

11-10/2
8

ИЗВЕСТИЯ СИБИРСКОГО ОТДЕЛЕНИЯ АКАДЕМИИ НАУК СССР

СЕРИЯ ТЕХНИЧЕСКИХ НАУК

ВЫПУСК 2

1975

№ 8

ИЗДАТЕЛЬСТВО «НАУКА», СИБИРСКОЕ ОТДЕЛЕНИЕ
НОВОСИБИРСК

ИЗВЕСТИЯ СИБИРСКОГО ОТДЕЛЕНИЯ АКАДЕМИИ НАУК СССР

СЕРИЯ ТЕХНИЧЕСКИХ НАУК

Год основания журнала 1957 Год основания серии 1963	Периодичность журнала 15 номеров в год Периодичность серии 3 номера в год	№ 8 (248) Вып. 2	Июнь 1975
--	--	---------------------	--------------

СОДЕРЖАНИЕ

М. Ф. Жуков. Генераторы низкотемпературной плазмы: теплофизические и электрофизические проблемы	3
М. Ф. Жуков, Н. М. Засыпкин, И. И. Мишине, М. И. Сазонов. Влияние газовой завесы на теплообмен между турбулентной дугой и стенкой разрядной камеры	15
Б. А. Урюков. Теория эрозии электродов в нестационарных пятнах электрической дуги	21
М. П. Стронгин. Распределение тока и потенциала в областях, близких к электроду	31
С. А. Гапонов. Устойчивость пограничного слоя несжимаемой жидкости над щелевой поверхностью	37
Б. В. Бошняков, В. В. Затолока, М. И. Ярославцев. Исследование отрывного обтекания конусов с турбулентным пограничным слоем при числах Маха 8,3 и 10	43
М. А. Гольдфельд, В. В. Затолока, Э. Г. Тютина. Экспериментальное исследование отрывных свойств пограничного слоя перед прямоугольным выступом на цилиндрической трубе	51
В. С. Демьяненко, В. А. Игумнов. Пространственное взаимодействие ударной волны с турбулентным пограничным слоем в области интерференции пересекающихся поверхностей	56
Н. М. Бычков, Б. Л. Дубровский. Результаты измерения боковых сил на вращающихся моделях большого удлинения в дозвуковом потоке	63
В. Е. Накоряков, Н. С. Сафарова. Простая формула для определения положения поверхности раздела фаз при конденсации затопленной струи пара	69
О. Н. Лебедев. Некоторые термодинамические особенности процессов смесеобразования	72
М. Я. Штейнберг, Н. А. Рубцов. Приближенное исследование температурного распределения в цилиндрической оболочке	78
Ю. А. Журавлев, В. Г. Лисенко. Учет селективности излучения при постановке зональных расчетов теплообмена в камерах сгорания	83
М. А. Султанов. Влияние электропроводности на механизм разрушения металлических пластин под действием сверхзвукового плазменного факела в импульсном разряде большой мощности	90
В. И. Потапов, Б. И. Деятов. Моделирование на ЦВМ системы управления распределенными технологическими процессами с учетом профилей скоростей в потоках сред	94
В. И. Потапов, Е. А. Ваганов, А. С. Исаев, П. В. Ефимов. Анализ с помощью ЦВМ структуры послойных объектов по их изображению	98
Н. Д. Демиденко, С. В. Ушанов. Моделирование, распределенный контроль и распределенное управление процессами ректификации	103
М. В. Костенко, А. И. Месеняшин. Экстремальные значения напряжения на емкости при коммутации в контуре R, L, C с затухающей гармонической э. д. с.	110
Е. И. Катковников. Алгоритм решения уравнений многопроводной однородной линии электропередачи	118
Ю. Ф. Королук. Параметры элементов электрических систем при расчете неполнофазных режимов методом двух координат	128
А. Х. Калюжный, Н. М. Письман. Использование уравнений Максвелла для учета массового ротора турбогенератора	136
А. И. Крайко. О статье А. П. Шашкина. «Определение формы плоского сверхзвукового сопла»	144
А. П. Шашкин. Ответ на замечания А. И. Крайко по поводу статьи «Определение формы плоского сверхзвукового сопла»	145



ИЗВЕСТИЯ СИБИРСКОГО ОТДЕЛЕНИЯ АН СССР

Главный редактор журнала чл.-корр. М. Ф. Жуков

РЕДАКЦИОННАЯ КОЛЛЕГИЯ СЕРИИ ТЕХНИЧЕСКИХ НАУК

Ответственный редактор серии чл.-корр. М. Ф. Жуков, д-р техн. наук Б. Н. Девятая,
д-р физ.-мат. наук В. Г. Дулов, чл.-корр. Н. А. Желтухин, д-р физ.-мат. наук
А. Н. Леонтьев, д-р техн. наук В. К. Щербаков.

Адрес редакции: 630099, г. Новосибирск, 99, ул. Советская, 18, комн. 331.
Тел. 22-00-44.

Редактор Т. Б. Мелкозерова
Художественный редактор Э. С. Филонычева
Технический редактор Ф. Ф. Орлова
Корректоры Н. Г. Примогенова, Г. И. Кравцова

Сдано в набор 19 марта 1975 г. Подписано в печать 26 июня 1975 г. МН 12075. Формат 70×108/16.
Бумага типографская № 2, 9 печ. л., 12,6 усл. печ. л., 12,6 уч.-изд. л. Тираж 2060 экз.
Заказ № 481. Цена 70 коп.

Издательство «Наука», Сибирское отделение, 630099, Новосибирск, 99, Советская, 18.
4-я типография издательства «Наука», 630077, Новосибирск, 77, Станиславского, 25.

© Издательство «Наука»,
«Известия Сибирского отделения АН СССР», 1975 г.

М. Ф. ЖУКОВ

ГЕНЕРАТОРЫ НИЗКОТЕМПЕРАТУРНОЙ ПЛАЗМЫ:
ТЕПЛОФИЗИЧЕСКИЕ И ЭЛЕКТРОФИЗИЧЕСКИЕ ПРОБЛЕМЫ

В связи с созданием мощных плазмохимических и металлургических установок возникает необходимость в плазмотронах с высоким тепловым к. п. д. и большим ресурсом работы электродов. Для решения этих задач желательно иметь достаточно полную и надежную информацию о тепловых потерях в различные элементы плазмотрона, о процессах в приэлектродных областях, об уровне пульсаций тока, при определенных условиях существенно влияющих на скорость эрозии, о неустойчивости горения дуги и причинах, ее порождающих, и о многих других явлениях, имеющих место в электродуговой камере.

Поставленные проблемы в целом чрезвычайно сложны. Поэтому ограничимся рассмотрением некоторых особенностей плазмотронов осевой схемы с газовыхревой стабилизацией дуги. Выбор данной схемы связан с большей перспективностью по сравнению с другими схемами в силу меньших тепловых потерь в элементы плазмотрона, лучшего энергообмена между дугой и окружающим газом, большего ресурса электродов и т. д.

В первую очередь отметим особенности горения электрической дуги в длинном цилиндрическом канале (рис. 1), непосредственно связанные с взаимодействием разряда с потоком газа и стенками электродуговой камеры [1—5].

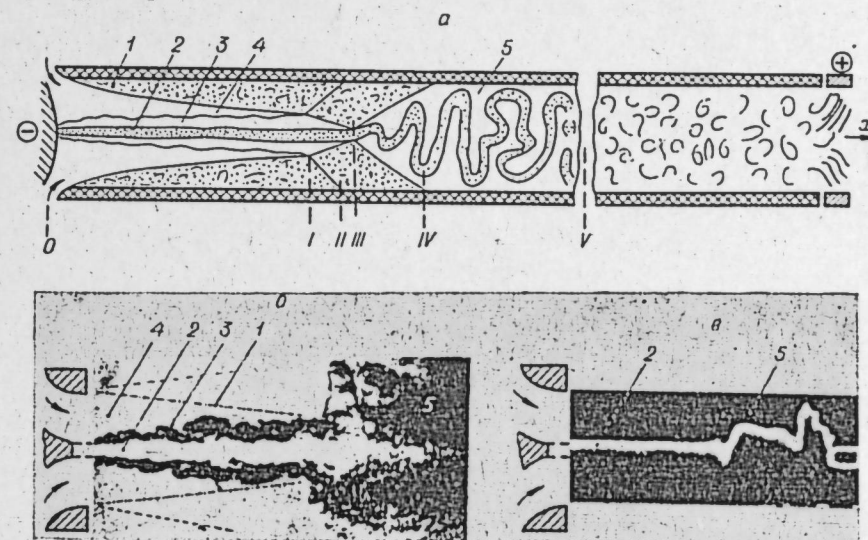


Рис. 1. Структура потока и дуги в длинном цилиндрическом канале (а), тепловая (б) и теневая (в) фотографии дуги.
1 — пограничный слой; 2 — дуга; 3 — тепловой слой дуги; 4 — невозмущенное течение; 5 — переходный участок.

На начальном участке канала 0—I, длина которого определяется местом встречи турбулентного пристенного пограничного слоя 1 с тепловым слоем 3 дуги 2, градиент температур в пристенном слое близок к нулю. Развивающийся на стенке пограничный слой не влияет на дугу и дуговой слой (область газа, прогретого дугой). Поэтому удельный тепловой поток в стенку определяется главным образом излучением среды [4, 6]. Представление о величине такого теплового потока дает график, приведенный на рис. 2. И хотя излучение невелико (для воздуха) по сравнению с вкладываемой на этом участке в дугу мощностью, его не-



Рис. 2. Распределение лучистого теплового потока вдоль канала.
 $d=1,0$ см; $G=15$ г/с; $\bar{a}=22,1$; $g_1=0,7$ г/с;
 $I=150$ А (1); 120 (2); 90 А (3).

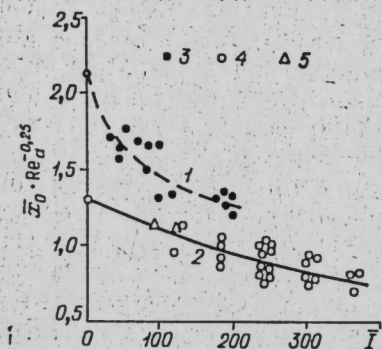


Рис. 3. Зависимость относительной длины начального участка канала от параметра I .
1, 2 — расчет по формулам (1) и (2) соответственно; 3 — данные из работы [3];
4 — МЭВ, $d=1,0$ см, $\bar{a}=17-34$; 5 — МЭВ, $d=2,0$ см, $\bar{a}=21,5$.

реальные пути снижения лучистых тепловых потерь, особенно при нагреве таких рабочих сред, как аргон. В последнем случае речь идет в первую очередь об использовании пористых вставок-секций из вольфрама [7], керамики, графита и иных материалов. Теоретические и экспериментальные исследования пористого вдува в ламинарный поток в плазмотроне показали возможность существенного увеличения его теплового к. п. д. и заметного повышения напряженности электрического поля [8—12]. Лучистый удельный тепловой поток на стенку канала остается примерно одним и тем же как на начальном, так и на турбулентном участке течения, хотя в последнем случае и наблюдается тенденция к некоторому его снижению.

В сечении I границы теплового и пограничного слоев смыкаются, и далее вниз по потоку начинается процесс передачи тепла, выделенного дугой, пограничному слою и стенке (сечение II).

На участке 0—III столб дуги практически не имеет поперечных пульсаций, хотя начальная интенсивность турбулентности достигает величины порядка 8—10%, так как вихревая камера плазмотрона по своему устройству и способу подачи газа в нее является источником большой турбулентности. Сохраняется постоянной и напряженность электрического поля дуги. Относительная длина этого участка $\bar{x}_0$ рассчитывается по

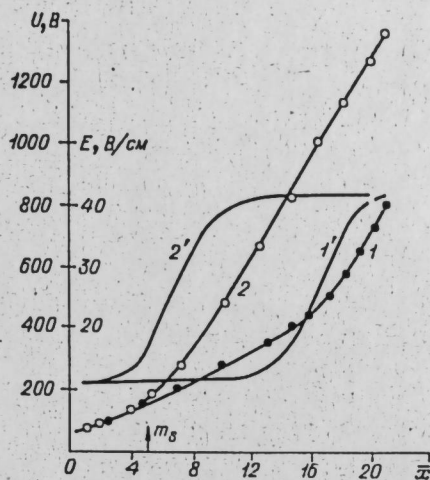


Рис. 4. Распределение потенциала U и напряженности дуги E вдоль канала плазмотрона с МЭВ.

$I=120$ А; $G_{\Sigma}=30$ г/с; $d=2,0$ см; 1 и 1' — $m_s=m_i \leq 0,08$; 2 и 2' — $m_s=1,4$; $m_i \leq 0,08$.

обходимо учитывать при расчете охлаждения соответствующих элементов канала. Полученные результаты позволяют по-новому подойти к расчету и проектированию начального участка канала плазмотрона, а также наметить

полуэмпирическим зависимостям. Для цилиндрического канала с гладкой поверхностью [3]

$$\bar{x}_0 = \frac{x_0}{d} = 1,435 \text{Re}_d^{0,27} [1 + 1,3 \cdot 10^{-3} (7)^{1,1}]^{-1,0}. \quad (1)$$

В случае канала, образованного секциями (плазмотрон с МЭВ) и потоком небольшого количества газа через зазоры, искомая зависимость видоизменяется и принимает вид

$$\bar{x}_0 = 1,30 \text{Re}_d^{0,25} [1 + 1,85 \cdot 10^{-3} 7]^{-1,0}. \quad (2)$$

Здесь $I = I(d\gamma\mu h\sigma)^{-1}$; μ , h , σ — характерные значения вязкости, энтальпии и электропроводности; I — сила тока; d — диаметр канала. Сравнение экспериментальных результатов с приведенными выше зависимостями дано на рис. 3. Величина $\bar{x}_0$ в плазмотроне с МЭВ определялась по началу резкого подъема напряженности электрического поля, что примерно соответствует зоне смыкания пограничного и теплового слоев.

С сечения III (см. рис. 1, а) столб дуги под действием турбулентных пульсаций, генерируемых в пограничном слое, начинает хаотически колебаться во времени и пространстве. Турбулентное движение характеризуется в первую очередь интенсивностью турбулентных пульсаций ϵ . Влияние этого фактора на напряженность электрического поля качественно известно [4], однако, как показывает опыт, только одним этим влиянием нельзя объяснить, например, сохранение большого значения напряженности электрического поля при резком снижении величины ϵ (с 15—20 до 1% в развитом турбулентном течении). Поэтому возникает необходимость в выяснении влияния таких факторов, как масштаб турбулентности и частота пульсаций скорости, а также в разработке объективных методов определения масштабов турбулентности как для переходного, так и для турбулентного режимов течения газа.

Иллюстрируют рассматриваемые особенности фотографии дуги и потока (см. рис. 1) при горении дуги в струе воздуха, истекающего из сопла в затопленное пространство [2, 13]. На начальном участке струи 4 (см. рис. 1, б, в) столб дуги 2 стабилен, четко виден тепловой слой 3, не контактирующий с внутренней границей пограничного слоя 1 (штрихпунктирная линия на рис. 1, б). В зоне переходного участка струи 5 на дугу начинает влиять турбулентный пограничный слой. В результате этого возникают сильные поперечные колебания дуги, тепловой слой разрушается, нагретый и холодный газы интенсивно перемешиваются. В формировании сложных конфигураций столба, по-видимому, играет роль не только турбулентность, но и взаимодействие дуги с собственным магнитным полем, а также другие факторы.

Вернемся к схеме течения газа в канале (см. рис. 1, а). Начиная с сечения III (начало участка перемежаемости), монотонно возрастает напряженность электрического поля, а с сечения II и тепловой поток в стенку, так как к потоку излучения начинает добавляться тепловой поток, определяемый конвективным теплообменом и теплопроводностью. Турбулентные пульсации быстро размывают нагретую область течения. В конце зоны (сечение V) завершается формирование развитого турбулентного течения. Напряженность достигает максимального значения, оставаясь далее вниз по потоку практически постоянной, в то время как тепловой поток в стенку продолжает нарастать. На рис. 4 показано распределение потенциала U (кривые 1 и 2) и напряженности E (кривые 1' и 2') вдоль канала плазмотрона с МЭВ. Кривые 1 и 1' соответствуют режиму течения, когда зона развитого турбулентного течения в канале выбранной длины только намечается и определяется «естественным» развитием течения. Кривые 2 и 2' соответствуют режиму турбулентного течения, которое возникает на значительном отрезке канала в результате постановки турбулизатора в сечении $\bar{x}_0=5$. Распределение тепловых потерь вдоль канала при малых параметрах вдува m приведено на рис. 5.

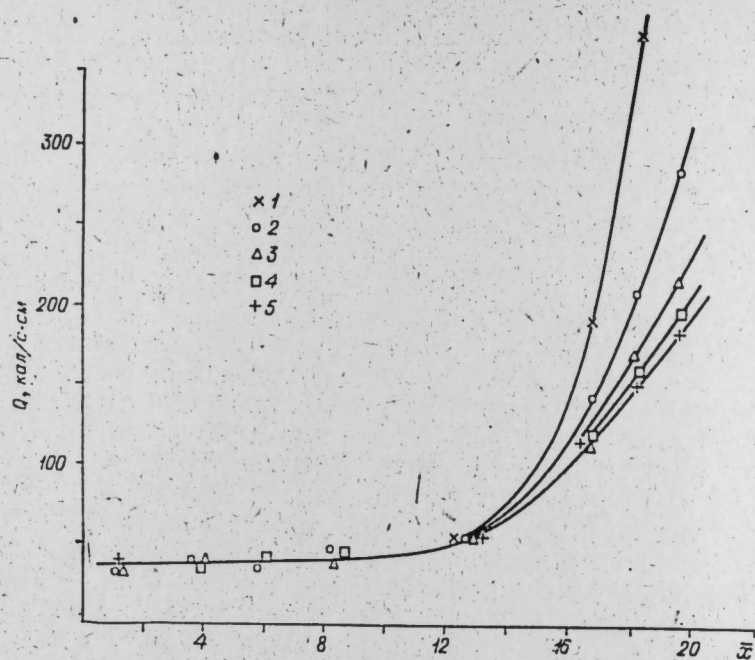


Рис. 5. Распределение тепловых потерь в стенку дуговой камеры.
 $d=1,0$ см; $\bar{a}=23$; $G_{\Sigma}=15$ г/с; $I=120$ А; $g_1=0$ (1); 0,15 г/с (2); 0,3 (3); 0,5 (4); 0,7 г/с (5).

Таким образом, последняя зона, начинающаяся с сечения V, характеризуется постоянством напряженности электрического поля, по величине превышающей ее значение на начальном участке канала в несколько раз, и ростом тепловых потерь в стенку электродуговой камеры. С энергетических позиций (увеличение вкладываемой в дугу мощности) целесообразно, чтобы в плазмотроне развитое турбулентное течение занимало наибольшую часть канала. Отсюда постановка задачи — найти способы внешнего воздействия на поток и дугу, приводящие, например, к усилению турбулизации потока или к пространственной неустойчивости дуги, к усилению теплообмена дуги с окружающей средой и т. д. и в конечном итоге к росту напряженности.

Полученные результаты позволяют выявить перспективные схемы генераторов низкотемпературной плазмы, обладающие большой удельной мощностью, высоким общим к. п. д., значительным ресурсом электродов, и предложить конкретные инженерные решения.

Рассмотрим три основных типа осевых (линейных) плазмотронов, которые однозначно следуют из рассмотренной схемы течения газа в цилиндрическом канале, и проблемы, возникающие при их создании и совершенствовании.

1. Плазмотроны с самоустанавливающейся длиной дуги хорошо известны и нашли широкое применение. Электродуговая камера у них является одновременно и выходным электродом. Поэтому, когда число Re заведомо больше критического, шунтирование дуги, определяющее ее длину, происходит в начале переходной зоны. Основные тепловые потери приходится на переходную зону. Снизить их, например путем пористого охлаждения, пока не представляется возможным из-за опасности заваривания пор (кроме случая использования материала из графита). Поэтому тепловая задача фактически сводится к оптимизации длины выходного электрода, т. е. к расчету длины начального участка и зоны шунтирования. Вольт-амперная характеристика дуги у таких плазмотронов падающая (рис. 6, 1), что однозначно определяет требования к источнику питания.

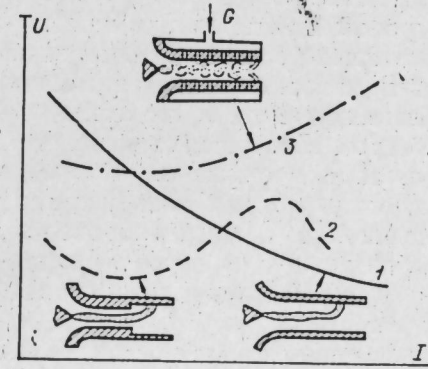


Рис. 6. Вольт-амперная характеристика дуги в плазмотронах разных схем.
 1 — плазмотрон с самоустанавливающейся длиной дуги l_{gc} ; 2 — плазмотрон с $l_g < l_{gc}$; 3 — плазмотрон с $l_g > l_{gc}$.

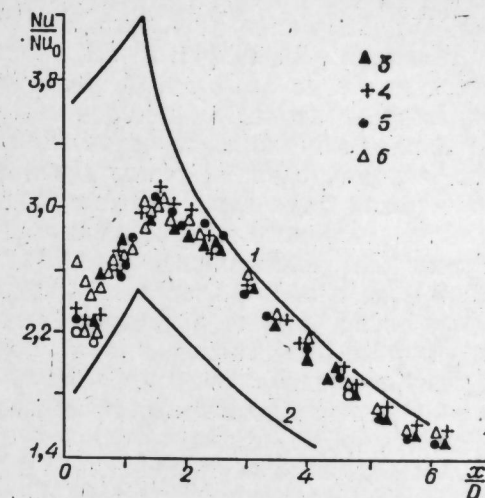


Рис. 7. Распределение коэффициента теплоотдачи по длине трубы с уступом.
 $\frac{d_2}{d_1}=1,49$; $Re=2,52 \cdot 10^3$ (3); $112 \cdot 10^3$ (4); $69 \cdot 10^3$ (5); $27,5 \cdot 10^3$ (6). Данные работы [17]: $Re=15,2 \cdot 10^3$ (1); $131 \cdot 10^3$ (2).

2. К второму типу относятся плазмотроны с фиксированной средней длиной дуги, меньшей самоустанавливающейся. В силу этого линейный размер электродуговой камеры, являющейся одновременно и выходным электродом, выбирается заведомо меньшим длины начального участка. В плазмотронах подобного типа фиксация средней длины дуги в некоторых границах изменения определяющих параметров (критериев) осуществляется температурным полем (ступенчатые электроды), магнитным полем либо иными средствами [2, 14].

Электрическая характеристика дуги имеет не только падающую, но и восходящую ветвь (рис. 6, 2), лежащую, как правило, ниже «граничной» кривой 1, хотя совершенно очевидно, что возможно и ее пересечение [2]. Если рабочая точка дуги относится к восходящей ветви, дуга горит устойчиво без балластного сопротивления в цепи электропитания ($\eta \approx 1$).

Имеются особенности и в распределении тепловых потерь. В первую очередь это относится к плазмотрону со ступенчатым электродом. При внезапном расширении канала образуется замкнутая каверна, порождающая сильную турбулентность как в основном потоке, так и внутри каверны (до 50%), что приводит к быстрому выравниванию поля скоростей и температур, заканчивающемуся недалеко от места замыкания каверны на стенку. Исследования локального теплообмена в трубе за уступом проводились многими авторами в широком диапазоне изменения чисел Рейнольдса, температур рабочего газа, относительных диаметров канала ($\bar{d} = \frac{d_2}{d_1} = 1,09 \div 3,1$), с закруткой и без закрутки потоков [2].

Однако, поскольку до настоящего времени не разработано достаточно общей теории теплообмена в отрывных зонах, приходится пользоваться главным образом экспериментальными данными [15]. На рис. 7 приведено характерное распределение местного коэффициента теплоотдачи вдоль трубы за уступом. По оси ординат отложено число Нуссельта, отнесенное к его значению в режиме стабилизированного течения газа в гладкой трубе [2, 16, 17]. Пик соответствует области присоединения отрыва, левая ветвь — течению в области рециркуляции, правая — участку развития после присоединения. Как показывают многочисленные исследования, интенсивность теплообмена в области отрыва приблизительно в три раза выше, чем в обычном пограничном

слое. На долю каверны приходится 20÷30% потерь от тепловой энергии на входе в расширяющуюся часть канала. Еще больше тепла теряется далее по потоку в результате конвективного теплообмена. При длине трубы около 10 калибров потери достигают 80%.

В плазмотроне со ступенчатым электродом шунтирование как процесс, ограничивающий длину дуги, также имеет место. Однако из-за своеобразия характера течения газа конец каверны является местом преимущественного крупномасштабного шунтирования в широком диапазоне изменения определяющих параметров. Совершенно ясно, что, как и для первого класса плазмотронов, задача снижения тепловых потерь тесно связана в первую очередь с оптимизацией длины канала за уступом. Постановка в этой зоне соленоида с магнитопроводом, ограничивающего движение радиального участка дуги в осевом направлении, — один из возможных путей снижения длины зоны шунтирования, а следовательно, и потерь тепла.

Несколько иная картина наблюдается в плазмотроне осевой схемы с магнитной стабилизацией [14]. При определенной конфигурации магнитного поля крупномасштабные пульсации в осевом направлении можно существенно уменьшить и свести тем самым потери тепла к минимуму. Но в этом случае всегда нужно помнить о снижении ресурса работы электрода из-за сокращения рабочей поверхности.

Исследования плазмотронов названных выше схем показывают, что повышение энтальпии в них возможно (при заданных значениях расхода газа, давления и ряда других определяющих параметров) только за счет увеличения тока. Из обобщенных характеристик плазмотрона двухкамерной схемы [1], широко используемого в технических приложениях, следует, что полная энтальпия струи

$$h_0 \sim \eta^{0,61}. \quad (3)$$

Здесь η — тепловой к. п. д. плазмотрона, слабо зависящий от тока. Таким образом, для увеличения h_0 , например в три раза, необходимо, чтобы ток возрос почти в десять раз. Если при этом учесть, что скорость износа материала электродов пропорциональна току [1], то станет совершенно ясной необходимость отыскания таких схем плазмотронов, у которых помимо тока дуги имеется по крайней мере еще один свободный параметр, с помощью которого можно воздействовать на повышение энтальпии газа. Этим параметром может быть, например, средняя длина дуги, большая самоустанавливающейся, и средняя напряженность электрического поля E , изменяемая тем или иным способом.

3. В плазмотронах с межэлектродной вставкой (МЭВ) и длиной дуги, большей «естественной», оба названных параметра свободны. В этой связи рассмотрим плазмотроны с МЭВ, относящиеся к третьему классу. Они, как правило, высокоэнтальпийные и высоковольтные с электрической характеристикой дуги, лежащей выше характеристики самоустанавливающейся дуги (см. рис. 6, кривая 3). Разработке таких плазмотронов сейчас уделяется большое внимание. Однако если не принять специальных мер, то суммарные тепловые потери могут быть значительно большими, чем в плазмотронах первых двух классов при равных мощностях, вложенных в дугу, так как в турбулентной зоне быстро достигается предельное значение тепловых потерь, когда вложенная в дугу энергия полностью отводится через стенку (локальный тепловой к. п. д. равен нулю).

Одним из действенных и перспективных методов снижения тепловых потоков в стенку является заградительное охлаждение, т. е. организованный вдув части рабочего газа в пограничный слой через межсекционные щели вдоль поверхности стенки (или под углом) с целью ее изоляции от высокотемпературного газового потока [4, 18, 19] (или через пористую поверхность секций [18, 20, 21]). Вниз по потоку от щели охла-

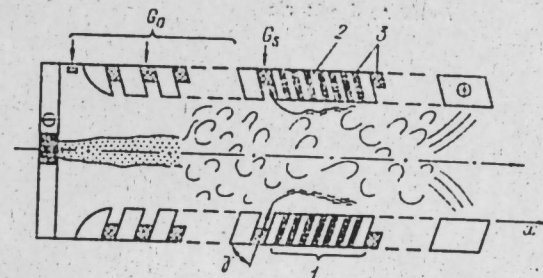


Рис. 8. Схема плазмотрона для изучения заградительного охлаждения.

1 — мерная секция; 2 — шайба; 3 — тепло- и электроизоляция; G_0 — расход газа до мерной секции; G_s — расход защитного газа.

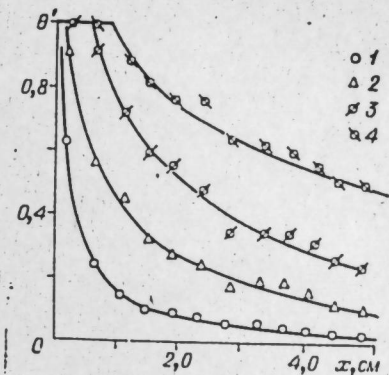


Рис. 9. Распределение эффективности завесы вдоль мерной секции θ' . $d=2,0$ см; $s=0,13$ см, $I=120$ А, $G_0=14$ г/с; $m=0,21$ (1); 0,63 (2); 1,0 (3); 1,51 (4).

дающее действие завесы постепенно снижается в результате турбулентного перемешивания холодного и высокотемпературного потоков. Поэтому в случае длинных каналов применяется многоселевая завеса. Таким образом, заградительное охлаждение сводится в основном к задаче турбулентного перемешивания. В плазмотронах с МЭВ теплообмен происходит в условиях сжимаемости и существенной неизотермичности.

Приведем некоторые результаты исследования заградительного охлаждения в плазмотронах названного класса. Объектом изучения служил участок канала плазмотрона, схема которого приведена на рис. 8. Эффективность заградительного охлаждения оценивалась отношением снятого вдувом конвективного потока к конвективному тепловому потоку при отсутствии заградительного вдува:

$$\theta' = \frac{Q_i - Q_{is}}{Q_i - Q_n}. \quad (4)$$

Здесь Q_{is} и Q_i — тепловые потоки в i -ю шайбу мерной секции при наличии и отсутствии вдува газа; Q_n — лучистый тепловой поток, определяемый на начальном участке канала.

Величина θ' зависит от ряда параметров. Наиболее существенные из них — безразмерное расстояние $\frac{x-x_0}{s}$ и параметр вдува $m = \frac{\rho_0 \omega_0}{\rho_s \omega_s}$. Здесь s — ширина щели; x_0 — длина участка с абсолютной завесой; индексами 0 и s соответственно отмечены усредненные параметры потока в канале перед сечением вдува и в щели, расположенной под углом $\gamma=60^\circ$ по отношению к направлению основного потока. Рис. 9 иллюстрирует влияние параметра m [22, 23]. При его значениях порядка 1,0÷1,5 наблюдается зона абсолютной завесы ($\theta'=1$), а на длине 2—3 калибров тепловые потери в стенку канала снижаются почти вдвое.

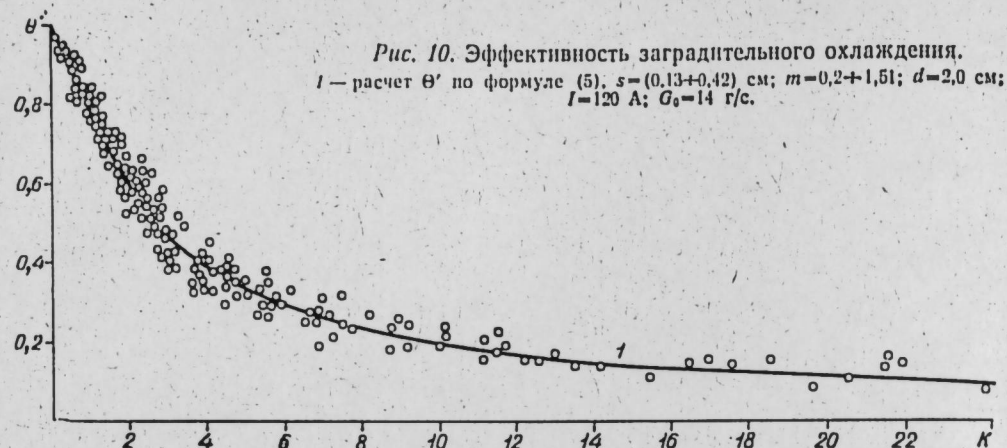
Полученные экспериментальные результаты хорошо обобщаются, если использовать для этого критериальный комплекс

$$K = \frac{x-x_0}{ms} Re_s^{-0,25}, \quad \text{где } Re_s = s \cdot \frac{\rho_s \omega_s}{\mu_0}.$$

На рис. 10 приведена зависимость θ' от K . С приемлемой точностью она обобщается уравнением

$$\theta' = (1+0,24K)^{-0,8} (1+K^2)^{-0,14}. \quad (5)$$

Величина среднеквадратичного отклонения σ при этом не превышает $\pm 0,08$. Для расчета эффективности газовой завесы в диапазоне измене-



ния $0 < K < 3$ можно с успехом пользоваться методом, предложенным в работе [18] для одиночной щели.

Конечно, в действительности η' более сложно зависит от параметра m , ибо, привлекая его значения, лежащие вне выбранного диапазона, обнаруживаем расслоение опытных данных по m . Однако в практических приложениях $m < 0,2$ не представляет большого интереса из-за малости величины η' ; вместе с тем режим течения в канале плазмотрона, соответствующий $m > 1,5$, встречается редко и относится главным образом к начальному участку канала. Эффективность газовой завесы хорошо прослеживается также по кривым распределения локального теплового к. п. д. вдоль канала (рис. 11):

$$\eta_i = 1 - \frac{\Delta Q_i}{\Delta l \cdot E \cdot I} \quad (6)$$

Здесь ΔQ_i — тепловые потери в секцию длиной Δl . Так как на начальном участке канала E и $\Delta Q_i \approx \text{const}$, то примерно постоянно и η_i . Кривая 1 соответствует случаю $m_i \approx 0$. Первый подъем η_i , общий для обеих кривых, обусловлен в основном повышением в этой зоне напряженности электрического поля. Если теперь в некотором сечении $\bar{x} = \bar{x}_*$, выбранном в развитой турбулентной области, организовать заградительный вдув, то в силу постоянства напряженности электрического поля второй подъем вызывается уже положительным влиянием газовой завесы. Для поддержания теплового к. п. д. высокоэнтальпийного плазмотрона на должном уровне применяют, как уже говорилось, многощелевую защиту.

Данному вопросу посвящен ряд работ, например [24—27].

Помимо вдува заградительного газа через щель эффективно также пористое охлаждение, являющееся разновидностью регенеративной схемы охлаждения, когда значительная часть теплового потока, в том числе и лучистого, возвращается в основной турбулентный поток. Эффективность предлагаемого метода существенно зависит от величины параметров вдува через пористую стенку, от физических свойств охлаждающей среды и основного потока.

Рассмотрим еще один, на наш взгляд, весьма перспективный путь снижения тепловых потерь и в первую очередь конвективных. Сущность его состоит в том [28, 29], что электрическая дуга стабилизируется внешним «вихрем», образованным в трубе большого диаметра при подаче газа через периферийные отверстия 2а или щели 2б (рис. 12). При правильной организации течения потери тепла в стенку вихревой камеры определяются только излучением дуги. Подача газа в полуограниченную цилиндрическую камеру горения 1 осуществляется через отверстия 2а, расположенные в начальном сечении трубы, либо через

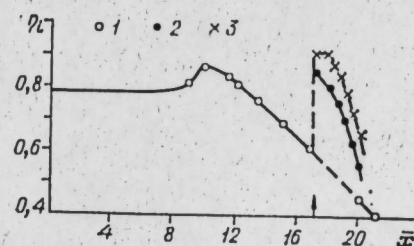


Рис. 11. Распределение локального теплового к. п. д. вдоль канала.

$d = 2,0$ см; $\bar{a} = 21,5$; $s = 0,13$ см; $I = 120$ А; $G_0 = 14$ г/с. 1 — заградительное охлаждение отсутствует; 2 — $\bar{x} = 17$, $m_s = 1,0$; 3 — $\bar{x}_s = 17$, $m_s = 1,5$.

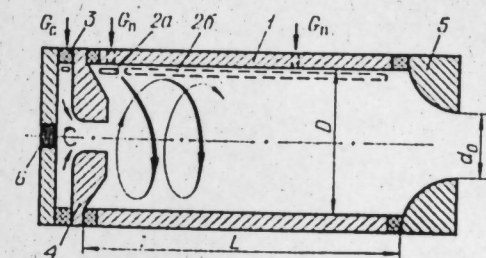


Рис. 12. Схема плазмотрона с газовыхвальной межэлектродной вставкой.

1 — газовыхвальный МЭВ длиной L ; 2а, б и 3 — входы газа в вихревую и заградительную камеры; 4 — дополнительная секция-сопло МЭВ; 5 — выходное сопло электрода; 6 — торцевой электрод; G_c — расход газа через сопло; G_n — расход газа, подаваемый в вихревую камеру.

щели (цепочку щелей) 2б, расположенные вдоль образующих цилиндра. В обоих случаях газ вводится под азимутальным углом. Ниже изложены некоторые результаты качественных исследований, относящихся только к первому случаю подачи газа в камеру. Главная проблема в создании подобного класса плазмотронов состоит в обеспечении устойчивости внешнего вихревого течения. Основными критериями, определяющими характер течения закрученного потока, являются критерий Рейнольдса $Re_D = \frac{\rho \omega_x D}{\mu}$; критерий Россби, представленный отношением окружной составляющей скорости газа на периферии ω_{φ_0} к усредненной осевой скорости W_x в вихревой камере $Ro = \frac{\omega_{\varphi_0}}{W_x}$ и характеризующий в основном картину вторичных течений, а также распределение в них скоростей и температур; параметр спутности $\bar{m} = \frac{\rho \omega_x^2}{(\rho \omega_x^2)_c}$; геометрический параметр $\bar{d}_0 = D/d_0$; форма выходного сопла 5 (индекс «с» указывает, что параметры потока относятся к струе, истекающей из сопла).

Цель предварительных исследований состояла в изучении аэродинамики течения и, в частности, механизма смещения потоков и развития турбулентности; а также в выяснении условий устойчивости вихревого течения с центральной струей газа, «внутри» которой должна гореть электрическая дуга. При реализации такого течения электрическая дуга горит на оси, а ее тепловой слой не контактирует со стенками канала.

Если число Ro больше критического [30—33], то вблизи оси трубы появляется устойчивое возвратное течение жидкости протяженностью до нескольких десятков диаметра трубы D . При $Ro < Ro_{кр}$ оно отсутствует либо нестабильно. В экспериментах $Ro \gg Ro_{кр}$ [30] и наиболее сильное влияние на структуру течения оказывают $\bar{d}_0$, $\bar{m}$ и форма профиля выходного сопла. Возрастанье $\bar{m}$ приводит к замедлению темпа размывания центральной струи.

На рис. 13, а приведена фотография центральной струи, истекающей из сопла МЭВ в вихревую камеру при устойчивом режиме внешнего вихря. Визуализация течения осуществлялась подачей небольшого количества табачного дыма, а освещение — несфокусированным пучком света. Для данного режима течения газа характерны высокая стабильность центральной струи в пространстве, достаточно четкая граница раздела между внутренним и внешним потоками и слабое их перемешивание. Последнее, по-видимому, объясняется большим радиальным градиентом давления во внешнем вихревом потоке, а при наличии дуги еще и радиальным градиентом температуры (плотности). Влияние тур-

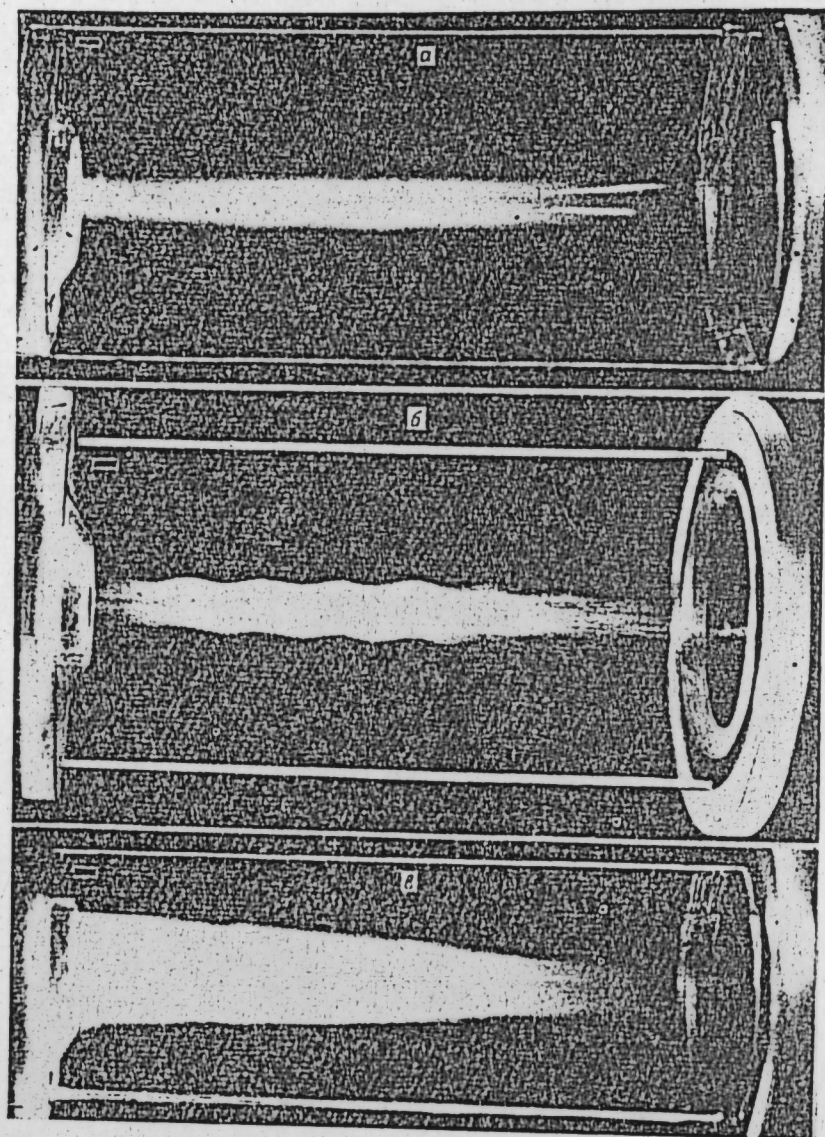


Рис. 13. Центральная струя.

булентности внешнего потока сводится к возрастанию величины проникновения газа в тепловой слой дуги [34].

Наблюдается также [35] «бочкообразный» (винтовой) режим течения струи (рис. 13, б); при малых значениях $\bar{m}$ струя «размывается» по всему объему вихревой камеры, начиная с выхода из сопла МЭВ (рис. 13, а). Последний режим наиболее опасен не только из-за возрастания тепловых потерь в стенку МЭВ и вихревой камеры, но главным образом из-за возможности образования каскадной дуги.

Освещение потока тонким плоским лучом света, рассекающим струю вдоль ее оси, позволяет получить качественное представление о ее внутренней структуре (рис. 14). При некоторых режимах течения наблюдается несколько (от одной до трех) поверхностей с повышенной концентрацией дыма.

Если «холодные» испытания показывают стабильность центральной струи, то, как правило, устойчива в пространстве и электрическая дуга (рис. 15, а); при бочкообразности течения струи дуга принимает форму спирали (рис. 15, б). Если дуга спиралевидная, но не касается

стенки вихревой камеры, то можно предположить, что это позволит создать более эффективные плазмотроны.

Сопоставление данных об относительных суммарных энергопотерях, отнесенных к мощности дуги, в межэлектродную вставку [4] и в вихревую камеру рассматриваемого плазмотрона свидетельствует о его большом преимуществе. В последнем случае потери в несколько раз меньше и по уровню близки к лучистым; даже при максимальных токах (около 600 А) они не превышали 2%.

Таким образом, выявляются две основные теплофизические проблемы: интенсификация теплообмена между электрической дугой и газом, определяющая величину напряженности электрического поля, и снижение потерь тепла в стенку электродовой камеры и электродов.

Некоторые данные о фундаментальных физических явлениях в плазмотроне позволили наметить реальные пути повышения теплового к. п. д. плазмотронов первого поколения (плазмотроны с самоустанавливающейся длиной дуги и со ступенчатыми электродами), а также повышения напряженности электрического поля дуги в перспективных плазмотронах с заградительным охлаждением стенок. Успешное решение теплофизических проблем в высокоэнтальпийных плазмотронах с МЭВ позволит одновременно поднять и ресурс электродов.

Первые экспериментальные результаты по заградительному охлаждению стенок плазмотрона показали правомочность расчета по хорошо разработанной методике для плоской стенки. Это позволяет заранее проводить оценку полного и локального теплового к. п. д. элементов плазмотрона.

Весьма перспективной схемой защиты поверхностей от мощных конвективных и лучистых тепловых потоков, а также в некоторых случаях и от воздействия химически активных компонентов внешнего потока в случае переходных и турбулентных режимов течения газа в трубе является вдув газа через пористую поверхность секции [36]. В случае, если вдув выше критического, наблюдается режим полного оттеснения пограничного слоя, обеспечивающий абсолютную завесу стенки. В этой связи представляет большой научный и практический интерес изучение всего комплекса процессов в камере горения дуги плазмотрона с газовой вихревой межэлектродной вставкой.

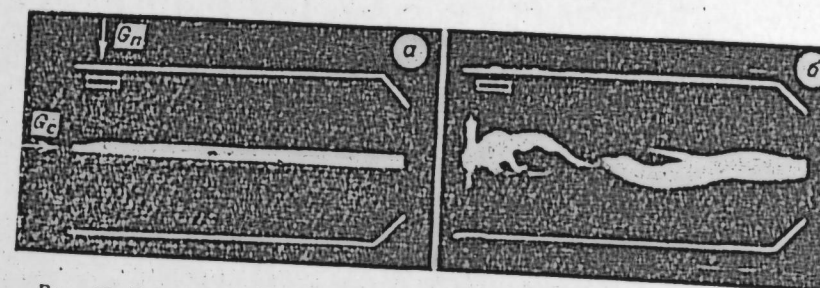


Рис. 15. Дуги для разных режимов течения газа в газовой вихревой МЭВ.

а) $I=25$ А; $\frac{G_n}{G_c}=17$; б) $I=140$ А; $\frac{G_n}{G_c}=2$.

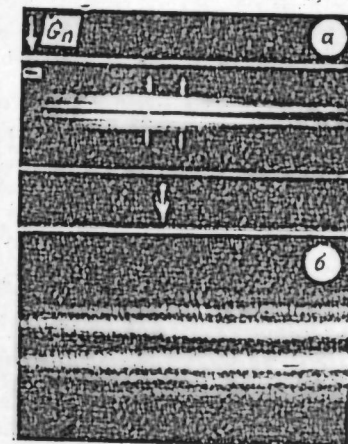


Рис. 14. Внутренняя структура центральной струи.

Одной из важных электрофизических проблем остается взаимодействие внешних магнитных полей с турбулентной дугой.

ЛИТЕРАТУРА

1. М. Ф. Жуков, В. Я. Смоляков, Б. А. Урюков. Электродуговые нагреватели газа (плазмотроны). М., «Наука», 1973, с. 230.
2. М. Ф. Жуков, А. С. Коротеев, Б. А. Урюков. Прикладная динамика термической плазмы. Новосибирск, «Наука», 1975, 297 с.
3. Л. И. Колонина, Б. А. Урюков. Изв. Сиб. отд. АН СССР, сер. техн. наук, 1968, № 13, вып. 3, 23—27.
4. М. Ф. Жуков, И. М. Засыпкин, М. И. Сазонов. Изв. Сиб. отд. АН СССР, сер. техн. наук, 1973, № 3, вып. 1, 18—24.
5. М. Ф. Жуков. ТВТ, 1972, 10, № 6, 1295—1307.
6. В. П. Лукашов, Б. А. Поздняков. Тезисы докл. VI Всес. конф. по генераторам низкотемпературной плазмы. Фрунзе, 1974, с. 78—81.
7. А. В. Пустогаров, Ю. В. Курочкин и др. Там же, с. 90—93.
8. Кинни, Спэрроу. Теплопередача, 1964, № 1, 167—168.
9. В. Н. Ярыгин. ПМТФ, 1968, № 2, 72—76.
10. Андерсон, Эккерт. РТК, 1967, 5, № 4, 113—122.
11. В. В. Бербасов, Б. А. Урюков. Изв. Сиб. отд. АН СССР, сер. техн. наук, 1974, № 3, вып. 1.
12. В. В. Бербасов. Изв. Сиб. отд. АН СССР, сер. техн. наук, 1974, № 13, вып. 3.
13. А. Д. Лебедев. Канд. дис. Новосибирск, Институт теплофизики СО АН СССР, 1973.
14. А. С. Коротеев и др. Генераторы низкотемпературной плазмы. М., «Наука», 1969, с. 128.
15. П. Чжен. Отрывные течения. М., «Мир», 1972, ч. I, с. 299; 1973, ч. II, с. 279.
16. Л. Н. Барабашин и др. В сб.: Аэродинамика. Новосибирск, «Наука», 1973, с. 155—161.
17. Кралл, Спэрроу. Тр. амер. общества инж.-мех. Русск. пер.: Теплопередача, 1966, сер. С., 88, № 1.
18. С. С. Кутателадзе, А. И. Леонтьев. Тепломассообмен и трение в турбулентном пограничном слое. М., «Энергия», 1972, с. 344.
19. Махан, Кремерс. Теоретические основы инженерных расчетов, 1972, № 4, с. 122.
20. В. М. Ерошенко и др. В сб.: Теплофизические свойства и газодинамика высокотемпературных сред. М., «Наука», 1972, с. 47—56.
21. В. М. Ерошенко, А. Л. Ермаков и др. Там же, с. 56—64.
22. М. Ф. Жуков, В. П. Лукашов и др. Изв. Сиб. отд. АН СССР, сер. техн. наук, 1974, № 1, вып. 3, 8—13.
23. М. Ф. Жуков, И. М. Засыпкин и др. Изв. Сиб. отд. АН СССР, сер. техн. наук, 1975, № 8, вып. 2.
24. Шепард. РТК, 1972, 10, № 2.
25. А. Б. Амбразевичус и др. Изв. Сиб. отд. АН СССР, сер. техн. наук, 1974, № 8, вып. 2, 27—32.
26. С. Е. Shepard. AIAA 6th Aerodynamic—Testing Conference Albuquerque. New Mexico, March 10—12, 1971.
27. Пэйнтер, Эмсен. РТК, 1971, № 12, 5—8.
28. J. L. Cann. An experimental investigation of a vortex stabilized A. R. C. in an axial magnetic field. A. R. L. 73-0043, 1973.
29. M. F. Zhukov, Yu. J. Suhinin, A. J. Yankovsky. Eleventh International Conference on Phenomena in Ionized Gases, Prague, 1973, p. 226.
30. G. J. Raquet. Experiences sur la detente giratoire avec production simultanees d'un echappement d'air chaud et d'air froid Journal de physique et le radium, Suppl., 1933, p. 112.
31. А. П. Меркулов. Вихревой эффект и его применение в технике. М., «Машиностроение», 1969.
32. М. А. Гольдштик и др. Теплоэнергетика, 1961, № 2.
33. Д. Н. Ляховский. В сб.: Вопросы аэродинамики в котельно-топочных процессах. Госэнергоиздат, 1958.
34. Хардер, Кани. РТК, 1970, 132—140.
35. Кенон, Кейс. Тр. Амер. общества инж.-мех. Теплопередача, 1969, № 2, 127—132.
36. Б. П. Мионов. Исследование турбулентного пограничного слоя на проницаемой поверхности. Докт. дис. Новосибирск, Ин-т теплофизики СО АН СССР, 1970.

Институт теплофизики
СО АН СССР
Новосибирск

Поступила в редакцию
26/1 1975

ИЗВЕСТИЯ СИБИРСКОГО ОТДЕЛЕНИЯ АКАДЕМИИ НАУК СССР

№ 8, вып. 2

СЕРИЯ ТЕХНИЧЕСКИХ НАУК

1975

УДК 537.523.001.5

М. Ф. ЖУКОВ, И. М. ЗАСЫПКИН, И. И. МИШНЕ,
М. И. САЗОНОВ

ВЛИЯНИЕ ГАЗОВОЙ ЗАВЕСЫ НА ТЕПЛООБМЕН МЕЖДУ ТУРБУЛЕНТНОЙ ДУГОЙ И СТЕНКОЙ РАЗРЯДНОЙ КАМЕРЫ

Исследования плазмотронов с секционированной межэлектродной вставкой (МЭВ) показали, что при достаточной длине вставки либо при наличии специального турбулизатора в ней часть дуги горит в условиях развитого турбулентного течения [1, 2]. В этом случае наблюдаются повышенная напряженность электрического поля и рост тепловых потерь в стенку канала, стремящихся вниз по потоку к величинам, соизмеримым с удельным энерговыделением в дугу. С позиций обеспечения максимального энерговыделения целесообразно, чтобы в плазмотроне развитое турбулентное течение занимало наибольшую часть канала. Но, если при этом не принять специальных мер, тепловой коэффициент полезного действия аппарата в целом будет очень низким. Поэтому главной проблемой в рассматриваемой схеме плазмотрона является в настоящее время отыскание эффективных путей снижения тепловых потерь на участке развитого турбулентного течения газа. Один из возможных путей заключается в создании газовой завесы при помощи вдува части рабочего газа в дуговую камеру через межсекционные щели [2]. Изучению воздействия газовой завесы в условиях сжимаемости и неизотермичности на теплообмен дуги со стенками канала плазмотрона посвящен ряд экспериментальных и теоретических работ [2—7]. Однако детального исследования влияния интенсивности вдува и ширины щели на эффективность завесы в развитом турбулентном потоке в канале с дугой не проводилось. Данная работа посвящена этому вопросу.

В работе введены следующие обозначения: $\bar{a} = \frac{a}{d}$ — относительная длина канала; α Вт/м²·град — местный коэффициент теплоотдачи; h_0 , кДж/кг; T_0 , °К — среднemasсовая энтальпия и температура газа; G , г/с — суммарный расход газа; $h_{ст}^*$, кДж/кг, $T_{ст}^*$, °К — адиабатическая энтальпия и температура стенки; g_i , г/с — расход газа через i -ю щель; m_i — параметр вдува через i -ю щель; q_k , Вт/м² — удельный конвективный тепловой поток в стенку; μ_0 , н·с/м² — вязкость газа; $q_{изл}$, Вт/м² — удельный лучистый тепловой поток в стенку; Q , Вт — полный тепловой поток в шайбу; $Q_{изл}$, Вт — лучистый тепловой поток в шайбу; Q_i , Вт/см — тепловой поток на единицу длины i -й секции; ρ , кг/м³ — плотность газа; v , м/с — скорость потока; x , см — координата вдоль мерной секции с началом отсчета от передней кромки первой шайбы; $\bar{X} = \frac{X}{d}$ — относительная координата вдоль оси канала; $\bar{X}_T$ — относительная координата вдоль турбулентного участка дуги; $\eta_i = 1 - Q_i/EI$ — локальный теп-

Индексы: 0 — параметры газа в канале; s — параметры газа, вдуваемого через щель; $ст$ — параметры газа на стенке; 1 — при отсутствии завесы; m — при наличии завесы с параметром вдува m .

Эксперименты выполнены на плазмотроне (рис. 1), схема которого детально описана в работе [2]. Внутренний диаметр цилиндрической дуговой камеры $d=2,0$ см; длина турбулентного участка потока составляет примерно 14 калибров. На расстоянии 4—5 калибров от внутреннего среза выходного электрода 6 размещается мерная секция 5, состоящая из набора медных шайб 1 толщиной 0,4 см и изолированных друг от друга асбестовыми прокладками 2 толщиной 0,03 см, а также ограничительных (крайних) шайб, специально спрофилированных для стыковки с примыкающими секциями 3 межэлектродной вставки. Толщина первой по течению ограничительной шайбы также 0,4 см, последней — 0,65 см. Число шайб в наборе 12. Для увеличения длины исследуемого участка канала в некоторых случаях в качестве «мерных» шайб использовались также 2—3 секции плазмотрона, лежащие ниже по течению. Заградительный вдув осуществлялся через щель между первой ограничительной шайбой и близлежащей к ней секцией 3. Ширина щели S изменялась в пределах 0,13—0,42 см. Угол вдува $\gamma=60^\circ$. Газ подавался с закруткой. Суммарный расход рабочего газа — воздуха — до сечения вдува был постоянным и составлял 14 г/с, через мерную щель он варьировался от 0 до 5,5 г/с, что соответствует изменению параметра вдува $m = \frac{(\rho v)_s}{(\rho v)_0}$ от 0 до 1,5. В остальные щели межэлектродной вставки газ не подавался. Эксперименты проводились при прямой полярности подключения выходного электрода и токе дуги $I=120$ А. Среднемассовая температура газа перед мерной секцией равнялась примерно 3300°К. Индивидуальный подвод воды ко всем секциям межэлектродной вставки и шайбам мерной секции позволял проводить калориметрирование тепловых потоков в стенку канала. Распределение напряженности электрического поля вдоль дуги определялось путем непосредственного измерения разности потенциалов соседних секций, а также графическим дифференцированием распределения потенциала дуги вдоль канала.

Проведенные ранее измерения удельных тепловых потоков в стенку канала межэлектродной вставки [2] показали, что на турбулентном участ-

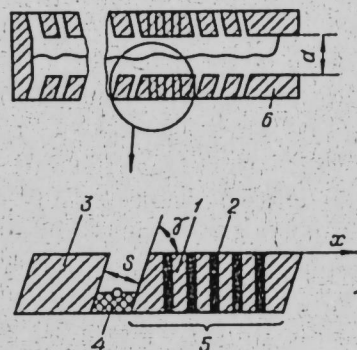


Рис. 1. Схема плазмотрона и мерной секции.

1 — шайба, 2 — изолятор, 3 — секция межэлектродной вставки, 4 — кольцо закрутки, 5 — мерная секция, 6 — выходной электрод.

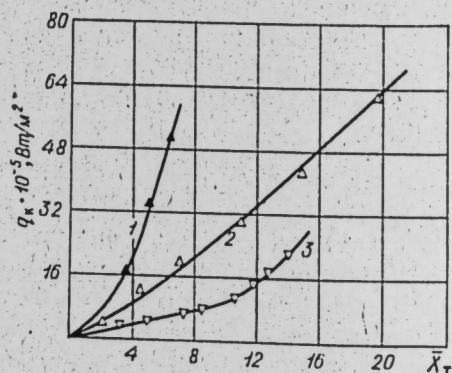


Рис. 2. Распределение удельных конвективных тепловых потерь вдоль турбулентного участка дуги.

$I=120$ А, $l=d=1$ см, $\bar{a}=23$, $G=15$ г/с, $g_i=0$;
2 — $d=1$ см, $\bar{a}=22+34$, $G=15$ г/с, $g_i=0,5$ г/с и
 $d=2$ см, $\bar{a}=21,5$, $G=30$ г/с, $g_i=0,5$ г/с, 3 —
 $d=2$ см, $\bar{a}=21,5$, $G=30$ г/с, $g_i=0,5$ г/с, вдув
газа перед турбулентным участком с $m=1$.

ке горения дуги к лучистому тепловому потоку добавляется тепловой поток, определяемый конвективным теплообменом. Было отмечено также, что величина расхода газа через межсекционные щели практически не влияет на уровень лучистого теплового потока, но зато существенно изменяет конвективный теплообмен. Для иллюстрации на рис. 2 приведено распределение конвективных тепловых потерь вдоль канала, начиная с сечения, в котором обнаруживается подъем напряженности электрического поля дуги (начало турбулентного участка). Кривая 1 получена при $m_i=0$. Подача даже относительно малого расхода газа через щели (кривая 2, $m_i=0,04 \div 0,08$) приводит к заметному снижению конвективных тепловых потерь в стенку на турбулентном участке. Локальный вдув газа с параметром $m \sim 1$ в зоне перехода к турбулентному режиму горения дуги (кривая 3) еще более снижает конвективный поток в стенку канала. Лишь на расстоянии 8—10 калибров от сечения вдува его влияние начинает заметно ослабевать.

