БУЛЕТИНУЛ
АКАДЕМИЕЙ ДЕ ШТИИНЦЕ А РСС МОЛДОВЕНЕШТЬ

ИЗВЕСТИЯ
АКАДЕМИИ НАУК МОЛДАВСКОЙ ССР

8
1967

физтех. и матем.

АКАДЕМИЯ НАУК МОЛДАВСКОЙ ССР

БУЛЕТИНУЛ
АКАДЕМИЕЙ ДЕ ШТИИНЦЕ А РСС МОЛДОВЕНЕШТЬ

ИЗВЕСТИЯ
АКАДЕМИИ НАУК МОЛДАВСКОЙ ССР

№ 8

СЕРИЯ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИХ И МАТЕМАТИЧЕСКИХ НАУК

РЕДАКЦИОННО-ИЗДАТЕЛЬСКИЙ ОТДЕЛ
АКАДЕМИИ НАУК МОЛДАВСКОЙ ССР
КИШИНЕВ • 1967

В. Д. БЕЛОУСОВ

ПРОДОЛЖЕНИЯ КВАЗИГРУПП

1°. Известно несколько способов получения одних квазигрупп из других, основными же являются преобразования изотопии и парастрофии. Напомним определения. Квазигруппа $Q(\circ)$ *изотопна* квазигруппе $Q(\cdot)$, если существуют такие три подстановки множества Q (взаимно однозначные соответствия множества на себя) α, β, γ, что

$$x\circ y=\gamma^{-1}(\alpha x\cdot\beta y),$$

или сокращенно

$$(\circ)=(\cdot)^{(\alpha,\beta,\gamma)}=(\cdot)^{T},$$

где $T=(\alpha,\ \beta,\ \gamma)$.

Переход от операции $(\cdot)$ к обратным операциям называется *парастрофией*. Обратные операции определяются следующим образом:

$$(\cdot)^{-1}=(\backslash),\quad {}^{-1}(\cdot)=(/),$$

где $xy=z\longleftrightarrow x\backslash z=y\longleftrightarrow z/y=x$. Так как ${}^{-1}(\cdot)$ и $(\cdot)^{-1}$ опять квазигрупповые операции, то мы можем образовать еще операции $[{}^{-1}(\cdot)]^{-1}$. ${}^{-1}[(\cdot)^{-1}]$, ${}^{-1}\{[{}^{-1}(\cdot)]^{-1}\}=(\cdot)^{*}$, где $x(\cdot)^{*}y=yx$. Таких различных обратных операций всего шесть, считая и операцию $(\cdot)$. Переход $(\cdot)\to{}^{\sigma}(\cdot)$, где ${}^{\sigma}(\cdot)$ любая из обратных операций, перечисленных выше, называется парастрофией (а обратные операции называются парастрофными к данной).

Существуют и другие способы получения квазигрупп из данной квазигруппы. Так, Брак в [2] указывает следующий простой способ получения луп Штейнера из квазигрупп Штейнера. Квазигруппа $Q(\cdot)$ называется квазигруппой Штейнера, если $Q(\cdot)$ является TS-квазигруппой, т. е. в $Q(\cdot)$ выполняются тождества $xy=yx$, $x\cdot xy=y$, и $Q(\cdot)$ идемпотентна, т. е. $x^2=x$. Если TS-квазигруппа $Q(\cdot)$ является лупой, то она называется лупой Штейнера. Пусть $Q(\cdot)$ квазигруппа Штейнера. На множестве $Q'=Q\cup k$ $(k\notin Q)$ определим операцию $(\circ)$:

$$x\circ y=\begin{cases} x\cdot y, \text{ если } x\neq k,\ y\neq k,\ y\neq x,\\ k, \text{ если } x=y,\\ x, \text{ если } y=k,\\ y, \text{ если } x=k.\end{cases}\qquad(1)$$

Легко усмотреть, что $Q'(\circ)$ — лупа Штейнера. Вообще говоря, этот процесс получения квазигрупп $Q'(\circ)$ из $Q(\cdot)$ не требует, чтобы $Q(\cdot)$ была квазигруппой Штейнера, как видно из (1), достаточно требовать только идемпотентности $Q(\cdot)$. В [1] этот процесс получения квазигрупп был обобщен. Чтобы прийти к соответствующему определению, мы рассмотрим следующее комбинаторное понятие. Как известно, таблица умножения квазигруппы $Q(\cdot)$ называется в комбинаторном анализе латинским квадратом. Пусть дана конечная квазигруппа $Q(\cdot)$, $Q=\{1, 2, 3, \ldots, n\}$. Упорядоченная последовательность элементов $a=\{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ называется диагональю [3], если выполняются следующие условия: 1) все элементы последовательности a различны, т. е. a — некоторая перестановка элементов $1, 2, 3, \ldots, n$; 2) различные a_i находятся в различных строках, (а именно a_i находится в строке i) и столбцах латинского квадрата для квазигруппы $Q(\cdot)$. Например, в латинском квадрате

(2)

·	1	2	3	4	5
1	1	2	3	4	5
2	3	5	4	2	1
3	5	1	2	3	4
4	4	3	5	1	2
5	2	4	1	5	3

последовательность 2, 4, 5, 1, 3 является диагональю. Из латинского квадрата можно получить новый латинский квадрат, если элементы диагонали заменить через k и добавить одну строку и один столбец, как это указано ниже:

(3)

0	k	1	2	3	4	5
k	k	5	2	4	1	3
1	2	1	k	3	4	5
2	4	3	5	k	2	1
3	5	k	1	2	3	4
4	1	4	3	5	k	2
5	3	2	4	1	5	k

Все эти комбинаторные понятия можно сформулировать алгебраически. А именно говорим, что подстановка θ множества Q называется *полной* [1] для квазигруппы $Q(\cdot)$, если отображение $\theta' : x \to x \cdot \theta x$ также подстановка (подстановка θ' и соответствует понятию диагонали). Процесс перехода от квазигруппы (2) к квазигруппе (3) описывается следующим образом:

$$x \circ y = \begin{cases} xy, & x \neq k,\ y \neq k,\ y \neq \theta x \\ k, & y \neq k,\ x \neq k,\ y = \theta x \\ \theta' x, & x \neq k,\ y = k \\ \theta'\theta^{-1} y, & x = k,\ y \neq k \\ k, & x = y = k \end{cases} \tag{4}$$

Как показано в [1], $Q'(\circ)$ — квазигруппа. Эта квазигруппа, согласно [1], называется *продолжением* квазигруппы $Q(\cdot)$. В [1] изучались различные свойства продолжений квазигрупп, в основном продолжений групп.

Из определения (4) продолжения квазигрупп видно, что оно несимметрично, да и определение полной подстановки тоже имеет этот недостаток. Здесь мы дадим новое симметричное определение продолжения квазигрупп и продолжим исследования, начатые в [1]. Главная задача, которая здесь возникает, следующая: какие нужны необходимые и достаточные условия для изотопии двух продолжений?

2°. Начнем со следующего определения:

Определение 1. Упорядоченная тройка подстановок $U=(\lambda, \mu, \nu)$ называется *полной* для квазигруппы $Q(\cdot)$, если

$$\lambda x \cdot \mu x = \nu x \tag{5}$$

для любых $x \in Q$.

Как следует из этого определения, существование полной подстановки эквивалентно существованию полной тройки подстановок (п. т. п.).

Действительно, из (5) следует после замены x на $\lambda^{-1}x : x \cdot \mu\lambda^{-1}x = \nu\lambda^{-1}x$, т. е. $\mu\lambda^{-1}$ — полная подстановка. Обратное очевидно.

Если квазигруппа обладает п. т. п. (или, что то же самое, полной подстановкой), то она называется *допустимой*. Как показано в [1], *квазигруппа* $Q(\cdot)$ *допустима тогда и только тогда, когда она изотопна идемпотентной квазигруппе*.

Пусть A — квазигруппа и пусть $A(x, y)=z$. Парастроф ${}^\sigma A$ означает, что ${}^\sigma A(x', y')=z'$, где $\sigma(x, y, z)=(x', y', z')$ — перестановка элементов x, y, z. Так, если $\sigma(x, y, z)=(x, z, y)$, то ${}^\sigma A=A^{-1}$. Если $T=(\alpha, \beta, \gamma)$, то через T^σ обозначим такую же перестановку подстановок α, β, γ. Через T^r и T^l обозначаем соответственно (α, γ, β) и (γ, β, α). Имеет место

Лемма 1. *Если* $U=(\lambda, \mu, \nu)$ — *п. т. п. для квазигруппы* A, *то* U^σ — *п. т. п. для* ${}^\sigma A$.

Докажем лемму для случая ${}^\sigma A=A^{-1}$. Имеем $A(\lambda x, \mu x)=\nu x$, откуда $A^{-1}(\lambda x, \nu x)=\mu x$, т. е. $(\lambda, \nu, \mu)=U^r$ является п. т. п. для A^{-1}. Так же доказывается лемма и для остальных случаев.

Дадим теперь определение продолжения квазигруппы.

Определение. 2. Пусть $Q(\cdot)$ — допустимая квазигруппа и пусть $U=(\lambda, \mu, \nu)$ — её п. т. п. Определим на множестве $Q'=Q \cup k$ $(k \overline{\in} Q)$ операцию $(\circ)$ следующим образом:

$$\begin{cases} x \circ y = xy, & \text{если } x \neq k,\ y \neq k,\ \mu^{-1}y \neq \lambda^{-1}x, \\ \lambda x \circ \mu x = k, & \text{если } x \neq k, \\ x \circ k = \nu\lambda^{-1}x, & \text{если } x \neq k, \\ k \circ x = \nu\mu^{-1}x, & \text{если } x \neq k, \\ k \circ k = k. \end{cases} \tag{6}$$

Тогда $Q'(\circ)$ называется *продолжением* квазигруппы $Q(\cdot)$, и в этом случае пишем

$$(\circ)=(\cdot, U).$$

Если $U=(1, \theta, \theta')$ (т. е. θ — полная подстановка квазигруппы $Q(\cdot)$, то из (6) получаем определение (4). То, что $Q'(\circ)$ — квазигруппа, проверяется непосредственно (см. [1]).

Замечание 1. *$Q'(\circ)$ — лупа тогда и только тогда, когда $Q(\cdot)$ идемпотентна и $U=(\lambda, \lambda, \lambda)$, где λ — любая подстановка множества Q.*

Действительно, из последнего из равенств (6) следует, что единицей лупы $Q'(\circ)$ должен быть элемент k, а из третьего и четвертого из (6) следует $\lambda=\mu=\nu$. В силу определения п. т. п. заключаем, что $Q(\cdot)$ идемпотентна.

Замечание 2. *Квазигруппа $Q'(\circ)$ изотопна лупе, в которой каждый элемент имеет порядок два.*

Рассмотрим изотоп

$$x+y=\overline{\lambda\nu}^{-1}x\circ\overline{\mu\nu}^{-1}y,$$

где $\overline{\lambda}x=\lambda x$, если $x\neq k$, $\overline{\lambda}k=k$; аналогично определяются $\overline{\mu}$, $\overline{\nu}$. Элемент k будет единицей для $Q'(+)$. Действительно, пусть $x\neq k$, тогда

$$x+k=\overline{\lambda\nu}^{-1}x\circ\overline{\mu\nu}^{-1}k=\lambda\nu^{-1}x\circ k=\nu\lambda^{-1}(\lambda\nu^{-1}x)=x.$$

Аналогично находим $k+x=x$ $(x\neq k)$, и, кроме того, очевидно $k+k=k$. Пусть опять $x\neq k$, тогда

$$x+x=\lambda\nu^{-1}x\circ\mu\nu^{-1}x=k.$$

Для дальнейшего нам понадобится следующая

Лемма 2. *Пусть U — п. т. п. для квазигруппы A, тогда*

$${}^{\sigma}(A,\ U)=({}^{\sigma}A,\ U^{\sigma}).$$

Доказательство. Как и в лемме 1, мы проведем доказательство только для случая, когда ${}^{\sigma}A=A^{-1}$. Как показано в лемме 1, в этом случае U^{r} будет п. т. п. для A^{-1}. Пусть $\overline{A}=(A,\ U)$ и пусть $\overline{B}=(A^{-1},\ U^{r})$. Нам надо доказать, что $\overline{B}=\overline{A}^{-1}$, или, более детально,

$$(A,\ U)^{-1}=(A^{-1},\ U^{r}).$$

Мы докажем, что

$$\overline{B}\overline{A}=\overline{E}, \tag{7}$$

где $\overline{E}$ означает правую единичную операцию, т. е. $\overline{E}(x,\ y)=y$ для всех $x,\ y\in Q'$ (на Q' определены операции $\overline{B}\overline{A}$ и $\overline{E}$), а в левой части равенства (7) имеем правое произведение операций [4]:

$$\overline{B}\overline{A}(x,\ y)=\overline{B}[x,\ \overline{A}(x,\ y)]$$

для любых $x,\ y\in Q'$.

Согласно определению (6), имеем при $U=(\lambda,\ \mu,\ \nu)$.

$$\overline{A}(x,\ y)=\begin{cases} A(x,\ y), & x\neq k,\ y\neq k,\ \lambda^{-1}x\neq\mu^{-1}y,\\ k, & x=\lambda z,\ y=\mu z,\ z\neq k,\\ \nu\lambda^{-1}x, & x\neq k,\ y=k,\\ \nu\mu^{-1}y, & x=k,\ y\neq k,\\ k, & x=y=k.\end{cases}$$

Для продолжения $\overline{B}$ имеем при $U^{r}=(\lambda,\ \nu,\ \mu)$:

$$\overline{B}(x,\ y)=\begin{cases} A^{-1}(x,\ y), & x\neq k,\ y\neq k,\ \lambda^{-1}x\neq\nu^{-1}y,\\ k, & x=\lambda z,\ y=\nu z,\ z\neq k,\\ \mu\lambda^{-1}x, & x\neq k,\ y=k,\\ \mu\nu^{-1}y, & x=k,\ y\neq k,\\ k, & x=y=k.\end{cases}$$

1) Пусть $x\neq k$, $y\neq k$ и $\lambda^{-1}x\neq\mu^{-1}y$, тогда

$$\overline{B}\overline{A}(x,\ y)=\overline{B}[x,\ \overline{A}(x,\ y)]=\overline{B}[x,\ A(x,\ y)].$$

Но $\lambda^{-1}x\neq\nu^{-1}A(x,\ y)$. Действительно, из $\lambda^{-1}x\neq\mu^{-1}y$ следует $\mu\lambda^{-1}x\neq y$, откуда $A(x,\ \mu\lambda^{-1}x)\neq A(x,\ y)$ или $A(\lambda\lambda^{-1}x,\ \mu\lambda^{-1}x)\neq A(x,\ y)$, $\nu\lambda^{-1}x\neq$ $\neq A(x,\ y)$, откуда получаем искомое неравенство. Итак,

$$\overline{B}\overline{A}(x,\ y)=A^{-1}[x,\ A(x,\ y)]=y.$$

2) Пусть $x=\lambda z$, $y=\mu z$ $(z\neq k)$, тогда

$$\overline{B}\overline{A}(x,\ y)=\overline{B}[x,\ \overline{A}(x,\ y)]=\overline{B}[x,\ \overline{A}(\lambda z,\ \mu z)]=\overline{B}(x,\ k)=\mu\lambda^{-1}x=$$
$$=\mu\lambda^{-1}(\lambda z)=\mu z=y.$$

3) Пусть $x\neq k$, $y=k$:

$$\overline{B}\overline{A}(x,\ k)=\overline{B}[x,\ \overline{A}(x,\ k)]=\overline{B}(x,\ \nu\lambda^{-1}x)=\overline{B}(\lambda\lambda^{-1}x,\ \nu\lambda^{-1}x)=k.$$

4) Если $x=k$, $y\neq k$, то имеем

$$\overline{B}\overline{A}(k,\ x)=\overline{B}[k,\ \overline{A}(k,\ x)]=\overline{B}(k,\ \nu\mu^{-1}x)=\mu\nu^{-1}(\nu\mu^{-1}x)=x.$$

5) Наконец, пусть $x=y=k$. Тогда, очевидно, $\overline{B}\overline{A}(k,\ k)=k$. Итак, $\overline{B}\overline{A}(x,\ y)=y$ для всех $x,\ y\in Q'$, т. е. $\overline{B}\overline{A}=\overline{E}$, откуда следует $\overline{B}=\overline{A}^{-1}$.

Аналогично доказывается, что

$${}^{-1}(A,\ U)=({}^{-1}A,\ U^{l})$$

и другие отношения.

Сейчас рассмотрим еще один способ получения квазигрупп из данной, идемпотентной квазигруппы. Пусть $Q(\cdot)$ — идемпотентная квазигруппа и пусть существует элемент a, коммутирующий со всеми элементами квазигруппы: $xa=ax$. Определим операцию $(\circ)$ следующим образом:

$$x\circ y=\begin{cases} xy, & \text{если } x\neq a,\ y\neq a,\ y\neq x,\\ xa, & \text{если } y=x,\\ x, & \text{если } x\neq a,\ y=a,\\ y, & \text{если } x=a,\ y\neq a.\end{cases} \tag{8}$$

$Q(\cdot)$ будет квазигруппой. Для доказательства этого покажем, что уравнение $c\circ x=d$ имеет единственное решение. Если $c=a$, то уравнение $a\circ x=d$ имеет решение $x=d$, очевидно, другого решения не может быть. Если $c\neq a$, но $d=c$, то уравнение $c\circ x=c$ имеет единственное решение $x=c$. Если $d=c$, то уравнение $c\circ x=d$ имеет решение e, где $ce=d$, так как в этом случае $c\circ e=ce=d$. И в этом случае другого решения не существует. Также показывается, что уравнение $y\circ c=d$ имеет единственное решение для любых $c,\ d\in Q$. Как видно из равенств (8), квазигруппа $Q(\circ)$ является лупой с единицей a, лупу $Q(\circ)$ назовем *косоизотопной* квазигруппе $Q(\cdot)$, обозначим ее $(\circ)=(\cdot)^{\Delta_a}$. Ниже (определение 3) мы обобщим это понятие, но для этого заметим. Пусть квазигруппа $Q(\cdot)$ допустима и пусть $U=(\lambda,\ \mu,\ \nu)$ — её п. т. п. Тогда, как это легко заметить, изотоп $(\cdot)U=(\hat{\cdot})$ будет идемпотентной квазигруппой. Назовем идемпотентную квазигруппу $(\hat{\cdot})$ соответствующей (относительно п. т. п. U) квазигруппе $Q(\cdot)$.

Если существует такой элемент $e \in Q$, что

$$\overset{\wedge}{e \cdot x} = \overset{\wedge}{x \cdot e} \tag{9}$$

для любых $x \in Q$, то п. т. п. назовем *особой п. т. п.* относительно элемента e для квазигруппы $Q(\cdot)$.

Пример. Рассмотрим следующую квазигруппу

	0	1	2	3	4
0	0	4	3	2	1
1	3	2	1	0	4
2	4	3	2	1	0
3	1	0	4	3	2
4	2	1	0	4	3

Тройка подстановок $(1, \alpha, \beta)$, где $\alpha = \begin{pmatrix} 0\,1\,2\,3\,4 \\ 0\,2\,1\,4\,3 \end{pmatrix}$, $\beta = \begin{pmatrix} 0\,1\,2\,3\,4 \\ 0\,1\,3\,2\,4 \end{pmatrix}$, будет полной (т. е. α будет полной подстановкой) и, более того, будет особой, как это легко проверить, относительно элемента 1.

Определим операцию

$$(\circ) = (\cdot)^{\Delta_e(U)}$$

следующим образом

$$x \circ y = \begin{cases} xy, & x \neq \lambda e,\ y \neq \mu e,\ \lambda^{-1}x \neq \mu^{-1}y, \\ x \cdot \mu e, & \lambda^{-1}x = \mu^{-1}y, \\ \nu\lambda^{-1}x, & y = \mu e, \\ \nu\mu^{-1}y, & x = \lambda e. \end{cases} \tag{10}$$

Если $(\cdot)$ — идемпотентная, $U = (1, 1, 1) = 1$ — тождественная подстановка, то получаем определение (8). Как и выше, можно доказать, что $Q(\circ)$ — квазигруппа. Дадим следующее

Определение 3. Пусть $Q(\cdot)$ — допустимая квазигруппа и пусть U — ее особая п. т. п. относительно элемента e. Квазигруппу $Q(\cdot)$, где

$$(\cdot) = (\cdot)^{\Delta_e(U)T},$$

где T — некоторая изотопия (тройка подстановок множества Q), назовем *косоизотопной* квазигруппе $Q(\cdot)$. Компоненты T назовем *компонентами косоизотопии*.

Из определения вытекает, что не для всякой квазигруппы $Q(\cdot)$ существует квазигруппа, косоизотопная ей. Квазигруппа должна быть допустимой и должен существовать такой элемент e, чтобы выполнялось равенство (9), где $(\overset{\wedge}{\cdot})$ — соответствующая идемпотентная квазигруппа для квазигруппы $Q(\cdot)$.

Ниже будет показано, что, вообще говоря, квазигруппа, косоизотопная квазигруппе $Q(\cdot)$, может и не быть изотопной квазигруппе $Q(\cdot)$.

Докажем следующее.

Предложение. Пусть $Q(\cdot)$ — группа порядка больше четырех и

пусть она обладает особой п. т. п. $U = (\lambda, \mu, \nu)$ относительно элемента e. Тогда отображение $x \to x^2$ является подстановкой множества Q, и $(\circ) = (\cdot)^{\Delta_e(U)}$ не изотопна группе.

Согласно определению особой п. т. п. U мы должны иметь

$$\lambda x \cdot \mu x = \nu x, \quad \lambda e \cdot \mu x = \lambda x \cdot \mu e. \tag{11}$$

Пусть $\lambda e = a$, $\mu e = b$. Из равенств (11) находим

$$\mu x = a^{-1}\lambda x b, \tag{12}$$

$$\nu x = (\lambda x\, a^{-1})^2 c, \tag{13}$$

где $c = ab$. Из равенств (11) выводим

$$x^2 = [\nu\lambda^{-1}(xa)]\, c^{-1},$$

откуда заключаем, что $x \to x^2$ — подстановка множества Q. Обратную подстановку к $x \to x^2$ обозначим через $x \to x^{1/2}$. Согласно определению операции $(\circ) = (\cdot)^{\Delta_e(U)}$ должны выполняться равенства

$$x \circ y = xy,\ (x \neq a,\ y \neq b,\ y \neq a^{-1}xb), \tag{14}$$

$$x \circ a^{-1}xb = xb, \tag{15}$$

$$x \circ b = (xa^{-1})^2 c, \tag{16}$$

$$a \circ x = c\,(b^{-1}x)^2. \tag{17}$$

Правые части равенств (16) и (17) мы получаем, используя (12) и (13), а условие к равенству (14) получаем из (12).

Рассмотрим изотоп

$$x + y = R_b^{-1} x \circ L_a^{-1} y. \tag{18}$$

Этот изотоп будет лупой с единицей $c = ab$. Из (16) получаем

$$R_b x = (xa^{-1})^2 c,$$

откуда находим после небольших преобразований

$$R_b^{-1} x = (xc^{-1})^{1/2} a.$$

Аналогично получаем

$$L_a^{-1} x = b\,(c^{-1}x)^{1/2}.$$

Подставляя найденные значения для R_b^{-1} и L_a^{-1} в (18), находим

$$x + y = (xc^{-1})^{1/2} a \circ b\,(c^{-1}y)^{1/2}.$$

Пусть $(xc^{-1})^2 a \neq a$, тогда $(xc^{-1})^2 \neq 1$, где 1 — единица группы $Q(\cdot)$, следовательно, $xc^{-1} \neq 1$ или $x \neq c$. Аналогично из $b(c^{-1}y)^2 \neq b$ следует $y \neq c$. Покажем, что неравенство

$$b\,(c^{-1}y)^{1/2} \neq a^{-1}[(xc^{-1})^{1/2} a]b \tag{19}$$

эквивалентно неравенству $y \neq z$. Для этого используем очевидное равенство

$$u^{-1} v^{1/2} u = (u^{-1} v u)^{1/2},$$

в силу которого правая часть неравенства (19) превращается в $(a^{-1}xc^{-1}a)^{1/2}b=(a^{-1}xb^{-1})^{1/2}b$. Таким образом, (19) эквивалентно неравенству

$$b(c^{-1}y)^{1/2}\neq(a^{-1}xb^{-1})^{1/2}b,$$

или

$$b(c^{-1}y)^{1/2}b^{-1}\neq(a^{-1}xb^{-1})^{1/2},$$

откуда получаем

$$(a^{-1}yb^{-1})^{1/2}\neq(a^{-1}xb^{-1})^{1/2},$$

а последнее равенство эквивалентно неравенству $y\neq x$.

Итак, при $x\neq c$, $y\neq c$, $y\neq x$ имеем

$$x+y=(xc^{-1})^{1/2}ab(c^{-1}y)^{1/2}$$

или

$$x+y=(xc^{-1})^{1/2}c(c^{-1}y)^{1/2}.$$

Введем обозначение

$$\rho x=(xc^{-1})^{1/2}c.$$

Тогда $c^{-1}\rho x=c^{-1}(xc^{-1})^{1/2}c=(c^{-1}x)^{1/2}$, следовательно,

$$x+y=\rho x\cdot c^{-1}\cdot\rho y\ (x\neq c,\ y\neq c,\ y\neq x). \tag{20}$$

Далее, для любого x имеем, используя (15):

$$x+x=R_b^{-1}x\circ L_a^{-1}x=(xc^{-1})^{1/2}a\circ b(c^{-1}x)^{1/2}=\rho x\,b^{-1}\circ bc^{-1}\rho x=$$
$$=\rho x\,b^{-1}\circ a(\rho x\,b^{-1})b=(\rho x\,b^{-1})b=\rho x,$$
$$x+x=\rho x.$$

Предположим, что $Q(+)$ — группа, тогда, в частности, должно выполняться равенство:

$$(x+x)+z=x+(x+z). \tag{21}$$

Будем считать, что x, $z\neq c$ (напомним, что c — единица группы $Q(+)$, так как для $x=c$ или $z=c$ равенство (21) заведомо имеет место. Пусть $z\neq x$, $z\neq\rho x$, тогда в (21), используя равенство (20), можно перейти к операции $(\cdot)$:

$$\rho^2x\,c^{-1}\rho z=\rho x\,c^{-1}\rho(\rho x\,c^{-1}\rho y). \tag{22}$$

Произведя замену $x=\rho^{-1}u$, $z=\rho^{-1}(cv)$, мы из (22) получим

$$\rho u\cdot v=uc^{-1}\rho(uv). \tag{23}$$

При этом неравенства $x\neq c$ и $z\neq c$ приводят к неравенствам

$$u\neq c,\ v\neq 1, \tag{24}$$

а неравенства $z\neq x$, $z\neq\rho x$ — к неравенствам

$$cv\neq u,\ cv\neq\rho u \tag{25}$$

соответственно.

Пусть $u=c^2$. Условия (24) выполняются, если $c\neq 1$. Условия (25) выполняются, если $v\neq c$, $v\neq c^{1/2}$. Подставляя $u=c$ в (23), получим

$$c^{3/2}v=c\rho(c^2v).$$

(Здесь $c^{3/2}$ означает $(c^{1/2})^3$), откуда находим

$$v=c^2.$$

Итак, достаточно подобрать так элемент v, чтобы он был отличным от 1, c, c^2, $c^{1/2}$, и в таком случае равенство (2) не будет иметь места.

Если $c=1$, то $\rho x=x^{1/2}$, равенство (23) принимает вид:

$$x^{1/4}z^{1/2}=x^{1/2}(x^{1/2}z^{1/2})^{1/2}.$$

Здесь $x^{1/4}=(x^{1/2})^{1/2}$. Следовательно,

$$x^{-1/4}z^{1/2}=(x^{1/2}z^{1/2})^{1/2},$$
$$x^{-1/4}z^{1/2}x^{-1/4}z^{1/2}=x^{1/2}z^{1/2},$$

откуда находим $z=x^2$. Подбирая $z\neq x^2$, мы опять показываем, что (21 не может иметь места.

Теперь легко видеть, что если квазигруппа $(+)$ косоизотопна группе $(\cdot)$, то $(+)$ не изотопна $(\cdot)$. Действительно, по определению, $(+)$ изотопна квазигруппе $(\cdot)=(\cdot)^{\Delta_e(U)}$, а $(\cdot)$ не изотопна группе $(\cdot)$.

Следующая лемма указывает на связь, которая существует между определениями (8) и (10).

Лемма 3. *Пусть $Q(\cdot)$ — допустимая квазигруппа с особой п. т. п. $U=(\lambda,\mu,\nu)$ относительно элемента e. Тогда*

$$(\cdot)^{\Delta_e(U)}=(\hat{\cdot})^{\Delta_e(U)^{-1}}. \tag{26}$$

Действительно, пусть $(\hat{\cdot})=(\cdot)^U$ и пусть выполняется равенство $e\hat{\cdot}x=x\hat{\cdot}e$. Введем обозначения

$$(\hat{\cdot})^{\Delta_e}=(\circ),\quad(\cdot)^{\Delta_e U}=(\oplus).$$

Имеем следующие четыре возможных случая:

1) $x\neq e$, $y\neq e$, $x\neq y$. Тогда $x_1=\lambda x\neq\lambda e$, $y_1=\mu y\neq\mu e$, $\lambda^{-1}x_1=\lambda^{-1}(\lambda x)\neq\mu^{-1}(\mu y)=\mu^{-1}y_1$ и поэтому

$$\nu^{-1}(\lambda x\oplus\mu y)=\nu^{-1}(x_1\oplus y_1)=\nu^{-1}(x_1\cdot y_1)=\nu^{-1}(\lambda x\cdot\mu y)=x\hat{\cdot}y=x\circ y.$$

2) Пусть $x=y$, т. е. $\lambda^{-1}x_1=\mu^{-1}y_1$. Тогда

$$\nu^{-1}(\lambda x\oplus\mu x)=\nu^{-1}(x_1\oplus y_1)=\nu^{-1}(x_1\cdot\mu e)=\nu^{-1}(\lambda x\cdot\mu e)=x\hat{\cdot}e=x\circ x.$$

3) Если $x\neq e$, $y=e$, то

$$\nu^{-1}(\lambda x\oplus\mu e)=\nu^{-1}(x_1\oplus\mu e)=\nu^{-1}(\nu\lambda x_1)=\lambda^{-1}x_1=x=x\circ e.$$

4) Случай $x=e$, $y\neq e$ доказывается, как и случай 3). Итак, во всех случаях имеем $\nu^{-1}(\lambda x\oplus\mu y)=x\cdot y$, т. е.

$$(\oplus)^U=(\circ),$$

а отсюда следует и соотношение (26).

Имеет место также следующая

Лемма 4. *Пусть дана квазигруппа* $Q(\cdot)$ *с особой п. т. п.* $U=(\lambda, \mu, \nu)$ *относительно элемента* e. *Тогда* $U'=(\lambda, \mu, \rho)$, *где* $\rho x=\lambda x\cdot\mu e$, *является особой п. т. п. относительно того же элемента* e *для*

$$(\circ)=(\cdot)^{\Delta_e(U)}$$

и имеет место равенство

$$(\cdot)=(\circ)^{\Delta_e(U')}. \tag{27}$$

Следовательно, можно говорить о косоизотопных квазигруппах.

Доказательство леммы 4. Из определения (10) операции $(\circ)$ следует равенство

$$\lambda x\circ\mu x=\lambda x\cdot\mu e.$$

Поэтому $U'=(\lambda, \mu, \rho)$, где $\rho x=\lambda x\cdot\mu e$ будет п. т. п. для $Q(\circ)$, причем U' будет особой п. т. п. относительно e для квазигруппы $(\circ)$, так как если $(\hat{\circ})=(\circ)^{U'}$, то $x\,\hat{\circ}\,e=e\,\hat{\circ}\,x=\rho^{-1}\nu x$. Найдем $(\times)=(\circ)^{\Delta_e(U')}$. Имеем следующие случаи:

1) $x\neq\lambda e$, $y\neq\mu e$, $\lambda^{-1}x\neq\mu^{-1}y$, тогда $x(\times)y=x\circ y=xy$,
2) $\lambda^{-1}x=\mu^{-1}y$, т. е. $y=\mu\lambda^{-1}x$. Тогда

$$x(\times)\mu\lambda^{-1}x=x\circ\mu e=\nu\lambda^{-1}x=\lambda(\lambda^{-1}x)\,\mu(\lambda^{-1}x)=x\cdot\mu\lambda^{-1}x.$$

3) Пусть $y=\mu e$, тогда

$$x(\times)\mu e=\rho\lambda^{-1}x=\lambda(\lambda^{-1}x)\,\mu e=x\cdot\mu e.$$

4) Аналогично доказывается, что $\lambda e(\times)y=\lambda e y$.

Таким образом, $x(\times)y=xy$ для всех $x, y\in Q$, и этим равенство (27) доказано.

Лемма 5. *Пусть* U — *особая п. т. п. относительно элемента* e *для квазигруппы* $Q(\cdot)$. *Тогда* $T^{-1}U$, *где* T — *любая тройка подстановок множества* Q — *особая п. т. п. относительно того же элемента* e *для изотопа* $(\circ)=(\cdot)^T$, *и, кроме того, выполняется равенство*

$$(\cdot)^{\Delta_e(U)T}=(\cdot)^{T\Delta_e(T^{-1}U)}. \tag{28}$$

Первая часть леммы проверяется без труда. Докажем вторую часть. Пусть

$$(\circ)^{\Delta_e(T^{-1}U)}=\oplus, \quad (\cdot)^{\Delta_e(U)}=(+).$$

Мы должны доказать, что $(\oplus)=(+)^T$. Для этого, в силу определения операции $(\oplus)$, мы должны рассмотреть следующие четыре случая:

1) $x\neq\alpha^{-1}\lambda e$, $y\neq\beta^{-1}\mu e$, $\lambda^{-1}\alpha x\neq\mu^{-1}\beta y$. Тогда

$$x\oplus y=x\circ y=\gamma^{-1}(\alpha x\cdot\beta y).$$

В силу условий этого случая имеем $\alpha x\cdot\beta y=\alpha x+\beta y$, таким образом

$$x\oplus y=\gamma^{-1}(\alpha x+\beta y). \tag{29}$$

2) Пусть $y=\beta^{-1}\mu\lambda^{-1}\alpha x$, тогда

$$x\oplus\beta^{-1}\mu\lambda^{-1}\alpha x=x\circ\beta^{-1}\mu e=\gamma^{-1}(\alpha x\cdot\mu e)=\gamma^{-1}(\alpha x+\mu\lambda^{-1}\alpha x)=$$
$$=\gamma^{-1}(\alpha x+\beta\beta^{-1}\mu\lambda^{-1}\alpha x),$$

т. е. и в этом случае выполняется равенство (29).

3) Пусть $y=\beta^{-1}\mu e$:

$$x\oplus\beta^{-1}\mu e=\gamma^{-1}\nu\lambda^{-1}\alpha x=\gamma^{-1}(\alpha x+\mu e),$$

т. е.

$$x\oplus\beta^{-1}\mu e=\gamma^{-1}(\alpha x+\beta\cdot\beta^{-1}\mu e).$$

4) Аналогично имеем

$$\alpha^{-1}\lambda e\oplus y=\gamma^{-1}(\alpha\cdot\alpha^{-1}\lambda e+\beta y).$$

Следовательно, (29) выполняется для любых $x, y\in Q$, и этим доказано равенство (28).

В частности, если $T=U$, то

$$(\cdot)^{U\Delta_e(I)}=(\cdot)^{\Delta_e(U)U},$$

т. е.

$$(\cdot)^{\Delta_e(U)}=(\hat{\cdot})^{\Delta_e U^{-1}}.$$

Мы получим равенство (26).

Следствие. *Если* $(\circ)$ — *косоизотопна* $(\cdot)$, *то и, обратно,* $(\cdot)$ *косоизотопна* $(\circ)$.

