9), будем иметь окончательно

$$c = v_*^{3/2} \lambda_t \sqrt{AB} = D_1 \lambda_t v_*^{3/2}. \quad (10)$$

Умножив обе части выражения (6) на абсолютную высоту рельефных образований Δ и используя формулу (10), получим

$$\delta = \frac{\Delta}{l} = \frac{D_1 m_*}{2\pi} \cdot \frac{(\Delta \lambda_t) v_*^{3/2}}{b}. \quad (11)$$

В последнем выражении произведение $\Delta \lambda_t$ представляет собой некоторую скорость, следовательно, можно положить, что $\Delta \lambda_t$ пропорциональна b . Поскольку величина D_1 зависит от глубины потока H и крупности наносов δ_s , от которой, в свою очередь, зависит их гидравлическая крупность w , умножив и разделив (11) на $\sqrt{g H w}$ (где g — ускорение силы тяжести), можем записать

$$\delta = Fr \left(\frac{v_*}{w} \right)^{1/2} E, \quad (12)$$

где $Fr = v_* (g H)^{-1/2}$ — число Фруда;

$E = D_1 (g H w)^{1/2}$ — некоторая величина.

В формуле (12) критерии Fr и $\frac{v_*}{w}$ характеризуют скоростной режим движения потока и наносов. Величина E зависит только от геометрических параметров течения и крупности наносов. Поэтому можно предположить, что E — величина постоянная. Окончательно же вопрос о характере E может быть решен на основании анализа опытного материала.

Для проверки формулы (12), представленной в видоизменениях

$$\delta = E m_* Fr \sqrt{\frac{v_{1\text{ср}}}{w}}, \quad (13)$$

$$m_* = 2m + 1 = \delta \left(E Fr \sqrt{\frac{v_{1\text{ср}}}{w}} \right)^{-1} = 1, 3, 5, \dots,$$

где $v_{1\text{ср}}$ — средняя по сечению продольная скорость потока, были использованы опытные данные автора и Н. С. Знаменской [3].

Оказалось, что при $m_* = 2m + 1 = 3$ и $E = 0,0122$ расчетные значения числа Fr при $\delta = \text{const}$ практически полностью согласуются с эмпирическими кривыми Н. С. Знаменской, полученными для довольно широкого диапазона изменения среднего диаметра $d_{\text{ср}}$ твердых частиц (рис. 1).

Из рис. 2 также нетрудно заметить, что опытные точки, полученные как на модели, так и в натуре, достаточно близко располагаются около соответствующих прямых, проведенных при $m_* = 1$, $m_* = 3$ и $m_* = 5$.

Для мезоформ, имеющих длину $l > 100$ м, коэффициент E оказался равным $E = 10^{-3}$. Это обстоятельство свидетельствует о том, что закономерности формирования микроформ и мезоформ различны (в количественном отношении), на что указывалось, например, Знаменской.

Если в формулу (6) ввести замену (9), то средствами, примененными при выводе (12), для глубокого потока получим критериальные зависимости

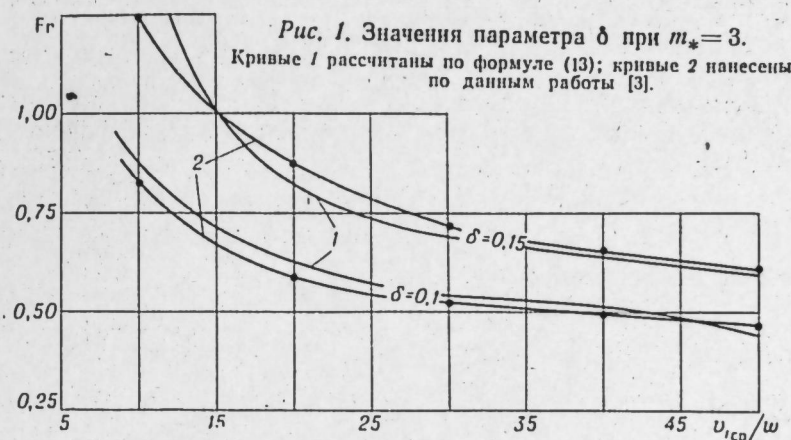
$$\delta = E_1 Fr_* = E_2 Re_*, \quad (14)$$

где $Fr = v_* (g \Delta)^{-1/2}$, $Re = v_* d_{\text{ср}} \nu^{-1}$ — соответственно числа Фруда и Рейнольдса;

$d_{\text{ср}}$ — средний диаметр твердых частиц;

E_1, E_2 — постоянные коэффициенты.

Сравнение результатов, полученных с помощью (14), с опытными данными К. П. Месхели показало, что (14) полностью согласуется с опытом в пределах значений $Re_* = 0 \div 13$ и $Fr_* > 0,01$. При $Re_* = 13 \div 16$ и $Fr_* = 0 \div 0,01$ опытные точки отклоняются от соответствующих расчетных кривых.



Необходимо отметить, что экспериментально Н. С. Знаменской удалось получить большое разнообразие параметра δ . В естественных условиях, особенно в условиях пустынь, δ изменяется в довольно узких пределах (рис. 3). Это обстоятельство свидетельствует о том, что в естественных водных потоках характер движения жидкости усложняется за счет стесняющего действия берегов [5]. Несмотря на это, критериальные связи (12) и (14), полученные теоретическим путем, соответствуют эксперименту. С использованием формул (6) и (8) могут быть получены также другие критериальные связи.

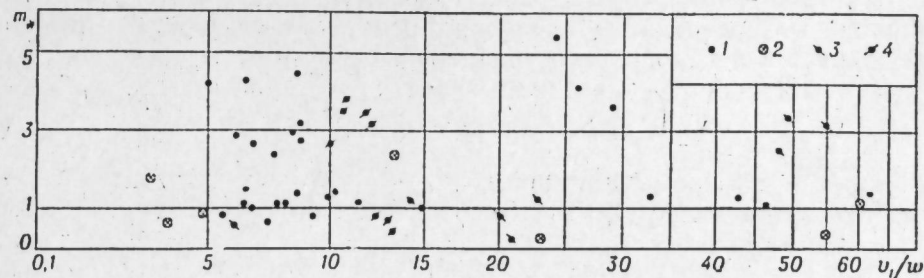


Рис. 2. Экспериментальные значения параметра $m_* = 2m + 1$. По данным [3]: 1 — опыты в гидравлическом лотке при среднем диаметре твердых частиц $d_{\text{ср}} = 0,8$ и $0,18$ мм; 2 — микроформы; 3 — мезоформы на р. Припять; 4 — микроформы на р. Бердь (данные автора), $d_{\text{ср}} = 0,5$ мм.

Другим важным параметром, определяющим размеры рельефных образований, является величина φ_0 , равная $\varphi_0 = \frac{\Delta}{H}$.

Если абсолютная высота рельефных образований Δ определяется амплитудами устойчивых пульсаций A_m , то для оценки φ_0 необходимо

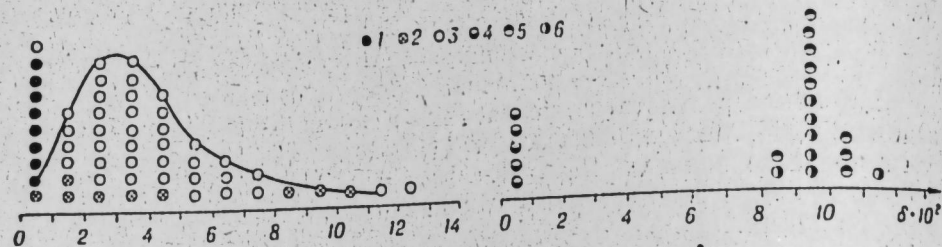


Рис. 3. Вероятность повторения параметра δ :

а) в водных потоках по данным [3]: 1 — мезоформы, 2 — микроформы в природе, 3 — в гидравлическом лотке; б) в условиях пустыни: 4 — микроформы, 5 — мезоформы (данные автора), 6 — мезоформы (данные [4]).

найти эти амплитуды. Определение распределения A_m по сечению потока связано с интегрированием неоднородного дифференциального уравнения [5]:

$$\varepsilon \frac{\partial^2 \eta}{\partial \varepsilon^2} + (1 - \varepsilon) \frac{\partial \eta}{\partial \varepsilon} + m \eta = f, \quad (15)$$

где введены обозначения:

$$\varepsilon = x_3 \sqrt{2\alpha \left(\frac{c}{av_*} + i\alpha \right)} = \alpha x_3 \sqrt{2 \operatorname{cth} n\pi};$$

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial x_3^2} = \eta(\varepsilon) \exp \left(-\frac{\varepsilon}{2} - i\frac{\pi}{4} - i\omega_m t + i\alpha x_1 \right), \quad (16)$$

x_1 — продольная координата;

f — возмущающая функция, зависящая от насыщения потока примесями s ;

ψ — функция тока, удовлетворяющая выражениям

$$v_1 = \frac{\partial \psi}{\partial x_3}, \quad v_3 = -\frac{\partial \psi}{\partial x_1};$$

v_1 и v_3 — соответственно продольная и поперечная составляющие крупномасштабной пульсационной скорости жидкой компоненты.

В (15) величина m определяется формулой (1). Интеграл дифференциального уравнения (15) нужно искать в виде суммы решений однородного и неоднородного уравнений.

Для однородного уравнения имеем [7]:

$$\eta = L_m(\varepsilon), \quad m = 0, 1, 2, \dots, \quad (17)$$

где $L_m(\varepsilon)$ — полиномы Лагерра.

Подставляя далее (17) в (16), окончательно получим:

$$\psi = \frac{1}{\alpha} \left\{ C_1 \operatorname{sh} \alpha \varepsilon + C_2 \operatorname{ch} \alpha \varepsilon - e^{-H_*/2} \times \right. \\ \left. \times \left[\frac{1}{2\alpha} \operatorname{sh} \alpha (\varepsilon - H_*) + \operatorname{ch} \alpha (\varepsilon - H_*) \right] \right\} e^{i\alpha x_1 - i\omega t}, \quad (18)$$

где C_1 и C_2 — постоянные интегрирования;

$$H_* = H \sqrt{\frac{2p_*}{av_*\alpha}} \exp \frac{i\theta}{2} = H \cdot \alpha \cdot \sqrt{2 \operatorname{cth} n\pi}.$$

Определение интеграла неоднородного уравнения сводится к решению интегрального уравнения

$$\eta = \eta_0 + m \int_0^H G(\varepsilon, x) f(x) dx, \quad (19)$$

где x — вспомогательная переменная;

G — функция Грина;

η_0 — решение однородного уравнения.

При собственном значении $m=0$ решение неоднородного уравнения (15) тождественно совпадает с решением однородного уравнения, что свидетельствует о том, что возмущающая функция f не оказывает влияния на амплитуду первой гармоники устойчивых пульсаций A_0 . Амплитуда A_0 , как и угловая частота ω_0 (см. (1)), зависит только от условий движения потока вблизи твердой границы. Но, как видно из (1), угловая частота ω_m определяется одним и тем же выражением для всех гармоник. Это обстоятельство позволяет сделать предположение, что амплитуды A_m более высоких гармоник устойчивых пульсаций также определяются только условиями движения потока на твердой границе и слабо зависят от f . В этом случае выражение (18) будет общим решением уравнения (15).

Постоянные интегрирования в (18) должны быть определены с учетом граничных условий:

$$\psi \sim \frac{\partial \psi}{\partial x_1} \sim \frac{\partial \psi}{\partial x_3} \sim 0 \text{ при } x_3 = H, \quad (20)$$

$$\left. \begin{aligned} \psi &\neq 0 \\ \frac{\partial \psi}{\partial x_1} &\sim \frac{\partial \psi}{\partial x_3} \end{aligned} \right\} \text{ограничены при } x_3 = 0.$$

Как указано в работе [5], функция ψ должна быть откорректирована так, чтобы она учитывала наличие в потоке твердых примесей и удовлетворяла уравнению неразрывности пульсационного потока. В первом приближении для оценки высоты рельефа Δ в зависимости от амплитуд устойчивых пульсаций можно воспользоваться значением ψ в найденном виде.

Запишем (18) в следующем виде:

$$|\psi| = C_1 \operatorname{ch} \alpha p x_3 + C_2 \operatorname{sh} \alpha p x_3 = D e^{\alpha p x_3} + E e^{-\alpha p x_3}, \quad (21)$$

где C_1 , C_2 , D и E — постоянные коэффициенты;

$$p = \alpha \sqrt{2 \operatorname{cth} n\pi}.$$

Некоторые свойства функции ψ , модуль которой представлен в виде выражения (21), были показаны Ф. И. Франклем [8]. Представляет интерес провести дальнейший анализ этой функции.

В соответствии с (18) предположим, что амплитуды A_m пульсаций, определяющих форму рельефа, пропорциональны длине волн возмущений l_m , которые, в соответствии с (13), изменяются согласно отношению

$$l_0 : l_1 : l_2 = A_0 : A_1 : A_2 = 1 : \frac{1}{3} : \frac{1}{5}. \quad (22)$$

Тогда, используя эти гармоники, можно построить линию тока ψ , показанную на рис. 4. Нетрудно заметить, что кривая ψ по форме очень похожа на профиль бархана, высота которого выражается приближенным равенством

$$\Delta = 2(A_0 + A_1 + A_2),$$

причем высота этого бархана и расстояние между гребнями соседних барханов определяются преимущественно амплитудой A_0 и длиной волны l_0 первой гармоники.

Предположим, что структура макротурбулентности потока может определяться также следующими сочетаниями параметра m :

$$m=1, 2, 3; m=2, 3, 4 \quad \text{и т. д.}$$

Каждое сочетание обозначим через j_i (j_0 соответствует сочетанию $m=0, 1, 2$; j_1 — сочетанию $m=1, 2, 3$ и т. д.).

Если такие сочетания возможны и высота рельефных образований

Δ пропорциональна амплитуде пульсационных скоростей (т. е. v_{1cp}), то при данной глубине потока H должно быть справедливо отношение

$$\frac{\Delta(j_0)}{v_{1cp} H} : \frac{\Delta(j_1)}{v_{1cp} H} : \frac{\Delta(j_2)}{v_{1cp} H} = 1 : 1,31 : 1,49 = K_0 : K_1 : K_2. \quad (23)$$

Оказалось, что в пределах точности эксперимента теоретическая пропорция (23) действительно согласуется с результатами модельных и натурных наблюдений, полученных при различных глубинах для рельефа с $l \leq 3m$ (рис. 5). Из рис. 5 видно, что существенное отклонение опытных точек от соответствующих кривых наблюдается только для

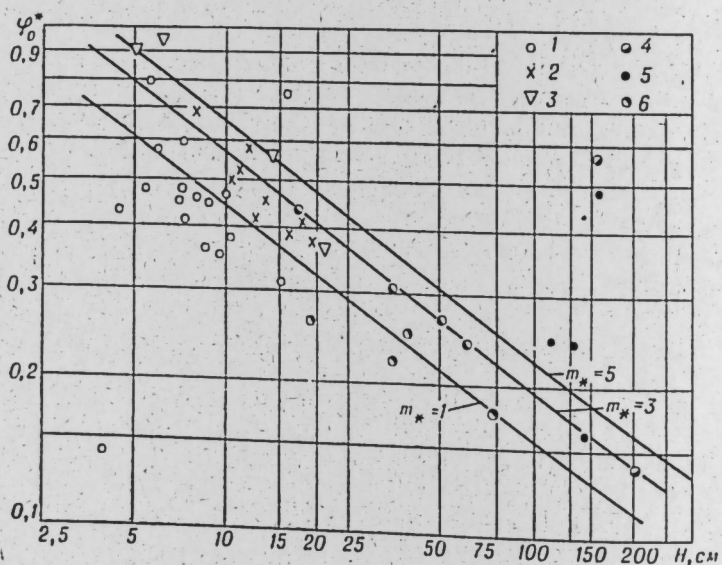


Рис. 5. Значения функции $\varphi_0^* = \varphi_0 / v_{1cp}$ в зависимости от глубины потока H :
1 — лоток, $m_* = 1$; 2 — лоток, $m_* = 3$; 3 — лоток, $m_* = 5$; 4 — р. Припять, $m_* = 3$; 5 — р. Припять, $m_* = 1$ (данные [3]); 6 — р. Бердь, $m_* = 1,3$ (данные автора).

мезоформ, имеющих $l > 100$ м. Нетрудно заметить также, что опытные значения величин $z = \frac{\Delta(j_i)}{v_{1cp} H K_i}$ должны лечь вдоль некоторой прямой, отражающей существование критериальной зависимости $z = z(H)$.

Данные рис. 5 свидетельствуют еще и о том, что в естественных потоках качественное изменение структуры турбулентности происходит скачкообразно. Следовательно, и форма рельефных образований должна иметь свои качественные границы. Экспериментально такие границы были установлены Н. С. Знаменской [3] и определены по ее данным следующими значениями параметра $\delta = \frac{\Delta}{l}$:

$$\delta = 0,04; 0,100; 0,150.$$

В соответствии с выражением (13) граничные значения δ равны 0,0333; 0,10; 0,167 и очень близки к экспериментальным.

Сопоставляя теоретические и экспериментальные данные, с учетом граничных условий (20) для функции тока ψ можно написать следующую окончательную формулу, отражающую дискретность спектра устойчивых турбулентных пульсаций в двухфазном потоке:

$$\psi = A v_{1cp} \left\{ (2k+5) [\operatorname{ch}(\alpha_{2k+5} \cdot \varepsilon) - \operatorname{sh}(\alpha_{2k+5} \cdot \varepsilon)] \cdot \exp[i\alpha_{2k+5} x_1 - i\omega_{2k+5} t] + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\operatorname{sh}[\alpha_{2k+n}(H_* - \varepsilon)]}{\operatorname{sh}(\alpha_{2k+n} H_*)} \cdot (2k+n) \cdot \exp[i\alpha_{2k+n} x_1 - i\omega_{2k+n} t] \right\}, \quad n=1, 3; k=0, 1, 2, \quad (24)$$

где k — начальные значения m в сочетаниях, определяющих структуру турбулентности: $k=0$ при $m=0, 1, 2$; $k=1$ при $m=1, 2, 3$ и т. д.;

$\alpha_{2k+n}, \omega_{2k+n}$ — соответствующее значение волновых чисел и угловых частот при данном сочетании гармоник устойчивых пульсаций скорости;

A — опытный коэффициент.

Интересно отметить, что при сочетании гармоник $m=2, 3, 4$ кривая ψ при $x_3=0$ дает чередующиеся высокие короткие и длинные плоские гряды. Такое явление, по мнению Н. С. Знаменской, имеет место при $\delta=0,15$ [3], что очень близко к теоретическому значению $\delta=0,167$.

Функция тока (24) не устанавливает какой-либо зависимости между структурой макротурбулентности у дна потока и состоянием его свободной поверхности. Это обстоятельство не позволяет по каким-либо внешним признакам определить параметры m , необходимые для расчета относительных размеров гряд $\delta = \Delta/l$ и $\varphi_0 = \Delta/H$.

На основании опытных данных, приведенных на рис. 5, для определения φ_0 может быть установлена следующая критериальная связь:

$$\frac{\varphi_0 \omega}{v_{1cp} K_i(m)} = A \sqrt{\frac{d_{cp}}{H}}, \quad (25)$$

где A — постоянная;

d_{cp} — средний диаметр частиц;

ω — гидравлическая крупность твердых частиц;

$K_i(m) = 1; 1,31; 1,49$ — коэффициенты, зависящие от параметра m_* .

Для выявления зависимости параметра $m_* = 2m + 1$ от формы русла рек необходимо провести дальнейшие исследования. Для пустынь можно рекомендовать значение $m_* = 3$.

Новосибирский институт
инженеров водного транспорта

Поступила в редакцию
15/IX 1964

ЛИТЕРАТУРА

1. М. А. Великанов. Динамика русловых потоков, т. II. М., 1955.
2. А. В. Караушев. Проблемы динамики естественных водных потоков. Л., Гидрометеониздат, 1960.
3. Н. С. Знаменская. Экспериментальное исследование грядового движения наносов.—Тр. ГГИ, вып. 108, Л., Гидрометеониздат, 1963.
4. К. П. Месхели. Гидравлическое моделирование эолового рельефа песков (природные условия, животноводство и кормовая база пустынь). Изд-во АН ТССР, Ашхабад, 1963.
5. Ю. Т. Борщевский. Влияние твердых примесей на спектр турбулентных пульсаций скорости жидкой компоненты двухфазного потока.—Изв. СО АН СССР, 1965, № 10, вып. 3, сер. техн. наук.
6. А. К. Дюнин. Механика метелей. Изд-во СО АН СССР, Новосибирск, 1963.
7. Э. Маделунг. Математический аппарат физики. Физматгиз, М., 1961.
8. Ф. И. Франкль. О движении песчаных дюн.—Докл. АН СССР, 1953, т. 89, № 1.

Ю. К. ГОРБУНОВ

ПОВЕРХНОСТНЫЙ ЭФФЕКТ В ФЕРРОМАГНИТНЫХ ОБОЛОЧКАХ С УЧЕТОМ ПЕРЕМЕННОЙ МАГНИТНОЙ ПРОНИЦАЕМОСТИ

Проникновение электромагнитной волны в проводящее тело, имеющее форму цилиндра: а) для случая поверхностного эффекта в электрической цепи, когда вектор напряженности электрического поля $\vec{E}$ параллелен оси цилиндра; б) для случая поверхностного эффекта в магнитной цепи, когда вектор напряженности магнитного поля $\vec{H}$ параллелен оси цилиндра, исследовано в работе [1].

Рассмотрим аналогичные случаи поверхностного эффекта в электрической и магнитной цепях для ферромагнитной оболочки (рис. 1). С подобными конструкциями приходится сталкиваться во многих конкретных устройствах.

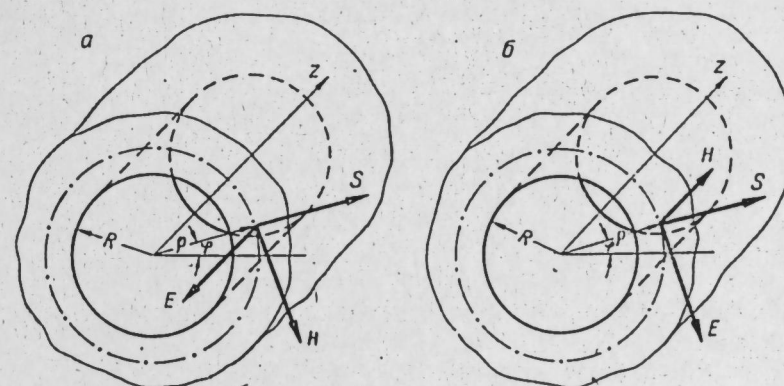


Рис. 1. Электромагнитное поле в ферромагнитном массиве при поверхностном эффекте:

а) в электрической цепи; б) в магнитной цепи.

Примем как заданные величины внутренний радиус оболочки R , удельную проводимость стали γ и ее магнитную проницаемость μ . Далее, полагаем, что удельная проводимость γ не зависит от интенсивности поля в стали, а величина проницаемости μ изменяется с изменением напряженности поля. Выберем направления осей координат и векторов напряженностей электрического и магнитного полей, как показано на рис. 1, а, б.

Полагаем, что толщина оболочки превышает глубину, на которой электромагнитная волна практически полностью затухает, и напряженность магнитного поля на внутренней поверхности оболочки задана и имеет значение

$$\dot{H}|_{\rho=R} = \dot{H}_e = H_{em} e^{j\omega t}. \quad (1)$$

Поскольку учет непостоянства магнитной проницаемости стали приводит к нелинейным дифференциальным уравнениям в частных производных, не поддающихся решению, воспользуемся приближенным методом Л. Р. Неймана [1] для цилиндрических волн.

При синусоидальном изменении напряженностей поля во времени исходные уравнения Максвелла для напряженности магнитного поля примут вид:

а) при поверхностном эффекте в электрической цепи (оболочка — проводник):

$$\frac{d^2 \dot{H}}{d\rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{d\dot{H}}{d\rho} - \frac{1}{\rho^2} \dot{H} - j\omega\gamma\dot{\mu}\dot{H} = 0, \quad (2)$$

б) при поверхностном эффекте в магнитной цепи (оболочка — экран):

$$\frac{d^2 \dot{H}}{d\rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{d\dot{H}}{d\rho} - j\omega\gamma\dot{\mu}\dot{H} = 0, \quad (3)$$

где

$$\gamma = \text{const}$$

$$\dot{\mu} = \mu \cdot e^{-j\psi} = f(H) \text{ — комплексная магнитная проницаемость.} \quad (4)$$

Значения напряженностей электрического поля легко могут быть получены после решения уравнений (2) и (3) из уравнений Максвелла: при поверхностном эффекте в электрической цепи

$$\dot{E} = -\frac{1}{\gamma} \left(\frac{d\dot{H}}{d\rho} + \frac{1}{\rho} \dot{H} \right), \quad (5)$$

при поверхностном эффекте в магнитной цепи

$$\dot{E} = -\frac{1}{\gamma} \frac{d\dot{H}}{d\rho}. \quad (6)$$

Принимая параболическую зависимость магнитной проницаемости от напряженности поля в стали [1] и учитывая соотношение (1), выразим значение магнитной проницаемости стали в виде

$$\mu = \mu_e \left(\frac{H}{H_e} \right)^{-\frac{n-1}{n}}, \quad (7)$$

где μ_e — модуль магнитной проницаемости стали на внутренней поверхности оболочки;

n — показатель параболы.

Для различных ферромагнитных материалов при слабых магнитных полях значение n лежит в пределах 0,3—0,7; при сильных полях — в пределах 4—20 [1].

Поскольку магнитная проницаемость μ зависит от напряженности магнитного поля H , которая, в свою очередь, является функцией координаты ρ , зададимся функциональной зависимостью магнитной проницаемости стали от координаты ρ по Нейману [1]:

$$\mu = \mu_e \left(\frac{\rho}{R} \right)^a. \quad (8)$$

Значение показателя a нужно выбрать таким образом, чтобы получились возможно более простые решения уравнений (2) и (3), удовлетворяющие кривой намагничивания, представленной в виде параболы.

С учетом соотношений (7) и (8) решения уравнений (2) и (3), соответствующие кривым намагничивания, имеют вид

$$\left| \frac{\dot{H}}{\dot{H}_e} \right| = \left(\frac{\mu}{\mu_e} \right)^{\frac{n}{1-n}} = \left(\frac{\rho}{R} \right)^{\frac{an}{1-n}}. \quad (9)$$

С другой стороны, подставляя (8) в уравнение (2), получим при поверхностном эффекте в электрической цепи уравнение Бесселя в цилиндрических координатах:

$$\frac{d^2 \dot{H}}{d\rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{d\dot{H}}{d\rho} - \frac{1}{\rho^2} \dot{H} - j\omega\gamma\dot{\mu}_e \left(\frac{\rho}{R} \right)^a \dot{H} = 0. \quad (10)$$

Оно имеет решение [2]

$$\frac{\dot{H}}{\dot{H}_e} = \frac{H_0^{(1)} \left[\frac{2\sqrt{2}}{a+2} k R \left(\frac{\rho}{R} \right)^{\frac{a+2}{2}} e^{j\left(\frac{3}{4}\pi - \frac{\psi'}{2}\right)} \right]}{H_0^{(1)} \left[\frac{2\sqrt{2}}{a+2} k R e^{j\left(\frac{3}{4}\pi - \frac{\psi'}{2}\right)} \right]}, \quad (11)$$

где

$$k = \sqrt{\frac{\omega\gamma\mu_e}{2}},$$

$H_0^{(1)} \frac{1}{a+2}$ — функция Ганкеля первого рода порядка $\frac{2}{a+2}$.

При поверхностном эффекте в магнитной цепи уравнение (3) примет вид:

$$\frac{d^2 \dot{H}}{d\rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{d\dot{H}}{d\rho} - j\omega\gamma\dot{\mu}_e \left(\frac{\rho}{R} \right)^a \dot{H} = 0. \quad (12)$$

Это также уравнение Бесселя, имеющее решение вида [2]:

$$\frac{\dot{H}}{\dot{H}_e} = \frac{H_0^{(1)} \left[\frac{2\sqrt{2}}{a+2} k R \left(\frac{\rho}{R} \right)^{\frac{a+2}{2}} e^{j\left(\frac{3}{4}\pi - \frac{\psi'}{2}\right)} \right]}{H_0^{(1)} \left[\frac{2\sqrt{2}}{a+2} k R e^{j\left(\frac{3}{4}\pi - \frac{\psi'}{2}\right)} \right]}, \quad (13)$$

где $H_0^{(1)}$ — функция Ганкеля первого рода нулевого порядка.

Решения уравнений (10) и (12) должны удовлетворять соотношению (9), т. е. должны быть справедливы равенства:

при поверхностном эффекте в электрической цепи

$$\left| \frac{H_0^{(1)} \left[\frac{2\sqrt{2}}{a+2} k R \left(\frac{\rho}{R} \right)^{\frac{a+2}{2}} e^{j\left(\frac{3}{4}\pi - \frac{\psi'}{2}\right)} \right]}{H_0^{(1)} \left[\frac{2\sqrt{2}}{a+2} k R e^{j\left(\frac{3}{4}\pi - \frac{\psi'}{2}\right)} \right]} \right| = \left(\frac{\rho}{R} \right)^{\frac{an}{1-n}}, \quad (14)$$

при поверхностном эффекте в магнитной цепи

$$\left| \frac{H_0^{(1)} \left[\frac{2\sqrt{2}}{a+2} kR \left(\frac{\rho}{R} \right)^{\frac{a+2}{2}} e^{j\left(\frac{3}{4}\pi - \frac{\psi'}{2}\right)} \right]}{H_0^{(1)} \left[\frac{2\sqrt{2}}{a+2} kR e^{j\left(\frac{3}{4}\pi - \frac{\psi'}{2}\right)} \right]} \right| = \left(\frac{\rho}{R} \right)^{\frac{an}{1-n}} \quad (15)$$

В этих уравнениях показатель a зависит от параметров оболочки kR , показателя кривой намагничивания стали n , угла потерь на гистерезис ψ' и относительной глубины проникновения волны в оболочку $\frac{\rho}{R}$.

Однако, как показал расчет, при заданных значениях kR и n можно усреднить значение a при изменениях угла ψ' в пределах от 0 до 30° и величины ρ в пределах от R до $R + \delta_{0,05}$.

Здесь $\delta_{0,05}$ — глубина, на которой электромагнитная волна практически полностью затухает. Это усреднение возможно потому, что показатель a мало изменяется при изменении в указанных пределах величин ψ' и $\frac{\rho}{R}$ и к тому же сами зависимости носят приближенный характер.

На рис. 2 приведены кривые зависимостей показателя a от параметра kR при заданных значениях n . Кривые построены на основании уравнений (14) и (15) при $\psi' = 0$ и для $n = 0,5$ при $\psi' = 10$ и 30°.

Если известна зависимость a от kR и n , то в случае поверхностного эффекта в магнитной цепи напряженность магнитного поля в оболочке может быть рассчитана по уравнению (13).

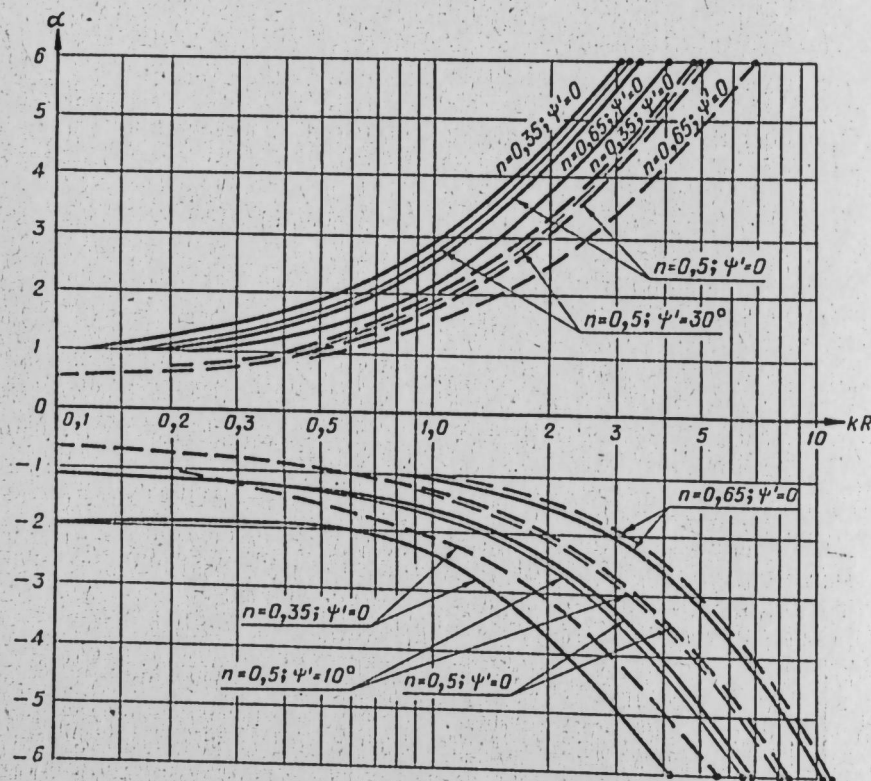


Рис. 2. Зависимость коэффициента a от kR при заданном значении n . — при электрическом поверхностном эффекте в оболочке; — — — при магнитном поверхностном эффекте в оболочке.

Однако при поверхностном эффекте в электрической цепи можно воспользоваться выражением (11) лишь при значениях $a = -\frac{2}{3}, -2$ и 2. В остальных случаях для определения функций Ганкеля дробного порядка от комплексного аргумента необходимо использовать представления этих функций в виде бесконечных рядов, что усложняет расчет распределения электромагнитного поля в оболочке.

Для аналогичного случая электрического поверхностного эффекта в проводнике в работе [1] приняты значения $a = \pm 2$.

В таблице приведены формулы для определения отношения напряженности электрического поля к напряженности магнитного поля на внутренней поверхности ферромагнитной оболочки, полученные на основании уравнений (5), (6), (11) и (13). Формулы 2-й и 8-й строк этой таблицы применимы для электрического и магнитного поверхностных эффектов в оболочке в том случае, если известна зависимость a от kR и n . Это затрудняет их практическое использование. Однако они послужили основанием для получения эмпирических формул, приведенных в 6-й и 9-й строках таблицы. Частные случаи формулы 2-й строки при $a = -\frac{2}{3}, -2$ и 2 приведены в 3-й, 4-й и 5-й строках этой таблицы. Для

сравнения в 1-й строке таблицы приведены формулы для плоской волны в ферромагнитном массиве при $\mu = \text{var}$, полученные в [1]. В 7-й и 10-й строках даны формулы для поля в оболочке при постоянной магнитной проницаемости.

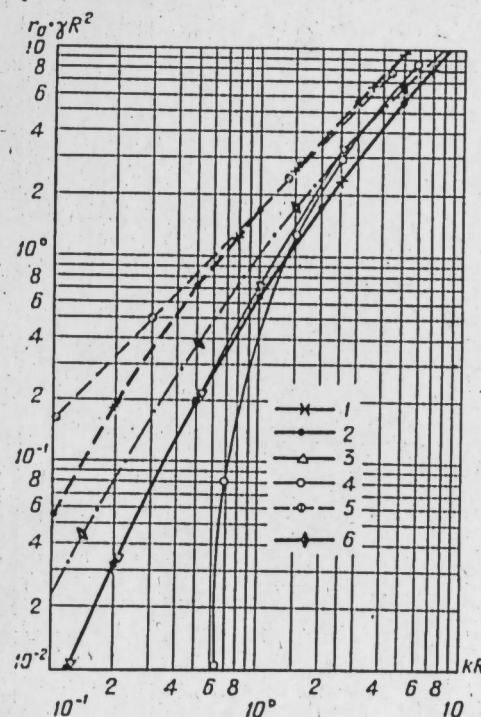


Рис. 3. Зависимость активного сопротивления оболочки r_0 от параметра kR .

— слабое магнитное поле; $n=0,55$; — — — сильное магнитное поле; — · — $\mu = \text{const}$. $r_0 = \text{Re } z_0 = -\text{Re} \left[\frac{\dot{E}_{me}}{2\pi R \dot{H}_{me}} \right]$. Значения $\frac{\dot{E}_e}{\dot{H}_{me}}$ определены по формулам: 1 — 2-й строки таблицы, 2 — 6-й, 3 — 3-й, 4 — 4-й, 5 — 5-й, 6 — 7-й.

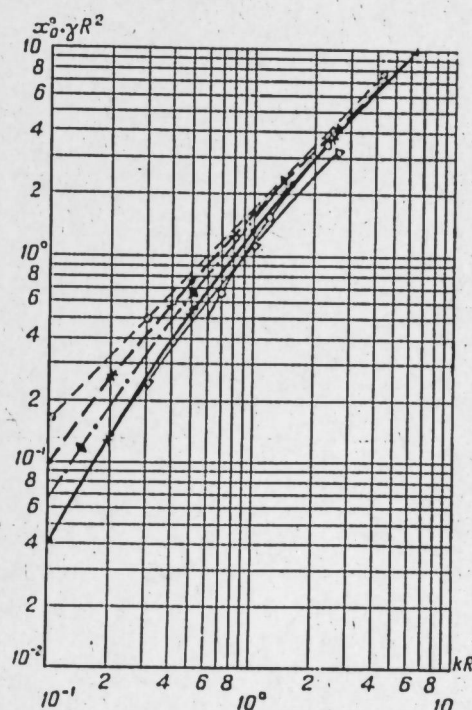


Рис. 4. Зависимость индуктивного сопротивления оболочки от величины kR .

$$x_0 = \text{Im } z_0 = \text{Im} \left[\frac{\dot{E}_{me}}{2\pi R \dot{H}_{me}} \right]$$

Условные обозначения те же, что и на рис. 3.

формулы для определения напряженностей электрического и магнитного полей на поверхности ферромагнитной оболочки

№	Условие	$\frac{E_{me}}{H_{mf}}$	Примечание
1	$\mu = \text{var}$ сильное и слабое магнитное поле	$\frac{\alpha' + j\alpha''}{\gamma \delta_k}$	$\alpha' + j\alpha'' = \frac{2n}{n-1} \left 1 + \frac{1}{\sqrt{\frac{n+1}{2n} - \frac{(3n+1)^2}{8n^2}}} \right \times \frac{\sin \psi'}{\cos \psi'} A;$ $k \delta_k = \left(\frac{3n+1}{n-1} \right) \frac{1}{2 \cos \psi'} \sqrt{\frac{A}{A}}; \quad k = \sqrt{\frac{\omega \mu_e}{2}}$ $A = \sqrt{1 - \left(\frac{n-1}{3n+1} \right)^2 \cos^2 \psi'} - \sin \psi'$
2	$\mu = \text{var}$ сильное и слабое магнитное поле	$\frac{H^{(1)}}{\gamma \delta_k} = \frac{1}{\gamma} \left[\frac{1}{\sqrt{\frac{n}{4} - \frac{\psi'}{2}}} \right] \frac{H^{(1)}}{a + \frac{1}{\gamma}} = \frac{1}{a + \frac{1}{\gamma}} \left[\frac{1}{\sqrt{\frac{n}{4} - \frac{\psi'}{2}}} \right] \frac{H^{(1)}}{a + \frac{1}{\gamma}} = \frac{1}{a + \frac{1}{\gamma}} \left[\frac{1}{\sqrt{\frac{n}{4} - \frac{\psi'}{2}}} \right] \frac{H^{(1)}}{a + \frac{1}{\gamma}}$	формулы применимы, если известна зависимость a от kR и n
3	$\mu = \text{var}$ сильное магнитное поле, $a = \frac{n}{n-1},$ $0,1 \leq kR \leq 1$	$\frac{H^{(1)}}{\gamma \delta_k} = \frac{1}{\gamma} \left[\frac{1}{\sqrt{\frac{n}{4} - \frac{\psi'}{2}}} \right] \frac{H^{(1)}}{a + \frac{1}{\gamma}} = \frac{1}{a + \frac{1}{\gamma}} \left[\frac{1}{\sqrt{\frac{n}{4} - \frac{\psi'}{2}}} \right] \frac{H^{(1)}}{a + \frac{1}{\gamma}}$	—

Электрический поверхностный эффект

4	$\mu = \text{var}$ слабое магнитное поле, $a = -2, 1 \leq kR \leq 2$	$\frac{\alpha - 1 + j\beta}{\gamma R}$	$\alpha = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{1 + 4k^2 R^2 \sin^2 \psi' + 4k^4 R^4} +$ $\rightarrow + 1 + 2k^2 R^2 \sin^2 \psi';$ $\beta = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{1 + 4k^2 R^2 \sin^2 \psi' + 4k^4 R^4} -$ $\rightarrow - 1 - 2k^2 R^2 \sin^2 \psi'$
5	$\mu = \text{var}$ сильное магнитное поле, $a=2,$ $0,7 < kR < 2$	$\frac{\sqrt{2k}}{\gamma} e^{j\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\psi'}{2}\right)}$	—
6	$\mu = \text{var}$ сильное и слабое магнитное поле, $kR > 0,1$	$\frac{\sqrt{2k} R}{\gamma \delta_k} \frac{\alpha' \sin B + j\alpha'' \cos B}{kR + 0,35n^{-0,5}}$	$B = \frac{\pi}{4} \sqrt{\frac{kR}{kR + 0,9n^{-0,5}}}$
7	$\mu = \text{const}$	$\frac{\sqrt{2k}}{\gamma} e^{j\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\psi'}{2}\right)} H_0^{(1)} \left[\sqrt{2kR} e^{j\left(\frac{3}{4}\pi - \frac{\psi'}{2}\right)} \right]$ $H_1^{(1)} \left[\sqrt{2kR} e^{j\left(\frac{3}{4}\pi - \frac{\psi'}{2}\right)} \right]$	—

Характеристики электродинамического поля	Условия применимости	$\frac{E_{me}}{H_{me}}$	Примечание	Окончание таблицы
8	$\mu = \text{var}$ сильное и слабое магнитное поле	$\frac{1}{\gamma} \sqrt{\frac{2}{k}} e^{j\left(\frac{3}{4} - \frac{\psi'}{2}\right)} \times$ $\frac{H_1^{(1)} \left[\frac{2\sqrt{2}}{a+2} k R e^{j\left(\frac{3}{4} - \frac{\psi'}{2}\right)} \right]}{H_0^{(1)} \left[\frac{2\sqrt{2}}{a+2} k R e^{j\left(\frac{3}{4} - \frac{\psi'}{2}\right)} \right]}$	Формула применима, если известна зависимость a от kR и n	
9	$\mu = \text{var}$ сильное и слабое магнитное поле,	$\frac{1}{\gamma} \sqrt{\frac{2}{k}} e^{j\left(\frac{3}{4} - \frac{\psi'}{2}\right)} \times$ $\frac{H_1^{(1)} \left[\frac{1}{\gamma} \sqrt{\frac{2}{k}} e^{j\left(\frac{3}{4} - \frac{\psi'}{2}\right)} \right]}{H_0^{(1)} \left[\frac{1}{\gamma} \sqrt{\frac{2}{k}} e^{j\left(\frac{3}{4} - \frac{\psi'}{2}\right)} \right]}$	Значение B , δ_k , α' и α'' приведены выше	
10	$\mu = \text{const}$			

Магнитный поверхностный эффект в оболочке

Для определения границ применимости формул таблицы на рис. 3 и 4 построены кривые зависимостей активного и индуктивного сопротивлений оболочек от параметра kR . При этом вместо величин сопротивлений на единицу длины оболочки, имеющих размерность $\frac{\text{Ом}}{\text{м}}$, на рисунках по осям ординат отложены безразмерные величины $r_0 \cdot \gamma R^2$ и $x_0 \cdot \gamma R^2$. Активное сопротивление на единицу длины оболочки определено по формуле

$$r_0 = \text{Re} \left[\frac{E_e}{2\pi R H_e} \right]; \quad (16)$$

индуктивное сопротивление —

$$x_0 = \text{Im} \left[\frac{E_e}{2\pi R H_e} \right]. \quad (17)$$

Из приведенных рисунков видно, что формулы 3-й, 4-й и 5-й строк таблицы имеют ограниченный диапазон применимости.

ВЫВОДЫ

В данной статье рассмотрено распространение электромагнитного поля в ферромагнитной оболочке с учетом переменной магнитной проницаемости стали. По методу Л. Р. Неймана параболическая зависимость магнитной проницаемости стали μ от напряженности поля H заменена параболической зависимостью μ от координаты ρ с показателем параболы a . Определена зависимость величины a от параметров оболочки и электромагнитной волны и получены формулы для расчета электромагнитного поля в оболочке, имеющие, однако, ограниченное применение ввиду их сложности. На их основании получены простые эмпирические формулы для расчета отношения напряженностей электрического и магнитного полей на внутренней поверхности оболочки.

В [1] при поверхностном эффекте в ферромагнитном проводнике приняты значения показателя $a = \pm 2$. В данной статье показано, что в случае ферромагнитной оболочки формулы, полученные при значении $a = -\frac{2}{3}, \pm 2$, имеют ограниченный диапазон применимости.

Сибирский научно-исследовательский
институт энергетики,
Новосибирск

Поступила в редакцию
17/XII 1964

ЛИТЕРАТУРА

1. Л. Р. Нейман. Поверхностный эффект в ферромагнитных телах. Госэнергоиздат, 1949.
2. Э. Камке. Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям. Физматгиз, 1961.

Ю. К. ГОРБУНОВ

ЭЛЕКТРОМАГНИТНОЕ ПОЛЕ В СЛОЖНЫХ СРЕДАХ ПРИ ПЕРЕМЕННОЙ МАГНИТНОЙ ПРОНИЦАЕМОСТИ ОДНОЙ ИЗ СРЕД

В работе [1] рассмотрено электромагнитное поле цилиндрического проводника, окруженного слоем изоляции и помещенного в ферромагнитный массив бесконечной протяженности при постоянной магнитной проницаемости стали.

В данной статье аналогичная задача решается с учетом зависимости магнитной проницаемости стали от интенсивности поля в ней по методу, предложенному Л. Р. Нейманом [2].

Размеры системы, параметры сред, расположение осей, координат и векторов напряженностей электрического и магнитного поля показаны на рисунке. Здесь r и R — радиусы внутреннего провода и отверстия

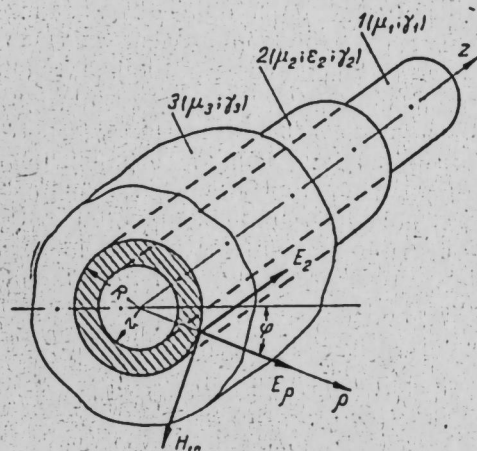
в стальном массиве; $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$ — удельные проводимости меди, изоляции и стали; μ_1, μ_2, μ_3 — их магнитные проницаемости и ϵ_2 — диэлектрическая проницаемость изоляции.

Полагаем, что по внутреннему проводнику бесконечной протяженности протекает синусоидальный ток с угловой частотой ω и временная зависимость имеет вид

$$\frac{\partial}{\partial t} = j\omega. \quad (1)$$

Принимая, что вектор напряженности магнитного поля имеет лишь составляющую $\dot{H}$, а вектор напряженности электрического поля — составляющие E_ρ и $\dot{E}_z$ и учитывая условие (1), запишем исходные уравнения Максвелла так:

$$\begin{aligned} \dot{E}_\rho &= -\frac{1}{\gamma + j\omega\epsilon} \frac{\partial \dot{H}_\varphi}{\partial z}; \\ \dot{E}_z &= \frac{1}{\gamma + j\omega\epsilon} \left(\frac{\partial \dot{H}_\varphi}{\partial \rho} + \frac{\dot{H}_\varphi}{\rho} \right); \\ \frac{\partial \dot{E}_\rho}{\partial z} - \frac{\partial \dot{E}_z}{\partial \rho} &= -j\omega\mu \dot{H}_\varphi. \end{aligned} \quad (2)$$



Из уравнений (2) после соответствующих преобразований можно получить уравнение для напряженности магнитного поля:

$$\frac{\partial^2 \dot{H}_\varphi}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial \dot{H}_\varphi}{\partial \rho} + \left(\lambda^2 - \frac{1}{\rho^2} \right) \dot{H}_\varphi + \frac{\partial^2 \dot{H}_\varphi}{\partial z^2} = 0, \quad (3)$$

где

$$\lambda^2 = -j\omega\mu(\gamma + j\omega\epsilon).$$

Как показано в [1], решение уравнения (3) при постоянных параметрах сред имеет вид: в проводе ($0 \leq \rho \leq r$)

$$\dot{H}_{\varphi_1} = e^{j\omega t - kz} A_1 J_1(\rho\lambda_1), \quad (4)$$

в диэлектрике ($r \leq \rho \leq R$)

$$\dot{H}_{\varphi_2} = e^{j\omega t - kz} [A_2 J_1(\rho p) + A_3 N_1(\rho p)], \quad (5)$$

где A_1, A_2, A_3 и p — постоянные, подлежащие определению из начальных и граничных условий,

k — коэффициент затухания волны вдоль оси z , одинаковый во всех трех средах и определяемый по значению p из соотношения

$$p = \sqrt{k^2 + \lambda_2^2}, \quad (6)$$

J_1 и N_1 — функции Бесселя и Неймана.

Решение (4) получено на основании допущения, что

$$\sqrt{k^2 + \lambda_1^2} \approx \lambda_1, \quad (7)$$

справедливость которого показана в [1].

Радialная напряженность электрического поля при тех же значениях ρ по (2), (4) и (5) в проводе

$$\dot{E}_{\rho_1} = \frac{k}{\gamma_1} e^{j\omega t - kz} A_1 J_1(\rho\lambda_1), \quad (8)$$

в диэлектрике

$$\dot{E}_{\rho_2} = \frac{k}{\Gamma_2} e^{j\omega t - kz} [A_2 J_1(\rho p) + A_3 N_1(\rho p)], \quad (9)$$

где

$$\Gamma_2 = \gamma_2 + j\omega\epsilon_2. \quad (10)$$

Аксальная напряженность электрического поля по (2), (4) и (5) в проводе

$$\dot{E}_{z_1} = \frac{\lambda_1}{\gamma_1} e^{j\omega t - kz} A_1 J_0(\rho\lambda_1), \quad (11)$$

в диэлектрике

$$\dot{E}_{z_2} = \frac{p}{\Gamma_2} e^{j\omega t - kz} [A_2 J_0(\rho p) + A_3 N_0(\rho p)]. \quad (12)$$

Сводная таблица расчетных формул

Мель ($0 < \rho < r$)	Изоляция ($r < \rho < R$)	Сталь ($r < \rho < \infty$)
$\dot{H}_{\varphi_1} = e^{j\omega t - kz} A_1 J_1(\rho\lambda_1),$	$\dot{H}_{\varphi_2} = e^{j\omega t - kz} [A_2 J_1(\rho p) + A_3 N_1(\rho p)],$	$\dot{H}_{\varphi_3} = e^{j\omega t - kz} A_4 \sqrt{\frac{R}{\rho} \left(1 - \frac{\rho - R}{\delta_k}\right)^a},$
$\dot{E}_{\rho_1} = \frac{k}{\gamma_1} e^{j\omega t - kz} A_1 J_1(\rho\lambda_1),$	$\dot{E}_{\rho_2} = \frac{k}{\gamma_2} e^{j\omega t - kz} [A_2 J_1(\rho p) + A_3 N_1(\rho p)],$	$\dot{E}_{\rho_3} = \frac{k}{\gamma_3} e^{j\omega t - kz} A_4 \sqrt{\frac{R}{\rho} \left(1 - \frac{\rho - R}{\delta_k}\right)^a},$
$\dot{E}_{z_1} = \frac{\lambda_1}{\gamma_1} e^{j\omega t - kz} A_1 J_0(\rho\lambda_1),$	$\dot{E}_{z_2} = \frac{p}{\gamma_2} e^{j\omega t - kz} [A_2 J_1(\rho p) + A_3 N_0(\rho p)],$	$\dot{E}_{z_3} = \frac{1}{\gamma_3} e^{j\omega t - kz} A_4 \sqrt{\frac{R}{\rho} \left(1 - \frac{\rho - R}{\delta_k}\right)^{a-1}} \left[\frac{a}{\delta_k} - \frac{1}{2\rho} \left(1 - \frac{\rho - R}{\delta_k}\right) \right],$
где $\lambda_1 = \sqrt{-j\omega\mu_1},$ $A_1 = \frac{J_0}{2\pi r J_1(r\lambda_1)},$ $k = \sqrt{p^2 - \lambda_2^2}.$	где $\lambda_2 = \sqrt{-j\omega\mu_2 (\gamma_2 + j\omega\epsilon_2)},$ $\gamma_2 = \gamma_2 + j\omega\epsilon_2,$ $A_2 = A_1 \frac{p \gamma_1 J_1(r\lambda_1) N_0(rp) - \lambda_1 \gamma_2 J_0(r\lambda_1) N_1(rp)}{p \gamma_1 [J_1(rp) N_0(rp) - J_0(rp) N_1(rp)]},$ $A_3 = A_1 \frac{p \gamma_1 J_0(r\lambda_1) - \lambda_1 \gamma_2 J_0(r\lambda_1) J_1(rp)}{p \gamma_1 [J_0(rp) N_1(rp) - J_1(rp) N_0(rp)]},$	где $\alpha = \frac{2n}{n-1} + j \frac{2n}{n-1} \sqrt{\frac{n+1}{2n} + \frac{(3n+1)^2}{8n^2}} \times \frac{\sin \psi'}{\cos^2 \psi'} (A - \sin \psi'),$ $\delta_k = \frac{(3n+1) \sqrt{A - \sin \psi'}}{(n-1) \cos \psi' \sqrt{2\omega\gamma_3\mu_3e}} \cdot A = \sqrt{1 - \frac{(n-1)^2}{(3n+1)^2} \cos^2 \psi'}.$ $0,3 < n < 0,65$ — при слабом магнитном поле, $0,5 < n < 20$ — при сильном магнитном поле [2]. [3] ψ — угол потерь в стали [2]. $A_4 = A_2 J_1(Rp) + A_3 N_1(Rp)$

Значение p определяется из уравнения $B\rho^2 \ln p + D\rho^2 - F = 0$, и в первом приближении $p^2 = \frac{F}{D}$.

$$\text{где } B = \frac{1}{2} \gamma_1 R J_1(r\lambda_1) - \lambda_1 r J_0(r\lambda_1), \quad \beta = \frac{1}{\gamma_3} \left(\frac{\alpha}{\delta_k} - \frac{1}{2R} \right), \quad D = \frac{\gamma_1}{\gamma_2} J_1(r\lambda_1) \left[2 \ln \frac{R}{r} + \beta R \Gamma_2 (\ln r - 0,116) \right] - \\ - \lambda_1 r (\ln R - 0,116) J_0(r\lambda_1), \quad F = J_0(r\lambda_1) \left[\frac{2\lambda_1}{r} - \beta \lambda_1 \Gamma_2 \left(\frac{R}{r} - \frac{r}{R} \right) \right] - \frac{2\beta \gamma_1}{R} J_1(r\lambda_1).$$

Для стального массива можно принять зависимость магнитной проницаемости от координаты ρ по [2]:

$$\frac{\mu_3}{\mu_{3e}} = \left(\frac{\rho}{R} \right)^a, \quad (13)$$

где μ_{3e} — значение магнитной проницаемости на внутренней поверхности стали,

a — показатель, определяемый условием выполнения параболической зависимости μ_3 от H_{φ_3} и зависящий от параметров стального массива.

Однако, как показано в предыдущей работе*, использование зависимости (13) целесообразно лишь в случае, если глубина проникновения волны в сталь ($\delta_{0,65}$) превышает внутренний радиус расточки R . В остальных случаях применимы формулы плоской волны при $\mu = \text{var}$

[2] с введением в решение нового коэффициента $\sqrt{\frac{R}{\rho}}$, учитывающего расширение фронта цилиндрической волны.

В данной статье ограничимся рассмотрением лишь второго случая, когда $R > \delta$ или

$$R > (2-3) \frac{1}{\sqrt{\omega \gamma_3 \mu_{3e}}}. \quad (14)$$

В этом случае решение уравнения (3) для стали при значении комплексной магнитной проницаемости [2]

$$\mu_3 = \mu_{3e} e^{-j\psi'} \quad (15)$$

будет иметь вид ($R \leq \rho \leq \infty$).

$$\dot{H}_{\varphi_3} = e^{j\omega t - kz} A_4 \sqrt{\frac{R}{\rho} \left(1 - \frac{\rho - R}{\delta_k}\right)^a}, \quad (16)$$

где a и δ_k — постоянные величины, значения которых приведены в табл. 1.