Эффективность газовой завесы принято определять безразмерным соотношением [8, 9]:

$$\Theta = \frac{T_0 - T_{ст}^*}{T_0 - T_s} \quad (1)$$

В его основе лежит гипотеза, подтвержденная экспериментально, что как при отсутствии, так и при наличии газовой завесы тепловой поток в адиабатическую стенку выражается одним и тем же законом теплообмена:

$$q_k = \alpha (T_{ст}^* - T_{ст}). \quad (2)$$

В рассматриваемом случае имеет место более сложная ситуация, а именно комбинированное охлаждение стенки, поэтому эффективность завесы удобнее определять несколько иначе — отношением снятого вдувом конвективного потока к конвективному тепловому потоку при отсутствии заградительного вдува:

$$\Theta' = \frac{q_{k_i} - q_{k_m}}{q_{k_i}} \quad (3)$$

В случае малой разности температур основного и вдуваемого потоков определения (1) и (3) практически совпадают. При высоких среднемассовых температурах потока и относительно невысокой температуре стенки связь между Θ и Θ' устанавливается через температурный фактор. Лучистые тепловые потери в стенку при наличии и отсутствии завесы, как говорилось выше, примерно одинаковы, поэтому выражение (3) можно преобразовать к виду

$$\Theta' = \frac{Q_1 - Q_m}{Q_1 - Q_{нзл}} \quad (4)$$

Оно и лежит в основе обработки экспериментального материала.

Рассмотрим некоторые результаты, характеризующие эффективность газовой завесы.

На рис. 3 показано влияние параметра m на распределение Θ' вдоль мерной секции. При достаточно больших его значениях на кривых четко просматриваются участки с абсолютной завесой, а конвективный тепловой поток снижается более чем на 50%.

Полученные экспериментальные результаты можно обобщить, если воспользоваться комплексным безразмерным критерием [9, 10]:

$$W = \frac{x - x_0}{mS} \text{ или } K = \frac{x - x_0}{mS} Re_s^{-0,25}, \quad (5)$$

где x_0 — длина участка с абсолютной завесой; $Re_s = S \frac{(\rho v)_s}{\mu_0}$. В диапазо-

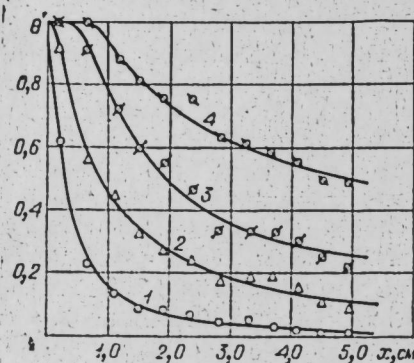


Рис. 3. Распределение Θ' вдоль мерной секции.
 $S=0,13$ см; $m=0,21$ (1); $0,63$ (2); $1,0$ (3); $1,51$ (4).

опытные данные, характеризующие зависимость Θ' от K (S изменялась от $0,13$ до $0,42$ см, m — от $0,2$ до $1,5$). Они вполне удовлетворительно обобщаются уравнением (кривая 1)

$$\Theta_1 = (1 + 0,24K)^{-0,8} (1 + K^2)^{-0,14} \quad (7)$$

Величина среднеквадратичного отклонения в этом случае не превышает $\pm 0,02$. Значения Θ' для $m < 0,2$ на график не нанесены, так как по мере уменьшения m они дают возрастающее отклонение от группы экспериментальных точек, соответствующих диапазону изменения m от $0,2$ до $1,5$. Например, при $m < 0,2$ и $K \leq 1$ величина Θ' не превышает $0,6$. Столь малые значения Θ' не представляют практического интереса, поэтому в данной работе диапазон изменения $m < 0,2$ не рассматривается.

Были выполнены также расчеты тепловых потоков в стенку канала по методике расчета эффективности газовой завесы для одиночной щели [10] и проведено сравнение с экспериментом. В этих расчетах локальные плотности конвективного теплового потока и число Стентона определялись соответственно по формулам

$$q(x) = \rho_0 v_0 St(x) (h_{ст}^* - h_{ст}), \quad (8)$$

$$St(x) = St_0 \Psi = 0,0288 Re_x^{-0,2} Pr^{-0,6} \Psi, \quad (9)$$

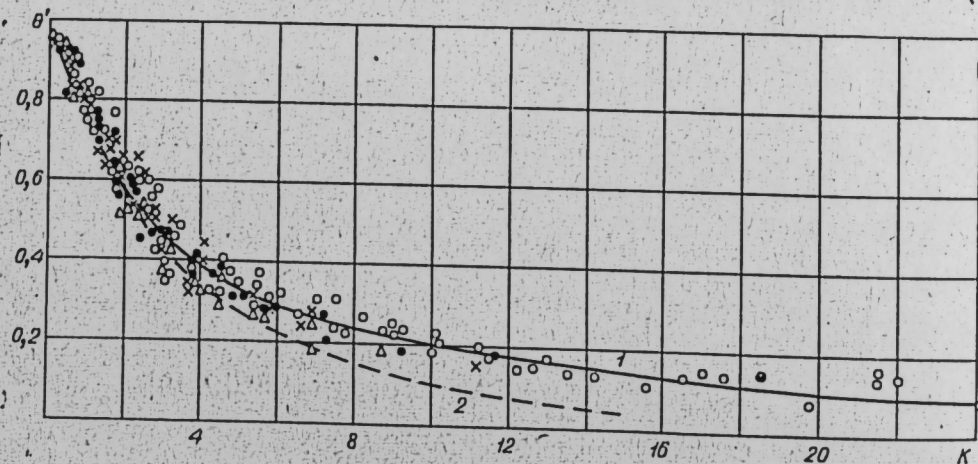


Рис. 4. Зависимость эффективности газовой завесы $\Theta' = f(K)$.
1 — расчет по формуле (7); 2 — расчет по методике [10]. $S=0,13$ см (○); $0,22$ (×); $0,32$ (Δ); $0,42$ см (●).

не изменения W от 10 до 50 экспериментальные данные хорошо аппроксимируются простым соотношением

$$\Theta' = A \left(\frac{x - x_0}{mS} \right)^{-0,8} \quad (6)$$

В рассматриваемом случае множитель A можно считать постоянной величиной, равной 4 . Аналогичный вид имеют эмпирические зависимости $\Theta = f(W)$, предложенные в ряде работ, например в [9].

Однако, если $50 < W < 10$, то в целях обеспечения необходимой точности обобщения желательно использовать второй, более сложный, комплекс критериев — K . На рис. 4 приведены

$$\text{где } Re_x = \frac{(\rho v)_0}{\mu_0} x; \Psi = \left(\frac{2}{\sqrt{\frac{h_{ст}}{h_0} + 1}} \right)^{1,6} - \text{предельный температурный}$$

фактор [10].

$$\text{Адиабатическая энтальпия стенки } h_{ст}^* \text{ находилась из уравнения} \quad \Theta = (1 + 0,24K)^{-0,8} \quad (10)$$

Число Прандтля принималось равным $0,7$ [10]. В отсутствие газовой завесы тепловые потоки рассчитывались по обычным формулам, соответствующим развитому турбулентному течению в трубе. Для числа Рейнольдса характерным линейным размером служил диаметр канала.

На рис. 4 (кривая 2) приведен расчет Θ' по указанной выше методике. Из сравнения следует, что при изменении K от 0 до 3 расчеты по формуле (7) и названным выше методом хорошо совпадают. Таким образом, метод расчета заградительного охлаждения стенок канала в развитом турбулентном течении в присутствии дугowego разряда при $0 < K < 3$ тот же, что и в отсутствие его. Вне названного диапазона кривые 1 и 2 расходятся по мере роста K .

Из анализа экспериментального материала, часть которого приведена на рис. 3 и 4, можно заключить, что при ширине межсекционных щелей $S=0,13 \div 0,42$ см заградительный вдув с параметром m , близким к единице, позволяет на протяжении нескольких диаметров канала значительно снизить конвективный тепловой поток в стенку. Это наглядно иллюстрирует кривая 2 распределения локального к. п. д. вдоль канала, приведенная на рис. 5. Первый подъем, общий для обеих кривых, обусловлен ростом напряженности электрического поля в зоне перехода к турбулентному режиму горения дуги. Следующий за подъемом спад η_i связан с нарастанием конвективных потерь в стенку дуговой камеры (кривая 1). Однако если в зоне турбулентного течения организовать интенсивный заградительный вдув газа, то в этом месте появится подъем локального к. п. д. (кривая 2). Организованные на расстоянии $3-4$ калибров друг от друга распределенные интенсивные вдувы газа дают заметно больший эффект по сравнению с более частым вдувом газа в межсекционные щели с $m_1=0,1 \div 0,2$ [2], что подтверждено экспериментально для случая вдува газа в четырех сечениях канала с $m_1=0,8 \div 1,2$. Тепловой к. п. д. плазмотрона при этом повышается с $0,76$ (межсекционный вдув с $g_1=0,5$ г/с, что соответствует изменению m_1 в пределах $0,05-0,08$) до $0,83$, т. е. конвективные потери на турбулентном участке уменьшаются примерно на 35% .

ВЫВОДЫ

1. Локальный межсекционный вдув газа с параметром $m \approx 1$ на полностью развитом турбулентном участке дуги обеспечивает заметное снижение конвективных тепловых потерь в стенку канала на протяжении нескольких калибров. Это позволяет существенно повысить тепловой к. п. д. плазмотрона, заменяя равномерно распределенный вдув газа через щели межэлектродной вставки с параметром вдува $m_1=0,1-0,2$ на интенсивный вдув с $m \sim 1$ через меньшее число щелей при неизменном суммарном расходе газа.

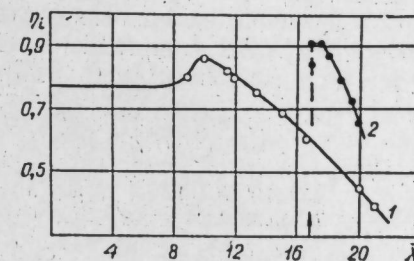


Рис. 5. Распределение локального к. п. д. η_i вдоль канала при отсутствии (1) и при наличии (2) заградительного вдува с $m=1$ в сечении $X=17$.
 $S=0,13$ см, $G=14$ г/с, $I=120$ А.

2. Эффективность газовой завесы θ' в диапазоне изменения $S = 0,13 \div 0,42$ см и $m = 0,2 \div 1,5$ определяется в основном комплексом

$$K = \frac{x - x_0}{mS} \text{Re}_s^{-0,25}.$$

3. На основе обобщенного уравнения (7) представляется возможным проводить оценку эффективности газовой завесы на турбулентном участке электродуговой камеры плазмотрона с МЭВ в широком диапазоне изменения параметра K .

4. Экспериментальные данные по тепловым потокам в секции плазмотрона с МЭВ в диапазоне изменения $0 \leq K \leq 3$ вполне удовлетворительно описываются полуэмпирической теорией, изложенной в работе [10].

Институт теплофизики
СО АН СССР,
Новосибирск

Поступила в редакцию
9/1 1975

ЛИТЕРАТУРА

1. М. Ф. Жуков. ТВТ, 1972, 10, № 6.
2. М. Ф. Жуков, И. М. Засыпкин, М. И. Сазонов. Изв. Сиб. отд. АН СССР, сер. техн. наук, 1973, № 3, вып. 1.
3. Андерсон, Эккерт. РТК, 1967, 5, № 4.
4. Хэберлайн, Пфендер. Теплопередача, 1971, № 2.
5. Пэйнттер, Эмсен. РТК, 1971, 9, № 12.
6. В. В. Бербасов, Б. А. Урюков. Изв. Сиб. отд. АН СССР, сер. техн. наук, 1974, № 3, вып. 1.
7. М. Ф. Жуков, В. П. Лукашов, Б. А. Поздняков, А. Э. Фридберг. Изв. Сиб. отд. АН СССР, сер. техн. наук, 1974, № 3, вып. 1.
8. Э. П. Волчков, В. Я. Левченко. ПМТФ, 1965, № 5.
9. Себан, Бек. Теплопередача, 1962, № 3.
10. С. С. Кутателадзе, А. И. Леонтьев. Тепломассообмен и трение в турбулентном пограничном слое. М., «Энергия», 1972.

ИЗВЕСТИЯ СИБИРСКОГО ОТДЕЛЕНИЯ АКАДЕМИИ НАУК СССР

№ 8, вып. 2

СЕРИЯ ТЕХНИЧЕСКИХ НАУК

1975

УДК

Б. А. УРЮКОВ

ТЕОРИЯ ЭРОЗИИ ЭЛЕКТРОДОВ В НЕСТАЦИОНАРНЫХ ПЯТНАХ ЭЛЕКТРИЧЕСКОЙ ДУГИ

Вопрос о стойкости электродов в настоящее время один из наиболее важных в технике дуговых плазмотронов. Однако до сих пор, насколько известно автору, нет более или менее обоснованной теории уноса материала (эрозии) электродов при воздействии на них электрической дуги. Вместе с тем процесс накопления экспериментальных данных идет довольно интенсивно (см. например, [1—3]).

В настоящей работе предлагается физическая модель процесса эрозии в пятне дуги, т. е. в месте присоединения дуги к электроду, и даются некоторые количественные и качественные оценки скорости эрозии и особенностей поведения пятна дуги на электроде.

1. Исходные положения работы таковы:

- а) Рассматривается электрод с нестационарным пятном дуги, т. е. с пятном, непрерывно перемещающимся по поверхности электрода. Физическая модель, предлагаемая в работе, позволяет объяснить причину нестационарности пятна и дать некоторый критерий оценки появления нестационарного пятна в зависимости от свойств материала электрода.
- б) Считается, что электрод достаточно интенсивно охлаждается, так что средняя температура его в течение времени работы постоянна.
- в) Предполагается, что эрозия осуществляется за счет испарения материала электрода, нагретого в зоне пятна дуги до температуры кипения при термическом воздействии пятна дуги на поверхность электрода. Иными словами, считается, что химического взаимодействия плазмы дуги с электродом, приводящего к образованию летучих соединений, не происходит. Пренебрегается также молекулярным испарением материала электрода, нагретого до температуры, меньшей температуры кипения.

Тепловые потоки в электроды в районе пятна дуги достигают очень больших величин — порядка 10^8 — 10^{10} Вт/м². Вместе с тем время неподвижного положения пятна дуги на поверхности электрода составляет 10^{-4} — 10^{-5} с [4]. В результате зона внутри электрода, прогретая этим тепловым потоком в течение единичного акта воздействия пятна на электрод, оказывается небольшой (в медном электроде $\sim 10^{-3}$ — 10^{-1} мм), намного меньшей как толщины электрода, так и диаметра пятна дуги. Это позволяет, во-первых, не учитывать влияния внешнего охлаждения на процесс термического взаимодействия пятна дуги и электрода и, во-вторых, в математической формулировке проблемы рассматривать одномерную задачу теплообмена. Тем не менее считается (в соответствии с пунктом б), что тепло, подведенное к электроду за большое число актов воздействия пятна на электрод, полностью снимается внешней системой охлаждения.

Если предположить, что весь тепловой поток q , подведенный к электроду, начиная с того момента, когда температура поверхности

электрода в пятне достигла температуры кипения, тратится лишь на испарение материала, то можно записать (рис. 1):

$$q = r_k \rho_{ж} \frac{d\Delta}{dt}, \quad (1.1)$$

где r_k — скрытая теплота парообразования; $\rho_{ж}$ — плотность жидкой фазы материала электрода; Δ — толщина области испаренного материала. В уравнении (1.1) пренебрегается теплом, которое пошло на увеличение массы расплава и на расширение зоны нагрева твердой части электрода. Отсюда легко рассчитать скорость уноса испаренного материала G' и удельную эрозию $\bar{G}' = G'/I$, где I — сила тока дуги:

$$G' = F \rho_{ж} \frac{d\Delta}{dt} = F \frac{q}{r_k} = \frac{I}{j} \frac{q}{r_k} = \frac{IU_0}{r_k}, \quad (1.2)$$

$$\bar{G}' = \frac{G'}{I} = \frac{U_0}{r_k}, \quad (1.3)$$

где F — площадь пятна, равная I/j ; j — средняя плотность тока в пятне дуги; U_0 — «вольтовый эквивалент» теплового потока в пятне дуги ($q = U_0 \cdot j$). Величина U_0 обычно имеет порядок 10 В, значения r_k можно найти в [5] (табл. 1). Расчет по формуле (1.3) для различных металлов (табл. 2) дает значения удельной эрозии в диапазоне 10^{-4} — 10^{-2} г/Кл, что на несколько порядков выше действительной величины удельной эрозии, например меди или вольфрама [4].

Сразу обращает на себя внимание то, что в формуле (1.3) не учитывается время, в течение которого происходит испарение. Действительно, после появления пятна дуги в данном месте поверхности электрода вначале происходит прогрев материала до температуры плавления T_n на его поверхности (отрезок времени t_n). Затем некоторая масса материала электрода расплавляется вплоть до достижения его поверхностью температуры кипения T_k (отрезок времени t_k). И лишь после этого происходит процесс испарения, который длится в течение отрезка времени t_k . По прошествии времени $(t_n + t_n + t_k)$ от начала процесса пятно ду-

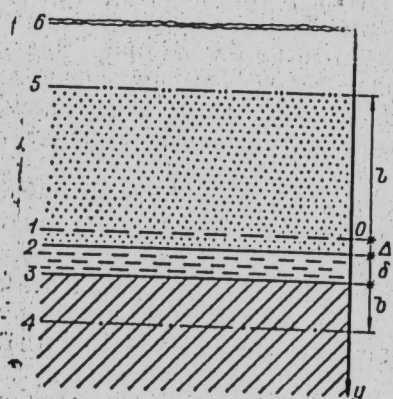


Рис. 1. Схема термического воздействия теплового потока в пятне дуги на электрод.

1 — начальное положение поверхности электрода; 2 — положение жидкой границы поверхности электрода при кипении; 3 — нижняя граница жидкой фазы; 4 — граница теплового прогрева электрода; 5 — контактная поверхность; 6 — ударная волна.



Рис. 2. Схема теплового прогрева электрода.

1 — поверхность электрода; 2 — граница зоны теплового воздействия дуги на электрод.

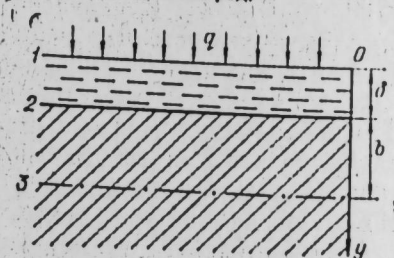


Рис. 3. Схема оплавления электрода.

1 — жидкая поверхность электрода; 2 — нижняя граница жидкой фазы; 3 — граница зоны прогрева электрода.

Таблица 1

Теплофизические свойства исследованных элементов

Атомный №	Элемент	Атомный вес	$T_n, ^\circ\text{K}$	$T_k, ^\circ\text{K}$	$r_k \cdot 10^{-4}, \text{Дж/моль}$	$r_k \cdot 10^{-5}, \text{Дж/моль}$	$c \cdot 10^{-1}, \text{Дж/моль}^\circ\text{K}$	$\lambda, \text{Вт/м}^\circ\text{K}$	При $T, ^\circ\text{K}$	$\rho \cdot 10^{-3}, \text{кг/м}^3$	$U_0, \text{эВ}$
3	Li	6,94	454	1620	0,457	1,61	2,47	48,4	1073	0,536	5,390
4	Be	10,81	1560	2740	1,17	3,52	1,64	75,4	1250	1,84	9,320
6	C	12,01	—	4470	—	7,19	0,783	28,3	2273	2,27	11,26
11	Na	22,99	372	1170	0,260	1,08	2,82	57,2	1073	0,966	5,138
12	Mg	24,31	923	1380	0,896	1,47	2,49	97,5	1073	1,74	7,644
13	Al	26,98	932	2620	1,07	3,14	2,44	184	920	2,70	5,984
19	K	39,10	337	1050	0,232	0,900	3,00	35,0	973	0,899	4,339
22	Ti	47,90	1940	3440	1,55	4,73	2,50	20,9	800	4,50	6,830
23	V	50,94	2190	3660	1,76	5,14	2,47	39,6	1173	6,09	6,740
24	Cr	52,00	2180	2840	1,38	3,96	2,33	62,8	1200	7,19	6,764
25	Mn	54,94	1520	3290	1,46	2,94	2,63	157	273	7,47	7,432
26	Fe	55,85	1810	3160	1,50	4,18	2,51	29,7	1600	7,87	7,900
27	Co	58,93	1770	3150	1,52	4,25	2,47	69,5	293	8,79	7,860
28	Ni	58,71	1730	3110	1,71	4,24	2,61	72,0	1620	8,40	7,633
29	Cu	63,54	1360	3150	1,31	3,39	2,45	318	1280	8,93	7,794
30	Zn	65,37	693	1180	0,739	1,31	2,08	95,0	673	7,14	9,391
31	Ga	69,72	303	2520	0,559	2,71	2,61	29,3	273	5,91	6,000
32	Ge	72,59	1210	3120	3,18	3,80	2,34	50,2	370	5,32	7,880
40	Zr	91,22	2130	4600	2,29	6,10	2,52	25,6	900	6,53	6,835
41	Nb	92,91	2770	5120	2,68	7,22	2,49	69,5	1900	8,63	6,880
42	Mo	95,94	2890	5100	2,76	6,63	2,38	86,2	2800	10,22	7,131
47	Ag	107,9	1230	2440	1,13	2,85	2,55	349	800	10,49	7,574
48	Cd	112,4	594	1040	0,607	1,12	2,08	43,9	673	8,64	8,991
50	Sn	118,7	505	3000	0,720	3,02	2,13	32,6	773	5,77	7,332
51	Sb	121,8	903	1900	2,01	2,62	2,52	23,2	873	6,69	8,640
55	Cs	132,9	302	960	0,214	0,770	3,14	15,0	300	1,96	3,893
57	La	138,9	1190	3640	1,13	4,19	2,78	13,8	300	6,16	5,614
72	Hf	178,5	2250	3500	2,18	6,07	2,55	20,5	825	13,25	5,500
73	Ta	181,0	3270	5560	3,14	7,81	2,45	78,2	1800	16,62	7,700
74	W	183,8	3650	5640	3,52	8,45	2,48	92,9	3000	19,26	7,980
78	Pt	195,1	2040	3980	1,97	5,64	2,59	64,9	1803	21,47	8,960
79	Au	197,0	1340	3120	1,24	7,87	2,54	310	373	19,30	9,223
80	Hg	200,6	234	630	0,230	0,614	2,80	14,3	1070	14,39	10,43
82	Pb	207,2	601	2020	0,478	1,96	2,64	19,8	1073	11,34	7,415
90	Th	232,0	1970	4500	1,57	4,69	2,73	35,8	580	11,72	6,950
92	U	238,0	1410	4140	1,55	7,22	2,60	48,5	1070	19,04	4,000

ги перескакивает на другое место и весь процесс повторяется вновь. Поскольку масса испаренного материала во время единичного акта теплового взаимодействия пятна дуги с электродом равна $M_1 = G't_k$, то скорость уноса массы G будет равна $M_1/(t_n + t_n + t_k)$, а удельная эрозия

$$\bar{G} = \bar{G}' \frac{t_k}{t_n + t_n + t_k}. \quad (1.4)$$

2. Таким образом, возникает задача определения t_n , t_n , t_k . Наиболее просто времена нагрева и плавления рассчитываются на основе интегрального метода решения уравнения одномерной нестационарной теплопроводности, развитого в работе [6]. Уравнение теплопроводности формально интегрируется в областях теплового взаимодействия (предполагается, что все области имеют конечные размеры) с учетом граничных условий. Полученные при этом интегралы находятся после аппроксимации температурных профилей в рассматриваемых областях некоторыми достаточно простыми функциями, удовлетворяющими соответствующим граничным условиям.

На рис. 2 показана схема прогрева стенки до начала ее плавления. Уравнение теплопроводности

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\lambda_T}{\rho_T c_T} \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \quad (2.1)$$

Расчетные данные по эрозии элементов

Атомный №	Элемент	U_i kT_K	$j=10^4 \text{ A/cm}^2$				$j=10^5 \text{ A/cm}^2$				$j=10^6 \text{ A/cm}^2$						
			χ	M_K	$t_K \cdot 10^4, \text{ c}$	$t_H \cdot 10^4, \text{ c}$	$\bar{G} \cdot 10^4, \text{ г/Кл}$	M_K	$t_K \cdot 10^4, \text{ c}$	$\bar{G} \cdot 10^4, \text{ г/Кл}$	M_K	$t_K \cdot 10^4, \text{ c}$	$\bar{G} \cdot 10^4, \text{ г/Кл}$				
3	Li	38,6	0,256	0,256	1,22	0,0145	0,200	2,46	0,82	3,81	7,55	2,11	1,48	17,6	2,11	1,48	17,6
4	Be	39,4	0,203	0,203	1,54	2,23	1,81	0,118	0,70	4,43	0,341	1,93	1,62	1,23	1,93	1,62	1,23
6	C	29,3	0,158	0,158	1,98	4,87	—	0,068	0,62	5,04	0,172	1,74	1,80	0,597	1,74	1,80	0,597
11	Na	50,9	0,275	0,275	1,14	0,00263	0,0490	47,1	0,83	3,76	1,47	2,16	1,45	1,57	2,16	1,45	1,57
12	Mg	64,7	0,237	0,237	1,32	0,450	0,234	2,96	0,76	4,11	9,20	2,04	1,53	28,6	2,04	1,53	28,6
13	Al	26,6	0,212	0,212	1,47	1,196	3,33	0,280	0,72	4,35	0,827	1,96	1,59	2,93	1,96	1,59	2,93
19	K	48,2	0,296	0,296	1,06	0,00254	0,0133	295	0,85	3,68	827	2,23	1,40	391	2,23	1,40	391
22	Ti	23,1	0,185	0,185	1,69	0,886	0,461	1,27	0,66	4,75	3,56	1,85	1,69	11,2	1,85	1,69	11,2
23	V	21,4	0,181	0,181	1,72	2,79	1,23	0,424	0,65	4,81	1,19	1,76	1,78	4,20	1,76	1,78	4,20
24	Cr	27,7	0,182	0,182	1,71	4,75	0,800	0,406	0,65	4,81	1,14	1,76	1,78	4,08	1,76	1,78	4,08
25	Mn	26,3	0,285	0,285	1,10	5,56	5,57	0,185	0,85	3,68	1,14	2,20	1,42	2,36	2,20	1,42	2,36
26	Fe	29,2	0,192	0,192	1,71	1,61	0,871	0,394	0,69	4,51	4,08	1,89	1,65	8,36	1,89	1,65	8,36
27	Co	29,1	0,188	0,188	1,66	3,68	2,19	0,370	0,66	4,67	1,11	1,86	1,68	3,88	1,86	1,68	3,88
28	Ni	28,6	0,186	0,186	1,68	3,89	2,67	0,370	0,66	4,74	1,08	1,85	1,69	3,78	1,85	1,69	3,78
29	Cu	28,6	0,236	0,236	1,32	8,16	10,52	0,133	0,76	4,11	0,414	2,05	1,53	1,53	2,05	1,53	1,53
30	Zn	23,8	0,218	0,218	1,43	0,222	0,374	120	0,73	4,23	35,8	1,97	1,59	105	1,97	1,59	105
31	Ga	27,8	0,251	0,251	1,25	—	0,310	10,8	0,78	4,00	34,3	2,08	1,50	87,3	2,08	1,50	87,3
32	Ge	29,4	0,214	0,214	1,46	0,348	1,64	1,41	0,73	4,28	3,98	1,97	1,58	13,5	1,97	1,58	13,5
40	Zr	17,3	0,192	0,192	1,63	1,027	1,04	1,20	0,69	4,51	3,27	1,89	1,65	11,1	1,89	1,65	11,1
41	Nb	15,7	0,180	0,180	1,73	6,55	4,07	0,219	0,65	4,81	0,581	1,84	1,70	2,02	1,84	1,70	2,02
42	Mo	16,3	0,196	0,196	1,59	9,75	5,63	0,148	0,69	4,51	0,410	1,90	1,65	1,54	1,90	1,65	1,54
47	Ag	39,2	0,217	0,217	1,44	5,04	4,63	1,563	0,73	4,29	1,68	1,97	1,59	6,13	1,97	1,59	6,13
48	Cd	100,3	0,236	0,236	1,32	0,0407	0,0919	100	0,76	4,12	302	2,04	1,53	537	2,04	1,53	537
50	Sn	28,5	0,252	0,252	1,24	0,0095	0,286	16,5	0,79	3,96	52,3	2,09	1,50	133	2,09	1,50	133
51	Sb	53,0	0,184	0,184	1,69	0,0792	0,245	24,2	0,67	4,67	65,9	1,85	1,69	15,9	1,85	1,69	15,9
55	Cs	121,7	0,316	0,316	0,98	—	0,00312	5320	0,89	3,52	9170	2,28	1,37	170	2,28	1,37	170
57	La	18,0	0,215	0,215	1,45	0,909	1,71	1,84	0,73	4,29	5,45	1,89	1,65	30,7	1,89	1,65	30,7
72	Hf	18,5	0,146	0,146	2,14	0,985	0,415	4,50	0,59	5,30	11,1	1,68	1,86	34,4	1,68	1,86	34,4
73	Ta	16,1	0,181	0,181	1,72	10,37	5,19	0,258	0,65	4,80	0,718	1,84	1,70	2,50	1,84	1,70	2,50
74	W	16,5	0,170	0,170	1,64	18,10	6,87	0,143	0,65	4,80	0,422	1,80	1,74	1,51	1,80	1,74	1,51
78	Pt	26,2	0,179	0,179	1,74	3,87	2,73	0,913	0,65	4,80	2,52	1,83	1,71	8,77	1,83	1,71	8,77
79	Au	34,5	0,101	0,101	3,09	5,55	6,72	0,633	0,47	6,65	1,36	1,46	2,14	4,31	1,46	2,14	4,31
80	Hg	193,0	0,260	0,260	1,20	—	0,00934	4130	0,81	3,86	9550	2,12	1,47	3090	2,12	1,47	3090
82	Pb	42,6	0,262	0,262	1,19	0,0174	0,0740	137	0,81	3,86	425	2,13	1,47	650	2,13	1,47	650
90	Th	18,0	0,244	0,244	1,28	0,917	0,718	38,8	0,68	4,60	13,9	2,07	1,51	42,0	2,07	1,51	42,0
92	U	11,3	0,214	0,214	1,44	0,822	1,58	2,92	0,73	4,28	8,63	1,97	1,58	35,6	1,97	1,58	35,6

(индекс t указывает, что параметры относятся к твердому материалу) с граничными условиями $y=0, \lambda \left(\frac{\partial T}{\partial y} \right)_0 = -q, y=b, T_b=0, \left(\frac{\partial T}{\partial y} \right)_b = 0$ интегрируется в пределах $0 \leq y \leq b$:

$$\frac{d}{dt} \int_0^b T dy = - \frac{\lambda_t}{\rho_t c_t} \left(\frac{\partial T}{\partial y} \right)_0. \quad (2.2)$$

Профиль температуры аппроксимируется квадратным полиномом, удовлетворяющим поставленным граничным условиям:

$$T = \frac{q}{2b\lambda_t} (b-y)^2. \quad (2.3)$$

Решением уравнения (2.2) является

$$b = \sqrt{6 \frac{\lambda_t}{\rho_t c_t} t}. \quad (2.4)$$

Поскольку температура на поверхности электрода по уравнению (2.3)

$$T_0 = \frac{qb}{2\lambda_t}, \quad (2.5)$$

то время нагрева поверхности стенки до температуры плавления T_n

$$t_n = \frac{2}{3} \frac{\lambda_t \rho_t c_t T_n^2}{q^2}. \quad (2.6)$$

Аналогично решается задача о нахождении времени t_n (рис. 3). Так же, как и раньше, уравнение (2.1) интегрируется в области $\delta \leq y \leq \delta+b$, профиль температуры аппроксимируется полиномом

$$T = T_n \frac{(y-\delta-b)^2}{b^2}. \quad (2.7)$$

В результате получается уравнение

$$\frac{1}{3} \frac{db}{dt} + \frac{d\delta}{dt} = \frac{2\lambda_t}{\rho_t c_t} \frac{1}{b}. \quad (2.8)$$

В зоне $0 \leq y \leq \delta$ температурный профиль аппроксимируется формулой

$$T - T_n = (T_0 - T_n) \left(1 - \frac{y^2}{\delta^2} \right) - \frac{q\delta}{\lambda_{ж}} \frac{y}{\delta} \left(1 - \frac{y}{\delta} \right), \quad (2.9)$$

индекс j указывает, что параметры относятся к жидкой фазе.

После подстановки профиля (2.9) в интегральное уравнение получаем

$$\begin{aligned} & \left[\frac{2}{3} (T_0 - T_n) - \frac{q\delta}{3\lambda_{ж}} \right] \frac{d\delta}{dt} + \frac{2}{3} \delta \frac{dT_0}{dt} = \\ & = \frac{2\lambda_{ж}}{\rho_{ж} c_{ж}} \delta \left[\frac{q\delta}{\lambda_{ж}} - (T_0 - T_n) \right]. \end{aligned} \quad (2.10)$$

Уравнением, замыкающим эту систему, будет условие сопряжения тепловых потоков на границе раздела фаз $y=\delta$, где следует учитывать

скрытую теплоту плавления r_n :

$$r_n \rho_T \frac{d\delta}{dt} = \lambda_{ж} \left[\frac{2}{\delta} (T_0 - T_n) - \frac{q\delta}{\lambda_{ж}} \right] - \lambda_T \frac{2T_n}{b}. \quad (2.11)$$

Система уравнений (2.8), (2.10), (2.11) сложна для аналитического решения. Поэтому, учитывая малое время протекания процесса, можно воспользоваться лишь первыми членами разложения около начала. Учитывая, что при $t=0$ $\delta=0$, $T_0=T_n$, $b=b_n$, где b_n определяется из уравнения (2.4) при $t=t_n$ (2.6), получаем

$$\frac{dT_0}{dt} \approx \frac{q^2}{\lambda_{ж} r_n \rho_T}; \quad \frac{d\delta}{dt} \approx \frac{q}{r_n \rho_T}; \quad \frac{db}{dt} \approx \frac{3q}{\rho_T} \left(\frac{1}{c_T T_n} - \frac{1}{r_n} \right). \quad (2.12)$$

Таким образом, время t_n по первому уравнению (2.12) оценивается формулой

$$t_n = \frac{(T_n - T_0) \lambda_{ж} r_n \rho_T}{q^2}. \quad (2.13)$$

Характерно, что времена t_n и t_n сильно зависят от теплового потока через пятно дуги ($\sim q^2$). При относительно небольших плотностях тока в пятне ($j \sim 10^4 - 10^5$ А/см²) время кипения t_n мало по сравнению с ($t_n + t_n$) для большинства электродных материалов. Это можно видеть из табл. 2, где приведены значения t_n и t_n для $j=10^4$ А/см² (расчет для других j прост, так как t_n и $t_n \sim j^{-2}$) и расчетные значения t_n для $j=10^4$, 10^5 и 10^6 А/см². Таким образом, в ряде случаев ($t_n + t_n$) фактически отражает время неподвижного положения пятна. На этом основании может быть предложен метод определения теплового потока в пятне дуги по измерениям «времени жизни» пятна.

3. Для определения времени t_n рассмотрим снова процесс кипения, но теперь обратим внимание на взаимодействие пара материала электрода с дуговой плазмой (рис. 1). Испаренное с поверхности электрода вещество движется в направлении дугового столба. Поскольку плотность пара на несколько порядков меньше плотности материала электрода, то скорость его движения соответственно на несколько порядков больше скорости движения поверхности жидкой ванны в глубь электрода $d\Delta/dt$. Оценим эту скорость, используя уравнение (1.1) и условие сохранения расхода пара:

$$\rho_k \omega_k \approx \rho_{ж} \frac{d\Delta}{dt} \approx \frac{q}{r_k}, \quad (3.1)$$

где ρ_k , ω_k — плотность и скорость паровой фазы соответственно. За время t_k пар пройдет некоторое расстояние l . Следовательно, если известны l и ω_k , можно оценить t_k :

$$t_k \approx \frac{l}{\omega_k}. \quad (3.2)$$

Если концентрация паровых частиц (плотность пара) много больше концентрации частиц плазмы (плотности плазмы) вблизи электрода, то в процессе расширения пара между дуговой плазмой и столбом дуги возникает прослойка, имеющая, вообще говоря, электропроводящие свойства, отличные от свойств дуговой плазмы. Пусть электропроводность паровой фазы меньше электропроводности плазмы вблизи электрода, тогда по истечении некоторого времени условия переноса электричества через паровую фазу значительно ухудшатся, так что дуге «удобнее» будет гореть, соединяясь непосредственно с металлической поверхностью электрода. В этот момент пятно дуги должно появиться в новом

месте электрода (вероятнее всего — на краю первоначального пятна, где условия для пробоя окружающего газа наиболее благоприятны, а концентрация пара мала). По-видимому, условием прекращения горения дуги в данном месте и перехода ее пятна на новое место будет служить момент, когда частицы пара внедрятся в дуговую плазму на длину порядка толщины приэлектродного слоя дуги, которая имеет порядок нескольких длин свободного пробега электронов в дуговой плазме. В этот момент возможность электрического контакта дуговой плазмы с электродом будет определяться свойствами паровой прослойки. Таким образом, будем считать $l \approx l_0$ (l_0 — толщина приэлектродного слоя дуги). Скорость пара (а также все остальные его параметры) мы определим, исходя из одномерной картины взаимодействия испаренного материала со средой, показанной на рис. 1. Будем считать, что давление в паровой фазе достаточно велико, чтобы за время протекания процесса перед движущимся фронтом пара (рис. 1, 5) возникла ударная волна (рис. 1, 6), которую, ради простоты, считаем поверхностью разрыва. Скорость движения ударной волны обозначим через V . Параметры газа (плазмы) перед ударной волной отметим индексом ∞ , за ударной волной — индексом 1 и испаренного материала — индексом k .

На ударной волне имеем известные условия совместности

$$V(V - \omega_1) = 2 \frac{\kappa - 1}{\kappa + 1} \left(h_\infty + \frac{V^2}{2} \right), \quad (3.3)$$

$$\rho_1 + \rho_1(V - \omega_1)^2 = \rho_\infty + \rho_\infty V^2, \quad (3.4)$$

$$\rho_1(V - \omega_1) = \rho_\infty V. \quad (3.5)$$

На контактной поверхности (рис. 1, 5) имеем равенство давлений и скоростей

$$p_1 = p_k, \quad (3.6)$$

$$\omega_1 = \omega_k. \quad (3.7)$$

При этом будем считать, что параметры пара однородны во всей области, т. е. пренебрежем диффузией частиц плазмы в пар и волнами разрежения. Замыкают эту систему уравнения состояния

$$p_1 = \rho_1 R_1 T_1, \quad (3.8)$$

$$p_k = \rho_k R_k T_k. \quad (3.9)$$

и уравнение (3.1) — определение массового расхода пара. В приведенных выше уравнениях κ — отношение удельных теплоемкостей плазмы, которое будем считать одинаковым как перед, так и за ударной волной; R_1 и R_k — газовые постоянные плазмы и пара; температура пара считается равной температуре кипения T_n .

Решая эту систему уравнений, находим:

а) уравнение для определения скорости ударной волны

$$\frac{2}{\kappa + 1} \frac{M^2 - 1}{M} \left(\frac{2\kappa}{\kappa + 1} M^2 - \frac{\kappa - 1}{\kappa + 1} \right) = \chi, \quad (3.10)$$

где $M = V/a_\infty$; $a_\infty^2 = (\kappa - 1) h_\infty$; $\chi = \frac{q R_k T_k}{r_k \rho_\infty a_\infty}$;

б) уравнение для определения скорости движения пара

$$M'_k = \frac{2}{\kappa + 1} \frac{M^2 - 1}{M}, \quad (3.11)$$

где $M'_k = \omega_k/a_\infty$;

в) уравнение для определения давления пара

$$\frac{p_k}{p_\infty} = \frac{\chi}{M_k} = \frac{2\chi}{\chi+1} M^2 - \frac{\chi-1}{\chi+1}. \quad (3.12)$$

При малых χ приближенным решением для M_k будет

$$M_k \approx \chi, \quad (3.13)$$

а при достаточно больших χ

$$M_k \approx \frac{2}{\chi+1} \left[\frac{\chi+1}{4\chi} \chi \right]^{1/3} \left\{ 1 - \frac{3\chi+1}{6\chi} \left[\frac{\chi+1}{4\chi} \chi \right] - \frac{2}{3} \right\}. \quad (3.14)$$

На рис. 4 показаны решения уравнений (3.10)–(3.13) в диапазоне $\chi=0-10$, которыми можно пользоваться в расчетах (полагалось $\kappa=5/3$). Результаты расчета M_k , t_k и $\bar{G}$ при плотностях тока $j=10^4, 10^5, 10^6$ А/см² и $U_0=10$ В приведены в табл. 2 для различных металлов, которые могут служить либо в качестве электродов, либо компонентов электродных сплавов или наполнителей. В расчетах параметров электродной плазмы принималось для определенности: состав — атомарный азот при $T_\infty=10^4$ °К; давление $p_\infty=10^5$ н/м², степень ионизации $\sim 1,5\%$, длина $l_0=10^{-3}$ см, что составляет примерно 3 длины кулоновского свободного пробега электронов в дуговой плазме указанных параметров.

Следует обратить внимание на величину t_k , которая при изменении плотности тока на два порядка меняется лишь на порядок и лежит в пределах $10^{-8}-10^{-9}$ с. Выше предполагалось, что возникновение прослойки пара между дуговой плазмой и электродом приводит к нарушению электрического контакта между ними. Это может произойти в случае, если за время распространения паровой прослойки атомы пара не успеют ионизоваться. Если же за это время равновесная ионизация достигается, то контакт может нарушиться в том случае, когда проводимость пара (при температуре порядка T_k) окажется меньше проводимости плазмы около электрода. Оценка времени ионизации электронным ударом атомов пара показала, что оно имеет порядок 10^{-11} с, что обусловлено высоким уровнем энергии электронов, набираемым в бесстолкновительном приэлектродном слое, — порядка нескольких электрон-вольт. Таким образом, приближенно можно считать, что паровая прослойка оказывается равносильно ионизованной с самого начала и между дуговой плазмой и электродом при испарении металла появляется слой с иной проводимостью. При малых степенях ионизации проводимость плазмы в основном определяется экспоненциальным

множителем вида $\exp\left(\frac{U_i}{2kT}\right)$, где U_i — потенциал ионизации. В связи с этим для оценки возможности появления стационарных пятен следует сравнить величины $\frac{U_i}{kT_k}$ материала электродов и $\frac{U_i}{kT_\infty}$ дуговой плазмы. В азотной плазме при $T_\infty \sim 1$ эВ $\frac{U_i}{kT_\infty} \sim 14,5$. Сравнение с соответствующими величинами для исследованных материалов, приведенными в табл. 2, показывает, что наиболее вероятно возникновение стационарных пятен на электродах, со-

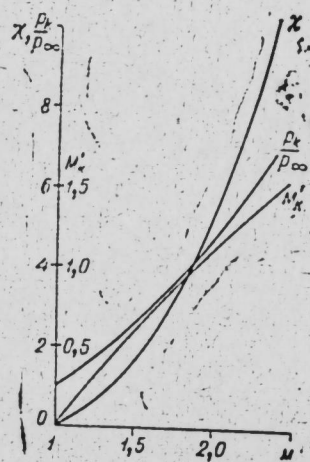


Рис. 4. Расчетные зависимости величин, входящих в уравнения распространения паровой фазы.

держащих уран. На таких металлах, как Ta, Mo, W, Zr, Th, La, Hf, появление стационарных пятен также не исключено или во всяком случае более вероятно, чем на других. Если приведенный выше перечень металлов можно назвать рядом «стабильности» пятна, то ряд «нестабильности» выглядит следующим образом: Hg, Cs, Cd, Te, Mg, Sb, Na, K, Pb, Ag, Li, Ge, Au, C. В некоторых случаях нестационарности пятен трудно заметить, так как время жизни пятна составляет $10^{-7}-10^{-8}$ с (например, на щелочных металлах при $j \sim 10^5$ А/см² или на C, Mo, Cu, W, если $j \sim 10^6$ А/см²). Таким образом, для решения вопроса о стационарности или нестационарности пятен может потребоваться высоко-разрешающая аппаратура.

Интересно рассмотреть влияние давления окружающего газа на эрозию электродов. Длина свободного пробега электронов пропорциональна $p_\infty^{-1/2}$, так как $l_e = (N_e Q)^{-1}$, где N_e — концентрация электронов; Q — кулоновское сечение столкновения, зависящее в основном лишь от температуры. Концентрация N_e по формуле Саха зависит от $n_a^{1/2}$, где n_a — концентрация атомов, пропорциональная p_∞ . Вместе с тем давление входит в знаменатель параметра χ — уравнение (3.10). При малых χ , т. е. при больших давлениях, $\omega_k \sim M_k \approx \chi$, т. е. $t_k \sim p_\infty^{1/2}$. При больших χ , т. е. при малых давлениях, $\omega_k \sim M_k \sim \chi^{1/3}$. Следовательно, в этом случае $t_k \sim p_\infty^{1/6}$. Если тепловой поток q не зависит от давления, то зависимость t_k от p_∞ определяет и зависимость удельной эрозии от давления. Имеются, однако, сведения о том, что $q \sim p$ [4] (это подтверждено лишь для давлений выше атмосферного). Тогда при больших давлениях $\bar{G} \sim p^{3/2}$, а при малых $\bar{G} \sim p^{1/6}$, т. е. удельная эрозия резко возрастает с увеличением давления среды.

На рис. 5 показана попытка установления каких-либо закономерностей в зависимости удельной эрозии от атомного номера элементов исследованных материалов. Сплошными линиями с римскими цифрами при них объединены данные по $\bar{G}$ для элементов, входящих в одну и

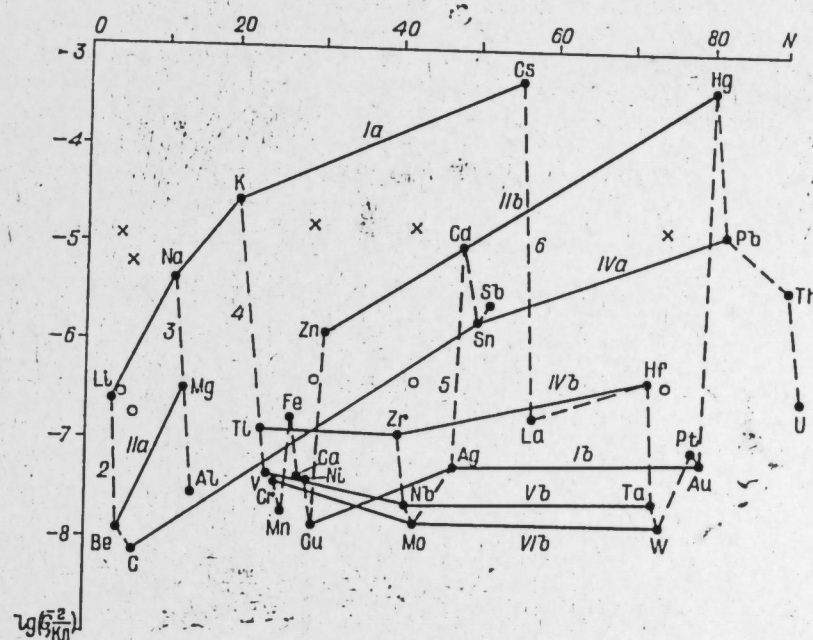


Рис. 5. Расчетные значения удельной эрозии электродов в зависимости от атомного номера вещества электрода. ● соответствуют $j=10^4$ А/см²; ○ и × соответствуют $j=10^5$ и 10^6 А/см² для Be, C, Cu, Mo, W.

ту же группу (или подгруппу) периодической системы Менделеева. Видно, что зависимость от атомного номера может быть как падающей, так и возрастающей. Наиболее низкой удельной эрозией обладают элементы V и VI в подгрупп.

Штриховыми линиями с арабскими цифрами при них объединены элементы, входящие в один и тот же период. Можно отметить некоторую периодичность изменения $\bar{G}$, но со сложной эволюцией $\bar{G}$ внутри периода. Кружками и крестиками отмечены величины удельной эрозии для наиболее стойких элементов (по расчету): Be, C, Si, Mo, W. При изменении j от 10^4 до 10^5 А/см² $\bar{G}$ увеличивается в 25—31 раз, а при изменении j от 10^5 до 10^6 А/см² — в 35—38 раз.

Анализируя данные табл. 2, можно видеть, что значения удельной эрозии различных элементов в основном зависят от соотношений между «временами жизни» и показателей эрозии $\bar{G}'$. Так, например, в группе наиболее стойких элементов Be и C имеют «времена жизни», значительно меньшие по сравнению с Si, Mo, W, но в то же время показатели эрозии $\bar{G}'$ этих элементов находятся примерно в том же соотношении, что и приводит к приблизительно одинаковой величине удельной эрозии $\bar{G}$.

Несмотря на то, что предложенная теория дает по порядку величин значения удельной эрозии, близкие к известным из эксперимента (см., например [4]), в ней имеются источники больших погрешностей. Основная погрешность вносится, по-видимому, через определение тепловых потоков в пятно дуги. Другой источник ошибки заключается в недостаточно четком определении величины l_0 , которая в большинстве интересных случаев линейно входит в определение $\bar{G}$. Неточности в определении теплофизических свойств элементов имеют, вероятно, вторичное значение, хотя эти параметры могут существенно зависеть от температуры электрода и его фазового состояния.

Таким образом, уточнение данной теории должно идти как по пути более глубокого изучения процессов теплопереноса в пятне дуги, так и по пути исследования процесса взаимодействия испаренного материала с дуговой плазмой.

Институт теплофизики
СО АН СССР,
Новосибирск

Поступила в редакцию
18/XI 1974

ЛИТЕРАТУРА

1. Физика, техника и применение низкотемпературной плазмы. Алма-Ата, Изд. КазПТИ, 1970.
2. Тезисы докладов V Всесоюзной конференции по генераторам низкотемпературной плазмы. т. II. Новосибирск, «Наука», 1972.
3. Тезисы докладов VI Всесоюзной конференции по генераторам низкотемпературной плазмы. Фрунзе, изд. ИФМ АН КиргССР, 1974.
4. М. Ф. Жуков, В. Я. Смоляков, Б. А. Урюков. Электродуговые нагреватели газа (плазмотроны). М., «Наука», 1973.
5. Физико-химические свойства элементов. Киев, «Наукова думка», 1965.
6. T. R. Goodman. Trans. of the ASME, 1958, 80, № 2, p. 335—342.

М. П. СТРОНГИН

РАСПРЕДЕЛЕНИЕ ТОКА И ПОТЕНЦИАЛА В ОБЛАСТЯХ, БЛИЗКИХ К ЭЛЕКТРОДУ

При расчетах секционированных плазмотронов, т. е. при использовании секции в качестве зонда, для расчета шунтирующих токов и т. д., возникает необходимость в учете влияния размеров секции на параметры системы. Расчет с использованием всех уравнений сложен из-за неоднородности задачи. Поэтому полезно, используя простую модель, выяснить влияние неоднородности на параметры задачи.

Пренебрегая магнитными полями и пространственным зарядом, рассмотрим следующую модель. На рис. 1 в области I $\sigma = \sigma_1$, в области II $\sigma = \sigma_2 = \text{const}$, причем $\frac{\sigma_1}{\sigma_2} \rightarrow \infty$, $\frac{r_0 - r_1}{r_1} \ll 1$, σ — проводимость. В этом случае можно решать плоскую задачу, что в большой степени упрощает рассмотрение. Физически эти допущения означают, что размер слабопроводящей зоны вблизи электрода много меньше радиуса канала. После всех этих упрощений задача сводится к решению уравнения Лапласа в области II. Различные решения уравнения Лапласа для расчета электрических полей в каналах МГД-устройств и подробная библиография по этому вопросу приведены в работе [1]. Наш случай отличается от рассмотренных в [1] иной постановкой граничных условий.

Остановимся на особенностях некоторых простых решений.

1. Допустим, что электрод представляет собой единую металлическую секцию. Тогда модели плазмотрона с самоустанавливающейся длиной дуги соответствуют следующие граничные условия:

$$\frac{r - r_1}{r_0 - r_1} = y, \quad \frac{z}{r_0 - r_1} = x, \\ U(0, x) = Ex, \quad \frac{\partial U}{\partial x} = 0 \big|_{x=0}, \quad U(1, x) = El, \quad U(y, l) = El, \quad (1)$$

где U — потенциал; x, y — соответственно продольная и поперечная переменные, здесь и в дальнейшем поперечный размер области II принимается равным единице; l — продольный размер; E — напряженность электрического поля. Решение уравнения Лапласа для потенциала

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} = 0 \quad (2)$$

при граничных условиях (1) можно представить в виде разложения в ряд Фурье:

$$U = \sum_{n=1}^{\infty} 2U_n(x) \sin \pi n y.$$

Определяя $U_n(x)$ из (1) и (2), получаем

$$U = \frac{2E}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{\frac{2\pi n}{l}(l-\frac{x}{2})} - e^{n\pi x}}{n^2 (e^{2\pi n l} - 1)} \sin n\pi y + Ey(l-x) + Ex. \quad (3)$$

При $l \gg 1$ (3) можно записать в виде

$$U = \frac{2E}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{-n\pi x} - e^{n\pi(x-2l)}}{n^2} \sin n\pi y + Ey(l-x) + Ex + O(e^{-2\pi l}).$$

Тогда

$$j_r = \sigma \frac{\partial U}{\partial y} = -\frac{\sigma E}{\pi} \ln(1 - 2e^{-\pi x} \cos \pi y + e^{-2\pi x}) + \sigma E(l-x) + O(e^{-\pi l}),$$

$$j_r(1, x) = \frac{2\sigma E}{\pi} \ln(1 + e^{-\pi x}) + \sigma E(l-x). \quad (4)$$

Следовательно, ток на электрод стремится к одномерному распределению, как e^{-ax} , где $a \gg 1$ — расстояние от края. У краев электрода в этой модели никаких особенностей нет. Полный же ток

$$\bar{I}_n = \left(\frac{\sigma E l^2}{2} - \frac{\sigma E}{6} \right) 2\pi, \quad (5)$$

т. е. полный ток при $l \gg 1$ равен току, выводимому из одномерной теории с точностью $\frac{1}{3l^2}$.

2. Той же секции, но модели плазматрона с фиксированной длиной дуги соответствуют граничные условия

$$\frac{\partial U}{\partial x} = 0|_{x=0}, \quad \frac{\partial U}{\partial x} = 0|_{x=l}, \quad U(1, x) = V_1, \quad U(0, x) = Ex. \quad (6)$$

Решение уравнения (2) с условиями (6) имеет вид

$$U = 2E \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{\frac{2\pi n}{l}(l-\frac{x}{2})} - e^{n\pi(l-\frac{x}{l})} - e^{n\pi(l+x)} + e^{n\pi x}}{(n\pi)^2 (e^{2\pi n l} - 1)} \sin n\pi y + (V_1 - Ex)y + Ex. \quad (7)$$

При $l \gg 1$ имеем

$$U = \frac{2E}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} (e^{-n\pi x} - e^{n\pi(x-l)}) \sin n\pi y + (V_1 - Ex)y + Ex + O(e^{-\pi l}).$$

Тогда

$$j_r = \frac{E\sigma}{\pi} \ln \frac{1 - 2e^{\pi(x-l)} \cos \pi y + e^{2\pi(x-l)}}{1 - 2l^{-\pi x} \cos \pi y + e^{-2\pi x}} + \sigma(V_1 - Ex),$$

$$\sigma = \begin{cases} \sigma_+ & (j_r > 0) \\ \sigma_- & (j_r < 0). \end{cases} \quad (8)$$

Из (7) видно, что j_r не имеет особенностей на электроде. Если секция работает в режиме зонда, то полный ток через нее равен нулю. Допустим $\sigma_+ = \sigma_-$, тогда $V_1 = \frac{El}{2}$, т. е. потенциал секции равен потенциалу средней точки дуги. Но $\sigma_+ = \sigma_-$ лишь при условии хорошей эмиссии электрода, если отрицательные носители — электроны, а в слу-

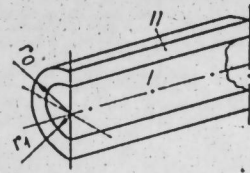


Рис. 1.

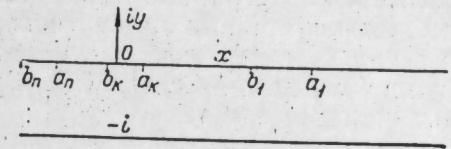


Рис. 2.

чае отсутствия эмиссии, если отрицательные носители — отрицательные ионы. Когда отрицательными носителями являются электроны и эмиссия отсутствует, $\sigma_- \ll \sigma_+$, σ_+ относится к отрицательным носителям, σ_- — к положительным. Из (8) определяется V_1 :

$$V_1 = \frac{2E}{\pi} \ln(1 + e^{-\pi a}) + Ea.$$

$j_r(1, a) = 0$ и a лежит в пределах $(0 \leq a \leq \frac{l}{2})$. Из условия равенства нулю полного тока имеем следующее выражение для a :

$$a^2 - \frac{1}{3} + \frac{4}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \cdot \frac{1}{n^2} e^{-a\pi n} + \frac{4}{\pi} a \ln(1 + e^{-a\pi}) + \frac{2\rho}{1-\rho} \left(al - \frac{l^2}{2} \right) = 0. \quad (9)$$

Здесь $\rho = \frac{\sigma_-}{\sigma_+}$. Для $a \gg 1$

$$a = -\frac{\rho l}{1-\rho} + \sqrt{\frac{\rho^2 l^2}{(1-\rho)^2} + \frac{\rho l^2}{1-\rho} + \frac{1}{3}} + O(e^{-\pi a}).$$

При $\rho \ll 1$ и $a \gg 1$ $a = \rho^{1/2} l + O\left(\frac{1}{6\rho^{1/2} l}\right)$. Для V_1 в случае $a \gg 1$ имеем выражение

$$V_1 = Ea + O(Ee^{-\pi a}),$$

т. е. результат, эквивалентный одномерному рассмотрению с точностью (при $\rho \ll 1$) $\sim \frac{1}{6\rho^{1/2} l}$.

Если $a\pi \ll 1$, то $a\pi \approx (3\pi^2 \rho l^2)^{1/3} \ll 1$ и $V_1 \approx \frac{2E \ln 2}{\pi}$, т. е. при $l \sim 1$ отклонение от одномерной теории существенно. Для расчета в области промежуточных значений a в третьем слагаемом уравнения (9) можно оставить только первые 3—4 члена суммы, так как ряд сходится достаточно быстро.