В самом деле, пусть $(\circ)=(\cdot)^{\Delta_e(U)S}$, откуда $(\cdot)^{\Delta_e(U)}=(\circ)^{S^{-1}}$. В силу леммы 3 мы должны иметь $(\cdot)=[(\circ)^{S^{-1}}]^{\Delta_e(U')}$ для некоторого U'. Итак,

$$(\cdot)=(\circ)^{S^{-1}\Delta_e(U')}=(\circ)^{S^{-1}\Delta_e(S\cdot S^{-1}U')}=(\circ)^{\Delta_e(S^{-1}U')S^{-1}},$$
$$(\cdot)=(\circ)^{\Delta_e(S^{-1}U')S^{-1}}.$$

3°. В этом $n°$ мы найдем необходимые и достаточные условия, чтобы продолжения квазигрупп были изотопными. Пусть $(\cdot)$ и $(\bullet)$ — две допустимые квазигруппы с п. т. п. $U=(\lambda, \mu, \nu)$ и $V=(\varphi, \psi, \theta)$ соответственно. Пусть $(\hat{\cdot})$ и $(\hat{\bullet})$ будут соответственные идемпотентные квазигруппы для квазигрупп $(\cdot)$ и $(\bullet)$, т. е. $(\hat{\cdot})=(\cdot)^U$, $(\hat{\bullet})=(\bullet)^V$.

Далее, для краткости мы будем говорить, что в квазигруппе $Q(\cdot)$ выполняется условие (A), если лупы, изотопные квазигруппе $Q(\cdot)$, содержат более чем три элемента порядка отличного от двух. Заметим здесь, что, за редким исключением, почти все квазигруппы удовлетворяют условию (A). Основной результат настоящей статьи формулируется следующим образом.

Теорема. *Пусть квазигруппы* $Q(\cdot)$ *и* $Q(\bullet)$ *допустимы с п. т. п.* U *и* V *соответственно и пусть* $Q(\cdot)$ *и* $Q(\bullet)$ *удовлетворяют условию* (A). *Продолжения* $(\cdot, U)$ *и* $(\bullet, V)$ *изотопны тогда и только тогда, когда 1) либо соответствующие идемпотентные квазигруппы для квазигрупп* $(\cdot)$ *и* $(\bullet)$ *изоморфны; 2) либо некоторые одноименные парастрофы этих идемпотентных квазигрупп косоизотопны, причем первые две компоненты косоизотопии совпадают.*

Доказательство. Пусть продолжения $(\times)$ и $(\circ)$ для квазигрупп $(\bullet)$ и $(\cdot)$ соответственно определены на множестве $Q' = Q \cup k$ и пусть $(\times) = (\circ)^{\overline{T}}$, где $\overline{T} = (\overline{\alpha}, \overline{\beta}, \overline{\gamma})$, т. е. $\overline{\alpha}, \overline{\beta}, \overline{\gamma}$ — подстановки множества Q'. Таким образом, мы должны иметь равенство

$$\overline{\gamma}\,(x(\times)\,y) = \overline{\alpha}\,x \circ \overline{\beta}\,y. \tag{30}$$

В силу определения продолжения квазигрупп равенство (30) эквивалентно следующим пяти равенствам

$$\overline{\gamma}(x \bullet y) = \overline{\alpha}\,x \circ \overline{\beta}y, \quad x \neq k, \quad y \neq k, \quad y \neq \psi\varphi^{-1}x, \tag{31}$$

$$\overline{\gamma}k = \overline{\alpha}\,\varphi\,x \circ \overline{\beta}\,\psi x, \quad x \neq k, \tag{32}$$

$$\overline{\gamma}\theta\varphi^{-1}x = \overline{\alpha}x \circ \overline{\beta}k, \; x \neq k, \tag{33}$$

$$\overline{\gamma}\,\theta\psi^{-1}x = \overline{\alpha}\,k \cdot \overline{\beta}x, \; x \neq k, \tag{34}$$

$$\overline{\gamma}\,k = \overline{\alpha}\,k \circ \overline{\beta}k. \tag{35}$$

Из равенства (35) вытекает, что, если два из элементов $\overline{\alpha}k, \overline{\beta}k, \overline{\gamma}k$ равны k, то и третий тоже равен k, поэтому á priori возможны следующие пять случаев:

I) $\overline{\alpha}\,k = k, \; \overline{\beta}k = k, \; \overline{\gamma}\,k = k,$

II) $\overline{\alpha}\,k \neq k, \; \overline{\beta}k \neq k, \; \overline{\gamma}\,k = k,$

III) $\overline{\alpha}\,k = k, \; \overline{\beta}\,k \neq k, \; \overline{\gamma}\,k \neq k,$

IV) $\overline{\alpha}\,k \neq k, \; \overline{\beta}\,k = k, \; \overline{\gamma}\,k \neq k,$

V) $\overline{\alpha}\,k \neq k, \; \overline{\beta}\,k \neq k, \; \overline{\gamma}\,k \neq k.$

Рассмотрим каждый из них в отдельности.

Случай 1. $\overline{\alpha}\,k = k, \overline{\beta}\,k = k, \overline{\gamma}\,k = k$. Подстановки $\overline{\alpha}, \overline{\beta}, \overline{\gamma}$ индуцируют на множестве Q три подстановки, если определить $\alpha x = \overline{\alpha}$, $\beta x = \overline{\beta}x$, $\gamma x = \overline{\gamma}x$ для всех $x \in Q$.
Равенства (31) — (35) принимают следующий вид:

$$\gamma(x \cdot y) = \alpha x \circ \beta y, \; (y \neq \mu\lambda^{-1}x) \tag{36}$$

$$k = \alpha\varphi x \circ \beta\psi x,$$

$$\gamma\theta\varphi^{-1}x = \alpha x \circ k, \tag{37}$$

$$\gamma\theta\psi^{-1}x = k \circ \beta x. \tag{38}$$

В силу определения операции $(\circ)$ из равенств (37) и (38) находим

$$\gamma\theta\varphi^{-1} = \nu\lambda^{-1}\,\alpha, \; \gamma\theta\psi^{-1} = \nu\mu^{-1}\beta. \tag{39}$$

Из равенств (39) находим

$$\lambda^{-1}\alpha\varphi = \mu^{-1}\beta\psi. \tag{40}$$

Перейдем в правой части равенства (36) к операции $(\cdot)$. Для этого нужно предположить, что $\beta y \neq \mu\lambda^{-1}\alpha x$ (очевидно, x и y не равны k). Тогда

$$\gamma(x \bullet y) = \alpha x \cdot \beta y. \tag{41}$$

Если же $\beta y = \mu\lambda^{-1}\alpha x$, то имеем

$$\alpha x \cdot \beta y = \alpha x \cdot \mu\lambda^{-1}\alpha x = \lambda(\lambda^{-1}\alpha x) \cdot \mu\lambda^{-1}\alpha x) = \nu\lambda^{-1}\alpha x. \tag{42}$$

С другой стороны,

$$\gamma(x \bullet y) = \gamma\,(x \bullet \beta^{-1}\mu\lambda^{-1}\alpha x).$$

Однако из равенства (40) следует $\beta^{-1}\mu\lambda^{-1}\alpha = \varphi\psi^{-1}$, поэтому

$$\gamma(x \bullet y) = \gamma(x \bullet \psi\varphi^{-1}x) = \gamma\theta\varphi^{-1}x. \tag{43}$$

Сравнивая равенства (42), (43) и (39), заключаем, что (41) выполняется и при $\beta y = \mu\lambda^{-1}\alpha x$. Таким образом, квазигруппы $(\bullet)$ и $(\cdot)$ изотопны:

$$(\bullet) = (\cdot)^T, \tag{44}$$

где $T = (\alpha, \beta, \gamma)$. Найдем α и β из равенств (39):

$$\alpha = \lambda\nu^{-1}\,\gamma\theta\varphi^{-1}, \; \beta = \mu\nu^{-1}\,\gamma\theta\psi^{-1}.$$

Следовательно,

$$T = (\alpha, \beta, \gamma) = (\lambda\nu^{-1}\gamma\theta\varphi^{-1}, \; \mu\nu^{-1}\,\gamma\theta\psi^{-1}, \; \gamma) =$$
$$= (\lambda, \mu, \nu)\;(\nu^{-1}\gamma\theta, \; \nu^{-1}\gamma\theta), \; \nu^{-1}\gamma\theta)\;(\varphi^{-1}, \; \psi^{-1}, \; \theta^{-1}),$$

т. е.

$$T = U\pi V^{-1}, \tag{45}$$

где $\pi = \nu^{-1}\gamma\theta$. В силу равенства (45) мы можем переписать равенство (44) следующим образом:

$$(\bullet) = (\cdot)^{U\pi V^{-1}}, \tag{46}$$

или

$$(\bullet)^V = (\cdot)^{U\pi},$$

откуда следует

$$(\hat{\bullet}) = (\hat{\cdot})^{\pi}, \tag{47}$$

т. е. $(\hat{\bullet})$ и $(\hat{\cdot})$ изоморфны.

Обратно, пусть имеет место (47) и, следовательно, имеет место (46). Пусть $T = U\pi V^{-1}$, откуда $\pi = U^{-1}TV$. Если $T = (\alpha, \beta, \gamma)$, то мы должны иметь $\pi = (\lambda\alpha^{-1}\varphi, \; \mu^{-1}\beta\psi, \; \nu^{-1}\gamma\theta)$.

Таким образом,

$$\lambda^{-1}\,\alpha\varphi = \mu^{-1}\beta\psi = \nu^{-1}\gamma\theta,$$

а отсюда получаем равенства (39) и (40). Введем на множестве $Q' = Q \cup k$ подстановки $\overline{\alpha}, \overline{\beta}, \overline{\gamma}$, положив $\overline{\alpha}x = \alpha x$ $(x \in Q)$, $\overline{\alpha}k = k$, аналогично определяем $\overline{\beta}$ и $\overline{\gamma}$.

Покажем, что выполняются равенства (31) — (35).

1) Пусть $y \neq \psi\varphi^{-1}x$, $x, y \neq k$. Тогда $x \bullet y \neq k$ и, следовательно, $x(\times)y = x \bullet y$, поэтому

$$\overline{\gamma}\,(x \bullet (\times) y) = \overline{\gamma}\,(x \bullet y) = \gamma\,(x \bullet y) = \alpha x \cdot \beta y.$$

Но $\beta y \neq \beta\psi\varphi^{-1}x = \mu\lambda^{-1}\alpha x$ (см. равенство (40)), поэтому

$$\bar\gamma(x(\times)y) = \alpha x \circ \beta y.$$

2) Если $y=\psi\varphi^{-1}x$, $x\neq k$, то

$$\bar\gamma(x(\times)\psi\varphi^{-1}x) = \bar\gamma k = k = \alpha x\circ\mu\lambda^{-1}\alpha x = \alpha x\circ\beta\psi\varphi^{-1}x = \bar\alpha x\circ\bar\beta\,\psi\varphi^{-1}x.$$

3) Имеем

$$\bar\gamma(x(\times)k) = \bar\gamma\theta\varphi^{-1}x = \gamma\theta\varphi^{-1}x = \nu\lambda^{-1}\alpha x = \alpha x\circ k = \bar\alpha x\circ\bar\beta k.$$

4) Аналогично показываем, что

$$\bar\gamma(k(\times)x) = \bar\alpha k\circ\bar\beta x.$$

5) Наконец, очевидно, что $\bar\gamma(k(\times)k) = \bar\alpha k\circ\bar\beta k$. Из всего сказанного следует,что

$$\bar\gamma(x(\times)y) = \bar\alpha x\circ\bar\beta y,$$

т. е. $(\times)$ и $(\circ)$ изотопны. Первый случай доказан.

Случай II. $\bar\alpha k\neq k$, $\bar\beta k\neq k$, $\bar\gamma k = k$.

Определим подстановку γ, как и в случае первом:

$$\gamma x = \bar\gamma x\ (x\in Q). \tag{48}$$

Так как $\bar\alpha k\neq k$, то существуют такие два элемента a, a_0 в Q, что

$$\bar\alpha a = k,\ \bar\alpha k = a_0.$$

Аналогично имеем для некоторых b, b_0:

$$\bar\beta b = k,\ \bar\beta k = b_0.$$

Равенства (31) — (35) принимают вид:

$$\gamma(x\bullet y) = \bar\alpha x\circ\bar\beta y,\ (x\neq k,\ y\neq k,\ y\neq\psi\varphi^{-1}x).$$

$$k = \bar\alpha\varphi x\circ\bar\beta\psi x\ \ (x\neq k) \tag{49}$$

$$\gamma\theta\varphi^{-1}x = \bar\alpha x\circ b_0\ \ (x\neq k) \tag{50}$$

$$\gamma\theta\psi^{-1}x = a_0\circ\bar\beta x\ \ (x\neq k) \tag{50'}$$

$$k = a_0\circ b_0. \tag{51}$$

Из равенства (51) следует $b_0 = \mu\lambda^{-1}a_0$, или

$$\mu^{-1}b_0 = \lambda^{-1}a_0 = e. \tag{52}$$

Комбинируя равенства (50) и (50'), находим

$$\bar\alpha\varphi x\circ b_0 = a_0\circ\bar\beta\psi x\ \ (x\neq k). \tag{53}$$

Если в (49) положим $x=\varphi^{-1}a$, то получим

$$k = k\bullet\bar\beta\psi\varphi^{-1}a,$$

откуда следует $\bar\beta\psi\varphi^{-1}a = k$,

т. е.

$$b = \psi\varphi^{-1}a. \tag{54}$$

Следовательно, если в (49) $\varphi x\neq a$, то $\psi x\neq b$, и поэтому, в силу определения операции $(\circ)$, мы должны иметь

$$\bar\beta\psi x = \mu\lambda^{-1}\bar\alpha\varphi x\ \ (\varphi x\neq a). \tag{55}$$

Подставляя найденные значения для $\bar\beta\psi x$ в (53), получим

$$\bar\alpha\varphi x\circ b_0 = a_0\circ\mu\lambda^{-1}\bar\alpha\varphi x\ \ (\varphi x\neq a).$$

Пусть $\bar\alpha\varphi x = y$. Из $\varphi x\neq a$ следует, что $y=\bar\alpha\varphi x$ принимает все значения из Q, кроме a_0, поэтому

$$y\circ b_0 = a_0\circ\mu\lambda^{-1}y\ \ (y\neq a_0),$$

или

$$y\circ\mu\lambda^{-1}a_0 = a_0\circ\mu\lambda^{-1}y\ \ (y\neq a_0),$$

откуда

$$y\cdot\mu\lambda^{-1}a_0 = a_0\cdot\mu\lambda^{-1}y\ \ (y\neq a_0).$$

Очевидно, ограничение $y\neq a_0$ можно снять. Заменяя в последнем равенстве y на λz и учитывая равенства (52), находим

$$\lambda y\cdot\mu e = \lambda e\cdot\mu y,$$

т. е.

$$y\mathbin{\hat\cdot} e = e\mathbin{\hat\cdot} y. \tag{56}$$

Таким образом, U является особой п. т. п. для $Q(\cdot)$ относительно элемента e.

Сделаем теперь следующее замечание. Из равенства $(\bullet, V) = (\cdot, U)^{\bar T}$ следует

$$(\cdot, U) = (\bullet, V)^{\bar T^{-1}}.$$

Поэтому любому предложению соответствует в некотором смысле двойственное предложение, заменяя $(\cdot)$, $(\bullet)$, U, V, $\bar T$, $\bar T^{-1}$ на $(\bullet)$, $(\cdot)$, V, U, $\bar T^{-1}$, $\bar T$, соответственно при этом элементы a и a_0, b и b_0 меняются также ролями. Так, равенству $\mu\lambda^{-1}a_0 = b_0$ соответствует равенство $\psi\varphi^{-1}a = b$ (см. равенства (52) и (54). Равенству (56), где $e = \lambda^{-1}a_0$, будет соответствовать равенство

$$f\mathbin{\hat\bullet} y = y\mathbin{\hat\bullet} f, \tag{57}$$

где

$$f = \varphi^{-1}a = \psi^{-1}b.$$

Следовательно, V является особой п. т. п. для $(\bullet)$ относительно элемента f.

Продолжим доказательство случая II. Введем на множестве Q следующие отображения:

$$\alpha x = \bar\alpha x\ \ (x\neq a),\ \alpha a = a_0$$

$$\beta x = \bar\beta x\ \ (x\neq b),\ \beta b = b_0 \tag{58}$$

Не трудно заметить, что α и β — подстановки множества Q. Если заменить в равенстве (55) x на $\varphi^{-1}x$, то получим

$$\overline{\beta}\psi\varphi^{-1}x=\mu\lambda^{-1}\overline{\alpha}x, \quad (x\neq a). \tag{59}$$

Но если $x\neq a$, то $\overline{\alpha}x=\alpha x$ и $\psi\varphi^{-1}x\neq b$ и поэтому из (59) находим

$$\beta\psi\varphi^{-1}x=\mu\lambda^{-1}\alpha x, \quad (x\neq a).$$

Но для $x=a$ имеем:

$$\beta\psi\varphi^{-1}a=\beta b=b_0=\mu\lambda^{-1}a_0=\mu\lambda^{-1}\alpha a. \tag{60}$$

Поэтому

$$\beta\psi\varphi^{-1}=\mu\lambda^{-1}\alpha. \tag{61}$$

Далее, так как V — особая п. т. п. для $(\cdot)$ относительно элемента f, то существует квазигруппа $(\bullet)^{\Delta f(V)}=(+)$. Докажем, что $(+)$ и $(\cdot)$ изотопны, более точно

$$(+)=(\cdot)^{T}, \tag{62}$$

где $T=(\alpha, \beta, \gamma)$. Для доказательства (62) найдем $\gamma(x+y)$, причем, ввиду определения операции $(+)$, рассмотрим четыре случая*:

а) $x\neq\varphi f$, $y=\psi f$, $\varphi^{-1}x\neq\psi^{-1}y$. В этом случае имеем

$$\gamma(x+y)=\gamma(x\bullet y)=\overline{\alpha}x\circ\overline{\beta}y.$$

В силу равенств (57), $\varphi f=a$, $\psi f=b$ и поэтому $x\neq a$, $y\neq b$. Следовательно,

$$\gamma(x+y)=\alpha x\circ\beta y. \tag{63}$$

Из неравенства $\varphi^{-1}x\neq\psi^{-1}y$ следует $y\neq\psi\varphi^{-1}x$, $\beta y\neq\beta\psi\varphi^{-1}x$, откуда, в силу (61), находим $\beta y\neq\mu\lambda^{-1}\alpha x$. В силу определения операции $(\circ)$, равенство (63) примет вид:

$$\gamma(x+y)=\alpha x\cdot\beta y.$$

б) Пусть $\varphi^{-1}x=\psi^{-}y$, т. е. $y=\psi\varphi^{-1}x$. Тогда

$$\gamma(x+\psi\varphi^{-1}x)=\gamma(x\bullet\psi f)=\gamma(x\bullet b)=\overline{\alpha}x\cdot\overline{\beta}b=\alpha x\circ k.$$

Пусть $x\neq a$, тогда $\overline{\alpha}x=\alpha x$ и

$$\gamma(x+\psi\varphi^{-1}x)=\alpha x\circ k=\nu\lambda^{-1}\alpha x=\alpha x\cdot\mu\lambda^{-1}\alpha x,$$
$$\gamma(x+\psi\varphi^{-1}x)=\alpha x\cdot\beta\psi\varphi^{-1}x \quad (x\neq a). \tag{64}$$

Если $x=a$, то имеем

$$\gamma(a+\psi\varphi^{-1}a)=\gamma(a\bullet b)=\gamma(a\bullet\psi\varphi^{-1}a)=\gamma\theta\varphi^{-1}a=\overline{\alpha}a\circ b_0=$$
$$=k\circ b_0=\nu\mu^{-1}b_0=\nu\mu^{-1}(\mu\lambda^{-1}a_0)=\nu\lambda^{-1}a_0=\nu\lambda^{-1}\alpha a=\alpha a\cdot\mu\lambda^{-1}\alpha a,$$

откуда, опять в силу (61), получаем

$$\gamma(a+\psi\varphi^{-1}a)=\alpha a\cdot\beta\psi\varphi^{-1}a, \tag{65}$$

т. е. ограничение $x\neq a$ в равенстве (64) можно снять.

---

* При доказательстве случаев а)—г) мы полагаем, что $x, y \in Q$.

в) Пусть $y=\psi f=b$. Имеем:

$$\gamma(x+b)=\gamma\theta\varphi^{-1}x=\overline{\alpha}x\circ b_0.$$

Пусть $x\neq a$, тогда

$$\gamma(x+b)=\alpha x\circ b_0.$$

Но из $x\neq a$ следует $\alpha x\neq\alpha a$, $\alpha x\neq a_0$, $\mu\lambda^{-1}\alpha x\neq\mu\lambda^{-1}a_0=b_0$. Поэтому

$$\gamma(x+b)=\alpha x\cdot b_0,$$

откуда

$$\gamma(x+b)=\alpha x\cdot\beta b \quad (x\neq a).$$

В силу равенства (65), ограничение $x\neq a$ можно снять.

г) Пусть $x=\varphi f=a$. Доказывается как и случай в):

$$\gamma(a+x)=\alpha a\cdot\beta x.$$

Итак, мы доказали равенство

$$\gamma(x+y)=\alpha x\cdot\beta y$$

для всех $x, y\in Q$, т. е. доказано равенство (62), или

$$(\bullet)^{\Delta f(V)}=(\cdot)^{T}.$$

Но, ввиду (26), имеем $(\bullet)^{\Delta f V}=(\hat{\bullet})^{\Delta f V^{-1}}$ и, кроме того, $(\cdot)=(\hat{\cdot})^{U^{-1}}$, следовательно,

$$(\hat{\bullet})^{\Delta f V^{-1}}=(\hat{\cdot})^{U^{-1}T},$$

откуда

$$(\hat{\cdot})=(\hat{\bullet})^{\Delta_f V^{-1}T^{-1}U}.$$

Однако

$$V^{-1}T^{-1}U=(\varphi^{-1}\alpha^{-1}\lambda, \ \psi^{-1}\beta^{-1}\mu, \ \theta^{-1}\gamma^{-1}\nu)=(\pi, \pi, \tau),$$

так как ввиду равенства (61) первые две компоненты $V^{-1}T^{-1}U$ совпадают.

Обратно, пусть дано

$$(\hat{\cdot})=(\hat{\bullet})^{\Delta_f S} \tag{66}$$

и пусть S имеет вид

$$S=(\pi, \pi, \tau).$$

Из равенства (66) следует равенство

$$(\cdot)^{U}=(\bullet)^{\Delta f(V)\, VS},$$

откуда

$$(\bullet)^{\Delta f(V)}=(\cdot)^{US^{-1}V^{-1}}(\bullet)^{\Delta f(V)}=(\cdot)^{T}, \tag{67}$$

где

$$T=(\lambda\pi^{-1}\varphi^{-1}, \ \mu\pi^{-1}\psi^{-1}, \ \nu\tau^{-1}\theta^{-1})=(\alpha, \beta, \gamma).$$

Таким образом, $\lambda\pi^{-1}\varphi^{-1}=\alpha$, $\mu\pi^{-1}\psi^{-1}=\beta$, откуда получаем равенство (61):

$$\lambda^{-1}\alpha\varphi=\mu^{-1}\beta\psi.$$

Так как V является особой п. т. п. относительно элемента f для $(\bullet)$, тогда должно выполняться равенство

$$f \hat{\bullet} x = x \hat{\bullet} f,$$

или

$$\varphi f \bullet \psi x = \varphi x \bullet \psi f,$$

откуда следует

$$a \bullet x = \varphi\psi^{-1} x \bullet b. \tag{68}$$

Наконец, как вытекает из доказательств а)—г), равенство (67) эквивалентно следующим четырем равенствам:

$$\left.\begin{aligned} &\gamma(x \bullet y) = \alpha x \cdot \beta y \quad (x \neq a,\ y \neq b,\ y \neq \psi\varphi^{-1} x),\\ &\gamma(x \bullet b) = \nu\lambda^{-1}\alpha x,\\ &\gamma\,\theta\varphi^{-1} x = \alpha x \cdot b_0,\\ &\gamma\,\theta\psi^{-1} x = a_0 \cdot \beta x. \end{aligned}\right\} \tag{69}$$

Рассмотрим множество $Q' = Q \cup k$ и введем на этом множестве отображения

$$\begin{cases} \bar{\alpha} x = \alpha x \ (x \neq a,\ k),\\ \bar{\alpha} a = k,\\ \bar{\alpha} k = a_0, \end{cases} \qquad \begin{cases} \bar{\beta} x = \beta x \ (x \neq b,\ k),\\ \bar{\beta} b = k,\\ \bar{\beta} k = b_0, \end{cases} \qquad \begin{cases} \bar{\gamma} x = \gamma x \ (x \neq k),\\ \bar{\gamma} k = k, \end{cases}$$

где $a = \varphi f$, $b = \psi f$, $a_0 = \alpha a$, $b_0 = \beta b$. Легко проверяется, что $\bar{\alpha}$, $\bar{\beta}$, $\bar{\gamma}$ — подстановки множества Q'.

Докажем, что

$$(\bullet,\ V) = (\cdot,\ U)^{\bar{T}}.$$

Для этого нам нужно доказать равенства (31) — (35). Рассмотрим каждое из этих равенств в отдельности.

1) $\bar{\gamma}(x \bullet y) = \bar{\alpha} x \circ \bar{\beta} y \ (x \neq k,\ y \neq k,\ y \neq \psi\varphi^{-1} x).$ (70)

Здесь через $(\circ)$ обозначаем продолжение $(\cdot,\ U)$. Возможны следующие подслучаи:

а) $x = a$, $y \neq \psi\varphi^{-1} a = \psi f = b$. Тогда, в силу (68) имеем

$$\bar{\gamma}(a \bullet y) = \gamma(a \bullet y) = \gamma(\varphi\psi^{-1} y \bullet b),$$

а в силу второго из равенств (69) находим далее

$$\bar{\gamma}(a \bullet y) = \nu\lambda^{-1}\alpha\varphi\psi^{-1} y = \nu(\mu^{-1}\beta\psi)\psi^{-1} y = \nu\mu^{-1}\beta y.$$

С другой стороны,

$$\bar{\alpha} a \circ \bar{\beta} y = k \circ \beta y = \nu\mu^{-1}\beta y.$$

б) $y = b$, $b \neq \psi\varphi^{-1} x$ или $x \neq \varphi\psi^{-1} b = \varphi f = a$. Тогда

$$\bar{\gamma}(x \bullet b) = \gamma(x \bullet b) = \nu\lambda^{-1}\alpha x = \alpha x \circ k = \bar{\alpha} x \circ \bar{\beta} b.$$

в) Пусть $x \neq a$, $y \neq a$ (и $y \neq \psi\varphi^{-1} x$). Тогда

$$\bar{\gamma}(x \cdot y) = \gamma(x \cdot y) = \alpha x \cdot \beta y$$

ввиду первого из равенств (69). С другой стороны,

$$\bar{\alpha} x \cdot \bar{\beta} x = \alpha x \circ \beta y = \alpha x \cdot \beta y,$$

так как $\beta y \neq \beta\psi\varphi^{-1} x \neq \mu\lambda^{-1}\alpha x$. Итак, (70) доказано для всех возможных случаев.

2) $\bar{\gamma} k = \bar{\alpha}\varphi x \circ \bar{\beta}\psi x \ (x \neq k).$ (71)

Пусть $\varphi x \neq a$, тогда $\psi\varphi^{-1}(\varphi x) \neq \psi\varphi^{-1} a = b$, откуда следует $\psi x \neq b$, и поэтому

$$\bar{\alpha}\varphi x \circ \bar{\beta}\psi x = \alpha\varphi x \circ \beta\psi x = \alpha\varphi x \circ \mu\lambda^{-1}\alpha\varphi x = k = \bar{\gamma} k.$$

3) $\bar{\gamma}\theta\varphi^{-1} x = \bar{\alpha} x \circ \bar{\beta} k \ (x \neq k).$

Пусть $x \neq a$, тогда

$$w_1 = \bar{\gamma}\theta\varphi^{-1} x = \gamma\theta\varphi^{-1} x,$$

$$w_2 = \bar{\alpha} x \circ \bar{\beta} k = \alpha x \circ b_0.$$

Но $b_0 = \beta b = \beta\psi\varphi^{-1} a$, поэтому, в силу (61), имеем

$$w_2 = \alpha x \circ \beta\psi\varphi^{-1} a = \alpha x \circ \mu\lambda^{-1}\alpha a = \alpha x \cdot \mu\lambda^{-1}\alpha a = \alpha x \cdot b_0.$$

Ввиду третьего равенства из (69), находим $w_1 = w_2$, т. е. (71) доказано при предположении $x \neq a$. Если же $x = a$, тогда из второго равенства при $x = a$ получаем

$$\gamma(a \bullet b) = \nu\lambda^{-1} a.$$

Но $a \bullet b = a \bullet \psi\varphi^{-1} a = \theta\varphi^{-1} a$, поэтому

$$\gamma\theta\varphi^{-1} a = \nu\lambda^{-1}\alpha a$$

и

$$\bar{\gamma}\theta\varphi^{-1} a = \gamma\,\theta\varphi^{-1} a = \nu\lambda^{-1}\alpha a,$$

$$\bar{\alpha} a \circ \bar{\beta} k = k \circ b_0 = \nu\mu^{-1} b_0 = \nu\mu^{-1}\beta\psi\varphi^{-1} a = \nu\mu^{-1}\mu\lambda^{-1}\alpha a = \nu\lambda^{-1}\alpha a.$$

Итак, (71) полностью доказано.

4) $\bar{\gamma}\theta\psi^{-1} x = \bar{\alpha} k \circ \bar{\beta} x \ (x \neq k).$

Этот случай доказывается аналогично предыдущему.

5) $\bar{\gamma} k = \bar{\alpha} k \circ \bar{\beta} k.$

Имеем:

$$\bar{\alpha} k \circ \bar{\beta} k = a_0 \circ b_0.$$

Но выше (60) было показано, что $b_0 = \mu\lambda^{-1} a_0$, поэтому

$$\bar{\alpha} k \circ \bar{\beta} k = a_0 \circ \mu\lambda^{-1} a_0 = k = \bar{\gamma} k.$$

Этим случай II доказан полностью.

Из доказательства случая II следует предложение: изотопия

$$(\cdot,\ U)^{\bar{T}} = (\bullet,\ V),$$

где $\bar{T} = (\bar{\alpha},\ \bar{\beta},\ \bar{\gamma})$ и $\bar{\gamma} k = k$, имеет место тогда и только тогда, когда $(\cdot)$ и $(\bullet)$ косоизотопны, причем

$$(\cdot)^T = (\bullet)^{\Delta f(V)},$$

где $T=(\alpha, \beta, \gamma)$, α, β, γ определяются равенствами (48), (58) и $\lambda^{-1}\alpha\varphi = \mu^{-1}\beta\psi$, V—особая п. т. п. для $(\bullet)$ относительно некоторого элемента f.

Случай III. $\bar{\alpha}k=k,\quad \bar{\beta}k \neq k,\quad \bar{\gamma}k \neq k.$
Пусть

$$(\bullet,\ V)=(\cdot,\ U)^{\bar{T}}.$$

Тогда

$${}^{-1}(\bullet, V)={}^{-1}[(\cdot,\ U)^{\bar{T}}],$$

или

$${}^{-1}(\bullet,\ V)=[{}^{-1}(\cdot,\ U)]^{\bar{T}^{l}}, \tag{72}$$

где $\bar{T}^{l}=(\bar{\gamma}, \bar{\beta}, \bar{\alpha})$. Применим сейчас к обеим частям равенства (72) лемму 2:

$$(\backslash,\ V^{l})=(\backslash,\ U^{l})^{\bar{T}^{l}}, \tag{73}$$

где $(\backslash)={}^{-1}(\bullet)$, $(\backslash)={}^{-1}(\cdot)$. Равенство (73) показывает, что случай III сводится к случаю II, и поэтому квазигруппа $(\backslash)$ косоизотопна квазигруппе $(\backslash)$. Чтобы получить утверждение теоремы, достаточно показать, что

$${}^{-1}(\hat{A})=\widehat{({}^{-1}A)},$$

где, как и выше, через $\hat{A}$ мы обозначаем идемпотентную квазигруппу, соответствующую квазигруппе A с п. т. п. U. В самом деле, как было показано в лемме 1, U^{l} является п. т. п. для ${}^{-1}A$, следовательно

$$\widehat{({}^{-1}A)}=({}^{-1}A)^{U^{l}}={}^{-1}(A^{U})={}^{-1}(\hat{A}).$$

Случай IV. $\bar{\alpha}k \neq k,\ \bar{\beta}k=k,\quad \bar{\gamma}k \neq k.$

Рассуждаем, как в предыдущем случае.

Случай V. $\bar{\alpha}k \neq k,\quad \bar{\beta}k \neq k,\quad \bar{\gamma}k \neq k.$
Пусть $\bar{\alpha}k=a_0$, $\bar{\beta}k=b_0$, $\bar{\gamma}k=c_0$, и пусть, далее, $\bar{\alpha}a=k$, $\bar{\beta}b=k$, $\bar{\gamma}c=k.$

Равенства (31) — (35) принимают следующий вид:

$$\bar{\gamma}(x \bullet y)=\bar{\alpha}x \circ \bar{\beta}y \quad (y \neq \psi\varphi^{-1}x,\ x \neq k,\ y \neq k), \tag{74}$$

$$c_0=\bar{\alpha}\varphi x \circ \bar{\beta}\psi x \quad (x \neq k),$$

$$\bar{\gamma}\,\theta\varphi^{-1}x=\bar{\alpha}x \circ b_0,$$

$$\bar{\gamma}\theta\psi^{-1}x=a_0 \circ \bar{\beta}x,$$

$$c_0=a_0 \circ b_0.$$

Во-первых, заметим, что $b \neq \psi\varphi^{-1}a$, так как иначе из равенства $\psi^{-1}b=\varphi^{-1}a=\alpha$ следует

$$k=k \circ k=\bar{\alpha}a \circ \bar{\beta}\,b=\bar{\alpha}\varphi d \circ \bar{\beta}\psi d=c_0,$$

что противоречит условию $c_0=\bar{\gamma}k \neq k$. Подставляя в (74) $x=a$, $y=b$, находим

$$\bar{\gamma}(a \bullet b)=\bar{\alpha}a \cdot \bar{\beta}b=k \circ k=k,$$

т. е.

$$a \bullet b=c. \tag{75}$$

Следующие два равенства

$$\bar{\gamma}(a \bullet y)=\nu\mu^{-1}\bar{\beta}y\,(y \neq b,\ \psi\varphi^{-1}a), \tag{76}$$

$$\bar{\gamma}(x \bullet b)=\nu\lambda^{-1}\bar{\alpha}x\,(x \neq a,\ \varphi\psi^{-1}b) \tag{77}$$

вытекают непосредственно из (74) и определения операции $(\circ)$.

