БУЛЕТИНУЛ
АКАДЕМИЕЙ де ШТИИНЦЕ
а РСС МОЛДОВЕНЕШТЬ

ИЗВЕСТИЯ
АКАДЕМИИ НАУК МОЛДАВСКОЙ ССР

7
1965

орид. тех.

АКАДЕМИЯ НАУК МОЛДАВСКОЙ ССР

БУЛЕТИНУЛ
АКАДЕМИЕЙ ДЕ ШТИИНЦЕ А РСС МОЛДОВЕНЕШТЬ

ИЗВЕСТИЯ
АКАДЕМИИ НАУК МОЛДАВСКОЙ ССР

№ 7

СЕРИЯ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИХ И МАТЕМАТИЧЕСКИХ НАУК

ИЗДАТЕЛЬСТВО «КАРТЯ МОЛДОВЕНЯСКЭ»
КИШИНЕВ • 1965

В. Д. БЕЛОУСОВ и И. А. ФЛОРЯ

О ЛЕВОДИСТРИБУТИВНЫХ КВАЗИГРУППАХ

1°. Квазигруппа $Q(\cdot)$ называется дистрибутивной, если в ней выполняются тождества:

$$x\cdot yz=xy\cdot xz,\qquad yz\cdot x=yx\cdot zx. \tag{1}$$

Дистрибутивные квазигруппы достаточно хорошо изучены в [1], [2], [3]. Отметим следующий результат, который показывает тесную связь дистрибутивных квазигрупп и луп Муфанг: *Любая дистрибутивная квазигруппа изотопна некоторой коммутативной лупе Муфанг.*

Одним из вопросов, который здесь возникает, является вопрос о зависимости левого и правого дистрибутивных законов (1). Стейн [4] показал, что для квазигрупп левая и правая стороны дистрибутивности независимы. Им построен пример леводистрибутивной квазигруппы, т. е. в такой квазигруппе выполняется только первое из тождеств (1), но не правой дистрибутивности. Построенная им леводистрибутивная квазигруппа изотопна группе.

Одним из авторов настоящей статьи построен пример леводистрибутивной квазигруппы не изотопной группе [5]. Именно доказывается, что сердцевина лупы Муфанг нечетного порядка является леводистрибутивной. *Сердцевиной* лупы Муфанг $Q(\cdot)$ называется группоид $Q(+)$, где

$$x+y=xy^{-1}x.$$

Если в лупе Муфанг $Q(\cdot)$ $xy^2x\neq yx^2y$ для некоторых $x, y\in Q$, тогда $Q(+)$ не будет праводистрибутивной. С другой стороны, построенная леводистрибутивная квазигруппа изотопна *лупе Бола* $Q(\circ)$, т. е. в $Q(\circ)$ выполняется тождество

$$x\circ[y\circ(x\circ z)]=[x\circ(y\circ x)]\circ z. \tag{2}$$

Отметим, что тождество Муфанг

$$x\circ[y\circ(x\circ z)]=[(x\circ y)\circ x]\circ z \tag{3}$$

является частным случаем тождества (2), которое называется тождеством Бола. Тождество Муфанг (3) следует из тождества Бола (2) при наличии тождества эластичности

$$x\circ(y\circ x)=(x\circ y)\circ x.$$

В общем случае задача описания луп, изотопных леводистрибутивной квазигруппе, остается открытой.

Целью настоящей статьи является исследование луп, изотопных леводистрибутивной квазигруппе, и нахождение необходимых и достаточных условий, чтобы эти лупы принадлежали тому или другому известному классу луп.

2°. Леводистрибутивная квазигруппа принадлежит одному широкому классу квазигрупп, который изучался в [6].