3. В реальной ситуации часто встречается случай с чередующимися секциями изолятор — электрод. Рассмотрим задачу с n чередующимися секциями вдали от краев, т. е. когда расстояние от крайних электродов до краев канала стремится к бесконечности (катод в $-\infty$, анод в $+\infty$). В этом случае задача сводится к решению уравнения (2) в полосе, изображенной на рис. 2. Граница полосы имеет координаты $x, x-i$ в комплексной плоскости $z = x + iy$, где промежутки a_n, b_n — проводники, а b_n, a_{n+1} — изоляторы. На нижней границе полосы имеем, как и раньше, условие $U(x, -i) = Ex$, промежутки $-\infty, b_n$ и $a_1, +\infty$ — изоляторы. Проведем замену: $U_1 = U - Ex$; U_1 тоже удовлетворяет уравнению (2), граничные условия для U_1 запишем в виде

$$U_1(\pm\infty) = 0; \quad U_1(x, 0) = V_n - Ex \quad (a_n \geq x \geq b_n);$$

$$U_1(x, -i) = 0; \quad \frac{\partial U_1}{\partial y} = 0 \quad (b_n \geq x \geq a_{n+1}). \quad (10)$$

Здесь V_n — потенциалы электродов.

Следовательно, имеется смешанная краевая задача, решение которой после конформного преобразования $t = e^{\pi(z+i)} (t = x_1 + iy_1)$, переводящего полосу в верхнюю полуплоскость, можно записать, используя формулу Келдыша—Седова [2]. Граничные условия в новых переменных запишем в виде

$$U_1(x_1, 0) = V_k - \frac{E}{\pi} \ln(-x_1) \quad (-e^{\pi a_k} \leq x_1 \leq -e^{\pi b_k}); \quad U_1(\pm \infty) = 0;$$

$$\frac{\partial U_1}{\partial y_1} = 0 \quad (-e^{\pi b_k} \leq x_1 \leq -e^{\pi a_{k+1}}); \quad U_1(x_1, 0) = 0 \quad (0 \leq x_1 < \infty). \quad (11)$$

Если аналитическая функция $f(t) = U_1 + iV_1$, то для функции $\frac{df}{dt} = f_1$ можно построить решение по формуле Келдыша—Седова:

$$f_1 = -\frac{iE}{\pi^2 g(t)} \sum_{k=1}^n \int_{a_k}^{b_k} g(z) \frac{dz}{z(z-t)} + \frac{\sum_{k=1}^n \gamma_k t^{k-1}}{t^{1/2} \prod_{k=1}^n [(t-a_k)(t-b_k)]^{1/2}}, \quad (12)$$

где γ_k — некоторые константы, определяемые условиями (11),

$$g(t) = \frac{\prod_{k=1}^n (t-b_k)^{1/2}}{t^{1/2} \prod_{k=1}^n (t-a_k)^{1/2}}.$$

По определению $f_1(t)$ имеем

$$\frac{\partial U_1}{\partial y_1} = -\operatorname{Im} f_1(t); \quad j_r(x, y) = -\pi \sigma x_1(x, y) \frac{\partial U_1}{\partial y_1}. \quad (13)$$

Так, если секции изолированы от внешней цепи, то γ_k определяются из условия равенства нулю полного тока на каждый электрод. Следовательно, имеется следующая система n уравнений для определения γ_k :

$$\int_{a_k}^{b_k} \frac{\partial U_1}{\partial y_1} dx = 0 \quad \text{или} \quad \frac{E}{\pi^2} \int_{a_k}^{b_k} \frac{1}{g(t)} \left[\sum_{j=1}^n \int_{a_j}^{b_j} \frac{g(z) dz}{z(z-t)} \right] dt =$$

$$= \int_{a_k}^{b_k} \left(\sum_{k=1}^n \gamma_k t^{k-1} \right) t^{-1/2} \prod_{k=1}^n [(t-a_k)(t-b_k)]^{-1/2} \cdot dt. \quad (14)$$

Система уравнений (14) полностью определяет константы γ_k .

Из (12) и (13) вытекает, что при стремлении толщины изолятора в p секциях к нулю, т. е. при $b_k = a_{k+1}$, появляется особенность порядка r^{-1} , где r — расстояние от края электрода, если $V_k \neq V_{k+1}$. Данная особенность по j_r приводит к логарифмической особенности по полному току, что физически невозможно. Следовательно, $V_k = V_{k+1} = \dots = V_{k+p-1}$, это значит, что электроды, разделенные бесконечно тонким изолятором, имеют одинаковый потенциал, т. е. эквивалентны одному электроду длиной $l = a_k - b_{k+p-1}$. Если толщина изолятора не равна нулю, то у края секции, как видно из (12), наблюдается особенность $\sim r^{-1/2}$. Полный же ток у края $\sim r^{1/2}$, т. е. не имеет особенностей, хотя

стремление $\frac{\partial U}{\partial y}$ к бесконечности у края может привести к шунтированию на край секции. Возможно, этим объясняется результат работы [3].

Рассмотрим подробнее случай с одной секцией с координатами $(+h, -h)$, для которой результат представляется в эллиптических функциях и интегралах от них. Так,

$$j_r(x, 0) = \frac{E\sigma}{\pi} \sqrt{\frac{e^{\pi x}(e^{\pi h} - e^{\pi x})}{e^{\pi x} - e^{-\pi h}}} \left[2e^{-\frac{\pi h}{2}} \cdot E\left(\frac{\pi}{2}, \sqrt{1 - e^{-2\pi h}}\right) + \right.$$

$$+ \frac{2(e^{\pi x} - e^{-\pi h}) \cdot e^{-\frac{\pi h}{2}}}{e^{\pi h} - e^{\pi x}} \Pi\left(\frac{\pi}{2}, \frac{e^{\pi h} - e^{-\pi h}}{e^{\pi h} - e^{\pi x}}, \sqrt{1 - e^{-2\pi h}}\right) \Bigg] +$$

$$+ \frac{e^{\frac{\pi x}{2}} \gamma_1}{V(e^{\pi x} - e^{-\pi h})(e^{\pi h} - e^{\pi x})}. \quad (15)$$

Здесь $E\left(\frac{\pi}{2}, k\right)$, $\Pi\left(\frac{\pi}{2}, n, k\right)$ — эллиптические интегралы соответственно второго и третьего рода [4].

Положим $\pi h \ll 1$. Тогда из (15)

$$j_r(x, 0) = E\sigma \frac{a-x}{V h^2 - x^2} + O(h), \quad (16)$$

$$V = Ea \ln \frac{8}{\pi h} + O\left[\left(\frac{\pi h}{2}\right)^2 \ln^2 \frac{8}{\pi h}\right],$$

где V — потенциал секции относительно потенциала дуги в точке, соответствующей середине секции, a определяется из уравнения

$$a \left[\arcsin\left(\frac{a}{n}\right) + \frac{\pi}{2} \right] + \sqrt{h^2 + a^2} - \rho a \left[\arcsin\left(\frac{a}{h}\right) - \frac{\pi}{2} \right] - \rho \sqrt{h^2 - a^2} = 0. \quad (17)$$

Если $\rho \ll 1$, то $a = -h \left(1 - \frac{\pi^2}{2} \rho^2\right)$. При этом $V = -Eh \ln \frac{8}{\pi h}$, т. е. потенциал секции принимает значение потенциала дуги в точке, удаленной от середины секции на расстояние порядка нескольких h . Положим теперь $h > 1$, тогда из (15) получим

$$j_r(x, 0) = \frac{2E\sigma}{\pi} \left\{ \sqrt{\frac{e^{\pi x}(e^{\pi h} - e^{\pi x})}{(e^{\pi x} - e^{-\pi h})}} \left[e^{-\frac{\pi h}{2}} - e^{-\frac{\pi h}{2}} R \right] + \right.$$

$$+ e^{\pi x} \cdot \frac{\left(-e^{\frac{\pi h}{2}} + P\right)}{V(e^{\pi h} - e^{\pi x})(e^{\pi x} - e^{-\pi h})} \Bigg\};$$

$$R = \left| \frac{k}{2\sqrt{n^2 + k^2}} \ln \left[\frac{\frac{k}{n} + \sqrt{1 + \frac{k^2}{n^2}}}{\sqrt{1 + \frac{k^2}{n^2} - \frac{k}{n}}} \right] + O(e^{-\pi h}) \quad (-h \leq x \leq 0) \right|$$

$$\left| \ln 4k - \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{1}{n^2}}} \ln(n + \sqrt{n^2 - 1}) + O(e^{-\pi h}) \quad (0 \leq x \leq h); \right|$$

$$n^2 = \frac{e^{\pi h} - e^{-\pi h}}{e^{\pi x} - e^{-\pi h}}; \quad k = e^{\pi h}; \quad P = e^{\frac{\pi h}{2}} \cdot \alpha \ln \frac{\beta}{\gamma};$$

$$\alpha = \sqrt{1 - e^{-\pi(a+h)}}, \quad \beta = 1 + \alpha; \quad \gamma = 1 - \alpha;$$

$$V = \frac{2E}{\pi} \left[-\ln \left(2e^{\frac{\pi h}{2}} \right) + \frac{1}{2} \alpha \ln \frac{\beta}{\gamma} \right]. \quad (18)$$

Значение α находится из уравнения

$$\begin{aligned} \frac{\pi}{E\sigma} \int_{-h}^h j_r(x, 0) dx &= \frac{2}{\pi} \alpha \ln \frac{\beta}{\gamma} \cdot \ln [e^{\pi(a+h)} \cdot \beta] - \\ &- \frac{1}{2\pi} \left(\ln \frac{\beta}{\gamma} \right)^2 - \frac{2}{\pi} \ln \frac{\beta}{\gamma} \cdot \ln \frac{2}{\beta} + \frac{\pi}{6} - (1-\rho) \times \\ &\times \frac{2}{\pi} \sum_{p=1}^{\infty} (-1)^{p+1} \cdot \frac{1}{p^2} \cdot \left(\frac{\beta}{\gamma} \right)^p + \rho \left\{ -\frac{1}{2\pi} \cdot (\ln 4e^{\pi h})^2 + \right. \\ &+ \frac{1}{2\pi} \left(\ln \frac{\beta}{\gamma} \right)^2 + \frac{2}{\pi} \ln \frac{\beta}{\gamma} \cdot \ln \frac{2}{\beta} + \frac{2}{\pi} \alpha \ln \frac{\beta}{\gamma} \cdot \ln \frac{2e^{-\pi\alpha}}{\beta} + \\ &+ 2 \left[\frac{2}{\pi} + \left[\frac{2}{\pi} - \frac{1}{\pi} \ln(4e^{\pi h}) \right] \ln(4e^{\pi h}) + \frac{\pi h^2}{4} + \frac{1}{\pi} \ln 2 \times \right. \\ &\left. \left. \times \ln(2e^{\pi h}) - \frac{\pi}{12} + \frac{1}{\pi} \ln \left(2e^{\frac{\pi h}{2}} \right) \alpha \ln \frac{\beta}{\gamma} \right\} = 0. \end{aligned} \quad (19)$$

Если $a+h \geq 1$, то

$$\begin{aligned} a+h &= \frac{-[2 \ln 2 + \rho(2 \ln 2 + \pi h)]}{\pi(1-\rho)} + \\ &+ \sqrt{\frac{[2 \ln 2 + \rho(2 \ln 2 + \pi h)]^2}{\pi^2(1-\rho)^2} - \frac{1}{3} + \frac{4\rho}{\pi^2(1-\rho)} [\ln^2 2 + \pi^2 h^2 - 2\pi h +} \\ &\quad + 2 \ln 2 (\pi h - 2) - 2]}. \\ V &= Ea + 0(e^{-\pi(a+h)}). \end{aligned}$$

Если $\rho \ll 1$, то для выполнения условия $a+h \geq 1$ необходимо соблюдение равенства $a+h = 2\rho^{1/2}h \geq 1$, т. е. секция принимает потенциал точки, удаленной от кромки секции ($-h$) на расстояние $+2\rho^{1/2}h$, — результат, эквивалентной одномерной теории.

Если $\pi(a+h) \ll 1$, то

$$\pi(a+h) = \left(\frac{3}{8} \pi^2 \rho h^2 \right)^{2/3} \ll 1, \quad V = -\frac{2E}{\pi} \ln \left(2e^{\frac{\pi h}{2}} \right),$$

т. е. для $h \sim 1$ отклонение решения от одномерного существенно и составляет величину порядка $\frac{2 \ln 2}{\pi h}$. Для этих же условий различие с формулой (9) составляет величину $\frac{4E \ln 2}{\pi}$. Для промежуточных значений a при решении уравнения (19) в бесконечном ряду можно оставить первые 3—4 члена, так как ряд сходится достаточно быстро.

Автор признателем Б. А. Урюкову за постановку задачи и обсуждения.

Институт теплофизики СО АН СССР,
Новосибирск

Поступила в редакцию
10/VII 1974

ЛИТЕРАТУРА

1. А. Б. Ватажин и др. Магнитогидродинамические течения в каналах. М., 1970.
2. М. В. Келдыш, Л. И. Седов. Докл. АН СССР, 1937, 16, № 1.
3. В. А. Батурич. ПМТФ, 1970, № 5.
4. И. С. Градштейн, И. М. Рыжик. Таблицы интегралов. М., 1971.

С. А. ГАПОНОВ

УСТОЙЧИВОСТЬ ПОГРАНИЧНОГО СЛОЯ НЕСЖИМАЕМОЙ ЖИДКОСТИ НАД ЩЕЛЕВОЙ ПОВЕРХНОСТЬЮ

В последнее время интенсивно ведутся исследования по устойчивости пограничного слоя, когда параметры течения в нем зависят от продольной координаты. Среди работ, посвященных данной проблеме, можно отметить [1—5]. В [1] дается общий подход к решению задачи об устойчивости, когда параметры течения слабо зависят от продольной координаты. В [2, 4, 5] получены конкретные результаты по устойчивости пограничного слоя на плоской пластине с учетом непараллельности, а в [3] проведены расчеты устойчивости периодического по продольной координате пограничного слоя (развивающегося на волновой поверхности).

В данной работе исследуется на устойчивость пограничный слой над щелевой поверхностью, когда от продольной координаты зависят граничные условия для возмущений параметров течения. В работе проведен анализ влияния степени неоднородности проницаемости щелевой поверхности на устойчивость пограничного слоя. Полученные результаты обсуждаются наряду с данными работы [6], в которой рассматривалась поверхность с однородной проницаемостью. Показано, что при частом расположении щелей для расчета характеристик устойчивости пограничного слоя можно использовать подход работы [6]. Если щели расположены редко, результаты, полученные в соответствии со схемой [6], ненадежны.

1. Пусть над щелевой поверхностью развивается пограничный слой, как показано на рис. 1. Предполагается, что среднее во времени течение не зависит от продольной координаты, щели расположены равномерно с периодом $2l$, а глубина камеры отсасывания много больше толщины пограничного слоя.

В линейном приближении функция тока плоских возмущений удовлетворяет уравнению [7]

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Delta \psi}{\partial t} + U \frac{\partial \Delta \psi}{\partial x} - U'' \frac{\partial \psi}{\partial x} &= \frac{1}{R} \Delta^2 \psi; \\ \Delta \psi &= \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2}; \quad \frac{\partial \psi}{\partial y} = u; \quad \frac{\partial \psi}{\partial x} = -v. \end{aligned} \quad (1.1)$$

Здесь все величины безразмерные: U — профиль продольной составляющей основной скорости; x, y — продольная и поперечная координаты; t — время; U'' — вторая производная по y от U ; R — число Рейнольдса; u, v — возмущения продольной и поперечной составляющих скоростей. В качестве размерных величин принимаются: δ — одна из толщин пограничного слоя;

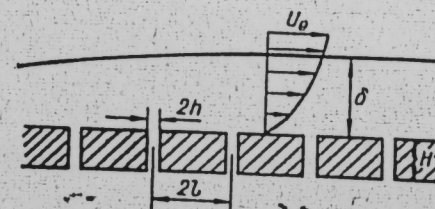


Рис. 1.

U_e — скорость на внешней границе пограничного слоя; ν — кинетическая вязкость.

Для определенности начало координат помещается на поверхности в центре какой-нибудь щели. Так как щели по поверхности расположены периодически в направлении x , а коэффициенты в уравнении (1.1) не зависят от времени, то решение уравнения (1.1) можно искать в виде $\varphi = \varphi(x, y) \exp(i\alpha(x - ct))$, где $\varphi(x, y)$ — периодическая функция x с периодом $2l$. Аналогичный подход был применен при решении задачи устойчивости периодического в продольном направлении течения в [3] и является применением теоремы Флоке для уравнений с двумя переменными. Функцию $\varphi(x, y)$ можно разложить в ряд Фурье, а ψ записать в виде

$$\psi(x, y) = \exp(i\alpha(x - ct)) \sum_{n=-\infty}^{\infty} \varphi_n \exp(i(\pi/l)x). \quad (1.2)$$

Возмущения скоростей и давления разлагаются соответственно в ряды

$$\begin{aligned} u &= \exp(i\alpha(x + ct)) \sum_{n=-\infty}^{\infty} u_n(y) \exp(i(\pi/l)x), \\ v &= \exp(i\alpha(x - ct)) \sum_{n=-\infty}^{\infty} v_n(y) \exp(i(\pi/l)x), \\ p &= \exp(i\alpha(x - ct)) \sum_{n=-\infty}^{\infty} p_n(y) \exp(i(\pi/l)x). \end{aligned} \quad (1.3)$$

В силу того, что основное течение не зависит от x , подстановка (1.2) в (1.1) с учетом линейной независимости функций $\exp(i(\alpha + (\pi/l)n)x)$ приводит к бесконечной системе уравнений четвертого порядка

$$\begin{aligned} i\alpha_n(U - c_n)(\varphi_n' - \alpha_n^2 \varphi_n) - i\alpha_n U'' \varphi_n &= \\ &= \frac{1}{R} \varphi_n^{IV} - 2\alpha_n^2 \varphi_n'' + \alpha_n^4 \varphi_n, \end{aligned} \quad (1.4)$$

где

$$\alpha_n = \alpha + n\pi/l, \quad c_n = \alpha c / \alpha_n.$$

Так как

$$u = \partial\psi/\partial y, \quad v = -\partial\psi/\partial x, \quad (1.5)$$

то

$$u_n = \varphi_n', \quad v_n = -i\alpha_n \varphi_n.$$

Используя уравнения движения, можно показать, что

$$p_n = \frac{1}{i\alpha_n R} (\varphi_n''' - \alpha_n^2 \varphi_n') + U' \varphi_n - U \varphi_n' + c_n \varphi_n. \quad (1.6)$$

Решение системы (1.4) должно затухать в бесконечности, поэтому

$$\varphi_n = \varphi_n' = 0 \quad \text{при } y = \infty. \quad (1.7)$$

Если ширина щелей мала, то на поверхности можно принять равной нулю продольную составляющую возмущений скорости u . Следовательно

$$u(x, 0) = \varphi_n'(0) = 0. \quad (1.8)$$

Недостающее условие, налагаемое на распределение возмущений поперечной скорости по щелевой поверхности, получено ниже.

2. Возмущения поперечной скорости равны нулю на непроницаемых участках и отличны от нуля в пространстве над щелями. Поэтому в интервале $[-l, l]$ выполняются условия

$$\begin{aligned} v(x, 0) &\neq 0 \quad \text{при } -h < x < h, \\ v(x, 0) &= 0 \quad \text{при } -l < x < -h, \quad h < x < l. \end{aligned} \quad (2.1)$$

Разлагая (2.1) в ряд (1.3), можно получить

$$v_n(0) = \frac{1}{2l} \int_{-l}^l v(x, 0) \exp(-i(\alpha + n\pi/l)x) dx. \quad (2.2)$$

Относительно распределения $v(x, 0)$ на участке $[-h, h]$ предполагается, что оно равно распределению скорости внутри щели. Такое предположение косвенно подтверждено экспериментально. В [8] проводились измерения среднего во времени значения квадрата скорости течения вблизи среза трубы, совершающей синусоидальные колебания вдоль оси. Полученное распределение скорости по радиусу трубы находилось в хорошем соответствии с теоретическими результатами, полученными в предположении, что профиль скорости не зависит от продольной координаты.

Пусть внутри щели давление не зависит от x (для узких щелей это оправдано). Если параметры потока изменяются во времени по закону $\exp(-i\alpha ct)$, тогда распределение скорости внутри щели имеет вид

$$v(x) = v(x, 0) = -\frac{\Delta p}{i\alpha c h} \left[1 - \frac{\text{ch}(\sqrt{i\alpha c R} x)}{\text{ch}(\sqrt{i\alpha c R} h)} \right]. \quad (2.3)$$

Здесь Δp — перепад давлений на входе в щель и выходе из нее; H — безразмерная толщина щелевой пластины. Распределение (2.3) аналогично распределению скорости в цилиндрической трубе при изменении во времени параметров потока по закону $\exp(-i\alpha ct)$ с той разницей, что для цилиндрической трубы [9] вместо гиперболического косинуса в (2.3) берется функция Бесселя нулевого порядка. Подстановка (2.3) в (2.2) показывает, что все $v_n(0)$ выражаются через Δp .

Значение Δp определяется как разность средних значений давления на входе в щель и выходе из нее, т. е.

$$\Delta p = \frac{1}{2h} \int_{-h}^h (p_+(x, 0) - p_-(x, 0)) dx. \quad (2.4)$$

Здесь $(+)$ означает, что параметры потока берутся со стороны пограничного слоя, $(-)$ — параметры берутся со стороны камеры отсасывания. Используя (1.3), (2.4) можно записать в виде

$$\Delta p = \sum_{n=-N}^{N} p_{n+}(0) \frac{\sin \alpha_{n+} h}{\alpha_{n+} h} - \sum_{n=-N}^{N} p_{n-}(0) \frac{\sin \alpha_{n-} h}{\alpha_{n-} h}. \quad (2.5)$$

Значение $p_{n+}(0)$ следует из (1.6) и может быть представлено так

$$p_{n+} = \left[\frac{1}{\alpha_{n+}^2 R} \frac{V_{n+}'''(0)}{V_{n+}'(0)} - \frac{U'(0)}{i\alpha_{n+}} - \frac{\alpha c}{i\alpha_{n+}^2} \right] v_{n+}(0), \quad (2.6)$$

а p_n можно получить из выражения для p_0 работы [6] заменой α на $|\alpha_n|$

$$p_{n-}(0) = [(i\alpha c - \alpha_n^2/R)(|\alpha_n| + \gamma)/(|\alpha_n|\gamma)] v_{n-}(0), \quad (2.7)$$

где $\gamma = -\sqrt{-i\alpha c R + \alpha_n^2}$.

Анализ полученного ряда (2.5) при распределении $v(x, 0)$ по закону (2.1) — (2.3) указывает на его сходимость. При малых значениях l , т. е. при частом расположении щелей и не слишком малых значениях h/l ряд (2.5) сходится быстро. В пределе при $l \rightarrow 0$ его сумма будет определяться нулевым членом. В этом случае можно щелевую поверхность рассматривать как поверхность с равномерной проницаемостью.

В случае $h/l \ll 1$ ряд (2.5) сходится очень медленно. Это особенно видно при рассмотрении ряда, составленного из членов $p_{n-}(0) \sin \alpha_{n-} h / (\alpha_{n-} h)$. Для этого случая увеличивается объем вычислений. Однако при $\pi/l \ll 1$ возможны упрощения, так как уравнения (1.4) не связаны между собой, а члены $p_{n+}(0)$ в этом случае — медленно меняющиеся функции n_+ . Это позволяет вести расчет не при всех n_+ , а промежуточные значения находить обычной интерполяцией.

3. Устойчивость пограничного слоя над щелевой поверхностью рассчитывалась для двух профилей скорости из семейства Фоккера — Скэн, соответствующих формпараметру $\beta = 0,0$ и $\beta = 0,2$.

Первый профиль наиболее просто воспроизвести экспериментально. Второй случай важно рассмотреть, так как профиль скорости, соответствующий $\beta = 0,2$, близок к профилю скорости в наиболее опасном в смысле устойчивости месте разгонного участка плоской пластины с отсасыванием.

Как видно из результатов, при редком расположении щелей ($i \gg 1$) их влияние на устойчивость пограничного слоя над плоской пластиной слабое. В случае пограничного слоя с более наполненным профилем скорости влияние щелей на устойчивость сильнее. Поэтому для анализа влияния расположения щелей на устойчивость при $l \gg 1$ желательно иметь более наполненные профили. Это является еще одной причиной рассмотрения устойчивости пограничного слоя над щелевой поверхностью при $\beta = 0,2$.

Все приведенные ниже линейные размеры h, H, l отнесены к толщине пограничного слоя $\delta = \sqrt{(2-\beta)\nu X/U_\infty}$, где X — размерная продольная координата. Во всех расчетах принималось $h = 0,2, H = 3,0$.

На рис. 2 представлены результаты расчета критических чисел R^* (ниже которых течение устойчиво) при $\beta = 0,0$. Сплошная кривая соответствует случаю учета только нулевых членов в (2.5), а пунктирная — с учетом того, что в первой сумме учитывался только нулевой член $N_+ = 0$, а во второй учитывалось большое число членов, т. е. $N_- \gg 1$. Приведенные результаты показывают, что в рассмотренном случае при рас-

	$N_+ = N_- = 0$	$N_+ = 0, N_- > 1$	$N_+ = 1, N_- > 1$	$N_+ > 1, N_- > 1$
$\pi/l = 0,05$ $\alpha = 0,1967$ R c_r	2353 0,2972	2033 0,3045	2063 0,3039	1940 0,3013
$\pi/l = 0,1$ $\alpha = 0,2065$ R c_r	2000 0,3098	1632 0,3194	1674 0,3186	1508 0,3185

четах достаточно ограничиться только учетом нулевых членов в (2.5). Поэтому можно считать, что здесь равномерно геометрическое усреднение возмущений поперечной скорости на щелевой поверхности и рассматривать задачу, как это сделано в [6]. Большого различия в результатах при учете различного числа членов в (2.5) следует ожидать при редком расположении щелей, т. е. при $\pi/l \ll \alpha$. Это предположение подтверждено расчетами R^* при $\beta = 0,2$.

В случае непроницаемой поверхности для профиля скорости, соответствующего $\beta = 0,2$, критическое число Рейнольдса $R^* = 3,26 \cdot 10^3$. Для щелевой поверхности R^* приведены на рис. 3 как при учете только нулевых членов в (2.5) (сплошная кривая), так и в случае $N_- \gg 1$; $N_+ = 0$ (штриховая кривая). При больших значениях l наблюдается заметное расхождение в приведенных результатах. Кроме того, видно, что учет дополнительных членов приводит к немонотонной зависимости R^* от π/l .

Более подробно влияние различных членов ряда (2.5) на характеристики нейтральной устойчивости пограничного слоя для $\beta = 0,2$ исследовалось при $\pi/l = 0,05$ и $\pi/l = 0,1$. Результаты расчета приведены в таблице. Эти данные показывают, что учет большего числа членов целесообразен только для решений со стороны камеры отсасывания. Что касается членов с номерами $|n_+| > 0$, то они оказывают меньшее влияние. Такое влияние различных членов объясняется следующими причинами. Ряд, определяющий среднее по сечению щели давление со стороны камеры отсасывания, сходится слабо, и вклад каждого из большого числа первых членов примерно одинаков. Сумма ряда, определяющая давление со стороны пограничного слоя, примерно равна одному нулевому члену. Это связано с тем, что в случае редко расположенных щелей устойчивость пограничного слоя слабо отличается от устойчивости над непроницаемой поверхностью, поэтому $v_{0+}'''/v_{0+}(0) \gg 1$ (для непроницаемой поверхности это отношение равно бесконечности). Значения аналогичных выражений других членов ряда существенно меньше.

Таким образом, достаточно надежные результаты по устойчивости пограничного слоя с сильно наполненными профилями скорости можно получить с учетом всех членов с номерами n_- и нулевого члена с номером n_+ . Сумма членов с номерами n_- легко подсчитывается, так как все члены его выписаны в аналитической форме. Если профиль скорости слабо наполненный, то характеристики устойчивости можно рассчитывать, используя только члены с номерами $n_+ = n_- = 0$. Последний вывод равносильно предположению работы [6] о равномерной проницаемости поверхности.

Институт теоретической и прикладной механики
СО АН СССР,
Новосибирск

Поступила в редакцию
26/XI 1973

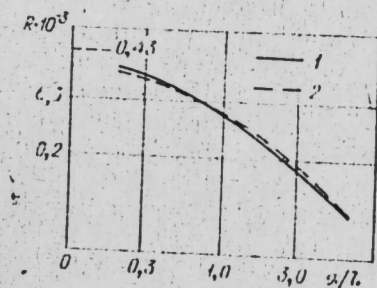


Рис. 2.

1 — $N_+ = N_- = 0$; 2 — $N_+ = 0, N_- \gg 1$.

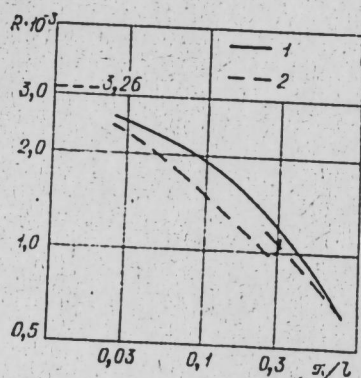


Рис. 3.

1 — $N_+ = N_- = 0$; 2 — $N_+ = 0, N_- \gg 1$.

1. M. Bouthier. Stabilité linéaire écoulements presque parallèles par la méthode des échelles multiples. C. R. Acad. Sc., Paris, 273, serie A-1101, 1971.
2. А. Г. Володин. Изв. Сиб. отд. АН СССР, сер. техн. наук, 1973, № 8, вып. 2.
3. В. Я. Левченко, А. С. Соловьев. Изв. Сиб. отд. АН СССР, 1972, № 6.
4. M. Bouthier. Stabilité linéaire des écoulements presque parallèles. J. mécs., 1973, 12, № 1.
5. Chi-Hai Ling, W. C. Reynolds. Non-parallel flow corrections for the Stability of Shear flows, J. fluid, Mech, 1973, v. 59. p. 3.
6. С. А. Гапонов. Изв. Сиб. отд. АН СССР, сер. техн. наук, 1971, № 3, вып. 1.
7. А. С. Монин, А. М. Яглом. Статистическая гидромеханика, ч. 1, М., «Наука», 1965.
8. E. G. Richardson, Tyler E. The Transverse velocity gradient near the mouths of pipes in which an alternating of continuous of air is established. Proc. Phys. Soc. London, 42. 1929, 1—15.
9. Г. Шлихтинг. Теория пограничного слоя. М., «Наука», 1969.

Б. В. БОШЕНЯТОВ, В. В. ЗАТОЛОКА, М. И. ЯРОСЛАВЦЕВ

ИССЛЕДОВАНИЕ ОТРЫВНОГО ОБТЕКАНИЯ КОНУСОВ
С ТУРБУЛЕНТНЫМ ПОГРАНИЧНЫМ СЛОЕМ
ПРИ ЧИСЛАХ МАХА 8,3 И 10

Отрывные свойства гиперзвукового турбулентного пограничного слоя и их изменение при его переходе из ламинарного в турбулентный слой или обратно на опасных участках поверхности таких тел, как гиперзвуковые летательные аппараты, воздухозаборники и т. п., нередко определяют картину обтекания тела и его аэродинамические характеристики. Однако при числах Маха набегающего потока $M_\infty \geq 9$ указанные свойства мало исследованы, так как необходимые условия в широко распространенных гиперзвуковых трубах баллонного типа (с длительностью режима в десятки, сотни секунд) и ударных (с длительностью режима несколько миллисекунд) практически недостижимы.

В импульсных гиперзвуковых трубах благодаря кратковременности режима (50÷100 мс) и другим свойствам таких труб довольно легко обеспечиваются давления в форкамере $p_f = 1 \div 4$ тыс. атм, необходимые, чтобы при $M_\infty \approx 9 \div 14$ пограничный слой естественно переходил в турбулентный на расстоянии менее 100÷200 мм от носка испытываемой модели. Это позволяет исследовать свойства турбулентного пограничного слоя при указанных M_∞ на моделях удобных размеров. Однако продолжительность рабочего режима трубы должна быть достаточной, чтобы время на установление течения не только в пограничном слое, но и в области отрыва не искажало результаты. Кроме того, требуется предотвратить искажение характеристик обтекания, которое может быть вызвано тем, что в рабочем режиме импульсной трубы при постоянном по времени M_∞ давление p , плотность ρ , температура T (и, следовательно, коэффициент вязкости μ) в форкамере трубы и во всем течении постепенно уменьшаются и соответственно уменьшаются числа Рейнольдса $Re = \frac{\rho v}{\mu} l$.

В данной работе в гиперзвуковой импульсной трубе ИТ-301 Института теоретической и прикладной механики СО АН СССР [1] исследовано обтекание двух моделей в виде конусов (рис. 1), к заднему торцу каждой из которых прикреплена шайба, образующая кольцевой выступ над конической поверхностью, вызывающий отрыв пограничного слоя. Модели стальные, шероховатость конической поверхности менее 0,004 мм, диаметр закругления носка при всех опытах менее 0,05 мм. Целью опытов было получение данных об указанных выше отрывных свойствах пограничного слоя и о том, влияют ли свойства рабочего процесса в использованной импульсной трубе на результаты испытаний.

Рабочим режимом импульсной трубы (см. рис. 1) является почти адиабатическое истечение газа из замкнутого объема (форкамеры) через отверстие горловины сопла. Число M_n во время рабочего режима не изменяется, оно определяется отношением площадей горловины F_{np} и выходного сечения сопла F_c (при коническом сопле — эффективного выходного сечения). Чтобы газ в рабочей части не конденсировался, его предварительно нагревается в форкамере путем разряда в нее энергии электроконденсаторной батареи. Поскольку нагрев происходит в замкнутом объеме, возрастает не только температура $T_{ф.н}$, но и давление $p_{ф.н}$ в форкамере. Режим возникает вследствие разрыва диафрагмы. Величины $p_{ф.н}$, $p_{н.н}$, $p_{с.н}$, $p_{ф.н}$, $p_{н.н}$, $p_{с.н}$, $T_{ф.н}$, $T_{н.н}$, $T_{с.н}$ в форкамере и в рабочей части, а также числа Re уменьшаются во времени.

Давление в форкамере перед разрядом $p_{ф.н}$ измерялось образцовым манометром и малоинерционным датчиком индуктивного типа, а во время разряда и рабочего режима $p_{ф.н}(t)$ измерялось только малоинерционным датчиком с записью шлейфовым осциллографом. Температура газа перед разрядом равна комнатной $T_{ф.н}=290^\circ K$. Обтекание модели кинографировалось со скоростью 500 кадров/с. Температуры, давления и числа Re во время режима вычислялись по измеренным $p_{ф.н}$ и $p_{ф.н}(t)$ по соотношениям для изохорического нагрева в форкамере, почти адиабатического расширения газа в форкамере (с измеренным реальным падением давления) и адиабатического течения в сопле. Рабочим газом был азот. Температура поверхности моделей в течение режима благодаря его кратковременности считалась постоянной и равной комнатной: $T_w=290^\circ K$. Опыты с моделью 1 проведены при числе Маха перед моделью (в месте расположения эффективного диаметра конического сопла трубы, см. рис. 1) $M_n=8,3$, а с моделью 2 при $M_n=8,3$ и 10. Соответственно числа Маха над поверхностью модели: для модели 1 $M_c=6,4$, а для модели 2 $M_c=7,5$ и 8,7. Они, а также величины ρ_c , v_c и μ_c вычислялись для невязкого обтекания конуса. Длина l_1 для $Re=\frac{\rho_c v_c l_1}{\mu_c}$ бралась вдоль поверхности конуса от носика модели до места отрыва пограничного слоя перед шайбой (рис. 1).

В начальный момент времени рабочего режима (при $t=0$) давление и температура азота в форкамере составляли: $p_{ф.н}(0)=(600 \div 900) \text{ кг/см}^2$, $T_{ф.н}(0)=1300 \div 2300^\circ K$, так называемое единичное число Рейнольдса $\frac{\rho_c v_c}{\mu_c}=(3 \div 8) \cdot 10^7 \text{ 1/м}$. Относительные величины $\bar{p}_{ф.н}$, $\bar{p}_{ф.н}(t)$ (осциллограмма), $\bar{T}(t)$, $\bar{\rho}(t)$, $\bar{R}(t)$ (вычисленные по $p_{ф.н}(t)$ и $p_{ф.н}$) для опыта 1 с моделью 1 приведены на рис. 2. В других опытах эти величины изменялись по времени аналогично. Здесь обсуждаются 5 опытов (см. таблицу).

На рис. 3 приведена кинограмма теневой картины обтекания модели 1 в опыте 1. Виден отрыв потока перед выступом (шайбой). Первый кадр соответствует времени запуска трубы (1,5 ÷ 2 мс.), в течение которого в рабочей части трубы устанавливается течение с постоянным числом Маха. Второй кадр соответствует началу рабочего режима. В этот момент ($t=3 \text{ мс}$) $Re=1,1 \cdot 10^7$, угол отрыва $\theta_r=14,3^\circ$. Далее угол отрыва и картина обтекания практически не меняются до момента $t_{кр}$ между 28-й и 29-й мс. При $t_{кр}$ начинается резкое изменение угла отрыва, который в течение кадров 17 и 18 (за 3 ÷ 4 мс) уменьшается до $\theta_n=7 \div 8^\circ$. На остальных кадрах рабочего режима (№ 19 ÷ 32 до 55-й мс) картина обтекания модели опять практически не меняется. С появления косога скачка от кромки сопла трубы, видного на 32-м и всех последующих кадрах кинограммы, рабочий режим трубы завершается.

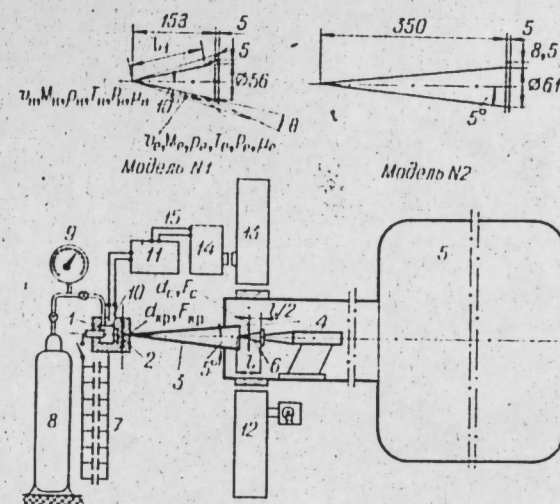


Рис. 1. Модели и схема импульсной гиперзвуковой аэродинамической трубы ИТ-301.

1 — форкамера; 2 — диафрагма; 3 — сопло; 4 — рабочая часть; 5 — бочка; 6 — модель; 7 — электроконденсаторная батарея; 8 — газ (азот) холодный (комнатной температуры); 9 — образцовый манометр для измерения давления холодного газа; 10 — малоинерционный датчик для измерения давления холодного и горячего газа; 11 — осциллограф; 12 — осветитель теневого прибора; 13 — приемная часть теневого прибора; 14 — киноаппарат; 15 — синхронизация киноаппарата и осциллографа. (Размеры в мм).

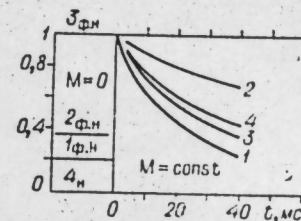


Рис. 2. Изменение во времени параметров потока в опыте 1 с моделью 1; время существования потока с $M_n=\text{const}$ 55 мс.

$$1 - \bar{p} = \frac{p_{ф.н}}{p_{ф.н}(0)} = \frac{p}{p(0)}; \quad 1_{ф.н} - \bar{p}_{ф.н} = \frac{p_{ф.н}}{p_{ф.н}(0)}; \quad 2 - \bar{T} = \frac{T_{ф.н}}{T_{ф.н}(0)} = \frac{T}{T(0)}; \quad 2_{ф.н} - \bar{T}_{ф.н} = \frac{T_{ф.н}}{T_{ф.н}(0)}; \quad 3 - \bar{\rho} = \frac{\rho_{ф.н}}{\rho_{ф.н}(0)} = \frac{\rho}{\rho(0)};$$

$$3_{ф.н} - \bar{\rho}_{ф.н} = \frac{\rho_{ф.н}}{\rho_{ф.н}(0)} = 1;$$

$$4 - \bar{Re} = \frac{\frac{\rho v}{\mu}}{\frac{\rho v}{\mu}(0)} = \frac{\frac{\rho v}{\mu}}{\frac{\rho v}{\mu}(0)};$$

$$4_{н} \bar{Re}_{н} = \frac{\left(\frac{\rho v}{\mu}\right)_{н}}{\frac{\rho v}{\mu}(0)} = 0.$$

На кинограмме опыта 2 с меньшим $\frac{\rho_c v_c}{\mu_c}(0)$ за счет меньшего $p_{ф.н}$ видно, что уменьшение угла отрыва произошло на 4—5-м кадрах (при $t_{кр}$ между 7 и 8-й мс). В опыте 3 с еще меньшим $\frac{\rho_c v_c}{\mu_c}$ это произошло на 3—4-м кадрах (при $t_{кр}$ между 4 и 5-й мс).

На рис. 4 для всех трех опытов приведены графики угла отрыва θ и числа Re во времени и значения критического числа Рейнольдса $Re=Re_{кр}=(5 \div 6,3) \cdot 10^6$, соответствующего резкому уменьшению угла отрыва. Эту перестройку картины обтекания при $Re=Re_{кр}$ можно объяснить следующим образом. В начале режима, когда реализуются высокие числа Рейнольдса, место перехода пограничного слоя в турбулентное состояние расположено довольно близко к носу модели. Поэ-

№ опыта	1	2	3	4	5
Модель	1	1	1	2	2
M_n	8,3	8,3	8,3	8,3	10
$p_{ф.н}$, кг/см ²	123	118	70	112	100
$p_{ф.н}(0)$, кг/см ²	600	900	600	850	750
θ_r	15°	15°	13,5°	12°	11°
$(p_2/p_1)_r$	6,6	6,6	5,8	6	6,8
$t_{кр}$, мс	28 ÷ 29	7 ÷ 8	4 ÷ 5	28 ÷ 29	14 ÷ 16
$T_{ф.н}(t_{кр})$, К	1050	1600	2000	1350	1800
$T_w/T_{ф.н}(t_{кр})$	0,28	0,18	0,14	0,21	0,16
$Re_{кр} \cdot 10^{-6}$	5,6	6,3	5	6,3	7,1
$\rho_c v_c / \mu_c(t_{кр}) \cdot 10^{-6} \text{ 1/м}$	40	45	36	20	22
Приведенное $Re_{кр} \cdot 10^{-6}$	5,6	6	5,3	8,2	8,7

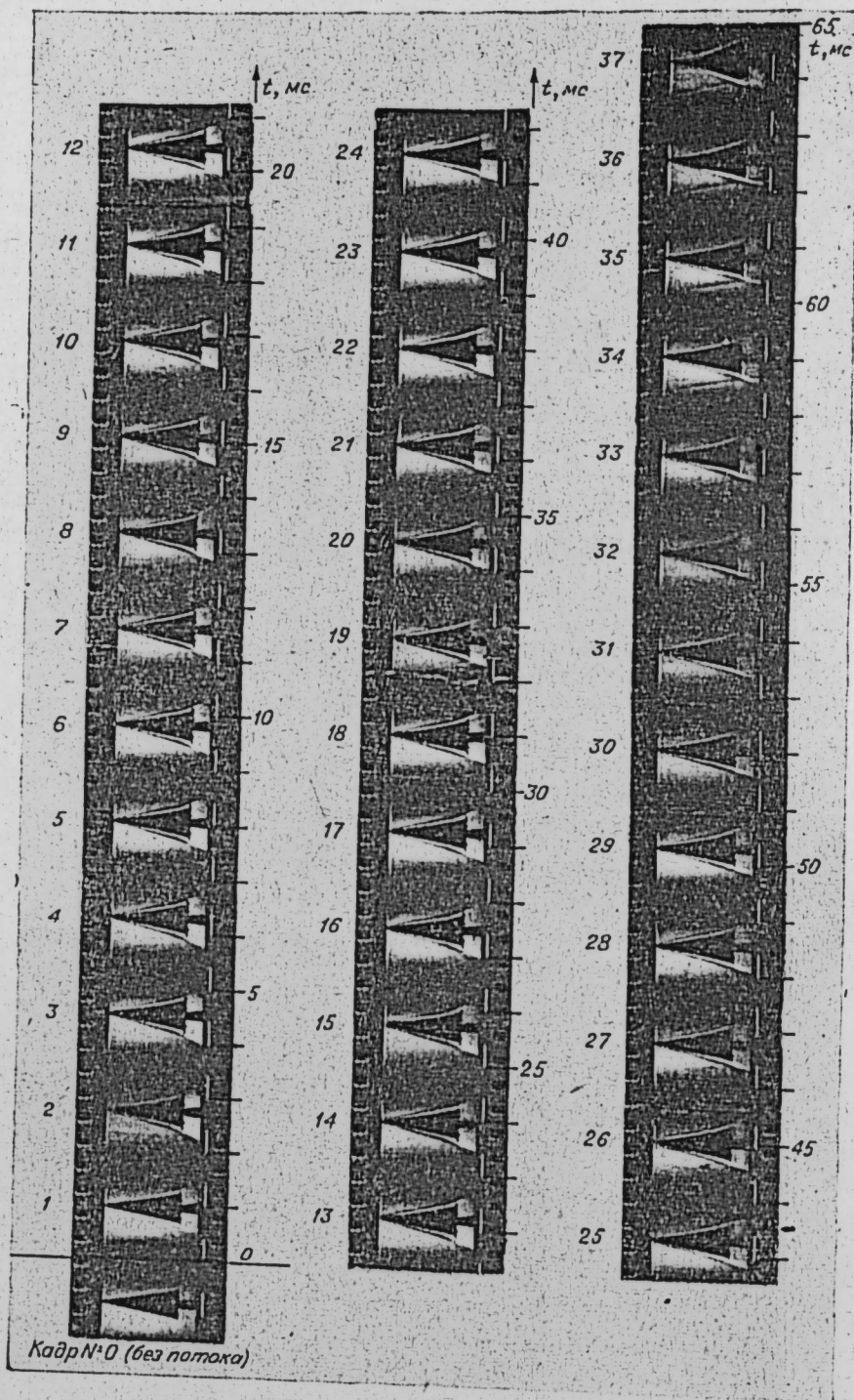


Рис. 3. Кинограмма опыта 1 с моделью 1.

тому на линию отрыва перед выступом набегают турбулентный пограничный слой. Соответственно угол отрыва θ_r довольно велик. Затем, по мере уменьшения числа $Re(t)$, длина перехода увеличивается и достигает кольцевой линии отрыва, так что на линии отрыва начинается набегать нетурбулентный пограничный слой (сначала переходный, затем ламинарный). Поэтому в момент $t=t_{np}$ угол отрыва резко уменьшается.

Сравним полученное число Re_{np} с числами Рейнольдса перехода Re_n пограничного слоя в турбулентный (рис. 5). Многими авторами экспериментально обнаружена зависимость Re_n от так называемого единичного числа Рейнольдса $\rho_e v_e / \mu_e$. На рис. 5, взятом из обзорной статьи [2], приведены данные о Re_n для двух областей значений $\rho_e v_e / \mu_e$ в аэродинамических трубах. Видно, что полученные в ИТ-301 в опытах 1, 2 и 3 величины Re_{np} попадают в соответствующую область Re_n для аэродинамических труб. Так же ведут себя величины Re_{np} , полученные на модели 2 при $M_\infty = 8,3$ и 10 (опыты 4 и 5).

В [2] не указывается, в каких трубах, с какой длительностью режима — большой (сотни секунд) или малой (единицы или десятки миллисекунд), получены данные рис. 5. При $M_\infty \leq 4$ имеется много данных о Re_n , измеренных в трубах с большой длительностью режима в области $\frac{\rho_e v_e}{\mu_e} = (3 \div 10) \cdot 10^6$ 1/м, и значительно меньше таких данных в области $\frac{\rho_e v_e}{\mu_e} = (30 \div 100) \cdot 10^6$ 1/м.

Среди последних — помещенные на рис. 5 данные [3], полученные в трубах ИТГМ Т-313 и Т-325. Они тоже попадают в ту же полосу по $\rho_e v_e / \mu_e$, что служит некоторым подтверждением только что отмеченной корреляции Re_{np} и Re_n , правда косвенным, так как величины M_∞ для опытов [3] и наших опытов значительно различаются.

При гиперзвуковых M_∞ сравнение данных о влиянии числа Рейнольдса, полученных в ИТ-301, с результатами, полученными в трубах с большой длительностью режима, затруднительно, так как высокие числа Re в ИТ-301 получаются за счет высоких параметров в потоке газа, т. е. высокого значения $\rho v / \mu$, а не за счет больших длин моделей. Среди труб с большой длительностью режима только в гелиевых трубах удастся при $M_\infty > 8$ получить числа $\rho v / \mu$, близкие к значениям в ИТ-301. Поэтому на

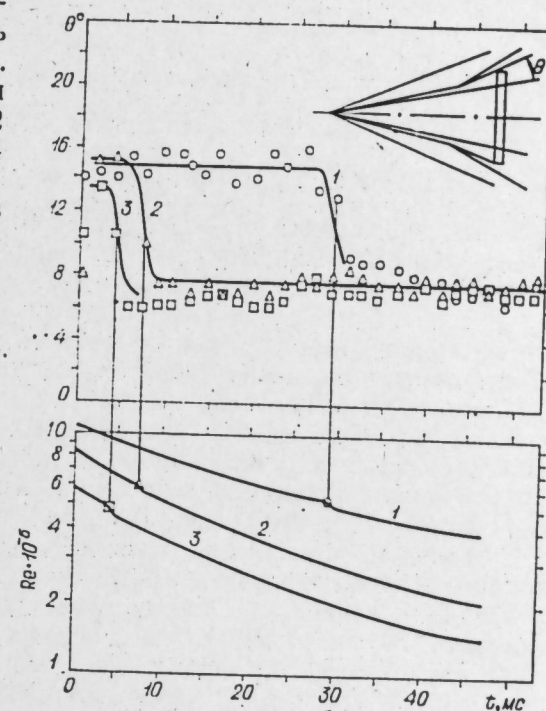


Рис. 4. Опыты с моделью 1. 1, 2, 3 — № опытов (см. таблицу).



Рис. 5. Влияние числа Маха M_∞ над поверхностью и единичного числа Рейнольдса $\frac{\rho_e v_e}{\mu_e}$ 1/м на переход пограничного слоя на конусах [2]; $\frac{T_w}{T_R} \approx \frac{T_w}{T_\phi}$; 1—5 — № опытов в ИТ-301 (см. таблицу); 6—7 — данные для пластины [3]; 6 — труба Т-313; 7 — труба Т-325.

I — $3,28 \cdot 10^6 < \frac{\rho_e v_e}{\mu_e} < 9,81 \cdot 10^6$; II — $32,8 \cdot 10^6 < \frac{\rho_e v_e}{\mu_e} < 98,4 \cdot 10^6$.

рис. 6 данные, полученные в ИТ-301, сравнивались с данными, полученными в гелиевой трубе [4] на конусах.

Величины $\frac{\rho_e v_e}{\mu_e}$ в опытах [4] были все же ниже, чем в ИТ-301. Однако многими авторами (см., например [5, 6]) используется приведение данных о $Re_{кр}$ к одному значению $\frac{\rho_e v_e}{\mu_e}$ по эмпирической формуле $Re_{кр} \sim \left(\frac{\rho_e v_e}{\mu_e}\right)^{0,35}$. На рис. 7 наклон прямых соответствует показателю степени 0,35. Это соотношение и было использовано для показанного на рис. 7 приведения данных для рис. 6 к одному числу $\frac{\rho_e v_e}{\mu_e} = 40 \cdot 10^6$ 1/м, имевшему место при резком изменении угла отрыва в опыте 1 (см. рис. 3, 4, табл.).

На рис. 6 и 7 приведены также результаты измерения $Re_{кр}$ на конусах в различных установках с малой длительностью режима [5—7]. Они согласуются между собой, с данными [4] и с результатами, полученными в ИТ-301, а также с выбранным для приведения показателем степени 0,35. Отклонения части данных на рис. 6 [6, 7], по-видимому, можно отнести на счет влияния на переход большого числа факторов, причем роль некоторых из них при гиперзвуковых числах M_e до сих пор неясна [2]. Например, известно, что один из таких факторов — относительная температура стенки T_w/T_ϕ . Однако в работе [7] наблюдалось ее влияние на $Re_{кр}$, а в [5] — нет, причем в [5] отмечалось, что оно не наблюдалось и в опытах ряда других авторов. В данных опытах ($T_w/T_\phi = 0,14 \div 0,28$) тоже не замечено влияния температуры стенки на $Re_{кр}$ (см. рис. 6, 7, табл.).

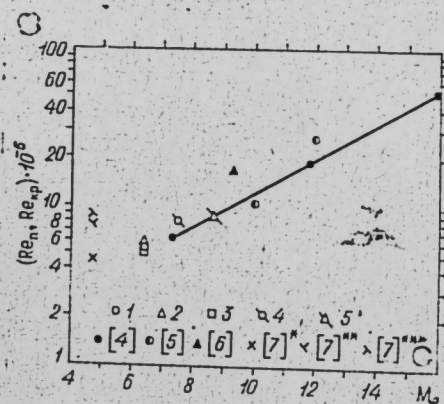


Рис. 6. Корреляция приведенных $Re_{кр}$ полученных в ИТ-301, и приведенных $Re_{кр}$ полученных в различных трубах ($\rho_e v_e / \mu_e = 40 \cdot 10^6$ 1/м).

$Re_{кр}$ — из опытов 1—5 в ИТ-301 (см. табл.) при $T_w/T_\phi = 0,16 \div 0,23$; $Re_{кр}$ из опытов [4] в стационарной гелиевой трубе при $T_w/T_\phi = 1$, из опытов [5] в ударной трубе при $T_w/T_\phi = 0,16 \div 0,26$, из опытов [6] в импульсной трубе при $T_w/T_\phi = 0,19$, из опытов [7] в ударной трубе при $T_w/T_\phi = 0,25$ ([7] *), 0,38 ([7] **), 0,51 ([7] ***).

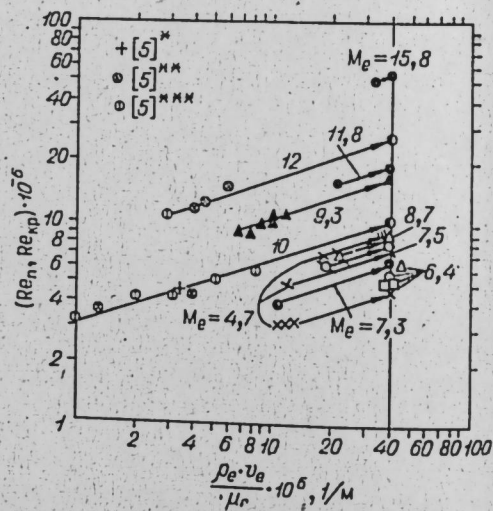


Рис. 7. Приведение величин $Re_{кр}$ и $Re_{кр0}$ к величинам при одном значении единичного числа Рейнольдса $\frac{\rho_e v_e}{\mu_e} = 40 \cdot 10^6$ 1/м.

Обозначения см. на рис. 6; кроме того, для опытов [5]: [5] * — $\frac{T_w}{T_\phi} = 0,16$, [5] ** — $\frac{T_w}{T_\phi} = 0,21$, [5] *** — $\frac{T_w}{T_\phi} = 0,25$.

Заметим, что нельзя заранее предполагать равенство $Re_{кр}$ и $Re_{кр0}$, так как их физический смысл несколько различен. $Re_{кр}$ характеризует переход как таковой и определяется по изменению таких параметров пограничного слоя (чаще всего это тепловой поток в стенку или давление в трубке Пито [3—7]), которые не связаны с сильным возмущающим воздействием на пограничный слой извне и, следовательно, не позволяют судить о влиянии перехода на изменение картины обтекания тела. $Re_{кр0}$ характеризует изменение способности пограничного слоя преодолеть скачок давления при изменении режима течения в пограничном слое, и поэтому его определение связано с сильным возмущающим воздействием на пограничный слой — скачком давления. В данных опытах по определению $Re_{кр}$ изменение состояния пограничного слоя определялось по изменению картины обтекания. Поэтому, в частности, не требовалась препарировка модели датчиками, а общепринятые методы определения $Re_{кр}$ [3—7] предполагают препарировку модели датчиками, соединенными проводами или трубками с измерительными приборами.

Полученные данные позволяют оценить возможности пограничного слоя по преодолению скачков давления, так как по величинам угла отрыва θ_* , измеренным на кинограммах (см. табл.), можно оценить скачки давления p_2/p_1 при отрыве турбулентного пограничного слоя (рис. 8). Найденные таким образом значения p_2/p_1 продолжают экспериментальную зависимость, подтвержденную многочисленными данными, собранными в [8, 9] до $M_e = 4$, и данными [6] до $M_e = 6,3$ (при этом давления p_2 и p_1 обычно измерялись).

Величины p_2/p_1 при отрыве ламинарного пограничного слоя по измерениям углов отрыва на кинограммах данных опытов определять не стоит, так как в этом случае (при $Re < Re_{кр}$) границы оторвавшегося потока над отрывной зоной искривлена. Величины же углов θ , приведенные на рис. 4, — это углы при вершине треугольника, основанием которого является высота выступа, а вершиной — точка отрыва. Этот угол равен углу отрыва турбулентного пограничного слоя, но завышен относительно угла отрыва ламинарного пограничного слоя [9].

Во всех полученных кинограммах уже на втором кадре угол отрыва мало отличается от угла отрыва на последующих кадрах, из чего можно заключить, что время на установление потока в рабочей части трубы ИТ-301 и на установление обтекания модели с отрывом не превышает 2 мс. Резкое уменьшение угла отрыва происходит за время 2—4 мс, откуда следует, что перестройка поля обтекания (от обтека-

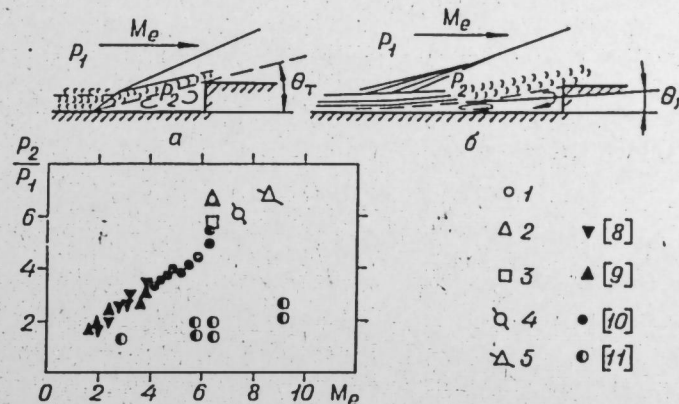


Рис. 8. Отрыв пограничного слоя перед выступом: турбулентного (а) и ламинарного (б) слоев.

Экспериментальные данные при отрыве пограничного слоя: турбулентного — из опытов 1—5 в ИТ-301 (см. табл.), из работ [8—10]; ламинарного — из работы [11].

ния с турбулентным отрывом к обтеканию с ламинарным отрывом) потребовала не более 4 мс. Следовательно, на каждый из этих нестационарных процессов затрачивалось менее 10% времени рабочего режима трубы, которое в данных опытах составляло 50÷60 мс. В течение остального времени кинограммы показывают стационарную картину обтекания. Следовательно, на моделях умеренных размеров с не очень большими отрывными зонами в ИТ-301 можно получать квазистационарное обтекание в течение почти всею времени режима трубы ИТ-301, за исключением небольшого времени установления и времени перестройки (при переходе от обтекания при закритических числах Рейнольдса к обтеканию при докритических).

