

**Институт математики Национальной Академии наук
Кыргызской Республики
Кыргызский национальный университет имени Ж. Баласагына**

Диссертационный совет Д 01.22.647

**На правах рукописи
УДК 517.9**

Алыбаев Анарбек Масалбекович

**Регуляризация обратных задач, где вырождаются некорректные
интегральные уравнения Вольтерра первого рода**

**01.01.02 – дифференциальные уравнения, динамические системы и
оптимальное управление**

**Автореферат диссертации на соискание ученой степени
доктора физико-математических наук**

Бишкек – 2023

Работа выполнена на кафедре алгебры, геометрии, топологии и преподавания высшей математики имени академика А. А. Борубаева факультета математики и информатики Кыргызского национального университета имени Ж. Баласагына.

Научный консультант: Омуров Таалайбек Дардайылович, доктор физико-математических наук, профессор, профессор кафедры математического анализа факультета математики и информатики Кыргызского национального университета имени Ж. Баласагына.

Официальные оппоненты: Искандаров Самандар, доктор физико-математических наук, профессор, заведующий лабораторией теории интегро-дифференциальных уравнений Института математики Национальной академии наук Кыргызской Республики.

Анар Турмаганбет кызы Асанова, доктор физико-математических наук, профессор, главный научный сотрудник Института математики и математического моделирования города Алматы.

Алымбаев Асангул Темиркулович, доктор физико-математических наук, доцент кафедры прикладной информатики института новых информационных технологий Кыргызского государственного университета имени И. Арабаева.

Ведущая организация: Кафедра высшей математики механико-математического факультета Евразийского национального университета имени Л. Н. Гумилева, Казахстан, город Астана, улица Мунайтпасова, 5.


Защита состоится 6 декабря 2023 года в 14:00 на заседании диссертационного совета Д 01.22.647 по защите диссертаций на соискание ученой степени доктора (кандидата) физико-математических наук при Институте математики Национальной академии наук Кыргызской Республики и Кыргызском национальном университете имени Ж. Баласагына по адресу: Кыргызская Республика, 720071, г. Бишкек, проспект Чуй 265-а, кабинет 374.

Идентификатор защиты – <https://vc1.vak.kg/b/012-ltf-b7j-lgy>.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеках Национальной академии наук Кыргызской Республики (720071, г. Бишкек, проспект Чуй, 265а), и Кыргызском национальном университете им. Ж. Баласагына, (720033, г. Бишкек, ул. Фрунзе, 547) и на сайте www.math.kg; www.vak.kg.

Автореферат разослан 5 ноября 2023 г.

Ученый секретарь диссертационного совета
кандидат физико-математических наук, доцент

 Шаршембиева Ф. К.

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА ИССЛЕДОВАНИЯ

Актуальность темы диссертации. В общей теории математической физики (МФ) возникают определенные классы обратных задач (ОЗ), где вырождаются некорректные интегральные уравнения Вольтерра и Фредгольма первого, третьего родов (ИУВ-1, ИУВ-3, ИУФ-1, ИУФ-3) с решениями в классе обобщенных функций (ОФ). Так как в общем смысле теория этих уравнений еще не разработана, то исследования, связанные в этой области, а тем более в области ОЗ с указанными ИУ актуальны.

Отметим, что основоположниками теории некорректных задач являются А. Н. Тихонов (1963), М.М. Лавренгьев (1962) и В. К. Иванов (1963), причем разработанные способы исследований указанных задач этими авторами были применены и развиты другими учеными к различным областям науки. Так как, в общем виде большинство задач МФ могут быть эквивалентным образом преобразованы к операторным уравнениям (ОУ), например:

$$Au = f, u \in X, f \in F,$$

где оператор A считается определенным на непустом множестве некоторого метрического пространства X с метрикой ρ_X (в общем случае указанный оператор может быть нелинейным), то для решения этого ОУ были использованы способы, связанные с аналитическими методами регуляризации (МР), численно-регуляризационными алгоритмами и др.

Связь темы диссертации с крупными научными программами, основными научно-исследовательскими работами, проводимыми научными учреждениями. Исследование по теме диссертации проводилось в рамках утверждённой тематики «Операторные уравнения, равномерная топология, компьютерные моделирования и их приложения», факультета математики и информатики. Тематика утверждена протоколом №6 НТС КНУ имени Ж. Баласагына от 30 мая 2018 года.

Цель и задачи исследования. Целью исследования являются изучения вопросов регуляризируемости и единственности решения ОЗ в ограниченных и неограниченных областях, вырождающиеся в некорректные нелинейные ИУВ-1 с различными пределами интегрирования, где решения связаны с функцией Дирака (ФД).

К задачам исследования относятся коэффициентные ОЗ с операторами гиперболического типа в ограниченной области и с нагруженными операторами параболического характера и типа Кортвега-Де Фриза (КДФ) в неограниченной области, где вырождаются некорректные нелинейные ИУВ-1, например:

$$A\varphi = \int_0^x K(x,s)\varphi^n(s)ds = f(x), (n = 2;3),$$

причем некорректность понимается на основе не согласованности интегрального оператора Вольтерра со свободной функцией $f(x)$ в начале

отрезка $[0, T]$, т.е.: $f(0) \neq 0$, а это значит, что решение ИУ не принадлежит к классу непрерывных функций. Здесь относительно известных функций имеют место:

$$C(D) \ni K(x, s), (K(s, s) \geq 0, D = \{(x, s) : 0 \leq s \leq x \leq T\}), C[0, T] \ni f.$$

при этом допускается, что $\varphi(x)$ – неотрицательная особая функция, связанная с ФД.

Научная новизна работы. Получены следующие результаты:

- разработан МР для некорректных нелинейных ИУВ-1 с различными пределами интегрирования в специальном пространстве в обобщенном смысле;
- на основе модификации разработанного МР доказаны регуляризируемости некорректных нелинейных систем ИУВ-1 в введенных пространствах;
- с учетом разработанного варианта МР решены ОЗ гиперболического типа, где вырождаются некорректные ИУВ-1 с различными пределами интегрирования;
- разработанные алгоритмы регуляризации использованы для решения нагруженных ОЗ параболического характера и типа Кортевега Де Фриза в неограниченной области, где вырождаются некорректные ИУВ-1.

Практическая значимость полученных результатов. Работа в основном носит теоретический характер, а ее результаты дополняют исследования по теории регуляризации ОЗ в обобщенном смысле в ограниченных и неограниченных областях. Результаты работы могут быть применены к задачам геофизики, влагопереноса, к задачам моделирования динамических развивающихся систем и др.

Основные положения диссертации, выносимые на защиту:

- выбор пространств и разработка регуляризирующих алгоритмов решения для исследуемых систем нелинейных некорректных ИУВ-1;
- на основе разработанного МР доказать регуляризируемости ОЗ для уравнений гиперболического типа, где вырождаются некорректные ИУВ-1 с различными пределами интегрирования;
- с учетом модификации разработанного МР доказать регуляризируемости в обобщенном смысле ОЗ, вырождающихся в некорректные многомерные ИУВ-1;
- на основе разработанных МР доказать регуляризируемости ОЗ с нагруженными дифференциальными операторами параболического характера и Кортевега Де Фриза в неограниченной области, где вырождаются ИУВ-1.

Личный вклад соискателя. Все научные результаты, изложенные в диссертации относительно изучаемых ИУВ-1 и ОЗ, и положения выносимых на защиту, получены диссертантом.

В совместных работах [2,3,6-10,12-15] постановка задач принадлежит научному консультанту, обсуждение выводов и заключения внутри работ принадлежат другим соавторам, диссертанту – все научные выводы работ и

их доказательства.

Апробация результатов исследований. Основные результаты диссертационной работы докладывались и обсуждались на научных конференциях (НК) различного ранга, и на семинарах, например:

- VI Congress of the Turkic World Mathematical Society, Astana-Kazakhstan, October 2-5, 2017;
- II международный НК «Асимптотические, топологические и компьютерные методы в математике» – МНК, Бишкек, 2021;
- VII International TWMS Congress – 2023, September 20-23, Turkestan (Kazakhstan);
- на расширенном семинаре кафедры «Алгебры, геометрии, топологии и преподавания высшей математики» факультета «МинИ» КНУ им. Ж. Баласагына в 2023 г. (руководитель – д.ф.м.н., проф. Канетов Б.К.).

Полнота отражения результатов диссертации в публикациях. Опубликовано 16 работ в различных журналах КР, РК, РФ, Украины и Индии. Из них 1 монография [6], 12 научных статей [1-5, 7-13], 3 тезиса [14-16], в том числе 9 статей в зарубежных изданиях [2-5, 9,10-13]. Из указанных работ 5 написаны единолично [1,4,5,11,16], а 11-совместные работы [2,3,6-10,12-15]. Статьи [1,7] входят в базу данных РИНЦ КР, а статьи [2-5,9,10] в базу данных РИНЦ РФ, а [11-13] в базу данных WOS.

Структура и объем диссертации. Настоящая работа состоит из введения, 4 глав, заключения и списка литературы из 71 наименований. Объем текста 203 страниц.

ОСНОВНОЕ СОДЕРЖАНИЕ ДИССЕРТАЦИИ

Работа состоит из 4 глав. В главе 1 приведены результаты работ по прямым и ОЗ математической физики, которые присоединяются к задачам диссертационной работы, а также указаны проблемы, которые не изучены.

А) Известно, что в основном ОЗ некорректны от неустойчивости решения трансформированных систем, где вырождаются некорректные уравнения. Указанные системы имеют различные формы: алгебраические, дифференциальные, интегральные и т.д. Например, системы ИУ-1 встречаются в работах А. С. Апарцина (1999), А. Асанова (1998), М. И. Иманалиева (1981), М. М. Лаврентьева (1977), Н. А. Магницкого (1979), В. А. Морозова (1987), Ш. А. Наубетовой (1988), Т. Д. Омурова (2003), А. Саадабаева (2013), В. О. Сергеева (1971) и др., где регуляризуемость этих уравнений доказаны в определенных пространствах сильной или слабой сходимостью.

Как известно, трудности, возникающие при изучении некоторых классов некорректных ИУВ-1, заключаются в том, когда исследуемые ИУ преобразуются к операторным уравнениям, например для наглядности

приводим краткий обзор по работе А.Н. Тихонова (1974, соавтор: В.Я. Арсенин), т.е.:

$$Au = f, \quad (1.1.1)$$

где $u \in X, f \in F; X, F$ – метрические пространства, то, что обратный оператор A^{-1} , заданный на всей своей области определения $A^{-1}X \subset F$, не является непрерывным. Значит, в некорректных уравнениях элемент: $u_\epsilon = A^{-1}f_\epsilon$, даже если он существует, не является приближенным решением, так как u_ϵ при малых δ может как угодно уклоняться от точного решения u .

Отметим, что аналогичные дефекты были указаны и в других работах ученых в этой области. Например, в работе акад. М.И. Иманалиева (1981) при исследовании некорректных нелинейных ИУВ-1 с решением в классе сингулярных обобщенных функций (СОФ), отмечено, что нельзя естественно определить никакую нелинейную функцию в пространстве СОФ. Это значит, что метод, учитывающий δ – функцию не применяется в прямом смысле для некорректных нелинейных ИУВ-1.

Для наглядности сказанного, приводится ИУВ-1:

$$\int_0^t K(t, s, y(s)) ds = f(t) \quad (1.1.2)$$

с условиями:

- а) $C^{1,0,1}(D) \ni K(t, s, y); K_y(t, t, y) \geq \lambda > 0, (D = [0, T] \times [0, T] \times R)$,
 б) $C^1[0, T] \ni f(t); f(0) \neq 0$, где решение параметризованного ИУ:

$$\int_0^t K(t, s, y_\epsilon(s)) ds = f(t) - e^{-\frac{1}{\epsilon}t} f(0), \quad (1.1.3)$$

может слабо сходиться (точнее в смысле $L^1(0, T)$) к решению вырожденного интегрального уравнения (ВырИУ), где свободный член согласуется с интегральным членом в начале отрезка. Но полученное решение ВырИУ, нельзя рассматривать как решение ИУ (1.1.2), что и требовалось показать.

Если в ИУВ (1.1.2) с условием (б) ядро обращается тождественно в нуль на диагонали, то алгоритм (1.1.3) не применим. Поэтому, в работе Т.Д. Омурова (2003), с учетом указанных условий для построения решения, было разработано пространство $Z^2(0, T)$, содержащее все элементы $L^1[0, T]$, а также СОФ: $z(t)$, сосредоточенные в начале отрезка. При этом, предлагаемый МР учитывает особую функцию:

$$\Omega_\epsilon(t) = \frac{1}{\epsilon} f(0) e^{-\frac{1}{\epsilon}t} \xrightarrow{\epsilon \rightarrow 0} \begin{cases} 0, t \neq 0, \\ \infty, t = 0, \end{cases} \quad (1.1.6)$$

которая ограничена в пространстве $Z^2(0, T)$, когда

$$(\varphi(t))^{-p} \in L^1(0, T), (2 < p; \varphi(t) = \int_0^t h(s) ds, 0 < h(t) \in L^1(0, T)). \quad (1.1.7)$$

Здесь $L^2[0, T]$ – пространство Гильберта квадратично интегрируемых функций $u(t)$, определенных на $[0, T]$ с нормой: $\|u(t)\|_2 = \left(\int_0^T |u(t)|^2 dt \right)^{\frac{1}{2}}$. И в этом случае, показаны аналогичные факты, которые указаны в случае (1.1.2) и (1.1.3) с условиями (а, б). Эти факты указаны не только в смысле $L^1(0, T)$, а были обобщены и в $Z^2(0, T)$.

В области ИУВ-1, отметим и работу А. Асанова (1998), но в отличие от вышеуказанных работ, здесь регуляризируемость доказана в пространствах сильной и слабой сходимости с установлением близости решений параметризованного и исходного ИУ (1.1.2), когда искомая функция определяется в начале отрезка. Регуляризируемость ИУВ-1 в обобщенном смысле с условием (б) в указанной работе не рассматривается.

Отметим, что в работе А.С. Апарцина (1999) были исследованы ИУ с неклассическими пределами интегрирования (НПИ), например для ИУ-1:

$$\int_{a(x)}^{b(x)} K(x, s) \varphi(s) ds = f(x), x \in [x_0, T], \varphi(x) = \varphi^0(x), x \in [a(x_0), b(x_0)] \quad (1.1.11)$$

были рассмотрены вопросы корректности и построения саморегуляризирующих методов кубатур (СМК) с учетом возмущения исходных данных, и др.

Известно, что если в указанных ИУ (1.1.11) нет согласования с функцией $f(x)$, то (1.1.11) является некорректным ИУВ-1. Кроме того, проблемные вопросы в области ИУВ-1 типа (1.1.11) возникают и в случае, когда ядро:

$$K(x, s) \in C(D) \cap Lip(x|L_R), 0 \leq K(x, x) \in C[0, T], \quad (1.1.12)$$

а свободная функция допускает условие (б). Знаем, что даже классические ИУВ-1 с условием (1.1.12), почти не изучены.

Б) Как выше отметили, что есть множества прикладных ОЗ, где вырождаются ИУ-1, например работы Ю.Е. Апиконова (1978), А.Л. Бухгейма (1983), П.Р. Вабищевича (1981), А.М. Денисова (1980), В.И. Дмитриева (1987), С.И. Кабанихина (2009), М.М. Лаврептьева (1969, соавторы: В.Г. Васильев, В.Г. Романов), Т. Тобиоса (1984) и др. Но, в нашем случае приводим краткий обзор по ОЗ, где вырождаются ИУВ-1 с решениями в классе СОФ, так как при применении МР к этим задачам, имеют место те дефекты, которые вышеуказаны (см. п. А). Например, в работах Т.Д. Омурова и Т.Т. Каракеев (2006) при изучении ОЗ вырождаются некорректные ИУВ-1 (и ИУВ-3) со специальными ядрами и решениями в классе СОФ. Регуляризируемость рассматривается в $Z^1(0, T)$ с особой функцией $\Omega_\epsilon(t)$ вида (1.1.6) с условием:

$$(\varphi(t))^{-p} \in L^1(0, T), p < \beta, \quad (1.1.15)$$

при этом $Z^1(0, T)$ – пространство, содержащее все $L^1[0, T]$, а также СОФ, сосредоточенные в начале отрезка $[0, T]$ и т.д.

Известно, что в работе В.И. Дмитриева (1987), в электромагнитных методах геофизики исследуется ОЗ магнитотеллурического зондирования:

$$\begin{cases} u''(z) + iw\mu_0\sigma(z)u(z) = 0, & z \in (0, H), \\ u(z=0) = 1, & u'(z=H) - i\sqrt{iw\mu_0\sigma_H}u(z=H) = 0, \end{cases} \quad (1)$$

$$Y(w) = \frac{H, (z=0)}{E, (z=0)} = \frac{1}{E, (z=0)} \left(-\frac{i}{w\mu_0} \frac{\partial E_z}{\partial z} \right)_{z=0} \quad (2)$$

где $Y(w)$ (2) – это адмитанса (проводимость) электромагнитного поля, а вектор функция: $P = (u, \sigma)$ является неизвестным ($u(\cdot)$ – относительное электрическое поле (ЭП) в Земле, а $\sigma(\cdot)$ – распределение электропроводности), причем, в основном исследуемая ОЗ неустойчива.

