2023-06

Национальная академия наук Кыргызской Республики
Институт математики
Кыргызский Национальный Университет им. Ж. Баласагына

Диссертационный совет Д 01.22.647

На правах рукописи

УДК 517.956

Мукамбетова Айзат Темирбековна

Граничные обратные задачи для псевдопараболических уравнений

01.01.02 – дифференциальные уравнения, динамические системы и оптимальное управление

АВТОРЕФЕРАТ

диссертации на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук

Бишкек-2023

Работа выполнена на кафедре прикладной математики, информатики и компьютерных технологий Кыргызского национального университета им. Ж. Баласагына.

Научный руководитель:	**Аблабеков Бактыбай Сапарбекович**, доктор физико-математических наук, профессор, профессор кафедры прикладной математики, информатики и компьютерных технологий Кыргызского национального университета имени Ж. Баласагына.
Официальные оппоненты:	**Искандаров Самандар**, доктор физико-математических наук, профессор, заведующий лабораторией теории теории интегро-дифференциальных уравнений Института математики Национальной академии наук Кыргызской Республики.
	Эгембердиев Шайымбек Амантурович, кандидат физико-математических наук, доцент, доцент кафедры естественно-математических дисциплин Института повышения квалификации и переподготовки кадров имени М. Рахимова при Кыргызском государственном университете имени И. Арабаева.
Ведущая организация:	Кафедра информационных систем и программирования факультета математики и информационных технологий Ошского государственного университета, 723500, Кыргызстан, город Ош, улица Ленина , 331.

Защита диссертации состоится 16 июня 2023 года в 14:00 на заседании диссертационного совета Д 01.22.647 по защите диссертаций на соискание ученой степени доктора (кандидата) физико-математических наук при Институте математики Национальной академии наук Кыргызской Республики и Кыргызском Национальном университете имени Ж. Баласагына по адресу: Кыргызская Республика, 720071, г. Бишкек, проспект Чуй 265-а, кабинет 374.

Идентификатор защиты – https://vc1.vak.kg/b/012-ltf-b7j-lgy

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеках Национальной академии наук Кыргызской Республики (720071, г. Бишкек, проспект Чуй, 265-а), Кыргызского национального университета имени Ж. Баласагына, (720033, г. Бишкек, ул. Фрунзе, 547) и на сайте www.vak.kg.

Автореферат разослан 16 июня 2023 г.

Ученый секретарь диссертационного совета,
кандидат физико- математических наук, доцент Шаршембиева Ф. К

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Актуальность темы диссертации. Многие вопросы фильтрации жидкости в трещиновато-пористых средах, передачи тепла в гетерогенной среде, влагопереноса в почвогрунтах приводят к изучению начальных, начально-краевых (прямых) и обратных задач для псевдопараболических уравнений третьего порядка.

Например, движение уравнение фильтрации жидкости в трещиновато-пористой среде описывается следующим уравнением[1]:

$$\beta_0(x)D_t p(x,t) - div[\frac{k(x)}{\mu(x)} grad\, p(x,t) + \eta(x)\beta_0(x)D_t grad\, p(x,t)] = 0,$$

где $p(x,t)$ – искомая функция, характеризирующая давление жидкости в трещинах; $k(x)$ – коэффициент проницаемости трещин; $\beta_0(x)$ – коэффициент сжимаемости жидкости; $\mu(x)$ - вязкость жидкости, $\eta(x)$ – коэффициент пьезопроводности.

А. Ф. Чудновскийдин в своей монографии "Теплофизика почв" рассмотрел уравнение

$$\frac{\partial w}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x}\left[D(w)\frac{\partial w}{\partial x} + A\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial t}\right]$$

которое описывает движение влаги в капиллярно-пористых средах. Это уравнение называется модифицированным уравнением диффузии или уравнением Аллера. Здесь w - влажность, x – глубина, t – время, A – варьируемый параметр, $D(w) = K\frac{\partial \psi}{\partial x}$ – коэффициент диффузитивности, являющийся функцией искомой влажности, K – коэффициент влагопроницаемости, y – потенциал влажности.

Введенный Аллером дополнительный член $\frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial}{\partial x}(A\frac{\partial u}{\partial x})$ призван объяснить опытный факт движения влаги против градиента влажности. Это слагаемое мало при впитывании, а при испарении оно велико. Отсюда можно сделать вывод о том, что тема актуальна.

Важнейшей характеристикой любой математической модели, описывающей определенное физическое явление, является вопрос корректности решение математической модели, т.е. в рамках изучаемой модели является вопрос об однозначной разрешимости и устойчивости решения к небольшим (в том или ином смысле) изменениям исходных данных. Наличие этих свойств у выбранной математической модели физического явления является важнейшим фактом, подтверждающим адекватность физического явления, описываемого этой моделью.

Обратными задачами для дифференциальных уравнений принято называть задачи определения коэффициентов, правых частей, а также начальных или граничных условий и решений дифференциальных уравнений по некоторой дополнительной информации (переопределении) о решении прямой задачи. Такие задачи возникают в тех случаях, когда структура математической модели рассматриваемого процесса известна, нужно найти параметров самой математической модели.

Для линейных дифференциальных уравнений обратную задачу принято называть линейной, если разыскивается внешний источник, а также начальные или граничные условия. Обратную задачу для дифференциальных уравнений в частных производных принято называть коэффициентной, если разыскивается один или несколько коэффициентов уравнения. Термин «обратная задача» был предложен видными русскими математиками М. М. Лаврентьевым (1969) и В. Г. Романовым (1969).

Для псевдопараболических уравнений задача Коши, локальные и нелокальные начально-краевые задачи изучалась в работах Б. С. Аблабекова (1999-2011), Д. Колтона (1972-1980), М. Х. Шханукова (1982-1985) и др.

Д. Колтон в своих работах (1975-1980) исследовал некорректную задачу Коши для уравнения теплопроводности с обратным временем и ввел термин псевдопараболическое уравнение.

Обратные задачи для псевдопараболических уравнений третьего порядка исследовались в монографиях Б. С. Аблабекова (2001), А. Асанова, Э. Р. Атаманова (1997), Э. Р. Атаманов, М. Ш. Мамаюсупова (1990) и более подробную информацию можно найти в этих монографиях.

Связь темы диссертации с крупными научными программами (проектами) и основными научно-исследовательскими работами.

Диссертационная работа выполнена в связи с научными направлениями кафедры «Прикладная математика, информатика и компьютерные технологии» факультета математики и информатики государственного университета им. Ж. Баласагына.

Цель и задачи исследования. Целью исследования является доказательство теорем о существовании и единственности решения обратных задач определения граничных условий в одномерном линейном псевдопараболическом уравнении.

Для достижения указанной цели были поставлены следующие задачи:

- найти достаточные условия существования и единственности решения соответствующих прямых задач для псевдопараболических уравнений третьего порядка;
- найти достаточные условия однозначной разрешимости граничных обратных задач для псевдопараболических уравнений с частными производными третьего порядка.
- применение прямых и обратных задач для псевдопараболических уравнений частных производных третьего порядка к прямым и обратным задачам для уравнения теплопроводности.

Научная новизна работы. Впервые в диссертации:

- Найдены достаточные условия существования и единственности решения прямых задач для псевдопараболических уравнений третьего порядка с малыми параметрами;
- определены условия, обеспечивающие существование и единственность решения граничных обратных задач для псевдопараболических уравнений третьего порядка с малыми параметрами.

Теоретическая и практическая значимость полученных результатов. Результаты диссертации носят теоретический характер. Однако, если принять во внимание, что обратные задачи для дифференциальных, интегро-дифференциальных и интегро-функциональных уравнений широко используются, для решении конкретных обратных задач физики, техники, экономики, то следует, что результаты этой работа может быть использована при решении некоторых прикладных задачах. Полученные в

диссертации результаты способствуют развитию теории дифференциальных и интегро-дифференциальных уравнений высокого порядка.