Решение (16) получено в предположении, что

$$\sqrt{k^2 + \lambda_{3e}^2} \approx \lambda_{3e}, \quad (17)$$

справедливость которого показана в [1].

Радиальная напряженность электрического поля в стали по (2) и (16)

$$\dot{E}_{\rho_3} = \frac{k}{\gamma_3} e^{j\omega t - kz} A_4 \sqrt{\frac{R}{\rho} \left(1 - \frac{\rho - R}{\delta_k}\right)^a}, \quad (18)$$

аксиальная напряженность электрического поля в стали

$$\dot{E}_{z_3} = \frac{1}{\gamma_3} e^{j\omega t - kz} A_4 \sqrt{\frac{R}{\rho} \left(1 - \frac{\rho - R}{\delta_k}\right)^{a-1}} \times \\ \times \left[\frac{\alpha}{\delta_k} - \frac{1}{2\rho} \left(1 - \frac{\rho - R}{\delta_k}\right) \right]. \quad (19)$$

* Ю. К. Горбунов. Поверхностный эффект в ферромагнитных оболочках с учетом переменной магнитной проницаемости. См. настоящий номер журнала.

Задаваясь величиной тока в проводнике при $z=0$

$$j|_{z=0} = J_0 e^{j\omega t} \quad (20)$$

и приравнявая тангенциальные составляющие напряженностей электрического и магнитного полей на границах сред при $\rho=r$ и $\rho=R$, получим следующую систему уравнений для определения постоянных A_1, A_2, A_3, A_4 и p :

$$A_1 J_1(r\lambda_1) = \frac{I_0}{2\pi r};$$

$$A_1 J_1(r\lambda_1) = A_2 J_1(rp) + A_3 N_1(rp);$$

$$\frac{\lambda_1}{\gamma_1} A_1 J_0(r\lambda_1) = \frac{p}{\gamma_2 + j\omega\epsilon_2} [A_2 J_0(rp) + A_3 N_0(rp)];$$

$$A_2 J_1(Rp) + A_3 N_1(Rp) = A_4; \quad (21)$$

$$\frac{p}{\Gamma_2} [A_2 J_0(Rp) + A_3 N_0(Rp)] = \frac{1}{\gamma_3} A_4 \left(\frac{\alpha}{\delta_k} - \frac{1}{2R} \right).$$

Из (20) и (21):

$$A_1 = \frac{I_0}{2\pi r J_1(r\lambda_1)};$$

$$A_2 = A_1 \frac{J_0(r\lambda_1) N_0(rp) - \frac{\Gamma_2 \lambda_1}{p \gamma_1} J_0(r\lambda_1) N_1(rp)}{J_1(rp) N_0(rp) - J_0(rp) N_1(rp)}; \quad (22)$$

$$A_3 = A_1 \frac{J_1(r\lambda_1) J_0(rp) - \frac{\Gamma_2 \lambda_1}{p \gamma_1} J_0(r\lambda_1) J_1(rp)}{N_1(rp) J_0(rp) - N_0(rp) J_1(rp)};$$

$$A_4 = A_2 J_1(Rp) + A_3 N_1(Rp).$$

Подставляя (22) в (21), получим трансцендентное уравнение относительно неизвестной постоянной p :

$$\begin{aligned} & \frac{p}{\Gamma_2} J_0(Rp) - J_1(Rp) \left[\gamma_1 p J_1(r\lambda_1) N_0(rp) - \lambda_1 \Gamma_2 J_0(r\lambda_1) N_1(rp) \right] - \\ & - \left[\frac{p}{\Gamma_2} N_0(Rp) - \beta N_1(Rp) \right] \left[\gamma_1 p J_1(r\lambda_1) J_0(rp) - \right. \\ & \left. - \lambda_1 \Gamma_2 J_0(r\lambda_1) J_1(rp) \right] = 0. \end{aligned} \quad (23)$$

Из уравнения (23) невозможно определить значение p в явном виде. Однако, как показано в [1],

$$rp \ll 1 \text{ и } Rp \ll 1, \quad (24)$$

Таблица 2

Таблица расчета коэффициентов затухания k и p в трехкомпонентной среде с параметрами:

$$r = 5 \text{ мм}, R = 7 \text{ мм}, \gamma_1 = 5,7 \cdot 10^7 \frac{1}{\text{Ом} \cdot \text{м}}, \gamma_2 = 10^{-18} \frac{1}{\text{Ом} \cdot \text{м}}, \gamma_3 = 2,2 \cdot 10^6 \frac{1}{\text{Ом} \cdot \text{м}}, \epsilon_{2r} = 5,0; \epsilon_0 = 8,85 \cdot 10^{-12} \text{ ф/м};$$

$$\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \frac{2\text{Н}}{\text{А}}, \mu_{3e} = 200 \mu_0$$

n	f	$\lambda_1, 1/\mu$	$\lambda_2, 1/\mu$	$\lambda_3, 1/\mu$	B	D	F	p	k
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
0,55	50 зц	$1,49 \cdot 10^2 e^{j2,366}$	$2,34 \cdot 10^{-6}$	$4,17 \cdot 10^2 e^{j2,366}$	$2,60 e^{j3,316}$	$1,050 \cdot 10^{15} e^{j0,854}$	$1,014 \cdot 10^3 e^{j4,174}$	$3,110 \cdot 10^{-5} e^{j2,801}$	$3,05 \cdot 10^{-5} e^{j2,732}$
	5 кзц	$1,49 \cdot 10^2 e^{j2,366}$	$2,34 \cdot 10^{-4}$	$4,17 \cdot 10^2 e^{j2,366}$	$2,153 \cdot 10^4 e^{j0,934}$	$7,840 \cdot 10^{14} e^{j4,879}$	$8,671 \cdot 10^3 e^{j4,076}$	$1,053 \cdot 10^{-3} e^{j2,74}$	$1,065 \cdot 10^{-3} e^{j2,73}$
	500 кзц	$1,49 \cdot 10^2 e^{j2,366}$	$2,34 \cdot 10^{-2}$	$4,17 \cdot 10^2 e^{j2,366}$	$2,77 \cdot 10^{25} e^{j4,397}$	$9,833 \cdot 10^{32} e^{j2,066}$	$1,112 \cdot 10^{30} e^{j1,255}$	$3,360 \cdot 10^{-2} e^{j2,736}$	$2,92 \cdot 10^{-2} e^{j2,50}$
10	50 зц	$1,49 \cdot 10^2 e^{j2,366}$	$2,34 \cdot 10^{-6}$	$4,17 \cdot 10^2 e^{j2,366}$	$2,980 e^{j3,165}$	$1,050 \cdot 10^{15} e^{j0,854}$	$1,204 \cdot 10^3 e^{j0,023}$	$3,381 \cdot 10^{-5} e^{j2,726}$	$3,330 \cdot 10^{-5} e^{j2,681}$
	5 кзц	$1,49 \cdot 10^2 e^{j2,366}$	$2,34 \cdot 10^{-4}$	$4,17 \cdot 10^2 e^{j2,366}$	$2,48 \cdot 10^4 e^{j0,813}$	$7,840 \cdot 10^{14} e^{j4,879}$	$1,010 \cdot 10^3 e^{j3,955}$	$1,132 \cdot 10^{-3} e^{j2,679}$	$1,140 \cdot 10^{-3} e^{j2,65}$
	500 кзц	$1,49 \cdot 10^2 e^{j2,366}$	$2,34 \cdot 10^{-2}$	$4,17 \cdot 10^2 e^{j2,366}$	$3,20 \cdot 10^{25} e^{j4,275}$	$9,833 \cdot 10^{32} e^{j2,066}$	$1,269 \cdot 10^{30} e^{j1,133}$	$3,590 \cdot 10^{-2} e^{j2,675}$	$3,26 \cdot 10^{-2} e^{j2,452}$
$\frac{D}{B_{\text{внп}}}$	11	$ r\lambda_2 $	$ R\lambda_2 $	$\frac{\lambda_1}{k}$	$\frac{\lambda_3 e}{k}$	$\frac{\lambda_2}{k}$	f	n	Примечания
3,77 · 10 ¹³	1,17 · 10 ⁻⁸	1,638 · 10 ⁻⁸	1,638 · 10 ⁻⁸	4,89 · 10 ⁶	1,365 · 10 ⁷	0,0757	50 зц	18	$\mu_3 = \text{var}, \psi' = 0,$ случай слабого магнитного поля
4,95 · 10 ⁹	1,17 · 10 ⁻⁶	1,638 · 10 ⁻⁶	1,638 · 10 ⁻⁶	1,40 · 10 ⁶	3,910 · 10 ⁶	0,2195	5 кзц	19	
8,14 · 10 ⁶	1,17 · 10 ⁻⁴	1,638 · 10 ⁻⁴	1,638 · 10 ⁻⁴	5,11 · 10 ⁵	1,425 · 10 ⁵	0,8030	500 кзц	10	
3,30 · 10 ¹³	1,17 · 10 ⁻⁸	1,638 · 10 ⁻⁸	1,638 · 10 ⁻⁸	4,47 · 10 ⁶	1,250 · 10 ⁷	0,0703	50 зц		$\mu_3 = \text{var}, \psi' = 0,$ случай сильного магнитного поля
4,93 · 10 ⁹	1,17 · 10 ⁻⁶	1,638 · 10 ⁻⁶	1,638 · 10 ⁻⁶	1,305 · 10 ⁶	3,650 · 10 ⁶	0,2050	5 кзц		
7,22 · 10 ⁶	1,17 · 10 ⁻⁴	1,638 · 10 ⁻⁴	1,638 · 10 ⁻⁴	4,57 · 10 ⁵	1,275 · 10 ⁵	0,7180	500 кзц		

поэтому можно воспользоваться первыми членами разложения в ряд функций Бесселя и Неймана:

$$J_0(x) = 1, \quad N_0(x) = \frac{2}{\pi} \left(\ln \frac{x}{2} + C \right), \quad (25)$$

$$J_1(x) = \frac{x}{2}, \quad N_1(x) = -\frac{2}{\pi x},$$

где $C=0,5772 \dots$ — постоянная Эйлера, и привести уравнение (23) к виду

$$Bp^2 \ln p + Dp^2 - F = 0, \quad (26)$$

где B, D, F — постоянные, значения которых приведены в табл. 1.

Уравнение (26) численно решается методом последовательных приближений, из которых первым приближением является

$$p^2 = \frac{F}{D}, \quad (27)$$

поскольку $B \ln p \ll D$, как показано в численном примере.

Для проверки принятых в статье допущений зададимся следующими значениями постоянных:

$$r = 5 \cdot 10^{-3} \text{ м}; R = 7 \cdot 10^{-3} \text{ м}; \gamma_1 = 5,7 \cdot 10^7 \text{ 1/ом} \cdot \text{м}; \gamma_2 = 10^{-12} \text{ 1/ом} \cdot \text{м};$$

$$\gamma_3 = 2,2 \cdot 10^6 \text{ 1/ом} \cdot \text{м}; \varepsilon_r = 5,0; \varepsilon_0 = 8,85 \cdot 10^{-12} \text{ ф/м};$$

$$\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \text{ гн/м}; \mu_{3c} = 200 \mu_0; \psi' = 0; n_1 = 0,55; n_2 = 10;$$

$$f = 50 \text{ гц}; 5 \text{ кгц}; 500 \text{ кгц}.$$

Результаты расчета постоянных p, k, λ сведены в табл. 2.

Как видно из таблицы, при принятых параметрах системы в диапазоне частот от 50 гц до 500 кгц для изоляции значение λ_2 соизмеримо с k , для меди и стали $\lambda_1 \gg k$ и $\lambda_{3c} \gg k$, аргумент функций Бесселя и Неймана для изоляции $r\lambda_2 \ll 1$ и $R\lambda_2 \ll 1$ и величина $D \gg B \ln p$, т. е. все принятые допущения справедливы.

Таким образом в области звуковых и средних частот (до 500 кгц) расчет электромагнитного поля в сложных средах с учетом непостоянства магнитной проницаемости одной из сред возможен по уравнениям табл. 1, причем величина p определяется первым приближением.

Сибирский научно-исследовательский
институт энергетики,
Новосибирск

Поступила в редакцию
17/XII 1964

ЛИТЕРАТУРА

1. З. Г. Каганов. Электромагнитное поле в трехкомпонентной среде с цилиндрической симметрией. — Изв. СО АН СССР, 1961, № 3.
2. Л. Р. Нейман. Поверхностный эффект в ферромагнитных телах. Госэнергонздат, 1949.

УДК 621.3.014.31 : 535.34
543.420.62

М. Н. ТУРКО, Т. А. КРАВЧЕНКО

К ВОПРОСУ О ВЛИЯНИИ ПОГЛОЩЕНИЯ СВЕТА В ДУГЕ НА ИНТЕНСИВНОСТЬ СПЕКТРАЛЬНЫХ ЛИНИЙ

Процессы поглощения света в плазме дуги существенно влияют на величину интенсивности излучаемых спектральных линий. Характер зависимости интенсивности от концентрации атомов (N) для разных линий различен, а относительная интенсивность двух линий одного элемента при изменении концентрации может меняться в широких пределах [1]. Имеется простая возможность плавно менять концентрацию атомов в плазме путем испарения вещества с поверхности зонда, пересекающего дуговой канал в заданную фазу вспышки [2]. Меняя потенциал зонда относительно катода, можно регулировать величину выделяемой на зонде энергии W_3 , а значит, и количество испарившегося вещества. С ростом энергии W_3 растет интенсивность линий вещества, нанесенного на поверхность зонда (рис. 1). Можно считать, что концентрация атомов, поступающих в плазму с зонда, пропорциональна выделяемой на нем энергии, а различный вид кривых обусловлен влиянием поглощения. По той же причине меняется и величина относительной интенсивности различных пар линий кадмия или цинка (рис. 2). Относительная интенсивность растет или падает в зависимости от соотношения величин N/l (l — толщина поглощающего слоя) для данной пары линий [3].

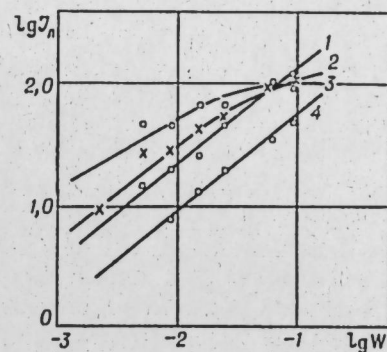


Рис. 1. Зависимость интенсивности линий кадмия от энергии, выделяемой на зонде (W_3).
1 — Cd I 4678,2; 2 — 3408,6; 3 — 3261,1; 4 — 2880,8 Å.

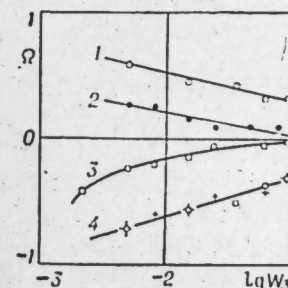


Рис. 2. Относительная интенсивность линий кадмия и цинка как функция энергии (W_3).
1 — Zn I 2800,9 — 3072,1; 2 — Cd I 3403,6 — 4678,2; 3 — Cd I 3403,6 — 3261,1; 4 — Cd I 2880,8 — 3403,6 и Zn I 3072,1 — 4650,1 Å.

Задача учета поглощения в нашем случае сводится к определению величины относительного поглощения линии $\varphi = I_n/I_n^0$ (I_n — наблюдаемая интегральная интенсивность линии, I_n^0 — интенсивность линии при отсутствии самопоглощения) для неоднородного источника света, каким является дуговой разряд. В светящемся облаке такого источника

концентрации излучающих и поглощающих атомов не остаются постоянными в различных точках по сечению облака. В работе [4] показано, как зависит величина φ от параметра поглощения p , расчет проведен для доплеровского и дисперсионного контуров. При этом авторы вводят произвольного вида функцию возбуждения источника, не обосновывая ее выбор какими-либо конкретными физическими соображениями. Выражения для функции $\varphi(p, n)$, где n — показатель неоднородности источника, приводятся и в других работах [5, 6], однако они также основаны на произвольном задании функции возбуждения и имеют довольно сложный вид. Метод экспериментального определения φ по коэффициенту реабсорбции b_1 [7] с достаточной надежностью может быть применен лишь в довольно узких пределах.

Покажем, что выражение для относительного поглощения $\varphi(p)$ можно найти иным путем, не используя функцию возбуждения Кауэна — Дике. Для этого необходимо ввести функцию радиальных распределений температуры $T(r)$ и концентрации поглощающих атомов $n_a(r)$, вид которых легко можно определить экспериментально. Как известно, общее выражение для интегральной интенсивности линии, излучаемой неоднородным источником света, будет [4]:

$$I_\lambda = I_\lambda^0 \cdot \int_{-\infty}^{\infty} P(a, u) \cdot \int_{-\infty}^{\infty} \bar{n}_e(r) \exp\left[-p \frac{P(a, u)}{P(a, 0)} \times \int_{-\infty}^{\infty} \bar{n}_a(x) dx\right] dr du. \quad (1)$$

Здесь $\bar{n}_e(r)$ и $\bar{n}_a(r)$ — относительные распределения концентраций излучающих и поглощающих атомов по радиусу r облака, $P(a, u)$ — функция распределения интенсивности по частотам ν по контуру линии, которая в общем случае при учете доплеровского и лорентцовского уширения описывается через интеграл Фойхта $H(a, v)$:

$$P(a, u) = \frac{1}{\Delta \nu_D \cdot \sqrt{\pi}} \cdot H\left(a, \frac{u}{\Delta \nu_D}\right), \quad (1a)$$

где a — параметр Фойхта, $\Delta \nu_D$ — доплеровская ширина линии, а переменные $u = \nu - \nu_0$, $v = \frac{u}{\Delta \nu_D}$. Чтобы проинтегрировать выражение

[1], необходимо знать вид функций распределений $\bar{n}_e(r)$ и $\bar{n}_a(x)$.

Оказывается, что в случае дуги в воздухе при небольших токах радиальные распределения температуры и концентрации поглощающих атомов (за исключением атомов с очень низким потенциалом ионизации) хорошо аппроксимируются выражениями

$$T(r) = \frac{T_0}{1 + \alpha r^2}, \quad (2a)$$

$$n_a(r) = n_{a0} \cdot \exp(-\beta_a r^2), \quad (2b)$$

где T_0 и n_{a0} — величины температуры и концентрации на оси облака, α и β_a — некоторые коэффициенты [8]. Используя известные в литературе формулы для $\bar{n}_e(r)$ и $\bar{n}_a(r)$, получаем

$$\bar{n}_e(r) = \sqrt{\frac{\gamma}{\pi}} \cdot \exp(-\gamma r^2), \quad (3a)$$

$$\int_r^{\infty} \bar{n}_a(x) dx = 1 - \Phi(r \sqrt{\beta_a}), \quad (3b)$$

где

$$\gamma = \beta_a + \frac{V_e}{k T_0} \cdot \alpha \quad (3в)$$

коэффициент, зависящий от потенциала возбуждения верхнего уровня V_e ; $\Phi(r \sqrt{\beta_a})$ — интеграл вероятности. Подставляя (3a) и (3b) в (1) и разлагая в ряд экспоненциальный член, после нескольких преобразований получаем следующее выражение для относительного поглощения линии в данном источнике:

$$\varphi(a, p, \beta_a, \gamma) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \left\{ F_1(a, p) + \frac{p}{H(a, 0)} \cdot F_2(a, p) \cdot f_1(\beta_a, \gamma) + \right. \\ \left. + \frac{1}{\pi} \left[\frac{p}{H(a, 0)} \right]^2 \cdot F_3(a, p) \cdot f_2(\beta_a, \gamma) + \dots \right\}, \quad (4)$$

где функции F_1 , F_2 и F_3 представляют собой интегралы:

$$F_1(a, p) = \int_{-\infty}^{\infty} H(a, v) \cdot \exp\left[-p \frac{H(a, v)}{H(a, 0)}\right] dv, \quad (4a)$$

$$F_2(a, p) = \int_{-\infty}^{\infty} [H(a, v)]^2 \cdot \exp\left[-p \frac{H(a, v)}{H(a, 0)}\right] dv, \quad (4b)$$

$$F_3(a, p) = \int_{-\infty}^{\infty} [H(a, v)]^3 \cdot \exp\left[-p \frac{H(a, v)}{H(a, 0)}\right] dv, \quad (4в)$$

а величины

$$f_1(\beta_a, \gamma) = 1 - \frac{2}{\pi} \arctg \sqrt{\frac{\gamma}{\beta_a}}, \quad (5a)$$

$$f_2(\beta_a, \gamma) = \frac{\beta_a}{\gamma} \left[1 - \frac{\beta_a}{\gamma} + \frac{7}{6} \left(\frac{\beta_a}{\gamma} \right)^2 - \frac{3}{2} \left(\frac{\beta_a}{\gamma} \right)^3 + \right. \\ \left. + \frac{3}{2} \left(\frac{\beta_a}{\gamma} \right)^4 - \frac{3}{2} \left(\frac{\beta_a}{\gamma} \right)^5 + \frac{6}{5} \left(\frac{\beta_a}{\gamma} \right)^6 \right] - \quad (5b)$$

некоторые элементарные функции коэффициентов β_a и γ .

Таким образом, относительное поглощение зависит как от параметров a и p , так и от коэффициентов β_a и γ , характеризующих радиальные распределения поглощающих и излучающих атомов. Величину его можно найти в каждом конкретном случае, если предварительно вычислить значения интегралов (4a) — (4b) для различных a и p . Функции F_1 , F_2 и F_3 определялись нами методом приближенного интегрирования для значений a от 1 до 5 и p от 10^{-2} до 10^1 , причем для функции $H(a, v)$ использовались табличные данные из работы [9]. Результаты расчета приведены в табл. 1, погрешность вычислений составляла 2—3%. Пользуясь данными табл. 1, можно найти величины F_1 , F_2 и F_3 для лю-

Таблица 1

$\frac{p}{a}$	0,01	0,1	0,5	1	2,5	5	10
$F_1(a, p)$							
1	—	1,57	1,25	0,97	0,54	0,30	0,165
2	1,66	1,58	1,28	1,00	0,58	0,34	0,20
3	1,66	1,59	1,30	1,04	0,63	0,38	0,23
4	1,66	1,60	1,30	1,04	0,62	0,38	0,23
5	—	1,57	1,28	1,02	0,59	0,36	0,21
$F_2(a, p)$							
1	—	0,39	0,29	0,20	0,074	0,022	0,0061
2	0,24	0,225	0,166	0,115	0,043	0,0135	0,0040
3	0,16	0,15	0,11	0,078	0,030	0,0098	0,0030
4	0,12	0,115	0,085	0,058	0,024	0,0075	0,0023
5	—	0,091	0,068	0,048	0,019	0,0061	0,0018
$F_3(a, p) \cdot 10^3$							
1	—	—	92,0	61,0	19,0	3,60	0,45
2	—	—	32,0	21,0	6,4	1,25	0,17
3	—	—	14,0	9,6	3,0	0,62	0,087
4	—	—	8,4	5,7	1,8	0,36	0,051
5	—	—	5,4	3,6	1,16	0,24	0,034

бых промежуточных значений a и p , а затем, определив из эксперимента, согласно [8], коэффициенты β_a и γ , вычислить по (4) величину относительного поглощения для данной линии и концентрации атомов. При этом во многих случаях, вероятно, можно ограничиться двумя первыми членами ряда (4). Так, согласно нашим расчетам, для ряда линий кадмия

и цинка при $p \leq 10$ и $n = \sqrt{\frac{\gamma}{\beta_a}} = 1,5 \div 2,0$ третий член составляет

10% и менее от общей величины $\varphi(a, p)$ и в первом приближении им можно пренебречь. Лишь при $n < 1,5$ он возрастает до 20—30% и его надо учитывать. Три членами в формуле (4) можно ограничиться только при $p \leq 10$, для больших значений p возрастает роль последующих членов ряда и при проведении расчетов их необходимо учитывать.

Сопоставим значения относительного поглощения $\varphi(a, p)$ для моделей однородного и неоднородного источников света. Можно показать, что параметр поглощения однородного слоя толщиной l при концентрации атомов N

$$p = k_0 \cdot N l \cdot H(a, 0); \quad (6a)$$

тогда как параметр поглощения неоднородного источника, описываемого соотношениями (2a) и (26), имеет вид

$$p = \frac{1}{2} k_0 \cdot \sqrt{\frac{\pi}{\beta_a}} \cdot f \cdot n_{a0} \cdot H(a, 0) \quad (6b)$$

(здесь f — сила осциллятора, k_0 — коэффициент поглощения в центре линии, отнесенный к одному поглощающему центру). В случае малых оптических толщин однородного источника для нахождения $\varphi(a, p)$ используют формулу линейной аппроксимации [3, 10], которая с учетом (6a) имеет вид

$$\varphi(a, p) = 1 - \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \cdot B(a) \cdot \frac{p}{H(a, 0)}, \quad (7)$$

где константа $B(a)$ определяется формой контура линии:

$$B(a) = \int_{-\infty}^{\infty} [H(a, v)]^2 dv. \quad (7a)$$

В случае средних и больших оптических толщин величину $\varphi(a, p)$ следует определять из графика кривой роста. Допустим, что абсцисса и ордината кривой роста выражены через параметр p с помощью формулы (6a). Так как интенсивность линии пропорциональна величине полного поглощения A_v , то величина $\varphi = Y/Y_0$, где Y — ордината какой-либо точки на кривой роста ($\lg Y, \lg X$):

$$Y(a, p) = \frac{A_v}{4\pi \Delta v_D} = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ 1 - \exp \left[-p \frac{H(a, v)}{H(a, 0)} \right] \right\} dv. \quad (8)$$

Абсцисса данной точки

$$X = \frac{N f l}{2\pi \Delta v_D} = \frac{1}{2\pi \cdot k_0 \Delta v_D} \cdot \frac{p}{H(a, 0)}. \quad (8a)$$

Величина Y_0 пропорциональна значению, которое имело бы полное поглощение A_v^0 в случае, если бы при данном X слой рассматривался как оптически тонкий:

$$Y_0(a, p) = \frac{1}{2} \sqrt{\pi} \cdot \frac{p}{H(a, 0)}. \quad (8b)$$

На рис. 3 представлены кривые зависимости относительного поглощения от параметра p для однородного и неоднородного источников, рассчитанные по формулам (7), (8) и (8b) при $a=2$ и некотором среднем, близком к экспериментальному, значении показателя неоднородности $n=1,2$. При малых оптических толщинах построенная по (7) прямая 1 совпадает с ходом кривой 3, следовательно, для дугового разряда при нахождении $\varphi(a, p)$ можно использовать линейную аппроксимацию лишь в пределах $p=0,01 \div 1,5$. Кривая 2, полученная для средних оптических толщин однородного источника,

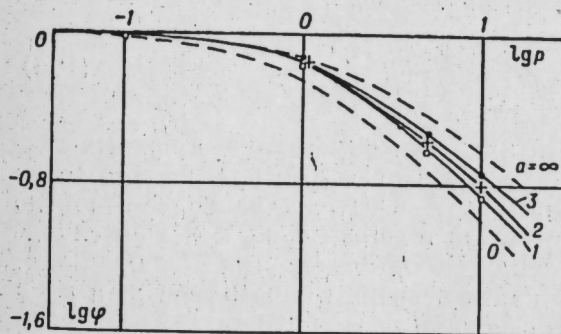


Рис. 3. График функции $\varphi(a, p)$ при $a=2$: 1 — однородный источник малой оптической толщины; 2 — однородный источник средней оптической толщины; 3 — неоднородный источник ($n = \sqrt{\gamma/\beta} \approx 1,20$).

Рис. 4. Кривые обращения $\lg \varphi = f(\lg p)$ при различных a .

имеет вид, аналогичный кривой 3, но лежит несколько выше ее. Подобное расположение кривых следует и из литературных данных по сопоставлению кривых роста для однородного и неоднородного источников света [11]. Для всех значений a величина $\varphi(a, p)$ составляет 0,98 при $p_a = 0,050$, что довольно хорошо согласуется с критерием $p_a = 0,035$ из работы [12]. На рис. 4 показан ход кривых обращения $\lg \varphi = f(\lg p)$, приведенных в работе [4] для предельных случаев $a = \infty$ и 0 и рассчитанных нами по формуле [4] для значений $a = 1, 2$ и 3. Наши кривые лежат в области, ограниченной кривыми Кауэна — Дике, с ростом параметра a при заданном p относительное поглощение растет.

Для определения величины $\varphi(a, p)$ необходимо знать значения параметра поглощения для данной линии и концентрации. Известны различные приемы нахождения p : из уширения линий, из характеристик самообращенной линии, путем определения коэффициента реabsорбции b_1 и др. [7, 13]. Мы использовали несколько иной способ, основанный на измерениях величины относительной интенсивности двух линий. Допустим, что при данной концентрации величины относительного поглощения линий элемента λ_1 и λ_2 описываются линейной аппроксимацией, согласно (7), тогда относительная интенсивность этих линий будет

$$\Omega = \lg \frac{I_{\lambda 1}}{I_{\lambda 2}} = \lg \frac{I_{\lambda 1}^0}{I_{\lambda 2}^0} + \lg \frac{1 - c_1 p_1}{1 - c_2 p_2}, \quad (9)$$

где константы c_1 и c_2 имеют вид

$$c_1 = \frac{1}{2 \sqrt{\pi}} \cdot \frac{B(a_1)}{H(a_1, 0)}; \quad c_2 = \frac{1}{2 \sqrt{\pi}} \cdot \frac{B(a_2)}{H(a_2, 0)}. \quad (9a)$$

Из (6б) и формулы Больцмана следует, что между коэффициентами поглощения этих линий должно выполняться соотношение

$$K = \frac{p_1}{p_2} = \frac{f_1 g_{a1} \lambda_1}{f_2 g_{a2} \lambda_2} \sqrt{\frac{\beta_{a2}}{\beta_{a1}}} \cdot \frac{H(a_1, 0)}{H(a_2, 0)} \cdot \exp\left(-\frac{V_{a1} - V_{a2}}{k T_0}\right), \quad (9б)$$

где g_{a1} и g_{a2} , V_{a1} и V_{a2} — статистические веса и потенциалы возбуждения нижних уровней соответствующих переходов.

Будем искать величины $\varphi(a, p)$ для некоторых линий кадмия и цинка, поступающих в плазму дуги с зонда, при заданном потенциале зонда $V_3 = 40$ в. Положим, что концентрация атомов этих элементов, а значит, и параметры поглощения пропорциональны величине выделяемой на зонде энергии: $p = \text{const } W_3$. Тогда из (9) и (9б) получаем выражение для угла наклона к оси абсцисс касательных кривым $\Omega = f(\lg W_3)$:

$$\frac{d\Omega}{d \lg W_3} = \frac{(c_2 - c_1 K) p_2}{(1 - c_1 K p_2)(1 - c_2 p_2)}. \quad (10a)$$

Величину этого угла нетрудно найти из экспериментальных кривых (например, из рис. 2), причем касательную необходимо проводить в точке с минимальным значением абсциссы $\lg W_3$, в которой наиболее вероятно выполнение условия малости оптической толщины слоя. В нашем случае это точка, в которой потенциал зонда $V_3 = 40$ в, а энергия $W_3 = 0,005$ дж. Из формул (9б) и (10a) можно найти величины параметров p_1 и p_2 , а затем и концентрацию атомов на основном уровне n_{00} .

Для определения параметра поглощения нерезонансных линий кадмия и цинка были использованы следующие пары линий: Cd I 3403,6—

4678,2 и 2880,8—3403,6; Zn I 3072,1—4680,1 и 2800,9—3072,1 Å. Для резонансных линий Cd I 3261,1 и Zn I 3075,9 величины p находили по формуле (9б) (для дуги между медными электродами $T_0 = 5000^\circ \text{K}$). Значения параметра a находились нами из наблюдений контуров данных спектральных линий посредством интерферометра Фабри — Перо, скрещенного со спектрографом. Величины коэффициентов β_a и γ определяли распределений интенсивности линий по изображению облака дуги [8], силы осцилляторов взяты из работ [14—16]. Используя найденные величины a , p , β_a и γ , с помощью данных табл. 1 и формулы (4) находили величины $\varphi(a, p)$ для всех выбранных линий кадмия и цинка, результаты расчета представлены в табл. 2. Как видим, значения p для нерезонансных линий лежат в пределах 0,3—1,4, для резонансных они гораздо больше. Потери на поглощение $(1 - \varphi) \cdot 100\%$ даже для нерезонансных линий довольно велики и составляют 10—30%, а для резонансных достигают 80%. Погрешность определения параметра p описанным методом составляет около 5%, погрешность определения величины $\varphi(a, p) = 10 \div 15\%$.

Таблица 2

λ	$V_{e, \text{эв}}$	f	a	$n = \sqrt{\frac{\gamma}{\beta_a}}$	p	$\varphi(a, p)$	$n_{00} \cdot 10^{-10}, \text{ см}^{-3}$
Cd I	4678,2	6,39	0,56	2,7	1,13	0,74	0,9
	3403,6	7,37	1,76	4,9	1,18	0,65	
	3261,1	3,80	0,0022	3,8	1,29	0,22	
	2880,8	8,10	0,38	—	1,20	0,54	
Zn I	4680,1	6,66	0,15	2,2	1,15	0,71	7,6
	3075,9	4,03	0,00016	3,6	1,41	0,20	
	3072,1	8,11	0,023	4,8	1,22	0,91	
	2800,9	8,50	0,11	5,2	1,24	0,72	

[†] Приближенная оценка.

Нетрудно заметить, что, определяя коэффициенты β_a и γ по радиальным распределениям интенсивности линий, мы вносим некоторую систематическую ошибку, так как вследствие поглощения наблюдаемое распределение интенсивности может заметно отличаться от истинного. Устранить эту погрешность можно следующим путем. Положим, что вещество поступает в плазму с поверхности электрода. Из эксперимента имеем график распределения относительной интенсивности двух линий данного элемента по радиусу изображения облака (например, кривая 1 на рис. 5 для линий Zn I 2800,9 и 3075,9). Допустим далее, что в краевых точках изображения можно использовать линейную аппроксимацию (7). Если учесть, что изменение параметра p по радиусу описывается экспоненциальной функцией типа (2б), то угол наклона к оси абсцисс касательной к кривым функции $\Omega = f(y)$ будет:

$$\frac{d\Omega}{dy} = -2 \cdot \lg e \cdot y \cdot \beta_{a2} \times \frac{(c_2 - c_1 K) p_2}{(1 - c_1 K p_2)(1 - c_2 p_2)}. \quad (10б)$$

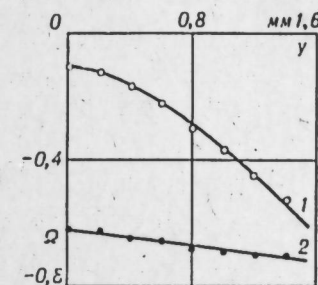


Рис. 5. Радиальное распределение относительной интенсивности линий Zn I 2800,9—3075,9:

1 — наблюдаемое; 2 — исправленное с учетом поглощения.

Величина $d\Omega/dy$ находилась нами из графика в точке, наиболее удаленной от оси, вычисляемые по формулам (96) и (106) значения p_1 и p_2 относятся также к этой точке. Определив затем величины p во всех точках по радиусу облака, можно было по формуле (4) методом итераций найти и величины $\varphi(a, p)$. В качестве первого приближения использовались значения β_a и γ , полученные без учета поглощения. Расчет показывает, что уже второе приближение дает значения коэффициентов β_a и γ , близкие к истинным, найденные по ним значения относительной интенсивности Ω^0 почти не меняются во всех точках по радиусу (кривая 2 на рис. 5). Учет поглощения приводит к более низким значениям показателя неоднородности n , источник оказывается более однородным. Однако влияние поглощения на величину отношения γ/β_a невелико, и можно показать, что при определении $\varphi(a, p)$ погрешность, возникающая, если не учитывать это влияние, также будет незначительна и во всяком случае не превысит 10%.

Таким образом, величина относительного поглощения $\varphi(a, p)$, а затем и интенсивность линии при отсутствии поглощения I_a^0 могут быть найдены для различных спектральных линий, излучаемых неоднородным источником данного типа.

Институт физики
Сибирского отделения АН СССР,
Красноярск

Поступила в редакцию
26/III 1965

ЛИТЕРАТУРА

1. G. Dieke, H. Crosswhite. JOSA, 33, 8, 425—434 (1943).
2. М. Н. Турко, И. И. Коршакевич. О некоторых закономерностях испарения вещества с поверхности зонда в дуге. Изв. Сиб. отд. АН СССР, 1965, № 10, вып. 3.
3. Н. Н. Соболев. Труды ФИАН, 7, 159—229 (1956).
4. K. Cowan, G. Dieke. Rev. Mod. Phys., 20, 2, 418—455 (1948).
5. Н. Г. Преображенский. Изв. вузов, физика, 2, 129—134 (1959).
6. Г. Г. Ильин. Итоговая научн. конф. КГУ за 1962 г., 45 (1963).
7. И. С. Фишман, И. Ш. Шайманов, Г. Г. Ильин. Оптика и спектроскопия, 15, 5, 595—600 (1963).
8. М. Н. Турко. К вопросу о радиальной неоднородности светящегося облака дуги. Изв. Сиб. отд. АН СССР, 1965, № 10, вып. 3.
9. D. Rosemer. Austral. J. Phys., 12, 2, 184—196 (1959).
10. С. Л. Мандельштам. Ж. эксперим. и теор. физ., 17, вып. 8 (1947).
11. Н. Г. Преображенский. Докл. АН СССР, 140, 4, 801—804 (1961).
12. Н. Г. Преображенский. Изв. вузов, физика, 6, 57—65 (1961).
13. И. В. Косинская. Дисс. ГОИ, 1959.
14. J. Schuttevaer, J. Smit. Physica, 10, 7, 502—512 (1943).
15. J. Hengstum, J. Smit. Physica, 22, 86—98 (1956).
16. Н. П. Пенкин, Т. П. Редько. Оптика и спектроскопия, 9, 680—682 (1960).

УДК 621.3.014.31 : 535.31
543.420.62

Р. М. ЯРОСЛАВСКАЯ

ОПРЕДЕЛЕНИЕ АБСОЛЮТНОЙ КОНЦЕНТРАЦИИ АТОМОВ МАЛЫХ ПРИМЕСЕЙ В ПЛАЗМЕ ДУГОВОГО РАЗРЯДА

Оценка концентрации атомов исследуемых элементов в плазме дугового разряда представляет большой интерес для количественного спектрального анализа. В последние годы появилось много работ, в которых приведены результаты определения концентрации атомов по оси и радиусу дугового разряда [1—17]. Большинство работ проводилось с угольной дугой. Испарение пробы происходило из кратера электрода в дуге постоянного тока. Между тем в практике спектрального анализа в качестве источника возбуждения широко применяется дуга переменного тока. В связи с этим интересно исследовать концентрацию нейтральных атомов малых примесей в облаке дуги переменного тока при испарении из металлических электродов.

Целью настоящей работы было исследование влияния физических свойств основного металла на поступление в дуговой разряд частиц малых примесей. В качестве примесей были выбраны железо, хром и ванадий. Поскольку примеси испаряются из сплава одновременно, на величину концентрации должны влиять такие физические свойства примесей, как теплота испарения, потенциал ионизации [13, 18]. Выбранные в качестве примесей вещества имеют близкие атомные веса. Следовательно, время пребывания их в плазме разряда, обусловленное диффузией, можно считать одинаковым [19] и концентрация малых примесей определяется в основном количеством испарившихся атомов. Хром и ванадий имеют почти одинаковые потенциалы ионизации, отличающиеся от потенциала ионизации железа больше чем на 1 эв. Теплота испарения ванадия превышает теплоту испарения железа и хрома в 1,3 раза. Концентрация каждой примеси составляла 0,2%, т. е. соотношение атомов примесей в электроде было равно 1 : 1. В качестве основы были выбраны медь, алюминий, олово и золото. Электроды сплавлялись в печи в графитовых тиглях, которые придавали им форму цилиндра. Конец электрода затачивался на конус. Источником возбуждения служил генератор. В дуге поддерживался ток 6 а. Один из электродов был сплавом, второй состоял из чистого металла основы сплава. Оба электрода охлаждались проточной водой. Наблюдения проводились при положительной и отрицательной полярности сплава (с использованием выпрямленной дуги переменного тока). Изображение разряда, полученное при помощи однолинзового конденсора, фокусировалось на щель спектрографа ИСП-28. Вырез диафрагмы выделял только центральную часть разряда. Спектры фотографировались на пленку РФ-3.

Поскольку мощность, реализуемая в разряде, влияет на испарение и, следовательно, на концентрацию атомов в плазме, исследования проводились в отдельные фазы разряда. Фазы разряда выделялись с

помощью стробоскопа, угол выреза диска составлял 5° , продолжительность выделяемой фазы — $28 \cdot 10^{-5}$ сек. Поджиг дуги происходил при фазе 40° . Спектры регистрировались в пределах фаз: $46-51^\circ$, т. е. вскоре после поджига, $95-100^\circ$ и $152-157^\circ$, перед угасанием дуги.

Температура в дугах определялась по отношению интенсивностей линий Fe I 3763 и Fe I 3815, относительные силы осцилляторов для которых взяты из работы Парчевского и Пенкина [20]. Для проверки полученных результатов температура определялась также по линиям Fe II 2562 и Fe II 2585 [21] и по линиям Cu I 3208 и Cu I 3319 [22]. Значения температуры, полученные по трем парам линий, совпадают. Ниже приведены значения температур в начальной, средней и конечной фазах дугового разряда с различными электродами (ошибка составляет в среднем 6%) :

	Cu	Al	Sn	Au
Начальная фаза	5500°	4700°	5000°	5900°
Средняя фаза	5600	4800	5200	6000
Конечная фаза	5200	4600	5000	6000

Известен ряд методов для определения концентрации атомов в плазме разряда, но каждый из них обладает тем или иным недостатком. Метод аномальной дисперсии не может быть использован при малых концентрациях [15]. По той же причине не пригоден метод определения концентрации по ширине спектральных линий [23, 24]. Метод, используемый Прилежаевой [25], также не применим в данном случае, поскольку он предусматривает наличие двух компонент, одна из которых имеет потенциал ионизации значительно ниже, чем другая, и присутствует в избытке. Определение концентрации по абсолютной интенсивности линий в спектре испускания требует уверенности в том, что линии не реабсорбированы. При выбранной нами концентрации малых примесей можно предполагать, что если реабсорбция и имеется, то очень незначительная. Были исследованы следующие линии: Cr I 4289 [26], Fe I 4325 и Fe VI 4112 [27]. Они оказались незначительно реабсорбированы. Реабсорбция учитывалась по методу, предложенному Мандельштамом [28].

Абсолютное значение интенсивности линий определялось с помощью вольфрамовой ленточной лампы СИ 8-200 [29, 30]. Интенсивность непрерывного спектра эталонной лампы в интервале длин волн $d\lambda$

$$\Omega I(\lambda) \frac{d\lambda}{dx} GS,$$

где Ω — телесный угол падающего на щель спектрографа потока энергии, G — увеличение спектрографа в данной области спектра, S — ширина щели микрофотометра.

$$I(\lambda) d\lambda = \bar{I}(\lambda) \frac{d\lambda}{dx} S = \epsilon_\lambda C_1 \lambda^{-5} e^{-\frac{C_2}{kT}} d\lambda,$$

где $I(\lambda)$ — спектральная плотность излучения, $\text{вт/стерад} \cdot \text{см}$; $d\lambda$ — ширина спектрального участка, см ; ϵ_λ — излучательная способность вольфрама в данной области спектра; C_1 — первая постоянная излучения ($1,177 \cdot 10^{-12} \text{ вт} \cdot \text{см}^3$); C_2 — вторая постоянная излучения ($1,4320 \text{ см} \cdot \text{град}$) [31]. За время t_1 величина излучаемой лампой энергии составляет

$$\epsilon_1 = \Omega I(\lambda) \frac{d\lambda}{dx} SG t. \quad (1)$$

Величина энергии излучения дуги за время t_2

$$\epsilon_2 = \frac{\Omega}{4\pi} A h \nu \frac{g}{z} N_0 (1-x) l t_2 e^{-\frac{E}{kT}}. \quad (2)$$

Предполагается, что количества энергий излучения линии и сплошного спектра равны, если одинакова вызываемая ими интенсивность почернения пленки:

$$\epsilon_1 = \epsilon_2,$$

$$\Omega I(\lambda) \frac{d\lambda}{dx} GS t_1 = \frac{\Omega}{4\pi} A h \nu \frac{g}{z} N_0 (1-x) l t_2 e^{-\frac{E}{kT}}, \quad (3)$$

откуда концентрация атомов

$$N_0 = \frac{4\pi GSI(\lambda) \frac{d\lambda}{dx} z}{A h \nu g l (1-x) e^{-\frac{E}{kT}}} \cdot \frac{t_2}{t_1}. \quad (4)$$

Поскольку спектры фотографировались в отдельные фазы разряда, пленка подвергалась прерывистому освещению. Отдельные импульсы составляли $28 \cdot 10^{-3}$ сек. Сплошной спектр ленточной лампы фотографировался также с помощью стробоскопа с продолжительностью импульсов $28 \cdot 10^{-5}$ сек. Меняя количество посылаемых импульсов, мы получили серию спектров различной интенсивности. Величина излучаемой энергии рассчитывалась по формуле Вина с учетом температуры ленты, зависимость интенсивности сплошного спектра от величины измеряемой энергии строилась в тех узких областях, в которых лежат аналитические линии. Ширина щели микрофотометра S была одинаковой при фотометрировании линий и сплошного спектра и подбиралась так, чтобы линия полностью попадала в щель. Для этого ширину линии на пленке предварительно измеряли с помощью микроскопа. График строился в логарифмических координатах. Между логарифмом интенсивности и логарифмом излучаемой энергии отмечена прямая зависимость. По измеренной интенсивности линии можно определить энергию ее излучения и вычислить концентрацию атомов. Температура ленты значительно ниже температуры дуги. Следовательно, энергия, посылаемая лампой, меньше энергии излучения дуги за то же время. Для получения на пленке одинаковой интенсивности линии и сплошного спектра время экспозиции сплошного спектра в 2—3 раза превышает время, требуемое для получения спектра излучения дуги. Наше предположение о равенстве энергий излучения лампы и дуги по равенству полученных интенсивностей на пленке дает ошибку в среднем 12% [32].

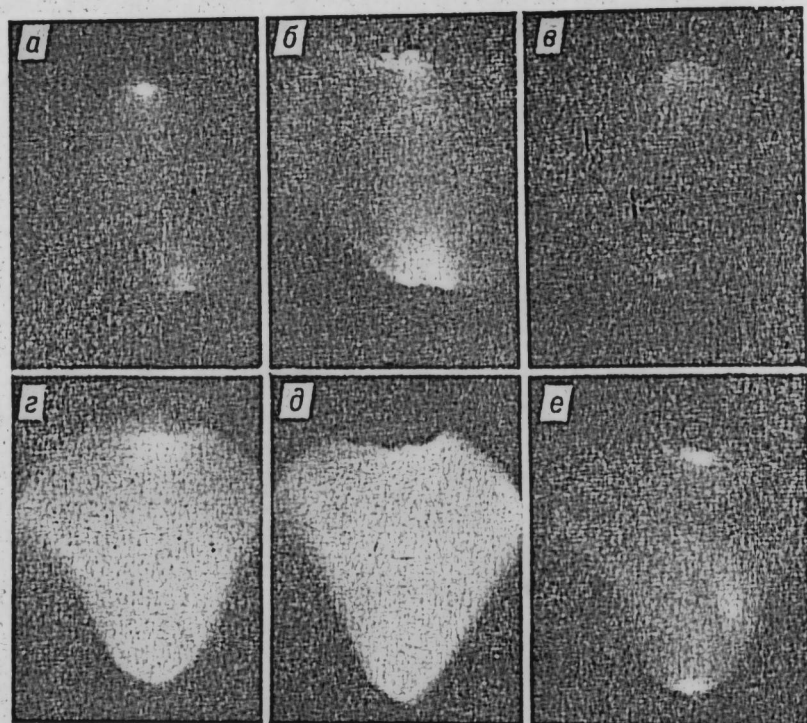
В работе [33] указывается, что атомы элементов со сравнительно высоким потенциалом ионизации (типа Cr) в основном заполняют центральную часть дугового источника. Из всех примесей, используемых нами, хром имеет наиболее низкий потенциал ионизации. Следовательно, такое заполнение облака разряда справедливо и для остальных примесей. Алексеев [34] экспериментально показал, что в светящейся зоне по радиусу положительного столба дуги концентрация атомов изменяется очень слабо. Поэтому определялось среднее значение концентрации нейтральных атомов от центра до края светящегося облака.

Из уравнений (1) и (4) получаем

$$N_0 = \frac{4\pi\epsilon_1 z t_2 e}{Ah \nu g l (1-x) e^{-\frac{E}{kT}}}, \quad (5)$$

где A — вероятность перехода данной линии, ν — частота, g — статистический вес верхнего уровня, z — сумма по состояниям [36], ϵ_1 — энергия излучения данной линии за время t_2 .

Для определения величины l , глубины светящегося облака, разряд фотографировался с помощью скоростной камеры СФР-1. На рисунке



Облако разряда при золотых (а, б, в) и алюминиевых (г, д, е) электродах.

а, г — начальная фаза разряда; б, д — средняя фаза; в, е — конечная фаза.

показаны изменения со временем диаметра облака разряда между золотыми и алюминиевыми электродами. Величина радиуса облака изменялась в соответствующие фазы. Диаметр излучающего облака проверялся по длине спектральных линий, полученных съемкой дуги перпендикулярно ее оси. Значение радиуса дуги в обоих случаях оказалось одинаковым. Ниже приведены значения радиуса в центральной части дуги при различных электродах в трех фазах (расстояние между электродами 2,5 мм).

	Cu	Sn	Al	Au
Начальная фаза	0,95	1,1	1,0	0,55
Средняя фаза	1,70	1,15	1,2	0,85
Конечная фаза	1,5	1,05	1,05	0,65

Степень ионизации x определялась по отношению интенсивностей дуговой и искровой линий Fe I 2750 и Fe II 2739, вероятности перехода для

которых взяты из работы [21]. Поскольку предполагается, что в центральной части дуги имеется термодинамическое равновесие и степень ионизации каждого элемента определяется только его потенциалом ионизации, для остальных примесей выполняется соотношение [35]

$$\lg \frac{x_1}{1-x_1} = \lg \frac{x_2}{1-x_2} - \frac{5040}{T} (U_1 - U_2).$$

В табл. 1 указаны значения степени ионизации по фазам для исследуемых примесей. Наибольшая степень ионизации наблюдается в средней фазе

Таблица 1

Элемент, фаза		Материал электрода							
		медь		алюминий		олово		золото	
		анод	катод	анод	катод	анод	катод	анод	катод
Железо	н. ф.	0,034	0,033	0,011	0,011	0,012	0,011	0,076	0,071
	с. ф.	0,058	0,06	0,021	0,018	0,014	0,013	0,079	0,072
	к. ф.	0,031	0,03	0,015	0,014	0,013	0,013	0,078	0,072
Хром	н. ф.	0,25	0,24	0,12	0,12	0,135	0,124	0,40	0,395
	с. ф.	0,32	0,33	0,15	0,149	0,145	0,148	0,418	0,40
	к. ф.	0,23	0,23	0,15	0,135	0,145	0,145	0,418	0,39
Ванадий	н. ф.	0,26	0,27			0,15	0,139	0,44	0,42
	с. ф.	0,36	0,38			0,157	0,141	0,44	0,423
	к. ф.	0,25	0,25			0,160	0,159	0,44	0,422

(при максимуме тока), что вполне естественно, поскольку в средней фазе и температура имеет максимальное значение. Наиболее высокая степень ионизации примесей получена в дуге между золотыми электродами. Такие результаты также можно объяснить наиболее высокой температурой в облаке дуги между золотыми электродами по сравнению с температурой в дуге между медными или оловянными электродами. Наиболее низкая степень ионизации получена в облаке дуги между оловянными электродами, хотя температура здесь выше, чем в алюминиевой дуге. В облаке дуги между оловянными электродами получена наибольшая концентрация атомов, при отмеченной температуре образуется определенное количество ионов. Возможно, этим объясняется низкая степень ионизации.

Значения концентрации нейтральных атомов помещены в табл. 2. Ошибка в определении концентраций составляет в среднем 70%.

Таблица 2

Элемент, фаза		Материал электрода							
		медь		золото		алюминий		олово	
		анод	катод	анод	катод	анод	катод	анод	катод
Железо	н. ф.	$7,8 \cdot 10^{12}$	$1,7 \cdot 10^{13}$	$2,3 \cdot 10^{12}$	$3,9 \cdot 10^{12}$	$1,2 \cdot 10^{13}$	$1,6 \cdot 10^{13}$	$2,7 \cdot 10^{13}$	$1,2 \cdot 10^{13}$
	с. ф.	$1,6 \cdot 10^{13}$	$3,1 \cdot 10^{13}$	$9,7 \cdot 10^{12}$	$6,0 \cdot 10^{12}$	$2,6 \cdot 10^{14}$	$1,9 \cdot 10^{14}$	$1,6 \cdot 10^{14}$	$9,4 \cdot 10^{13}$
	к. ф.	$1,8 \cdot 10^{12}$	$1,4 \cdot 10^{13}$	$3,4 \cdot 10^{12}$	$2,1 \cdot 10^{12}$	$4,7 \cdot 10^{13}$	$4,2 \cdot 10^{13}$	$1,0 \cdot 10^{14}$	$2,5 \cdot 10^{13}$
Хром	н. ф.	$4,4 \cdot 10^{12}$	$5,3 \cdot 10^{12}$	$3,4 \cdot 10^{12}$	$7,3 \cdot 10^{12}$	$2,3 \cdot 10^{13}$	$3,8 \cdot 10^{12}$	$2,1 \cdot 10^{13}$	$9,4 \cdot 10^{12}$
	с. ф.	$6,7 \cdot 10^{12}$	$1,3 \cdot 10^{13}$	$4,4 \cdot 10^{12}$	$1,2 \cdot 10^{13}$	$5,5 \cdot 10^{13}$	$2,8 \cdot 10^{13}$	$5,6 \cdot 10^{14}$	$1,1 \cdot 10^{14}$
	к. ф.	$5,3 \cdot 10^{12}$	$6,7 \cdot 10^{12}$	$5,2 \cdot 10^{12}$	$3,5 \cdot 10^{12}$	$2,0 \cdot 10^{13}$	$4,9 \cdot 10^{12}$	$1,4 \cdot 10^{14}$	$2,3 \cdot 10^{13}$
Ванадий	н. ф.	$6,6 \cdot 10^{11}$	$2,5 \cdot 10^{11}$	$5,8 \cdot 10^{11}$	$2,6 \cdot 10^{11}$	—	—	$3,3 \cdot 10^{12}$	$7,5 \cdot 10^{11}$
	с. ф.	$8,3 \cdot 10^{11}$	$1,8 \cdot 10^{12}$	$8,2 \cdot 10^{11}$	$3,0 \cdot 10^{11}$	—	—	$7,6 \cdot 10^{12}$	$1,9 \cdot 10^{12}$
	к. ф.	$1,6 \cdot 10^{11}$	$4,2 \cdot 10^{11}$	$2,1 \cdot 10^{11}$	$1,9 \cdot 10^{11}$	—	—	$4,0 \cdot 10^{12}$	$1,0 \cdot 10^{12}$

Б. С. Бураков и П. А. Науменко [17] получили концентрацию атомов хрома в облаке дуги переменного тока $1,2-1,6 \cdot 10^{15} \text{ см}^{-3}$, причем концентрация хрома в сплаве хром—железо составляла 11—21,23%. У А. В. Рукосуевой [7] среднее значение концентрации хрома в плазме равно $0,9 \cdot 10^{13} \text{ см}^{-3}$ при концентрации хрома в сплаве хром—никель 0,31%. У нас концентрация каждой примеси составляет 0,2%. Концентрация хрома в облаке охватывает диапазон от $3,3 \cdot 10^{12}$ (при испарении из золота), до $5 \cdot 10^{14} \text{ см}^{-3}$ (при испарении из олова). Концентрация железа меняется в тех же пределах. Концентрация ванадия в облаке во всех случаях на порядок меньше концентрации железа и хрома. Возможно, это объясняется тем, что теплота испарения ванадия больше теплоты испарения железа и хрома.

