2024-17

Институт математики
Национальной академии наук Кыргызской Республики
Кыргызский национальный университет имени Ж. Баласагына

Диссертационный совет Д 01.22.647

На правах рукописи
УДК 515.12

Алтыбаев Нургазы Ысмайылович

Свойства типа равномерной паракомпактности

01.01.04 - геометрия и топология

Автореферат

диссертации на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук

Бишкек - 2024

Работа выполнена в лаборатории топологии и функционального анализа Института математики Национальной академии наук Кыргызской Республики

Научный руководитель: **Канетов Бекболот Эменович,** доктор физико-математических наук, профессор, заведующий кафедры алгебры, геометрии, топологии и преподавания высшей математики им. академика А. А. Борубаева Кыргызского национального университета им. Ж. Баласагына.

Официальные оппоненты: **Бешимов Рузиназар Бебутович,** доктор физико-математических наук, профессор, профессор кафедры геометрии и топологии Национального университета Республики Узбекистана им. М. Улугбека.

Аблабекова Чынара Азисовна, кандидат физико-математических наук, доцент, доцент кафедры программной инженерии Международного университета Кыргызстана.

Ведущая организация: Кафедра алгебры и геометрии Ошского государственного университета, 723500, г. Ош, ул. Ленина, 331

Защита состоится 20 марта 2024 года в 14:00 на заседании диссертационного совета Д 01.22.647 по защите диссертаций на соискание ученой степени доктора (кандидата) физико-математических наук при Институте математики Национальной академии наук Кыргызской Республики и Кыргызском национальном университете имени Ж. Баласагына по адресу: Кыргызская Республика, 720071, г. Бишкек, проспект Чуй 265-а, кабинет 374.

Идентификатор защиты – https://vc1.vak.kg/b/012-ltf-b7j-lgy.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеках Национальной академии наук Кыргызской Республики (720071, г. Бишкек, проспект Чуй, 265а), и Кыргызском национальном университете имени Ж. Баласагына, (720033, г. Бишкек, ул. Фрунзе, 547) и на сайте www.vak.kg.

Автореферат разослан 19 февраля 2024 г.

Ученый секретарь диссертационного совета
кандидат физико-математических наук, доцент Шаршембиева Ф. К.

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА ИССЛЕДОВАНИЯ

Актуальность темы диссертации. Общепризнано, что паракомпакты и их типы образуют важнейшие классы топологических пространств и поэтому заманчивым является нахождение их равномерных аналогов.

Ранее были предложены различные варианты равномерной паракомпактности, сильной равномерной паракомпактности, счетно равномерной паракомпактности, равномерно вполне паракомпактности и равномерно суперпаракомпактности.

М.Д. Райс ввел и исследовал класс равномерно R-паракомпактных пространств. З. Фролик ввел и изучил класс равномерно F-паракомпактных пространств. А.А. Борубаев ввел и развил класс равномерно B-паракомпактных пространств. Д. Бухаджер и Б.А. Пасынков определили и изучили классы равномерно P-паракомпактных пространств. Л.В. Апарина предложила и исследовала классы равномерно A-паракомпактных пространств. А. Хохти ввел и исследовал равномерно гипокомпактные и пара-Линделёфовы пространства. Д.К. Мусаев ввел и изучал классы равномерно суперпаракомпактных, равномерно вполне паракомпактных и сильно равномерно R-паракомпактных пространств. Б.Э. Канетов предложил и развил классы сильно равномерно K-паракомпактных пространств. Счетная равномерная паракомпактность исследовалась У. Маркони. Известно, что все они обладают теми или иными недостатками. Например, не полные метризуемые равномерные пространства не являются равномерно R-паракомпактными, однако они являются равномерно B-паракомпактными. Равномерно P-паракомпактные пространства не характеризуются через компактные расширения. Наиболее предпочтительным является класс равномерно B-паракомпактных пространств в смысле А.А. Борубаева. Он содержит, во-первых, класс всех метризуемых равномерных пространств и, во-вторых, класс всех равномерно перистых пространств тем более равномерно полные в смысле Чеха пространств. Этими подклассами равномерно B-паракомпактных пространств, т.е. с равномерно перистыми и равномерно полными в смысле Чеха пространствами тесно связана проблема А.А. Борубаева: Какие равномерные пространства могут быть совершенно отображены на (полные) сепарабельно метризуемые пространства? В теории равномерных паракомпактов особый интерес представляет задача о выделении и исследовании тех равномерных свойств, которые для любого конечно аддитивного открытого покрытия ω мощности $\leq \mu$ обладают равномерно непрерывным ω-отображением на некоторое метризуемое пространство. Эта проблема поставлена Б.А. Пасынковым. Л. Кочинацу принадлежит задача: Является ли всякое равномерно μ-паракомпактное пространство μ-полным? Особый интерес эта задача приобрела после того, как выяснилось, что равномерно $\mu - R$ - паракомпакты - это в точности те пространства, в которых всякий слабый фильтр Коши, имеющий базу мощности $\le \mu$, имеет точку прикосновения.

Одним из основных методов теоретико-множественной топологии является метод взаимной классификации пространств и отображений. Его суть отражена в следующей общей проблеме А.А. Борубаева: Распространить некоторые понятия и утверждения, касающихся в теории равномерных пространств на их отображения.

Таким образом, нахождение равномерных аналогов паракомпактных типов топологических пространств и непрерывных отображений, и решения отмеченных проблем являются актуальными.

Связь темы диссертации с крупными научными программами (проектами) и основными научно-исследовательскими работами.

Диссертация выполнена в рамках проектов НИР Института математики НАН КР: «Развитие асимптотических, топологических и аналитических методов в теории равномерных, топологических и кинематических пространств, эволюционных систем, оптимизационных экономических задач, математическом моделировании» (2018-2020), номер гос. регистрации 0007664, «Исследование важнейших классов топологических и кинематических пространств, дифференциальных и интегро-дифференциальных уравнений и разработка математических моделей экономических систем» (2021-2023), номер гос. регистрации 0007664, и включена в соответствующие отчеты по этим проектам.