Основные положения диссертации, выносимые на защиту:

- нахождение достаточных условий существования и единственности решение первой начально-краевой задачи для одномерного псевдопараболического уравнения с малым параметром;
- нахождение достаточных условий, обеспечивающие существование и единственность решение второй начально-краевой задачи для псевдопараболического уравнения с малым параметром;
- нахождение достаточных условий существования и единственности решение краевой задачи на полуоси для псевдопараболического уравнения с малым параметром;
- нахождение достаточных условий, обеспечивающие однозначной разрешимости смешанной краевой задачи для псевдопараболического уравнения с малым параметром;
- доказательство разрешимости обратной задачи определения граничной функции в начально-краевой задаче для псевдопараболического уравнения третьего порядка с малым параметром;
- доказательство разрешимости граничной обратной задачи с интегральным переопределением для псевдопараболического уравнения;
- доказательство разрешимости одной граничной обратной задачи для уравнения теплопроводности;
- Определение достаточных условий существования и единственности решения граничной обратной задачи для уравнения теплопроводности;
- Применение метода квазиобращения к некорректно поставленной второй начально-краевой задачи для уравнения теплопроводности с обратным временем.

Личный вклад соискателя. Все научные результаты, представленные в диссертации, принадлежат только автору. Задачи поставлены научным руководителем. В совместных работах обсуждение результатов принадлежит д.ф.-м.н., профессору Б. С. Аблабекову, а научные результаты принадлежат автору.

Апробация результатов диссертации. Основные результаты диссертации докладывались и обсуждались на следующих семинарах и международных научных конференциях:

- «Теория и численные методы решения обратных и некорректных задач», Новосибирск, Академгородок, 10-13 октябрь, 2018 г;
- Современные проблемы физико-математических наук. V международная научно-практическая конференция, г. Орел, 26 – 29 сентября 2019 г;
- Международная научная конференция «Современные проблемы математики», посвященная 70 – летию академика А. А. Борубаева. - Бишкек: Институт математики НАН КР, 16-18 июня 2021 г;
- Современные проблемы физико-математических наук. VII международная научно-практическая конференция, г. Орел, 18-21-ноябрь, 2021 г.
- на семинарах «Обратные и некорректные задачи» (Бишкек, КГМУ, 2018–2022 гг..), руководитель д.ф.-м.н., профессор Б. С. Аблабеков.

Полнота отражения результатов диссертации в публикациях. По результатам исследования соискателем опубликованы 11 статей [2] – [12] и тезисы двух докладов [1],[13]. Большинства журналов, в которых опубликованы статьи в РИНЦе имеет импакт-фактор выше 0,1. Три статьи опубликованы на кыргызском языке [9,11,12].

Структура и объем диссертации. Диссертация состоит из введения, четырех глав, 15 пунктов, списка литературы с 92 названиями и заключения. Общий объем диссертации составляет 126 страниц. Нумерация формул, определений, лемм и теорем обозначается тремя цифрами, т.е. если формула имеет номер (1.2.1), то это означает, что это формула 1 второго раздела первой главы.

ОСНОВНОЕ СОДЕРЖАНИЕ ДИССЕРТАЦИИ

Во введении дано обоснование актуальности темы, общая характеристика работы, цель и задачи исследования, научная новизна, практическая значимость, основные положения, выносимые на защиту.

Первая глава «ОБЗОР ЛИТЕРАТУРЫ И РЕЗУЛЬТАТОВ ДИССЕРТАЦИИ» состоит из двух пунктов. В пункте 1.1 «Обзор литературы» дается обзор литературы по теме диссертации. В данном пункте проведен анализ научных результатов работ других авторов, наиболее близких к теме предлагаемой диссертационной работы. В пункте 1.2 «Обзор результатов диссертации» приведен подробный обзор научных результатов диссертации.

Исследованию задачи Коши и смешанных задач для псевдопараболического уравнений посвящены работы Г. И. Баренблатта, Ю. П, Желтова, И. Н. Кочиной (1960, 1963), А. Г. Свешникова, М. О. Корпусова, Ю. Д. Плетнера (2007), Р. Е. Шоуалтер, Т.Тинга (1969, 1970, 1974), Д. Колтона (1972, 1979, 1980). В этих работах были исследованы вопросы разрешимости локальных краевых задач для псевдопараболических уравнений. В частности, D. Colton (1975) впервые построил функции Римана для специального псевдопараболического уравнения и доказал существование и единственность регулярного решения характеристической задачи Гурса и первой начально-краевой задачи. В работах А. Г. Свешникова, М. О. Корпусова, Ю. Д. Плетнера (2007) были исследованы вопросы разрешимости и разрушения решений для целого класса модельных уравнений псевдопараболического типа с нелинейными операторами эллиптического типа при производной по времени, а также вопросы о существовании и несуществовании глобального по времени решения.

Современная теория обратных задач для дифференциальных уравнений была создана и развита русскими математиками А. Н. Тихоновым (1943, 1961, 1986), М. М. Лаврентьевым (1980, 1991) и В. Г. Романовым (1984, 2005). История развития теории обратных задач, ее современное состояние и обширная библиография представлены в монографиях указанных авторов. Позднее эти задачи исследовались и развивались Ю. Е. Аниконовым (1978, 1995), И. С. Кабанихиным (1988, 2001, 2009), А. И. Прилепко (1992, 1999), В. Г. Романовым (2002), В. Г. Яхно (1990), Ж. Кеноном (1987) и ряда других авторов.

В этих работах изучаются обратные задачи для уравнений второго порядка.

Задачи Коши, локальные и нелокальные начально-краевые для псевдопараболических уравнений, локальные и нелокальные начально-краевые задачи изучались в работах Б. С. Аблабекова (2001), Д.Колтона (1979), М. Х. Шханукова (1982, 1983, 1985) и др.

Э. Р. Атаманов и М. Ш. Мамаюсупов (1990) методом интегральных уравнений Вольтерра исследовали следующие одномерные обратные задачи:

Задача 1. Найти пару функций $\{u(x,t), f(t)\}$ из следующих условий:

$$u_t(x,t) = u_{xxt}(x,t) + u_{xx}(x,t) + q(x,t)u(x,t) + f(t)\,,\ 0 < x < 1, 0 < t \le T, \tag{1}$$

$$u(x,0) = 0, \quad 0 \le x \le l, \tag{2}$$

$$u(0,t) = u(1,t) = 0, \quad 0 \le t \le T, \tag{3}$$

$$u(x_0,t) = \psi(t), \quad 0 \le t \le T, \tag{4}$$

здесь $x_0 \in (0,1)$ – заданное число.

Задача 2. Найти пару функций $\{u(x,t), f(x)\}$ из следующих условий:

$$u_t(x,t) = u_{xxt}(x,t) + u_{xx}(x,t) + q(x,t)u(x,t) + f(x)\,,\ 0 < x < 1,\ 0 < t \le T, \tag{5}$$

$$u(x,0) = 0, \quad 0 \le x \le l, \tag{6}$$

$$u(0,t) = u_x(0,t) = 0, \quad 0 \le t \le T, \tag{7}$$

$$u(x,T) = \psi(x), \quad 0 \le x \le 1, \tag{8}$$

где $T > 0$ – фиксированное число.

Задача 3. Найти пару функций $\{u(x,t), q(x)\}$ из следующих условий:

$$u_t(x,t) = L_q(u_t + u)(x,t),\ 0 < x < 1,\ 0 < t \le T, \tag{9}$$

$$u(x,0) = 0, \quad 0 \le x \le l, \tag{10}$$

$$u(0,t) = \varphi_1(t), \quad u_x(0,t) = \varphi_2(t), \quad 0 \le t \le T, \tag{11}$$

$$u(x,T) = \psi(x), \quad 0 \le x \le 1, \tag{12}$$

где $L_q \equiv \dfrac{\partial^2}{\partial x^2} - q(x)$, $T > 0$ – заданное число.

Для поставленных задач доказываются соответствующие теоремы о существовании и единственности решения.