Институт теоретической и прикладной механики
СО АН СССР,
Новосибирск

Поступила в редакцию
22/III 1974

ЛИТЕРАТУРА

1. А. С. Антонов, Б. В. Бошнятов, В. А. Дмитриев, В. В. Затолока, Л. Н. Пузырев, М. И. Ярославцев. В сб.: Аэрофизические исследования. Новосибирск, ИТиПМ СО АН СССР, 1972, с. 20—24.
2. А. Гендерсон мл. В сб.: Современные проблемы газовой динамики. М., «Мир», 1971, с. 88—122.
3. В. В. Струминский, А. М. Харитонов, В. В. Черных. МЖГ, 1972, № 2, 30—34.
4. Мэдделон, Гендерсон. РТК, 1968, 6, № 3, 50—60.
5. Софтли, Грейбер, Цемпел. РТК, 1969, 7, № 2, 80—88.
6. J. D. Whitefield. XXIII Intern. Astronautical Congr. Vienna, Austria, oktober 8—15, 1972.
7. Стетсон, Раштон. РТК, 1967, 5, № 5, 86—94.
8. Г. Н. Абрамович. Прикладная газовая динамика. М., «Наука», 1969, с. 315—322.
9. П. Чжен. Отрывные течения, т. 1, 2, 3. М., «Мир», 1972.
10. J. R. Sterget, J. C. Etoгу. NASA T. N. № D—618, 1960.
11. Миллер, Хиджмент, Чайдлс. РТК, 1964, 2, № 2, 115—127.

ИЗВЕСТИЯ СИБИРСКОГО ОТДЕЛЕНИЯ АКАДЕМИИ НАУК СССР

№ 8, вып. 2

СЕРИЯ ТЕХНИЧЕСКИХ НАУК

1975

УДК 532.526.5.011.7

М. А. ГОЛЬДФЕЛЬД, В. В. ЗАТОЛОКА, Э. Г. ТЮТИНА

ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ ОТРЫВНЫХ СВОЙСТВ ПОГРАНИЧНОГО СЛОЯ ПЕРЕД ПРЯМОУГОЛЬНЫМ ВЫСТУПОМ НА ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ТРУБЕ

При работе аэродинамических устройств, например воздухозаборников, сопел, рулей и др., во внешнем невязком потоке возникают неблагоприятные градиенты давления, вызывающие отрыв пограничного слоя в тех случаях, когда он не может преодолеть положительный градиент давления. Существование и протяженность срывных зон приводят к тому, что характеристики летательного аппарата и их зависимость от чисел Маха и Рейнольдса значительно отличаются от характеристик при безотрывном обтекании.

Известно, что отрывные свойства пограничного слоя зависят от типа течения в нем — ламинарного, переходного или турбулентного, на них влияют характер перехода ламинарного слоя в турбулентный, некоторые свойства аэродинамических труб (начальная турбулентность, единичное число Рейнольдса) и моделей (шероховатость, притупление передней кромки).

Ввиду сложности отрывных течений их теоретические модели носят приближенный полуэмпирический характер [1—3]. Поэтому экспериментальные исследования в этой области [1—7] имеют важное значение.

В сверхзвуковой аэродинамической трубе Т-313 ИТПМ СО АН СССР [4] при $M=2÷4$ были проведены испытания тонкостенной цилиндрической трубы, по которой может передвигаться прямоугольный выступ, вызывающий отрыв пограничного слоя при ламинарном, переходном и турбулентном режиме течения в пограничном слое (рис. 1). Сменные стаканы высотой 3, 5 и 10 мм можно переставлять с шагом 5 мм.

При постоянном числе Маха режим течения в пограничном слое перед точкой отрыва изменялся двумя способами: а) при постоянном единичном числе Рейнольдса $Re_1 = \frac{U_c}{\nu}$ опыты проводились при различных расстояниях от выступа до передней кромки трубы; б) при неизменном положении выступа изменялось число Re_1 . Измерения давления на переднем торце выступа, статического давления на стенке модели перед ним и обработка теневых фотографий обтекания позволили получить некоторые параметры и характеристики течения с отрывом пограничного слоя перед выступом.

Изменение режима течения в пограничном слое перед точкой отрыва приводит к существенному изменению картины течения перед



Рис. 1. Схема течения перед выступом.

выступом (рис. 2). Можно выделить три характерных режима обтекания. Первый режим отличается большой длиной зоны отрыва, малыми углами отрыва пограничного слоя θ и наклона скачка β (рис. 2 и схема течения на рис. 1, а) и низкими давлениями на выступе (рис. 2). Известно, что такое обтекание реализуется при ламинарном режиме течения в пограничном слое перед точкой отрыва [1, 5]. Давление на выступе при этом возрастает с увеличением высоты выступа и числа Re . Второй режим характеризуется наиболее высоким давлением на выступе, не зависящим от высоты выступа, минимальной длиной отрывной зоны (рис. 2) и имеет место при переходном режиме течения в пограничном слое перед точкой отрыва в узком диапазоне чисел Re [2, 5]. Третий режим характеризуется некоторым уменьшением давления на выступе, незначительным изменением относительной длины зоны отрыва, постоянным углом отрыва $\theta = 13^\circ$ и большими углами β (рис. 2). Этот режим соответствует турбулентному течению в пограничном слое перед точкой отрыва [1—3, 5]. Аналогичные зависимости были получены для чисел $M=2$ и 3.

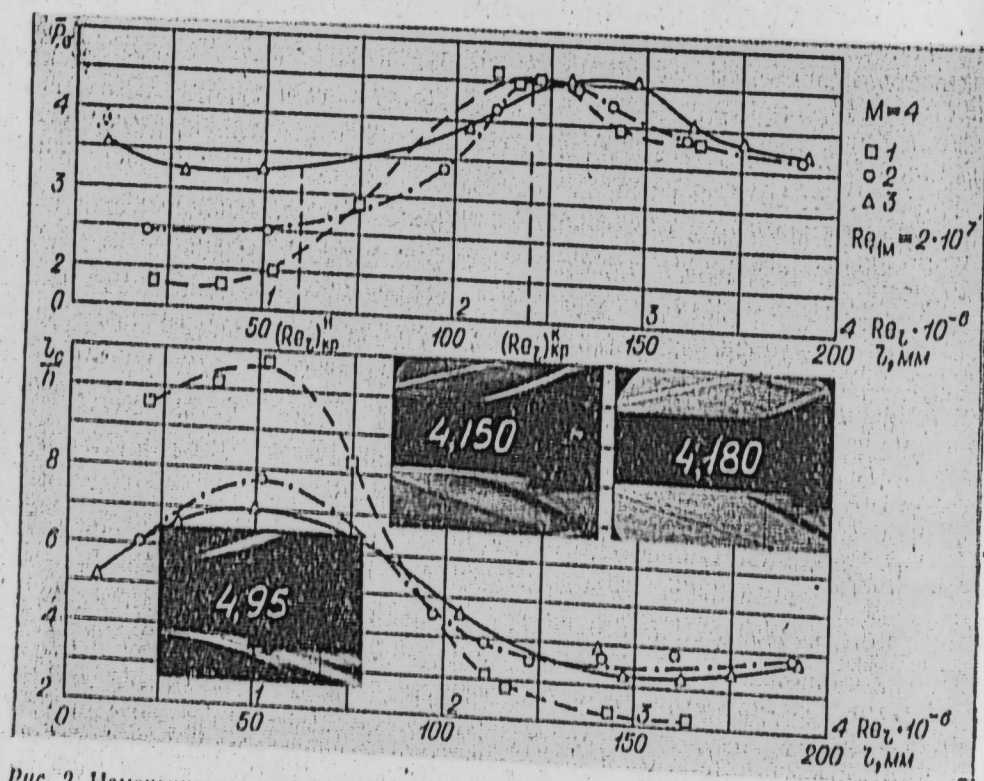


Рис. 2. Изменение относительного давления и относительной длины области отрыва по числу Рейнольдса.
1 — $h=3$ мм; 2 — $h=5$; 3, 4 — $h=10$ мм.

По известному числу Маха и углу отрыва пограничного слоя (или углу наклона скачка) можно определить давление в изобарной зоне за точкой отрыва [1, 3]. В результате обработки многочисленных фотографий (рис. 2) была получена зависимость относительного давления в изобарной зоне $\bar{P}_n$ от числа Маха (рис. 3). Величины $\bar{P}_n$ для турбулентного течения в пограничном слое перед точкой отрыва удовлетворительно согласуются с данными для плоских течений, которые найдены путем непосредственного измерения давления, и аппроксимируются известной зависимостью [3]:

$$\bar{P}_n = \frac{P_n}{P_\infty} = \frac{1}{2} M_\infty^2 + 1,$$

где P_n — давление в изобарной зоне; P_∞ — давление в невозмущенном потоке. На рис. 3 приведено также давление, измеренное на переднем торце выступа в его нижней части (меньше $0,6h$), и данные различных авторов о давлении, измеренном на стенке у его переднего торца. Такое сравнение можно считать правомерным, поскольку измеренные давления по высоте выступа в его нижней части, до $0,6h$ (где h — высота ступеньки), близки между собой и с давлением на стенке модели у его торца, что также согласуется с данными [3, 6, 8]. Относительное давление на выступе изменяется по числу M линейно и может быть приближенно аппроксимировано выражением

$$\bar{P}_n = \frac{P_n}{P_\infty} = 0,9M + 0,5,$$

где P_n — давление на лицевой стороне выступа или статическое давление на поверхности модели у его переднего торца.

При ламинарном режиме течения давления в изобарной зоне, определенные по углу наклона скачка, существенно ниже (см. рис. 3), чем при турбулентном течении. Изменение давления по числу Маха удовлетворительно описывается соотношением [1]

$$\bar{P}_n = 0,7M^2 \sqrt{\frac{6C_{f_0}}{M^2 - 1}} + 1,$$

где C_{f_0} — коэффициент трения в невозмущенном потоке перед точкой отрыва. Следует заметить, что определение этого давления всегда не легкая задача из-за влияния числа Рейнольдса и возникновения нестационарного обтекания выступа в тех случаях, когда он расположен вблизи передней кромки модели [7]. В настоящих опытах нестационарность возникала при $M=2$ и 3 в тех случаях, когда выступ находился вблизи передней кромки модели, т. е. при ламинарном режиме течения перед точкой отрыва ($Re_l < 1 \cdot 10^6$, $L=40-50$ мм). Учитывая это, можно считать разброс экспериментальных значений $\pm 15\%$ удовлетворительным. Сравнение давлений в изобарной зоне и на выступе показывает, что последнее выше, чем в изобарной зоне в $1,5 \div 2$ раза. Относительная дли-

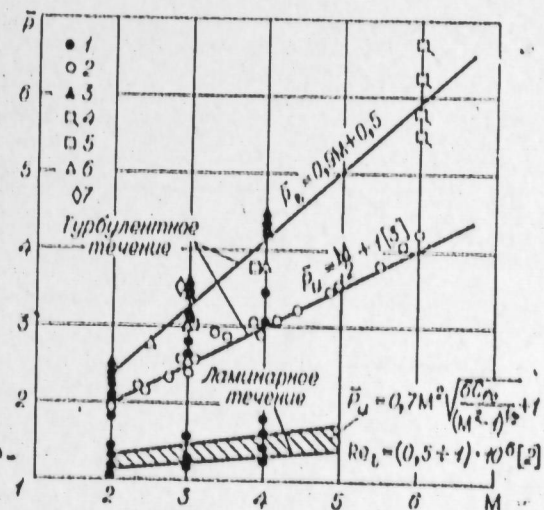


Рис. 3. Зависимость относительного давления в изобарной зоне и на выступе от числа Маха.
1, 2 — $\bar{P}_n$; 3—7 — $\bar{P}_n$; 1, 3 — $h=3-10$ мм; 2 — [3], двумерное течение; 4 — [3], трехмерное течение; 5 — [3], плоское течение; 6 — [6]; 7 — [8].

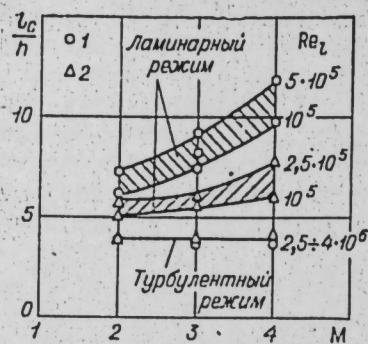


Рис. 4. Зависимость относительной длины области отрыва от числа Маха.

1 — $h=5$ мм; 2 — $h=10$ мм.

граничного слоя $\theta \approx 13^\circ$ [3]. Угол отрыва и угол наклона скачка не зависят от высоты выступа и единичного числа Re_1 , поскольку все экспериментальные значения удовлетворительно аппроксимируются одной кривой, что согласуется с известными данными для отрыва при свободном взаимодействии [1—3].

По измерению давления на переднем торце выступа и по результатам обработки теневых фотографий (см. рис. 2) были определены критические числа Рейнольдса начала $(Re_L)_{кр}^n$ и конца $(Re_L)_{кр}^k$ перестройки течения перед выступом. Отметим, что $(Re_L)_{кр}^n$ и $(Re_L)_{кр}^k$, полученные по результатам обработки теневых фотографий с точностью 10÷15%, совпадают с соответствующими числами (Re_L) , определенными по измерению давления. Поскольку характер течения перед выступом зависит прежде всего от режима течения в пограничном слое перед ним, то полученные значения $(Re_L)_{кр}^n$ и $(Re_L)_{кр}^k$ можно сравнить с соответствующими числами Рейнольдса начала и конца перехода Re_n^* и Re_k^* , определенными традиционными методами для безотрыв-

ного течения на пологом цилиндре и плоской пластине. Такое сравнение с данными по трубе Т-313, а также по трубе Т-325 [9] показывает (рис. 6), что при $M=2$ и $Re_1=2 \cdot 10^7 \frac{1}{M}$ величины $(Re_L)_{кр}^n$ и $(Re_L)_{кр}^k$ примерно в 2 раза меньше соответствующих чисел Re_n , тогда как при $M=4$ и $Re_1=2 \cdot 10^7 \frac{1}{M}$ значения $(Re_L)_{кр}^n$ и $(Re_L)_{кр}^k$ будут приближаться к числам Re_n для безотрывного течения. Еще одним обоснованием этого предположения могут служить результаты [10] при числах Маха 6,5÷8,5 на конусе, где получено, что $(Re_L)_{кр}^k$ близки к Re_n .

Возможно, несовпадение $(Re_L)_{кр}^n$ и Re_n при $M=2 \div 4$ связано с их разным физическим смыслом: Re_n характеризует переход как таковой, и его определение не связано с сильным возмущающим воздействием на пограничный слой извне, а $(Re_L)_{кр}$ характеризует изменение способности пограничного слоя преодолевать скачок давления при изменении режима течения в пограничном слое, и поэтому его определение связано с сильным возмущающим воздействием на пограничный слой — скачком давления.

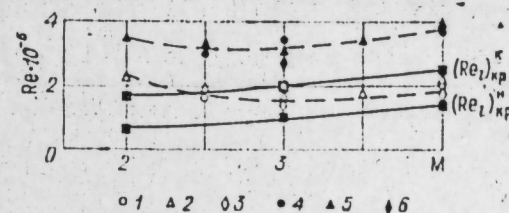


Рис. 6. Зависимость критического числа Рейнольдса и числа Рейнольдса перехода от числа Маха.

1—3 — Re_n^* ; 4—6 — Re_k^* ; 1,4 — пластина, Т-313 [9]; 2, 5 — пластина, Т-325 [9]; 3, 6 — пологий цилиндр, Т-313.

ного течения на пологом цилиндре и плоской пластине. Такое сравнение с данными по трубе Т-313, а также по трубе Т-325 [9] показывает (рис. 6), что при $M=2$ и $Re_1=2 \cdot 10^7 \frac{1}{M}$ величины $(Re_L)_{кр}^n$ и $(Re_L)_{кр}^k$ примерно в 2 раза меньше соответствующих чисел Re_n , тогда как при $M=4$ и $Re_1=2 \cdot 10^7 \frac{1}{M}$ значения $(Re_L)_{кр}^n$ и $(Re_L)_{кр}^k$ будут приближаться к числам Re_n для безотрывного течения. Еще одним обоснованием этого предположения могут служить результаты [10] при числах Маха 6,5÷8,5 на конусе, где получено, что $(Re_L)_{кр}^k$ близки к Re_n .

Возможно, несовпадение $(Re_L)_{кр}^n$ и Re_n при $M=2 \div 4$ связано с их разным физическим смыслом: Re_n характеризует переход как таковой, и его определение не связано с сильным возмущающим воздействием на пограничный слой извне, а $(Re_L)_{кр}$ характеризует изменение способности пограничного слоя преодолевать скачок давления при изменении режима течения в пограничном слое, и поэтому его определение связано с сильным возмущающим воздействием на пограничный слой — скачком давления.

Институт теоретической и прикладной механики
СО АН СССР,
Новосибирск

Поступила в редакцию
10/VII 1974

ЛИТЕРАТУРА

1. П. Чжен. Отрывные течения. М., «Мир», 1973, ч. I—III.
2. В. Я. Нейланд, Н. И. Куканова. Обзор ЦАГИ, 1964, № 129.
3. E. E. Zukoski. AIAA J., 1967, 5, № 10, (см. также русск. перевод: РТК, 1967, 5, № 10).
4. И. И. Волонихин, В. Д. Григорьев, В. С. Демьяненко, А. М. Харитонов, Х. И. Писаренко. В сб.: Аэрофизические исследования. ИТПМ СО АН СССР, Новосибирск, 1972.
5. D. R. Chapmen, D. M. Kuehn, H. K. Larson. NACA Report, 1958, № 1356.
6. J. S. Hahn. Experimental investigation of turbulent step-induced boundary-layer separation at Mach number 2,5, 3 and 4. 1969, AEDC—TR—(69—1).
7. В. С. Авдеевский, В. К. Гревцов, К. И. Медведев. МЖГ, 1972, № 1.
8. S. M. Bogdanoff, S. E. Kepler. JAS, 1955, № 6. (см. также русск. перевод: ВРТ, 1956, № 6.).
9. В. В. Струминский, А. М. Харитонов, В. В. Черных. МЖГ, 1972, № 2.
10. Б. В. Бошняков, В. В. Залога, М. И. Ярославцев. В сб.: Аэрофизические исследования. ИТПМ СО АН СССР, Новосибирск, 1972.

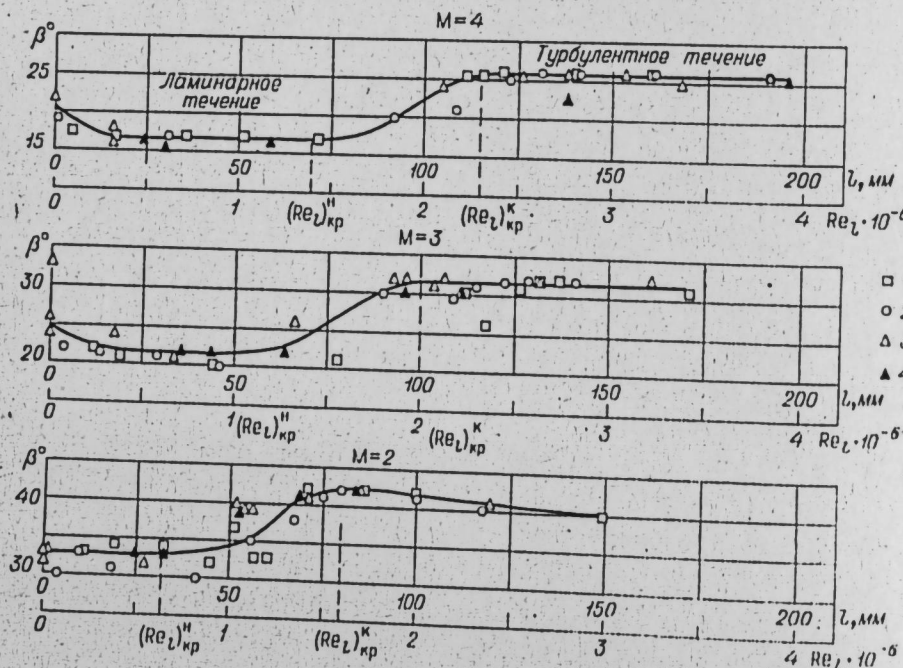


Рис. 5. Зависимость угла наклона скачка от числа Рейнольдса.
1 — $h=3$ мм; 2 — $h=5$; 3 — $h=10$ мм.

УДК 533.6.0.11.5 : 532.526.5.011.7

В. С. ДЕМЬЯНЕНКО, В. А. ИГУМНОВ

ПРОСТРАНСТВЕННОЕ ВЗАИМОДЕЙСТВИЕ УДАРНОЙ ВОЛНЫ
С ТУРБУЛЕНТНЫМ ПОГРАНИЧНЫМ СЛОЕМ
В ОБЛАСТИ ИНТЕРФЕРЕНЦИИ
ПЕРЕСЕКАЮЩИХСЯ ПОВЕРХНОСТЕЙ

Обтекание пересекающихся поверхностей сверхзвуковым потоком газа характеризуется сложной пространственной системой взаимодействующих друг с другом ударных волн и волн разрежения, а вблизи поверхностей — взаимодействием ударных волн с пограничным слоем, а также взаимодействием пограничных слоев. Взаимодействие ударных волн с пограничным слоем, как показывают эксперименты, проведенные на моделях двугранных углов [1—4], может существенно влиять на характер распределения давления и структуру течения в области интерференции пересекающихся поверхностей. Пространственное взаимодействие ударной волны с пограничным слоем изучалось многими исследователями ([см., например, 5—8]), однако в большинстве этих экспериментов ударные волны были криволинейными, что существенно усложняло картину взаимодействия и его анализ. Одним из простых трехмерных случаев является взаимодействие косого скачка уплотнения с пограничным слоем на плоской поверхности, нормальной к плоскости скачка и параллельной вектору скорости невозмущенного потока $\vec{V}_\infty$. Такое взаимодействие исследовалось в работах [9—14], но остается в настоящее время недостаточно изученным.

В статье рассматриваются результаты экспериментального исследования взаимодействия косого скачка уплотнения, генерируемого одной из граней (А) прямого двугранного угла (рис. 1, а), с турбулентным пограничным слоем на другой грани (В), которая параллельна вектору скорости невозмущенного потока. Модель состоит из квадратных пластин с острыми кромками, дреннированных по размаху в сечении $x=110$ мм с шагом 3—5 мм. В аэродинамической трубе модель устанавливалась так, что пластина В была параллельна $\vec{V}_\infty$, а пластина А при отклонении модели на угол атаки α являлась генератором косого скачка уплотнения. Эксперименты проведены при числах Маха $M_\infty=2, 3$ и 4 и числах Рейнольдса $Re_\infty=(15-60) \cdot 10^6$ (на 1 м) и заключались в измерении распределения давления и визуализации течения на пластинах. Визуализация течения осуществлялась при помощи масло-сажевых смесей, из которых наиболее употребительной оказалась смесь трансформаторного масла с 10—15% газовой сажи.

На рис. 1 в качестве иллюстрации приведено распределение давления на пластине В при различных значениях параметров α , M_∞ и Re_∞ ($\bar{y}=y/x$; p — статическое давление на поверхности; p_∞ — статическое давление невозмущенного потока). Анализ экспериментов показал, что в исследованном диапазоне изменения этих параметров оказалось возможным в качестве параметра, определяющего рассматриваемое

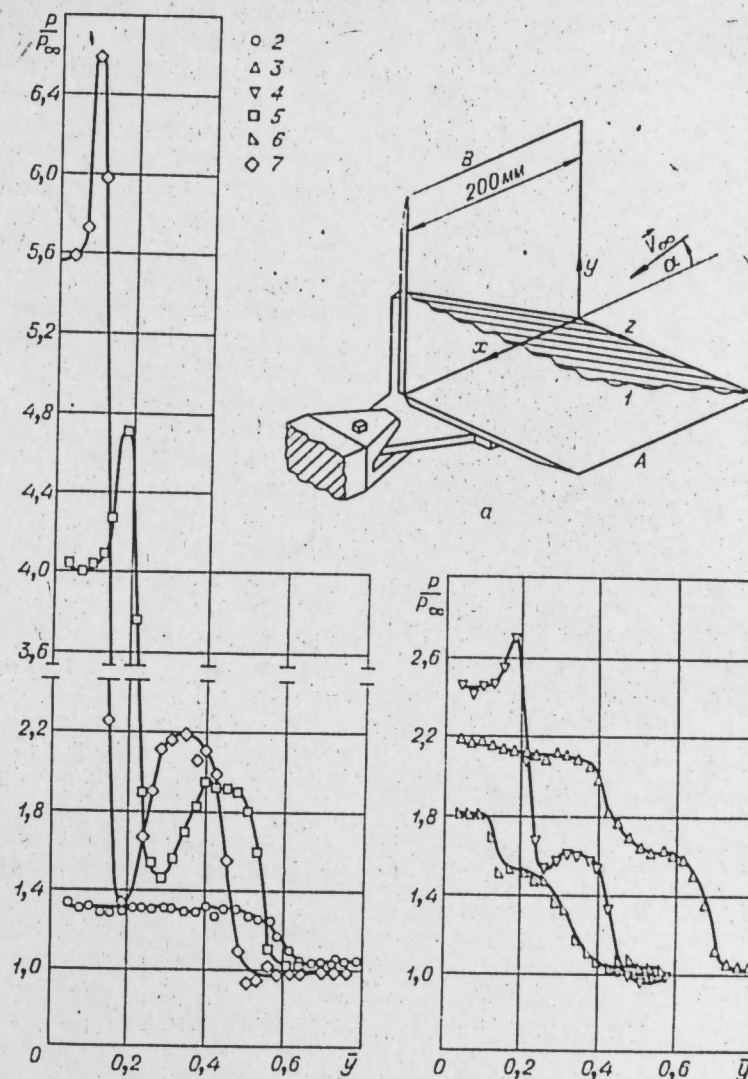


Рис. 1. Эскиз модели и распределение давления на пластине В (А, В — пластины).

1 — скачок уплотнения; 2 — $M_\infty=2$, $Re_\infty=33 \cdot 10^6$, $\alpha=4^\circ$; 3 — $M_\infty=2$, $Re_\infty=33 \cdot 10^6$, $\alpha=12,3^\circ$; 4 — $M_\infty=3$, $Re_\infty=60 \cdot 10^6$, $\alpha=12,2^\circ$; 5 — $M_\infty=3$, $Re_\infty=37 \cdot 10^6$, $\alpha=20,4^\circ$; 6 — $M_\infty=4$, $Re_\infty=55 \cdot 10^6$, $\alpha=6^\circ$; 7 — $M_\infty=4$, $Re_\infty=55 \cdot 10^6$, $\alpha=20,3^\circ$.

взаимодействие, использовать интенсивность скачка уплотнения ξ (отношение давления за скачком к p_∞).

Взаимодействие без отрыва. При интенсивности скачка меньше критической ξ^* имеет место взаимодействие без отрыва турбулентного пограничного слоя. Вне области взаимодействия при переходе через скачок уплотнения отмечается скачкообразный рост давления и соответствующий поворот линий тока, так что вниз по потоку от скачка линии тока направлены параллельно пластине А. По мере приближения к поверхности пластины В течение имеет более сложный характер. Вследствие взаимного влияния скачка и пограничного слоя вблизи поверхности пластины В плавно растет давление при переходе через плоскость скачка (см. рис. 1, $M_\infty=2$, $\alpha=4^\circ$). Из-за неблагоприятного градиента давления в области взаимодействия медленно движущиеся слои отклоняются на больший угол, чем более быстрые, а следовательно

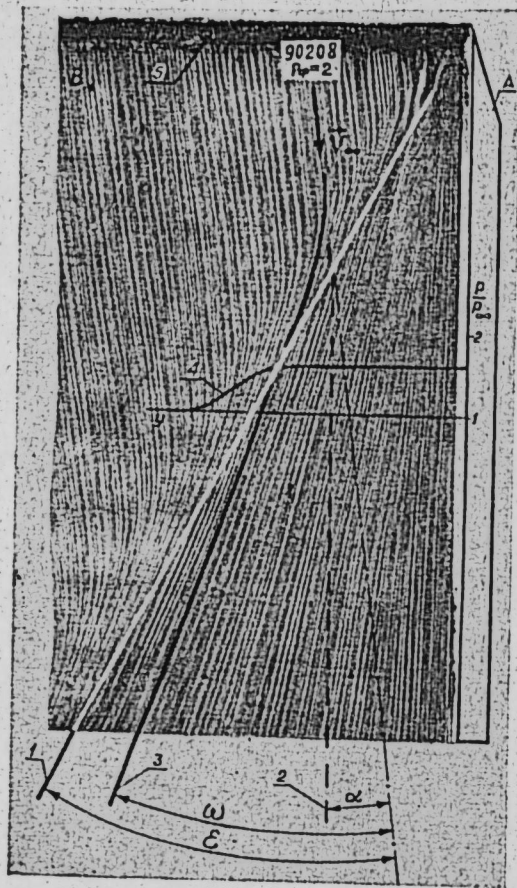


Рис. 2. Фотография предельных линий тока на пластине В и схема течения в области взаимодействия, $\xi \approx 1,5$ ($M_\infty = 2$, $\alpha = 8,1^\circ$).

1 — проекция плоскости скачка уплотнения; 2 — линии тока вне области взаимодействия; 3 — предельные линии тока; 4 — кривая распределения давления; 5 — турбулизирующая песочная полоска.

лению «закручивания» пограничного слоя: угол поворота предельных линий тока растет, приближаясь в случае безотрывного взаимодействия к значению угла наклона скачка.

Возникновение отрыва. С ростом интенсивности скачка уплотнения градиент давления в области взаимодействия увеличивается, происходит утолщение пограничного слоя, особенно пристенной его части, которая оттесняет от стенки верхние, более быстрые слои. В результате усиления процесса «закручивания» пограничного слоя увеличивается разница направлений линий тока в сравнительно тонком слое газа. Можно представить себе более или менее непрерывное развитие этих явлений при переходе через критическую интенсивность скачка ξ^* . В результате при $\xi > \xi^*$ оттесняемые набухшим пристенным слоем верхние линии тока пограничного слоя отклоняются от стенки и все более участвуют в процессе смешения с внешним невязким потоком, а пристенный слой разделяется на две зоны с характерным течением.

В работе [10] предполагается, что при возникновении отрыва нормальная к плоскости скачка уплотнения компонента скорости пристенного слоя равна нулю, и на основании этого предлагается условие возникновения отрыва, которое может быть записано в виде

$$\omega = \epsilon, \quad (1)$$

где ω — угол поворота предельных линий тока; ϵ — угол наклона скачка.

но, при приближении к поверхности угол отклонения струек тока в окрестности плоскости скачка уплотнения увеличивается до некоторого конечного значения. Таким образом, происходит «закручивание» пограничного слоя [10].

На рис. 2 приведена фотография линий тока масло-сажевой смеси на поверхности пластины В, иллюстрирующая характер течения в пограничном слое. Видно, что предельные линии тока параллельны линиям тока вне области взаимодействия только вблизи пластины А, а по мере удаления от нее вдоль оси y угол поворота увеличивается, так что вниз по потоку от скачка распределение предельных линий тока имеет веерообразный характер. Так как толщина пограничного слоя в плоскости скачка растет с увеличением расстояния от передней кромки, то веерообразный характер распределения линий тока означает, по-видимому, что эффект «закручивания» усиливается с ростом толщины пограничного слоя. Увеличение угла атаки, а следовательно, и интенсивности скачка уплотнения также приводит к уси-

В результате количественной обработки фотографий предельных линий тока и использования условия (1) и соотношений теории косоугольного скачка уплотнения были получены экспериментальные значения критической интенсивности скачка ξ^* , удовлетворительно согласующиеся с данными работы [10] (рис. 3). На рис. 3 приведена также расчетная кривая зависимости критической интенсивности скачка от числа Маха невозмущенного потока, полученная по методике работы [10]. Видно, что расчетные значения ξ^* примерно на 10% выше экспериментальных. На рис. 4 показано обобщение экспериментальных данных для трехмерного и двумерного взаимодействий. В качестве аргумента использовано число Маха нормального к плоскости скачка невозмущенного потока. Такое обобщение позволяет оценить критическую интенсивность скачка в случае рассматриваемого трехмерного взаимодействия (группа точек при $M < 1,4$) по соотношениям для двумерного случая с точностью около 7–14%.

Взаимодействие с отрывом. При интенсивности скачка больше критической взаимодействие протекает с отрывом пограничного слоя. На рис. 5 приведены фотография предельных линий тока, характерная кривая распределения давления (см. также рис. 1, $M_\infty = 2$, $\alpha = 12,3^\circ$ и $M_\infty = 4$, $\alpha = 6^\circ$) и качественная схема течения в поперечной плоскости, соответствующие развитому отрыву пограничного слоя в диапазоне изменения интенсивности скачка от критической до $\sim (2,1-2,4)$. Отрыв турбулентного пограничного слоя происходит по прямой линии, расположенной вверх по потоку от скачка 1 в окрестности линии стекания 4 масло-сажевой смеси, составляющей угол φ с $\vec{V}_\infty$ и примерно соответствующей началу понижения градиента давления на начальном участке кривой давления. Присоединение оторвавшегося потока осуществляется тоже вдоль прямой линии, расположенной вниз по потоку от скачка в окрестности линии растекания 5, составляющей угол γ с $\vec{V}_\infty$ и соответствующей уменьшению градиента давления на конечном участке кривой давления. После присоединения газ растекается в двух направлениях: примерно параллельно направлению течения за скачком вне области взаимодействия, т. е. параллельно пластине А, и по S-образным линиям поперек потока в сторону линии отрыва. Таким образом, линии тока в области отрыва представляют конические винтовые линии. Несмотря на сложное и существенно трехмерное течение в области отрыва, схема течения в поперечной плоскости и типичная кривая давления качественно аналогичны плоскому случаю отрыва пограничного слоя под действием скачка уплотнения.

При дальнейшем возрастании интенсивности скачка характер распределения давления (рис. 1, $M_\infty = 3$, $\alpha = 12$ и 20° ; $M_\infty = 4$, $\alpha = 20^\circ$) и структура течения в области отрыва (рис. 6) усложняются. На кривой давления на поверхности появляются локальное понижение давления в окрестности плоскости скачка и локальное повышение в окрестности присоединения потока, что сопровождается постепенным изменением картины предельных линий тока в области отрыва. Усиливается



Рис. 3. Зависимость критической интенсивности скачка уплотнения от числа Маха невозмущенного потока.

1 — данная работа; 2 — [10]; 3 — [9]; 4 — расчет по [10].

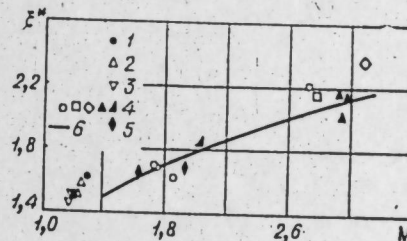


Рис. 4. Зависимость критической интенсивности скачка уплотнения от числа Маха невозмущенного потока, нормального к плоскости скачка уплотнения.

1 — данная работа; 2 — [10]; 3 — [9]; 4 — [16]; 5 — [17]; 6 — по формуле $\xi^* \approx 1 + \frac{0.253 k M^2}{1 + \frac{k-1}{2} M^2}$ [16].

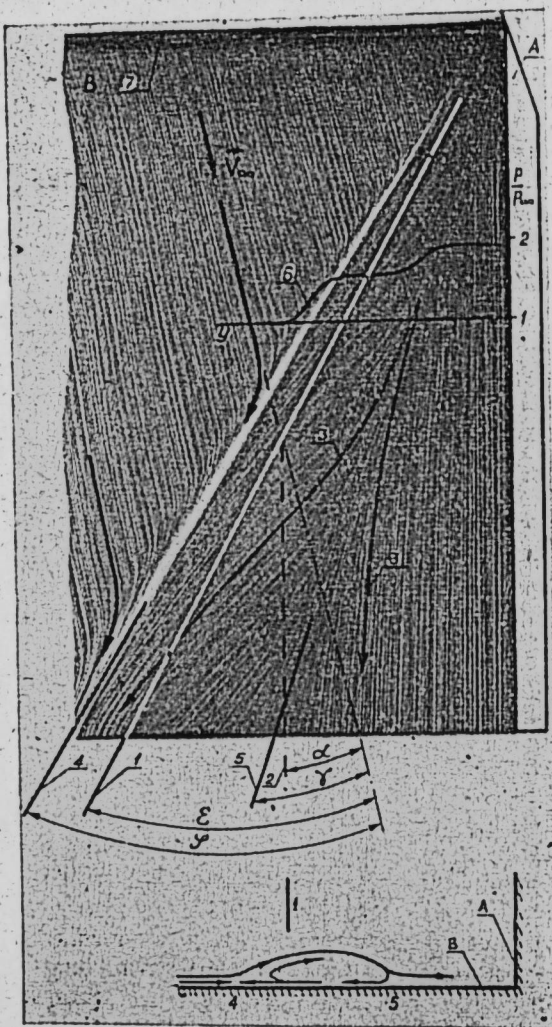


Рис. 5. Фотография предельных линий тока на пластине B и схема течения в области взаимодействия, $\xi \approx 1,9$ ($M_\infty = 2$, $\alpha = 12,3^\circ$).

1 — проекция плоскости скачка уплотнения; 2 — линии тока вне области взаимодействия; 3 — предельные линии тока; 4 — линия стекания; 5 — линия растекания; 6 — кривая распределения давления; 7 — турбулизирующая песочная полоска.

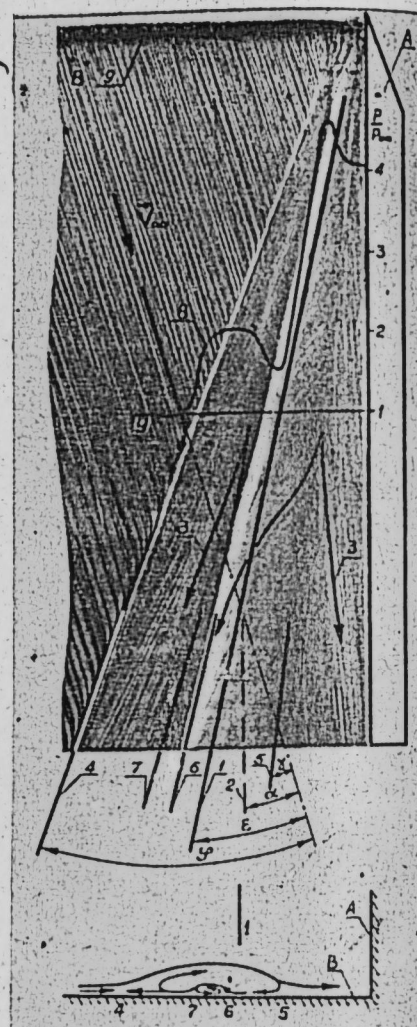


Рис. 6. Фотография предельных линий тока на пластине B и схема течения в области взаимодействия, $\xi \approx 4$ ($M_\infty = 4$, $\alpha = 16,2^\circ$).

1 — проекция плоскости скачка уплотнения; 2 — линии тока вне области взаимодействия; 3 — предельные линии тока; 4, 6 — линии стекания; 5, 7 — линии растекания; 8 — кривая распределения давления; 9 — турбулизирующая песочная полоска.

поперечное растекание присоединившегося потока. Между линиями отрыва 4 и присоединения 5 вверх по потоку от участка локального минимума давления формируются дополнительные линии стекания 6 и растекания 7 масло-сажевой смеси, свидетельствующие об усложнении структуры течения в области отрыва и о возможном возникновении в возвратном потоке отрыва пограничного слоя. Как видно из рис. 6, линии 6 и 7 располагаются довольно близко друг от друга. Возможно, по этой причине в экспериментах не всегда удавалось получить линию растекания 7.

При интенсивности скачка больше $\sim (2,5-2,7)$, как показывает анализ распределения давления, перепад давления между участками локальных максимума и минимума становится достаточным для того, чтобы разогнать возвратный поток до сверхзвуковой скорости. Аналогичное явление наблюдалось в работе [15].

Геометрические характеристики области отрыва. В результате многократных экспериментов по визуализации течения на поверхности пластины B и их количественной обработки получены геометрические характеристики области отрыва турбулентного пограничного слоя — положение линий отрыва и присоединения, характеризующееся углами φ и γ , которые составляют линии стекания 4 и растекания 5 с $\bar{V}_\infty$. Величины φ и γ возрастают пропорционально α и нелинейно уменьшаются с ростом M_∞ .

Положение линии отрыва может быть определено по приближенной формуле

$$\frac{\varphi}{\varepsilon^*} \approx 1 + 0,53 \left(\frac{\lg \xi}{\lg \xi^*} - 1 \right), \quad (2)$$

где ε^* — угол между $\bar{V}_\infty$ и плоскостью скачка уплотнения критической интенсивности. Эта формула лучше аппроксимирует экспериментальные данные, чем корреляция, предложенная ранее [13].

Эксперименты показали, что величина $\gamma - \alpha$ слабо зависит от α в исследованном диапазоне его изменения от 0 до 20° . Это позволило получить зависимость

$$\sin(\gamma - \alpha) = f(M_\infty),$$

которая имеет вид гиперболы с асимптотами $M_\infty = 1$ и $\sin(\gamma - \alpha) = 0$, и предложить для оценки положения линии присоединения формулу

$$(M_\infty - 1) \sin(\gamma - \alpha) \approx 0,35. \quad (3)$$

Характерные давления в области взаимодействия. Выше было показано, что в зависимости от интенсивности скачка изменяется характер распределения давления. Вверх и вниз по потоку от области взаимодействия статическое давление на поверхности пластины B равно соответственно давлению невозмущенного потока p_∞ и давлению за косым скачком уплотнения. Возникновение отрыва пограничного слоя приводит к появлению на кривой давления дополнительных точек перегиба, при развитом отрыве можно выделить еще три участка с характерным давлением: участок относительно слабого изменения давления (между линией отрыва и плоскостью скачка), который условно назван «изобарическим»; участок локального минимума (в окрестности плоскости скачка); участок локального максимума (в окрестности присоединения оторвавшегося потока).

Давление на «изобарическом» участке p_n нелинейно увеличивается с ростом α , причем эта зависимость усиливается с ростом M_∞ . Зависимость величины p_n/p_∞ от интенсивности скачка обобщает экспериментальные данные для $M_\infty = 3$ и 4 и близка к линейной. На рис. 7 приведена зависимость отношения p_n/p_∞ от нормального к плоскости скачка числа Маха $M = M_\infty \sin \varepsilon$. Там же для сравнения представлены экспериментальные данные, полученные в различных аэродинамических трубах при исследовании плоского [18–22] и трехмерного [6] отрыва турбулентного пограничного слоя. Видно удовлетворительное согласование приведенных данных. Заметим, что предложенные в работах [23, 24] формулы для расчета p_n/p_∞ дают несколько отличающиеся друг от друга и от экспериментальных данных результаты, а также несколько ослабляют зависимость p_n/p_∞ от M . Аппроксимируя экспериментальные данные рис. 7 по методу наименьших квадратов, можно предложить более приемлемую формулу:

$$\frac{p_n}{p_\infty} \approx 0,6M + 0,7. \quad (4)$$

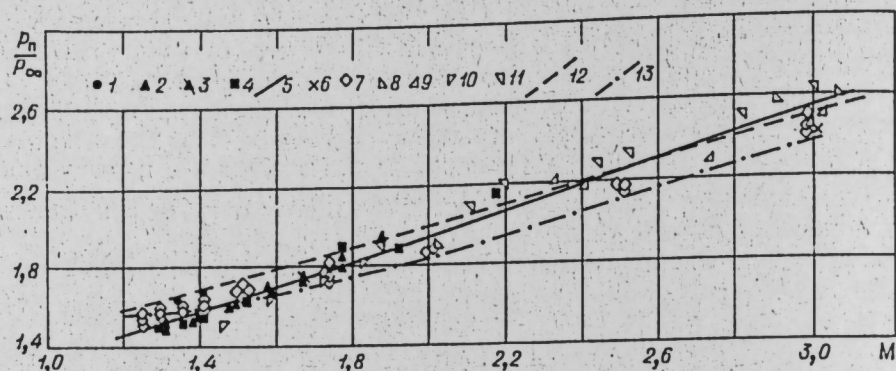


Рис. 7. Зависимость давления в «изобарической» зоне от числа Маха.
Данная работа: 1 — $M_\infty = 2$, $Re_\infty = 33 \cdot 10^6$; 2 — $M_\infty = 3$, $Re_\infty = 35 \cdot 10^6$; 3 — $M_\infty = 3$, $Re_\infty = 60 \cdot 10^6$; 4 — $M_\infty = 4$, $Re_\infty = 57 \cdot 10^6$; 5 — по формуле (4). По литературным данным: 6 — $M_\infty = 3$, $Re_\infty = 40 \cdot 10^6$ [6]; 7 — $M_\infty = 1,24-2,9$, $Re_\infty = (3,7-67) \cdot 10^6$ [22]; 8 — $M_\infty = 2,5-1,0$, $Re_\infty = (90-130) \cdot 10^6$ [19]; 9 — $M_\infty = 2-3,5$, $Re_\infty = 120 \cdot 10^6$ [20]; 10 — $M_\infty = 1,4-3,5$ [18]; 11 — $M_\infty = 1,7-2,8$ [21]; 12 — по формуле $p/p_\infty \approx 0,5M + 1$ [23]; 13 — по формуле $p/p_\infty \approx 0,308 \frac{M^2}{(M^2-1)^{1/2}} + 1$ [24].

Минимальное давление на участке локального минимума слабо зависит от α и имеет тенденцию к нелинейному уменьшению с ростом α . Максимальное давление в окрестности присоединения нелинейно увеличивается с ростом α , особенно при $M_\infty = 4$. В функции от ξ это давление растет линейно и практически не зависит от M_∞ .

Институт теоретической и прикладной механики
СО АН СССР,
Новосибирск

Поступила в редакцию
22/IV 1974

ЛИТЕРАТУРА

1. A. F. Chagwat, L. G. Redeker. AIAA J., 1967, 5, № 3.
2. В. С. Демьяненко, Е. К. Дерунов. Изв. Сиб. отд. АН СССР, сер. техн. наук, 1971, № 8, вып. 2.
3. P. D. Watson, L. M. Weinstein. AIAA J., 1971, 9, № 7.
4. J. E. West, R. H. Korkegi. AIAA J., 1972, 10, № 5.
5. В. С. Авдеевский, К. Н. Медведев. Изв. АН СССР, МЖГ, 1967, № 1.
6. Ю. А. Панов. Изв. АН СССР, МЖГ, 1968, № 3.
7. А. И. Зубков, Ю. А. Панов, Д. М. Войтенко, А. И. Глаголев. Тр. I республиканской конф. по аэрогидродинамике, теплообмену и массообмену. Изд-во Кемеровского ун-та, 1969.
8. В. С. Авдеевский, В. К. Грецов. Изв. АН СССР, МЖГ, 1970, № 6.
9. A. Stanbrook, A. R. C. S. P., 1961, № 555.
10. A. McCabe. The aeronautical quarterly, 1966, XVII, p. 3.
11. Н. А. Кондратьев. Тр. ЦАГИ, 1970, вып. 1175.
12. В. Я. Боровой, Е. В. Севастьянова. Тр. ЦАГИ, 1972, вып. 1410.
13. В. С. Демьяненко, В. А. Игумнов. В сб.: Аэрофизические исследования. Научные тр. Ин-та теоретической и прикладной механики СО АН СССР, 1972, вып. 1.
14. В. С. Демьяненко, В. А. Игумнов. В сб.: Аэрофизические исследования. Научные тр. Ин-та теоретической и прикладной механики СО АН СССР, 1973, вып. 2.
15. Д. М. Войтенко, А. И. Зубков, Ю. А. Панов. Изв. АН СССР, МЖГ, 1967, № 1.
16. J. Mager. J. of the aeronautical sciences, 1955, 22, № 3.
17. J. Delery, J. C. Le Balleur, M. Sirieix. Доклад на XIII Междунар. конгрессе по теоретической и прикладной механике. М., 1972.
18. E. S. Love. NASA TN, 1955, № 3601.
19. S. M. Bogdanoff. Princeton Univ. Rept., 1955, № 336.
20. D. R. Charpen, D. M. Kuehn, H. K. Larson. NASA TN, 1957, № 3869.
21. A. Heyser, F. Maurer. Z. Flugwiss., 1962, № 10.
22. R. Wilson, F. Maurer. AIAA J., 1971, 9, № 1.
23. E. E. Zukoski. AIAA J., 1967, 5, № 10.
24. M. J. Werle. NOZTR 68-5, 1968.

Н. М. БЫЧКОВ, Б. Л. ДУБРОВСКИЙ

РЕЗУЛЬТАТЫ ИЗМЕРЕНИЯ БОКОВЫХ СИЛ НА ВРАЩАЮЩИХСЯ МОДЕЛЯХ БОЛЬШОГО УДЛИНЕНИЯ В ДОЗВУКОВОМ ПОТОКЕ

Проведены тензометрические измерения двух аэродинамических характеристик — боковой силы (силы Магнуса) и момента этой силы на вращающихся моделях трех разновидностей (без оперения, с хвостовым оперением и с двумя оперениями, рис. 1) с удлинением $\lambda = 40$, при углах атаки $\alpha = 0 \div 42^\circ$ и скоростях потока $U_\infty = 30 \div 82$ м/с. Аналогичные исследования других авторов выполнялись главным образом на моделях относительно малого удлинения ($\lambda \leq 10$) и в ограниченном диапазоне углов атаки ($\alpha \leq 10 \div 20^\circ$) [1-4]. Наши испытания, которым предшествовала работа [5], проведены при условиях, приближающихся к экстремальным (большое удлинение, широкий диапазон углов атаки). Определение характерных особенностей и тенденций в поведении боковых сил при таких условиях имеет не только практическое, но и методическое значение.

Испытания выполнены в дозвуковой аэродинамической трубе Т-324 ИТПМ СО АН СССР при числах Рейнольдса (рассчитанных по длине модели) $Re_l = (1,3 \div 3,5) \cdot 10^6$. Параметр вращения (отношение окружной скорости модели к скорости потока U_∞) варьировался в пределах $e = 0,01 \div 0,17$. На рис. 1 схематично изображено устройство для проведения испытаний. Модели вращались (до 6000 об/мин) электродвигателем постоянного тока, оборудованным магнитоэлектрическим измерителем числа оборотов. Для измерения боковых сил и их моментов использовались двухкомпонентные тензометрические весы, сигнал с которых регистрировался электронным цифровым вольтметром Щ-1412, снабженным дополнительным усилителем. Чувствительность измерительной системы составляла около 0,5 мкВ.

Величина исследуемых сил и моментов определялись путем умножения соответствующего тарировочного коэффициента на полуразность показаний измерительного прибора при правом (+) и левом (-) вращении модели с одинаковым числом оборотов. Такие измерения (в принципе аналогичные описанным в [5]) выполнялись при числах оборотов $n = (1 \div 6) \cdot 10^6$ об/мин с шагом $\Delta n = 10^3$ об/мин. Для контроля точности вращения осуществлялось по схеме (+ - +), т. е. измерения при правом вращении дублировались. Суммарная погрешность измерений в основном не превышала 1-2 мкВ

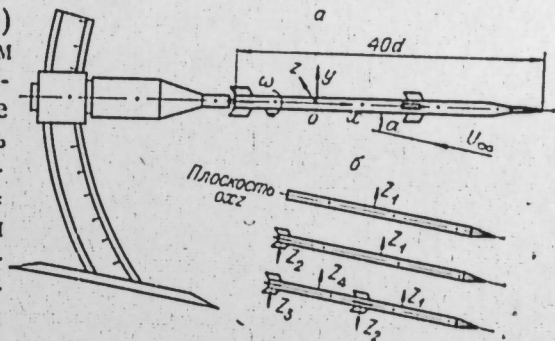


Рис. 1. Экспериментальная установка, исследуемые модели и составляющие боковые силы на них.

при величине полезного сигнала в пределах от нуля до $25 \div 30$ мкВ.

Из полученных экспериментальных данных следует, что боковые силы Z и их моменты M_y — относительно оси тензовесов или M_y — относительно донного среза модели) в большинстве рассмотренных случаев зависят от числа оборотов практически линейно (рис. 2). Поэтому целесообразно аппроксимировать их линейными функциями и результаты испытаний представить через коэффициенты наклона в безразмерном виде:

$$\bar{C}_z = C_z / \varepsilon, \quad \bar{m}_y = m_y / \varepsilon, \quad (1)$$

где $C_z = Z / qS$, $m_y = M_y / qSd$, $\varepsilon = \pi d n / 60 U_\infty$. Здесь d и S — соответственно диаметр и площадь поперечного сечения модели, q — скоростной напор;

Коэффициенты $\bar{C}_z$ и $\bar{m}_y$ (1) приведены на рис. 3 (модель без оперения) и рис. 4 (сравнение для трех моделей). Через экспериментальные точки проведены приближенные аппроксимирующие кривые $\bar{C}_z(\alpha)$ и $\bar{m}_y(\alpha)$. Положительным значениям $\bar{C}_z$ соответствует сила Z , направленная по оси oz (см. рис. 1). При рассмотренных условиях коэффициенты $\bar{C}_z$ и $\bar{m}_y$ являются функциями угла атаки α , числа Re (или скорости U_∞) и зависят от типа модели. Влияние параметра ε исключено в процессе линеаризации зависимостей $Z(n)$ и $M_y(n)$.

При анализе полученных данных следует прежде всего остановиться на такой важной особенности, как существенно немономотное поведение кривых $\bar{C}_z(\alpha)$ и $\bar{m}_y(\alpha)$, что имеет место для всех трех моделей. Наиболее характерно в этом отношении наличие двух минимумов, которые для модели без оперения расположены вблизи углов $\alpha = 15$ и 35° (рис. 3). Глубина минимумов возрастает с увеличением числа Re . Наоборот, при уменьшении Re имеется тенденция к появлению максимума в области $\alpha = 20^\circ$, что согласуется с данными работы [4] о том, что максимальное значение коэффициента силы Магнуса следует ожидать вблизи угла $\alpha = 19^\circ$.

Появление минимумов при $\alpha = 15$ и 35° представляет результат действия отрицательных сил, которые входят в состав суммарной боковой силы (величины, измеряемой тензовесами и имеющей при данных испытаниях, как правило, положительный знак). Аналогичное действие отрицательных сил было обнаружено в работах [6—9] при исследовании поперечного ($\alpha = 90^\circ$) обтекания вращающегося цилиндра при околокритических значениях числа Рейнольдса, которые приблизительно равны $Re_d = (0,5 \div 5) \cdot 10^5$. В этом случае при определенных скоростях вращения пограничный слой на одной стороне цилиндра остается ламинарным, а на другой — становится турбулентным; отрыв последнего

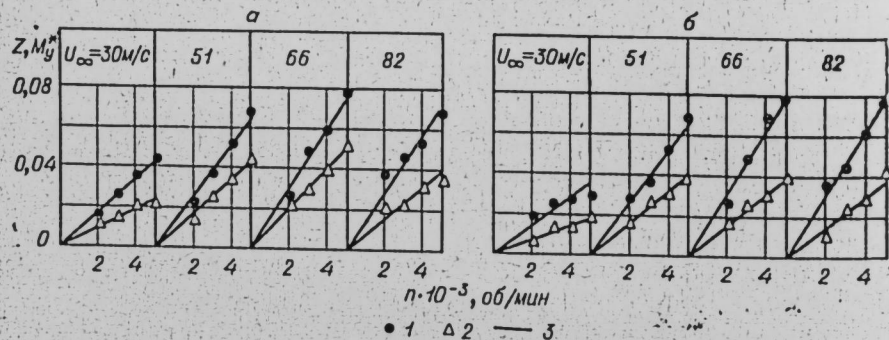


Рис. 2. Влияние скорости вращения на измеряемые величины Z и M_y при $\alpha = 25^\circ$. а) Модель без оперения, б) модель с двумя оперениями. 1 — Z , кг; 2 — M_y , кгм; 3 — результат осреднения.

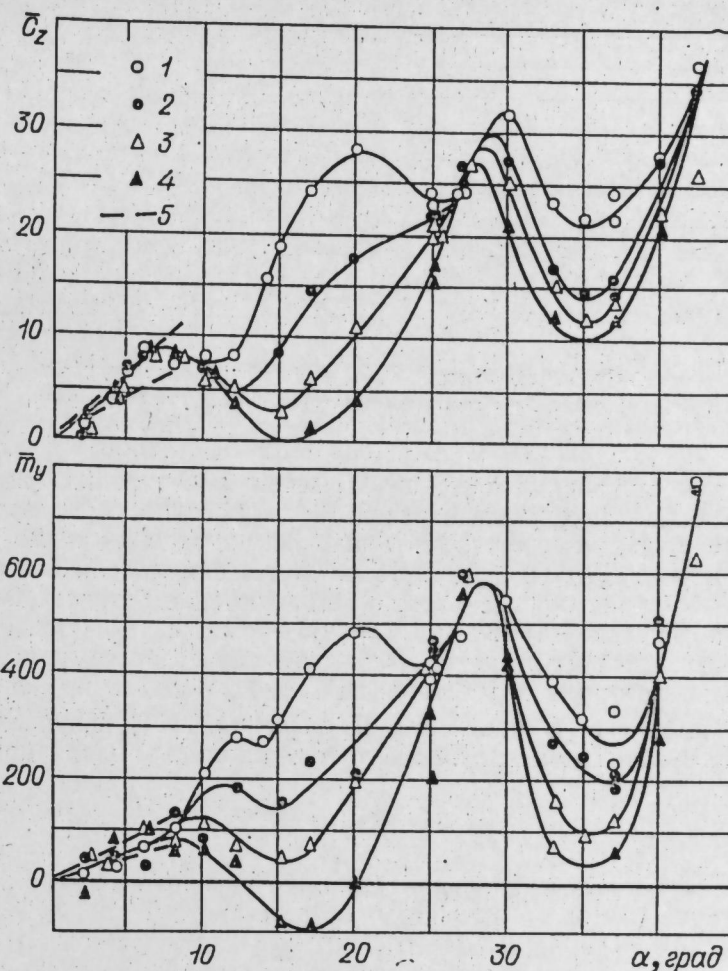


Рис. 3. Модель без оперения. Значения функций $\bar{C}_z(\alpha)$ и $\bar{m}_y(\alpha)$ при различных скоростях потока. U_∞ , м/с: 30 (1); 51 (2); 66 (3); 82 (4); по [10] (5).

происходит гораздо дальше по потоку. Возникающая при указанной асимметрии точек отрыва разность давлений в поперечном направлении создает отрицательную боковую силу, величина которой очень чувствительна к изменению числа Рейнольдса. Аналогичное влияние наблюдается и в исследованном случае ($\alpha \neq 90^\circ$). Поэтому можно утверждать, что природа упомянутых выше минимумов определяется асимметрией точек отрыва пограничного слоя, т. е. имеется определенная связь с течением около поперечно обтекаемого вращающегося цилиндра. Наличие продольной составляющей скорости потока при $\alpha \neq 90^\circ$ приводит к дополнительному усложнению картины обтекания из-за влияния асимметричных вихрей, сходящих с корпуса вращающейся модели. В результате наблюдается повторяемость резких изменений кривых $\bar{C}_z(\alpha)$ и $\bar{m}_y(\alpha)$. К сказанному следует добавить, что диапазон чисел Рейнольдса, вычисленных по диаметру модели d и нормальной скорости потока $U_0 = U_\infty \sin \alpha$, в исследованном случае составляет $Re_d = (0,3 \div 0,9) \cdot 10^5 \sin \alpha$, т. е. при $\alpha = 15$ и 35° находится несколько ниже указанных ранее критических значений для поперечно обтекаемого цилиндра. На появлении минимумов при этих условиях, по-видимому, сказывается дестабилизирующее влияние продольной составляющей скорости потока, которое приводит к более раннему переходу в пограничном слое.