Предположим, что в (74) $x \bullet y=c$ и $x \neq a$, $y \neq \psi\varphi^{-1}x$. Тогда $y \neq b$, так как в противном случае из $y=b$ следует $x \bullet y=x \cdot b$, $c=x \bullet b$ и, ввиду (75), находим $x=a$, что противоречит выбору элемента x. Итак,

$$\bar{\gamma}(x \bullet y)=\bar{\gamma}c=k=\bar{\alpha}x \circ \bar{\beta}y.$$

Так как $x \neq a$, $y \neq b$, то $\bar{\alpha}x \neq k$, $\beta y \neq k$ и поэтому

$$\mu^{-1}\bar{\beta}y=\lambda^{-1}\bar{\alpha}x \ (x \neq a,\ y \neq \psi\varphi^{-1}x). \tag{78}$$

Если выполняется равенство (78), то при дополнительных условиях

$$y \neq b,\ y \neq \psi\varphi^{-1}a,\ x \neq a,\ x \neq \varphi\psi^{-1}b, \tag{79}$$

ввиду равенств (76) и (77), должно выполняться еще равенство

$$a \bullet y=x \bullet b,$$

или

$$a \bullet (x \backslash c)=x \bullet b, \tag{80}$$

где $u \backslash v=w \longleftrightarrow u \backslash w=v.$

Так как из $x \neq a$, $y \neq \psi\varphi x$ и $x \bullet y=c$ следует, как мы видели выше, $y \neq b$, то из условий (79) мы можем выбросить это неравенство. Далее, равенство (89), очевидно, выполняется и при $x=a$. Следовательно, (80) выполняется при условии:

$$x \neq \varphi\psi^{-1}b,\ y \neq \psi\varphi^{-1}a,\ y \neq \psi\varphi^{-1}x. \tag{81}$$

Но $y=x \backslash c$, поэтому последние два неравенства из (81) принимают вид

$$x \backslash c \neq \psi\varphi^{-1}a,\ x \backslash c=\psi\varphi^{-1}x,$$

откуда

$$x \cdot \psi\varphi^{-1}a \neq c,\ x \cdot \psi\varphi^{-1}x \neq c \text{ или } \theta\varphi^{-1}x \neq c.$$

Таким образом, (80) выполняется при условии:

$$x \neq \varphi\psi^{-1}b,\ x \neq \varphi\theta^{-1}c,\ x \cdot \psi\varphi^{-1}a \neq c.$$

Рассмотрим теперь следующий изотоп квазигруппы $Q(\bullet)$:

$$x \odot y=R_b^{-1}x \bullet L_a^{-1}y,$$

где $R_b x = x \cdot b$, $L_a y = a \cdot y$. Очевидно, $Q(\odot)$ — лупа с единицей $a \cdot b = c$. Положим в равенстве (80) $x \cdot b = z$. Тогда

$$L_a(x \backslash c) = z,$$

откуда

$$x \backslash c = L_a^{-1} z, \quad x \cdot L_a^{-1} z = c, \quad R_b^{-1} z \cdot L_a^{-1} z = c,$$

т. е.

$$z \odot z = c.$$

Следовательно, все элементы лупы $Q(\odot)$, за исключением, может быть, трех, имеют порядок два. Однако это противоречит выбору квазигрупп $Q(\cdot)$ и $Q(\cdot)$, поэтому этот случай не может иметь места. Теорема доказана полностью.

ЛИТЕРАТУРА

[1] В. Д. Белоусов, Основы теории квазигрупп и луп, М., «Наука», 1967.

[2] R. H. Bruck, Some results in the theory of quasigroups, Trans. Amer. Math., Soc., 1944, 55, 19—52.

[3] J. Denes, E. Pasztor, On some problems of quasigroups, Mag. Tud. Akad., III oszt. kōzl., 1963, 109—118.

[4] H. B. Mann, On orthogonal latin squares, Bull. Amer. Math. Soc., 50, (1944), 249—257.

Ю. М. РЯБУХИН

О НЕКОТОРЫХ МНОГООБРАЗИЯХ УНИВЕРСАЛЬНЫХ АЛГЕБР

В работе [3] развивалась теория радикалов в категориях. При этом для построения достаточно содержательной теории на рассматриваемые категории накладывались некоторые естественные ограничения — требовалось выполнение аксиом 1—6.

В настоящей работе рассматриваются категории универсальных алгебр — многообразия универсальных алгебр. Выясняются условия, при которых в рассматриваемых многообразиях верны все аксиомы 1—6 или только некоторые из них. Отметим, что, например, в многообразиях колец, групп и, более обще, Ω-групп, все аксиомы 1—6 верны. С другой стороны, не во всяком многообразии эти аксиомы верны. Наиболее известным из таких многообразий является многообразие всех полугрупп: в этом многообразии не верны уже аксиомы 1—3.

Мы будем использовать терминологию и некоторые результаты из монографий [1, 2, 6] и работ [3—5, 7]. Для удобства большинство из нужных результатов и определений будет сформулировано по мере необходимости.

§ 1

Напомним сначала некоторые нужные нам для дальнейшего определения и результаты из теории универсальных алгебр (см. [1,6]).

I. Пусть G — непустое множество. Говорим, что на G определена n-арная операция ρ, где $n \geqslant 0$ — целое число, если

а) $n = 0$ и в множестве G выделяется некоторый однозначно определенный элемент $a \in G$, называемый результатом нульарной операции ρ. Обычно этот элемент обозначается тем же символом, что и сама нульарная операция;

б) $n \geqslant 1$ и каждой упорядоченной системе $a_1 \ldots a_n$ элементов множества G сопоставляется однозначно определенный элемент $a = a_1 \ldots a_n \rho \in G$.

Множество G называется универсальной алгеброй с системой Ω операций, или, короче, Ω-алгеброй, если на множестве G задана некоторая система Ω n-арных операций. При этом для различных операций $\rho \in \Omega$ числа n могут быть как различными, так и совпадающими.

Универсальные алгебры G и G', в которых заданы соответственно системы Ω и Ω' операций, называются однотипными, если существует взаимно однозначное отображение $\Theta : \Omega \to \Omega'$ системы Ω на систему Ω', сохраняющее арность операций. В связи с этим можно считать, что в однотипных универсальных алгебрах задана одна и та же система операций, точнее, соответствующие операции обозначаются одинаковыми символами.

Всюду в дальнейшем, если противное не оговорено, *рассматриваются только однотипные универсальные алгебры*. Поэтому множество Ω символов операций будет зафиксировано. Это множество удобно представить в виде объединения попарно не пересекающихся множеств

$$\Omega = \Omega_0 \cup \Omega_0', \quad \Omega_0' = \cup \{\Omega_n \mid n \geqslant 1 \text{ — натуральное число}\}.$$

Здесь через Ω_n, $n \geqslant 0$ мы обозначили множество n-арных операций из Ω. Некоторые из множеств Ω_n (или даже все) могут быть пустыми. Каждое из множеств Ω_n может быть и конечным и бесконечным.

2. Пусть A и B — две Ω-алгебры. Отображение $\varphi : A \to B$ множества A в множество B называется гомоморфизмом Ω-алгебры A в Ω-алгебру B, если оно сохраняет операции, т. е.

а) для любой нульарной операции $\rho \in \Omega$ образ $\varphi(\rho_A)$ элемента ρ_A, выделенного в A операцией ρ, совпадает с элементом ρ_B, выделенным в B операцией ρ;

б) для любой n-арной операции $\rho \in \Omega$ с $n \geqslant 1$ и любых

$$a_1, a_2, \ldots, a_n \in A, \ \varphi(a_1 \ldots a_n \rho) = \varphi(a_1) \ldots \varphi(a_n) \rho.$$

Если при этом отображение $\varphi : A \to B$ является взаимно однозначным, то φ называется изоморфизмом алгебры A на алгебру B. Ясно, что если $\varphi : A \to B$ — изоморфизм, то и обратное отображение $\varphi^{-1} : B \to A$ является изоморфизмом.

Для любого гомоморфизма $\varphi : A \to B$ и любого непустого $C \subseteq A$

$$\varphi(C) = \{\varphi(a) \mid a \in C\}$$

называется гомоморфным образом множества C. Гомоморфизм φ называется гомоморфизмом на, если φ — отображение на, т. е. $\varphi(A) = B$. Для любого непустого $D \subseteq B$ обозначим

$$\varphi^{-1}(D) = \{a \in A \mid \varphi(a) \in D\}.$$

Отметим, что для любого гомоморфизма $\varphi : A \to B$ алгебры A на алгебру B и любых непустых множеств $C \subseteq A$, $D \subseteq B$,

$$\varphi(\varphi^{-1}(D)) = D, \ \varphi^{-1}(\varphi(C)) \subseteq C.$$

3. Пусть G — Ω-алгебра и A — непустое подмножество в G. A называется подалгеброй алгебры G, если A замкнуто относительно всех операций из Ω, т. е. содержит все элементы, выделенные в G нульарными операциями $\rho \in \Omega$ и для любой n-арной операции $\rho \in \Omega$ с $n \geqslant 1$, $a_1 \ldots a_n \rho \in A$ для любых $a_1, a_2, \ldots, a_n \in A$.

Ясно, что сама алгебра G является своей подалгеброй. Всякая подалгебра Ω-алгебры является, очевидно, Ω-алгеброй. Из определения гомоморфизма Ω-алгебр легко следует, что если нам дан гомоморфизм $\varphi : A \to B$, то для любой подалгебры C алгебры A множество $\varphi(C)$

является подалгеброй в A и для любой подалгебры D алгебры B множество $\varphi^{-1}(D)$ является подалгеброй в A, если $\varphi^{-1}(D)$ не пусто.

Для дальнейшего нам будут полезны два удобных обозначения.

Если B — подалгебра алгебры A, то через $\Delta_B^A : B \to A$ будем обозначать вложение алгебры B в алгебру A, т. е.

$$\forall b \in B \qquad \Delta_B^A(b) = b.$$

Для любого гомоморфизма $\varphi : A \to B$ через $\Theta_\varphi : A \to \varphi(A)$ будем обозначать отображение, определяемое правилом

$$\forall a \in A \quad \Theta_\varphi(a) = \varphi(a).$$

Ясно, что Θ_φ — гомоморфизм алгебры A на алгебру $\varphi(A)$ и

$$\varphi = \Theta_\varphi \Delta^B_{\varphi(A)}.$$

При этом φ — гомоморфизм на тогда и только тогда, когда $\varphi = \Theta_\varphi$. φ называется изоморфным вложением алгебры A в алгебру B, если Θ_φ — изоморфизм.

4. В некотором смысле все гомоморфные образы данной Ω-алгебры G можно характеризовать с помощью конгруенций.

Напомним, что отношение π эквивалентности, заданное на G, называется конгруенцией Ω-алгебры G, если для любой n-арной операции $\rho \in \Omega$ с $n \geqslant 1$ и любых элементов $a_1, \ldots, a_n, b_1, \ldots, b_n \in G$

$$a_i \pi b_i, \ i = 1, \ldots, n \Longrightarrow (a_1 \ldots a_n \rho) \pi (b_1 \ldots b_n \rho).$$

Обозначая для любого элемента $a \in G$

$$(a)^\pi = \{b \in G \mid a \pi b\},$$

получаем, что для любых элементов $a_1, \ldots, a_n \in G$ и любой n-арной операции $\rho \in \Omega$ класс $(a_1 \ldots a_n \rho)^\pi$ однозначно определяется классами $(a_1)^\pi, \ldots, (a_n)^\pi$ и не зависит от того, какие именно элементы из этих классов взяты. Это позволяет превратить фактор-множество $G / \pi = \{(a)^\pi \mid a \in G\}$ в Ω-алгебру, полагая

$$(a_1)^\pi \ldots (a_n)^\pi \rho = (a_1 \ldots a_n \rho)^\pi$$

для любых $a_1, \ldots, a_n \in G$ и любой n-арной операции $\rho \in \Omega$ с $n \geqslant 1$. Кроме того, полагаем, что каждая нульарная операция $\rho \in \Omega$ (если в Ω есть нульарные операции!) выделяет в G / π элемент $(\rho_G)^\pi$.

Из самого построения алгебры G/π с очевидностью следует, что естественное отображение $\mathrm{nat}\, \pi : G \to G/\pi$, определяемое правилом

$$\forall a \in G, \quad \mathrm{nat}\, \pi(a) = (a)^\pi,$$

является гомоморфизмом алгебры G на алгебру G/π. Алгебра G/π называется фактор-алгеброй алгебры G по конгруенции π, а гомоморфизм $\mathrm{nat}\, \pi$ — естественным гомоморфизмом G на G/π.

Хорошо известно следующее утверждение:

Пусть $\varphi : G \to H$ — гомоморфизм Ω-алгебры G на Ω-алгебру H и π_φ — бинарное отношение G такое, что

$$\forall a, b \in G \quad a \pi_\varphi b \iff \varphi(a) = \varphi(b).$$

Тогда π_φ является конгруенцией Ω-алгебры G, причем существует такой однозначно определенный изоморфизм $\psi: H \to G/\pi_\varphi$ алгебры H на фактор-алгебру G/π_φ, что nat $\pi_\varphi = \varphi\psi$.

5. Тривиальным, но важным примером Ω-алгебр являются одноэлементные алгебры. А именно, если $O = \{0\}$ — множество, состоящее точно из одного элемента 0, то, очевидно, O является Ω-алгеброй для любой системы Ω операций: любая нульарная операция $\rho \in \Omega$ выделяет в O элемент o (так как других нет!) и для любой n-арной операции $\rho \in \Omega$ с $n \geqslant 1$ $o \ldots o\rho = 0$. Ясно, что все одноэлементные Ω-алгебры изоморфны, всякая одноэлементная Ω-алгебра является гомоморфным образом любой Ω-алгебры и всякая Ω-алгебра, изоморфная одноэлементной, сама является одноэлементной.

Важнейшим примером Ω-алгебр являются свободные алгебры. Напомним, как строятся свободные Ω-алгебры.

Берем непустое вспомогательное множество

$$X = \{x_i \mid i \in I\}.$$

Элементы множества X называются свободными элементами. При этом множество X выбирается так, что множество Ω не пересекается с множеством X. Строим по индукции множества W_l. Полагаем

$$W_1 = X \cup \Omega_0.$$

Если для всех натуральных чисел k таких, что $1 \leqslant k < n$, мы уже построили множества W_k, то через W_n обозначаем множество всех формальных выражений вида

$$w_1 \ldots w_m \rho = w,$$

где $w_l \in W_l$, $1 \leqslant k_l < n$ и ρ — символ некоторой m-арной операции из Ω с $m \geqslant 1$. Элементы множества

$$S(X, \Omega) = \bigcup_{n \geqslant 1} W_n$$

называются словами (над алфавитом X относительно системы Ω операций). Ясно, что множество $S(X, \Omega)$ является Ω-алгеброй: если ρ — нульарная операция из Ω, то она выделяет в $S(X, \Omega)$ „свой" символ ρ (ведь этот символ есть слово!); если же ρ является n-арной операцией из Ω с $n \geqslant 1$, то для любых слов $w_1, \ldots, w_n$ и $w_1 \ldots w_n^\rho = \overline{w}$ является словом, которое и является результатом применения операции ρ к словам $w_1, \ldots, w_n$.

Алгебра $S(X, \Omega)$ называется свободной Ω-алгеброй с множеством X свободных образующих. Всякая Ω-алгебра, изоморфная свободной, тоже называется свободной.

6. Выделяем среди свободных Ω-алгебр алгебру

$$S_0 = S(X_0, \Omega),\quad X_0 = \{x_i \mid i = 1, 2, \ldots\}.$$

Пусть w_1 и w_2 — слова из S_0.

Пусть G — Ω-алгебра. Говорим, что на алгебре G выполняется тождественно соотношение (короче, тождество)

$$w_1 = w_2, \qquad (1)$$

если равенство (1) верно в G при замене свободных элементов $x_1, \ldots, x_k$, встречающихся хотя бы в одном из слов w_1, w_2, любыми элементами $a_1, \ldots, a_k \in G$ и всех символов ρ нульарных операций, встречающихся хотя бы в одном из слов w_1, w_2, — элементами, выделенными в G этими нульарными операциями.

Если нам дано некоторое множество Λ тождеств, то все Ω-алгебры G, на которых выполняются все тождества из Λ, составляют многообразие или примитивный класс алгебр. Условимся обозначать этот класс той же буквой Λ, что и определяющее его множество Λ тождеств.

Любое многообразие не пусто. Действительно, очевидно, что все одноэлементные Ω-алгебры O принадлежат любому многообразию Λ. Многообразие Λ называется вырожденным, если оно состоит только из одноэлементных алгебр. Как правило, рассматриваются только невырожденные многообразия. *Всюду в дальнейшем, если противное не оговорено, рассматриваются только невырожденные многообразия.*

Важнейшим примером алгебр многообразия Λ являются свободные алгебры многообразия. Напомним, как они строятся.

Пусть Λ — произвольное многообразие Ω-алгебр и $S = S(X, \Omega)$ — свободная Ω-алгебра с множеством X свободных образующих. Строим эквивалентность π_Λ, где Λ — множество тождеств, определяющее многообразие Λ, следующим образом: пусть v' и v'' — слова; если в Λ содержится тождество $w_1 = w_2$, то заменим все входящие в него свободные элементы x_i некоторыми словами; левая и правая части соотношения $w_1 = w_2$ превращаются при этом в некоторые слова $\overline{w}_1$ и $\overline{w}_2$; если слово $\overline{w}_1$ (или слово $\overline{w}_2$) является подсловом слова v', то оно заменяется в слове v' на $\overline{w}_2$ (или на $\overline{w}_1$ соответственно); $v' \pi_\Lambda v''$ тогда и только тогда, когда от слова v' к слову v'' можно перейти конечным числом преобразований указанного вида.

Легко проверяется, что π_Λ — конгруенция в алгебре S. Фактор-алгебра $S(X, \Omega, \Lambda) = S(X, \Omega)/\pi_\Lambda$ и называется свободной Ω-алгеброй многообразия Λ. Из построения конгруенции π_Λ с очевидностью следует, что $S(X, \Omega, \Lambda)$ действительно является алгеброй из многообразия Λ. Всякая Ω-алгебра, изоморфная алгебре $S(X, \Omega, \Lambda)$, тоже называется свободной алгеброй многообразия Λ.

Чтобы указать определяющее свойство свободных алгебр, напомним одно определение.

Пусть G — произвольная алгебра, M — непустое подмножество в G. Легко видеть, что пересечение всех подалгебр алгебры G, содержащих M, само является подалгеброй алгебры G. Эта подалгебра обозначается через $\{M\}_G$ и называется подалгеброй в G, порожденной множеством M. Если $\{M\}_G = G$, то M называется множеством образующих алгебры G.

Ясно, что для всякой свободной алгебры $S(X, \Omega; \Lambda)$ множество $X \subseteq S(X, \Omega, \Lambda)$ и является множеством образующих. Хорошо известна следующая характеристика свободных алгебр.

Пусть в Ω-алгебре G многообразия Λ выбрана некоторая система M образующих. Для того чтобы алгебра G была свободной алгеброй многообразия Λ и M была ее системой свободных образующих, необходимо и достаточно, чтобы для любой Ω-алгебры H из Λ и любого отображения $\varphi: M \to H$ существовал и притом точно один гомоморфизм $\psi: G \to H$, совпадающий с φ на M.

Из этого утверждения с очевидностью следует:

Всякое многообразие Λ вместе со всякой своей алгеброй содержит все ее подалгебры и гомоморфные образы. Всякая алгебра G многообразия Λ является гомоморфным образом некоторой свободной алгебры этого многообразия.

7. Напомним теперь, как строятся структуры конгруенций и структуры подалгебр данной алгебры.

Множество $\mathbf{K}(G)$ всех конгруенций Ω-алгебры G не пусто: всегда существуют тривиальная конгруенция $G \times G = \{(a, b)/a, b \in G\}$ и тождественная конгруенция $\Delta_G^G = \{(a, a)/a \in G\}$. $\mathbf{K}(G)$ является частично упорядоченным множеством (относительно теоретико-множественного включения бинарных отношений). Учитывая это, получаем такие два определения.

a) Конгруенция π на алгебре G называется пересечением конгруенций π_i, $\pi = \Lambda\pi_i$, если π — наибольшая из конгруенций алгебры G, содержащая во всех π_i. Ясно, что $\Lambda\pi_i$ всегда существует и совпадает с теоретико-множественным пересечением $\Lambda\pi_i$;

b) Конгруенция π на алгебре G называется объединением конгруенций π_i, $\pi = V\pi_i$, если π — наименьшая из конгруенций алгебры G, содержащая все π_i. Ясно, что $V\pi_i$ всегда существует,

$$\pi = \bigcap\{\pi'/\pi' \text{ — конгруенция в } G,\ \pi' \geqslant \bigcup\pi_i\}.$$

Следовательно, $\mathbf{K}(G)$ — полная структура.

Для объединения конгруенций есть и другое, более конструктивное, построение. А именно, напомним, что для любых двух бинарных отношений α и β на G определено произведение

$$\alpha\circ\beta = \{(x, y)/(x, z) \in \alpha,\ (z, y) \in \beta \text{ для некоторого } z \in G\}.$$

Умножение бинарных отношений ассоциативно, но, вообще говоря, не коммутативно. Хорошо известно следующее утверждение:

Пусть $\{\pi_i\}$ — произвольное непустое множество конгруенций алгебры G и π — $V\pi_i$. Тогда

$\pi = \bigcup\{\delta_1\circ\cdots\circ\delta_j\circ\cdots\circ\delta_m/m \geqslant 1$ — целое число, $1 \leqslant j \leqslant m$, $\delta_j \in \{\pi_i\}\}$.

Если конгруенции π_1 и π_2 перестановочны, т. е. $\pi_1\circ\pi_2 = \pi_2\circ\pi_1$, то

$$\pi_1 V\pi_2 = \pi_1\circ\pi_2.$$

Рассмотрим теперь множество $\mathbf{A}(G)$ подалгебр алгебры G. Ясно, что это множество непусто и частично упорядочено относительно теоретико-множественного включения. Но тогда точно так же, как и для конгруенций, определяем понятия пересечения и объединения подалгебр. Ясно, что пересечение ΛA_i подалгебр A_i существует тогда и только тогда, когда теоретико-множественное пересечение $\bigcap A_i$ не пусто. При этом $\Lambda A_i = \bigcap A_i$. Поэтому, вообще говоря, пересечение подалгебр не всегда существует. А объединение VA_i подалгебр A_i существует всегда. А именно

$$VA_i = \bigcap\{A'/A' \text{ — подалгебра в } G,\ A' \supseteq \bigcup A_i\} = \{\bigcup A_i\}_G.$$

Таким образом, множество $\mathbf{A}(G)$ подалгебр алгебры G не всегда является структурой. Если же в G существует наименьшая подалгебра, то $\mathbf{A}(G)$ является полной структурой.

В связи со сказанным будет полезно одно более конструктивное построение подалгебры $\{M\}_G$ алгебры G, порожденной в G множеством M. А именно, для любого непустого множества $M \subseteq G$ обозначим

$M\Omega = \{a \in G/a = a_1 \ldots a_n\rho$ для некоторой n-арной операции $\rho \in \Omega$ с $n \geqslant 1$ и некоторых $a_1, \ldots, a_n \in M\}$. Пусть M содержит все элементы, выделенные в G нульарными операциями из Ω. Положим

$$M_0 = M,\ M_{n+1} = M_n \cup M_n\Omega,\ n = 0, 1, \ldots$$

Из определения подалгебры $\{M\}_G$ легко следует, что

$$\{M\}_G = \bigcup_{i>0} M_i.$$

8. В заключение этого параграфа отметим следующее легко доказываемое утверждение о тождествах:

Пусть $S(X, \Omega, \Lambda) = S$ — свободная алгебра многообразия Λ и $X \subseteq X_0 = \{x_1, x_2, \ldots\}$. Если в алгебре S для некоторых слов w_1 и w_2 верно равенство

$$w_1 = w_2, \tag{1}$$

то (1) — тождество на всех алгебрах многообразия Λ.

Действительно, это легко следует из определения тождества и указанной выше характеристики свободных алгебр многообразия.

§ 2

1. Будем теперь считать известными определения категории, мономорфизмов, эпиморфизмов, единичных и нулевых отображений, подобъектов и фактор-объектов объекта категории. Терминология из теории категорий в основном совпадает с терминологией работ [4, 5], т. е. та же, что и в работе [3]. Некоторые из нужных нам определений (определение ядер, образов и т. п.) будут даны по мере необходимости.

Пусть Λ — произвольное многообразие Ω-алгебр. Ясно, что Λ — категория. Объектами этой категории являются алгебры из Λ. Морфизмами — гомоморфизмы $\varphi: A \to B$ алгебры A из Λ в алгебру B из Λ. Всюду в дальнейшем мы считаем многообразие Λ зафиксированным и рассматриваем алгебры только из этого многообразия.

Разложение морфизма $\varphi: A \to B$ в произведение

$$\varphi = \Theta_\varphi \Delta^B_{\varphi(A)}$$

будем называть каноническим. Ясно, что Θ_φ и $\Delta^B_{\varphi(A)}$ — морфизмы в категории Λ. Более того, Θ_φ является эпиморфизмом, а $\Delta^B_{\varphi(A)}$ — мономорфизмом. Это следует из леммы

Лемма 1. 2. *Для того чтобы морфизм $\varphi: A \to B$ категории Λ был мономорфизмом, необходимо и достаточно, чтобы φ был изоморфным вложением алгебры Λ в алгебру B, т. е. чтобы Θ_φ был изоморфизмом. Если φ — гомоморфизм на, то φ — эпиморфизм.*

Доказательство. Пусть $\varphi: \Lambda \to B$ — мономорфизм в категории Λ. Допустим, что отображение Θ_φ не является изоморфизмом. Тогда найдутся такие элементы $a_1, a_2 \in \Lambda$, что $a_1 \neq a_2$, но $\varphi(a_1) = \varphi(a_2)$. Возьмем свободную алгебру S многообразия Λ, имеющую две свободных образующих x_1 и x_2. Существуют такие гомоморфизмы $\psi_1 : S \to A$ и $\psi_2 : S \to A$, что

$$\psi_1(x_1) = \psi_1(x_2) = a_1,\ \psi_2(x_1) = \psi_2(x_2) = a_2.$$

Рассмотрим гомоморфизмы $\psi_1\varphi$ и $\psi_2\varphi$. Из определения произведения отображений следует, что эти гомоморфизмы совпадают на X

$$\psi_1\varphi(x_1) = \varphi(a_1) = \varphi(a_2) = \psi_2\varphi(x_1),\ \psi_1\varphi(x_2) = \varphi(a_1) = \varphi(a_2) = \psi_2\varphi(x_2).$$

Но $S = S(X, \Omega, \Lambda)$ — свободная алгебра многообразия Λ. Поэтому $\psi_1\varphi = \psi_2\varphi$. Так как φ — мономорфизм, то $\psi_1 = \psi_2$. Между тем

$$\psi_1(x_1) = a_1 \neq a_2 = \psi_2(x_1)$$

и поэтому $\psi_1 \neq \psi_2$. Противоречие. Следовательно, Θ_φ — изоморфизм, т. е. морфизм φ является изоморфным вложением алгебры A в алгебру B.

Обратно, если φ является изоморфным вложением алгебры A в алгебру B, то легко получаем, что для любых двух морфизмов $\varphi_1 : C \to A$ и $\varphi_2 : C \to A$ из равенства $\varphi_1\varphi = \varphi_2\varphi$ следует $\varphi_1 = \varphi_2$. Но это и означает, что φ является мономорфизмом.

Если $\varphi : A \to B$ — гомоморфизм на, т. е. $B = \varphi(A)$, то для любых двух морфизмов $\varphi_1 : B \to C$ и $\varphi_2 : B \to C$ из равенства $\varphi\varphi_1 = \varphi\varphi_2$ с очевидностью следует равенство $\varphi_1 = \varphi_2$. Но это и означает, что φ является эпиморфизмом.

Лемма доказана.

Лемма 2. 2. *Пусть G — алгебра из Λ. Если $\langle B, \mu \rangle$ — подобъект объекта G категории Λ, то существует такая подалгебра A алгебры G, а именно $A = \mu(B)$, что*

$$\langle B, \mu \rangle = \langle A, \Delta^G_A \rangle.$$

Если B и C — подалгебры алгебры G, то включения

$$C \subseteq B,\ \langle C, \Delta^G_C \rangle \subseteq \langle B, \Delta^G_B \rangle$$

равносильны.

Действительно, если $\mu : B \to G$ — мономорфизм, то, в силу леммы 1. 2, Θ_μ — изоморфизм. Так как $\mu = \Theta_\mu \Delta^G_{\mu(B)}$, то

$$\langle B, \mu \rangle = \langle A, \Delta^G_A \rangle,$$

где $A = \mu(B)$. Если B и C — подалгебры алгебры G, то по определению частичной упорядоченности для подобъектов включение $\langle B, \Delta^G_B \rangle \supseteq \langle C, \Delta^G_C \rangle$ равносильно существованию такого мономорфизма $\gamma : C \to B$, что $\Delta^G_C = \gamma\Delta^G_B$. Но если такой мономорфизм существует, то для любого $c \in C$ получаем

$$\gamma(c) = \Delta^G_B(\gamma(c)) = \gamma\Delta^G_B(c)$$

и потому $\gamma = \Delta^B_C$, т. е. $C \subseteq B$. Остается заметить, что всегда

$$C \subseteq B \Rightarrow \Delta^G_C = \Delta^B_C \Delta^G_B.$$

Лемма доказана.

2. Напомним, что объект o категории K называется нулевым, если для любого объекта A категории K существует точно один морфизм $\omega_{oA} : O \to A$ и точно один морфизм $\omega_{Ao} : A \to O$. При этом если категория K имеет нулевые объекты, то (см., например [4]):

а) Все нулевые объекты изоморфны между собой и объект, изоморфный нулевому, сам является нулевым;

б) Для любого нулевого объекта o и любых двух объектов A, B категории K морфизм $\omega_{AB} : A \to B$ такой, что

$$\omega_{AB} = \omega_{Ao}\omega_{oB}$$

не зависит от выбора нулевого объекта o и однозначно определяется объектами A и B. Морфизм ω_{AB} называется нулевым морфизмом из A в B. Для любых морфизмов $\alpha : C \to A$, $\beta : B \to D$

$$\alpha\omega_{AB} = \omega_{CB},\ \omega_{AB}\beta = \omega_{AD}.$$

Если известно, о каких объектах A, B идет речь, то вместо ω_{AB} мы будем писать иногда ω.

В работе [3] мы рассматривали только такие категории, в которых верна следующая

Аксиома 1. *Существует нулевой объект o.*

В связи с этим представляет интерес

Предложение 3.2. Пусть Λ — многообразие Ω-алгебр. Для того чтобы категория Λ имела нулевые объекты, необходимо и достаточно, чтобы всякая алгебра G из Λ имела наименьшую подалгебру O_G, причем $O_G = \{O_G\}$ — одноэлементная подалгебра. Если категория Λ имеет нулевые объекты, то

а) нулевые объекты категории Λ — это в точности одноэлементные алгебры многообразия Λ;

б) нулевые морфизмы $\omega_{AB} : A \to B$ — это в точности такие гомоморфизмы алгебры A в алгебру B, что

$$\forall a \in A \quad \omega_{AB}(a) = O_B.$$

Доказательство. 1) Пусть категория Λ имеет нулевой объект G_0. Из определения нулевого объекта следует, что для любой одноэлементной алгебры O существует точно один гомоморфизм $\omega_1 : O \to G_0$ и точно один гомоморфизм $\omega_2 : G \to O$. Кроме того, существует точно один гомоморфизм $\omega_3 : G_0 \to G_0$, так как G_0 — нулевой объект и точно один гомоморфизм $\omega_4 : O \to O$, так как O является одноэлементной алгеброй. Но тогда

$$\omega_1\omega_2 = \omega_4 = \varepsilon_0,\ \omega_2\omega_1 = \omega_3 = \varepsilon_{G_0},$$

где ε — тождественный изоморфизм. Это означает, что ω_1 и ω_2 — изоморфизмы. А это означает, в свою очередь, что G_0 — одноэлементная алгебра и потому нулевые объекты категории Λ — это в точности одноэлементные алгебры многообразия Λ.

Учитывая доказанное, возьмем любую Ω-алгебру G из Λ и любую одноэлементную Ω-алгебру $O = \{o\}$. Так как O — нулевой объект категории Λ, то существует и притом точно один гомоморфизм $\omega_{OG} : O \to G$. Ясно, что $\omega_{OG}(o) = O_G$ является одноэлементной подалгеброй алгебры G. Пусть A — любая другая подалгебра алгебры G.

Существует и притом точно один гомоморфизм $\omega_{OA}: O \to A$. Но тогда, очевидно,

$$\omega_{OG} = \omega_{OA}\Delta_A^G$$

и потому

$$O_G = \omega_{OG}(o) = \Delta_A^G(\omega_{OA}(o)) = \omega_{OA}(o) = O_A \ni A.$$

Следовательно, $\{O_G\}$ — наименьшая подалгебра алгебры G.

Из доказанного и сказанного ранее о нулевых морфизмах с очевидностью следует, что нулевые морфизмы $\omega_{AB}: A \to B$ — это в точности такие гомоморфизмы алгебры A в алгебру B, что $\omega_{AB}(a) = O_B$ для всех $a \in A$.

2) Пусть всякая алгебра G из Λ имеет наименьшую подалгебру O_G, причем O_G — одноэлементная подалгебра, $O_G = \{o_G\}$.

Возьмем любую Ω-алгебру G из Λ и любую одноэлементную алгебру O, $O = \{o\}$,

Ясно, что существует точно один гомоморфизм $\omega_{OG}: G \to O$. Так как O_G — одноэлементная подалгебра в G, то, полагая

$$\omega_{OG}(o) = O_G,$$

получаем гомоморфизм алгебры O в алгебру G. Если $\alpha: O \to G$ — любой гомоморфизм алгебры O в алгебру G, то $\{\alpha(o)\}$ — одноэлементная подалгебра в G и потому

$$\omega_{OG}(o) = O_G = \alpha(o),$$

Но это означает, что $\omega_{OG} = \alpha$.

Следовательно, любая одноэлементная алгебра является нулевым объектом категории Λ.

Предложение доказано.

3. Напомним, что подобъект $\langle B, \mu \rangle$ объекта A категории K с нулевыми объектами называется ядром морфизма $\alpha: A \to C$, если $\mu\alpha = \omega$ и для любого морфизма $\beta: D \to A$ из $\beta\alpha = \omega$ следует $\beta = \gamma\mu$ для некоторого морфизма γ.

В работе [3] мы рассматривали только такие категории K, в которых кроме аксиомы 1 верны и такие аксиомы:

Аксиома 2. *Каждый морфизм α обладает ядром* $\ker \alpha$.

Аксиома 3. *Подобъекты любого объекта составляют полную структуру.*

Вообще говоря, из верности аксиомы 1 не следует верность аксиом 2, 3. Однако в рассматриваемом нами случае многообразий из верности аксиомы 1 следует верность аксиом 2, 3.

Действительно, в силу леммы 2.2, если G — алгебра многообразия Λ, то мы можем отождествить подалгебры G и подобъекты объекта G категории Λ. Но тогда, в силу лемм 1.2, 2.2 и предложения 3.2, с очевидностью получаем.

Следствие 4.2. Пусть Λ — многообразие Ω-алгебр и в категории Λ верна аксиома 1, т. е. существует нулевой объект. Тогда для любой алгебры G из Λ множество $A(G)$ всех подалгебр алгебры G является полной структурой, т. е. в категории Λ верна и аксиома 3.

Действительно, в силу предложения 3.2 в любой алгебре G существует наименьшая подалгебра и потому пересечение подалгебр всегда существует. Но всегда существует и объединение подалгебр.

Учитывая предложение 3.2, получаем

Следствие 5.2. *Пусть Λ — многообразие Ω-алгебр и в категории Λ верна аксиома 1. Тогда для всякого морфизма $\alpha: A \to B$ в категории Λ существует ядро* $\operatorname{Ker} \alpha$, *причем*

$$\operatorname{Ker} \alpha = \{a \in A / \alpha(a) = o\}.$$

Поэтому в категории Λ верна и аксиома 2.

Действительно, пусть нам дан любой морфизм $\alpha: A \to B$ в категории Λ. Так как $O_B = \{o_B\}$ является подалгеброй алгебры B и, как легко видеть, $\alpha(o_A) = o_B$, то множество

$$\alpha^{-1}(o_B) = \{a \in A / \alpha(a) = o_B\} = C$$

является подалгеброй алгебры G. Рассмотрим подобъект $\langle C, \Delta_C^A \rangle$ объекта A категории Λ. Из построения C получаем, в силу предложения 3.2, что верно равенство

$$\Delta_C^A \alpha = \omega.$$

С другой стороны, пусть $\mu: D \to A$ такой морфизм, что

$$\mu\alpha = \omega.$$

Тогда, в силу предложения 3.2, для любого $d \in D$

$$\alpha(\mu(d)) = \mu\alpha(d) = o_B.$$

Это означает, что $\mu(D) \subseteq C$. Но тогда

$$\mu = \Theta_\mu \Delta^A_{\mu(D)} = \Theta_\mu \Delta^C_{\mu(D)} \Delta^A_C = \gamma \Delta^A_C,$$

где $\gamma = \Theta_\mu \Delta^C_\mu (D)$. Следовательно, $\langle C, \Delta_C^A \rangle$ — ядро морфизма в категории Λ. Так как мы отождествляем подалгебры алгебры G многообразия Λ и подобъекты объекта G категории Λ, то множество

$$\operatorname{Ker} \alpha = \{a \in A / \alpha(a) = o\} = \alpha^{-1}(o)$$

является ядром морфизма $\alpha: A \to B$, что и требовалось доказать.