W. Rundell 1980 году в своей работе рассмотрел задачу нахождения пару функций

$$(L+I)u_t(x,t) + \eta L u(x,t) = f(x), (x,t) \in \Omega_T, \tag{13}$$

$$u(x,0) = u_0(x), \quad u(x,T) = u_1(x), x \in \overline{\Omega}, \tag{14}$$

$$u(x,t) = 0, x \in \partial\Omega, 0 < t < T, \tag{15}$$

где $\eta > 0$ – постоянное, I – единичный оператор, а оператор

$$Lu \equiv -\sum_{i,j=1}^{n} (a_{ij}(x)u_{x_i})_{x_j} + a(x)u$$

является равномерно эллиптическим оператором второго порядка, т.е.

1) $a_{ij}(x) = a_{ji}(x) \in C^1(\overline{\Omega}),\ a(x) \in C(\overline{\Omega})$,

2) $\sum\limits_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x)u_{x_i}u_{x_j} \ge \gamma \sum\limits_{i=1}^{n} \left|u_{x_i}\right|^2, \quad \forall u \in C^2(\Omega_T), \gamma > 0,$

Методом полугрупп доказана следующая теорема о разрешимости обратной задачи (13)-(15).

Теорема 1. Пусть $u_0(x), u_1(x) \in \overset{0}{W}{}_2^1(\overline{\Omega}_T) \cap W_2^2(\Omega_T)$. Тогда для любого $T > 0$ обратная задача (13) – (15) имеет единственное решение, кроме того $u(x,t) \in \overset{0}{W}{}_2^1(\overline{\Omega}_T) \cap W_2^2(\Omega_T)$ $f(x) \in L_2(\Omega)$.

А. Асанов, Э. Р. Атаманов (1995) исследовал следующую обратную задачу определения ядра зависящего от времени для операторного интегро-дифференциального псевдопараболического уравнения: требуется найти функции $\{u(t), K_i(t)\} \in C^1([0,T]; D(A)) \times C([0,T])$ из условий

$$u'(t) = (Au)' + \beta(Au) + \sum_{i=1}^{n}\int_0^t K_i(t-s)B_i u(s)ds + f(t), \quad i = 1,2,...,m \qquad (16)$$

$$u(0) = u_0, \quad u_0 \in D(A), \qquad (17)$$

$$\Phi_i(A - I)u = g_i(t), \quad t \in [0,T], \quad i = 1,2,...,m, \qquad (18)$$

где $\beta > 0 - const$.

Имеет место

Теорема 2. Пусть 1) $A : D(A) \subset X \to X,\ B_i : D(B_i) \subset X \to X$ - линейные замкнутые операторы; $D(A) \subset D(B_i), \quad i = 1,2,...m$,

2) оператор $A - I$ обратим, т.е. $(A - I)^{-1} \in L(X)$,

3) $f(t) \in C^1([0,T]; X)$, $g_i(t) \in C^2[0,T], \quad i = 1,2,...,m$,

4) для операторов $\Phi_i \in L(X,R), \quad i = 1,2,...,m$ определитель матрицы

$$M = \begin{pmatrix} \Phi_1(B_1u_0) & \Phi_1(B_2u_0) \ldots \Phi_1(B_mu_0) \\ \Phi_2(B_1u_0) & \Phi_2(B_2u_0) \ldots \Phi_2(B_mu_0) \\ \ldots\ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \Phi_m(B_1u_0) & \Phi_m(B_2u_0) \ldots \Phi_m(B_mu_0) \end{pmatrix}$$

отличен от нуля. Тогда существует $T^* \in (0,T]$ такое, что обратная задача (16)- (18) имеет единственное решение $\{u(t), K_1(t), K_2(t),..., K_m(t)\}$ из пространства $C^1([0,T^*]; D(A)) \times C_m[0,T^*]$.

Кроме того, в монографии Б. С. Аблабекова (2001) изучаются различные обратные задачи для дифференциальных уравнений с частными производными третьего порядка. В этой работе использовались в основном метод Галеркина, метод интегральных уравнений Вольтерра, метод функций Римана, метод нагруженных уравнений и аппараты шкалы банаховых пространств.

Теперь обратимся к ранее изученным граничным обратным задачам для псевдопараболического уравнения. Что касается уравнения соболевского типа, в частности, для псевдопараболического уравнения, то такие задачи мало изучены. А. И. Кожанов (2016) в своей работе исследовал следующие граничные обратные задачи.

Обратная задача 1. Найти функции $u(x,t)$ и $q(t)$ такие, что

$$\frac{\partial}{\partial t}\left[u - \Delta u\right] + \alpha \Delta u = f(x,t),\ x \in \Omega,\ 0 < t \le T. \qquad (19)$$

$$u(x,0) = 0, \quad x \in \Omega, \qquad (20)$$

$$u(x,t) = q(t)h(x), \quad (x,t) \in S, \qquad (21)$$

$$\int_\Omega N(x)u(x,t)dx = 0,\ 0 < t < T. \qquad (22)$$

Здесь Δ – оператор Лапласа, действующий по переменным по $(x_1, x_2, ..., x_n)$, $\Omega \subset R^n$ ограниченная область, $\Omega_T = \Omega \times (0,T)$ есть цилиндр конечной высоты T, $S = \partial\Omega \times (0,T)$ боковая граница цилиндра Ω_T, α - заданное действительное число, $f(x,t), N(x), h(x)$ – заданные функции, определенные соответственно в областях Ω_T и Ω.

Определим линейное пространство X_1:

$$X_1 = \{\vartheta(x,t) : \quad \vartheta(x,t) \in L_\infty(0,T; W_2^2(\Omega)), \quad \vartheta_t(x,t) \in L_2(0,T; W_2^2(\Omega))\}.$$

Зададим в этом пространстве норму:

$$\|\vartheta\|_{X_1} = \left(\|\vartheta\|^2_{L_\infty(0,T;W_2^2(\Omega))} + \|\vartheta_t\|^2_{L_2(0,T;W_2^2(\Omega))}\right)^{1/2}.$$

Определим функцию $h_1(x)$ как решение следующей задачи:

$$\Delta h_1(x) - h_1(x) = 0, x \in \Omega,$$
$$h_1(x) = h(x), x \in \partial\Omega,$$

а функцию $h_2(x)$ определим как решение следующей задачи:

$$\Delta h_2(x) - h_2(x) = 0, x \in \Omega, \ \frac{\partial h_2(x)}{\partial \nu} + \sigma(x)h_2(x) = 0, x \in \partial\Omega.$$

Пусть $\{w_{2k}(x)\}_{k=1}^{\infty}$ есть система собственных функций задачи

$$\Delta w(x) = \lambda w(x), x \in \Omega, \ \frac{\partial w(x)}{\partial \nu} + \sigma(x) w = 0, x \in \partial\Omega,$$

ортонормированные в пространство $L_2(\Omega)$, $\lambda_{2k}, k = 1,2,...,$ есть соответствующие собственные числа.

Теорема 3. Пусть выполняются условия $N(x) \in C(\overline{\Omega})$, $h(x) \in W_2^2(\Omega)$, $f(x,t) \in L_2(\Omega_T)$ и числовой ряд $\sum_{k=1}^{\infty} \gamma_{1k} b_{1k} e^{-\beta_{1k} T}$ абсолютно сходится: $N_1 \neq 0$. Тогда обратная задача (19) – (22) имеет решение $\{u(x,t), q(t)\}$ такое, что $u(x,t) \in X$, $q(t) \in W_2^1([0,T])$.