ВЫВОДЫ

1. Независимо от материала электрода и полярности концентрация атомов ванадия на порядок меньше концентрации атомов железа и хрома.
2. Наименьшая концентрация атомов примесей в облаке дуги наблюдается при испарении из золотого электрода.
3. В случае меди и золота большая концентрация атомов в плазме отмечена при испарении из электрода с отрицательной полярностью.
4. При испарении из алюминия и олова, т. е. металлов с низкой температурой плавления, большая концентрация примесей наблюдается при испарении из анода. Особенно это заметно в случае электрода из олова. Большая концентрация примесей при испарении из олова связана, по-видимому, с тем, что олово обладает меньшей теплопроводностью по сравнению с алюминием и у оловянного электрода большая, чем у алюминиевого, доля тепла, полученного из разряда, тратится на испарение. Для определения более строгой зависимости концентрации в облаке малых примесей от физических свойств основы сплава необходимо провести дополнительные эксперименты.

Институт физики
Сибирского отделения АН СССР,
Красноярск

Поступила в редакцию
29/III 1965

ЛИТЕРАТУРА

1. Е. И. Никонова, В. К. Прокофьев. Определение концентрации атомов металлов в плазме дуги переменного тока, горящей при пониженном давлении.— Оптика и спектроскопия, 1956, т. I, вып. 3.
2. Н. К. Рубцова. Определение концентрации цинковых атомов в вольтовой дуге и длительности возбужденного состояния 2^3S атомов цинка.— Ж. эксперим. и теор. физ., 1947, 17, 1005.
3. М. А. Алексеев. Распределение температуры и концентрации атомов по радиусу дуги.— Тр. СФТИ, вып. 35, 1956.
4. В. С. Мельченко. Определение абсолютных концентраций атомов многокомпонентного дугового газа.— Ж. эксперим. и теор. физ., 1955, 28, 628.
5. В. С. Мельченко. Дисс., Томск, 1953.
6. Е. И. Никонова, В. К. Прокофьев. К вопросу о распределении нейтральных атомов в плазме дуги постоянного тока.— Оптика и спектроскопия, 1959, т. 6, вып. 2.
7. А. В. Рукосуева. Определение концентрации атомов и степени неоднородности дугового разряда методом линейного поглощения.— Оптика и спектроскопия, 1964, т. 17, вып. 3, 340.

8. Е. И. Никонова, В. К. Прокофьев. Исследование радиального распределения атомов металлов в плазме дуги постоянного тока.— Оптика и спектроскопия, 1958, т. 4, вып. 2.
9. A. Eberhagen. Количественное исследование полого пламени Ленарда. Z. Phys., 1955, 143, 312.
10. П. В. Полатбеков. Определение концентрации атомов некоторых металлов в дуговом разряде переменного тока.— Сб. «Оптика. Ядерные процессы», Алма-Ата, 1959, стр. 78.
11. У-Цин-и, Чжан Хо-цн. Экспериментальное определение поперечного распределения основных параметров термического возбуждения спектральных линий в плазме дуги постоянного тока.— Acta Physica, 1959, 15, 4, 210.
12. И. М. Белоусова. О механизме образования равновесной концентрации вещества электродов в плазме дугового разряда.— Оптика и спектроскопия, 1962, т. 13, вып. 1, 1219.
13. В. С. Энгельшт. Распределение атомов натрия и меди в облаке дуги постоянного тока.— Сборник трудов кафедры экспериментальной физики. Фрунзе, 1961, стр. 13.
14. Н. А. Прилежаева, В. Н. Горячев. Определение концентрации атомов натрия в положительном столбе дугового разряда.— Изв. АН СССР, серия физ., 1959, т. 14, вып. 6.
15. И. М. Нагибина. Определение концентрации атомов в плазме дугового разряда переменного тока по ширине спектральных линий.— Оптика и спектроскопия, 1958, т. 4, вып. 1, 430.
16. В. В. Пластинин. Распределение атомов свинца в плазме дуги переменного тока.— Физические проблемы спектроскопии, т. I. Изд-во АН СССР, 1962, стр. 125.
17. Б. С. Бураков, П. А. Науменко. Исследование состава газового облака дуги переменного тока.— Оптика и спектроскопия, 1963, т. 15, вып. 6, 818.
18. А. Д. Гутько. Эрозия электродов из благородных металлов в дуговом разряде.— Электрические контакты, Изд-во «Энергия», 1964, стр. 53.
19. Я. Д. Райхбаум, В. Д. Малых. Спектроскопический способ изучения диффузии атомов в электрической дуге.— Оптика и спектроскопия, 1960, т. 9, вып. 4, 425.
20. Г. Ф. Парчевский, Н. П. Пеккин. Определение сил осцилляторов в спектрах железа и никеля.— Вестник ЛГУ, 1954, № 11, 113.
21. Н. Н. Соболев. Измерение относительных вероятностей переходов некоторых линий Bi I, Fe I и Fe II.— Ж. эксперим. и теор. физ., 1943, т. 13, вып. 5.
22. Н. А. Синьков. Метод подбора гомологических пар спектральных линий.— Методы анализа платиновых металлов, золота и серебра. М., Металлургиздат, 1960, стр. 205.
23. А. Я. Вятский, И. М. Нагибина. Исследование ширины спектральных линий в дуговом источнике света.— Докл. АН СССР, 1954, т. 98, № 1, 59.
24. Л. М. Биберман. Об определении силы осциллятора путем непосредственного измерения ширины спектральной линии конечной оптической плотности.— Оптика и спектроскопия, 1957, т. 3, вып. 4, 397.
25. Н. А. Прилежаева. О функциях температурного возбуждения спектральных линий.— Тр. СФТИ, вып. 28, Томск, 1949, стр. 83.
26. Frank B. Estabrook. Абсолютные силы осцилляторов хрома и никеля.— The Astrophys. J., 1951, 113, 3, 684.
27. К. У. Аллен. Астрофизические величины. М., ИЛ, 1960, стр. 95.
28. С. Л. Мандельштам. Об учете реabsорбции спектральных линий в источнике возбуждения спектра.— Ж. эксперим. и теор. физ., 1947, т. 17, вып. 8, 757.
29. Lennart Uildt, Albin Lagerquist. Вероятности переходов для линий Cr I и Mn I. Arkiv för Fysik, 1961, Bd. 5, N 6, 91.
30. В. Е. Яхонтова. Роль каскадных переходов в возбужденной линии гелия.— Вестник ЛГУ, № 10, сер. физики и химии, 1959, 27.
31. А. А. Шишловский. Прикладная физическая оптика. М., Физматгиз, 1961, стр. 231.
32. И. М. Нагибина, В. К. Прокофьев. Спектральные приборы и техника спектроскопии. М.—Л., Машгиз, 1963.
33. И. С. Фишман, И. Ш. Шайманов, Г. Г. Ильин. Некоторые экспериментальные зависимости интегральных характеристик излучения в дуге.— Оптика и спектроскопия, 1963, т. 15, вып. 5.
34. М. А. Алексеев. Автореф. дисс., Томск, 1950.
35. Р. М. Ярославская, Г. Е. Золотухин. Влияние теплопроводности и полярности электрода на распределение частиц в дуге переменного тока.— Сб. «Некоторые вопросы эмиссионной и молекулярной спектроскопии», Красноярск, 1960, стр. 27.
36. Charles H. Corliss. Ионизация в плазме медной дуги. J. of Research of Nat. Bur. of stand. 66A, 1962, № 2, стр. 163.

Е. Н. КОПАЧ, А. Т. ПУТИЛОВА,
Г. И. САМОРОДОВ, В. К. ХАЛЕВИН

СОВМЕСТНОЕ РЕШЕНИЕ УРАВНЕНИЙ ДЛИННОЙ ЛИНИИ И СИНХРОННОГО ГЕНЕРАТОРА

Повышение требований к надежности энергосистем в значительной степени предопределяет совершенствование методов расчета переходных процессов. Появление в системах такого элемента, как длинная линия, вызвало интерес к расчету переходных процессов синхронной машины с учетом распределенности параметров линии. В этом смысле получены удовлетворительные результаты при анализе устойчивости в малом [1]. Однако попытки исследовать качество переходного процесса синхронной машины, работающей на длинную линию, упираются зачастую в непреодолимые трудности, связанные с ростом порядка дифференциальных уравнений исходной системы при замещении линии цепочкой четырехполюсников.

В последнее время как у нас, так и за рубежом при исследовании переходных процессов используется решение уравнений длинной линии в форме Даламбера. Работы Р. И. Караева, А. И. Долгинова, К. П. Кадомской [2—4] и других показали, что решение в этой форме достаточно просто реализуется на ЦВМ. В настоящей статье это решение используется при расчетах переходного процесса системы генератор — длинная линия — шины бесконечной мощности без ограничения его общности на более сложные случаи. Основные допущения в части записи уравнений синхронной машины общеприняты. Поскольку предполагалось исследовать только симметричные режимы, уравнения синхронной машины записываются в осях $d-q-o$.

Представляется рациональным и внешнюю сеть, содержащую длинную линию, записать в синхронно-вращающихся осях, как это принято для статических элементов системы [5].

Известно, что исходными для анализа переходных процессов в линейной модели линии служат дифференциальные уравнения в частных производных:

$$\begin{aligned} -\frac{\partial}{\partial x} u &= R \cdot i + L \frac{\partial}{\partial t} i, \\ -\frac{\partial}{\partial x} i &= G \cdot u + C \frac{\partial}{\partial t} u, \end{aligned} \quad (1)$$

где u и i — матрицы-столбцы, элементы которых являются соответственно напряжениями относительно нулевого провода и токами отдельных проводов трехфазной системы; R , L , G и C — квадратные матрицы третьего порядка соответственно сопротивления, индуктивности, проводимости и емкости.

Ограничимся случаем идеально симметричной линии, когда взаимные сопротивления, индуктивности, проводимости и емкости проводов

равны. Тогда система матричных уравнений (1) посредством линейного преобразования координат a, b, c к координатам α, β, o распадается на три независимых системы, в общем случае связанных граничными условиями [2]. Таким образом можем записать:

$$\begin{aligned} -\frac{\partial}{\partial x} u_{\alpha} &= R_1 i_{\alpha} + L_1 \frac{\partial}{\partial t} i_{\alpha}, \\ -\frac{\partial}{\partial x} i_{\alpha} &= G_1 u_{\alpha} + C_1 \frac{\partial}{\partial t} u_{\alpha}, \\ -\frac{\partial}{\partial x} u_{\beta} &= R_1 i_{\beta} + L_1 \frac{\partial}{\partial t} i_{\beta}, \\ -\frac{\partial}{\partial x} i_{\beta} &= G_1 u_{\beta} + C_1 \frac{\partial}{\partial t} u_{\beta}, \\ -\frac{\partial}{\partial x} u_o &= R_o i_o + L_o \frac{\partial}{\partial t} i_o, \\ -\frac{\partial}{\partial x} i_o &= G_o u_o + C_o \frac{\partial}{\partial t} u_o, \end{aligned} \quad (2)$$

где

$$R_1 = R_{11}, L_1 = L_{11} - M, G_1 = G_{11} + 3G_{12}, C_1 = C_{11} + 3C_{12},$$

$$R_o = R_{11} + 3R_3, L_o = L_{11} + 2M, G_o = G_{11}, C_o = C_{11}$$

— соответственно сопротивления, индуктивности, проводимости, емкости прямой и нулевой последовательностей. В дальнейшем последние два уравнения системы (2) исключаем из рассмотрения.

Перепишем первые два уравнения из (2):

$$\begin{aligned} -\frac{\partial}{\partial x} u_{\alpha} &= R_1 i_{\alpha} + L_1 \frac{\partial}{\partial t} i_{\alpha}, \\ -\frac{\partial}{\partial x} i_{\alpha} &= G_1 u_{\alpha} + C_1 \frac{\partial}{\partial t} u_{\alpha}. \end{aligned} \quad (3)$$

Решение этой системы в форме Даламбера в случае неискажающей линии находится в виде

$$\begin{aligned} u_{\alpha} + z i_{\alpha} &= e^{-\beta' x} \cdot V_{\alpha} \left(t - \frac{x}{v} \right), \\ u_{\alpha} - z i_{\alpha} &= e^{-\beta' (t-x)} \cdot W_{\alpha} \left(t - \frac{t-x}{v} \right), \end{aligned} \quad (4)$$

где β' — коэффициент затухания прямой последовательности

$$\beta' = \frac{1}{2} \left(\frac{R_1}{L_1} + \frac{G_1}{C_1} \right);$$

$z = \sqrt{\frac{L_1}{C_1}}$ — волновое сопротивление прямой последовательности;

$v = \frac{1}{\sqrt{L_1 C_1}}$ — скорость волны прямой последовательности;
 V_a — прямая волна;
 W_a — обратная волна;
 l — длина линии;
 x — текущая координата.

Решением (4) можно воспользоваться и в случае искажающей линии, если величина

$$\partial^2 = \frac{1}{4} \left(\frac{R_1}{L_1} - \frac{G_1}{C_1} \right)^2$$

пренебрежимо мала, что имеет место в линиях 500 кВ и выше.

Уравнения (4) можно записать иначе, если положить $\tau = \frac{l}{v}$ — время пробега волны вдоль всей линии, $\tau_x = \frac{x}{v}$ — время пробега волны до искомой точки, $\beta = \beta'v$:

$$\begin{aligned} u_a(t) + z i_a(t) &= e^{-\beta \tau_x} \cdot V_a(t - \tau_x), \\ u_a(t) - z i_a(t) &= e^{-\beta(\tau - \tau_x)} \cdot W_a(t - \tau + \tau_x). \end{aligned} \quad (5)$$

Уравнения (5) позволяют установить связь между переменными начала и конца линии:

$$\begin{aligned} u_{1a}(t) - z i_{1a}(t) &= e^{-\beta \tau} [u_{2a}(t - \tau) - z i_{2a}(t - \tau)], \\ u_{2a}(t) + z i_{2a}(t) &= e^{-\beta \tau} [u_{1a}(t - \tau) + z i_{1a}(t - \tau)]. \end{aligned} \quad (6)$$

В левой части этих уравнений стоят переменные, а в правой части — известные функции времени в промежутке $\Delta t = 2\tau$. Аналогичные уравнения можно получить и для β -составляющей системы (2).

Таким образом, исходная система уравнений, связывающих переменные по концам линии, примет вид

$$\begin{aligned} u_1(t) - z i_1(t) &= e^{-\beta \tau} [u_2(t - \tau) - z i_2(t - \tau)], \\ u_2(t) + z i_2(t) &= e^{-\beta \tau} [u_1(t - \tau) + z i_1(t - \tau)], \end{aligned} \quad (7)$$

где

$$u_2(t) = \begin{vmatrix} u_{2a}(t) \\ u_{2\beta}(t) \end{vmatrix}, \quad i_2(t) = \begin{vmatrix} i_{2a}(t) \\ i_{2\beta}(t) \end{vmatrix} \text{ и т. д.}$$

Система уравнений (7) совместно с граничными условиями, заданными уравнениями синхронной машины и приемной системы, позволяет решать поставленную задачу. Но, как показано выше, электромеханические переходные процессы в генераторах описываются дифференциальными уравнениями в $d-q-o$ -координатах. Процесс численного интегрирования этих уравнений методом Рунге—Кутты и его модификации задается шагом h , кроме того, необходима информация для шага $\frac{h}{2}$ [6]. Следовательно, потребуется на каждом шаге интегрирования урав-

нения (7) преобразовывать в $d-q-o$ -координаты. Поэтому целесообразно записать систему (7) в синхронно-вращающихся осях d_s-q_s-o . В качестве линейного преобразования от осей α, β к d_s-q_s-o используем матрицу

$$A_s(t) = \begin{vmatrix} \cos \omega_0 t & -\sin \omega_0 t \\ \sin \omega_0 t & \cos \omega_0 t \end{vmatrix}. \quad (8)$$

Переменные в новой системе координат запишутся согласно

$$u'_2(t) = A_s(t) \cdot u_2(t). \quad (9)$$

Равенства (9) распространяются на все переменные уравнений (7). Матрица $u'_2(t)$ расшифровывается как

$$u'_2(t) = \begin{vmatrix} u_{2d}(t) \\ u_{2q}(t) \end{vmatrix}. \quad (10)$$

Аналогичные равенства имеют место для $i_2(t)$, $u_2(t)$, $i_1(t)$, $i_2(t-\tau)$, $u_2(t-\tau)$, $i_1(t-\tau)$, $u_1(t-\tau)$.

Нетрудно показать, что

$$A_s(t) = s(\tau) \cdot A_s(t - \tau), \quad (11)$$

где

$$s(\tau) = \begin{vmatrix} \cos \omega_0 \tau & -\sin \omega_0 \tau \\ \sin \omega_0 \tau & \cos \omega_0 \tau \end{vmatrix}.$$

Умножим выражения (7) слева и справа на $A_s(t)$, тогда получим

$$A_s(t) [u_1(t) - z i_1(t)] = e^{-\beta \tau} A_s(t) [u_2(t - \tau) - z i_2(t - \tau)], \quad (12)$$

$$A_s(t) [u_2(t) + z i_2(t)] = e^{-\beta \tau} A_s(t) [u_1(t - \tau) + z i_1(t - \tau)].$$

Используя равенство (11), с учетом (10) приведем системы (12) к виду

$$u'_1(t) - z i'_1(t) = e^{-\beta \tau} s(\tau) [u'_2(t - \tau) - z i'_2(t - \tau)], \quad (13a)$$

$$u'_2(t) + z i'_2(t) = e^{-\beta \tau} \cdot s(\tau) [u'_1(t - \tau) + z i'_1(t - \tau)]. \quad (13b)$$

По аналогии с решением (4) правая часть уравнения (13a) не что иное, как обратная волна, а правая часть (13b) — прямая волна.

Распишем матричные уравнения (13a) и (13b):

$$u_{1d}(t) - z i_{1d}(t) = e^{-\beta \tau} \cdot W_d(t - \tau), \quad (14a)$$

$$u_{1q}(t) - z i_{1q}(t) = e^{-\beta \tau} \cdot W_q(t - \tau),$$

где

$$\begin{aligned} W_d(t - \tau) &= [u_{2d}(t - \tau) - z i_{2d}(t - \tau)] \cos \omega_0 \tau - [u_{2q}(t - \tau) - \\ &\quad - z i_{2q}(t - \tau)] \sin \omega_0 \tau, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 W_q(t-\tau) &= [u_{2d}(t-\tau) - z i_{2d}(t-\tau)] \sin \omega_0 \tau + [u_{2q}(t-\tau) - \\
 &\quad - z i_{2q}(t-\tau)] \cos \omega_0 \tau; \\
 u_{2d}(t) + z i_{2d}(t) &= e^{-\beta \tau} \cdot V_d(t-\tau), \\
 u_{2q}(t) + z i_{2q}(t) &= e^{-\beta \tau} \cdot V_q(t-\tau),
 \end{aligned} \quad (14b)$$

где

$$\begin{aligned}
 V_d(t-\tau) &= [u_{1d}(t-\tau) + z i_{1d}(t-\tau)] \cos \omega_0 \tau - \\
 &\quad - [u_{1q}(t-\tau) + z i_{1q}(t-\tau)] \sin \omega_0 \tau, \\
 V_q(t-\tau) &= [u_{1d}(t-\tau) + z i_{1d}(t-\tau)] \sin \omega_0 \tau + \\
 &\quad + [u_{1q}(t-\tau) + z i_{1q}(t-\tau)] \cos \omega_0 \tau.
 \end{aligned}$$

Рассмотрим подробнее граничные условия для систем уравнений (14a) и (14b).

Дифференциальные уравнения синхронного генератора, являющиеся граничными условиями в начале линии, в относительных единицах «системы x_{ad} » имеют вид (принято, что ось d опережает ось q) [7]:

$$\begin{aligned}
 -u_{d1} &= p \Psi_{d1} + \Psi_{q1} (1+s) + r_1 i_{d1}, \\
 -u_{q1} &= -(1+s) \Psi_{d1} + p \Psi_{q1} + r_1 i_{q1}, \\
 e_{f1} &= p \Psi_{f1} + r_{f1} i_{f1}, \\
 0 &= p \Psi_{\delta d1} + r_{\delta d1} i_{\delta d1}, \\
 0 &= p \Psi_{\delta q1} + r_{\delta q1} i_{\delta q1}, \\
 M_{\tau 1} &= H_{j1} p s + (\Psi_{d1} i_{q1} - \Psi_{q1} i_{d1}), \\
 s &= p \Theta.
 \end{aligned} \quad (15)$$

Токи и потокосцепления, входящие в выражения (15), связаны следующей матричной зависимостью:

$$\begin{vmatrix} \Psi_{d1} \\ \Psi_{q1} \\ \Psi_{f1} \\ \Psi_{\delta d1} \\ \Psi_{\delta q1} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x_{d1} & 0 & x_{ad1} & x_{ad1} & 0 \\ 0 & x_{q1} & 0 & 0 & x_{aq1} \\ x_{ad1} & 0 & x_{f1} & x_{ad1} & 0 \\ x_{ad1} & 0 & x_{ad1} & x_{\delta d1} & 0 \\ 0 & x_{aq1} & 0 & 0 & x_{\delta q1} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} i_{d1} \\ i_{q1} \\ i_{f1} \\ i_{\delta d1} \\ i_{\delta q1} \end{vmatrix} \quad (15a)$$

Обозначения коэффициентов и переменных в (15) и (15a) аналогичны [7].

Подобные уравнения могут быть записаны и для приемной системы. Мы ограничимся рассмотрением случая, когда приемная система замещается шиной неизменного напряжения:

$$\begin{aligned}
 u_{d2} &= 0, \\
 u_{q2} &= u_2.
 \end{aligned} \quad (16)$$

Система уравнений (15) с учетом (15a), приведенная к форме Коши, в общем виде запишется следующим образом:

$$\begin{aligned}
 p i_{d1} &= f_d(i_{d1}, i_{q1}, i_{f1}, i_{\delta d1}, i_{\delta q1}, s, u_{d1}), \\
 p i_{q1} &= f_q(i_{d1}, i_{q1}, i_{f1}, i_{\delta d1}, i_{\delta q1}, s, u_{q1}), \\
 p i_{f1} &= f_f(i_{d1}, i_{q1}, i_{f1}, i_{\delta d1}, i_{\delta q1}, s, u_{d1}), \\
 p i_{\delta d1} &= f_{\delta d}(i_{d1}, i_{q1}, i_{f1}, i_{\delta d1}, i_{\delta q1}, s, u_{d1}), \\
 p i_{\delta q1} &= f_{\delta q}(i_{d1}, i_{q1}, i_{f1}, i_{\delta d1}, i_{\delta q1}, s, u_{q1}), \\
 p s &= f_s(i_{d1}, i_{q1}, i_{f1}, i_{\delta d1}, i_{\delta q1}), \\
 p \Theta &= f_{\Theta}(s).
 \end{aligned} \quad (17)$$

Подготовленная таким образом система уравнений (17) совместно с (14a) полностью определяет процесс в начале линии, а система (16) совместно с (14b) — в конце линии. Заметим, что, поскольку система (17) записана в осях, жестко связанных с ротором передающего генератора, а уравнения длинной линии (14a), (14b) записаны в синхронных осях, для подсчета прямых волн на каждом шаге интегрирования h следует переходить от осей $d_r - q_r - o$ к осям $d_s - q_s - o$. Аналогично для вычисления обратных волн в начале линии необходимо обратное преобразование от осей $d_s - q_s - o$ к $d_r - q_r - o$.

Переход от переменных в осях $d_r - q_r - o$ к переменным в синхронно-вращающихся осях осуществляется с помощью матрицы преобразования

$$A_{r-s} = \begin{vmatrix} \cos(\Theta_s - \Theta_r) & -\sin(\Theta_s - \Theta_r) \\ \sin(\Theta_s - \Theta_r) & \cos(\Theta_s - \Theta_r) \end{vmatrix}. \quad (18)$$

Обратное преобразование

$$A_{s-r} = A_{r-s}^{-1} = \begin{vmatrix} \cos(\Theta_r - \Theta_s) & -\sin(\Theta_r - \Theta_s) \\ \sin(\Theta_r - \Theta_s) & \cos(\Theta_r - \Theta_s) \end{vmatrix}, \quad (19)$$

где Θ_r — угол, образуемый осью q_r с осью фазы a статора;

Θ_s — угол, образуемый осью q_s с осью фазы a статора.

В нашем случае $\Theta_s = 0$, а угол Θ_r подсчитывается согласно (17).

Начальные значения переменных, входящих в полученные системы уравнений $i_{d10}, i_{q10}, i_{f10}, s_{10}, u_{d10}, u_{q10}$ и т. д., определяются уравнениями установившегося режима.

Изложенный метод расчета переходного процесса синхронной машины, работающей через длинную линию, легко реализуется на малой ЦВМ. Блок-схема программы приведена на рис. 1. На рис. 2 и 3 даны результаты расчета переходного процесса синхронной машины с параметрами [8]: $x_d = x_q = 2,0$, $x_s = 0,17$, $x_{\sigma f} = 0,14$, $x_{\delta d} = x_{\delta q} = 0,03$, $r_f = 0,001$, $r_{\delta d} = r_{\delta q} = 0,005$, $T_f = 2360$, работающей через линию полуволновой длины на шины неизменного напряжения. Начальный режим — холостой ход. Возмущение создается кратковременным (0,02 сек) набросом момента на вал генератора. Величина момента 0,5. Расчеты проведены для двух случаев: 1) линия с потерями, $\beta = 0,05$ (рис. 2);

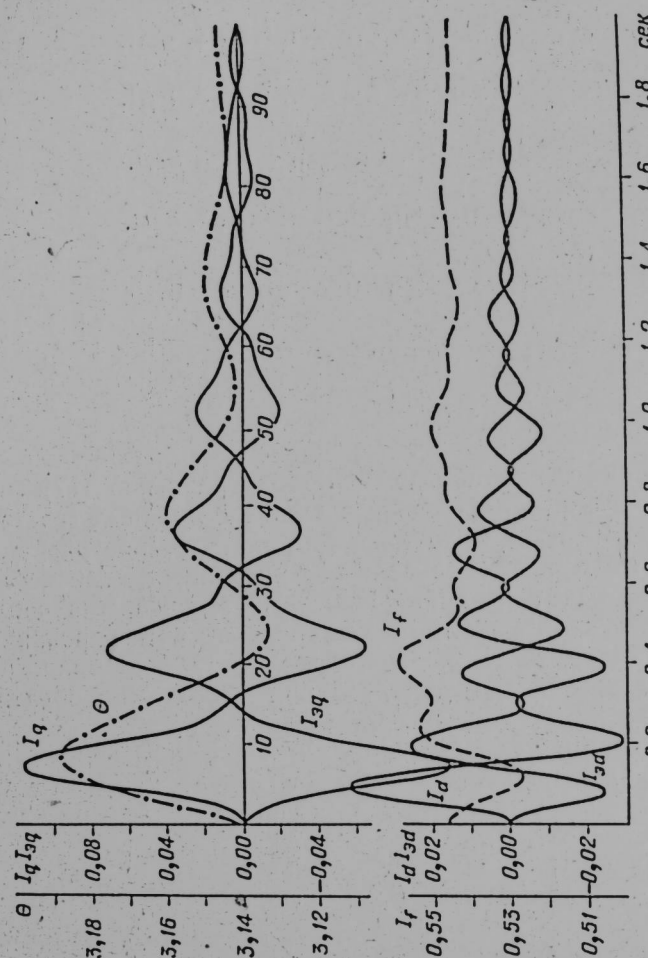


Рис. 2. Переходный процесс синхронной машины, работающей через полуволновую линию с потерями ($\beta l = 0,05$).

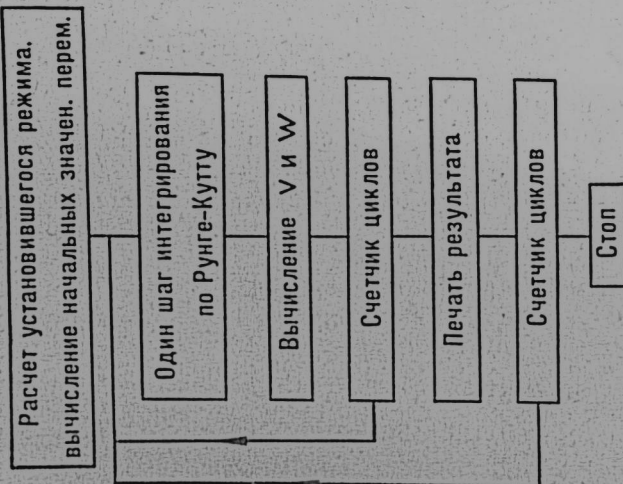


Рис. 1. Блок-схема программы расчета переходного процесса синхронной машины, работающей через длинную линию на шины неизменного напряжения.

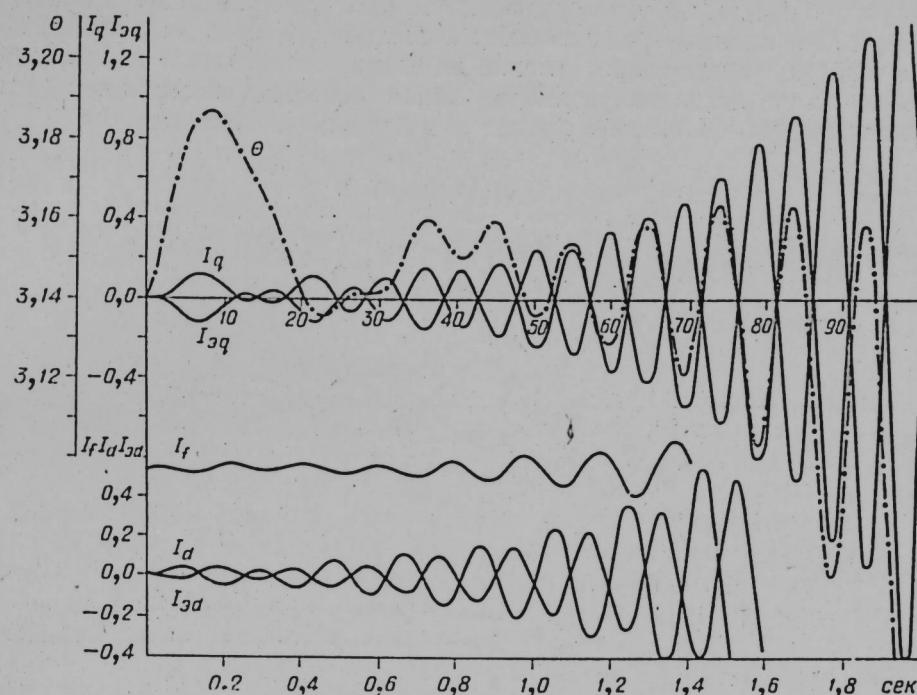


Рис. 3. Переходный процесс синхронной машины, работающей через полуволновую линию без потерь.

2) линия без потерь, активное сопротивление в статорной цепи $r = 0,005$.

Переходный процесс сопровождается колебаниями тока во всех обмотках машины и качаниями ротора. В первом случае эти колебания затухают, во втором нарастают; последний пример демонстрирует само-



Рис. 4. Переходный процесс синхронной машины, работающей через активное сопротивление, эквивалентное активным потерям ($r = 0,05$).

возбуждение машины. Для сравнения на рис. 4, 5 приведены результаты расчета переходного процесса той же синхронной машины, но работающей через активное сопротивление на шины неизменного напряжения, т. е. по схеме, когда полуволновая линия замещена синхронным четырехполюсником и волновые процессы в ней не учитываются.

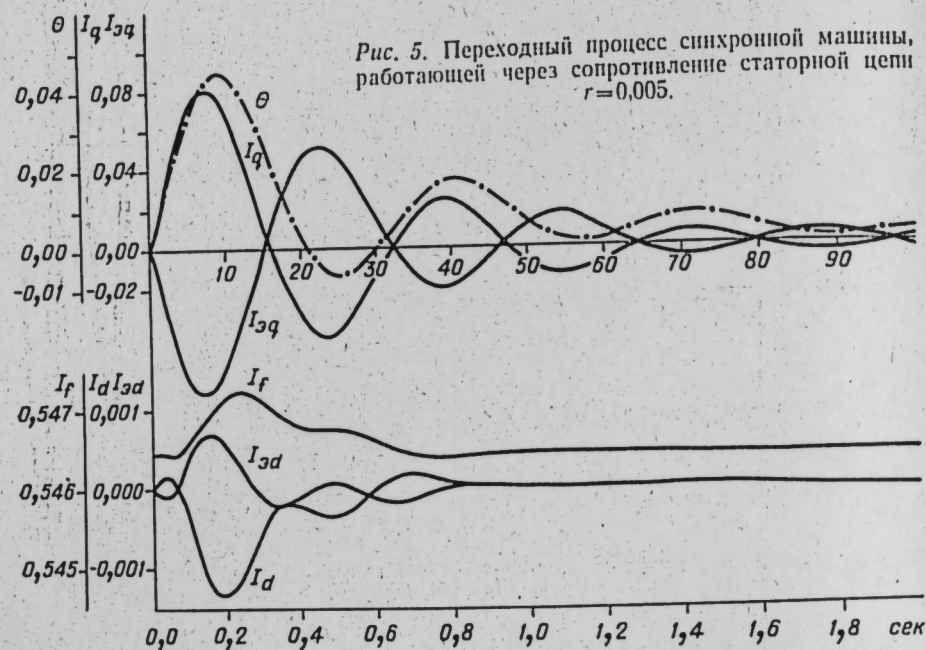


Рис. 5. Переходный процесс синхронной машины, работающей через сопротивление статорной цепи $r=0,005$.

Различие между кривыми на рис. 2 и 4 и 3 и 5 свидетельствует о том, что учет волновых процессов необходим особенно в тех случаях, когда активное сопротивление в цепи статора (или затухание линии) мало. В связи с этим предложенный метод расчета переходных процессов в системах с длинными линиями может оказаться полезным.

Сибирский научно-исследовательский
институт энергетики,
Новосибирск

Поступила в редакцию
9/IV 1966

ЛИТЕРАТУРА

1. Р. Г. Карымов. К исследованию самораскачивания синхронного генератора.— Изв. СО АН СССР, 1962, № 6.
2. Р. И. Караев. Переходные процессы в линиях большой протяженности. Госэнергоиздат, 1963.
3. А. И. Долгинов, В. С. Шатин, Р. Я. Мотуско. Волновой метод расчета переходных процессов в электрических системах на цифровых вычислительных машинах.— Электричество, 1964, 4.
4. И. П. Кадомская, Г. П. Штеренберг. Исследование внутренних перенапряжений в энергетических системах с применением ЭВМ.— Изв. АН СССР, Энергетика и транспорт, 1963, № 6.
5. С. В. Страхов. Переходные процессы в электрических цепях, содержащих машины переменного тока. Госэнергоиздат, 1960.
6. Б. П. Демидович, И. А. Марон, Э. З. Шувалова. Численные методы анализа. Физматгиз, 1962.
7. А. И. Важенков. Основы теории переходных процессов синхронной машины. Госэнергоиздат, 1960.
8. Н. И. Соколов, Ю. Е. Гуревич, З. Г. Хвоцинская. Исследование на вычислительных машинах непрерывного действия параллельной работы крупных турбогенераторов.— Электричество, 1963, № 10.

Л. С. ПОПЫРИН, В. И. ТРУЩЕЛЕВ

МЕТОД КОМПЛЕКСНОЙ ОПТИМИЗАЦИИ ПАРАМЕТРОВ ПАРОГАЗОВОЙ УСТАНОВКИ

На перспективу, охватывающую период в 15—20 лет, основным средством для генерации электроэнергии в отечественной большой энергетике будут оставаться крупные тепловые электростанции. Развитие теплоэнергетики требует больших народнохозяйственных затрат на сооружение электростанций. Отсюда исключительная важность работ по созданию новых, более дешевых теплоэнергетических установок.

Наиболее значительные возможности для снижения удельных капиталовложений имеют электрические станции с парогазовыми установками, выполненными по схеме СО АН СССР. По проектным оценкам энергомашиностроительных заводов и Теплоэлектропроекта реализация этой схемы парогазового цикла при работе на природном газе позволит при несколько меньшей по сравнению с паросиловым циклом тепловой экономичности снизить удельную стоимость установки примерно на 30%. Экономия в расчетных затратах составляет 10—15% (для стоимости топлива 5—8 руб/т у. т.). Вторым важным достоинством данной установки является возможность сжигания в ней высокосернистого мазута при его предварительной газификации и очистке.

Парогазовая установка по схеме СО АН СССР мощностью 200 мвт — двухвальный агрегат газотурбинного типа (рис. 1). Однако в отличие от обычных газотурбинных установок снижение температуры продуктов сгорания перед турбиной осуществляется здесь не за счет подачи в продукты сгорания вторичного воздуха, а за счет ввода пара, что позволяет осуществлять его перегрев без применения специальных теплообменников. Турбины среднего и низкого давлений работают на парогазовой смеси. Как видно из рис. 1, даже при работе на природном газе это достаточно сложная энергетическая установка с весьма разветвленной схемой энергоносителей, включающая разнообразное энергетическое оборудование.

Целесообразность применения в народном хозяйстве того или иного типа теплоэнергетических установок определяется результатами технико-экономического сопоставления различных вариантов энергоустановок с учетом комплекса условий их сооружения и эксплуатации. При этом важно, чтобы параметры и профиль каждого варианта в наибольшей мере соответствовали назначению и условиям эксплуатации энергоустановки. Иными словами, только при сопоставлении оптимальных для заданных условий вариантов можно получить объективную оценку преимуществ и недостатков отдельных схем и циклов теплоэнергетических установок.

Оптимизация параметров особенно необходима при проектировании энергетических установок, выполненных по новым схемам и циклам. В этих случаях в связи с отсутствием проектного и эксплуатационного опыта возможность попадания в оптимальную область может быть до-

стигнута только в результате соответствующих технико-экономических исследований.

Между тем, имеющиеся проектные проработки по парогазовой установке, выполненной по схеме СО АН СССР, не в полной мере отвечают указанным требованиям. В первую очередь необходимо отметить выбор параметров и вида тепловой схемы установки, исходя в основном из результатов термодинамического анализа. Технико-экономических исследований с целью оптимизации параметров отдельных узлов

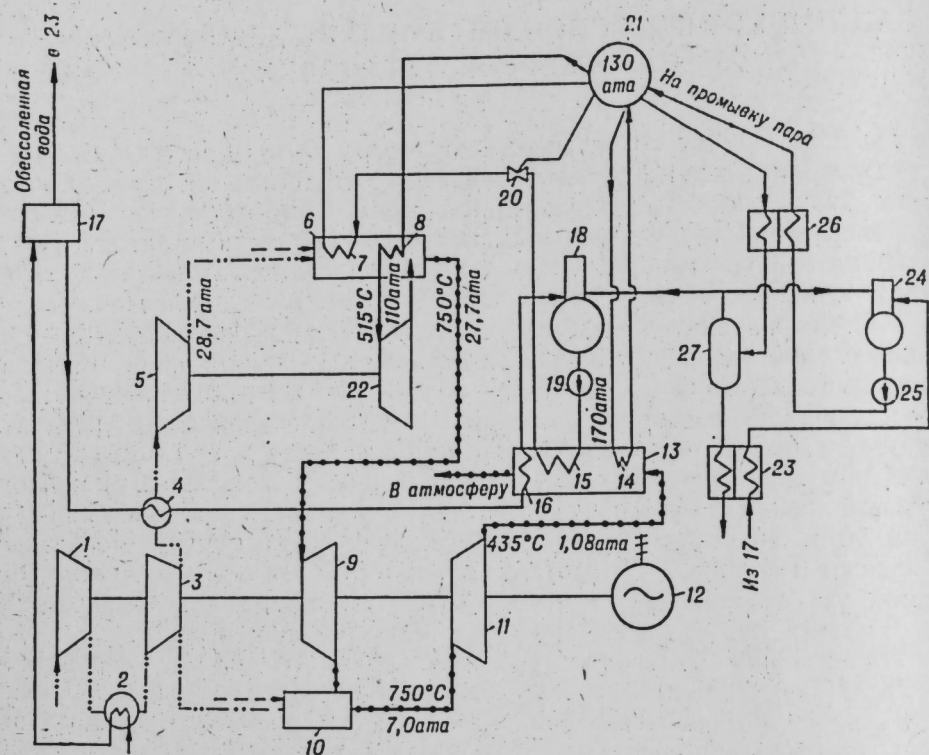


Рис. 1. Принципиальная схема парогазовой установки мощностью 200 мвт.

— пар; — — — топливо; - - - - - парогазовая смесь; — — — — — вода; - - - - - воздух.
1, 3 и 5 — компрессоры низкого, среднего и высокого давлений; 2 и 4 — воздухоохладители; 6 и 10 — камеры сгорания высокого и низкого давлений; 7 — парогенератор; 8 — пароперегреватель; 9 и 11 — парогазовые турбины среднего и низкого давлений; 12 — электрогенератор; 13 — регенератор; 14 — парогенерирующая поверхность нагрева; 15 и 16 — экономайзеры высокого и низкого давлений; 17 — химводоочистка; 18 и 24 — деаэраторы химически очищенной и обессоленной воды; 19 и 25 — питательные насосы химически очищенной и обессоленной воды; 20 — эжектор; 21 — барабан-сепаратор; 22 — паровая турбина; 23 и 26 — теплообменники; 27 — расширитель продувки.

и установки в целом не производилось. Причина этого — исключительная сложность и трудоемкость технико-экономического анализа установки при использовании обычно применяемого в настоящее время вариантного метода сравнения и ручного счета. В связи с этим необходимо разработать принципиально новые методы многостороннего технико-экономического анализа, обеспечивающие в сжатые сроки выбор оптимальных параметров установки.

Универсальным средством для комплексного технико-экономического исследования сложной теплоэнергетической установки служит ее математическая модель, дающая аналитическое описание количественных взаимосвязей и соотношений между основными параметрами рассматриваемой установки, ее технологическими и материальными характеристиками, характеристиками внешних связей и величиной критерия оп-

тимальности. Применение метода математического моделирования в сочетании с методами решения многофакторных экстремальных задач и с использованием ЭВМ позволяет достаточно быстро, точно и полно решать задачи по оптимизации параметров и профиля теплоэнергетических установок.

Основные принципы энергетической и математической постановки задачи комплексной оптимизации параметров теплоэнергетической установки применительно к паротурбинной электростанции даны в [1, 2]. Для построения полной математической модели моделируемая установка выделяется как характерное генерирующее звено энергосистемы. Внешние технологические и технико-экономические связи и влияющие факторы заменяются их обобщенным аналитическим описанием или количественными характеристиками. Сама теплоэнергетическая установка рассматривается как единый сложный комплекс разнородных узлов оборудования, предназначенный для выработки тепловой и электрической энергии путем одновременного непрерывного осуществления различных взаимосвязанных процессов реального термодинамического цикла. Изменение любого параметра или узла в той или иной степени влияет на параметры, характеристики и показатели всего комплекса. Это влияние для каждого отдельного узла передается через совокупность его граничных термодинамических и расходных параметров. Последние определяют направленность и характер протекания процессов в узлах (в зависимости от их типа и от совокупности конструктивных параметров) и одновременно играют связующую роль между ними. Совокупность значений таких параметров связей полностью определяет режимное состояние установки в целом и отдельных ее узлов.

Связь между термодинамическими и расходными параметрами теплоэнергетической установки описывается системой нелинейных алгебраических и трансцендентных уравнений большого порядка. К таким уравнениям относятся уравнения баланса энергии для каждого узла, уравнения баланса расходов, баланса гидравлических (аэродинамических) напоров и изменения энтальпии для каждого теплоносителя во всех узлах установки. Система уравнений получается недоопределенной, т. е. число параметров, входящих в уравнения, превышает число уравнений. В связи с этим полную совокупность термодинамических и расходных параметров удобно разделить на зависимые параметры Y (их число равно числу уравнений системы) и независимые X . Тогда $Y = Y(X)$.

В качестве итогового показателя эффективности того или иного варианта теплоэнергетической установки в соответствии с существующей методикой определения эффективности капитальных вложений в народном хозяйстве принята величина суммарных расчетных затрат Z_p . Минимум расчетных затрат принят за критерий оптимальности установки. Определение суммы расчетных затрат по установке Z_p является задачей теплового, гидравлического, аэродинамического, прочностного и стоимостного расчетов всех узлов и элементов установки. Вместе с тем анализ выражения Z_p показал, что при заданных конструктивных параметрах установки оно в конечном итоге представляет собой сложную нелинейную функцию той же совокупности термодинамических и расходных параметров X и Y .

Термодинамические, расходные и конструктивные параметры теплоэнергетической установки могут изменяться лишь в пределах физически возможных и технически осуществимых конструкций и состояний энергоносителей. Указанные ограничения на область изменения параметров можно выразить в виде неравенств.

При постановке и решении рассматриваемой задачи должны учитываться ограничения на некоторые технологические характеристики отдельных узлов установки. К числу таких характеристик относятся температура стенки наиболее ответственного элемента узла, абсолютная или относительная толщина стенки в конструктивных элементах узла и средняя скорость потока теплоносителя w в узле.

Анализ показал, что зависимые параметры и технологические характеристики, на которые накладываются ограничения, выражаются нелинейными уравнениями.

Из приведенного следует, что задача оптимизации параметров теплоэнергетической установки относится к классу задач нелинейного математического программирования в наиболее общей их постановке. Ее математическая формулировка следующая.

Требуется найти минимум нелинейного функционала суммарных расчетных затрат

$$Z_p = Z_p[X, Y(X)]_{E=E_0} \quad (1)$$

при наличии нелинейных ограничивающих условий в виде равенств:

$$\Phi[X, Y(X)]_{E=E_0} = 0, \quad (2)$$

неравенств:

$$Y^* \leq Y[X, Y(X)]_{E=E_0} \leq Y^{**}, \quad (3)$$

$$F^* \leq F[X, Y(X)]_{E=E_0} \leq F^{**}, \quad (4)$$

а также при наличии ограничений по независимым параметрам:

$$X^* \leq X \leq X^{**}. \quad (5)$$

Здесь Φ — совокупность уравнений балансов для всех узлов установки;

F — совокупность технологических характеристик узлов установки, по которым задаются ограничения;

E — совокупность характеристик внешних влияющих факторов, задаваемых параметрически ($E=E_0$) в зависимости от времени и места (района), для которых разрабатывается установка;

* и ** — соответственно минимально и максимально допустимые значения параметров и характеристик установки.

При постановке задач оптимизации параметров новых циклов и схем теплоэнергетических установок по изложенному методу очень важно установить объем математической модели с точки зрения детализации при рассмотрении всех ее узлов, элементов и связей. Известно, что модель тем ближе к описываемой установке, чем более полно выявлены и учтены физические, технические и экономические зависимости, характеризующие рассматриваемую установку. В соответствии с этим при построении математической модели теплоэнергетической установки с паротурбинными агрегатами [1] были рассмотрены практически все узлы и элементы, учтены все связи, могущие оказать какое-либо влияние на результаты решения задачи. Такой подход оправдан при оптимизации уже достаточно хорошо разработанных типов теплоэнергетических установок, по которым имеется значительный объем научных исследований, проектно-конструкторских проработок и эксплуатационного опыта, а также достаточно точная исходная информация по отдельным узлам, элементам и связям.

Степень достоверности исходной информации по основным узлам рассматриваемой парогазовой установки весьма различна. Так, некоторое оборудование установки является обычным для теплоэнергетических установок, выпуск его освоен промышленностью, и необходимая исходная информация может быть получена с высокой точностью. Это паровая турбина, барабан-сепаратор, оборудование химводоочистки, насосы, деаэраторы, вспомогательные теплообменники и др. С другой стороны, такие важные узлы установки, как парогазогенератор, камеры сгорания и регенератор, принципиально новы: они не использовались в теплоэнергетических установках других типов и, естественно, степень точности исходной информации по ним существенно ниже. Компрессоры и парогазовые турбины по точности исходной информации занимают промежуточное положение между двумя указанными группами оборудования. Аналогичное оборудование используется в крупных газотурбинных установках, но опыт проектирования его невелик, а опыта эксплуатации практически нет.

Указанные особенности исходной информации по парогазовой установке позволяют сделать ряд упрощений при разработке математической модели этой установки: 1) отказаться от детализации таких крупных узлов установки, как компрессоры и парогазовые турбины; 2) отказаться от детального учета некоторых второстепенных и в то же время достаточно хорошо изученных процессов, например, упрощенно учитывать процессы движения охлаждающей воды и охлаждаемого воздуха в воздухоохладителях, греющей и нагреваемой воды во вспомогательных теплообменниках (23 и 26 на рис. 1), нагреваемой воды в экономайзерах высокого и низкого давления и т. п.; 3) фиксировать значения ряда конструктивных параметров достаточно хорошо изученных узлов вспомогательного оборудования установки; так можно принимать неизменными диаметры трубок и шаги их размещения в теплообменных поверхностях воздухоохладителей, вспомогательных теплообменников, экономайзеров высокого и низкого давлений и т. д.

Важную для тепловой электростанции с парогазовыми агрегатами установку по химической очистке и химическому обессоливанию воды можно рассматривать укрупненно без детального анализа происходящих в ней процессов, считая, что оптимизация параметров и профиля химводоочистки — самостоятельная задача.

В результате оказалось возможным, не снижая точности решения задачи, существенно уменьшить число рассматриваемых узлов и порядок системы балансовых уравнений типа (2), а также заметно упростить выражение минимизируемого функционала (1). В математической модели парогазовой установки по схеме СО АН СССР (см. рис. 1), разработанной в Энергетическом институте СО АН СССР, взаимосвязь 180 термодинамических, расходных и конструктивных параметров 27 узлов описывается системой 73 нелинейных уравнений при наличии системы 15—20 нелинейных ограничений на технологические характеристики узлов и системы ограничений на независимые параметры установки.

Пути и методы решения таких сложных задач нелинейного математического программирования изложены в работах [1, 3]. Там, в частности, приведен подробный алгоритм градиентного метода решения, применение которого, исходя из характеристик задачи и показателей современных ЭВМ, было признано наиболее целесообразным.

Этот алгоритм полностью применим и для решения задачи по оптимизации параметров парогазовой установки. Однако здесь его использование в виде, описанном в [3], приводит к определенному несоответствию между упрощенной постановкой задачи и весьма точным и сложным

методом ее решения. В соответствии с принципом равноточности для рассматриваемой математической модели более приемлемы алгоритмы решения, дающие несколько меньшую точность, но более простые по построению, так как при этом общая точность решения задачи практически остается неизменной.

Основная сложность использования градиентных методов решения задач нелинейного математического программирования связана с учетом ограничений на область изменения совокупности зависимых параметров Y (3) и совокупности технологических характеристик F (4) [3, 4]. Ниже излагаются приемы, которые позволяют обойти или более просто учесть указанные ограничения и тем самым существенно упростить алгоритм решения задачи.

Для теплоэнергетических установок различных типов, как было показано в [1, 3], характерно наличие «цепочек» связей между узловыми балансовыми уравнениями, благодаря которым появляется возможность прямого расчета отдельных подсистем системы уравнений (2). Тем самым достаточно соблюсти условия (3) для входных и выходных параметров таких подсистем уравнений, чтобы вся совокупность зависимых параметров удовлетворяла ограничениям (3). Если теперь все входные и выходные параметры подсистем уравнений (2) отнести к совокупности заданных (E_0) или оптимизируемых (X) параметров, то одновременно со строгим выполнением ограничений (5) будут выполняться и ограничения (3). Например, достаточно значение такого параметра, как давление воздуха, на входе в компрессор низкого давления принять как заданное, а на выходе из компрессора высокого давления отнести к совокупности оптимизируемых независимых параметров, чтобы все значения давления воздуха по промежуточным узлам технологической цепочки (на выходе из компрессора низкого давления, на входе и выходе воздухоохладителя 2, на входе и выходе компрессора среднего давления, на входе и выходе воздухоохладителя 4 и на входе компрессора высокого давления) были в пределах ограничений. Аналогичные цепочки связей можно проследить на рис. 1 по температуре воды от входа в воздухоохладитель 2 до входа в барабан-сепаратор 21 и по другим технологическим процессам.

Входящие в систему неравенств (4) ограничения по максимально допустимой температуре стенки материала элементов или узлов также могут быть обойдены, если для каждого из рассматриваемых элементов и узлов установки использовать не один, а несколько материалов с постепенно возрастающей термостойкостью, естественно, все более дорогих. Максимальное значение температуры, при которой последний в принятом ряду материал может работать, должно быть значительно выше предполагаемого уровня температур стенки рассматриваемого элемента. При таком подходе после исчерпания в процессе оптимизации возможностей одного материала можно перейти к следующему, более термостойкому, но и более дорогому материалу и т. д. Переход к более качественным маркам материалов может продолжаться до тех пор, пока по экономическим соображениям он не окажется нецелесообразным. Применительно к рассматриваемой парогазовой установке таким образом обойдены ограничения по температуре металла пароперегревателя.

Аналогично могут быть обойдены ограничения по минимально допустимому значению температуры материала там, где это имеет практический смысл (например, температура металла выходной части экономайзера низкого давления имеет ограничение в сторону снижения для предотвращения интенсивной низкотемпературной коррозии).

Возможность варьирования марки материала легко позволяет учитывать ограничения по толщине стенки β конструктивных элементов узлов. Делается это следующим образом. Для каждой из рассматриваемых марок материала m задается диапазон возможных изменений β_m : от минимально допустимого β_m^* до максимально допустимого β_m^{**} . Если теперь в процессе оптимизации по какому-либо элементу получается текущее значение $\beta_m > \beta_m^{**}$, то это означает необходимость перехода к следующей, более качественной марке материала m' , для которой будет соблюдаться условие $\beta_{m'} \leq \beta_{m'}^{**}$. Если же в процессе оптимизации получено, что текущее значение $\beta_m < \beta_m^*$, то возможны два решения: 1) принять $\beta_m = \beta_m^*$ и 2) перейти к менее качественной марке материала. Целесообразность принятия одного из решений определяется экономическими соображениями (обеспечение наименьшего значения расчетных затрат Z_p). Таким образом, учитываются ограничения по толщине стенок барабана-сепаратора и силового корпуса парогазогенератора, а также по толщине стенок труб паропроводов, пароперегревателя, парогенератора и экономайзера.

Третья группа ограничений, входящих в систему неравенств (4), — это ограничения по скорости теплоносителей w . Прежде всего необходимо отметить, что для упрощенной математической модели парогазовой установки, реализующей схему СО АН СССР, эта группа ограничений немногочисленна. Для учета ограничений по w может быть использован весьма простой в части алгоритма и программы метод штрафов [4]. Суть его заключается в том, что в случае нарушения указанного ограничения к значению минимизируемого функционала Z_p прибавляется некоторая положительная величина, подсчитанная как функция ограничения. Тем самым система штрафов воздействует на направление изменения независимых переменных, которые привели к выходу скорости теплоносителя за пределы.

Для определения величины штрафа может быть принято произвольное выражение функции, обеспечивающее резкий рост суммы расчетных затрат при выходе скорости теплоносителя за пределы, либо функция, достаточно точно отражающая сущность происходящего процесса. Примером второго случая может быть точное определение эрозийного ущерба, наносимого запыленным потоком при выходе его скорости за максимально допустимое значение. Второй подход к выбору выражения штрафной функции позволяет в процессе решения задачи уточнить предельные значения w , принимаемые для новых типов теплоэнергетических установок в ряде случаев сугубо ориентировочно.