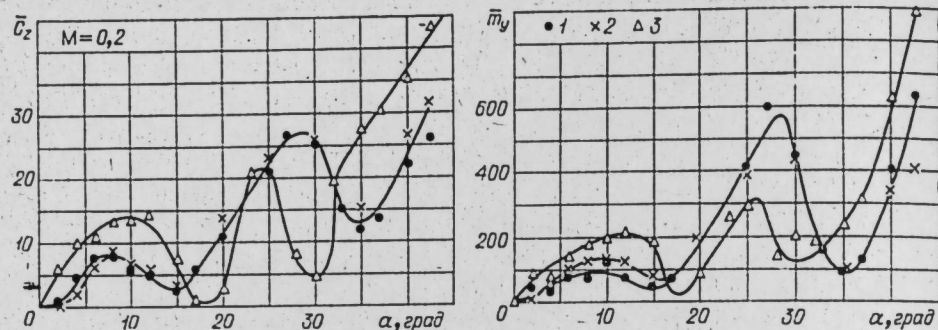


Рис. 4. Сравнение функций $\bar{C}_z(\alpha)$ и $\bar{m}_y(\alpha)$ для трех моделей. 1 — без оперения, 2 — с хвостовым оперением, 3 — с двумя оперениями.

Особое место занимает диапазон малых углов атаки ($\alpha=0 \div 8^\circ$), в котором экспериментальные результаты практически не зависят от числа Рейнольдса* и могут быть аппроксимированы едиными обобщающими кривыми $\bar{C}_z(\alpha)$ и $\bar{m}_y(\alpha)$. Более того, для модели без оперения при $\alpha=0 \div 5^\circ$ такие кривые хорошо согласуются с результатами измерений при числах $M=2 \div 4$, $Re_1=(1,6 \div 3,6) \cdot 10^7$ [5] (рис. 5). Этот экспериментальный факт не соответствует теоретическому выводу [4, 10], согласно которому коэффициенты $\bar{C}_z$ и $\bar{m}_y$ обратно пропорциональны величине $\sqrt{Re_1}$. В частности, из решения [10], полученного для безотрывного обтекания вращающегося длинного цилиндра при $\alpha \rightarrow 0$, следует

$$\bar{C}_z = 52,6 \lambda^2 \alpha / \sqrt{Re_1}. \quad (2)$$

На рис. 3, 5 расчетные значения (2) отмечены штриховыми линиями, причем верхней линии ($M=0,1$) соответствует число $Re_1=1,3 \cdot 10^6$, а нижней ($M=4$) — $Re_1=3,6 \cdot 10^7$. Отличие этих граничных значений

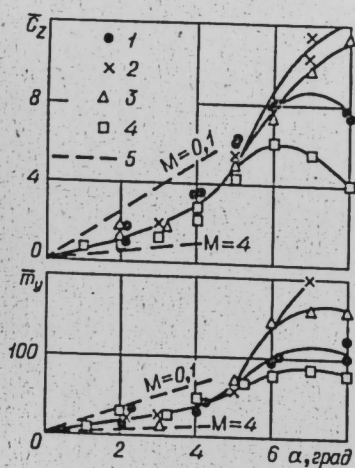


Рис. 5. Модель без оперения. Экспериментальные и расчетные значения $\bar{C}_z(\alpha)$ и $\bar{m}_y(\alpha)$ при $M < 1$ и $M > 1$. $M=0,1$ и $0,25$ (1); 2 (2); 3 (3); 4 (4); по [10] (5).

* Некоторый разброс данных для $\bar{m}_y$ связан не с влиянием числа Рейнольдса, а со способом определения этой величины, при котором погрешности исходных величин Z и M_y могут складываться.

друг от друга и от экспериментальных точек достаточно заметно. Слабое влияние числа Рейнольдса на величину $\bar{C}_z$ при малых углах атаки косвенно подтверждается также сравнением с результатами измерений для поперечно обтекаемого цилиндра. По данным работ [6—9], коэффициент $\bar{C}_z$ перестает зависеть от числа Рейнольдса, если параметр вращения, отнесенный к нормальной скорости потока, превышает $0,5 \div 0,7$. При $\alpha \neq 90^\circ$ этот параметр равен $\epsilon_0 = \epsilon / \sin \alpha$, откуда видно, что при малых углах атаки ($\alpha < 8^\circ$) он может быть больше указанных выше значений.

Отмеченные особенности поведения боковых сил на модели без оперения свидетельствуют о значительной роли отрывов и вихрей, влияние которых при больших удлинениях моделей начинает сказываться с предельно малых углов атаки.

На рис. 4 приведено сравнение результатов испытаний для трех исследованных

моделей при скорости потока $U_\infty = 66$ м/с ($M=0,2$; $Re_1=2,8 \cdot 10^6$). Из графиков видно, что наличие только одного хвостового оперения при относительно малых его размерах и большой толщине пограничного слоя не оказывает заметного влияния на величину суммарной боковой силы. Однако установка такого же по размерам оперения в центральной части корпуса (модель с двумя оперениями, рис. 1) приводит к очень сильному изменению зависимостей $\bar{C}_z(\alpha)$ и $\bar{m}_y(\alpha)$ во всем исследованном диапазоне углов атаки. Позади центрального оперения при этом возникает сила Z_4 (см. рис. 1, б), которая по абсолютной величине может в несколько раз превосходить любую другую составляющую силу. Этот эффект был обнаружен также Бентоном [11] на модели с удлинением $\lambda=17,8$ и расстоянием между оперениями $\Delta x=7,2d$. По данным Бентона, основная причина эффекта заключается в интерференции оперений через систему вихрей. Однако в рассматриваемом случае ($\lambda=40$) расстояние между оперениями было гораздо больше и составляло $\Delta x=23,5d$, что существенно уменьшало интерференцию оперений.

Отсюда следует, что указанный Бентоном источник появления большой силы представляет частный случай взаимодействия вихрей, сходящих с центрального оперения, с течением во всей расположенной ниже области.

В заключение отметим некоторые особенности поведения координаты точки приложения суммарной боковой силы $\bar{x}_z = \bar{x}_z / l = \bar{m}_y / \lambda \bar{C}_z$, отсчитываемой от донного среза. Для модели без оперения (рис. 6) при углах атаки $\alpha=0 \div 25^\circ$ координата $\bar{x}_z$ слабо зависит от числа Рейнольдса. При этом в области $\alpha=0 \div 10^\circ$ она близка к значению $\bar{x}_z \approx 0,3$, полученному Мартином [10]. Однако вблизи $\alpha=35^\circ$ (т. е. в области одного из рассмотренных выше минимумов) влияние числа Рейнольдса оказывается достаточно сильным, причем с увеличением Re_1 координата $\bar{x}_z$ смещается непосредственно к донному срезу модели. Такое поведение суммарных характеристик отражает неравномерное распределение местных боковых сил, которые в различных сечениях модели могут изменять не только величину, но и знак.

Поведение $\bar{x}_z$ для других моделей в принципе не отличается от изложенного.

ВЫВОДЫ

Получены экспериментальные данные, характеризующие поведение суммарных боковых сил на вращающихся осесимметричных телах большого удлинения в дозвуковом потоке при различных углах атаки и околоскритических значениях числа Рейнольдса. Обнаружено качественное соответствие с известными экспериментальными данными для поперечно обтекаемого вращающегося цилиндра. Однако имеется также ряд существенных отличий, вызванных влиянием продольной составляющей скорости потока и взаимодействием вихрей с течением в расположенных ниже областях.

При малых углах атаки обнаружено отличие от теоретических результатов как для коротких тел вращения, так и для длинных цилиндров.

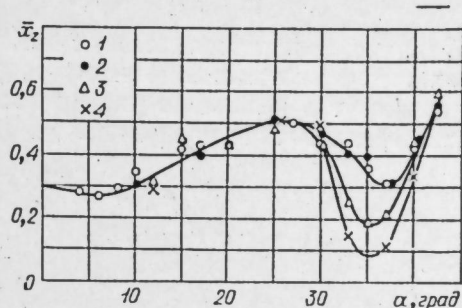


Рис. 6. Модель без оперения. Координаты точек приложения силы Z при различных скоростях потока.

U_∞ , м/с = 30 (1); 51 (2); 66 (3); 82 (4).

Наличие дополнительного источника вихрей в виде оперения, установленного в центральной части корпуса, приводит к появлению сил, которые могут в несколько раз превосходить суммарные боковые силы на неоперенном теле вращения.

Институт теоретической и прикладной механики
СО АН СССР,
Новосибирск

Поступила в редакцию
8/VII 1974

ЛИТЕРАТУРА

1. В. М. Свенсон. Техн. мех., 1961, № 3.
2. А. С. Платоу. Ракетная техника и космонавтика, 1965, 3, № 1.
3. С. А. Никитин. Изв. АН ЛатвССР, сер. физ. и техн. наук, 1967, № 6.
4. Вон, Рейс. Ракетная техника и космонавтика, 1973, 11, № 10.
5. Н. М. Бычков, Б. Л. Дубровский. Изв. Сиб. отд. АН СССР, сер. техн. наук, 1974, № 3, вып. 1.
6. E. Krahn. J. of the Aeronautical Sciences, 1956, N 4.
7. R. T. Griffiths, C. Y. Ma. The Aeronautical J., 1969, 73, N 702.
8. Clive A. J. Fletcher. J. Aircraft, 1972, 9, N 12.
9. Hideo Tanaka, Susumu Nagano. Bulletin of JSME, 1973, 16, N 92.
10. J. C. Martin. The Aeronautical J., 1957, 24, N 6.
11. E. R. Benton. J. of the Aerospace Sciences, 1962, 29, N 11.

В. Е. НАКОРЯКОВ, Н. С. САФАРОВА

ПРОСТАЯ ФОРМУЛА ДЛЯ ОПРЕДЕЛЕНИЯ ПОЛОЖЕНИЯ ПОВЕРХНОСТИ РАЗДЕЛА ФАЗ ПРИ КОНДЕНСАЦИИ ЗАТОПЛЕННОЙ СТРУИ ПАРА

Вопросу конденсации затопленной струи пара в неограниченном объеме жидкости посвящены теоретическая [1] и экспериментальная [2] работы. В работе [1] задача решена на основе гипотезы Прандтля о постоянстве пути смещения в поперечном направлении струи, тепловая задача не рассматривалась, профиль температуры в пограничном слое принимался линейным. В настоящей работе исследуется конденсация затопленной струи пара с большой скоростью истечения при больших недогревах жидкости.

Пусть плоскопараллельная струя насыщенного пара, имеющая равномерную скорость W и температуру T_0 , истекает из сопла в холодную жидкость с температурой $T_{ж}$. Пар мгновенно конденсируется, образовавшийся пограничный слой в практически интересных случаях оказывается турбулентным. При предположении о полном увлечении поверхности раздела паром, что возможно при интенсивной конденсации, для определения положения поверхности конденсации имеем соотношения (рис. 1)

$$\operatorname{tg} \beta = -\frac{\partial h}{\partial X} = \frac{V_1}{W} \sqrt{1 + \left(\frac{\partial h}{\partial X}\right)^2}, \quad (1)$$

$$U_1 = W \cdot \cos \beta = \frac{W}{\sqrt{1 + \left(\frac{\partial h}{\partial X}\right)^2}}. \quad (2)$$

Здесь β — угол между плоскостью конденсации и направлением основного потока пара; $2h$ — ширина «конуса конденсации»; U_1 — скорость межфазовой границы; V_1 — скорость конденсации по пару, нормальная фронту конденсации.

Условие теплового взаимодействия на поверхности раздела фаз имеет вид

$$r\rho V_1 = -\lambda \left(\frac{\partial T}{\partial y}\right)_{y=0}, \quad (3)$$

где ρ — плотность пара; r — теплота конденсации; $\lambda = c_p \rho_{ж} \nu(x)$ — теплопроводность жидкости; c_p , $\rho_{ж}$ — соответственно теплоемкость и плотность жидкости.

Для определения скорости конденсации запишем уравнение теплового пограничного слоя во фронте конденсации в системе координат x, y [3] в предположении постоянства

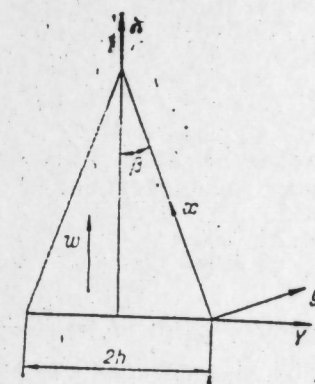


Рис. 1. Схема пограничного слоя.

продольной составляющей скорости в пределах слоя:

$$U_1 \frac{\partial T}{\partial x} = v(x) \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \quad (4)$$

с граничными условиями

$$\begin{aligned} y=0, & \quad T=T_0, \\ y=\infty, & \quad T=T_{ж}. \end{aligned} \quad (5)$$

Для коэффициента турбулентной теплопроводности возьмем обычное для струйных течений соотношение Прандтля

$$v(x) = \kappa \delta U_1,$$

где κ — эмпирическая константа; δ — ширина теплового пограничного слоя. При введении переменных подобия

$$\eta = \frac{y}{2\sqrt{\kappa\xi}}, \quad \Theta = \frac{T - T_{ж}}{T_0 - T_{ж}}, \quad (6)$$

где $\xi = \int_0^x \delta dx$, задача сведется к интегрированию обыкновенного дифференциального уравнения

$$\Theta'' + 2\eta\Theta' = 0. \quad (7)$$

Для безразмерного распределения температуры граничные условия запишутся следующим образом:

$$\begin{aligned} \eta=0, & \quad \Theta=1, \\ \eta=\infty, & \quad \Theta=0. \end{aligned} \quad (8)$$

Решение уравнения (7) имеет вид

$$\Theta = 1 - \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^\eta \exp(-t^2) dt. \quad (9)$$

При $\eta=2$ интеграл вероятности равен 1, тогда $\delta=8\kappa x$. Такого вида зависимость для ширины пограничного слоя типична для случая турбулентного переноса в струях.

Поток тепла к поверхности раздела фаз

$$q = \frac{4}{\sqrt{\pi}} \kappa c_p \rho_{ж} U_1 (T_0 - T_{ж}).$$

Тогда, согласно (3), компонента скорости пара, нормальная к поверхности конденсации,

$$V_1 = \frac{4}{\sqrt{\pi}} \kappa \gamma U_1 K,$$

где $\gamma = \rho_{ж}/\rho$; $K = \frac{c_p (T_0 - T_{ж})}{r}$ — критерий фазового превращения. Положение поверхности конденсации определяется соотношением

$$\operatorname{tg} \beta = \frac{4}{\sqrt{\pi}} \kappa \gamma K. \quad (10)$$



Рис. 2. Фотография «конуса конденсации».

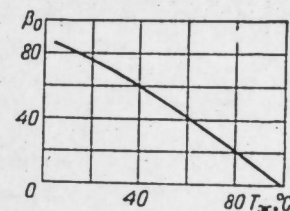


Рис. 3. Изменение полного угла «конуса конденсации» в зависимости от температуры жидкости, °C.

Полученное решение задачи (10) путем подбора эмпирической константы можно привести в согласие с опытом. На рис. 2 представлена фотография «конуса конденсации», наблюдаемого в эксперименте для $K=0,098$. На рис. 3 приведены результаты расчета полного угла «конуса конденсации» при $\kappa=0,0014$, $\gamma=1670$.

Институт теплофизики
СО АН СССР,
Новосибирск

Поступила в редакцию
16/X 1974

ЛИТЕРАТУРА

1. Б. Ф. Гликман. Изв. АН СССР, ОТН, 1957, № 2.
2. Б. Ф. Гликман. Изв. АН СССР, ОТН, Энергетика и автоматика, 1959, № 1.
3. Г. Н. Абрамович. Теория турбулентной струи. М., Физматгиз, 1960.

О. Н. ЛЕБЕДЕВ

НЕКОТОРЫЕ ТЕРМОДИНАМИЧЕСКИЕ ОСОБЕННОСТИ ПРОЦЕССОВ СМЕСЕОБРАЗОВАНИЯ

При впрыске топлива в цилиндре дизеля образуется по меньшей мере трехкомпонентная (воздух — пары топлива — капли топлива) двухфазная (смесь паров топлива и воздуха — капли топлива) среда. Тепловые процессы, происходящие в такой смеси, не могут быть описаны уравнениями термодинамики парожидкостных потоков [1, 2 и др.]. Это подтверждается хотя бы тем, что состояние парожидкостной среды вполне определяется двумя независимыми переменными. Чтобы определить состояние парогазовой смеси, требуются уже три параметра.

Последнее условие учитывается термодинамикой паровоздушной среды [1, 3—6 и др.]. Однако эти способы не принимают во внимание присутствия в смеси самих частиц примесей, а следовательно, и теплового взаимодействия фаз. В связи с этим определенный интерес вызывают работы [7—9], в которых получены уравнения политропа для двухфазной смеси, но без учета фазовых переходов.

Таким образом, известные термодинамические методы не описывают всех явлений, имеющих место в процессах смесеобразования. Возникает задача получения более общих уравнений, которые бы учитывали соотношение компонентов рабочего тела, тепловое взаимодействие фаз и фазовые превращения. При решении этой задачи наиболее строгим является путь, основанный на использовании уравнений энергии полифазной среды. Такая попытка была сделана в [10]. В данной работе эти исследования продолжены. Рассмотрим стационарное движение двухфазного потока. При этом введем следующие предположения.

1. Состояние компонентов изменяется квазистатически, т. е. поток все время находится в термодинамическом равновесии.
2. К газовым компонентам могут быть применены закономерности, полученные для идеального газа. Однако вязкостными и турбулентными членами уравнений энергии пренебрегать не будем.
3. Теплообмен с внешней средой выражается через внутренние источники и стоки.
4. Поток смеси считается одномерным, т. е. движущимся вдоль оси x_1 .
5. Частицы примеси мелкодисперсны и равномерно распределены по сечению потока.

Принимая во внимание сделанные предположения и рассматривая случай, когда газ и газовая присадка имеют одинаковые физические свойства, преобразуем уравнение тепла, полученное в [11] для двухфазных сред, следующим образом:

$$c_{v1} dT_1 + p dv_1 + p v_1 \frac{dG_1}{G_1} + p v_2 \frac{dG_2}{G_1} + c_2 \frac{G_2}{G_1} dT_2 - \Delta u \frac{dG_1}{G_1} - \frac{(w_{11} - w_{21}) \Phi_1}{G_1} dx_1 - \frac{1}{G_1} (F^* + q) dx_1 = 0, \quad (1)$$

где c_{v1} — изохорная теплоемкость газа; c_2 — теплоемкость жидкости; T — температура; p — давление; v — удельный объем; G_1, G_2 — массовые удельные расходы газа и жидкости; $\Delta u = u_2 - u_1$ — разность внутренних энергий жидкого и газового компонентов; w — скорость движения; Φ_1 — сила взаимодействия компонентов; q — мощность источников и стоков тепла; F^* — величина, объединяющая вязкие и турбулентные члены уравнения тепла [11]. Индексы 1, 2 указывают на то, что величины относятся соответственно к газовому и жидкому компонентам среды.

Введем условную теплоемкость c^* процесса и обозначим

$$-c^* dT_1 = c_2 \frac{G_2}{G_1} dT_2 - \Delta u \frac{dG_1}{G_1} - \frac{(w_{11} - w_{21}) \Phi_1}{G_1} dx_1 - \frac{1}{G_1} (F^* + q) dx_1. \quad (2)$$

Тогда уравнение (1) примет вид

$$c_{v1} dT_1 + p dv_1 + p v_1 \frac{dG_1}{G_1} + p v_2 \frac{dG_2}{G_1} - c^* dT_1 = 0. \quad (3)$$

Если учесть, что $u + pv = i$, то выражение (3) можно записать следующим образом:

$$c_{v1} dT_1 + p dv_1 - c^{**} dT_1 = 0, \quad (4)$$

где

$$-c^{**} dT_1 = c_2 \frac{G_2}{G_1} dT_2 - \Delta i \frac{dG_1}{G_1} - \frac{(w_{11} - w_{21}) \Phi_1}{G_1} dx_1 - \frac{1}{G_1} (F^* + q) dx_1. \quad (5)$$

В выражениях (3), (4) все члены относятся к газовому компоненту, и поэтому при дальнейших выводах индекс 1 опускается.

Путем несложных преобразований с использованием уравнения состояния и выражения $R = c_p - c_v$ уравнениям (3), (4) можно придать такой вид:

$$\left(\frac{c^* - c_p}{c^* - c_v} \right) p dv + v dp - T dR + \left(\frac{c_p - c_v}{c^* - c_v} \right) p v \frac{dG}{G} = 0, \quad (6)$$

$$\left(\frac{c^{**} - c_p}{c^{**} - c_v} \right) p dv + v dp - T dR = 0. \quad (7)$$

Введя относительный вес $\xi = \frac{G_1}{G_{10}}$, где G_{10} — первоначальный вес (расход) газового компонента, обозначив

$$n^* = \frac{c^* - c_p}{c^* - c_v}, \quad (8)$$

$$n^{**} = \frac{c^{**} - c_p}{c^{**} - c_v}, \quad (9)$$

разделив уравнения (6), (7) на $p v$ и используя уравнение состояния, получим

$$n^* \frac{dv}{v} + \frac{dp}{p} - \frac{dR}{R} + (n^* - 1) \frac{d\xi}{\xi} = 0, \quad (10)$$

$$n^{**} \frac{dv}{v} + \frac{dp}{p} - \frac{dR}{R} = 0. \quad (11)$$

Если принять величины n^*, n^{**} постоянными в течение всего термодинамического процесса или на некоторой его части, то равенства (10), (11) могут быть проинтегрированы. В результате получим

$$\frac{p v^{n^*} \xi^{n^*-1}}{R} = \text{const}, \quad (12)$$

$$\frac{p v^{n^{**}}}{R} = \text{const}. \quad (13)$$

Выражения (12), (13) представляют упрощенные уравнения политропного процесса для двухфазной среды. Тем не менее это более общие уравнения, чем обычное уравнение вида $p v^n = \text{const}$, так как они учитывают фазовые переходы и диссипативное тело.

Как известно, газовая постоянная смеси может быть выражена так:

$$R = R_0 \frac{1}{\xi} + R_n \frac{\xi - 1}{\xi}, \quad (14)$$

где R_0, R_n — постоянные воздуха и паров топлива.

Подставляя (14) в (12), (13), получим

$$\frac{p v^{n^*} \xi^{n^*-1}}{R_0 \frac{1}{\xi} + R_n \frac{\xi - 1}{\xi}} = \text{const}, \quad (15)$$

$$\frac{p v^{n^{**}}}{R_0 \frac{1}{\xi} + R_n \frac{\xi - 1}{\xi}} = \text{const}. \quad (16)$$

Уравнения (15), (16) сложны и неудобны для анализа.

В значительно меньшей степени этими недостатками обладают зависимости, где количество рабочего тепла выражено в молях, т. е.

$$p(\mu v)^{n^*} \varphi^{n^*-1} = \text{const}, \quad (17)$$

$$p(\mu v)^{n^{**}} = \text{const}. \quad (18)$$

Здесь (μv) — объем моля; $\varphi = \frac{M}{M_0}$, M, M_0 — текущее и первоначальное число молей газа.

На основании уравнения (3) можно записать выражение первого закона термодинамики для двухфазной среды:

$$dq = (\mu c_v) dT + p d(\mu v) + p(\mu v) \frac{d\varphi}{\varphi}. \quad (19)$$

Если за основу взять выражение (4), то уравнение первого закона термодинамики можно написать по-иному, т. е.

$$dq = (\mu c_v) dT + p d(\mu v), \quad (20)$$

где $dq = \mu c^* dt$.

По внешнему виду выражение (20) идентично уравнению первого закона термодинамики для монофазной среды. Однако величина μc^* , согласно (5), имеет значительно более сложную структуру.

Рассмотрим политропный процесс изменения состояния «парогаза» в трехкомпонентной системе газ — жидкость — пары жидкости. Для такой среды уравнения тепла (с учетом ранее сделанных предположений) запишется так:

$$\begin{aligned} & c_{v1} dT_1 + c_{v2} \frac{G_2}{G_1} dT_2 + c_{v3} \frac{G_3}{G_1} dT_3 + p dv_1 + \\ & + p \frac{G_3}{G_1} dv_3 + u_1 \frac{dG_1}{G_1} + u_2 \frac{dG_2}{G_1} + u_3 \frac{dG_3}{G_1} + p v_1 \frac{dG_1}{G_1} + \\ & + p v_2 \frac{dG_2}{G_1} + p v_3 \frac{dG_3}{G_1} - \frac{Q}{G_1} dx_1 = 0, \end{aligned} \quad (21)$$

где

$$Q = (\omega_{11} - \omega_{21}) \Phi_1 + F^* + q.$$

Будем считать, что индекс $l=1$ относится к газовой среде, $l=2$ — к жидкой, $l=3$ — к паровой.

Путем несложных преобразований выражению (21) можно придать следующий вид:

$$n^* \frac{d\left(v_1 + \frac{G_2}{G_1} v_2\right)}{v_1 + \frac{G_2}{G_1} v_2} + \frac{dp}{p} - \frac{d\left(R_1 + R_2 \frac{G_2}{G_1}\right)}{R_1 + R_2 \frac{G_2}{G_1}} = 0, \quad (22)$$

где

$$n^* = \frac{c^* - \left(c_{p1} + c_{p2} \frac{G_2}{G_1}\right)}{c^* - \left(c_{v1} + c_{v2} \frac{G_2}{G_1}\right)}, \quad (23)$$

а величину c^* определить с помощью уравнения

$$-c^* dT = c_2 \frac{G_2}{G_1} dT_2 - \Delta i \frac{dG_2}{G_1} - \frac{Q}{G_1} dx_1.$$

Принтегрировав (22), получим

$$\frac{p \left(v_1 + v_2 \frac{G_2}{G_1}\right)^{n^*}}{R_1 + R_2 \frac{G_2}{G_1}} = \text{const}. \quad (24)$$

Для моля газа выражение (24) запишется так:

$$p(\mu v)^{n^*} (1 + \psi)^{n^*-1} = \text{const}, \quad (25)$$

где $\psi = \frac{M_2}{M_1}$ — отношение числа молей пара к числу молей газа.

Выражения (24), (25) являются уравнениями политропного процесса для трехкомпонентной среды. На основании уравнения (21) можно записать выражения первого закона термодинамики для трехкомпонентной системы:

$$dq = \left(c_{v1} + c_{v2} \frac{G_2}{G_1}\right) dT_1 + p d\left(v_1 + v_2 \frac{G_2}{G_1}\right), \quad (26)$$

$$dq = (\mu c_{v1} + \mu c_{v2} \psi) dT_1 + p d[\mu v (1 + \psi)]. \quad (27)$$

Рассмотрим некоторые частные случаи применения выражений (17) — (20) и (23) — (27) к исследованию термодинамических процессов. Предположим, что имеется система, состоящая из идеального газа со взвешенными в нем частицами твердого материала. При этом будем полагать, что система адиабатически изолирована, а объем частиц остается постоянным. В этом случае выражение (5) запишется так:

$$-c^{**} dT_1 = c_2 \frac{G_2}{G_1} dT_2.$$

С учетом этого формула (9) примет вид

$$n_1 = \frac{-c_2 \frac{G_2}{G_1} \frac{dT_2}{dT_1} - c_{p1}}{-c_2 \frac{G_2}{G_1} \frac{dT_2}{dT_1} - c_{v1}}. \quad (28)$$

Если теперь разделить числитель и знаменатель правой части зависимости (28) на c_{v1} и обозначить $\frac{G_2}{G_1} = \mu$, то получим выражение,

выведенное в [7] для системы газ — твердые частицы:

$$n_1 = \frac{k + \mu \frac{c_2}{c_{v1}} \frac{dT_2}{dT_1}}{1 + \mu \frac{c_2}{c_{v1}} \frac{dT_2}{dT_1}}, \quad (29)$$

где $k = \frac{c_{p1}}{c_{v1}}$ — показатель адиабаты.

При равенстве температур газа и частиц $T_2 = T_1$, $dT_2 = dT_1$ из уравнения (29) вытекает формула, полученная в [8]:

$$n_0 = \frac{k + \mu \frac{c_2}{c_{v1}}}{1 + \mu \frac{c_2}{c_{v1}}}. \quad (30)$$

Большой интерес для анализа системы газ — жидкость — пары жидкости представляет так называемый псевдоадиабатный процесс, который характеризуется отсутствием внешнего теплообмена, т. е. $q = 0$. С учетом последнего, а также пренебрегая величинами $(\omega_{11} - \omega_{21})\Phi_1$ и F^* , запишем выражение (23) следующим образом:

$$n^* = k^* = \frac{c^* - \left(c_{p1} + c_{p2} \frac{G_2}{G_1}\right)}{c - \left(c_{v1} + c_{v2} \frac{G_2}{G_1}\right)}, \quad (31)$$

где

$$-c^*dT = c_2 \frac{G_2}{G_1} dT_2 - \Delta i \frac{dG_3}{G_1}. \quad (32)$$

Из (32) видно, что в зависимости от физических свойств компонентов, интенсивности фазовых превращений, внутреннего теплообмена и т. д. величина c^* может принимать различные значения. В зависимости от этого коэффициент псевдоадиабаты будет изменяться в интервале от 0 до $\pm\infty$.

Рассмотрим один из частных случаев такого процесса. Если обозначить

$$v_1 + v_2 \frac{G_2}{G_1} = V,$$

$$R_1 + R_2 \frac{G_2}{G_1} = \dot{R}$$

и пренебречь теплотой подогрева жидкого компонента, то из уравнения (24) можно получить выражение, выведенное в [6]:

$$\frac{pV^{n_2}}{R} = \text{const}. \quad (33)$$

Однако здесь

$$n_2 = \frac{c_p + \Delta i \xi}{c_v + \Delta i \xi}, \quad (34)$$

где $\xi = \frac{dG_3}{G_1 dT_1}$ — интенсивность фазового перехода; $c_p = c_{p1} + c_{p2} \frac{G_2}{G_1}$ — изобарная теплоемкость паровоздушной смеси; $c_v = c_{v1} + c_{v2} \frac{G_2}{G_1}$ — изохорная теплоемкость той же среды; $\Delta i = i_3 - i_2$.

Новосибирский институт инженеров
водного транспорта

Поступила в редакцию
30/1 1974

ЛИТЕРАТУРА

1. М. П. Вукалович, И. И. Новиков. Техническая термодинамика. Госэнергоиздат, 1956.
2. М. Д. Вайсман. Термодинамика парожидкостных потоков. М., «Энергия», 1967.
3. F. Bosnjakovich. Forschung, 1938, 4, № 6.
4. H. Schroder. BWK, 1958, 10, № 1.
5. Г. А. Михайловский. Термические расчеты процессов парогазовых смесей. Машгиз, 1962.
6. Г. А. Михайловский. ИФЖ, 1966, XV, № 1.
7. В. С. Носов, Г. П. Ясников, Н. И. Сыромятников. Матер. шестой между-
зовской конф. по вопросам испарения, горения и газовой динамики дисперсных си-
стем. Одесса, 1968.
8. И. Т. Эльперин, В. А. Минков. ИФЖ, 1964, VII, № 9, 102.
9. S. L. Soo. Gas-solid flow. Eng. research publ, № 45. Single and multi-component flow
processes, Rutgers, 1965.
10. Ю. Т. Борщевский, В. В. Капустин, О. Н. Лебедев. Тр. НИИВТ, Новоси-
бирск, 1968, вып. 37.
11. Ю. Т. Борщевский, О. Н. Лебедев. Тр. НИИВТ, Новосибирск, 1966, вып. 26.

М. Я. ШТЕЙНБЕРГ, Н. А. РУБЦОВ

ПРИБЛИЖЕННОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ
ТЕМПЕРАТУРНОГО РАСПРЕДЕЛЕНИЯ
В ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ОБОЛОЧКЕ

В ряде практически важных инженерно-конструкторских решений приходится сталкиваться с вопросами эффективного аналитического расчета температурных распределений в системах с цилиндрическими оболочками, работающих в условиях произвольного внешнего подвода потока теплового излучения.

Оценим распределение температур в длинной цилиндрической оболочке, внешняя поверхность которой облучается переменным по угловой координате φ радиационным потоком.

В работе приняты следующие обозначения: R — радиус кривизны срединной поверхности оболочки; d — толщина стенки оболочки; λ — коэффициент теплопроводности; α_1, α_2 — коэффициент внешней и внутренней поверхностей оболочки; ϵ_1, ϵ_2 — степени черноты внешней и внутренней поверхностей оболочки ($\epsilon_1 = a_1$; $\epsilon_2 = a_2$); ϑ_1, ϑ_2 — температура окружающей среды вне и внутри оболочки; σ_0 — постоянная Стефана — Больцмана; a_s — поглощательная способность в коротковолновой области спектра; E_1, E_2 — плотность длинноволнового потока излучения; E_s — плотность коротковолнового потока излучения; W — мощность источника тепловыделения; E_c — полусферическая плотность собственного излучения; $\rho(N)$ — отражательная способность в точке N ; $Q(MN)$ — ядро интегрального уравнения; R_T — тепловое сопротивление изоляции; t_n — температура поверхности изоляции.

Граничные условия на внешней и внутренней поверхностях оболочки запишем в следующем виде:

$$\lambda \frac{\partial t}{\partial r} + \alpha_1(t - \vartheta_1) + \epsilon_1 \sigma_0 t^4 - a_1 E_1(\varphi) - a_s E_s(\varphi) = 0 \quad \text{при } r = R + \frac{d}{2}, \quad (1)$$

$$-\lambda \frac{\partial t}{\partial r} + \alpha_2(t - \vartheta_2) + \epsilon_2 \sigma_0 t^4 - a_2 E_2(\varphi) = 0 \quad \text{при } r = R - \frac{d}{2}. \quad (2)$$

Предположив, что неравномерность температурного поля в оболочке не превосходит нескольких десятков градусов, линеаризуем граничные условия (1) и (2) с помощью подстановки

$$\sigma_0 t^4 = \gamma t - \beta.$$

С учетом линеаризации граничные условия (1) — (2) преобразуем к следующему виду:

$$\lambda \frac{\partial t}{\partial r} + (\alpha_1 + \gamma \epsilon_1) t - \alpha_1 \vartheta_1 - \epsilon_1 \beta - E_a(\varphi) = 0 \quad \text{при } r = R + \frac{d}{2}. \quad (1')$$

$$-\lambda \frac{\partial t}{\partial r} + (\alpha_2 + \gamma \epsilon_2) t - \alpha_2 \vartheta_2 - \epsilon_2 [\beta + E_2(\varphi)] = 0 \quad \text{при } r = R - \frac{d}{2}. \quad (2')$$

где

$$E_a(\varphi) = a_1 E_1(\varphi) + a_s E_s(\varphi).$$

Для оболочек, как известно, справедливо неравенство $R \gg d$. В связи с этим имеет смысл осреднить температурное поле по r .

Принтегрировав классическое уравнение теплопроводности в цилиндрических координатах

$$\frac{\partial^2 t}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial t}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 t}{\partial \varphi^2} = 0$$

по r в пределах от $R - \frac{d}{2}$ до $R + \frac{d}{2}$ и учитывая высказанные выше соображения, получим дифференциальное уравнение, описывающее распределение температур в цилиндрической оболочке:

$$\frac{\lambda d}{R^2} \frac{d^2 T}{d\varphi^2} - [\alpha_1 + \alpha_2 + \gamma(\epsilon_1 + \epsilon_2)] T + \alpha_1 \vartheta_1 + \alpha_2 \vartheta_2 +$$

$$+ \beta(\epsilon_1 + \epsilon_2) + a_s E_s(\varphi) + E_a(\varphi) = 0, \quad (3)$$

где

$$T = \frac{1}{d} \int_{R - \frac{d}{2}}^{R + \frac{d}{2}} t(r, \varphi) dr. \quad (4)$$

Граничные условия для уравнения (3) имеют вид

$$T|_{\varphi=0} = T|_{\varphi=2\pi}, \quad \frac{dT}{d\varphi}|_{\varphi=0} = \frac{dT}{d\varphi}|_{\varphi=2\pi}. \quad (5)$$

Полусферическая плотность излучения, падающего на элементарную площадку с точкой M на внутренней поверхности оболочки, удовлетворяет интегральному уравнению [1]

$$E_2(M) - \int \rho(N) E_2(N) Q(M, N) dF_N = \int E_c(N) Q(M, N) dF_N. \quad (6)$$

Здесь $Q(M, N)$ — ядро интегрального уравнения, которое в общем случае произвольной излучающей системы записывается следующим образом:

$$Q(M, N) = \frac{\cos \Theta_M \cos \Theta_N}{\pi r_{MN}^2},$$

где Θ_M и Θ_N — углы, образованные лучом r_{MN} , соединяющим точки M и N , и нормальными к площадкам, соответственно в точках M и N .

Пользуясь элементарными соотношениями аналитической геометрии в пространстве, можно показать, что в рассматриваемом случае цилиндрической конфигурации системы

$$Q(M, N) = \frac{4R^2 \sin^2 \frac{\varphi' - \varphi}{2}}{\pi \left(z^2 + 4R^2 \sin^2 \frac{\varphi' - \varphi}{2} \right)^{3/2}},$$

где φ — угловая координата точки M ; φ' — угловая координата точки N ; z — координата вдоль оболочки.

Принимая во внимание то обстоятельство, что полусферические плотности падающего и собственного излучений от координаты z не зависят и что в цилиндрических координатах элементарная площадка определяется как

$$dF_N = R d\varphi_1 dz,$$

запишем интегральное уравнение (6) в виде

$$E_2(\varphi) - \frac{4R^2}{\pi} \int_{\varphi}^{\varphi+2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \rho(\varphi') E_2(\varphi') \frac{\sin^4 \frac{\varphi' - \varphi}{2}}{(z^2 + 4R^2 \sin^2 \frac{\varphi' - \varphi}{2})^2} \times d\varphi' dz =$$

$$= \frac{4R^2}{\pi} \int_{\varphi}^{\varphi+2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} E_c(\varphi') \frac{\sin^4 \frac{\varphi' - \varphi}{2}}{z^2 + 4R^2 \sin^2 \frac{\varphi' - \varphi}{2}} d\varphi' dz. \quad (7)$$

После интегрирования по z уравнение (7) приобретает следующую форму:

$$E_2(\varphi') - \frac{1}{4} \int_{\varphi}^{\varphi+2\pi} \rho(\varphi') E_2(\varphi') \sin \frac{\varphi' - \varphi}{2} d\varphi' = \frac{1}{4} \int_{\varphi}^{\varphi+2\pi} E_c(\varphi') \sin \frac{\varphi' - \varphi}{2} d\varphi'. \quad (8)$$

Распределение температур в оболочке и полусферическую плотность падающего излучения будем искать в виде

$$T(\varphi) = \bar{T} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos n\varphi + b_n \sin n\varphi, \quad (9)$$

$$E_2(\varphi) = \bar{E} + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos n\varphi + B_n \sin n\varphi. \quad (10)$$

Подставим (9) и (10) в (8). Учитывая, что справедливы равенства

$$\int_{\varphi}^{\varphi+2\pi} \cos n\varphi' \cdot \sin \frac{\varphi' - \varphi}{2} d\varphi' = \frac{4}{1-4n^2} \cos n\varphi,$$

$$\int_{\varphi}^{\varphi+2\pi} \sin n\varphi' \cdot \sin \frac{\varphi' - \varphi}{2} d\varphi' = \frac{4}{1-4n^2} \sin n\varphi,$$

и предполагая, кроме того, независимость от угла φ поглотительной, а следовательно, и отражательной способности внутренней поверхности оболочки, получим

$$\bar{E} = \gamma \bar{T} - \beta, \quad A_n = \frac{e_2 \gamma}{e_2 - 4n^2} a_n, \quad B_n = \frac{e_2 \gamma}{e_2 - 4n^2} b_n,$$

отсюда

$$E_2(\varphi) = \gamma \bar{T} - \beta + e_2 \gamma \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{e_2 - 4n^2} (a_n \cos n\varphi + b_n \sin n\varphi). \quad (11)$$

Разлагая функцию $E_a(\varphi)$ в ряд Фурье

$$E_a(\varphi) = \bar{E}_a + \sum_{n=1}^{\infty} c_n \cos n\varphi + d_n \sin n\varphi \quad (12)$$

и подставив (11), (12) в (14), найдем распределение температур в цилиндрической оболочке:

$$T(\varphi) = \frac{\alpha_1 \vartheta_1 + \alpha_2 \vartheta_2 + \beta e_1 + \bar{E}_a}{\alpha_1 + \alpha_2 + a e_1} + \sum_{n=1}^{\infty} f_n (c_n \cos n\varphi + d_n \sin n\varphi), \quad (13)$$

где

$$f_n = \frac{1}{\frac{\lambda d}{R^2} n^2 + \alpha_1 + \alpha_2 + \gamma(e_1 + e_2) + \frac{e_2^2 \gamma}{4n^2 - e_2}}. \quad (14)$$

В качестве примера оценим влияние толщины стенки и степени черноты внутренней поверхности оболочки на неравномерность распределения температур.

Параметры, входящие в решение, примем следующими:

$$E_1(\varphi) = 135 + 105 \sin \varphi; \quad E_a = 115 + 85 \sin \varphi, \text{ ккал/м}^2 \cdot \text{ч}; \quad R = 0,3 \text{ м};$$

$$e_1 = 0,06; \quad a_s = 0,11; \quad \alpha_1 = \alpha_2 = 0,3 \text{ ккал/м}^2 \cdot \text{ч} \cdot \text{град}; \quad \lambda = 180 \text{ ккал/м}^2 \cdot \text{ч} \cdot \text{град}.$$

Результаты расчетов (см. рисунок) показывают, что перепад температур по оболочке существенно зависит от степени черноты внутренней поверхности оболочки. Влияние толщины стенки на перепад возрастает с уменьшением степени черноты.

Из (14) следует, что вклад переноса энергии в оболочке теплопроводностью по отношению к вкладам переноса излучением и конвекцией в формировании распределения температур можно характеризовать отношением

$$\frac{\lambda d n^2}{R^2 (\alpha_1 + \alpha_2) + \gamma(e_1 + e_2) + \frac{e_2^2 \gamma}{4n^2 - e_2}}. \quad (15)$$

На основании (15) можно сделать вывод, что с ростом порядка гармоники, описывающей внешний радиационный поток, все большую роль в формировании распределения температур играет теплопроводность.

Если положить в (14) $\frac{\lambda d}{R^2} = 0$, то соотношение (13) будет описывать распределение температур в «тонкой» оболочке.

Исходя из (13) и (14) нетрудно получить и формулы, дающие распределение температур в оболочке, покрытой снаружи теплоизоляцией. Запишем граничное условие на поверхности оболочки в виде

$$\lambda \frac{\partial t}{\partial r} + \frac{1}{R_T} (t - t_n) = 0. \quad (16)$$

Температуру изоляции найдем из уравнения баланса тепла на поверхности изоляции, которое, согласно (1'), выражается соотношением

$$\frac{1}{R_T} (t - t_n) = (\alpha_1 + \gamma e_1) t - \alpha_1 \vartheta_1 - e_1 \beta - E_a(\varphi). \quad (17)$$

Итак, (16) с учетом (17) можно переписать в виде

$$\lambda \frac{\partial t}{\partial r} + \frac{\alpha_1 + \gamma e_1}{1 + (\alpha_1 + \gamma e_1) R_T} t - \frac{\alpha_1 \vartheta_1 + e_1 \beta + E_a(\varphi)}{1 + (\alpha_1 + \gamma e_1) R_T} = 0. \quad (18)$$

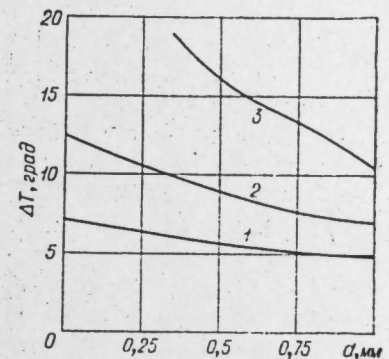
Сравнивая (1') и (18), приходим к выводу, что для отыскания распределения температур на теплоизолированной оболочке достаточно в (13) и (14) заменить комплексы

$$\alpha_1 + \gamma e_1; \quad \alpha_1 \vartheta_1 + e_1 \beta; \quad E_a(\varphi)$$

на

$$\frac{\alpha_1 + \gamma e_1}{1 + (\alpha_1 + \gamma e_1) R_T}; \quad \frac{\alpha_1 \vartheta_1 + e_1 \beta}{1 + (\alpha_1 + \gamma e_1) R_T}; \quad \frac{E_a(\varphi)}{1 + (\alpha_1 + \gamma e_1) R_T}$$

соответственно.



$$E_2 = 0,9(1); 0,5(2); 0,06(3).$$

Таким образом, распределение температур в теплоизолированной оболочке выражается формулой

$$T(\varphi) = \frac{\alpha_1 \vartheta_1 + \varepsilon_1 \beta + \bar{E}_a + \alpha_2 \vartheta_2 [(\alpha_1 + \gamma \varepsilon_1) R_T + 1]}{\alpha_1 + \gamma \varepsilon_1 + \alpha_2 [(\alpha_1 + \gamma \varepsilon_1) R_T + 1]} + \sum_{n=1}^{\infty} f'_n (c_n \cos n\varphi + d_n \sin n\varphi), \quad (19)$$

где

$$f'_n = \frac{1}{\alpha_1 + \gamma \varepsilon_1 + \left[\frac{\lambda d}{R^2} + \alpha_2 + \gamma \varepsilon_2 + \frac{\varepsilon_2^2 \gamma}{4n^2 - \varepsilon_2} \right] [(\alpha_1 + \gamma \varepsilon_1) R_T + 1]}.$$

Большое практическое значение имеют задачи о стационарном распределении температур в оболочке при наличии в ней источников тепловыделения [2].

Легко показать, что полученные выше соотношения дают решение и этой задачи. В этом случае

$$E_a(\varphi) = \int_{R-d/2}^{R+d/2} \omega(z, \varphi) dz.$$

Отметим в заключение, что в [3] рассматривалась задача о распределении температур в цилиндрической оболочке в предположении абсолютной поглощательной способности внешней и внутренней поверхностей оболочки. В этом случае интегральное уравнение (6) вырождается в равенство

$$E_2(\varphi) = \int \sigma_0 t^4 Q(M, N) dF_N$$

и отпадает необходимость совместного решения системы интегрального и дифференциального уравнений. Конвективным теплообменом авторы пренебрегли. Если в (13) и (14) положить

$$\alpha_1 = \alpha_2 = 0, \quad \varepsilon_1 = \varepsilon_2 = 1,$$

то приходим к соотношениям, полученным в [3].

Институт теплофизики
СО АН СССР,
Новосибирск

Поступила в редакцию
1/VIII 1974

ЛИТЕРАТУРА

1. С. С. Кутателадзе. Основы теории теплообмена. Новосибирск, «Наука», 1970.
2. Н. А. Ярышев, Л. Б. Андреева, С. Ц. Манжикова. Приближенные методы решения задач теплопроводности и их приложение в технике. Тр. ЛИТМО. Л., 1972, вып. 70.
3. Фрэнк, Грей. Тр. ASME, сер. C, Теплопередача, 1962, № 2.

Ю. А. ЖУРАВЛЕВ, В. Г. ЛИСИЕНКО

УЧЕТ СЕЛЕКТИВНОСТИ ИЗЛУЧЕНИЯ ПРИ ПОСТАНОВКЕ ЗОНАЛЬНЫХ РАСЧЕТОВ ТЕПЛООБМЕНА В КАМЕРАХ СГОРАНИЯ

Наиболее совершенным физическим методом расчета теплообмена в камерах сгорания в настоящее время является зональный метод [1—4]. Его применение позволяет учесть многие особенности работы теплотехнических агрегатов и получить сведения не только об интегральных характеристиках теплообмена — о к. п. д., суммарном поглощении тепла нагреваемыми поверхностями, но и, что особенно важно, о среднестациональных и локальных характеристиках — о полях температур и тепловых потоков в камерах сгорания.

Известно, что учет селективности излучения таких различных по спектральным характеристикам излучателей, как газообразные продукты горения, сажиные частицы, поверхности металла и кладки, может значительно повлиять на результаты расчетов. Поэтому практический интерес представляет решение в рамках зонального метода задачи внешнего теплообмена с учетом селективности излучения. Решение данной задачи осложняется следующими обстоятельствами: многозонностью и объемным характером излучающей системы; неоднородностью радиационных характеристик и состава газовой среды по объему камеры сгорания; движением газовой среды и химическим тепловыделением в объемных зонах; многократными отражениями лучистой энергии на границах системы; присутствием сажиных частиц и неравномерностью их концентраций в объемных зонах.

Наиболее полно картину внешнего теплообмена отражает модель, разработанная в работе [4]. Однако она не учитывает селективности излучения и поглощения граничными поверхностями и влияния излучения сажиными частицами, наличие которых является особенностью факелов углеводородных топлив. Учет указанных обстоятельств возможен только на базе использования спектроскопических данных.

В настоящем исследовании разработана методика решения указанной задачи внешнего теплообмена в камерах сгорания, проанализированы и сопоставлены полученные результаты с имеющимися экспериментальными данными по излучению и поглощению трехатомными газами. Для расчетов по предлагаемой методике спектр излучения участвующих в теплообмене сред разбивается на z полос (для анализа погрешности методики спектр излучения представлен в виде 9 полос (табл. 1)). Полосы излучения (поглощения) имеют фиксированную, не зависящую от температуры излучающего (поглощающего) компонента эффективную ширину; при этом влияние указанной температуры сказывается на величине среднего по ширине полосы коэффициента поглощения, изменение которого в значительной мере компенсирует постоянство эффективной ширины полосы.

Таблица 1

Характеристика принятой модели полос спектра излучения продуктов горения

Номер полосы	Расположение полосы в спектре		Эффективная ширина полосы $\Delta\omega$, см ⁻¹	Излучающие компоненты
	мк	см ⁻¹		
1	0,10—1,50	100 000—6667	93333	Сажистый углерод
2	1,50—1,75	6667—5714	953	Сажистый углерод, H ₂ O
3	1,75—2,50	5714—4000	1714	Сажистый углерод
4	2,50—3,00	4000—3333	677	Сажистый углерод, H ₂ O, CO ₂
5	3,00—4,00	3333—2500	833	Сажистый углерод
6	4,00—4,80	2500—2083	417	Сажистый углерод, CO ₂
7	4,80—8,00	2083—1250	833	Сажистый углерод, H ₂ O
8	8,00—12,5	1250—800	450	Сажистый углерод
9	12,5—25,0	800—400	400	H ₂ O, CO ₂

При этом ввиду недостаточной надежности и противоречивости спектроскопических данных у разных авторов, а также вследствие необходимости иметь простую форму спектральных полос в данной методике общее количество энергии, излучаемое газовой зоной, определяли на основе экспериментальных данных для интегральной излучательной способности (номограммы ВТИ, эмпирические формулы). Спектроскопические данные использовали лишь для определения относительной интенсивности излучения и поглощения полосами спектра в зависимости от температуры и оптической плотности газовой среды.

Расчет усредненных по ширине полосы k спектральных степеней черноты углекислого газа и водяного пара для каждой зоны производили на основе интегральных степеней черноты ϵ и относительной интенсивности излучения b_k каждого из этих газов в пределах k -й полосы:

$$\epsilon^{lk} = \frac{b_k \epsilon \sigma_0 T^4}{\int_{\Delta\omega_k} I_{\omega}^0 d\omega} \quad (1)$$

Здесь и далее σ_0 — коэффициент излучения абсолютно черного тела, кВт/м²·°К⁴. Знаменатель выражения (1) представляет собой интеграл функции Планка по ширине $\Delta\omega_k$ полосы при температуре T рассматриваемой зоны. Интегральные степени черноты каждого из газов ϵ определяются из номограммы ВТИ или из эмпирических формул по температурам T , заданным в первом приближении или из предварительного расчета, парциальным давлениям трехатомных газов p , рассчитанным исходя из характера выгорания топлива [5], и по эффективной длине луча в объемной зоне $l_{эф}$.

Относительную интенсивность излучения полос b_k , представляющую собой долю энергии, излученную объемом газа в рассматриваемой спектральной области, от всего излучения данного газового объема в интервале длин волн от 0 до ∞ , определяли исходя из интегральных показателей поглощения S_k (табл. 2):

$$b_k = \frac{\left[1 - \exp\left(-\frac{S_k}{\Delta\omega_k} \rho l_{эф}\right)\right] \int_{\Delta\omega_k} I_{\omega}^0 d\omega}{\sum_k \left[1 - \exp\left(-\frac{S_k}{\Delta\omega_k} \rho l_{эф}\right)\right] \int_{\Delta\omega_k} I_{\omega}^0 d\omega} \quad (2)$$

Таблица 2

Значения интегральных показателей поглощения S_k для принятой модели полос излучения: CO₂ при температуре 300° К и H₂O при температуре 330° К по данным [6]

Излучающие компоненты	Расположение полосы, мк	S_k , см ⁻² · ат ⁻¹
CO ₂	2,50—3,00	72,5
	4,00—4,80	2706,2
	12,5—25,0	179,3
H ₂ O	1,50—1,75 *	18,72
	2,50—3,00	126,0
	4,80—8,00	175,0
	12,5—25,0	58,4

* Данная полоса объединяет две относительно «слабые» полосы поглощения H₂O с нулевыми линиями 1,87 и 1,38 мк. Ширина этой полосы принята равной сумме ширины объединяемых полос.

Экспериментальные значения интегральных показателей поглощения полос S_k для углекислого газа и водяного пара приводятся в работах [4, 6, 7 и др.]. Для расчетов относительной интенсивности излучения полос b_k значения интегральных показателей поглощения полос S_k должны быть приведены к температуре излучающей зоны. Для основных колебательно-вращательных полос углекислого газа и водяного пара пересчет величины S_k на другие температуры производится по формуле

$$S_k(T) = S_k(T_0) \frac{T_0}{T}, \quad (3)$$

где T_0 — стандартная температура, для которой даны экспериментальные значения $S_k(T_0)$, °К.

Графики температурной зависимости величины S_k для составных полос приведены, в частности, в работе [7].

На основе средних по ширине полосы спектральных степеней черноты и эффективной длины луча по соотношению Бугера — Бера определяли величины среднего спектрального коэффициента поглощения K^{lk} каждого из трехатомных газов для спектральной области шириной $\Delta\omega_k$. Рассчитанные таким образом средние спектральные коэффициенты поглощения трехатомными газами учитывают влияние температуры газа. Следует, однако, отметить, что использование модели спектра с прямоугольными полосами излучения таит в себе возможность появления погрешности. Природа этой погрешности объясняется различной ролью крыльев полос в поглощении лучистой энергии газом при различной величине оптической плотности поглощающего газа. В связи с этим представляет интерес оценить степень соответствия принятой модели спектра имеющимся экспериментальным данным и выявить пределы ее применимости.

Одним из критериев правильности модели полос спектра излучения (поглощения) газовыми объемами, а также числовых значений различных параметров, характеризующих эту модель, можно считать степень отклонения расчетных значений интегральной степени черноты трехатомных газов от экспериментальных данных в зависимости от длины луча $l_{эф}$. Такое сопоставление расчетных и экспериментальных значений необходимо, так как при определении степени черноты газового объема

для различных длин луча в данной методике используется только одно значение степени черноты излучающего газа, снятое с номограммы, а именно соответствующее эффективной длине луча. При этом степень черноты при другой длине луча определяется для селективной модели на основе средних спектральных коэффициентов поглощения K^{λ_k} по соотношению

$$\varepsilon = \frac{\sum_k [1 - \exp(-K^{\lambda_k} l_n)] \int_{\Delta\omega_k} I_{\omega, \text{ст}}^0 d\omega}{\sigma_0 T^4} \quad (4)$$

Пример сопоставления результатов расчета степени черноты углекислого газа и водяного пара по серой и селективной моделям с экспериментальными данными в зависимости от длины луча приведен на рис. 1 и 2. При этом степень черноты газа для серой модели рассчитывали по формуле Бугера — Бера. Анализ показывает, что расчеты по селективной модели дают удовлетворительное согласование с экспериментальными данными в интервалах температур 1500—2000°C, в интервалах длин луча и парциальных давлений газов 0,05—0,18 ат, имеющих место в высокотемпературных печах и топках.

Для оценки правильности расположения поглощающих полос и их относительной интенсивности было проведено сопоставление расчетной зависимости поглотительной способности трехатомных газов от температуры источника черного излучения с экспериментальными данными

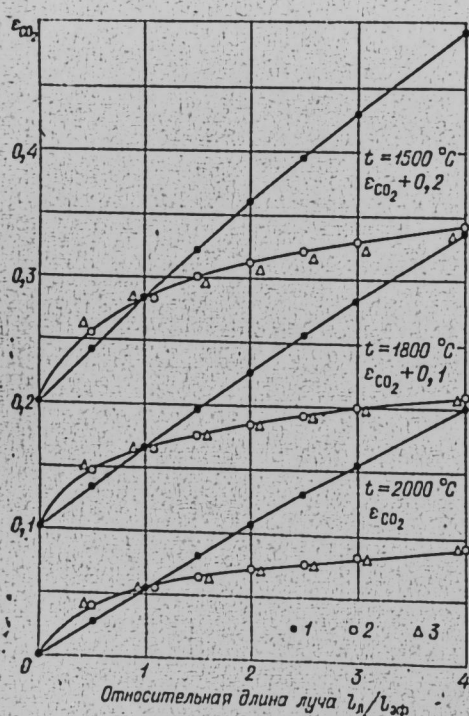


Рис. 1. Зависимость степени черноты углекислого газа $\varepsilon_{\text{CO}_2}$ от длины луча l_n для серой модели (1), селективной модели (2) и по экспериментальным (номограмма ВТИ) данным (3) при различной температуре газа t (парциальное давление газа 0,10 ат, $l_{\text{эф}} = 1,5$ м).

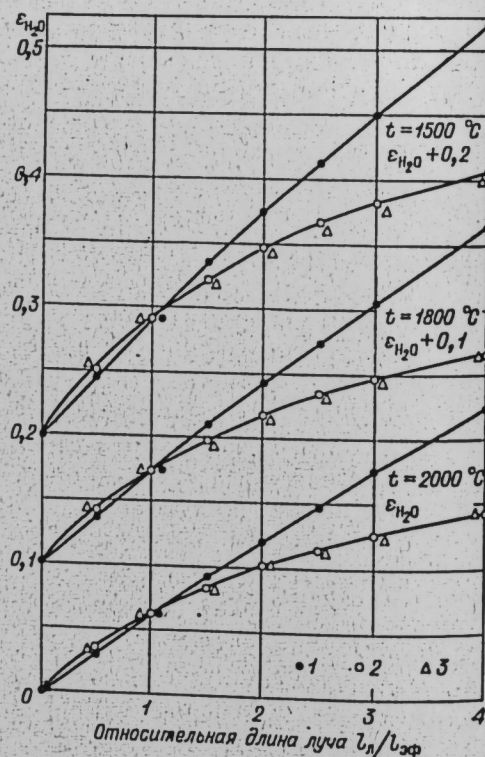


Рис. 2. Зависимость степени черноты водяного пара $\varepsilon_{\text{H}_2\text{O}}$ от длины луча l_n для серой модели (1), селективной модели (2) и по экспериментальным (номограмма ВТИ) данным (3) при различной температуре газа t (парциальное давление газа 0,10 ат, $l_{\text{эф}} = 1,5$ м).

[8] (рис. 3 и 4). В расчетах по селективной модели поглотительную способность рассчитывали по формуле

$$a = \frac{\sum_k [1 - \exp(-K^{\lambda_k} l_n)] \int_{\Delta\omega_k} I_{\omega, \text{ст}}^0 d\omega}{\sigma_0 T_{\text{ст}}^4} \quad (5)$$

где спектральная плотность излучения $I_{\omega, \text{ст}}^0$ и температура $T_{\text{ст}}$ относятся к черному излучателю. Как показывают расчеты, для диапазона значений температуры черного излучателя 500—2000°C, поглощающих газов 1500—2000°C и парциального давления трехатомных газов 0,05—0,18 ат расхождения в основном не превышают 4,5%, т. е. находятся в пределах погрешности эмпирических формул.