Цель и задачи исследования. Найти и исследовать равномерные аналоги паракомпактных типов топологических пространств и их отображений.

Для достижения цели определены следующие задачи:

- Найти и исследовать равномерные аналоги сильно паракомпактных и μ -паракомпактных пространств и их основные свойства;
- Исследовать те равномерные пространства, которые для любого конечно аддитивного открытого покрытия ω мощности $\le \mu$ обладают равномерно непрерывным ω -отображением на некоторое метризуемое пространство;
- Найти класс равномерных пространств, допускающих совершенное отображение на (полное) сепарабельно метризуемое пространство;
- Установить связь между равномерно $\mu - R$ - паракомпактными и μ - полными пространствами.
- Распространить на отображения равномерно паракомпактных типов пространств.

Научная новизна работы. Впервые определены новые подходы к определению сильной и равномерной μ -паракомпактности равномерных пространств. Даны ответы на ряд проблем, поставленных А.А. Борубаевым, Б.А. Пасынковым и Л. Кочинацом. Распространены на отображения некоторые типы равномерно паракомпактных пространств.

Практическая значимость полученных результатов диссертационной работы состоит в том, что полученные результаты могут быть использованы в общей и в равномерной топологии, а также при чтении лекций и теоретических курсов по топологии.

Основные положения диссертации, выносимые на защиту:

- Нахождение равномерных аналогов сильно паракомпактных и μ - паракомпактных пространств и их основные свойства.
- Установление характеристик равномерно μ -паракомпактных пространств посредством ω-отображений.
- Нахождение класса равномерных пространств, допускающих совершенное отображение на полное сепарабельно метризуемое пространство.
- Нахождение класса равномерных пространств, допускающих совершенное отображение на сепарабельно метризуемое пространство.
- Установление связи между равномерно $\mu - R$-паракомпактными и μ- полными пространствами.
- Распространение на отображения равномерно паракомпактных типов пространств.

Личный вклад соискателя. Цели и задачи исследования диссертации поставлены научным руководителем Б.Э. Канетовым. В диссертацию включены материалы, которые принадлежат автору.

Апробация результатов диссертации. Основные результаты исследования докладывались на:

- III, IV Борубаевских чтениях (г. Бишкек, 2019, 2022);
- Международной научной конференции «IV International Conference of Mathematical Sciences» (ICMS) (г. Стамбул, Турция, 2020);
- Международной научной конференции «Analysis, Topology and Applications» (ATA 22) (г. Врнячка-Баня, Сербия, 2022);
- III Международной научной конференции «Актуальные проблемы и инновации в науке и образовании», приуроченной к юбилею член-корр. НАН КР Р. М. Султаналиевой (г. Бишкек, 2023);
- Международной конференции «Актуальные проблемы математики и образования», посвященной 80-летию со дня рождения член-корр. НАН КР К.А. Алымкулова (г. Ош, 2023);

- Научном семинаре академика Борубаева А.А. (г. Бишкек, Институт математики НАН КР, 2023).

Полнота отражения результатов диссертации в публикациях. Основные результаты диссертации опубликованы в статьях [1-6], приведенных в конце автореферата. В совместных статьях [1-4] постановка задачи и обсуждение результатов принадлежат научному руководителю, а все полученные результаты - соискателю. Статьи [1 - 3] входят в базу данных Web of Science и Scopus, статьи [4 - 6] входят в базу данных РИНЦ КР.

Структура и объем диссертации. Диссертация состоит из перечня условных обозначений, введения, трех глав, выводов, списка использованных источников из 74 наименований. Нумерация разделов - тройная: первая цифра указывает на номер главы, вторая - на номер раздела в главе, третья - на порядковый номер в разделе. Объем текста 97 страниц.

ОСНОВНОЕ СОДЕРЖАНИЕ ДИССЕРТАЦИИ

Краткое содержание диссертации. Во введении дано обоснование актуальности темы, общая характеристика работы, цель и задачи исследования, научная новизна, практическая значимость, основные положения, выносимые на защиту.

Первая глава «Обзор литературы» содержит краткий анализ основных этапов развития теоретико-множественной топологии, связанной с тематикой настоящей диссертации.

Вторая глава «Материал и методы исследования» состоит из четырех разделов. В разделе 2.1. «Объект и предмет исследования» приведены объекты и предметы исследования: Объект исследования - Теоретико-множественная топология. Предмет исследования - Равномерные пространства и равномерно непрерывные отображения.

В разделе 2.2. «Основные методы исследования в равномерных пространствах» подробно изложены используемые в данной диссертации методы: метод покрытий, метод фильтров Коши и метод спектров. В разделе 2.3. «Основные методы исследования в равномерно непрерывных отображениях» также подробно изложен используемый в данной диссертации метод взаимной классификации пространств и отображений. В заключении второй главы отмечено о возможности и целесообразности решения конкретно поставленных задач изложенными в диссертации методами.

Третья глава «Свойства типа равномерной паракомпактности» состоит из семи разделов. В этой главе в соответствии с намеченными проблемами вводятся равномерные аналоги сильно паракомпактных и μ-паракомпактных пространств и изучается их связь с другими свойствами типа равномерной паракомпактности. Кроме того, в этой главе исследуются специфическое

равномерностное свойство – свойство полноты, точнее индекс полноты полных равномерных пространств и u-равномерная перистость равномерных пространств. Следует отметить, что свойство u-равномерной перистости также может рассматриваться как свойство полноты. Также вводятся и изучаются равномерно F-паракомпактные, сильно равномерно F-паракомпактные и счетно равномерно F-паракомпактные отображения.

В разделе «Равномерно F-паракомпактные и сильно равномерно F-паракомпактные пространства» вводятся и исследуются сильно равномерно F-паракомпактные пространства. Изучена их связь с другими свойствами типа равномерной паракомпактности, а также даются характеризации рассматриваемых свойств пространств при помощи их конечно аддитивных открытых покрытий, отображений и компактификаций.