Здесь

$$N_1 = \int_{\Omega} N(x) w_{1k}(x) dx, \ b_{1k} = \int_{\Omega} N(x) h_1(x) dx,$$

$$\gamma_{1k} = \frac{\alpha \lambda_{1k} a_{1k}}{1 - \lambda_{1k}}, \ \beta_{1k} = \frac{\alpha \lambda_{1k}}{1 - \lambda_{1k}}.$$

Обратная задача 2. Найти функции $u(x,t)$ и $q(t)$ такие, что для функции $u(x,t)$ выполняется условия (19), (20), (22), и выполняется также условия

$$\frac{u(x,t)}{\partial \nu} + \sigma(x) u = q(t) h(x), \quad (x,t) \in S. \tag{23}$$

Здесь $\nu = (\nu_1, \nu_2, ..., \nu_n)$ – вектор внутренние нормали к $x \in \partial\Omega$, $\sigma(x)$ – заданная известная функция при $x \in \partial\Omega$.

Теорема 4. Пусть выполняются условия $N(x) \in C(\overline{\Omega})$, $h(x) \in W_2^2(\Omega)$, $\sigma(x) \in C(\partial\Omega)$, $\sigma(x) \leq 0$ при $x \in \partial\Omega$, $f(x,t) \in L_2(\Omega_T)$ и числовой ряд $\sum_{k=1}^{\infty} \gamma_{2k} b_{2k} e^{-\beta_{2k} T}$ абсолютно сходится: $N_2 \neq 0$. Тогда обратная задача (18), (19), (21), (22) имеет решение $\{u(x,t), q(t)\}$, такое, что $u(x,t) \in X$, $q(t) \in W_2^1([0,T])$.

Здесь

$$N_2 = \int_{\Omega} N(x) w_{2k}(x) dx, \ a_{2k} = \int_{\Omega} N(x) \Delta h_2(x) dx, \ b_{2k} = \int_{\Omega} N(x) w_{2k}(x) dx,$$

$$\gamma_{2k} = \frac{\alpha \lambda_{2k} a_{2k}}{1 - \lambda_{2k}}, \ \beta_{2k} = \frac{\alpha \lambda_{2k}}{1 - \lambda_{2k}}.$$

Вторая глава «МАТЕРИАЛ И МЕТОДЫ ИССЛЕДОВАНИЯ» описывается объект и предмет исследования и состоит из двух разделов. В разделе 2.1 «Объекты и предметы исследования» приведены объекты и предметы исследования.

Объект исследования – граничная обратная задача для псевдопараболических уравнений в частных производных третьего порядка с малым параметром.

Предмет исследования – нахождение достаточных условий, обеспечивающих разрешимость прямых и обратных задач для псевдопараболических дифференциальных уравнений в частных производных третьего порядка с малым параметром.

Вразделе 2.2 приведены основные методы исследования обратных задач, таких какметод интегральных уравнений Вольтерра, метод Фурье, функции Грина, норма интегрального оператора.

Третья глава состоит из четырех разделов и посвящена ряду прямых (начальных и начально-краевых) задач псевдопараболических уравнений. Основным результатом этой главы является доказательство корректности рассматриваемых задач, что важно при изучении обратных задач.

В разделе 3.1 рассматривается первая начально-краевая задача.

Рассмотрим задачу нахождения функции $u(x,t) \in C^{(2,1)}(\Pi_T) \cap C(\overline{\Pi}_T)$ из следующих условий:

$$u_t - \varepsilon^2 u_{txx} - u_{xx} = 0, \quad 0 < t \leq T, \quad 0 < x < 1, \tag{24}$$

$$u(x,0) = u_0(x), \quad 0 \leq x \leq 1, \tag{25}$$

$$u(0,t) = \varphi(t), \quad u(1,t) = \psi(t), \quad 0 \leq t \leq T, \tag{26}$$

где $\varepsilon > 0$ – малый параметр, $u_0(x)$, $\varphi(t)$, $\psi(t)$ – заданные функции.

Пусть для заданных функций выполняются следующие условия гладкости и условия согласования:

$$u_0(x) \in C^1[0,1], \varphi(t), \psi(t) \in C^1[0,T], \tag{27}$$

$$u_0(0) = \varphi(0) = 0, \ u_0(1) = \psi(0) = 0. \tag{28}$$

Введем новую функцию

$$u_\varepsilon(x,t) = v_\varepsilon(x,t) + w(x,t), \tag{29}$$

где $v_\varepsilon(x,t)$ - новая неизвестная функция, а

$$w(x,t) = \varphi(t) + x\big(\psi(t) - \varphi(t)\big).$$

Тогда задача (24) – (26) сводится к задаче:

$$\frac{\partial v_\varepsilon}{\partial t} - \varepsilon^2 \frac{\partial^3 v_\varepsilon}{\partial x^2 \partial t} - \frac{\partial^2 v_\varepsilon}{\partial x^2} = (1-x)\varphi'(t) - x\psi'(t), \quad (x,t) \in \Omega_T, \tag{30}$$

$$v_\varepsilon(x,0) = u_0(x), \ 0 \leq x \leq 1, \tag{31}$$

$$v_\varepsilon(0,t) = 0, \ v_\varepsilon(1,t) = 0, \ 0 \leq t \leq T. \tag{32}$$

Из приведенных рассуждений следует, что для доказательства того, что задача (24) – (26) имеет единственное решение, достаточно доказать теорему о существовании и единственности решения начально-краевой задачи (30)-(32).

Теорема 5. Пусть заданные функции удовлетворяют условиям (27), (28). Тогда для любого $\varepsilon > 0$ решение задачи (30) – (32) $\exists!$ и выражается формулой

$$\begin{aligned} v_\varepsilon(x,t) &= \sum_{n=1}^{\infty} \exp\left(-\frac{(n\pi)^2}{1+(\varepsilon n\pi)^2} t\right) u_{0n} \sin(n\pi x) + \\ &+ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{(1+(\varepsilon n\pi)^2)(n\pi)} \Big(\big((-1)^n \psi(t) - \varphi(t)\big)\Big) \sin(n\pi x) - \\ &- \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2(n\pi)}{(1+(\varepsilon n\pi)^2)^2} \int_0^t \left(\exp\left(-\frac{(n\pi)^2}{1+(\varepsilon n\pi)^2}(t-\tau)\right) \left[(-1)^n \psi(\tau) - \varphi(\tau)\right] \right) d\tau \sin(n\pi x), \end{aligned} \tag{33}$$

где

$$u_{0n}=2\int_0^1 u_0(x)\sin(n\pi x)dx. \tag{34}$$

В разделе 3.2 рассматривается вторая начально-краевая задача с малым параметром:

$$\frac{\partial u}{\partial t}-\alpha\frac{\partial^3 u}{\partial x^2\partial t}-\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=0, \quad (x,t)\in\Omega_T, \tag{35}$$

$$u(x,0)=u_0(x), \quad 0\le x\le l, \tag{36}$$

$$\left(\alpha\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial t}+\frac{\partial u}{\partial x}\right)(0,t)=\varphi(t), \ \left(\alpha\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial t}+\frac{\partial u}{\partial x}\right)(l,t)=\psi(t), \ 0\le t\le T. \tag{37}$$

Здесь $\alpha>0-$ малый параметр.

Теорема 6. Пусть $u_0(x)\in C^2[0,l], \varphi(t)\in C^1[0,T], \psi(t)\in C^1[0,T]$, кроме того выполнены условия согласования $u_0(0)=\mu(0), \quad u_0^{'}(0)=\varphi(0), \quad u_0^{'}(l)=\psi(0)$. Тогда решение задачи (35) – (37) $\exists!$.

В разделе 3.3 изучается начально-краевая задача на полуоси для псевдопараболического уравнения с малым параметром.

В области Q_T^+ рассмотрим начально-краевую задачу для псевдопараболического уравнения

$$Lu(x,t)\equiv u_t(x,t)-\alpha^2 u_{xxt}(x,t)-u_{xx}(x,t)=f(x,t), \quad (x,t)\in Q_T^+, \tag{38}$$

$$u(x,0)=u_0(x), \quad x\in[0,+\infty), \tag{39}$$

$$u(0,t)=h(t), \quad 0\le t\le T, \tag{40}$$

где $\alpha>0-$ малый параметр.