4. Теперь мы можем дать характеристику таких многообразий Λ, что в категории Λ верны аксиомы 1—3.

Предложение 6.2. Пусть Λ — произвольное многообразие Ω-алгебр. Аксиомы 1—3 верны в категории Λ тогда и только тогда, когда выполнено точно одно из следующих двух требований:

(а) Система Ω операций имеет точно одну o-арную операцию o (точнее, все o-арные операции совпадают на любой алгебре многообразия Λ); причем для любой n-арной операции ρ из Ω с $n \geqslant 1$ верно тождество

$$o \ldots o\rho = 0. \qquad (1)$$

(б) Система Ω операций не пуста и не имеет ни одной o-арной операции, причем существуют такие слова $w_1 = w_1(x_1)$ и $w_2 = w_2(x_2)$, что для любой n-арной операции $\rho \in \Omega$ с $n \geqslant 1$ верны тождества

$$w_1 = w_2,$$

$$w_1 \ldots w_1 \rho = w_2. \qquad (2)$$

Доказательство. 1) Пусть в категории Λ верны аксиомы 1—3. Это означает, в силу предложения 3.2, что любая алгебра G из Λ имеет наименьшую подалгебру $O_G = \{O_G\}$, причем O_G — одноэлементная алгебра. В частности, свободная алгебра $S_0 = S(X_0, \Omega, \Lambda)$, где $X_0 = \{x_1, x_2, \ldots\}$, имеет наименьшую подалгебру $O_S = \{o\}$.

Пусть система Ω операций имеет нульарные операции. Из $\Omega \subseteq O_s$ следует $\Omega_0 = O_S$. Это означает, что все нульарные операции $\rho \in \Omega$ совпадают с нульарной операцией o, выделяющей элемент o, т. е. в алгебре S_0 для любой нульарной операции ρ верно равенство

$$\rho = 0. \tag{3}$$

Но тогда (3) — тождество на всех алгебрах из Λ, т. е. на всех алгебрах G из Λ все нульарные операции совпадают на G и, как легко видеть в силу предложения 3.2, все эти операции выделяют элемент O_G.

Кроме того, для любой n-арной операции $\rho \in \Omega$ с $n \geqslant 1$ на алгебре S_0 верно равенство (1), так как $O_S = \{o\}$ — подалгебра алгебры S_0. Но тогда (1) — тождество на всех алгебрах многообразия Λ.

Допустим теперь, что система Ω операций не имеет нульарных операций. Замечаем, что тогда система Ω не пуста. Действительно, если допустить, что система Ω пуста, то многообразие Λ совпадает с многообразием всех непустых множеств и гомоморфизмы Ω-алгебр — это в точности отображения множеств друг в друга. Между тем легко видеть, что категория всех непустых множеств не имеет нулевого объекта.

Учитывая, что система Ω не пуста, рассмотрим свободную алгебру S_0. Рассматриваем подалгебры

$$\{x_1\}_{S_0} = \{w(x_1)\}, \quad \{x_2\}_{S_0} = \{w(x_2)\}$$

алгебры S_0, порожденные образующими x_1 и x_2 соответственно. Ясно, что $o \in \{x_1\}_{S_0} \cap \{x_2\}_{S_0}$ и потому существуют такие слова $w_1 = w_1(x_1)$ и $w_2 = w_2(x_2)$, что

$$w_1(x_1) = o = w_2(x_2). \tag{4}$$

При этом для любой n-арной операции $\rho \in \Omega$ с $n \geqslant 1$,

$$w_1 \ldots w_1 \rho = o \ldots o\rho = o = w_2, \tag{5}$$

так как $\{o\}$ — подалгебра алгебры S_0. Следовательно, в алгебре S_0 верны равенства (2). Но тогда (2) — тождество на всех алгебрах многообразия Λ.

2) Пусть выполнено требование (а). Возьмем любую алгебру G из Λ и обозначим через o элемент, выделенный в G нульарной операцией o. Пусть $\{o\} = O_G$. Так как (1) — тождество на всех алгебрах многообразия Λ, то O_G — подалгебра в G. Но тогда, очевидно, O_G — наименьшая подалгебра алгебры G. В силу предложения 3.2 и следствий 4.2, 5.2, в категории Λ верны все аксиомы 1—3.

3) Пусть выполнено требование (б). Возьмем любую алгебру G из многообразия Λ. Пусть w_1 и w_2 — слова из тождеств (2). Так как (2) — тождество, то

$$\forall a_1\ a_2 \in G\ w_1(a_1) = w_2(a_2).$$

Это означает, что все элементы $w_1(a_1)$, $w_2(a_2)$ совпадают с одним и тем же элементом, который мы обозначим через o. Снова в силу (2) для любой n-арной операции $\rho \in \Omega$ с $n \geqslant 1$ получим

$$o \ldots o\rho = 0.$$

Это означает, что $\{o\} = O_G$ является одноэлементной подалгеброй алгебры G. Наконец, пусть A — любая подалгебра алгебры G и $a \in A$. Тогда $o = w_1(o) \in A$, т. е. O_G — наименьшая подалгебра алгебры G. В силу предложения 3.2 и следствий 4.2, 5.2 в категории Λ верны все аксиомы 1—3.

Предложение доказано.

5. Будем теперь предполагать, не оговаривая этого особо, что для рассматриваемого многообразия Λ Ω-алгебр категория Λ имеет нулевые объекты. Поэтому, в силу доказанного выше, в категории Λ верны все аксиомы — 1, 2, 3.

В работе [3] мы рассматривали только такие категории K, в которых, кроме аксиом 1—3, верны и такие аксиомы:

Аксиома 4. *Идеалы любого объекта категории составляют полную подструктуру структуры подобъектов этого объекта.*

Аксиома 5. *Всякий морфизм* α *обладает образом* $\operatorname{Im}\alpha$.

Аксиома 6. *При любом нормальном эпиморфизме* $\alpha : A \to B$ *образом идеала объекта* A *является идеал объекта* B.

Напомним соответствующие определения и понятия из теории категорий.

Эпиморфизм $\nu : A \to B$ с ядром $\operatorname{Ker}\nu = \langle C, \mu \rangle$ называется нормальным, если для любого морфизма $\alpha : A \to D$ из $\mu\alpha = \omega$ следует $\alpha = \nu\xi$ для некоторого морфизма $\xi : B \to D$.

Пусть $\alpha : A \to C$ — произвольный морфизм. Подобъект $\langle M, \varkappa \rangle$ объекта C называется образом (нормальным) морфизма α, если

$$\alpha = \nu\varkappa$$

для некоторого нормального эпиморфизма $\nu : A \to M$. Образом подобъекта $\langle B, \mu \rangle$ объекта A при морфизме $\alpha : A \to C$ называется образ морфизма $\mu\alpha : B \to C$.

Подобъект $\langle B, \mu \rangle$ объекта A называется идеалом объекта A, если $\langle B, \mu \rangle = \operatorname{Ker}\alpha$ для некоторого морфизма $\alpha : A \to C$.

Примерами многообразий, в которых верны все аксиомы 1—6, являются многообразия групп, колец и, более обще, многообразия Ω-групп.

Покажем теперь, что в категории Λ, где Λ — многообразие Ω-алгебр, аксиомы 4—6 могут быть и не верны (даже если верны все аксиомы 1—3).

Пример 1. Пусть $\Omega = \{o, \rho\}$, где o — нульарная операция, а ρ — тернарная операция. Рассмотрим многообразие Λ Ω-алгебр, определяемое следующим множеством Λ тождеств:

$$x_1x_2x_3\rho = x_1x_3x_2\rho = x_2x_1x_3\rho = x_2x_3x_1\rho = x_3x_1x_2\rho = x_3x_2x_1\rho,$$
$$x_1x_1x_2\rho = x_1, \quad ooo\rho = 0.$$

В силу предложения 6.2, в категории Λ верны аксиомы 1—3. Строим четырехэлементную алгебру $G = \{0;\ 1;\ 2;\ 3\}$ из многообразия Λ, обозначая через o элемент, выделяемый нульарной операцией o, и определяя тернарную операцию ρ с помощью тождеств из Λ и равенств

$$012\rho=0,\ 013\rho=1,\ 023\rho=2,\ 123\rho=3.$$

Рассмотрим отображения $\varphi_1 : G\to A_2$, $\varphi_2 : G\to A_1$, определенные по правилам:

$$A_1=\{0,1\},\ A_2=\{0,2\},$$

$$\varphi_2(0)=\varphi_1(1)=\varphi_2(0)=\varphi_2(2)=0,$$
$$\varphi_1(2)=\varphi_1(3)=2,\ \varphi_2(1)=\varphi_2(3)=1.$$

Прямой проверкой убеждаемся, что φ_1 и φ_2 — гомоморфизмы, причем

$$\operatorname{Ker}\varphi_1=A_1,\quad \operatorname{Ker}\varphi_2=A_2.$$

Поэтому A_1 и A_2 — идеалы алгебры G. Замечаем, что

$$A=\{0,1,2\}=A_1\vee A_2,$$

так как A — подалгебра алгебры G. Между тем A не является идеалом алгебры G: если $\varphi : G\to H$ — такой гомоморфизм, что $A\subseteq\operatorname{Ker}\varphi$, то $A\subset\operatorname{Ker}\varphi=G$, так как

$$\varphi(3)=\varphi(123\rho)=\varphi(1)\,\varphi(2)\,\varphi(3)\,\rho=00\varphi(3)\rho=0.$$

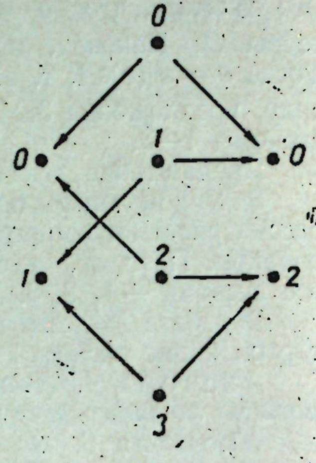

Рис. 1

Следовательно, в построенной категории Λ не верна аксиома 4.

П р и м е р 2. Пусть $\Omega=\{o;\rho;\pi\}$, где o — нульарная операция, а ρ и π — бинарные операции. Рассмотрим многообразие Λ Ω-алгебр, определяемое следующим множеством Λ тождеств

$$x_1x_2\rho x_3\rho=x_1x_2x_3\rho\rho,\quad x_1x_2\pi x_3\pi=x_1x_2x_3\pi\pi,$$

$$x_1x_2\rho=x_2x_1\rho,\ x_1x_2\pi=x_2x_1\pi,\ ox_1\rho=x_1,\ ox_1\pi=0,$$

$$x_1x_1x_2\pi\rho=x_1x_1x_2\rho\pi=x_1,\ 00\rho=00\pi=0.$$

Это не что иное, как многообразие всех структур с наименьшим элементом o, операцией ρ объединения и операцией π пересечения. Ясно, что в категории Λ верны аксиомы 1—3.

Рассмотрим структуру $G=\{0;1;2\}$, где $0<1<2$. Ясно, что G — алгебра из Λ. Задаем отображение $\varphi : G\to H$, где $H=\{0,\ 1\}$, полагая

$$\varphi(0)=0,\ \varphi(1)=\varphi(2)=1.$$

Ясно, что φ — гомоморфизм алгебры G на алгебру H, причем $\operatorname{Ker}\varphi=\{0\}$. Покажем, что морфизм φ не имеет образа в категории Λ и потому в категории Λ не верна аксиома 5.

Допустим противное. Тогда найдется такой нормальный эпиморфизм $\psi : G\to A$ и мономорфизм $\mu : A\to H$, что

$$\varphi=\psi\mu. \tag{1}$$

Замечаем, что $\operatorname{Ker}\psi=\{0\}=\operatorname{Ker}\varphi$: для любого элемента $a\in G$

$$\psi(a)=0\Rightarrow\varphi(a)=\mu(\psi(a))=\mu(o)=0,$$
$$\varphi(a)=0\Rightarrow\mu(\psi(a))=0\Rightarrow\psi(a)=0,$$

так как μ — изоморфное вложение алгебры A в алгебру H.

Пусть ε — тождественный изоморфизм алгебры G на алгебру G, т. е. $\varepsilon=\Delta^G_G$. Тогда, очевидно, $\operatorname{Ker}\varepsilon=\{0\}$. В силу нормальности эпиморфизма ψ существует такой морфизм $\xi : A\to G$, что

$$\varepsilon=\psi\xi.$$

Но тогда, очевидно, алгебра A имеет точно три элемента и ψ является изоморфизмом алгебры G на алгебру A. Из (1) следует

$$\varphi=\psi\mu=\psi\theta_\mu\Delta^H_{\mu(A)},$$

причем θ_μ — изоморфизм. Но тогда и $\psi\theta_\mu$ — изоморфизм, т. е. и алгебра $\mu(A)$ имеет точно три элемента. Из определения $\Delta^H_{\mu(A)}$ следует в таком случае, что алгебра $H=\{0;\ 1\}$ имеет по крайней мере три различных элемента! Противоречие.

Таким образом, в построенной категории — многообразии всех структур с наименьшим элементом — не верна аксиома 5.

П р и м е р 3. Пусть $\Omega=\{0,\rho\}$, где 0 — нульарная операция, а ρ — тернарная операция. Рассмотрим многообразие Ω-алгебр, определяемое следующим множеством тождеств:

$$x_1x_2x_3\rho=x_1x_3x_2\rho=x_2x_1x_3\rho=x_2x_3x_1\rho=x_3x_1x_2\rho=x_3x_2x_1\rho,$$
$$x_1x_1x_1\rho=x_1,\quad 000\rho=0.$$

Строим четырехэлементную алгебру $G=\{0;\ 1;\ 2;\ 3\}$ из многообразия Λ, обозначая через 0 элемент, выделенный нульарной операцией 0, и определяя тернарную операцию ρ с помощью тождеств из Λ и равенств

$$000\rho=003\rho,\ 022\rho=023\rho=122\rho=123\rho=223\rho=2,$$
$$001\rho=002\rho=011\rho=012\rho=013\rho=112\rho=113\rho=233\rho=1.$$

Строим трехэлементную алгебру $A=\{0,\ a,\ b\}$ из многообразия Λ, обозначая через 0 элемент, выделяемый нульарной операцией o, и определяя тернарную операцию ρ с помощью тождеств из Λ и следующих равенств

$$00a\rho=00b\rho=0bb\rho=abb\rho=0,$$
$$0aa\rho=0ab\rho=aab\rho=a.$$

Определяя отображение $\varphi_1 : G\to A$ по правилу (см. рис. 2)

$$\varphi_1(0)=\varphi_1(1)=0,\ \varphi_1(2)=a,\ \varphi_1(3)=b,$$

легко проверяем, что φ_1 — гомоморфизм алгебры G на алгебру A и потому φ_1 — эпиморфизм. При этом

$$\operatorname{Ker}\varphi_1=A_1=\{0;\ 1\}.$$

Рис. 2.

Замечаем, что φ_1 — нормальный эпиморфизм. Действительно, пусть $\psi: G \to H$ — такой гомоморфизм, что $A_1 \subseteq \operatorname{Ker} \psi$. Тогда, рассматривая все возможные случаи, получаем:

а) $\psi(2)=0$ и $\psi(3)=0$. Тогда $\psi=\omega=\varphi_1\psi$;

б) $\psi(2)=0$, но $\psi(3)\neq 0$. Пусть $\psi(3)=c$. Тогда

$$\psi(G)=\{0;\ c\}=C$$

и из определения гомоморфизма легко следует: если $x_1, x_2, x_3 \in C$ и среди элементов $x_1x_2x_3$ есть o, то $x_1x_2x_3\rho=0$. Из этих равенств и тождеств из Λ операция ρ на множестве C однозначно определяется. Но тогда, полагая

$$\xi_1(a)=\xi_1(o)=0,\ \xi_1(b)=c,$$

легко получаем, что $\xi_1: A \to C$ есть гомоморфизм, причем

$$\Theta_\psi=\varphi_1\xi_1.$$

Но в этом случае

$$\psi=\Theta_\psi \Delta^H_{\psi(G)}=\varphi_1\xi_1\Delta^H_{\psi(G)};$$

в) $\psi(2)\neq 0$. Тогда и $\psi(3)\neq 0$. Действительно,

$$\psi(3)=0 \Longrightarrow \psi(2)=\psi(123\rho)=0\varphi(2)0\rho=\psi(002\rho)=\psi(1)=0.$$

Кроме того, $\psi(2)\neq\psi(3)$. Действительно, если $\psi(2)=\psi(3)$, то

$$\psi(2)=\psi(022\rho)=0\psi(2)\psi(2)\rho=0\psi(3)\psi(3)\rho=\psi(033\rho)=\psi(0)=0.$$

Учитывая это и обозначая $\psi(2)=\bar{a}$, $\psi(3)=\bar{b}$, легко получаем

$$\Theta_\psi=\varphi_1\xi_1,$$

где ξ_1 — изоморфизм алгебры $\psi(G)$ на алгебру A, определяемый правилом $\xi_1(a)=\bar{a}$, $\xi_1(b)=\bar{b}$. Но тогда верно равенство

$$\psi=\Theta_\psi \Delta^H_{\psi(G)}=\varphi_1\xi_1\Delta^H_{\psi(G)}.$$

Таким образом, φ_1 — нормальный эпиморфизм. Рассматривая отображение $\varphi_2: G \to H$, определяемое правилами,

$$\varphi_2(0)=\varphi_2(3)=0,\ \varphi_2(1)=\varphi_2(2)=1,$$

легко получаем, что φ_2 — гомоморфизм и

$$\operatorname{Ker}\varphi_2=\{0;\ 3\}=A_3.$$

Следовательно, A_3 — идеал алгебры G. Обозначая через B множество $\{o,\ b\}\subseteq A$ и полагая $\Theta(o)=o$, $\Theta(3)=b$, легко получаем, что $\Theta: A_3 \to B$ — изоморфизм алгебры A_3 на алгебру B, причем (см. рис. 2)

$$\Delta^G_{A_3}\varphi_1=\Theta\,\Delta^A_B.$$

Но, очевидно, всякий изоморфизм является нормальным эпиморфизмом. Поэтому Θ — нормальный эпиморфизм. В силу определения образа, $B=\{o;\ b\}$ является образом идеала A_3 алгебры G при нормальном эпиморфизме $\varphi_1: G \to A$.

Между тем B не является идеалом алгебры A.

Действительно, пусть $\psi: A \to D$ — такой гомоморфизм, что $B \subseteq \operatorname{Ker}\psi$. Тогда $B \subset \operatorname{Ker}\psi = A$, так как

$$\psi(a)=\psi(oab\rho)=\psi(o)\psi(a)\psi(b)\rho=$$
$$=\psi(0)\psi(a)\psi(o)\rho=\psi(ooa\rho)=\psi(o)=0.$$

Следовательно, в построенной категории Λ не верна аксиома 6, так как образ идеала A_3 объекта G при нормальном эпиморфизме $\varphi_1: G \to A$ не является идеалом объекта A.

Таким образом, если нам дано некоторое многообразие Λ Ω-алгебр и в категории Λ верны аксиомы 1—3, то, вообще говоря, аксиомы 4—6 могут и не быть верными в категории Λ. В связи с этим интересно выяснить, при каких условиях в категории Λ верны аксиомы 4—6. Это и будет сделано в следующем параграфе.

§ 3

Будем предполагать, не оговаривая этого особо, что рассматривается такое многообразие Λ Ω-алгебр, что в категории Λ верны аксиомы 1—3.

В этом параграфе будут найдены необходимые и достаточные условия того, чтобы в категории Λ были верны все аксиомы 1—6. При этом условия доведены до свободной алгебры $S_0=S(X_0,\ \Omega,\ \Lambda)$ многообразия Λ со счетным числом образующих, т. е. почти до тождеств. Однако дать характеристику многообразий, в которых верны все аксиомы 1—6, с помощью тождеств не удалось. Интересно было бы найти такую характеристику, как это сделано для аксиом 1—3.

1. Заметим сначала, что для любой алгебры G из Λ всякий нормальный эпиморфизм $\varphi: G \to H$ является гомоморфизмом на.

Действительно, пусть $\varphi: G \to H$ — нормальный эпиморфизм. Представим φ в виде

$$\varphi=\Theta_\varphi\Delta^H_{\varphi(G)}. \tag{1}$$

Легко видеть, что $\operatorname{Ker}\varphi=\operatorname{Ker}\Theta_\varphi$, так как $\Delta^H_{\varphi(G)}$ — вложение. В силу нормальности эпиморфизма φ

$$\Theta_\varphi=\varphi\xi \tag{2}$$

для некоторого морфизма ξ. Из равенств (1) и (2) следует

$$\varphi=\varphi\xi\Delta^H_{\varphi(G)},\ \Theta_\varphi=\Theta_\varphi\Delta^H_{\varphi(G)}\xi. \tag{3}$$

Но Θ_φ — гомоморфизм на и потому Θ_φ является эпиморфизмом. Так как и φ — эпиморфизм, то из равенств (3) следует

$$\xi\Delta^H_{\varphi(G)}=\varepsilon_H,\ \Delta^H_{\varphi(G)}\xi=\varepsilon_{\varphi(G)},$$

где ε — тождественный изоморфизм. Поэтому $\Delta^H_{\varphi(G)}$ является гомоморфизмом, а значит и изоморфизмом на. А это означает, что

$$\varphi(G)=H,$$

т. е. и φ является гомоморфизмом на.

Лемма 1.3. *Для любой алгебры G из Λ следующие утверждения равносильны:*

(A_G) *Каждый морфизм $\varphi: G \to H$ в категории Λ имеет образ.*

($Б_G$) *Нормальные эпиморфизмы $\varphi: G \to H$ в категории Λ — это в точности гомоморфизмы на.*

(B_G) *Для любого идеала A алгебры G существует и притом точно одна конгруенция $\pi = \pi_A^G$ на алгебре G такая, что*

$$A = o^{\pi} = \{a \in G \,|\, a \pi o\} = \operatorname{Ker} \operatorname{nat} \pi.$$

Доказательство. Будем вести доказательство, учитывая сделанное выше замечание о нормальных эпиморфизмах. $A \Rightarrow Б$. Пусть верно (A_G). Возьмем любой гомоморфизм $\varphi: G \to H$ алгебры G на алгебру H. По (A_G), φ имеет образ, т. е $\varphi = \xi\mu$ для некоторого нормального эпиморфизма ξ и некоторого мономорфизма $\mu: C \to H$. Представляя μ в виде $\mu = \theta_\mu \Delta^H_{\mu(c)}$, получим, в силу леммы 2.1, что θ_μ является изоморфизмом. Ясно, что в таком случае морфизм $\zeta = \xi\theta_\mu$ является нормальным эпиморфизмом, причем

$$\varphi = \zeta \Delta^H_{\zeta(G)}.$$

Но тогда для любого $a \in G$ получаем

$$\varphi(a) = \zeta \Delta^H_{\zeta(G)}(a) = \Delta^H_{\zeta(G)}(\zeta(a)) = \zeta(a)$$

и потому $\varphi(G) = H = \zeta(G)$. Поэтому

$$\varphi = \zeta \Delta^H_H = \zeta,$$

т. е. φ является нормальным эпиморфизмом.

$Б \Rightarrow B$. Пусть верно ($Б_G$). Возьмем любой идеал A алгебры G. Так как A — идеал, то $A = \operatorname{Ker}\varphi$ для некоторого гомоморфизма $\varphi: G \to H$. Но тогда, полагая

$$\forall a,\ b \in G \quad a \pi_\varphi b \Longleftrightarrow \varphi(a) = \varphi(b),$$

мы получаем такую конгруенцию π на алгебре G, что

$$A = (o)^{\pi} = \operatorname{Ker} \operatorname{nat} \pi.$$

С другой стороны, пусть π_1 и π_2 — такие конгруенции на алгебре G, что

$$(0)^{\pi_1} = A = (o)^{\pi_2}.$$

Замечаем, что естественные гомоморфизмы $\operatorname{nat}\pi_1$ и $\operatorname{nat}\pi_2$ являются гомоморфизмами на, а значит и нормальными эпиморфизмами, в силу ($Б_G$). Между тем, в силу выбора конгруенций π_1 и π_2,

$$\operatorname{Ker}\operatorname{nat}\pi_1 = A = \operatorname{Ker}\operatorname{nat}\pi_2.$$

Поэтому, как легко видеть, существует такой изоморфизм θ, что

$$\operatorname{nat}\pi_1 = \operatorname{nat}\pi_2\,\theta.$$

Но тогда, как легко видеть, $\pi_1 = \pi_2$.

$B \Rightarrow A$. Пусть верно (B_G). Возьмем любой гомоморфизм $\varphi: G \to H$ и докажем, что θ_φ — нормальный эпиморфизм. Тогда гомоморфизм φ будет иметь образ, причем этот образ совпадает с гомоморфным образом $\varphi(G)$ алгебры G, так как $\varphi = \theta_\varphi \Delta^H_{\varphi(G)}$.

Замечаем, что θ_φ — эпиморфизм в силу леммы 2.1, причем, как легко видеть, $\operatorname{Ker}\varphi = A = \operatorname{Ker}\theta_\varphi$. Построив конгруенцию π_φ на алгебре G, как и выше, получим, что

$$\operatorname{nat}\pi_\varphi = \theta_\varphi \xi \tag{1}$$

для некоторого изоморфизма $\xi: \varphi(G) \to G/\pi_\varphi$. Пусть $\alpha: G \to C$ — любой такой морфизм в категории Λ, что $A \subseteq \operatorname{Ker}\alpha = F$. Представляя гомоморфизм α в виде

$$\alpha = \theta_\alpha \Delta^C_{\alpha(G)}, \tag{2}$$

мы, как и выше, находим такую конгруенцию π_α и изоморфизм $\zeta: \alpha(G) \to A/\pi_\alpha$ алгебры $\alpha(G)$ на алгебру A/π_α, что

$$\operatorname{nat}\pi_\alpha = \theta_\alpha \zeta. \tag{3}$$

Заметим теперь, что в силу (B_G) для любых двух конгруенций π_1 и π_2 на алгебре G,

$$\pi_1 \subseteq \pi_2 \Longleftrightarrow \operatorname{Ker}\operatorname{nat}\pi_1 \subseteq \operatorname{Ker}\operatorname{nat}\pi_2. \tag{*}$$

Действительно, пусть $\operatorname{Ker}\operatorname{nat}\pi_1 \leqslant \operatorname{Ker}\operatorname{nat}\pi_2$. Тогда обозначая $\pi = \pi_1 \wedge \pi_2$, получим, что π — конгруенция на алгебре G, причем

$$\operatorname{Ker}\operatorname{nat}\pi = \operatorname{Ker}\operatorname{nat}\pi_1 \wedge \operatorname{Ker}\operatorname{nat}\pi_2 = \operatorname{Ker}\operatorname{nat}\pi_1.$$

В силу (B_G), $\pi = \pi_1$, т. е. $\pi_1 \leqslant \pi_2$. Обратно, если $\pi_1 \leqslant \pi_2$, то, очевидно,

$$\operatorname{Ker}\operatorname{nat}\pi_1 \subseteq \operatorname{Ker}\operatorname{nat}\pi_2.$$

Учитывая доказанное, получаем, что $\pi_\varphi \subseteq \pi_\alpha$. Но тогда легко видеть, что, полагая $\eta((a)^{\pi_\varphi}) = (a)^{\pi_\alpha}$ для всех $a \in G$, мы получаем гомоморфизм $\eta: G/\pi_\varphi \to G/\pi_\alpha$, причем

$$\operatorname{nat}\pi_\alpha = \operatorname{nat}\pi_\varphi\,\eta \tag{4}$$

в силу построения гомоморфизма η. Из (1) — (4) следует

$$\alpha = \theta_\varphi(\xi\eta\zeta^{-1}\Delta^C_{\alpha(G)}).$$

Следовательно, θ_φ — нормальный эпиморфизм.

Лемма доказана.

Лемма 2.3. *Пусть $\varphi: S \to G$ — гомоморфизм на. Если для алгебры S верны утверждения (A_S), ($Б_S$), (B_S), то для алгебры G верны утверждения (A_G), ($Б_G$), (B_G).*

Доказательство. Пусть для алгебры S верны утверждения (A_S), ($Б_S$), (B_S).

Пусть $\psi: G \to \psi(G)$ — произвольный гомоморфизм на, $A = \psi(G)$. В силу леммы 2.1 ψ является эпиморфизмом. Пусть $\Theta : G \to B$ такой гомоморфизм, что $H = \operatorname{Ker} \psi \subseteq \operatorname{Ker} \Theta = F$. Тогда

$$\operatorname{Ker} \varphi\Theta = \varphi^{-1}(\operatorname{Ker} \Theta), \ \operatorname{Ker} \varphi\psi = \varphi^{-1}(\operatorname{Ker} \psi). \tag{**}$$

Действительно, это следует из таких несложных выкладок:

$$\varphi\Theta(\varphi^{-1}(\operatorname{Ker}\Theta)) = \Theta(\varphi(\varphi^{-1}(\operatorname{Ker}\Theta)) =$$

$$= \Theta(\operatorname{Ker}(\Theta)) = o \Longrightarrow \varphi^{-1}(\operatorname{Ker}\Theta) \subseteq \operatorname{Ker}\varphi\Theta.$$

$$\varphi\Theta(\operatorname{Ker}\varphi\Theta) = o = \Theta(\varphi(\operatorname{Ker}\varphi\Theta)) \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow \varphi(\operatorname{Ker}\varphi\Theta) \subseteq \operatorname{Ker}\Theta \Longrightarrow \operatorname{Ker}\varphi\Theta \subseteq \varphi^{-1}(\operatorname{Ker}\Theta),$$

и потому верно первое из равенств (**); дословно также доказывается второе.

В силу равенств (**) из $\operatorname{Ker}\psi \subseteq \operatorname{Ker}\Theta$ следует $\operatorname{Ker}\varphi\psi \subseteq \operatorname{Ker}\varphi\Theta$. Но, очевидно, гомоморфизм $\varphi\psi : \overline{S} \to A$ является гомоморфизмом на, а значит и нормальным эпиморфизмом, так как для алгебры S верно утверждение $(Б_S)$. Поэтому

$$\varphi\Theta = \varphi\psi\xi$$

для некоторого морфизма ξ. Но φ — гомоморфизм на, а значит и эпиморфизм. Поэтому из этого равенства следует

$$\Theta = \psi\xi.$$

Следовательно, ψ является нормальным эпиморфизмом и потому верно утверждение $(Б_G)$.

Лемма доказана.

Лемма 3.3. *Если для свободной алгебры S_0 многообразия Λ, имеющей счетное множество X_0 свободных образующих, верны утверждения (A_{S_0}), $(Б_{S_0})$, (B_{S_0}), то для любой свободной алгебры S многообразия Λ верны утверждения (A_S), $(Б_S)$, (B_S).*

Доказательство. Пусть для алгебры S_0 верны утверждения (A_{S_0}), $(Б_{S_0})$, (B_{S_0}).

Пусть $S = S(X, \Omega, \Lambda)$ — любая свободная алгебра многообразия Λ, A — идеал в S, π_1 и π_2 — две такие конгруенции на алгебре S, что $\operatorname{Ker}\operatorname{nat}\pi_1 = A = \operatorname{Ker}\operatorname{nat}\pi_2$. Возьмём любые два элемента $w_1, w_2 \in S$. Существует такое конечное подмножество $Y \subseteq X$, что w_1 и w_2 принадлежат подалгебре S^*, порожденной в S множеством Y. Определим бинарные отношения π_1^* и π_2^* на S^*, полагая

$$\pi_i^* = \pi_i \cap (S^* \times S^*), \ i = 1, 2. \tag{1}$$

Ясно, что π_1^* и π^*_2 — конгруенции на алгебре S^*, причем

$$\operatorname{Ker}\operatorname{nat}\pi_i^* = \{ w \in S^* \mid w \pi_i^* 0\} = \{w \in S^* \mid w \pi_i o\} = S^* \cap A. \tag{2}$$

Но, как легко видеть, S^* является гомоморфным образом алгебры S_0. Так как для S_0 верно утверждение (B_{S_0}), то, в силу лемм 1.3, 2.3, для S_0^* верно утверждение (B_{S^*}). Поэтому из равенств (2) следует равенство $\pi_1^* = \pi_2^*$. Но тогда очевидно в силу (1) и построения алгебры S^*, что

$$w_1 \pi_1 w_1 \Longleftrightarrow w_1 \pi_2 w_2.$$

В силу произвольности выбора элементов $w_1, w_2 \in S$ получаем, что верно равенство $\pi_1 = \pi_2$. Следовательно, для алгебры S верно утверждение (B_S).

Лемма доказана.

Предложение 4.3. Для многообразия Λ равносильны утверждения:

(а) Каждый морфизм φ в категории Λ имеет образ $\operatorname{Im}\varphi$, т. е. в категории Λ верна аксиома 5.

(б) Нормальные эпиморфизмы — это в точности гомоморфизмы на.

(в) Для любой алгебры G из Λ и любого идеала A алгебры G существует и притом точно одна конгруенция $\pi = \pi_A^G$ на алгебре G такая, что $A = \operatorname{Ker}\operatorname{nat}\pi$.

(г) При любом гомоморфизме $\varphi : G \to H$ гомоморфный образ $\varphi(G)$ алгебры G при гомоморфизме φ является образом морфизма φ в категории Λ.

(д) При любом гомоморфизме $\varphi : G \to H$ гомоморфный образ $\varphi(A)$ подалгебры A алгебры G при гомоморфизме φ является образом подобъекта A объекта G категории Λ при морфизме φ.

(е) Если $\varphi : G \to H$ — гомоморфизм на и $\operatorname{Ker}\varphi = \{o\}$, то гомоморфизм φ является изоморфизмом.

Доказательство. Импликации (д) $\Longrightarrow$ (г) и (г) $\Longrightarrow$ (а) очевидны. В силу леммы 1.3 утверждения (а), (б) и (в) равносильны. Остается доказать, что (б) $\Longrightarrow$ (д) и (в) $\Longrightarrow$ (е).

(б) $\Longrightarrow$ (д). Пусть $\varphi : G \to H$ — гомоморфизм и A — подалгебра алгебры G. Обозначим

$$\psi = \Delta_A^G \varphi.$$

Тогда, очевидно, $\psi(A) = \varphi(A)$. Но $\psi = \Theta_\psi \Delta^H_{\psi(A)}$. Поэтому

$$\Delta_A^G \varphi = \Theta_\varphi \Delta^H_{\psi(A)}.$$

Это обозначает, что $\varphi(A)$ является образом подобъекта A объекта G категории Λ при морфизме $\varphi : G \to H$, так как Θ_ψ — гомоморфизм на а значит и нормальный эпиморфизм в силу (б).

(в) $\Longrightarrow$ (е). Пусть верно (в), $\varphi : G \to H$ — гомоморфизм на и $\operatorname{Ker}\varphi =$
$= \{o\}$. Тогда, построив конгруенцию π_φ на алгебре G, получаем $\operatorname{Ker}\operatorname{nat}\pi_\varphi =$
$\operatorname{Ker}\operatorname{nat}\Delta$, где $\Delta = \{(a, a) / a \in G\}$. В силу (в) $\pi_\varphi = \Delta$ и потому $\operatorname{nat}\pi_\varphi$ —
изоморфизм. Но тогда, очевидно, и гомоморфизм φ является изомор-
физмом, так как $\varphi = \operatorname{nat}\pi_\varphi \Theta$ для некоторого изоморфизма Θ.