Основные результаты этого раздела таковы:

Покрытие α равномерного пространства (X,U) называется равномерно σ-дискретным, если оно представляется в виде объединения счетного числа равномерно дискретных семейств, а семейство λ называется равномерно дискретным, если существует равномерное покрытие $\beta \in U$ такое, что $|St(B,\lambda)| \le 1$ для всех $B \in \beta$.

Напомним, что равномерное пространство (X,U) называется равномерно F-паракомпактным, если в каждое его открытое покрытие можно вписать равномерно σ-дискретное открытое покрытие. Равносильное определение в духе Тамано: для любой компактификации bX пространства (X,τ_U) и любого компакта $K \subset bX \setminus X$ существует равномерно σ-дискретное открытое покрытие β такое, что $[B]_{bX} \cap K = \varnothing$ для любого $B \in \beta$.

Характеристика равномерно паракомпактных пространств в смысле З. Фролика при помощи конечно аддитивных открытых покрытий дана в следующей теореме.

Теорема 3.1.1. Равномерное пространство равномерно F-паракомпактно в том и только в том случае, когда в каждое его конечно аддитивное открытое покрытие можно вписать равномерно σ-дискретное открытое покрытие.

Следующее утверждение показывает широту данного класса равномерных пространств.

Предложение 3.1.1. Каждое метризуемое равномерное пространство равномерно F-паракомпактно.

В следующей теореме дается характеристика рассматриваемого равномерного паракомпакта при помощи ω-отображений.

Теорема 3.1.2. Равномерное пространство (X,U) является равномерно F-паракомпактным тогда и только тогда, когда для каждого открытого покрытия ω пространства (X,U) существует равномерно непрерывное ω-отображение f пространства (X,U) на некоторое метризуемое пространство (Y,V).

Звездно конечные и равномерно σ-дискретные покрытия будем называть равномерно звездно конечными покрытиями.

Равномерное пространство (X,U) называется сильно равномерно F-паракомпактным, если в каждое его открытое покрытие можно вписать равномерно звездно конечное открытое покрытие.

Предложение 3.1.2. Если пространство (X,U) сильно равномерно F-паракомпактно, то топологическое пространство (X,τ_U) сильно паракомпактно. Обратно, если тихоновское пространство (X,τ) сильно паракомпактно, то (X,U_X) сильно равномерно F-паракомпактно, где U_X – универсальная равномерность.

Предложение 3.1.3. Каждое сильно равномерно F-паракомпактное пространство равномерно F-паракомпактно.

Следующая теорема является характеристикой сильно равномерно F-паракомпактных пространств при помощи конечно аддитивных покрытий.

Теорема 3.1.3. Равномерное пространство сильно равномерно F-паракомпактно, в том и только в том случае, когда в каждое его конечно аддитивное открытое покрытие можно вписать равномерно звездно конечное открытое покрытие.

Пусть bX – некоторая компактификация пространства (X,τ_U).

Теорема 3.1.4. Для того, чтобы пространство (X,U) было сильно равномерно F-паракомпактным необходимо и достаточно, чтобы для любого компакта $K \subset bX \setminus X$ существовало равномерно звездно конечное открытое покрытие β, удовлетворяющее условию: $[B]_{bX} \cap K = \varnothing$ для любого $B \in \beta$.

Теорема 3.1.4 является характеристикой сильно равномерно F-паракомпактных пространств в терминах их расположения в компактификациях.

Внешняя характеристика сильно равномерно F-паракомпактных пространств дана в следующей теореме.

Теорема 3.1.5. Равномерное пространство (X,U) сильно равномерно F-паракомпактно в том и только в том случае, когда оно равномерно F-паракомпактно и топологическое пространство (X,τ_U) сильно паракомпактно.

Предложение 3.1.4. Каждое сильно равномерно B-паракомпактное пространство сильно равномерно F-паракомпактно.

Предложение 3.1.5. Каждое сепарабельно метризуемое равномерное пространство сильно равномерно F-паракомпактно.

Характеристика сильно равномерно F-паракомпактного пространства при помощи ω-отображений дана в следующей теореме.

Теорема 3.1.6. Равномерное пространство (X,U) является сильно равномерно F-паракомпактным тогда и только тогда, когда для каждого открытого покрытия ω пространства (X,U) существует равномерно непрерывное ω-отображение f равномерного пространства (X,U) на некоторое сильно паракомпактное метризуемое равномерное пространство (Y,V).

Дискретное пространство (X,U_D) мощности $\tau \geq \aleph_0$ является сильно равномерно F-паракомпактным, однако оно не является компактным.

Предложение 3.1.7. Каждое равномерно локально компактное пространство сильно равномерно F-паракомпактно.

Сильная равномерная F-паракомпактность не является равномерным инвариантом относительно равномерно совершенных отображений. Однако, как следующая теорема показывает, что этот класс сохраняется в сторону прообраза при совершенных отображениях.

Теорема 3.1.7. Прообраз сильно равномерно F-паракомпактного пространства при совершенных отображениях сильно равномерно F-паракомпактен.

Следствие 3.1.4. Прообраз сильно равномерно F-паракомпактного пространства при равномерно совершенных отображениях сильно равномерно F-паракомпактен.

Следующая теорема является равномерным аналогом теоремы В.И. Пономарева о сохранении сильной паракомпактности в сторону образа открытыми совершенными отображениями.

Теорема 3.1.8. Образ сильно равномерно F-паракомпактного пространства при равномерно открытых равномерно совершенных отображениях является сильно равномерно F-паракомпактным.

Теорема 3.1.9. Пусть (X,U) – $\aleph_0$-ограниченное равномерное пространство. Тогда следующие условия равносильны:

1. (X,U) – сильно равномерно F-паракомпактно;
2. (X,U) – равномерно F-паракомпактно;
3. (X,τ_U) – линделёфово.

В разделе «Равномерно $\mu-R$-паракомпактные пространства» изучаются равномерно $\mu-R$-паракомпактные пространства. Устанавливаются характеристики этих классов пространств, при помощи конечно аддитивных открытых покрытий мощности $\leq \mu$. Также вводятся и исследуются сильно μ-полные и сильно μ-полные по Дьедонне пространства. Кроме того, решается задача о связях равномерно $\mu-R$-паракомпактных и μ-полных пространствах.