Упрощение алгоритма решения задачи в части учета ограничений по зависимым параметрам и техническим характеристикам одновременно приводит к появлению разрывов в изменении минимизируемого функционала в точках, соответствующих смене марки материалов отдельных узлов и элементов установки. Это, в свою очередь, делает невозможным использование аналитических методов определения частных производных минимизируемого функционала по независимым переменным и значения градиента минимизируемого функционала в какой-либо точке с целью нахождения направления спуска к оптимуму. Однако здесь вполне применим приближенный метод численного дифференцирования для определения частных производных и градиента минимизируемого функционала, сущность которого заключается в том, что всем независимым оптимизируемым переменным совокупности X поочередно даются конечные приращения ΔX и вычисляются соответствующие приращения функционала ΔZ_p . Приближенные значения частных произ-

водных и градиента минимизируемого функционала можно вычислить по соотношениям

$$\frac{\partial Z_p}{\partial x_i} \approx \frac{\Delta Z_p}{\Delta x_i} \quad \text{и} \quad \frac{\partial Z_p}{\partial X} \approx \frac{\Delta Z_p}{\Delta X}. \quad (6)$$

На основании изложенного выше может быть предложен следующий упрощенный алгоритм решения задачи оптимизации параметров парогазовой установки (рис. 2). Из заданного исходного состояния параметров установки осуществляется изменение одного из независимых оптимизируемых параметров x_i на шаг $+\Delta x_i$ и $-\Delta x_i$, и система уравнений (2) решается при новых значениях указанного параметра. Подставив полученные значения зависимых параметров в выражение (1), находим изменение функционала ΔZ_p . То направление изменения параметра x_i , которое приводит к уменьшению величины расчетных зат-

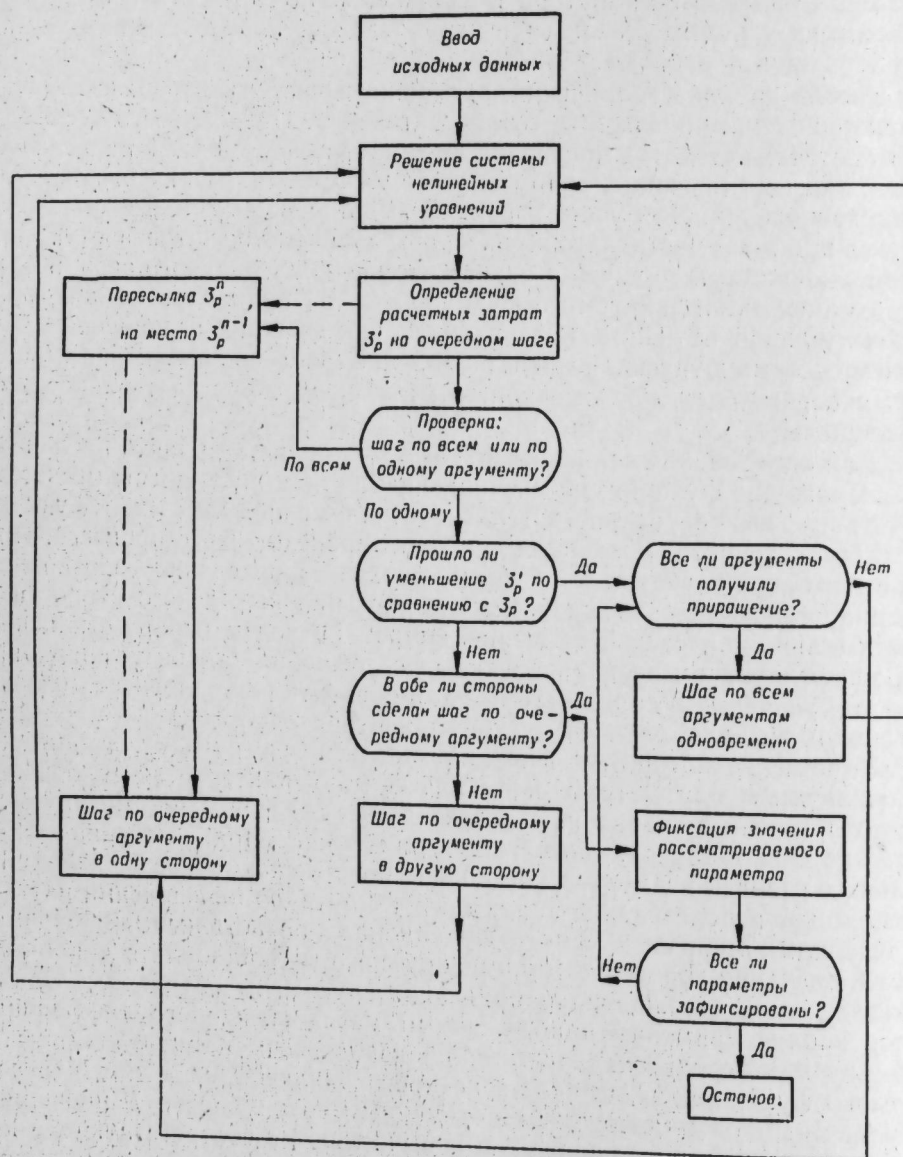


Рис. 2. Блок-схема программы оптимизации парогазовой установки.

рат Z_p , запоминается. Аналогичные операции выполняются по всем независимым оптимизируемым переменным, что позволяет определить нужное направление их изменения. Совокупность полученных направлений изменения отдельных независимых оптимизируемых переменных определяет направление антиградиента минимизируемого функционала. Таким образом, эта часть алгоритма решения задачи соответствует определению частных производных минимизируемого функционала по независимым переменным и его антиградиента.

Дав приращение всем независимым оптимизируемым переменным и решив систему балансовых уравнений (2), находим новое состояние параметров теплоэнергетической установки, которое обеспечивает получение меньшего значения Z_p . Из этого нового состояния параметров повторяются все предшествующие операции. Подобный спуск по оптимизируемым параметрам в направлении антиградиента производится до тех пор, пока величина приведенных расчетных затрат Z_p не примет минимального значения.

Из изложенного следует, что одной из основных (по расходу машинного времени) и часто повторяемых операций алгоритма является решение системы нелинейных уравнений (2). Для решения этой системы может быть применен ряд методов. В работах Энергетического института СО АН СССР для этой цели использован итерационный метод Зейделя [5], который при весьма простом алгоритме обеспечивает достаточно высокую точность решения за приемлемое время счета. Например, для расчета системы, состоящей из 73 балансовых уравнений, с точностью $\varepsilon = 0,0001$ требуется несколько минут машинного времени (расчет производился на ЭВМ с быстродействием около 10 тыс. операций в сек.).

Изложенный упрощенный алгоритм оптимизации параметров парогазовой установки, как и алгоритм детально описанной схемы [1, 3], не исключает попадания в точку локального минимума приведенных расчетных затрат. Для определения действительного минимума необходимо произвести дополнительные исследования и расчеты. Ряд методов нахождения абсолютного минимума целевой функции при решении многоэкстремальных задач нелинейного математического программирования приведен в [3, 4].

Итак, в работе показана возможность создания сокращенной математической модели парогазовой установки по схеме СО АН СССР и применения упрощенного алгоритма комплексной оптимизации основных параметров этой установки, что важно для установления целесообразного уровня ее параметров и дальнейшего повышения экономичности.

Энергетический институт
Сибирского отделения АН СССР,
Иркутск

Поступила в редакцию
17/V 1965

ЛИТЕРАТУРА

1. Л. С. Попырин, С. М. Каплун. К комплексной оптимизации параметров тепловых электростанций. — Изв. АН СССР, Энергетика и транспорт, 1964, № 5.
2. Л. С. Попырин, С. М. Каплун. Методы выбора оптимальных конструкций оборудования и вида тепловой схемы для тепловых электростанций на основе математического моделирования и применения ЭВМ. — Изв. АН СССР, Энергетика и транспорт, 1965, № 1.
3. Л. С. Попырин, С. М. Каплун, Д. А. Дирба. Алгоритм оптимизации параметров теплоэнергетических установок. — Изв. АН СССР, Энергетика и транспорт, 1965, № 3.
4. Б. М. Каган, Т. М. Тер-Микаэлян. Решение инженерных задач на цифровых вычислительных машинах. Изд-во «Энергия», 1964.
5. В. Л. Загускин. Справочник по численным методам решения уравнений. Физматгиз, 1960.

А. Ф. КРАВЧЕНКО, В. С. САРДАРЯН

ВЛИЯНИЕ ПРИМЕСИ НА ЭНЕРГЕТИЧЕСКИЙ СПЕКТР ЭЛЕКТРОНОВ В ПОЛУПРОВОДНИКАХ

В работах [1—10] рассмотрено влияние примеси на энергетический спектр электронов при условии сильного вырождения электронного газа. При этом в [2, 3, 5, 9, 10] использовалось условие

$$Nr_b^3 \gg 1, \quad (1)$$

где N — концентрация примесных атомов;
 r_b — боровский радиус в кристалле;
а в [6] требовалось выполнение условия

$$Nr_0^3 \gg 1, \quad (2)$$

где r_0 — радиус Дебая в кристалле.

В этих работах выражения для плотности состояний электронов приводятся в таком виде, который мало пригоден для численного расчета оптических и кинетических характеристик полупроводников.

Используя приближение Томаса — Ферми, мы получили аналитический вид плотности состояний для практически интересных областей энергии и при этом в форме, удобной для численных расчетов.

Рассмотрим полупроводник с одним типом донорной примеси, распределенной по кристаллу неупорядоченным образом. Наличие случайно распределенных заряженных примесей приводит, как известно, к возникновению в полупроводнике добавочного электростатического потенциала, меняющегося от точки к точке. Поле заряженных примесей, входящих в скопление, характеризуется некоторым потенциалом экранирования, которому соответствует потенциальная энергия электрона:

$$v_{i,j}(r) \equiv v(r_i - r_j) = - \frac{e^2}{\epsilon(\epsilon_i - r)} e^{-\frac{|r_i - r_j|}{r_0}}, \quad (3)$$

где ϵ — диэлектрическая проницаемость полупроводника;
 i, j — номера электронов и примесей.

В дальнейшем, при численном расчете, положим $0 < k_0 \ll r_0$.
Используя приведенные выше модельные представления, рассчитаем плотность состояний в зоне проводимости для трехмерного случая ($v = v(r)$) с помощью статистического метода Томаса — Ферми [11].
Плотность состояний для сферической зоны, согласно [6], равна:

$$\Delta \rho(E) = \frac{\sqrt{2}}{\pi^2 \hbar^3} m^{*3/2} \Delta V (E - v)^{1/2}, \quad (4)$$

где E, m^* — соответственно полная энергия и эффективная масса электронов;

ΔV — элементарный объем;

v — отклонение от среднего значения потенциала, равное:

$$v = (m - Nw) \langle v \rangle, \quad (5)$$

где m — число примесей в скоплении;

N — плотность примесей;

w — объем Дебая.

$$\langle v \rangle = \int \dots \int \dots \int v(r_1, r_2, \dots, r_i) \prod_{i=1}^m \frac{d\vec{r}_i}{w^m}, \quad (6)$$

где

$$\int_w f(|r|) d\vec{r} \equiv \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \int_0^{r_0} f(|r|) r^2 dr \cdot d\theta \sin \theta \cdot d\varphi.$$

Общая плотность состояний в объеме V

$$\rho(E) = \frac{\sqrt{2}}{\pi^2 \hbar^3} m^{*3/2} \cdot V \int_{-\infty}^E (E - v)^{1/2} P(v) dv, \quad (7)$$

где $P(v)$ — функция распределения потенциала [6]:

$$P(v) \equiv P[(m - Nw) \langle v \rangle] = \\ = \lim_{m \rightarrow Nw} \int \dots \int \dots \int \delta(v + v_1) - \sum_{i=1}^m v(r_i) \prod_{i=1}^m \frac{d\vec{r}_i}{w^m}, \quad (8)$$

а

$$v_1 = N \int_w v(r) d\vec{r}.$$

Используя Фурье образ $\delta(x)$ функции [11], выражение (8) можно представить в виде [приложение А]:

$$P(v) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} d\xi e^{i\xi(v + v_1) + N \int_w (e^{-i\xi v(r)} - 1) d\vec{r}}, \quad (9)$$

при этом

$$\int_v P(v) dv = 1.$$

Для оценки (9) разложим показатель экспоненты в ряд около экстремальной точки $\xi = \xi_i$:

$$\Psi(\xi) \equiv i\xi v + i\xi v_1 + N \int_w (e^{-i\xi v(r)} - 1) d\vec{r}, \quad (10)$$

$$\Psi(\xi) = \Psi(\xi_l) + \frac{1}{2!} \frac{\partial^2 \Psi(\xi_l)}{\partial \xi^2} (\xi - \xi_l)^2 + \dots, \quad (11)$$

$$\left. \frac{\partial \Psi(\xi)}{\partial \xi} \right|_{\xi = \xi_l} = 0.$$

Из (10) и (11) нетрудно получить

$$\Psi(\xi_l) = -N \sum_{N=2}^{\infty} \frac{(-i)^N \xi_l^N (N-1)}{N!} \int v^N(r) \vec{dr}, \quad (12)$$

$$\Psi''(\xi_l) = -N \sum_{N=0}^{\infty} \frac{(-i)^N \xi_l^N}{N!} \int v^{N+2}(r) \vec{dr}, \quad (13)$$

$$v = N \sum_{l=1}^{\infty} \frac{(-i)^N \xi_l^N}{N!} \int v^{N+1}(r) \vec{dr}. \quad (14)$$

Выразим ξ из (14) через v разложением ξ по v в ряд около точки $v=0$, ограничиваясь членами $\left(\frac{v}{N}\right)^4$ [приложение Б]. Подставив ξ в (12) и (13), получим с точностью до $\left(\frac{v}{N}\right)^6$:

$$\begin{aligned} \Psi(\xi_l) = -N \left\{ \frac{1}{2A} \left(\frac{v}{N}\right)^2 - \frac{4}{3} \frac{B}{A^3} \left(\frac{v}{N}\right)^3 + \left[\frac{5}{2} \frac{B^2}{A^5} - \right. \right. \\ \left. \left. - \frac{3}{8} \frac{C}{A^4} \right] \cdot \left(\frac{v}{N}\right)^4 + \left[\frac{4B^3}{A^7} + \frac{3}{2} \frac{B \cdot C}{A^6} - \frac{D}{A^5} \right] \cdot \left(\frac{v}{N}\right)^5 + \right. \\ \left. + \left[\frac{39}{8} \frac{B^2 C}{A^8} + \frac{5}{8} \frac{C^2}{A^7} - \frac{B^3}{A^6} - \frac{2BD}{A^7} + \frac{B^4}{A^6} \right] \cdot \left(\frac{v}{N}\right)^6 + \varepsilon \right\}, \quad (15) \end{aligned}$$

где $|\varepsilon| < \delta$; $\delta \rightarrow 0$,

$$\begin{aligned} \Psi''(\xi_l) = -N \left\{ A + \frac{B}{A} \left(\frac{v}{N}\right) + \left[\frac{B^2}{A^3} + \frac{C}{2A^2} \right] \cdot \left(\frac{v}{N}\right)^2 + \right. \\ \left. + \left[\frac{2B^3}{A^5} + \frac{D}{6A^5} \right] \cdot \left(\frac{v}{N}\right)^3 + \left[\frac{11}{2} \frac{B^2 C}{A^6} + \frac{3}{24} \frac{C^2}{A^5} - \frac{1}{2} \frac{BD}{A^6} - \right. \right. \\ \left. \left. - \frac{B^4}{A^7} - \frac{C^2}{A^5} \right] \cdot \left(\frac{v}{N}\right)^4 + \left[\frac{B^3 C}{A^8} + \frac{2C^2 B}{A^7} - \frac{2C \cdot D}{A^6} + \frac{5}{2} \frac{B^2 D}{A^7} + \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{B \cdot C}{6A^6} \right] \cdot \left(\frac{v}{N}\right)^5 + \varepsilon_1 \right\}, \quad (16) \end{aligned}$$

где $|\varepsilon_1| < \delta_1$; $\delta_1 \rightarrow 0$.

В этих уравнениях приняты следующие обозначения:

$$\begin{aligned} \int_w v^2(r) \vec{dr} \equiv A; \quad \int_w v^3(r) \vec{dr} \equiv B; \quad \int_w v^4(r) \vec{dr} \equiv C; \\ \int_w v^5(r) \vec{dr} \equiv D; \quad \int_w v^6(r) \vec{dr} \equiv \varepsilon. \quad (17) \end{aligned}$$

Значения приведенных интегралов даны в приложении Г. Ограничиваясь в уравнениях (15) и (16) членами первого и второго порядка по $\left(\frac{v}{N}\right)$, можно записать выражение для $P(v)$. Подставляя полученное значение $P(v)$ в уравнение (7), имеем

$$\rho(E) = \frac{m^{*3/2}}{\pi^2 \hbar^3} \frac{V}{\pi^{1/2}} \int_{-\infty}^E \frac{(E-v)^{1/2} \cdot e^{-\frac{v^2}{2NA}} dv}{\left\{ NA + \frac{B}{A} v + \left[\frac{B^2}{NA^3} + \frac{C}{2NA^2} \right] v^2 \right\}^{1/2}}. \quad (18)$$

Для дальнейших расчетов удобно сделать следующие обозначения:

$$\begin{aligned} \frac{m^{*3/2}}{\pi^2 \hbar^3} \frac{V}{\pi^{1/2}} \equiv Q; \quad NA \equiv \alpha; \quad \frac{B}{A} \equiv \beta; \quad \frac{B^2}{NA^3} + \frac{C}{2NA^2} \equiv \gamma; \quad (19) \\ \frac{1}{2NA} \equiv P; \quad v \rightarrow t. \end{aligned}$$

С учетом (19) уравнение (18) примет вид

$$\rho(E) = Q \int_{-\infty}^E \frac{(E-t)^{1/2} e^{-Pt}}{(\alpha + \beta t + \gamma t^2)^{1/2}} dt. \quad (20)$$

Таким образом, задача по определению плотности состояний сводится к вычислению интеграла вида (20).

Оценим этот интеграл для ряда областей энергий: $E \gg E_0$, $E \sim E_0 \pm \Delta E$, где $|\Delta| < 1$, $E \ll E_0$, принимая за начало отсчета $E_0=0$. Расчет дает следующее [приложение Б].

Первая область: $E \gg E_0$,

$$\rho(E) \simeq Q \sqrt{\frac{\pi}{P\alpha}} E^{1/2}. \quad (21)$$

Подставив в уравнение (21) значения A, P, α из (19) с учетом (17), получим для $\rho(E)$:

$$\rho(E) = \frac{m^{*3/2}}{\pi^2 \hbar^3} \frac{V}{\sqrt{2}} E^{1/2}. \quad (22)$$

Это выражение совпадает с обычной формулой для плотности состояний электронов в зоне проводимости [12].

Вторая область: $E \ll 0$,

$$\rho(E) \simeq \frac{m^{*3/2}}{\pi^2 \hbar^3} \cdot \frac{V}{\pi^{1/2}} \cdot \frac{\sqrt{\pi e}}{4P^{3/2}|E|^{3/2}} \cdot \frac{e^{-P|E|}}{(\alpha - \beta|E| + \gamma|E|^2)^{1/2}}. \quad (23)$$

Легко проверить, что при $E \rightarrow \infty$ $\rho(E) \rightarrow 0$. В (23) e — основание натуральных логарифмов. Оценка интегралов, определяющих величины α, β и γ , приведена в приложении Г.

Третья область: $E = E_0 \pm \Delta E$, $|\Delta| \ll 1$,

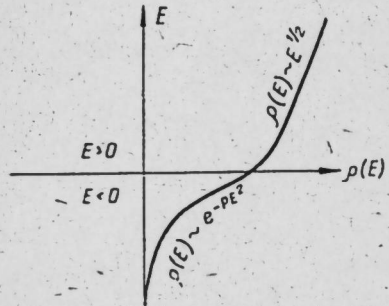
$$\rho(E) \simeq \frac{2m^{*3/2}V}{\pi^2 \hbar^3 \sqrt{2} \pi^{1/2}} \cdot \frac{1}{\left[\frac{\alpha}{|\xi|} - \beta - \gamma|\xi| \right]^{1/2}} E, \quad (24)$$

где

$$\xi \equiv t_0 = -\frac{\beta}{2\gamma}.$$

Примерная зависимость $\rho(E)$ от E представлена на рисунке.

Оценим в квазиклассическом приближении среднее локальное понижение дна зоны проводимости. Принимая, что среднее квадратичное отклонение заряда в потенциальной яме размера r_0 примерно равно числу примесей в скоплении, умноженному на заряд электрона [13], понижение дна зоны проводимости запишем в виде



$$\Delta E = \sqrt{\overline{v^2}} \approx \sqrt{\frac{e^2 (e \hbar N)^2}{\epsilon^2 r_0^2}} = \sqrt{\left(\frac{e^2}{\epsilon}\right)^2 N r_0}, \quad (25)$$

где использовано

$$\sqrt{(e \hbar N)^2} \sim \sqrt{e^2 N r_0^3}.$$

Зависимость плотности состояний в зоне проводимости от энергии.

Величину r_0 , представляющую собой расстояние, на котором в e раз уменьшается концентрация диффундирующих примесей при интенсивной диффузии, можно оценить по [14]:

$$r_0 = \frac{(\epsilon K T)^{1/2}}{N^{1/2} e}, \quad (26)$$

тогда

$$\sqrt{\overline{v^2}} = \Delta E = \left(\frac{e^2}{\epsilon}\right)^{3/4} (N K T)^{1/4}. \quad (27)$$

Если за r_0 принять радиус первой боровской орбиты $r_0 = r_n = \frac{\epsilon \hbar^2}{m^* e^2}$,

то получим формулу для ΔE , аналогичную (25,2) работы [15]. С другой стороны, для того чтобы полученное значение для понижения дна зоны проводимости имело физический смысл, для электронов в данной потенциальной яме должно выполняться соотношение неопределенностей:

$$\sqrt{2m^*} \sqrt{\overline{v^2}} \geq \frac{2\pi \hbar}{r_0}. \quad (28)$$

Сравнивая (28) и (27), легко оценить значения эффективных масс, для которых выполняется неравенство (28) при данном N .

Подсчет показывает, что для электронов проводимости в соединениях $A^{III}B^V$ хорошо выполняется неравенство (28) и среднее понижение ΔE в eV составляет при $N=10^{17} \text{ см}^{-3}$ и $T=300^\circ \text{ K} \sim 0,0083$ для GaSb, GaAs, InAs в случае, когда r_0 подсчитывается по (26) при $T=1000^\circ \text{ K}$; понижение ΔE в eV равно для GaSb, GaAs, InAs, InSb соответственно 0,02, 0,016, 0,009, 0,03, если под r_0 понимать боровский радиус в кристалле.

В заключение выражаем благодарность И. М. Цидильковскому, В. В. Серебрякову, Н. Е. Товмасыну и Э. М. Скоку за ценные замечания.

Институт физики полупроводников
Сибирского отделения АН СССР,
Новосибирск

Поступила в редакцию
10/VI 1965

ЛИТЕРАТУРА

1. R. H. Parmenter. Phys. Rev., 1955, 97, 587; 1956, 104, 22.
2. M. Lax, Y. C. Phillips. Phys. Rev., 1958, 110, 41.
3. H. L. Frich, S. P. Lloyd. Phys. Rev., 1960, 120, 1175.
4. R. C. Klauter. Ann. of. phys., 1961, 14, 43.
5. P. A. Wolff. Phys. Rev., 1962, 126, 45.
6. E. O. Kane. Procetings of the international conference on the physics of Semiconductors. London, 1962.
7. J. M. Luttinger, J. C. Ward. Phys. Rev., 1960, 118, 1417.
8. J. S. Langer. Phys. Rev., 1961, 120, 714.
9. В. Л. Бонч-Бруевич. ФТТ, 1962, 4, 2660; 1961, 3, 3009.
10. В. Л. Бонч-Бруевич. Сб. трудов, 1959, вып. 2, стр. 176, 5, 1852, 1963.
11. А. С. Давыдов. Квантовая механика. М., Физматгиз, 1963.
12. А. И. Ансельм. Введение в теорию полупроводников. М.—Л., Физматгиз, 1962.
13. Л. Д. Ландау, Е. М. Лившиц. Статистическая физика. М., Физматгиз, 1943.
14. В. С. Багаев, Ю. Н. Берозашвили, Б. М. Вул и др. ФТТ, 1964, № 5.
15. В. Л. Бонч-Бруевич, С. В. Тябликов. Метод функций Грина в статистической физике. М., Физматгиз, 1961.

Приложение А

$$I = \lim_{m=Nw \rightarrow \infty} \int \dots \int \dots \int \delta \left[(v + v_1) - \sum_{i=1}^m v(r_i) \right] \prod_{i=1}^m \frac{\vec{dr}_i}{V^m};$$

так как

$$\delta(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\xi x} d\xi, \quad \text{то}$$

$$I = \lim_{m=Nw \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{+\infty} d\xi \int \dots \int \dots \int e^{i\xi(v+v_1)} e^{-i\xi \sum_{i=1}^m v(r_i)} \prod_{i=1}^m \frac{\vec{dr}_i}{w}. \quad (1.A)$$

Поскольку при $m=Nw \rightarrow \infty$ $v(r) \rightarrow 0$, то можно показать, используя определение натурального логарифма, что

$$\lim_{Nw \rightarrow \infty} \int \frac{e^{-i\xi v(r)} \vec{dr}}{w} = e^{\exp\left(\frac{\int (e^{-i\xi v(r)} - 1) \vec{dr}}{w}\right)}. \quad (2.A)$$

А так как в (1.A) имеем произведение m таких интегралов, то из (1.A) получим

$$I = \int_{-\infty}^{+\infty} d\xi e^{[i\xi(v+v_1) + N \int \frac{(e^{-i\xi v(r)} - 1) \vec{dr}}{w}]}, \quad (3.A)$$

который совпадает с уравнением (9).

Приложение Б

$$v = N \sum_{N=1}^{\infty} \frac{(-i)^N \xi^N}{N!} \int v(r)^{N+1} \vec{dr}. \quad (1.B)$$

Разложение $\xi = \xi(v)$ в ряд вблизи точки $v=0$ дает

$$\xi = \xi(0) + \frac{\xi'(0)}{1!} v + \frac{\xi''(0)}{2!} v^2 + \frac{\xi'''(0)}{3!} v^3 + \dots + \frac{\xi^{(m)}(0)}{m!} v^m, \quad (2.B)$$

$$v = v[\xi(v)]. \quad (3.B)$$

Путем дифференцирования (3.B) получим

$$\begin{aligned} 1 &= \frac{dv}{d\xi} \xi', \\ 0 &= \frac{d^2 v}{d\xi^2} (\xi')^2 + \left(\frac{dv}{d\xi} \right) \xi'', \\ 0 &= (\xi')^3 \frac{d^3 v}{d\xi^3} + 3\xi' \xi'' \frac{d^2 v}{d\xi^2} + \xi''' \frac{dv}{d\xi}, \\ 0 &= \dots \\ 0 &= \dots \end{aligned} \quad (4.B)$$

Определим значение производных $v=v(\xi)$ по ξ при $\xi=0$:

$$\begin{aligned} \frac{dv}{d\xi} \Big|_{\xi=0} &= -iN \int_w v^2(r) \vec{dr}, \\ \frac{d^2 v}{d\xi^2} \Big|_{\xi=0} &= 2! N (-i)^2 \int_w v^3(r) \vec{dr}, \\ &\dots \end{aligned} \quad (5.B)$$

$$\frac{d^m v}{d\xi^m} \Big|_{\xi=0} = N \cdot m! (-i)^m \int_w v^{m+1}(r) \vec{dr}.$$

Решив совместно (4.B) и (5.B), определим значение соответствующих производных $\xi=\xi(v)$ при $v=0$. Подставив их в (2.B), найдем с точностью до $\left(\frac{v}{N}\right)^4$

$$\begin{aligned} \xi &= i \frac{v}{NA} + i \frac{Bv^2}{N^2 A^3} + i \left(\frac{2B^2}{N^3 A^5} - \frac{C}{N^3 A^4} \right) v^3 + \\ &+ i \left(\frac{3BC}{N^4 A^6} - \frac{D}{N^4 A^5} - \frac{B^3}{N^4 A^7} \right) v^4, \end{aligned} \quad (6.B)$$

A, B, C, D приведены в (17). С помощью (6.B), (12) и (13) нетрудно получить (15) и (16).

Приложение В

$$1. I_2 = \int_{-\infty}^x \frac{(x-t)^{1/2} e^{-P t^2}}{(\alpha + \beta t + \gamma t^2)^{1/2}} dt. \quad (1.B)$$

Можно убедиться, что $\alpha + \beta t + \gamma t^2 > 0$, тогда (1.B) оценивается довольно просто, путем изменения переменного интегрирования $t=xz$, потом $z \rightarrow -\xi$. Равенство (1.B) позволяет определить

$$I_2 = x^{3/2} \int_1^{\infty} \frac{(\xi+1)^{1/2} e^{-P x^2 \xi^2}}{(\alpha - \beta x \xi + \gamma x^2 \xi^2)^{1/2}} d\xi, \quad (2.B)$$

так как $P x^2 \gg 1$, то основной вклад дает область $\xi = 0 \pm \xi_1$, $\xi > 0$, $|\xi| < 1$. В этой области $(\xi+1)^{1/2}$ слабо меняется, поэтому, положив в нем $\xi=0$, найдем

$$I_2 \approx \frac{x^{3/2}}{\sqrt{\alpha}} \int_{-1}^{\infty} e^{-P x^2 \xi^2} d\xi \approx \sqrt{\frac{\pi}{P \alpha}} x^{1/2}, \quad (3.B)$$

что и приводит к уравнению (21).

$$2. I_2 = \int_{-\infty}^x \frac{(x-t)^{1/2} e^{-P t^2}}{(\alpha + \beta t + \gamma t^2)^{1/2}} dt, \quad P|x|^2 \gg 1, \quad x < 0.$$

При $t \rightarrow -|x|z$

$$I_2 = |x|^{3/2} \int_1^{\infty} \frac{(z-1)^{1/2} e^{-P |x|^2 z^2}}{[\alpha - \beta |x|z + \gamma |x|^2 z^2]^{1/2}} dz. \quad (4.B)$$

Обозначим

$$f_2 = I_2 e^{P|x|^2}, \quad (5.B)$$

тогда из (4.B) имеем

$$f_2 = |x|^{3/2} \int_1^{\infty} \frac{e^{-[P|x|^2(z^2-1) - \frac{1}{2} \ln(z-1)]}}{[\alpha - \beta |x|z + \gamma |x|^2 z^2]^{1/2}} dz. \quad (6.B)$$

Обозначим

$$F(z) \equiv P|x|^2(z^2-1) - \frac{1}{2} \ln(z-1), \quad (7.B)$$

$$F'(z) = 2P|x|^2 z - \frac{1}{2} \frac{1}{z-1} = 0, \quad (8.B)$$

$$z_1 = 1 + \frac{1}{4P|x|^2}, \quad (9.B)$$

$$z_2 = -\frac{1}{4P|x|^2}, \quad (10.B)$$

$$F''(z)|_{z=z_1} = 2P|x|^2 + 8P^2|x|^4 \approx 8P|x|^4 > 1, \quad (11.B)$$

$$F(z) = F(z_1) + \frac{F''(z_1)}{2} (z - z_1)^2. \quad (12.B)$$

Поскольку $z_1 \gg z_2$, то основной вклад в (5.B) дает область около z_1 . Из (6.B) с учетом (12.B) (по аналогии с пунктом 1 приложения B) получим

$$f_2 \simeq \frac{|x|^{3/2} e^{-F(z_1)}}{[\alpha - \beta |x| + \gamma |x|^2]^{1/2}} \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{\frac{F''(z_1)}{2}}} =$$

$$= \frac{\sqrt{\pi} \sqrt{e}}{4 P^{3/2} |x|^{3/2}} \cdot [\alpha - \beta |x| + \gamma |x|^2]^{-1/2}. \quad (13.B)$$

Окончательно (13.B) с учетом (5.B) переходит в (23).

3. Приведенными выше методами нетрудно оценить (1.B) в области $x = 0 \pm \xi$, $|\xi| \ll 1$, $\xi > 0$. Оценка дает

$$I_2 \simeq \frac{1}{\left(\frac{\alpha}{\xi} - \beta \xi + \gamma \xi\right)^{1/2}} \cdot x, \quad (14.B)$$

где

$$\xi \equiv -t_0 \simeq \frac{\beta}{2\gamma}.$$

Приложение Г

$$A = 2\pi \left(\frac{e^2}{\varepsilon}\right)^2 r_0; \quad B \simeq 4\pi \left(\frac{e^2}{\varepsilon}\right)^3;$$

$$C \simeq \frac{4\pi}{3k_0} \left(\frac{e^2}{\varepsilon}\right)^4; \quad D \simeq -\left(\frac{2\pi}{k_0^2}\right) \left(\frac{e^2}{\varepsilon}\right)^5;$$

$$z \simeq \left(\frac{4\pi}{3k_0^3}\right) \left(\frac{e^2}{\varepsilon}\right)^6; \quad \alpha \simeq N \cdot 2\pi \left(\frac{e^2}{\varepsilon}\right)^4 r_0;$$

$$\beta \simeq \frac{2e^2 r_0}{\varepsilon}; \quad \gamma \simeq \frac{12 k_0 + r_0}{6k_0 r_0^3 A \cdot N},$$

где принято

$$0 \ll |k_0| \ll |r_0|.$$

В. М. АЛЕКСАНДРОВ, А. А. НЕСТЕРОВ

ПОСТРОЕНИЕ ЛИНИЙ ПЕРЕКЛЮЧЕНИЯ ДЛЯ ОПТИМАЛЬНЫХ ПО БЫСТРОДЕЙСТВИЮ СИСТЕМ С УПРАВЛЯЕМОЙ СТРУКТУРОЙ

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Пусть объект описывается системой дифференциальных уравнений вида

$$\frac{dx_1}{dt} = a_{11} x_1 + a_{12} x_2 + b_{11} u_1 + b_{12} u_2, \quad (1.1)$$

$$\frac{dx_2}{dt} = a_{21} x_1 + a_{22} x_2 + b_{21} u_1 + b_{22} u_2,$$

где x_1, x_2 — компоненты, характеризующие вектор X состояния динамической системы,

u_1, u_2 — компоненты регулирующего воздействия U , удовлетворяющие неравенствам

$$|u_k| \leq M_k \quad (k = 1, 2). \quad (1.2)$$

Предполагается далее, что коэффициенты a_{ij} могут меняться в некоторых пределах

$$r_{ij} \leq a_{ij} \leq \gamma_{ij} \quad (i, j = 1, 2), \quad (1.3)$$

что достигается, например, путем переключения обратных связей.

Ставится задача определения алгоритма изменения коэффициентов a_{ij} и регулирующего воздействия U (u_1, u_2), обеспечивающего минимальное время T перехода динамической системы из состояния $X(t_0) = X_0$ в точку $X(T)$.

Вопросам управления структурой динамических систем посвящены работы [1, 2], в которых, однако, не рассматриваются алгоритмы одновременного изменения структуры и регулирующего воздействия U .

Рассматриваемая в работе задача представляет наибольший интерес для динамических систем, в которых возможно управление параметрами самого объекта. Изменение параметров динамической системы путем изменения лишь параметров регулятора приводит к необходимости уменьшения величин M_k , ограничивающих управляющие параметры u_k [3]. По сравнению с оптимальной такая система [3] имеет меньшее быстродействие, но зато обеспечивает аперiodический переходный процесс. Введение дополнительно управления по структуре позволяет и в этом случае увеличить быстродействие, хотя время переходного процесса по-прежнему будет несколько меньшим по сравнению с оптимальным управлением, при максимальных величинах M_k .

В данной работе задача синтеза оптимального по быстродействию управления регулирующим воздействием $U(u_1, u_2)$ и коэффициентами

a_{ij} решается на основе принципа максимума [4]. Показано, что синтез становится неоднозначным и появляются дополнительные линии «раздела». Некоторые свойства таких систем рассмотрены в [5].

2. ПОСТРОЕНИЕ ЛИНИЙ ПЕРЕКЛЮЧЕНИЯ

Согласно формализму принципа максимума находим функцию Гамильтона в виде

$$H = \psi_1(a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + b_{11}u_1 + b_{12}u_2) + \psi_2(a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + b_{21}u_1 + b_{22}u_2) \quad (2.1)$$

и сопряженную систему

$$\begin{aligned} \frac{d\psi_1}{dt} &= -\frac{\partial H}{\partial x_1} = -a_{11}\psi_1 - a_{21}\psi_2, \\ \frac{d\psi_2}{dt} &= -\frac{\partial H}{\partial x_2} = -a_{12}\psi_1 - a_{22}\psi_2. \end{aligned} \quad (2.2)$$

Так как функция H линейна относительно управляющих параметров a_{ij} , u_1 , u_2 , то она достигает максимального значения, если управляющие параметры принимают свои граничные значения:

$$u_1 = M_1 \cdot \text{sign}(b_{11}\psi_1 + b_{21}\psi_2), \quad (2.3)$$

$$u_2 = M_2 \cdot \text{sign}(b_{12}\psi_1 + b_{22}\psi_2), \quad (2.4)$$

$$a_{ij} = \begin{cases} \mu_{ij} & \text{при } \psi_i x_j < 0 \\ \gamma_{ij} & \text{при } \psi_i x_j > 0. \end{cases} \quad (2.5)$$

Введем обозначения

$$a_{ij}^* = \frac{\gamma_{ij} + \mu_{ij}}{2}; \quad \Delta a_{ij} = \frac{\gamma_{ij} - \mu_{ij}}{2}. \quad (2.6)$$

Тогда условие (2.5) запишется в виде

$$a_{ij} = a_{ij}^* + \Delta a_{ij} \text{sign } \psi_i \cdot x_j. \quad (2.7)$$

Условия (2.3), (2.4), (2.7) указывают на скачкообразное изменение управляющих параметров для обеспечения минимального времени переходного процесса. В отличие от [4] введение управления по параметрам a_{ij} приводит к появлению новых линий переключения, две из которых, как это нетрудно видеть из (2.7), совпадают с осями x^1 , x^2 , а две другие вызваны прохождением вектора Ψ сопряженной системы через оси ψ^1 , ψ^2 . Линии переключения для управляющих параметров u_k и Δa_{ij} в общем случае не совпадают.

Исходная система (1.1) и сопряженная система (2.2) при подстановке в них значений из соотношений (2.3), (2.4) и (2.7) оказываются связанными и образуют систему четвертого порядка:

$$\begin{aligned} \frac{dx_1}{dt} &= x_1(a_{11}^* + \Delta a_{11} \text{sign } \psi_1 x_1) + x_2(a_{12}^* + \Delta a_{12} \text{sign } \psi_1 x_2) + \\ &+ b_{11} M_1 \text{sign}(b_{11}\psi_1 + b_{21}\psi_2) + b_{12} M_2 \text{sign}(b_{12}\psi_1 + b_{22}\psi_2), \\ \frac{dx_2}{dt} &= x_1(a_{21}^* + \Delta a_{21} \text{sign } \psi_2 x_1) + x_2(a_{22}^* + \Delta a_{22} \text{sign } \psi_2 x_2) + \\ &+ b_{21} M_1 \text{sign}(b_{11}\psi_1 + b_{21}\psi_2) + b_{22} M_2 \text{sign}(b_{12}\psi_1 + b_{22}\psi_2), \end{aligned} \quad (2.8)$$

$$\begin{aligned} \frac{d\psi_1}{dt} &= -\psi_1(a_{11}^* + \Delta a_{11} \text{sign } \psi_1 x_1) - \psi_2(a_{21}^* + \Delta a_{21} \text{sign } \psi_2 x_1), \\ \frac{d\psi_2}{dt} &= -\psi_1(a_{12}^* + \Delta a_{12} \text{sign } \psi_1 x_2) - \psi_2(a_{22}^* + \Delta a_{22} \text{sign } \psi_2 x_2). \end{aligned} \quad (2.8)$$

Рассмотрим построение линий переключения. На плоскости ψ^1 , ψ^2 проводим через начало координат две линии (I и II); характеризующие переключение управляющих параметров u_1 и u_2 . Уравнение линии I, полученное из (2.3), имеет вид

$$b_{11}\psi_1 + b_{21}\psi_2 = 0, \quad (2.9)$$

для линии II из (2.4)

$$b_{12}\psi_1 + b_{22}\psi_2 = 0. \quad (2.10)$$

В результате плоскость ψ^1 , ψ^2 разбивается на отдельные области, каждой из которых соответствует определенная комбинация знаков управляющих параметров u_1 и u_2 (рис. 1). Зададимся совершенно произвольно некоторым вектором Ψ , а тем самым и знаками для управляющих параметров u_1 и u_2 . Так как функция H (2.1) однородна относительно модуля Ψ , то длина последнего может выбираться произвольно. Для синтеза оптимального управления важно лишь направление вектора Ψ .

Теперь рассмотрим плоскость x^1 , x^2 . Построение линий переключения будем производить из заданной конечной точки, принимаемой за начало координат, с помощью обращения времени в системе (2.8). Для установления однозначности выражений типа $\text{sign } \psi_i x_j$ ($i, j=1, 2$) следует выбирать у x_j такие знаки, которые x_j будут иметь в следующий за $\tau=0$ момент времени.

Для момента $\tau=0$, когда точка находится в начале координат, находим значения производных $\frac{dx_1}{d\tau}$, $\frac{dx_2}{d\tau}$ из следующей системы уравнений:

$$\frac{dx_1}{d\tau} = -b_{11} M_1 \text{sign}(b_{11}\psi_1 + b_{21}\psi_2) - b_{12} M_2 \text{sign}(b_{12}\psi_1 + b_{22}\psi_2), \quad (2.11)$$

$$\frac{dx_2}{d\tau} = -b_{21} M_1 \text{sign}(b_{11}\psi_1 + b_{21}\psi_2) - b_{22} M_2 \text{sign}(b_{12}\psi_1 + b_{22}\psi_2),$$

которые и определяют знаки у x_1 и x_2 в следующий момент времени.

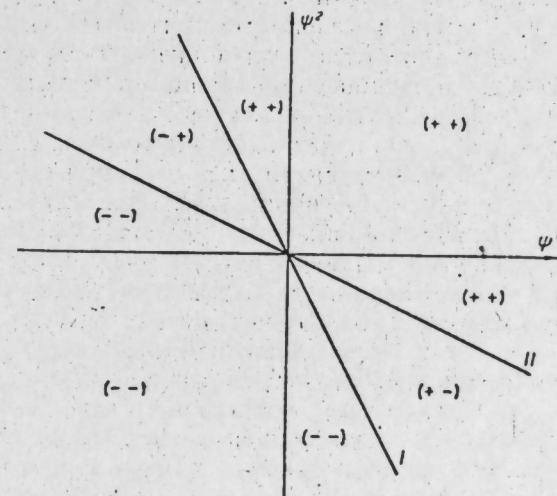


Рис. 1. Линии переключения управляющих параметров u_1 и u_2 на плоскости ψ^1 , ψ^2 .

Таким образом, для произвольно заданного вектора Ψ однозначно определены управления u_1, u_2 и выражения типа $\text{sign } \psi_i x_j$. Это позволяет разбить систему (2.8) на две независимые линейные системы второго порядка относительно $X(x_1, x_2)$ и $\Psi(\psi_1, \psi_2)$. Решаем их и непрерывно контролируем положение векторов X и Ψ в соответствующих плоскостях. Достаточно одному из них пересечь ось, как параметры a_{ij} меняются скачкообразно. Так как новый квадрант для системы X либо системы Ψ нам известен (известно предыдущее направление движения), то, подставив соответствующие значения знаков для x_j и ψ_i , вновь получаем две независимые линейные системы с новыми значениями коэффициентов a_{ij} , начальные условия для которых равны соответствующим значениям в момент переключения.

Для сопряженной системы достаточно соблюдать совпадение направлений векторов Ψ в момент переключения. Осуществляя последовательное стыкование фазовых траекторий для системы X , получаем всю фазовую траекторию движения в обращенном времени, исходящую из начала координат. Кроме переключения коэффициентов a_{ij} , происходит переключение управления u_1 или u_2 при пересечении вектором Ψ соответствующей линии (I или II) на плоскости ψ^1, ψ^2 . Методика стыкования фазовых траекторий для этого случая ничем не отличается от методики [4, 6]. Сопряженная система при этом остается без изменений.

Нетрудно видеть, что длительность фазовой траектории для одних и тех же значений управляющих параметров $\Delta a_{ij}, u_k$ определяется длительностью пребывания вектора Ψ в соответствующей области на плоскости ψ^1, ψ^2 . Эта длительность будет максимальной из возможных, если вектор Ψ может повернуться от одной границы области до другой. Выбор той или иной границы области определяется направлением вращения вектора сопряженной системы. Фазовые траектории максимальной длительности, выходящие из начала координат, и образуют участки линии переключения. Из выражения (2.11) следует, что в один и тот же квадрант x^1, x^2 можно выходить только при вполне определенных знаках u_1 и u_2 , т. е. число линий переключения ограничено. Если вектор сопряженной системы может находиться ограниченное время в соответствующей области, то максимальное время движения по этой линии переключения определяется максимально возможным временем пребывания вектора сопряженной системы в этой области.

В случае комплексных корней характеристического уравнения для системы X максимальная длительность фазовых траекторий, выходящих из начала координат, всегда ограничена и они образуют конечные участки линий переключения. Последующие участки получаются путем пересчета в обращенном времени предыдущих линий переключения, либо соответствующих их участков.

Таким образом, линии переключения имеют двойственный характер. На конечных участках их или на линиях переключения, где система X имеет действительные корни, осуществляется переключение управляющих параметров и движение в начало координат по этим линиям. В остальных случаях происходят лишь переключения управляющих параметров.

При построении фазовых траекторий может оказаться, что они будут пересекаться в некоторых областях плоскости x^1, x^2 . Чтобы исключить такое пересечение и неоднозначность в построении линий переключения, необходима дополнительная проверка по минимуму времени движения в начало координат. Последнее позволяет разделить с помощью линий «раздела» такие области и исключить пересечение фазовых траекторий.

Рассмотрим на примере методику расчета линий переключения.

3. ПРИМЕР РАСЧЕТА ЛИНИЙ ПЕРЕКЛЮЧЕНИЯ

Примем следующие численные значения параметров $a_{ij}^*, \Delta a_{ij}, b_{ij}, u_k$:

$$\begin{aligned} a_{11}^* &= 0,05; a_{12}^* = 0,1; a_{21}^* = -0,4; a_{22}^* = 0,05; \\ \Delta a_{11} &= 0,06; \Delta a_{12} = 0,1; \Delta a_{21} = 0,4; \Delta a_{22} = 0,06; \\ b_{11} &= 1,9; b_{12} = 1; b_{21} = 1; b_{22} = 2,1; |u_1| \leq 1; |u_2| \leq 1. \end{aligned} \quad (3.1)$$

На рис. 1 приведены линии I и II для выбранных значений b_{ij} , удовлетворяющие условиям (2.9) и (2.10). Комбинации знаков для каждой области даны соответственно для u_1 и u_2 .

Предположим, что вектор Ψ расположен в III квадранте плоскости ψ^1, ψ^2 ($\psi^1 < 0, \psi^2 < 0$). Из (2.11) следует, что соответствующая этому расположению вектора сопряженной системы линия переключения (в обращенном времени) выходит в I квадрант плоскости x^1, x^2 ($x^1 > 0, x^2 > 0$).

Система уравнений, соответствующая движению объекта в обращенном времени, в этом случае имеет вид

$$\begin{aligned} \frac{dx_1}{d\tau} &= -(a_{11}^* - \Delta a_{11})x_1 - (a_{12}^* - \Delta a_{12})x_2 + b_{11} + b_{12}, \\ \frac{dx_2}{d\tau} &= -(a_{21}^* - \Delta a_{21})x_1 - (a_{22}^* - \Delta a_{22})x_2 + b_{21} + b_{22}. \end{aligned} \quad (3.2)$$

Для указанных выше (3.1) численных значений параметров корни характеристического уравнения системы (3.2) действительные и равные: $\lambda_1 = \lambda_2 = 0,01$. Уравнения линии переключения в параметрической форме получаются как решения (3.2) при нулевых начальных условиях. Время τ движения вектора Ψ (также в обращенном времени) до пересечения с осью ($-\psi^2$) увеличивается по мере приближения начального положения Ψ к оси ($-\psi^1$) и при $\Psi \rightarrow -\psi^1 \tau \rightarrow \infty$.

На рис. 2, а и б приведено построение линий переключения и фазовых траекторий (в «прямом» времени), рассматриваемая линия переключения обозначена через ORA.

Предположим теперь, что первоначальное положение вектора Ψ в III квадранте выбрано таким, что пересечение его с осью ($-\psi^2$) происходит через конечное время τ_1 , при этом точка фазового состояния объекта из начала координат переместится по линии переключения ORA в точку R. Вектор Ψ переходит в IV квадрант ($\psi^1 > 0, \psi^2 < 0$), что вызывает переключение параметров $\Delta a_{11}, \Delta a_{12}$ для систем X и Ψ , как это следует из (2.8). Система уравнений для X в обращенном времени принимает вид

$$\begin{aligned} \frac{dx_1}{d\tau} &= -(a_{11}^* + \Delta a_{11})x_1 - (a_{12}^* + \Delta a_{12})x_2 + b_{11} + b_{12}, \\ \frac{dx_2}{d\tau} &= -(a_{21}^* - \Delta a_{21})x_1 - (a_{22}^* - \Delta a_{22})x_2 + b_{21} + b_{22}, \end{aligned} \quad (3.3)$$

и при численных значениях (3.1) корни характеристического уравнения комплексные: $\lambda_{1,2} = -0,05 \pm j 0,985$.

Следует отметить, что на линии ORA происходит переключение только структуры, а управляющие параметры u_k остаются по-прежнему равными $u_1 = -1$; $u_2 = -1$. Фазовая траектория с новым значением структуры объекта выходит из точки R и за время $\tau_{2 \max} = 0,623 \text{ сек}$ (время движения вектора сопряженной системы от оси $(-\psi^2)$ до линии I) проходит до точки S.

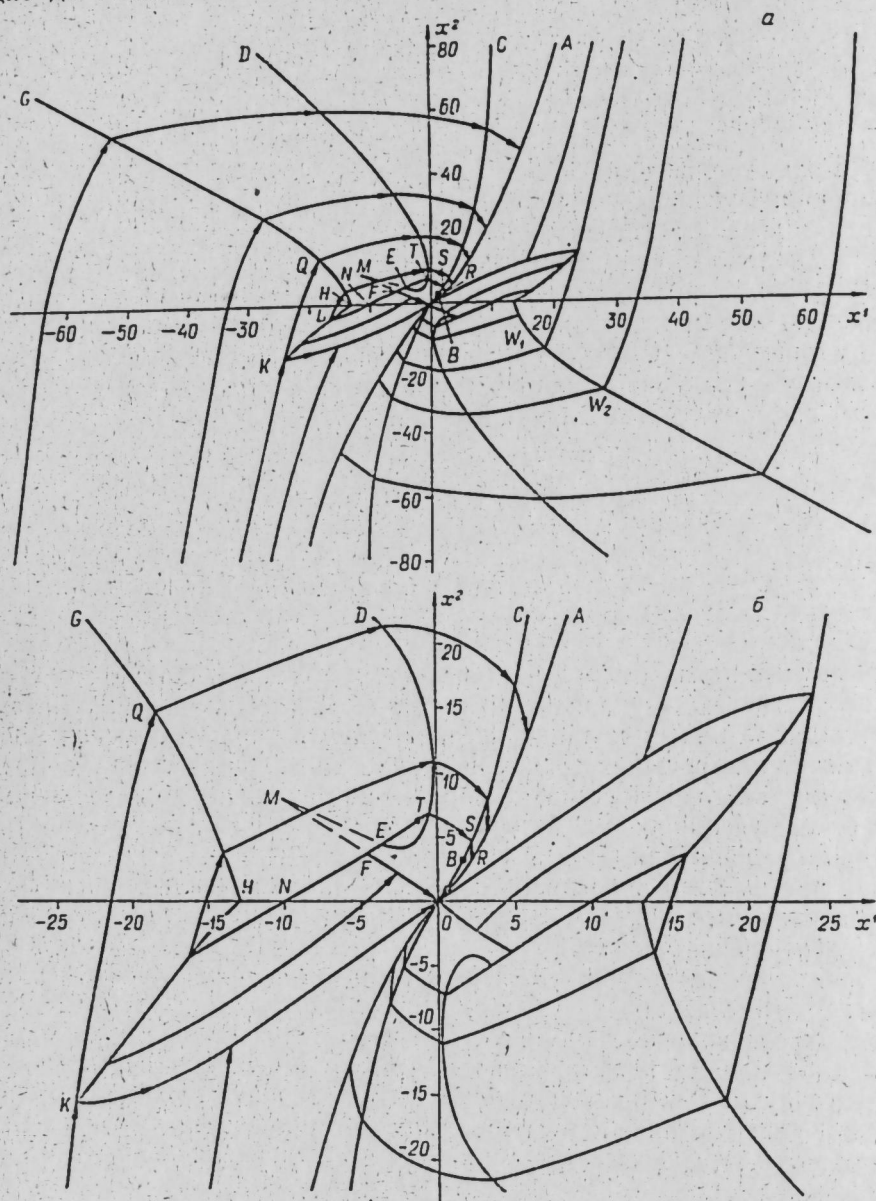


Рис. 2. Линии переключения и фазовые траектории на плоскости x^1, x^2 .

Вектор Ψ переходит через линию I, что приводит к переключению управляющего параметра u_1 . Получаем $u_1 = +1$; $u_2 = -1$. Таким образом, в точке S и других точках на линии OBSC происходит переключение только управляющего параметра u_1 . Линия OBSC состоит из двух участков. Участок BSC получается как совокупность точек фазовых траекторий максимальной длительности $\tau_{2 \max}$, выходящих в обратном

времени из точек линии ORA. Участок OB — фазовая траектория, выходящая из начала координат и имеющая то же время движения $\tau_{2 \max}$. Различие между этими участками заключается в том, что на линии OB происходят переключение u_1 и переход по ней фазовой точки состояния объекта в начало координат, в то время как на линии BSC происходит только переключение управления u_1 и переход в дальнейшем на линию ORA.

Под действием управления $u_1 = +1$; $u_2 = -1$ и при тех же значениях коэффициентов a_{ij} , что и в (3.3), проводим фазовые траектории, выходящие из линии OBSC. Максимальная длительность движения по ним определяется временем движения вектора сопряженной системы между I и II линиями в IV квадранте. Это время легко определяется и составляет $\tau_{3 \max} = 1,22 \text{ сек}$. Однако за время $\tau_3 < \tau_{3 \max}$ фазовая траектория пересекает ось x^2 , что приводит к изменению структуры объекта и сопряженной системы. Движение объекта будет описываться уже другой системой уравнений:

$$\begin{aligned} \frac{dx_1}{d\tau} &= -(a_{11}^* - \Delta a_{11}) x_1 - (a_{12}^* + \Delta a_{12}) x_2 - b_{11} + b_{12}, \\ \frac{dx_2}{d\tau} &= -(a_{21}^* + \Delta a_{21}) x_1 - (a_{22}^* - \Delta a_{22}) x_2 - b_{21} + b_{22}, \end{aligned} \quad (3.4)$$

корни характеристического уравнения которой действительные и равные ($\lambda_1 = \lambda_2 = 0,01$). Поэтому находим сначала время τ_3 пересечения фазовой траектории с осью x^2 и соответствующее этому моменту положение вектора Ψ . Далее определяем время τ_4 до совпадения вектора сопряженной системы с линией II, стыкуя направления векторов сопряженной системы в момент τ_3 . Затем стыкуем фазовые траектории для системы X в момент τ_3 и продолжаем их от оси x^2 в течение времени τ_4 . Времена τ_3 и τ_4 зависят от начального выбора точки на линии OBSC. Максимальное время $\tau_{4 \max} = 7,119 \text{ сек}$ получаем, если $\tau_3 = 0$. Оно соответствует фазовой траектории OFM, выходящей из начала координат во II квадрант под действием управления $u_1 = +1$; $u_2 = -1$. В результате получаем линию METD, на которой происходит переключение управления u_2 с $u_2 = +1$ на $u_2 = -1$ (в «прямом» времени).

Продолжая аналогичные построения, находим линию HQG, на которой происходят переключения параметров Δa_{21} , Δa_{22} , как это следует из (2.8). При этом оказывается, что фазовые траектории, выходящие из части линии METD, пересекают линию OFM. Это означает, что в начало координат можно попасть двумя путями: либо, дойдя до линии OFM, осуществить переключение и двигаться по ней в начало координат, либо переходить на линию METD и осуществлять переключение на ней с последующим переходом на линию ORA, и затем в начало координат. Анализ времени движения по этим фазовым траекториям показывает, что на линии OFM существует такая точка F, что время движения по FO равно времени движения по FETSRO, а время движения с точек на линии OF меньше времени соответствующего перехода на линию ORA и далее в начало координат. Принимаем OF и ETD за линии переключения u_2 (с $u_2 = +1$ на $u_2 = -1$) и продолжаем построение линий переключения. В дальнейшем вновь получаем пересечение фазовых траекторий, проходящих (в обратном времени) через линию OH и исходящих с линии HQG. Анализируем их по времени перехода в начало координат. Получаем, что время движения по линии ОК равно времени движения к оси $(-x^1)$, далее до линии ORA и затем в начало координат. Из условия

равенства времен и определяется точка K . Линия KLH является линией «раздела». Переход с нее в начало координат возможен либо при попадании на линию переключения OF , либо на ORA . Времена перехода равны. Линия OK представляет собой линию переключения параметров Δa_{11} , Δa_{12} .

В силу симметричности линий переключения относительно начала координат построение таких линий не вызывает затруднений. Все линии переключения приведены на рис. 2.

Отметим некоторые свойства систем при параметрическом управлении. Введение дополнительно управления по параметрам Δa_{ij} увеличивает быстродействие, по сравнению с управлением только по u_k , и тем существеннее, чем больше Δa_{ij} . Время переходного процесса зависит также от выбора точек на фазовой плоскости. В рассматриваемом примере времена перехода в начало координат из точек, например W_1 и W_2 (рис. 2, а) составляет соответственно 5,23 и 7,71 сек. Для этих же точек времена перехода при управлении только по u_k составляют 10,9 и 29,8 сек. Быстродействие увеличивается, таким образом, в 2,08 и 3,87 раза.