Задача (38) – (40) является сингулярным возмущением начально-краевой задачи на полуоси для параболического уравнения:

$$\begin{cases}\vartheta_t(x,t)-\vartheta_{xx}(x,t)=f(x,t), \quad (x,t)\in Q_T^+,\\ \vartheta(x,0)=u_0(x), \quad x\in[0,+\infty),\\ \vartheta(0,t)=h(t), \quad 0\le t\le T.\end{cases} \tag{41}$$

Определение 3. Функцию $u(x,t)\in C_{M_\gamma}^{(2,1)}(Q_T^+)$ будем называть классическим решением задачи (38) – (40), если она удовлетворяет уравнению (38), начальному условию (39) и граничному условию (40) в обычном смысле.

Теорема 7. Если $u_0(x)\in C_{M_\gamma}^2[0,+\infty)$, $f(x,t)\in C_{M_\gamma}^{(1,0)}(\overline{Q}_T^+)$, $h(t)\in C^1[0,T]$ при $\gamma<T-\alpha$ и $f(0,t)=0, u_0(0)=h(0)=0$, то в области Q_T^+ классическое решение задачи (38) – (40) $\exists!$ и принадлежит в $C_{M_\gamma}^{(2,1)}(Q_T^+)$. Это решение имеет вид

$$u(x,t)=\int_0^x\left[G(x-s,t)-G(x+s,t)\right]u_0(s)ds+e^{-\frac{x}{\alpha}}h(t)+$$
$$+\frac{2}{\pi}\int_0^t h(\tau)\int_0^\infty \exp\left(-\frac{\xi^2}{1+\alpha^2\xi^2}(t-\tau)\right)\frac{\xi\sin\xi x}{(1+\alpha^2\xi^2)^2}d\xi\, d\tau+ \tag{42}$$
$$+\int_0^t\int_0^x\left[G_\alpha(x-s,t-\tau)-G_\alpha(x+s,t-\tau)\right]f(s,\tau)ds\, d\tau.$$

Мында

$$G(x,t)=\frac{1}{\pi}\int_0^\infty \exp\left(-\frac{\xi^2}{1+\alpha^2\xi^2}t\right)\cos\xi x d\xi, \tag{43}$$

$$G_\alpha(x,t)=\frac{1}{\pi}\int_0^\infty \exp\left(-\frac{\xi^2}{1+\alpha^2\xi^2}t\right)\frac{\cos\xi x}{(1+\alpha^2\xi^2)}d\xi. \tag{44}$$

В разделе 3.4 изучается вопрос о разрешимости смешанной краевой задачи для псевдопараболического уравнения с малым параметром.

В области D_T рассмотрим смешанную начально-краевую задачу для псевдопараболического уравнения с малым параметром

$$\frac{\partial u}{\partial t}-\varepsilon\frac{\partial^3 u}{\partial x^2\partial t}-\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=0, \quad (x,t)\in D_T, \tag{45}$$

$$u(x,0)=u_0(x), \quad 0\le x\le\pi, \tag{46}$$

$$u(0,t)=\varphi(t), \ \left(\varepsilon\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial t}+\frac{\partial u}{\partial x}\right)(\pi,t)=\psi(t), \ 0\le t\le T. \tag{47}$$

Здесьа $\varepsilon>0-$ малый параметр.

Поскольку уравнение (45) содержит малый параметр ε, то решение задачи (45)-(47) зависит от этого параметра и в дальнейшем будет обозначаться их $u_\varepsilon(x,t)$.

Задача (45) – (47) представляет собой сингулярное возмущение смешанной начально-краевой задачи для параболического уравнения:

$$\frac{\partial u}{\partial t}-\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=0, \quad (x,t)\in D_T, \tag{48}$$

$$u(x,0)=u_0(x), \quad 0\le x\le\pi, \tag{49}$$

$$u(0,t)=\varphi(t), \ \frac{\partial u}{\partial x}(\pi,t)=\psi(t), \ 0\le t\le T. \tag{50}$$

Теорема 8. Пусть $u_0(x)\in C^2[0,l], \varphi(t)\in C^1[0,T], \psi(t)\in C^1[0,T]$. кроме того выполнены услвия согласования $u_0(0)=\varphi(0)=0, \varphi^{'}(0)=0, u_0^{'}(\pi)=\psi(0)=0$, $\psi(0)=0$. Тогда решение задачи (48) – (50) $\exists!$ и имеет вид

$$u_\varepsilon(x,t)=\sum_{n=1}^\infty u_{0n}\exp\left(-\frac{\lambda_n^2}{1+\varepsilon\lambda_n^2}t\right)\sin\lambda_n x+$$
$$+\frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^\infty\frac{1}{1+\varepsilon\lambda_n^2}\int_0^t\exp\left(-\frac{\lambda_n^2}{1+\varepsilon\lambda_n^2}(t-\tau)\right)z(\tau)d\tau\sin\lambda_n x.$$

где $\lambda_n = \left(\dfrac{2n-1}{2}\right)^2$.

В четвертой главе рассматриваются различные граничные обратные задачи, т. е. задача о нахождении решение псевдопараболического уравнения, когда функция входящая в граничное условие неизвестна. Такую задачу можно интерпретировать как задачу управления, где требуется найти одно из граничных условий во все моменты времени $t \in [0,T]$ вместе с решением. Кроме того, она посвящено граничным обратным задачам теплопроводности и применению псевдопараболического уравнения к одной некорректной задаче.

В разделе 4.1 изучается вопрос об разрешимости одной граничной обратной задачи для псевдопараболического уравнения.

Рассмотрим обратную задачу определения пары функций $\{u(x,t), f(t)\}$ для псевдопараболического уравнения:

$$u_t(x,t) = \varepsilon^2 u_{xxt}(x,t) + u_{xx}(x,t), \quad (x,t) \in D_T, \tag{51}$$

$$u(x,0) = u_0(x), \quad 0 \le x \le \pi, \tag{52}$$

$$u(0,t) = \varphi(t), \quad 0 \le t \le T, \quad u(\pi,t) = f(t), \quad 0 \le t \le T, \tag{53}$$

$$u(x_0,t) = h(t), \quad 0 \le t \le T, \tag{54}$$

где $u_0(x), \varphi(t), h(t) -$ заданные функции, а $x_0 \in (0,\pi)$ — заданное число, $\varepsilon > 0 -$ малый параметр.

Далее, поскольку уравнение (51) (как и уравнения следующего раздела) содержит параметр ε, решение обратной задачи (51) – (54) также зависит от этого параметра. Поэтому обозначим решение обратной задачи как $u_\varepsilon(x,t)$ и $f_\varepsilon(t)$ соответственно.

Определение 2. Пара функции $u_\varepsilon(x,t)$ и $f_\varepsilon(t)$ называются решением обратной задачи (51)-(54), если $u_\varepsilon(x,t) \in C^{(2,1)}(D_T) \cap C(\overline{D}_T)$, $f_\varepsilon(t) \in C_0^1[0,T]$ и удовлетворяют уравнениям (51)-(54) в классическом смысле.

Теорема 9. Пусть $u_0(x) \in C^3([0,\pi])$, $\varphi(t) \in C^1([0,T])$, $h(t) \in C^1([0,T])$ и условия согласования $u_0(0) = \varphi(0) = 0$, $u_0(\pi) = 0, u_0'(0) = 0, u_0'(\pi) = 0$, $u_0(x_0) = h(0)$ выполнены. Тогда для любого $\varepsilon > 0$ решение обратной задачи (51) – (54) $\exists!$.

В разделе 4.2 для псевдопараболического уравнения рассматривается граничная обратная задача с интегральным переопределением.

В области D_T рассматривается первая начально-краевая задача для одномерного псевдопараболического уравнения с малым параметром:

$$u_t(x,t) = \varepsilon^2 u_{xxt}(x,t) + u_{xx}(x,t), \quad (x,t) \in D_T, \tag{55}$$

$$u(x,0) = u_0(x), \quad 0 \le x \le \pi, \tag{56}$$

$$u(0,t) = \varphi(t), \quad u(\pi,t) = f(t), \quad 0 \le t \le T, \tag{57}$$

где $\varepsilon > 0 -$ малый параметр.