Равномерное пространство (X,U) называется равномерно $\mu-R$ - паракомпактным, если в каждое его конечно аддитивное открытое покрытие α мощности $\leq\mu$ пространства (X,U) можно вписать равномерно локально конечное открытое покрытие β.

Следующая теорема является внутренней характеристикой равномерно $\mu-R$-паракомпактных пространств.

Теорема 3.2.1. Равномерное пространство (X,U) равномерно $\mu-R$ - паракомпактно тогда и только тогда, когда $\alpha^{\angle}\in U$ для любого открытого покрытия α мощности $\leq\mu$ пространства (X,U).

Характеризация равномерно $\mu-R$ -паракомпактных пространств при помощи конечно аддитивных счетных открытых покрытий дается в следующей теореме.

Теорема 3.2.2. Равномерное пространство (X,U) является равномерно $\mu-R$-паракомпактным в том и только в том случае, когда любое конечно аддитивное открытое покрытие мощности $\leq\mu$ пространства (X,U) является равномерным покрытием.

Как показывает следующая теорема, в отличие от сильно равномерно F-паракомпактных пространств равномерно $\mu-R$-паракомпактность является равномерным инвариантом относительно равномерно совершенных отображений.

Теорема 3.2.3. Если $f:(X,U)\to(Y,V)$ равномерно совершенное отображение (X,U) в (Y,V), тогда равномерно $\mu-R$ -паракомпактность сохраняется в обе стороны.

Напомним, что пространство (X,U) называется равномерно локально μ-компактным, если равномерность U содержит покрытие, замыкание каждого элемента которого μ-компактно.

Предложение 3.2.3. Каждое равномерно локально μ -компактное пространство является равномерно $\mu-R$-паракомпактным.

Следствие 3.2.5. Каждая локально μ-компактная топологическая группа является μ-паракомпактной.

Фильтр F в (X,U) называется слабым фильтром Коши, если для любого $\alpha\in U$ найдется такой элемент $A\in\alpha$, что $A\cap L\neq\varnothing$ для любого $L\in F$.

Равномерное пространство называется сильно полным, если всякий слабый фильтр Коши в нем сходится.

Равномерное пространство (X,U) называется сильно μ -полным, если всякий слабый фильтр Коши F в (X,U), имеющий базу мощности $\leq\mu$, сходится к некоторой точке $x\in X$ в (X,U). Сильно $\aleph_0$-полные пространства называются сильно секвенциально полными.

Предложение 3.2.6. Каждое сильно полное пространство сильно μ - полно.

Предложение 3.2.7. Всякое сильно μ-полное пространство μ-полно.

В следующей теореме устанавливается эквивалентность двух понятий сильно μ -полноты и равномерно $\mu-R$ -паракомпактности равномерных пространств.

Теорема 3.2.4. Для равномерного пространства (X,U) следующие условия эквивалентны:

1. (X,U) - сильно μ-полно;
2. (X,U) - равномерно $\mu-R$-паракомпактно.

Следующая теорема является характеристикой μ -паракомпактных пространств при помощи универсальных равномерных структур.

Теорема 3.2.5. Топологическое пространство X является μ - паракомпактным в том и только в том случае, если равномерное пространство (X,U_X) с универсальной равномерностью U_X является сильно μ-полным.

Из теоремы 3.2.4 и предложения 3.2.7. следует следующая теорема

Теорема 3.2.6. Всякое равномерно $\mu-R$ -паракомпактное пространство μ-полно.

Теорема 3.2.6. является положительным решением проблемы, поставленной Л. Кочинацом: является ли всякое равномерно μ - паракомпактное пространство, μ-полным пространством ?

Тихоновское пространство X называется сильно μ-полным по Дьедонне пространством, если существует такая равномерность U, что (X,U) является сильно μ-полным.

Теорема 3.2.7. Тихоновское пространство X является сильно μ-полным по Дьедонне пространством тогда и только тогда, когда равномерное пространство (X,U_X) с универсальной равномерностью U_X является сильно μ-полным.

В разделе «Равномерно $\mu-P(B)$-паракомпактные и равномерно $\mu-F$-паракомпактные пространства» вводятся и исследуются равномерно $\mu-P(B)$-паракомпактные пространства. Класс равномерно $\mu-P(B)$ -паракомпактных пространств интересен главным образом тем, что они для любого (конечно аддитивного) открытого покрытия мощности $\leq\mu$ обладают равномерно непрерывным ω-отображением.

Равномерное пространство (X,U) называется равномерно $\mu-P(B)$ - паракомпактным, если для каждого (конечно аддитивного открытого покрытием λ мощности $\leq\mu$ пространства (X,U) существует такая последовательность равномерных покрытий $\{\alpha_n\}\subset U$. что выполняется условие:

(BP): для каждой точки $x\in X$, существуют номер $n\in N$ и элемент $L\in\lambda$ такие, что $\alpha_n(x)\subset L$.

Предложение 3.3.2. Каждое равномерно $\mu - R$ -паракомпактное пространство является равномерно $\mu - B$-паракомпактным.

Предложение 3.3.3. Каждое равномерно $P(B)$ -паракомпактное пространство равномерно $\mu - P(B)$-паракомпактно.

Предложение 3.3.4. Каждое метризуемое равномерное пространство является равномерно $\mu - P$-паракомпактным.

Предложение 3.3.5. Каждое компактное равномерное пространство является равномерно $\mu - P$-паракомпактным.

Следующая теорема является ответом к задаче Б.А. Пасынкова: Какие равномерные пространства для любого (конечно аддитивного) открытого покрытия мощности $\le \mu$ обладают равномерно непрерывным ω - отображением ?