(е) $\Longrightarrow$ (в). Пусть верно (е). Пусть A — идеал алгебры G, π_1 и π_2 — такие конгруенции на алгебре G, что

$$\operatorname{Ker}\operatorname{nat}\pi_1 = A = \operatorname{Ker}\operatorname{nat}\pi_2.$$

Обозначая $\pi = \pi_1 \wedge \pi_2$, получаем что π — конгруенция на алгебре G и $\operatorname{Ker}\operatorname{nat}\pi = A$. Так как $\pi \subseteq \pi_i$, то, определяя отображения $\Theta_i : G/\pi \to G/\pi_i$ по правилам

$$\forall a \in G \ \ \Theta_i((a)^\pi) = (a)^{\pi_i}, \ i = 1, 2,$$

получаем, что Θ_i — гомоморфизмы на. При этом

$$\forall a \in G \ \ \Theta_i((a)^\pi) = (o)^{\pi_i} \Longleftrightarrow a \in A \Longleftrightarrow (a)^\pi = (0)^\pi, \ i = 1,2,$$

т. е. $\mathrm{Ker}\,\Theta_i=\{o\}$. В силу (е) Θ_i — изоморфизмы. Но тогда

$$\forall a,\ b\in G\quad a\pi_i b \Longleftrightarrow (a)^{\pi_i}=(b)^{\pi_i}\Longleftrightarrow (a)^{\pi}=(b)^{\pi}\Longleftrightarrow a\pi b,\quad i=1,\ 2,$$

т. е. $\pi_1=\pi=\pi_2$. Следовательно, верно утверждение (в).

Предложение доказано.

Следствие 5.3. *Каждое из утверждений (а) — (е) предложения 4.3 равносильно каждому из утверждений (A_{S_0}), (Б_{S_0}), (В_{S_0}), где S_0 — свободная алгебра многообразия Λ, имеющая счетное множество X_0 свободных образующих.*

Действительно, пусть верно хотя бы одно из утверждений (а)—(е) предложения 4.3. Тогда, в силу того же предложения, верны все утверждения (а)—(е). В частности верны утверждения (а), (б) и (в). Но тогда, очевидно, верны и утверждения (A_{S_0}), (Б_{S_0}), В_{S_0}).

Обратно, пусть верно хотя бы одно из утверждений (A_{S_0}), (Б_{S_0}) и (В_{S_0}). Тогда, в силу леммы 1.3, верны все эти утверждения. В силу леммы 3.3 получаем в таком случае: что для любой свободной алгебры S многообразия Λ будут верны все утверждения (A_S), (Б_S), (В_S). Между тем всякая алгебра G многообразия Λ является гомоморфным образом некоторой свободной алгебры S этого многообразия. В силу леммы 2.3 для любой алгебры G верны утверждения (A_G), (Б_G), (В_G). Но это означает, что верны утверждения (а), (б) и (в). В силу предложения 4.3 верны все утверждения (а) — (е) этого предложения.

Следствие доказано.

Предложение 6.3. Каждое из утверждений (а) — (е) предложения 4.3 и каждое из утверждений (A_{S_0}), (Б_{S_0}) (В_{S_0}), где S_0 — свободная алгебра многообразия Λ со счетным множеством X_0 свободных образующих, равносильно следующему утверждению

(Γ_{S_0}). Для любых двух конгруенций π_1 и π_2 алгебры S_0

$$\left(\exists u, v\in S_0\begin{cases}u\ \pi_1\ v,\\ \text{но не}\\ u\ \pi_2\ v.\end{cases}\right)\Longrightarrow\left(\exists w\in S_0\begin{cases}w\ \pi_1\ o,\\ \text{но не}\\ w\ \pi_2\ o.\end{cases}\right)$$

Доказательство. Достаточно доказать, что равносильны утверждения (е) и (Γ_{S_0}).

(е) $\Longrightarrow (\Gamma_{S_0})$. Пусть π_1 и π_2 — две конгруенции на S_0, причем

$$\exists u,\ v\in S_0\ u\ \pi_1 v,\ \text{но не}\ u\pi_2 v.$$

Обозначая $\pi=\pi_1\wedge\pi_2$, получим, что π — конгруенция на S_0 и

$$\exists u,\ v\in S_0\ u\ \pi_1 v,\ \text{но не}\ u\pi v. \tag{1}$$

Так как $\pi\subseteq\pi_1$ то, полагая $\Theta((w)^{\pi})=(w)^{\pi_1}$ для любого $w\in S_0$, мы получаем некоторый гомоморфизм $\Theta: S_0/\pi\to S_0/\pi_1$ алгебры S_0/π на алгебру S_0/π_1. Берем элементы u, v, существование которых утверждается в (1). Получаем

$$(u)^{\pi}\neq(v)^{\pi},\ \text{но}\ \Theta((u)^{\pi})=(u)^{\pi_1}=(v)^{\pi_1}=\Theta((v)^{\pi}).$$

Это означает, в силу (е), что Θ не является изоморфизмом и потому $\mathrm{Ker}\,\Theta\neq\{o\}$, т. е.

$$\exists w\in S_0\quad w\pi_1 o,\ \text{но не}\ w\pi o. \tag{2}$$

А (2) равносильно, очевидно, требуемому утверждению

$$\exists w\in S_0\quad w\pi_1 o,\ \text{но не}\ w\pi_2 o.$$

$(\Gamma_{S_0})\Longrightarrow$ (е). Пусть $\varphi: G\to H$ — гомоморфизм на и $\mathrm{Ker}\,\varphi=\{o\}$. Допустим, что φ не является изоморфизмом. Тогда

$$\exists a,\ b\in G\quad a\neq b,\ \text{но}\ \varphi(a)=\varphi(b).$$

Обозначим через A подалгебру алгебры G, порожденную элементами a, b, через B — подалгебру $\varphi(A)$ алгебры $H=\varphi(G)$. Существует такой гомоморфизм $\psi: S_0\to A$ алгебры S_0 на алгебру A, что $\psi(x_1)=a$, $\psi(x_2)=b$. Гомоморфизм $\varphi: G\to H$ индуцирует гомоморфизм $\varphi': A\to B$, определяемый правилом

$$\forall c\in A\quad \varphi'(c)=\varphi(c).$$

Гомоморфизм $\varphi': A\to B$ индуцирует гомоморфизм $\psi\varphi': S_0\to B$ алгебры S_0 на алгебру B.

Определим конгруенции π_A и π_B на алгебре S_0, полагая

$$\forall u,\ v\in S_0,\ u\pi_A v\Longleftrightarrow\psi(u)=\psi(v),\ u\pi_B v\Longleftrightarrow\psi\varphi'(u)=\psi\varphi'(v).$$

Из построения алгебр A, B, гомоморфизмов ψ, φ и выбора элементов a, b следует

$$\psi(x_2)=a\neq b=\psi(x_2),\ \psi\varphi'(x_1)=\varphi(a)=\varphi(b)=\psi\varphi'(x_2).$$

В силу построения конгруенций π_A и π_B это обозначает, что

$$x_1\pi_B x_2,\ \text{но не}\ x_1\pi_A x_2.$$

Поэтому, в силу (Γ_{S_0}), существует такой элемент $w_0\in S_0$, что

$$w_0\pi_B o,\ \text{но не}\ w_0\pi_A o.$$

Обозначим $\psi(w_0)=c$. Тогда, в силу построения конгруенций π_A и π_B алгебры S_0, получаем: $c\in A$ и

$$w_0\pi_B o\Longrightarrow\varphi(c)=\varphi'(c)=\varphi'(\psi(w_0))=\psi\varphi'(w_0)=0\Longrightarrow$$
$$\Longrightarrow c\in\mathrm{Ker}\,\varphi\Longrightarrow c=o,$$

не $\quad w_0\pi_A o\Longrightarrow c=\psi(w_0)\neq o.$

Противоречие. Следовательно, φ является изоморфизмом.

Предложение доказано.

2. Сделаем теперь три легко доказываемых замечания.

Пусть многообразие Λ таково, что в категории Λ верны аксиомы 1, 5.

Пусть A — идеал алгебры G, $\varphi: G\to\varphi(G)$ — гомоморфизм на и $A\geqslant\mathrm{Ker}\,\varphi$. Тогда $\varphi(A)$ является идеалом алгебры $\varphi(G)$ и

$$A=\varphi^{-1}(\varphi(A)).$$

Действительно, определим бинарное отношение $\pi\varphi$ на алгебре $\varphi(G)$ для конгруенции $\pi=\pi^{G}_{A}$ следующим образом:

$$\forall\ \overline{a}, \overline{b}\in\varphi(G)\quad \overline{a}\pi\varphi\overline{b}<=>\exists\, a,\ b\in G,\ \overline{a}=\varphi(a),\ \overline{b}=\varphi(b)\ \text{и}\ a\pi b.$$

Легко проверяется, учитывая включение $\pi\geqslant\pi_{\varphi}$, что $\pi\varphi$ является конгруенцией алгебры $\varphi(G)$, причем

$$A=\operatorname{Ker}\operatorname{nat}\pi,\ \varphi(A)=\operatorname{Ker}\operatorname{nat}\pi\varphi,\ A=\varphi^{-1}(\varphi(A)).$$

Из доказанного следует, что если A, B — идеалы алгебры G, причем $A\supseteq\operatorname{Ker}\varphi$ и $B\supseteq\operatorname{Ker}\varphi$, то включения

$$A\subseteq B,\ \varphi(A)\subseteq\varphi(B)$$

равносильны.

Отметим утверждение, уже доказанное ранее:

Пусть $\varphi: G\to\varphi(G)$ — гомоморфизм на. Если $\overline{A}$ — идеал алгебры $\varphi(G)$, то $A=\varphi^{-1}(\overline{A})$ является идеалом алгебры G, причем $A\supseteq\operatorname{Ker}\varphi$.

Из построения подалгебры $\{M\}_G$, порожденной в G множеством M, и построения объединения подалгебр легко следует:

Пусть $\varphi: G\to H$ — произвольный гомоморфизм, A — подалгебра алгебры G. Тогда

$$\varphi(A\vee\operatorname{Ker}\varphi)=\varphi(A).$$

Перейдем теперь к рассмотрению аксиом 4 и 6.

Всюду в дальнейшем предполагаем, не оговаривая этого особо, что для рассматриваемого многообразия Λ в категории Λ верны аксиомы 1—3 и 5.

Лемма 7.3. *Для любой алгебры G из Λ следующие утверждения равносильны:*

($Д_G$) *Для любых двух идеалов A, B алгебры G подалгебра $A\vee B$ является идеалом алгебры G.*

(E_G) *Идеалы алгебры G составляют полную подструктуру $I(G)$ структуры $\mathrm{A}(G)$ всех подалгебр алгебры G.*

($Ж_G$) *Для любых двух конгруенций π_1 и π_2 на алгебре G*

$$\operatorname{Ker}\operatorname{nat}\pi_1\vee\operatorname{Ker}\operatorname{nat}\pi_2=\operatorname{Ker}\operatorname{nat}(\pi_1\vee\pi_2).$$

Доказательство. Импликация $E=>Д$ очевидна.

$Д=>Ж$. Возьмем любые две конгруенции π_1 и π_2 алгебры G. Из ($Д$) следует, что существует такая конгруенция π на алгебре G, однозначно определенная идеалом $\operatorname{Ker}\operatorname{nat}\pi_1\vee\operatorname{Ker}\operatorname{nat}\pi_2$, что

$$\operatorname{Ker}\operatorname{nat}\pi_1\vee\operatorname{Ker}\operatorname{nat}\pi_2=\operatorname{Ker}\operatorname{nat}\pi.$$

Из $\operatorname{Ker}\operatorname{nat}\pi_i\subseteq\operatorname{Ker}\operatorname{nat}\pi$ следует $\pi_i\subseteq\pi$ и потому $\pi_1\vee\pi_2\leqslant\pi$. Поэтому верно включение

$$\operatorname{Ker}\operatorname{nat}(\pi_1\vee\pi_2)\subseteq\operatorname{Ker}\operatorname{nat}\pi. \qquad (1)$$

С другой стороны, очевидно, что $\operatorname{Ker}\operatorname{nat}\pi_i\subseteq\operatorname{Ker}\operatorname{nat}(\pi_1\vee\pi_2)$ и потому

$$\operatorname{Ker}\operatorname{nat}\pi\subseteq\operatorname{Ker}\operatorname{nat}(\pi_1\vee\pi_2). \qquad (2)$$

Из включений (1) и (2) следует требуемое равенство.

$Ж=>E$. Возьмем любое непустое множество $\{A_i\}$ идеалов алгебры G. В силу предложения 4.3 существуют такие однозначно определенные конгруенции π_i на алгебре G, что $A_i=\operatorname{Ker}\operatorname{nat}\pi_i$.

Из определения пересечения подалгебр и конгруенций легко следует, что верно равенство

$$\bigcap\operatorname{Ker}\operatorname{nat}\pi_i=\wedge A_i=\operatorname{Ker}\operatorname{nat}(\wedge\pi_i)$$

и потому пересечение идеалов всегда является идеалом.

Обозначим

$$A=\operatorname{Ker}\operatorname{nat}(\vee\pi_i).$$

Ясно, что верны включения $A\supseteq A_i=\operatorname{Ker}\operatorname{nat}\pi_i$ для любого i. С другой стороны, пусть F — такая подалгебра алгебры G, что $F\supseteq A_i$ для любого i. Тогда из ($Ж$) с очевидностью следует, что для любого конечного подмножества $\{\pi_i/i\in I\}\subseteq\{\pi_i\}$

$$F\supseteq\bigvee_{i\in I}A_i=\operatorname{Ker}\operatorname{nat}(\bigvee_{i\in I}\pi_i).$$

Но для любого элемента $a\in A$ существует такое конечное подмножество $\{\pi_i/i\in I\}$ множества $\{\pi_i\}$, что $a\in\operatorname{Ker}\operatorname{nat}(\bigvee_{i\in I}\pi_i)$. Это следует из построения объединения $\vee\pi_i$ конгруенций π_i. Поэтому

$$F\supseteq A=\operatorname{Ker}\operatorname{nat}(\vee\pi_i).$$

Из доказанного следует, что

$$\vee A_i=\vee\operatorname{Ker}\operatorname{nat}\pi_i=\operatorname{Ker}\operatorname{nat}(\vee\pi_i)=A.$$

Следовательно, и объединение идеалов всегда есть идеал.

Лемма доказана.

Лемма 8.3. Пусть $\varphi: G\to H$ — *гомоморфизм на. Если для алгебры G верны утверждения* ($Д_G$), (E_G), ($Ж_G$), *то для алгебры H верны утверждения* ($Д_H$), (E_H) *и* ($Ж_H$). *При этом для алгебры G будет верным и такое утверждение:*

($З_G$) *Если A — идеал алгебры G и $\varphi: G\to H$ — гомоморфизм на, то $\varphi(A)$ является идеалом алгебры H.*

Доказательство. Пусть для алгебры G верны утверждения ($Д_G$), (E_G), ($Ж_G$) и $\varphi: G\to H$ — гомоморфизм на.

В силу ($Д_G$) если A — идеал алгебры G, то и $A\vee\operatorname{Ker}\varphi$ является идеалом алгебры G. Но тогда $\varphi(A)=\varphi(A\vee\operatorname{Ker}\varphi)$ является идеалом алгебры G, т. е. верно ($З_G$).

Пусть $\overline{A}$ и $\overline{B}$ — идеалы алгебры H. Обозначим

$$\varphi^{-1}(\overline{A})=A,\ \varphi^{-1}(\overline{B})=B.$$

Замечаем, что A и B являются идеалами алгебры G, причем $A\supseteq\operatorname{Ker}\varphi$ и $B\supseteq\operatorname{Ker}\varphi$. Снова в силу ($Д_G$) подалгебра $A\vee B=C$ является идеалом алгебры G и $C\supseteq\operatorname{Ker}\varphi$. Поэтому $\overline{C}=\varphi(C)$ является идеалом алгебры H. Ясно, что $\overline{C}\supseteq\overline{A}$, $\overline{C}\supseteq\overline{B}$ и потому верно включение

$$\overline{C}\supseteq\overline{F}=\overline{A}\vee\overline{B}.$$

С другой стороны, обозначая $F=\varphi^{-1}(\overline{F})$, получим, что верны включения $F\supseteq A$, $F\supseteq B$, так как

$$A=\varphi^{-1}(\varphi(A))=\varphi^{-1}(\overline{A}),\quad \overline{A}\subseteq\overline{F}.$$

$$B=\varphi^{-1}(\varphi(B))=\varphi^{-1}(\overline{B}),\quad \overline{B}\subseteq\overline{F}.$$

Поэтому $F\supseteq C=A\vee B$. Но тогда

$$\overline{F}=\varphi(F)\supseteq\varphi(C)=\overline{C}.$$

Следовательно, $\overline{F}=\overline{C}=\overline{A}\vee\overline{B}$, и мы доказали, что верно утверждение (Д_H).

Лемма доказана.

Лемма 9.3. *Если для свободной алгебры S_0 многообразия Λ, имеющей счетное множество X_0 свободных образующих, верны утверждения (Д_{S_0}), (E_{S_0}), (Ж_{S_0}), то для любой свободной алгебры S многообразия Λ верны утверждения (Д_S), (E_S), (Ж_S).*

Доказательство. Пусть указанные утверждения верны для алгебры S_0. Возьмем любую свободную алгебру S многообразия Λ и любые две конгруенции π_1 и π_2 на алгебре S. Замечаем, что верно включение

$$\operatorname{Ker}\operatorname{nat}(\pi_1\vee\pi_2)\supseteq\operatorname{Ker}\operatorname{nat}\pi_1\vee\operatorname{Ker}\operatorname{nat}\pi_2.$$

Допустим, что верно строгое включение, т.е. существует такой элемент $a\in\operatorname{Ker}\operatorname{nat}(\pi_1\vee\pi_2)$, что $a\overline{\in}\operatorname{Ker}\operatorname{nat}\pi_1\vee\operatorname{Ker}\operatorname{nat}\pi_2$. В силу построения объединения $\pi_1\vee\pi_2$ конгруенций π_1 и π_2 мы получим, что существуют такие элементы $a_i\in S$, что

$$a_0\pi_1'a_1,\ a_1\pi_2'a_2,\dots,a_{n-1}\pi_n'a_n, \qquad (1)$$

причем $a=a_0$ и $a_n=0$, $n\geqslant 1$ — некоторое целое число и каждая из конгруенций π_j' совпадает с одной из конгруенций π_1, π_2. Существует такое конечное подмножество $Y\subseteq X$, что все a_i принадлежат подалгебре S^* алгебры S, порожденной множеством Y.
Построим конгруенции π_1^* и π_2^* на алгебре S^*, полагая

$$\pi_i^*=\pi_i\wedge(S^*\times S^*),\quad i=1,2.$$

Ясно, что π_1^* и π_2^* — конгруенции на алгебре S^*. Но тогда, в силу леммы 8.3, верно равенство

$$\operatorname{Ker}\operatorname{nat}\pi_1^*\vee\operatorname{Ker}\operatorname{nat}\pi_2^*=\operatorname{Ker}\operatorname{nat}(\pi_1^*\vee\pi_2^*),$$

так как алгебра S^* является гомоморфным образом алгебры S_0. В силу построения алгебры S^* и конгруенций π_1^* и π_2^* из (1) следует, что $a\in\operatorname{Ker}\operatorname{nat}(\pi_1^*\vee\pi_2^*)$. Поэтому $a\in\operatorname{Ker}\operatorname{nat}\pi_1^*\vee\operatorname{Ker}\operatorname{nat}\pi_2^*$.
Но, очевидно,

$$\operatorname{Ker}\operatorname{nat}\pi_i^*=\operatorname{Ker}\operatorname{nat}\pi_i\wedge S^*\subseteq\operatorname{Ker}\operatorname{nat}\pi_i,\quad i=1,2$$

и потому верно включение

$$\operatorname{Ker}\operatorname{nat}\pi_1^*\vee\operatorname{Ker}\operatorname{nat}\pi_2^*\subseteq\operatorname{Ker}\operatorname{nat}\pi_1>\operatorname{Ker}\operatorname{nat}\pi_2.$$

Следовательно, $a\in\operatorname{Ker}\operatorname{nat}\pi_1\vee\operatorname{Ker}\operatorname{nat}\pi_2$. Противоречие.

Это означает, что верно требуемое равенство

$$\operatorname{Ker}\operatorname{nat}\pi_1\vee\operatorname{Ker}\operatorname{nat}\pi_2=\operatorname{Ker}\operatorname{nat}(\pi_1\vee\pi_2)$$

и потому верно утверждение (Ж_S).

Лемма доказана.

Предложение 10.3. Для многообразия Λ равносильны утверждения:

(ж) В категории Λ верны аксиомы 4 и 6.

(з) В категории Λ верна аксиома 4.

(и) Для любой алгебры G из Λ и любых двух идеалов A, B алгебры G подалгебра $A\vee B$ является идеалом алгебры G.

(к) Для любой алгебры G из Λ и любых двух конгруенций π_1 и π_2 алгебры G верно равенство

$$\operatorname{Ker}\operatorname{nat}\pi_1\vee\operatorname{Ker}\operatorname{nat}\pi_2=\operatorname{Ker}\operatorname{nat}(\pi_1\vee\pi_2).$$

Действительно, в силу леммы 7.3, утверждения (з), (и) и (к) равносильны, а в силу леммы 8.3 равносильны и утверждения (ж), (з).

Следствие 11.3. *Каждое из утверждений (ж)—(к) равносильно каждому из утверждений (Δ_{S_0}), (E_{S_0}), (Ж_{S_0}), где S_0 — свободная алгебра многообразия Λ, порожденная счетным множеством X_0 свободных образующих.*

Действительно, доказательство почти дословно повторяет доказательство следствия 5.3, используя предложение 10.3 и леммы 7.3, 8.3 и 9.3.

3. Покажем теперь, как применять доказанные утверждения для нахождения некоторых тождеств, верных на всех многообразиях Λ, для которых в категории Λ верны все аксиомы 1—6.

Ниже всегда предполагается, что рассматривается такое многообразие Λ, что в категории Λ верны все аксиомы 1—6.

Напомним, что для любой алгебры G многообразия Λ мы обозначали $G\Omega=\{a\in G/a=a_1\dots a_n\rho$ для некоторой n-арной операции $\rho\in\Omega$ с $n\geqslant 1$ и некоторых элементов $a_1,\dots,a_n\in G\}$.

Предложение 12.3. Система Ω операций содержит хотя бы одну n-арную операцию ρ с $n\geqslant 2$. Для любой алгебры G многообразия Λ верно равенство

$$G\Omega=G.$$

В частности, существует такое слово $w_1=w_1(x_1,\dots,x_n)\in S_0\Omega$, не являющееся свободным элементом алгебры S_0, что на всех алгебрах многообразия Λ верно тождество

$$x_1=w_1.$$

Доказательство. Докажем сначала, что система Ω операций содержит хотя бы одну n-арную операцию ρ с $n\geqslant 2$. Для этого строим гомоморфизм $\psi: S_0\to S_0$ алгебры S_0 в алгебру S_0, продолжая отображение $\psi_0: X_0\to S_0$, определенное по правилу: для всех $x_i\in X_0$,

$\psi_0(x_i)=x_1$. Замечаем, что гомоморфизм $\Theta_\psi:S_0\to\psi(S_0)$ является гомоморфизмом на, но не является изоморфизмом, так как, например, $x_2\neq x_1$ в силу невырожденности многообразия Λ. Легко видеть, что для любого слова $w(x_1,\dots,x_n)$

$$\Theta_\psi(w)=\psi(w)=w(x_1,x_1,\dots x_1).$$

Поэтому из того, что Θ_ψ не является изоморфизмом следует, что $\operatorname{Ker}\Theta_\psi\neq\{0\}$, т. е. существует такое слово $w_0=w_0(x_1,x_2,\dots,x_n)\neq 0$, что $w_0(x_1,\dots,x_1)=0$. Но тогда, очевидно, система Ω операций содержит хотя бы одну операцию с $n\geqslant 2$: если все операции из Ω являются n-арными с $n\leqslant 1$, то каждое слово будет иметь вид $x_i\rho$, где ρ — тождественное отображение или произведение унарных операций из Ω, или будет совпадать с символом o нульарной операции из Ω; но тогда мы не смогли бы найти найденное выше слово w_0.

Таким образом, система Ω операций содержит хотя бы одну n-арную операцию ρ с $n\geqslant 2$. Замечая, что построенное слово $w_0(x_1,\dots,x_n)\in S_0\Omega$ и $w_0(x_1,\dots,x_1)\in S\Omega$, получаем, что $o\ni S_0\Omega$. Но тогда, очевидно, $S_0\Omega$ является подалгеброй алгебры S_0.

Для окончания доказательства предложения нам остается доказать, что существует такое слово $w_1=w_1(x_1,\dots,x_n)\in S_0\Omega$, что

$$x_1=w_1 \qquad (1)$$

является тождеством на всех алгебрах многообразия Λ, т. е. равенство (1) верно в алгебре S_0.

Допустим, что для любого слова $w\in S_0\Omega$, $x_1\neq w$. Тогда легко видеть, что и для любого другого свободного элемента $x_i\in X_0$ и любого элемента $w\in S_0\Omega$, $x_i\neq w$. Это означает, что,

$$X_0\cap S_0\Omega=\varnothing. \qquad (2)$$

Рассмотрим следующее подмножество алгебры S_0

$$S_0'=X_0\cup\{o\}.$$

Превратим S_0' в Ω-алгебру, полагая, что 1) всякая нульарная операция $\rho\in\Omega$ выделяет (как и должно быть в силу предложения 6. 2) элемент o; 2) если $\rho\in\Omega$ и ρ — n-арная операция с $n\geqslant 1$, то $a_1\dots a_n\rho=o$ для любых $a_1,\dots,a_n\in S_0'$.

Строим отображение $\varphi:S_0\to S_0'$ алгебры S_0 на алгебру S_0', полагая: 1) если $w\in S_0'$, то $\varphi(w)=w$; 2) если $w\,\bar{\in}\, S_0'$, т. е. $w\in S_0\,\Omega$, то $\varphi(w)=0$. Из построения алгебры S_c' и равенства (2) следует, что φ является гомоморфизмом на и потому S_0' — алгебра многообразия Λ.

Строим теперь отображение $\psi:S_0'\to S_0'$, полагая $\psi(x_i)=x_1$ для всех x_i и $\psi(o)=o$. Тогда, как легко видеть, из построения Ω-алгебры S_0' следует, что ψ — гомоморфизм. Но тогда гомоморфизм $\Theta_\psi:S_0'\to\psi(S_0')$ является гомоморфизмом на и $\operatorname{Ker}\Theta_\psi=\{o\}$. Поэтому Θ_ψ является изоморфизмом. Но Θ_ψ не является изоморфизмом и даже не может быть однозначным в обе стороны отображением, так как, например, $x_2\neq x_1$, но $\Theta_\psi(x_2)=\Theta_\psi(x_1)$. Противоречие.

Следовательно, найдется такое слово $w_1=w_1(x_1,\dots,x_n)\in S_0\Omega$, что верно равенство (1). Поэтому (1) — тождество на всех алгебрах многообразия Λ. Но тогда, очевидно,

$$S_0\Omega=S_0$$

и потому для любой алгебры G из Λ

$$G\Omega=G.$$

Предложение доказано.

ЛИТЕРАТУРА

[1] P. M. Cohn, Universal algebra, A Harper International student reprint, 1965.

[2] Barry Mitchell, Theory of categories, Academic Press, New York and London, 1965.

[3] Ю. М. Рябухин, Радикалы в категориях, Математические исследования, II, вып. 1, 1967, Кишинев.

[4] А. Г. Курош, А. Х. Лившиц, Е. Г. Шульгейфер, Основы теории категорий, УМН, XV, 6 (96), (1960).

[5] Е. Г. Шульгейфер, К теории радикалов в категориях, Матем. сб., 53 (95):4, (1960).

[6] А. Г. Курош, Лекции по общей алгебре, М., Физматгиз, 1962.

[7] А. И. Мальцев, Об общей теории алгебраических систем, Матем. сб., 35 (77):1, (1954).

И. С. ЧЕБОТАРУ

О СВЕДЕ́НИИ СИСТЕМ УРАВНЕНИЙ ВИНЕРА-ХОПФА К СИСТЕМАМ С НУЛЕВЫМИ ИНДЕКСАМИ

Введение

Пусть L_+ любое из банаховых пространств l_p $(1 \leqslant p < \infty)$, c, c_0, m [1] и в L_+ рассмотрим следующую бесконечную систему линейных уравнений

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_{i-k} \zeta_k = \eta_i, \quad (i = 0,\ 1,\ 2,\ \cdots), \tag{0.0}$$

где $\zeta = (\zeta_0, \zeta_1, \zeta_2, \cdots)$ и $\eta = (\eta_0, \eta_1\ \eta_2 \cdots)$ соответственно искомый и заданый векторы из L_+, а коэффициенты a_k $(k=0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \cdots)$ удовлетворяют условию

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} |\, a_k \,| < \infty.$$

Предположим, что функция

$$a\,(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k\, t^k \ \ (\,|\,t\,|=1), \tag{0.1}$$

составленная из коэффициентов системы (0.0), удовлетворяет условию:

$$a(t) \neq 0 \qquad (\,|\,t\,| \neq 1).$$

В этом случае имеет смысл целое число

$$\varkappa = \varkappa\,(a) = \frac{1}{2\pi} \left[\arg\, a\,(e^{i\varphi})\right]_{\varphi=0}^{\varphi=2\pi},$$

называемое индексом функции $a(t)$ $(\,|\,t\,| = 1)$.

Из [1] известно, что оператор A, порожденный в L_+ левой частью системы (0,0), т. е. теплицевой матрицей $\|\, a_{i-k} \,\|$, обратим только слева, если $\varkappa\,(a) < 0$, обратим только справа, если $\varkappa(a) > 0$, и обратим с двух сторон, если $\varkappa\,(a) = 0$,

Наряду с системой (0, 0) при $\varkappa > 0$ рассмотрим систему

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_{\varkappa+i-k}\, \zeta_k = \eta_{i+\varkappa} \ \ (i = 0, 1, 2, \cdots), \tag{0.2}$$

а при $\varkappa < 0$ — систему

$$\begin{cases} \displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} a_{\varkappa+i-k}\, \zeta_k = 0 \ (i = 0, 1, 2, \cdots, -\varkappa - 1) \\ \displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} a_{\varkappa+i-k}\, \zeta_k = \eta_i\, (i = -\varkappa, -\varkappa + 1, \cdots) \end{cases} \tag{0.3}$$

Если через $A^{\varkappa}$ обозначить оператор, порожденный левыми частями систем (0.2) и (0.3), и если ввести в L_+ оператор $P_{\varkappa}$, определенный равенством

$$P_{\varkappa}(\varphi_0, \varphi_1, \varphi_2, \ldots) = \begin{cases} (\varphi_{\varkappa}, \varphi_{\varkappa+1} \ldots) \ \text{при} \ \varkappa \geqslant 0 \\ (\underbrace{0, 0, \cdots, 0}_{-\varkappa \text{ нулей}}, \varphi_0, \varphi_1, \cdots) \ \text{при} \ \varkappa < 0 \end{cases}$$

то системы (0.2) и (0.3) могут быть записаны следующей объединяющей записью:

$$A^{(\varkappa)} \zeta = P_{\varkappa}\, \eta.$$

Заметим, что система (0.2) получается из системы (0.0) удалением первых $\varkappa$ уравнений, а система (0.3) прибавлением к (0.0) новых $(-\varkappa)$ однородных уравнений, причем функция $a_0(t) = t^{-\varkappa}\, a(t)$, соответствующая левым частям этих уравнений, имеет нулевой индекс. Поэтому уравнениия (0.2) и (0.3) разрешимы при любых правых частях.

В статье [2] показано, что имеют место следующие утверждения.

Если $\varkappa > 0$, то единственное решение $\zeta = (\zeta_0, \zeta_1, \zeta_2, \cdots)$ системы (0.2) будет являться и решением системы (0.0), если будут выполняться условия

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_{i-k}\, \zeta_k = \eta_i \ (i = 0, 1, 2, \cdots, \varkappa - 1),$$

и, наоборот, единственное решение системы (0.0), в случае его существования, будет являться и решением системы (0.2).

Если $\varkappa < 0$, то единственное решение $\zeta = (\zeta_0, \zeta_1, \zeta_2 \cdots)$ системы (0.3) будет одним из решений системы (0.0). Наоборот, если $\zeta = (\zeta_0, \zeta_1, \zeta_2, \cdots)$ одно из решений системы (0.0), то ζ будет являться и решением системы (0.3), если выполняются условия

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_{\varkappa+i-k}\, \zeta_k = 0 \ (i = 0, 1, 2, \cdots, -\varkappa - 1).$$

Целью настоящей статьи является обобщение предыдущих результатов на случай бесконечных систем вида

$$\sum_{k=0}^{\infty} A_{i-k}\, \zeta_k = \eta_i, \ \ (i = 0, 1, 2, \cdots), \tag{0.4}$$

где $A_j = \|\, a_{ik}^{(j)} \,\|_{i,k=1}^{n}$ $(j = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \cdots)$ — n-мерные матрицы, причем $\displaystyle\sum_{j=-\infty}^{\infty} |\, a_{ik}^{(j)} \,| < \infty$ $(i,\ k = 1, 2, 3, \cdots, n)$, а

$$\zeta_k = (\zeta_k^{(1)}, \zeta_k^{(2)}, \cdots, \zeta_k^{(n)}) \ \text{и} \ \eta_k = (\eta_k^{(1)}, \eta_k^{(2)}, \cdots, \eta_k^{(n)})$$

$(k=0, 1, 2, \cdots)$ искомые и соответственно заданные n-мерные векторы столбцы. Предполагается, что при $p=1, 2, \cdots, n$, $\zeta^{(p)}=(\zeta_0^{(p)}, \zeta_1^{(p)}, \cdots)$ и $\eta^{(p)}=(\eta_0^{(p)}, \eta_1^{(p)}, \cdots)$ принадлежат пространству L_+.

Для формулировки основной теоремы введем необходимые понятия и обозначения.

Системе (0.4) поставим в соответствие матрицу-функцию

$$A(t)=\sum_{k=-\infty}^{\infty} A_k t^k \quad (|t|=1)$$

и предположим, что

$$\det A(t) \neq 0 \quad (|t|=1).$$

Тогда [3] матрица-функция $A(t)$ допускает правую стандартную факторизацию

$$A(t)=A_-(t)\,D(t)\,A_+(t), \quad (|t|=1),$$

где $D(t)=\|\delta_{ik} t^{\varkappa_i}\|_1^n$ и $\varkappa_i$ $(i=1, 2, \cdots, n)$ — правые частные индексы $A(t)$.

В первом параграфе будет доказано, что матрицу-функцию $A(t)$ можно представить в виде

$$A(t)=D^\circ(t)\,A^\circ(t), \qquad (|t|=1)$$

где $A^\circ(t)=\|\delta_{ik} t^{\nu_i}\|_1^n$ отличается от $D(t)$ только расположением элементов главной диагонали, а правые частные индексы матрицы $A^\circ(t)$ равны нулю.

Если через A_{ik} $(i, k=1, 2, \cdots, n)$ обозначим оператор, порожденный в L_+ теплицевой матрицей $\|a_{ik}^{(m-n)}\|_{m,r=0}^{\infty}$ $(i, k=1, 2, \cdots, n)$, то система (0.4) может быть записана в виде

$$\sum_{k=1}^{n} A_{ik}\,\zeta^{(k)}=\eta^{(i)} \quad (i=1, 2, \cdots, n). \tag{0.5}$$

Наряду с этой системой рассмотрим систему:

$$\sum_{k=1}^{n} A_{ik}^{(\nu_i)}\,\zeta^{(k)}=P_{\nu_i}\eta^{(i)} \quad (i=1, 2, \cdots, n), \tag{0.6}$$

где операторы $A_{ik}^{(\nu_i)}$ и P_{ν_i} $(i, k,=1, 2, \cdots, n)$ определяются аналогично операторам $A^{(\varkappa)}$ и $P_\varkappa$.

Тогда имеет место следующая

Теорема 0.1. *Система (0.6) всегда имеет единственное решение. Его решение $\zeta=(\zeta^{(1)}, \zeta^{(2)}, \cdots, \zeta^{(n)})$, является одним из решений системы (0.5), если выполняются условия*

$$\sum_{q=0}^{\infty}\sum_{k=1}^{n} a_{ik}^{(p-q)}\,\zeta_q^{(k)}=\eta_p^{(i)} \text{ для всех } i, \text{ для которых } \nu_i>0.$$
$$(p=0, 1, 2, \cdots, \nu_i-1)$$

Наоборот, решение $\zeta=(\zeta^{(1)}, \zeta^{(2)}, \cdots, \zeta^{(n)})$ системы (0.5) в случае его существования является и решением системы (0.6), если выполняются условия

$$\sum_{q=0}^{\infty}\sum_{k=1}^{n} a_{ik}^{(p-q+\nu_i)}\,\zeta_q^{(k)}=0 \text{ для всех } \nu_i<0.$$
$$(p=0, 1, \cdots, -\nu_i-1).$$

§ 1. Доказательство вспомогательных теорем.