Из построения линий переключения (рис. 2) видно, что синтез оптимальных управлений возможен на всей плоскости для исходной системы, имеющей комплексные корни с положительной вещественной частью. Из [4] известно, что управление по u_k в этом случае обеспечивает переход в начало координат только из некоторой ограниченной области. Введение параметрического управления расширяет зону управляемости системы [5].

Нетрудно видеть, что при достаточно больших Δa_{ij} свойства таких систем полностью определяются управляющими параметрами Δa_{ij} . Это позволяет допускать самопроизвольное изменение параметров объекта a_{ij}^* в довольно широких пределах и не требует точного знания последних. Обеспечить же стабильность управляющих параметров Δa_{ij} проще, чем стабильность параметров самого объекта. Даже в случае отклонения управляющих параметров от расчетных обеспечивается переход в начало координат. При этом, однако, несколько увеличивается время, по сравнению с оптимальным, и число переключений, так как движение будет происходить не по линиям переключения (либо их конечным участкам), а по нескольким отличным траекториям. При этом возможен и скользящий режим, который рассматривается в работах [7, 2].

Такой подход не требует компромиссного решения для обеспечения высокого быстродействия и высокой статической точности. Известно, что в системах с постоянной структурой необходимо искать компромиссное решение, чтобы удовлетворить этим противоречивым требованиям. В рассматриваемых системах высокое быстродействие обеспечивается за счет управления по u_k и Δa_{ij} в переходном процессе, а в момент прихода в ϵ -окрестность начала координат параметры Δa_{ij} могут быть приняты такими, какие диктуются статической точностью.

При практической реализации таких систем основное — реализация линий переключения. Наиболее просто она осуществляется с помощью функциональных преобразователей [8] или с помощью моделей [9, 10]. В работах [9, 10] рассмотрены также вопросы синтеза оптимального управления на основе реализации линий переключения. Увеличение числа линий переключений при управлении по структуре не вносит принципиальных изменений в техническую реализацию синтеза управления.

В целях упрощения технической реализации возможна приближенная реализация линий переключения. Приближенная реализация линий либо участков линий, на которых происходят переключения, но отсут-

ствует движение в начало координат, приведет только к некоторому увеличению времени перехода. Следует более точно реализовать линии, по которым осуществляется движение в начало координат, чтобы уменьшить число переключений. Такая система будет близка к оптимальной.

Экспериментальная проверка на вычислительных устройствах непрерывного действия дала хорошее совпадение с расчетными данными.

ВЫВОДЫ

Приведенная методика построения линий переключения позволяет синтезировать оптимальное управление по u_k и Δa_{ij} для систем второго порядка и оценить влияние каждого управляющего параметра на уменьшение времени оптимального перехода в начало координат, на расширение зоны управляемости и другие свойства, которыми обладает такая система. Техническая реализация подобных систем довольно проста.

Институт автоматики и электрометрии
Сибирского отделения АН СССР,
Новосибирск

Поступила в редакцию
26/XII 1964

ЛИТЕРАТУРА

1. Б. Г. Питтель. О некоторых задачах оптимального управления. II. — Автоматика и телемеханика, 1963, XXIV, № 11.
2. В. А. Таран. Применение нелинейной коррекции и переменной структуры для улучшения динамических свойств систем автоматического регулирования (обзор). — Автоматика и телемеханика, 1964, XXV, № 1.
3. Л. Е. Канарев, И. П. Резников. Об одной задаче оптимального управления. — Техническая кибернетика, 1964, № 4.
4. Л. С. Понtryгин, В. Г. Болтянский, Р. В. Гамкрелидзе, Е. Ф. Мищенко. Математическая теория оптимальных процессов. М., Физматгиз, 1961.
5. В. М. Александров, А. А. Нестеров. Оптимальная система с управляемой структурой. — Изв. СО АН СССР, сер. техн. наук, 1965, вып. 2, № 6.
6. F. B. Smith. Time-optimal control of higher-order systems. IRE Trans. Automat. Control, 1961, 6, № 1.
7. С. В. Емельянов, Н. Е. Костылева. Синтез систем автоматического регулирования с переменной структурой, обладающих разрывной функцией переключения. — Техническая кибернетика, 1964, № 1.
8. В. М. Александров, А. А. Нестеров. Синтез оптимальных быстродействий на основе реализации линий переключения. — Изв. СО АН СССР, сер. техн. наук, 1964, вып. 3, № 10.
9. В. М. Александров, Б. А. Морякин. Система оптимального управления для случая комплексных собственных значений матрицы объекта. — Сб. трудов ИАЭ. Автоматическое управление непрерывными процессами. 1964, вып. 8.
10. А. Л. Вознюк, В. И. Иваненко, Д. В. Караченев, М. Л. Свердан. Синтез оптимального по быстродействию управления для объектов второго порядка. — Техническая кибернетика, 1963, № 6.

В. М. БЕЛОВ, Н. Ф. КЛИСТОРИН

ПРЕДЕЛЬНЫЕ ЗНАЧЕНИЯ ПУЛЬСАЦИЙ ВЫХОДНОГО НАПРЯЖЕНИЯ ДВУХПОЗИЦИОННЫХ СТАБИЛИЗАТОРОВ

Структурная схема двухпозиционного стабилизатора напряжения (ДПС) может быть представлена в виде замкнутого контура, состоящего из линейной части (ЛЧ) и релейного элемента (РЭ). ЛЧ в простейшем случае описывается дифференциальным уравнением 1-го порядка с коэффициентами, изменяющимися скачком, и обычно состоит из конденсатора и активного сопротивления. С нашей точки зрения, этот случай представляет наибольший интерес по следующим причинам:

1. ДПС такого вида всегда устойчив без применения специальных средств. Этот вывод следует из рассмотрения фазовой картины электро-механического двухпозиционного регулятора напряжения [1].

2. При скачкообразных изменениях входного напряжения или сопротивления нагрузки мгновенное значение напряжения на конденсаторе в любой момент времени лежит в пределах между максимальным ($U_{c \max}$) и минимальным ($U_{c \min}$) уровнями, заданными величиной опорного напряжения и шириной зоны гистерезиса РЭ [2].

Последнее свойство ДПС особенно важно в случаях нагрузки импульсного характера. Заметим при этом, что обычные стабилизаторы непрерывного действия для таких целей либо совершенно непригодны, либо требуют существенного усложнения схемы.

Основной недостаток ДПС — наличие на его выходе пульсаций, размах которых определяется разностью между фиксированными уровнями $U_{c \max}$ и $U_{c \min}$. Во многих случаях, особенно в измерительной технике, предъявляются жесткие требования к пульсациям питающих напряжений, поэтому их желательно сводить к пренебрежимо малым величинам. Это можно было бы достичь уменьшением ширины зоны гистерезиса РЭ. Однако реализация такой возможности ограничена инерционностью переключающих элементов, а также наличием остаточных параметров (сопротивления и индуктивности) конденсатора, включенного параллельно с сопротивлением нагрузки.

Рассмотрению влияния каждого из приведенных факторов на величину пульсаций выходного напряжения ДПС и посвящена настоящая работа.

ВЛИЯНИЕ ИНЕРЦИОННОСТИ ПЕРЕКЛЮЧАЮЩИХ ЭЛЕМЕНТОВ

При достаточно больших допустимых пульсациях выходного напряжения ДПС с конденсатором С в качестве энергоемкого элемента инерционностью транзисторов можно пренебрегать [3].

Уменьшение величины пульсаций путем сужения зоны гистерезиса РЭ (при неизменных параметрах линейной части стабилизатора) влечет

за собой увеличение частоты автоколебаний. На высоких частотах инерционность переключающих элементов начинает заметно сказываться на величине размаха пульсаций.

Обратимся к функциональной схеме двухпозиционного стабилизатора (рис. 1). На схеме T_p — регулирующий транзистор, работающий в режиме переключений; R — зарядное сопротивление, включающее внутреннее сопротивление источника входного напряжения и сопротивление транзистора T_p при его насыщении; CC — схема сравнения опорного напряжения с выходным; Y — усилитель сигнала ошибки; ТШ — триггер Шмитта; $U_{вх}$, $U_{вых}$ — входное и выходное напряжения соответственно.

Инерционность транзисторных ключей проявляется в том, что они имеют конечное время переключения из одного состояния в другое (t_{ϕ}), а также время задержки (t_p), определяемое временем рассасывания неосновных носителей в области базы. Так как граничная частота ω_a маломощных транзисторов значительно превышает ω_a мощных, в дальнейшем будем учитывать t_{ϕ} и t_p лишь для регулирующего транзистора.

Ввиду малости пульсаций будем также считать, что напряжение на конденсаторе при его заряде и разряде изменяется линейно.

Используя результаты анализа двухпозиционного стабилизатора, полученные в работе [4] с учетом упомянутых допущений, для размаха пульсаций выходного напряжения можно записать

$$U_n = U_n' + \frac{I_k - I_n}{C} t_p + \frac{I_n^2 + (I_k - I_n)^2}{2CI_k} t_{\phi}, \quad (1)$$

где

$U_n' = U_{c \max} - U_{c \min}$ — размах пульсаций, соответствующий моментам срабатывания триггера;

$I_n = \frac{U_{вых}}{R_n}$ — ток нагрузки;

$I_k = \frac{U_{вх} - U_{вых}}{R}$ — ток через транзистор T_p при заряде конденсатора.

Выясним возможности уменьшения слагаемого U_n' .

Если ширину зоны гистерезиса триггера, приведенную ко входу усилителя Y , обозначить через $2x$, а коэффициент передачи схемы сравнения — через K_x , то

$$U_n' = \frac{2x}{K_x}. \quad (2)$$

С другой стороны,

$$U_n' = \frac{I_k - I_n}{C} t_z, \quad (3)$$

где t_z — время заряда конденсатора на величину U_n' . Ширину зоны гистерезиса можно изменять в нужных пределах изменением коэффициента усиления усилителя, а также выбором соответствующих параметров триггера. Однако из формул (2), (3) видно, что уменьшение x не может быть беспредельным, так как длительность управляющих

импульсов (t_3), формируемых триггером Шмитта, конечна и зависит как от типа используемых транзисторов, так и от качества монтажа.

Зная $t_{3 \min}$, из (2) и (3) можно определить $U_{n \min}$, а также критическую величину зоны гистерезиса РЭ:

$$U_{n \min} = \frac{I_{k \max} - I_{n \min}}{C} t_{3 \min}, \quad (4)$$

$$z_{kp} = \frac{K_A (I_{k \max} - I_{n \min})}{2C} t_{3 \min}. \quad (5)$$

Таким образом, при заданных значениях $I_{k \max}$ и $I_{n \min}$ минимальная величина пульсаций выходного напряжения с учетом инерционности регулирующего транзистора будет следующей:

$$U_{n \min} = \frac{2z_{kp}}{K_A} \left(1 + \frac{t_p}{t_{3 \min}}\right) + \frac{I_{n \min}^2 + (I_{k \max} - I_{n \min})^2}{2C I_{k \max}} t_{\phi}. \quad (6)$$

В соответствии с данными работы [5], триггер Шмитта способен формировать импульсы с частотой до 5–10 мГц. Лучшие образцы мощных транзисторов, предназначенные для работы в импульсных цепях (например, германиевые конверсионные транзисторы типа П605, П606), имеют время нарастания тока коллектора $t_{\phi} = 0,3 \div 0,5$ мксек и время задержки $t_p = 3 \div 5$ мксек.

Чтобы получить представление о величине $U_{n \min}$, воспользуемся данными, приведенными в [6] для двухпозиционного стабилизатора с выходным напряжением 12 в и максимальным током нагрузки 0,1 а: $U_{вх} = 15 \div 20$ в; $I_{k \max} = 0,5$ а; $I_{n \min} = 0,02$ а; $C = 2500$ мкф; $R = 16$ ом. Принимая $t_{3 \min} = 1$ мксек, $t_p = 4$ мксек и $t_{\phi} = 0,4$ мксек, по формуле (6) получим $U_{n \min} \approx 1$ мв. Как видим, минимальная величина пульсаций составляет менее 0,01% от среднего значения выходного напряжения. Однако необходимо учитывать, что при уменьшении емкости $U_{n \min}$ может достигать значительных величин. Так, положив $C = 250$ мкф, получим $U_{n \min} = 10$ мв.

В заключение отметим, что для большинства мощных высокочастотных транзисторов $t_p \gg t_{\phi}$, поэтому вторым слагаемым выражения (6) при расчетах можно пренебрегать.

ВЛИЯНИЕ ОСТАТОЧНЫХ ПАРАМЕТРОВ КОНДЕНСАТОРА

Величину пульсаций выходного напряжения можно уменьшить не только за счет сужения зоны гистерезиса РЭ, но и увеличением емкости конденсатора C . Поэтому чаще всего в ДПС используются электролитические конденсаторы.

Так как величина и направление тока через конденсатор периодически изменяются, то в моменты коммутации на выходе стабилизатора возникают скачки напряжения, обусловленные остаточными параметрами конденсатора: омическим сопротивлением и индуктивностью анодной и катодной пластин, проводимостью и диэлектрическими потерями оксидного слоя, сопротивлением электролита и т. д.

Экспериментально нами было выяснено, что основное влияние на величину пульсаций оказывают индуктивность L_c и суммарное сопротивление пластин и электролита r_c , которые на эквивалентной схеме кон-

денсатора в соответствии с [7] включены последовательно с емкостью оксидного слоя.

Влияние сопротивления r_c можно оценить по упрощенной эквивалентной схеме ЛЧ стабилизатора, изображенной на рис. 2, а. Форма пульсаций выходного напряжения в этом случае соответствует показанной на рис. 2, б.

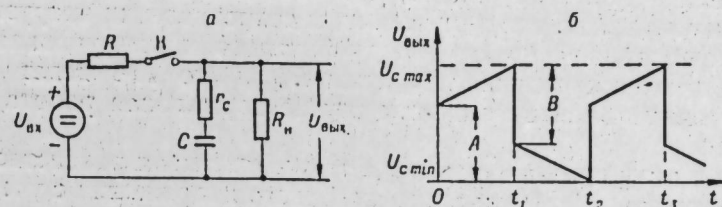


Рис. 2.

Найдем величины скачков A и B в моменты переключения $t=0$ и $t=t_1$.

В промежуток времени $0 \leq t < t_1$, т. е. при замкнутом ключе K , напряжение на нагрузке стабилизатора изменяется по закону

$$U_{вх}(t) = U_{вх} m - [U_{вх} m - U_c(0)] (1 - n) e^{-\frac{t}{T_1}}, \quad (7)$$

где

$$m = \frac{R_n}{R + R_n};$$

$$n = \frac{r_c (R + R_n)}{R R_n + r_c (R + R_n)};$$

$$T_1 = \left(r_c + \frac{R R_n}{R + R_n}\right) C \text{ — постоянная времени};$$

$$U_c(0) = U_{c \min} \left(1 + \frac{r_c}{R_n}\right) \text{ — напряжение на конденсаторе } C \text{ при } t=0.$$

В момент времени $t=0$

$$U_{вх}(0) = m U_{вх} + U_c(0) (1 - n),$$

а скачок напряжения

$$A = U_{вх}(0) - U_{c \min} = n (m U_{вх} - U_{c \min}) + U_{c \min} (1 - n) \frac{r_c}{R_n}. \quad (8)$$

Аналогично можно определить B :

$$U_{вх}(t) = U_c(t_1) \frac{R_n}{r_c + R_n} e^{-\frac{t}{T_2}},$$

где

$$T_2 = (r_c + R_n) C;$$

$$U_c(t_1) = U_{c \max} - \frac{r_c (R + R_n)}{R R_n} (m U_{вх} - U_{c \max});$$

$$B = U_{c \max} - U_{\text{вых}}(t_1) = \frac{r_c}{r_c + R_H} U_{c \max} + (m U_{\text{вх}} - U_{c \max}) \frac{r_c (R + R_H)}{R (r_c + R_H)}. \quad (9)$$

Из выражений (8) и (9) видно, что значения A и B зависят как от входного напряжения, так и от величины сопротивления нагрузки.

Если выбранная разность между фиксированными уровнями $U_{c \max}$ и $U_{c \min}$ окажется меньше $A_{\max}$ или $B_{\max}$, то ЛЧ ведет себя как безынерционный элемент и в этом случае нормальная работа ДПС невозможна.

Имея в виду сказанное выше, а также учитывая равенство (4), для минимального размаха пульсаций выходного напряжения с учетом влияния остаточного сопротивления конденсатора можно записать:

$$U'_{\text{н min}} = \frac{I_{\text{к max}} - I_{\text{н min}}}{C} t_{\text{з min}} + A_{\max}; \quad (10)$$

$$U'_{\text{н min}} = \frac{I_{\text{к max}} - I_{\text{н min}}}{C} t_{\text{з min}} + B_{\max}. \quad (11)$$

Реальные электролитические конденсаторы, выпускаемые отечественной промышленностью, имеют r_c от 0,1 до 1,5 ом, поэтому скачки выходного напряжения A и B могут быть довольно большими, если не принять специальных мер для их уменьшения. Так, пользуясь выражениями (8) и (9), для рассмотренного выше примера получим $A_{\max} \approx B_{\max} \approx 40$ мВ при $r_c = 0,1$ ом и $U'_{\text{н min}} = 41$ мВ. Ясно, что такая величина пульсаций может оказаться неприемлемой. В этих случаях емкость C целесообразно набирать из нескольких (q) параллельно включенных конденсаторов одинаковой емкости $C' = \frac{C}{q}$. Этим достигается уменьшение $A_{\max}$ и $B_{\max}$ в q раз.

Кроме того, при конструировании ДПС необходимо следить, чтобы делитель схемы сравнения и выходные зажимы стабилизатора имели непосредственный контакт с выводами конденсатора, так как иначе сопротивление монтажных проводов будет суммироваться с r_c .

Для выяснения влияния остаточной индуктивности конденсатора обратимся к эквивалентной схеме ЛЧ стабилизатора, изображенной на рис. 3, а. Ввиду того, что индуктивность L_c мала, вместо заряженной емкости C в схему введен источник Э. Д. С. $U_{c \min}$ или $U_{c \max}$ в зависимости от состояния ключа K при $t < 0$.

В идеализированном случае, когда пренебрегают длительностью переброса ключа ($\omega_a \rightarrow \infty$), амплитуды выбросов выходного напряжения очень велики. Как легко убедиться, при замыкании ключа

$$U_{\text{вых}_1}(t) = U_{c \min} + m (U_{\text{вх}} - U_{c \min}) e^{-\frac{R' R_H}{R + R_H} \cdot \frac{1}{L_c} t},$$

при размыкании ключа

$$U_{\text{вых}_2}(t) = U_{c \max} - \left(U_{c \max} + \frac{m U_{\text{вх}} - U_{c \max}}{1 - m} \right) e^{-\frac{R_H}{L_c} t}.$$

Отсюда можно найти максимальные значения выбросов $\delta_1 \max$ и $\delta_2 \max$ (рис. 3, б), положив $t=0$;

$$\delta_1 \max = m U_{\text{вх}} + U_{c \min} (1 - m), \quad (12)$$

$$\delta_2 \max = - \frac{m U_{\text{вх}} - U_{c \max}}{1 - m}. \quad (13)$$

Как указывалось выше, в реальных случаях вследствие конечности величины ω_a длительность перехода транзисторного ключа из области отсечки в область насыщения и обратно оказывается конечной. Следствием этого является уменьшение амплитуды выбросов δ_1 и δ_2 , величины которых можно оценить следующим образом.

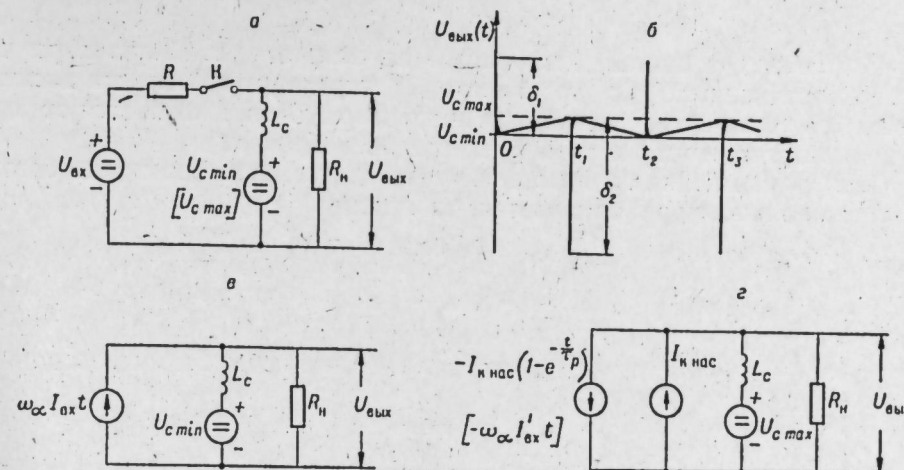


Рис. 3.

Пусть в исходном состоянии регулирующий транзистор T_p (рис. 1) заперт, а напряжение на конденсаторе C равно $U_{c \min}$.

Подадим скачкообразный входной сигнал $I_{\text{вх}}$, отпирающий транзистор. Полагая, что $\beta I_{\text{вх}} \gg I_{\text{к нас}}$, где β — коэффициент усиления по току, а $I_{\text{к нас}}$ — ток насыщения транзистора, можно считать скорость изменения коллекторного тока постоянной и равной $\omega_a I_{\text{вх}}$ [8]. Длительность переключения транзистора может быть найдена как

$$t_{\phi_1} = \frac{I_{\text{к нас}}}{\omega_a I_{\text{вх}}}, \quad (14)$$

а ток насыщения

$$I_{\text{к нас}} = \frac{U_{\text{вх}} - U_{c \min}}{R}. \quad (15)$$

Во время переключения транзистор находится в активной области, в связи с чем он может рассматриваться как генератор тока $\omega_a I_{\text{вх}} t$. Эквивалентная схема, справедливая для промежутка $0 \leq t < t_{\phi_1}$, представлена на рис. 3, в.

Переходное сопротивление данной схемы относительно выходных зажимов

$$z(t) = R_H e^{-\frac{R_H}{L_c} t}. \quad (16)$$

Используя принцип наложения и применяя формулу интеграла Дюамеля, для линейно нарастающего тока $\omega_a I_{\text{вх}} t$ находим

$$\delta_1(t) = \omega_a L_c I_{\text{вх}} \left(1 - e^{-\frac{R_{\text{н}}}{L_c} t}\right). \quad (17)$$

Учитывая соотношения (14) и (15), а также полагая $t = t_{\phi_1}$, окончательно получаем

$$\delta_1 \text{ max} = \frac{L_c}{R t_{\phi_1}} (U_{\text{вх}} - U_{c \text{ min}}) \left(1 - e^{-\frac{R_{\text{н}}}{L_c} t_{\phi_1}}\right). \quad (18)$$

В момент равенства напряжения на нагрузке стабилизатора пороговому значению $U_{c \text{ max}}$ транзистор T_p переходит из области насыщения в область отсечки. При этом его коллекторный ток изменяется от $I_{\text{к нас}}$ до нуля (остаточным током коллектора пренебрегаем):

Если выключение транзистора производится переходом тока базы к нулю, ток коллектора изменяется по закону

$$i_k = I_{\text{к нас}} e^{-\frac{t}{\tau_p}}, \quad (19)$$

где $\tau_p \approx \frac{\beta}{\omega_a}$ — постоянная времени убывания избыточных неосновных носителей [8],

$$I_{\text{к нас}} = \frac{U_{\text{вх}} - U_{c \text{ max}}}{R}.$$

В соответствии с (19) длительность переключения транзистора можно принять равной $t_{\phi_2} \approx (3 \div 5) \tau_p$.

Если выключение транзистора происходит при действии так называемого «высасывающего» тока $I'_{\text{вх}}$, то можно считать, что ток коллектора спадает с постоянной скоростью $\omega_a I'_{\text{вх}}$.

Очевидно, на время выключения транзистора ключ К может быть также представлен в виде генератора тока, равного в первом случае

$I_{\text{к нас}} e^{-\frac{t}{\tau_p}}$, и во втором $I_{\text{к нас}} - \omega_a I'_{\text{вх}} t$. Тогда после простых преобразований эквивалентная схема линейной части стабилизатора приобретает вид, показанный на рис. 3, з.

Для определения $\delta_2(t)$ снова воспользуемся методом интеграла Дюамеля.

В случае экспоненциально изменяющегося тока коллектора

$$\delta_2(t) = I_{\text{к нас}} \cdot z(t) \frac{1}{\tau_p} \int_0^t e^{-\frac{T_1 - \tau_p}{T_1 \tau_p} \tau} d\tau,$$

где $z(t)$ определяется выражением (16), а $T_1 = \frac{L_c}{R_{\text{н}}}$ — постоянная времени.

Вводя обозначение $T_2 = \frac{L_c}{R}$ и принимая $t = t_{\phi_2}$, после преобразования получим выражение для максимальной величины выброса $\delta_2 \text{ max}$:

$$\delta_2 \text{ max} = -\frac{T_2}{T_1 - \tau_p} (U_{\text{вх}} - U_{c \text{ max}}) \left(e^{-\frac{t_{\phi_2}}{\tau_p}} - e^{-\frac{t_{\phi_2}}{T_1}}\right). \quad (20)$$

Для второго случая, когда ток коллектора падает линейно, аналогичным образом можно найти

$$\delta_2 \text{ max} = -\omega_a L_c I'_{\text{вх}} \left(1 - e^{-\frac{t_{\phi_2}}{T_1}}\right),$$

или

$$\delta_2 \text{ max} = -\frac{T_2}{t_{\phi_2}} (U_{\text{вх}} - U_{c \text{ max}}) \left(1 - e^{-\frac{t_{\phi_2}}{T_1}}\right). \quad (21)$$

Сравнивая (18) и (21), легко заметить, что при $t_{\phi_1} = t_{\phi_2}$ амплитуды выбросов напряжения $\delta_1 \text{ max}$ и $\delta_2 \text{ max}$ равны.

Следует подчеркнуть, что для обеспечения устойчивой работы ДПС необходимо выполнить условия $\delta_1 \text{ max} < U_{\text{н}}$ и $\delta_2 \text{ max} < U_{\text{н}}$. В противном случае дополнительные переключения регулирующего транзистора могут привести к возникновению автоколебаний на более высоких частотах, определяемых постоянными времени T_1 и T_2 .

В зависимости от типа конденсатора индуктивность L_c может иметь величины от сотых долей до единиц макроненри. Если принять $L_c = 1 \text{ мкГн}$ и $t_{\phi_1} = t_{\phi_2} = 0,3 \text{ мксек}$, для приведенного выше примера получим $\delta_1 \text{ max} = \delta_2 \text{ max} = 0,5 \text{ в}$.

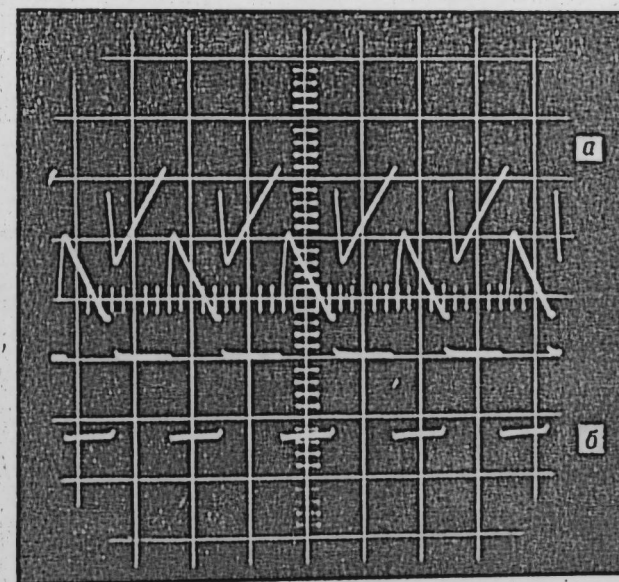


Рис. 4.

Как следует из выражений (18) и (21), амплитуды выбросов δ_1 и δ_2 могут быть уменьшены до требуемой величины путем выбора соответствующей длительности переключения t_{ϕ} регулирующего транзистора. Несмотря на то, что при этом происходит некоторое увеличение размаха

пульсаций за счет инерционности транзистора, указанный прием в ряде случаев может оказаться полезным.

С другой стороны, легко заметить, что с уменьшением остаточной индуктивности L_c амплитуды выбросов также уменьшаются. В связи с этим можно рекомендовать параллельное соединение конденсаторов одинаковых емкостей, а также использование электролитических конденсаторов с возможно малыми индуктивностями (например, типа ЭТО).

С целью проверки полученных выше результатов был исследован макет ДПС на 15 в и ток нагрузки 0,15 а. Принципиальная схема стабилизатора в основном соответствовала приведенной в [6].

Осциллограмма пульсаций выходного напряжения (рис. 4, а) наглядно иллюстрирует наличие скачков, обусловленных остаточным сопротивлением r_c , и выбросов за счет индуктивности L_c . Полный размах пульсаций составляет 60 мв. На рис. 4, б показан характер изменения коллекторного тока регулирующего транзистора (типа П605). Частота автоколебаний сравнительно невелика (2 кГц), поэтому влияние инерционности транзистора на величину пульсаций практически отсутствует.

Используя конденсаторы различных типов с предварительно измеренными параметрами r_c и L_c , мы установили достаточно хорошее совпадение данных эксперимента с результатами приведенных выше исследований.

ВЫВОДЫ

1. Предельные значения пульсаций выходного напряжения ДПС ограничены влиянием инерционности переключающих элементов и остаточными параметрами электролитических конденсаторов. При этом влияние первого фактора может быть пренебрежимо малым, если граничные частоты используемых транзисторов значительно превышают частоту автоколебаний в ДПС.

2. При тщательном монтаже размах пульсаций выходного напряжения может быть сведен к величинам порядка 10 мв в том случае, если использованы высокочастотные транзисторы и параллельное соединение нескольких конденсаторов одинаковой емкости с возможно малыми остаточными индуктивностями.

3. При жестких требованиях к величине пульсаций (менее 0,1%) проектирование ДПС на выходные напряжения $U_{вых} < 10$ в нецелесообразно.

Институт автоматики и электрометрии
Сибирского отделения АН СССР,
Новосибирск

Поступила в редакцию
4/IX 1965

ЛИТЕРАТУРА

1. С. И. Бериштейн. К теории вибрационных регуляторов электрических машин.— Автоматика и телемеханика, 1951, т. 12, № 5.
2. А. А. Бокуняев. Стабилизаторы постоянного напряжения с двухпозиционным регулированием.— Труды XXI Всес. научной сессии, М., 1965.
3. В. М. Белов. Полупроводниковые стабилизаторы напряжения релейного типа.— Труды IV ВТНК по применению полупроводниковых элементов в приборостроении, М., 1964 (в печати).

4. В. Е. Китаев, А. А. Бокуняев. Стабилизатор постоянного напряжения с двухпозиционным регулированием.— Труды учебных институтов связи, вып. 19, Л., 1964.
5. Б. И. Швецкий. Электронные измерительные приборы с цифровым отсчетом. Киев, 1964.
6. G. Meyer Brötz. Die Stabilisierung von Gleichspannungen mit geschalteten Transistoren.— Elektronische Rundschau, 1958, № 10.
7. В. Т. Ренне. Электрические конденсаторы. М.—Л., Госэнергоиздат, 1952.
8. С. Я. Шац. Транзисторы в импульсной технике, Судпромгиз, 1963.

Г. П. БЕЗНОСОВ, Б. П. ЗЕЛЕНЦОВ

ЧАСТОТНЫЙ МЕТОД АНАЛИЗА НАДЕЖНОСТИ СИСТЕМ С ВОССТАНОВЛЕНИЕМ, СОСТОЯЩИХ ИЗ ОДНОТИПНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ

В настоящей работе излагается метод анализа надежности систем длительного использования, состоящих из однотипных элементов. Функционирование таких систем с точки зрения надежности характеризуется процессами отказа и восстановления их элементов.

С помощью частотного метода определяются такие показатели, как среднее время между отказами, среднее время восстановления, частота отказов системы и предельные вероятности состояний системы. Известно, что для определения первых двух показателей надежности могут быть использованы два метода теории цепей Маркова: метод дифференциальных уравнений [1] и матричный метод [2]. Первый из них связан с решением системы дифференциальных уравнений, а второй — с выполнением операций обращения и умножения матриц. Частотный метод дает возможность получить выражения для определения указанных показателей в общем виде, достаточно удобном при практическом использовании.

При формальном описании процессов в системе приняты следующие допущения:

- 1) время исправной работы и время восстановления элементов системы распределены в соответствии с экспоненциальным законом;
- 2) процессы отказа и восстановления элементов системы независимы;
- 3) в каждый момент времени элемент системы может находиться в одном из двух состояний: исправном или неисправном;
- 4) в каждый момент времени система характеризуется только одним состоянием;
- 5) в один и тот же момент времени в системе не могут произойти два или более событий, заключающихся в переходе элемента из исправного состояния в неисправное или наоборот;
- 6) переходы системы от состояния к состоянию происходят мгновенно.

Обозначим через m общее число элементов системы, а через n — число основных элементов, необходимых для исправной работы системы. После отказа элемент может восстанавливаться. Полагаем, что элементы системы характеризуются одинаковыми интенсивностью отказа λ и интенсивностью восстановления μ .

Система, состоящая из m однотипных элементов, может находиться в одном из $(m+1)$ состояний: $S_m, S_{m-1}, \dots, S_i, \dots, S_1, S_0$, где i — число исправных элементов.

Процесс перехода системы от одного состояния к другому можно представить в виде диаграммы состояний (см. рисунок). Каждому состоянию приписываются две интенсивности: интенсивность λ_i , харак-

теризующая переход от состояния S_i к состоянию S_{i-1} , и интенсивность μ_i , характеризующая переход от состояния S_i к состоянию S_{i+1} .

Пусть в некоторый момент времени, который мы примем в качестве начального ($t=0$), система вошла в состояние S_i . Вероятность того, что

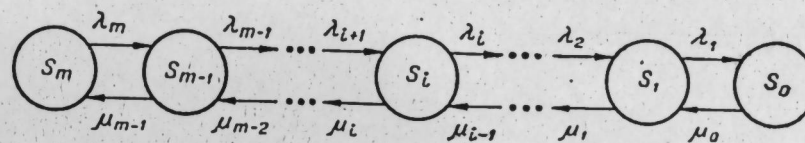


Диаграмма состояний системы.

в течение времени t система будет находиться в состоянии S_i , равна произведению вероятностей каждого элемента, оставшегося в том же состоянии:

$$P_{ii}(t) = \exp_1(-\lambda t) \cdot \exp_2(-\lambda t) \cdot \dots \cdot \exp_{\alpha_i}(-\lambda t) \cdot \exp_1(-\mu t) \times \\ \times \exp_2(-\mu t) \cdot \dots \cdot \exp_{\beta_i}(-\mu t) = \exp[-t(\alpha_i \lambda + \beta_i \mu)], \quad (1)$$

где α_i — число исправных элементов, находящихся в рабочем режиме, ($\alpha_i \leq i$);

β_i — число неисправных, восстанавливающихся элементов, ($\beta_i \leq m - i$).

Обозначим интенсивности состояний следующим образом:

$$\lambda_i = \alpha_i \lambda, \quad (2)$$

$$\mu_i = \beta_i \mu, \quad (3)$$

тогда:

$$P_{ii}(t) = \exp[-t(\lambda_i + \mu_i)]. \quad (4)$$

Очевидно, что среднее время пребывания в состоянии S_i , найденное путем интегрирования функции плотности времени пребывания в этом состоянии, равно

$$t_i = - \int_0^{\infty} t d P_{ii}(t) = \frac{1}{\lambda_i + \mu_i}. \quad (5)$$

Каждое состояние S_i характеризуется предельной вероятностью π_i [3] пребывания в этом состоянии (вероятность π_i представляет собой среднее относительное время пребывания в состоянии S_i при достаточно большом времени функционирования системы). Обозначим через Θ среднее время пребывания системы в исправных состояниях $S_m, S_{m-1}, \dots, S_n$, а через τ — среднее время пребывания в неисправных состояниях $S_{n-1}, S_{n-2}, \dots, S_1, S_0$. Θ и τ являются средними временами между отказами и восстановлениями соответственно. Коэффициент использования системы, характеризующий среднее относительное время пребывания системы в состояниях $S_m, S_{m-1}, \dots, S_n$, равен

$$K_n = \frac{\Theta}{\Theta + \tau} = \sum_{i=n}^m \pi_i. \quad (6)$$

Аналогично коэффициент простоя системы равен

$$K_n = 1 - K_n = \frac{\tau}{\theta + \tau} = \sum_{i=0}^{n-1} \pi_i. \quad (7)$$

Следует отметить, что

$$\sum_{i=0}^{m'} \pi_i = 1. \quad (8)$$

В дальнейшем используются вероятности изменения состояний $P_{i,i-1}$ и $P_{i,i+1}$. Ввиду того, что каждое состояние системы характеризуется постоянными, не зависящими от времени интенсивностями λ_i и μ_i , эти вероятности можно определить следующим образом [2]:

$$P_{i,i-1} = \frac{\lambda_i}{\lambda_i + \mu_i}, \quad (9)$$

$$P_{i,i+1} = \frac{\mu_i}{\lambda_i + \mu_i}. \quad (10)$$

Очевидно

$$P_{0,1} = P_{m,m-1} = 1. \quad (11)$$

Среднее время исправной работы θ и среднее время восстановления τ системы находятся с помощью средних частот ν_i вхождения системы в состояние S_i (ν_i — среднее число вхождений в состояние S_i в единицу времени), а также с помощью средних частот переходов $\nu_{i,i-1}$ и $\nu_{i,i+1}$. В течение достаточно большого промежутка времени t система войдет в состояние S_i в среднем $\nu_i t$ раз. Так как после каждого вхождения в состояние S_i система находится в этом состоянии время t_i , то время пребывания системы в этом состоянии за промежуток t равно $\nu_i t \cdot t_i$. С другой стороны, это время равно $\pi_i t$.

Из соотношения

$$\nu_i \cdot t \cdot t_i = \pi_i t$$

следует, что

$$\pi_i = t_i \nu_i. \quad (12)$$

Частота $\nu_{n,n-1}$ характеризует переходы из множества состояний $S_m, S_{m-1}, \dots, S_n$ в множество состояний $S_{n-1}, S_{n-2}, \dots, S_1, S_0$. Эта частота определяет частоту ν цикла системы, заключающегося в пребывании в первом из указанных подмножеств со средним временем θ и во втором подмножестве — со средним временем τ . Поэтому частота цикла системы определяется следующим образом:

$$\nu = \nu_{n,n-1} = \frac{1}{\theta + \tau}. \quad (13)$$

Учитывая (6) и (7), получим для θ и τ выражения

$$\theta = \frac{K_n}{\nu} = \frac{\sum_{i=n}^m \pi_i}{\nu_{n,n-1}}, \quad (14)$$

$$\tau = \frac{K_n}{\nu} = \frac{\sum_{i=0}^{n-1} \pi_i}{\nu_{n,n-1}}. \quad (15)$$

Выразим частоту $\nu_{n,n-1}$, а также вероятности π_i через интенсивности λ_i и μ_i ухода из состояния S_i , которые должны быть известны для каждой системы.

Очевидно, что средние частоты переходов $\nu_{i,i-1}$ и $\nu_{i,i+1}$ определяются частотой ν_i и вероятностями изменения состояний $P_{i,i-1}$ и $P_{i,i+1}$:

$$\nu_{i,i-1} = \nu_i P_{i,i-1} \quad (i = 1, 2, \dots, m), \quad (16)$$

$$\nu_{i,i+1} = \nu_i P_{i,i+1} \quad (i = 0, 1, 2, \dots, m-1). \quad (17)$$

Вследствие того, что после каждого перехода из некоторого состояния в соседнее через некоторое время имеет место обратный переход (см. рисунок), частоты переходов между соседними состояниями в обоих направлениях одинаковы:

$$\nu_{i,i-1} = \nu_{i-1,i} \quad (i = 1, 2, \dots, m), \quad (18)$$

$$\nu_{i,i+1} = \nu_{i+1,i} \quad (i = 0, 1, 2, \dots, m-1). \quad (19)$$

Отметим, что

$$\nu_{10} = \nu_{01} = \nu_0, \quad (20)$$

$$\nu_{m,m-1} = \nu_{m-1,m} = \nu_m. \quad (21)$$

Из (16) и (17) следует, что

$$\nu_i = \nu_{i,i-1} + \nu_{i,i+1}. \quad (22)$$

Выразим $\nu_{i,i-1}$ и $\nu_{i,i+1}$ через ν_0 . Тогда из (16) и (17) получаем

$$\nu_{i,i-1} = \frac{P_{i,i-1}}{P_{i,i+1}} \nu_{i,i+1}. \quad (23)$$

Последнее выражение дает возможность определить частоты переходов с помощью ν_m и ν_0 :

$$\nu_{i,i-1} = \nu_m \prod_{k=i}^{m-1} \frac{P_{k,k-1}}{P_{k,k+1}} \quad (i = 1, 2, \dots, m-1), \quad (24)$$

$$\nu_{i,i+1} = \nu_0 \prod_{k=1}^i \frac{P_{k,k+1}}{P_{k,k-1}} \quad (i = 1, 2, \dots, m-1). \quad (25)$$

Вероятности $P_{k,k-1}$ и $P_{k,k+1}$ можно представить в следующем виде, подставив (5) в (9) и (10):

$$P_{i,i-1} = t_i \lambda_i, \quad (26)$$

$$P_{i,i+1} = t_i \mu_i. \quad (27)$$

С учетом этих выражений перепишем (24) и (25) в другом виде:

$$\nu_{i, i-1} = \nu_m \prod_{k=i}^{m-1} \frac{\lambda_k}{\mu_k} \quad (i = 1, 2, \dots, m-1), \quad (28)$$

$$\nu_{i, i+1} = \nu_0 \prod_{k=1}^i \frac{\mu_k}{\lambda_k} \quad (i = 1, 2, \dots, m-1). \quad (29)$$

Зависимость между ν_m и ν_0 может быть получена с помощью каждого из последних выражений

$$\nu_m = \nu_0 \prod_{k=1}^{m-1} \frac{\mu_k}{\lambda_k}. \quad (30)$$

Подставляя это выражение в (28), получим

$$\nu_{i, i-1} = \nu_0 \prod_{k=1}^{i-1} \frac{\mu_k}{\lambda_k} \quad (i = 2, 3, \dots, m). \quad (31)$$

Подставив в (12) полученные выше соотношения, найдем выражения для предельных вероятностей π_i :

$$\pi_0 = \frac{\nu_0}{\mu_0}, \quad (32)$$

$$\pi_1 = \frac{\nu_0}{\lambda_1}, \quad (33)$$

$$\pi_i = \frac{\nu_0}{\lambda_i} \prod_{k=1}^{i-1} \frac{\mu_k}{\lambda_k} \quad (i = 2, 3, \dots, m). \quad (34)$$

Частота цикла ν определяется с помощью (31):

$$\nu = \nu_{n, n-1} = \nu_{1, 0} = \nu_0 \quad \text{при } n = 1, \quad (35)$$

$$\nu = \nu_{n, n-1} = \nu_{i, i-1} = \nu_0 \prod_{k=1}^{n-1} \frac{\mu_k}{\lambda_k} \quad \text{при } n = 2, 3, \dots, m. \quad (36)$$

После подстановки (32) — (36) в (14) и (15) средние времена исправной работы θ и восстановления τ выражаются через известные интенсивности отказа λ_i и восстановления μ_i :

$$\theta = \sum_{i=1}^m \frac{1}{\mu_i} \prod_{k=i}^{m-1} \frac{\mu_k}{\lambda_k} \quad \text{при } n = 1, 2, \dots, m-1; \quad (37)$$

$$\theta = \frac{1}{\lambda_m} \quad \text{при } n = m; \quad (38)$$

$$\tau = \frac{1}{\mu_0} \quad \text{при } n = 1; \quad (39)$$

$$\tau = \frac{1}{\mu_0} \prod_{k=1}^{n-1} \frac{\lambda_k}{\mu_k} + \sum_{i=1}^{n-1} \frac{1}{\lambda_i} \prod_{k=i}^{n-1} \frac{\lambda_k}{\mu_k} \quad \text{при } n = 2, 3, \dots, m. \quad (40)$$

В некоторых случаях целесообразно определять частоту ν_0 . Для этого решается уравнение (8) после подстановки в него (32) — (34). В результате получается

$$\nu_0^{-1} = \frac{1}{\mu_0} + \frac{1}{\lambda_1} + \sum_{i=2}^m \frac{1}{\lambda_i} \prod_{k=1}^{i-1} \frac{\mu_k}{\lambda_k}. \quad (41)$$

Изложенный метод может быть применен для анализа надежности систем, в которых используются различные типы избыточности, например постоянное резервирование, резервирование замещением, мажоритарная избыточность.

Институт автоматики и электрометрии
Сибирского отделения АН СССР,
Новосибирск

Поступила в редакцию
23/II 1965

ЛИТЕРАТУРА

1. S. G. Kneale. Reliability of parallel systems with repair and switching. Proceedings of the 7-th National Symposium on Reliability and Quality Control, 1961.
2. K. M. Hall, K. M. Zenkere. The reliability of systems under random demands Western Electronic Show and Convention, Los Angeles, 1962, August 21—24.
3. J. G. Kemeny, J. L. Shell. Finite Markow Chains. Princeton, 1959.

А. А. МОЛЧАНОВ, С. М. МАЗУР

СТАЦИОНАРНЫЙ РЕЖИМ РАБОТЫ СПЕКТРОТРОНА С УПРАВЛЯЕМОЙ ЕМКОСТЬЮ $p-n$ -ПЕРЕХОДА

С целью улучшения основных показателей спусковых устройств (вес, габариты, экономичность, стоимость), широко используемых в вычислительной технике, большое внимание уделяется исследованию возможностей построения многоустойчивых элементов, число состояний которых не зависит от сложности схемы и определяется ее параметрами и режимом работы [1, 2]. В работах [2, 3] рассмотрены частотно-гармонические многоустойчивые элементы — спектротроны — с внешней обратной связью, основанные на использовании преобразования амплитудно-частотных характеристик в амплитудные характеристики гребенчатого вида.

С другой стороны, можно создавать спусковые устройства с многими устойчивыми состояниями, используя внутреннюю обратную связь, имеющуюся в нелинейном колебательном контуре с управляемой реактивностью [4]. При этом схема многоустойчивого элемента становится предельно простой.

В настоящей статье дается анализ стационарного режима работы спектротрона, представляющего собой нелинейный последовательно-параллельный контур (ППК) с управляемой емкостью $p-n$ -перехода полупроводникового прибора и внутренней обратной связью по напряжению. Исследуются резонансные свойства ППК, выводятся аналитические выражения для резонансной кривой спектротрона и координат состояний равновесия, находятся области существования устойчивых состояний равновесия.

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Один из вариантов схемы спектротрона с управляемой емкостью $p-n$ -перехода [4] представлен на рис. 1. Напряжение питания $U_r(t)$ с заданным линейчатым спектром через корректирующий конденсатор C_1 подается на параллельный колебательный контур, составленный из индуктивности L в одной ветви; конденсатора C_ϕ и полупроводникового диода D с нелинейной управляемой емкостью C_k — в другой. Устойчивые состояния спектротрона характеризуются динамическим признаком — частотой гармонических колебаний контура и статическим — напряжением смещения U_D , прикладываемым к $p-n$ -переходу. Несмотря на простоту, схема содержит все элементы основной блок-схемы спектротрона [3]. Диод D выполняет функции детектора и управляемой емкости. В любом из устойчивых состояний емкость фильтра C_ϕ подзаряжается через диод, обеспечивая необходимое смещение, а следовательно, и определенную величину емкости C_k , соответствующую состоянию, в котором находится элемент. Действие внутренней обратной связи объясняется следующим образом. При попадании в полосу пропускания кон-

тура одной из гармоник спектра напряжения $U_r(t)$ амплитуда колебаний напряжения на контуре U_k возрастает, а диод D начинает работать в вентильном режиме, обеспечивая детектирование колебаний. В результате емкость фильтра C_ϕ заряжается и на $p-n$ -переходе появляется и нарастает напряжение смещения U_D , что вызывает соответствующее изменение емкости C_k , а следовательно, и собственной частоты $\omega_k = 2\pi f_k$ контура. Это, в свою очередь, приводит к изменению амплитуды U_k и напряжения U_D . Добротность контура остается высокой благодаря малому углу отсечки днода.

И, наконец, за счет нелинейных и параметрических явлений в контуре наблюдается эффект усиления, обеспечивающий достаточную глубину обратной связи. Поскольку в задачу настоящей работы не входило исследование спектротрона в режиме параметрического возбуждения, полагаем, что параметры нелинейного контура выбраны так, что возможность параметрического резонанса исключена. Считаем, что в схеме имеет место только главный резонанс.

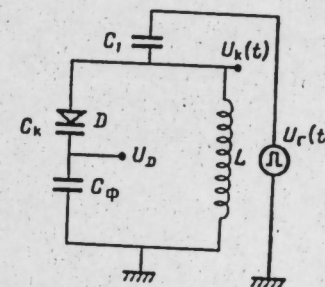


Рис. 1.

РЕЗОНАНСНЫЕ СВОЙСТВА ППК

Рассматриваемая схема (рис. 1) представляет собой неавтономную систему и описывается нелинейным дифференциальным уравнением третьего порядка. В связи с этим анализ реальной схемы ППК связан со значительными математическими трудностями и встает вопрос об ее идеализации. Полагаем, что в стационарном режиме напряжение U_D на емкости фильтра за период колебаний не изменяется и обуславливает постоянную составляющую емкости $C_k = C_2 = \text{const}$. При этом диод в течение периода колебаний не открывается и работает в режиме нелинейной емкости. Учитывая сделанные предположения, пренебрегаем цепью автосмещения и заменяем ее источником постоянного смещения $U_D = E_{cm} = \text{const}$, осуществляющим полное запирающее днода. Пусть также $U_r(t) = U_r \sin \omega t$.

Тогда схема ППК принимает вид, представленный на рис. 2, а, где R_i — внутреннее сопротивление генератора, R — сопротивление активных потерь в контуре. Полное сопротивление контура в комплексной форме

$$\bar{Z} = \frac{1}{j\omega C_1} + \frac{R}{(1 - \omega^2 C_2 L)^2 + \omega^2 C_2^2 R^2} + R_i + j\omega \frac{L(1 - L\omega^2 C_2) - R^2 C_2}{(1 - \omega^2 L C_2)^2 + \omega^2 C_2^2 R^2}.$$

Введя обозначения

$$R_s = \frac{R}{(1 - \omega^2 C_2 L)^2 + \omega^2 C_2^2 R^2} + R_i,$$

$$L_s = \frac{L(1 - L\omega^2 C_2) - R^2 C_2}{(1 - \omega^2 L C_2)^2 + \omega^2 C_2^2 R^2},$$

$$C_s = C_1,$$

переходим к эквивалентной схеме последовательного контура (рис. 2, б). Учитывая неравенство $\frac{R}{(1 - \omega^2 C_2 L)^2 + \omega^2 C_2^2 R^2} \gg R_i$, в дальнейшем величиной R_i пренебрегаем. Сопротивление активных потерь R определяем из выражения $R = \frac{\omega_k L}{Q}$, где ω_k и Q — соответственно резонансная частота и добротность параллельного контура LC_k . Полагая для примера $Q = 100$, $f_k = 260$ кГц, $L = 10^{-3}$ гн, получаем $R = 16$ ом.

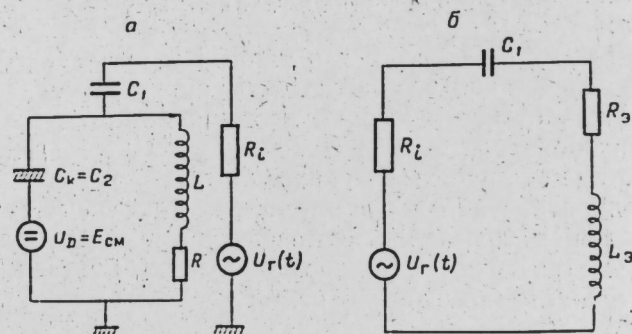


Рис. 2.

Установим функциональную зависимость между резонансной частотой $\omega_p = 2\pi f_p$ эквивалентного последовательного контура и входной емкостью C_1 . Из условия резонанса $\omega_p^2 L_3 C_1 = 1$ находим

$$\omega_p = \sqrt{-\frac{R^2}{2L^2} + \frac{1}{LC_2} - \frac{C_1}{2LC_2(C_1 + C_2)}} \cdot \frac{\sqrt{C_1^2(L - R^2C_2)^2 + 2C_1R^2C_2^2(C_2R^2 - 3L) + C_2^3R^2(R^2C_2 - 4L)}}{2L^2C_2(C_1 + C_2)}. \quad (1)$$

В последней формуле перед первым радикалом ставится знак «плюс», так как $\omega_p > 0$, а перед вторым — «минус», что соответствует условию

$\omega_p = \sqrt{\frac{1}{L(C_1 + C_2)}}$ при $R=0$. Из формулы (1) следует, что ω_p будет вещественной величиной, если емкость C_1 изменяется в пределах

$$C_{1 \min} \leq C_1 \leq C_{1 \max}, \quad (2)$$

где

$$C_{1 \min} = \frac{3C_2^2 R^2}{L} + \frac{2C_2 R}{L} \sqrt{C_2 L}, \quad C_{1 \max} = \frac{2L - R^2 C_2}{R^2}.$$

При

$$C_2 = 360 \cdot 10^{-12} \text{ ф}, \quad Q = 100, \quad L = 10^{-3} \text{ гн}, \quad R = 16 \text{ ом}$$

$$C_{1 \min} = 7,1 \cdot 10^{-12} \text{ ф}, \quad C_{1 \max} = 7,8 \cdot 10^{-6} \text{ ф}.$$

На рис. 3 представлен график зависимости f_p от C_1 при фиксированных значениях остальных параметров схемы ($L = 10^{-3}$ гн, $Q = 100$).

$f_k = 260$ кГц, $R = 16$, $C_2 = 360$ пф). Из рисунка видно, что при определенных значениях емкости C_1 частота f_p становится близкой по величине к частоте f_k параллельного контура LC_k . Очевидно, резонанс напряжения в эквивалентном последовательном контуре обуславливает трансформацию напряжения, имеющую место в параллельном контуре; для этого необходимо только, чтобы резонансная частота ω_p попадала в полосу пропускания параллельного контура $2\Delta\omega_k$. Для значений параметров, приведенных выше, полоса пропускания параллельного контура LC_k равна $2\Delta f_k = \frac{f_k}{Q} \approx 2,6$ кГц. На рис. 3 выделена область значений C_1 (10,8—21 пф), при которых резонансная частота эквивалентного последовательного контура лежит внутри полосы пропускания параллельного контура.

Проследим зависимость добротности эквивалентного последовательного контура Q_3 от входной емкости C_1 . Функциональная связь между Q_3 и C_1 определяется выражением

$$Q_3 = \frac{\sqrt{[L(1 - L\omega_p^2 C_2) - R^2 C_2][(1 - \omega_p^2 C_2 L)^2 + \omega_p^2 C_2^2 R^2]}}{R\sqrt{C_1}}. \quad (3)$$

На рис. 4 отмечен интервал изменения добротности Q_3 для значений частоты ω_p , попавших в полосу пропускания $2\Delta\omega_k$ параллельного контура LC_2 . Из графика видно, что добротность Q_3 в отмеченном интервале значений C_1 изменяется незначительно, откуда следует, что всем значениям резонансной частоты ω_p , попавшим в полосу пропускания контура LC_k , может соответствовать одно среднее значение добротности $Q_3 = Q_{3 \text{ ср}}$.

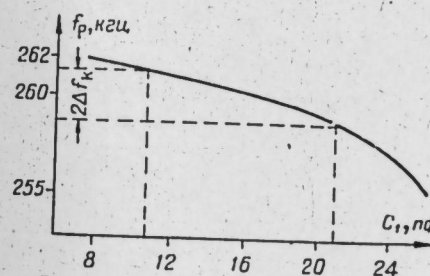


Рис. 3.

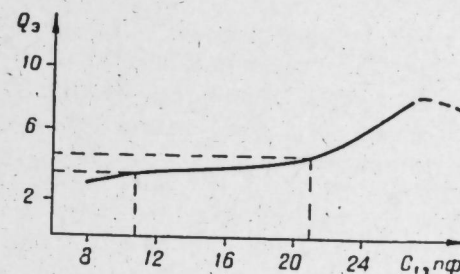


Рис. 4.