Теорема 3.3.1. Равномерное пространство (X,U) является равномерно $\mu - P(B)$-паракомпактным тогда и только тогда, когда для каждого (конечно аддитивного) открытого покрытия ω мощности $\le \mu$ пространства (X,U) существовало равномерно непрерывное ω-отображение f пространства (X,U) на метризуемое равномерное пространство (X,U).

Предложение 3.3.6. Произведение $(X,U)\times(Y,V)$ - равномерно $\mu - P(B)$ - паракомпактного пространства (X,U) на компактное пространство (Y,V) равномерно $\mu - P(B)$-паракомпактно.

Теорема 3.3.2. Пусть $f:(X,U)\to(Y,V)$ - сильно равномерно открытое отображение равномерно $\mu - P(B)$ -паракомпактного пространства (X,U) на равномерное пространство (Y,V). Тогда пространство (Y,V) также является равномерно $\mu - P(B)$-паракомпактным.

В разделе 3.4. «Индекс полноты равномерных пространств и u - равномерно полных в смысле Чеха пространств» вводятся специальные виды индекса полноты полных равномерных пространств, а именно, D-индекс полноты полных равномерных пространств, который характеризует «степень полноты» полных равномерных пространств. Изучается поведение D - индекса полноты полных равномерных пространств при основных операциях над равномерными пространствами. В частности, дается решение проблемы А.А. Борубаева о классах равномерных пространств, допускающих совершенное отображение на полное сепарабельно метризуемое пространство.

Пусть D - свойство равномерных покрытий равномерных пространств (X,U). Свойства равномерных покрытий могут быть: покрытие кратности $\le n$, локально конечное покрытие, звездно конечное покрытие, точечно конечное покрытие, счетное покрытие и т.д.

Пусть (X,U) - равномерное пространство и $H\subset U$ - подсистема, состоящая из покрытий со свойством D. Равномерное пространство (X,U) называется $D-H$-полным, а система H называется полной, если всякий

H-фильтр Коши F имеет по крайней мере одну точку прикосновения, т.е. $\cap\{[M]: M\in F\}\neq\varnothing$.

Пусть (X,U) - полное равномерное пространство. Наименьшее кардинальное число τ называется D-индексом полноты равномерного пространства (X,U), если существует такая система $H\subset U$ со свойством D, что $|H|=\tau$ и (X,U) является $D-H$-полным.

D-индекс полноты равномерного пространства (X,U) обозначается через $D-ic(U)$. Пусть D - счетные покрытия. В этом случае D-индекс полноты равномерного пространства (X,U) обозначается через $c-ic(U)$.

Равномерное пространство (X,U) называется D-равномерно локально компактным, если существует равномерное покрытие со свойством D, состоящее из компактных подмножеств.

Пусть D - счетные покрытия. Такие D-равномерно локально компактные пространства будем называть c-равномерно локально компактными.

Предложение 3.4.1. Для полного равномерного пространства (X,U) следующие условия равносильны:

1. $D-ic(U)=1$;
2. (X,U) - D-равномерно локально компактно.

Следствие 3.4.1. Для полного равномерного пространства (X,U) следующие условия равносильны:

1. $c-ic(U)=1$;
2. (X,U) - c-равномерно локально компактно.

Предложение 3.4.2. Пусть $f:(X,U)\to(Y,V)$ - совершенное равномерно непрерывное отображение (X,U) на полное пространство (Y,V). Тогда (X,U) также полно и $c-ic(U)\le c-ic(V)$.

Равномерное пространство (X,U) называется u-равномерно полным по Чеху пространством, если оно полно и $c-ic(U)\le\aleph_0$.

Следующая теорема является решением вышепоставленной проблемы А.А. Борубаева: Какие равномерные пространства могут быть совершенно отображены на полные сепарабельно метризуемые пространства ?

Теорема 3.4.1. Для равномерного пространства (X,U) следующие условия эквивалентны:

1. (X,U) - u-равномерно полное по Чеху пространство;
2. (X,U) - отображается на некоторое полное сепарабельно метризуемое равномерное пространство (Y,V) посредством совершенного равномерно непрерывного отображения.

Предложение 3.4.3. Всякое u-равномерно полное по Чеху пространство является равномерно паракомпактным (в смысле Фролика).

Теорема 3.4.2. Для равномерного пространства (X,U) следующие условия эквивалентны:

1. (X,U) - u-равномерно полно по Чеху пространство;
2. $(\exp_c X, \exp_c U)$ - u-равномерно полно по Чеху пространство.

Хорошо известно, что П.С. Александрову принадлежит постановка задачи: Какие пространства могут быть совершенно отображены на метрические пространства? Необходимым свойством таких пространств является паракомпактность. Особый интерес проблема П.С. Александрова приобрела после того, как З. Фролик доказал, что необходимым и достаточным условием для того, чтобы полное по Чеху пространство совершенно отображалось на полное метрическое пространство, является его паракомпактность. С другой стороны, простые примеры показывают, что одно условие – паракомпактность не достаточно, чтобы его можно было совершенно отобразить на метрическое пространство. Общее решение проблемы П.С. Александрова, включающее, в частности, теорему З. Фролика позволило А.В. Архангельскому дать понятие перистого пространства.

Топологические свойства перистости и паракомпактности являются независимыми. Однако, в классе топологических групп свойство перистости влечет свойство паракомпактности. Аналогичные явления наблюдаются также в классе равномерных пространств, т.е. свойство равномерной перистости влечет свойство равномерной паракомпактности. Равномерно перистые пространства были введены и изучены А.А. Борубаевым. Равномерно перистые пространства достаточно широки, они содержат все компактные, равномерно локально компактные, равномерно полные в смысле Чеха пространства и метризуемые пространства.

В классе равномерных пространств общее решение проблемы принадлежит А.А. Борубаеву: Равномерно перистые пространства и только они являются образами метризуемых равномерных пространств при совершенных отображениях. Из этой теоремы следует теорема А.В. Архангельского о характеристике перистых паракомпактов как совершенных прообразов метрических пространств.

В 1995 году А.А. Борубаевым на одном его семинаре была поставлена задача: Какие равномерные пространства могут быть совершенно отображены на сепарабельно метризуемые пространства?