Обозначим через E нормированное кольцо всех абсолютно сходящихся рядов

$$a(t)=\sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k t^k \qquad (|t|=1)$$

с обычным определением умножения и с нормой, определенной формулой

$$\|a(t)\|=\sum_{k=\infty}^{\infty} |a_k|.$$

Через E_+ и E_- обозначим подкольца кольца E, состоящие из элементов, для которых $a_k=0$ при $k<0$ и соответственно $a_k=0$ при $k>0$. Пусть далее $E_{n\times n}$ — множество всех матриц n-го порядка с элементами из E.

Для всего дальнейшего большое значение имеет следующая

Теорема 1.1. *Если неособенная матрица-функция $A(t) \in E_{n\times n}$ $|t|=1)$ допускает правую стандартную факторизацию*

$$A(t)=A_-(t)\,D(t)A_+(t), \qquad (|t|=1) \tag{1.0}$$

где $D(t)=\|\delta_{ik}t^{\varkappa_i}\|_1^n$, причем $\varkappa_1 \geqslant \varkappa_2 \geqslant \cdots \geqslant \varkappa_n$, *то она допускает также представление*

$$A(t)=D_0(t)\,A_0(t), \qquad (|t|=1) \tag{1.1}$$

где $D_0(t)=\|\delta_{ik}t^{\nu_i}\|$ — диагональная матрица, отличающаяся от $D(t)$, возможно, лишь расположением элементов на главной диагонали, а правые частные индексы матрицы-функции $A_0(t)$ равны нулю.

Доказательство теоремы основывается на вспомогательной лемме.

Лемма. *Пусть элементы матрицы-функции $B(t)=\|b_{kl}(t)\|_1^n$ имеют вид*

$$b_{kl}(t)=\begin{cases} a_{kl}^-(t), \text{ при } k=1, 2, \cdots, n;\ i=1, 2, \cdots, r; \\ a_{kl}^-(t)\,t^{\beta_l}, \text{ при } k=k_1, k_2, \cdots, k_{n-r};\ i=r+1, r+2, \cdots, n; \\ a_{kl}^-(t)\,t^{\omega_l} \text{ при } k\neq k_1 k_2, \cdots, k_{n-r};\ i=r+1, r+2, \cdots, n, \end{cases}$$

где $\|a_{kl}^-(t)\|_1^n \in E_{-(n\times n)}$ — *неособенная матрица-функция при* $|t|\geqslant 1$, *а* $0>\omega_{r+1}\geqslant\omega_{r+2}\geqslant\cdots\geqslant\omega_n$, $0>\beta_{r+1}\geqslant\beta_{r+2}\geqslant\cdots\geqslant\beta_n$, *причем* $\beta_i\geqslant\omega_i$ и при $t=\infty$ *минор матрицы* $\|a_{kl}^-(t)\|_1^n$, *находя-*

щийся на пересечении строк с номерами $k=k_1, k_2, \cdots, k_{n-r}$ и столбцов с номерами $i=r+1, r+2, \cdots, n$, *отличен от нуля.*

Тогда существует невырожденная матрица-функция $C(t) \in E_{+(n\times n)}$ *такая, что* $C(t) \in E_{+(n\times n)}$ *и имеет место равенство*

$$B(t) = D^{\circ}(t)\, B^{\circ}(t) C^{-1}(t), \qquad (|t|=1)$$

где $D^{\circ}(t)$ — *диагональная матрица-функция, элементы* $d_{kk}(t)$ *которой имеют вид:*

$$d_{kk}(t) = \begin{cases} 1 \text{ при } k \neq k_1, k_2, \cdots, k_{n-r} \\ t^{\beta_k+1} \text{ при } k = k_1, k_2, \cdots, k_{n-r} \end{cases},$$

а элементы $b^0_{kl}(t)$ *матрицы* $B^{\circ}(t)$ *принадлежат* E_-, *причем*

$$b^0_{kl}(t) = \begin{cases} a^-_{kl}(t)\, t^{\omega_l} \text{ при } k \neq k_1, k_2, \cdots, k_{n-r};\ i = r+1, r+2, \cdots, n; \\ a^-_{kl}(t)\, t^{\beta_l - \beta_{r+1}}, \text{ при } k=k_1, k_2, \ldots, k_{n-r};\ i = r+1, r+2, \cdots, n. \end{cases}$$

Доказательство леммы. Рассмотрим неособенную матрицу-функцию $C(t)$, элементы $C_{kl}(t)$ которой имеют вид:

$$C_{kl}(t) = \begin{cases} 0, \text{ при } k \neq i,\ k=1,2, \cdots, n;\ i=r+1, r+2, \cdots, n; \\ 0, \text{ при } k \neq i,\ k=1,2, \cdots, r;\ i=1,2, \cdots, r; \\ 1, \text{ при } k=i=1,2, \cdots, n; \\ \sum\limits_{m=-1}^{\beta_{r+1}} C^{(l)}_{km}\, t^{-\beta_k+m+1}, \text{ при } k=r+1, r+2, \cdots, n;\ i=1,2, \cdots, r, \end{cases}$$

где константы $C^{(l)}_{km}$ являются пока неопределенными. Очевидно, что $C(t)$ и $C^{-1}(t)$ принадлежат $E_{-(n\times n)}$.

Наряду с матрицей-функцией $B(t)$ рассмотрим матрицу $Q(t) = B(t) \cdot C(t)$, отличающуюся от $B(t)$ только первыми r столбцами, элементы которых определяются формулами

$$q_{kl}(t) = \begin{cases} \sum\limits_{m=r+1}^{n} C_{ml}(t) a^-_{km}(t)\, t^{\omega_m} + a^-_{kl}(t), \text{ при } k \neq k_1 k_2, \cdots, k_{n-r};\ i=1,2, \ldots, r. \\ \sum\limits_{m=r+1}^{n} C_{ml}(t) a^-_{km}(t)\, t^{\beta_m} + a^-_{kl}(t), \text{ при } k=k_1, k_2, \cdots, k_{n-r};\ i=1,2, \cdots, r. \end{cases}$$

Эти элементы могут быть записаны и так:

$$q_{kl} = (t) = \begin{cases} \sum\limits_{p=-1}^{\beta_{r+1}} \left(\sum\limits_{m=r+1}^{n} C^{(l)}_{mp}\, a^-_{km}(t)\, t^{\omega_m - \beta_m} \right) t^{p+1} + a^-_{kl}(t), \\ \quad \text{при } k \neq k_1, k_2, \cdots, k_{n-r};\ i=1,2, \cdots, r; \\ \sum\limits_{p=-1}^{\beta_{r+1}} \left(\sum\limits_{m=r+1}^{n} C^{(l)}_{mp}\, a^-_{km}(t) \right) t^{p+1} + a^-_{kl}(t), \\ \text{при } k=k_1, k_2, \cdots, k_{n-r};\ i=1,2, \cdots, r. \end{cases}$$

Выберем сейчас коэффициенты $C^{(l)}_{km}$ так, чтобы выполнялись условия

$$t^l \cdot q_{kl}(t) = 0 \text{ при } t = \infty \tag{1.2}$$

$l = 0, 1, 2, \cdots, -\beta_{r+1} - 1$; $k = k_1, k_2, \cdots, k_{n-r}$; $i = 1, 2, \cdots, r$.

Докажем, что такой выбор возможен.

При $l=0$, $k=k_1, k_2, \cdots, k_{n-r}$ и данном i при $t=\infty$ должны выполняться условия:

$$\sum_{m=r+1}^{n} C^{(l)}_{m,-1}\, a^-_{km}(\infty) = -a^-_{kl}(\infty),\ k=k_1, k_2, \cdots, k_{n-r}.$$

В силу условия леммы определитель этой системы отличен от нуля. Поэтому коэффициенты $C^{(l)}_{k,-1}$ ($k=k_1, k_2, \cdots, k_{n-r}$; $i=1,2, \cdots, r$) определяются однозначно.

Из предыдущего следует, что функция $t h^{(0)}_{kl}(t)$, где

$$h^{(0)}_{kl}(t) = \sum_{m=r+1}^{n} C^{(l)}_{m,-1}\, a^-_{km}(t) + a^-_{kl}(t), \tag{1.3}$$

$$k=k_1, k_2, \cdots, k_{n-r};\ i=1, 2, \cdots, r$$

принадлежит пространству E_-.

При $l=1$, $k=k_1, k_2, \cdots, k_{n-r}$ и данном i из (1.2) следует, что при $t=\infty$ должны выполняться условия

$$\sum_{m=r+1}^{n} C^{(l)}_{m,-2}\, a^-_{km}(\infty) = -\left[t h^{(0)}_{kl}(t)\right]_{t=\infty}.$$

$$k=k_1, k_2, \cdots, k_{n-r}$$

В силу того же условия теоремы коэффициенты $C^{(l)}_{m,-2}$ ($m=r+1, r+2, \cdots, n$; $i=1,2, \cdots, r$) определяются однозначно.

Из предыдущего следует, что функция $t h^{(1)}_{kl}(t)$, где

$$h^{(1)}_{kl}(t) = \sum_{m=r+1}^{n} C^{(l)}_{m,-2}\, a^-_{km}(t) + t\, h^{(0)}_{kl}(t),$$

$$k=k_1, k_2, \cdots, k_{n-r};\ i=1, 2, \cdots, r$$

принадлежат E_-.

Коэффициенты $C^{(l)}_{k,p}$ при $p=-3, -4, \cdots, \beta_{r+1}$; $i=1, 2, \cdots, r$; $k=k_1, k_2, \cdots, k_{n-r}$ определяются последовательно из следующих систем линейных алгебраических уравнений:

$$\sum_{m=r+1}^{n} a^-_{km}(\infty)\, C^{(l)}_{m,p-1} = -\left[t h^{(-p)}_{kl}(t)\right]_{t=\infty},$$

$$k=k_1, k_2, \cdots, k_{n-r}$$

где $h^{(-p)}_{kl}(t)$ определяются следующей рекуррентной формулой

$$h^{(-p+1)}_{kl}(t) = \sum_{m=r+1}^{n} C^{(l)}_{m,p-2}\, a^-_{km}(t) + t\, h^{(-p)}_{kl}(t),$$

$$p = 0,\ -1,\ -2,\ \cdots,\ \beta_{r+1} + 1,$$

а $h_{kl}^{(0)}(t)$ определяется, как в (1.3).

В силу условия эти коэффициенты определяются также однозначно.

В силу выбора постоянных коэффициентов $C_{km}^{(t)}$ элементы строк с номерами $k = k_1, k_2, \cdots, k_{n-r}$ матрицы $Q(t)$ имеют $t^{\beta_{r+1}}$ в качестве общего множителя. Поэтому матрицу $Q(t) = B(t)\,C(t)$ можно представить в виде $D^\circ(t)B^\circ(t)$, где матрицы $B^\circ(t)$ и $D^\circ(t)$ имеют вид, указанный в лемме.

Таким образом, лемма доказана.

Переходим к доказательству теоремы.

Доказательство теоремы. Матрица $A(t)$ может быть представлена в виде

$$A(t) = D_1(t)\,A_-^{(1)}(t)\,A_+(t), \quad (|t| = 1)$$

где элементы $b_{ij}(t)$ и $d_{ij}(t)$ матриц $A_-^{(1)}(t)$ и $D_1(t)$ имеют соответственно вид:

$$b_{ij}(t) = a_{ij}^-(t)\,t^{\varkappa_j - \varkappa_i}, \quad i, j = 1, 2, \cdots, n$$

$$d_{ij}(t) = \begin{cases} 0 & \text{при } i \neq j \\ t^{\varkappa_i} & \text{при } i = j \end{cases}$$

Так как матрица $A_-(t)$ при $|t| \geqslant 1$ неособенная, то среди миноров $(n-1)$-го порядка последних $(n-1)$ столбцов этой матрицы найдется хоть один, который не обращается в ноль при $t = \infty$. Предположим, что этот минор находится в строках с номерами $k_1, k_2, \cdots, k_{n-1}$. Тогда в силу доказанной леммы матрица $A_-^{(1)}(t)$ может быть представлена в виде

$$A_-^{(1)}(t) = D_2(t)\,A_-^{(2)}(t)\,C_1^{-1}(t),$$

где $C_1(t)$ является треугольной невырожденной матрицей с элементами из E_+, а $D_2(t)$ является диагональной с элементами вида:

$$d_{kk}^{(2)}(t) = \begin{cases} 1 & \text{при } k \neq k_1, k_2, \cdots, k_{n-1}; \\ t^{\varkappa_2 - \varkappa_1} & \text{при } k = k_1, k_2, \cdots, k_{n-1}, \end{cases}$$

а элементы матрицы $A_-^{(2)}(t)$ принадлежат E_-, причем $A_-^{(2)}(t)$ имеет вид указанный в лемме.

Среди всех миноров $(n-2)$-го порядка, образованных из элементов, находящихся на пересечении последних $(n-2)$ столбцов матрицы $A_-(t)$ и строк с номерами $k_1, k_2, \cdots, k_{n-1}$, существует хотя бы один, который не обращается в ноль при $t = \infty$. Значит, к матрице $A_-^{(2)}(t)$ также может быть применена лемма.

Применяя, таким образом, несколько раз лемму, в результате, очевидно, получим, что

$$A(t) = D^\circ(t)\,A_-^\circ(t)\,C(t)\,A_+(t),$$

где $C(t)$ есть произведение некоторого конечного числа треугольных неособенных матриц с элементами из E_+, причем элементы их обрат-

ных матриц также принадлежат E_+, а $A_-^\circ(t)$ и $D^\circ(t)$ имеют вид, указанный в теореме. Для завершения доказательства теоремы остается положить $C(t)\,A_+(t) = A_+^\circ(t)$.

Обозначим через $A_{n-i}(t)$ матрицу $(n-i)$-го порядка, которая получается из матрицы $A_-(t) = \| a_{ik}^-(t) \|_1^n$ удалением первых i строк и столбцов.

Из доказательства предыдущей теоремы следует, что имеет место следующее

Замечание. Если

$$\det A_{n-i}(\infty) \neq 0, \text{ при } i = 1, 2, \cdots, n-1, \tag{1.4}$$

то $D^\circ(t) = D(t)$.

Вообще говоря, для выполнения равенства $D^\circ(t) = D(t)$ в зависимости от $\varkappa_i$ $(i = 1, 2, \cdots, n)$ можно требовать выполнения условия (1,4) не при всех $i = 1, 2, \cdots, n$.

Аналогично доказывается и

Теорема 1.2. *Если неособенная матрица-функция* $A(t) \in E_{(n \times n)}$ $(|t| = 1)$ *допускает правую стандартную факторизацию*

$$A(t) = A_-(t)\,D(t)A_+(t), \quad (|t| = 1)$$

то она допускает также представление

$$A(t) = A_0(t)\,D_0(t), \quad (|t| = 1) \tag{1.5}$$

где матрицы-функции $A_0(t)$ *и* $D_0(t)$ *обладают теми же свойствами, что в теореме 1.1.*

Замечание. Если все главные миноры матрицы $A_+(t)$ не обращаются в ноль при $t = 0$, то $D_0(t) = D(t)$.

Аналогичные теоремы можно доказать для левой факторизации матрицы-функции $A(t)$.

§ 2. Доказательство основных теорем.

Пусть L — некоторое банахово пространство и $R = R_L$ — кольцо всех линейных ограниченных операторов, действующих в L. Пусть далее $U \in R$ произвольный обратимый изометрический оператор. Предположим, что пространство L распадается в прямую сумму подпространств L_+ и L_-, из которых первое является инвариантным для U, причем U отображает L_+ в свою строгую часть и $m = \dim L_+ / UL_+$ — конечно, а L_- — инвариантно относительно U^{-1}. Тогда очевидно

$$PUP = UP, \quad PU^{-1}P \neq U^{-1}P \quad \text{и} \quad QU^{-1}Q = U^{-1}Q, \tag{2.0}$$

где P — проектор, проектирующий L на L_+, а $Q = I - P$.

Обозначим через $R(U)$ подкольцо R с образующими U и U^{-1}, а через $R^+(U)$ и $R^-(U)$ — подкольца кольца R соответственно с образующими U и U^{-1}. Следуя [4] сопоставим каждому оператору $A \in R(U)$ непрерывную функцию $a(t)$ на бикомпакте максимальных идеалов $|t| = 1$ кольца $R(U)$.

Рассмотрим теперь в L_+ следующую систему уравнений:

$$\sum_{k=1}^{n} PA_{ik}x_k = y_i, \ (i = 1, 2, \cdots, n), \tag{2.1}$$

где $A_{ik} \in R_U$ $(i, k = 1, 2, \cdots, n)$ и $x_k, y_k \in L_+$ $(k = 1, 2, \cdots, n)$.

Сопоставляя каждому оператору $A_{ik} \in R(U)$ $(i, k=1, 2, \cdots, n)$ непрерывную функцию $a_{ik}(t)$ $(i, k=1, 2, \cdots, n)$ на единичной окружности, составим матрицу-функцию

$$A(t) = \| a_{ik}(t) \|_1^n \qquad (|t|=1)$$

и предположим, что

$$\det A(t) \neq 0. \qquad (|t|=1)$$

Тогда матрица-функция $A(t)$ допускает правую стандартную факторизацию (1.0).

Наряду с системой (2.1), которая теперь может быть записана еще в виде:

$$\sum_{k=1}^{n} Pa_{ik}(U)x_k = y_i \quad (i=1, 2, \cdots, n), \tag{2.2}$$

рассмотрим систему

$$\sum_{k=1}^{n} PU^{-\nu_i}a_{ik}(U)x_k = PU^{-\nu_i}y_i \quad (i=1, 2, \cdots, n), \tag{2.3}$$

левой части которой соответствует матрица-функция $A_0(t)$ $(|t|=1)$ из представления (1.1) матрицы $A(t)$. Но правые частные индексы матрицы-функции $A_0(t)$ равны нулю и поэтому [4] система (2.3) имеет единственное решение при любой правой части.

Ниже докажем одну теорему, которая устанавливает определенную связь между решениями систем (2.2) и (2.3).

Теорема 2.1. *Единственное решение* $x=(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ *системы* (2.3) *является одним из решений системы* (2.2), *если выполняются условия:*

$$\sum_{k=1}^{n} PU^{\nu_i}QU^{-\nu_i}a_{ik}(U)x_k = PU^{\nu_i}QU^{-\nu_i}y_i, \quad \text{для всех } \nu_i>0. \tag{2.4}$$

Наоборот, решение $x=(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ *системы* (2.2), *в случае его существования, является и решением системы* (2.3), *если выполняются условия*

$$\sum_{k=1}^{n} PU^{-\nu_i}Q\,a_{ik}(U)x_k = 0, \quad \text{для всех } \nu_i<0. \tag{2.5}$$

Доказательство. Пусть $x=(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ есть единственное решение системы (2.3). Тогда, действуя на обе части уравнений системы (2.3) соответственно оператором PU^{ν_i} $(i=1, 2, \cdots, n)$, получим

$$\sum_{k=1}^{n} PU^{\nu_i}PU^{-\nu_i}a_{ik}(U)x_k = PU^{\nu_i}PU^{-\nu_i}y_i. \tag{2.6}$$

$$(i=1, 2, \cdots, n)$$

Но легко проверить, что имеет место равенство:

$$PU^{-\nu_i}P = \begin{cases} PU^{-\nu_i}, & \text{при } \nu_i \geqslant 0; \\ PU^{-\nu_i} - PU^{-\nu_i}Q & \text{при } \nu_i \leqslant 0. \end{cases} \tag{2.7}$$

Поэтому равенства (2.6) могут быть переписаны в виде:

$$\sum_{k=1}^{n} Pa_{ik}(U)x_k - \sum_{k=1}^{n} PU^{\nu_i}QU^{-\nu_i}a_{ik}(U)x_k = y_i - PU^{\nu_i}QU^{-\nu_i}y_i$$
$$\text{для } \nu_i > 0,$$

$$\sum_{k=1}^{n} Pa_{ik}(U)x_k = y_i \quad \text{для } \nu_i \leqslant 0.$$

Отсюда уже видно, что первое утверждение теоремы верно, если выполняются условия (2.4).

Переходим к доказательству второго утверждения теоремы. Пусть $x=(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ есть решение системы 2.2. Тогда, действуя на обе части i-го уравнения системы (2.2) оператором $PU^{-\nu_i}$ $(i=1,2, \cdots, n)$, получаем:

$$\sum_{k=1}^{n} PU^{-\nu_i}Pa_{ik}(U)x_k = PU^{-\nu_i}y_i \quad (i=1,2, \cdots, n).$$

Благодаря тождеству (2.7) предыдущая система равенств может быть записана в виде:

$$\sum_{k=1}^{n} PU^{-\nu_i}a_{ik}(U)x_k = PU^{-\nu_i}y_i, \quad \text{для } \nu_i \geqslant 0;$$

$$\sum_{k=1}^{n} PU^{-\nu_i}a_{ik}(U)x_k - \sum_{k=1}^{n} PU^{-\nu_i}Q\,a_{ik}(U)x_k = PU^{-\nu_i}y_i$$
$$\text{для } \nu_i < 0.$$

Отсюда сразу вытекает справедливость второго утверждения теоремы, если выполняются условия (2.6).

Теорема доказана.

Следствие 1. *Если* $\nu_i \geqslant 0$ $(i=1, 2, \cdots, n)$, *то система* (2.2) *разрешима тогда и только тогда, когда единственное решение системы* (2.3) *удовлетворяет условиям* (2.4) *для всех* $\nu_i > 0$.

Следствие 2. *Если* $\nu_i \leqslant 0$ $(i=1, 2, \cdots, n)$, *то решение* $x=(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ *системы* (2.2) *будет являться и решением системы* (2,3) *тогда и только тогда, когда выполняются условия* (2.5) *для всех* $\nu_i < 0$.

Если система (2.2) разрешима при заданной правой части, то, как известно [4], в этом случае она имеет ровно $m \sum_{\nu_i<0} (-\nu_i)$ линейно независимых решений. Укажем сейчас процедуру для нахождения всех этих решений. Для этого достаточно указать процедуру для нахождения системы линейно независимых решений однородной системы.

$$\sum_{k=1}^{n} Pa_{ik}(U)x_k = 0 \quad (i=1,2,\cdots,n). \tag{2.8}$$

Наряду с этой однородной системой рассмотрим еще и следующую неоднородную систему:

$$\sum_{k=1}^{n} PU^{-\nu_i} a_{ik}(U)\, x_k = z_i \quad (i=1,\ 2,\cdots,n), \tag{2.9}$$

где $z_i \in PU^{-\nu_i} QL = L_i \quad (i=1,2,\ \cdots,\ n)$.

Заметим, что $z_i=0$ для всех i, для которых $\nu_i \geqslant 0$, и что система (2.9) для каждой правой части имеет единственное решение.

Имеет место следующая

Теорема 2.2. *Если $z_i \in L_i$ $(i=1,2,\ \cdots,\ n)$, то единственное решение $x=(x_1, x_2,\ \cdots,\ x_n)$ неоднородной системы (2.9) является и решением однородной системы* (2.8).

Доказательство. Теорема будет доказана, если мы установим, что пространство M всех решений однородной системы (2.8) совпадает с совокупностью N всех решений системы (2.9), когда z_i пробегают все L_i $(i=1,2,\ \cdots,\ n)$.

Заметим, что в силу предположения, что $\dim\ L_+ / UL_+ = m$ конечно, размерность L_i $(i=1,2,\cdots,n)$ будет равна $(-\nu_i)\, m$. Поэтому множество N имеет размерность $m \sum_{\nu_i<0} (-\nu_i)$. Значит, M и N имеют одинаковые размерности. Достаточно еще показать, что M содержится в N.

Пусть $x=(x_1, x_2,\ \cdots,\ x_n)$—некоторое решение системы (2.8). Тогда очевидно, что $x=(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ удовлетворяет и неоднородной системе (2.9), в которой $z_i = \sum_{k=1}^{n} PU^{-\nu_i} Q a_{ik}(U)\, x_k \in L_i$ $(i=1,2,\cdots,n)$. Значит $x \in N$ и теорема доказана. Если теперь в качестве z_i возьмем $m\cdot(-\nu_i)$ $(i=1,2,\cdots,n)$ линейно независимых элементов из L_i $(i=1,2,\ \cdots,\ n)$, то в результате получим $m \sum_{\nu_i<0} (-\nu_i)$ линейно независимых решений однородной системы (2.8).

Замечание. Используя представление (1.1) матрицы-функции $A(t)$, соответствующей левой части системы (2.2), мы свели эту систему к системе (2.3) с нулевыми частными правыми индексами. Если использовать представление (1.5) матрицы-функции $A(t)$, то можно получить другие результаты относительно системы (2.2).

В самом деле, если наряду с системой (2.2) в L_+ рассмотрим систему

$$\sum_{k=1}^{n} Pa_{ik}(U)\, U^{-\nu_k} h_k = y_i, \quad (i=1,2,\ \cdots,\ n), \tag{2.10}$$

то левой части этой системы будет соответствовать матрица-функция

$A_0(t)$ из представления (1.5) и поэтому эта система имеет единственное решение при любой правой части из L_+.

Легко можно убедиться в справедливости следующей теоремы.

Теорема. *Если единственное решение $h=(h_1,\ h_2, \cdots h_n)$ системы* (2.10) *удовлетворяет условию*

$$QU^{-\nu_i}\ h_i = 0 \text{ для всех } \nu_i > 0, \tag{2.11}$$

то $x=(x_1 x_2,\ \cdots,\ x_n)$, где $x_i = U^{-\nu_i}\ h_i$ $(i=1,\ 2,\ \cdots,\ n)$, *будет решением системы* (2.2), *удовлетворяющим условию*

$$QU^{\nu_i} x_i = 0, \text{ для всех } \nu_i < 0. \tag{2.12}$$

Наоборот, если система (2.2) *имеет решение* $x=(x_1,\ x_2,\ \cdots,\ x_n)$, *удовлетворяющее условию* (2.12), *то* $h=(h_1,\ h_2,\ \cdots,\ h_n)$, *где*

$$h_i = U^{\nu_i} x_i \quad (i=1,\ 2,\ \cdots,\ n),$$

будет единственным решением системы (2.10), *удовлетворяющим условию* (2.11).

Следствие 1. *Если $\nu_i \geqslant 0$ $(i=1,2,\cdots,n)$, то система* (2.2) *разрешима в L_+ тогда и только тогда, когда единственное решение $h=(h_1,\ h_2,\ \cdots,\ h_n)$ системы* (2.10) *удовлетворяет условия* (2.11) *при $i=1,2,\cdots,n$.*

Так же как и выше, в случае существования решения системы (2.2) можно указать процедуру для нахождения всех ее решений.

Из предыдущих теорем, в качестве приложений, можно получить некоторые новые результаты для систем сингулярных интегральных уравнений типа Винера-Хопфа и их дискретных аналогов. Покажем это только на примере дискретного случая.

Итак, рассмотрим системы (0.5) и (0.6). Покажем, что эти системы допускают запись вида (2.2) и (2.3) соответственно.

Для этого обозначим через L любое из банаховых пространств $l_p(-\infty,\ \infty)$ $(1 \leqslant p < \infty)$, $c_0(-\infty,\ \infty)$, $c(-\infty,\ \infty)$, $m(-\infty,\ \infty)$ ([4]) и в нем рассмотрим оператор U, определенный равенством:

$$U\,\{\xi_j\}_{j=-\infty}^{\infty} = \{\xi_{j-1}\}_{j=-\infty}^{\infty}.$$

Тогда обратным к U будет оператор U^{-1}, который определяется следующим равенством:

$$U^{-1}\{\xi_j\}_{j=-\infty}^{\infty} = \{\xi_{j+1}\}_{j=-\infty}^{\infty}.$$

Легко видеть, что U — изометрический оператор. Через P обозначим проектор в L, который действует по формуле

$$P\,\{\xi_j\}_{j=-\infty}^{\infty} = \{\cdots,\ 0,\ 0,\ 0,\ \xi_0,\ \xi_1,\ \cdots\}.$$

Тогда пространство L распадается в прямую сумму подпространств

$$L_+ = PL \text{ и } L_- = QL,$$

где

$$Q = I - P.$$

Подпространство L_+ является инвариантным подпространством для

U, а L_- — инвариантным для U^{-1} и, следовательно, выполняются условия (2.0).

Легко поверить, что оператор A, определенный левой частью уравнения (0.0), может быть представлен в виде

$$A = P\,a(U),$$

где $a(t)(|t|=1)$ определяется равенством (0.1). Оператор $A^{(\varkappa)}$ тогда определится равенством

$$A^{(\varkappa)} = PU^{-\varkappa}\,a(U).$$

Теперь уже ясно, что системы (0.5) и (0.6) допускают запись (2.2) и (2.3) соответственно.

Операторы $PU^{-\nu_l}Q$ для $\nu_l < 0$ и $PU^{\nu_l}\,QU^{-\nu_l}$ для $\nu_l \geqslant 0$ в L действуют соответственно по формулам:

$$PU^{-\nu_l}Q\,\{\xi_j\}_{j=-\infty}^{\infty} = \{\cdots, 0, 0, \xi_{\nu_l}\, \xi_{\nu_{l+1}}, \cdots\} \quad \text{для } \nu_l < 0;$$

здесь ξ_{ν_l} — нулевая координата; и

$$PU^{\nu_l}\,QU^{-\nu_l}\{\xi_j\}_{j=-\infty}^{j=\infty} = \{\cdots, 0, 0, \xi_0, \xi_1, \cdots\} \quad \text{для } \nu_l \geqslant 0;$$

здесь ξ_0 — нулевая координата.

Из теоремы 2.1 теперь легко получается теорема 0.1, сформулированная во введении.

ЛИТЕРАТУРА

[1] М. Г. Крейн, Интегральные уравнения на полуоси с ядрами, зависящими от разности аргументов, УМН, 13, вып. 5, (1958).
[2] И. Ц. Гохберг и В. Г. Чебан, О методе редукции для дискретных аналогов уравнений Винера-Хопфа. Укр. матем. журнал, 16, № 6, (1964).
[3] И. Ц. Гохберг и М. Г. Крейн, Системы интегральных уравнений на полуоси с ядрами, зависящими от разности аргументов, УМН, 13, вып. 2, (1958).
[4] И. Ц. Гохберг, Задача факторизации в нормированных кольцах, функции от изометрических и симметрических операторов и сингулярные интегральные уравнения, УМН, 19, вып. 1, (1964).

КРАТКИЕ СООБЩЕНИЯ

И. У. БРОНШТЕЙН

ОБОБЩЕНИЕ ОДНОЙ ТЕОРЕМЫ ГРИНА

1°. Пусть G — связная односвязная нильпотентная группа Ли [1], D — дискретная относительно плотная подгруппа группы G, I — аддитивная группа вещественных чисел, $g(t)$ $(t\in I)$ — однопараметрическая подгруппа группы G. Через $\pi: G/D \times I \to G/D$ обозначим отображение, определяемое формулой

$$\pi(Da,\ t) = Da\,g(t) \qquad (a\in G,\ t\in I).$$

Легко проверить, что $(G/D,\ I,\ \pi)$ — поток на G/D [2].

Пусть A — коммутант группы G и $B = G/A$. Так как B — коммутативная группа, то группа $T = G/AD$ является связной компактной коммутативной группой Ли, то есть конечномерным тором [1].

Многообразие G/D называется нильмногообразием [3], а T называется присоединенным тором. Поток $(G/D,\ I,\ \pi)$ естественным образом индуцирует поток на T.

Грин [4] доказал, что поток $(G/D,\ I,\ \pi)$ на нильмногообразии G/D является минимальным (эргодическим) тогда и только тогда, когда индуцированный поток на присоединенном торе является минимальным (эргодическим).

В настоящей заметке теорема Грина обобщается на более широкий класс потоков [5].

2°. Напомним, что коммутантом $[A,\ B]$ двух подгрупп A и B из G называется подгруппа группы G, порожденная всеми коммутаторами $aba^{-1}b^{-1}$, где $a\in A$, $b\in B$.

Пусть G — группа. Определим по индукции множество нормальных делителей $G_\alpha \subset G$. Для $\alpha = 0$ положим $G_0 = G$. Пусть G_α уже определены для всех α, $\alpha < \beta$. Если β — предельное трансфинитное число, то положим $G_\beta = \bigcap\limits_{\alpha<\beta} G_\alpha$. Если $\beta = \gamma + 1$, то определим $G_\beta = [G,\ G_\gamma]$.

Если существует трансфинитное число δ такое, что $G_\delta = \{e\}$, где e — единица группы G, то говорят, что группа G обладает нижним центральным рядом

$$G = G_0 \supset \ldots \supset G_\delta = \{e\}.$$

Если первое трансфинитное число δ, удовлетворяющее условию $G_\delta = \{e\}$, не является предельным, т. е. $\delta = \gamma + 1$, то множество G_γ

назовем *ядром* группы G. Если первое трансфинитное число δ, удовлетворяющее условию $G_\delta = \{e\}$, является предельным, то ядром группы G назовем $\{e\}$. Очевидно, что ядро группы принадлежит центру группы.

3°. Через A_0 [5] обозначим множество всех топологических групп, изоморфных прямому произведению конечного или счетного числа экземпляров группы I.

Через A_α, где α — счетное трансфинитное число ($\alpha > 0$), обозначим множество всех топологических групп, удовлетворяющих следующим трем условиям:

1) существует сходящийся ряд [1]

$$G_0, G_1, \ldots, G_\beta, \ldots, G_\alpha \equiv G$$

длины $(\alpha+1)$ с открытыми гомоморфизмами φ_γ^β ($\gamma < \beta < \alpha+1$), такой, что $G_0 \in A_0$, а каждая из групп G_β ($\beta < \alpha+1$) обладает нижним центральным рядом с замкнутым ядром $N_\beta \in A_0$;

2) если $\gamma < \alpha$, то ядро гомоморфизма $\varphi_\gamma^{\gamma+1}$ совпадает с ядром $N_{\gamma+1}$ группы $G_{\gamma+1}$;

3) Если γ — предельное трансфинитное число ($\gamma \leqslant \alpha$), то группа G_γ является пределом [1] сходящегося ряда

$$G_0, G_1, \ldots, G_\xi, \ldots (\xi < \gamma).$$

Из результатов А. И. Мальцева [3] следует, что если G—связная односвязная нильпотентная группа Ли, то G принадлежит классу A_α для некоторого конечного числа α, и через каждый элемент a группы G проходит однопараметрическая подгруппа $g(t)$ $(g(1)=a)$.

4°. Пусть α — счетное трансфинитное число и $G \in A_\alpha$. Дополнительно предположим, что через каждый элемент группы G проходит однопараметрическая подгруппа. Из леммы 2 статьи [5] вытекает, что пространство топологической группы G гомеоморфно прямому произведению конечного или счетного числа пространств I.

Пусть D — относительно плотная (синдетичная [2]) замкнутая подгруппа группы G, причем D изоморфна фундаментальной группе [6] пространства G/D. Так как G — линейно связная односвязная топологическая группа, то последнее условие выполняется, в частности, если D — дискретная подгруппа группы G [1].

Всякая однопараметрическая подгруппа $g(t)$ группы G естественным образом действует на G/D. Получающийся при этом поток $(G/D, I, \pi)$ в силу теоремы 1 из [5] является дистальным [7].

Пусть A — коммутант группы G. Поток $(G/D, I, \pi)$ индуцирует равностепенно непрерывный [2] поток $(G/AD, I, \rho)$, где

$$\rho(ADg, t) = ADgg(t) \qquad (g \in G,\ t \in I).$$

Так как G/AD — компактная коммутативная связная топологическая группа со счетной базой, то существуют однопараметрические подгруппы $g(t)$, для которых поток $(G/AD, I, \rho)$ является минимальным [1].