Действительно, сказанное вытекает из того, что по известному адмитансу однозначно и устойчиво определяется интегральная проводимость (ИП):

$$S(z) = \int_0^z \sigma(s) ds, z \in [0, H], \quad (1.1.16)$$

и при условии: $\|Y_1(w) - Y_2(w)\|_{L^2} \rightarrow 0$, следует: $\|S_1(z) - S_2(z)\|_C \rightarrow 0$. Причем, соответствующие $\sigma_1(z), \sigma_2(z)$ определяются из ИУВ-1 (1.1.16), решение которого неустойчиво, а это означает, что близким $S_1(z), S_2(z)$ могут соответствовать как угодно сильно отличающиеся $\sigma_1(z)$ и $\sigma_2(z)$ (см. выводы (1.1.1)).

При изучении этой ОЗ, интересны те выводы, где сказано, что если найдется некоторое распределение: $\hat{\sigma}(z) \in \sum_s$, причем $\hat{\sigma}(z)$ может сильно отличаться от истинного распределения электропроводности, при этом, если вычислим ИП:

$$\tilde{S}(z) = \int_0^z \hat{\sigma}(s) ds, \quad (1.1.18)$$

а так как $S(z)$ определяется по правилу (1.1.16) устойчиво, то

$$\left\| \tilde{S}(z) - \int_0^z \sigma(s) ds \right\|_{L^2} \leq \varepsilon(\delta), \delta \in \sum_s. \quad (1.1.19)$$

Определение $\hat{\sigma}(z) \in \sum_s$ не требует применения устойчивого метода, так как является промежуточным результатом для получения приближенной $\tilde{S}(z)$, хотя в указанном пространстве не можем указать близости $\hat{\sigma}(z), \sigma(z)$ при выполнении неравенство (1.1.19).

В результате приближенное распределение электропроводности вычисляется из задачи минимизации по стандартной схеме Тихонова:

$$\tilde{\sigma} = \left\{ \sigma_\alpha : \inf_{\sigma} \left[\left\| \tilde{S}(z) - \int_0^z \sigma(s) ds \right\|_{L^2}^2 + \alpha \left\| q(z)(\sigma(z) - \sigma^0(z)) \right\|_{L^2}^2 \right] \right\}$$

с выбором параметра регуляризации α , в соответствии с принципом невязки, $\sigma^0(z)$ – гипотетическое распределение электропроводности, построенное по априорным данным, $q(z) > 0$ учитывает достоверность априорной информации на различных глубинах ($0 < q(z) < 1$).

В диссертационной работе, так как в рассматриваемых ОЗ вырождаются некорректные ИУВ-1 с решениями, которые связаны с ФД, в чем и сильно отличается от указанной задачи, то регуляризуемость этих ИУВ в $Z^2(0, T)$ понимается в обобщенном смысле с условием (1.1.19), только вместо L^2 будет $Z^2(0, T)$ (или $Z^3(0, T)$, $(p=3)$), здесь не учитываются условия (1.1.7) и (1.1.15) соответственно, и т.д.

В) Как вышеотмечено, что решения исследуемых ИУВ-1 и ОЗ, связаны с СОФ, то введем краткий обзор по ОФ. Известно, в соответствии с определением (см. работы В.С. Владимирова (1976) и А.Р. Колмогорова (1976, соавтор: С.В. Фомин), что в общем, ОФ называется всякий линейный непрерывный функционал на пространстве основных функций. Но СОФ нельзя отождествить ни с какой локально интегрируемой функцией, так как ОФ, определяемые локально интегрируемыми в R функциями по правилу:

$$\langle f, \varphi \rangle = \int f(x)\varphi(x) dx, \varphi \in D \quad (1.2.6)$$

называются регулярными ОФ, где имеет место линейность этого функционала и непрерывность на D – пространство основных функций.

Известно, что классическим примером СОФ является δ -функция Дирака (ФД), т.е.:

$$\delta(x) = \begin{cases} \infty, & x = 0, \\ 0, & x \neq 0, \end{cases}$$

причем, определяемая как функционал, действующий на функции $\varphi(x) \in D$, по правилу:

$$\langle \delta, \varphi \rangle = \varphi(0), \quad (1.2.8)$$

$\delta \in D'_0$ – пространство СОФ, так как здесь не содержится регулярные ОФ, при этом линейность и непрерывность функционала (1.2.8) очевидны.

Поэтому D'_0 отличается от общего пространства ОФ, символически которое обозначается в виде D' – это линейное пространство всех ОФ (регулярных и сингулярных), где сходимость в D' рассматривается как слабая сходимость последовательности функционалов, т.е. последовательность ОФ $\{f_n\}_n$ из D' сходится к ОФ $f \in D'$, если для любой $\varphi \in D$:

$$\langle f_n, \varphi \rangle \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \langle f, \varphi \rangle. \quad (1.2.9)$$

В этом случае можем писать и символической форме: $f_n \xrightarrow{D'} f$ при $n \rightarrow \infty$, (называется слабой сходимостью).

Замечание 1.2.2. Иногда, вместо последовательности $f_\varepsilon \in D'$ рассматривается семейство функционалов $\{f_\varepsilon\}$, ε -малый параметр. В этом случае формула $f_\varepsilon \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} f$ при $\varepsilon \rightarrow +0$, означает:

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \langle f_\varepsilon, \varphi \rangle \longrightarrow \langle f, \varphi \rangle, \forall \varphi \in D. \quad (1.2.10)$$

В частности, запись: $f_\varepsilon \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} \delta$, означает:

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \langle f_\varepsilon, \varphi \rangle \longrightarrow \langle \delta, \varphi \rangle = \varphi(0), \forall \varphi \in D. \quad (1.2.11)$$

Г) Как вышесказано, что решения изучаемых ИУВ-1 и ОЗ, где вырождаются эти ИУ связаны СОФ, то относительно указанных ИУ введены специальные пространства, например: $Z'(0, T)$ (см. п. А и Б). Поэтому, в параграфе 1.2 (гл.1) приведены некоторые понятия в краткой форме по пространствам, которые связаны с данной работой.

Отметим, что понятия топологических пространств и их свойств хорошо даны в работах А.А. Борубаева (1990), В.С. Владимирова (1976), А.Н. Колмогорова и С.В. Фомина (1976), В.А. Треногина (1980), Х.Л. Массера (1970, соавтор: Х.Х. Шеффер) и др., которые указаны в параграфе 1.2.

Глава 2 носит вступительный характер, так как чтобы изучать ОЗ работы, где вырождаются некорректные ИУВ-1, сперва, необходимо разработать МР для доказательства регуляризуемости указанных ИУ в введенных пространствах. Результаты содержатся в двух параграфах.

В параграфе 2.1 исследуется некорректное нелинейное ИУВ-1 с особым действительным (неотрицательным) решением, связанное с ФД, т.е.:

$$H\theta \equiv \int_0^x K(x, \tau) \theta^2(\tau) d\tau = F(x), \quad (2.1.1)$$

где известные функции допускают условия:

$$\begin{cases} K(x, \tau) \in C(D_0) \cap Lip(x|L_K); K(\cdot) \geq 0; K(0, 0) \neq 0; |K(\cdot)| \leq C_{01}. \\ D_0 = \{(x, \tau): 0 \leq \tau \leq x \leq X\}; C[0, X] \ni F(x) \in Lip(x|L_F), \\ |F(x)| \leq C_{02}; F(x) \geq \alpha > 0, \forall x \in [0, X], (0 < L_K, L_F = const). \end{cases} \quad (2.1.2)$$

Тогда регуляризуемость и единственность решения этого ИУ доказываемся в $Z^2(0, X)$ (без учета (1.1.7)).

Замечание. Если функции: $K(x, \tau) \equiv 1, F(x) \equiv 1$, то $\theta = (\delta(x))^{1/2}$, т.е., в работе словосочетание связность с ФД понимается в этом смысле.

§2.1.1. Регуляризирующие алгоритмы в ИУВ-1. Чтобы доказать регуляризуемость (2.1.1), сперва проводим некоторые математические преобразования на основе заданных функций, а точнее доказываем лемма:

Лемма 2.1.1. При условии (2.1.2) относительно заданных данных существуют функции: $h(x), h_0(x), \phi_0(x), F_0(x)$, которые определяются в следующем виде с условиями:

$$\begin{cases} h(x) \equiv [\gamma + \frac{1}{\alpha} \lambda(x)] F(x) \geq m > 0, (1 < \gamma = const), \\ h_0(x) \equiv \gamma + \frac{1}{\alpha} \lambda(x); 0 \leq \lambda(x) \in L^1(0, X), \\ \phi_0(x) = \int_0^x [\gamma + \frac{1}{\alpha} \lambda(\tau)] F(\tau) d\tau = \int_0^x h(\tau) d\tau, \\ F_0(x) \equiv F(x) - F(0), F_0(0) = 0, \\ h_0(x) \leq \alpha^{-1} h(x); 0 < \max C_{0j} = C_0, (j=1, 2), \\ |F_0(x) - F_0(\tau)| \leq L_{F_0} M_0 (\phi_0(x) - \phi_0(\tau)), (\tau \leq x; \gamma > 1; M_0 = (\gamma\alpha)^{-1}), \\ x \in [0, X]: x = (x^{\frac{2}{7}})^{\frac{7}{2}} \leq (\phi_0(x))^{\frac{7}{2}}, (\lambda(x) = \frac{2}{7\sqrt{x^5}}), \\ x \leq M_1 (\phi_0(x))^2, (M_1 = \sup_{[0, X]} (\phi_0(x))^{\frac{3}{2}}). \end{cases} \quad (2.1.3)$$

Далее, в рамках условий (2.1.2), (2.1.3) и оператора Вольтерра, т.е.:

$$\langle h, \theta \rangle_{[0, x]} = \int_0^x h(\tau) \theta(\tau) d\tau \quad (*)$$

ИУВ-1 (2.1.1) эквивалентно преобразуется к виду:

$$\begin{cases} \int_0^x h(\tau) \theta(\tau) d\tau = (Q\theta)(x) + F(x), \\ Q\theta \equiv \int_0^x h_0(\tau) \theta(\tau) (H\theta)(\tau) d\tau - (H\theta)(x). \end{cases} \quad (2.1.4)$$

Поэтому, рассмотрим уравнение с малым параметром: ε , т.е.:

$$\begin{cases} \varepsilon \theta_\varepsilon(x) + (\Phi \theta_\varepsilon)(x) = F_\varepsilon(x), \\ (\Phi \theta_\varepsilon)(x) \equiv \int_0^x h(\tau) \theta_\varepsilon(\tau) d\tau - (Q\theta_\varepsilon)(x) \end{cases} \quad (2.1.5)$$

с условием

$$\begin{cases} \theta_\varepsilon(0) = \frac{1}{\varepsilon} F(0), \\ C[0, X] \ni F_\varepsilon(x): \|F_\varepsilon(x) - F(x)\|_C \leq \Delta_0(\varepsilon), (F_\varepsilon(0) = F(0)). \end{cases} \quad (2.1.6)$$

Решение этого ИУ ищем по правилу:

$$\begin{cases} \theta_\varepsilon(x) = \frac{1}{\varepsilon} \Pi_\varepsilon(x) + \nu(x) + \xi_\varepsilon(x), \\ \Pi_\varepsilon(0) = F(0), \nu(0) = 0, \xi_\varepsilon(0) = 0, \end{cases} \quad (2.1.7)$$

причем, относительно неизвестных функций имеют место:

$$\Pi_\varepsilon(x) = -\frac{1}{\varepsilon} \int_0^x h(\tau) \Pi_\varepsilon(\tau) d\tau + F(0), \quad (2.1.8)$$

$$\int_0^1 h(\tau)v(\tau)d\tau = (Qv)(x) + F_0(x), \quad (2.1.9)$$

$$\varepsilon \xi_\varepsilon + \int_0^1 h(\tau)\xi_\varepsilon(\tau)d\tau = (Q(\frac{1}{\varepsilon}\Pi_\varepsilon + v + \xi_\varepsilon))(x) - (Qv)(x) + F_\varepsilon(x) - F(x) - \varepsilon v(x), \quad (2.1.10)$$

где: а) $\Pi_\varepsilon(x)$ – является решением (2.1.8), которое доопределяет особую функцию $\Omega_\varepsilon(x)$, которое содержится в (2.1.7), т.е.:

$$\begin{cases} \Omega_\varepsilon(x) = \frac{1}{\varepsilon}\Pi_\varepsilon(x), \\ |\Omega_\varepsilon(x)| \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} \begin{cases} 0, x \neq 0, \\ \infty, x = 0; \end{cases} \end{cases} \quad (2.1.11)$$

б) $v(x)$ – решение видоизмененного вырожденного уравнения (2.1.9);
в) в данном разложении $\xi_\varepsilon(x)$ играет роль остаточного члена.

В самом деле, в случае (а) из (2.1.8) следует:

$$\begin{cases} \Pi_\varepsilon(x) = F(0) \exp(-\frac{1}{\varepsilon}\phi_0(x)), \\ |\Pi_\varepsilon(x)| \leq C_0 \exp(-\frac{1}{\varepsilon}\phi_0(x)) \leq C_n \exp(-\frac{1}{\varepsilon}\phi_0(x)), \end{cases} \quad (2.1.12)$$

так как для ядра $(-\varepsilon^{-1}h(\tau))$ существует резольвента:

$$R(x, \tau, \varepsilon) = -\frac{1}{\varepsilon}h(\tau) \exp(-\frac{1}{\varepsilon} \int_\tau^x h(s)ds), (\tau \leq x). \quad (**)$$

Следовательно, действительно ИУ(2.1.8) преобразуется к (2.1.12), где допускается оценка, которое указано там же, поэтому и получим (2.1.11).

Значит, на основе (2.1.12) сформулируем лемму вида:

Лемма 2.1.2. В условиях леммы 2.1.1 из (2.1.11) и (2.1.12) следуют оценки:

$$\begin{cases} \|\Pi_\varepsilon\|_{Z^1(0, X)} \leq \gamma_1 \varepsilon^{\frac{1}{2}}, (\gamma_1 = C_0 2^{-\frac{1}{2}} [7^{\frac{1}{2}} e^{-\frac{1}{2}} + \frac{105}{16} \sqrt{\pi}]^{\frac{1}{2}}), \\ \|\Omega_\varepsilon(x)\|_{Z^1(0, X)} \leq \gamma_1 \varepsilon^{\frac{1}{2}}. \end{cases}$$

Доказательство. Действительно, из оценки (2.1.12) получим

$$\begin{aligned} \int_0^1 |\Pi_\varepsilon(\tau)|^2 d\tau &\leq C_0^2 \int_0^1 \exp(-\frac{2}{\varepsilon}\phi_0(\tau)) d\tau = C_0^2 [r \exp(-\frac{2}{\varepsilon}\phi_0(\tau))]_0^1 + \\ &+ \int_0^1 r \exp(-\frac{2}{\varepsilon}\phi_0(\tau)) d(\frac{2}{\varepsilon}\phi_0(\tau)) = C_0^2 [x \exp(-\frac{2}{\varepsilon}\phi_0(x)) + \int_0^1 2^{-\frac{1}{2}} \varepsilon^{\frac{1}{2}} (\frac{2}{\varepsilon}\phi_0(\tau))^{\frac{1}{2}} \times \\ &\times \exp(-\frac{2}{\varepsilon}\phi_0(\tau)) d(\frac{2}{\varepsilon}\phi_0(\tau))] \leq C_0^2 2^{-\frac{1}{2}} \varepsilon^{\frac{1}{2}} [(\frac{2}{\varepsilon}\phi_0(x))^{\frac{1}{2}} \exp(-\frac{2}{\varepsilon}\phi_0(x)) + \int_0^1 e^{-\rho} \rho^{\frac{1}{2}} d\rho] \leq \\ &\leq C_0^2 2^{-\frac{1}{2}} \varepsilon^{\frac{1}{2}} [(2^{-1}7)^{\frac{1}{2}} e^{-\frac{1}{2}} + 2^{-1}105\sqrt{\pi}] = C_0^2 2^{-\frac{1}{2}} \varepsilon^{\frac{1}{2}} [7^{\frac{1}{2}} e^{-\frac{1}{2}} + 2^{-1}105\sqrt{\pi}], \\ \rho &= \varepsilon^{-1}\phi_0(x); \chi(\rho) = \rho^{\frac{1}{2}} \exp(-\rho); \sup_{\rho \geq 0} \chi(\rho) = k^{\frac{1}{2}} \exp(-k), (k = 1, 2, 2^{-1}7), \\ \rho &= 0: \chi(0) = 0; \rho \rightarrow \infty: \chi \rightarrow 0, \end{aligned}$$

или в смысле нормы $Z^2(0, X)$, следует:

$$\|\Pi_\varepsilon\|_{Z^2(0, X)} \leq C_0 2^{-\frac{1}{2}} \varepsilon^{\frac{1}{2}} [7^{\frac{1}{2}} e^{-\frac{1}{2}} + \frac{105}{16} \sqrt{\pi}]^{\frac{1}{2}} = \gamma_1 \varepsilon^{\frac{1}{2}}.$$

Поэтому: $\|\Omega_\varepsilon(x)\|_{Z^1(0, X)} = \frac{1}{\varepsilon} \|\Pi_\varepsilon\|_{Z^1(0, X)} \leq \frac{1}{\varepsilon} \gamma_1 \varepsilon^{\frac{1}{2}} = \gamma_1 \varepsilon^{-\frac{1}{2}}$. ЧНТД.