Поэтому весьма важно попытаться найти класс равномерных пространств, который мог бы совершенно отображен на сепарабельно метризуемые пространства.

Такой класс пространств, предлагается в разделе 3.5. «u-равномерно перистые пространства».

Равномерное пространство (X,U) называется u-равномерно перистым, если существует псевдоравномерность $P \subset U$, состоящая из счетных покрытий, удовлетворяющих условию:

1) $w(U) \le \aleph_0$;
2) $\cap\{\alpha(x) : \alpha \in P\} = K_x$ - компактно для любого $x \in X$;
3) Система $\{\alpha(K) : \alpha \in P\}$ является фундаментальной системой окрестностей K_x в (X, τ_U) для каждого $x \in X$.

Предложение 3.5.1. Любое компактное пространство (X,U) является u-равномерно перистым.

Предложение 3.5.2. Любое сепарабельно метризуемое пространство (X,U) является u-равномерно перистым.

Предложение 3.5.3. Если равномерное пространство (X,U) u-полно по Чеху, то (X,U) является u-равномерно перистым.

Теорема 3.5.1. Если для равномерного пространства (X,U) всякая такая псевдоравномерность $P \subset U$ является $\aleph_0$-ограниченной, тогда следующие условия эквивалентны:

1. Равномерное пространство (X,U) является u-равномерно перистым;
2. Равномерное пространство (X,U) является равномерно перистым.

Следующая теорема является решением второй проблемы А.А. Борубаева.

Теорема 3.5.2. Для равномерного пространства (X,U) следующие условия эквивалентны:

1. Равномерное пространство (X,U) является u-равномерно перистым;
2. Равномерное пространство (X,U) отображается на некоторое сепарабельно метризуемое равномерное пространство (Y,V) посредством совершенного равномерно непрерывного отображения.

Теорема 3.5.3. Для равномерного пространства (X,U) следующие условия эквивалентны:

1. (X,U) - u-равномерно перистое;
2. $(\exp_c X, \exp_c U)$ - u-равномерно перистое.

В последнее время многие понятия и утверждения теории равномерных пространств и равномерно непрерывных отображений были распространены с пространств на равномерно непрерывные отображения. Каждое равномерное пространство можно считать как простейшее равномерно непрерывное отображение этого пространства в одноточечное пространство.

Проведенные исследования выявили большие равномерные аналоги непрерывных отображений и позволили перенести на отображения многие основные утверждения равномерной топологии пространств, в работах А.А. Борубаева, Б.А. Пасынкова, А.С. Мищенко, А.А. Чекеева, Б.Э. Канетова и других. Метод распространения результатов с пространств на отображения является универсальным, и не простым, но позволяющий многие результаты обобщить. Поэтому задача перенесения некоторых понятий и утверждений, касающихся пространств на отображения, до сих пор не решена полностью.

В разделе 3.6. «Равномерно F-паракомпактные, сильно равномерно F-паракомпактные и счетно равномерно F-паракомпактные отображения» вводятся и изучаются равномерно F-паракомпактные и сильно равномерно F-паракомпактные и счетно равномерно F-паракомпактные отображения, и их основные свойства.

Вводится следующее:

Равномерно непрерывное отображение $f:(X,U)\to(Y,V)$ равномерного пространства (X,U) на равномерное пространство (Y,V) называется

(P_1) равномерно F-паракомпактным;

(P_2) сильно равномерно F-паракомпактным отображением, если для любого открытого покрытия α равномерного пространства (X,U) существуют такие открытое покрытие β равномерного пространства (Y,V) и

(p_1) равномерно σ-дискретное

(p_1) равномерно звездно конечное открытое покрытие γ пространства (X,U), что $f^{-1}\beta\wedge\gamma\succ\alpha$.

Теорема 3.6.1. Если $f:(X,U)\to(Y,V)$ - равномерно F-паракомпактное отображение, то непрерывное отображение $f:(X,\tau_U)\to(Y,\tau_V)$ является паракомпактным отображением. Обратно, если непрерывное отображение $f:(X,\tau)\to(Y,\mu)$ является паракомпактным отображением, то отображение $f:(X,U_X)\to(Y,V_Y)$ является равномерно F-паракомпактным отображением, где U_X и V_Y - универсальные равномерности на X и Y соответственно.

Теорема 3.6.2. Если $f:(X,U)\to(Y,V)$ - сильно равномерно F-паракомпактное отображение, то непрерывное отображение $f:(X,\tau_U)\to(Y,\tau_V)$ является сильно паракомпактным отображением. Обратно, если непрерывное отображение $f:(X,\tau)\to(Y,\mu)$ является сильно паракомпактным отображением, то отображение $f:(X,U_X)\to(Y,V_Y)$ является сильно равномерно F-паракомпактным отображением, где U_X и V_Y - универсальные равномерности на X и Y соответственно.

Следующие теоремы показывают, что при равномерно F-паракомпактных (соответственно, сильно равномерно F-паракомпактных, счетно равномерно F-паракомпактных) отображениях равномерно F-паракомпактные (соответственно, сильно равномерно F-паракомпактные, счетно равномерно F-паракомпактные) свойства сохраняются в сторону прообраза.

Теорема 3.6.3. Если отображение f и пространство (Y,V) - равномерно F-паракомпактны, то (X,U) является таким же.

Теорема 3.6.4. Если отображение f и пространство (Y,V) - сильно равномерно F-паракомпактны, то (X,U) является таким же.

Равномерно непрерывное отображение $f:(X,U)\to(Y,V)$ равномерного пространства (X,U) на равномерное пространство (Y,V) называется счетно равномерно F-паракомпактным, если для любого счетного открытого покрытия α равномерного пространства (X,U) существуют такие счетное открытое покрытие β равномерного пространства (Y,V) и равномерно σ-дискретное открытое покрытие γ пространства (X,U), что $f^{-1}\beta\wedge\gamma\succ\alpha$.