Рассмотрим обратную задачу. Пусть в начально-краевой задаче (55)-(57) функции $u_0(x), \varphi(t)$ заданы, а $f(t) -$ неизвестная функция. Требуется определить функцию $f(t)$, если

$$\int_0^\pi u(x,t)dx = h(t), \quad 0 \le t \le T, \tag{58}$$

где $h(t) -$ заданная функция.

Условие (58) называется интегральным условием переопределения.

Определение 3. Пара функций $u_\varepsilon(x,t)$ и $f_\varepsilon(t)$ называются решением обратной задачи (55) – (58), если $u_\varepsilon(x,t) \in C^{(2,1)}(D_T) \cap C(\overline{D}_T)$, $f_\varepsilon(t) \in C_0^1[0,T]$ и удовлетворяют условиям (55) – (58) в классическом смысле.

Теорема 10. Пусть $u_0(x) \in C^1([0,\pi])$, $\varphi(t) \in C^1([0,T])$, $h(t) \in C([0,T])$ и выполнены следующие условия согласования:

$$u_0(0) = \varphi(0) = 0, u_0(\pi) = f(0) = 0, \ u_0'(0) = u_0'(\pi) = 0, \ \int_0^\pi u_0(x)dx = h(0).$$

Тогда для любого числа $\varepsilon > 0$ $\exists!$ решение обратной задачи (55) – (58).

В разделе 4.3 изучается об однозначной разрешимости обратной задачи определения функции, заданной в правой части интервала.

В области D_T рассмотрим обратную задачу нахождения пары функций $u(x,t)$ и $f(t)$ из следующих условий:

$$u_t(x,t) = \varepsilon u_{xxt}(x,t) + u_{xx}(x,t), \quad (x,t) \in D_T, \tag{59}$$

$$u(x,0) = u_0(x), \quad 0 \le x \le \pi, \tag{60}$$

$$(\varepsilon u_{xt} + u_x)(0,t) = \varphi(t), \quad 0 \le t \le T, \ (\varepsilon u_{xt} + u_x)(\pi,t) = f(t), \quad 0 \le t \le T, \tag{61}$$

$$u(0,t) = h(t), \quad 0 \le t \le T, \tag{62}$$

где $\varepsilon > 0 -$ малый параметр, $u_0(x), \varphi(t)$, $h(t) -$ заданные функции.

Определение 4. Пара функций $u_\varepsilon(x,t)$ и $f_\varepsilon(t)$ называются решением обратной задачи (59) – (62), если $u_\varepsilon(x,t) \in C^{(2,1)}(D_T) \cap C(\overline{D}_T)$, $f_\varepsilon(t) \in C_0^1[0,T]$ и удовлетворяют условиям (59) – (62) в классическом смысле.

Замечание. При выполнении условий согласования $u_0'(0) = \varphi(0) = 0$, $u_0'(\pi) = f_\varepsilon(0) = 0$ граничные условия (61) можно переписать в следующем виде:

$$\frac{\partial u}{\partial x}(0,t) = \mu_1(t), \frac{\partial u}{\partial x}(\pi,t) = \mu_2(t), 0 \le t \le T, \tag{63}$$

где

$$\mu_1(t) = \frac{1}{\varepsilon}\int_0^t e^{-\frac{1}{\varepsilon}(t-\tau)} \varphi(\tau)d\tau, \qquad \mu_2(t) = \frac{1}{\varepsilon}\int_0^t e^{-\frac{1}{\varepsilon}(t-\tau)} f_\varepsilon(\tau)d\tau. (6)$$

Имеет место

Теорема 11. Пусть $u_0(x) \in C^3([0,\pi])$; $\varphi(t) \in C^1([0,T])$, $h(t) \in C^1([0,T])$ и выполнены условия согласования $u_0'(0) = \varphi(0) = 0, u_0'(\pi) = f_\varepsilon(0) = 0$, $u_0(0) = h(0)$. Кроме того $u_0'(0) = u_0'(\pi) = 0$. Тогда для любого $\varepsilon > 0$ решение обратной задачи (59) – (62) $\exists!$.

В разделе 4.4 в области Q_T^+ рассматривается следующая обратная задача нахождения пары функций $u(x,t) \in C_{M_T}^{(2,1)}(Q_T^+) \cap C\overline{Q}_T^+)$ и $f(t) \in C_0^1([0,T])$ удовлетворяющей уравнению и условиям:

$$Lu(x,t) \equiv u_t(x,t) - \alpha^2 u_{xxt}(x,t) - u_{xx}(x,t) = g(x,t), \quad (x,t) \in Q_T^+, \tag{64}$$

$$u(x,0)=u_0(x), \quad x\in[0,+\infty), \tag{65}$$

$$u(0,t)=f(t), \quad 0\le t\le T, \tag{66}$$

$$u_x(0,t)=\varphi(t), \quad 0\le t\le T, \tag{67}$$

где $\alpha>0$ – малый параметр.

Определение 5. Пара функций $u(x,t)$ и $f(t)$ называются решением обратной задачи (64) – (67), если $u(x,t)\in C^{(2,1)}_{M_\gamma}(Q_T^+)\cap C(\overline{Q}_T^+)$, $f(t)\in C_0^1[0,T]$ и удовлетворяют уравнениям (64) – (67) в классическом смысле.

Теорема 12. Пусть $u_0(x)\in C^2_{M_\gamma}[0,+\infty)$, $g(x,t)\in C^{(1,0)}_{M_\gamma}(\overline{Q}_T^+)$, $\varphi(t)\in C^1([0,T])$ и выполнены условия согласования $g(0,t)=0, u_0(0)=0, u_0'(0)=\varphi(0)=0$. Тогда при $\gamma<1-T$ решение обратной задачи (64) – (67) $\exists!$.

В разделе 4.5 рассмотрим следующую граничную обратную задачу: пусть функция $u(x,t)$ удовлетворяет условиям

$$u_t=u_{xx}, \quad (x,t)\in \Pi_T, \tag{68}$$

$$u(x,0)=0, \quad 0\le x\le 1, \tag{69}$$

$$u(0,t)=0, \quad u(1,t)=\varphi(t), \quad 0\le t\le T. \tag{70}$$

Предположим, что функция $\varphi(t)$ неизвестна и известна следующая дополнительная информация о решении задачи (68) – (70)

$$u_x(0,t)=h(t), \quad 0\le t\le T, \tag{71}$$

Требуется определить функцию $\varphi(t)$, где $h(t)$ – заданная функция.

Граничная обратная задача (68) – (71) исследована приведением граничную обратную задачу к интегральному уравнению Вольтерра 1-го рода и методом А. М. Денисова получено приближенное решение этой задачи.

В разделе 4.6 мы рассматриваем следующую начально-краевую задачу: найти функцию $u(x,t)$ удовлетворяющее в области D_T уравнение

$$u_t-u_{xx}=0, \quad 0<t\le T, \quad 0<x<\pi, \tag{72}$$

начальному условию

$$u(x,0)=u_0(x), \quad 0\le x\le \pi, \tag{73}$$

граничным условиям

$$u(0,t)=\varphi(t), u_x(\pi,t)=f(t), \quad 0\le t\le T. \tag{74}$$

Поставим обратную задачу: в начально-краевой задаче (72) – (74) функции $u_0(x),\varphi(t)$ заданы, а $f(t)$ неизвестно. Пусть требуется определить функцию $f(t)$, если

$$u(x_0,t)=h(t), 0\le t\le T, \tag{75}$$

где $h(t)$ – заданная функция, а $x_0\in(0,\pi)$ – заданное число.

Доказана однозначная разрешимость этой задачи.