В продуктах горения углеводородных топлив обычно содержатся водяные пары и углекислый газ; при этом происходит наложение спектров излучения обоих компонентов. В связи с этим важно сопоставить величину поправки к степени черноты газовой смеси на взаимное перекрытие полос, получаемой расчетом по данной модели спектра, с имеющимися экспериментальными данными. Расчеты были проведены для температуры газов 1000°C, длины луча $l_n = 1,5$ м при двух значениях парциальных давлений углекислого газа и водяного пара (0,10 и 0,05 ат) по формуле

$$\Delta\varepsilon = \varepsilon_{\text{CO}_2} + \varepsilon_{\text{H}_2\text{O}} - \varepsilon_{\Sigma} = \frac{1}{\sigma_0 T^4} \sum_k \int_{\Delta\omega_k} I_{\omega}^0 d\omega \{ [1 - \exp(-K_{\text{CO}_2}^{\lambda_k} l_n)] + [1 - \exp(-K_{\text{H}_2\text{O}}^{\lambda_k} l_n)] - [1 - \exp(-(K_{\text{CO}_2}^{\lambda_k} + K_{\text{H}_2\text{O}}^{\lambda_k}) l_n)] \}. \quad (6)$$

Для указанных значений парциальных давлений расчетная величина поправки на взаимное перекрытие полос соответственно составляет 0,033 и 0,021, по данным экспериментов [8] — 0,039 и 0,020. Таким образом, анализ показывает, что принятая модель спектра излучения удовлетворительно отражает реальные свойства трехатомных газов и может быть использована при проведении расчетов по предлагаемой методике с учетом селективных свойств излучения.

Особенностью светящихся факелов является наличие сажистых частиц, имеющих сплошной спектр излучения. Спектральные коэффициенты поглощения сажистыми частицами рассчитывали по данным А. Г. Блоха, В. Далзела и А. Сарофима [9, 10] и затем усредняли по ширине полос с помощью функции Планка. Величину среднего спектрального коэффициента поглощения для каждой объемной зоны вычисляли путем сложения средних спектральных коэффициентов поглощения для сажистых частиц и газообразных продуктов горения в данной зоне.

На базе средних спектральных коэффициентов поглощения K^{λ_k} для объемных зон и спектральных степеней черноты A^{λ_k} для поверхностных зон в пределах каждой полосы спектра вычисляли (для сложных систем методом Монте-Карло) величины спектральных обобщенных угловых коэффициентов, а затем, решая системы линейных алгебраических уравнений [1, 11], определяли спектральные коэффициенты излучения $f_{ij}^{\lambda_k}$ из зоны i в зону j с учетом переизлучения поверхностными зонами. После этого вычисляли коэффициенты радиационного обмена a_{ij}^{Σ} (кВт/°К), которые учитывают суммарный перенос тепла излучением из зоны i , имеющей единичную температуру, в зону j по всем полосам спектра:

для излучения от объемной зоны i

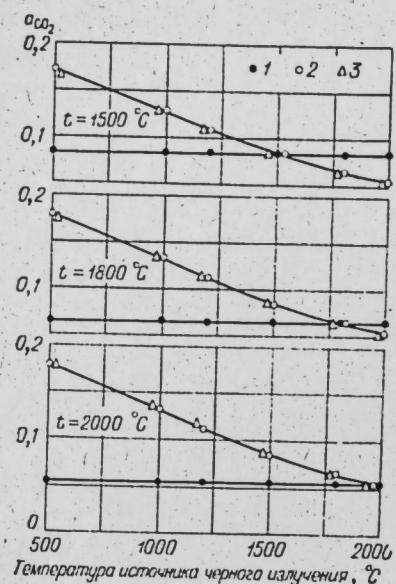


Рис. 3. Зависимость поглощательной способности углекислого газа a_{CO_2} от температуры источника черного излучения для серой модели (1), селективной модели (2) и по экспериментальным (эмпирические формулы Х. К. Хоттеля) данным (3) при различной температуре поглощающего газа t (парциальное давление газа 0,10 ат, $l_{\phi} = 1,5$ м).

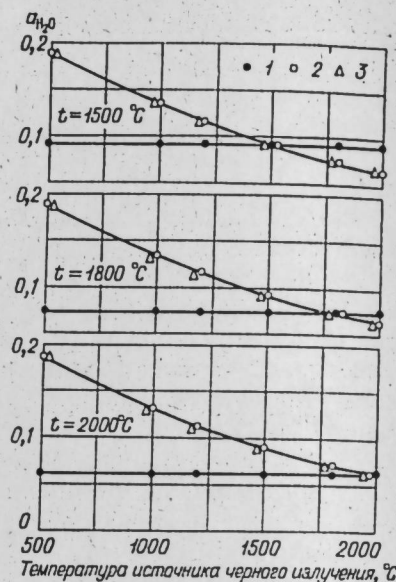


Рис. 4. Зависимость поглощательной способности водяного пара a_{H_2O} от температуры источника черного излучения для серой модели (1), селективной модели (2) и по экспериментальным (эмпирические формулы Х. К. Хоттеля) данным (3) при различной температуре поглощающего газа t (парциальное давление газа 0,10 ат, $l_{\phi} = 1,5$ м).

$$a_{ij}^{\Sigma} = 4\sigma_0 V_i \sum_k f_{ik}^{\lambda} K_{ik}^{\lambda} \alpha_{ik}^{\lambda} \quad (7)$$

для излучения от поверхностной зоны i

$$a_{ij}^{\Sigma} = \sigma_0 F_i \sum_k f_{ik}^{\lambda} A_{ik}^{\lambda} \alpha_{ik}^{\lambda} \quad (8)$$

где V_i и F_i — объем и площадь соответственно объемной и поверхностной излучающих зон, m^3 и m^2 ; α_{ik}^{λ} — степень черноты участка спектра полосы k для температуры T излучающей зоны i :

$$\alpha_{ik}^{\lambda} = \frac{\int_{\Delta\omega_k} I_{\omega, i}^0 d\omega}{\sigma_0 T_i^4} \quad (9)$$

Вычисленные таким образом селективные коэффициенты радиационного обмена a_{ij}^{Σ} подставляли в систему нелинейных алгебраических уравнений теплообмена и теплового баланса зон

$$\sum_{i=1}^{n+m-1} a_{ij}^{\Sigma} T_i^4 - a_{jj}^{\Sigma} T_j^4 + \sum_{i=1}^l g_{ij} T_i - g_{jj} T_j + Q_j = 0 \quad (10)$$

$(j = 1, 2, \dots, n + m),$

где T_i и T_j — искомые температуры зон i и j , $^{\circ}K$; g_{ij} (g_{jj}) — коэффициенты конвективного обмена, учитывающие в зависимости от характера взаимодействующих зон или обмен теплом между объемными зонами посредством движущейся среды, или теплообмен конвекцией между

объемной и поверхностной зонами, или теплопередачу от поверхностной зоны к окружающей среде, $kBt/^{\circ}K$; m , n и l — число зон, соответственно объемных, поверхностных, и зон, соседних по отношению к зоне j ; Q_j — внутреннее тепловыделение за счет выгорания топлива для объемных зон, или тепло, поступающее в систему извне за счет теплопередачи, для поверхностных зон, kBt .

Решение системы зональных уравнений (10) позволяет определить дискретные поля температур и тепловых потоков в камерах сгорания. Реализация этого решения, осуществленная на ЭВМ*, показала, что для условий теплообмена, характерных для высокотемпературных пламенных печей, серая модель дает значительное искажение полей температуры и тепловых потоков, особенно в случае несветящегося факела [5]. Так, расхождение в значениях среднестроной плотности результирующего теплового потока для нагреваемой поверхности (завышение в случае серой модели) достигало 175% для несветящегося и 31,3% для светящегося факелов. Величина интегрального результирующего теплового потока при расчете по серой модели была завышена на 56,8% для несветящегося и на 10,8% для светящегося факелов [5].

ВЫВОДЫ

1. Разработана методика зонального решения задачи внешнего теплообмена с учетом селективности излучения трехатомных газов, сажистых частиц и ограничивающих поверхностей.
2. Полученные соотношения могут быть использованы для анализа теплообмена в различного рода камерах сгорания, топках и рабочем пространстве пламенных печей.
3. Сопоставление с экспериментальными данными свидетельствует о том, что разработанная методика в совокупности с принятой моделью спектра излучения удовлетворительно отражает реальные свойства трехатомных газов.
4. Особое значение учет селективных свойств участвующих в теплообмене компонентов имеет при расчете локальных и среднестроных температур и тепловых потоков.
5. Наибольшие расхождения в расчетах по «серой» и «селективной» моделям имеют место в камерах сгорания с несветящимся факелом (при отсутствии в пламени сажистых частиц, дающих практически «серый» спектр излучения).

Красноярский институт цветных металлов,
Уральский политехнический институт,
Свердловск

Поступила в редакцию
15/V 1974

ЛИТЕРАТУРА

1. Ю. А. Суринов. Изв. АН СССР, ОТН, 1953, № 7.
2. А. С. Невский. Сб. трудов ВНИИМТ, Средне-Уральское книжное изд-во, 1965, № 11.
3. С. П. Детков. ТВТ, 1964, 2, № 1.
4. H. C. Hottel. A. F. Sarofim. Radiative Transfer. Mc Graw-Hill Book Company, N. Y., 1967.
5. Ю. А. Журавлев, В. Г. Лисненко, Б. И. Китаев. Изв. вузов, Черная металлургия, 1971, № 8.
6. С. С. Пеннер. Количественная молекулярная спектроскопия и излучательная способность газов. М., ИЛ, 1963.
7. Э. М. Спэрроу, Р. Д. Сесс. Теплообмен излучением. Л., «Энергия», 1971.
8. В. Х. Мак-Адамс. Теплопередача. М., Металлургиздат, 1961.
9. А. Г. Блох. Тепловое излучение в котельных установках. Л., «Энергия», 1967.
10. В. Х. Далзелл, А. Ф. Сарофим. Тр. Америк. общества инж.-мех. Теплопередача, сер. С. М., «Мир», 1969, № 1.
11. Ю. А. Журавлев, В. Г. Лисненко, Б. И. Китаев, ИФЖ, 1971, XXI, № 5.

* Решение системы, состоящей из 50 нелинейных алгебраических уравнений теплообмена и теплового баланса зон, на ЭВМ «Минск-22» занимало около 10 мин.

М. А. СУЛТАНОВ

ВЛИЯНИЕ ЭЛЕКТРОПРОВОДНОСТИ НА МЕХАНИЗМ РАЗРУШЕНИЯ МЕТАЛЛИЧЕСКИХ ПЛАСТИН ПОД ДЕЙСТВИЕМ СВЕРХЗВУКОВОГО ПЛАЗМЕННОГО ФАКЕЛА В ИМПУЛЬСНОМ РАЗРЯДЕ БОЛЬШОЙ МОЩНОСТИ

При исследовании взаимодействия ударно-сжатой области плазмы (УСОП), получаемой при набегаии сверхзвукового плазменного факела (СПФ) на твердую преграду, было показано изменение механизма разрушения металлических пластин, как нейтральных, так и включенных в качестве электрода в электрическую цепь разрядного контура, в зависимости от теплофизических свойств материалов и изменения полярности электродов [1—5].

На основе результатов работы [6] и [4] предполагалось, что в механизме разрушения металлических пластин некоторую роль может играть и электропроводность материала. С этой целью в данной статье приводятся некоторые эффекты, наблюдаемые при исследовании механизма разрушения металлических пластин в зависимости от электропроводности.

Других работ по данному вопросу, где бы рассматривалось действие СПФ, в литературе нет. В работе [7] описаны результаты разрушения металлических пленок под действием лучей ОКГ. При расчете поглотительной способности материала автор вводит величину электропроводности материала, зависящую от температуры $\sigma(T)$.

В предлагаемой работе исследовались некоторые эрозионные параметры металлических пластин, резко различающиеся коэффициентом электропроводности. Конфигурация разрядной камеры и другие условия эксперимента аналогичны описанным [5, 6]. В таблице приведены некоторые известные теплофизические данные и коэффициент электропроводности исследованных металлических пластин. Исследования следов поражения металлических пластин, как нейтральных, так и включенных разными полюсами в электрическую цепь разрядного контура, позволили сделать следующие заключения.

Некоторые теплофизические свойства материалов

Элемент	Атомный вес (а. е. м.)	Температура плавления, °C	Ионизационный потенциал, эВ	Электропроводность $\rho \cdot 10^{-6}$ Ом ⁻¹
Cu	63,54	1083	7,7	1,59
Al	26,97	660	5,9	3,25
Zn	65,38	419,4	9,3	6,1
Pb	207,21	327,5	7,4	20,8

Величины эрозии нейтральных металлических пластин как по диаметру, так и по глубине разрушения при набегаии на них СПФ не отличаются друг от друга. Однако при включении пластин в качестве одного из электродов указанные эрозионные пара-

метры резко изменяются (рис. 1). При этом с увеличением электропроводности увеличиваются и размеры диаметра разрушения, при аноде больше, чем при катоде. Примерно такая же зависимость имеет место и для глубины разрушения h . Для нейтральных пластин диаграмма зависимости h — σ имеет незначительный наклон.

Результаты данной работы с некоторыми допущениями можно объяснить исходя из следующих соображений.

В работе [6] было показано, что, когда в процессе теплоотдачи основную роль играет электронная теплопроводность, то механизм абляции в сильной степени зависит от того, является ли тело проводником или изолятором. Если тело является изолятором, то на его поверхности при набегаии плазменного потока образуется электронный запирающий слой. В случае, когда оно — проводник, электроны проникают во внутрь материала. Заметим, что в указанной работе речь идет о массивных материалах (о больших метеорах и других космических телах). В нашем же случае исследовались металлические пластины размерами $5 \times 15 \times 15$ мм. Когда такая пластина ставится на совершенно изолированную поверхность, то при набегаии СПФ ее можно рассматривать как изолятор, т. е. из-за малого объема материала не происходит увода зарядов с поверхности. Если же данную пластину ставить на массивную металлическую подставку или же рассматривать разрушение на образце-монокристе, то картина разрушения совершенно меняется. Убедительно подтверждают эти рассуждения следующие простые эксперименты.

Медная пластина размерами $1 \times 30 \times 30$ мм ставилась на подставку из диэлектрика и на массивную металлическую поверхность. В результате взаимодействия СПФ с такой пластиной картина разрушения как по диаметру, так и по глубине резко изменилась.

Чтобы исключить влияние теплопроводности материала, исследуемую пластину ставили на изолятор и тонкой проволокой присоединяли к массивному металлическому предмету и к земле. В случае, когда изолированная диэлектриком медная пластина подвергалась действию СПФ, наблюдалась следующая картина: след поражения имел такой же характер, какой описан в работах [1, 3]; причем перенос материала электродом происходил в виде дисперсных частиц. Если исследуемую пластину присоединяли тонкой проволокой к металлической массе, бесконечной по размерам по отношению к размерам пластины, то размеры поражения на ее поверхности становились совершенно незначительными. При этом перенос продуктов разрушения верхних электродов на металлическую пластину происходил в виде крупных капель размерами до 0,8 мм. Такая же картина имела место и при разрушении стальной пластины с несколько другими размерами жидких капель. Для иллюстрации на рис. 2 приведены следы поражения медной пластины при описанных выше условиях эксперимента.

Все указанные опыты проводились с нейтральными пластинами. Если же пластину включить в качестве электродов, то резко изменяется механизм разрушения, изменяются образования скач-

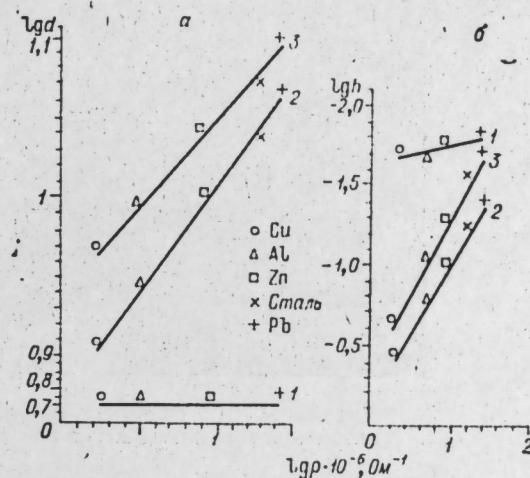


Рис. 1. Графики зависимостей диаметра (а) и глубины (б) разрушения нейтральных металлических пластин от электропроводности (1). Включение пластин в разрядную цепь в качестве анода (2) и катода (3).

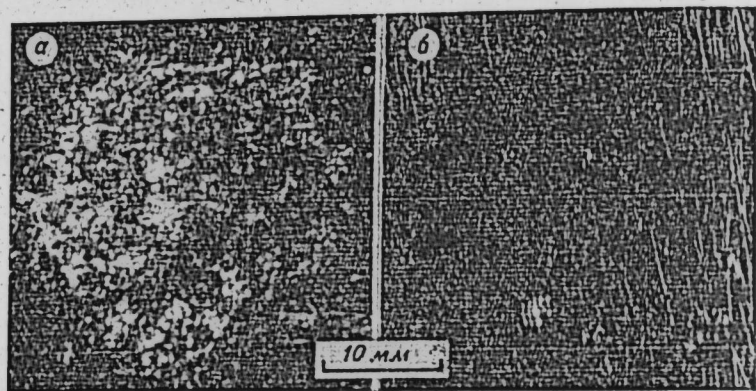


Рис. 2. Фотографии разрушения нейтральной пластины меди: на изоляторе (а) и при соединении ее с массивной подставкой (б).

ков уплотнения на их поверхности и их спектроскопические свойства. На наш взгляд, в данном случае происходит увод зарядов в электрическую цепь разрядного контура. Однако различия в разрушении под действием анода и катода можно связать с подвижностью зарядов.

Известно, что электроны и ионы обладают различными коэффициентами подвижности [8]. Кроме того, в случае плазмы имеют место и электронная, и ионная проводимости зарядов [9]. Тогда электропроводность может выразиться формулой

$$\sigma = \sum_i e_i M_i N_i, \quad (1)$$

где e — заряд электрона; M — подвижность; N — концентрация зарядов. Суммирование производится по всем типам носителей тока.

Кроме того, электропроводность есть функция от плотности тока и напряжения. В случае нейтральной пластины отсутствует напряжение в промежутке камера — преграда. В том случае, когда пластина включена в электрическую цепь разрядного контура, по разрядному промежутку протекает ток плотности

$$j = e M n E, \quad (2)$$

где $E = \frac{U}{d}$ — напряжение поля; U — разность потенциалов; d — величина разрядного промежутка.

Опыты с нейтральными пластинами свидетельствуют о том, что в случае, когда пластина совершенно изолирована, на ее поверхности образуются скачок уплотнения и электронный запирающий слой, в результате чего разрушение происходит в основном под действием лучистого потока плазмы. При этом скачок уплотнения экранирует поверхность пластины от капель верхнего электрода, которые уносятся в сторону. Когда пластина присоединена к массивному телу или контактируется с ним, на ее поверхности электронный запирающий слой не образуется; не образуется и скачок уплотнения, и поэтому происходит только капельное разрушение поверхности преграды.

Следует отметить, что при образовании скачка уплотнения на поверхности пластины ее поглощательная способность, согласно [7], можно выразить формулой

$$A = \frac{3v}{4c} + \frac{e}{\sigma(T)} \left(\frac{N}{\pi m} \right)^{1/2}, \quad (3)$$

где v — скорость электрона ($\sim 10^8$ см/с); c — скорость света; m — масса электрона.

Электропроводность σ в формуле (3)

$$\sigma(T) = mkT/3hNe^2, \quad (4)$$

где k — коэффициент Больцмана; h — постоянная Планка.

Как видно из приведенных формул, σ зависит от температуры. Исходя из результатов наших экспериментов, при образовании скачка уплотнения на поверхности пластины также происходит увеличение температуры согласно законам гидродинамики, что приводит к существенному увеличению разрушения поверхности образца; в отсутствии скачка уплотнения параметры эрозии металлических пластин резко уменьшаются.

Таджикский государственный
университет им. В. И. Ленина,
Душанбе

Поступила в редакцию
27/VI 1974

ЛИТЕРАТУРА

1. М. А. Султанов, Л. И. Киселевский. ТВТ, 1966, № 3, 3.
2. В. А. Морозов, Л. И. Киселевский. ИФЖ, 1967, 13, 644.
3. М. А. Султанов. ТВТ, 1970, № 5, 963.
4. В. А. Агеев, М. А. Султанов. ТВТ, 1973, № 3, 498.
5. В. А. Агеев, М. А. Султанов. ТВТ, 1974, № 1, 17.
6. Г. И. Покровский. Физика космических скоростей. «Знание», 1962.
7. М. Н. Либенсон. ФХОМ, 1968, 2, 3.
8. Ф. Блатт. Теория подвижности электронов в твердых телах. М., «Мир», 1963.
9. Н. А. Капцов. Электрические разряды в газах и в вакууме. М., Гостехиздат, 1950.

В. И. ПОТАПОВ, Б. Н. ДЕВЯТОВ

МОДЕЛИРОВАНИЕ НА ЦВМ СИСТЕМЫ УПРАВЛЕНИЯ РАСПРЕДЕЛЕННЫМИ ТЕХНОЛОГИЧЕСКИМИ ПРОЦЕССАМИ С УЧЕТОМ ПРОФИЛЕЙ СКОРОСТЕЙ В ПОТОКАХ СРЕД

На распределенные технологические процессы тепломассообмена с движущимися жидкими или газообразными средами существенно влияет гидродинамика потоков в аппарате.

Строгое математическое моделирование таких процессов представляет сложную проблему. Поэтому при проведении теоретических исследований вводится ряд допущений, причем сильные упрощающие допущения относятся именно к особенностям процессов, определенных гидродинамикой.

В последнее время в инженерной практике моделирования технологических процессов широко применяется так называемая модель идеального вытеснения, в которой предполагается стержневое течение взаимодействующих сред. Это в ряде случаев не соответствует действительности и тем самым сужает область практического использования данной модели. Поэтому корректировка этой термодинамической модели путем учета гидродинамических особенностей протекания процессов представляет определенный интерес.

Потоки реагентов в трубчатых технологических аппаратах — теплообменниках, различного рода колоннах — при постоянных физических свойствах сред (вязкость, теплоемкость, удельный вес) имеют поперечный градиент скоростей частиц сред, который приводит к их осевому смещению. В работах [1—4] показано влияние этого фактора на динамические характеристики объекта и отмечена необходимость учета этого явления.

Настоящая работа имела своей целью рассмотрение задачи цифрового моделирования замкнутой системы автоматического управления распределенными процессами конвективного тепломассообмена с учетом распределений скоростей в сечениях, движущихся в стабилизированном режиме сред.

Пусть противоточный процесс тепломассопередачи в трубчатом технологическом аппарате описывается уравнениями вида [4]

$$L(\Theta) = \Theta_t + w\Theta_x + x\Theta, \quad (1)$$

где матрицы Θ , w , x имеют следующую структуру:

$$\Theta = \begin{bmatrix} \Theta_1 \\ \vdots \\ \Theta_n \end{bmatrix}, \quad w = \begin{bmatrix} w_1 & \cdot & \cdot & \cdot & 0 \\ & w_s & & & \\ & & -w_{s+1} & & \\ 0 & \cdot & \cdot & \cdot & -w_n \end{bmatrix},$$

$$x = \begin{bmatrix} x_{11} & -x_{12} & \cdot & \cdot & \cdot & 0 \\ -x_{21} & x_{21} + x_{23} & & & & \\ & & -x_{n-1, n-2} & x_{n-1, n-2} + x_{n-1, n} & & \\ & & & & -x_{n, n-1} & x_{nn} \end{bmatrix},$$

Θ_i — температура (концентрация) i -го коаксимального слоя среды;

$w_i = \frac{2}{r_{i+1}^2 - r_i^2} \int_{r_i}^{r_{i+1}} r w(r) dr$ — скорость i -го слоя среды;

$$x_{i \pm 1} = \frac{2r_i \pm \Delta r_i}{2r_i \Delta r_i^2} a$$

— коэффициенты, характеризующие физические свойства i -го слоя; r — расстояние от оси аппарата, $0 \leq r < R_2$; R_2 — радиус внешней трубы; a — температуропроводность сред; s — число слоев по первой среде; $w(r)$ — профиль скоростей в трубе и кольцевом сечении [5].

Дополним систему (1) начальными и граничными условиями вида

$$\begin{aligned} \Theta_i(0, t) &= \Theta_{i, \text{вх}}(t) \quad (i=1, 2, \dots, s); \quad \Theta_j(1, t) = \Theta_{j, \text{вх}}(t) \quad (j=s+1, \dots, n), \\ \Theta_i(x, 0) &= Y_i(x) \quad (i=1, 2, \dots, n), \end{aligned} \quad (2)$$

где $\Theta_{i, \text{вх}}$, $\Theta_{j, \text{вх}}$, Y_i — известные функции своих аргументов.

Оператор управления возьмем в общем виде:

$$\Theta_{\text{ос}} = F(\Theta_{\Delta}, \dot{\Theta}_{\Delta}, \dots, \int \Theta_{\Delta} dt, \dots, \dot{\Theta}_{\text{ос}}, \dots, \Theta_{\text{ос}}^{(n)}), \quad (3)$$

где Θ_{Δ} — управляющее рассогласование; $\Theta_{\text{ос}}$ — сигнал обратной связи.

Целью моделирования такой замкнутой системы управления распределенным процессом являлось изучение динамики системы и влияния некоторых параметров, факторов на переходные процессы. Принципиальная схема системы приведена на рис. 1. Моделирование ее проводилось на ЭВМ М-222 по программе, написанной на АЛГОЛе. В качестве объекта управления был взят коаксимальный теплообменник как один из наиболее изученных объектов. Это позволило при изучении динамики исключить влияние других факторов, генерирующих шум, помеху. Помимо чисто технических задач при моделировании необходимо было выяснить работоспособность алгоритма численной реализации гиперболической системы дифференциальных уравнений в частных производных (1). Некоторые из перечисленных задач нами были решены ранее. Так, изучение влияния профиля скоростей на динамические характеристики объекта и численная реализация уравнений приведены в работе [6]. В настоящем сообщении рассматривается задача по изучению влияния на переходный процесс координат точек контроля и координат точек подачи управляющего воздействия.

В рассматриваемой системе регулирования управляемой средой принята $\bar{\Theta}_1$ — первая среда, управляющей — $\bar{\Theta}_2$ — вторая среда. При этом введено понятие средней массовой температуры сред, определяемой, например для первой среды, из соотношения [7]

$$\bar{\Theta}_1 = \frac{s}{R_1^2 w_{1cp}} \sum_{i=1}^s \Theta_i w_i r_i \Delta r,$$

где R_1 , w_{1cp} — соответственно радиус внутренней трубы и средняя скорость первой среды.

При расчетах на ЦВМ профиль скоростей $\omega(r)$ по обеим средам заменялся средними интегральными значениями на четырех интервалах. Это соответствовало четырем коаксиальным слоям, каждый из которых описывался уравнением системы (1). Такого сравнительно небольшого числа уравнений для описания радиальных и продольных изменений температуры в аппарате оказалось в данном случае достаточно для расчетов [6]. При получении системы (1) не принимались во внимание пристеночные слои, ввиду их малой толщины и теплоемкости, трение между слоями и предполагалось, что во входных участках труб профиль скоростей устанавливался мгновенно.

Средние массовые температуры на входах аппарата

$$\bar{\theta}_1(0, t) = 0,54; \bar{\theta}_2(1, t) = 0.$$

Стационарные распределения

$$Y_i(x) = 0 \quad (i=1, 2, 3); Y_4(x) = 1.$$

В качестве управляющего устройства U был взят типовой ПИ-регулятор. Исследовалась динамика замкнутой системы при вариации координат точек контроля и управления при фиксированной настройке регулятора. Как показывают теоретические и экспериментальные исследования [5, 8], динамические свойства системы управления распределенными процессами во многом зависят от того, насколько рационально выбрана структура системы управления. Поэтому нами на цифровой модели системы управления, описываемой уравнениями (1)–(3), моделировались различные структурные варианты системы, фиксировалась точка контроля по первой среде, а точка ввода управляющего воздействия во второй среде варьировалась, и наоборот. При этом настройки регулятора не менялись ($K_p=1$, $T_u=0,1$). Рассматривались и такие структурные варианты системы: точка контроля варьировалась, а управляющее воздействие вводилось сразу в несколько сечений второй среды. Результат одного такого численного эксперимента приведен на рис. 2, где θ_1 и θ_2 — температура коаксиальных слоев; $\bar{\theta}_1$ — средняя массовая температура управляемой первой среды. При этом точка контроля находилась на выходе из аппарата, а управляющее воздействие вводилось сразу в четыре сечения второй среды.

В составленной алгол-программе на ЦВМ была предусмотрена возможность вариации структуры системы управления. Время счета одного

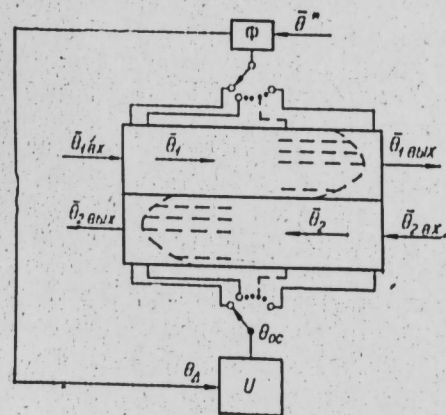


Рис. 1. Принципиальная схема системы управления.

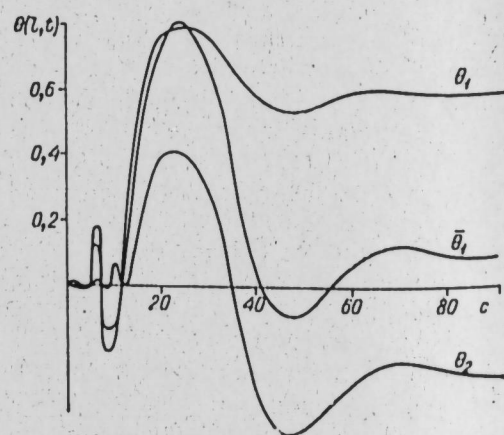


Рис. 2. Переходные кривые в первой среде при распределенном воздействии.

Параметры процесса: $\omega_1=0,76$; $\omega_2=0,606$; $\omega_3=1,139$; $\omega_4=1,103$; $\kappa_{11}=\kappa_{12}=0,0182$; $\kappa_{21}=0,0123$; $\kappa_{22}=0,0068$; $\kappa_{31}=0,0421$; $\kappa_{32}=0,0363$; $\kappa_4=0,416$; $k=2$; $h=2,592$.
Размерности коэффициентов: ω — м/с; κ — с⁻¹, k — с; h — м.

варианта системы при числе шагов по пространственной и временной координатам, равным соответственно 5 и 50, составило 6 мин.

В итоге численных экспериментов в случае одноконтурной системы управления, т. е. при одной точке контроля и управления при фиксированных параметрах системы и условиях на выходах, были получены следующие результаты. Профили скоростей приводят к сглаживанию переходных процессов. Зависимость между величиной $d_{ij}=(i-j)$, где j — координата точки контроля, i — координата точки управления, и величиной разности P между максимумом отклонения переходного процесса и некоторым заданным значением, в данном случае установившимся процессом при $d_{ij}=0$ ($i=5, j=5$), имеет линейный вид. При данных параметрах системы управления уравнения этих прямых следующие:

$$P = -0,82d_{5j} + 4,5, \quad d_{5j} \geq 0 \quad (j=1, 2, \dots, 5);$$

$$P = 0,14d_{i5} + 4,5, \quad d_{i5} \leq 0 \quad (i=1, 2, \dots, 5).$$

Такая линейная зависимость в одноконтурной линейной системе объясняется тем, что величина d/w определяет время упреждения компенсации возмущения регулятором.

Действительно, при $j < i$ сигнал о возмущении из j -го сечения аппарата поступает через регулятор в i -е сечение и, хотя еще возмущение не дошло до i -го сечения, регулятор уже начинает компенсировать возмущение. При $j > i$ фронт возмущения проходит i -е сечение и не контактирует с регулирующим воздействием.

Таким образом, на полученной модели замкнутой распределенной системы можно решать различные задачи оптимизации, связанные с выбором структуры системы управления, настройками регулятора, определением характеристик температурных полей в аппарате.

Институт физики СО АН СССР,
Красноярск

Поступила в редакцию
6/1 1975

ЛИТЕРАТУРА

1. G. I. Taylor. Proc. Roy. Soc., 1954, A 223, № 1156.
2. В. В. Кафаров, В. В. Шестопалов и др. Докл. АН СССР, 1967, 176, № 4.
3. Р. Ариэ. Анализ процессов в химических реакторах. Л., «Химия», 1967.
4. В. И. Потапов, Б. Н. Девятков. Изв. Сиб. отд. АН СССР, сер. техн. наук, 1970, № 8, вып. 2.
5. В. И. Девятков, Н. Д. Демиденко, Б. А. Фейст. Изв. Сиб. отд. АН СССР, сер. техн. наук, 1972, № 8, вып. 2.
6. В. И. Потапов, Б. Н. Девятков. Автоматизация химических производств. Тр. НИИТЭХИМ, 1973, вып. 2.
7. Б. С. Петухов. Теплообмен и сопротивление при ламинарном течении жидкости в трубах. М., «Энергия», 1967.
8. Б. Н. Девятков. Изв. Сиб. отд. АН СССР, сер. техн. наук, 1974, № 13, вып. 3.

В. Н. ПОТАПОВ, Е. А. ВАГАНОВ, А. С. ИСАЕВ,
П. В. ЕФИМОВ

АНАЛИЗ С ПОМОЩЬЮ ЦВМ СТРУКТУРЫ ПОСЛОЙНЫХ ОБЪЕКТОВ ПО ИХ ИЗОБРАЖЕНИЮ

В природе широко распространены объекты, которые в процессе своего роста и эволюции приобретают послойную структуру. Чаще всего это биологические объекты. К классу рассматриваемых объектов можно отнести древесину, некоторые органы живых существ, чешуйки рыб и т. п., а также некоторые геологические образования, например сталактиты, минералы. За определенные промежутки времени, например за год, у них образуются один или несколько слоев.

В последнее время детальное изучение структуры подобных объектов привлекает внимание многих исследователей: биологов, дендрологов, климатологов, экологов, таксаторов. Это объясняется тем, что в структуру таких объектов заложена информация о процессах, сопровождающих их образование или рост.

В структуре годичных слоев древесины отражены условия роста деревьев. Динамика толщины слоя для какого-либо периода роста дерева отражает специфику воздействия того или иного фактора. При сильной летней засухе на годичном кольце уменьшается плотность поздней древесины, сокращается процент поздней зоны слоя текущего года. На структуру годичных слоев влияют повреждение дерева насекомыми-вредителями [1], пожары, радиоактивное излучение. Формирование годичного слоя тесно связано с условиями произрастания.

Анализ структуры послойных объектов проводится вручную. Для этого делается срез или берется образец, изображение которого, как правило, представляет собой множество эквидистантных кривых, полос, утолщений. По этому изображению визуально или с помощью микроскопа определяются качественные, реже количественные показатели структуры объекта. Подсчет числа линий, расстояний между ними, определение других показателей — кропотливый, малопроизводительный труд. Определение физико-механических свойств древесины дистанционными методами по изображению среза при обработке ее на автоматической линии вручную совершенно невозможно. Автоматизировать процесс анализа изображений можно с применением быстродействующих вычислительных устройств.

Автоматический анализ изображений включает два этапа: считывание изображений устройствами ввода и непосредственную обработку по специально разработанному алгоритму. Вывод результатов может осуществляться в различной форме. При обработке двумерных сложных изображений на ЦВМ требуется большой объем памяти. В данной задаче вследствие сравнительно простого изображения можно обойтись одним измерением. Для этого сканирующим лучом проводят одну секущую и получают фотометрическую кривую.

В работах [2—4] представлен микрофотометрический анализатор, с помощью которого получают регистрограммы изображений в отраженном свете. В этих кривых отображаются особенности структуры послойных объектов. Тем самым в какой-то мере выполняется первый этап анализа.

В данной работе рассматривается задача создания алгоритма по обработке изображений срезов или образцов послойных объектов с целью определения количественных показателей их структуры по фотометрическим кривым. Алгоритм разрабатывался для анализа образцов древесины. С помощью алгоритма определяется десять показателей. Это число в каждом конкретном случае может корректироваться в зависимости от практических целей. Алгоритм описан на языке АЛГОЛ и отлажен на ЭВМ М-222. В число определяемых признаков включены, на наш взгляд, основные, наиболее необходимые при обработке, исследовании древесины.

Блок-схему алгоритма можно подразделить на три блока (выделены штриховыми линиями на схеме): блок предварительной обработки кривой $x(r)$, блок анализа структуры каждого годичного слоя, блок анализа структуры всего образца.

Кривую $x(r)$ можно представить как реализацию нестационарного случайного процесса $X(r)$, где r — пространственная переменная, выражаемая в единицах длины радиуса ствола дерева. Нестационарность $X(r)$ обуславливается тем, что отражательная способность ядра и отражательная способность заболони древесины различны.

Реализацию $x(r)$ представим на интервале T в дискретном виде x_i ($i=1, 2, \dots, n$) с шагом Δr , выбранным из общепринятых положений [5]. По общему виду реализации $x(r)$ следует отнести к гармоническому сигналу с шумом.

Поэтому для анализа ее требуется предварительная обработка.

К предварительной обработке реализации $x(r)$ относятся скользящее усреднение и получение квазистационарного процесса [6]. Эти операции осуществляются оператором сглаживания

$$M(r) = \frac{1}{g+1} \sum_{i=0}^g x(r + iT_0), \quad (1)$$

оператором квазистационарности

$$Y(r) = \frac{x(r)}{M(r)} - 1, \quad (2)$$

где $T_0 = T_{\text{сгл}}/g$; $T_{\text{сгл}}$ — интервал усреднения; g — число опросов в интервале $T_{\text{сгл}}$.

В блок предварительной обработки входит оператор по вычислению первых разностей

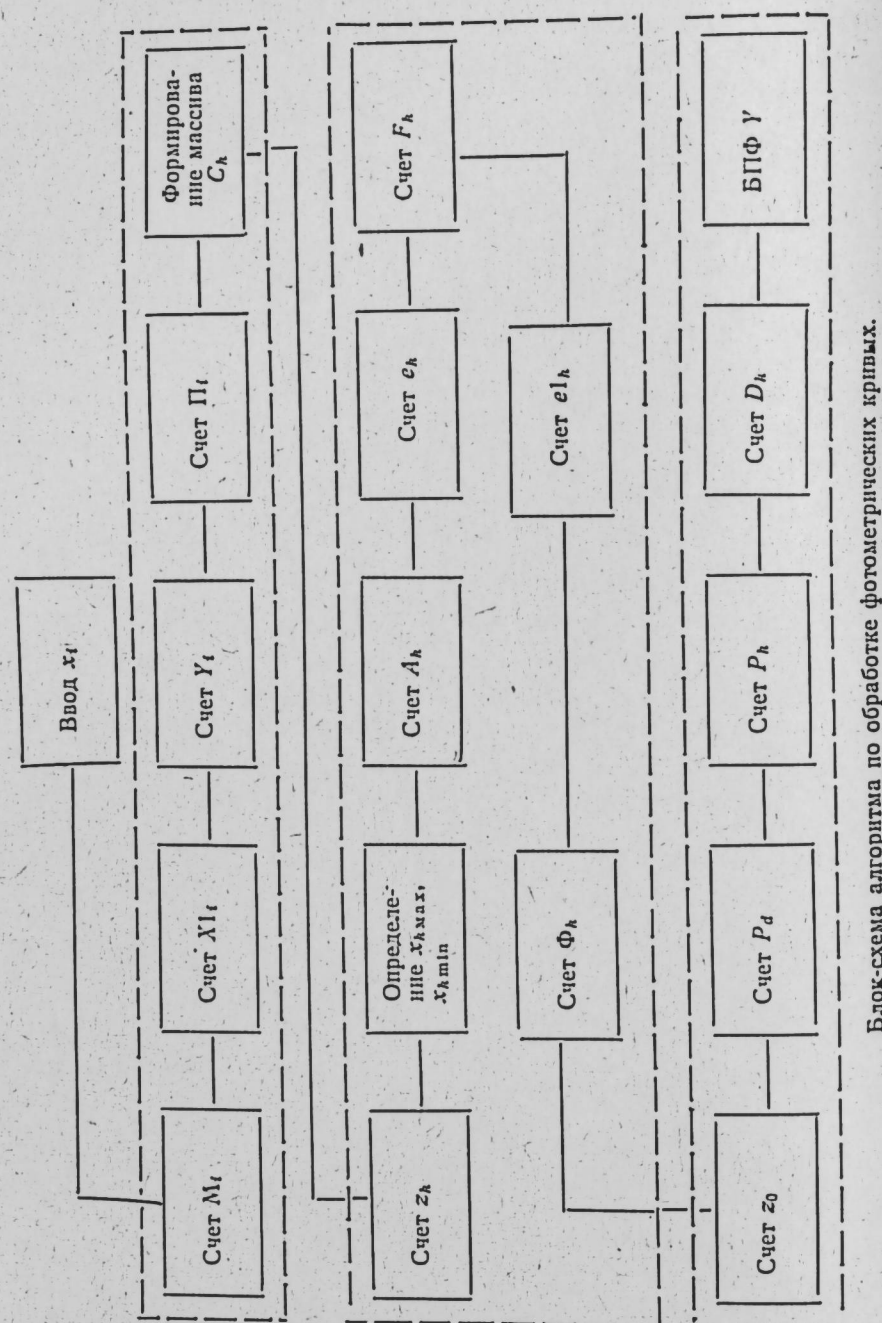
$$X1(r) = x(r + \Delta r) - x(r) \quad (3)$$

и оператор по клипированию реализации

$$П(r) = \begin{cases} 0, & \text{если } M(r) - x(r) < 0; \\ 1, & \text{если } M(r) - x(r) \geq 0. \end{cases} \quad (4)$$

Для определения границ слоев применяется блок формирования массива граничных точек. При этом на интервале T прослеживается функция $П(r)$ и запоминаются адреса узлов C_k , в которых происходит переключение релейной функции $П(r)$ вида или (0,1), или (1,0). Число этих узлов соответствует количеству слоев N .

В блок анализа слоя входят операторы по определению толщины его, согласно которым подсчитывается число узлов реализации внутри интервалов (C_k, C_{k+1}) ($k=1, 2, \dots, N$) и умножается на Δr . В резуль-



тате выполнения операторов определяется толщина каждого слоя z_k ($k=1, 2, \dots, N$).

В каждом интервале (C_k, C_{k+1}) определяется точка, в которой отражение максимально $x_{k \max}$ и минимально $x_{k \min}$, определяется разность между ними A_k и отношения $e_k = A_k/x_{k \max}$, $e1_k = A_k/z_k$. Далее вычисляется показатель динамики роста слоя в течение сезона

$$F_k = \frac{100}{z_k} \sum_{j=1}^s X1_j, \quad (5)$$

где $X1_j$ — положительные разности в k -м слое.

Для k -го слоя определяется процент поздней древесины

$$\Phi_k = \frac{100 \cdot \Delta r \cdot \alpha}{z_k} \sum_{j=1}^m \Pi_j \quad (6)$$

где $\Pi_j < 0$ в k -м слое. Коэффициент α характеризует величину переходной зоны от ранней древесины к поздней и имеет разные значения для пород деревьев. Для лиственницы $\alpha=0,9$, для сосны $\alpha=0,5$.

В блок анализа структуры всего образца входят операторы по вычислению средней ширины слоя

$$\bar{z} = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N z_k, \quad (7)$$

по вычислению текущего прироста P_d за a лет по известной из таксации формуле [7].

Определяется показатель повреждения деревьев по формуле

$$P_k = A_k/\bar{z}, \quad (8)$$

а также вычисляется функция роста ствола $D(r)$ за исследуемый период времени:

$$D_k = \sum_{k=1}^N z_k. \quad (9)$$

Заключительным блоком алгоритма является быстрое преобразование Фурье (БПФ) функции $Y(r)$, которое может использоваться для преобразования и вновь рассчитанных функций z_k, F_k с целью выявления периодических составляющих и других показателей.

Физическая интерпретация каждого вычисленного показателя в конкретной области знаний имеет свой смысл. Например, в деревообработке величина A_k может служить индикатором выбора красителя древесины, а в биологии этот показатель отражает особенности анатомического строения древесины. Или ширина колец z_k характеризует физико-механические свойства древесины, а также климатические условия и т. п. Поэтому на интерпретации полученных показателей мы здесь не останавливаемся.

По данному алгоритму обрабатывались фотометрические кривые образцов древесины хвойных пород деревьев. Значения некоторых показателей сравнивались с данными, полученными визуально. В таблице приведены показатели структуры одного из образцов древесины сосны. Данные, обозначенные буквой со штрихом, получены визуально. Сравнение визуальных и машинных результатов показывает, что соответствие между ними вполне удовлетворяет практическим целям.

Время обработки по данному алгоритму реализации в 384 узла составляет 26 мин вместе с вводом и выводом результатов.

κ	z , мм	z' , мм	Φ , %	Φ' , %	$x_{\max}$	$x'_{\max}$	$x_{\min}$	$x'_{\min}$	A	$c \cdot 10$	F , %	D , мм	el	P
1	1,06	1,22	6,50	8,2	57,9	59,5	45,0	45,0	12,90	2,22	45,4	1,06	12,16	5,61
2	2,44	2,15	24,20	23,2	57,5	58,0	38,8	38,5	18,70	3,25	53,3	3,50	7,66	8,13
3	2,22	2,15	22,10	17,2	62,3	58,5	41,6	41,3	20,40	3,29	52,1	5,72	9,18	8,87
4	2,42	2,78	16,30	19,4	67,0	62,0	40,1	40,2	26,90	4,01	48,0	8,14	11,10	11,70
5	3,20	3,50	17,50	24,9	65,6	67,0	40,8	40,8	24,80	3,78	42,4	11,34	7,75	10,80
6	3,76	3,60	29,30	17,3	65,7	65,7	45,2	45,2	20,50	3,12	48,7	15,10	5,45	8,90
7	2,70	2,28	12,10	8,8	66,0	66,0	56,2	56,1	9,80	1,48	67,8	17,80	3,62	4,26
8	2,32	2,45	17,60	9,0	63,7	63,8	54,5	54,4	9,19	1,44	79,1	20,12	3,90	3,99
9	1,64	1,80	21,30	11,7	65,0	65,0	55,2	55,0	9,80	1,50	33,3	21,76	5,97	4,26
10	1,54	1,35	14,00	5,2	63,4	63,5	58,0	52,7	5,40	0,85	43,7	23,30	3,50	2,35
11	1,93	1,63	21,40	25,8	66,3	66,3	52,0	50,8	14,30	2,15	64,2	25,23	7,40	6,21
12	3,00	3,23	24,20	18,9	65,0	67,0	45,0	45,0	20,00	3,07	45,1	28,23	6,66	8,69

Стыковка считывающего устройства с ЦВМ значительно повысит производительность камеральных дендроклиматологических, таксационных и исследовательских работ. Разработанный алгоритм можно реализовать и в специальном цифроаналоговом устройстве по анализу структуры послойных объектов.

Институт физики СО АН СССР,
Красноярск

Поступила в редакцию
6/1 1975

ЛИТЕРАТУРА

1. Е. А. Ваганов, А. С. Исаев, Ю. П. Кондаков. Матер. II. Всес. совещ. по дендрологии, дендроклиматологии. Каунас, 1972.
2. Е. А. Ваганов, В. В. Спиров, И. А. Терсков. Изв. Сиб. отд. АН СССР, сер. биол. наук, 1972, № 5, вып. 1.
3. И. А. Терсков, Е. А. Ваганов, В. В. Спиров. Изв. Сиб. отд. АН СССР, сер. биол. наук, 1972, № 15, вып. 3.
4. В. В. Спиров, И. А. Терсков. Лесоведение, 1973, 5.
5. Дж. Бендат, А. Пирсол. Измерение и анализ случайных процессов. М., «Мир», 1974.
6. Г. Я. Мирский. Аппаратурное определение характеристик случайных процессов. М., «Энергия», 1972.
7. Н. П. Анучин. Лесная таксация. М., «Лесная промышленность», 1971.

ИЗВЕСТИЯ СИБИРСКОГО ОТДЕЛЕНИЯ АКАДЕМИИ НАУК СССР

№ 8, вып. 2

СЕРИЯ ТЕХНИЧЕСКИХ НАУК

1975

УДК 62—52.001.24

Н. Д. ДЕМИДЕНКО, С. В. УШАНОВ

МОДЕЛИРОВАНИЕ, РАСПРЕДЕЛЕННЫЙ КОНТРОЛЬ И РАСПРЕДЕЛЕННОЕ УПРАВЛЕНИЕ ПРОЦЕССАМИ РЕКТИФИКАЦИИ

Во многих отраслях химической технологии (нефтепереработка, нефтехимия и др.) для получения высокочистых продуктов широко применяются многотарельчатые ректификационные установки. Значительные энергетические затраты, связанные с разделением многокомпонентных смесей, и высокие требования, предъявляемые к чистоте получаемых продуктов, делают актуальной задачу создания высокоэффективных систем автоматического регулирования. Из многих средств, обеспечивающих построение таких систем, можно выделить распределенный контроль и распределенное управление. При постановке задач по распределенному контролю и управлению следует учитывать типовые особенности объекта управления. С точки зрения реализации распределенного контроля и управления в промышленных установках целесообразно решение задач по дискретному распределенному контролю и управлению. В настоящее время имеются системы автоматического управления ректификационными колоннами, в которых выбираются оптимальные тарелки контроля температуры или концентрации. Имеет также смысл задача выбора одной или нескольких оптимальных точек ввода сырья (внешнее воздействие [1, 2]). В работе [2] показано, что по длине аппарата существует некоторая промежуточная точка подачи внешнего воздействия, обеспечивающая объекту наилучшую регулируемость. Однако выбором таких точек не исчерпывается задача распределенного управления. Канал внешнего воздействия может быть использован в целях повышения качественных показателей систем управления, особенно в установках с несколькими ректификационными колоннами.

В соответствии с изложенным выше математическая модель управляемого процесса должна обеспечивать необходимую информацию о состоянии этого процесса в каждой точке аппарата и учитывать возможность применения распределенного управляющего воздействия (непрерывного или дискретного по длине аппарата). Такая модель может быть получена из представлений о ректификационной колонне как объекте с распределенными параметрами.

Рассмотрим пример системы управления, в которой применен распределенный контроль за тепловым и массообменным процессами.

Схема автоматического регулирования ректификационных колонн, в которой имеется обратная связь по качеству целевого продукта, обеспечивающая максимальный его выход [3], может быть реализована двумя вариантами в зависимости от температуры сырья, подаваемого в колонну. Если температура вводимого сырья недостаточна для получения заданной доли отгона, то датчик температуры в зоне ввода устанавливается на 2—3 тарелки ниже тарелки, на которую подается сырье,

и регулятор должен воздействовать на подачу тепла (пара) в рубойлер низа колонны. Работа этого регулятора автоматически корректируется анализатором качества (хроматографом), измеряющим состав паров на контрольной тарелке в верхней части колонны. При этом подача орошения в колонну стабилизируется. Если температура подаваемого сырья с запасом обеспечивает требуемую долю отгона, то датчик температуры в зоне ввода устанавливается на 2—3 тарелки выше тарелки, на которую подается сырье. Регулятор в этом случае воздействует на подачу орошения. Работа регулятора также автоматически корректируется хроматографом, измеряющим состав паров на контрольной тарелке. Подача пара в рубойлер стабилизируется.

Для этих схем управления имеет смысл задача оптимального выбора контрольных тарелок по температуре и концентрации. При этом математическая модель должна отражать в динамике тепловые, массообменные и гидродинамические процессы.

Известны самые общие модели процессов тепломассообмена [4]. Применение таких моделей в задачах управления (в особенности в задачах оптимального управления) чрезвычайно затруднено: не решен вопрос о корректности; трудности в идентификации процесса, в построении и обосновании вычислительных алгоритмов и реализации их на ЭВМ.

Таким образом, встает задача построения математической модели процесса ректификации, которая с точки зрения задач управления отражала бы наиболее существенные стороны его и вместе с тем была удобна и проста с точки зрения разработки вычислительных алгоритмов и использования ее в инженерной практике.

В настоящее время широко применяются модели процесса ректификации с сосредоточенными параметрами. В расчетах статических и динамических характеристик распространен метод «от тарелки к тарелке», который в многотарельчатых колоннах становится малоэффективным при расчете нестационарных режимов. Потарелочный расчет предполагает определение параметров процесса в паровой и жидкой фазах на всех тарелках, включая дефлегматор и куб, путем решения системы нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений большой размерности. При этом число уравнений пропорционально количеству тарелок в колонне. Это приводит к недопустимо большим затратам машинного времени и использованию большого объема памяти ЭВМ. Метод в лучшем случае позволяет рассчитать только начальные участки кривых разгона для многотарельчатых колонн. Объяснить это можно еще и тем, что переходные режимы в многотарельчатых колоннах весьма длительные (до нескольких суток). Все это затрудняет решение задач по распределенному контролю и распределенному управлению. Указанные трудности значительно уменьшаются для моделей с распределенными параметрами.

ВЫВОД УРАВНЕНИЙ НЕСТАЦИОНАРНЫХ РЕЖИМОВ МНОГОКОМПОНЕНТНЫХ СМЕСЕЙ

Рассмотрим процесс ректификации многокомпонентных смесей. При выводе дифференциальных уравнений исходим из предположения о непрерывности процесса по длине колонны. Вообще говоря, это предположение верно лишь для насадочных колонн. Однако, как указывается в [5], рассмотрение процесса ректификации как непрерывного по длине многотарельчатой колонны не приводит к существенным ошибкам при анализе статических и динамических характеристик и поэтому вполне допустимо при их исследовании. Выделим элементарный участок колонны высотой dl (рис. 1). При выводе уравнений нестационар-

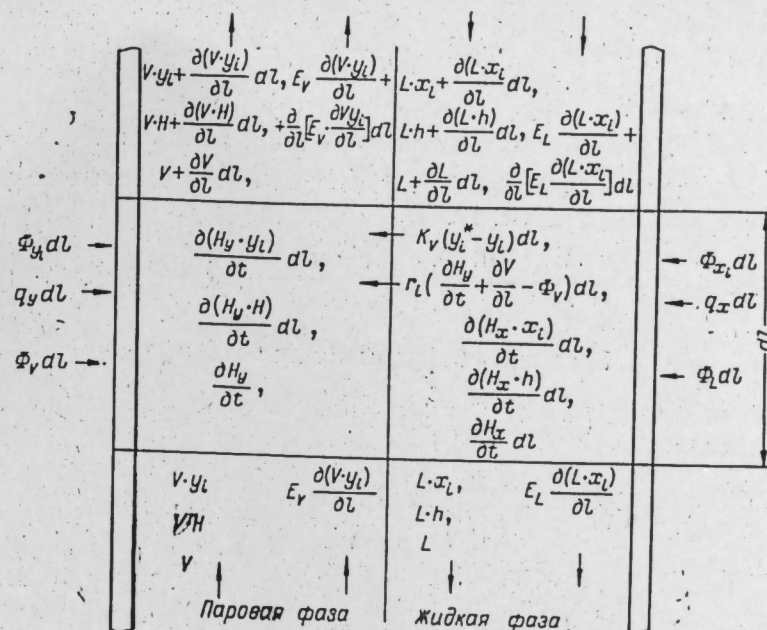


Рис. 1.

ных режимов имеем в виду основные допущения и ограничения, приведенные в [5—7].

Уравнение массообмена в переходном режиме

Составим уравнение материального баланса в жидкой фазе с учетом направления движения фаз и направления массообмена для i -го компонента (рис. 1):

$$Lx_i + \frac{\partial(Lx_i)}{\partial t} dl - Lx_i + E_L \frac{\partial x_i}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial t} \left[E_L \frac{\partial x_i}{\partial t} \right] dl - E_L \frac{\partial x_i}{\partial t} - r_i \left(\frac{\partial H_y}{\partial t} + \frac{\partial V}{\partial t} - \Phi_v \right) dl + \Phi_{x_i} dl - K_y (y_i^* - y_i) dl = \frac{\partial(H \cdot x_i)}{\partial t} dl,$$

откуда

$$\frac{\partial(H \cdot x_i)}{\partial t} - \frac{\partial(L \cdot x_i)}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial t} \left[E_L \frac{\partial x_i}{\partial t} \right] = K_y (y_i^* - y_i) + \Phi_{x_i} - r_i \left(\frac{\partial H_y}{\partial t} + \frac{\partial V}{\partial t} - \Phi_v \right). \quad (1)$$

Аналогично получаем уравнение массообмена в паровой фазе:

$$\frac{\partial(H_y \cdot y_i)}{\partial t} + \frac{\partial(V \cdot y_i)}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial t} \left[E_v \frac{\partial y_i}{\partial t} \right] = K_y (y_i^* - y_i) + \Phi_{y_i} + r_i \left(\frac{\partial H_y}{\partial t} + \frac{\partial V}{\partial t} - \Phi_v \right), \quad (2)$$

где

$$r_i = y_i^* (x_i) \quad \text{при} \quad \left(\frac{\partial H_y}{\partial t} + \frac{\partial V}{\partial t} - \Phi_v \right) \geq 0$$

(при испарении),

$$r_i = x_i^*(y_i) \quad \text{при} \quad \left(\frac{\partial H_y}{\partial t} + \frac{\partial V}{\partial t} - \Phi_V \right) < 0 \quad (3)$$

(при конденсации).

Уравнение нестационарной теплопередачи

Составим уравнение теплового баланса для элементарного участка колонны высотой dl (см. рис. 1):

$$mc \frac{\partial T}{\partial t} + \frac{\partial (H_x \cdot h)}{\partial t} + \frac{\partial (H_y \cdot H)}{\partial t} = \frac{\partial (L \cdot h)}{\partial t} - \frac{\partial (V \cdot H)}{\partial t} + q_v + q_x. \quad (4)$$

Уравнение неразрывности потока

Уравнение неразрывности потока получается аналогично предыдущим и имеет вид

$$\frac{\partial H_x}{\partial t} + \frac{\partial H_y}{\partial t} = \frac{\partial L}{\partial t} - \frac{\partial V}{\partial t} + \Phi_V + \Phi_L, \quad (5)$$

где E_L, E_V — коэффициенты продольного (обратного) перемешивания в жидкой и паровой фазах соответственно, кмоль·м/ч; L, V — потоки жидкости и пара соответственно, кмоль/ч; H_x, H_y — удерживающие способности по жидкости и пару, кмоль/м; x_i, y_i ($i=1, 2, \dots, n$) — концентрации i -го компонента в жидкой и паровой фазах, мольные доли; $x_i^*(y_i)$ — равновесные концентрации в жидкой и паровой фазах, мольные доли; Φ_x, Φ_y — плотности вводимых и отводимых потоков i -го компонента в жидкой и паровой фазах, кмоль/ч·м; K_v — коэффициент массопередачи в паровой фазе, кмоль/ч·м; $t \in [0, T], l \in [0, 1]$ — временная и пространственная координаты; m — масса участка колонны единичной высоты, кмоль; T — температура; c — удельная теплоемкость ккал/град·кмоль; h, H — энтальпия жидкости и пара, ккал/кмоль; q_v, q_x — плотности вводимых и отводимых потоков тепла паровой и жидкой фаз, ккал/м·ч; Φ_v, Φ_L — плотности потоков пара и жидкости, кмоль/м·ч.