Теорема 3.6.5. Если отображение f и пространство (Y,V) - счетно равномерно F-паракомпактны, то (X,U) является таким же.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В данной диссертации:

- Найдены равномерные аналоги сильно паракомпактных и μ-паракомпактных пространств и установлены их основные свойства.
- Установлены характеристики равномерно μ-паракомпактных пространств посредством ω-отображений.
- Найден класс равномерных пространств, допускающих совершенное отображение на полное сепарабельно метризуемое пространство.
- Найден класс равномерных пространств, допускающих совершенное отображение на сепарабельно метризуемое пространство.
- Доказана μ-полнота равномерно μ–R-паракомпактных пространств.
- Распространены на отображения равномерно паракомпактные типы пространств.

В заключении автор выражает глубокую признательность и благодарность своему научному руководителю доктору физико-математических наук, профессору Канетову Бекболот Эменовичу за постановку проблем, постоянное внимание к работе и всестороннюю помощь.

ПРАКТИЧЕСКИЕ РЕКОМЕНДАЦИИ

Научные результаты диссертации могут быть применены в теории топологическх пространств и непрерывных отображений, в теории равномерных пространств и равномерно непрерывных отображений, в теории топологических и равномерных групп, в функциональном анализе, а также при чтении специальных курсов в вузах.

СПИСОК ОПУБЛИКОВАННЫХ РАБОТ ПО ТЕМЕ ДИССЕРТАЦИИ

1. Altybaev, N.I. On countably uniformly paracompact spaces. [Text] / D. Kanetova, N. Baigazieva, N.I. Altybaev // AIP Conference Proceedings. Melville, New York. – 2021. –Vol. 2334. – P. 020011-1 - 020011-4.

2. Altybaev N.I. Uniformly locally μ-compact spaces. [Text] / D. Kanetova, N. Baigazieva, N.I. Altybaev // AIP Conference Proceedings. Melville, New York. – 2022. – Vol. 2483. – P. 020005-1 – 020005-4.
3. Altybaev N.I. About uniformly μ -paracompact spaces. [Text] / B. Kanetov, N. Baigazieva, N.I. Altybaev // International Journal of Applied Mathematics (IJAM), Bulgaria, Sofia. – 2021. – Vol. 34., No. 2. – P. 353-361.
4. Altybaev N.I. On strong uniformly τ -finally paracompact spaces. [Text] / B. Kanetov, N.I. Altybaev, J. Anarbek k. // Bulletin of the Institute of Mathematics. National Acad. of. Science of the Kyrgyz Republic. – 2022. – Vol. 1. – P.56-63.
5. Алтыбаев Н.Ы. О равномерном аналоге счетно паракомпактных пространств. [Текст] / Н.Ы. Алтыбаев // Наука, новые технологии и инновации Кыргызстана. – 2023. – №3. – С. 3-6.
6. Алтыбаев Н.Ы. Полнота и равномерная паракомпактность. [Текст] / Н.Ы. Алтыбаев // Известия вузов Кыргызстана. – 2023. – №2. –С.3-7.

Алтыбаев Нургазы Ысмайыловичтин 01.01.04 - геометрия жана топология адистиги боюнча физика-математика илимдеринин кандидаты окумуштуулук даражасын алуу үчүн «Бир калыптуу паракомпактуулук типтеги касиеттер» деген темадагы диссертациясынын

РЕЗЮМЕСИ

Негизги сөздөр. Бир калыптуу мейкиндик, бир калыптуу үзгүлтүксүз чагылдыруу, бир калыптуу паракомпактуу мейкиндик, чектүү аддитивдүү ачык жабдуу, толук бир калыптуу мейкиндик, сепарабелдүү метризацияланган мейкиндик, жеткилең чагылдыруу, ω-чагылдыруу.

Изилдөөнүн объектиси. Теориялык -көптүктүк топология.

Изилдөөнүн предмети. Бир калыптуу мейкиндиктер жана бир калыптуу үзгүлтүксүз чагылдыруулар, топологиялык мейкиндиктер жана үзгүлтүксүз чагылдыруулар, топологиялык группалар.

Изилдөөнүн максаты. Топологиялык мейкиндиктердин жана алардын чагылдырууларынын паракомпактуу типтеринин бир калыптуу аналогдорун табуу жана изилдөө.

Изилдөөнүн усулдары жана аппаратура. Жабдуу ыкмасы, Кошинин фильтрлер ыкмасы, тескери спектрлер ыкмасы жана мейкиндиктерди жана чагылдырууларды өз-ара классификациялоо ыкмасы колдонулган.

Алынган жыйынтыктар жана алардын илимий жаңылыгы. Күчтүү бир калыптуу паракомпактуу жана бир калыптуу μ -паракомпактуу бир калыптуу мейкиндиктердин аныктамаларынын жаңы түрлөрү алгачкы жолу аныкталган, алардын башка бир калыптуу паракомпактуу касиеттер менен болгон байланыштары изилденген, ошондой эле бул бир калыптуу мейкиндиктердин касиеттери чектүү аддитивдүү ачык жабдуулар, чагылдыруулар жана компактификациялоо аркылуу мүнөздөмөлөрү берилген. Толук сепарабелдүү метризацияланган бир калыптуу мейкиндиктерге жеткилең чагылган жана сепарабелдүү метризацияланган бир калыптуу мейкиндиктерге жеткилең чагылган бир калыптуу мейкиндиктердин класстары табылган. Бир калыптуу мейкиндиктердин $\mu - R$-паракомпактуулугу μ -толук экендиги далилденген. Бир калыптуу паракомпактуу мейкиндиктердин айрым типтери бир калыптуу үзгүлтүксүз чагылдырууларга жайылтылган.

Пайдалануу даражасы же колдонуу боюнча сунуштар. Алынган натыйжалар бир калыптуумейкиндиктердин жана бир калыптуу үзгүлтүксүз чагылдыруулардын башка компактуулук жана паракомпактуулук типтерин табууда жана тургузууда пайдаланылышы мумкүн.

Колдонуу аймагы.Топологиялык мейкиндиктердин жана үзгүлтүксүз чагылдыруулардын, бир калыптуу мейкиндиктердин жана бир калыптуу үзгүлтүксүз чагылдыруулардын, топологиялык жана бир калыптуулук группалардын теориясы.