В разделе 4.7 исследуется однозначная разрешимость и условная устойчивость задачи Коши с обратным временем. Требуется найти в прямоугольнике D_T функцию $u(x,t)$, удовлетворяющую следующим условиям:

$$u_t-a^2u_{xx}=f(x,t), \quad (x,t)\in D_T \tag{76}$$

$$u(x,T)=\varphi(x), \quad 0\le x\le \pi, \tag{77}$$

$$u_x(0,t)=0, u_x(\pi,t)=0, \quad 0\le t\le T. \tag{78}$$

Здесь $\varphi(x), f(x,t)$ – заданные функции.

Для задачи (76) – (78) верно

Теорема 13. Пусть $\varphi(x)\in L_2(0,\pi)$, $f(x,t)\in C([0,T];L(0,\pi))$ и выполнены условия согласования $\varphi'(0)=0, \varphi'(l)=0$ и неравенство

$$\sum_{k=0}^{\infty}\left[\varphi_k e^{k^2T}-\int_0^T e^{k^2s}f_k(s)ds\right]<+\infty.$$

Тогда решение задачи (76) – (78) $\exists!$ и это решение дается формулой

$$u(x,t)=\sum_{k=0}^{\infty}\left[\varphi_k e^{k^2(T-t)}-\int_t^T e^{-k^2(t-s)}f_k(s)ds\right]\cos kx. \tag{79}$$

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В диссертационной работе исследованы вопросы однозначной разрешимости граничных обратных задач для псевдопараболического уравнения третьего порядка с малым параметром и получены следующие результаты:

1) Найдены достаточные условия для разрешимости решения прямых (начальной и начально-краевых) задач для псевдопараболического уравнения третьего порядка с малым параметром и получены соответствующие явное решение.

2) Найдены достаточные условия, обеспечивающие существование и единственность решения граничных обратных задач с различными дополнительными условиями для псевдопараболического уравнения третьего порядка;

3) доказаны теоремы существования и единственности решения граничных обратных задач для псевдопараболического уравнения с различными дополнительными условиями;

4) доказаны теоремы существования и единственности решения граничных обратных задач для уравнения теплопроводности;

5) Методом регуляризации А. М. Денисова построена приближенное решение одной граничной обратной задачи для уравнения теплопроводности;

6) Методом квазиобращения исследована некорректная задача Коши для уравнения теплопроводности с обратным временем.

ПРАКТИЧЕСКИЕ РЕКОМЕНДАЦИИ

Диссертационная работа носит теоретический характер и ее результаты могут быть использованы при исследовании граничных обратных задач для дифференциальных уравнений высокого порядка типа С.Л. Соболева. А также могут быть использованы при чтении спецкурсов в высших учебных заведениях.

СПИСОК ОПУБЛИКОВАННЫХ РАБОТ ПО ТЕМЕ ДИССЕРТАЦИИ

1. Муканбетова, А. Т. Об одной граничной обратной задаче для псевдопараболического уравнения [Текст] / Б. С. Аблабеков, А. Т. Муканбетова // Теория и численные методы решения обратных и некорректных задач: сб. тез. 10-й междунар. молодеж. науч. шк.-конф., Новосибирск, 10-13 окт. 2018 г. – Новосибирск, 2018. – С. 11.
2. Муканбетова, А. Т. О разрешимости решений второй начально-краевой задачи для псевдопараболического уравнения с малым параметром [Текст] / Б. С. Аблабеков, А. Т. Муканбетова // Наука, новые технологии и инновации Кыргызстана. – Бишкек, 2019. – № 3. – С. 41–47.
3. Муканбетова, А. Т. Первая начально-краевая задача для одномерного псевдопараболического уравнения с малым параметром [Текст] / Б. С. Аблабеков, А. Т. Муканбетова // Евраз. науч. объед. (ЕНО). – Москва, 2019. – Т. 1, № 4 (50). – С. 1–5.
4. Муканбетова, А. Т. О одной граничной обратной задаче для уравнения теплопроводности [Текст] / Б. С. Аблабеков, А. Т. Муканбетова // Современные проблемы физико-математических наук: материалы V Междунар. науч.-практ. конф., 26-29 сент., 2019 г. / под общ. ред. Т. Н. Можаровой. – Орел, 2019. – С. 14–18.
5. Муканбетова, А. Т. Краевая задача на полупрямой для псевдопараболического уравнения с малым параметром [Текст] / Б. С. Аблабеков, А. Т. Муканбетова // Вестн. КРАУНЦ (Камчат. регион. ассоц. Учеб.-науч. центр). Физ.-мат. науки. – 2020. – Т. 32. № 3. – С. 29–41. – DOI: 10.26117/2079-6641-2020-32-3-29-41.
6. Муканбетова, А. Т. О разрешимости граничной обратной задачи для псевдопараболического уравнения [Текст] / Б. С. Аблабеков, А. Т. Муканбетова // Евраз. науч. объед. (ЕНО). – 2021. – Т. 1, № 7 (77). – С. 5–8.
7. Муканбетова, А. Т. Граничная обратная задача с интегральным переопределением для псевдопараболического уравнения [Текст] / А. Т. Муканбетова // Евраз. науч. объед. (ЕНО). – 2021. – Т. 1, № 10 (80). – С. 25–27.
8. Муканбетова, А. Т. Граничная обратная задача для псевдопараболического уравнения в случае второй начально-краевой задачи [Текст] / Б. С. Аблабеков, А. Т. Муканбетова // Современные проблемы физико-математических наук: материалы VII Междунар. науч.-практ. конф., 18-21 нояб., 2021 г. / под общ. ред. Т. Н. Можаровой. – Орел, 2021. – С. 16–21.
9. Муканбетова, А. Т. Кичи параметрлүү псевдопараболалык теңдеме үчүн аралаш түрдөгү чектик маселенин чечими жөнүндө / Б. С. Аблабеков, А. Т. Муканбетова // Изв. вузов Кыргызстана. – 2021. – № 5. – С. 3–9.
10. Муканбетова, А. Т. О разрешимости граничной обратной задачи для уравнения теплопроводности [Текст] / Б. С. Аблабеков, А. Т. Муканбетова // Вестн. Кырг. гос. ун-та стр-ва, транспорта и архитектуры им. Н. Исанова. –2021. – № 4 (74). – С. 670–676.
11. Муканбетова, А. Т. Кичи параметрлүү псевдопараболалык теңдеме үчүн чектик тескери маселенин чечими жөнүндө [Текст] / Б. С. Аблабеков, А. Т. Муканбетова // Наука, новые технологии и инновации Кыргызстана. – 2022. – № 4. – С. 13–16.
12. Муканбетова, А. Т. Корректүү эмес коюлган жылуулук өткөргүчтүн теңдемеси үчүн тескери убакыттагы Коши маселесин квазиинверсия ыкмасы менен регуляризациялоо [Текст] / Б. С. Аблабеков, А. Т. Муканбетова // Наука, новые технологии и инновации Кыргызстана. – 2022. – № 6. – С. 7–11.
13. Mukanbetova, A. T. On the solvability of a boundary inverse problem for pseudoparabolic equation [Text] / A. T. Mukanbetova // Problems of Modern Mathematics: 70th anniversary of A. A. Borubaev, June 16-18, 2021. – Bishkek, 2021. – P. 98.

Муканбетова Айзат Темирбековнанын «Псевдопараболалык теңдемелер үчүн чектик тескери маселелер» деген темадагы 01.01.02 - дифференциалдык теңдемелер, динамикалык системалар жана оптималдык башкаруу адистиги боюнча физика-математикалык илимдердин кандидаты окумуштуулук даражасын изденип алуу үчүн жазылган диссертациясынын

РЕЗЮМЕСИ

Негизги сөздөр: тескери маселе, дифференциалдык теңдеме, псевдопараболалык теңдеме, фундаменталдык чыгарылыш, Гриндин функциясы, экинчи түрдөгү Вольтерранын интегралдык теңдемелер системасы.

Изилдөө объектиси: Кичи параметрлүү үчүнчү тартиптеги жекече туундулуу псевдопараболалык дифференциалдык теңдемелер үчүн чектик тескери маселелер.