Воспользовавшись очевидным равенством $U_k = \sqrt{U_{L_3}^2 + U_{R_3}^2}$, где U_k — напряжение, снимаемое с индуктивности L , U_{L_3} — напряжение на L_3 , U_{R_3} — напряжение на R_3 , устанавливаем связь между напряжением U_k и добротностью Q_3 . Учитывая, что при резонансе в последовательном контуре $U_{L_3} = Q_3 U_r$, $U_{R_3} = U_r$, последнее выражение приводим к виду

$$U_k = U_r \sqrt{Q_3^2 + 1}, \quad (4)$$

где U_r — амплитуда напряжения $U_r(t)$.

Из формулы (4) следует, что напряжение U_k увеличивается за счет резонанса в эквивалентном последовательном контуре в $\sqrt{Q_3^2 + 1}$ раз.

Величину $K_{тр} = \sqrt{Q_0^2 + 1}$ назовем коэффициентом трансформации напряжения U_k . Если схема ППК работает в режиме многоустойчивого элемента, то коэффициент трансформации можно найти отдельно для каждого из устойчивых состояний. Например, для устойчивого состояния спектрофона с частотой $f_k = 260$ кГц получаем $K_{тр} \approx 4,12$.

РЕЗОНАНСНАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА СПЕКТРОФОНА. ОБЛАСТИ СУЩЕСТВОВАНИЯ УСТОЙЧИВЫХ СОСТОЯНИЙ

Найдем приближенную многорезонансную статическую зависимость $U_k = f(U_D)$. Пусть схема, представленная на рис. 1, питается от генератора напряжения с линейчатым спектром

$$U_r(t) = \sum_{i=1}^n U_i \sin i \omega_1 t, \quad (5)$$

где U_i — амплитуда i -й гармоники спектра, ω_1 — частота первой гармоники. Напряжение высокой частоты $U_k(t)$, снимаемое с индуктивности L , детектируется диодом D , работающим как «линейный» однопериодный детектор. Тогда для амплитуды U_k с учетом (5) имеем

$$U_k = \sum_{i=1}^n \frac{U_i K_{пк} K_{тр}}{\sqrt{1 + Q_i^2 \left(1 - \frac{\omega_k^2}{\omega_i^2}\right)^2}}, \quad (6)$$

где Q_i — добротность контура на частоте $i \omega_1$, $K_{пк}$ — резонансный коэффициент передачи контура. В свою очередь, амплитуда U_k есть функция напряжения смещения U_D : $U_k = f(U_D)$. Действительно, частота ω_k при выполнении неравенства $C_\phi \gg C_k$ связана с емкостью C_k [соотношением

$$\omega_k = \frac{1}{\sqrt{L C_k}}, \quad C_k = C_{k0} \sqrt{\frac{\varphi_k}{U_D + \varphi_k}}, \quad (7)$$

где φ_k — контактная разность потенциалов p — n -перехода, C_{k0} — емкость p — n -перехода при $U_D = 0$. С учетом (7) получаем (рис. 5)

$$U_k = \sum_{i=1}^n \frac{U_i K_{пк} K_{тр}}{\sqrt{1 + Q_i^2 \left(1 - \frac{\sqrt{\varphi_k + U_D}}{\sqrt{\varphi_k}}\right)^2}} = f(U_D). \quad (8)$$

Назовем кривую гребенчатого вида, представленную на рис. 5, резонансной характеристикой спектрофона. В точках равновесия выполняется приближенное равенство $U_D \approx k_d U_k$, где k_d — коэффициент передачи детектора. При графическом решении системы уравнений (8), (9) корни, соответствующие состояниям равновесия схемы, определяются точками пересечения кривой $U_k = f(U_D)$ с прямой $U_k = \frac{1}{k_d} U_D$. Число состояний определяется количеством корней системы (8), (9) и

зависит от вида резонансной характеристики спектрофона. Из известных теорем Ляпунова об устойчивости следует, что в точках устойчивого равновесия выполняется неравенство

$$\frac{df(U_D)}{d\omega_k} \cdot \frac{d\omega_k}{dC_k} \cdot \frac{dC_k}{dU_D} < \frac{1}{k_d},$$

а в неустойчивых точках —

$$\frac{df(U_D)}{d\omega_k} \cdot \frac{d\omega_k}{dC_k} \cdot \frac{dC_k}{dU_D} \geq \frac{1}{k_d}.$$

Величина $\frac{df(U_D)}{d\omega_k}$ определяет вид резонансной характеристики спектрофона; $\frac{dC_k}{dU_D}$ — коэффициент нелинейности, характеризующий зави-

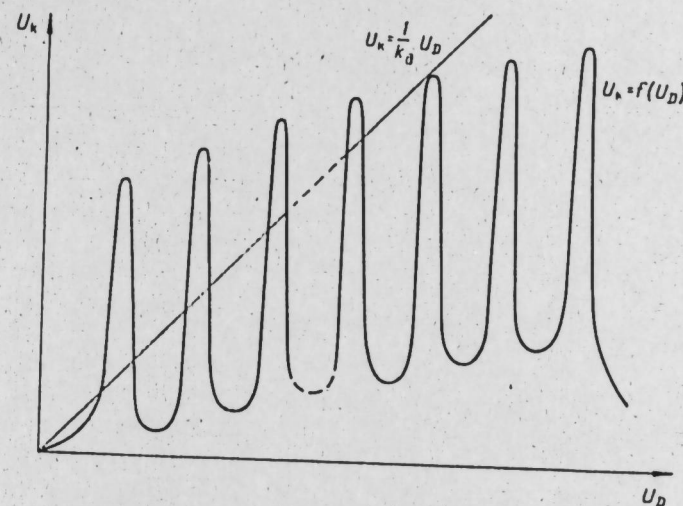


Рис. 5.

симость емкости p — n -перехода от напряжения U_D . Нахождение координат состояния равновесия аналитическим способом в общем случае связано со значительными математическими трудностями. Однако зачастую, когда расстояние между соседними составляющими спектра питающего напряжения ($\Delta \omega_{сп}$) значительно превышает полосу пропускания контура $2\Delta \omega_k$ (например, случай высокой добротности контура LC_k), при настройке контура на любую составляющую спектра питания влиянием соседних составляющих можно пренебречь. В этом случае представляется возможным рассматривать каждый всплеск резонансной характеристики отдельно и разбить уравнение (8) на ряд независимых уравнений вида

$$U_k \approx \frac{U_i K_{пк} K_{тр}}{\sqrt{1 + Q_i^2 \left(1 - \frac{\sqrt{\varphi_k + U_D}}{\sqrt{\varphi_k}}\right)^2}}, \quad (10)$$

где U_D^* — напряжение смещения, при котором контур настроен в резонанс с частотой $i\omega_1$, определяется из равенства

$$1 = \frac{1}{(i\omega_1)^2 L C_{k0}} \cdot \sqrt{\frac{U_D^* + \varphi_k}{\varphi_k}}$$

и равно

$$U_D^* = [(i\omega_1)^4 L^2 C_{k0}^2 - 1] \varphi_k.$$

Вводя обозначения $U_D + \varphi_k = V$, $U_D^* + \varphi_k = V^*$, запишем выражение (10) в более удобной форме:

$$U_k = \frac{U_i K_{пк} K_{тр}}{\sqrt{1 + Q_i^2 \left(1 - \sqrt{\frac{V}{V^*}}\right)^2}} \approx \frac{U_i K_{пк} K_{тр}}{\sqrt{1 + Q_i^2 \left(\frac{\Delta U_D}{2V^*}\right)^2}}, \quad (11)$$

где

$$\Delta U_D = U_D - U_D^*.$$

Графическое решение упрощенной системы (9), (10) представлено на рис. 6. При наличии трех точек пересечения кривой (10) с прямой (9) система имеет три корня, из которых U_{D1} , U_{D2} соответствуют устойчивым состояниям равновесия, U_{D3} — неустойчивому (рис. 6, кривая 1).

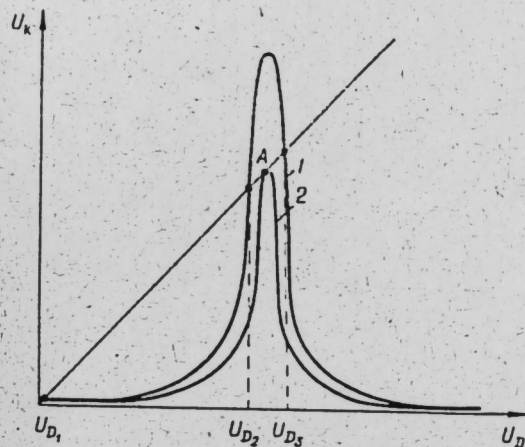


Рис. 6.

Выясним условия, при которых спектрофон в рассматриваемом случае имеет одно или два устойчивых состояния. Очевидно, одно состояние устойчивого равновесия существует практически всегда; это состояние с координатой $U_D = U_{D1}$ (рис. 6).

Второе устойчивое состояние пропадает, как только в результате изменения формы резонансная кривая $U_k = f(U_D)$ (рис. 6, кривая 2) будет касаться прямой (9) в единственной точке (точка A). В этом случае происходит

слияние двух состояний равновесия $U_D = U_{D2}$ и $U_D = U_{D3}$. При $k_0 \approx 1$ в точке касания выполняется приближенное равенство

$$\frac{df(U_D)}{dU_D} \approx 1. \quad (12)$$

Дифференцируя выражение (11) с учетом (12) и полагая добротность контура достаточно высокой, получаем приближенное уравнение второго порядка относительно ΔU_D :

$$(\Delta U_D)^2 + K_i \Delta U_D + \frac{1}{Q_i^2} (2V^*)^2 = 0, \quad (13)$$

где

$$K_i = K_{пк} K_{тр} U_i. \quad \text{Корни этого уравнения:}$$

$$(\Delta U_D)_{1,2} = -\frac{1}{2} K_i \pm \sqrt{\frac{1}{4} K_i^2 - \frac{1}{Q_i^2} (2V^*)^2}. \quad (14)$$

Первый корень $\Delta U_D = (\Delta U_D)_1$ есть разность между абсциссами максимума рассматриваемого всплеска резонансной характеристики и точки касания (точка A) прямой (9) и кривой (10). Для определения условия существования двух устойчивых состояний рассмотрим первый корень $\Delta U_D = (\Delta U_D)_1$. Подставляя значение U_D , найденное с помощью формулы (14), в (10) и учитывая равенство (9), получаем приближенное выражение (при $k_0 \approx 1$):

$$U_{i \min} (K_{пк} K_{тр}) = \frac{3}{4} U_D^* + \sqrt{\frac{1}{16} U_D^{*2} - \frac{2(U_D^* + \varphi_k)^2}{Q_i^2}},$$

где $U_{i \min}$ — минимальное значение напряжения i -й гармоники спектра, соответствующей рассматриваемому всплеску резонансной характеристики, при котором еще возможно существование двух равновесных состояний. При $U_i > U_{i \min}$ существуют два устойчивых состояния; при $U_i \geq U_{i \min}$ — только одно устойчивое состояние.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ КООРДИНАТ СОСТОЯНИЙ РАВНОВЕСИЯ

Определение координат состояний равновесия спектрофона связано со строгим решением уравнений (9) и (10), которые сводятся к алгебраическому уравнению шестого порядка:

$$U_D^6 \frac{\omega_0^8}{\omega_i^8} \cdot \frac{1}{\varphi_k^2} + U_D^5 \frac{2}{\varphi_k} \frac{\omega_0^4}{\omega_i^4} \left(\frac{\omega_0^4}{\omega_i^4} - 1 \right) + U_D^4 \left(1 - \frac{\omega_0^4}{\omega_i^4} \right)^2 - \\ - U_D^3 \frac{2}{\varphi_k} \frac{K_i^2}{Q_i^2} \cdot \frac{\omega_0^4}{\omega_i^4} - U_D^2 \frac{2K_i^2}{Q_i^2} \left(1 - \frac{\omega_0^4}{\omega_i^4} \right) + \frac{K_i^4}{Q_i^4} = 0, \quad (15)$$

где

$$K_i = U_i K_{пк} K_{тр} k_0, \quad \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC_{k0}}}, \quad \omega_i = i\omega_1.$$

Пренебрегая в уравнении (15) малыми членами, после несложных преобразований относительно U_D , переходим к приближенному уравнению второго порядка

$$U_D^2 + 2U_D \varphi_k \left(1 - \frac{\omega_i^4}{\omega_0^4} \right) + \varphi_k^2 \left(\frac{\omega_i^4}{\omega_0^4} - 1 \right)^2 - 2 \frac{K_i^2}{Q_i^2} \frac{\omega_i^4}{\omega_0^4} \left(\frac{\omega_i^4}{\omega_0^4} + 1 \right) = 0,$$

имеющему два корня:

$$U_{D_{2,3}} = \varphi_k \left(\frac{\omega_i^4}{\omega_0^4} - 1 \right) \mp \sqrt{2 \frac{K_i^2}{Q_i^2} \frac{\omega_i^4}{\omega_0^4} \left(\frac{\omega_i}{\omega_0} + 1 \right)}. \quad (16)$$

Значительное снижение порядка исходного уравнения (15) приводит к потере корня $U_D = U_{D_1}$, малого по сравнению с величинами корней $U_D = U_{D_2}$ и $U_D = U_{D_3}$. Очевидно, в рассматриваемом частном случае можно считать, что $U_{D_1} \approx 0$. Однако следует отметить, что практически при высокой добротности контура формула (16) позволяет с достаточной точностью определить координату устойчивого состояния. Меняя i от 1 до n (n — число устойчивых состояний), последовательно находим координаты всех состояний равновесия.

В табл. 1 приведены соответствующие устойчивым состояниям частоты колебаний контура и напряжения (U_D) на емкости фильтра для 10 состояний спектрофона с управляемой емкостью p — n -перехода, выполненного по схеме рис. 1, при различных значениях амплитуды питающего напряжения. Питание контура осуществлялось последовательными прямоугольными импульсами с частотой следования $f_{cl} = 4$ кГц, длительностью $\tau = 5$ мксек.

Таблица 1

№	f_i , кГц	$U_{имп}$, в	20	21	22	23	24	25
1	236	0,41	0,42	0,42	0,43	0,43	0,44	
2	240	0,53	0,53	0,54	0,54	0,55	0,55	
3	244	0,65	0,66	0,66	0,67	0,67	0,68	
4	248	0,78	0,79	0,79	0,80	0,80	0,80	
5	252	0,92	0,93	0,93	0,94	0,94	0,94	
6	256	1,07	1,07	1,08	1,09	1,09	1,10	
7	260	1,23	1,24	1,24	1,25	1,25	1,25	
8	264	1,40	1,41	1,41	1,42	1,42	1,43	
9	268	1,65	1,66	1,66	1,67	1,67	1,70	
10	272	1,84	1,85	1,85	1,86	1,87	1,89	

Параметры спектрофона имели величины $Q = 100$, $\Delta f_{cl} = 4$ кГц, $C_{к0} = 630$ пф, $L = 1$ мГн, $C_{ф} = 30\,000$ пф, $C_1 = 18$ пф. Как видно из таблицы, увеличение амплитуды подаваемых на контур прямоугольных импульсов на 25% вызывает изменение напряжения U_D на $4 \div 5\%$. Степень влияния вариации питающего напряжения значительно зависит от добротности контура и уменьшается при увеличении последней. Повышение добротности Q до 120 позволило уменьшить изменение напряжения U_D до $1,5 \div 2\%$ при прежней величине вариации питающего напряжения. В табл. 2 даны величины напряжений U_{D_i} , найденных по формуле (16), а также их относительные (δ) и абсолютные (ΔU_{D_i}) погрешности для случая питания контура последовательными прямоугольными импульсами с амплитудой $U_r = 25$ в. Как видно из таблицы, при высокой добротности контура ($Q = 100$) точность теоретических расчетов удовлетворительна. Очевидно, с ростом числа устойчивых состояний при постоянном диапазоне перестройки контура и с уменьшением добротности Q погрешность теоретических формул значительно возрастает.

Таблица 2

№	f_i , кГц	U_{D_i} , в, теор.	U_{D_i} , в, эксперим.	ΔU_{D_i} , в	δ , %
1	236	0,46	0,44	0,02	4,5
2	240	0,60	0,55	0,05	9
3	244	0,72	0,68	0,04	6
4	248	0,81	0,80	0,01	1,3
5	252	0,918	0,94	0,022	2,3
6	256	1,02	1,10	0,08	7
7	260	1,11	1,25	0,14	11
8	264	1,21	1,43	0,22	15
9	268	1,34	1,70	0,36	21
10	272	1,45	1,89	0,44	22

ВЫВОДЫ

1. Исследование резонансных свойств спектрофона с управляемой емкостью p — n -перехода (рис. 1) при изложенных выше условиях можно проводить исходя из рассмотрения идеализированной схемы (рис. 2, б). Резонанс напряжений в эквивалентном последовательном контуре обуславливает трансформацию напряжения в параллельном контуре LC_k .

2. Предположение относительно высокой добротности контура позволяет рассматривать отдельно каждый всплеск резонансной характеристики и облегчает математические выкладки при аналитическом определении области устойчивости состояний равновесия и их координат.

3. Коэффициент трансформации $K_{тр}$, введенный выше, целиком характеризует усиление напряжения $U_k(t)$ только при отсутствии параметрического возбуждения спектрофона. В случае возникновения такого возбуждения природа усиления носит более сложный характер.

Институт математики с вычислительным центром
Сибирского отделения АН СССР,
Новосибирск

Поступила в редакцию
14/X 1964

ЛИТЕРАТУРА

1. В. П. Сигорский, Л. С. Ситников, Л. Л. Утяков. Синтез элементов со многими устойчивыми состояниями на основе нелинейного четырехполюсника с немонотонной амплитудной характеристикой. — Докл. АН СССР, 1964, № 6.
2. В. П. Сигорский, Л. С. Ситников, Л. Л. Утяков. Спектрофон. — Решение № 766058/26—24 о выдаче авторского свидетельства от 26 февраля 1962 г.
3. А. А. Молчанов. Исследование динамического режима частотно-гармонического многоустойчивого элемента — спектрофона. — Автоматика и телемеханика, 1965, № 8.
4. А. П. Вишневский, В. П. Сигорский, Л. С. Ситников, Л. Л. Утяков. Спектрофон без активных элементов. — Решение № 800479/26—24 о выдаче авторского свидетельства от 17 января 1963 г.

Г. С. ЗИНОВЬЕВ

ОСНОВНЫЕ СООТНОШЕНИЯ ДЛЯ ВЕНТИЛЬНЫХ ПРЕОБРАЗОВАТЕЛЕЙ ЧАСТОТЫ ПО ОГИБАЮЩЕЙ С НЕПОСРЕДСТВЕННОЙ СВЯЗЬЮ

(ПОСТОЯННЫЙ УГОЛ РЕГУЛИРОВАНИЯ)

Многие области техники, и в первую очередь регулируемый электропривод переменного тока, требуют создания преобразователей, выходную частоту и напряжение которых можно менять в широких пределах. При этом должна обеспечиваться двухсторонняя передача энергии через преобразователь для возможности рекуперации энергии из нагрузки. Этим требованиям в полной мере удовлетворяют вентильные преобразователи частоты по огибающей с непосредственной связью [1, 2], анализу которых и посвящена данная статья.

В работах [3—5] установлены основные соотношения между напряжениями и токами преобразователей частоты с непосредственной связью (с постоянным углом регулирования) для частного случая преобразования трехфазного тока 50 гц в однофазный ток $16\frac{2}{3}$ гц. При этом рассматриваются случаи бесконечно большого числа фаз на вторичной стороне питающего трансформатора, что не дает возможности оценить влияние конечности числа фаз питающей сети на основные соотношения. В данной работе установлены расчетные соотношения для преобразователей, питающихся от однофазной или трехфазной сети, при этом число вторичных фаз трансформатора практически может быть любым. Выходная система напряжений принята трехфазной как наиболее распространенная (для питания трехфазных двигателей переменного тока), соотношения для однофазного выхода получаются как промежуточные. Вначале установлены зависимости между токами и напряжениями для преобразователей с прямоугольной формой кривой выходного напряжения (постоянный угол регулирования). Во второй части найдены эти соотношения и для преобразователей с переменным углом регулирования.

В силовой схеме преобразователей (рис. 1) имеется связь нулевой точки нагрузки и питающей сети, что позволяет считать работу фаз на выходе независимой одна от другой.

При выводе соотношений приняты допущения, позволяющие получить более простые выражения для искомых величин с практически приемлемой точностью. Питающая сеть считается источником бесконечно большой мощности, коммутация предполагается мгновенной, сопротивления элементов схемы преобразователя (трансформатора, вентилей) принимаются равными нулю, намагничивающий ток трансформатора отсутствует, выходной ток преобразователя непрерывен.

В работе использованы следующие условные обозначения:

u, e, i — мгновенные значения напряжений, э. д. с. и токов соответственно;
 U, E, I — действующие значения указанных величин;
 u_m, e_m, i_m — амплитудные значения;
 m — число фаз;

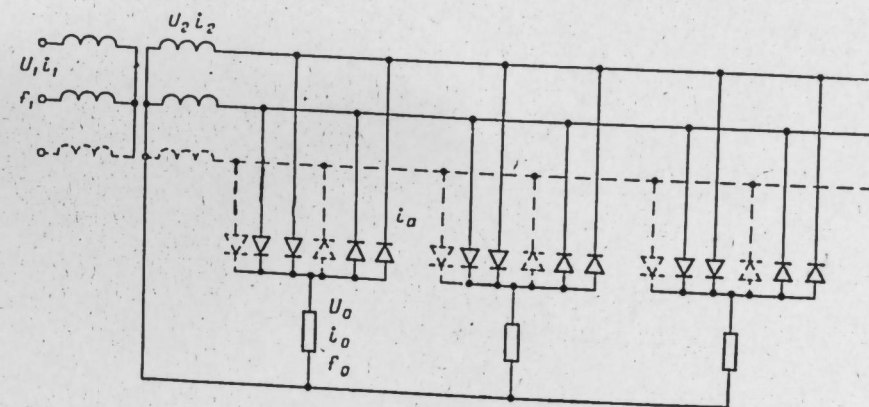


Рис. 1. Принципиальная схема преобразователя частоты с непосредственной связью по огибающей.

индексы 1, 2, 0 относятся соответственно к первичным и вторичным обмоткам трансформатора и к выходным величинам преобразователя (например, U_0 — действующее значение выходного напряжения преобразователя);
 n — отношение частоты питающей сети к преобразованной частоте (целое число);
 2π — период выходной частоты;
 l — текущий номер полуволны синусоиды питающей сети, входящей в преобразованное напряжение;
 r — число полуволн синусоид питающей сети в полупериоде выходной частоты преобразователя;
 α — угол регулирования;
 k — номер гармоники ряда Фурье ($k=1, 2, 3, \dots$);
 γ — коэффициент искажения;
 χ — коэффициент мощности;
 $\varphi_{(1)}$ — угол сдвига между током и напряжением (по первой гармонике);
 $R, \omega L, Z$ — активное, индуктивное и полное сопротивления;
 S, Q, P — полная, реактивная и активная мощности.

СООТНОШЕНИЯ МЕЖДУ НАПЯЖЕНИЯМИ В ПРЕОБРАЗОВАТЕЛЕ

Форма выходного напряжения (низкой частоты) преобразователя при трехфазной питающей сети для угла регулирования $\alpha=0$ показана на рис. 2, а. Гармонический анализ этой и всех остальных кривых напряжения для преобразователя с непосредственной связью с постоянным углом регулирования сделан в работе [6]. При m_2 -фазной ($m_2 \geq 2$) системе вторичных обмоток трансформатора питающей сети и отношении частоты питания к выходной частоте, равному n , выражение для амплитуд гармоник низкочастотного напряжения $u_{0(2k-1)}$ имеет вид

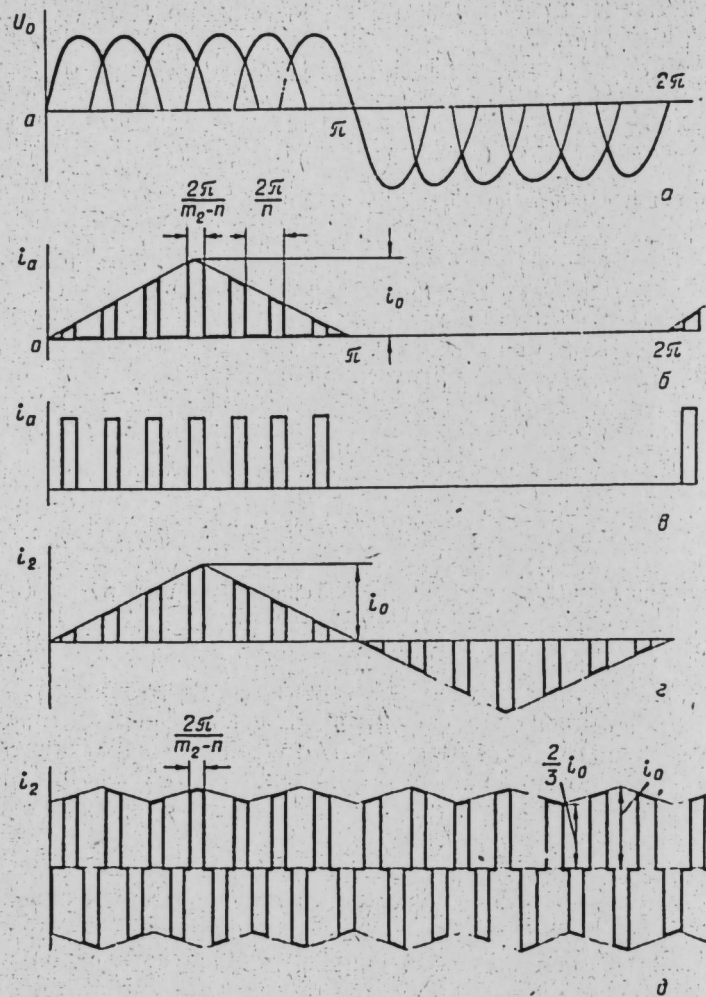


Рис. 2. Формы напряжения и токов в преобразователе.
а) Выходное напряжение, б) анодный ток при индуктивной нагрузке, в) анодный ток при активной нагрузке, г) вторичный ток трансформатора при однофазном выходном напряжении преобразователя, работающего на индуктивную нагрузку, д) вторичный ток трансформатора при трехфазной системе выходного напряжения.

для $n \neq 2k - 1$:

$$U_{0(2k-1)} \approx \frac{2\sqrt{2} U_2 \cdot \sin r \frac{2k-1}{n} \frac{\pi}{m_2}}{\pi \cdot \sin \frac{2k-1}{n} \frac{\pi}{m_2}} \times$$

$$\times \left\{ \frac{\cos \left[(n-2k+1)x_1 + \frac{\pi}{m_2} - r \frac{2k-1}{n} \frac{\pi}{m_2} \right] \sin \frac{n-2k+1}{n} \frac{\pi}{m_2}}{n - (2k-1)} - \right.$$

$$\left. - \sin \frac{n+2k-1}{n} \frac{\pi}{m_2} \frac{\cos \left[(n+2k-1)x_1 + \frac{\pi}{m_2} - r \frac{2k-1}{n} \frac{\pi}{m_2} \right]}{n + (2k-1)} \right\} \quad (1a)$$

и для $n = 2k - 1$:

$$U_{0(2k-1)} \approx \frac{2\sqrt{2} U_2}{\pi} \cdot \frac{2k-1}{n} \sin \left(\frac{2k-1}{n} \frac{\pi}{m_2} \right) \times$$

$$\times \cos \left(r - 1 \right) \frac{2k-1}{n} \frac{\pi}{m_2} + \sin \left(\frac{2k-1}{n} \frac{\pi}{m_2} \right) \times$$

$$\times \sin \left(r + 1 \right) \frac{2k-1}{n} \frac{\pi}{m_2} \cdot \cos \left[2x_1 (2k-1) - r \frac{2k-1}{n} \frac{\pi}{m_2} \right] \quad (1b)$$

где

$$x_1 = \frac{m_2 - 2}{2n \cdot m_2} \pi, \quad r = \frac{m_2 (n-1) + 2}{2}.$$

Формула (1) может быть упрощена путем нахождения ее предела для $n \rightarrow \infty$

$$\bar{U}_{0(2k-1)} = \lim_{n \rightarrow \infty} U_{0(2k-1)} = \frac{4}{\pi} \frac{\sqrt{2} U_2}{2k-1} \cdot \frac{m_2}{\pi} \cdot \sin \frac{\pi}{m_2}. \quad (2)$$

При этом, как показано в [6], выражением (2) можно пользоваться, начиная с $n \approx 10$, что практически часто имеет место. При наличии угла регулирования α в выражении (2) появляется еще множитель $\cos \alpha$. Действующее значение выходного напряжения преобразователя при достаточно большом n равно действующему значению напряжения выпрямителя с тем же числом фаз:

$$U_0 = \sqrt{\frac{1}{\frac{2\pi}{m_2}} \int_{-\frac{\pi}{m_2} + \alpha}^{\frac{\pi}{m_2} + \alpha} u_{2M}^2 \cdot \cos^2 x \cdot dx =}$$

$$= \frac{u_{2M}}{\sqrt{2}} \sqrt{1 + \frac{m_2}{2\pi} \cdot \sin \frac{2\pi}{m_2} \cdot \cos 2\alpha}. \quad (3)$$

Тогда коэффициент искажения преобразованного напряжения будет равен (при $\alpha = 0$)

$$v_u = \frac{\bar{U}_{0(1)}}{U_0} = \frac{4m_2 \cdot \sin \frac{\pi}{m_2}}{\pi^2 \sqrt{1 + \frac{m_2}{2\pi} \cdot \sin \frac{2\pi}{m_2}}}. \quad (4)$$

Действующее значение вторичного напряжения трансформатора (фазное) определится из (3):

$$U_2 = \frac{U_0}{\sqrt{1 + \frac{m_2}{2\pi} \cdot \sin \frac{2\pi}{m_2}}} = \frac{\bar{U}_{0(1)} \cdot \pi^2}{4m_2 \cdot \sin \frac{\pi}{m_2}}. \quad (5)$$

При коэффициенте трансформации, равном единице, действующее значение первичного напряжения U_1 равно действующему значению вторичного напряжения. Обратное напряжение на вентилях преобразователя подобно обратному напряжению на вентилях в соответствующей схеме выпрямителя, его максимальное значение равно амплитуде линейного напряжения трансформатора.

СОТНОШЕНИЯ МЕЖДУ ТОКАМИ В ПРЕОБРАЗОВАТЕЛЕ

Выходной ток. Гармонический состав выходного тока преобразователя можно определить, зная величины гармоник выходного напряжения и сопротивление нагрузки для каждой гармоники преобразованного тока. Для случая активно-индуктивной нагрузки (последовательное включение) выражение для амплитуд гармоник тока будет иметь вид

$$i_{0(2k-1)} = \frac{u_{0(2k-1)}}{z_{(2k-1)}} = \frac{u_{0(2k-1)}}{\sqrt{R^2 + (2k-1)^2 \omega_0^2 L^2}} = \frac{u_{0(2k-1)} \cdot \frac{1}{R}}{\sqrt{1 + (2k-1)^2 \operatorname{tg}^2 \varphi_{0(1)}}}, \quad (6)$$

где

$$\operatorname{tg} \varphi_{0(1)} = \frac{\omega_0 L}{R}.$$

Коэффициент искажения преобразованного тока, определяемый как отношение действующего значения первой гармоники тока к действующему значению всего тока,

$$\gamma_I = \frac{I_{0(1)}}{I_0} = \frac{1}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \varphi_{0(1)}} \cdot \sqrt{\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k-1)^2 + (2k-1)^4 \operatorname{tg}^2 \varphi_{0(1)}}}}. \quad (7)$$

Это дает для γ_I значения 0,9; 0,94; 0,98 соответственно при $\varphi_{0(1)}$, равном 0, 10 и 45°. Отсюда следует, что коэффициент искажения выходного тока преобразователя близок к единице только при больших углах сдвига $\varphi_{0(1)}$.

Анодный ток. В связи с зависимостью формы кривой выходного тока преобразователя от характера нагрузки среднее значение анодного тока вентиля также будет меняться в функции вида нагрузки. Поэтому анодный ток вентиля определяется ниже для двух крайних режимов — чисто активной и чисто индуктивной нагрузки, при этом форма тока нагрузки меняется от прямоугольной до треугольной (при сме-

шанной нагрузке форма тока близка к трапецидальной). Предполагая наличие сглаживающего дросселя, можно даже в случае активной нагрузки пренебречь пульсациями тока с частотой питающей сети (при $n \gg 1$). Тогда средние анодные токи вентиля для двух указанных случаев будут равны соответственно (рис. 2, б, в).

$$i_{a\text{cp}} = \frac{i_{0M}}{2m_2} = \frac{\pi}{4\sqrt{2m_2}} I_{0(1)},$$

$$i_{a\text{cp}} = \frac{i_{0M}}{2 \cdot 2m_2} = \frac{\pi^2}{4\sqrt{2m_2}} I_{0(1)}.$$

Отношение максимального анодного тока к его среднему значению будет наибольшим при индуктивной нагрузке

$$\frac{i_{aM}}{i_{a\text{cp}}} = 4m_2.$$

Следует иметь в виду, что из-за малой тепловой инерционности полупроводниковых вентилях на низких частотах выходного напряжения требуется выбор вентилях не по среднему, а по максимальному току.

Вторичный ток. Выходной ток преобразователя складывается из вторичных токов трансформатора, протекающих по обмоткам в последовательности, определяемой порядком чередования фаз питающей сети. Форма кривой вторичного тока зависит от числа фаз на выходе преобразователя, а также от вида нагрузки. На рис. 2, г представлен вторичный ток при однофазном выходном напряжении преобразователя, работающего на индуктивную нагрузку, а на рис. 2, д — при трехфазном выходном напряжении (он образован суммированием трех фазных токов типа тока, показанного на рис. 2, г, с соответствующими фазовыми сдвигами). Действующие значения этих токов соответственно равны ($n \gg 1$)

$$I_2 = \sqrt{\frac{1}{2\pi} \sum_{l=1}^n \int_{(l-1)\frac{2\pi}{n}}^{(l-1)\frac{2\pi}{n} + \frac{2\pi}{n \cdot m_2}} i_2^2 \cdot dx} = \frac{i_{0M}}{\sqrt{2m_2}} = \frac{\pi^2}{8\sqrt{m_2}} I_{0(1)},$$

$$I_2 = \sqrt{\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} i_2^2 dx} = \frac{1,18}{\sqrt{m_2}} i_{0M} = \frac{1,35}{\sqrt{m_2}} I_{0(1)}.$$

Аналогичным построением можно показать, что действующее значение вторичного тока при трехфазной активной нагрузке определится как

$$I_2 = \sqrt{\frac{5}{\pi} \left(\frac{\pi}{m_2} - \sin \frac{2\pi}{m_2} \right)} i_0 = 1,43 \sqrt{\frac{\pi}{m_2} - \sin \frac{2\pi}{m_2}} I_{0(1)}.$$

Первичный ток. Первичные токи трансформатора определяются через вторичные токи с учетом числа фаз и способа соединения обмоток, как и в соответствующих схемах выпрямителей. Для преобразователя с однофазным выходом

$$I_1 = I_2 \text{ для } m_2 = 3,$$

$$I_1 = I_2 \sqrt{2} \text{ для } m_2 = 2, 6,$$

для преобразователя с трехфазным выходом

$$I_1 = I_2 \text{ для } m_2 = 3,$$

$$I_1 = 2I_2 \text{ для } m_2 = 2,$$

$$I_1 = \sqrt{2} I_2 \text{ для } m_2 = 6.$$

СООТНОШЕНИЯ МЕЖДУ МОЩНОСТЯМИ

Непосредственное (на основе баланса) определение связи между составляющими полной мощности на входе и выходе преобразователя в связи с нелинейностью системы невозможно. Единственным прямым соотношением, вытекающим из условия отсутствия активных потерь внутри преобразователя, является равенство активных мощностей на входе преобразователя и в нагрузке, т. е.

$$P_1 = P_0,$$

где P_0 — активная мощность, определяемая за период выходной частоты.

Соотношение между полными мощностями может быть определено путем вычисления этих мощностей через действующие значения соответствующих токов и напряжений. Полная мощность на выходе преобразователя

$$S_0 = m_0 U_0 I_0.$$

Активная мощность на выходе преобразователя (по первым гармоникам)

$$P_{0(1)} = m_0 \cdot U_{0(1)} \cdot I_{0(1)} \cdot \cos \varphi_{0(1)}.$$

Коэффициент мощности на выходе

$$\gamma_{0(1)} = \frac{P_{0(1)}}{S_0} = \frac{U_{0(1)}}{U_0} \cdot \frac{I_{0(1)}}{I_0} \cdot \cos \varphi_{0(1)} = \gamma_{U_0} \cdot \gamma_{I_0} \cdot \cos \varphi_{0(1)}.$$

Аналогично полная мощность на входе преобразователя

$$S_1 = m_1 \cdot U_1 \cdot I_1 = \frac{m_1}{m_0} \cdot \frac{U_1}{U_0} \cdot \frac{I_1}{I_0} m_0 U_0 \cdot I_0 = \frac{m_1}{m_0} \cdot \frac{U_1}{U_0} \cdot \frac{I_1}{I_0} \cdot S_0,$$

и коэффициент мощности на входе (за период выходного напряжения преобразователя)

$$\gamma_{1(1)} = \frac{P_1}{S_1} = \frac{P_0}{S_1} = \frac{m_0}{m_1} \cdot \frac{U_{0(1)}}{U_1} \cdot \frac{I_{0(1)}}{I_1} \cdot \cos \varphi_{0(1)},$$

причем соотношения $\frac{U_{0(1)}}{U_1}$; $\frac{I_{0(1)}}{I_1}$; $\frac{U_1}{U_0}$; $\frac{I_1}{I_0}$ установлены выше для

любого числа фаз питающей сети при одно- и трехфазной системе выходных напряжений преобразователя.

Следует отметить, что определение реактивной мощности в таких нелинейных цепях, какими являются цепи с вентилями, несколько искусственно. Общеизвестная интерпретация реактивной мощности относится к цепям с синусоидальными напряжениями и токами и только формально (без физического представления) используется и для нелинейных цепей. При этом непосредственный расчет реактивных мощностей на входе и выходе преобразователя сильно затруднен, так как требует точного знания гармонического состава токов и напряжений.

В работе [7] даны новые формы определения реактивных мощностей в нелинейных цепях на основе введения дополнительных физических представлений (энергетического ускорения). Ниже установлена связь между суммарными реактивными мощностями на входе и выходе преобразователя частоты. Под суммарной реактивной мощностью понимается эквивалентная мощность вместе взятых реактивной мощности сдвига (обусловленной сдвигом фаз тока и напряжения) и реактивной мощности искажения (обусловленной несинусоидальностью токов и напряжения) [8]. Объединение указанных мощностей, тождественных с точки зрения характеристики использования установленной мощности преобразователя частоты, позволяет получить простые зависимости между этими мощностями в цепях с разными частотами. Вместе с тем раздельное вычисление составляющих суммарной реактивной мощности (реактивной мощности сдвига и мощности искажения) не только сильно затруднено, но и вряд ли целесообразно из-за физической неопределенности понятия реактивной мощности в нелинейной цепи.

Из формулы для $\chi_{1(1)}$ видно, что даже при чисто активной нагрузке преобразователя коэффициент мощности на входе не равен 1, т. е. преобразователь потребляет реактивную мощность искажений из сети из-за несинусоидальности входного тока (этот ток находится в фазе с сетевым напряжением). При наличии реактивности в нагрузке во входной цепи появляется и эквивалентная (за период выходной частоты) реактивная мощность сдвига в связи с чередованием выпрямительного и инверторного режимов работы вентилей. При этом фаза входного тока за период выходной частоты изменяется дважды на противоположную, т. е. ток находится то в фазе с входным напряжением (выпрямительный режим), то в противофазе (инверторный режим) даже при $\alpha = 0$ ($\beta = 180^\circ$). Двойное (по выходной частоте) реверсирование направления потока мощности в первичной сети (при наличии угла сдвига между током и напряжением в нагрузке преобразователя) и является признаком потребления преобразователем из сети реактивной мощности. Это не было учтено Файнбергом при установлении закона о соотношении реактивных мощностей в преобразователях такого типа [5].

Знание связи S_1 , P_1 с S_0 и P_0 позволяет установить в общем виде зависимость между реактивными мощностями на входе и выходе преобразователя. Если обозначить суммарную реактивную мощность на входе преобразователя $Q_{1\sum}$, которая определяется реактивной мощностью сдвига Q_{1c} и мощностью искажения Q_{1m} , как

$$Q_{1\sum} = \sqrt{Q_{1c}^2 + Q_{1m}^2},$$

то можно записать, что

$$Q_{1\sum} = \sqrt{S_1^2 - P_1^2} = \sqrt{\left(\frac{m_1}{m_0} \cdot \frac{U_1}{U_0} \cdot \frac{I_1}{I_0}\right)^2 \cdot S_0^2 - P_0^2}.$$

Аналогично для выходной цепи преобразователя

$$Q_{0\pi} = \sqrt{S_0^2 - P_0^2}.$$

Тогда отношение этих мощностей будет равно

$$\begin{aligned} \frac{Q_{1\pi}}{Q_{0\pi}} &= \sqrt{\frac{\left(\frac{m_1}{m_0} \cdot \frac{U_1}{U_0} \cdot \frac{I_1}{I_0}\right)^2 \cdot S_0^2 - P_0^2}{S_0^2 - P_0^2}} = \\ &= \sqrt{\frac{\left(\frac{m_1}{m_0} \cdot \frac{U_1}{U_0} \cdot \frac{I_1}{I_0}\right)^2 - \left(\frac{P_0}{S_0} \cdot \frac{P_{0(1)}}{P_{0(1)}}\right)^2}{1 - \left(\frac{P_0}{S_0} \cdot \frac{P_{0(1)}}{P_{0(1)}}\right)^2}} = \\ &= \sqrt{\frac{\left(\frac{m_1}{m_0} \cdot \frac{U_1}{U_0} \cdot \frac{I_1}{I_0}\right)^2 - \chi_{0(1)}^2 \left(\sum_{k=1}^{\infty} \frac{U_{0(2k-1)}}{U_{0(1)}} \cdot \frac{I_{0(2k-1)}}{I_{0(1)}} \cdot \frac{\cos \varphi_{0(2k-1)}}{\cos \varphi_{0(1)}}\right)^2}{1 - \chi_{0(1)}^2 \left(\sum_{k=1}^{\infty} \frac{U_{0(2k-1)}}{U_{0(1)}} \cdot \frac{I_{0(2k-1)}}{I_{0(1)}} \cdot \frac{\cos \varphi_{0(2k-1)}}{\cos \varphi_{0(1)}}\right)^2}} \end{aligned}$$

Приведенные формулы определяют все основные соотношения для преобразователей частоты по огibaющей с постоянным углом регулирования и позволяют сделать расчет и произвести сравнение различных схем преобразователей указанного типа.

Новосибирский
электротехнический институт

Поступила в редакцию
20/V 1965

ЛИТЕРАТУРА

1. И. Л. Каганов. Электронные и ионные преобразователи. Ч. III. Госэнергоиздат, 1956.
2. Шиллинг. Схемы выпрямителей, инверторов и преобразователей частоты. Госэнергоиздат, 1950.
3. С. Р. Глиниерник. Соотношения между напряжениями и токами в ионных преобразователях частоты. — Изв. АН СССР, ОТН, 1953, 11, 1545.
4. R. Feinberg. Zur Theorie der Drehstrom — Einphasenstrom — Umformung mit Hüllkurven — Umrichtern. Archiv für Elektrotechnik, 1933, Bd. 27, № 8.
5. R. Feinberg. Das Verhältnis von Primär — zu Sekundär — Blindleistung bei Hüllkurven Umrichtern. Elektrot. und Maschin., 1933, Bd. 51.
6. Г. С. Зиновьев. Выходное напряжение вентильных преобразователей частоты с непосредственной связью (постоянный угол регулирования). Изв. СО АН СССР, серия. техн. наук, 1965, № 10, вып. 3, стр. 21.
7. О. А. Маевский. Методы расчета составляющих полной мощности в нелинейных цепях с вентилями. — 2-я межвузовская конф. по теории и методам расчета нелинейных электрич. цепей. Сб. докладов, № 2, Ташкент, 1963.
8. Г. В. Грабовецкий. Об одной схеме преобразователя частоты с двухсторонней передачей мощности при выходной частоте много меньше входной. — Радиотехника и электроника. Тр. НЭТИ НЭИС, 1965, Новосибирск, вып. 1.

В. К. ВОРОНИН, Э. С. ЛУКАШОВ

ЗАМЕЩЕНИЕ РЕГУЛЯТОРА ВОЗБУЖДЕНИЯ СИЛЬНОГО ДЕЙСТВИЯ В РАСЧЕТАХ СТАТИЧЕСКОЙ УСТОЙЧИВОСТИ

Анализ поведения электрической системы при малых возмущениях связан с исследованием характеристического уравнения, которое получают из системы уравнений, описывающих электромеханические и электромагнитные переходные процессы в отдельных элементах (звеньях) системы. Порядок характеристического уравнения зависит от сложности системы и точности учета переходных процессов и может быть определен как [1]

$$P = 2(k-1) + l,$$

где P — порядок характеристического уравнения;
 k — число станций, включая шины неизменного напряжения;
 l — количество учитываемых постоянных времени.

При наличии у синхронных генераторов в анализируемой системе автоматических регуляторов возбуждения (АРВ) сильного действия появляется необходимость учитывать переходные процессы в их цепях. До сих пор наиболее полной структурной схемой, замещающей АРВ сильного действия, считается схема (рис. 1, в), которая учитывает пере-

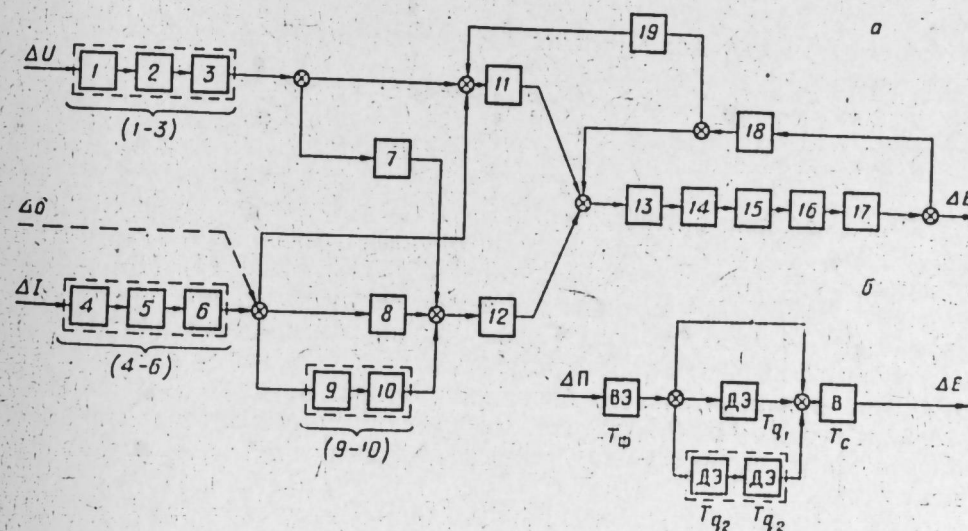


Рис. 1. Структурная схема АРВ сильного действия.

а — полная, б — упрощенная. (1-3), (4-6) — входные звенья канала напряжения (тока); (7, 8) — звенья первой производной напряжения (тока); (9, 10) — звенья второй производной тока; 11 — инвертор 1; 12 — усилитель переменного тока; 13 — сумматор; 14 — инвертор 2; 15 — силовой блок; 16 — выходной фильтр; 17 — обмотка возбуждения возбудителя; 18 — жесткая обратная связь (ЖОС); 19 — гибкая обратная связь (ГОС).

ходные процессы входного элемента (фильтра T_{ϕ}), дифференцирующих звеньев ($T_{\Delta 1}$, $T_{\Delta 2}$) и цепи возбуждения возбудителя (T_e). Все остальные элементы системы фактически априорно считаются безынерционными. Отрицательную жесткую обратную связь иногда косвенно учитывают уменьшением постоянной времени T_e . Подобное упрощенное замещение регулятора, на наш взгляд, вызвано отсутствием в литературе данных по параметрам звеньев структурной схемы регулятора и трудоемкостью получения и анализа характеристического уравнения, в сильной степени возрастающей с увеличением порядка его.

Данная работа ставит целью анализ полной структурной схемы АРВ сильного действия по экспериментально полученным параметрам звеньев. Влияние точности замещения регулятора на зоны устойчивости (зоны D -разбиения) с применением нового метода при использовании частотных характеристик и получение предельно упрощенной структурной схемы регулятора с частотной характеристикой, близкой к действительной. Все исследования проводились применительно к регулятору возбуждения сильного действия Куйбышевских гидрогенераторов (регулятор типа РВХ-00) [2].

ПОЛНАЯ СТРУКТУРНАЯ СХЕМА, ПАРАМЕТРЫ ЗВЕНЬЕВ И ЧАСТОТНЫЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ ПО КАНАЛАМ

Полная структурная схема рассматриваемого регулятора возбуждения приведена на рис. 1, а. Параметры звеньев схемы были получены из переходных характеристик их при подаче на вход прямоугольного единичного сигнала. Постоянные времени звеньев имеют следующие значения (в рад):

$$T_{1-3} = 8,65; \quad T_{1-3} = 4,45; \quad T_{4-6} = 11,7; \quad T_{4-6} = 9,75;$$

$$T_{7 \max} = 7,7; \quad T_{8 \max} = 20; \quad T_{9 \max} = 13,8;$$

$$T_{10} = 9,4; \quad T_{11} = 0,01; \quad T_{12} = 0,047; \quad T_{13} = 0,165;$$

$$T_{14} = 0,01; \quad T_{15} = 6,6; \quad T_{16} = 3,14; \quad T_{17} = 37,6;$$

$$T_{18} = 6,6; \quad T_{19} = 40.$$

В соответствии с действительной схемой регулятора в структурную схему входит отрицательная жесткая обратная связь (ЖОС, звено 18) и положительная гибкая обратная связь (ГОС, звено 19). В данном случае звено ЖОС — инерционное звено со значительной постоянной времени, что характерно лишь для данной конструкции регулятора, поскольку имеет место гальваническое разделение цепей системы возбуждения и измерительного блока регулятора. Звено 16 — фильтр на выходе силового блока — не является элементом регулятора и введено в структурную схему с учетом установки фильтров в эксплуатационных условиях [2].

Необходимо обратить внимание на два обстоятельства:

1. Входные звенья каналов напряжения и тока (блоки 1, 2, 3 и 4, 5, 6 структурной схемы) включают в себя входной трансформатор, выпрямитель и многополосный фильтр, который в свою очередь представляет цепочку из последовательно соединенных инерционных звеньев. Анализ переходных характеристик показывает, что все входное звено

достаточно точно может быть замещено инерционным звеном второго порядка с передаточной функцией

$$W(p)_{(1-3), (4-6)} = \frac{k_{(1-3), (4-6)}}{(1 + p T'_{(1-3), (4-6)} + p^2 T_{(1-3), (4-6)}^2)} \quad (2)$$

2. Для получения производных параметров регулирования применены пассивные дифференцирующие цепочки CR . Коэффициент усиления по каналам производных регулируется изменением величины активного сопротивления цепочки, в результате чего постоянные времени T_7 , T_8 , T_9 изменяются в зависимости от коэффициента усиления. В расчетах до сих пор указанные постоянные времени принимались неизменными и равными $T = RC$. В действительности необходимо принимать указанные постоянные времени с учетом выбранных коэффициентов усиления

$$T_{\text{раб}} = T_{\text{max}} \frac{k_{\text{раб}}}{k_{\text{max}}}, \quad (3)$$

где $T_{\text{раб}}$ — действительное значение постоянной времени;
 T_{max} — значение постоянной времени при коэффициенте усиления $k = k_{\text{max}}$;

$k_{\text{раб}}$ — рабочее значение коэффициента усиления.
 В соответствии с приведенной структурной схемой передаточные функции можно записать:

по каналу отклонения тока

$$W_{0I}(p) = \frac{k_{0I}}{(1 + p T'_{4-6} + p^2 T_{4-6}^2)} \times \frac{(1 + p T_{18})^2 (1 + p T_{19})}{\left\{ (1 + p T_{11}) (1 + p T_{18}) (1 + p T_{19}) \left[k_{\text{жос}} + \prod_{k=13}^{18} (1 + p T_k) \right] - k_{\text{гос}} p (1 + p T_{18}) \right\}}; \quad (4)$$

по каналу первой производной тока

$$W_{1I}(p) = \frac{k_{1I} p (1 + p T_{11})}{(1 + p T'_{4-6} + p^2 T_{4-6}^2) (1 + p T_8) (1 + p T_{12})} \times \frac{(1 + p T_{18})^2 (1 + p T_{19})}{\left\{ (1 + p T_{11}) (1 + p T_{18}) (1 + p T_{19}) \left[k_{\text{жос}} + \prod_{k=13}^{18} (1 + p T_k) \right] - k_{\text{гос}} p (1 + p T_{18}) \right\}}; \quad (5)$$

по каналу второй производной тока

$$W_{2I}(p) = \frac{k_{2I} p^2 (1 + p T_{11})}{(1 + p T'_{4-6} + p^2 T_{4-6}^2) (1 + p T_8) (1 + p T_{10}) (1 + p T_{12})} \times \frac{(1 + p T_{18})^2 (1 + p T_{19})}{\left\{ (1 + p T_{11}) (1 + p T_{18}) (1 + p T_{19}) \left[k_{\text{жос}} + \prod_{k=13}^{18} (1 + p T_k) \right] - k_{\text{гос}} p (1 + p T_{18}) \right\}}. \quad (6)$$

Аналогично можно записать передаточные функции по каналам напряжения, угла и их производных.

Достаточно полно можно судить о возможности упрощения полной структурной схемы по совпадению частотных характеристик (исходной и вырожденной) разомкнутых систем.

На рис. 2 приведены единичные частотные характеристики (частотные характеристики при коэффициенте усиления, равном единице) по каналам отклонения тока (а), первой и второй производной тока (б, в) при последовательном введении упрощений в исходную структурную схему.

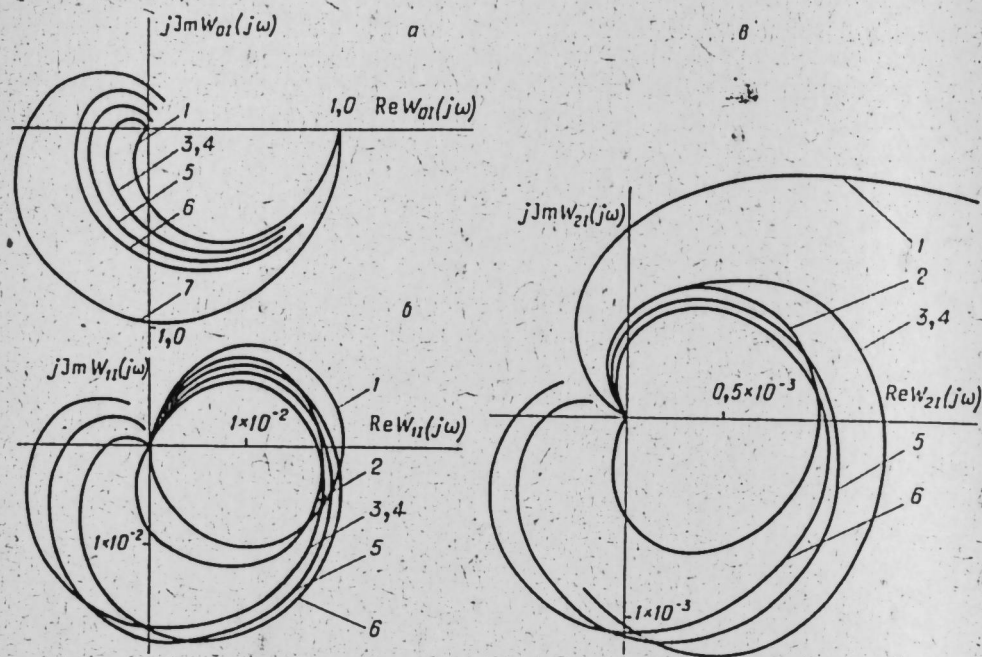


Рис. 2. Единичные частотные характеристики по каналам регулятора. а — отклонения тока, б — первой производной тока, в — второй производной тока. Учитывается запаздывание в звеньях:

- 1 — $T_4 - 6, T_{10}$; 2 — $T_4 - 6, T_{10}, T_8, T_9, T_{10}$; 3 — $T_4 - 6, T_{10}, T_8, T_9, T_{10}, T_4 - 6$;
 4 — $T_4 - 6, T_{10}, T_8, T_9, T_{10}, T_4 - 6, T_{11}, T_{12}, T_{13}, T_{14}$; 5 — $T_4 - 6, T_{10}, T_8, T_9, T_{10}, T_4 - 6, T_{11}, T_{12}, T_{13}, T_{14}, T_{15}$;
 6 — $T_4 - 6, T_{10}, T_8, T_9, T_{10}, T_4 - 6, T_{11}, T_{12}, T_{13}, T_{14}, T_{15}, T_{17}$;
 7 — $T_4 - 6, T_{10}, T_8, T_9, T_{10}, T_4 - 6, T_{11}, T_{12}, T_{13}, T_{14}, T_{15}, T_{17}, T_{13}$.