А в случаях (б, в), следует лемма вида:

Лемма 2.1.3. В рамках допустимых условий:

1) функция $v(x)$ считается решением ИУ (2.1.9) и является пределом параметризованного ИУ:

$$\delta v_\varepsilon(x) + \int_0^1 h(\tau)v_\varepsilon(\tau)d\tau = (Qv_\varepsilon)(x) + F_0(x), \quad (2.1.13)$$

которое определяется однозначно в $C[0, X]$;

2) функция ξ_ε однозначно определено в $C[0, X]$ при этом равномерно сходится к нулю для любого $x \in [0, X]$, когда $\varepsilon \rightarrow 0$.

Выводы:

А) Если выполняются условия лемм 2.1.2; 2.1.3, то решение ИУ (2.1.5) единственным образом представимо в виде (2.1.7), при этом $\forall x \in (0, X)$ решение уравнения (2.1.5) сходится (нравномерная сходимость) при $\varepsilon \rightarrow 0$ к решению уравнения (2.1.9) с оценкой:

$$\begin{cases} |\theta_\varepsilon - v| \leq \Delta_1(\varepsilon) + \frac{1}{\varepsilon} |\Pi_\varepsilon(x)| \leq \Delta_1(\varepsilon) + \frac{1}{\varepsilon} C_0 \exp(-\frac{1}{\varepsilon}\phi_0(x)), \\ |\Pi_\varepsilon(x)| \leq C_0 \exp(-\frac{1}{\varepsilon}\phi_0(x)), \\ |\Omega_\varepsilon(x)| \leq \frac{1}{\varepsilon} C_0 \exp(-\frac{1}{\varepsilon}\phi_0(x)). \end{cases} \quad (2.1.24)$$

Б) Причем, на основе (2.1.7), (2.1.11) следует: $x=0: \theta_\varepsilon(0) = \varepsilon^{-1}F(0)$.

§2.1.2. Регуляризация ИУВ-1 в $Z^1(0, X)$. В этом пункте доказывается:

Теорема 2.1.1. Пусть выполняются условия лемм 2.1.1-2.1.3 и имеет место (2.1.24). Тогда следуют:

$$1) \begin{cases} \|\Pi_\varepsilon\|_{Z^1(0, X)} \leq \gamma_1 \varepsilon^{\frac{1}{2}}, (\gamma_1 = C_0 2^{-\frac{1}{2}} [7^{\frac{1}{2}} e^{-\frac{1}{2}} + \frac{105}{16} \sqrt{\pi}]^{\frac{1}{2}}), \\ \|\Omega_\varepsilon\|_{Z^1(0, X)} = \frac{1}{\varepsilon} \|\Pi_\varepsilon\|_{Z^1(0, X)} \leq \gamma_1 \varepsilon^{-\frac{1}{2}}. \end{cases} \quad (2.1.25)$$

$$2) \|\theta_\varepsilon - v\|_{Z^1(0, X)} \leq 2[\Delta_1(\varepsilon)\sqrt{X} + \gamma_1 \varepsilon^{\frac{1}{2}}] = \bar{M}_0(\varepsilon), \quad (2.1.26)$$

$$\|\theta_\varepsilon\|_{Z^1(0, X)} \leq r_0 = const, \quad (2.1.27)$$

$$3) \|(\Phi\theta_\varepsilon)(x) - F(x)\|_{Z^1(0, X)} \leq \bar{M}(\varepsilon), (\bar{M}_0(\varepsilon), \bar{M}(\varepsilon) \rightarrow 0 \text{ при } \varepsilon \rightarrow 0). \quad (2.1.28)$$

Из полученных результатов пунктов 2.1.1; 2.1.2, в итоге имеем:

Утверждение 2.1.2. В условиях теоремы 2.1.1 ИУВ-1 (2.1.1) регуляризируется по правилу (2.1.5) в $Z^2(0, X)$ в обобщенном смысле.

В параграфе 2.2 исследуется нелинейная некорректная система ИУВ-1 в векторно-матричной форме:

$$H\theta \equiv \int_0^x \int_0^b K(x, y, \tau, \nu) \theta^2(\tau, \nu) d\nu d\tau = F(x, y) \quad (2.2.1)$$

с условием

$$\left\{ \begin{array}{l} K(x, y, \tau, \nu) \in C_{\infty n}(D_0) \cap Lip(x|L_K); K(\cdot) \geq 0; \|K(\cdot)\| \leq C_{01}, \\ K(0, y, 0, \nu) \neq 0, \forall y \in [0, b], (D_0 = [0, X] \times [0, b] \times \{0 \leq \tau \leq x \leq X, 0 \leq \nu \leq y \leq b\}), \\ (x, y) \in \bar{D}_1, (D_1 = (0, X) \times (0, b)); F(x, y) \in C_{\infty 1}(\bar{D}_1) \cap Lip(x|L_F); F(0, y) \neq 0, \\ F(x, 0) = 0; F(x, y) > 0, \forall x \in [0, X], y \in (0, b); \|F(x, y)\| \leq C_{02}, \forall (x, y) \in \bar{D}_1, \end{array} \right. \quad (2.2.2)$$

F, K – известные данные, т.е. n -мерная векторная функция (столбец), $n \times n$ -матричная функция. При этом θ – неизвестная неотрицательная n -мерная векторная функция из пространства $Z_n^2(D_1)$, т.е. всех n -мерных вектор-функций с компонентами из $Z^1(D_1)$, содержащее все элементы $L^1(\bar{D}_1)$, а также неотрицательных элементов $z(x, y)$, связанные с ФД по аргументу x .

Чтобы исследовать регуляризируемости системы (2.2.1) в обобщенном смысле в $Z_n^2(D_1)$, сперва, на основе ИУ (2.2.1) имеем:

$$(H\theta)(x, b) \equiv \int_0^x \int_0^b K(x, \tau, b, \nu) \theta^2(\tau, \nu) d\nu d\tau = F(x, b). \quad (2.2.3)$$

Далее, предполагая, что относительно известных функций выполняются условия (2.2.2), (2.2.3) при этом допуская, что существует диагонально-матричная функция $H_0(x, b)$, получим следующие условия (т.е. результаты леммы 2.1.1 обобщаются к матричным и векторным функциям):

$$\left\{ \begin{array}{l} H_0(x, b) \equiv G(x)F(x, b); G(x) \equiv \gamma + \frac{1}{\alpha} \lambda(x), \\ H_0(x, b) = \text{diag}(H_{01}(x, b), \dots, H_{0n}(x, b)), \\ H_{0i}(x, b) \equiv [\gamma + \frac{1}{\alpha} \lambda(x)] F_i(x, b), (i = \overline{1, n}; 1 < \gamma = \text{const}), \\ 0 < \lambda_0(x) = \min_{1 \leq i \leq n} \lambda_i(x) \in L^1(0, X); \phi(x) = \int_0^x \lambda_0(\tau) d\tau, \\ \min_{1 \leq i \leq n} F_i(x, b) = \bar{F}(x, b) \geq \alpha > 0, \forall x \in [0, X]; F_0(x, y) = F(x, y) - F(0, y), \\ F_0|_{x=0} = 0, \forall y \in [0, b]; \|F_0(x, y) - F_0(\tau, y)\| \leq L_F |x - \tau|, \\ \|H_0(x, b)\| \leq C_{03} h(x); \|G(x)\| \leq C_{04} h(x), (h(x) \equiv h_0(x) \bar{F}(x, b)), \\ h_0(x) \equiv \gamma + \frac{1}{\alpha} \lambda_0(x); 0 < \max C_{0j} = \bar{C}_1 = \text{const}; C_1 = \max(1, \sqrt{n} \bar{C}_1^k), \\ (j = \overline{1, 4}; m = \overline{0, 4}; k = \overline{1, 6}), \phi_0(x) = \int_0^x h(\tau) d\tau = \int_0^x [\gamma + \frac{1}{\alpha} \lambda_0(\tau)] \bar{F}(\tau, b) d\tau. \end{array} \right. \quad (2.2.4)$$

Тогда, проведя относительно системы (2.2.1) математические действия, на основе оператора H_0 , задаваемой формулой:

$$H_0 \theta \equiv \int_0^x H_0(\tau, b) \theta(\tau, y) d\tau, \quad (*)$$

указанная система эквивалентна преобразуется к виду:

$$\left\{ \begin{array}{l} \int_0^x H_0(\tau, b) \theta(\tau, y) d\tau = (Q\theta)(x, y) + F(x, y), \\ Q\theta \equiv (\bar{Q}\theta)(x, y) - (H\theta)(x, y); \bar{Q}\theta \equiv \int_0^x G(\tau) (Q_0 \theta)(\tau, y) d\tau, \end{array} \right. \quad (2.2.5)$$

где

$$\left\{ \begin{array}{l} Q_0 \theta = \text{colon}\{Q_{01} \theta, \dots, Q_{0n} \theta\}; Q_{0i} \theta \equiv \theta_i(x, y) (H_i \theta)(x, b), (i = \overline{1, n}), \\ (H\theta)(x, b) \equiv \int_0^x \int_0^b K(x, \tau, b, \nu) \theta^2(\tau, \nu) d\nu d\tau; \theta \in R^n. \end{array} \right.$$

Из системы (2.2.5) видно, что для матричной функции $H_0(x, b)$, на основе (2.2.4) существуют собственные значения $\lambda_i(x)$, причем:

$$0 < \lambda_0(x) = \min\{\lambda_i(x) | i = \overline{1, n}\}.$$

Далее, так как в теории ИУВ-1 одним из возможных методов исследования, являются регуляризирующие алгоритмы, то и в нашем случае, так как система (2.2.5) состоит из ИУВ-1, введем параметризованную систему:

$$\left\{ \begin{array}{l} \epsilon \theta_i(x, y) + (\Phi \theta_i)(x, y) = F_i(x, y), \\ (\Phi \theta_i)(x, y) = \int_0^x H_0(\tau, b) \theta_i(\tau, y) d\tau - (Q \theta_i)(x, y). \end{array} \right. \quad (2.2.6)$$

где допускается условие:

$$\left\{ \begin{array}{l} \theta_i(0, y) = \frac{1}{\epsilon} F(0, y), \\ C_n(\bar{D}_1) \ni F_i(x, y): \|F_i(x, y) - F(x, y)\| \leq \Delta_0(\epsilon), (F_i(0, y) = F(0, y)). \end{array} \right. \quad (2.2.7)$$

Решение этой системы, как и в случае параграфа 2.1 ищем с помощью представления ΛX :

$$\left\{ \begin{array}{l} \theta_i(x, y) = \frac{1}{\epsilon} \Pi_i(x, y) + \nu(x, y) + \xi_i(x, y), \\ \Pi_i(0, y) = F(0, y), \nu(0, y) = 0, \xi_i(0, y) = 0. \end{array} \right. \quad (2.2.8)$$

где относительно указанных вектор-функций, получим соответствующие системы ИУ:

$$\Pi_i(x, y) = -\frac{1}{\epsilon} \int_0^x H_0(\tau, b) \Pi_i(\tau, y) d\tau + F(0, y), \quad (2.2.9)$$

$$\int_0^x H_0(\tau, b) \nu(\tau, y) d\tau = (Q\nu)(x, y) + F_0(x, y), (F_0 = F(x, y) - F(0, y)), \quad (2.2.10)$$

$$\varepsilon \xi_\varepsilon + \int_0^T H_\varepsilon(r, b) \xi_\varepsilon(r, y) dr = (\mathcal{Q} \frac{1}{\varepsilon} \Pi_\varepsilon + \nu + \xi_\varepsilon)(x, y) - (Q\nu)(x, y) + F_\varepsilon(x, y) - F(x, y) - \varepsilon \nu(x, y). \quad (2.2.11)$$

В рамках указанных условий получены выводы, которые аналогичны к результатам лемм 2.1.2; 2.1.3 и теоремы 2.1.1, т.е., в итоге получены оценки вида (результаты теоремы 2.2.1):

$$1) \left\{ \begin{aligned} \|\Pi_\varepsilon\|_{Z^2(D)} &\leq \gamma_1 \varepsilon^{\frac{1}{2}}, (\gamma_1 = C_1 \sqrt{b} 2^{-7} [7^{\frac{1}{2}} e^{\frac{1}{2}} + \frac{105}{16} \sqrt{\pi}]^{\frac{1}{2}}), \\ \|\Omega_\varepsilon\|_{Z^2(D)} &\leq \gamma_1 \varepsilon^{\frac{3}{4}}, \end{aligned} \right. \quad (2.2.25)$$

$$2) \left\{ \begin{aligned} \|\theta_\varepsilon - \nu\|_{Z^2(D)} &\leq 2[\Delta_2(\varepsilon) \sqrt{\lambda b} + \gamma_1 \varepsilon^{\frac{3}{4}}] = \bar{M}_0(\varepsilon), \\ \|\theta_\varepsilon\|_{Z^2(D)} &\leq r = const, \end{aligned} \right. \quad (2.2.26)$$

$$3) \|(\Phi\theta_\varepsilon)(x, y) - F(x, y)\|_{Z^2(D)} \leq \bar{M}(\varepsilon), (\bar{M}_0(\varepsilon), \bar{M}(\varepsilon) \rightarrow 0 \text{ при } \varepsilon \rightarrow 0). \quad (2.2.27)$$

В результате следует, что система (2.2.1) регуляризируема в $Z^2(D)$ в обобщенном смысле.

Глава 3 состоит из трех параграфов. Отметим, что в исследуемых ОЗ параграфов 3.1; 3.2, рассматриваемые уравнения являются разновидностями уравнения Аллера, неоднородного нелинейного уравнения Шредингера-Уиземи (НУШУ) в теории волн и уравнения деформации наследственной среды в НО и н т.д. Известно, что прямые задачи с аналогичными уравнениями встречаются в работах М. Аллера (1966), А.М. Нахушева (1979), С.В. Нертина (1975, соавтор: А.Ф. Чудновский), Л. Ньюлла (1989), П.И. Наумкина (1992), Дж. Уиземи (1977), М.А. Шханукова (1983) и др.

В параграфе 3.1 изучается ОЗ с уравнением указанного класса, т.е.:

$$V_x - b^2 V_x + K_0(x) \Phi(V) + \int_0^t \Psi(t-s) V'(s, x - b(t-s)) \frac{\partial}{\partial x} [V_x(s, x) - b V_x(s, x)] ds = (J\theta)(t), \forall (t, x) \in \bar{D}_0. \quad (3.1.1)$$

$$\left\{ \begin{aligned} V(t, x)|_{x=0} &= 0, V(t, x)|_{x=0} = \psi(x), \forall x \in R, \\ (V_x - b V_x)|_{x=x_0} &= g(t), \forall t \in [0, T], (D_0 = (0, T) \times R, x_0 \in R), \end{aligned} \right. \quad (3.1.2)$$

с условием согласования

$$(V_x - b V_x)|_{x=0} = \psi(x); g(0) = \psi(x_0), \quad (3.1.3)$$

$$(J\theta)(t) = \lambda \int_0^{M(t)} K(t, \eta) \theta^2(\eta) d\eta \quad (*)$$

при этом относительно известных функций:

$$0 < b, 0 < \lambda < 1, (b, \lambda = const); K_0(x) \in C^1(R); \Phi(V) \in C^2(R); \Psi(t) \in C^1[0, T],$$

$g(t) \in C^1[0, T], \psi(x) \in C^2(R), M(t), K(t, s)$ имеют место условия:

$$a) \sup |\Phi_V^{(j)}| \leq \beta_1, (j = 0, 1); \Phi_V(V) \in C(R) \cap Lip(V|L_{\Phi_V}),$$

$$б) |g^{(j)}(t)| \leq \beta_2; |\Psi^{(j)}(t)| \leq \beta_3, \forall t \in [0, T], (j = 0, 1); |\psi^{(j)}(x)| \leq \beta_4, (j = 0, 1, 2),$$

$$в) \left\{ \begin{aligned} 0 \leq K_0(x) \leq \bar{K}_{01} < \infty; \int_R K_0(x) dx \leq \bar{K}_{02} = const, (\|K_0'(x)\| \leq \bar{K}_{03} = const), \\ \bar{K}_0 = \max(\bar{K}_{01}, \bar{K}_{02}, \bar{K}_{03}); \text{например: } K_0(x) \equiv e^{-\beta x^2} (\beta > 0; \lim_{x \rightarrow \pm\infty} K_0(x) = 0), \end{aligned} \right.$$

$$г) K(t, s) \in C(D) \cap Lip(t|L_K), 0 < L_K = const; 0 \leq K(t, t), K(0, 0) \neq 0; |K(\cdot)| \leq C_{01},$$

$$D = \{(t, s) : 0 \leq s \leq t \leq T\},$$

$$д) 0 \leq M(t) \leq t \leq T, M(0) = 0, M(t) \in C[0, T] \cap Lip(t|L_M), 0 < L_M = const,$$

при этом неизвестным является вектор функция $P = (V', \theta)$. Тогда требуется доказать регуляризируемости ОЗ в обобщенном смысле в введенном пространстве, так как из ОЗ (3.1.1)-(3.1.3) вырождается некорректное нелинейное ИУВ-1 с неотрицательным решением, связанное с ФД.