Имеет место следующая теорема, являющаяся обобщением упомянутой теоремы Грина и уточнением (при указанных выше дополнительных условиях) теоремы 2 из [5].

Теорема. *Поток $(G/D, I, \pi)$ является минимальным тогда и только тогда, когда поток $(G/AD, I, \rho)$ является минимальным.*

Доказательство. Необходимость условия очевидна. Пусть $G \in A_\alpha$. Доказательство достаточности проведем методом индукции по трансфинитному числу α.

При $\alpha = 0$ группа G коммутативна и утверждение тривиально. Пусть утверждение верно для всех групп G, принадлежащих классам G_α, $\alpha < \beta$ и удовлетворяющих указанным выше условиям.

Если β — предельное трансфинитное число, то требуемое утверждение получается без труда.

Рассмотрим случай, когда $\beta = \alpha + 1$. Пусть N—ядро группы $G \in A_{\alpha+1}$. Тогда $G/N \in A_\alpha$, и через каждый элемент группы G/N проходит однопараметрическая подгруппа. В силу [5] группа ND/N является замкнутой относительно плотной подгруппой группы G/N. Без ограничения общности можно считать, что группа N изоморфна одномерной векторной группе I.

В силу леммы 2 из [5] пространство группы G гомеоморфно прямому произведению пространства группы G/N и пространства группы N. Отсюда легко вытекает, что отображение $p: G/D \to G/ND$, индуцированное естественным гомоморфизмом группы G на G/N, является локально тривиальным расслоением [6]. Поэтому группа ND/N — фундаментальная группа пространства G/ND.

Так как коммутантом группы G/N является группа A/N, то из предложения индукции вытекает, что множество G/ND является минимальным при действии на него группы $Ng(t)$. $(t \in I)$. Докажем, что множество G/D минимально при действии на него однопараметрической группы $g(t)$.

В силу теоремы 1 из [5] поток на G/D является дистальным, а в силу результатов Р. Эллиса [7] множество $M = \overline{\{Dg(t) \mid t \in I\}}$ — минимально. Пусть $S = M \cap ND/D$. В статье [5] показано, что S—замкнутая подгруппа группы ND/D, причем $ND/D \approx N/(N \cap D)$.

Если G/D не минимальное множество, то в силу леммы 5 из [5] группа S—собственная подгруппа группы ND/D. Не теряя общности, мы можем предположить, что S—единичная подгруппа.

Так как поток на G/ND в силу предположения индукции минимален, то поток на M изоморфно отображается на минимальное множество G/ND. Отсюда следует, что для любого элемента $g \in G$ существует элемент $(N \cap D)h$ $(h \in N)$ группы $N/(N \cap D)$ такой, что

$$Dg \cdot (N \cap D)h = Dgh \in M.$$

Покажем, что элемент $(N \cap D)h$ определяется однозначно. Допустим противное. Тогда для некоторого элемента $g \in G$ найдутся элементы $h_1 \in N$ и $h_2 \in N$ такие, что $Dgh_1 = Dgh_2$, но $(N \cap D)h_1 \neq (N \cap D)h_2$. Пусть $h_0 = h_1^{-1}h_2$. Тогда $Dgh_2 = Dgh_1h_0 \in M \cap Mh_0$. Так как множество

M минимально, а N принадлежит центру группы G, то и множество Mh_0 минимально. Поэтому из $Dgh_2 \in M \cap Mh_0$ следует, что $Mh_0 = M$, тогда $Dh_0 \in M$, то есть $Dh_0 \in S$ и $Dh_0 \neq D$, что противоречит нашему допущению о том, что S—единичная подгруппа.

Рассмотрим отображение

$$\varphi : G/D \to (G/ND \times N/(N \cap D)),$$

где $\varphi(Dg) = (NDg, (N \cap D)h)$, а элемент $(N \cap D)h$ выбран так, что $Dg \cdot (N \cap D)h \equiv Dgh \in M$.

Из доказанного следует, что отображение φ однозначно. Покажем, что и обратное отображение однозначно. Если $\varphi(Dg_1) = \varphi(Dg_2)$, то $NDg_1 = NDg_2$, т. е. $Dg_1 = Dg_2h$, где $h \in N$. Если элемент $(N \cap D)h_1$ таков, что $Dg_1h_1 \in M$, то и $Dg_2hh_1 \in M$. Поэтому вторая координата точки $\varphi(Dg_2)$ равна $(N \cap D)hh_1$. Из условия $\varphi(Dg_1) = \varphi(Dg_2)$ следует, что $(N \cap D)h_1 = (N \cap D)hh_1$, то есть $h \in N \cap D$. Поэтому $Dg_1 = Dg_2h = Dg_2$. Таким образом, отображение φ является взаимно однозначным.

Докажем теперь, что отображение φ непрерывно. Если направление $\{Dg_\alpha\} \to Dg$, то $\{NDg_\alpha\} \to NDg$. Для каждого α найдется элемент $(N \cap D)h_\alpha$ такой, что $Dg_\alpha h_\alpha \in M$. Пусть $(N \cap D)h_0$—вторая координата точки $\varphi(Dg)$, то есть $Dgh_0 \in M$. Докажем, что $\{(N \cap D)h_\alpha\} \to (N \cap D)h_0$. Допустим противное. Так как $N/N \cap D$ — компакт, то найдется конфинальная часть $\{(N \cap D)h_{\alpha'}\}$ направления $\{(N \cap D)h_\alpha\}$ такая, что $\{(N \cap D)h_{\alpha'}\} \to (N \cap D)h_1$, где $h_1 \in N$, причем $(N \cap D)h_1 \neq (N \cap D)h_0$. Так как $Dg_\alpha h_\alpha \in M$, то $Dgh_1 \in M$, следовательно, вторая координата точки $\varphi(Dg)$ равна $(N \cap D)h_1$, что противоречит однозначности отображения φ.

Таким образом, отображение φ непрерывно, а так как G/D—компакт, то φ — гомеоморфное отображение пространства G/D на $G/ND \times \times N/(N \cap D)$.

Так как $N/(N \cap D)$ является конечномерным или счетномерным тором, то фундаментальная группа пространства $N/(N \cap D)$ коммутативна. По условию D — фундаментальная группа пространства G/D. Так как длина нижнего центрального ряда группы G равна $(\alpha+1)$, то в силу леммы 3 из [5] длина нижнего центрального ряда группы D также равна $(\alpha+1)$. Так как ND/N — фундаментальная группа пространства G/ND, то длина нижнего центрального ряда группы ND/N равна α.

Таким образом, длина нижнего центрального ряда фундаментальной группы пространства G/D равна $(\alpha+1)$, а длина нижнего центрального ряда фундаментальной группы пространства $G/ND \times N/(N \cap D)$ равна α, чего не может быть, так как пространства G/D и $G/ND \times \times N/(N \cap D)$ гомеоморфны.

Полученное противоречие доказывает, что поток на G/D минимальный. Теорема доказана.

5°. Пусть X — компактное топологическое пространство со счетной базой и $(X; I, \pi)$ — дистальный поток. Пусть в пространстве X определена счетно-аддитивная неотрицательная нормированная мера, инвариантная при потоке (X, I, π) и такая, что мера всякого открытого непустого подмножества $U \subset X$ положительна. Тогда поток (X, I, π) является минимальным тогда и только тогда, когда он является эргодическим.

Действительно, всякий дистальный минимальный поток является эргодическим [8]. Обратно, всякий эргодический поток содержит хотя бы одну всюду плотную траекторию. В силу одной теоремы Эллиса [7] отсюда следует, что поток минимальный.

Поэтому из доказанной выше теоремы в качестве следствия вытекает теорема Грина.

ЛИТЕРАТУРА

[1] Л. С. Понтрягин, Непрерывные группы, М., 1954.

[2] W. H. Gottschalk, G. A. Hedlund, Topological dynamics, Amer. Math. Soc. Coll. Publ., 36, (1955).

[3] А. И. Мальцев, Об одном классе однородных пространств, Изв. АН СССР, сер. матем., 13, (1949).

[4] L. Auslander, L. Green, F. Hahn, Flows on homogeneous spaces, Annals of Math. Studies, № 53, Princeton, 1963.

[5] И. У. Бронштейн, Об одном классе дистальных минимальных множеств, Сиб. мат. журнал, 7, № 4, (1966).

[6] Ху Сы-цзян, Теория гомотопий, М., 1964.

[7] R. Ellis, Distal transformation groups, Pacific J. of Math., 8, (1958).

[8] И. У. Бронштейн, Об эргодичности дистальных минимальных множеств, Изв. АН Молдавской ССР, № 7, (1965).

М. Г. ГОНЦА

СООБЩЕНИЕ О ТРАНСЛЯТОРЕ С ЯЗЫКА SUBSET ALGOL НА ЭЛЕКТРОННО-ВЫЧИСЛИТЕЛЬНУЮ МАШИНУ «БЭСМ-2М»

Транслятор ориентирован в основном на программирование алгоритмов вычислительного характера и представляет собой попытку создания гибкой и скоростной системы автоматизации программирования, не требующей большого объема памяти внешних накопителей.

Этим требованиям удалось удовлетворить благодаря применению принципа однократного поэлементного просмотра алгоритма, предложенного М. М. Бушко-Жуком [5].

Работа над транслятором проводилась в течение 1964—1966 годов и в настоящее время он готов для практического использования.

1. Входной язык

Входным языком транслятора выбран предложенный Международной конференцией ИФИП в 1964 году язык subset ALGOL (сокращенный АЛГОЛ-60). Этот язык специально предназначен для систем автоматизации программирования для ЭВМ средней мощности и незначительно отличается от языка АЛГАМС, разработанного на базе АЛГОЛа и принятого в странах членах СЭВ.

Входной язык содержит следующие по сравнению с subset ALGOL ограничения и модификации:

1. Размерность массивов не более двух.
2. Переменные типа **Boolean** не применяются.
3. В правой части операторов присваивания не допускаются условные выражения.
4. В качестве фактических параметров процедур разрешены только идентификаторы переменных и массивов и простые арифметические выражения. Последние подставляются только значением.
5. Количество параметров процедур не более 20.
6. Операторы печати и ввода-вывода несколько отличаются от предложенных в АЛГОЛе.

Оператор печати начинается словом **print**, а в скобках указываются переменные или переменные с индексами, знаки пробела и числа целого типа, которые должны быть отпечатаны.

Пример: print (alpha, beta, ␣, 3777, t [i]).

Операторы ввода-вывода начинаются словами **input** или **output** соответственно, а в скобках записываются идентификаторы переменных

или массивов, передаваемых по одному из трех каналов, номер которого указывается сразу же после открывающей скобки. Канал с номером 1 соответствует обычным вводным и выводным устройствам машины БЭСМ-2М, № 2 — магнитным барабанам и № 3 — магнитным лентам. После номера канала указывается номер магнитофона или барабана и номер зоны или адрес (в случае барабана).

Пример: **input** (1, gamma, omega, a, s, p).

Допускаются локализованные и глобальные метки [8].

Транслятор различает идентификаторы по первым семи символам.

2. Строение транслятора

Транслятор построен по блочному принципу в соответствии с основными синтаксическими единицами входного языка и состоит из 14 блоков: блок синтаксического контроля, описаний, арифметических и условных выражений, циклов, именующих выражений, печати, ввода-вывода, процедур и процедур-функций, операторных скобок, присвоения истинных адресов, компановки и выдачи готовой рабочей программы.

В оперативной памяти постоянно находятся блоки, наиболее часто работающие во время трансляции, а также короткие вспомогательные подпрограммы, таблицы и константы. Остальные блоки размещаются на магнитном барабане, откуда поступают на фиксированное место в оперативную память по мере надобности.

Общий объем транслятора вместе с таблицами и константами составляет около 3100 ячеек памяти.

Наиболее значительным и сложным является блок трансляции арифметических и условных выражений, который в свою очередь состоит из нескольких более специализированных блоков. Арифметические выражения записываются в обычном скобочном виде. В них могут использоваться как стандартные, так и любые другие идентификаторы процедур-функций с несколькими параметрами. Работа блока базируется на новом методе, описанном в [6].

Тела операторов цикла оформляются транслятором в виде подпрограмм, что позволило транслировать заголовки циклов самого общего вида. Допускается до 7 циклов в цикле.

Блок описаний, кроме других функций, вырабатывает условные адреса для переменных в соответствии с их типом. Переменные типа **real** представляются адресами от 1001 до 1777, а типа **integer** — от 2001 до 2777.

3. Подготовка и кодирование информации

Исходный алгоритм, записанный построчно во входном языке, кодируется посимвольно по 5 или 10 двоичных разрядов каждый (некоторые группы символов представляются сопровождающими кодами-отличителями). Такая система кодирования рассчитана на возможность непосредственной пробивки на обычном перфораторе.

В каждой ячейке помещается по 7 кодов, а свободные 4 разряда не используются. Транслятор вводит информацию с перфокарт по кускам длиной не более 300_8 ячеек. Количество таких кусков не более 15.

4. Характеристика транслируемых рабочих программ

Трансляция всего алгоритма проходит в два этапа. Сперва по кускам создается программа в условных адресах, а затем распределяется память, присваиваются истинные адреса и компануется цельная программа. По желанию ее можно выдать на перфокарты или на печать. Она также остается на своем месте в оперативной памяти и при наличии исходных данных можно провести счет.

Рабочие программы используют стандартные программы и подпрограммы через компилирующую систему В. М. Курочкина.

Максимальная длина программы не превышает 3615_8 команд. За счет разбиения алгоритма на части можно получить и более длинные программы, которые будут размещаться также и на внешних носителях.

Кроме программы, транслятор выдает на печать таблицу идентификаторов с соответствующими истинными адресами, таблицу меток и карту ввода программы.

В качестве примера приведем запись во входном языке задачи об определении коэффициента светимости в видимой части спектра абсолютно черного тела. Световая отдача определяется в процентах по формуле:

$$E_{\%} = \frac{64{,}77 \cdot \int\limits_{4\cdot 10^{-5}}^{7\cdot 10^{-5}} \frac{dx}{x^5 \cdot \left(e^{\frac{1{,}432}{Kx}} - 1\right)}}{K^4},$$

где K — температура в градусах Кельвина. Интеграл рассчитываетcя по формуле Симпсона.

```
begin real temp 1, temp 2, temp 3, a, b, n, sum 4, sum 2, h, x, k, p;
real procedure e (y); value y;
begin e:=1. /(y ↑ 5× (exp (1. 432/(k×y)) — 1.)) end procedure
input (1, temp 1, temp 2, temp 3, a, b, n);
h:= (b—a)/n;
for k:=temp 1  step temp 2  until temp 3  do
begin sum 4: =sum 2: =0.0;
for x: =a+h step 2.×h until b—3.×h do
begin
sum 4: =sum 4+e(x);
sum 2: =sum 2+e(x+h);
end;
p: =64.77×h/3.× (4.×sum 4+2.×
sum 2+e(a)+4.×e(b—h)+e(b))/k ↑ 4;
  print  (k, p);
end;
end
```

ЛИТЕРАТУРА

[1] Дж. В. Бэкус, Сообщение об алгоритмическом языке АЛГОЛ-60, М., Изд-во ВЦ АН СССР, 1961.

[2] Дж. Мак-Кракен, Программирование на АЛГОЛе, М., «Мир», 1964.

[3] М. И. Агеев, Основы алгоритмического языка АЛГОЛ-60, М., Изд-во ВЦ АН СССР, 1964.

[4] С. С. Лавров, Универсальный язык программирования, М., «Наука», 1964.

[5] М. М. Бушко-Жук, А. А. Гоба, К. К. Щукин, Е. Л. Ющенко, О применении одного принципа построения программирующих программ, Ученые записки Кишиневского государственного университета, № 2, Кишинев, изд-во «Картя Молдовеняскэ», 1961.

[6] М. Г. Гонца, Об одном методе трансляции арифметических выражений языка АЛГОЛ-60 на ЭВМ «БЭСМ-2М», Известия АН Молдавской ССР, Кишинев, изд-во «Картя Молдовеняскэ», 1966.

[7] М. Г. Гонца, О трансляции операторов цикла языка АЛГОЛ-60 на ЭВМ «БЭСМ-2М», в сб.: Применение математических методов и вычислительной техники в народном хозяйстве Молдавии, Кишинев, изд-во «Картя Молдовеняскэ», 1965.

[8] М. Г. Гонца, О трансляции операторов перехода языка АЛГОЛ-60, Труды молодых ученых Молдавии, Кишинев, 1967.

[9] В. И. Фесенко, Сообщение о трансляторе на электронно-вычислительную машину «Урал-2», «Кибернетика», 1966, № 3, Киев, «Наукова думка».

Известия Академии наук Молдавской ССР № 8, 1967 г.

И. Ц. ГОХБЕРГ, И. А. ФЕЛЬДМАН

ОБ ИНДЕКСАХ КРАТНЫХ РАСШИРЕНИЙ МАТРИЦ-ФУНКЦИЙ

Через W_n обозначим кольцо всех матриц-функций $A(\zeta)(|\zeta|=1)$ n-го порядка, разлагающихся в абсолютно сходящиеся ряды Фурье:

$$A(\zeta)=\sum_{j=-\infty}^{\infty} A_j \zeta^j \quad (|\zeta|=1), \quad \sum_{j=-\infty}^{\infty} \| A_j \| < \infty^{*}.$$

Всякую матрицу-функцию $A(\zeta)\in W_n$ можно единственным образом представить в виде

$$A(\zeta)= A_0(\zeta^m)+\zeta^{-1}A_1(\zeta^m)+\cdots+\zeta^{-(m-1)}A_{m-1}(\zeta^m), \; (|\zeta|=1) \qquad (1)$$

где $A_j(\zeta)\in W_n$, а m — натуральное число.

Пусть $A(\zeta)\in W_n$ и m — некоторое натуральное число. Тогда m-кратным расширением матрицы $A(\zeta)$ назовем блочную матрицу-функцию

$$A^{<m>}(\zeta)=\left\| \begin{matrix} A_0(\zeta) & A_1(\zeta) & \cdots & A_{m-1}(\zeta) \\ \zeta^{-1}A_{m-1}(\zeta) & A_0(\zeta) & \cdots & A_{m-2}(\zeta) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \zeta^{-1}A_1(\zeta) & \zeta^{-1}A_2(\zeta) & \cdots & A_0(\zeta) \end{matrix} \right\| \; (\in W_{nm}),$$

где матрицы n-го порядка $A_j(\zeta)$ определяются равенством (1).

Сопоставим каждой матрице-функции $A(\zeta)\in W_n$ матрицу $\| A_{j-k}\|_{-\infty}^{\infty}$. Сняв в этой матрице „блочные перегородки", получим бесконечную матрицу. Она определяет в пространстве l_1** линейный ограниченный оператор, который обозначим через **A**.

Без труда доказывается следующее предложение

---

* Через $\| A \|$ обозначается какая-либо кольцевая норма в кольце матриц n-го порядка.

** Через l_1 здесь обозначается пространство всех последовательностей $\{\xi_j\}_{j=-\infty}^{\infty}$ с комплексными координатами, для которых $\sum_{j=-\infty}^{\infty} |\xi_j| < \infty$.

1°. *Матрицы-функции $A(\zeta)\in W_n$ и $B(\zeta)\in W_k$ порождают в l_1 один и тот же оператор* (т. е. **A** = **B**) *в том и только в том случае, когда обе эти матрицы являются кратными расширениями одной и той же матрицы-функции из W_l, где l — некоторый общий делитель чисел n и k.*

В частности, для любого натурального m операторы **A** и $\mathbf{A}^{<m>}$ совпадают.

Пусть $A(\zeta)\in W_n$ и $\| A_{j-k} \|_{-\infty}^{\infty}$ — отвечающая ей матрица. Поясним, как с помощью матрицы $\| A_{j-k} \|_{-\infty}^{\infty}$ строится m-кратное расширение матрицы-функции $A(\zeta)$.

Образуем матрицы $A_k^{<m>}$ порядка mn, полагая

$$A_k^{<m>}=\left\| \begin{matrix} A_{km} & A_{km-1} & \cdots & A_{km-(m-1)} \\ A_{km+1} & A_{km} & \cdots & A_{km-(m-2)} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ A_{km+(m-1)} & A_{km+(m-2)} & \cdots & A_{km} \end{matrix} \right\| \; (k=0, \pm 1 \cdots)$$

Легко видеть, что имеет место равенство

$$A^{<m>}(\zeta)=\sum_{k=-\infty}^{\infty} A_k^{<m>} \zeta^k \quad (|\zeta|=1).$$

Таким образом, m-кратное расширение матрицы $A(\zeta)$ получается при m-кратном укрупнении блоков в матрице $\| A_{j-k} \|_{-\infty}^{\infty}$. Очевидно, последняя операция не меняет оператора **A**.

Из предложения 1° легко выводится следующее предложение

2°. *Отображение $R_m : A(\zeta)\to A^{<m>}(\zeta)$ является гомоморфизмом кольца W_n в кольцо W_{nm}.*

Эта заметка посвящена следующей теореме.

Теорема. *Пусть равенство*

$$A(\zeta)=A_-(\zeta)\, D(\zeta)\, A_+(\zeta) \quad (|\zeta|=1), \qquad (2)$$

где

$$D(\zeta)=\| \zeta^{\varkappa_j} \delta_{jk} \|_{k,j=1}^{n}$$

дает правую факторизацию невырожденной матрицы-функции $A(\zeta)\in W_n$ с правыми индексами $\{\varkappa_j\}_{j=1}^{n}$, и пусть m — некоторое натуральное число.*

Тогда матрица-функция $A^{<m>}(\zeta)$ является невырожденной и допускает правую факторизацию

$$A^{<m>}(\zeta)=A'_-(\zeta)\, D'(\zeta)\, A'_+(\zeta) \quad (|\zeta|=1)$$

с множителями, определяемыми равенствами

$$A'_-(\zeta)=A_-^{<m>}(\zeta)\, P_1, \quad A'_+(\zeta)=P_2\, A_+^{<m>}(\zeta),$$

$$D'(\zeta)=\| \zeta^{\varkappa'_j} \delta_{jk} \|_{j,k=1}^{mn}, \qquad (3)$$

---

* Определение правой факторизации матриц-функций и их правых индексов см. в статьях [1, 2].

в которых P_i $(j=1,2)$ — некоторые матрицы перестановок, а правые индексы $\varkappa_j'$ $(j=1, 2, \cdots, nm)$ суть расположенные в невозрастающем порядке числа

$$\underbrace{\nu_q+1, \nu_q+1, \cdots, \nu_q+1}_{r_q}; \underbrace{\nu_q, \nu_q, \cdots, \nu_q}_{m-r_q} \quad (q=1, 2, \cdots, n), \tag{4}$$

где

$$\varkappa_q=\nu_q m+r_q \quad (0 \leqslant r_q < m).$$

Доказательство. Из равенства (2) в силу предложения 2° вытекает, что

$$A^{<m>}(\zeta)=A_+^{<m>}(\zeta)\, D^{<m>}(\zeta)\, A_-^{<m>}(\zeta) \quad (|\zeta|=1). \tag{5}$$

Легко видеть, что матрица-функция $A_+^{<m>}(\zeta)$ $(A_-^{<m>}(\zeta))$ разлагается в абсолютно сходящийся ряд по неотрицательным (неположительным) степеням ζ и

$$\det A_+^{<m>}(\zeta) \neq 0 \ (|\zeta| \leqslant 1) \quad (\det A_-^{<m>}(\zeta) \neq 0; \ |\zeta| \geqslant 1.$$

Рассмотрим теперь матрицу-функцию $D(\zeta)$. Ее можно представить в виде суммы

$$D(\zeta)=\sum_j D_j \zeta^j$$

с конечным числом слагаемых. Матрицы D_j диагональны и их элементы равны 0 либо 1, причем $\sum D_j=I\,(=D(1))$. Отсюда следует, что в каждой строке и в каждом столбце бесконечной матрицы $\| D_{j-k}\|_{-\infty}^{\infty}$ не более одного ненулевого элемента. Стало быть, каждый из элементов матрицы-функции $D^{<m>}(\zeta)$ равен либо нулю, либо целой степени ζ, причем в каждой строке и в каждом столбце $D^{<m>}(\zeta)$ точно один ненулевой элемент.

Следовательно, найдутся матрицы перестановок P_1 и P_2 такие, что

$$D^{<m>}(\zeta)=P_1 D'(\zeta) P_2, \tag{6}$$

где $D'(\zeta)$ — диагональная матрица вида (3).

Из равенств (5) и (6) вытекает требуемая факторизация для $A^{<m>}(\zeta)$.

Займемся теперь подсчетом правых индексов матрицы-функции $D^{<m>}(\zeta)$, которые, очевидно, совпадают с правыми индексами $A^{<m>}(\zeta)$. Через $f(A;k)$ обозначим число правых индексов матрицы-функции $A(\zeta)$, равных k. Тогда, очевидно, $f(A;k)\ (=f(D;k))$ равно числу элементов, равных единице, в матрице D_k, а $f(A^{<m>};\ k)(=f(D^{<m>};\ k)$ равно числу элементов, равных единице в матрице

$$\left\| \begin{matrix} D_{km} & D_{km-1} & \cdots & D_{km-(m-1)} \\ D_{km+1} & D_{km} & \cdots & D_{km-(m-2)} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ D_{km+(m-1)} & D_{km+(m-2)} & \cdots & D_{km} \end{matrix} \right\|$$

Отсюда следует, что

$$f(A^{<m>};\ k)=mf(D;\ km)+(m-1)f(D;\ km-1)+ \\ +\cdots+f(D;\ (k-1)m+1)+(m-1)f(D;\ km+1)+ \\ +\cdots+f(D;\ (k+1)m-1)$$

или

$$f(A^{<m>};k)=\sum_{j=-(m-1)}^{m-1}(m-|j|)f(A;\ km+j) \ (j=0, \pm 1, \cdots).$$

Обозначим через $\varphi(k)$ число чисел в последовательности (4), равных k. Числа последовательности (4) могут равняться k только при тех значениях q, для которых либо а) $\nu_q=k$, либо б) $\nu_q=k-1$. В случае а) таких чисел $m-r_q$, а в случае б) r_q. Следовательно,

$$\varphi(k)=\sum_{j=0}^{m-1}[(m-j)f(A;\ km+j)+j\,f(A;\ (k-1)m+j)]=$$

$$=\sum_{j=0}^{m-1}(m-j)f(A;\ km+j)+\sum_{l=-(m-1)}^{-1}(m+l)\,f(A;\ km+l).$$

Таким образом,

$$\varphi(k)=\sum_{j=-(m-1)}^{m-1}(m-|j|)f(A;\ km+j) \quad (k=0, \pm 1, \cdots),$$

и, стало быть, имеет место равенство

$$f(A^{<m>};\ k)=\varphi(k),$$

которое завершает доказательство теоремы.

Следствие 1. *Пусть $A(\zeta)\in W_n$ — невырожденная матрица-функция, и*

$$m \geqslant \sup_{j=1,2,\ldots,n} |\varkappa_j|,$$

где $\{\varkappa_j\}_1^n$ — правые индексы $A(\zeta)$. Тогда правые индексы матрицы-функции $A^{<m>}(\zeta)$ принимают одно из трех значений 1, 0, −1.

Следствие 2. *Пусть $A(\zeta)\in W_n$ — невырожденная матрица-функция с неотрицательными правыми индексами и $m \geqslant \varkappa_1$. Тогда правые индексы матрицы-функции $A^{<m>}(\zeta)$ принимают одно из значений* 0,1, *а следовательно, они устойчивы* *.

Таким образом, если в пространстве l_1 задан ограниченный оператор A, определяемый матрицей $\| A_{j-k} \|_{j,k=-\infty}^{\infty}$ (или матрицей $\| A_{j-k} \|_{j,k=0}^{\infty}$), где $A_j (j=0, \pm 1, \cdots)$ матрицы n-го порядка, для которых

$$\sum_{j=-\infty}^{\infty} \| A_j \| < \infty,$$

то укрупнением блоков в матрице $\| A_{j-k} \|$ можно добиться, чтобы правые индексы соответствующей матрицы-функции не превосходили

* Аналогичное следствие имеет место и в случае, когда правые индексы $A(\zeta)$ неположительны.

по модулю единицы. Если же оператор **A** обратим с какой-либо стороны, то той же операцией можно добиться, чтобы соответствующие правые индексы были, кроме того, устойчивыми.

Все приведенные результаты сохраняют силу и для левой факторизации и левых индексов.

Результаты этой заметки допускают обобщение на случай непрерывных матриц-функций.

Отметим, что для случая $n=1$ изложенные результаты получены в заметке [3].

ЛИТЕРАТУРА

[1] И. Ц. Гохберг, М. Г. Крейн, Системы интегральных уравнений на полупрямой с ядрами, зависящими от разности аргументов, Успехи матем. наук, 13, 2, (1958).

[2] И. Ц. Гохберг, Задача факторизации в нормированных кольцах, функции от изометрических и симметрических операторов и сингулярные интегральные уравнения, Успехи матем. наук, 19, 1, (1964).

[3] И. Ц. Гохберг, Одно замечание о стандартной факторизации матриц-функций, Ученые записки Бельцкого пединститута, вып. 5, 1960.

М. С. ИЗМАН

СИЛЬНАЯ НЕУСТОЙЧИВОСТЬ И МНОЖЕСТВА ПРИТЯЖЕНИЯ В ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМАХ

А. М. Ляпунов [1] с помощью своего второго метода исследовал устойчивость решений системы дифференциальных уравнений. В работе В. И. Зубова [2] второй метод Ляпунова был применен для исследования устойчивости замкнутого инвариантного множества динамической системы, определенной в метрическом пространстве. Исследованию различных видов устойчивости замкнутого множества динамической системы в локально компактном сепарабельном метрическом пространстве посвящена и работа [3], где наряду с понятиями устойчивости и асимптотической устойчивости вводятся понятия полуустойчивости, множества притяжения и полупритяжения и некоторые другие. Однако в [3] изучаются лишь некоторые из этих понятий.

В настоящей работе вводится понятие сильной неустойчивости произвольного множества M метрического пространства, как множества, не являющегося полуустойчивым, и доказывается критерий сильной неустойчивости. Кроме того, устанавливаются критерии для множеств притяжения и полупритяжения.

I. Обозначения и определения

Пусть R — метрическое пространство с метрикой ρ, а $f(p, t)$ — динамическая система, определенная в R. В дальнейшем будем пользоваться обозначениями, введенными в монографии [4].

Определение 1. Множество $M \subseteq R$ назовем сильно неустойчивым, если существует такое $\varepsilon_0 > 0$ и такое компактное множество $K_0 \subseteq R$, что какое бы $\delta > 0$ ни было выбрано, всегда найдется точка $p \in K_0 \cap S(M, \delta)$ и момент времени $t \geq 0$, для которых имеет место неравенство

$$\rho(f(p, t), M) \geq \varepsilon_0.$$

Определение 2. Множество $M \subseteq R$ называется множеством притяжения, если существует такое $\delta > 0$, что

$$\rho(f(p, t), M) \to 0 \text{ при } t \to +\infty,$$

какова бы ни была точка $p \in S(M, \delta)$.

Определение 3. Множество $M \subseteq R$ называется множеством полупритяжения, если для любого компактного множества $K \subseteq R$ существует такое $\delta > 0$, что

$$\rho(f(p, t), M) \to 0 \text{ при } t \to +\infty,$$

какова бы ни была точка $p \in K \cap S(M, \delta)$.

Определение 4. Рассмотрим некоторую действительную функцию $v(p)$, заданную при всех $p \in M_1$, где M_1 некоторое подмножество R. Если величина $v(f(p, t)) - v(p)$ определена при всех достаточно малых $|t|$ и если существует

$$\lim_{t \to 0} \frac{v(f(p, t)) - v(p)}{t},$$

то он называется производной функции $v(p)$ в точке p вдоль движения $f(p, t)$ и обозначается через $\frac{dv(p)}{dt}$.

Пример. Пусть задана динамическая система

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = 1 \\ \frac{dy}{dt} = y. \end{cases}$$

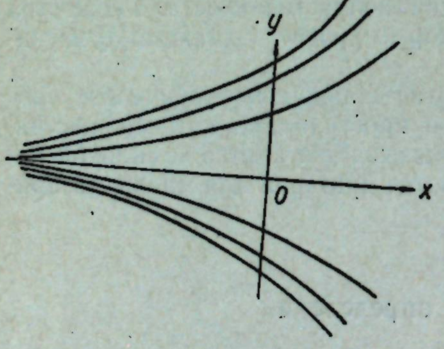

Рис. 1

Траектория, проходящая через точку (x_0, y_0), имеет уравнение

$$y = y_0 e^{x - x_0}.$$

Ось X-ов является сильно неустойчивым множеством (рис. 1).

2. Критерий сильной неустойчивости.

Теорема 1. *Для того чтобы множество $M \subseteq R$ было сильно неустойчивым для динамической системы $f(p, t)$, необходимо и достаточно, чтобы существовало компактное множество $K_0 \subseteq R$ и функция $v(p)$, заданная в некоторой окрестности $S(M, \eta)$ множества M, обладающая следующими свойствами:*

а) *функция $v(p)$ ограничена в $S(M, \eta)$;*

б) *для любого числа $\delta > 0$ найдется такая точка $p \in K_0 \cap S(M, \delta)$, что $v(p) > 0$;*

в) *существует такое $\lambda > 0$, что для любой точки $p \in S(M, \eta)$ имеет место равенство*

$$\frac{dv(p)}{dt} = \lambda \cdot v(p).$$

Доказательство. Достаточность. Пусть существует компактное множество $K_0 \subseteq R$ и функция $v(p)$, заданная в некоторой окрестности $S(M, \eta)$ множества M и обладающая свойствами а), б) и в). Докажем, что множество M сильно неустойчиво. Допустим противное. Тогда для любого $\varepsilon > 0$ и любого компактного множества $K \subseteq R$ существует такое $\delta = \delta(\varepsilon, K) > 0$, что для $p \in K \cap S(M, \delta)$ выполняется неравенство

$$\rho(f(p, t), M) < \varepsilon$$

при всех $t \geqslant 0$. В частности, взяв $\varepsilon = \eta$ и $K = K_0$, получим, что для $p \in K_0 \cap S(M, \delta)$ имеем $\rho(f(p, t), M) < \eta$ при всех $t \geqslant 0$. Следовательно, $f(p, t) \in S(M, \eta)$ и поэтому при каждом $p \in K_0 \cap S(M, \delta)$, согласно условию а), функция $v(f(p, t))$ ограничена. По условию б) для любого $\delta > 0$ в $K_0 \cap S(M, \delta)$ существует такая точка p, что $v(p) > 0$. Функция $v(f(p, t))$ удовлетворяет линейному дифференциальному уравнению

$$\frac{d}{dt} v(f(p, t)) = \lambda \cdot v(f(p, t))$$

с начальными данными $v(f(p, 0)) = v(p)$. Интегрируя это уравнение, получим, что

$$v(f(p, t)) = v(p) \cdot e^{\lambda t},$$

где $\lambda > 0$, что противоречит ограниченности функции $v(f(p, t))$. Следовательно, множество $M \subseteq R$ сильно неустойчиво.

Необходимость. Пусть M сильно неустойчиво. Тогда существуют такие $\varepsilon_0 > 0$ и компактное множество $K_0 \subseteq R$, что какое бы $\delta > 0$ ни выбрали, найдется такая точка $p \in K_0 \cap S(M, \delta)$, что при некотором $t \geqslant 0$ выполняется неравенство

$$\rho(f(p, t), M) \geqslant \varepsilon_0.$$

Рассмотрим точку $p \in S(M, \varepsilon_0)$. Возможны два случая:

1) либо $\rho(f(p, t), M) < \varepsilon_0$ при всех $t \geqslant 0$;

2) либо существует число $t_p > 0$ такое, что

$$\rho(f(p, t_p), M) = \varepsilon_0$$

и

$$\rho(f(p, t), M) < \varepsilon_0$$

при всех $t \in [0, t_p]$. Положим в первом случае $v(p) = 0$, а во втором случае

$$v(p) = e^{-t_p}.$$

Таким образом, функция $v(p)$ определена в любой точке множества $S(M, \varepsilon_0)$ и ограничена там: $v(p) < 1$.