Изилдөө предмети: Кичи параметрлүү үчүнчү тартиптеги жекече туундулуу псевдопараболалык дифференциалдык теңдемелер үчүн чектик тескери маселелердин чыгарымдуулугун камсыз кылуучу жетиштүү шарттарды табуу.

Иштин максаты. үчүнчү тартиптеги жекече туундулуу псевдопараболалык дифференциалдык теңдемелер үчүн чектик тескери маселелердин чыгарылышынын жашашын жана жалгыздыгын далилдөө.

Изилдөөнүн методдору: фундаменталдык чыгарылыш, Вольтеррдин интегралдык теңдемелер ыкмасы, квазиинверсия ыкмасы, Гриндин функциясы.

Изилдөөнүн илимий жаңылыгы. 1) Кичи параметрлүү үчүнчү тартиптеги жекече туундулуу псевдопараболалык теңдемелер үчүн түз маселелердин чыгарылыштарынын жашашынын жана жалгыздыгынын жетиштүү шарттары табылды.

2) Кичи параметрлүү үчүнчү тартиптеги жекече туундулуу псевдопараболалык теңдемелер үчүн чектик тескери маселелердин чыгарылыштарынын жашашын жана жалгыздыгын камсыздоочу шарттар аныкталды.

Колдонуу боюнча сунуштар. Алынган илимий натыйжаларды жогорку тартиптеги жекече туундулуу теңдемелер үчүн чектик тескери маселелердин чыгарылышын изилдөөдө жана аны тургузууда колдонууга сунуштайбыз.

Колдонуу аймагы. Изилденген чектик тескери маселелер механикада, жана топурак таануу илиминде, математикалык физикада, компьютердик томографияда жана тармактарда колдонулушу мүмкүн.

РЕЗЮМЕ

Диссертации Мукамбетовой Айзат Темирбековны на тему: «Граничные обратные задачи для псевдопараболических уравнений» на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук по специальности 01.01.02 – дифференциальные уравнения, динамические системы и оптимальное управление

Ключевые слова: обратная задача, дифференциальное уравнение, псевдопараболическое уравнение, фундаментальное решение, функция Грина, система интегральных уравнений Вольтерра второго рода.

Объект исследования: Граничные обратные задачи для псевдопараболических уравнений в частных производных третьего порядка с малым параметром.

Предмет исследования: Нахождение достаточных условий, обеспечивающих разрешимость граничных обратных задач для псевдопараболических уравнений третьего порядка с малым параметром.

Цель работы. Доказательство существования и единственности решения граничных обратных задач для псевдопараболических дифференциальных уравнений с частными производными третьего порядка.

Методы исследования: Фундаментальное решение, метод интегральных уравнений Вольтерра, метод квазиобращения, функция Грина.

Полученные результаты и их новизна: 1) Найдены достаточные условия существования и единственности решения прямых задач для псевдопараболических уравнений третьего порядка с малым параметром. 2) Определены условия, обеспечивающие существование и единственность решения граничных обратных задач для псевдопараболических уравнений третьего порядка с малым параметром.

Рекомендации по использованию. Рекомендуем использовать полученные научные результаты при исследовании граничных обратных задач для дифференциальных уравнений высокого порядка.

Область применения. Исследуемые граничные обратные задачи могут найти применение в механике, почвоведении, математической физике, компьютерной томографии и других областях.

SUMMARY

Dissertations of Mukanbetova Aizat Temirbekovna on the topic: "Boundary inverse problems for pseudoparabolic equations" for the scientific degree of candidate of physical-mathematical sciences in the specialty 01.01.02 - differential equations, dynamical systems and optimal control.

Keywords: inverse problem, differential equation, pseudoparabolic equation, fundamental solution, Green's function, system of Volterra integral equations of the second kind.

Object of research: Boundary inverse problems for third-order pseudoparabolic partial differential equations with a small parameter.

Subject of study: Finding sufficient conditions to ensure the solvability of boundary inverse problems for third-order pseudoparabolic equations with a small parameter.

Purpose of work. Proof of the existence and uniqueness of the solution of boundary inverse problems for pseudoparabolic partial differential equations of the third order.

Research methods: Fundamental solution, Volterra method of integral equations, quasi-inversion method, Green's function.

The results obtained and their novelty: 1) Sufficient conditions for the existence and uniqueness of the solution of direct problems for third-order pseudoparabolic equations with a small parameter are found. 2) Conditions are determined that ensure the existence and uniqueness of the solution of boundary inverse problems for third-order pseudoparabolic equations with a small parameter.

Recommendations for use. We recommend using the obtained scientific results in the study of boundary inverse problems for high-order differential equations.

Application area. The investigated boundary inverse problems can be used in mechanics, soil science, mathematical physics, computed tomography and other fields.

ПЕРЕЧЕНЬ ОСНОВНЫХ ОБОЗНАЧЕНИЙ И ОПРЕДЕЛЕНИЙ

Сначала введем необходимые обозначения и определения:

$\mathbb{N}=\{1,2,3,\ldots\}$ – множество натуральных чисел;

$\mathbb{R}$ – множество действительных чисел;

$Q_T=\{(x,t): x\in\mathbb{R},\ t\in(0,T]\}. Q_T^+=\{(x,t): x\in(0,+\infty), t\in(0,T]\}$ $T>0$ -фиксированное число,

$\Pi_T=\{(x,t)|0<x<1, 0<t\le T\}$, $T>0$ - фиксированное число,

$\Omega_T=\{(t,x)\,|\,0<x<l,\ 0<t\le T\}$, где $T,l>0$ – фиксированные числа.

$D_T=\{(x,t)|\ x\in(0,\pi), t\in(0,T]\}$, $T>0$ - фиксированное число.

$\in$ – означает "принадлежит";

$\forall$ – означает "для любого";

$\exists$ – означает "существует";

$\exists!$ – означает "существует единственное";

$\Rightarrow$ – «следует»;

$C^l(\Omega), (l=0,1,\ldots)$ - пространство l - раз непрерывно дифференцируемых в области Ω функций,в частности, $C^0(\Omega)=C(\Omega)$;

$C_0^1[0,T]\equiv\left\{\psi(t)\in C^1[0,T],\quad \psi(0)=0\right\}$,

$C^{(n,m)}(\Omega_T)$ – - пространство функций $v(x,t)$, определенных в Ω_T и таких, что $\dfrac{\partial^{k+l}v}{\partial x^k\partial t^l}\in C(\Omega_T)$ при $0\le k\le n,\quad 0\le l\le m$;

Аналогично определяется пространство $C^{(n,m)}(\overline{Q}_T^+)$.

Определение 1. Будем говорить, что функция $v(x,t)$ принадлежит классу $M_\gamma(Q_T^+)$, если существуют вещественное число $\gamma\ge 0$ и непрерывная положительная функция $C(t)$ такие, что имеет место оценка

$$|v(x,t)|\le C(t)\exp\left\{\gamma|x|\right\}, (x,t)\in\overline{Q}_T.$$

Через $C_{M_\gamma}^{(n,m)}(Q_T)$ будем обозначать пространство функций из $C^{(n,m)}(Q_T)$, которые вместе со своими производными вплоть до порядка (n,m) принадлежат $M_\gamma(Q_T)$, т.е. $D_x^kD_t^lv\in M_\gamma(Q_T), 0\le k\le n,\quad 0\le l\le m.$

Аналогично определяется пространства $C_{M_\gamma}^{(n,m)}(Q_T^+), C_{M_\gamma}^{(n)}(\mathbb{R}_+)$,

Муканбетова Айзат Темирбековна

Граничные обратные задачи для псевдопараболических уравнений
01.01.02 – дифференциальные уравнения, динамические системы
и оптимальное управление

АВТОРЕФЕРАТ

диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Подписано в печать 11.05.2023 г.
Печать офсетная. Формат 60x84 1/16.
Объем 1,5 п. л. Тираж 100 экз. Заказ 197

Отпечатано в типографии КРСУ
720048, г. Бишкек, ул. Анкара, 2а