Единичные частотные характеристики позволяют получить достаточно просто частотные характеристики как по отдельным каналам регулирования, так и по всему каналу параметра при любых коэффициентах усиления

$$W_n(j\nu) = k_{0n} w_{0n}(j\nu) + k_{1n} w_{1n}(j\nu) + k_{2n} w_{2n}(j\nu). \quad (7)$$

При этом необходимо ввести одно допущение — независимость постоянных времени дифференцирующих контуров от величины коэффициентов усиления.

Система автоматического регулирования должна быть не только устойчива, но и должна обеспечивать необходимое качество переходных

процессов. Достаточно полно качество переходных процессов характеризует вещественная частотная характеристика, позволяющая построить переходные характеристики как при единичном, так и при любых возмущениях, характер протекания которых во времени известен [3].

На рис. 3, а приведены вещественные частотные характеристики при разной степени упрощения исходной структурной схемы. Соответствующие временные характеристики для двух крайних случаев приведены на рис. 3, б.

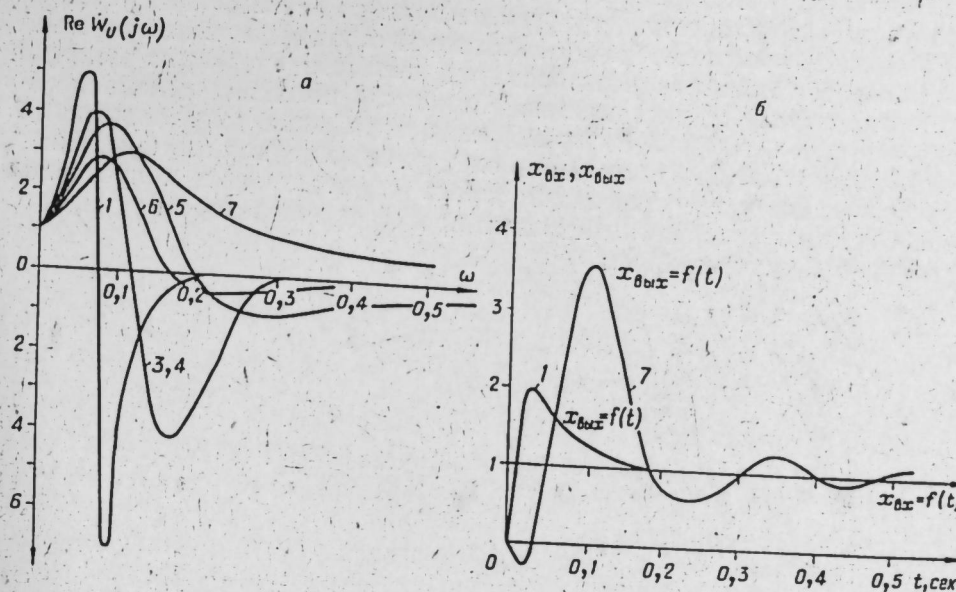


Рис. 3. Вещественная частотная характеристика (а) и временная (переходная) характеристика (б) по каналу напряжения при $k_{0U} = 4$, $k_{1U} = 250$. Обозначения те же, что и на рис. 2.

Анализ частотных и вещественных характеристик позволяет сделать следующие выводы: а) без ущерба для точности получаемых результатов можно пренебречь лишь постоянными времени звеньев 11—14 (рис. 1, а); б) дальнейшее упрощение исходной структурной схемы приводит к значительному расхождению частотных характеристик, что может вызвать существенную погрешность как при оценке устойчивости, так и при оценке качества переходного процесса в рассматриваемой системе.

МЕТОДИКА РАСЧЕТА ЗОН УСТОЙЧИВОСТИ

Как указывалось выше, одной из причин, побуждающей максимально упрощать структурную схему регулятора при исследовании устойчивости, являются расчетные трудности, резко возрастающие с увеличением числа учитываемых постоянных времени и повышением порядка характеристического уравнения системы. Вследствие этого оказывается практически невозможно при использовании существующей методики исследования устойчивости автоматически регулируемых систем учесть регуляторы возбуждения по полной их схеме.

Значительное упрощение расчетов зон устойчивости в координатах коэффициентов регулирования по производным может быть достигнуто в случае отказа от записи характеристического уравнения исследуемой

системы в виде полинома и использования в расчетах не структурной схемы регулятора возбуждения, а его общей передаточной функции, или, что то же самое, частотной характеристики, которая может быть расчетной или снятой экспериментально. Наиболее просто это делается при записи уравнений системы в координатных осях, жестко связанных с роторами синхронных машин.

Предлагаемый порядок расчета областей устойчивости, позволяющий без труда учесть регулятор возбуждения с любыми частотными характеристиками, проиллюстрируем на примере исследования устойчивости дальней электропередачи от некоторой станции, замещенной эквивалентным синхронным генератором, при передаче энергии в мощную приемную систему. Если напряжение и частоту на шинах приемной системы считать неизменными, пренебрегая активными сопротивлениями схемы и переходными процессами в электрической схеме системы, можно учесть линию электропередачи только ее реактивным сопротивлением. Система уравнений переходных процессов генератора при малых колебаниях будет иметь вид:

$$\begin{aligned}\Delta U_d &= \Delta \psi_d; \\ \Delta U_q &= \Delta \psi_q; \\ \Delta \psi_d &= G(p) \Delta U_{fd} - x_d(p) \Delta i_d; \\ \Delta \psi_q &= x_q \Delta i_q; \\ \psi_{d0} \Delta i_q + i_{q0} \Delta \psi_d + \psi_{q0} \Delta i_d + i_{d0} \Delta \psi_q + I p^2 \Delta \delta &= 0.\end{aligned}\quad (8)$$

Обозначения общепринятые.

Предположим, что возбуждение генератора регулируется автоматически в зависимости от тока статора генератора и его первых двух производных. Тогда уравнения системы АРВ имеют вид:

$$\begin{aligned}\Delta U_{fd} &= W(p) \Delta i; \\ \Delta i &= \frac{i_{d0}}{i_0} \Delta i_d + \frac{i_{q0}}{i_0} \Delta i_q,\end{aligned}\quad (9)$$

где $W(p)$ — пока неизвестная передаточная функция системы АРВ (включая возбудитель).

Учитывая, что генератор включен на шины бесконечной мощности, имеем:

$$\Delta U_d = U_{q0} \Delta \delta; \quad \Delta U_q = -U_{d0} \Delta \delta.$$

Если обозначить

$$\frac{i_{d0}}{i_0} = \sin \alpha; \quad \frac{i_{q0}}{i_0} = \cos \alpha,$$

то после некоторых преобразований можно получить полную систему уравнений в следующем виде:

$$\begin{aligned}U_{d0} \Delta i_d + \left[I p^2 + U_{q0} i_{d0} + \frac{U_{q0}^2}{x_q} \right] \Delta \delta &= 0; \\ [G(p) W(p) \sin \alpha - x_d(p)] \Delta i_d + \left[G(p) W(p) \frac{U_{q0}}{x_q} \cos \alpha - \right. \\ \left. - U_{d0} \right] \Delta \delta &= 0.\end{aligned}\quad (10)$$

Составим характеристический определитель и, приравняв его нулю, получим характеристическое уравнение исследуемой электропередачи в виде

$$G(p) W(p) = \frac{M(p) x_d(p) + U_{d0}^2}{M(p) \sin \alpha - U_{q0} i_{q0} \cos \alpha} = 0, \quad (11)$$

где

$$M(p) = I p^2 + U_{q0} i_{d0} - U_{d0} i_{q0} + \frac{U_{q0}^2}{x_q}.$$

Особенностью такой формы записи характеристического уравнения является выделение передаточной функции исследуемого элемента (в данном случае — передаточной функции системы АРВ). Не уточняя пока вида этой функции, можем сказать, что она может быть представлена в виде суммы передаточных функций по каналам отклонения и производных тока, после чего характеристическое уравнение можно записать следующим образом:

$$G(p) [W_{0I}(p) + W_{1I}(p) + W_{2I}(p)] = \Phi_1(p),$$

где $W_{0I}(p)$, $W_{1I}(p)$, $W_{2I}(p)$ — передаточные функции регулятора соответственно по каналам отклонения, первой и второй производным тока, а $\Phi_1(p)$ — сокращенное обозначение второго члена в левой части выражения (11). Подставляя $p = j\omega$, получаем

$$W_{1I}(j\omega) + W_{2I}(j\omega) = \frac{\Phi_1(j\omega)}{G(j\omega)} + W_{0I}(j\omega) = \Phi_2(j\omega). \quad (12)$$

Предположим, что известны единичные частотные характеристики регулятора, $w_{0I}(j\omega)$, $w_{1I}(j\omega)$, $w_{2I}(j\omega)$, т. е. частотные характеристики, соответствующие равному единичному коэффициенту усиления по данному каналу. Если предположить, что постоянные времени элементов регулятора не изменяются при изменении коэффициентов усиления, то частотные характеристики регулятора при любых заданных значениях коэффициентов усиления будут иметь вид

$$W_{0I}(j\omega) = k_{0I} w_{0I}(j\omega);$$

$$W_{1I}(j\omega) = k_{1I} w_{1I}(j\omega); \quad W_{2I}(j\omega) = k_{2I} w_{2I}(j\omega).$$

Подставляя эти выражения в (12) и разделяя вещественные и мнимые части, получаем два уравнения с двумя неизвестными:

$$\begin{aligned}k_{1I} \operatorname{Re} w_{1I}(j\omega) + k_{2I} \operatorname{Re} w_{2I}(j\omega) &= \operatorname{Re} \Phi_2(j\omega); \\ k_{1I} \operatorname{Im} w_{1I}(j\omega) + k_{2I} \operatorname{Im} w_{2I}(j\omega) &= \operatorname{Im} \Phi_2(j\omega).\end{aligned}\quad (13)$$

При заданном k_{0I} и заданном режиме схемы выражение $\Phi_2(j\omega)$ зависит только от ω . Задавая ω произвольные значения от нуля и выше, в результате решения системы уравнений (13) получаем координаты кривой Д-разбиения в плоскости k_{1I} , k_{2I} .

Достоинствами указанного приема построения областей устойчивости являются, во-первых, возможность использования не только расчет-

ных, но и экспериментально снятых частотных характеристик, а во-вторых, значительное упрощение расчетов в тех случаях, когда требуется рассмотрение ряда вариантов, отличающихся друг от друга характеристиками системы АРВ, при этом основная расчетная работа — вычисление $\Phi_2(j\omega)$ — производится только один раз.

ВЛИЯНИЕ ТОЧНОСТИ ЗАМЕЩЕНИЯ АРВ НА ЗОНЫ УСТОЙЧИВОСТИ

Одним из распространенных методов анализа статической устойчивости энергетических систем при наличии в их составе синхронных генераторов, оборудованных автоматическими регуляторами возбуждения сильного действия, является построение зон устойчивости в координатах коэффициентов усиления. Зоны устойчивости позволяют наряду с оценкой статической устойчивости выбирать наиболее приемлемый закон регулирования возбуждения и величину коэффициентов усиления по отдельным каналам.

Рядом авторов [4, 5] указывалось, что пренебрежение постоянными времени дифференцирующих контуров в ряде случаев может вызвать существенное искажение зон устойчивости. Влияние на точность расчетов параметров остальных звеньев не исследовалось.

Подробный анализ влияния точности замещения АРВ сильного действия на зоны устойчивости требует значительного перебора режимов работы энергосистемы, схем передачи и законов регулирования. В данном случае столь обширная задача не ставится. Авторами был исследован закон регулирования по отклонению тока, первой и второй производным его при работе синхронного генератора ($x_d = 1,7$; $x_q = 1,0$; $x_d' = 0,5$; $T_{d0} = 1600$ рад; $T_I = 4100$ рад):

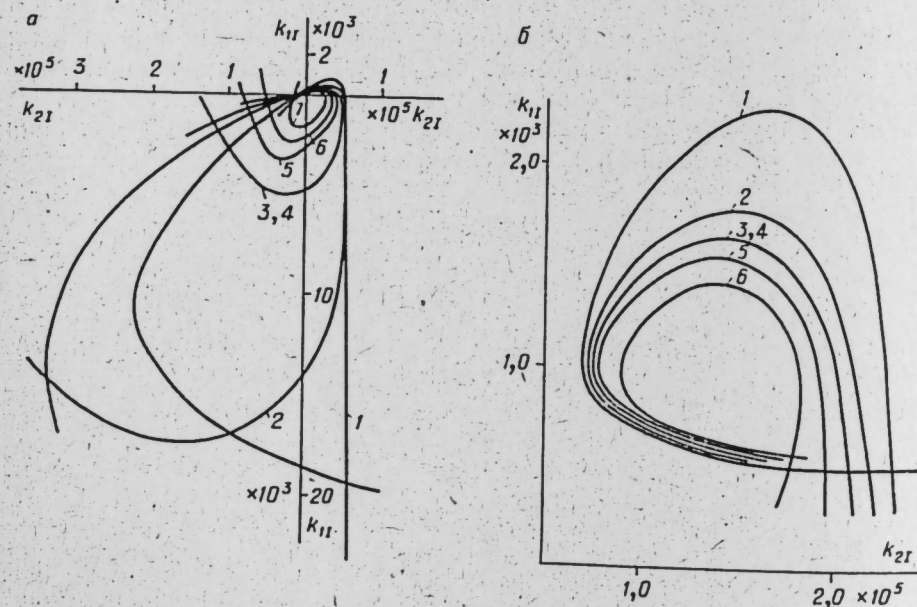


Рис. 4. Зоны устойчивости.

а — синхронный генератор работает непосредственно на ШБМ. $P_2 = 1,0$, $Q_2 = 0$, $k_{0I} = 1,0$;
б — синхронный генератор работает через линию $l = 1000$ км на ШБМ. $P_2 = 1,0$, $Q_2 = 0$, $k_{0I} = 4,0$.
Зоны рассчитаны по соответствующим частотным характеристикам рис. 2.

- а) непосредственно на шины неизменного напряжения (ШБМ);
- б) короткую линию на ШБМ ($x_{л2} = 0,6$);
- в) через линии 1000 и 3000 км на шины бесконечной мощности в двух режимах работы ($Q_2 = 0$, $P_2 = 1,0 P_n$ и $P_2 = 0,5 P_n$). Коэффициент усиления по отклонению тока принимался неизменным и равным $k_{0I} = 1,0$ и 4,0. Для двух исследованных случаев результаты приведены на рис. 4 а, б.

Полученные результаты позволяют сделать следующие выводы:

1. Во всех случаях все учитываемые постоянные времени существенно влияют на величину зон устойчивости в сторону их уменьшения.

2. Существенно деформируется граница зоны устойчивости при частотах $\omega \geq 0,03$.

3. Введение в закон регулирования отклонения параметра с большим коэффициентом усиления принципиально не меняет полученных результатов. Однако зона устойчивости в этом случае ограничивается меньшим диапазоном частот и влияние точности замещения АРВ меньше.

4. Частоты колебаний при выходе системы за границу устойчивости при точном замещении АРВ ограничены значительно меньшим диапазоном.

ПРИБЛИЖЕННОЕ ЗАМЕЩЕНИЕ АРВ СИЛЬНОГО ДЕЙСТВИЯ В РАСЧЕТАХ СТАТИЧЕСКОЙ УСТОЙЧИВОСТИ

Изложенная методика расчета зон устойчивости с использованием частотных характеристик позволяет предельно полно учитывать АРВ сильного действия в расчетах статической устойчивости как по расчетным, так и по экспериментально снятым частотным характеристикам без увеличения сложности вычислений.

С развитием счетно-решающей техники для анализа автоматически регулируемых систем широко используются аналоговые вычислительные машины. В этом случае замещение регулятора по полной структурной схеме затруднительно и желательно получить предельно простую схему, частотная характеристика которой близка к действительной.

Из полной структурной схемы видно (рис. 1, а), что достаточно найти упрощенную схему замещения лишь общей части регулятора, которой является канал отклонения параметра, по каналам же производных добавляются лишь дифференцирующие цепочки. Из теории автоматического регулирования [6] известно, что частотная характеристика, подобная показанной на рис. 2, а (кривая 6, 7) может быть получена при последовательном соединении не менее чем 4-х инерционных звеньев. Меньшее число инерционных звеньев в принципе не может обеспечить исходную частотную характеристику при любых параметрах их.

Достаточно хорошие результаты могут быть получены при введении в структурную схему нелинейного элемента — звена чистого запаздывания. Исследования показывают, что замещение регулятора по каналу отклонения двумя инерционными звеньями и звеном чистого запаздывания позволяет получить хорошее совпадение как частотных характеристик, так и зон устойчивости упрощенной и полной структурных схем (рис. 5 в, г).

Порядок определения параметров упрощенной структурной схемы может быть следующим:

1. По исходной частотной характеристике канала отклонения (экспериментальной или расчетной) строится логарифмическая амплитудная характеристика (ЛАХ), из которой определяются постоянные времени инерционных звеньев T_1 и T_2 (рис. 5, б).

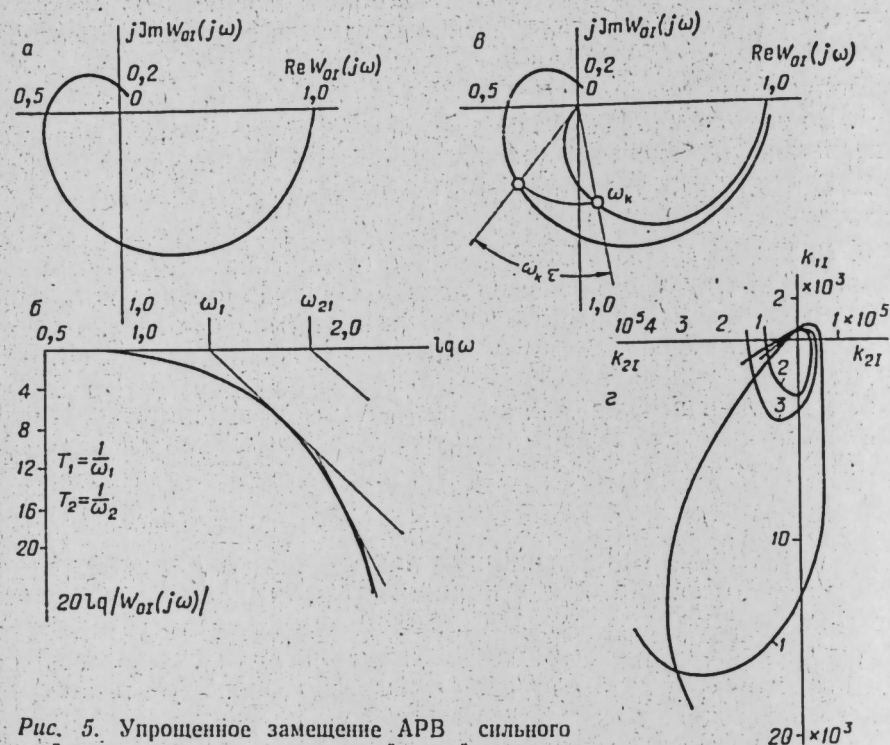


Рис. 5. Упрощенное замещение АРВ сильного действия в расчетах статической устойчивости.

а — исходная частотная характеристика канала тока; б — логарифмическая частотная характеристика канала тока; в — определение параметра звена чистого запаздывания; г — зоны устойчивости при замещении регулятора:

1) замещение регулятора по структурной схеме рис. 1,б

$$(T_4 - 6, T_{10}, T_8, T_9, T_{10});$$

2) замещение регулятора по полной структурной схеме рис. 1,а

$$(T_4 - 6, T_{16}, T_8, T_9, T_{10}, T_4 - 6, T_{15}, T_{17});$$

3) замещение регулятора упрощенной структурной схемой со звеном запаздывания $(T_1, T_2; T_8, T_9, T_{10}, \tau)$.

2. По исходной и расчетной частотным характеристикам

$$W_{on}(p) = \frac{1}{(1 + p T_1)(1 + p T_2)}$$

определяется параметр звена чистого запаздывания (τ) (рис. 5, в).

Реализация предлагаемой схемы замещения регулятора возбуждения сильного действия на аналоговой машине проста, так как к общепринятой схеме добавляется только звено чистого запаздывания.

ВЫВОДЫ

1. Существующие методы замещения АРВ сильного действия в расчетах статической устойчивости приводят к значительной погрешности при расчетах зон устойчивости, что может сказаться как на выборе

рабочих коэффициентов усиления, так и на выборе предельных коэффициентов усиления по каналам при проектировании регуляторов.

2. Предлагаемая запись характеристического уравнения позволяет предельно полно учитывать АРВ сильного действия в расчетах статической устойчивости как по расчетным, так и экспериментальным частотным характеристикам без увеличения сложности расчетов.

3. При замещении АРВ сильного действия на аналоговых машинах необходимо к упрощенной структурной схеме добавлять звено чистого запаздывания. Параметры упрощенной структурной схемы могут быть получены как по экспериментальным, так и расчетным частотным характеристикам.

Сибирский научно-исследовательский
институт энергетики,
Новосибирск

Поступила в редакцию
13/III 1965

ЛИТЕРАТУРА

1. М. Н. Розанов. К вопросу об анализе статической устойчивости сложных автоматически регулируемых систем.— Тр. МЭИ, 1956, вып. XX.
2. В. А. Веников, Г. Р. Герценберг, С. А. Совалов, Н. И. Соколов. Сильное регулирование возбуждения. Госэнергоиздат, 1963.
3. Н. Н. Иващенко. Автоматическое регулирование. Машгиз, 1962.
4. В. А. Андреюк. О допущениях, принимаемых при анализе статической устойчивости дальних электропередач в условиях сильного регулирования возбуждения синхронных машин.— Изв. Вузов, Энергетика, 1960, № 6.
5. В. А. Веников, И. В. Литкенс. О влиянии регулирования возбуждения на пропускную способность дальних электропередач.— Электричество, 1955, № 11.
6. А. К. Красовский, Г. С. Пospelov. Основы автоматики и технической кибернетики. Госэнергоиздат, 1962.

Ю. Н. ПИОТТУХ, Ю. М. ПЕТИН

СКОРОСТНОЕ ПОЛУКОКСОВАНИЕ УГЛЯ В УСТАНОВКЕ С ПРЯМОТОЧНЫМ ТРЕХКОМПОНЕНТНЫМ РЕАКТОРОМ-ТЕПЛООБМЕННИКОМ

Энергохимическое использование углей — новый путь в теплоэнергетике. Оно предполагает сначала извлечение наиболее ценных химических составляющих путем предварительного пиролиза, а затем использование в качестве энергетического топлива твердого остатка — полукокса.

Многочисленными исследованиями установлено, что при скоростном пиролизе угля продукты имеют более высокую технологическую и энергетическую ценность, а сама установка более компактна. Однако для достижения этого эффекта скорость нагрева частиц топлива должна быть выше $1000^{\circ}\text{C}/\text{сек}$. Нагрев с такой высокой скоростью представляет известную техническую трудность, связанную с необходимостью подведения к топливу за короткое время большого количества тепловой энергии. Для интенсификации процесса нагрева и пиролиза топливо должно находиться в мелкозернистом или пылевидном состоянии. Теплоноситель наиболее удобно использовать твердый мелкозернистый.

Как показали наши предыдущие исследования [1—3], нагрев мелкозернистого топлива твердым теплоносителем целесообразно вести в условиях их совместного пневмотранспорта. При этом особенно высокая интенсивность нагрева может быть получена в начальный, нестационарный период движения нагреваемых частиц, когда относительная скорость между газом и частицами топлива близка к скорости газового потока. Как показывают расчеты [2], скорость нагрева летящих в горячем газовом потоке частиц угля размером до 0,5 мм в начальный период их движения достигает $5000^{\circ}\text{C}/\text{сек}$ и прогрев их на 90% заканчивается примерно через 0,3 м пути, или через 0,25 сек после попадания в реактор.

Для проверки основных положений и отработки режимов работы отдельных узлов схемы в лаборатории энерготехнологического использования топлива ИФХИМС СО АН СССР была создана лабораторная экспериментальная установка для скоростной термической переработки твердых топлив производительностью 10 кг угля в час. В качестве теплоносителя использовался речной песок, предварительно прокаленный до 1200°C и обработанный соляной кислотой. Нагрев песка, предварительный нагрев рециркулирующего газа и компенсация тепловых потерь осуществлялись с помощью электронагревателей.

Схема экспериментальной установки с прямоточным трехкомпонентным реактором-теплообменником приведена на рис. 1. Установка состоит из трубы-реактора 2 с компенсационной электронагревательной обмоткой, разделителя компонентов 1, технологической электропечи 3, бункера сырого топлива 4, узла питания 5, электрического газоподогревателя 6, ротаметра 7, газодувки 8, конденсатора паров смол 9 и филь-

ра тонкой очистки 10. Работает установка следующим образом. Топливо из бункера 4 подается в нижнюю часть трубы реактора 2, в которой оно подхватывается газом, подаваемым газодувкой через ротаметр 7 и газоподогреватель 6.

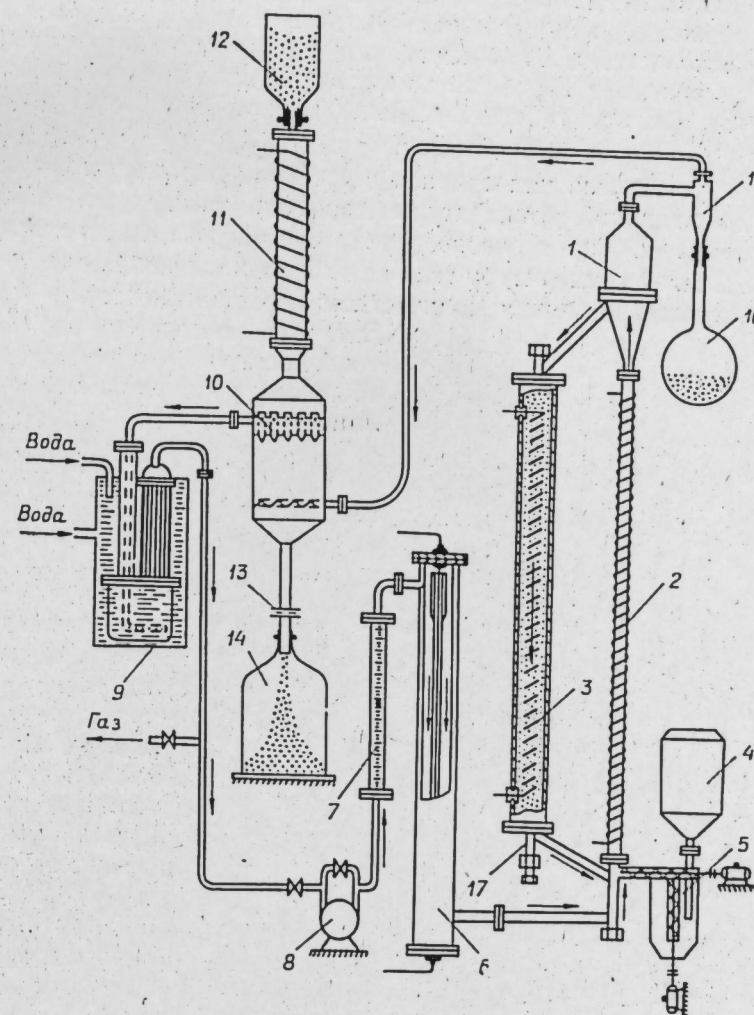


Рис. 1. Схема экспериментальной установки с прямоточным трехкомпонентным реактором-обменником.

В нижнюю часть трубы-реактора из технологической топки 3 через регулировочный вентиль 17 подается раскаленный теплоноситель-песок. В условиях совместного пневмотранспорта топливо нагревается, подсушивается и претерпевает процесс термического разложения. В верхней части этого реактора находится разделитель 1, в котором трехкомпонентный поток разделяется на составляющие. Песок направляется в технологическую топку 3, полукокс, образующийся из перерабатываемого угля, — в приемник полукокса 16, а парогазовая смесь через циклон 15 и песчаный фильтр тонкой очистки 10 — в конденсатор смол 9. В конденсаторе пары жидких продуктов конденсируются и собираются в его нижней части, а газ направляется в газгольдер. Часть этого газа в качестве транспортирующего и теплопередающего агента направляется затем обратно в установку на рециркуляцию.

Песчаный фильтр-пиролизер 10 работает следующим образом. Фильтрующий песок засыпается в емкость 12, из которой под действием силы тяжести медленно движется вниз, проходя последовательно через электропечь 11, корпус фильтра 10, регулируемую скорость движения песка шайбу 13, и, наконец, сыпается в емкость 14.

Во избежание конденсации в фильтре 10 паров смол температура нагрева песка в печи 11 обычно поддерживается равной температуре процесса в реакторе 2, но эта температура может быть и значительно выше, тогда фильтр 10 одновременно играет роль пиролизера паров смол.

Работа установки, как правило, протекала вполне устойчиво. Разогрев ее до заданной температуры процесса, т. е. до 500—650° велся обычно 3—3,5 ч. Газ в газоподогревателе нагревался до температуры процесса. Считая температуру газа на входе и выходе из реактора постоянной, соотношение между количеством перерабатываемого топлива и количеством подаваемого в реактор теплоносителя определялось по обычному уравнению теплового баланса:

$$G_n \cdot C_n \Delta t_n = G_y \cdot C_y \cdot \Delta t_y;$$

где G_n и G_y — расходы теплоносителя и нагреваемого материала, кг/час;
 $\Delta t = t' - t''$ — начальные и конечные температуры угля и теплоносителя, °C;

C_n и C_y — теплоемкости, ккал/кг°С; теплоемкость песка-теплоносителя была принята 0,18 ккал/кг°С, теплоемкость сухого угля — 0,25 ккал/кг°С.

На рис. 2 приводятся теоретические кривые влияния температуры теплоносителя на его расход при нагреве угля до заданной температуры процесса. Из кривых видно, что при температуре теплоносителя порядка 1000° и температуре процесса 650° количество требуемого теплоносителя в 2,5 раза больше расхода перерабатываемого топлива. При повышении температуры процесса до 750° количество теплоносителя будет уже в 4,2 раза превышать расход топлива, а при температуре процесса 850° того же теплоносителя потребуется в 8 раз больше, чем перерабатываемого топлива. В промышленных условиях вопрос о целесообразности повышения температуры теплоносителя или его удельного расхода должен решаться на основе технико-экономических соображений.

В экспериментальной установке исследовался бурый уголь Назаровского месторождения, фракционный состав которого приводится в табл. 1. Процесс полукоксования рассматривался нами в пределах температур

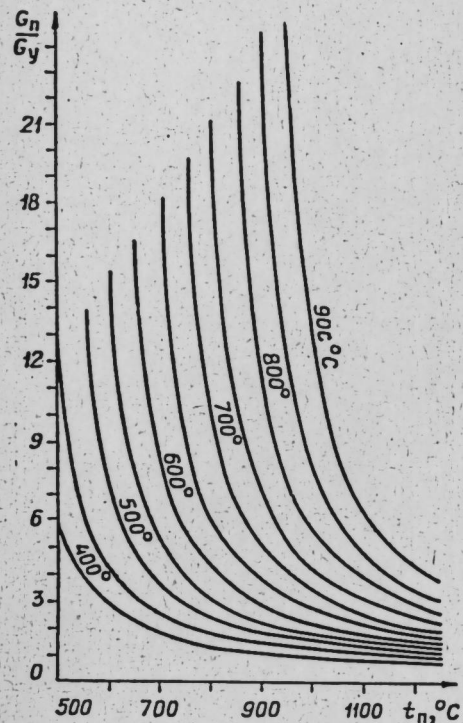


Рис. 2. Влияние температуры теплоносителя на его расход при нагреве угля до заданной температуры процесса (при $t_r = 20^\circ\text{C}$).

500—620°. Время пребывания угля в реакторе составляло около 1 сек. Данные технического и элементарного анализа приведены ниже.

Показатели	W_a	A_a	V_a	V_r	C_r	H_r	Q_p
Количество, %	16,8	6,2	33,9	44	73	4,76	4670 ккал/кг

По-видимому, большая скорость нагрева наложила свой отпечаток и на состав получаемых продуктов полукоксования и на их количество.

На рис. 3, в приводятся данные материального баланса процессов полукоксования Назаровского угля в пределах температур 500—620°. Из приведенных кривых видно, что выход газа термического разложения интенсивно возрастает примерно до температуры 550°, после чего растет значительно медленнее. По-видимому, при таком скоростном протекании процесса нагрева и разложения он в основном заканчивается уже при 550—570°С. Выход газообразных продуктов термической переработки угля достигает при этом 32% от веса сухого угля.

При рассмотрении данных теплового баланса (рис. 3, б) видно, что процент потенциального тепла, заключенного в продуктах термического разложения, также изменяется весьма интенсивно до 550°. На этом участке процент потенциального тепла в полукоксе резко сокращается, но возрастает тепло в образующейся полукоксовой смоле. До температуры 550° в газ из перерабатываемого угля переходит незначительное количество потенциального тепла, при повышении температуры процесса выше

Таблица 1

Фракции, мм	Исходный уголь	Полукоксы после 500°
	в % от общего веса	
0,5—0,4	17,48	0,47
0,4—0,315	32,68	26,3
0,315—0,2	42,56	46,41
0,2—0,16	5,28	14,62
0,16—0,1	1,31	8,16
0,1—0,063	0,32	2,16
0,063—0,05	0,20	0,06
0,05—0,0	0,17	1,82
	средний $d_y = 0,3157$ мм	средний $d_{пк} = 0,2544$ мм

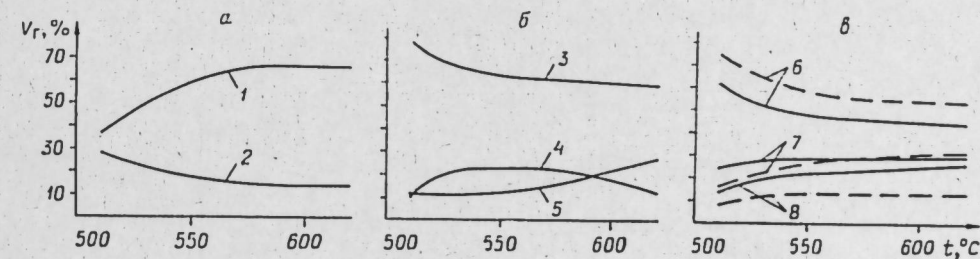


Рис. 3. Материальный (а) и тепловой (б) балансы процесса полукоксования Назаровского угля, содержание летучих в полукоксе и степень выгазовывания угля (б).

1 — степень выделения летучих из угля; 2 — содержание летучих в полукоксе; 3 — тепло, заключенное в полукоксе; 4 — то же в смоле; 5 — то же в газе; 6 — количество полукокса; 7 — количество жидких продуктов; 8 — количество газа; — на рабочую массу, — на сухую массу.

550° количество потенциального тепла, переходящего в газ, начинает резко расти, а тепло, переходящее в смолы, видимо, за счет вторичного крекинга, значительно снижается. Из кривой содержания летучих в полукоксах, полученных при различных температурах (рис. 3, а), видно, что содержание летучих заметно снижается примерно до 570—580°. Содержание летучих на горючую массу при этом уменьшается с 44 до 15%. Дальнейшее снижение содержания летучих в полукоксе происходит незначительно. Содержанию летучих 15% соответствует выгазовывание исходного угля примерно на 70%. Для сопоставления можно указать, что во многих зарубежных установках, в которых процесс полукоксова-

ния длится не 2—3 сек, как в нашей установке, а 10—20 мин, степень выгазовывания составляет обычно 52—74%. Под степенью выгазовывания понимается отношение:

$$\frac{V_y^r - V_n^r \cdot \frac{g_n}{g_y}}{V_y^r} \cdot 100.$$

Средний диаметр частиц полукокса по сравнению со средним диаметром исходного угля уменьшился при термической переработке в 1,26 раза. Он определялся по формуле

$$d_{\text{ср}} = \frac{\sum g_i \cdot d_i}{100},$$

где g_i — вес частиц данной фракции, d_i — диаметр фракции.

Рассмотрим количество и состав газа, выделяющегося при полукоксовании Назаровского угля в интервале температур от 500 до 620°. Из кривых усредненного состава газа термического разложения (рис. 4)

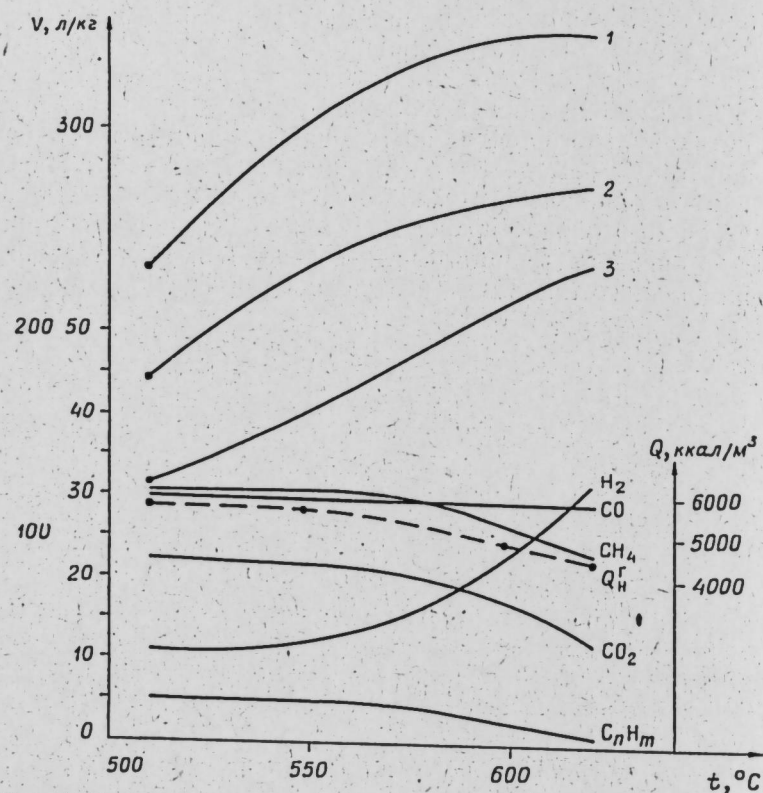


Рис. 4. Усредненный состав и выход газа термического разложения Назаровского угля.

1 — выход стандартного газа на 1 кг горючей массы угля; 2 — выход стандартного газа на 1 кг угля; 3 — выход рабочего газа на 1 кг угля.

видно, что в пределах температур 500—550° состав газа почти не изменяется. После 550° количество предельных и непредельных углеводородов начинает значительно снижаться, а содержание водорода резко возрастает. Содержание окиси углерода практически остается постоянным.

Теплотворная способность газа до 550° поддерживается на уровне 5700 ккал/м³, однако при повышении температуры процесса выше 550° теплотворность газа начинает снижаться и при 620° составляет уже только 4500 ккал/м³.

Из кривой, характеризующей выход рабочего газа на 1 кг угля, видно, что, несмотря на намечающуюся тенденцию к некоторому снижению скорости выделения газа при повышении температуры процесса выше 600°, количество выделяющегося газа продолжает расти. При переработке бурого угля Назаровского месторождения выход стандартного газа на килограмм горючей массы угля при температуре процесса 590—600° составлял около 340 л.

В рассматриваемой схеме в качестве газа, транспортирующего перерабатываемое топливо и теплоноситель, принят газ термического разложения, образующийся в этой же установке. Часть получаемого газа после выделения из него всех жидких продуктов направляется на рециркуляцию и газодувкой через газоподогреватель подается в нижнюю часть реактора. Поскольку рециркулирующий газ при повторном нагреве может подвергаться частичному крекингу, что несколько снижает его ценность, необходимо выбирать такие режимы переработки топлива, чтобы максимально снизить степень рециркуляции. При этом не только уменьшится вторичный пиролиз рециркулирующего газа, но сократится количество тепла, идущего на нагрев этого газа, расход энергии на газодувку, размеры и стоимость установки и т. д.

Минимальное количество газа, направляемого на рециркуляцию определяется производительностью установки. Соотношение необходимых количеств твердого теплоносителя и перерабатываемого топлива нами уже рассматривалось, так что сейчас возьмем их общую сумму, т. е. общее количество твердой фазы, которую необходимо транспортировать по реактору снизу вверх. Исходя из условий пневмотранспорта твердых частиц, концентрация твердой фазы в несущем газе не должна превосходить 120—160 кг на килограмм газа. В промышленных установках, использующих пневмотранспорт, эта концентрация обычно не превосходит 40 кг/кг газа.

Рассмотрим два режима переработки топлива: при 600 и 700°. При температуре процесса 600° из 1 т Назаровского угля выделяется около 220 м³ газа с удельным весом 1,1 кг/м³, при 700° — около 250 м³ газа с удельным весом ~1,0 кг/м³.

Для получения температуры процесса 600° в реактор необходимо подать на 1 т перерабатываемого топлива 4,2 т теплоносителя, если он имеет температуру 800°, а газ — температуру 600°. Таким образом, для переработки 1 т угля в реактор должно быть подано в общей сложности 1+4,2=5,2 т твердой фракции, для пневмотранспорта 5,2 т потребуются 130 кг, или 118 м³ газа. Поскольку 1 т угля выделяет при нагревании до 600° около 220 м³ газа, то на рециркуляцию должно быть подано 54% выделившегося газа. Если принять, что 1 кг газа транспортирует 80 кг твердой фракции, что вполне допустимо, поскольку в реакторе нет никаких поворотов, сужений или иных труднопроходимых участков, то на рециркуляцию потребуется не 54%, а только 27% газа. И соответственно, если допустить, что 1 кг газа может транспортировать 100 кг твердой фракции, то процент рециркулирующего газа сократится до 21.

В табл. 2 приводятся аналогичные расчеты для двух режимов переработки Назаровского угля: при 600 и 700° при различной начальной температуре теплоносителя — 800, 900 и 1000° и при различных соотношениях весов транспортируемой твердой фракции и транспортирующего газа — 40, 80 и 100 кг/кг газа. Из таблицы видно, что по мере увели-

Таблица 2

Начальная температура теплоносителя, °С	Расход теплоносителя для обеспечения температуры процесса, кг/кг	Общий расход твердой фракции на 1 кг угля	Требуемый расход газа на пневмотранспорт в 1 м³ при условии $G_T/G_R=40 \text{ кг/кг}$	Процент газа, идущего на рециркуляцию для пневмотранспорта твердых фракций		
				$G_T/G_R=40 \text{ кг/кг}$	$G_T/G_R=80 \text{ кг/кг}$	$G_T/G_R=100 \text{ кг/кг}$
Температура процесса 600°						
800	4,2	5,2	118	54	27	21,6
900	2,8	3,8	86,7	39,4	20	15,8
1000	2	3	68,4	31	15,5	12,4
Температура процесса 700°						
800	9,5	10,5	263	105	53	42
900	5	6	150	60	30	24
1000	4,2	5,2	130	52	26	20,8

чения концентрации твердой фазы количество рециркулирующего газа резко сокращается. К этому же эффекту ведет и увеличение температуры теплоносителя. Увеличение температуры процесса переработки угля резко увеличивает процент рециркулирующего газа.

ВЫВОДЫ

Предложена схема скоростной термической переработки мелкозернистого топлива с трехкомпонентным реактором-теплообменником и создана экспериментальная установка производительностью 10 кг угля в час.

Показаны результаты исследования процесса термического разложения Назаровского угля в этой лабораторной установке и даны анализы материального и теплового балансов процесса полукоксования.

Установлено влияние рециркуляции газа на экономичность процесса полукоксования и показано, что процент рециркуляции газа снижается при увеличении температуры теплоносителя и концентрации твердой фазы в газовом потоке и резко возрастает при повышении температуры процесса.

Институт физико-химических основ
переработки минерального сырья
Сибирского отделения АН СССР,
Новосибирск

Поступила в редакцию
9/IV. 1965

ЛИТЕРАТУРА

1. Ю. Н. Пиоттух. О движении трехкомпонентного потока.— Изв. СО АН СССР, 1961, № 2.
2. Ю. Н. Пиоттух, С. И. Шабанов. Теплообмен в условиях трехкомпонентного потока.— Изв. СО АН СССР, 1961, № 11.
3. В. М. Гюрджиян, Ю. Н. Пиоттух. Влияние некоторых факторов на аэродинамику и теплообмен в трехкомпонентном потоке.— Изв. СО АН СССР, 1963, № 2, сер. техн. наук, вып. 1.

АКАДЕМИЯ НАУК СССР ИЗВЕСТИЯ СИБИРСКОГО ОТДЕЛЕНИЯ АКАДЕМИИ НАУК СССР СЕРИЯ ТЕХНИЧЕСКИХ НАУК

№ 2, вып. 1.

1966

УДК 621.315.611.015.51

Ю. Н. ВЕРШИННИН

О ВОЗМОЖНОСТИ ФЕНОМЕНОЛОГИЧЕСКОГО ПОДХОДА К КОЛИЧЕСТВЕННОМУ АНАЛИЗУ ЭЛЕКТРИЧЕСКОЙ ПРОЧНОСТИ ТВЕРДЫХ ДИЭЛЕКТРИКОВ

Несмотря на успехи отечественных и зарубежных исследователей в области физики диэлектриков, количественное определение электрической прочности твердых электроизоляционных материалов при электрической форме пробоя на основе существующих теорий [1—8] оказалось возможным лишь для простейших кристаллов щелочно-галогидных соединений. Объясняется это тем, что моделирование и теоретический анализ разнообразных физических явлений, составляющих сущность электрического пробоя, представляют большие трудности, в ряде случаев пока непреодолимые. Эти трудности значительно возрастают при попытках распространить указанные теории на сложные гетеродесмические диэлектрики, к которым относится подавляющее большинство технических электроизоляционных материалов. Экспериментальный метод — по существу единственный при изучении их электрической прочности.

Многие трудности физического и математического порядка можно, по-видимому, избежать, если подходить к определению работы, совершаемой электронами на стадии формирования разряда, не кинетически, на основе пространственно-временных законов движения электрона в структуре диэлектрика, а термодинамически. В последнем случае отпадает необходимость оценивать все особенности движения и взаимодействия ионизирующего электрона. Работа электронов будет характеризоваться тогда термодинамическими параметрами естественного и стримерного состояния диэлектрика, определение которых при указанных ниже допущениях не вызывает затруднений.

Вывод соответствующих уравнений электрической прочности будем производить исходя из лавинностримерной теории развития пробоя [9, 10] с учетом новых теоретических и экспериментальных данных о процессах формирования разряда [10—16], используя при этом общепринятое [1] равенство $A=B$ (A — энергия, приобретаемая электроном в электрическом поле, B — работа, совершаемая электроном в структуре диэлектрика).

Для сопоставления диэлектриков с различным молекулярным весом значения A и B отнесены к единице объема [17].

Рассмотрим физические процессы, имеющие место в элементарном объеме $v_0 = \pi r_A^2 \lambda_u$ (r_A — радиус лавины, λ_u — длина свободного пробега электрона между двумя ионизационными столкновениями), расположенном в конце электронной лавины непосредственно у анода. По Зейтцу [18, 19]

$$r_A = (Dt_A)^{1/2}, \quad (1)$$

где D — коэффициент диффузии электронов ($D \cong 1 \text{ см}^2/\text{сек}$), t_a — время движения электронной лавины ($t_a = d/bE$, где b — подвижность электронов, $b \cong 1 \text{ см}^2/\text{сек}$, d — длина разрядного промежутка).

Энергия, приобретаемая n электронами лавины за время свободного пробега $\tau_{\text{ср}}$ при $E = E_{\text{пр}}$,

$$A_1 = \sum_1^n A_n = e E_{\text{пр}} \tau_{\text{ср}} v_{\text{ср}} n, \quad (2)$$

где $v_{\text{ср}}$ — скорость электронной лавины.

По Г. А. Воробьеву [10] размер электронной лавины определяется формулой

$$n_0 = 2^{d/\lambda_u}. \quad (3)$$

Более вероятным, по-видимому, является зарождение лавины не от одного, а от нескольких первичных электронов n_0 . Тогда

$$n = n_0 2^{d/\lambda_u}. \quad (4)$$

Величина энергии A , отнесенная к единице объема диэлектрика (1 см^3), с учетом (1) и (4) описывается выражением

$$A = \frac{A_1}{v_0} = \frac{e E_{\text{пр}} n_0}{\pi r_a^2} 2^{d/\lambda_u} = \frac{e E_{\text{пр}} n_0}{\pi t_a D} 2^{d/\lambda_u}. \quad (5)$$

Определим теперь величину работы, совершаемой электронами в объеме v_0 . По Дж. Мику [9] и Г. И. Сканиви [1] «Стример — это самораспространяющийся поток объемного заряда, в который втягиваются электроны, . . . превращающийся в проводящую плазму». Поэтому будем исходить в дальнейшем из представлений о стримерном состоянии твердого диэлектрика как о совокупности не только ионизированных, но и диссоциированных частиц, обладающих подвижностью и избыточным суммарным положительным зарядом. Принципиальное отличие стримерного состояния твердого диэлектрика в процессе формирования разряда от плазменного на стадии завершения разряда [11—13] будет состоять тогда, в том, что в первом случае $\sum_a Z_a e n_a \neq 0$, а во втором [20] $\sum_a Z_a e n_a = 0$, где $Z_a e$ — заряд частиц, n_a — число частиц a -го сорта.

Анализ возможных вариантов возникновения стримерного состояния у различных диэлектриков показал, что могут быть приняты следующие схемы диссоциации и ионизации твердой структуры вещества:

1. У неорганических соединений с преимущественно ионным типом связей стример представлен диссоциированными положительными катионами и нейтральными анионами (например, $\text{NaCl} \rightarrow \text{Na}^+, \text{Cl}$).
2. У соединений с преимущественно ковалентным типом связей, к которым относится большинство органических электронизоляционных материалов, все партнеры по связи имеют равные возможности с точки зрения ионизации. Поэтому при оценке степени диссоциации и ионизации таких структур следует руководствоваться стремлением избежать получения дополнительного числа ионов при помощи непропорционально больших энергетических затрат. Для углеводородных соединений это соответствует образованию радикалов C , CH , CH_2 , CH_3 и их ионизации до $q = 1e$. Орыва и ионизации водорода не происходит [26].

Тогда переход вещества из естественного в стримерное состояние будет производиться за счет работы:

$$B = U + A + B_c(r_0), \text{ ккал/моль}, \quad (6a)$$

$$B = D + S + I + B_c(r_0), \text{ ккал/моль}, \quad (6b)$$

где U — энергия решетки, A — электронное сродство, D , S , I — теплоты диссоциации, сублимации и ионизации, $B_c(r_0)$ — потенциальная энергия сил отталкивания, вычисляемая по формуле Борна — Майера [21]:

$$B(r_0) = b C e^{-r/r_0}. \quad (7)$$

Значения A , D , S и I для большого числа атомов и радикалов приведены в литературе [22—24].

Величину $W_{\text{с.м}} = U + A = D + S + I$ (ккал/моль) назовем энергией стримерообразования. Отметим, что выражения (6a) и (6b) идентичны, однако первое более удобно для вычисления $W_{\text{с.м}}$ неорганических диэлектриков, а второе — органических. Объемное значение энергии стримерообразования W_c в зависимости от имеющихся исходных данных определим по формуле

$$W_c = \frac{W_{\text{с.м}}}{V} = \frac{W_{\text{с.м}} \gamma}{M} = \frac{W_{\text{с.м}} m}{N V_0}, \quad (8)$$

где W_c — удельная объемная энергия стримерообразования, ккал/см³, $W_{\text{с.м}}$ — энергия стримерообразования, ккал/моль, V — объем моля, см³, V_0 — объем элементарной ячейки, см³, N — число Авогадро, m — число формульных весов в элементарной ячейке, M — молекулярный вес, г, γ — плотность, г/см³.

Если в момент пробоя $A = B$ [1], то с учетом размерностей

$$E_{\text{пр}} \frac{0,24 n_0 e}{\pi t_a D} 2^{d/\lambda_u} = [W_c + B_c(r_0)],$$

$$E_{\text{пр}} = \frac{\pi t_a D}{0,24 n_0 e 2^{d/\lambda_u}} [W_c + B_c(r_0)]. \quad (9)$$

Если принять $\frac{\pi t_a D}{0,24 n_0 e 2^{d/\lambda_u}} = k(\tau, \lambda_u, d)$ и $k B_c(r_0) = E_0$, то общий вид основного уравнения электрической прочности будет иметь вид

$$E_{\text{пр}} = k(\tau, \lambda_u, d) W_c + E_0. \quad (10)$$

Опытная проверка уравнения (10) показывает, что оно справедливо для самых различных диэлектриков как неорганического, так и органического происхождения. Например, статистическая обработка наиболее достоверных данных об электрической прочности щелочно-галогидных соединений (см. таблицу) приводит к эмпирическому уравнению

$$E_{\text{пр}} = k' W_c + E_0 = 135 W_c + 68 \text{ кВ/см}. \quad (11)$$

В то же время для NaCl толщиной $\sim 0,01 \text{ см}$ $E_{\text{пр}} = 1,5 \cdot 10^6 \text{ в/см}$ [5], $D \cong 1,0 \text{ сек}^2$ (см. [18, 19]). Время t_a определим из соотношения $t_a = d/v_a$. Если $v_a = 2 \cdot 10^6 \text{ см/сек}$ [11—13], то $t_a \cong 5 \cdot 10^{-9} \text{ сек}$.

Диэлектрик	Электрическая прочность $E \cdot 10^6$, в/см		W_c , ккал/см ²	$B(r_0)$ [24], ккал/см ²
	по Коллену (см [1])	по А. А. Воробьеву [5]		
NaCl	1,5	1,5	10,02	0,878
NaBr	0,8	1,0	7,92	0,649
NaJ	—	0,8	5,85	0,423
KF	1,9	1,8	11,95	1,242
KCl	1,0	1,0	6,80	0,576
KBr	0,70	0,8	5,59	0,434
KJ	0,57	0,60	4,23	0,301
RbCl	0,83	0,80	5,93	0,648
RbBr	0,63	0,60	4,80	0,372
RbJ	0,49	0,50	3,71	0,262

Тогда

$$k = \frac{\pi \epsilon_0 D}{0,24 \pi e} = \frac{4,1 \cdot 10^{11}}{n} = 135.$$

Оценка эмпирического и расчетного значений k показывает, что они совпадают, если электронная лавина содержит $n \approx 3 \cdot 10^9$ электронов.

Далее, из уравнения (11) следует, что для щелочно-галонидных соединений, указанных в таблице, среднеарифметическое значение $E_0 = 68$ кВ/см. С другой стороны,

$$[B(r_0)]_{cp} = \frac{\sum_{i=1}^n B(r_0)}{n} = 0,5785 \text{ ккал/см}^2.$$

Если учесть, что в стримере один из атомов является нейтральным, то величину $B(r_0)$ надо уменьшить как минимум в 1,11 раза [25]. Тогда величина E_0 при $k=135$ будет равна $135 \cdot 0,5785 \cdot 0,9 = 70$ кВ/см. Совпадение расчетной и экспериментальной величины E_0 можно считать вполне удовлетворительным.

Произвести количественную оценку коэффициентов k и E_0 в уравнении (10) применительно к органическим диэлектрикам, как это было сделано для щелочно-галонидных соединений, не представляется возможным из-за отсутствия сведений о значениях ν_d и λ_d . В то же время статистическая обработка опытных данных об электрической прочности полимеров [26, 27] позволяет установить корреляцию между значениями $E_{пр}$ и W_c , которая в сопоставимых условиях имеет аналогичный с (11) вид:

$$E_{пр} = k'' W_c + E_0 = 270 W_c + 50 \text{ кВ/см.} \quad (12)$$

Физическая природа явлений, которые служат причиной того, что коэффициенты k в уравнениях (11) и (12) относятся как $\sim 1:2$, нуждается в дополнительном исследовании.

Приведенные выше данные свидетельствуют о том, что на основе уравнений типа (10) при минимальных допущениях удастся получить расчетные данные об электрической прочности разнообразных диэлектриков, хорошо согласующиеся с экспериментом [28].