Определим плотность потока i -го компонента в жидкой фазе при дискретном вводе или выводе его из колонны в m точках.

Для учета внешнего воздействия в дискретно распределенных точках по длине колонны, обусловленного подачей сырья и отбором продуктов, используем единичную функцию Хевисайда:

$$\xi(l-l_j) = \begin{cases} 0 & \text{при } l < l_j, \\ 1 & \text{при } l > l_j, \end{cases}$$

где $l_j \geq 0$ ($j=1, \dots, m$) — координаты точек ввода сырья и вывода продуктов разделения.

Содержание i -го компонента в j -й зоне ввода в элементе dl равно

$$L_j \cdot x_{ij} \frac{\xi(l-l_j) - \xi[(l-l_j) - dl]}{dl}.$$

Переходя к пределу при $dl \rightarrow 0$, получаем

$$L_j \cdot x_{ij} \cdot \delta(l-l_j),$$

где $\delta(l-l_j)$ — дельта-функция Дирака.

Легко показать, что

$$\Phi_{x_i} = \sum_{j=1}^m L_j \cdot x_{ij} \cdot \delta(l-l_j). \quad (6)$$

Аналогично

$$\Phi_{y_i} = \sum_{j=1}^m V_j \cdot y_{ij} \cdot \delta(l-l_j),$$

$$\Phi_V = \sum_{j=1}^m V_j \cdot \delta(l-l_j), \quad \Phi_L = \sum_{j=1}^m L_j \cdot \delta(l-l_j), \quad (7)$$

$$q_x = \sum_{j=1}^m L_j \cdot h_j \cdot \delta(l-l_j), \quad q_y = \sum_{j=1}^m V_j \cdot H_j \cdot \delta(l-l_j).$$

Знак плюс или минус у слагаемого в (6) и (7) зависит от того, соответствует ли оно вводу или выводу потока.

Для n -компонентных смесей уравнения (1)–(2) запишем в векторной форме.

Введем следующие вектор-функции:

$x = (x_1, \dots, x_n)$ — вектор компонентов, содержащихся в разделяющей смеси в жидкой фазе; $y = (y_1, \dots, y_n)$ — вектор компонентов, содержащихся в разделяющей смеси в паровой фазе; $y^* = (y_1^*, \dots, y_n^*)$ — вектор компонентов паровой фазы в равновесном состоянии; $r = (r_1, \dots, r_n)$ — вектор, определенный условиями (3); $x_j = (x_{1j}, \dots, x_{nj})$ — вектор компонентов, составляющих исходную смесь в j -й точке ввода в жидкой фазе; $y_j = (y_{1j}, \dots, y_{nj})$ — вектор компонентов, составляющих исходную смесь в j -й точке ввода в паровой фазе;

$$\Phi_x = (\Phi_{x_1}, \dots, \Phi_{x_n}), \quad \Phi_y = (\Phi_{y_1}, \dots, \Phi_{y_n}).$$

Тогда система уравнений, описывающих процесс ректификации, может быть представлена в следующем виде:

$$\begin{aligned} \frac{\partial (H_x \cdot x)}{\partial t} - \frac{\partial (L \cdot x)}{\partial t} &= K_y (y - y^*) + \Phi_x - r \left(\frac{\partial H_y}{\partial t} + \frac{\partial V}{\partial t} - \Phi_V \right), \\ \frac{\partial (H_y \cdot y)}{\partial t} - \frac{\partial (V \cdot y)}{\partial t} &= K_y (y^* - y) + \Phi_y + r \left(\frac{\partial H_y}{\partial t} + \frac{\partial V}{\partial t} - \Phi_V \right), \\ \frac{\partial (H_y \cdot H)}{\partial t} + \frac{\partial (H_x \cdot h)}{\partial t} - \frac{\partial (L \cdot h)}{\partial t} + \frac{\partial (V \cdot H)}{\partial t} &= q_x + q_y, \\ \frac{\partial V}{\partial t} - \frac{\partial L}{\partial t} + \frac{\partial H_y}{\partial t} + \frac{\partial H_x}{\partial t} &= \Phi_V + \Phi_L, \end{aligned} \quad (8)$$

где H и h — известные функции $x(t, l)$ и $y(t, l)$.

Система уравнений (8) является квазилинейной гиперболической системой и может быть решена численными методами. Первые два уравнения системы используются для определения концентрации в жидкой и паровой фазах, а оставшиеся два определяют распределение потоков пара и жидкости по длине колонны во времени.

НАЧАЛЬНЫЕ И ГРАНИЧНЫЕ УСЛОВИЯ

Для того чтобы из системы уравнений (8) выделить одно решение, соответствующее какому-либо реальному режиму, дополним эту систему начальными и граничными условиями:

$$x(0, l) = \varphi_1(l), \quad y(0, l) = \varphi_2(l), \quad V(0, l) = \varphi_3(l), \quad L(0, l) = \varphi_4(l),$$

где $\varphi_i(l) = (\varphi_{i1}(l), \dots, \varphi_{in}(l))$ ($i=1, 2, 3, 4$) — вектор-функции начальных условий.

Граничные условия дают уравнения, описывающие тепломассообменный процесс в кубе и дефлегматоре колонны [6]:

$$\frac{d(H_{x_k} \cdot x_k(t))}{dt} = L(0, t) x(0, t) - V(0, t) y(0, t) - W \cdot x_k(t),$$

$$y(0, t) = y_k, \quad (9)$$

$$\frac{d(H_{x_k} \cdot h_k(t))}{dt} = L(0, t) \cdot h(0, t) - V(0, t) H(0, t) - W \cdot h_k(t) + Q_k,$$

$$\frac{dH_{x_k}}{dt} = L(0, t) - V(0, t) - W.$$

$$\frac{d(H_{x_d} x(1, t))}{dt} = V_d y(1, t) - (L_d + D) x(1, t),$$

$$\frac{d(H_{x_d} h_d(t))}{dt} = V_d H(1, t) - (L_d + D) h_d(t) - Q_d, \quad (10)$$

$$\frac{dH_{x_d}}{dt} = V_d - (L_d + D), \quad V_d - V(1, t) = L_d - L(1, t),$$

$$[V_d - V(1, t)] H(1, t) = L_d \cdot h_d - L(1, t) h(1, t).$$

В выражениях (9)–(10) приняты следующие обозначения: k, d — индексы, соответствующие параметрам куба и дефлегматора колонны; Q_k, Q_d — тепловые нагрузки на куб и дефлегматор; W — расход кубового остатка; D — расход дистиллята; L_d — расход флегмы.

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ РАСПРЕДЕЛЕННОГО КОНТРОЛЯ И УПРАВЛЕНИЯ

Полученная модель процесса удовлетворяет перечисленным введении требованиям, обеспечивающим построение высокоэффективных систем управления. Для рассматриваемой системы управления сформулируем задачу оптимального распределенного контроля и распределенного управления. Вводя распределенное управление, будем здесь иметь в виду определение оптимальной точки ввода сырья.

В приведенном примере управляющими воздействиями являются подача тепла в кубе Q_k и расход флегмы L_d , т. е.

$$Q_k = f^1(T(l_1, t), y(l_2, t)), \quad (11)$$

$$L_d = f^2(T(l_3, t), y(l_4, t)). \quad (12)$$

За критерий качества системы управления примем следующий функционал:

$$I = \int_0^T (\theta^* - y(1, t))^2 dt, \quad (13)$$

где θ^* — значение требуемой концентрации.

Тогда для первой схемы задачу дискретного распределенного контроля и управления сформулируем следующим образом.

Для управляемого процесса (8) найти такие точки контроля температуры и концентрации и такую точку ввода сырья с координатами соответственно l_i ($i=1, 2$) и l^j ($j=1$), которые при законе регулирования (11) и $L_d = \text{const}$ минимизируют функционал (13).

Формулировка задачи для второй схемы управления аналогична, но вместо регулятора (11) берется регулятор (12), а вместо условия $L_d = \text{const}$ — условие $V(0, t) = \text{const}$.

ПРИМЕР

В качестве примера приведем результаты расчетов статических и динамических характеристик для изопентан-пентановой колонны К-6 ЦГФУ-2 на Новокуйбышевском нефтеперерабатывающем комбинате. Разработанный вычислительный алгоритм реализован на ЭВМ М-222. На рис. 2 показано изменение во времени концентрации изопентана в кубе, дефлегматоре, на 10 и 20 тарелках при скачкообразном возмущении в потоке сырья на величину 5% от исходного. Начальные условия $x(0, t), y(0, t)$ соответствуют установившемуся режиму при $L_1 = 172,2$ кмоль/ч; $x_{11} = 0,491$; $D = 80,9$ кмоль/ч; $L_d = 687$ кмоль/ч. По оси ординат отложены величины отклонений текущей концентрации изопентана от исходной.

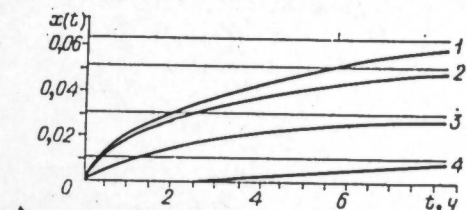


Рис. 2.

1–4 — кривые разгона и соответствующие установившиеся значения $x(\infty)$ на 20 и 10 тарелках, в кубе и дефлегматоре.

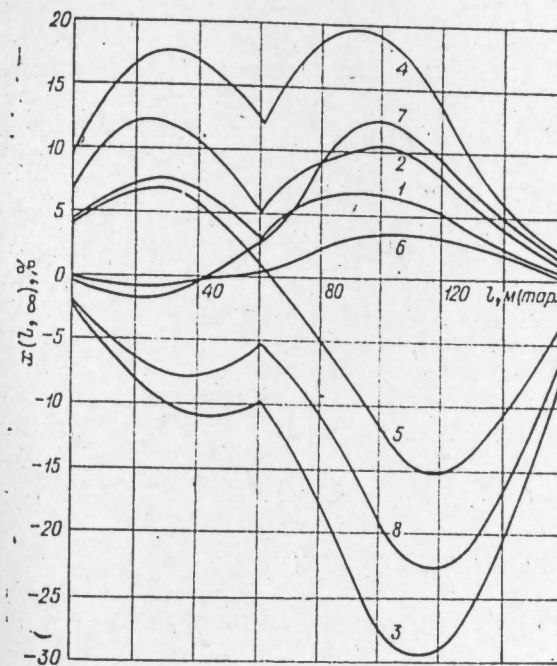


Рис. 3.

Анализ статических режимов рассматриваемой колонны при 10÷20%-ных возмущениях по основным каналам показал наличие двух зон наибольшей чувствительности (рис. 3). Причем ни величина, ни характер рассматриваемых возмущений практически не влияют на расположение этих зон по длине колонны. Зоны наибольшей чувствительности могут быть использованы для выбора контрольных тарелок.

Расчетные статические и динамические характери-

стики хорошо согласуются с экспериментом.

На основе полученной математической модели процесса ректификации разрабатывается автоматическая система управления с использованием распределенного контроля и распределенного управления.

Институт физики СО АН СССР,
Красноярск

Поступила в редакцию
6/1 1975

ЛИТЕРАТУРА

1. W. L. Luypen. Industr. and Engng. Chem. Fundament, 1968, 7, № 3.
2. Н. Д. Демиденко, Ф. Я. Гимельштейн, Б. Н. Девятков. Изв. Сиб. отд. АН СССР, сер. техн. наук, 1970, № 8, вып. 2.
3. С. С. Белозерский, Р. Б. Гуш, В. В. Бирюков, Ю. С. Коган. Нефтепереработка и нефтехимия, 1966, № 5.
4. П. Бенедек, А. Ласло. Научные основы химической технологии. «Химия», 1970.
5. И. В. Анисимов. Комплексное исследование и решение проблемы статической оптимизации управления процессом ректификации. Докт. дис. М., 1969.
6. Альбом математических описаний и алгоритмов управления типовыми процессами химической технологии. М., НИИТЭХИМ, 1965, вып. 1; 1967, вып. 2.
7. В. В. Кафаров. Основы массопередачи. М., «Высшая школа», 1962.

М. В. КОСТЕНКО, А. И. МЕСЕНЯШИН

ЭКСТРЕМАЛЬНЫЕ ЗНАЧЕНИЯ НАПРЯЖЕНИЯ НА ЕМКОСТИ ПРИ КОММУТАЦИИ В КОНТУРЕ R, L, C С ЗАТУХАЮЩЕЙ ГАРМОНИЧЕСКОЙ Э. Д. С.

При анализе переходных процессов в сложных электрических цепях в ряде случаев требуется определить результаты воздействия на сравнительно «маломощный» контур переходного процесса в «мощном» контуре. При этом предполагается, что в первом приближении можно пренебречь обратным влиянием переходного процесса в «маломощном» контуре на переходный процесс в «мощном» контуре. Это допущение значительно упрощает весь анализ. Такое положение имеет место при пробое или другом нарушении работы в одной из параллельных однотипных ветвей, работающих на общую внешнюю цепь — нагрузку, например при пробое конденсатора или запаздывании срабатывания разрядника в этой ветви мощного емкостного накопителя. Аналогичные задачи возникают в установках продольной компенсации и в других электротехнических устройствах при различных коммутациях (в том числе при коротких замыканиях). Ниже приводятся основные соотношения для расчета переходного процесса в «маломощном» контуре при воздействии на него эквивалентной гармонической затухающей э. д. с.

НАПРЯЖЕНИЕ НА ЕМКОСТИ

Напряжение на емкости (рис. 1) определяется из уравнения

$$\frac{d^2 u_C}{dt^2} + 2\alpha \frac{du_C}{dt} + \beta_0^2 u_C = \beta_0^2 e_1, \quad (1)$$

где $e_1 = E_0 e^{-\mu(t+\tau)} \cos[\omega(t+\tau) + \psi_0]$ — эквивалентная э. д. с.; E_0 , μ , ω , ψ_0 — начальное значение, декремент затухания, частота и угол, учитывающий начальную фазу эквивалентной э. д. с.; τ — время, прошедшее от момента начала переходного процесса в мощном контуре до момента коммутации в маломощном контуре; t — текущее время, отсчитываемое от момента коммутации в маломощном контуре; $\alpha = \frac{R}{2L}$, $\beta_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$ — параметры контура с учетом внутреннего сопротивления эквивалентной э. д. с.

Практический интерес могут представлять напряжения на емкостях при двух видах начальных условий (см. рис. 1).

Рис. 1. Схемы коммутаций в контуре R, L, C
а) изменение режима контура;
б) включение контура.

1. Внезапное изменение режима контура. Если до момента коммутации (включение разрядника P, шунтирующего сопротивление Z) был некоторый квазистационавшийся режим, то начальные условия определяются напряжением на емкости $u_C(0) = U_0$ и током через индуктивность $i(0) = I_0$, которые в момент коммутации остаются неизменными:

$$u_C(t)|_{t=0} = U_0 = U_n e^{-\mu\tau} \cos(\omega\tau + \psi_n); \quad (2)$$

$$\frac{du_C(t)}{dt}|_{t=0} = \frac{I_0}{C} = \frac{dU_0}{dt} = U'_0 = -U_n e^{-\mu\tau} [\mu \cos(\omega\tau + \psi_n) + \omega \sin(\omega\tau + \psi_n)], \quad (3)$$

причем U_n и ψ_n определяются предшествующим квазистационавшимся режимом. Таким образом, в этом случае U_0 и U'_0 зависят от момента коммутации τ .

2. Включение ранее разомкнутого контура. При этом

$$u_C(t)|_{t=0} = U_0 = \text{const}; \quad \frac{du_C}{dt}|_{t=0} = \frac{1}{C} i(t)|_{t=0} = 0. \quad (4)$$

Значение U_0 определяется зарядом на емкости вследствие предшествующих процессов и не зависит от момента коммутации τ .

В случае контура с малыми потерями ($\beta_0 > \alpha$) решение уравнения (1) для колебательного разряда представим в виде разности

$$u_C(t) = [u_q^*(t) - u_n^*(t)] U_q; \quad (5)$$

$$u_q^*(t) = \frac{u_q(t)}{U_q} = e^{-\mu(t+\tau)} \cos(\omega t + \psi_q); \quad (6)$$

$$u_n^*(t) = \frac{u_n(t)}{U_q} = e^{-\alpha t} (K_c \cos \beta t + K_s \sin \beta t). \quad (7)$$

Здесь $u_q^*(t)$ и $u_n^*(t)$ — квазистационавшаяся и переходная составляющие напряжения на емкости.

Значение напряжения U_q и фаза ψ_q квазистационавшейся составляющей определяются из решения неоднородного уравнения (1):

$$U_q = \frac{\beta_0^2 E_0}{\sqrt{[\beta^2 - \omega^2 + (\alpha - \mu)^2]^2 + 4\omega^2 (\alpha - \mu)^2}}; \quad (8)$$

$$\psi_q = \psi_0 + \omega\tau - \delta; \quad (9)$$

$$\text{tg } \delta = \frac{2\omega(\alpha - \mu)}{\beta^2 - \omega^2 + (\alpha - \mu)^2}, \quad (10)$$

причем

$$0 < |\delta| < \frac{\pi}{2} \quad \text{при} \quad \beta^2 + (\alpha - \mu)^2 > \omega^2;$$

$$\frac{\pi}{2} < |\delta| < \pi \quad \text{при} \quad \beta^2 + (\alpha - \mu)^2 < \omega^2.$$

Постоянные интегрирования K_c и K_s для переходной составляющей определяются в соответствии с начальными условиями U_0 и U'_0 :

$$K_c = e^{-\mu\tau} \cos \psi_q - U'_0; \quad (11)$$

$$\beta K_s = e^{-\mu\tau} [(\alpha - \mu) \cos \psi_q - \omega \sin \psi_q] - \alpha U'_0 - U_0, \quad (12)$$

где обозначено $U_0^* = \frac{U_0}{U_q}$; $U'_0^* = \frac{U'_0}{U_q}$.

Таким образом, напряжение на емкости в относительных единицах

$$u_c(t) = \frac{u_c(t)}{U_q} = e^{-\mu(t+\tau)} \cos(\omega t + \psi_q) - e^{-\alpha t} \cos \beta t (e^{-\mu \tau} \cos \psi_q - U_0^*) - \frac{1}{\beta} e^{-\alpha t} \sin \beta t \{e^{-\mu \tau} [(\alpha - \mu) \cos \psi_q - \omega \sin \psi_q] - \alpha U_0^* - U_0^{**}\}. \quad (13)$$

ЭКСТРЕМАЛЬНЫЕ НАПРЯЖЕНИЯ НА ЕМКОСТИ ПРИ ВНЕЗАПНОМ ИЗМЕНЕНИИ РЕЖИМА КОНТУРА R, L, C

Во многих случаях для принятия инженерного решения (выбора схемы, элементов электрооборудования, защиты от перенапряжений) определяющее значение имеют наибольший (или наименьший) из максимумов напряжения $u_c(t)$, времена их наступления, а также моменты коммутации τ , приводящие к наибольшим (или наименьшим) напряжениям на емкости. Расчетные формулы для простейшего случая были опубликованы в работе [1].

В настоящей статье приведены более общие выражения, а также примеры использования этих формул для расчетов перенапряжений в мощных емкостных накопителях энергии.

Как следует из (13) с учетом (9), напряжение на емкости зависит от времени t и момента коммутации τ . Соответственно критические значения t и τ , при которых возникают экстремальные значения u_c , определяются из решения системы уравнений

$$\begin{aligned} \frac{du_c}{dt} = & -e^{-\mu(t+\tau)} [\mu \cos(\omega t + \psi_q) + \omega \sin(\omega t + \psi_q)] + \\ & + e^{-\alpha t} \cos \beta t [e^{-\mu \tau} (\mu \cos \psi_q + \omega \sin \psi_q) + U_0^*] + \\ & + \frac{1}{\beta} e^{-\alpha t} \sin \beta t \{e^{-\mu \tau} [(\beta_0^2 - \alpha \mu) \cos \psi_q - \alpha \omega \sin \psi_q] - \beta_0^2 U_0^* - \alpha U_0^{**}\} = 0, \end{aligned} \quad (14)$$

$$\begin{aligned} \frac{du_c}{d\tau} = & -e^{-\mu(t+\tau)} [\mu \cos(\omega t + \psi_q) + \omega \sin(\omega t + \psi_q)] + \\ & + e^{-\alpha t} \cos \beta t [e^{-\mu \tau} (\mu \cos \psi_q + \omega \sin \psi_q) + U_0^*] + \\ & + \frac{1}{\beta} e^{-\alpha t} \sin \beta t \left\{ e^{-\mu \tau} [(\omega^2 + \alpha \mu - \mu^2) \cos \psi_q + \right. \\ & \left. + \omega(\alpha - 2\mu) \sin \psi_q] + \alpha \frac{dU_0^*}{d\tau} + \frac{dU_0^{**}}{d\tau} \right\} = 0. \end{aligned} \quad (15)$$

При коммутациях из квазистационарного режима (см. рис. 1, а) необходимо учесть влияние τ на U_0 и U_0^* . Совместное решение (14) и (15) дает два возможных решения уравнений (не считая тривиального решения $t \rightarrow \infty$):

$$\sin \beta t = 0; \quad (16)$$

$$\begin{aligned} e^{-\mu \tau} \{[\beta^2 - \omega^2 + (\alpha - \mu)^2] \cos \psi_q - 2\omega(\alpha - \mu) \sin \psi_q\} - \\ - \beta_0^2 U_0^* - 2\alpha U_0^{**} - \frac{dU_0^*}{d\tau} = 0. \end{aligned} \quad (17)$$

Из решения (16) следует, что экстремальные значения (максимумы по абсолютной величине) напряжений, аналогично включению незатухающей гармонической э. д. с. [2], наступают при $t_k = \frac{k\pi}{\beta}$, т. е. спустя целое число полупериодов ($k=0, 1, 2, \dots$) собственных колебаний. Наиболее неблагоприятные моменты коммутаций определяются при

подстановке (16) в одно из уравнений (14)–(15). После преобразования получим

$$\operatorname{tg}(\omega \tau_k - \delta) = \frac{\mu G_k + \omega H_k}{\mu H_k - \omega G_k}, \quad (18)$$

где

$$\begin{aligned} G_k &= \cos(\omega t_k + \psi_e) - \eta_k \cos \psi_e + U_n^* \eta_k \cos(\delta + \psi_n); \\ H_k &= \sin(\omega t_k + \psi_e) - \eta_k \sin \psi_e + U_n^* \eta_k \sin(\delta + \psi_n); \end{aligned}$$

$$\eta_k = (-1)^k e^{-(\alpha - \mu)t_k}, \quad U_n^* = \frac{U_n}{U_q}.$$

Значение τ_k определяем из (18), причем, учитывая затухание вынуждающей э. д. с., наибольшие напряжения получаем при $0 < \omega \tau_k < \pi$.

Соответствующее максимальное напряжение на емкости определится, если подставить найденное значение t согласно (16) и τ согласно (18) в формулу (13). Имеем

$$U_{\max k}^* = \frac{U_{\max k}}{U_q} = -\operatorname{sign}[\cos(\omega \tau_k - \delta)] \omega e^{-\mu(t_k + \tau_k)} \sqrt{\frac{G_k^2 + H_k^2}{\omega^2 + \mu^2}}. \quad (19)$$

На рис. 2 приведены экстремальные значения $|U_{\max k}^*|$ в зависимости от отношения β/ω при $\alpha=0,02\beta$, $\mu=0,01\beta$, $\psi_e=0$, $U_n^*=0,3$, $\operatorname{tg} \psi_n=5$, $\operatorname{tg} \delta$. Наибольший максимум напряжения может быть в первый, во второй и в последующие полупериоды собственных колебаний, причем с уменьшением β/ω увеличивается номер полупериода k , в котором этот максимум наступает.

Второе решение (17) с учетом (2), (3), (9), (10) соответствует условию

$$U_q \cos(\omega \tau + \psi_e) = U_n \cos(\omega \tau + \psi_n + \delta), \quad (20)$$

или

$$\operatorname{tg} \omega \tau = \frac{\cos \psi_e - U_n^* \cos(\psi_n + \delta)}{\sin \psi_e - U_n^* \sin(\psi_n + \delta)}, \quad 0 < \omega \tau < \pi, \quad (21)$$

и определяет момент включения, при котором, как показывают числен-

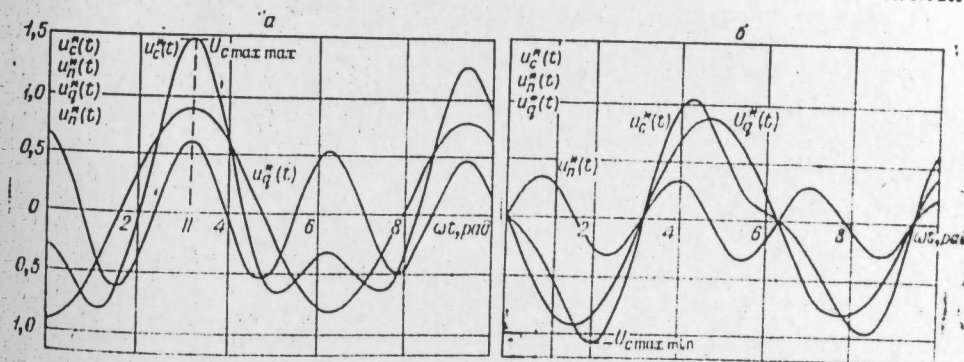


Рис. 2. Зависимости наибольших значений (сплошная линия) $|U_{\max k}^*|$ от β/ω при $k=1, 2, 3$.

Рис. 3. Переходные процессы, соответствующие экстремальным значениям амплитуды напряжения на емкости. а) амплитуда напряжения достигает наибольшего максимального значения ($k=2$); б) амплитуда напряжения имеет наименьшее максимальное значение.

ные расчеты, $U_{\max}$ оказывается минимальным по абсолютной величине. На рис. 3 показаны переходные процессы в случае наиболее неблагоприятного и благоприятного моментов включения при $\beta=2\omega$ и значениях α/β , μ/β , ψ_e , U_n^* , $\lg \psi_n$ и $\lg \delta$ таких же, что и для рис. 2. Как видно из рис. 3, $U_{\max}^* = 1,45$ при $k=2$, $\omega\tau=3,12$, $\omega t_2=\pi$; $U_{\min}^*=1,1$ при $\omega\tau=1,54$, $\omega t=2,05$.

ЭКСТРЕМАЛЬНЫЕ НАПРЯЖЕНИЯ НА ЕМКОСТИ ПРИ ВКЛЮЧЕНИИ КОНТУРА R, L, C

Аналогичные две системы критических значений t и τ при включении ранее разомкнутого контура (см. рис. 1, б) получим после подстановки начальных условий (4) в (14) или (15). После преобразований получим

$$\sin \beta t = 0; \quad t_k = \frac{k\pi}{\beta} \quad (k=0, 1, 2, \dots); \quad (22)$$

$$e^{-\mu t} \{ [\beta^2 - \omega^2 + (\alpha - \mu)^2] \cos \psi_q - 2\omega(\alpha - \mu) \sin \psi_q \} - \beta_0^2 U_0^* = 0. \quad (23)$$

Соответствующие (22) моменты включения τ_k определяются при подстановке (22) в (14) или (15):

$$\begin{aligned} \lg(\omega\tau_k - \delta) &= \frac{\mu A_k + \omega B_k}{\mu B_k - \omega A_k}; \\ 0 < \omega\tau_k < 2\pi, \end{aligned} \quad (24)$$

где

$$\begin{aligned} A_k &= \cos(\omega t_k + \psi_e) - \eta_k \cos \psi_e; \\ B_k &= \sin(\omega t_k + \psi_e) - \eta_k \sin \psi_e; \\ \eta_k &= (-1)^k e^{-(\alpha - \mu)t_k}. \end{aligned}$$

Из (24) для каждого k формулы (22) получаются два возможных значения $\omega\tau_k$:

$$\omega\tau_k = \delta + \arctg \frac{\mu A_k + \omega B_k}{\mu B_k - \omega A_k} \pm n\pi \quad (n=0, 1). \quad (25)$$

Экстремальные значения $U_{\max k}$ определяются при подстановке (22) и (25) в (13). После преобразований получим

$$\begin{aligned} U_{\max k}^* &= \frac{U_{\max k}}{U_q} = (-1)^k U_0^* e^{-\alpha t_k} - \\ &- \operatorname{sign} [\cos(\omega t_k - \delta)] \omega e^{-(\mu t_k + \tau_k)} \sqrt{\frac{A_k^2 + B_k^2}{\omega^2 + \mu^2}}. \end{aligned} \quad (26)$$

Наибольшие значения $|U_{\max k}^*|$ могут получиться при разных k ($k=0, 1, 2, 3, \dots$) и двух возможных значениях n ($n=0, 1$). Второе решение (23) с учетом (8), (9) дает

$$E_0 e^{-\mu\tau} \cos(\omega\tau + \psi_e) = U_0 \quad (E_0 \geq U_0). \quad (27)$$

Условие (27) соответствует включению в момент, когда разность напряжений между контактами выключателя равна нулю, и определяет момент включения, при котором $U_{\max}$ минимально по абсолютной величине.

Рассмотрим практические случаи.

ПЕРЕНАПРЯЖЕНИЯ В ЕМКОСТНЫХ НАКОПИТЕЛЯХ ПРИ КОРОТКОМ ЗАМЫКАНИИ ЧАСТИ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНО СОЕДИНЕННЫХ КОНДЕНСАТОРОВ ИЛИ ПРИ НЕОДНОВРЕМЕННОМ ВКЛЮЧЕНИИ ЯЧЕЕК

Переходные процессы в ячейках емкостных накопителей больших энергий можно приближенно привести к дифференциальным уравнениям, описывающим переходной процесс в контуре R, L, C с подключенной затухающей э. д. с. Накопители выполняются из большого числа (несколько сот и более) однотипных ячеек конденсаторов (рис. 4), причем каждая ячейка с параметрами $\frac{C_0}{n}$, L, R разряжается через коммутирующий разрядник P на общую нагрузку с параметрами L_n, R_n (n — число ячеек, C_0 — рабочая емкость накопителя).

Пример 1. Ячейки в накопителях иногда выполняются из последовательно соединенных конденсаторов. В случае пробоя части конденсаторов C_1 в ячейке и при отсутствии или отказе в токоограничивающем действии предохранителей эквивалентную схему замещения ячейки можно представить в соответствии с рис. 5. При этом пренебрегаем влиянием одной ячейки на эквивалентную э. д. с. e_1 , сопротивлением контура пробоя (включение P_1 на рис. 5) и внутренним сопротивлением э. д. с.

Дифференциальное уравнение для напряжения $u_c(t)$ на емкости непробитых конденсаторов C (рис. 5) и начальные условия совпадают с (1), (2) и (3). При этом τ — время, прошедшее от момента начала разряда накопителя (принимается одновременное срабатывание всех разрядников P , см. рис. 4) до момента замыкания P_1 ; t — время, отсчитываемое от момента замыкания P_1 .

Параметры, входящие в уравнения (1), (2) и (3), для схемы рис. 5 можно определить следующим образом.

Эквивалентная э. д. с. e_1 определяется как падение напряжения на нагрузке в разрядном режиме накопителя:

$$e_1 = -R_n i_n - L_n \frac{di_n}{dt} = E_0 e^{-\mu(t-\tau)} \cos[\omega(t+\tau) + \psi_e], \quad (28)$$

где

$$i_n = -\frac{U_3}{\omega L_n} e^{-\mu(t+\tau)} \sin \omega(t+\tau)$$

— ток в нагрузке; U_3 — зарядное напряжение конденсаторов в ячейках; $\mu = \frac{R_n}{2L_n}$, $\omega = \sqrt{\frac{1}{L_n C_0} - \mu^2}$ — декремент затухания и частота колебаний накопителя в разрядном режиме;

$$L_n = \frac{L}{n} + L_n, \quad R_n = \frac{R}{n} + R_n$$

— индуктивность и сопротивление накопителя

$$C = \frac{C_0 C_1}{nC_1 - C_0}$$

— емкость непробитых конденсаторов аварийной ячейки.

После преобразований имеем

$$E_0 = \frac{U_3}{\omega L_n} \sqrt{R_n^2 + (\mu^2 + \omega^2) L_n^2 - 2\mu R_n L_n}, \quad \lg \psi_e = \frac{\mu L_n - R_n}{\omega L_n}. \quad (29)$$

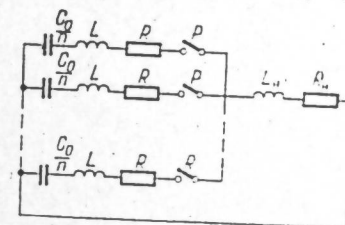


Рис. 4. Принципиальная схема емкостного накопителя энергии.

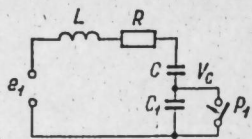


Рис. 5. Схема замещения для расчетов переходных процессов при коротком замыкании части последовательно соединенных конденсаторов.

Декремент затухания и частота колебаний аварийной ячейки равны:

$$\alpha = \frac{R}{2L}, \beta_0 = \frac{2}{\sqrt{LC}}, \beta = \sqrt{\beta_0^2 - \alpha^2}.$$

Параметры, определяющие начальные условия в формулах (2) и (3) с учетом одновременного срабатывания всех разрядников в ячейках

$$U_n = \frac{C_1}{C + C_1} \omega U_3 \sqrt{L_n C_0}, \operatorname{tg} \psi_n = -\frac{\mu}{\omega}. \quad (30)$$

Например, для емкостного накопителя с параметрами $C_0 = 1000$ мкФ, $L = 2$ мкГ, $R = 0,1$ Ом, $L_n = 0,1$ мкГ, $R_n = 2 \cdot 10^{-3}$ Ом, $C = 7,5$ мкФ, $n = 200$ имеем по формулам (28) — (30): $\omega = 9,53 \cdot 10^4$ 1/с, $\mu = 1,14 \cdot 10^4$ 1/с, $\alpha = 2,5 \cdot 10^4$ 1/с, $\beta = 25,8 \cdot 10^4$ 1/с, $U_n = 0,67 U_3$, $\psi_n = 0,114$, $E_0 = 0,91 U_3$, $\psi_0 = 0,091$.

Формулы (16), (18), (19) позволяют определить наибольшую кратность перенапряжений, равную для рассматриваемого случая $U_{\max} = 1,4 U_c$, при $k = 2$, где $U_c = C_1 U_3 / (C_1 + C)$ — зарядное напряжение емкости C . Это максимальное перенапряжение имеет место в случае пробоя конденсаторов в наиболее неблагоприятный момент $\tau = 5,8$ мкс после срабатывания разрядников P и наступает при $t = \frac{k\pi}{\beta} = 24,3$ мкс.

Пример 2. Рассмотрим случай расчета наибольших перенапряжений на импульсных конденсаторах при неодновременном срабатывании разрядников и подключении ячеек к нагрузке. Опыт эксплуатации показал, что элементы емкостных накопителей должны быть выбраны с учетом этого режима [3], так как в схеме с параллельным соединением разрядников (см. рис. 4) при срабатывании части разрядников и подключении в нагрузку части ячеек накопителя затрудняется срабатывание разрядников остальных ячеек вследствие уменьшения напряжения на их контактах. Если принять, что разрядники всех ячеек, кроме одной, сработали одновременно, то при допущении примера 1 расчетная схема для определения напряжения на емкости последней ячейки после пробоя ее разрядника будет соответствовать рис. 1б с начальными условиями

$$U_0 = U_3, I_0 = 0.$$

Чтобы определить $U_{\max}$ в рассматриваемой схеме, целесообразно воспользоваться формулами (22), (24) — (26), причем параметры уравнения (1) определяются по формулам (28), (29). Для накопителя, рассмотренного в предыдущем примере, учитывая, что рабочая емкость ячейки с исправными конденсаторами $C = \frac{C_0}{n} = 5$ мкФ, получим $\beta_0 = 3,16 \cdot 10^5$ 1/с. E_0 , ω , μ , ψ_0 и α остаются такими же, как и в примере 1. При этом $U_{\max} = 2,0 U_3$.

Наиболее неблагоприятный момент срабатывания запоздавшего разрядника наступает при $\omega\tau = \pi - 0,62$ или $\tau = 26,5$ мкс, когда напря-

жение на запоздавшем разряднике превысит зарядное напряжение ячеек. Наибольшие перенапряжения на емкости C в данном случае возникают спустя половину периода собственных колебаний запоздавшей ячейки при $t = \frac{\pi}{\beta} = 9,95$ мкс.

ВЫВОДЫ

1. При анализе переходных процессов в электрических схемах для принятия практического решения в ряде случаев достаточно определить наибольшие (или наименьшие) максимальные значения напряжения на элементах схем, а также соответствующие этим значениям наиболее «неблагоприятные» (или «благоприятные») фазы э. д. с. в момент коммутации.

2. В статье получены удобные в инженерных расчетах формулы для определения экстремальных значений напряжения на емкости контура R, L, C с подключенной затухающей гармонической э. д. с. при двух видах начальных условий: а) при внезапном изменении режима контура; б) подключении э. д. с. к ранее разомкнутому контуру с заряженной емкостью.

Определены соответствующие наиболее «неблагоприятные» (или «благоприятные») моменты коммутации, а также времена наступления экстремальных значений.

3. Показано, что полученные формулы целесообразно использовать для определения наибольших коммутационных перенапряжений на конденсаторах емкостных накопителей энергии, состоящих из большого числа ячеек. Такие перенапряжения возникают при коротком замыкании части последовательно соединенных рабочих емкостей или при одновременном срабатывании разрядников ячеек накопителя.

Сибирский научно-исследовательский институт энергетики

Поступила в редакцию
29/V 1974

ЛИТЕРАТУРА

1. А. И. Месеняшин. Электротехника, 1971, № 6.
2. М. В. Костенко, М. Л. Левиштейн. Изв. АН СССР, Энергетика и транспорт, 1965, № 4.
3. А. И. Месеняшин. Изв. вузов, «Энергетика», 1970, № 9.

УДК 621.315.1 : 691.3.06

Е. И. КАТКОВНИКОВ

АЛГОРИТМ РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЙ МНОГОПРОВОДНОЙ ОДНОРОДНОЙ ЛИНИИ ЭЛЕКТРОПЕРЕДАЧИ

Анализ процессов распространения высокочастотных (в. ч.) колебаний по многопроводным воздушным линиям (ВЛ) и переходных процессов в них — сложная проблема при организации высокочастотной связи по проводам ВЛ, при расчете высокочастотных помех от короны. К этой проблеме проявляют постоянный интерес и отечественные и зарубежные исследователи [1—8]. В работе [9] изложена теория и практика вопросов, возникающих при распространении в. ч. колебаний по многопроводным ВЛ, приведена обширная библиография по рассматриваемому предмету.

Известные в литературе решения относятся к случаю, когда произведение двух матриц Z (матрицы продольных погонных сопротивлений) и Y (матрицы поперечных погонных проводимостей) является матрицей простой структуры [10]. Кроме этого, рассматривается только случай, когда все упомянутые матрицы симметрические. В данной работе сделана попытка получить решения уравнений многопроводной однородной линии электропередачи при более общих предположениях.

Система уравнений многопроводной однородной длинной линии после применения преобразования Лапласа может быть приведена к виду

$$-\frac{d}{dx} \begin{bmatrix} U(p, x) \\ I(p, x) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & Z(p) \\ Y(p) & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U(p, x) \\ I(p, x) \end{bmatrix}, \quad (1)$$

где $U(p, x)$, $I(p, x)$ — изображения n -мерных неизвестных векторов напряжений и токов линии в точке с координатой x ; $Z(p)$, $Y(p)$ — квадратные матрицы погонных параметров n -го порядка, обладающие свойством

$$|Z(p)Y(p)| = |Y(p)Z(p)| \neq 0. \quad (2)$$

В дальнейшем в ряде мест, где это не вызовет недоразумений, аргументы у элементов векторов и матриц будем опускать.

Под решением системы (1) будем понимать процесс нахождения матриц $A(p, x)$, $B(p, x)$, $C(p, x)$ и $D(p, x)$, входящих в соотношение

$$\begin{bmatrix} U(p, x) \\ I(p, x) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A(p, x) & B(p, x) \\ C(p, x) & D(p, x) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U(p, x=0) \\ I(p, x=0) \end{bmatrix}. \quad (3)$$

Система уравнений (1) представляет частный случай линейной системы дифференциальных уравнений общего вида, решение которой приведено в приложении. Поэтому можно было бы воспользоваться ре-

зультатами, приведенными в приложении. Имеет, однако, смысл решить систему (1), опираясь на ее особенности, и в большей степени, чем это сделано в приложении, конкретизировать решение.

Прежде всего найдем представление матрицы параметров системы в виде

$$\begin{bmatrix} 0 & Z \\ Y & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} V & 0 \\ 0 & T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Lambda_1 & 0 \\ 0 & \Lambda_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & T^{-1} \\ V^{-1} & 0 \end{bmatrix}, \quad (4)$$

где V и T — квадратные матрицы n -го порядка; $\Lambda_{1,2}$ — квазидиагональные матрицы того же порядка.

В такой постановке автор не знает решения этой задачи, так как она не является полной проблемой собственных значений. Действительно, в представлении матрицы A , приведенной в (П. 4), используется преобразование подобия, когда крайние сомножители представляют собой соответственно преобразующую матрицу и матрицу, к ней обратную. В случае же преобразования (4) это условие не выполняется, поскольку

$$\begin{bmatrix} V & 0 \\ 0 & T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & T^{-1} \\ V^{-1} & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & VT^{-1} \\ TV^{-1} & 0 \end{bmatrix} \neq E^{(2n)};$$

$$\begin{bmatrix} 0 & T^{-1} \\ V^{-1} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V & 0 \\ 0 & T \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & E^{(n)} \\ E^{(n)} & 0 \end{bmatrix} \neq E^{(2n)}.$$

При решении поставленной задачи отметим, что выражение (4) эквивалентно двум матричным уравнениям:

$$Z = V\Lambda_1 T^{-1}, \quad (5)$$

$$Y = T\Lambda_2 V^{-1}. \quad (6)$$

Образует произведение ZY и YZ :

$$ZY = V\Lambda_1 T^{-1} T\Lambda_2 V^{-1} = V\Lambda_1 \Lambda_2 V^{-1}; \quad (7)$$

$$YZ = T\Lambda_2 V^{-1} V\Lambda_1 T^{-1} = T\Lambda_2 \Lambda_1 T^{-1}. \quad (8)$$

Таким образом, задача свелась к полной проблеме собственных значений для матриц ZY и YZ .

Докажем, что для произвольных матриц Z и Y $\Lambda_1 \Lambda_2 = \Lambda_2 \Lambda_1$. Действительно, уравнения для отыскания собственных чисел λ^2 для ZY и YZ эквивалентны:

$$|ZY - \lambda^2 E| = |Z||Y - \lambda^2 Z^{-1}| = |Y - \lambda^2 Z^{-1}||Z| = |YZ - \lambda^2 E|. \quad (9)$$

Поэтому множества собственных чисел для ZY и YZ совпадают. Тогда можно построить одинаковую жорданову форму для ZY и YZ , т. е.

$$\Lambda_1 \Lambda_2 = \Lambda_2 \Lambda_1. \quad (10)$$

В данной статье не рассматривается возможность $\Lambda_1 \neq \Lambda_2$, а принимается, что $\Lambda_1 = \Lambda_2 = \Lambda$.

После нахождения преобразующих матриц V и T так, как это делается, например, в [10], продолжим решение.

Заменив векторы U и I по формулам

$$U^* = V^{-1}U, \quad I^* = T^{-1}I, \quad (11)$$

получим систему уравнений:

$$-\frac{dU^*}{dx} = \Lambda I^*, \quad (12)$$

$$-\frac{dI^*}{dx} = \Lambda U^*. \quad (13)$$

Продифференцировав каждое уравнение из системы (12) по x и подставив $\frac{dI^*}{dx}$ из формулы (13), получим

$$\frac{d^2 U^*}{dx^2} = \Lambda^2 U^*. \quad (14)$$

Вначале ограничимся простым случаем, когда матрицы ZY и YZ имеют простую структуру. Тогда Λ^2 — диагональная матрица и система уравнений (14) распадается на n уравнений относительно компонент u_k вектора U^* :

$$\frac{d^2 u_k}{dx^2} = \lambda_k^2 u_k \quad (k = \overline{1, n}).$$

Решение каждого уравнения имеет вид

$$u_k = a_{1k} e^{\lambda_k x} + a_{2k} e^{-\lambda_k x} \quad (k = \overline{1, n}). \quad (15)$$

Запишем (15) в матричной форме:

$$U^* = e^{\Lambda x} A_1 + e^{-\Lambda x} A_2, \quad (16)$$

где $e^{\Lambda x}$, $e^{-\Lambda x}$ — диагональные матрицы n -го порядка, по диагонали которых стоят числа $e^{\lambda_k x}$, $e^{-\lambda_k x}$ соответственно; A_1 , A_2 — произвольные векторы, не зависящие от x .

Подставив U^* из выражения (16) в (12), получим выражение для вектора тока I^* :

$$I^* = e^{\Lambda x} A_1 - e^{-\Lambda x} A_2. \quad (17)$$

Сравнивая выражения для A_1 и A_2 при x_1 и x_2 , найдем

$$\begin{aligned} 2A_1 &= e^{-\Lambda x_1} (U_1^* + I_1^*) = e^{-\Lambda x_2} (U_2^* + I_2^*), \\ 2A_2 &= e^{\Lambda x_1} (U_1^* - I_1^*) = e^{\Lambda x_2} (U_2^* - I_2^*). \end{aligned} \quad (18)$$

Для векторов же U и I имеем

$$e^{\mp \Lambda x_1} (V^{-1} U_1 \pm T^{-1} I_1) = e^{\mp \Lambda x_2} (V^{-1} U_2 \pm T^{-1} I_2). \quad (19)$$

Приняв $x_1 = 0$, найдем векторы A_1 и A_2 :

$$\begin{bmatrix} A_1 \\ A_2 \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} E & E \\ E & -E \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_0^* \\ I_0^* \end{bmatrix}. \quad (20)$$

Подставив выражение (20) в (16) и (17), получим искомое решение для U^* и I^* :

$$\begin{bmatrix} U^* \\ I^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \text{ch } \Lambda x & \text{sh } \Lambda x \\ \text{sh } \Lambda x & \text{ch } \Lambda x \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_0^* \\ I_0^* \end{bmatrix}. \quad (21)$$

Чтобы получить решение для исходных векторов U , I , достаточно воспользоваться формулами (11), что дает

$$\begin{bmatrix} U(p, x) \\ I(p, x) \end{bmatrix} = H(p, x) \begin{bmatrix} U(p, 0) \\ I(p, 0) \end{bmatrix}, \quad (22)$$

где

$$H(p, x) = \begin{bmatrix} V(p) \text{ch } \Lambda(p) x V^{-1}(p) & V(p) \text{sh } \Lambda(p) x T^{-1}(p) \\ T(p) \text{sh } \Lambda(p) x V^{-1}(p) & T(p) \text{ch } \Lambda(p) x T^{-1}(p) \end{bmatrix}. \quad (23)$$

Сравнивая выражения (22), (23) с (3), имеем

$$\begin{aligned} A(p, x) &= V(p) \text{ch } \Lambda(p) x V^{-1}(p); \quad B(p, x) = V(p) \text{sh } \Lambda(p) x T^{-1}(p); \\ C(p, x) &= T(p) \text{sh } \Lambda(p) x V^{-1}(p); \quad D(p, x) = T(p) \text{ch } \Lambda(p) x T^{-1}(p). \end{aligned} \quad (24)$$

Практика расчетов по формулам (24) показала, что в случае некратных, но близких собственных чисел матрицы ZY не хватает машинной точности для счета матриц B и C , поэтому предлагается определять их по формулам:

$$\begin{aligned} B &= ZT \frac{\text{sh } \Lambda x}{\Lambda} T^{-1}, \\ C &= YV \frac{\text{sh } \Lambda x}{\Lambda} V^{-1}, \end{aligned} \quad (25)$$

которые дают достаточно точные значения.

Отметим две особенности полученного решения, которые могут оказаться полезными в практических расчетах:

1. Величина определителя системы

$$\begin{vmatrix} A & B \\ C & D \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} V \text{ch } \Lambda x V^{-1} & V \text{sh } \Lambda x T^{-1} \\ T \text{sh } \Lambda x V^{-1} & T \text{ch } \Lambda x T^{-1} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} V & 0 \\ 0 & T \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \text{ch } \Lambda x & \text{sh } \Lambda x \\ \text{sh } \Lambda x & \text{ch } \Lambda x \end{vmatrix} \times \\ \times \begin{vmatrix} V^{-1} & 0 \\ 0 & T^{-1} \end{vmatrix} = 1. \quad (26)$$

2. Обратная матрица $H^{-1}(p, x)$

$$H^{-1}(p, x) = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} A_1 & B_1 \\ C_1 & D_1 \end{bmatrix}.$$

Отсюда

$$\begin{aligned} A_1 &= (A - BD^{-1}C)^{-1}; \quad B_1 = (C - DB^{-1}A)^{-1}; \quad C_1 = (B - AC^{-1}D)^{-1}; \\ D_1 &= (D - CA^{-1}B)^{-1}. \end{aligned} \quad (27)$$

Подстановка выражений для A , B , C и D из (24) дает

$$\begin{aligned} A_1 &= (A - BD^{-1}C)^{-1} = \left(V \text{ch } \Lambda x V^{-1} - V \text{sh } \Lambda x T^{-1} T \frac{1}{\text{ch } \Lambda x} \times \right. \\ &\quad \left. \times T^{-1} T \text{sh } \Lambda x V^{-1} \right)^{-1} = \left(V \frac{1}{\text{ch } \Lambda x} V^{-1} \right)^{-1} = V \text{ch } \Lambda x V^{-1} \equiv A; \\ B_1 &= (C - DB^{-1}A)^{-1} = \left(T \text{sh } \Lambda x V^{-1} - T \text{ch } \Lambda x T^{-1} T \frac{1}{\text{sh } \Lambda x} \times \right. \\ &\quad \left. \times V^{-1} V \text{ch } \Lambda x V^{-1} \right)^{-1} = - \left(T \frac{1}{\text{sh } \Lambda x} V^{-1} \right)^{-1} = -V \text{sh } \Lambda x T^{-1} \equiv -B; \\ C_1 &= (B - AC^{-1}D)^{-1} = \left(V \text{sh } \Lambda x T^{-1} - V \text{ch } \Lambda x V^{-1} V \frac{1}{\text{sh } \Lambda x} \times \right. \\ &\quad \left. \times T^{-1} T \text{ch } \Lambda x T^{-1} \right)^{-1} = - \left(V \frac{1}{\text{sh } \Lambda x} T^{-1} \right)^{-1} = -T \text{sh } \Lambda x V^{-1} \equiv -C; \\ D_1 &= (D - CA^{-1}B)^{-1} = \left(T \text{ch } \Lambda x T^{-1} - T \text{sh } \Lambda x V^{-1} V \frac{1}{\text{ch } \Lambda x} \times \right. \\ &\quad \left. \times V^{-1} V \text{sh } \Lambda x T^{-1} \right)^{-1} = \left(T \frac{1}{\text{ch } \Lambda x} T^{-1} \right)^{-1} = T \text{ch } \Lambda x T^{-1} \equiv D. \end{aligned}$$

Таким образом, элементы обратной матрицы H^{-1} выражаются через элементы матрицы H :

$$A_1 = A; \quad B_1 = -B; \quad C_1 = -C; \quad D_1 = D. \quad (28)$$

То же соотношение можно получить и проще, заменив в матрицах A, B, C и D x на $-x$.

Рассмотрим случай, когда матрицы ZY и YZ сложной структуры. Тогда матрица Λ^2 в (14) — квазидиагональна, т. е.

$$\Lambda^2 = \{J_1, J_2, \dots, J_m\}, \quad (29)$$

причем структура матрицы Λ^2 та же, что и в формулах (П.5) и (П.6). Рассматриваемый случай отличается лишь тем, что на диагонали k -й клетки Жордана соответствующего порядка стоят числа λ_k^2 , а подлежащая решению система уравнений имеет вид выражения (14).

Рассмотрим решение системы уравнений, связанных k -й клеткой Жордана:

$$\frac{d^2 U_k^*}{dx^2} = J_k U_k^*, \quad (30)$$

где

$$J_k = \begin{bmatrix} \lambda_k^2 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_k^2 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \lambda_k^2 \end{bmatrix} = \lambda_k^2 E_k + H_k \quad (31)$$

клетка Жордана m_k -го порядка; E_k и H_k — единичная матрица и матрица, имеющая первую наддиагональ из единиц, а остальные — нули; U_i^* часть вектора U^* из m_k компонент. В дальнейшем опустим индекс k у векторов, матриц и чисел.

Рассмотрим уравнение для последней, m -й, компоненты вектора U^* , входящей в уравнение (30),

$$\frac{d^2 u_m^*}{dx^2} = \lambda^2 u_m^*, \quad (32)$$

которое имеет решение

$$u_m^* = a_{m1} e^{\lambda x} + a_{m2} e^{-\lambda x}. \quad (33)$$

Компоненты вектора с остальными индексами удовлетворяют следующим уравнениям:

$$\frac{d^2 u_i^*}{dx^2} = \lambda^2 u_i^* + u_{i+1}^* \quad (i = \overline{1, m-1}). \quad (34)$$

Решим (34), воспользовавшись алгоритмом, изложенным в [12], согласно которому

$$u_i^* = U_{i20} \left[a + \int U_{i10} \left(b + \int \frac{u_{i+1}^* dx}{U_{i20} U_{i10}} \right) dx \right] \quad (i = \overline{1, m-1}), \quad (35)$$

где a и b — постоянные, а $U_{i20} = e^{\lambda x}$, $U_{i10} = e^{-\lambda x}$.

Если последовательно получить компоненты U^* и представить решение в виде

$$U^* = e^{\lambda x} M_1(x, \lambda) A_1 + e^{-\lambda x} M_2(x, \lambda) A_2, \quad (36)$$

где A_1 и A_2 — произвольные постоянные векторы, то матрицы $M_1(x, \lambda)$

и $M_2(x, \lambda)$ будут верхними треугольными матрицами с элементами, являющимися полиномами от x , причем

$$M_2(x, \lambda) = M_1(x, -\lambda), \quad (37)$$

$$M_2(0, \lambda) = M_1(0, \lambda) = E. \quad (38)$$

Структура матрицы M_1 следующая:

$$M_1(x, \lambda) = \begin{bmatrix} P_0 & P_1 & \dots & P_{m-1} \\ 0 & P_0 & \dots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & P_1 \\ 0 & 0 & \dots & P_0 \end{bmatrix}. \quad (39)$$

Так как для решения, согласно (37), нужно найти только одну матрицу M_1 , достаточно воспользоваться (35), положив $b=0$ и приняв $u_{i+1} = u_{i+1,1}$:

$$u_{i1}^* = e^{\lambda x} \left[a + \int e^{-2\lambda x} \left(\int e^{2\lambda x} u_{i+1,1}^* dx \right) dx \right] \quad (i = \overline{1, m-1}). \quad (40)$$

При этом получим ту часть решения, которая нас интересует в первую очередь:

$$U_i^* = e^{\lambda x} M_1(x, \lambda) A_1. \quad (41)$$

Переход от (41) к (36), учитывая (37), не представляет труда. Желательно, однако, иметь возможность последовательно образовывать полиномы $P_0, P_1, \dots, P_{m-1}$, не прибегая к использованию (40). Если полиномы P_i известны, то матрица M_1 определится выражением (39), а решение (36) найдем с учетом (37). Ниже приводится формула, полученная из (40), которая решает поставленную задачу:

$$P_i(x) = \int e^{-2\lambda x} \left(\int e^{2\lambda x} P_{i-1}(x) dx \right) dx \quad (i = \overline{1, m-1}), \quad (42)$$

где $P_0 = 1$.

Воспользовавшись [11], представим внутренний интеграл в виде суммы и формулу (42) выразим следующим образом:

$$P_i(x) = \frac{1}{2\lambda} \sum_{n=0}^{i-1} \frac{P_{i-1}^{(n)}(x)}{(-2\lambda)^n} dx. \quad (43)$$

Если изобразить каждый из полиномов P_i , начиная с $P_1(X) = \frac{X}{(2\lambda)^2}$, в виде

$$P_i(X = 2\lambda x) = \frac{1}{(2\lambda)^{2i}} \sum_{n=0}^{i-1} (-1)^n a_{in} \frac{X^{i-n}}{(i-n)!}, \quad (44)$$

то числа a_{in} выразятся следующей формулой:

$$a_{in} = \binom{i+n-1}{n} - \binom{i+n-1}{n-1} \quad (i = 1, 2, \dots), \quad (n = \overline{0, i-1}). \quad (45)$$

Равенство (45) доказано методом полной математической индукции.

Ниже приведены первые шесть полиномов $P_k(X)$:

$$\begin{aligned} P_0 &= 1; \\ P_1 &= \frac{1}{(2\lambda)^2} X; \\ P_2 &= \frac{1}{(2\lambda)^4} \left(\frac{1}{2!} X^2 - X \right); \\ P_3 &= \frac{1}{(2\lambda)^6} \left(\frac{1}{3!} X^3 - \frac{2}{2!} X^2 + 2X \right); \\ P_4 &= \frac{1}{(2\lambda)^8} \left(\frac{1}{4!} X^4 - \frac{3}{3!} X^3 + \frac{5}{2!} X^2 - 5X \right); \\ P_5 &= \frac{1}{(2\lambda)^{10}} \left(\frac{1}{5!} X^5 - \frac{4}{4!} X^4 + \frac{9}{3!} X^3 - \frac{14}{2!} X^2 + 14X \right). \end{aligned} \quad (46)$$

Для определения I^* подставим U^* из (36) в (12):

$$I^* = e^{\lambda x} \Lambda^{-1} \left(\lambda M_1 + \frac{dM_1}{dx} \right) A_1 + e^{-\lambda x} \Lambda^{-1} \left(-\lambda M_2 + \frac{dM_2}{dx} \right) A_2 \quad (47)$$

и воспользуемся следующими тождествами

$$\Lambda^{-1} \left(\lambda M_1 + \frac{dM_1}{dx} \right) \equiv M_1, \quad \Lambda^{-1} \left(-\lambda M_2 + \frac{dM_2}{dx} \right) \equiv -M_2, \quad (48)$$

которые не доказаны, а проверены автором до матриц 4-го порядка включительно.