РЕЗЮМЕ

диссертации Алтыбаева Нургазы Ысмайыловича на тему: «Свойства типа равномерной паракомпактности» на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук по специальности 01.01.04 - геометрия и топология

Ключевые слова. Равномерное пространство, равномерно непрерывное отображение, равномерно паракомпактное пространство, конечно аддитивное открытое покрытие, полное равномерное пространство, сепарабельно метризуемое пространство, совершенное отображение, ω-отображение.

Объект исследования. Теоретико-множественная топология.

Предмет исследования. Равномерные пространства и равномерно непрерывные отображения, топологические пространства и непрерывные отображения, топологические группы.

Цель работы. Найти и исследовать равномерные аналоги паракомпактных типов топологических пространств и их отображений.

Методы исследования и аппаратура. Использованы метод покрытий, метод фильтров Коши, метод обратных спектров, метод взаимной классификации пространств и отображений.

Полученные результаты и их новизна. Впервые определены новые подходы к определению сильно равномерно паракомпактных и равномерно μ-паракомпактных равномерных пространств, изучена их связь с другими свойствами равномерной паракомпактности, а также даны характеризации этих свойств равномерных пространств при помощи их конечно аддитивных открытых покрытий, отображений и компактификаций данных равномерных пространств. Найдены класс равномерных пространств, допускающих совершенное отображение на полное сепарабельно метризуемое пространство и класс равномерных пространств, допускающих совершенное отображение на сепарабельно метризуемое пространство. Доказана μ-полнота равномерно $\mu-R$ -паракомпактных равномерных пространств. Распространены на равномерно непрерывные отображения некоторые типы равномерно паракомпактных пространств.

Рекомендации по использованию. Полученные результаты могут применяться для нахождения и установления характеристики других типов компактности и равномерной паракомпактности равномерных пространств и равномерно непрерывных отображений.

Область применения. Теория топологических пространств и непрерывных отображений, теория равномерных пространств и равномерно непрерывных отображений, теория топологических и равномерных групп.

SUMMARY

on the dissertation "Uniformly paracompact type properties" by Altybaev Nurgazy Ismailovich submitted for the degree of candidate of physical and mathematical sciences on specialty 01.01.04 - geometry and topology

Keywords. Uniform space, uniformly continuous mapping, uniformly paracompact space, finitely additive open cover, complete uniform space, separably metrizable space, perfect mapping, ω-mapping.

Object of research. Set theoretical topology.

Subject of research. Uniform space and uniformly continuous mapping, topologicalspace and continuous mapping, topological groups.

Aim of research. Find and investigate uniform analogues of paracompact types of topological spaces and their mappings.

Methodsofresearch. Coverings method, Cauchy filter method, inverse spectra method and mutual classification of spaces and mappings method are used.

Thescientific results and novelty. New ones identified for the first time approaches to the definition of strongly uniformly paracompact and uniformly μ-paracompact uniform spaces, their connection with other properties of uniform paracompactness is studied and characterizations of these properties of uniform spaces are given using their finitely additive open covers, mappings and compactifications of these uniform spaces. A class of uniform spaces is found that admit a perfect mapping onto a complete separably metrizable space and a class of uniform spaces admitting a perfect mapping onto a separably metrizable space. It is proved that a uniform $\mu-R$-paracompact space is μ-complete. Some types of uniformly paracompact spaces are extended to uniformly continuous mappings.

Recommendation so nusing. The results can be used to find and establish the characterizations of other types of compactness and uniformparacompactness of uniform spaces and uniformly continuous mappings.

Field of applications. Theory of topological spaces and continuous mappings, theory of uniform spaces and uniformly continuous mappings, theory of topological and uniform groups.

ПЕРЕЧЕНЬУСЛОВНЫХОБОЗНАЧЕНИЙ, СИМВОЛОВ, ЕДИНИЦ, ТЕРМИНОВ, СОКРАЩЕНИЙ

"$\in$" – знак теоретико-множественной принадлежности.

"$\subset$" – знак теоретико-множественного включения.

"$\cap$" – знак теоретико-множественного пересечения.

$|\,|$ – мощность множества.

N – множество всех натуральных чисел.

R – множество всех вещественных чисел.

$\aleph_0$ – счетное кардинальное число.

$\{A\}$ – семейство, состоящее из множества A.

$\{y\}$ – одноточечное множество.

$\alpha \wedge \beta$ –внутреннее пересечение покрытий α и β.

$St(H,\alpha) = \{A \in \alpha : H \cap A \neq \varnothing\}$.

$\alpha(H) = \cup St(H,\alpha)$.

$St(x,\alpha) = \{A \in \alpha : A \ni x\}$.

$\alpha(x) = \cup St(x,\alpha)$.

Символы $f : X \to Y$, $y = f(x)$ означают отображения множества X в множество Y.

$f\alpha = \{fA : A \in \alpha\}$.

$f^{-1}\beta = \{f^{-1}B : B \in \beta\}$.

$\alpha^{\angle} = \{\cup\alpha_0 : |\alpha_0| < \aleph_0\}$ –укрупнение покрытия α.

(X,U) – равномерное пространство.

U_X – универсальная равномерность.

(X,τ) – топологическое пространство.

$[A]_\tau$ – замыкание множества A относительно топологии τ.

τ_U – топология, индуцированная равномерности U.

$c - ic(U)$ – тип полноты.

ω-отображение – тип отображение.

$(G,\cdot,\tau)$ – топологическая группа.

$(\exp_c X, \exp_c U)$ – гиперпространства компактных подмножеств пространства (X,U).

bX – компактификация пространства (X,τ_U).

$bX \setminus X$ – нарост пространства (X,τ_U).

Подписано в печать 18 февраля 2024 года. Тираж 100 экз.
Формат 60 х 84/16. Объём 1,5 п.л.

Отпечатано в типографии "Айат".
г. Бишкек, ул. Ташкентская, 60