Из определения сильной неустойчивости следует, что точки второго типа существуют в $K_0 \cap S(M, \delta)$ для любого $\delta > 0$. Следовательно, построенная функция $v(p)$ удовлетворяет условию б). Покажем, что $v(p)$ удовлетворяет условию в).

Действительно, если точка $p \in S(M, \varepsilon_0)$ относится к первому типу, то $v(f(p, t)) \equiv 0$ и поэтому $\frac{dv(p)}{dt} = v(p)$ вдоль любого такого движения.

Если точка p второго типа, то для достаточно малых $|t|$

$$v(f(p, t)) = e^{t - t_p},$$

откуда следует, что

$$\frac{dv(p)}{dt} = v(p).$$

Таким образом, условие в) выполняется вдоль любого движения $f(p, t) \in S(M, \varepsilon_0)$ при $\lambda = 1$. Теорема доказана.

Примечание. Как вытекает из результатов работы [3], понятие сильной неустойчивости для компактных множеств в локально компактных сепарабельных метрических пространствах совпадает с понятием неустойчивости: существует такое $\varepsilon_0 > 0$, что каково бы ни было $\delta > 0$ пересечение $f(S(M, \delta), I^+)$ с $R/S(M, \varepsilon_0)$ не пусто.

3. Критерии притяжения и полупритяжения

Теорема 2. *Для того чтобы множество $M \subseteq R$ было множеством притяжения для динамической системы $f(p, t)$, необходимо и достаточно, чтобы существовала функция $v(p)$, определенная на открытом положительно инвариантном множестве W, содержащем в себе некоторую окрестность $S(M, \eta)$ множества M, и обладающая следующими свойствами:*

а) *существует непрерывная монотонно-возрастающая действительная функция $\alpha(r)$, определенная на I^+ и такая, что $\alpha(0) = 0$ и $v(p) \geqslant \alpha(\rho(p, M))$ для всех $p \in W$;*

б) *$v(f(p, t)) \to 0$ при $t \to +\infty$, какова бы ни была точка $p \in W$.*

Доказательство. Достаточность. Пусть существует функция $v(p)$, определенная на открытом положительно инвариантном множестве W, содержащем в себе окрестность $S(M, \eta)$ множества M и обладающая свойствами а) и б) теоремы. Покажем, что M — множество притяжения. Действительно, из условия а) с учетом положительной инвариантности множества W имеем

$$\alpha(\rho(f(p, t), M)) \leqslant v(f(p, t))$$

при всех $t \geqslant 0$ и $p \in W$. Так как $\alpha(r)$ — непрерывная монотонно-возрастающая действительная функция и $\alpha(0) = 0$, то для нее существует обратная функция α^{-1}, которая также является непрерывной монотонно-возрастающей и $\alpha^{-1}(0) = 0$. Следовательно,

$$\rho(f(p, t), M) \leqslant \alpha^{-1}(v(f(p, t))).$$

Но по условию б) $v(f(p, t)) \to 0$ при $t \to +\infty$, а следовательно, $\alpha^{-1}(v(f(p, t))) \to 0$ при $t \to +\infty$ и отсюда $\rho(f(p, t), M) \to 0$ при $t \to +\infty$. Таким образом, существует такое $\delta > 0$ $(\delta = \eta)$, что

$$\rho(f(p, t), M) \to 0 \text{ при } t \to +\infty,$$

какова бы ни была точка $p \in S(M, \delta)$, т. е. M является множеством притяжения.

Необходимость. Пусть M — множество притяжения, т. е. существует такое $\delta > 0$, что

$$\rho(f(p, t), M) \to 0 \text{ при } t \to +\infty,$$

какова бы ни была точка $p \in S(M, \delta)$.

Положим

$$W \stackrel{f}{=} \{p \in R : \rho(f(p, t), M) \to 0 \text{ при } t \to +\infty\}.$$

Как показано в [3] (лемма 2.1), W является открытым, инвариантным множеством. Кроме того, W содержит в себе окрестность $S(M, \delta)$ множества M.

Для $p \in W$ определим

$$v(p) = \sup\{\rho(f(p, \tau), M) : \tau \geqslant 0\}.$$

Очевидно, $v(p) \geqslant \rho(p, M)$, так что можно положить $\alpha(r) = r$. Следовательно, условие а) выполняется. Покажем, что $v(p)$ удовлетворяет условию б). Действительно,

$$v(f(p, t)) = \sup\{\rho(f(p, t+\tau), M) : \tau \geqslant 0\}.$$

Но при $t \to +\infty$ и $t + \tau \to +\infty$ и так как супремум берется по τ, а $\rho(f(p, t+\tau), M) \to 0$ при $t \to +\infty$, то следует, что

$$v(f(p, t)) \to 0 \text{ при } t \to +\infty.$$

Теорема доказана.

Теорема 3. *Для того чтобы множество $M \subseteq R$ было множеством полупритяжения для динамической системы $f(p, t)$, необходимо и достаточно, чтобы существовала функция $v(p)$, определенная на положительно инвариантном множестве W, содержащем в себе множество M, и обладающая следующими свойствами*

а) *существует непрерывная монотонно-возрастающая действительная функция $\alpha(r)$, определенная на I^+ и такая, что $\alpha(0) = 0$ и $v(p) \geqslant \alpha(\rho(p, M))$ для всех $p \in W$;*

б) *для любого компактного множества $K \subseteq R$ существует такое $\delta > 0$, что $K \cap S(M, \delta) \subseteq W$ и $v(f(p, t)) \to 0$ при $t \to +\infty$, какова бы ни была точка $p \in K \cap S(M, \delta)$.*

Доказательство. Достаточность. Пусть существует функция $v(p)$, определенная на положительно инвариантном множестве $W \supseteq M$ и обладающая свойствами а) и б). Докажем, что M — множество полупритяжения.

Действительно, из условия а) и положительной инвариантности W имеем

$$\alpha(\rho(f(p, t), M)) \leqslant v(f(p, t)),$$

каковы бы ни были $p \in W$ и $t \geqslant 0$.

Так как $\alpha(r)$ непрерывная, монотонно-возрастающая функция и $\alpha(0) = 0$, то для нее существует обратная функция α^{-1}, которая также является непрерывной, монотонно-возрастающей и $\alpha^{-1}(0) = 0$. Следовательно,

$$\rho(f(p, t), M) \leqslant \alpha^{-1}(v(f(p, t))).$$

По условию б) для любого компактного множества $K \subseteq R$ найдется такое $\delta > 0$, что $K \cap S(M, \delta) \subseteq W$ и $v(f(p, t)) \to 0$ при $t \to +\infty$, какова бы ни была точка $p \in K \cap S(M, \delta)$, а следовательно,

$$\alpha^{-1}(v(f(p, t))) \to 0 \text{ при } t \to +\infty,$$

(так как $\alpha^{-1}(0)=0$) и отсюда $\rho(f(p, t), M)\to 0$ при $t\to+\infty$, какова бы ни была точка $p\in K\cap S(M, \delta)$. Таким образом, для любого компактного множества $K\subseteq R$ существует такое $\delta>0$, что

$$\rho(f(p, t), M)\to 0 \text{ при } t\to+\infty,$$

какова бы ни была точка $p\in K\cap S(M, \delta)$, т. е. M — множество полупритяжения.

Необходимость. Пусть $M\subseteq R$ является множеством полупритяжения, т. е. для любого компактного множества $K\subseteq R$ существует такое $\delta>0$, что

$$\rho(f(p, t), M)\to 0 \text{ при } t\to+\infty,$$

какова бы ни была точка $p\in K\cap S(M, \delta)$.

Положим опять

$$W=\{p\in R:\rho(f(p, t), M)\to 0 \text{ при } t\to+\infty\}.$$

Очевидно, что это множество является инвариантным.

Теперь для $p\in W$ снова определим

$$v(p)=\sup\{\rho(f(p, \tau), M):\tau\geqslant 0\}.$$

Очевидно, что если взять $\alpha(r)=r$, то условия а) и б) теоремы выполняются. Теорема доказана.

Настоящая работа выполнена под руководством К. С. Сибирского, которому автор приносит искреннюю благодарность за постоянное внимание к работе.

ЛИТЕРАТУРА

[1] А. М. Ляпунов, Общая задача об устойчивости движения, ОНТИ, 1935.
[2] В. И. Зубов, Методы А. М. Ляпунова и их применение, Изд. Ленингр. унив., 1957.
[3] Nam P. Bhatia, Stability and Liapunov Functions in Dynamical Systems, Contributions to differential equations, vol. 3, N.-Y., 1964.
[4] В. В. Немыцкий, В. В. Степанов, Качественная теория дифференциальных уравнений, ГИТТЛ, 1949.

Известия Академии наук Молдавской ССР № 8, 1967 г.

Н. К. ЧЕБАН

РАВНОМЕРНАЯ АППРОКСИМАЦИЯ МНОЖЕСТВ В ЧАСТИЧНО УПОРЯДОЧЕННЫХ ДИСПЕРСНЫХ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМАХ

В. В. Немыцким [1, 2] было введено понятие равномерной аппроксимации множества и получены существенные результаты в исследовании устойчивых по Лагранжу точек.

К. С. Сибирский [3, 4] ввел понятие ψ-предельной точки движения $f(p, t)$ как точки, которую равномерно аппроксимирует полутраектория $f(p, I^+)$; изучил структуру множества Ψ_p всех ψ-предельных точек и выяснил, какие множества равномерно аппроксимируются полутраекторией $f(p, I^+)$.

А. М. Стахи [5] распространил эти понятия на частично упорядоченные динамические системы.

В настоящей заметке эти результаты переносятся на частично упорядоченные дисперсные динамические системы.

Необходимые определения и обозначения читатель найдет в [6].

Пусть $[R, S, f]$ — частично упорядоченная дисперсная динамическая система.

Определение 1. Скажем, что воронка $f(p,S)$ равномерно аппроксимирует множество $Q\subseteq R$, если для любого $\varepsilon>0$ существует такой элемент $s_\varepsilon>e$ полугруппы S, что для любой пары точек q и r, $q\in f(p,S)$, $r\in Q$ найдется такое $s\in(e, s_\varepsilon)$, что

$$\beta(r, f(q, s))<\varepsilon. \tag{1}$$

Определение 2. Точку $r\in R$ назовем ψ-предельной точкой потока $f(p, s)$, если воронка $f(p, S)$ равномерно аппроксимирует точку r.

Множество $K\subseteq S$ назовем относительно плотным, если существует такой элемент $s_0\in S(s_0>e)$, что

$$K\cap(s, ss_0)\neq\Lambda$$

для любого $s\in S$.

Очевидно, что если точка r является ψ-предельной точкой потока $f(p, s)$, то для любого $\varepsilon>0$ существует такое относительно плотное множество $K\subseteq S$, что

$$\beta(r, f(p, k))<\varepsilon \tag{2}$$

при всех $k\in K$.

Множество всех ψ-предельных точек потока $f(p, s)$ обозначим через Ψ_p. Из определения 2 следует, что $\Psi_p \subseteq D_p \subseteq \Sigma_p$.

Лемма 1. *Множество Ψ_p замкнуто.*

Доказательство. Пусть $r \in \Psi_p$ и $\varepsilon > 0$. Тогда найдется точка $q \in \Psi_p$ и число $\delta > 0$ такие, что

$$U(q, \delta) \subset U(r, \varepsilon).$$

Так как $q \in \Psi_p$, найдется такое относительно плотное множество $K \subseteq S$, что

$$\beta(q, f(p, k)) < \delta$$

при всех $k \in K$. Тогда при всех $k \in K$ выполнено неравенсто (2), откуда $r \in \Psi_p$. Лемма доказана.

Лемма 2. *Если точка $r \in R$ принадлежит множеству Ψ_p и является точкой непрерывности, то $f(r, S) \subseteq \Psi_p$.*

Доказательство. Пусть точка непрерывности $r \in \Psi_p$, $\varepsilon > 0$, а $s \in S$. Так как точка r является точкой непрерывности, найдется такое $\delta > 0$, что для всех $r' \in U(r, \delta)$ имеет место неравенство

$$\alpha(f(r', s), f(r, s)) < \varepsilon. \qquad (3)$$

Но $r \in \Psi_b$ и поэтому для $\delta > 0$ найдется такой элемент $s_\delta > e$, что для любой точки $q \in f(p, S)$ существует элемент $\bar{s} \in (e, s_\delta)$, удовлетворяющий неравенству

$$\beta(r, f(q, \bar{s})) < \delta. \qquad (4)$$

Пусть $q_0 \in U(r, \delta) \cap f(q, \bar{s})$. Тогда из (3) находим

$$\beta(f(r, s), f(q_0, s)) < \varepsilon. \qquad (5)$$

Но $q_0 \in f(q, \bar{s})$ и поэтому $f(q_0, s) \subseteq f(q, \bar{s}s)$, а тогда из (5) имеем

$$\beta(f(r, s), f(q, \bar{s}s)) < \varepsilon. \qquad (6$$

Обозначая $s_\varepsilon \equiv s_\delta s$, находим, что $\bar{s}s \in (s, s_\delta s \subseteq (e, s_\varepsilon)$. При этом неравенство (6) говорит о том, что $f(r, s) \subseteq \Psi_p$. Так как s — произвольный элемент полугруппы S, то лемма доказана.

Следствие 1. *Если Ψ_p состоит из точек непрерывности, то оно полуинвариантно.*

Теорема 1. *Если p почти рекуррентная точка непрерывности, то $\Psi_p = D_p = \Sigma_p$.*

Доказательство. Пусть p — почти рекуррентная точка. Это равносильно тому, что $f(p, S)$ равномерно аппроксимирует точку p, т. е. $p \in \Psi_p$. Так как p точка непрерывности, то по лемме 2 имеем $f(p, S) \subseteq \Psi_p$. Тогда, учитывая лемму 1, получаем, что $\Sigma_p \subseteq \Psi_p$. Но, с другой стороны, $\Psi_p \subseteq D_p \subseteq \Sigma_p$ и поэтому $\Psi_p = D_p = \Sigma_p$, что и требовалось доказать.

Теорема 2. *Если p рекуррентная точка, то воронка $f(p, S)$ равномерно аппроксимирует Σ_p.*

Доказательство. Пусть p — рекуррентная точка, $\varepsilon > 0$ и $0 < \varepsilon_1 < \varepsilon$. Тогда найдется такой элемент $s_{\varepsilon_1} > e$, что для любой точки $q \in f(p, S)$ имеет место включение

$$f(p, S) \subseteq U(f(q, (e, s_{\varepsilon_1})), \varepsilon_1).$$

При этом

$$\Sigma_p \subseteq U(f(q, (e, s_{\varepsilon_1})), \varepsilon),$$

т. е. воронка $f(p, S)$ равномерно аппроксимирует Σ_p.

Лемма 3. *Если выполнено условие интегральной непрерывности и D_p содержит полуинвариантное множество M, то $\Psi_p \subseteq M$.*

Доказательство. Пусть M — полуинвариантное множество. $\varepsilon > 0$, $s \in S$ и $q \in M$. Для точки q, числа ε и элемента s найдется по условию интегральной непрерывности такое $\delta > 0$, что

$$\alpha(f(r, \bar{s}), f(q, \bar{s})) < \varepsilon \qquad (7)$$

при всех $\bar{s} \in (e, s)$ и $r \in U(q, \delta)$. Так как $q \in D_p$, то можем считать, что $r \in f(p, S)$. Но $q \in M$, и так как M полуинвариантно, то $f(q, \bar{s}) \subseteq M$, а тогда из (7) следует, что $\beta(f(r, \bar{s}), M) < \varepsilon$ при всех $\bar{s} \in (e, s)$. Таким образом, воронка $f(p, S)$ может равномерно аппроксимировать только точки множества M, что и требовалось доказать.

Лемма 4. *Если выполнено условие интегральной непрерывности, а D_p содержит более одного минимального полуинвариантного множества, то $\Psi_p = \Lambda$.*

Доказательство. Допустим, что в D_p имеются два различных минимальных полуинвариантных множества M_1 и M_2. Тогда в силу леммы 3 из [6] имеем $M_1 \cap M_2 = \Lambda$. Согласно лемме 3 имеем, что $\Psi_p \subseteq M_1$ и $\Psi_p \subseteq M_2$, но эти включения возможны только тогда, когда $\Psi_p = \Lambda$.

Лемма 5. *Пусть $q \in \Sigma_p$ — точка непрерывности, тогда $D_q \subseteq D_p$.*

Доказательство. Пусть $r \in D_q$, $\varepsilon > 0$ и $\bar{s} \in S$. Докажем, что $r \in D_p$. Так как $r \in D_q$, то для $\frac{\varepsilon}{2}$ и $\bar{s}$ существует такой элемент $s > \bar{s}$, что

$$\beta(r, f(q, s)) < \frac{\varepsilon}{2}. \qquad (8)$$

Для точки q, которая является точкой непрерывности, числа $\frac{\varepsilon}{2}$ и элемента s найдется такое $\delta > 0$, что

$$\alpha(f(q', s), f(q, s)) < \frac{\varepsilon}{2} \qquad (9)$$

при всех $q' \in U(q, \delta)$. Учитывая то, что $q \in \Sigma_p$, в (9) точку q' можно считать подобранной так, что $q' \in U(q, \delta) \cap f(p, s_1)$, где $s_1 \in S$. Тогда $f(q', s) \subseteq f(p, s_1 s)$, и поэтому из (9) имеем

$$\beta(f(q, s), f(p, s_1 s)) < \frac{\varepsilon}{2}. \qquad (10)$$

Из (8) и (10) получается

$$\beta(r, f(p, s_1 s)) < \varepsilon,$$

причем $s_1 s > \bar{s}$. Следовательно, $r \in D_p$ и лемма доказана.

Лемма 6. *Пусть воронка $f(p, S)$ устойчива по Лагранжу, Σ_p состоит из точек непрерывности, а M единственное минимальное полуинвариантное множество, содержащееся в D_p. Тогда воронка $f(p, S)$ равномерно аппроксимирует M.*

Доказательство. Пусть выполнены все условия леммы. Как показано в [7], для устойчивой по Лагранжу воронки $f(p, S)$ множество D_p не пусто и компактно; кроме того, D_p замкнуто. Предположим, что воронка $f(p, S)$ не аппроксимирует равномерно M. Тогда существует такое $\varepsilon_0 > 0$, что для любого $s \in S(s > e)$ найдется хотя бы одна пара точек q_s и $r_s(q_s \in f(p, S),\ r_s \in M)$, что при всех $\overline{s} \in (e, s)$ выполняется неравенство

$$\rho(r_s, f(q_s, \overline{s})) \geqslant \varepsilon_0.$$

Тем самым определяется отображение $\varphi: S \to M \times \Sigma_p$ такое, что $\varphi(s) = (r_s, q_s)$. Так как по условиям леммы M и Σ_p компактны, то множество $M \times \Sigma_p$ также компактно и тогда по лемме 1 из [5] отображение φ имеет хотя бы одну динамически предельную точку $(r_0, q_0) \in M \times \Sigma_p$. Далее, как и в теореме 5, из [6] доказывается, что

$$\rho(r_0, f(q_0, S)) \geqslant \frac{\varepsilon_0}{2}$$

и поэтому $r_0 \overline{\in} D_{q_0} \subseteq \Sigma_{q_0}$. По теореме 6 в [7] множество D_{q_0} не пусто и компактно и поэтому оно содержит минимальное полуинвариантное множество M_1. Так как $r_0 \overline{\in} D_{q_0}$, то $r_0 \overline{\in} M_1$, а так как $r_0 \in M$, то M_1 отлично от M. Согласно лемме 5 имеем $D_{q_0} \subseteq D_p$ и тогда $M_1 \subseteq D_p$, а это противоречит тому, что M — единственное минимальное полуинвариантное множество в D_p. Лемма доказана.

Теорема 3. *Пусть выполнено условие интегральной непрерывности. Для того чтобы устойчивая по Лагранжу воронка $f(p, S)$ равномерно аппроксимировала некоторое подмножество $Q \subseteq R$, необходимо и достаточно, чтобы $\Sigma_Q = \overline{f(Q, S)}$ было бы единственным минимальным полуинвариантным множеством в D_p.*

Доказательство. Согласно условию теоремы D_p не пусто и компактно (см. теорему 6 в [7]). Кроме того, D_p замкнуто. Поэтому в D_p существует минимальное полуинвариантное множество M. Если воронка $f(p, S)$ равномерно аппроксимирует Q, то $Q \subseteq \Psi_p$ и поэтому $\Psi_p \neq \Lambda$. При этом по лемме 4 множество M является единственным минимальным полуинвариантным множеством в D_p. Тогда по лемме 6 множество $M \subseteq \Psi_p$. С другой стороны, по лемме 3 множество $\Psi_p \subseteq M$. Тогда $\Psi_p = M$. Из того что $Q \subseteq M$ следует, что $\Sigma_Q \subseteq M$. Так как M — минимальное полуинвариантное множество, а по теореме 1 из [6] множество Σ_Q полуинвариантно, то Σ_Q не может быть правильной частью M и поэтому $\Sigma_Q = M$.

Обратно, пусть Σ_Q — единственное минимальное полуинвариантное множество, содержащееся в D_p. Тогда по лемме 6 воронка $f(p, S)$ равномерно аппроксимирует множество Σ_Q и, тем более, его подмножество Q. Теорема доказана.

Примечание. Примеры показывают, что условия непрерывности существенны во всех предложениях, в которых они фигурируют.

Автор выражает искреннюю благодарность К. С. Сибирскому за постановку задачи и ценные замечания.

ЛИТЕРАТУРА

[1] В. В. Немыцкий, В. В. Степанов, Качественная теория дифференциальных уравнений, ГИТТЛ, М.—Л., 1949.
[2] В. В. Немыцкий, Динамические системы на предельном интегральном многообразии, ДАН СССР, 47, № 8, (1945).
[3] К. С. Сибирский, Равномерная аппроксимация точек динамически предельных множеств и движения в них, ДАН СССР, 146, № 2, (1962).
[4] К. С. Сибирский, Равномерная аппроксимация точек и свойства движений в динамически предельных множествах, Известия АН МССР, № 1, (1963).
[5] А. М. Стахи, Топологические свойства частично упорядоченных динамических систем, ДАН СССР, 172, № 5, (1967).
[6] Н. К. Чебан, Рекуррентные точки и минимальные множества в частично упорядоченных дисперсных динамических системах, Математические исследования, 2, вып. 2, (1967).
[7] К. С. Сибирский, А. М. Стахи, Предельные свойства частично упорядоченных дисперсных динамических систем, Известия АН МССР, № 11, (1963).

Рефераты

УДК 519.45.

Продолжения квазигрупп. Белоусов В. Д.

Известия Академии наук Молдавской ССР № 8, 1967, с. 22.

Статья является продолжением исследований автора из [1], гл. VII (см. там основные определения и понятия). В отличие от [1] вместо полной подстановки квазигруппы $Q(\cdot)$ рассматривается несколько более общее понятие полной тройки подстановок (п. т. п.), которое дает возможность сформулировать результаты в более симметричном виде. Упорядоченная тройка подстановок $U=(\lambda,\mu,\nu)$ множества Q называется п. т. п. для квазигруппы $Q(\cdot)$, если $\lambda x\cdot\mu x=\nu x$ для $\forall x\in Q$. Изотоп $(\hat{\cdot})=(\cdot)^{\upsilon}$ будет идемпотентной квазигруппой, соответствующей квазигруппе $Q(\cdot)$. Если существует такой элемент e, что $x\,\hat{\cdot}\,e=e\,\hat{\cdot}\,x$ для $\forall x\in Q$ то п. т. п. U называется особой п. т. п. относительно e. Пусть квазигруппа $Q(\cdot)$ обладает особой п. т. п. относительно e, тогда можно получить новую квазигруппу $Q(\cdot)$следующим образом:

$$x\cdot y=xy\,(\mu^{-1}y\neq\lambda^{-1}x,\ x\neq\lambda e,\ y\neq\mu e),\ \lambda x\cdot\mu x=\lambda x\cdot\mu e,$$

$$x\cdot\mu e=\gamma\lambda^{-1}x,\ \lambda e\cdot y=\gamma\mu^{-1}y.$$

Изотоп квазигруппы $Q(\cdot)$ называется квазигруппой, косоизотопной квазигруппе $Q(\cdot)$. Показывается, что $Q(\cdot)$, вообще говоря, не изотопна $Q(\cdot)$. Добавляя один элемент к множеству Q, можно построить новую квазигруппу $Q'(\circ)$, $Q'=Q\cup k$, — продолжение квазигруппы $Q(\cdot)$. С помощью только что введенного понятия доказывается следующий основной результат. Пусть квазигруппы $Q(\cdot)$ и $Q(\times)$ обладают п. т. п. U и V соответственно. Соответствующие продолжения этих квазигрупп изотопны (за некоторым исключением) тогда и только тогда, когда либо соответствующие идемпотентные квазигруппы изоморфны, либо одноименные парастрофы квазигрупп $Q(\cdot)$ и $Q(\times)$ косоизотопны, причем первые две компоненты косоизотопии совпадают.

Библиографий 4.

УДК 519.48.

О некоторых многообразиях универсальных алгебр. Рябухин Ю. М.

Известия Академии наук Молдавской ССР № 8, 1967, с. 28.

Ясно, что всякое многообразие Λ Ω-алгебр является категорией. Найдены необходимые и достаточные условия того, чтобы для многообразия Λ, в категории Λ существовали нулевые объекты, каждый морфизм обладал ядром и нормальным образом и т. д. Например:

Предложение. Пусть Λ — многообразие Ω-алгебр. Для того чтобы в категории Λ существовали нулевые объекты и каждый морфизм обладал ядром, необходимо и достаточно выполнение точно одного из требований:

а) Система Ω имеет точно одну нульарную операцию 0, причем для любой n-арной операции ρ из Ω с $n\geqslant 1$ на всех алгебрах многообразия Λ верно тождество $0\ldots 0\rho=0$;

б) Система Ω не пуста и не имеет ни одной нульарной операции, причем существуют такие слова $w_1=w_1(x_1)$ и $w_2=w_2(x_2)$, что на всех алгебрах многообразия Λ верны тождества $w_1=w_2$ и $w_1\ldots w_1\rho=w_2$.

Частным случаем рассматриваемых многообразий являются многообразия Ω-групп.

Библиографий 7.

УДК 517.948.32+51388.

О сведении систем уравнений Винера-Хопфа к системам с нулевыми индексами. Чебогару И. С.

Известия Академии наук Молдавской ССР № 8, 1967, с. 13,

Пусть L — некоторое банахово пространство и R — кольцо всех линейных ограниченных операторов, действующих в L. Пусть далее $U\in$ R—произвольный обратимый изометрический оператор. Предположим, что пространство L распадается в прямую сумму подпространств L_+ и L_-, из которых первое является инвариантным для U, причем U отображает L_+ в свою строгую часть, и $m=\dim L_+/UL_+$ — конечно, а L_- — инвариантно относительно U^{-1}. Пусть далее P — проектор, проектирующий L на L_+, $Q=I-P$, а $R(U)$ — подкольцо R с образующими U и U^{-1}. Следуя (РЖ Матем. 1964, 10Б366), сопоставим каждому оператору $A\in R(U)$ непрерывную функцию $a(t)$ на бикомпакте максимальных идеалов $|t|=1$ кольца $R(U)$.

Рассмотрим теперь в L_+ следующую систему уравнений:

$$\sum_{k=1}^{n}PA_{ik}x_k=y_i\quad(i=1,2,\ldots,n),\tag{1}$$

где $A_{ik}\in R(U)$ $(i,k=1,2,\ldots,n)$ и $x_k, y_i\in L_+$ $(k=1,2,\ldots,n)$. Сопоставляя каждому оператору $A_{ik}\in R(U)(i,k=1,2,\ldots,n)$ непрерывную функцию $a_{ik}(t)$ $(i,k=1,2,\ldots,n)$ на единичной окружности, составим матрицу

$$A(t)=\|a_{ik}(t)\|_1^n\qquad(|t|=1)$$

и предположим, что

$$\det A(t)\neq 0\qquad(|t|=1).$$

Тогда матрица-функция $A(t)$ допускает (РЖ Матем. 1964, 10Б366) правую стандартную факторизацию

$$A(t)=A_-(t)\,D(t)\,A_+(t)\qquad(|t|=1),$$

где $D^0(t)=\|\delta_{ik}\,t^{\varkappa_i}\|_1^n$ и $\varkappa_i$ $(i=1,2,\cdots,n)$ правые частные индексы $A(t)$.

В работе доказывается, что матрицу $A(t)$ можно представить в виде:

$$A(t)=D^0(t)\ A^0(t),$$

где $D^\circ(t)=\|\delta_{ik}\,t^{\nu_i}\|_1^n$ отличается от $D(t)$ только расположением элементов вдоль главной диагонали, а правые частные индексы матрицы $A^\circ(t)$ равны нулю.

Наряду с системой (1), которая теперь может быть записана еще в виде

$$\sum_{k=1}^{n}P\,a_{ik}(U)\,x_k=y_i\quad(i=1,2,\cdots,n),\tag{2}$$

рассмотрим систему

$$\sum_{k=1}^{n}PU^{-\nu_i}\,a_{ik}(U)\,x_k=PU^{-\nu_i}\,y_i\ (i=1,2,\cdots,n),\tag{3}$$

левой части которой соответствует матрица-функция $A^c(t)$ $(|t|=1)$.

В реферируемой работе доказывается следующая основная

Теорема. *Единственное решение* $x=(x_1,x_2,\ldots,x_n)$ *системы* (3) *является одним из решений системы* (2), *если выполняются условия:*

$$\sum_{k=1}^{n}PU^{\nu_i}\,QU^{-\nu_i}\,a_{ik}\,(U)\,x_k=PU^{\nu_i}\,QU^{-\nu_i}\,y_i,\ \text{для}\ \nu_i>0.$$

Наоборот, *решение* $x=(x_1,x_2,\ldots,x_n)$ *системы* (2), *в случае его существования, является и решением системы* (3), *если выполняются условия:*

$$\sum_{k=1}^{n}PU^{-\nu_i}Q\,a_{ik}\,(U)\,x_k=0,\ \text{для}\ \nu_i<0.$$

Библиографий 4.

УДК 519.46+519.54

Обобщение одной теоремы Грина. Бронштейн И. У.

Известия Академии наук Молдавской ССР № 8, 1967, с. 5.

В заметке указываются условия минимальности потоков (РЖ Матем., 1957, 2971К) на однородных многообразиях, являющихся обобщением нильмногообразий. Доказанная теорема является обобщением одной теоремы Л. Грина (РЖ Матем., 4А 325К).

Библиографий 8.

УДК 681142

Сообщение о трансляторе с языка SUBSET ALGOL на электронно-вычислительную машину «БЭСМ-2М». Гонца М. Г.

Известия Академии наук Молдавской ССР № 8, 1967, с. 4.

В статье сообщается о трансляторе на ЭВМ «БЭСМ-2М» с входным языком subset ALGOL, разработанном в Институте математики с Вычислительным центром АН Молдавской ССР. Транслятор ориентирован на программирование массовых вычислительных алгоритмов и построен по блочному принципу. В качестве внешней памяти используется магнитный барабан. Общий объем транслятора около 3100 команд. В основу работы транслятора положен принцип поэлементного просмотра алгоритма слева направо.

Трансляция осуществляется за один просмотр алгоритма в два этапа: сперва в условных, а затем в истинных адресах.

Библиографий 9.

УДК 517.948

Об индексах кратных расширений матриц-функций. Гохберг И. Ц., Фельдман И. А.

Известия Академии наук Молдавской ССР № 8, 1967, с. 5.

Пусть W_n — кольцо всех матриц-функций $A(\zeta)([\zeta]=1)$ n-го порядка, разлагающихся в абсолютно сходящиеся ряды Фурье:

$$A(\zeta)=\sum_{j=-\infty}^{\infty} A_j \zeta^j \ (|\zeta|=1), \quad \sum_{j=-\infty}^{\infty} \|A_j\| < \infty,$$

где $\|A\|$ — какая-либо кольцевая норма в кольце матриц n-го порядка. Матрица-функция $A^{<m>}(\zeta) \in W_{nm}$ называется m-кратным расширением $A(\zeta)$, если операторы, порождаемые в пространстве l_1 последовательностей $\{\xi_j\}_{-\infty}^{\infty}$ матрицами

$$\|A_{j-k}\|_{-\infty}^{\infty} \text{ и } \|A_{j-k}^{<m>}\|_{-\infty}^{\infty}$$

совпадают,

Теорема. *Пусть равенство*

$$A(\zeta)=A_-(\zeta)\, D(\zeta)\, A_+(\zeta) \qquad ([\zeta]=1,$$

где

$$D(\zeta)=\|\zeta^{\varkappa_j}\delta_{jk}\|_{j,k=1}^{n}$$

дает правую факторизацию невырожденной матрицы-функции $A(\zeta) \in W_n$ с правыми индексами $\{\varkappa_j\}_1^n$, и пусть m — некоторог натуральное число.

Тогда матрица-функция $A^{<m>}(\zeta)$ является невырожденной и допускает правую факторизацию

$$A^{<m>}(\zeta)=A'_-(\zeta)\, D'(\zeta)\, A'_+(\zeta)$$

Линия отреза

Линия отреза

с множителями, определяемыми равенствами

$$A'_-(\zeta)=A_-^{<m>}(\zeta)\, P_1, \qquad A'_+(\zeta)=P_2 A_+^{<m>}(\zeta),$$

$$D'(\zeta)=\|\zeta^{\varkappa'_j}\delta_{jk}\|_{j,k=1}^{mn},$$

в которых $P_j\,(j=1,2)$ — некоторые матрицы перестановок, а правые индексы $\varkappa'_j\,(j=1,2,\cdots,mn)$ суть расположенные в невозрастающем порядке числа

$$\underbrace{\nu_q+1,\ \nu_q+1,\ \cdots,\ \nu_q+1}_{r_q};\ \underbrace{\nu_q,\ \nu_q,\ \cdots,\ \nu_q}_{m-r_q} \quad (q=1,2,\ldots,n),$$

где

$$\varkappa_q=\nu_q m+r_q \quad 0 \leqslant r_q < m).$$

Библиографий 3.

УДК 517.917

Сильная неустойчивость и множества притяжения в динамических системах. Изман М. С.

Известия Академии наук Молдавской ССР № 8, 1967, с. 6.

Работа продолжает исследования Зубова (РЖ Матем., 1959, 1480) и Бхатии (Contributions to differential equations, vol. 3, N.-Y., 1964) по применению второго метода Ляпунова для исследования устойчивости множеств динамической системы, определенной в метрическом пространстве. Устанавливаются критерии, при которых произвольное множество фазового пространства является сильно неустойчивым (не полуустойчивым) множеством, множеством притяжения или множеством полупритяжения.

Библиографий 4.

УДК 517.917

Равномерная аппроксимация множеств в частично упорядоченных дисперсных динамических системах. Чебан Н. К.

Известия Академии наук Молдавской ССР № 8, 1967, с. 5.

Рассматриваются вопросы равномерной аппроксимации множеств в частично упорядоченных дисперсных (без единственности) динамических системах.

Полученные предложения обобщают результаты В. В. Немыцкого (ДАН СССР, 1945, 47, 8), К. С. Сибирского (РЖ Матем., 1963, 5Б219; 1964, 10Б172) и А. М. Стахи (ДАН СССР, 1967, 172, № 5), установленные ими для динамических систем Биркгофа и частично упорядоченных систем с условием единственности.

Библиографий 7.

СОДЕРЖАНИЕ

КРАТКИЕ СООБЩЕНИЯ

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК МОЛДАВСКОЙ ССР № 8

Редактор *Н. З. Дмитренко.*
Художественный редактор *Л. И. Митрофанова.*
Технический редактор *А. А. Демарцев.*
Корректор *Н. Н. Миронова.*

Сдано в набор 28.X-1967. Подписано к печати 20.XII-1967. Формат бумаги 70×108 $^1/_{16}$. Печ. л. 6.
Уч.-изд. л. 6,66. Тираж 500 экз. АБ10709. Цена 45 коп. Заказ № 1121.
Редакционно-издательский отдел Академии наук Молдавской ССР
Кишинев, проспект Ленина, 1.

2-я типография Государственного комитета Совета Министров Молдавской ССР по печати, Кишинев, Советская, 8.