Описанный метод энергетического анализа, наряду с очевидными достоинствами, имеет и некоторые недостатки, являющиеся следствием его феноменологической природы. Они состоят в том, что прямо не дается ответа на вопрос, почему те или иные процессы происходят именно таким образом. Однако энергетический анализ электрической прочности твердых диэлектриков, не подменяя более строгих методов, вытекающих из квантовомеханических теорий, может найти широкое применение для решения ряда технических и научных задач в области физики диэлектриков.

Сибирский научно-исследовательский
институт энергетики,
Новосибирск

Поступила в редакцию
25/IX 1965

ЛИТЕРАТУРА

1. Г. И. Сканиви. Физика диэлектриков (область сильных полей). М., ГИФМЛ, 1959.
2. В. А. Чуенков. Тр. ФИАН, 1956, 8, 65.
3. В. А. Чуенков. Изв. Томского политехнического ин-та, 1956, 91, 45.
4. В. А. Чуенков. УФН, 1954, 54, 2, 185.
5. А. А. Воробьев. Изоляционные свойства, прочность и разрушение диэлектриков. Новосибирск, Изд-во СО АН СССР, 1960.
6. А. А. Воробьев. В сб. «Пробой диэлектриков и полупроводников», М.—Л., изд-во «Энергия», 1964, стр. 106.
7. A. Hippel. J. Appl. Phys., 1937, 8, 815.
8. H. Frölich. Phys. Rev., 1954, 96, 921.
9. Дж. Мик, Дж. Крэгс. Электрический пробой в газах. М., ИЛ., 1960.
10. Г. А. Воробьев. Изв. АН СССР, ОТН. Энергетика и транспорт, 1963, 2, 205.
11. А. А. Воробьев, Г. А. Воробьев. В сб. «Пробой диэлектриков и полупроводников», М.—Л., изд-во «Энергия», 1964, стр. 10.
12. А. А. Воробьев, Г. А. Воробьев. Радиотехника и электроника, 1962, 7, 9, 1523.
13. А. А. Воробьев, Г. А. Воробьев. Изв. АН СССР, сер. физич., 1958, 4, 397.
14. А. А. Воробьев, Г. А. Воробьев, В. А. Кострыгин. Изв. вузов, физика, 1963, 2, 174.
15. А. А. Воробьев, Г. А. Воробьев, В. А. Кострыгин. Изв. АН СССР, ОТН. Энергетика и автоматика, 1961, 2, 62.
16. А. А. Воробьев, Г. А. Воробьев, Н. М. Торбин. ФТТ, 1961, 3, 11.
17. Ю. Н. Вершинин. Сб. трудов СибНИИЭ, вып. 2 (21). Изд-во СО АН СССР, 1964, стр. 33.
18. F. Seitz. Phys. Rev., 1949, 76, 1376.
19. F. Seitz. Phys. Rev., 1948, 73, 550.
20. Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц. Статистическая физика. М., изд-во «Наука», 1964.
21. М. Борн, М. Гепперт-Майер. Теория твердого тела. М., ГОНТИ, 1938.
22. К. Б. Яцимирский. Термохимия комплексных соединений, М., Изд-во АН СССР, 1962.
23. В. И. Веденеев, Л. В. Гуревич, В. Н. Кондратьев, В. А. Медведев, Л. Е. Франкевич. Энергия разрыва химических связей. Потенциалы ионизации и сродство к электроду. Справочник. М., Изд-во АН СССР, 1962.
24. Справочник химика, т. 1, 2-е изд., под ред. Б. П. Никольского, М.—Л., 1962.
25. L. Pauling. Zs. f. Krist., 1928, 67, 377.
26. Ю. Н. Вершинин, В. Г. Триппель. Электрофизические высоковольтные характеристики эпоксидных компаундов. Сб. трудов СибНИИЭ (в печати).
27. Ю. Н. Вершинин, А. И. Лимасов. Электрофизические высоковольтные характеристики эпоксидных компаундов. Сб. трудов СибНИИЭ (в печати).
28. Ю. Н. Вершинин. Электрофизические высоковольтные характеристики эпоксидных компаундов. Сб. трудов СибНИИЭ (в печати).

КРАТКИЕ СООБЩЕНИЯ

УДК 621.3.032.73+537.533

Г. Ф. ПОЛЯКОВ, А. А. НОВИКОВ, Е. Г. ШИРОКОВ

ИССЛЕДОВАНИЕ ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ ПОЛЕЙ В СИСТЕМАХ С АВТОЭЛЕКТРОННЫМИ ЭМИТТЕРАМИ МЕТОДАМИ МОДЕЛИРОВАНИЯ

Одной из главных трудностей при изучении автоэлектронной эмиссии является невозможность точного определения электрического поля у поверхности эмиттера из-за его сложной формы.

При конструировании систем с автоэммитерами трудность расчета поля возрастает, так как необходимо дополнительно учитывать реальную форму катодного и анодного узлов. Эффективным средством для определения параметров электрического поля в сложных электродных системах являются моделирующие установки, принцип действия которых основан на использовании математической аналогии между изучаемым явлением и моделью.

В данной работе методами моделирования исследовались электрические поля в системах с автоэммитерами в виде лезвий и острий. Поле исследовалось в небольшом промежутке эмиттер — анод, равном ~ 300 мк, так как на большем расстоянии можно считать, что оно не зависит от микронеоднородностей, какими являются автокатоды, а определяется макроструктурой всего электронного прибора.

Решались следующие вопросы:

1. Определялся эффект экранирующего действия держателя, несущего эмиттер, на напряженность поля у его поверхности.
2. Выяснилось влияние изменений расстояний между отдельными эмиттерами на величину электрического поля у поверхности отдельного острия или лезвия.

Условия и техника эксперимента

Для решения задач определения напряженности электрического поля при сложных граничных условиях широко применяются электролитическая ванна и гравитационная моделирующая установка с резиновой мембраной. Особенностью применения метода моделирования к системам с автоэммитерами является то, что для изучения «макроструктуры» и «микроструктуры» электрического поля моделирование необходимо проводить на нескольких моделях методом последовательного моделирования. Из-за высоких требований к точности измерений необходима модель с большим коэффициентом геометрического подобия.

Методом последовательного моделирования можно настолько приблизиться к поверхности эмиттера, что напряженность поля можно определить по формуле

$$E = \frac{kU}{d}, \text{ в/см, где}$$

- U — разность потенциалов между электродами реальной системы;
 d — расстояние от вершины острия до эквипотенциала, когда распределение электрического поля между ними подчиняется закону плоского конденсатора;
 k — коэффициент, определяющий потенциал этой эквипотенциала, k и d определяются с помощью моделирующей установки.
- В работах М. И. Елиносова и Г. Н. Шуппе [1, 2] приводятся фотографии различных форм острий. В нашем случае модели форм острий брались упрощенными, так как исследовалось только относительное изменение потенциала в системе с автоэммитерами, а не влияние на него частных форм отдельных острий.

Все измерения проводились на двух расчетно-моделирующих установках: электролитической ванне и гравитационной моделирующей установке с резиновой мембраной. Статистическая гравитационная моделирующая установка с резиновой мембраной применялась для моделирования двумерных электрических полей, описываемых уравнением Лапласа, без учета поля пространственного заряда. Рабочая поверхность мембраны 900×1400 мм. Мембрана была равномерно растянута на 150% от своей первоначальной величины. Граничные условия на поверхности мембраны задавались с помощью металлических геометрически подобных электродов, а потенциал вертикального смещения элементов поверхности мембраны задавался с помощью специальных устройств и измерялся зондом. Абсолютные ошибки в задании граничных условий (изготовление модели, сборка модели) не превышают 0,5 мм. Относительная погрешность измерений потенциала была не больше 1%.

Электролитическая ванна использовалась для снятия картины поля в системе эмиттеров в форме иглы. Рабочая поверхность ванны 800×1000 мм. Картина поля снималась в виде серии эквипотенциалов, регистрация которых производится автоматически с относительной ошибкой, не превышающей 3%.

Модели для моделирования на гравитационной установке изготавливались из стали по 2 классу точности. Модель для электролитической ванны изготавливалась из меди.

Коэффициент геометрического подобия модели равен 1000. На моделирующих установках снимались зависимости относительного распределения потенциала по оси системы, проходящей вдоль автоэммитера. Электрическое поле пространственного заряда не учитывалось.

Результаты эксперимента

1. Определение эффекта экранирующего действия держателя, несущего эмиттеры на величину электрического поля у вершины эмиттера

Для системы с эмиттером в виде лезвия (рис. 1, а) снималась зависимость относительного распределения потенциала f_n в зависимости от расстояния x , которое отсчитывалось от вершины острия в сторону анода, для различных Δ . Потенциал катода

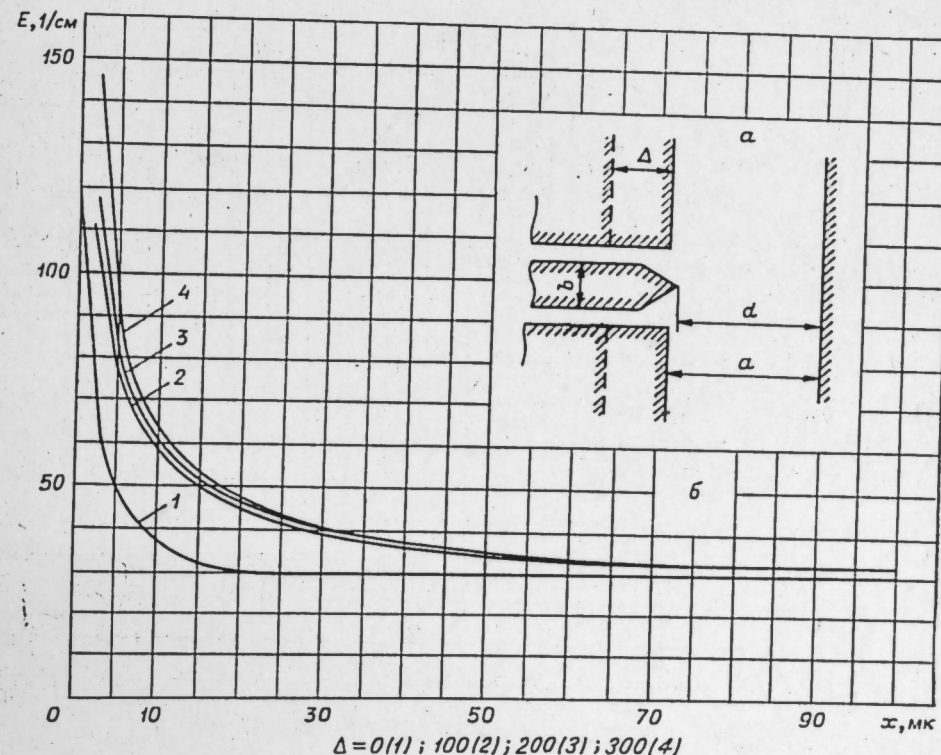


Рис. 1.

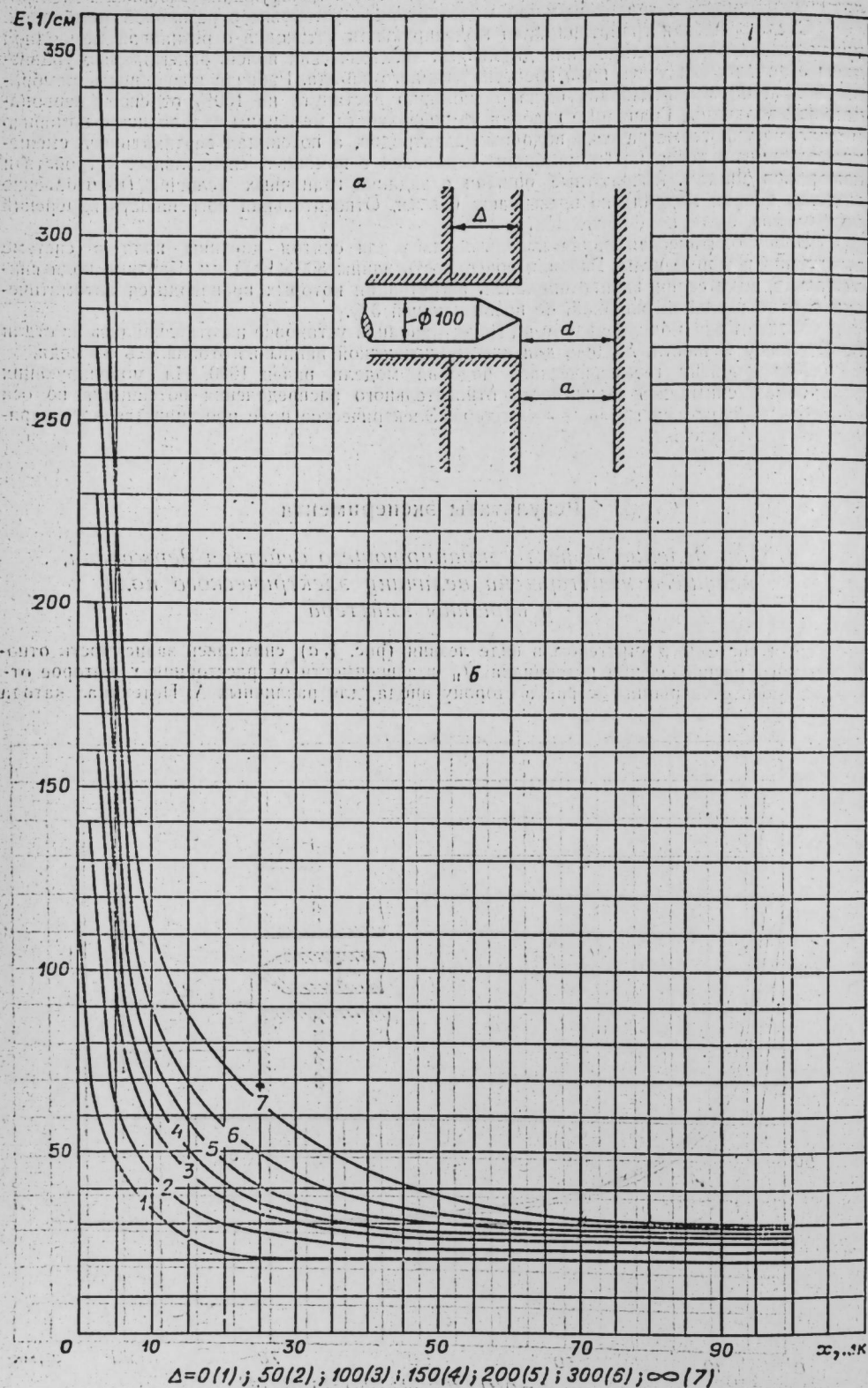


Рис. 2.

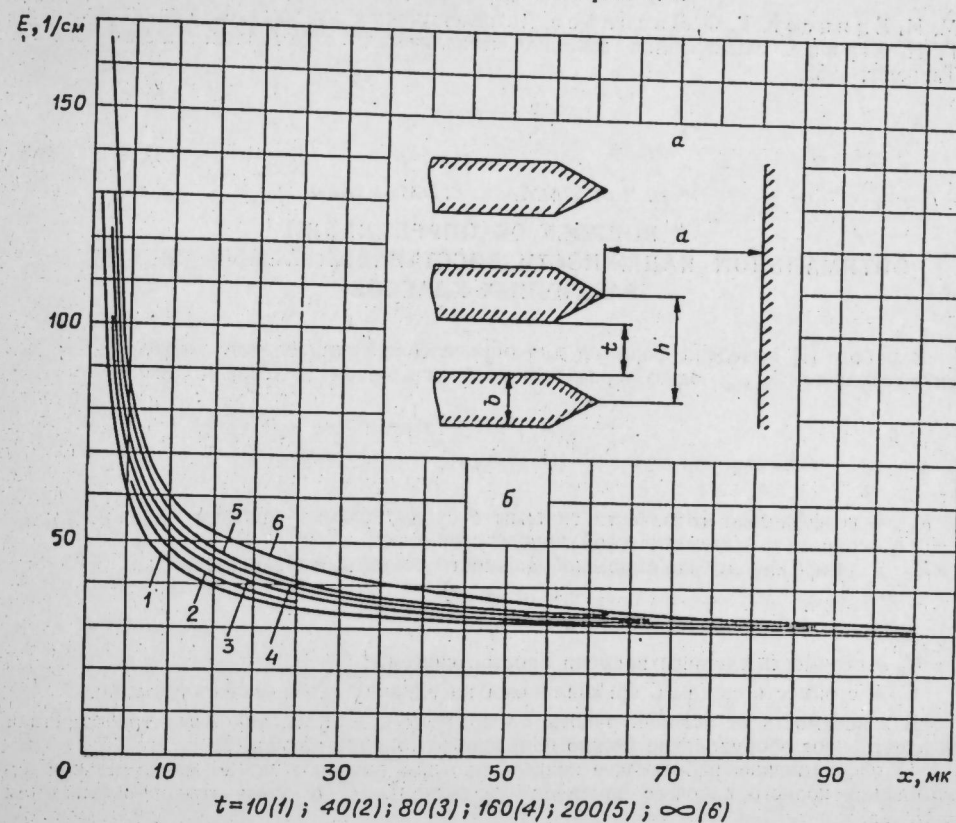
равен 0, анода — 1. Расстояние $d=300$ мк и при измерениях оставалось постоянным. Значение расстояния a изменялось на величину Δ , которая принимала значения 0, 100, 200, 300 и ∞ мк.

На основании экспериментальных измерений строились зависимости $f=F(x)$ для различных Δ . После дифференцирования полученных кривых строился график зависимости напряженности электрического поля E в зависимости от расстояния x (рис. 1, б).

Кривая зависимости $E=F(x)$ для системы с эмиттером в виде иглы (рис. 2, а) при различных Δ представлена на рис. 2, б.

2. Определение влияния расстояний между отдельными эмиттерами на величину электрического поля у их поверхности (система лезвий)

Исследовалась структура электрического поля системы лезвий (рис. 3, а) с постепенно увеличивающимся расстоянием между ними. Размеры эмиттеров и системы остались такими же, как и в предыдущих случаях. Расстояние d оставалось неизменным при различных значениях t . Распределение потенциала снималось по оси, проходящей через среднее лезвие. Экспериментальная кривая распределения напряженности поля в функции x для различных t приведена на рис. 3, б.



ВЫВОДЫ

Анализируя экспериментальные кривые распределения потенциала в системах с автоэмиттерами, можно сделать следующие выводы:

1. Экранирующее действие держателя, несущего эмиттер на напряженность электрического поля у поверхности эмиттера для случая одиночного острия, больше, чем для случая одиночного лезвия.

2. Напряженность поля у вершины лезвия практически не зависит от расстояния до держателя лезвия при $\frac{\Delta}{a} > 3$, а для острия при $\frac{\Delta}{a} > \frac{1}{3}$. Поэтому можно считать,

что если длина одиночного эмиттера $\frac{\Delta}{b} > 5$, то влияние держателя практически не сказывается.

3. Напряженность поля на вершине острого примерно в 3 раза выше, чем на вершине лезвия при одинаковых условиях ($d=300 \text{ мк}$, $\Delta = \infty$) (см. рис. 1, б, 2, б).

4. При плотном расположении отдельных эмиттеров в виде лезвий напряженность электрического поля уменьшается приблизительно в 2 раза, по сравнению с напряженностью поля на вершине одиночного лезвия. При увеличении расстояния между эмиттерами напряженность электрического поля быстро растет и при $t > 3a$ практически не зависит от дальнейшего увеличения расстояния между ними.

Институт физики полупроводников
Сибирского отделения АН СССР,
Новосибирск

Поступила в редакцию
26/IV 1965

ЛИТЕРАТУРА

1. М. И. Елгинсон, Г. Ф. Васильев. Автоэлектронная эмиссия. М., Физматгиз, 1958.
2. Г. Н. Шуппе. Электронная эмиссия металлических кристаллов. Изд-во САГУ, Ташкент, 1959.

УДК 681.142.019.3

Н. Н. КУЛАКОВ, А. С. ЗАГОРУЙКО

К ВОПРОСУ ОБ ОПРЕДЕЛЕНИИ ОПТИМАЛЬНОЙ НАДЕЖНОСТИ ВОССТАНАВЛИВАЕМЫХ СИСТЕМ РАЗЛИЧНЫХ КЛАССОВ

В работе [1] выведена формула для определения оптимального значения коэффициента готовности $K_{г. \text{опт}}$ через параметры системы и математической модели стоимости:

$$K_{г. \text{опт}} = 1 - a^{\frac{1}{a+1}} (1 - K_{во})^{\frac{1}{a+1}} (1 - K_{го})^{\frac{a}{a+1}}, \quad (1)$$

где $K_{го}$ — коэффициент готовности системы с существующим уровнем надежности;

a — параметр математической модели стоимости;

$K_{во}$ — коэффициент экономической важности системы, определяется как

$$K_{во} = \frac{C_п - \bar{C}}{C_п};$$

$C_п$ — стоимость единицы времени простоя системы;

C_0 — стоимость системы, приходящаяся на единицу времени эксплуатации.

В зависимости от условий работы аппаратуры и эксплуатационных требований к ней электронное оборудование можно подразделить на три класса [2]:

1) оборудование, работающее непрерывно, для которого важно максимальное использование полного рабочего времени; надежность P_1 в этом случае выражается формулой

$$P_1 = K_g = \frac{T}{T + T_n}, \quad (2)$$

где K_g — коэффициент готовности;

T — среднее время наработки на отказ;

T_n — среднее время одного простоя;

2) оборудование, которое должно работать без перерыва в течение определенного времени t ; по условиям эксплуатации такая аппаратура не может ремонтироваться во время работы; надежность P определяется выражением

$$P_{II} = P_t = 1 - \frac{t}{T}, \quad (3)$$

где P_t — вероятность безотказной работы на заданное время t ;

3) оборудование, от которого требуется в произвольный момент быть готовым к работе (дежурная аппаратура) и не иметь неисправностей в течение заданного времени t ; надежность P_{III} аппаратуры этого класса может быть представлена так:

$$P_{III} = K_g \cdot P_t = \frac{T}{T + T_n} 1 - \frac{t}{T}. \quad (4)$$

Представляет интерес исследовать вопрос о возможности использования методики, изложенной в работе [1], для определения оптимальной надежности в применении к системам различных классов.

Для систем I класса выражение оптимальной надежности $P_{I \text{ опт}}$ с учетом (1) и (2), можно записать таким образом:

$$P_{I \text{ опт}} = 1 - a^{\frac{1}{a+1}} (1 - K_{во})^{\frac{1}{a+1}} (1 - P_{I0})^{\frac{a}{a+1}}. \quad (5)$$

На рис. 1 представлена зависимость $P_{I \text{ опт}} = f_1(a)$.

Надежность P_1 может быть повышена как за счет увеличения T , так и за счет уменьшения T_n . Надежность системы II класса P_{II} имеет смысл повышать только за счет увеличения T . Выразив величину $\frac{1}{T}$ через K_g из (2)

$$\frac{1}{T} = \frac{1 - K_g}{T_n K_g} \quad (6)$$

и подставив ее в (3), получим формулу для пересчета P_{II} через K_g :

$$P_{II} = \exp \left[- \frac{1 - K_g}{T_n K_g} t \right]. \quad (7)$$

График $P_{II} = \varphi(K_g)$ изображен на рис. 2.

Зависимость $P_{II \text{ опт}} = f_2(a)$, построенная по формуле (1) посредством пересчета $P_{II \text{ опт}}$ через $K_{г. \text{опт}}$ (7)

на рис. 1, имеет такой же характер, как и зависимость $P_{I \text{ опт}} = f_1(a)$.

Аналогично пересчитывается надежность систем III класса P_{III} через K_g :

$$P_{III} = K_g \exp \left[- \frac{1 - K_g}{T_n K_g} t \right]. \quad (8)$$

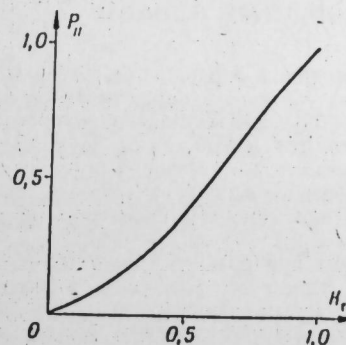


Рис. 2. График пересчета надежности системы II класса P_{II} по коэффициенту готовности K_g .

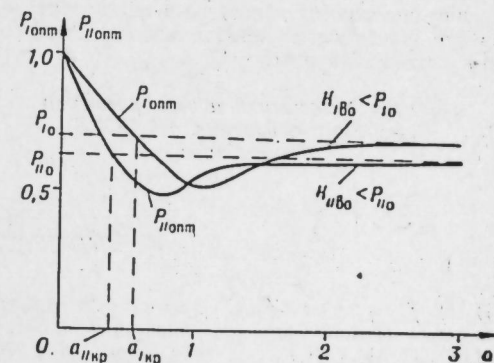


Рис. 1. Зависимости оптимальной надежности систем I и II класса ($P_{I \text{ опт}}$ и $P_{II \text{ опт}}$) от коэффициента a .

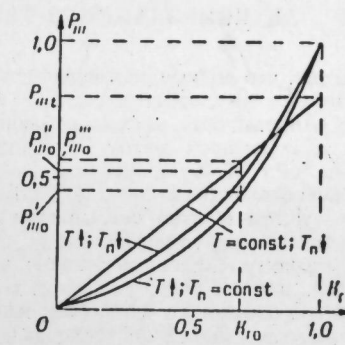


Рис. 3. График пересчета надежности системы III класса P_{III} по коэффициенту готовности K_g .

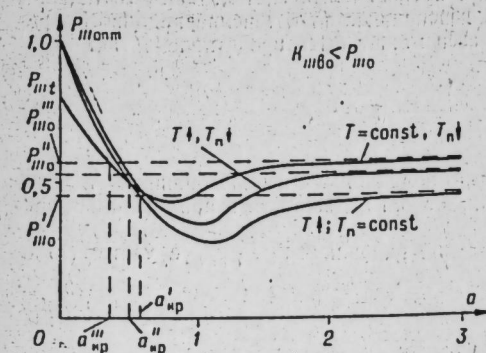


Рис. 4: Зависимости оптимальной надежности системы III класса $P_{III\text{opt}}$ от коэффициента a .

Таким образом, для решения вопроса о наиболее экономичном способе повышения надежности и вообще о целесообразности (с экономической точки зрения) повышения надежности системы любого класса можно разработать методику, аналогичную изложенной в работе [1].

Институт автоматики и электрометрии
Сибирского отделения АН СССР,
Новосибирск

Поступила в редакцию
5/III 1965

ЛИТЕРАТУРА

1. Н. Н. Кулаков, А. С. Загоруйко. Определение экономической эффективности и срока окупаемости восстанавливаемых систем при повышении их надежности.— Изв. СО АН СССР, сер. техн. наук, 1965, № 6, вып. 2.
2. П. П. Месяцев. Надежность производства электронно-вычислительных машин. М., Машгиз, 1963.

УДК 621.3.032.35.
+535.37

П. Р. ГАРБЕР, С. П. КРЫЛОВА, С. В. КУЗЬМИН

ЛЮМИНЕСЦЕНЦИЯ ХЛОРИСТОГО НАТРИЯ, АКТИВИРОВАННОГО ЧЕТЫРЕХХЛОРИСТЫМ ОЛОВОМ

Известно, что водные растворы щелочных галогенидов, содержащие малые добавки олова, оставаясь на открытом воздухе, со временем теряют способность люминесцировать [1, 2]. Аналогичный эффект наблюдается при облучении люминесцирующего раствора ультрафиолетовым светом [3]. Принято считать, что в отличие от двухвалентного олова ионы Sn^{4+} образуют нелюминесцирующие комплексы в насыщенных водных растворах щелочногалогенидных солей [4]. Отсутствие свечения жидких и твердых оловосодержащих систем обычно связывается с активно протекающим процессом окисления двухвалентных ионов олова [5].

По-видимому, именно в связи с этим мнением при сравнительной многочисленности работ, посвященных оптическим свойствам систем $\text{Me Hal} - \text{Sn}$, в литературе щелочногалогенидных солей галогенидами олова в их четырехвалентной форме. Между тем сопоставление спектральных характеристик фосфоров, активированных ионами одного и того же элемента в различной валентной форме, могло бы способствовать выяснению механизма высвечивания и уточнению деталей микроструктуры центров свечения.

На рис. 3 представлены графики пересчета для 3 различных случаев повышения надежности:

- 1) только за счет увеличения $T \uparrow$;
- 2) только за счет уменьшения $T_n \uparrow$;
- 3) за счет одновременного увеличения $T \uparrow$ и уменьшения $T_n \uparrow$.

В соответствии с этим на рис. 4 изображены зависимости

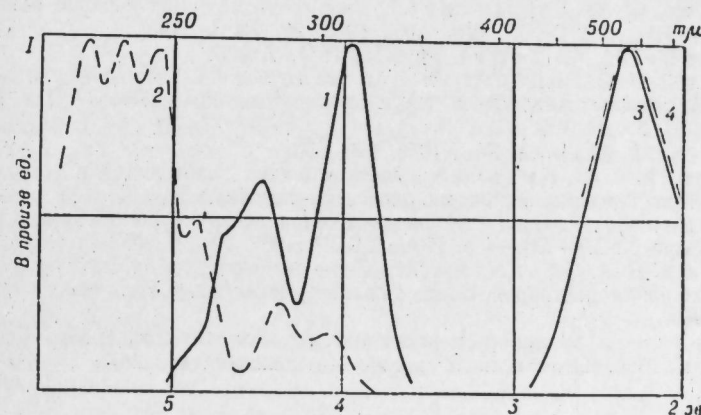
$$P_{III\text{opt}} = f_3(a).$$

Предпочтение тому или иному способу повышения надежности можно отдать, находя по значениям коэффициента a , соответствующим этим способам, величины $P_{III\text{opt}}$ и стоимости систем C с повышенной надежностью. Следует выбрать тот вариант, при котором надежность $P_{III\text{opt}}$ получается наибольшей, а стоимость C — наименьшей.

В ходе исследования оптических свойств ряда щелочногалогенидных кристаллов, активированных соединениями двух- и четырехвалентного олова, обнаружилось, что хлористый натрий с добавкой SnCl_4 при возбуждении ртутной линией 313 μ заметно люминесцирует в зеленой части видимого спектра. Зеленое излучение можно наблюдать при помощи ультрафиолетового микроскопа на поверхности сухой соли NaCl в местах попадания мельчайших капелек жидкого SnCl_4 . Таким же образом светятся кристаллики, осажденные из насыщенного водного раствора NaCl с добавкой 0,1—5% жидкого или твердого $(\text{SnCl}_4 \cdot 5\text{H}_2\text{O})$ четыреххлористого олова, а также растертые и затем слегка увлажненные смеси хлористого натрия и хлорного олова*. В отличие от $\text{NaCl} - \text{Sn}^{2+}$, люминесценция систем $\text{NaCl} - \text{Sn}^{4+}$ возникает не всегда. Отсутствие зеленого излучения $\text{NaCl} - \text{SnCl}_4$ чаще наблюдается при активации твердым четыреххлористым оловом.

Поскольку в кристаллофосфорах $\text{NaCl} - \text{Sn}^{2+}$ при известных условиях также отмечалось зеленое свечение (так называемые центры «второго типа» [7]), казалось целесообразным сопоставить спектральные характеристики «зеленых» центров в кристаллах $\text{NaCl} - \text{Sn}^{2+}$ и спектры возбуждения и излучения люминесцирующих образцов $\text{NaCl} - \text{SnCl}_4$.

На рисунке представлены спектры возбуждения и люминесценции зеленого свечения незакаленного кристалла $\text{NaCl} - \text{Sn}^{2+}$ (кривые 2, 4) и активированной жидким SnCl_4 соли хлористого натрия (кривые 1, 3), снятые при комнатной температуре. Как видно из рисунка, спектральный состав зеленой люминесценции $\text{NaCl} - \text{SnCl}_4$ полностью соответствует длинноволновой полосе свечения (2, 3 эв) кристаллофосфора $\text{NaCl} - \text{Sn}^{2+}$. Спектр возбуждения $\text{NaCl} - \text{SnCl}_4$ (кривая 1), напротив, резко отличается от кривой возбуждения «зеленых» центров кристалла $\text{NaCl} - \text{Sn}^{2+}$. Слабо разрешенный коротковолновый дублет имеет пики при 4,68 и 4,5 эв, а максимум нерасщепленной сильной длинноволновой полосы возбуждения приходится на 3,95 эв. Смещение спектра возбуждения в сторону меньших энергий привело к тому, что стоксовский сдвиг «зеленых» центров $\text{NaCl} - \text{SnCl}_4$ уменьшился приблизительно на 0,2 эв по сравнению с величиной стоксовых потерь зеленой полосы излучения кристаллофосфора $\text{NaCl} - \text{Sn}^{2+}$.



Спектры возбуждения (1, 2) и люминесценции (3, 4) кристаллофосфоров $\text{NaCl} - \text{Sn}$:

1, 3 — излучающие зеленую полосу $\text{NaCl} - \text{Sn}^{4+}$; 2, 4 — излучающие зеленую полосу $\text{NaCl} - \text{Sn}^{2+}$ (по данным [7]).

Из сопоставления кривых 1 и 2 следует, что за люминесценцию в случае Sn^{2+} и Sn^{4+} -активированных фосфоров ответственны разные системы электронных переходов**. Это означает, что зеленое свечение люминесцирующих образцов $\text{NaCl} - \text{SnCl}_4$ и излучение незакаленных кристаллов $\text{NaCl} - \text{Sn}^{2+}$ обязаны поглощающим центрам неординарной структуры.

С понижением температуры до -180°C спектры возбуждения и излучения $\text{NaCl} - \text{SnCl}_4$ не претерпевают существенных изменений, происходит лишь обычное сужение и рост интенсивности полос. Данные измерений и прямые визуальные наблюдения

* В последнем случае могут возникнуть также «синие» центры свечения, спектры люминесценции и возбуждения которых аналогичны соответствующим спектрам синего свечения кристаллофосфоров $\text{NaCl} - \text{Sn}^{2+}$ [6].

** Зеленое излучение $\text{NaCl} - \text{Sn}^{4+}$ возбуждается там, где поглощение основной решетки практически отсутствует, поэтому нет оснований считать его связанным, подобно свечению Sn^{4+} в водном растворе HCl [8], с процессами электронного переноса.

в широком температурном интервале свидетельствуют о том, что центры зеленого свечения в NaCl—SnCl_4 представляют собой, по-видимому, весьма стабильные образования.

Интересно было выяснить, существует ли аналогия между строением центров зеленого свечения твердых фосфоров NaCl—Sn и структурой нелюминесцирующих комплексов, образуемых четырехвалентными ионами олова в насыщенном водном растворе хлористого натрия. С этой целью были сопоставлены картины свечения кристаллов, полученных перекристаллизацией фосфора NaCl—Sn^{2+} из двух растворов: чисто водного и содержащего H_2O_2 . Наблюдения под ультрафиолетовым микроскопом (возбуждение ртутной линией 313 мк) показали, что на участке образца, смоченном дистиллированной водой, синее свечение вспыхивает после просыхания с прежней силой, в то время как область, заключенная в границах растекания капли 30%-ного раствора перекиси водорода, представляет собой абсолютно темное поле. Кристаллики NaCl—SnCl_4 , выпавшие в местах попадания H_2O_2 , приобретают типичную октаэдрическую огранку, служащую признаком комплекса $(\text{SnCl}_6)^{4-}$ — в известных микрокристаллических реакциях открытия ионов олова [9, 10].

Эти опыты заставляют предполагать, что центры, излучающие полосу $2,3 \text{ эв}$ в фосфорах, полученных непосредственной активацией хлористого натрия четырехвалентным оловом, представляют собой образования, отличающиеся по структуре от тех, ядром которых является комплекс $(\text{SnCl}_6)^{4-}$.

Институт теплофизики
Сибирского отделения АН СССР,
Новосибирск

Поступила в редакцию
5/II 1965

ЛИТЕРАТУРА

1. П. Прингсгейм. Флуоресценция и фосфоресценция. М., ИЛ, 1951, стр. 396.
2. М. У. Белый, К. Ф. Гудыменко. Люминесценция и поглощение растворов солей олова. — Изв. АН СССР, сер. физ., 1956, 20, № 5, 579.
3. P. Pringsheim, M. Vogel. Physica, 1941, 7, 225.
4. М. У. Белый, И. С. Горбань, А. А. Шишловский. Фотолюминесценция галогенидных солей тяжелых металлов и полупроводниковых кристаллов. — Изв. АН СССР, сер. физ. 1962, 26, № 103.
5. K. H. Butler. J. Electroch. Soc., 1953, 100, 250.
6. П. Р. Гарбер, С. В. Кузьмин. Люминесценция галогенидов натрия, активированных четырехвалентными ионами олова. (В печати).
7. Р. И. Гиндина, Г. К. Вале. Исследование микроструктуры центров люминесценции в фосфоре NaCl—Sn . — Тр. ИФА ЭССР, 1962, № 21, 30.
8. М. У. Белый, Б. А. Охрименко. Влияние температуры на спектры люминесценции и поглощения растворов солей тяжелых металлов. — Укр. физ. журн., 1963, 9, № 10, 1059.
9. И. М. Коренман. Микрокристаллокопия. М., Госхимиздат, 1955.
10. В. Н. Алексеев. Качественный анализ. М., Госхимиздат, 1960.

УДК 621.321.3.032.35
535.373.1

П. Р. ГАРБЕР, С. В. КУЗЬМИН

МНОГОПОЛОСНОСТЬ ИЗЛУЧЕНИЯ $\text{NH}_4\text{Cl—Sn}$

В работах [1—3] изучались изменения в спектрах возбуждения и люминесценции фосфоров $\text{NH}_4\text{Hal—SnHal}_2$, связанные с полиморфным переходом галогенидов аммония от CsCl -к NaCl -типу решетки. Образцами служили смеси солей NH_4Hal и SnHal_2 , прогретые в течение 20 ч в вакууме при температуре 200°C . Изготовленный таким способом фосфор $\text{NH}_4\text{Cl—Sn}$ при комнатной температуре обнаруживает красную люминесценцию с максимумом $1,73 \text{ эв}$. Наиболее длинноволновые пики возбуждения красного свечения находятся около $4,7$ и $4,48 \text{ эв}$ [2].

Выше точки полиморфного превращения хлористого аммония ($184,3^\circ\text{C}$) характер свечения резко меняется: красная люминесценция уступает место зеленой ($2,25 \text{ эв}$), причем спектр возбуждения новой полосы оказывается приблизительно на $0,3 \text{ эв}$ смещенным в сторону меньших энергий относительно кривой возбуждения низкотемпературной люминесценции. По данным [2], при переходе от CsCl -к NaCl -модификации $\text{NH}_4\text{Cl—Sn}$ стоксовы потери уменьшаются на $0,84 \text{ эв}$.

Изучавшиеся в настоящей работе образцы представляют собой мелкие кристаллики и поликристаллические слои, полученные медленным испарением водного раствора $\text{NH}_4\text{Cl+SnCl}_2$. Использовались соли NH_4Cl особой чистоты класса А-2 и $\text{SnCl}_2 \cdot 2\text{H}_2\text{O}$ марки х.ч. Концентрация примеси менялась в пределах $0,01—0,5\%$. При рассмотрении под микроскопом МУФ-3М ($\times 70$, фильтр УФС-2) наблюдаются зелено-желтые ($2,1 \text{ эв}$) дендриты с отдельными красными ($1,7 \text{ эв}$) вкраплениями недедритовой формы. С увеличением концентрации примеси область красного свечения распространяется на большую часть площади образца.

Спектральные характеристики отдельных участков образца (размером около $0,1 \text{ мм}^2$) сняты с помощью установки, состоящей из двух монохроматоров, ультрафиолетового микроскопа и ФЭУ с усилителем.

Форма и положение пиков спектра возбуждения зелено-желтого ($2,1 \text{ эв}$) свечения образцов с малой концентрацией примеси (кривая 1, рис. 1) совпадают с указанными А. Я. Паз [2] максимумами возбуждения полосы $1,73 \text{ эв}$. Некоторая деформация полученных нами спектров возбуждения красного ($1,7 \text{ эв}$) излучения (кривая 2, рис. 1) может быть связана с превращением спектра возбуждения (поглощения) в кривую квантового выхода для высоких концентраций активатора.

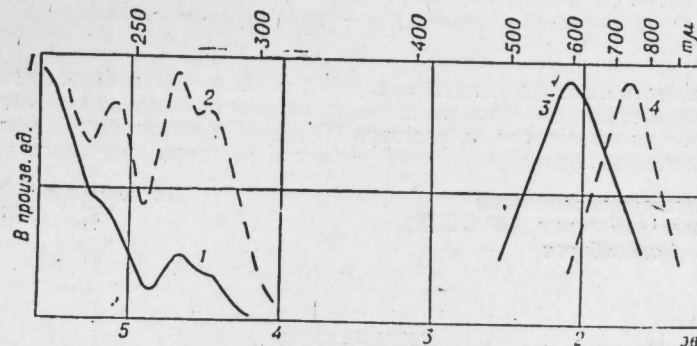


Рис. 1. Спектры возбуждения (1, 2) и люминесценции (3, 4).
1, 3 — зелено-желтое свечение; 2, 4 — красное свечение.

Итак, в фосфоре $\text{NH}_4\text{Cl—Sn}$ отмечается та же ситуация, что и для кристаллов NaCl—Sn и CsCl—Ti , когда разным полосам излучения соответствует один и тот же спектр возбуждения. Авторы [4, 5] приписывают многополосность люминесценции этих фосфоров существованию центров свечения различной микроструктуры. Следует однако отметить, что факт совпадения спектров возбуждения разных полос излучения не находит разъяснения в рамках такой гипотезы. Существование систем, подобных NaCl—Sn , $\text{NH}_4\text{Cl—Sn}$, по-видимому, требует привлечения качественно новых представлений к описанию процессов высвечивания в щелочногалогенидных фосфорах.

Зелено-желтое ($2,1 \text{ эв}$) свечение, появляющееся уже при самых малых концентрациях, а также при повторной кристаллизации светившихся ранее красным ($1,7 \text{ эв}$) областей, представляет более устойчивый для обычных условий центр. О нестабильности красного свечения и склонности его к переходу в зеленое упоминается в работе [3]. Нередко можно наблюдать, что с повышением температуры вплоть до точки полиморфного превращения зелено-желтое свечение участками переходит в красное и только затем, с превышением температуры перехода, становится чисто зеленым.

Наряду с обычными зелено-желтыми ($2,1 \text{ эв}$) и красными ($1,7 \text{ эв}$) центрами в ряде случаев нам удавалось наблюдать появление локальных участков иного свечения, в том числе характеризующихся спектрами, близкими к спектрам излучения олова в высокотемпературной модификации NH_4Cl (кривые 1, 3, рис. 2). Особенно часто возникают отдельные точки и области, светящиеся желто-оранжевым ($1,95 \text{ эв}$) светом (кривые 2, 4, рис. 2). Последние появлялись сразу после выпаривания раствора, независимо от концентрации примеси в нем. Спектр возбуждения желто-оранжевой люминесценции, имеющий типично «оловянную» структуру, смещен относительно положения кривой 1 рис. 1 примерно на $1,2 \text{ эв}$, что намного превосходит сдвиги, наблюдавшиеся А. Я. Паз [2] в аммонийных галогенидах, активированных оловом и таллием после перехода решетки NH_4Cl в высокотемпературную модификацию.

Изменения в спектрах возбуждения и эмиссии после фазового перехода в работах [2, 3], в соответствии с зейтцевской моделью центра свечения, объясняются влиянием типа структуры кристаллической решетки, окружающей ион активатора, на систему электронно-колебательных переходов в нем. С этой точки зрения появление дополнительных полос излучения $\text{NH}_4\text{Cl—Sn}$ при комнатной температуре, т. е. в условиях,

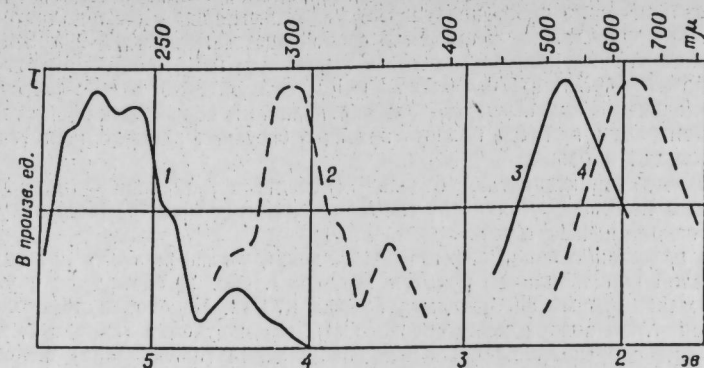


Рис. 2. Спектры возбуждения (1, 2) и люминесценции (3, 4).
1, 3 — зеленое свечение, 2, 4 — желто-оранжевое свечение.

далеких от фазового перехода, свидетельствует об образовании люминесцентных центров различной микроструктуры. Возникновение разнотипного окружения активаторного иона в закристаллизовавшемся из раствора $\text{NH}_4\text{Cl} - \text{Sn}$ может быть связано с существованием различных соединений олова в водном растворе хлористого аммония [6].

Институт теплофизики
Сибирского отделения АН СССР,
Новосибирск

Поступила в редакцию
5/II 1965

ЛИТЕРАТУРА

1. Н. И. Иванова. Дисс., ЛГУ, 1952.
2. А. Я. Паэ. Влияние типа кристаллической решетки на спектры свечения и возбуждения аммонийногалондных фосфоров. — Тр. ИФА АН ЭССР, 1958, № 8, 47.
3. А. Я. Паэ. Дисс., ТГУ, 1960.
4. Р. И. Гиндина, Г. К. Вале. Исследование микроструктуры центров люминесценции в фосфоре $\text{NaCl} - \text{Sn}$. — Тр. ИФА АН ЭССР, 1962, № 21, 30.
5. А. Ф. Малышева. Спектральные характеристики сублимат-фосфоров $\text{CsCl} - \text{Tl}$. — Тр. ИФА АН ЭССР, 1960, № 11, 29.
6. Г. Ремп. Курс неорганической химии. М., ИЛ, 1963.

КРИТИКА И БИБЛИОГРАФИЯ

ОБ ОДНОМ ИЗ ПРОГРЕССИВНЫХ МЕТОДОВ КОКСОВАНИЯ УГЛЕЙ*

В последние годы в СССР и за рубежом значительный интерес вызывают новые методы непрерывного коксования газовых и слабоспекающихся углей. Большое количество исследований посвящено разработке наиболее благоприятных условий процесса термической переработки углей и выбору надежной аппаратуры для бесперебойной и длительной работы установок. Однако не всегда лабораторные и полужаводские исследования удается довести до промышленного внедрения.

Рецензируемая работа посвящена одному из наиболее актуальных вопросов новой технологии коксования, определяющему интенсивность процесса и качество получаемого формованного кокса. Рассматриваемый в ней процесс нагрева углей с помощью твердых теплоносителей — один из наиболее прогрессивных методов коксования углей.

В монографии впервые обобщены вопросы теории и практики применения твердого теплоносителя в процессе термической переработки топлив. Авторы широко использовали оригинальные результаты теоретических и экспериментальных исследований отечественных и зарубежных авторов, в том числе и свои работы в области исследования нагрева с применением твердого теплоносителя, которые получили широкое признание. Одновременно в монографии дана критическая оценка различных способов нагрева с использованием твердого теплоносителя в процессах термической переработки топлив.

Книга открывается главой о теоретических основах процесса нагрева с применением твердого теплоносителя. В этой главе показана сущность процесса, приведена сравнительная оценка нагревательных устройств с внутренним обогревом, дана достаточно обоснованная классификация установок с твердым теплоносителем, сделан глубокий всесторонний анализ тепловых явлений, протекающих в процессе теплообмена в печах с внутренним обогревом и твердым теплоносителем. Эта глава — одна из наиболее важных для научного освещения проблемы, в ней впервые в широком плане и на высоком научном уровне дается творческая разработка основных показателей процесса. С исчерпывающей полнотой разработан метод расчета удельного расхода теплоносителя для осуществления процесса термической переработки топлива.

Во II главе авторы описывают схемы установок для термической переработки топлив с применением твердого теплоносителя, разработанных в СССР и за рубежом. Рассмотрены установки для полукоксования, газификации, брикетирования, процессов пиролиза и крекинга, непрерывного коксования.

В III главе особое внимание авторы уделили лабораторным исследованиям применения твердого теплоносителя при термической переработке углей Восточной Сибири. А. Л. Перепелицей и Н. З. Гусевым найдены зависимости температур нагрева угля от времени контактирования с твердым теплоносителем, от температуры последнего, размеров частиц контактируемых сред, их весовых соотношений и др.

Описание и результаты испытаний полужаводской установки непрерывного действия для получения формованного кокса из некоксуемых углей приводятся в главе IV.

В процессе экспериментирования авторами было установлено влияние различных факторов на время пребывания угля в нагревательном аппарате с твердым теплоносителем. Результаты экспериментов могут быть использованы проектировщиками для подсчета допустимого количества материала в аппаратах аналогичной конструкции и для определения скорости поступательного движения материала.

Большое внимание при исследовании полужаводской установки авторы уделили нахождению оптимальных режимов основной стадии непрерывного коксования — нагреву

* А. Л. Перепелица, Н. З. Гусев. Применение твердого теплоносителя в схеме непрерывного коксования углей. М., Изд-во АН СССР, 1963.

угля до температуры размягчения. В результате экспериментов установлено влияние часового расхода угля и удельного расхода теплоносителя (речной гальки) на изменение средневзвешенного диаметра частиц угля в аппарате, вращающемся с заданным числом оборотов, найдена зависимость изменения средневзвешенного аппарата, температуры теплоносителя и др.

В книге имеются и недостатки. Так, в главе III при рассмотрении вопроса термического разложения отдельных углей Восточной Сибири с применением твердого теплоносителя следовало бы более четко указать на влияние природы ископаемых углей на протекание любого процесса их термической деструкции.

В IV главе в разделе «Результаты холодной и горячей обкатки опытной установки» авторам необходимо было более подробно остановиться на описании свойств речной гальки, в частности на методах ее получения и подготовки для промышленного использования в технологическом процессе.

В работе отсутствует технико-экономическое сравнение предполагаемого метода непрерывного коксования с другими существующими методами коксования, что позволило бы определить его экономическую эффективность.

Указанные недостатки, однако, не снижают достоинства монографии — серьезного вклада в отечественную научно-техническую литературу.

И. М. Ханин, М. Я. Герман.

Редакторы Т. Б. Мелкозерова, Р. П. Ефимова
Художественный редактор В. Г. Бурыкин
Технический редактор Е. М. Елистратова
Корректоры Л. Н. Шадрина, Р. С. Митлева

Подписано к печати 24 февраля 1966 г. МН 03029. Бумага 70×108¹/₁₆. 10,5 печ. л., 14,7 усл. печ. л., 15 уч.-изд. л. Тираж 2020 экз.

Издательство «Наука», Сибирское отделение. Советская, 20. Заказ № 198. Типография № 1. Новосибирск, Красный проспект, 22. Цена 70 коп.

Н О В Ы Е К Н И Г И

СИБИРСКОГО ОТДЕЛЕНИЯ ИЗДАТЕЛЬСТВА «НАУКА»

Вышли из печати и имеются в продаже
(или будут выпущены в ближайшее время в свет)
следующие книги:

«Автоматический контроль и методы электрических измерений». (Труды V конф.: I т.— 19,9 л.; II т.— 21 л.)

«Автоматический контроль и методы электрических измерений». (Труды VI конф., I т., 13 л.)

А. Н. Домарицкий, Л. Н. Иванов, Е. Н. Карышев,
Б. С. Силицын. Дискретная измерительная корреляционная система. 6,5 л.

З. Г. Каганов. Цепные дроби в электротехнике. 7,5 л.

Л. Д. Дик. Измерение ускорений. 8,5 л.

Р. М. Мазитова, В. Н. Охотская, Б. И. Пучкин.
Обоняние и его моделирование. 7 л.

Книги высылаются наложенным платежом.

Заявки направлять по адресу: Новосибирск-99, ул. Советская,
20, комн. 208. Издательство «Наука», Сибирское отделение
или г. Новосибирск-76, Красный проспект, 51, магазин
«Академкнига».

ОПЕЧАТКИ

Страница	Строка	Напечатано	Должно быть
35	В графе 5	$\frac{\sqrt{2k}}{\gamma}$	$\frac{\sqrt{2} k}{\gamma}$
51	6, 7 сверху	определяли распределений	определяли из распределений
98	В формуле 6	$= \frac{2 \chi_{кр}}{K_d}$	$= \frac{2 \chi_{кр}}{K_d}$
158	17 снизу	$= \frac{C_n - \bar{C}}{C_n};$	$= \frac{C_n - C'_0}{C_n};$

К журналу «Известия СОАН СССР» — № 2, вып. 1, серия технических наук, 1966 :

К СВЕДЕНИЮ АВТОРОВ

Представляемые в журнал статьи должны излагать новые, еще не опубликованные результаты научных исследований, в конце работы должны содержаться краткие выводы.

Редакция просит авторов при подготовке статей руководствоваться изложенными ниже правилами. Статьи, оформленные без соблюдения этих правил, редколлегией не рассматриваются.

1. На публикацию представляемых в редакцию материалов требуется письменное разрешение руководства организации, на средства которой проводились работы.

2. Размер статей, включая иллюстративный материал и библиографию, не должен превышать 15 стр. машинописи для работ проблемного характера и 10 стр. — для научных сообщений, посвященных частным вопросам. Для кратких сообщений максимальный объем установлен 5 стр. машинописи.

3. Статья должна быть напечатана на пишущей машинке без рукописных вставок и помяток на одной стороне стандартного листа. Как основной текст, так и подстрочные примечания, подрисовочные подписи, список литературы и т. д. обязательно печатаются через два интервала.

4. Рукописи и иллюстративный материал к ним представляются в двух экземплярах. Рукопись должна быть вычитана и подписана автором. Математические и структурные формулы должны быть тщательно вписаны в оба экземпляра рукописи и дополнены в дубликаты на отдельном листе.

5. Цитируемая в статье литература должна быть оформлена в виде общего списка (в порядке цитирования), который помещается в конце статьи; в тексте ссылка на литературу отмечается порядковой цифрой в квадратных скобках, например, [1].

6. Литература должна быть оформлена в следующем порядке: а) литература в списке дается на тех языках, на которых она издана; б) библиографические данные приводятся по титульному листу издания, все элементы библиографического перечня отделяются друг от друга запятыми; в) цифры, обозначающие том, выпуск, издание, страницы, ставятся после сокращенного слова, например, т. III, вып. 8, изд. 2.

Схема перечня библиографических данных:

Для книг — инициалы и фамилия автора, название книги, название издательства, место издания, год издания.

Для журналов — инициалы, фамилия автора, название статьи, название журнала; том, выпуск (т. III, вып. 7), номер, год. В работах по химии в соответствии с порядком, принятым в специализированных химических журналах, допускаются ссылки на работы, опубликованные в журналах, без названия статей.

7. Формулы, латинские, греческие и т. п. выражения следует давать только в случаях необходимости, вписывая их на машинке или от руки (темными чернилами или тушью) четко и ровно, чтобы не было никаких сомнений при чтении каждого знака.

Во избежание недоразумений нужно делать ясное различие между одинаковыми по начертанию заглавными и строчными буквами в формулах, подчеркивая заглавные буквы двумя черточками снизу. Греческие буквы обводятся красным карандашом.

8. Тоновые иллюстрации (фото) должны быть сделаны с хорошего негатива контрастной печатью. Штриховые же должны быть выполнены ровно наложенной тушью на кальке, допускается также плотная белая бумага. На абсциссе и ординате графиков должны быть указаны складываемые величины и единицы их измерения.

Не рекомендуется рисунки и чертежи загромождать надписями, лучше детали рисунка занумеровать и дать расшифровку номеров в подрисовочной подписи.

Все иллюстрации к статье должны иметь сквозную нумерацию. Номера эти проставляются простым карандашом на каждом рисунке или чертеже, а также в рукописи на левом поле страницы против соответствующего места в тексте (включать иллюстрации в текст рукописи нельзя). Кроме того, на обороте каждого рисунка ставится название статьи и фамилия автора. В рукописи должна быть опись иллюстраций (в 2-х экземплярах) согласно их порядковой нумерации.

9. Авторы должны избегать повторения одних и тех же данных в таблицах, графиках и тексте статей.

10. Корректур дается авторам лишь для контроля. Стилистическая правка, дополнения и сокращения в корректуре не допускаются. Иногородним авторам корректура не высылается.

11. Датой поступления рукописи, посланной на доработку автору, считается дата ее возвращения в редакцию.

12. После опубликования статьи автор получает 25 оттисков. Статьи направляются по адресу: Новосибирск-99, ул. Советская, 20, комн. 302.