§3.1.1. Интегрализация ОЗ. С этой целью, на основе векторной функции $P_0 = (Q, \theta)$ предположим:

$$\left\{ \begin{aligned} V_x - b V_x &= \psi(x - bt) + (\mathfrak{A}[Q, \theta])(t, x), (\psi(x_0) = g(0)), \\ \mathfrak{A}[Q, \theta] &= \int_0^t [(J\theta)(s) + \int_{x+b(t-s)-b(t-s)}^{x+b(t-s)} K_0(r) Q(s, r) dr] ds, \end{aligned} \right. \quad (3.1.4)$$

при этом имеет место:

$$\left\{ \begin{aligned} V_x &= \int_0^t \psi(x + b(t-s) - bs) ds + \int_0^t \int_0^{x+b(t-s)} [(J\theta)(s') + \int_{x+b(t-s)-b(t-s)}^{x+b(t-s)} K_0(r) Q(s'; r) dr] ds' ds = \\ &= (A_0[Q, \theta])(t, x), \\ V_x - b V_x &= -b \psi(x - bt) + (J\theta)(t) + b \int_0^t K_0(x - b(t-s)) Q(s, x - b(t-s)) ds = A_1[Q, \theta], \\ V_{xx} - b V_{xx} &= \psi_x(x - bt) + \int_0^t [K_0(x) Q(s, x) - K_0(x - b(t-s)) Q(s, x - b(t-s))] ds = \\ &= (A_2 Q)(t, x), (t = x - bt), \\ V_x - b^2 V_x &= (J\theta)(t) + \int_0^t K_0(x) Q(s, x) ds. \end{aligned} \right. \quad (3.1.5)$$

Тогда, учитывая (3.1.4), (3.1.5) и некоторые математические преобразования из исходного ИДУ следуют интегральные соотношения:

$$\left\{ \begin{aligned} \int_0^t (J\theta)(s) ds &= g(t) - \psi(x_0 - bt) + \int_0^t \int_{x_0-b(t-s)}^{x_0} K_0(r) Q(s, r) dr ds = (BQ)(t, x_0), \\ (A_0[Q, \theta])(t, x) &= \int_0^t \psi(x + b(t-s) - bs) ds + \int_0^t (BQ)(s, x_0) ds + \\ &+ \int_0^t \int_0^{x+b(t-s)} \int_{x+b(t-s)-b(t-s)}^{x+b(t-s)} K_0(r) Q(s', r) dr ds' ds = (\bar{A}_0 Q)(t, x) \end{aligned} \right. \quad (3.1.7)$$

И

$$\begin{aligned}
 Q(t, x) = & -\{\Phi, (\bar{A}_0 Q)(t, x)\}[\psi(x-bt) + \int_0^t b\psi_s(x+b(t-s)-bs)ds + (BQ)(t, x_0) + \\
 & + \int_0^t \int_{x-b(t-s)} K_0(\tau)Q(s, \tau)d\tau ds + \int_0^t \int_0^x [K_n(x+b(t-s))Q(s', x+b(t-s)) - K_n(x + \\
 & + b(t-s) - b(s-s'))Q(s', x+b(t-s) - b(s-s'))]ds' ds] + \Psi(0)(\bar{A}_0 Q)(t, x) \times \\
 & \times (A_2 Q)(t, x) + \int_0^t \Psi_s(t-s)(\bar{A}_0 Q)(s, x-b(t-s)) \times (A_2 Q)(s, x)ds + \int_0^t \Psi(t-s) \times \\
 & \times \left[\int_0^t \{-b\psi_s(x-b(t-s)+b(s-s')-bs') - b \int_0^x [K_n(x-b(t-s)+b(s-s'))Q(\bar{s}, x-b(t-s) + \right. \\
 & \left. + b(s-s') - K_n(x-b(t-s)+b(s-s') - b(s'-\bar{s}))Q(\bar{s}, x-b(t-s)+b(s-s') - b(s'-\bar{s}))]d\bar{s} \right] \times \\
 & \left. \times ds' \right] (A_2 Q)(s, x)ds \equiv (AQ)(t, x).
 \end{aligned} \quad (3.1.8)$$

Далее формула (3.1.4), с учётом (3.1.7) преобразуется к виду:

$$V_t - bV_x = \psi(x-bt) + (BQ)(t, x_0) + \int_0^t \int_{x-b(t-s)} K_0(\tau)Q(s, \tau)d\tau ds \equiv (\bar{B}Q)(t, x), \quad (3.1.4)^*$$

откуда относительно искомой функции следует:

$$V = (\bar{A}_0 Q)(t, x). \quad (3.1.9)$$

Это значит, что в самом деле ИДУ (3.1.1) редуцируется к нелинейному ИУВ-2 (3.1.8) по переменной $t \in [0, T]$, т.е. достоинством разработанного МИО является тот факт, что решение ИДУ сводится к решению ИУВ-2, для которого хорошо развита теория исследований.

Лемма 3.1.1. Пусть оператор A допускает условия:

$$\begin{cases} A: L_A < 1, \\ \|AQ_0\|_C \leq r(1-L_A). \end{cases} \quad (3.1.10)$$

Тогда ИУ (3.1.8) однозначно разрешимо в $C(\bar{D}_0)$ при этом следует, что $Q_s(t, x) \in C(\bar{D}_0)$. Поэтому, на основе (3.1.9) функция V существует единственным образом в $C^{2,2}(\bar{D}_0)$.

Отметим, что из равномерной ограниченности Q_s , допускается:

$$\begin{cases} \|U(t, x)\|_C \leq (1-L_A)^{-1}[T_0 + C_0\|Q\|_C] \leq (1-L_A)^{-1}[T_0 + C_0r_0] = \bar{r}_0, \\ \|Q_s \equiv U(t, x); 0 < L_A < 1. \end{cases} \quad (3.1.14)$$

Следовательно, на основе доказанных условий леммы 3.1.1 и с учетом (3.1.9) можем сказать, что и функция V однозначным образом определяется в $C^{2,2}(\bar{D}_0)$, так как функции: $V, V_t, V_x, V_{tt}, V_{tx}, V_{xx}$, связаны с функциями $Q, Q_t \equiv U$. Значит, имеет место:

$$\|V\|_{C^{2,2}(D_0)} = \sum_{j=0}^2 \|V^{(j)}\|_{C(\bar{D}_0)} + \sum_{j=1}^2 \|V^{(j)}\|_{C(\bar{D}_0)} \leq N_0 = const. \quad (**)$$

Примечание 3.1.1. Если бы исследовали прямую задачу, то результаты леммы 3.1.1 были бы достаточными в указанном пространстве с нормой (**). Но, так как из рассматриваемой ОЗ вырождается некорректное ИУВ-1, то

необходимо пространство со слабой сходимостью. Поэтому, учитывая условия леммы 3.1.1, на основе теоремы К. Фридрикса (1980, книга В.А. Треногина) можно относительно функции V вести весовое пространство, например:

$$A_1) \text{ в } \tilde{W}_{K_0(x)}^2(D_0) \text{ (обратно ист). При этом, с учетом ограничения:} \\
 |Q| \leq r_0; |U| \leq \bar{r}_0, \forall (t, x) \in \bar{D}_0 \quad (3.1.16)$$

в пространстве:

$$\tilde{W}_{K_0(x)}^2(D_0) = \{(t, x) \in \bar{D}_0 : V \in C^{1,2}(\bar{D}_0), V_x \in L_{K_0(x)}^2(D_0)\} \text{ с нормой} \\
 \begin{cases} \|V\|_{\tilde{W}_{K_0(x)}^2(D_0)} = \|V\|_{C^{1,2}(\bar{D}_0)} + \|V_x\|_{L_{K_0(x)}^2(D_0)} \leq N_0, \\ \|V_x(t, x)\|_{L_{K_0}^2} = \left(\int_{D_0} K_0(\tau) |V_x(s, \tau)|^2 d\tau ds \right)^{1/2} \end{cases} \quad (3.1.17)$$

получим соответствующие оценки в $\tilde{W}_{K_0(x)}^2(D_0)$.

Если вместо (3.1.16) требуем, что Q, U ограничены в $L_{K_0}^2(D_0)$, т.е.:

$$\begin{cases} \|Q(t, x)\|_{L_{K_0}^2} = \left(\int_{D_0} K_0(\tau) |Q(s, \tau)|^2 d\tau ds \right)^{1/2} \leq N_{01} = const, \\ \|U(t, x)\|_{L_{K_0}^2} = \left(\int_{D_0} K_0(\tau) |U(s, \tau)|^2 d\tau ds \right)^{1/2} \leq N_{02} = const, \end{cases} \quad (3.1.19)$$

то и функции: $V, V_t, V_x, V_{tt}, V_{tx}, V_{xx}$ будут ограничены в смысле $\tilde{W}_{K_0(x)}^2(D_0)$.

Значит, так как решением ОЗ является вектор-функция $P = (V, \theta)$, то регуляризируемость ОЗ доказывается в векторном пространстве $\tilde{C}_{\tilde{W}_{K_0(x)}^2(D_0)}^2$, с учетом (3.1.17) с нормой:

$$\|P\|_{\tilde{C}_{\tilde{W}_{K_0(x)}^2(D_0)}^2} = \|V\|_{\tilde{W}_{K_0(x)}^2(D_0)} + \|\theta\|_{Z^2(0, T)}. \quad (3.1.20)$$

§3.1.2. Регуляризация ИУВ-1. Так как в первом пункте относительно функции V доказали лемму 3.1.1, то с учетом (3.1.7) и (*), на основе дифференцирования по t , следует некорректное ИУВ-1 с неотрицательным решением, связанное с ФД, т.е.:

$$(J\theta)(t) = \lambda \int_0^{M(t)} K(t, \eta) \theta^2(\eta) d\eta = F(t), \quad (3.1.21)$$

где известные функции удовлетворяют условия:

$$\begin{cases} F(t) = g'(t) - \{-b\psi_s(x_0 - bt) + b \int_0^x [K_n(x_0 - b(t-s))Q(s, x_0 - b(t-s))]ds\}, \\ F(t) \in C[0, T] \cap Lip(t|L_F); F(t) \geq \alpha > 0, \forall t \in [0, T]; |F(t)| \leq C_{02} = const, \end{cases} \quad (3.1.22)$$

и (г, д). При этом, чтобы доказать регуляризируемости ИУ (3.1.21) в $Z^2(0, T)$

воспользуемся методом параграфа 2.1, т.е. преобразуем (3.1.21) к виду:

$$\begin{cases} \int_0^t h(\tau)\theta(\tau)d\tau = (H\theta)(t) + F(t), \\ H\theta \equiv \int_0^t h_0(\tau)\theta(\tau)(J\theta)(\tau)d\tau - (J\theta)(t), \end{cases} \quad (3.1.23)$$

где известные функции, содержащиеся в (3.1.23) определяются, как в случае леммы 2.1.1. Поэтому, наряду с ИУ (3.1.23) вводится ИУ с параметром ε :

$$\begin{cases} \varepsilon\theta_\varepsilon(t) + (\Phi\theta_\varepsilon)(t) = F_\varepsilon(t), \\ (\Phi\theta_\varepsilon)(t) = \int_0^t h(\tau)\theta_\varepsilon(\tau)d\tau - (H\theta_\varepsilon)(t), \end{cases} \quad (3.1.25)$$

и решение этого уравнения представляется по правилу:

$$\begin{cases} \theta_\varepsilon(t) = \frac{1}{\varepsilon}\Pi_\varepsilon(t) + \nu(t) + \xi_\varepsilon(t), \\ \Pi_\varepsilon(0) = F(0), \quad \nu(0) = 0, \quad \xi_\varepsilon(0) = 0. \end{cases} \quad (3.1.26)$$

Тогда, на основе (3.1.25) неизвестные функции:

$$\Pi_\varepsilon(t), \nu(t), \xi_\varepsilon(t)$$

определяются из системы:

$$\begin{cases} \Pi_\varepsilon(t) = -\frac{1}{\varepsilon} \int_0^t h(\tau)\Pi_\varepsilon(\tau)d\tau + F(0), \\ \int_0^t h(\tau)\nu(\tau)d\tau = (H\nu)(t) + F_\varepsilon(t), \\ \varepsilon\xi_\varepsilon + \int_0^t h(\tau)\xi_\varepsilon(\tau)d\tau = (H[\frac{1}{\varepsilon}\Pi_\varepsilon + \nu + \xi_\varepsilon])(t) - (H\nu)(t) + F_\varepsilon(t) - F(t) - \varepsilon\nu(t). \end{cases} \quad (3.1.27)$$

В рамках указанных условий доказаны:

Лемма 3.1.2. Если допускаются условия леммы 3.1.1 и ((г,д), (3.1.22)), то относительно системы (3.1.27) имеют место:

$$A) \Pi_\varepsilon(t) = F(0) \exp(-\frac{1}{\varepsilon}\phi_0(t)), \quad (3.1.28)$$

с оценкой

$$|\Pi_\varepsilon(t)| \leq C_1 \exp(-\frac{1}{\varepsilon}\phi_0(t)); \quad (3.1.29)$$

Б) решение параметризованного ИУ

$$\delta\nu_\varepsilon(t) + \int_0^t h(\tau)\nu_\varepsilon(\tau)d\tau = (H\nu_\varepsilon)(t) + F_\varepsilon(t) \quad (3.1.30)$$

равномерно сходится к решению второго уравнения системы (3.1.27) при $\delta \rightarrow 0$, так как указанное ИУ имеет решение в $C[0, T]$;

В) третья ИУ системы (3.1.27) однозначно разрешимо в $C[0, T]$, причем равномерно сходится к нулю, когда $\varepsilon \rightarrow 0$.

Теорема 3.1.1. Если допускаются условия леммы 3.1.2, то на основе (3.1.26) следуют:

$$1) \begin{cases} \|\Pi_\varepsilon\|_{Z^1(0, T)} \leq \gamma_1 \varepsilon^{\frac{1}{4}}, (\gamma_1 = C_1 2^{\frac{1}{2}} [7^{\frac{1}{2}} e^{\frac{1}{2}} + \frac{105}{16} \sqrt{\pi}]^{\frac{1}{2}}), \\ \|\Omega_\varepsilon\|_{Z^1(0, T)} \leq \gamma_1 \varepsilon^{\frac{3}{4}}, \end{cases} \quad (3.1.49)$$

$$2) \begin{cases} \|\theta_\varepsilon - \nu\|_{Z^1(0, T)} \leq 2[\Delta_1(\varepsilon)\sqrt{T} + \gamma_1 \varepsilon^{\frac{3}{4}}] = \bar{M}_0(\varepsilon), \\ \|\theta_\varepsilon\|_{Z^1(0, T)} \leq r_0 = const, \end{cases} \quad (3.1.50)$$

$$3) \|[(\Phi\theta_\varepsilon)(t) - F(t)]\|_{Z^1(0, T)} \leq \bar{M}(\varepsilon), (\bar{M}_0(\varepsilon), \bar{M}(\varepsilon) \rightarrow 0 \text{ при } \varepsilon \rightarrow 0). \quad (3.1.51)$$

§3.1.3. Общий вывод регуляризации ОЗ в векторном пространстве

$\bar{G}_{[W_{Z^1(0, T)}^2, Z^1(0, T)]}^2(D_0)$ с нормой (3.1.20). Из полученных результатов леммы 3.1.1 и теоремы 3.1.1 на основе (3.1.5), в итоге имеем:

$$\begin{cases} \|[(\Phi\theta_\varepsilon)(t) - F(t)]\|_{Z^1(0, T)} \leq \bar{M}(\varepsilon) \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} 0, \text{ (см. (3.1.51))}, \\ \bar{\Delta}_0(\varepsilon) = 3b\bar{K}_0 T \Delta_{01}(\varepsilon) + T^2 b^2 \bar{K}_0 [\Delta_{01}(\varepsilon) + \Delta_{02}(\varepsilon)], (\bar{\Delta}_0(\varepsilon) \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} 0), \\ \|V_{r^2\varepsilon} - V_{r^2}\|_{L_{Z^1(0, T)}^2} = (\int_0^T K_0(\tau) |V_{r^2\varepsilon}(t, \tau) - V_{r^2}(t, \tau)|^2 d\tau dt)^{\frac{1}{2}}, \\ \|V_{r^2\varepsilon} - V_{r^2}\|_{L_{Z^1(0, T)}^2} \leq 2\sqrt{\bar{K}_0} \|[(\Phi\theta_\varepsilon)(t) - F(t)]\|_{Z^1(0, T)} + \sqrt{T}\bar{\Delta}_0(\varepsilon) \leq 2\sqrt{\bar{K}_0} [\bar{M}(\varepsilon) + \sqrt{T}\bar{\Delta}_0(\varepsilon)], \end{cases} \quad (3.1.58)$$

и

$$\|V_\varepsilon - V\|_{C(\bar{R}_0)} \leq \frac{2}{3}\sqrt{T^3}\bar{M}(\varepsilon) + \frac{1}{2}T^2\bar{K}_0\Delta_{01}(\varepsilon) = \Delta_{03} \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} 0, \quad (3.1.59)$$

$$\begin{aligned} \|V_{r\varepsilon} - V_{r^2}\|_{C(\bar{R}_0)} &\leq \sqrt{T} \|[(\Phi\theta_\varepsilon)(t) - F(t)]\|_{Z^1(0, T)} + \bar{K}_0 T(1+bT)\Delta_{01}(\varepsilon) < \sqrt{T}\bar{M}(\varepsilon) + \\ &+ \bar{K}_0 T(1+bT)\Delta_{01}(\varepsilon) = \Delta_{04}(\varepsilon) \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} 0. \end{aligned} \quad (3.1.60)$$

а также

$$\begin{cases} \|V_{r\varepsilon} - V_{r^2}\|_{C(\bar{R}_0)} \leq \Delta_{05}(\varepsilon), \\ \|V_{r^2\varepsilon} - V_{r^2}\|_{C(\bar{R}_0)} \leq \Delta_{06}(\varepsilon); \|V_{r\varepsilon} - V_{r^2}\|_{C(\bar{R}_0)} \leq \Delta_{07}(\varepsilon). \end{cases} \quad (3.1.61)$$

Тогда, на основе (3.1.58)-(3.1.61) с теми выводами, которые указаны выше следует

$$\|V_\varepsilon - V\|_{W_{Z^1(0, T)}^2} \leq \sum_{i=3}^7 \Delta_{0i}(\varepsilon) + 2\sqrt{\bar{K}_0} [\bar{M}(\varepsilon) + \sqrt{T}\bar{\Delta}_0(\varepsilon)] = \bar{\Delta}(\varepsilon) \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} 0. \quad (3.1.62)$$

Утверждение 3.1.1. В условиях лемм 3.1.1; 3.1.2, теоремы 3.1.1 и (3.1.62) ОЗ (3.1.1), (3.1.2) регуляризуема в обобщенном смысле в $\bar{G}_{[W_{Z^1(0, T)}^2, Z^1(0, T)]}^2(D_0)$.