В результате получим

$$I^* = e^{\lambda x} M_1 A_1 - e^{-\lambda x} M_2 A_2 \quad (49)$$

Объединим равенства (49) и (36) в одно выражение и вновь введем индекс k :

$$\begin{bmatrix} U_k^* \\ I_k^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^{\lambda_k x} M_{1k} & e^{-\lambda_k x} M_{2k} \\ e^{\lambda_k x} M_{1k} & e^{-\lambda_k x} M_{2k} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_{1k} \\ A_{2k} \end{bmatrix}. \quad (50)$$

Вектор $[A_{1k}, A_{2k}]^T$ определим из краевого условия при $x=0$, которое дает то же выражение, что и (20), а решение представим в виде

$$\begin{bmatrix} U_k^* \\ I_k^* \end{bmatrix} = H_k \begin{bmatrix} U_{k0}^* \\ I_{k0}^* \end{bmatrix}, \quad (51)$$

где

$$\begin{aligned} H_k(x, p) &= \frac{1}{2} \begin{bmatrix} e^{\lambda_k x} M_{1k} & e^{-\lambda_k x} M_{2k} \\ e^{\lambda_k x} M_{1k} & -e^{-\lambda_k x} M_{2k} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E & E \\ E & -E \end{bmatrix} = \\ &= \frac{1}{2} \begin{bmatrix} e^{\lambda_k x} M_{1k} + e^{-\lambda_k x} M_{2k} & e^{\lambda_k x} M_{1k} - e^{-\lambda_k x} M_{2k} \\ e^{\lambda_k x} M_{1k} - e^{-\lambda_k x} M_{2k} & e^{\lambda_k x} M_{1k} + e^{-\lambda_k x} M_{2k} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Иногда имеет смысл пользоваться другим выражением для матрицы H_k . Введем матрицы $M_{1k}(x^2, \lambda_k^2)$ и $M_{2k}(x^2, \lambda_k^2)$ следующим образом:

$$\begin{aligned} M_{1k} &= \frac{1}{2} [M_{1k}(x, \lambda_k) + M_{2k}(x, \lambda_k)], \\ M_{2k} &= \frac{1}{2} \frac{\lambda_k}{x} [M_{1k}(x, \lambda_k) - M_{2k}(x, \lambda_k)]. \end{aligned} \quad (52)$$

Тогда матрица H_k выразится как

$$H_k(x, p) = \begin{bmatrix} M_{1k} \operatorname{ch} \lambda_k x + \frac{x}{\lambda_k} M_{2k} \operatorname{sh} \lambda_k x & M_{1k} \operatorname{sh} \lambda_k x + \frac{x}{\lambda_k} M_{2k} \operatorname{ch} \lambda_k x \\ M_{1k} \operatorname{sh} \lambda_k x + \frac{x}{\lambda_k} M_{2k} \operatorname{ch} \lambda_k x & M_{1k} \operatorname{ch} \lambda_k x + \frac{x}{\lambda_k} M_{2k} \operatorname{sh} \lambda_k x \end{bmatrix}. \quad (53)$$

Отметим следующее свойство H_k по (53): если λ_k — мнимое число, то матрицы, стоящие по главной диагонали, будут действительными, а остальные — мнимыми.

Таким образом, получено решение для части уравнений, связанных одной k -й клеткой Жордана матрицы Λ_2 . Решив по предложенному алгоритму остальные уравнения, получим искомый вектор решений $\begin{bmatrix} U^* \\ I^* \\ U \\ I \end{bmatrix}$.

После этого, воспользовавшись выражением (11), перейдем к $\begin{bmatrix} U^* \\ I^* \\ U \\ I \end{bmatrix}$. На этом решение будет закончено.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В отличие от известных решений в данной работе получено решение уравнений многопроводной однородной линии электропередачи (1) для случая, когда матрица ZY (и одновременно YZ) сложной структуры [10]. В этом случае жорданова матрица Λ^2 (29) для ZY (и YZ) не является диагональной, она квазидиагональна.

Известные решение приведены для случая, когда $(ZY)^T = Y^T Z^T = YZ$; в настоящей статье получено решение для любых неособенных матриц Z и Y .

Получены удобные для расчетов выражения для матриц B и C (25).

Приложение

Способ решения системы линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами

Приведем способ решения задачи Коши для системы линейных неоднородных дифференциальных уравнений первой степени. Известный в литературе [13] способ решения ниже обобщается на неоднородную систему дифференциальных уравнений. При этом предлагаемый способ более прост, чем приведенный в [13].

Пусть дана система уравнений

$$\frac{dX(t)}{dt} = AX(t) + F(t) \quad (П.1)$$

и начальное условие Коши

$$X(t=0) = X_0; \quad (П.2)$$

требуется найти то решение уравнения (П.1), которое удовлетворяет начальному условию (П.2).

Здесь $X(t)$ — n -мерная неизвестная вектор-функция; A — квадратная матрица n -го порядка с постоянными элементами; при этом

$$|A| \neq 0; \quad (П.3)$$

$F(t)$ — n -мерная известная вектор-функция.

Далее будем опускать аргумент t у функций, где это не вызовет недоразумений.

Найдем, согласно [10], следующее представление матрицы A , т. е. решим полную проблему собственных значений для матрицы A :

$$A = T J T^{-1}, \quad (П.4)$$

где J — жорданова форма матрицы A ; T — преобразующая матрица ($|T| \neq 0$).

Квазидиагональная матрица

$$J = \{J_1, J_2, \dots, J_u\} \quad (П.5)$$

имеет на своей диагонали так называемые клетки Жордана, соответствующие k -му элементарному делителю $(\lambda - \lambda_k)^{m_k}$ матрицы A :

$$J_k = \lambda_k E_k + H_k = \begin{pmatrix} \lambda_k & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_k & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \lambda_k \end{pmatrix} \quad (k = \overline{1, u}), \quad (П.6)$$

где $E_k = E^{(m_k)}$ — единичная матрица m_k -го порядка, $H_k = H^{(m_k)}$ — матрица того же порядка, у которой только верхняя наддиагональ состоит из единиц, остальные же элементы — нули.

$$|\lambda E - A| = (\lambda - \lambda_1)^{m_1} (\lambda - \lambda_2)^{m_2} \dots (\lambda - \lambda_u)^{m_u} \\ (m_1 + m_2 + \dots + m_u = n),$$

где $(\lambda - \lambda_k)^{m_k}$ — k -й элементарный делитель матрицы A (среди чисел λ_k ($k = \overline{1, u}$) могут быть и равные друг другу) [10].

Линейная замена переменного вектора и правой части уравнения (П.1) по формулам

$$Y = T^{-1} X, \quad (П.7)$$

$$\Phi = T^{-1} F \quad (П.8)$$

приводит к более простой системе уравнений, чем исходная:

$$\frac{dY}{dt} = JY + \Phi \quad (П.9)$$

с начальным условием Коши

$$Y(t=0) \equiv Y_0 = T^{-1} X_0. \quad (П.10)$$

Рассмотрим сначала более простой случай уравнения (П.9), когда матрица A простой структуры. В этом случае жордановой формой является диагональная матрица

$$J = \{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n\} \quad (П.11)$$

и система уравнений (П.9) распадается на n уравнений относительно компонент y_k вектора Y :

$$\frac{dy_k}{dt} = \lambda_k y_k + \phi_k \quad (k = \overline{1, n}). \quad (П.9')$$

Решение (П.9') дается формулой

$$y_k(t) = e^{\lambda_k t} \left[y_{0k} + \int_0^t e^{-\lambda_k \tau} \phi_k(\tau) d\tau \right] \quad (k = \overline{1, n}). \quad (П.12)$$

Для общего случая, когда матрица A сложной структуры, дадим решение для компонент y_{kp} вектора Y , входящих в уравнение (П.9), k -й клеткой Жордана:

$$\frac{dY_k}{dt} = J_k Y_k + \Phi_k, \quad (П.9'')$$

где J_k представлено в выражении (П.6); Y_k, Φ_k — части векторов Y, Φ соответственно из m_k компонент каждый.

Решения для отдельных компонент y_{kp} вектора Y_k даются формулами

$$y_{kp}(t) = e^{\lambda_k t} \left\{ y_{0kp} + \int_0^t e^{-\lambda_k \tau} [y_{kp+1}(\tau) + \phi_{kp}(\tau)] d\tau \right\} \quad (p = \overline{1, m_k - 1}), \quad (П.13)$$

$$y_{km_k}(t) = e^{\lambda_k t} \left[y_{0km_k} + \int_0^t e^{-\lambda_k \tau} \phi_{km_k}(\tau) d\tau \right]. \quad (П.14)$$

Компоненты вектора Y_k , начиная с y_{km_k} , можно определять по формуле (П.14), остальные компоненты Y_k с $p < m_k$ — по формуле (П.13).

После нахождения вектора $Y(t)$ достаточно воспользоваться (П.7), чтобы получить $X(t)$.

Сибирский научно-исследовательский
институт энергетики,
Новосибирск

Поступила в редакцию
12/IV 1974

ЛИТЕРАТУРА

1. J. R. Garson, R. S. Hoyt. Bell. Syst. Techn. Journ., 1927, 6, № 3.
2. L. A. Pipes. Phil. Mag., 1937, 24, № 159, s. 7.
3. L. M. Wedepohl. Proc. IEE, 1963, 110, № 12.
4. L. M. Wedepohl. Proc. IEE, 1965, 112, № 11.
5. М. В. Костенко. Электричество, 1960, № 11.
6. С. Хаяси. Волны в линиях электропередачи. М., Госэнергоиздат, 1960.
7. А. И. Долгин, Л. С. Левина, А. И. Ступель, В. С. Шатин. Расчет переходных процессов в электрических системах на ЭЦВМ. М., «Энергия», 1968.
8. М. Х. Захар-Иткин. Электричество, 1971, № 4.
9. М. В. Костенко, Л. С. Перельман, Ю. П. Шкарин. Волновые процессы и электрические помехи в многопроводных линиях высокого напряжения. М., «Энергия», 1973.
10. Ф. Р. Гантмахер. Теория матриц. М., «Наука», 1967.
11. И. С. Градштейн, И. М. Рыжик. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. М., Физматгиз, 1963.
12. Е. И. Катковников. Тр. СИБНИИЭ, Новосибирск, «Наука», 1968, вып. 12.
13. В. В. Степанов. Курс дифференциальных уравнений. М., Физматгиз, 1959.

Ю. Ф. КОРОЛЮК

УДК 621.311 : 631.142.2

ПАРАМЕТРЫ ЭЛЕМЕНТОВ ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ СИСТЕМ ПРИ РАСЧЕТЕ НЕПОЛНОФАЗНЫХ РЕЖИМОВ МЕТОДОМ ДВУХ КООРДИНАТ

В настоящее время еще достаточно широко используются неполнофазные режимы линий электропередачи как при ликвидации однофазных коротких замыканий, так и для пофазных ремонтов линий и трансформаторного оборудования. Если линия достаточно длинная, а потребители, подключенные к ней, удалены друг от друга на значительные расстояния, то при расчете режимов, в том числе и неполнофазных, нельзя в схеме замещения сосредоточивать их в одном узле. А так как для ликвидации повреждения на фазе необходимо ее отключить от всех подстанций, от которых может быть подано напряжение, то разрыв фазы несколько. При расчете неполнофазного режима каждый разрыв замещается источником несимметрии в схемах прямой, обратной и нулевой последовательностей электропередачи.

Трудности при расчетах таких режимов линий электропередачи методом симметричных составляющих очевидны. Каждая коммутация увеличивает порядок решаемых уравнений для определения параметров в местах коммутаций на шесть, т. е. при определении параметров режима источников несимметрии (а таковыми являются и коммутации) необходимо решать систему уравнений порядка $6n$, где n — число источников несимметрии.

Значительные трудности встречает и применение метода фазных координат, так как при этом информация об электрической системе увеличивается в три раза. Расчет методом фазных координат без использования цифровых вычислительных машин немалым.

В то же время необходимо помнить, что подавляющее число коммутаций при неполнофазной работе ЛЭП производится на отключенной фазе. В этих случаях для расчета неполнофазных ЛЭП целесообразнее использовать методы, где не учитывается отключенная фаза линии.

Одним из таких методов является метод двух симметричных составляющих [1]. Чтобы отличать его от общепринятого метода трех симметричных составляющих, ниже будем называть его методом двух координат. При использовании метода двух координат нет необходимости учитывать граничные условия в местах коммутации на отключенной фазе, что значительно сокращает расчеты.

Существует несколько способов разложения фазных параметров неполнофазной линии на две координаты, в том числе и предложенные С. Б. Лосевым [2]. Однако рекомендуемые в [2] координаты, несмотря на то, что они позволяют составить комплексную схему замещения, не уменьшают объема расчетов при коротких замыканиях и не могут быть использованы при этих расчетах на моделях переменного и постоянного тока. В то же время для приближенных расчетов коротких замыканий можно использовать координаты, предложенные в [1].

В настоящей работе приводятся основные соотношения между параметрами режима, выраженными методом двух координат через симметричные составляющие и фазные значения. Показано, как определяются параметры отдельных элементов.

Рассмотрим электропередачу, которая состоит из двух генерирующих систем с заземленными нейтралью и связывающей их линии с проводимости, связывающие отключенную фазу генераторов с работающими. Это позволяет представить схему в таком виде, как это изображено на рис. 1. Две э. д. с., сдвинутые относительно друг друга на 120° , замещают каждый генератор. Связь между генераторами осуществляется двухфазной линией. Фаза A линии отключена. Ее можно рассматривать как трос.

Представив таким образом электропередачу, можно составить ее схему замещения по составляющим. Разложим систему из двух э. д. с. на симметричные составляющие: первую и нулевую (рис. 2) [1]. Чтобы отличить их от системы трех симметричных составляющих, обозначим первую индексом N , нулевую индексом P . Последовательность N есть два противоположных и равных по модулю вектора, последовательность P — два равных вектора одного направления.

При разложении симметричной трехфазной системы э. д. с. генераторов на составляющие N и P имеем

$$E_N = -j0,5\sqrt{3}E_a; E_P = -0,5E_a. \quad (1)$$

Преобразования от симметричных составляющих к фазным значениям записываются следующим образом:

$$\begin{bmatrix} U_b \\ U_c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_N \\ U_P \end{bmatrix}; \quad \begin{bmatrix} I_b \\ I_c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_N \\ I_P \end{bmatrix}. \quad (2)$$

Соответственно обратные преобразования выражаются в виде

$$\begin{bmatrix} U_N \\ U_P \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_b \\ U_c \end{bmatrix}; \quad \begin{bmatrix} I_N \\ I_P \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_b \\ I_c \end{bmatrix}. \quad (3)$$

Токи симметричных составляющих можно выразить через составляющие N и P следующим образом:

$$I_1 = \frac{1}{3}(j\sqrt{3}I_N - I_P); I_2 = \frac{1}{3}(-j\sqrt{3}I_N - I_P); I_0 = \frac{2}{3}I_P. \quad (4)$$

Из (4) получаем

$$I_N = -j\frac{\sqrt{3}}{2}(I_1 - I_2), I_P = 1,5I_0. \quad (5)$$

Аналогично связаны между собой и напряжения. Рассмотрим, как определяются параметры элементов электропередачи в схемах последовательностей N и P .

Линия электропередачи. Последовательность N . Основными параметрами линии являются продольное сопротивление и емкостная проводимость.

Если рассматривать линию как продольное сопротивление, что справедливо для малых длин, то падения напряжения на фазах линии выражаются следующим образом:

$$\begin{aligned} \Delta U_b &= I_b Z_{fb} + I_c Z_m; \\ \Delta U_c &= I_b Z_m + I_c Z_{fc}, \end{aligned} \quad (6)$$

где $\Delta U_b, \Delta U_c$ — падения напряжения на фазах линии; Z_{fb}, Z_{fc} — сопротивление самоиндукции провода; Z_m — сопротивление взаимной индукции между проводами.

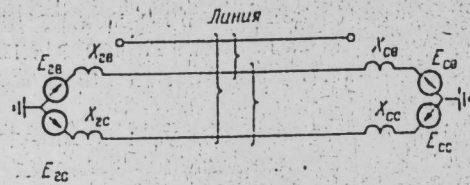


Рис. 1. Упрощенная схема замещения неполнофазной линии электропередачи, представленная в фазных координатах.

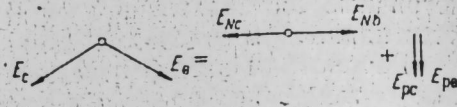


Рис. 2. Разложение пары э. д. с. на две симметричные составляющие.

Так как параметры фаз одинаковы, то при протекании по ним токов одной последовательности падение напряжения на одной фазе будет равно падению напряжения на другой. Ввиду того, что для последовательности N ток фазы B противоположен току фазы C и равен ему по величине, из уравнения (6) следует

$$\Delta U_m = I_N (Z_\phi - Z_m), \quad (7)$$

где $(Z_\phi - Z_m)$ — продольное сопротивление линии току последовательности N .

Поперечную проводимость неполнофазной линии можно получить из уравнения, связывающего потенциалы на трехфазной линии с токами через проводимости между фазами. Так как напряжения последовательности N на фазах b и c не создают электрического поля вокруг фазы A , то ток через емкость фазы A равен нулю. Получаем

$$\begin{bmatrix} 0 \\ I_b \\ I_c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Y_\phi - Y_m - Y_m \\ -Y_m & Y_\phi - Y_m \\ -Y_m - Y_m & Y_\phi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_a \\ U_b \\ U_c \end{bmatrix}. \quad (8)$$

Исключая из уравнения (8) параметры режима фазы A , имеем

$$I_b = (Y_\phi + Y_m) U_b, \quad (9)$$

откуда

$$Y_N = Y_0 + 3Y_m. \quad (10)$$

Нетрудно заметить, что параметры линии в схемах прямой последовательности и последовательности N равны между собой, т. е.

$$Z_1 = Z_N, \quad Y_1 = Y_N. \quad (11)$$

Линия электропередачи. Последовательность P . Подставив в уравнение (6) токи последовательности P , получаем

$$\Delta U_P = I_P (Z_\phi + Z_m) = I_P \frac{2Z_0 + Z_1}{3}, \quad (12)$$

где $\frac{2Z_0 + Z_1}{3}$ — сопротивление линии току последовательности P .

Поперечную проводимость линии найдем преобразованием «звезды», образованной двумя междуфазными проводимостями и проводимостью фазы A на «землю», в треугольник. После преобразования получаем:

$$Y_P = \frac{Y_\phi \cdot Y_m}{Y_\phi + 2Y_m} + Y_\phi = \frac{3Y_0 \cdot Y_1}{2Y_1 + Y_0}. \quad (13)$$

Сопротивления. Используем для определения параметров сопротивлений матрицы преобразований из уравнений (2) и (3):

$$\begin{bmatrix} Z_{NN} & Z_{NP} \\ Z_{PN} & Z_{PP} \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Z_{bb} & Z_{bc} \\ Z_{cb} & Z_{cc} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}. \quad (14)$$

Если $Z_{bb} = Z_{cc}$, а $Z_{bc} = Z_{cb}$, то

$$Z_{NN} = Z_1, \quad Z_{PP} = \frac{1}{3} (2Z_0 + Z_1), \quad Z_{NP} = Z_{PN} = 0, \quad (15)$$

т. е. если сопротивления элемента пофазно равны, то его схемы замещения последовательностей N и P между собой не связаны.

Путем преобразований координат, выраженных уравнением (14), определяются и проводимости неполнофазного элемента.

Генератор. Параметры генератора в фазных координатах можно выразить следующим образом:

$$\begin{aligned} Z_{aa} &= Z_{bb} = Z_{cc} = Z_\phi = j \frac{1}{3} (x_1 + x_2); \\ Z_{ab} &= Z_{bc} = Z_{ca} = Z_m = \frac{1}{6} [-\sqrt{3}(x_1 - x_2) - j(x_1 + x_2)]; \\ Z_{ac} &= Z_{ba} = Z_{cb} = Z_m = \frac{1}{6} [\sqrt{3}(x_1 - x_2) - j(x_1 + x_2)]. \end{aligned} \quad (16)$$

Сопротивления взаимной индукции между опережающей и отстающей фазами не равны сопротивлениям взаимной индукции между отстающей и опережающей фазами. Это значит, что формулы (15) для генератора не справедливы. Так как генератор, как правило, включается на стороне трансформатора с обмотками, собранными по схеме треугольника, рассмотрим, каким образом представить его в схеме замещения в фазных координатах.

Параметры режима на стороне низкого напряжения трансформатора связаны уравнениями

$$\begin{aligned} e_a &= Z_a i_a + Z_{ab} i_b + Z_{ac} i_c; \\ e_b &= Z_b i_a + Z_{bb} i_b + Z_{bc} i_c; \\ e_c &= Z_c i_a + Z_{cb} i_b + Z_{cc} i_c. \end{aligned} \quad (17)$$

В свою очередь, токи в фазах выражаются через токи в обмотках:

$$i_a = i_{ab} - i_{ca}; \quad i_b = i_{bc} - i_{ab}; \quad i_c = i_{ca} - i_{bc}, \quad (18)$$

где

$$i_{ca} = k I_a; \quad i_{ab} = k I_b; \quad i_{bc} = k I_c; \quad (19)$$

I_a, I_b, I_c — токи в линии на стороне высокого напряжения трансформатора; k — коэффициент трансформации трансформатора (с целью упрощения примем его равным единице).

Подставляя токи из (19) в (17), определим связь между линейными э. д. с. и токами в линии:

$$\begin{bmatrix} e_{ab} \\ e_{bc} \\ e_{ca} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Z_\phi & Z_{m1} & Z_{m2} \\ Z_{m2} & Z_\phi & Z_{m1} \\ Z_{m1} & Z_{m2} & Z_\phi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_a \\ I_b \\ I_c \end{bmatrix}. \quad (20)$$

Применяя к сопротивлениям генератора формулы преобразования (14), получаем

$$\begin{bmatrix} Z_{NN} & Z_{NP} \\ Z_{PN} & Z_{PP} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} j \frac{1}{2} (x_1 + x_2) & -\frac{\sqrt{3}}{6} (x_1 - x_2) \\ \frac{\sqrt{3}}{6} (x_1 - x_2) & j \frac{1}{6} (x_1 + x_2) \end{bmatrix}. \quad (21)$$

В уравнениях (21) сопротивления взаимного влияния не равны между собой. Но при $x_1 = x_2$ матрица сопротивлений диагональна.

Нагрузка. Аналогично (21) определяются сопротивления нагрузки:

$$\begin{bmatrix} Z_{NN} & Z_{NP} \\ Z_{PN} & Z_{PP} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} (Z_1 + Z_2) + j \frac{\sqrt{3}}{6} (Z_1 - Z_2) \\ -j \frac{\sqrt{3}}{6} (Z_1 - Z_2) & \frac{1}{6} (Z_1 + Z_2) \end{bmatrix}. \quad (22)$$

Трансформаторы. Практический интерес представляют двухобмоточные трансформаторы со схемами соединения обмоток λ_0/λ , λ_0/Δ , трехобмоточные со схемой соединения $\lambda_0/\lambda/\Delta$, автотрансформаторы и многообмоточные трансформаторы с расщепленными обмотками. Рассмотрим эти типы трансформаторов.

Двухобмоточный трансформатор со схемой соединения обмоток λ_0/λ . Для токов последовательности P , как и для токов нулевой последовательности, если не учитывать ветвь намагничивания, данный вид трансформатора является разрывом, поэтому в схему замещения последовательности P он вводится так же, как и в схему нулевой последовательности, а в схему последовательности N , как и в схему прямой (обратной) последовательности. Двухобмоточный трансформатор со схемой соединения обмоток λ_0/Δ . Из схем, изображенных на рис. 3, а, б, видно, что токи последовательностей N и P при наличии нагрузки на стороне низкого напряжения трансформируются обеими обмотками этого напряжения. Падение напряжения на трансформаторе в каждой из последовательностей равно произведению тока этой последовательности на сопротивление трансформатора, которым он замещается при расчетах нормальных режимов. То есть сопротивление трансформатора в схемах последовательностей N и P то же, что и при расчетах в координатах трех симметричных составляющих.

Автотрансформатор. Схемы замещения автотрансформатора для токов прямой, обратной и нулевой последовательностей одинаковы. Применяя к сопротивлениям схемы формулы (15), получаем для последовательностей N и P ту же трехлучевую схему замещения, что и для системы трех симметричных составляющих.

Трехобмоточный трансформатор со схемой соединения обмоток $\lambda_0/\lambda/\Delta$. Трехобмоточный трансформатор такого вида в системе координат трех симметричных составляющих представлен трехлучевой звездой

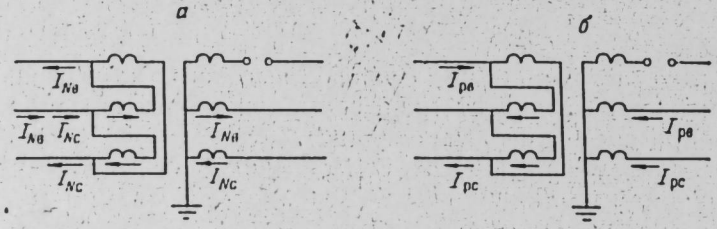


Рис. 3. Трансформация токов трансформатором со схемой соединения λ_0/λ . а) последовательности N ; б) последовательности P .

дой с разными путями протекания токов прямой (обратной) и нулевой последовательностей.

Схема замещения трехобмоточного трансформатора для токов последовательности N , очевидно, будет такой же, что и для токов прямой последовательности, так как согласно уравнениям (5) I_N является функцией только токов прямой и обратной последовательностей, а схемы замещения трансформатора для токов прямой и обратной последовательностей одинаковы.

Составим схему замещения для токов последовательности P . Для этого, пользуясь уравнениями (15), найдем сопротивления трансформатора в трех режимах.

1. Относительно выводов высокого напряжения при закороченных выводах низкого и разомкнутых среднего напряжений:

$$X_b + X_n = x_b + x_n, \quad (23)$$

где X_b , X_n — сопротивления ветвей трансформатора в схеме замещения последовательности P ; x_b , x_n — то же в схеме замещения системы трех симметричных составляющих.

2. Относительно выводов высокого напряжения при закороченных выводах среднего и разомкнутых низкого напряжений:

$$X_b + X_c = x_b + \frac{1}{3} x_c + \frac{2}{3} x_n. \quad (24)$$

где X_c , x_c — сопротивления ветви средней обмотки трансформатора в схемах замещения в системах двух координат и трех симметричных составляющих соответственно.

Таблица 1
Схемы замещения и параметры трансформаторов для токов последовательности P

Схема соединения обмоток		x_b	x_c	x_n
λ_0/λ		$x_{b0} + x_n$		∞
λ_0/Δ		x_{b0}		x_{n0}
$\lambda_0/\lambda_0/\Delta$		x_{b0}	x_{c0}	x_{n0}
$\lambda_0/\lambda/\Delta$		$x_b + \frac{2}{3} x_n$	$\frac{1}{3} x_c$	$\frac{1}{3} x_n$
$\lambda_0/\lambda/\Delta/\Delta$		$x_{b0} + \frac{2}{3} (x_{n1}/x_{n2})$	$\frac{1}{3} x_c$	$\frac{1}{3} x_{n1,2}$

Примечание. x — сопротивление обмотки токам нулевой последовательности. Индекс 0 — обозначает нулевую последовательность.

3. Относительно выводов низкого напряжения при закороченных выводах среднего и разомкнутых высшего напряжений:

$$X_H + X_c = \frac{1}{3} x_H + \frac{1}{3} x_c. \quad (25)$$

Решая совместно уравнения (23) — (25), получаем трехлучевую схему замещения трансформатора. Сопротивления обмоток:

$$\begin{aligned} X_B &= x_B + \frac{2}{3} x_H; \\ X_c &= \frac{1}{3} x_c; \\ X_H &= \frac{1}{3} x_H. \end{aligned} \quad (26)$$

Аналогично определяются сопротивления лучей многообмоточных трансформаторов в схеме последовательности P . Сопротивление обмотки высокого напряжения равно сумме ее сопротивлений в схеме нулевой последовательности и двух третьих сопротивления параллельных обмоток, соединенных по схеме треугольника. Остальные обмотки замещаются своими сопротивлениями, уменьшенными в три раза.

Таблица 2

Параметры элементов электропередачи в схемах последовательностей N и P

Элемент	Z_N	Z_P	Z_{NP}	Z_{PN}
Линия	Z_1	$\frac{1}{3} (2Z_0 + Z_1)$		
Продольные сопротивления	$\frac{Z_1 + Z_2}{2}$	$\frac{1}{3} \left(\frac{Z_1 + Z_2}{2} + 2Z_0 \right)$	$j \frac{\sqrt{3}}{6} (Z_1 - Z_2)$	$j \frac{\sqrt{3}}{6} (Z_1 - Z_2)$
Генераторы	$\frac{j(x_1 + x_2)}{2}$	$\frac{j(x_1 + x_2)}{6}$	$-\frac{\sqrt{3}}{6} (x_1 - x_2)$	$\frac{\sqrt{3}}{6} (x_1 - x_2)$
Нагрузки				
Трехфазные элементы	$\frac{Z_1 + Z_2}{2}$	$\frac{1}{2} \left(\frac{Z_1 + Z_2}{2} + 2Z_0 \right)$	$j \frac{\sqrt{3}}{6} (Z_1 - Z_2)$	$j \frac{\sqrt{3}}{6} (Z_1 - Z_2)$

Элемент	Y_N	Y_P	Y_{NP}	Y_{PN}
Линия	Y_1	$\frac{3Y_0 Y_1}{2Y_1 + Y_0}$		
Продольные сопротивления				
Генераторы	$\frac{Y_1 + Y_2}{2}$	$\frac{Y_1 + Y_2}{6}$	$j \frac{\sqrt{3}}{6} (Y_1 - Y_2)$	$j \frac{\sqrt{3}}{6} (Y_1 - Y_2)$
Нагрузки				
Трехфазные элементы				

Трехфазный элемент. Так как в месте соединения токи неополнофазного и полнофазного элементов равны, то к полнофазному элементу для определения его сопротивлений можно применить уравнения (14). Окончательно получаем

$$\begin{aligned} Z_{NN} &= \frac{1}{2} (Z_1 + Z_2); \\ Z_{PP} &= \frac{1}{6} (Z_1 + Z_2) + \frac{2}{3} Z_0; \\ Z_{NP} &= +j \frac{\sqrt{3}}{6} (Z_1 - Z_2); \\ Z_{PN} &= -j \frac{\sqrt{3}}{6} (Z_1 - Z_2). \end{aligned} \quad (27)$$

Формулы для определения параметров рассмотренных элементов в схемах замещения последовательностей N и P приведены в табл. 1 и 2.

ВЫВОДЫ

1. Для расчетов неополнофазных режимов линий электропередач с отборами мощности вдоль трассы целесообразно использовать метод двух координат.

2. Параметры отдельных элементов электропередачи можно получить, используя параметры этих элементов в схемах замещения прямой, обратной и нулевой последовательностей.

Сибирский научно-исследовательский институт энергетики, Новосибирск

Поступила в редакцию 2/1 1974

ЛИТЕРАТУРА

1. E. Clarke, Circuit Analysis of A — C Power Systems, 1943, 486 t.
2. С. Б. Лосев. Электричество, 1971, № 3, с. 13—20.

УДК 621.313.322.81

А. Х. КАЛЮЖНЫЙ, Н. М. ПИСЬМАН

ИСПОЛЬЗОВАНИЕ УРАВНЕНИЙ МАКСВЕЛЛА ДЛЯ УЧЕТА МАССИВНОГО РОТОРА ТУРБОГЕНЕРАТОРА

Ротор турбогенератора представляет собой массивный сердечник. В нестационарном режиме в роторе возникают вихревые токи, существенно влияющие на процессы, происходящие в электрической машине. В настоящей статье делается попытка учесть влияние массивного ротора с помощью аналитических выражений, полученных на основе уравнений Максвелла. Рассматривается идеализированная электрическая машина (рис. 1). При этом приняты следующие допущения:

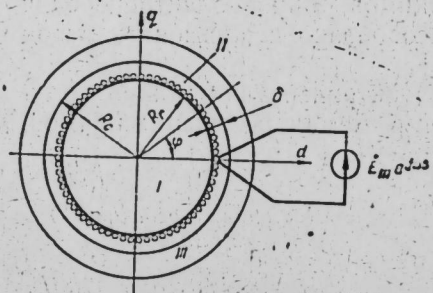


Рис. 1. Сечение идеализированного турбогенератора с гладким ротором.

1) обмотка равномерно распределена по гладкому ротору, активное сопротивление обмотки ротора не зависит от частоты;

2) воздушный зазор постоянен;

3) длина машины по оси z намного больше поперечных размеров;

4) благодаря шихтовке проводимость стали по продольной оси статора z принимается равной нулю ($\gamma_z = 0$);

5) высота шихтованной стали статора принимается такой, что индукция во внешней части убывает до нуля;

6) модель рассматривается в линейном приближении, магнитная проницаемость стали статора и ротора постоянна, токами смещения пренебрегаем;

7) ротор считается неподвижным.

С учетом допущения 6 уравнения Максвелла имеют вид: для массивного ротора

$$\text{rot } H^I = j^I, \quad \text{rot } E^I = -\frac{\partial B^I}{\partial t}, \quad (1)$$

где

$$B^I = \mu_r H^I, \quad j^I = \gamma_r E^I; \quad (2)$$

для воздушного зазора

$$\text{rot } H^{II} = 0, \quad \text{rot } E^{II} = -\frac{\partial B^{II}}{\partial t}, \quad (3)$$

где

$$B^{II} = \mu_0 H^{II}; \quad (4)$$

для статора

$$\text{rot } H^{III} = 0, \quad \text{rot } E^{III} = -\frac{\partial B^{III}}{\partial t}, \quad (5)$$

где

$$B^{III} = \mu_c H^{III}. \quad (6)$$

Уравнения (1)–(6) общезвестны [1].

С учетом допущения 6 можно ввести векторную потенциальную функцию в виде $H = \text{rot } A$ [2].

Подстановкой $H = \text{rot } A$ каждая из систем уравнений (1), (3), (5) приводится к одному уравнению для векторного потенциала:

$$\nabla^2 A^I = \mu_r \gamma_r \frac{\partial A^I}{\partial t}; \quad (7)$$

$$\nabla^2 A^{II} = 0; \quad (8)$$

$$\nabla^2 A^{III} = 0. \quad (9)$$

Уравнения для векторного потенциала дополняются граничными условиями. На поверхности ротора при $R = R_r$

$$H_{2r} - H_{1r} = K, \quad B_{2r} = B_{1r}. \quad (10)$$

На поверхности статора при $R = R_c$

$$H_{3r} = H_{2r}, \quad B_{3r} = B_{2r}. \quad (11)$$

В (10), (11) и далее индекс r означает тангенциальную составляющую, а индекс R — нормальную составляющую. Величина K в (10) — поверхностная плотность тока:

$$K = \frac{I\omega}{\pi R_r}, \quad (12)$$

где ω — число витков обмотки ротора; I — ток в обмотке ротора. Поверхностная плотность тока $K(\varphi)$ представлена на рис. 2.

Разлагая $K(\varphi)$ в ряд Фурье, получаем

$$K(\varphi) = \frac{4I\omega}{\pi^2 R_r} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(n\varphi)}{n}, \quad (13)$$

где $n = 1, 3, 5, \dots$

В стационарных процессах в обмотке ротора течет постоянный ток. В данной работе рассматривается более общий случай, когда ток в обмотке изменяется по синусоидальному закону. Синусоидальные колебания подаются в обмотку ротора и при снятии частотных характеристик генератора. Если ток $I = I_m e^{j\omega t}$, то $K(\varphi, t)$ имеет вид

$$\dot{K}(\varphi, t) = \frac{4I_m \omega}{\pi^2 R_r} e^{j\omega t} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(n\varphi)}{n}.$$

В связи с тем, что поверхностная плотность тока является периодической функцией времени, векторный потенциал A можно представить следующим образом:

$$A = A_m e^{j\omega t}, \quad (14)$$

где $A_m = A_m(r, \varphi)$ — комплексная величина.

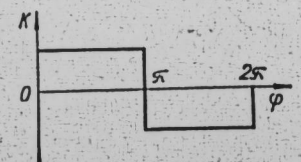


Рис. 2. Кривая распределения плотности тока.

Подстановкой (14) в (7)–(9) последние уравнения приводятся к виду:

$$\nabla^2 \dot{A}_m^I = j\omega \mu_r \gamma_r \dot{A}_m^I; \quad (15)$$

$$\nabla^2 \dot{A}_m^{II} = 0; \quad (16)$$

$$\nabla^2 \dot{A}_m^{III} = 0. \quad (17)$$

Записываем выражения (15)–(17) в цилиндрической системе координат:

$$\frac{\partial^2 \dot{A}_m^I}{\partial R^2} + \frac{1}{R} \frac{\partial \dot{A}_m^I}{\partial R} + \frac{1}{R^2} \frac{\partial^2 \dot{A}_m^I}{\partial \varphi^2} = j\nu^2 \dot{A}_m^I; \quad (18)$$

$$\frac{\partial^2 \dot{A}_m^{II}}{\partial R^2} + \frac{1}{R} \frac{\partial \dot{A}_m^{II}}{\partial R} + \frac{1}{R^2} \frac{\partial^2 \dot{A}_m^{II}}{\partial \varphi^2} = 0; \quad (19)$$

$$\frac{\partial^2 \dot{A}_m^{III}}{\partial R^2} + \frac{1}{R} \frac{\partial \dot{A}_m^{III}}{\partial R} + \frac{1}{R^2} \frac{\partial^2 \dot{A}_m^{III}}{\partial \varphi^2} = 0, \quad (20)$$

где введено обозначение $\omega \mu_r \gamma_r = \nu^2$.

Решение уравнения (18), согласно [2, 3], записывается в виде ряда

$$\dot{A}_m^I = \sum_{n=1}^{\infty} C_n^I J_n(\sqrt{-iv}R) \sin(n\varphi) + \text{const}, \quad (21)$$

где $J_n \sqrt{-iv}R$ — бесселева функция первого рода n -го порядка, а переменная R изменяется в пределах $0 \leq R \leq R_r$.

Решение уравнения (19) в области $R_r \leq R \leq R_c$ записывается, согласно [3], в виде

$$\dot{A}_m^{II} = \sum_{n=1}^{\infty} (A_n^{II} R^n + B_n^{II} R^{-n}) \sin(n\varphi) + \text{const}. \quad (22)$$

Решение уравнения (20) при $R \geq R_c$, согласно [3]:

$$\dot{A}_m^{III} = \sum_{n=1}^{\infty} B_n^{III} R^{-n} \sin(n\varphi) + \text{const}. \quad (23)$$

В выражениях (21)–(23) C_n^I , A_n^{II} , B_n^{II} , B_n^{III} — неизвестные постоянные интегрирования, $n=1, 3, 5, \dots$

Граничные условия (10), (11) в цилиндрической системе координат имеют вид:

при $R=R_r$,

$$-\frac{\partial \dot{A}_m^{II}}{\partial R} + \frac{\partial \dot{A}_m^I}{\partial R} = K, \quad (24)$$

$$\mu_0 \frac{1}{R} \frac{\partial \dot{A}_m^{II}}{\partial \varphi} = \mu_r \frac{1}{R} \frac{\partial \dot{A}_m^I}{\partial \varphi};$$

при $R=R_c$,

$$\frac{\partial \dot{A}_m^{II}}{\partial R} = \frac{\partial \dot{A}_m^{III}}{\partial R};$$

$$\mu_0 \frac{1}{R} \frac{\partial \dot{A}_m^{II}}{\partial \varphi} = \mu_c \frac{1}{R} \frac{\partial \dot{A}_m^{III}}{\partial \varphi}. \quad (25)$$

Подставляя выражения (21)–(23) для A^I , A^{II} , A^{III} в (24) и (25), получаем следующую систему уравнений для определения постоянных интегрирования:

$$-n [A_n^{II} R_r^{n-1} - B_n^{II} R_r^{-n-1}] + C_n^I \frac{\sqrt{-iv}}{2} [J_{n-1}(\sqrt{-iv}R_r) - J_{n+1}(\sqrt{-iv}R_r)] = \frac{4j_m \omega}{\pi^2 R_{rn}}, \quad (26)$$

$$\mu_0 [A_n^{II} R_r^{n-1} + B_n^{II} R_r^{-n-1}] = \mu_r \frac{C_n^I J_n(\sqrt{-iv}R_r)}{R_r}, \quad (27)$$

$$B_n^{III} R_c^{-n-1} = -[A_n^{II} R_c^{n-1} - B_n^{II} R_c^{-n-1}], \quad (28)$$

$$\mu_c B_n^{III} R_c^{-n-1} = \mu_0 [A_n^{II} R_c^{n-1} + B_n^{II} R_c^{-n-1}]. \quad (29)$$

Из системы уравнений (26)–(29) можно определить постоянные интегрирования A_n^{II} , B_n^{II} , B_n^{III} , C_n^I для каждого n . Однако для анализа процессов в роторе достаточно определить C_n^I . Решая уравнения (28)–(29) относительно B_n^{III} и приравняв правые части, получаем

$$\frac{\mu_0}{\mu_c} [A_n^{II} R_c^{2n} + B_n^{II}] = -[A_n^{II} R_c^{2n} - B_n^{II}],$$

откуда связь между A_n^{II} и B_n^{II} имеет вид

$$A_n^{II} = B_n^{II} \frac{(\mu_c - \mu_0)}{(\mu_c + \mu_0)} R_c^{-2n}. \quad (30)$$

Поскольку обычно $\mu_c \gg \mu_0$, то связь между A_n^{II} и B_n^{II} упрощается:

$$A_n^{II} = B_n^{II} R_c^{-2n}. \quad (31)$$

Подставляя (31) в (26) и (27) и используя рекуррентное соотношение

$$J_n(x) = \frac{x}{2n} [J_{n-1}(x) + J_{n+1}(x)], \quad (32)$$

выражение (27) можно разрешить относительно B_n^{II} :

$$B_n^{II} = \mu_r \frac{\sqrt{-iv}}{2n} \frac{[J_{n-1}(\sqrt{-iv}R_r) + J_{n+1}(\sqrt{-iv}R_r)]}{[R_c^{-2n} R_r^{n-1} + R_r^{-n-1}]} C_n^I,$$

где $\mu_r = \frac{\mu_r}{\mu_0}$ — относительная магнитная проницаемость.

Подставляя выражение для B_n^{II} в (26), получаем выражение для C_n^I :

$$C_n^I = \frac{8j_m \omega}{\pi^2 R_r \sqrt{-iv}} \left\{ \frac{1}{J_{n-1}(\sqrt{-iv}R_r) [\mu_r \lambda_n + 1] + J_{n+1}(\sqrt{-iv}R_r) [\mu_r \lambda_n - 1]} \right\} \frac{1}{n}, \quad (33)$$

где

$$\lambda_n = \frac{1 - \left(\frac{R_r}{R_c}\right)^{2n}}{\left(\frac{R_r}{R_c}\right)^{2n}}.$$

Подставляя (33) в (21), получаем выражение для векторного потенциала с точностью до произвольной постоянной:

$$\dot{A}_m^1 = \frac{8j_m \omega}{\pi^2 R_r \sqrt{-iv}} \sum_{n=1}^{\infty} \times \left\{ \frac{J_n(\sqrt{-iv} R_r)}{J_{n-1}(\sqrt{-iv} R_r) [\mu_r' \lambda_n + 1] + J_{n+1}(\sqrt{-iv} R_r) [\mu_r' \lambda_n - 1]} \right\} \frac{\sin(n\varphi)}{n}. \quad (34)$$

Зная выражение для $\dot{A}_m^1$ можно получить величину комплексной амплитуды потокоцепления:

$$\dot{\psi}_m = \frac{2\omega \mu_r l}{\pi} \int_0^\pi \dot{A}_m^1(R_r, \varphi) d\varphi. \quad (35)$$

Так как ряд в (34) сходится равномерно, то, подставляя $\dot{A}$ в (35) и интегрируя по φ при $R=R_r$, получаем:

$$\dot{\psi}_m = \frac{32\omega^2 \mu_r l}{\pi^3 R_r \sqrt{-iv}} \sum_{n=1}^{\infty} \times \left\{ \frac{J_n(\sqrt{-iv} R_r)}{J_{n-1}(\sqrt{-iv} R_r) [\mu_r' \lambda_n + 1] + J_{n+1}(\sqrt{-iv} R_r) [\mu_r' \lambda_n - 1]} \right\} \frac{1}{n^3}. \quad (36)$$

Выражение (36) с учетом (32) можно привести к виду

$$\dot{\psi}_m = \frac{16\omega^2 \mu_r l}{\pi^3} \sum_{n=1}^{\infty} \times \left\{ \frac{J_{n-1}(\Phi) + J_{n+1}(\Phi)}{J_{n-1}(\Phi) [\mu_r' \lambda_n + 1] + J_{n+1}(\Phi) [\mu_r' \lambda_n - 1]} \right\} \frac{1}{n^3}. \quad (37)$$

В (37) для кратности аргумент бesselевых функций обозначен через Φ :

$$\Phi = \sqrt{-iv} R_r.$$

Выражение (37) характеризует влияние массива ротора. Структура выражения (37), включающего сумму ряда чисел, свидетельствует о возможности замещения массива бесконечно большим числом контуров, параметры которых зависят от частоты. Анализ выражения, стоящего под знаком суммы, показывает, что ряд быстро сходится. В результате величина $\dot{\psi}_m$ определяется фактически первыми контурами. Остальными контурами с более высокими номерами можно, очевидно, пренебречь. Каждый из контуров по-разному проявляется в величине $\dot{\psi}_m$ при изменении частоты ω , которая является аргументом бesselевых функций.

Проанализируем возможность упрощения уравнения (37). В предельном случае $\mu_r \gg \mu_0$, и с учетом ограниченного диапазона изменения $\lambda_n = 0,1-1$ имеем

$$\mu_r' \lambda_n \gg 1.$$

С учетом этого неравенства

$$\dot{\psi}_m = \frac{16j_m \omega^2 \mu_0 l}{\pi^3} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_n n^3}. \quad (38)$$

Выражение (38) характеризует в пределе величину $\dot{\psi}_m$ между двумя стальными цилиндрами с бесконечно большой магнитной проницаемостью. Оно определяется характеристиками воздушного зазора и обмотки на роторе.

Рассмотрим сумму ряда в (38). Для крупных турбогенераторов диаметр ротора и воздушный зазор равны: $D_r = 1000-1125$ мм, $\delta = 85-100$ мм. В соответствии с этим величины λ_n колеблются для турбогенераторов в небольших пределах: $\lambda_1 = 0,15-0,17$, $\lambda_3 = 0,42-0,46$; $\lambda_5 = 0,65$; $\lambda_n \rightarrow 1,0$. Так, для ТГВ-500 $\lambda_1 = 0,156$; $\lambda_3 = 0,44$; $\lambda_5 = 0,65$ и т. д., соответственно сумма ряда в (38)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_n n^3} = \frac{1}{0,156} + \frac{1}{27 \cdot 0,44} + \frac{1}{125 \cdot 0,65} + \dots \approx 6,5$$

Таким образом, в случае $\mu_r \rightarrow \infty$ для всех крупных турбогенераторов в (38) можно ограничиться первым членом ряда и погрешность при этом окажется меньше 2%. В действительности магнитная проницаемость стали представляет конечную величину $\mu_r \geq 10$. При конечном, несколько заниженном, значении $\mu_r = 6,0$ выражение (37) имеет вид

$$\dot{\psi}_m = \frac{16j_m \omega^2 \mu_r l}{\pi^3} \left[\frac{J_0(\Phi) + J_2(\Phi)}{2J_0(\Phi)} + \frac{1}{27} \frac{J_2(\Phi) + J_4(\Phi)}{3,6J_2(\Phi) + 1,6J_4(\Phi)} \right]. \quad (39)$$

Анализ (39) показывает, что ряд быстро убывает. Так, уже второй член ряда при различных практически возможных частотах составляет несколько процентов от величины первого члена. Следовательно, при любых возможных значениях μ_r достаточно ограничиться двумя первыми членами ряда. С точностью до 5-10% можно ограничиться одним членом ряда, т. е. одним контуром, параметры которого имеют сложную зависимость от частоты. При этом выражение (37) упрощается к виду

$$\dot{\psi}_m = \frac{16j_m \omega^2 \mu_0 l}{\pi^3} \times \frac{[J_0(\Phi) + J_2(\Phi)] [R_r^2 + R_c^2]}{J_0(\Phi) [\mu_r' (R_c^2 - R_r^2) + (R_c^2 + R_r^2)] + J_2(\Phi) [\mu_r' (R_c^2 - R_r^2) - (R_c^2 + R_r^2)]}. \quad (40)$$

Уравнения (37) и (40) можно использовать для определения частотных характеристик ротора. Согласно рис. 1 для обмотки ротора

$$\dot{E}_m = r_f \dot{I}_m + i\omega \dot{\psi}_m, \quad (41)$$

где $\dot{\psi}_m$ — потокоцепление обмотки возбуждения; r_f — активное сопротивление обмотки.

Частотная характеристика может быть представлена в виде

$$Z(i\omega) = \frac{\dot{E}_m}{\dot{I}_m} = r_f + j\omega \frac{\dot{\psi}_m}{\dot{I}_m} = R_s(\omega) + jX_s(\omega).$$

Используя (40), для ψ_m получаем

$$R_s(\omega) = r_f + \frac{16\omega^2 \mu_0 \mu_r l}{\pi^3} \operatorname{Re} \left\{ j\omega \left[\frac{J_0(\Phi) + J_2(\Phi)}{J_0(\Phi) [\mu_r \lambda_1 + 1] + J_2(\Phi) [\mu_r \lambda_1 - 1]} \right] \right\}, \quad (42)$$

$$X_s(\omega) = \frac{16\omega^2 \mu_0 \mu_r l}{\pi^3} \operatorname{Im} \left\{ j\omega \left[\frac{J_0(\Phi) + J_2(\Phi)}{J_0(\Phi) [\mu_r \lambda_1 + 1] + J_2(\Phi) [\mu_r \lambda_1 - 1]} \right] \right\}. \quad (43)$$

Выражения (42) и (43) характеризуют сложную зависимость величин R_s и X_s от частоты.

В частном случае при $\omega=0$

$$R_0 = r_f,$$

а выражение для индуктивности обмотки с учетом массива ротора согласно (40) может быть приведено к виду

$$L_{f_0} = \frac{16\omega^2 R_f l}{\pi^3 \left[\frac{\delta}{\mu_0} + \frac{R_f}{\mu_r} \right]}. \quad (44)$$

При учете всех членов ряда

$$L_{f_0} = \frac{16\omega^2 \mu_r l}{\pi^3} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_n \mu_r + 1} \cdot \frac{1}{n^3}. \quad (45)$$

Для оценки влияния массива ротора на частотные характеристики турбогенератора использованы выражения (42) и (43). Частотные характеристики представлены в общепринятом виде

$$X(j\omega) = X_1(\omega) + jX_2(\omega),$$

где $X_1(\omega) = \frac{X_s(\omega)}{j\omega E}$ — действительная составляющая частотной характеристики; $X_2(\omega) = \frac{R_s(\omega)}{j\omega E}$ — ее мнимая составляющая.

Частотные характеристики для общности отнесены к базисному количеству

$$E = \frac{16\omega^2 \mu_0 \mu_r L}{\pi^3} \cdot \frac{1}{\mu_r \lambda_1 + 1}.$$

При их вычислении принято $r_f=0$. Поскольку геометрическими размерами обмотки на роторе можно пренебречь, то сопротивление рассеяния ее равно нулю. Рассчитанные с учетом этой зависимости $X_1(\omega)$ и $X_2(\omega)$

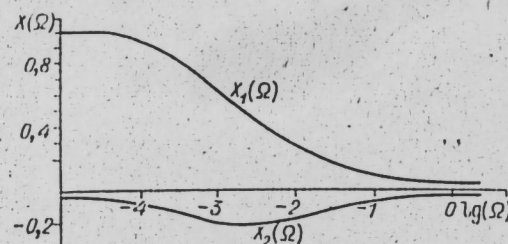


Рис. 3. Частотные характеристики идеализированного турбогенератора с массивным ротором при $\mu_r=100$; $\gamma_r=10^{-7}$ 1/Ом·м; $R_c=0,6$ м; $R_r=0,5$ м.
 $\Omega=\omega/314$ — частота в относительных единицах.

приведены на рис. 3. Качественно они подобны частотным характеристикам турбогенератора, снятым экспериментально [4], и являются, согласно принятым допущениям, средними между $X_{d_0}(j\omega)$ и $X_q(j\omega)$.

ВЫВОДЫ

С использованием уравнений Максвелла получены аналитические выражения для частотных характеристик массивного ротора турбогенератора. Эти характеристики имеют сложную зависимость от частоты. Последняя входит в аргумент бесселевых функций $J_0(\Phi)$, $J_2(\Phi)$.

Рассчитанные по аналитическим выражениям частотные характеристики подобны характеристикам турбогенератора, полученным экспериментально.

Сибирский научно-исследовательский институт энергетики,
Новосибирск

Поступила в редакцию
26/1 V1974

ЛИТЕРАТУРА

1. С. Д. Купаля н. Теоретические основы электротехники. М., «Энергия», 1970, ч. 3, с. 105—107, 159—166.
2. Ш. М и л о ш. Электродинамические задачи в электрических машинах. М.—Л., «Энергия», 1966, с. 6—9, 151—156.
3. Линейные уравнения математической физики. М., «Наука», 1964, с. 97—103, 128—130.
4. А. Х. К а л о ж н ы й. Тр. СибНИИЭ, 1972, вып. 21, с. 118—132.

ПИСЬМО В РЕДАКЦИЮ

О статье А. П. Шашкина «Определение формы плоского сверхзвукового сопла» (Известия Сиб. отд. АН СССР, сер. техн. наук, 1973, № 3, вып. 1, с. 52—55).

В статье А. П. Шашкина рассмотрена вариационная задача о построении верхней и нижней стенок плоского несимметричного сопла, реализующего максимум тяги. При этом считаются заданными безвихревой сверхзвуковой поток на характеристике первого семейства, которая соединяет начальные точки D и C искомым участком стенок; длина образующей верхней стенки CE и ордината ее концевой точки; давление вне сопла. Исследование ограничено случаем, когда внутри сопла запрещены ударные волны, а ископаемая оптимальная конфигурация принадлежит к специальному классу сопел, отличающихся тем, что не только начальные, но и концевые точки их стенок соединены характеристикой первого семейства. Особенностью исследуемых в работе конфигураций является то, что малое варьирование угла наклона нижней стенки вызывает изменение давления как на ней (вниз по потоку от проварьированного участка), так и на верхней стенке сопла. Это, а также задание длины образующей верхней стенки вместо абсциссы ее концевой точки делает невозможным использование в общем случае известного метода перехода к контрольному контуру* (в случае задания абсциссы концевой точки верхней стенки применение указанного метода показывает, что, если данная конфигурация оптимальна, то отрезок BG замыкающей характеристики BE прямолинейен в силу этого в треугольнике BCG реализуется течение типа простой волны с прямолинейными характеристиками первого семейства).

Сформулированная в работе вариационная задача в некоторых деталях отличается от задач, решенных ранее, т. е. оригинальна и представляет определенный интерес. При этом, однако, следует отметить, что вариационные задачи, приводящие к несимметричным конфигурациям, допускающим взаимное влияние контуров (при их малом варьировании по углу наклона образующей), в последнее время рассматривались и другими авторами**. Интересное исследование выполнено недавно А. И. Рыловым. К его заслуге следует отнести построение таких оптимальных конфигураций, к анализу которых может быть применен метод, близкий к методу контрольного контура. Это существенно упрощает исследование, которое в случае других конфигураций требует применения существенно более сложного и трудоемкого общего метода множителей Лагранжа***.

Сформулировав вариационную задачу, А. П. Шашкин предпринял попытку ее решения без использования общего метода множителей Лагранжа. К сожалению, предлагаемый им метод решения, который, как и метод контрольного контура, сводит рассматриваемую задачу к одномерной задаче вариационного исчисления, нельзя признать правильным. Последнее связано, по крайней мере, с двумя обстоятельствами, наличие любого из них достаточно, чтобы сделать недействительным предлагаемый А. П. Шашкиным подход.

Во-первых, для справедливости указанного подхода необходимо, как пишет сам автор, чтобы «между дугами, отсекаемыми характеристиками (первого семейства) на верхнем и нижнем контурах и на характеристиках другого семейства, существовало взаимнооднозначное соответствие». Кроме того, такое же соответствие должно иметь место между отрезками, отсекаемыми характеристиками второго семейства на начальной характеристике CD и на нижней стенке DE . Однако для оптимальной конфигурации требуемые условия в общем случае не выполняются. Действительно, контуры стенок слева от точек C и D заданы, а справа от них должны быть построены в результате решения вариационной задачи, причем требуется лишь, чтобы искомые участки верхней и нижней стенок начинались соответственно в точках C и D . В силу этого направления касательных к контурам справа и слева от C и D в общем случае различаются, что приводит к изломам в указанных точках. Требование отсутствия в исследуемой области течения ударных волн, за исключением изломов, обтекаемых с образованием ударной волны, приводит к начальному участку, при обтекании которого характеристики, отходящие от него, фокусируются на противоположной стенке сопла. Ясно, что наличие пучков волн разрежения

и сжатия, образующихся соответственно при обтекании начального участка одной из стенок или изломов в точках C и D , нарушает сформулированные выше условия взаимной однозначности.

Во-вторых, в основе решения лежит использование формул (4), связывающих длины дуг, отсекаемых характеристиками на противоположных стенках сопла, а также на стенках сопла и на начальной характеристике CD . В соответствии с первой из этих формул отношение длин дуг, отсекаемых характеристиками первого семейства на нижний и верхней стенках, есть функция только углов наклона стенок на рассматриваемых бесконечно малых отрезках стенок и инварианта Римана, отвечающая характеристике второго семейства, в соответствующей точке нижней стенки. Хотя в работе нет вывода этой и прочих формул (4), однако их ошибочность легко показать на различных примерах. Один из таких примеров, в котором поток на CD равномерный, приводит сам автор, когда на с. 54 пишет, что для равномерного на CD потока формулы (4) непригодны. Следует подчеркнуть, что исходные соотношения, в частности формулы (2'), опираясь на которые автор получил (4), справедливы вне зависимости от типа течения на CD . Поэтому остается только удивляться, почему отмеченное автором ограничение не послужило для него указателем неправильности формул (4).

А. Н. Крайко

ОТВЕТ на замечания А. Н. Крайко по поводу статьи «Определение формы плоского сверхзвукового сопла».

В статье рассматривается задача о построении верхней и нижней стенок плоского несимметричного сопла при безвихревом движении газа. При решении этой задачи известный метод перехода к контрольному контуру* неприменим. Указанные в письме работы А. Н. Крайко** и исследования А. И. Рылова, где рассматриваются вариационные задачи с несимметричными контурами, в момент написания статьи не были опубликованы и мне были неизвестны.

В письме А. Н. Крайко в редакцию делается два замечания.

1. Автор письма пишет о невозможности течений с взаимнооднозначным соответствием дуг характеристик и стенок. Действительно, в общем случае возможны контуры сопел с изломом образующих в рассматриваемой области и в том числе в концевых точках C и D начального контура. Для рассматриваемого класса сопел, как видно из рис. 1, возможные точки фокусировки характеристик находятся за пределами рассматриваемой области. В статье отмечается, что имеет место однопараметрическое семейство экстремалей, параметр которого выбирается из условий на начальной характеристике CD . Таким образом, в статье рассмотрен узкий класс сопел с гладкими контурами и все решение задачи строится на безусловном выполнении взаимнооднозначного соответствия дуг характеристик и контуров. Так что замечание о неоднозначном соответствии не имеет отношения к рассматриваемой задаче.

2. В письме необоснованно отмечается ошибочность формул (4). Формулы (4) выведены на основании формул (2'), очевидных тождественных соотношений (с. 52) и осреднений, допустимых в численном счете, и записаны в терминах плоскости годографа. Безусловно, формулы (2) имеют место для любых течений. Но соотношения для течений типа простой волны в плоскости годографа вырождаются, и естественно формулы (4) для течений типа простых волн не имеют место. Для таких течений выводятся другие соотношения (с. 54).

А. П. Шашкин.

* А. Л. Гонор, А. Н. Крайко. Некоторые результаты исследования оптимальных форм при сверх- и гиперзвуковых скоростях. В кн.: Теория оптимальных аэродинамических форм. М., «Мир», 1969, с. 455—492.

** См., например: А. Н. Крайко. Некоторые вариационные задачи газовой динамики. Докт. дисс. М., 1972.

*** А. Л. Гонор, А. Н. Крайко. Указ. соч.

* А. Л. Гонор, А. Н. Крайко. Некоторые результаты исследования оптимальных форм при сверх- и гиперзвуковых скоростях. В кн.: Теория оптимальных аэродинамических форм. М., «Мир», 1969, с. 455—492.

** А. Н. Крайко. Некоторые вариационные задачи газовой динамики. Докт. дисс. М., 1972.