В параграфе 3.2 исследуется нелокальная ОЗ с нелинейным дифференциальным оператором гиперболического типа третьего порядка в ограниченной области, где вырождается некорректное нелинейное ИУВ-1 с

ядром, которое указана в параграфе 3.1, т.е. рассматривается нелокальная ОЗ:

$$\frac{\partial}{\partial x} [\lambda D(U) \frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial^2 U}{\partial t \partial x}] = \lambda \frac{\partial U}{\partial t} + f(x)(J\theta)(t), \quad (3.2.1)$$

$$\begin{cases} U|_{t=0} = \varphi(x), \forall x \in [0, H], \\ U_x|_{x=0} = \psi_1(t); U|_{x=H} = \psi_0(t), \forall t \in [0, T], \\ \psi_0(0) = \varphi(H), \psi_1(0) = \varphi_x(0), \end{cases} \quad (3.2.2)$$

$$U_x(x_0, t) + \sum_{i=1}^2 \lambda_i U_i(x, t) = g(t), \forall t \in [0, T], ((x_0; x_i) \in (0, H)), \quad (3.2.3)$$

$$J\theta \equiv \int_0^1 K(t, s) \theta^3(s) ds, \quad (3.2.4)$$

где известные функции: $\lambda = A^{-1}, \lambda_i (i=1, 2); D(U), f(x), \varphi(x), \psi_0(t), \psi_1(t), g(t)$ изучаемой ОЗ допускают условия:

a₁) $0 < \lambda, \lambda_i = \text{const}; C^2(R) \ni D(U); C[0, H] \ni f(x); C^1[0, H] \ni \varphi(x); \psi_0(t), \psi_1(t), g(t) \in C^1[0, T],$

a₂) $K(t, s) \in C(D_1) \cap Lip(t|L_K), 0 < L_K = \text{const}; 0 \leq K(t, t), K(0, 0) \neq 0; |K(\cdot)| \leq C_{01},$

$$D_2 = \{(t, s) : 0 \leq s \leq t \leq T\}.$$

Неизвестным является вектор-функция: $P = (U, \theta)$, поэтому требуется доказать регуляризируемости исходной ОЗ в обобщенном смысле, так как относительно функции θ из ОЗ вырождается некорректное ИУВ-1 с неотрицательным решением, связанное с ФД и с условием (см. ниже (3.2.16)):

$$a_3) F(t) \in C[0, T] \cap Lip(t|L_F), 0 < L_F; F(t) \geq \alpha > 0, |F(t)| \leq C_{02}, \forall t \in [0, T].$$

При этом регуляризуемость этого ИУ рассматривается в $Z^2(0, T)$ (см. гл. 1, $p=3$, где не учитывается (1.1.15)).

§3.2.1. Интегрилизация ОЗ. Чтобы интегрилизовать исходную ОЗ, удобно применять соотношение, где искомая функция U связывается с векторной функцией $P_0 = (Q, \theta)$, на основе равенства:

$$U_x(x, t) = \varphi_x(x) + \int_0^t [Q(x, s) + f(x)(J\theta)(s)] ds = (A_1[Q, \theta])(x, t), \quad (3.2.5)$$

кроме того, интегрируя дважды по переменной x получим:

$$\begin{cases} U_x = \psi_1(t) + \int_0^x \{\varphi_x(\tau) + \int_0^t [Q(\tau, s) + f(\tau)(J\theta)(s)] ds\} d\tau = (A_2[Q, \theta])(x, t), \\ U = \psi_0(t) - \psi_1(t)H - \int_0^H (H-\tau) \{\varphi_x(\tau) + \int_0^t [Q(\tau, s) + f(\tau)(J\theta)(s)] ds\} d\tau + \\ + \psi_1(t)x + \int_0^x (x-\tau) \{\varphi_x(\tau) + \int_0^t [Q(\tau, s) + f(\tau)(J\theta)(s)] ds\} d\tau = (A_3[Q, \theta])(x, t), \end{cases} \quad (3.2.6)$$

где $Q(\cdot)$ - неизвестная функция. Значит, с учетом (3.2.3), (3.2.5) и (3.2.6) при этом проведя некоторые математические преобразования, из (3.2.1) следует:

$$\begin{cases} \int_0^t (J\theta)(s) ds = \beta_0^{-1} \{g(t) - (\varphi_x(x_0) + \sum_{i=1}^2 \lambda_i \psi_1(t)) - \sum_{i=1}^2 \lambda_i \int_0^x \varphi_x(\tau) d\tau - \\ - \int_0^t Q(x_0, s) ds - \sum_{i=1}^2 \lambda_i \int_0^x \int_0^t Q(\tau, s) ds d\tau\} = (A_4 Q)(t), \\ \frac{\partial}{\partial t} (A_4 Q)(t) = \beta_0^{-1} [g'(t) - \sum_{i=1}^2 \lambda_i \psi_1'(t) - Q(x_0, t) - \sum_{i=1}^2 \lambda_i \int_0^x Q(\tau, t) d\tau], \\ \beta_0 = f(x_0) + \sum_{i=1}^2 \lambda_i \int_0^x f(\tau) d\tau \neq 0, \\ \tilde{g}(t) = g(t) - (\varphi_x(x_0) + \sum_{i=1}^2 \lambda_i \psi_1(t)) - \sum_{i=1}^2 \lambda_i (\varphi_x(x_i) - \varphi_x(0)), (\tilde{g}(0) = 0), \end{cases} \quad (3.2.7)$$

и

$$\begin{aligned} Q(x, t) &= \lambda \{\psi_0'(t) + \psi_1'(t)(x-H) - \int_0^H (H-\tau) Q(\tau, t) d\tau + [-\int_0^H (H-\tau) \times \\ &\times f(\tau) d\tau + \int_0^x (x-\tau) f(\tau) d\tau] \beta_0^{-1} [g'(t) - \sum_{i=1}^2 \lambda_i \psi_1'(t) - Q(x_0, t) - \\ &- \sum_{i=1}^2 \lambda_i \int_0^x Q(\tau, t) d\tau] + \int_0^x (x-\tau) Q(\tau, t) d\tau\} - \lambda [D_x[(BQ)(x, t)] \{\psi_1(t) + \varphi_x(x) - \\ &- \varphi_x(0) + \int_0^x \int_0^t Q(\tau, s) ds d\tau + (A_4 Q)(t) \int_0^x f(\tau) d\tau\}^2 + D[(BQ)(x, t)] \times [\varphi_x(x) + \\ &+ \int_0^x Q(x, s) ds + f(x)(A_4 Q)(t)]\} = (\tilde{B}Q)(x, t), \end{aligned} \quad (3.2.9)$$

где (3.2.9) является ИУ-2. Поэтому, если имеют место условия Банаха:

$$\begin{cases} 0 < L_B < 1, \\ \tilde{B}: S_r \rightarrow S_r = \{Q: |Q - Q_0| \leq r, \forall (x, t) \in \bar{D}_0\}, \\ \|\tilde{B}Q_0 - Q_0\|_C \leq (1 - L_B)r, (\|Q\| \leq r_0 = \text{const}, \forall (x, t) \in \bar{D}_0), \end{cases} \quad (3.2.10)$$

то ИУ (3.2.9) однозначно разрешимо в $Q \in C(\bar{D}_0)$, тогда единственным образом определяется и функция $U(x, t)$ в $C^{2,1}(\bar{D}_0)$ при этом:

$$\|U\|_{C^{2,1}(\bar{D}_0)} = \|U\|_{C^1(\bar{D}_0)} + \|U_x\|_{C^1(\bar{D}_0)} + \|U_{xx}\|_{C^1(\bar{D}_0)} + \|U_{xt}\|_{C^1(\bar{D}_0)} + \|U_{xt}\|_{C^1(\bar{D}_0)} + \|U_{xt}\|_{C^1(\bar{D}_0)} \leq M_0.$$

Аналогичные выводы (как было отмечено в параграфе 3.1), на основе теоремы К. Фридрикса получим и здесь, т.е., если функция $U \in C^{2,1}(\bar{D}_0)$, то по указанной теореме U оценивается и в пространстве $\tilde{W}^1(D_0)$ (обратно нет),

когда функция Q допускает условие:

$$|Q| \leq r_0, \forall (x, t) \in \bar{D}_0. \quad (3.2.13)$$

Здесь:

$$\bar{W}^3(D_0) = \{(x, t) \in \bar{D}_0 : U, U_x, U_x \in C(\bar{D}_0); U, U_x, U_{xx} \in L^3(D_0)\}$$

с нормой:

$$\begin{cases} \|U\|_{W^3(D_0)} = \sum_{i=0}^2 \|U^{(i)}\|_{C(\bar{D}_0)} + \|U_x\|_{L^3(D_0)} + \|U_{xx}\|_{L^3(D_0)} + \|U_{xxx}\|_{L^3(D_0)} \leq N_0, (U_x^{(0)} = U), \\ \|U_x(t, x)\|_{L^3} = \left(\int_{D_0} |U_x(\tau, s)|^3 d\tau ds \right)^{\frac{1}{3}}, \\ \|U_{xx}(t, x)\|_{L^3} = \left(\int_{D_0} |U_{xx}(\tau, s)|^3 d\tau ds \right)^{\frac{1}{3}}, \\ \|U_{xxx}(t, x)\|_{L^3} = \left(\int_{D_0} |U_{xxx}(\tau, s)|^3 d\tau ds \right)^{\frac{1}{3}}, \left(\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1 : p = 3, q = \frac{3}{2} \right). \end{cases} \quad (3.2.14)$$

Если вместо (3.2.13) требуем, что функция Q в $L^3(D_0)$, т.е.:

$$\|Q(x, t)\|_{L^3} = \left(\int_{D_0} |Q(\tau, s)|^3 d\tau ds \right)^{\frac{1}{3}} \leq N_{01} = const,$$

то, и в этом случае имеют оценки, которые указаны по формуле (3.2.14).

Кроме того, так как решением исходной ОЗ является вектор функция $P = (U, \theta)$, то регуляризуемость ОЗ проводится в $\bar{G}_{(W^3(D_0), L^3(0, T))}^3(D_0)$, где:

$$\|P\|_{\bar{G}_{(W^3(D_0), L^3(0, T))}^3(D_0)}} = \|U\|_{W^3(D_0)} + \|\theta\|_{L^3(0, T)}. \quad (3.2.15)$$

§3.2.2. Регуляризуемость ИУВ-1. Из полученных результатов §3.2.1 и с учетом формул (*), (3.2.7), следует нелинейное ИУВ-1 вида:

$$\begin{cases} J\theta = \int_0^t K(t, s)\theta^1(s)ds = F(t), \\ F(t) = \beta_0^{-1} [g'(t) - \sum_{i=1}^2 \lambda_i \psi_i'(t) - Q(x_0, t) - \sum_{i=1}^2 \lambda_i \int_0^t Q(\tau, t) d\tau], \end{cases} \quad (3.2.16)$$

причем допускаются условия (a_2, a_3) , то (3.2.16) является некорректным ИУВ-1 в $C[0, T]$.

Для доказательства регуляризуемости (3.2.16) при условии (a_3) в обобщенном смысле, сперва преобразуем это ИУ к виду:

$$\begin{cases} \int_0^t h(\tau)\theta(\tau) d\tau = (\Phi\theta)(t) + F(t), \\ \Phi\theta = \int_0^t h_0(\tau)\theta(\tau)(J\theta)(\tau) d\tau - (J\theta)(t), \end{cases} \quad (3.2.17)$$

так как можем вести, как и в случае параграфа 3.1, следующие преобразования:

$$\begin{cases} h(t) = [\gamma + \frac{1}{\alpha} \mu(t)]F(t) \geq m > 0, (1 < \gamma = const); h_0(t) = \gamma + \frac{1}{\alpha} \mu(t), \\ 0 \leq \mu(t) \in L^1(0, T); h_0(t) \leq \alpha^{-1} h(t); F_0(t) = F(t) - F(0); F_0(0) = 0, \\ \phi_0(t) = \int_0^t [\gamma + \frac{1}{\alpha} \mu(\tau)]F(\tau) d\tau = \int_0^t h(\tau) d\tau, \\ |F_0(t) - F_0(\tau)| \leq L_0 M_0 (\phi_0(t) - \phi_0(\tau)), (\tau \leq t; M_0 = \frac{1}{\gamma\alpha}), \\ 0 < \max C_0 = C_0, (j = 1, 2; cm(a_1, a_2)), \\ t \in [0, T]: t = (t^{\frac{1}{2}})^2 \leq (\phi_0(t))^{\frac{2}{2}}, (\mu(t) = \frac{2}{9\sqrt{t}}); t \leq M_1 (\phi_0(t))^{\frac{1}{2}}, (M_1 = \sup_{[0, T]} (\phi_0(t))^{\frac{1}{2}}). \end{cases} \quad (3.2.18)$$

Тогда, наряду с уравнением (3.2.17) введем ИУ с малым параметром:

$$\begin{cases} \varepsilon \theta_\varepsilon(t) + \int_0^t h(\tau)\theta_\varepsilon(\tau) d\tau = (\Phi\theta_\varepsilon)(t) + F_\varepsilon(t), \\ (\Phi_0\theta_\varepsilon)(t) = \int_0^t h(\tau)\theta_\varepsilon(\tau) d\tau - (\Phi\theta_\varepsilon)(t), \end{cases} \quad (3.2.19)$$

и решение этого ИУ ищем по правилу:

$$\begin{cases} \theta_\varepsilon(t) = \frac{1}{\varepsilon} \Pi_\varepsilon(t) + \nu(t) + \xi_\varepsilon(t), \\ \Pi_\varepsilon(0) = F(0), \nu(0) = 0, \xi_\varepsilon(0) = 0. \end{cases} \quad (3.2.20)$$

Следовательно, относительно неизвестных функций получим систему:

$$\begin{cases} \Pi_\varepsilon(t) = -\frac{1}{\varepsilon} \int_0^t h(s)\Pi_\varepsilon(s) ds + F(0), \\ \int_0^t h(s)\nu(s) ds = (\Phi\nu)(t) + F_0(t), \\ \varepsilon \xi_\varepsilon(t) + \int_0^t h(s)\xi_\varepsilon(s) ds = (\Phi[\frac{1}{\varepsilon} \Pi_\varepsilon + \nu + \xi_\varepsilon])(t) - (\Phi\nu)(t) - \varepsilon \nu(t) + F_\varepsilon(t) - F(t), \end{cases} \quad (3.2.21)$$

при этом, получим аналогичные выводы, как в случаях леммы 3.1.2 и теоремы 3.1.1. А это значит, что следуют оценки (результаты теоремы 3.2.1):

$$1) \begin{cases} \|\Pi_\varepsilon\|_{L^1(0, T)} \leq \gamma_\varepsilon \varepsilon^{\frac{1}{2}}, (\gamma_\varepsilon = C_\varepsilon [3^{\frac{1}{2}} (2\varepsilon)^{\frac{1}{2}} + \frac{945}{32} \sqrt{\pi}^{\frac{1}{2}}]), \\ \|\Omega_\varepsilon\|_{L^1(0, T)} \leq \gamma_\varepsilon \varepsilon^{\frac{1}{2}}, \end{cases} \quad (3.2.39)$$

$$2) \begin{cases} \|\theta_\varepsilon - \nu\|_{L^1(0, T)} \leq \bar{M}_0(\varepsilon), (\bar{M}_0(\varepsilon) = 2[\Delta_0(\varepsilon)\sqrt{T} + \gamma_\varepsilon \varepsilon^{\frac{1}{2}}]), \\ \|\theta_\varepsilon\|_{L^1(0, T)} \leq r_\varepsilon = const, \end{cases} \quad (3.2.40)$$

$$3) \|(\Phi_0\theta_\varepsilon)(t) - F'(t)\|_{L^1(0, T)} \leq \bar{M}(\varepsilon), (\bar{M}_0(\varepsilon), \bar{M}(\varepsilon) \rightarrow 0 \text{ при } \varepsilon \rightarrow 0). \quad (3.2.41)$$

§3.2.3. Общий вывод регуляризации ОЗ в пространстве $\bar{G}_{(W^3(D_0), L^3(0, T))}^3(D_0)$ с нормой (3.2.15). Из полученных результатов §3.2.1, §3.2.2, на основе (3.2.6), (3.2.7) и учитывая условие:

$$|Q - Q_\varepsilon| \leq \bar{\Delta}(\varepsilon), \forall (x, t) \in \bar{D}_0, \quad (3.2.46)$$

в итоге следуют:

$$\|U_\varepsilon - U_{\alpha\varepsilon}\|_{L^1(D_0)} \leq [c.m.(3.2.41)] \leq 2[H^2 \sqrt[3]{\bar{H}\bar{\Delta}(\varepsilon)} + \gamma_3 \sqrt[3]{\bar{H}\bar{M}(\varepsilon)}] = Y_{01}(\varepsilon), \quad (3.2.47)$$

$$\begin{cases} \|U_{\alpha\varepsilon} - U_{\alpha^2\varepsilon}\|_{L^1(D_0)} \leq Y_{02}(\varepsilon), \\ \|U_{\alpha^2\varepsilon} - U_{\alpha^3\varepsilon}\|_{L^1(D_0)} \leq Y_{03}(\varepsilon), (Y_{02}, Y_{03} \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} 0), \end{cases} \quad (3.2.48)$$

а также

$$\|U - U_\varepsilon\|_{C(\bar{D}_0)} \leq N_{01}(\varepsilon) \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} 0, \quad (3.2.49)$$

и

$$\begin{cases} \|U_{\alpha\varepsilon} - U_\varepsilon\|_{C(\bar{D}_0)} \leq N_{02}(\varepsilon), \\ \|U_{\alpha^2\varepsilon} - U_\varepsilon\|_{C(\bar{D}_0)} \leq N_{03}(\varepsilon). \end{cases} \quad (3.2.50)$$

Поэтому, учитывая (3.2.47)-(3.2.50) получим оценку в смысле $\bar{W}^3(D_0)$, т.е.:

$$\|U_\varepsilon - U\|_{\bar{W}^3(D_0)} \leq \sum_{i=1}^3 (N_{0i}(\varepsilon) + Y_{0i}(\varepsilon)) = \bar{\Delta}(\varepsilon) \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} 0. \quad (3.2.51)$$

В результате имеем, что ОЗ (3.2.1)-(3.2.3) регуляризируема в векторном пространстве $\bar{G}_{\bar{W}^3(D_0), \bar{X}^3(0, T)}(D_0)$ в обобщенном смысле.

В параграфе 3.3 изучается многомерная ОЗ вида:

$$u_{\alpha^2 y} + \lambda u_{xy} = \lambda_1 u_y + \Phi_0(u, u_x, u_{x^2}) + f(t)(H\theta)(x, y), \quad (3.3.1)$$

$$\begin{cases} u(0, y, t) = u_x(0, y, t) = 0, \\ u(x, 0, t) = 0; u(x, y, 0) = \varphi(x, y), \forall (x, y, t) \in \bar{\Omega}, (\Omega = (0, X) \times (0, b) \times (0, \infty)), \\ \varphi(0, y) = \varphi(x, 0) = \varphi(0, 0) = 0, (\varphi_x(0, y) = 0; u(t, 0, 0) = 0; u(0, 0, 0) = 0), \end{cases} \quad (3.3.2)$$

$$\begin{cases} (u_t + \lambda u)|_{t=T} = g(x, y), \forall (x, y) \in \bar{D}_1, \\ g|_{x=0} = g|_{y=0} = 0, \\ g(0, 0) = 0; D_1 = (0, X) \times (0, b); T \in (0, \infty), \end{cases} \quad (3.3.3)$$

где

$$H\theta = \iint_0^T K(x, \tau, y, \nu) \theta^2(\tau, \nu) d\nu d\tau, \quad (*)$$

причем известные функции:

$$\lambda, \lambda_1, \Phi_0, f, \varphi, g, K$$

имеют условия:

$$\begin{cases} C(D_0) \ni K(x, \tau, y, \nu) : |K(\cdot)| \leq C_{01}, \forall (x, \tau, y, \nu) \in D_0, \\ D_0 = \{(x, \tau) : 0 \leq \tau \leq x \leq X\} \times [0, b] \times [0, b], \\ K(\cdot) \geq 0; K(0, 0, y, y) \neq 0, \forall y \in [0, b], \\ C^{1,1,1}(D_2) \ni \Phi_0(u_1, u_2, u_3), (D_2 = R \times R \times R); |\Phi_0| \leq \beta_1, |\Phi_{0i}| \leq \beta_2, \\ (i = \overline{1, 3}); C^{2,1}(\bar{D}_1) \ni \varphi(x, y); \sup_{\bar{D}_1} [|\varphi(\cdot)|, |\varphi_x(\cdot)|, |\varphi_{x^2}(\cdot)|, |\varphi_y(\cdot)|, |\varphi_{xy}(\cdot)|, |\varphi_{x^2 y}(\cdot)|] \leq \beta_3, \\ C^{1,1}(\bar{D}_1) \ni g(x, y); \sup_{\bar{D}_1} [g(\cdot), |g_x(\cdot)|, |g_y(\cdot)|, |g_{xy}(\cdot)|] \leq \beta_4, \\ C(R_x) \ni f(t) : 0 \leq f(t) \leq f_{01} < \infty; \int_{R_x} f(t) dt \leq f_{02} = const; f(T) \neq 0, \\ \|f(t)\|_C |f^{-1}(T)| \leq \beta_5, (f_0 = \max(f_{01}, f_{02}); \beta_0 = \max \beta_i, (i = \overline{1, 5})). \end{cases} \quad (3.3.4)$$

Неизвестным является вектор-функция: $P = (u, \theta)$, причем, так как из ОЗ (3.3.1)-(3.3.3) вырождается некорректное ИУВ-1 с неотрицательным решением, связанное с ФД, то регуляризируемость ИУ рассматривается в $Z^2(D_1)$.

§3.3.1. Метод интегрилизации ОЗ (3.3.1)-(3.3.3).

Чтобы интегрилизовать исследуемую ОЗ, для искомого функции можем вести преобразование вида:

$$u = \varphi(x, y) \exp(-\lambda t) + \int_0^T \exp(-\lambda(t-s)) \iint_0^y (x-\tau) [f(s)(H\theta)(\tau, \nu) + Q(\tau, \nu, s)] d\nu d\tau ds = (A[\theta, Q])(x, y, t). \quad (3.3.5)$$

Тогда, с учетом $u(x, y, t)$ из (3.3.5) и

$$\iint_0^y (x-\tau) (H\theta)(\tau, \nu) d\nu d\tau = (f(T))^{-1} [g - \iint_0^y (x-\tau) Q(\tau, \nu, T)] d\nu d\tau = (B_1 Q)(x, y), \quad (3.3.7)$$

следует:

$$u = \varphi(x, y) \exp(-\lambda t) + \left(\int_0^T \exp(-\lambda(t-s)) f(s) ds \right) (B_1 Q)(x, y) + \int_0^T \exp(-\lambda(t-s)) \iint_0^y (x-\tau) Q(\tau, \nu, s) d\nu d\tau ds = (A_1 Q)(x, y, t). \quad (3.3.8)$$

Поэтому, относительно функции $u(\cdot)$, учитывая частные производные по совокупности аргументов до требуемого порядка и подставляя в (3.3.1) имеем ИУ:

$$Q(x, y, t) = \Phi_0[(A_1 Q)(x, y, t), (A_2 Q)(x, y, t), (A_3 Q)(x, y, t)] + \lambda_1 (A_1 Q)(x, y, t) = (BQ)(x, y, t), \quad (3.3.11)$$

где Q -новая искомая функция, причем все операторы: $(A_1 Q)(x, y, t); (A_2 Q)(x, y, t); (A_3 Q)(x, y, t)$ - интегральные, а (3.3.11) является ИУВ-2 по переменным (x, y) . Следовательно, ИУ (3.3.11) однозначно разрешимо в $C(\bar{\Omega})$. Тогда, с учетом (3.3.8) и существует единственная функция $u \in C^{2,1,1}(\bar{\Omega})$.

Обсуждая аналогичным образом, как вышеуказанных параграфах, имеем, что на основе теоремы К. Фридрикса, если функция $u \in \tilde{C}^{2,1}(\bar{\Omega})$, то u оценивается и в линейном пространстве $\tilde{W}_{k_0(t)}^2(\Omega)$ (обратно нет), когда Q допускает условие:

$$|Q| \leq r_0, \forall (x, y, t) \in \bar{\Omega} \quad (3.3.18)$$

Причем: $\tilde{W}_{k_0(t)}^2(\Omega) = \{(x, y, t) \in \Omega : u, u_x \in C(\bar{\Omega}); u_y, u_{x^2}, u_{xy}, u_{y^2} \in L_{k_0(t)}^2(\Omega)\}$, где

$$\begin{cases} \|u\|_{\tilde{W}_{k_0(t)}^2(\Omega)} = \|u\|_{C(\bar{\Omega})} + \|u_x\|_{L^2(\bar{\Omega})} + \|u_y\|_{L^2(\bar{\Omega})} + \|u_{x^2}\|_{L^2(\bar{\Omega})} + \|u_{xy}\|_{L^2(\bar{\Omega})} + \|u_{y^2}\|_{L^2(\bar{\Omega})} + \\ + \|u_{x^2y}\|_{L^2(\bar{\Omega})} \leq N_0, \\ \text{например: } \|u_x(t, x)\|_{L^2(\bar{\Omega})} = \left(\int_{\bar{\Omega}} k_0(s) |u_x(\tau, v, s)|^2 dv d\tau ds \right)^{\frac{1}{2}}, \\ 0 \leq k_0(t) \leq \bar{k}_{01} = \text{const} : \int_0^t k_0(s) ds \leq \bar{k}_{02} = \text{const}, (\bar{k}_0 = \max(\bar{k}_{01}, \bar{k}_{02})). \end{cases} \quad (3.3.19)$$

В итоге, так как решением ОЗ является функция $P = (u, \theta)$, то регуляризуемость ОЗ рассматривается в $\tilde{G}_{[\tilde{W}_{k_0(t)}^2(\Omega), Z^2(D_1)]}^2(\Omega)$ с нормой:

$$\|P\|_{\tilde{G}_{[\tilde{W}_{k_0(t)}^2(\Omega), Z^2(D_1)]}^2(\Omega)} = \|u\|_{\tilde{W}_{k_0(t)}^2(\Omega)} + \|\theta\|_{Z^2(D_1)}. \quad (3.3.20)$$

§3.3.2. Регуляризация некорректного ИУВ-1, которое вырождается из исследуемой ОЗ. В условиях §3.3.1 из ИУ (3.3.7), с учетом дифференцирования по совокупности аргументов, следует некорректное ИУВ-1 с неотрицательным решением, связанное с ФД, т.е.:

$$H\theta \equiv \int_0^x \int_0^y K(x, \tau, y, v) \theta^2(\tau, v) dv d\tau = F(x, y), \quad (3.3.21)$$

$$\begin{cases} F(x, y) \equiv (f(T))^{-1} [g_{x^2}(x, y) - Q(x, y, T)], \\ F(x, y) \in C^{0,1}(\bar{D}_1) \cap Lip(x) | L_y, 0 < L_x = \text{const}; |F(x, y)| \leq C_{01}, \forall (x, y) \in \bar{D}_1, \\ F(0, y) \neq 0; F(x, 0) = 0; F(x, b) \geq \alpha > 0, \forall x \in [0, X]. \end{cases} \quad (3.3.22)$$

Чтобы доказать регуляризуемости ИУ (3.3.21) в $Z^2(D_1)$, сперва проводим следующие математические преобразования, т.е., если допускаем

$$(H\theta)(x, b) \equiv \int_0^x \int_0^b K(x, \tau, b, v) \theta^2(\tau, v) dv d\tau = F(x, b) \quad (3.3.23)$$

и условие (3.3.22), а также условие вида (2.2.4) (здесь, только будет в скалярном виде), то ИУВ-1 (3.3.21) эквивалентно преобразуется к виду:

$$\begin{cases} \int_0^x h(\tau) \theta(\tau, y) d\tau = (\Psi\theta)(x, y) + F(x, y), \\ \Psi\theta \equiv \int_0^x h_0(\tau) \theta(\tau, y) (H\theta)(\tau, y_0) d\tau - (H\theta)(x, y). \end{cases} \quad (3.3.25)$$

Далее, введем уравнение с малым параметром ϵ , вида

$$\begin{cases} \epsilon \theta_\epsilon(x, y) + (\Phi\theta_\epsilon)(x, y) = F_\epsilon(x, y), \\ (\Phi\theta_\epsilon)(x, y) = \int_0^x h(\tau) \theta_\epsilon(\tau, y) d\tau - (\Psi\theta_\epsilon)(x, y), \end{cases} \quad (3.3.26)$$

с условием

$$\begin{cases} \theta_\epsilon(0, y) = \frac{1}{\epsilon} F(0, y), \\ C(\bar{D}_1) \ni F_\epsilon(x, y) : \|F_\epsilon(x, y) - F(x, y)\|_C \leq \Delta_\epsilon(\epsilon), (F_\epsilon(0, y) = F(0, y)). \end{cases} \quad (3.3.27)$$

Тогда решение ИУ (3.3.26) представляя по правилу:

$$\begin{cases} \theta_\epsilon(x, y) = \frac{1}{\epsilon} \Pi_\epsilon(x, y) + v(x, y) + \xi_\epsilon(x, y), \\ \Pi_\epsilon(0, y) = F(0, y), v(0, y) = 0, \xi_\epsilon(0, y) = 0, \end{cases} \quad (3.3.28)$$

получим систему ИУ относительно функций: $\Pi_\epsilon(x, y), v(x, y), \xi_\epsilon(x, y)$, т.е.:

$$\begin{cases} \Pi_\epsilon(x, y) = -\frac{1}{\epsilon} \int_0^x h(\tau) \Pi_\epsilon(\tau, y) d\tau + F(0, y), \\ \int_0^x h(\tau) v(\tau, y) d\tau = (\Psi v)(x, y) + F_0(x, y), \\ \epsilon \xi_\epsilon + \int_0^x h(\tau) \xi_\epsilon(\tau, y) d\tau = (\Psi[\frac{1}{\epsilon} \Pi_\epsilon + v + \xi_\epsilon])(x, y) - (\Psi v)(x, y) + F_\epsilon(x, y) - \\ - F(x, y) - \epsilon v. \end{cases} \quad (3.3.29)$$

Следовательно, в рамках указанных условий, имеем аналогичные выводы, которые были получены в параграфе 2.2 (только там результаты были получены относительно системы двумерных ИУВ-1), т.е., в итоге следуют оценки вида (результаты теоремы 3.3.1):

$$1) \begin{cases} \|\Pi_\epsilon\|_{Z^2(D_1)} \leq \gamma_1 \epsilon^{\frac{1}{2}}, (\gamma_1 = C_0 \sqrt{b} 2^{-\frac{1}{2}} [7^{\frac{1}{2}} \epsilon^{-\frac{1}{2}} + \frac{105}{16} \sqrt{\pi}^{\frac{1}{2}}]), \\ \|\Omega_\epsilon\|_{Z^2(D_1)} \leq \gamma_2 \epsilon^{\frac{1}{2}}, \end{cases} \quad (3.3.43)$$

$$2) \begin{cases} \|\theta_\epsilon - v\|_{Z^2(D_1)} \leq 2[\Delta_1(\epsilon) \sqrt{Xb} + \gamma_1 \epsilon^{\frac{1}{2}}] = \tilde{M}_0(\epsilon), \\ \|\theta_\epsilon\|_{Z^2(D_1)} \leq r = \text{const}, \end{cases} \quad (3.3.44)$$

$$3) \|(\Phi\theta_\epsilon)(x, y) - F(x, y)\|_{Z^2(D_1)} \leq \tilde{M}(\epsilon), (\tilde{M}_n(\epsilon), \tilde{M}(\epsilon) \rightarrow 0 \text{ при } \epsilon \rightarrow 0). \quad (3.3.45)$$

§3.3.3. Общий вывод регуляризации ОЗ в пространстве $\tilde{G}_{[\tilde{W}_{k_0(t)}^2(\Omega), Z^2(D_1)]}^2(\Omega)$ с нормой (3.3.20). Из полученных результатов §3.3.1, §3.3.2, на основе (3.3.5) и (3.3.7), с учетом (3.3.25) и

$$|Q - Q_\epsilon| \leq \bar{\Delta}(\epsilon), \forall (x, y, t) \in \bar{\Omega}, \quad (3.3.50)$$

в результате следует:

$$\|u_\epsilon - u\|_{C(\bar{\Omega})} \leq \frac{1}{\lambda} \int_0^X X \sqrt{Xb} \tilde{M}(\epsilon) + \frac{1}{2\lambda} \int_0^X X^2 b \bar{\Delta}(\epsilon) \xrightarrow{\epsilon \rightarrow 0} 0. \quad (3.3.51)$$

Аналогично доказывается: $\|u_{1\varepsilon} - u_{1\varepsilon}\|_{C(\bar{\Omega})}, \|u_{2\varepsilon} - u_{2\varepsilon}\|_{C(\bar{\Omega})}$.

А далее, имеем:

$$\begin{cases} \|u_{1\varepsilon} - u_{1\varepsilon}\|_{L^2(\Omega)} \leq 2 \frac{1}{\lambda} f_0 \left(\int_{\Omega} k_0(s) |(\Phi\theta_\varepsilon)(\tau, v) - F(\tau, v)|^2 d\tau dv ds \right)^{\frac{1}{2}} + \\ + \bar{\Delta}(\varepsilon) \sqrt{b\lambda\bar{k}_0} \leq 2 \frac{1}{\lambda} f_0 (\bar{M}(\varepsilon) \sqrt{\bar{k}_0} + \bar{\Delta}(\varepsilon) \sqrt{b\lambda\bar{k}_0}) \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} 0, \\ \int_{\Omega} k_0(s) ds \leq \bar{k}_0 = const. \end{cases} \quad (3.3.53)$$

Кроме того, аналогичным образом доказываются выражения:

$$u_{1\varepsilon} - u_{1\varepsilon}; u_{2\varepsilon} - u_{2\varepsilon}; u_{3\varepsilon} - u_{3\varepsilon} \text{ в } L^2_{k_0(t)}(\Omega).$$

В результате, с учетом вышеуказанных оценок получим:

$$\|u_\varepsilon - u\|_{W^2_{k_0(t)}(\Omega)} \leq \Delta_\varepsilon \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} 0. \quad (3.3.54)$$

Значит в итоге имеем, что ОЗ (3.3.1)-(3.3.3) регуляризуема в обобщенном смысле в векторном пространстве $\tilde{G}^2_{[W^2_{k_0(t)}(\Omega), Z^2(D)]}(\Omega)$.

Глава 4 состоит из двух параграфов, где изучаются коэффициентные ОЗ с нагруженными дифференциальными операторами параболического вида и типа КДФ в НО. Для изучения этих ОЗ воспользуемся ПФ и МР в определенных пространствах.

Отметим, что в области теории волн прямые задачи типа КДФ были изучены в работах Р.М. Миура (1968), А. Ньюэлла (1989), Л.Д. Фалдсева (1985, соавтор: Л.А. Тахтаджян), М.И. Иманалиева (1995, соавторы: П.С. Панков, Т.М. Иманалиев) и др.

В §4.1, на основе ПФ и МР исследуются ОЗ в пространствах Банаха и Гильберта, т.е. рассматривается КОЗ:

$$U_t + \lambda_1 U(U_{x_1}(x_0, t))^2 + \lambda_2 U = (\gamma\theta)(t)U(x, 0), \quad (4.1.1)$$

$$U(x, 0) = \varphi(x), \forall x \in R, \quad (4.1.2)$$

$$U|_{t=0} = g(t), \forall t \in [0, T], (x_0 \in R), \quad (4.1.3)$$

где А) $\gamma\theta = f(t)$ или

$$\text{Б) } \begin{cases} \gamma\theta = \int_0^t h(s)\Phi(s, \theta(s))ds, \\ \Phi \in C^{0,1}(D_0 = [0, T] \times R), \Phi_0 \geq \alpha > 0, (\theta(0) = q_0, \theta \in C[0, T]), \end{cases}$$

или

$$\text{В) } \gamma\theta = \int_0^t h(s)\theta(s)ds, (\theta(0) = 0, \theta \in L^1[0, T]).$$

При этом, относительно известных функций допускаются условия:

$$\text{а) } q_0, \lambda_1, 0 < \lambda_2, \alpha = const, \varphi(x) \in C^2(R), g(t) \in C^1[0, T], \\ t \in [0, T], x \in R, \forall (x, t) \in \bar{D}, (D = R \times (0, T)),$$

б) $0 < h(t) \in L^1(0, T), \phi(t) = \int_0^t h(s)ds$. Тогда, в рамках указанных условий

требуется восстановить векторную функцию, в случаях (А,Б):

$P_0 = (U(x, t), f(t))$, (или $P = (U(x, t), \theta(t))$) в пространстве:

$$\begin{cases} W_C(\bar{D}) = \{(U, f) : U \in C^{2,1}(\bar{D}), f(t) \in C[0, T]\} \\ \text{или } W_C(\bar{D}) = \{(U, \theta) : U \in C^{2,1}(\bar{D}), \theta(t) \in C[0, T]\} \end{cases}$$

с нормой

$$\begin{cases} \|P_0\|_{W_C} = \|U\|_{C^{2,1}(\bar{D})} + \|f\|_{C[0, T]} \\ \text{или } \|P\|_{W_C} = \|U\|_{C^{2,1}(\bar{D})} + \|\theta\|_{C[0, T]}, \end{cases} \quad (4.1.4)$$

а в случае (В): $P = (U(x, t), \theta(t))$ в $W^1(\bar{D})$ с нормой:

$$\begin{cases} \|P\|_{W^1} = \|U\|_{L^2} + \sum_{i=1}^2 \|U_{x_i}\|_{L^2} + \|U_t\| + \|\theta\|_{L^1[0, T]}, \\ \|U\|_{L^2} = \left(\sup_R \int_0^T |U(x, s)|^2 ds \right)^{\frac{1}{2}}; \|\theta\|_{L^1[0, T]} = \int_0^T |\theta(s)|^2 ds)^{\frac{1}{2}}. \end{cases} \quad (4.1.5)$$

В пунктах §4.1.1 и §4.1.2 данной главы, на основе ПФ и МР доказаны регуляризуемости ОЗ (4.1.1)-(4.1.3) с условиями (А,Б) в пространстве Банаха, приведен пример. Далее, в пункте §4.1.3, регуляризуемость ОЗ (4.1.1)-(4.1.3) с условием (В) доказана в пространстве Гильберта, здесь вырождается линейное ИУВ-1. В обоих случаях, использован классический вариант МР М.М. Лаврентьева (1977).

В параграфе 4.2 исследуется КОЗ с нагруженным оператором типа Кортевега Де Фриза в неограниченной области, т.е.:

$$U_t + \lambda U(U_t(t, x_0))^2 + U_x = \varphi(x)(J\theta)(t), \forall (t, x) \in \bar{D}, (D = (0, T) \times R), \quad (4.2.1)$$

$$U(0, x) = \varphi(x), \forall x \in R, \quad (4.2.2)$$

$$(U_t + U_x)|_{t=0} = g(t), \forall t \in [0, T]. \quad (4.2.3)$$

$$J\theta = \sum_{i=0}^n (\lambda_i \int_0^t K_0(t, s)\theta(s)ds)^{i+1}, (\lambda_0 = 1), \quad (*)$$

и $\lambda, \lambda_1, \varphi(x), g(t), K_0(t, s)$ - известные функции удовлетворяют условия:

а) $\lambda < 1, 0 < \lambda_1; \lambda, \lambda_1 = const; \varphi(x) \in C^1(R); g(t) \in C^1[0, T]$,

б) $K_0(t, s) \in C(D_0) \cap Lip(t|L_R), (D_0 = \{(t, s) : 0 \leq s \leq t \leq T\}), K_0(t, s) \geq 0$,

$$K_0(t, 0) = q = const; |K_0(t, s)| \leq C_{01} = const.$$

При этом, так как неизвестным является вектор-функция: $P = (U, \theta)$ из пространства $\tilde{G}^1_{[W^1(D), Z^1(0, T)]}(D) = \{(U, \theta) : U \in W^1(D), \theta \in Z^1(0, T)\}$ с нормой:

$$\begin{cases} \|P\|_{\tilde{G}^1} = \|U\|_{W^1(D)} + \|\theta\|_{Z^1(0, T)}, \\ \|U\|_{W^1(D)} = \|U\|_{L^2(D)} + \|U_x\|; \|U\|_{L^2} = \sup_R \int_0^T |U_t(t, x)| dt. \end{cases} \quad (4.2.4)$$

Тогда регуляризируемость ОЗ доказывается в указанном пространстве в обобщенном смысле, так как из исследуемой ОЗ вырождается некорректное ИУВ-1 с неотрицательным решением, связанное с ФД, т.е.:

$$J\theta = \int_0^1 K_0(t,s)\theta(s)ds + \lambda_1 \left(\int_0^1 K_0(t,s)\theta(s)ds \right)^2 = F(t)$$

с условием:

$$в) F(t) \in C[0, T] \cap Lip(t|L_n); F(t) > 0, (F(0) \neq 0); |F(t)| \leq C_{\omega}.$$

§4.2.1. Интегрилизация ОЗ (4.2.1)-(4.2.3). Для этого, воспользуясь ПФ:

$$\begin{cases} U(t, x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega x} z(t, 0, \omega) \hat{\varphi}(\omega) d\omega, \\ \varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega x} \hat{\varphi}(\omega) d\omega. \end{cases} \quad (4.2.5)$$

при этом, учитывая частные производные функции U из (4.2.1) следует:

$$\begin{cases} z_t(t, 0, \omega) - \lambda z(t, 0, \omega) \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \omega z(t, 0, \omega) \hat{\varphi}(\omega) d\omega \right)^2 - i\omega^2 z(t, 0, \omega) = (J\theta)(t), \\ z|_{t=0} = 1, \end{cases} \quad (4.2.7)$$

где z-новая искомая функция. Тогда, проведя некоторые математические преобразования, получим соотношения:

$$d = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{\varphi}(\omega) d\omega \neq 0, \quad (4.2.9)$$

$$\begin{aligned} (J\theta)(t) &= d^{-1} \left\{ g(t) - \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \lambda z(t, 0, \omega) \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \omega z(t, 0, \omega) \hat{\varphi}(\omega) d\omega \right)^2 \hat{\varphi}(\omega) d\omega \right\} = \\ &= (B_0 z)(t), \end{aligned} \quad (4.2.10)$$

$$z_t(t, 0, \omega) = \lambda z(t, 0, \omega) \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \omega z(t, 0, \omega) \hat{\varphi}(\omega) d\omega \right)^2 + i\omega^2 z(t, 0, \omega) + (B_0 z)(t) \quad (4.2.11)$$

или

$$z(t, 0, \omega) = e^{i\omega^2 t} + \int_0^t e^{i\omega^2(t-s)} \left\{ \lambda z(s, 0, \omega) \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \omega z(s, 0, \omega) \hat{\varphi}(\omega) d\omega \right)^2 + (B_0 z)(s) \right\} ds = (Bz)(t, \omega), \quad (4.2.12)$$

здесь (4.2.12) является ИУВ-2, то можем иметь:

Лемма 4.2.1. При условиях:

$$\begin{cases} L_n < 1, \\ B: S_r(z_n) \rightarrow S_r(z_n) = \{z: |z - z_n| \leq r = const, \forall (t, \omega) \in \bar{D}\} \end{cases} \quad (4.2.13)$$

ИУ (4.2.12) однозначно разрешимо в $C(\bar{D})$, причем решение строится МП:

$$z_{n+1} = Bz_n, (n = 0, 1, \dots)$$

с оценкой

$$\begin{cases} \|z_{n+1} - z\| \leq L_n^n r \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0, \\ \|z\| \leq r, \forall (t, \omega) \in \bar{D}, \end{cases} \quad (4.2.14)$$

где z_0 -начальное приближение, при этом функция z имеет производную по t,

которая удовлетворяет ДУ (4.2.11). Тогда, на основе (4.2.5) единственным образом определяется и функция U в $\tilde{W}^1(D)$ с оценкой:

$$\|U\|_{\tilde{W}^1(D)} \leq (|d| + \sum_{i=0}^2 d_i) r_1 + N_0 = N_1. \quad (4.2.15)$$

§4.2.2. Регуляризация ИУВ-1, которое вырождается на основе (4.2.10)

Так как имеют место условия леммы 4.2.1, то с учетом (*) и (4.2.10), получим некорректное ИУВ-1:

$$J\theta = \int_0^1 K_0(t,s)\theta(s)ds + \lambda_1 \left(\int_0^1 K_0(t,s)\theta(s)ds \right)^2 = F(t), \quad (4.2.20)$$

где имеют место условия (б, в) и:

$$C[0, T] \ni F(t) = d^{-1} \left\{ g(t) - \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \lambda \Psi(t, 0, \omega) \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \omega \Psi(t, 0, \omega) \hat{\varphi}(\omega) d\omega \right)^2 \hat{\varphi}(\omega) d\omega \right\}. \quad (4.2.21)$$

Поэтому, регуляризация ИУ (4.2.20) в $Z^1(0, T)$, доказывается на основе модификации МР параграфа 2.1, когда допустимы условия вида (2.1.3).

Для этого, преобразуя (4.2.20) к виду

$$\begin{cases} \int_0^1 h(s)\theta(s)ds = (H\theta)(t) + F(t), \\ (H\theta)(t) = \int_0^1 h_0(s)\theta(s)(J\theta)(s)ds - (J\theta)(t) \left(\int_0^1 h_0(s)\theta(s) \left(\int_0^1 K_0(s, \bar{s})\theta(\bar{s})d\bar{s} + \right. \right. \\ \left. \left. + \lambda_1 \left(\int_0^1 K_0(s, \bar{s})\theta(\bar{s})d\bar{s} \right)^2 \right) ds - \int_0^1 K_0(t, \bar{s})\theta(\bar{s})d\bar{s} - \lambda_1 \left(\int_0^1 K_0(t, \bar{s})\theta(\bar{s})d\bar{s} \right)^2, \end{cases} \quad (4.2.23)$$

введем параметризованную ИУ:

$$\begin{cases} \theta_e(t) + (\Phi \theta_e)(t) = F_e(t), \\ (\Phi \theta_e)(t) = \int_0^1 h(s)\theta_e(s)ds - (H\theta_e)(t). \end{cases} \quad (4.2.24)$$

Тогда решения представляя по правилу:

$$\begin{cases} \theta_e = v(t) + \xi_e(t) + \frac{1}{\epsilon} \Pi_e(t), (\Pi_e(0) = F(0), v(0) = 0, \xi_e(0) = 0), \\ F_e(0) = F(0); F_e(t) : |F_e(t) - F(t)| \leq \Delta_0(\epsilon), \forall t \in [0, T], \end{cases} \quad (4.2.25)$$

получим систему:

$$\begin{cases} \epsilon \Pi_e(t) + \int_0^1 h(s)\Pi_e(s)ds = F(0), \\ \int_0^1 h(s)v(s)ds = (Hv)(t) + F_0(t), (F_0(t) = F(t) - F(0)), \\ \epsilon \xi_e(t) + \int_0^1 h(s)\xi_e(s)ds = (H(v + \xi_e + \frac{1}{\epsilon} \Pi_e))(t) - (Hv)(t) + F_e(t) - F(t) - \epsilon v(t). \end{cases} \quad (4.2.26)$$

Далее, доказаны утверждения:

Лемма 4.2.2. При выполнении условий (б, в, (4.2.21)) из системы (4.2.26), следуют:

$$1) |\Pi_e(t)| \leq C_0 \exp\left(-\frac{1}{\epsilon} \phi(t)\right). \quad (4.2.27)$$

2) функция $v(t) \in C[0, T]$ определяется как предел параметризованного ИУ:

$$\delta v_\varepsilon + \int_0^t h(s)v_\varepsilon(s)ds = (Hv_\varepsilon)(t) + F_0(t) \quad (4.2.28)$$

в $C[0, T]$, где $(0, 1) \ni \delta$ – малый параметр,

3) остаточная функция $\xi_\varepsilon(t)$ определяется однозначно из третьего ИУ системы (4.2.26), причем сходится равномерно к нулю в $C[0, T]$, когда $\varepsilon \rightarrow 0$.

Теорема 4.2.1. Если выполняются условия леммы 4.2.2, то на основе (4.2.25) следуют:

$$1) \begin{cases} \|\Pi_\varepsilon\|_{C^1(0, T)} \leq \gamma_1 \varepsilon^2, (\gamma_1 = 6C_0 M_1), \\ \|\Omega_\varepsilon\|_{C^1(0, T)} \leq \gamma_1 \varepsilon, \end{cases} \quad (4.2.46)$$

$$2) \begin{cases} \|\theta_\varepsilon - v\|_{C^1(0, T)} \leq E_1(\varepsilon)T + \gamma_1 \varepsilon = \tilde{M}_0(\varepsilon), \\ \|\theta_\varepsilon\|_{C^1(0, T)} \leq r = const, \end{cases} \quad (4.2.47)$$

$$3) \|(\Phi\theta_\varepsilon)(t) - F(t)\|_{C^1(0, T)} \leq \tilde{M}(\varepsilon), (\tilde{M}_0(\varepsilon), \tilde{M}(\varepsilon) \rightarrow 0 \text{ при } \varepsilon \rightarrow 0). \quad (4.2.48)$$

§4.2.3. Общий вывод регуляризации ОЗ в пространстве

$\tilde{G}_{(W^1(D), Z^1(0, T))}^{-1}(D)$ с нормой (4.2.4). Из полученных результатов леммы 4.2.1, теоремы 4.2.1, с учетом (4.2.5), (4.2.7) и функции $z, z(t, 0, \omega)$, и (4.2.23), в результате следуют следующие оценки

$$\begin{cases} |z_\varepsilon - z| \leq \Delta_{01}(\varepsilon), \forall (t, 0, \omega) \in \bar{D}, \\ \|z_\varepsilon - z\|_{C(\bar{D})} \leq r_1, \forall (t, 0, \omega) \in \bar{D}; \Delta_{01}(\varepsilon) \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} 0, \end{cases} \quad (4.2.54)$$

$$\|U_{\varepsilon} - U\|_{C(\bar{D})} \leq d \Delta_{01}(\varepsilon)T + \tilde{M}(\varepsilon) = Y_0(\varepsilon) \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} 0, \quad (4.2.55)$$

$$\|U_\varepsilon - U\|_{C(\bar{D})} \leq Y_1(\varepsilon) \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} 0. \quad (4.2.56)$$

Аналогично можем допускать и оценки:

$$\begin{cases} \|U_{\varepsilon} - U\|_{C(\bar{D})} \leq Y_2(\varepsilon), \\ \|U_{\varepsilon} - U\|_{C(\bar{D})} \leq Y_3(\varepsilon); \|U_{\varepsilon} - U\|_{C(\bar{D})} \leq Y_4(\varepsilon). \end{cases} \quad (4.2.57)$$

Следовательно, можем иметь:

$$\|U_\varepsilon - U\|_{W^1(D)} \leq \sum_{i=0}^4 Y_i(\varepsilon) = Y(\varepsilon) \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} 0. \quad (4.2.58)$$

В итоге, учитывая вышеуказанные выводы получим:

$$\|V_\varepsilon\|_{W^1(D)} \leq Y(\varepsilon) + \tilde{M}_0(\varepsilon) \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} 0, (V_\varepsilon = U_\varepsilon - U, \theta_\varepsilon - v). \quad (4.2.59)$$

Утверждение 4.2.1. В условиях леммы 4.2.1 и теоремы 4.2.1, и (4.2.59) ОЗ (4.2.1)-(4.2.3) регуляризуема в обобщенном смысле в $\tilde{G}_{(W^1(D), Z^1(0, T))}^{-1}(D)$.

ВЫВОДЫ

В настоящей работе исследованы некорректные нелинейные интегральные уравнения Вольтерра первого рода (ИУВ-1) с различными пределами интегрирования, а также обратные задачи (ОЗ) с гиперболическими операторами и

с нагруженными операторами параболического характера, и типа Кортевега Де Фриза в неограниченной области, вырождающиеся в нелинейные ИУВ-1 с решениями, связанные с функцией Дирака. При этом изложены методы регуляризации в обобщенном смысле изучаемых некорректных ИУВ-1 и ОЗ в введенных пространствах.

Все научные результаты, излагаемые в диссертационной работе строго математически обоснованы в рассматриваемых пространствах и дополняют теорию регуляризации не только ИУВ-1 в обобщенном смысле, но и теорию многомерных ОЗ, где вырождаются многомерные ИУВ-1 с решениями в классе сингулярных обобщенных функций. А также результаты работы могут быть использованы магистрантами, аспирантами и специалистами в этой области.

ПРАКТИЧЕСКИЕ РЕКОМЕНДАЦИИ

Диссертационная работа носит теоретический характер, а полученные результаты дополняют теорию регуляризации не только интегральных уравнений Вольтерра первого рода в обобщенном смысле, но и теорию многомерных обратных задач. А также могут быть использованы при чтении спецкурсов в высших учебных заведениях.

СПИСОК ОПУБЛИКОВАННЫХ РАБОТ ПО ТЕМЕ ДИССЕРТАЦИИ

1. Алыбаев, А. М. Решение смешанной системы уравнений с условиями типа Гурса с обратным временем [Текст] / Т. Д. Омуров, А. М. Алыбаев // Вестник КГНУ: ЕТН – Бишкек, Серия 3. 2005. – Вып. 3. – С. 96-102.
2. Алыбаев, А. М. Обратно-нелокальная задача в неограниченной области, где вырождается неклассическое интегральное уравнение Вольтерра третьего рода [Текст] / Т. Д. Омуров, А. М. Алыбаев, К. Р. Джумагулов // – Москва. Наука, техника и образование, 2017. № 1(31). – С.10-15.
3. Alybaev, A. M. Solving of multidimensional inverse problem for differential equation of the third order in unbounded domain [Текст] / Т. D. Omurov, A. M. Alybaev, M. T. Omurov // VI Congress of the Turkic World Mathematical Society, Astana-Kazakhstan. October 2-5, 2017, P. 108.
4. Алыбаев, А. М. Двухскоростные задачи с обратным временем для уравнений переноса типа Каца [Текст] / Т. Д. Омуров, А. М. Алыбаев, Ж. Саркелова // Журнал – Переяслав-Хмельницкий, 2019. – Вып. 11(55). ч. 8. – С.31-39.
5. Алыбаев, А. М. Решение многомерной обратной задачи для нелинейного дифференциального уравнения в неограниченной области [Текст] / А. М. Алыбаев, М. Т. Омуров, Бузурман кызы Ж., Г. Ж. Белгожоева // Актуальные научные исслед. в современном мире. – Переяслав-Хмельницкий, 2020. – Вып. 2(58). ч. 2. – С. 107-116.
6. Alybaev, A. M. Solution of multidimensional inverse problem for third-order differential equation [Текст] / Т. D. Omurov, A. M. Alybaev, M. T. Omurov // Advances in Differential Equations and Control Processes, 2020. Vol. 23 (2). – С 125-137.

7. Alybaev, A. M. Regularization method in conditionally well-posed inverse problems degenerating in the first kind Volterra equations [Текст] / A. M. Alybaev // Advances in Differential Equations and Control Processes, 2021. Vol. 24(2). – С 187-198.
8. Alybaev, A. M. Regularization of conditionally well-posed inverse problems degenerating in the first kind Volterra equations [Текст] / T. D. Omurov, A. M. Alybaev // KMS: Theses of International Scientific Conference "Problems of Modern Mathematics and ITS Applications" Kyrgyzstan, Bishkek-Issyk-Kul, 16-19 June. 2021, P. 94.
9. Алыбаев, А. М. Регуляризация обратных задач в неограниченной области посредством преобразования Фурье [Текст] / А. М. Алыбаев, Д. Н. Шабданов // Актуальные научные исследования в современном мире. – Переяслав-Хмельницкий, 2021. №2-8(70). – С. 9-13.
10. Alybaev, A. M. Regularization of a system of the first kind Volterra incorrect two-dimensional equations [Текст] / T. D. Omurov, A. M. Alybaev // Advances in Differential Equations and Control Processes, 2022. Vol. 27/ – С. 149-162.
11. Алыбаев, А. М. Регуляризация некорректного интегрального уравнения Вольтерра первого рода [Текст] / А. М. Алыбаев // Бюллетень науки и практики. – Нижневартовск, 2022. – Т. 8. № 7. – С. 29-40.
12. Алыбаев, А. М. Регуляризация обратной задачи с оператором гиперболического типа, где вырождается некорректное уравнение Вольтерра первого рода [Текст] / А. М. Алыбаев // Международный журнал прикладных и фундаментальных исследований. – М.: Акад. Естественных наук, 2022. № 7. – С. 57-71.
13. Алыбаев, А. М. Регуляризация обратной задачи в неограниченной области, вырождающаяся некорректное уравнение Вольтерра первого рода с неклассическим пределом интегрирования [Текст] / А. М. Алыбаев // Вестник КНУ им. Ж. Баласагына. – Бишкек, 2023. №3(111). – С. 366-385.
14. Алыбаев, А. М. Методы регуляризации обратных задач, где вырождаются некорректные интегральные уравнения Вольтерра первого рода [Текст] / Т. Д. Омуров, А. М. Алыбаев / КНУ им. Ж. Баласагына. – Бишкек, 2023. – 196 с.
15. Алыбаев, А. М. Регуляризация обратной задачи типа Аллера, где вырождается нелинейное уравнение Вольтерра первого рода [Текст] / Т. Д. Омуров, А. М. Алыбаев // Изв. НАН КР. – Бишкек: Илим, 2023. № 3. – С. 7-28.
16. Alybaev, A. M. Regularization in the generalized sense of the loaded inverse problem of Korteweg De Vries type degenerating to the incorrect Volterra equation of the first kind [Текст] / A. M. Alybaev // VII. International TWMS Congress. Turkestan (Kazakhstan). September 20-23, 2023. P. 1

Алыбаев Анарбек Масалбековичтин 01.01.02 – дифференциалдык теңдемелер адистиги боюнча физика - математикалык илимдердин доктору окумуштуу даражасын изденип алуу үчүн "Вольтеррдин биринчи түрдөгү туура эмес коюлган интегралдык теңдемелери пайда болуучу, тескери маселелерди регуляризациялоо" темасындагы диссертациялык ишинин

РЕЗЮМЕСИ

Негизги сөздөр: өзгөчө маанидеги регуляризациялоо, Вольтеррдин биринчи түрдөгү интегралдык теңдемеси, дифференциалдык теңдеме, тескери маселе, туура эмес коюлган маселе, сингулярдуу өзгөчө функция.

Изилдөөнүн объектин: гиперболалык, параболалык типтеги тескери маселелер жана Кортвега-Де Фриза теңдемелери.

Изилдөөнүн предмети: диссертациялык иште интегралдоо пределдери ар-түрдүү болгон Вольтеррдин биринчи түрдөгү туура эмес коюлган сызыктуу эмес интегралдык теңдемелеринин жана чыгарылыштары терс эмес болгон Дирактын функциясы менен байланышкан Вольтеррдин биринчи түрдөгү интегралдык теңдемелери пайда болуучу тескери маселелердин чыгарылыштарынын жалгыздыгынын жана регуляризацияланышынын суроолору изилденген.

Изилдөөнүн максаты: көрсөтүлгөн суроолор Вольтеррдин биринчи түрдөгү интегралдык теңдемелерине карата эквиваленттүүлүктөрү эсепке алынып киргизилген Вольтеррдин биринчи түрдөгү интегралдык теңдемелеринин параметрленген интегралдык теңдемелеринин негизинде далилденген. Мында параметрленген интегралдык теңдемелердин чыгарылышы кичине параметрге салыштырмалуу атайын сингулярдуу функцияны камтыган асимптотикалык мүнөздөгү көрүнүш түрүндө изделет.

Изилдөөнүн ыкмалары: интегралдык өзгөртүүлөр ыкмасы, өзгөчөлөнгөн маанидеги регуляризациялоо ыкмасы, функционалдык жана математикалык анализдин элементтери.

Изилдөөнүн илимий жаңылыгы: изилдөөлөрдүн сунушталган алгоритмдери резольвенталар теориясынын негизинде операторлордун жарым-жартылай кайрылууларынын мүмкүнчүлүктөрүн гана жаратпастан, алар интегралдык теңдемелердеги кичине параметрге салыштырмалуу сингулярдуулуктарды жымсалдоочу бааларды аныктоону кепилдешет.

Колдонуу боюнча сунуштар: Алынган илимий натыйжаларды, коректүү эмес 1-ВИТ келип чыкканда, тескери маселелерди изилдөөдө колдонууну сунуштайбыз.

Колдонуу чөйрөсү: натыйжалар жалпыланган маанидеги 1-ВИТ-инин гана эмес, СӨФ-лар классында чыгарылышы менен көп өлчөмдүү 1-ВИТ-лер келип чыккан көп өлчөмдүү ТМ-дин регуляризация теориясына дагы толуктайт.

РЕЗЮМЕ

диссертации Алыбаева Анарбека Масалбековича на тему «Регуляризация обратных задач, где вырождаются некорректные интегральные уравнения Вольтерра первого рода», представленной на соискание ученой степени доктора физико-математических наук по специальности 01.01.02 – дифференциальные уравнения, динамические системы и оптимальное управление.

Ключевые слова: регуляризация в обобщенном смысле, интегральное уравнение Вольтерра первого рода, дифференциальное уравнение, обратная задача, некорректная задача, сингулярная обобщенная функция.

Объект исследования: обратные задачи гиперболического, параболического типов и уравнение Кортевега-Де Фриза.

Предмет исследования: в диссертационной работе исследованы вопросы единственности решения и регуляризуемости в обобщенном смысле некорректных нелинейных интегральных уравнений Вольтерра первого рода (ИУВ-1) с различными пределами интегрирования, и обратные задачи (ОЗ), вырождающиеся в ИУВ-1 с неотрицательными решениями, связанные с функцией Дирака.

Цель работы: Исследования вопросов единственности решения и регуляризуемости в обобщенном смысле некорректных нелинейных интегральных уравнений Вольтерра первого рода с различными пределами интегрирования, и обратные задачи.

Методы исследования и аппаратура: метод интегральных преобразований, метод регуляризации в обобщенном смысле, элементы функционального и математического анализа.

Полученные результаты и новизна: доказаны на основе параметризованных ИУ, введенные с учетом эквивалентных ИУВ-1, которые следуют из заданных ИУВ-1. При этом решение параметризованного ИУ ищется в виде представления асимптотического характера, где содержится специальная сингулярная функция относительно малого параметра.

Рекомендации по использованию: Рекомендуем использовать полученные научные результаты при исследовании обратных задач, где вырождаются некорректные интегральные уравнения Вольтерра первого рода.

Область применения: полученные результаты работы дополняют теорию регуляризации не только ИУВ-1 в обобщенном смысле, но и теорию многомерных ОЗ, где вырождаются многомерные ИУВ-1 с решениями в классе СОФ.

SUMMARY

Dissertation of Alybaev Anarbek Masalbekovich on the topic "Regularization of inverse problems where non-correct Volterra integral equations of the first kind degenerate" submitted for the degree of Doctor of Physical and Mathematical Sciences on specialty 01.01.02 – Differential equations, dynamical systems and optimal control.

Keywords: regularization in the generalized sense, Volterra integral equation of the first kind, differential equation, inverse problem, incorrect problem, singular generalized function.

Object of research: inverse problems of hyperbolic, parabolic types and Cortevag-DE Vries equations.

Subject of research: the doctoral thesis researches the questions of uniqueness of the solution and regularizability in the generalized sense of incorrect nonlinear Volterra integral equations of the first kind (VIE-1) with different limits of integration, and inverse problems (IPs) degenerating to VIE-1 with solutions in the class of singular generalized functions (SGFs).

Aim of research: method of integral reorganization, method of regularization in general sense, elements of functional and math analysis.

Research methods: method of integral transformations, method of regularization in the generalized sense, elements of functional and mathematical analysis.

The obtained results and novelty: the above questions proved on the basis of parameterized integral equation (IEs), introduced by considering equivalent VIE-1s that follow from the given VIE-1s. In result, the solution of the parameterized IE is sought in the form of presentation of asymptotic character, which contains a special singular function with respect to a small parameter. Notably, the proposed research algorithms create not only possibilities of partial operator reversal based on the resolvent theory, but also guarantee to carry out evaluations smoothing singularities with respect to a small parameter in the IEs which follow from transformed IEs with a small parameter, taking into account the method of singular perturbations in those spaces which are introduced in the research. Thus, on the basis of the proposed regularization method the regularizability of the studied non-correct VIE-1s and IPs in the introduced spaces can be proved in a generalized sense.

Recommendations for use: We recommend to use the obtained scientific results in the study of inverse problems where non-correlated Volterra integral equations of the first kind degenerate.

Scope: The obtained results complement the theory of regularization not only for the SIV-1 in the generalized sense, but also for the theory of multivariate OZ, where multivariate SIV-1 with solutions in the SOF class degenerate.

Подписано к печати 03.11.23
Формат 148x210
Офисная печать. Объем 2,8 п.л.
Тираж 60 экз. Заказ 15
Отпечатано в оперативной полиграфии
«CastlePrint.kg», ИП Отаназаров Санжар
г. Бишкек, пр. Чуй 254