Дадим следующее

Определение. *Квазигруппа $Q(\cdot)$ называется F-квазигруппой, если решение уравнения*

$$ab \cdot c = a \cdot bx \tag{4}$$

зависит только от a и c. Этот класс квазигрупп был введен Мёдочем [7]. Введем обозначение:

$$x = S_a c.$$

Тогда равенство (4) принимает вид:

$$ab \cdot c = a \cdot b S_a c. \tag{5}$$

Отображение S_a, в силу определения квазигруппы, будет взаимно однозначным отображением множества Q на себя или, короче, подстановкой множества Q.

Покажем, что леводистрибутивная квазигруппа $Q(A)$ является F-квазигруппой.

В самом деле, пусть A^{-1} — правая обратная операция для A, которая определяется как решение уравнения $A(a, x) = b$, т. е. $x = A^{-1}(a, b)$. Очевидно, что отображение $S_a : z \to A^{-1}(a, z)$ будет подстановкой. Подставляя в первое из тождеств (1) вместо z элемент

$$S_x z = A^{-1}(x, z), \tag{6}$$

получаем

$$A[x, A(y, S_x z)] = A[A(x, y), A(x, S_x z)],$$

но по определению A^{-1} имеем:

$$A(x, S_x z) = A[x, A^{-1}(x, z)] = z,$$

поэтому левый дистрибутивный закон принимает вид:

$$A[x, A(y, S_x z)] = A[A(x, y), z].$$

Получили равенство (5), т. е. леводистрибутивная квазигруппа является F-квазигруппой.

Отметим, что в этом случае подстановки S_x являются автоморфизмами операции A:

$$S_x A(y, z) = A(S_x y, S_x z),$$

или, ввиду равенства (6),

$$A^{-1}[x, A(y, z)] = A[A^{-1}(x, y), A^{-1}(x, z)]. \tag{7}$$

В самом деле, так как A — обратимая операция, то должен существовать такой элемент z', что имеет место равенство:

$$A^{-1}[x, A(y, z)] = A[A^{-1}(x, y), A^{-1}(x, z')].$$

Будем иметь:

$$A\{x, A^{-1}[x, A(y, z)]\} = A\{x, A[A^{-1}(x, y), A^{-1}(x, z')]\}.$$

Пользуясь определением операции A^{-1}, а также леводистрибутивности операции A, получаем из последнего равенства:

$$A(y, z) = A\{A[x, A^{-1}(x, y)], A[x, A^{-1}(x, z')]\}$$

или

$$A(y, z) = A(y, z'),$$

откуда, ввиду обратимости операции A, следует, что $z = z'$. Равенство (7) доказано, и этим установлено, что S_x — автоморфизм операции A.

В [6] доказана следующая

Теорема 1. *Каждая F-квазигруппа $Q(B)$ с левой единицей f изотопна лупе $Q(\circ)$, в которой выполняется тождество:*

$$(x \circ y) \circ z = x \circ (y \circ \theta_{x, y} z), \tag{8}$$

где $\theta_{x, y}$ — некоторый, зависящий от x, y, автоморфизм квазигруппы $Q(B)$. Кроме того, имеет место равенство:

$$B(x, y) = x \circ (y \circ e_x^{-1}), \tag{9}$$

где e_x — правая локальная единица для x в квазигруппе $Q(B)$, т. е. $B(x, e_x) = x$, и y^{-1} — правый обратный элемент для y в лупе $Q(\circ)$, т. е. $y \circ y^{-1} = 1$, где 1 — единица лупы $Q(\circ)$.

Изотопия квазигруппы $Q(B)$ и лупы $Q(\circ)$, о которой идет речь в теореме 1, дается равенством:

$$x \circ y = R^{-1} B(x, Ry), \tag{10}$$

где $R = R_f$, f — левая единица квазигруппы $Q(B)$.

Определение. *Лупа $Q(\circ)$, в которой выполняется равенство (8) для любых $x, y, z \in Q$ и $\theta_{x, y}$ является автоморфизмом лупы $Q(\circ)$, называется специальной лупой* [8]. Теорему 1 можно уточнить. Имеет место

Теорема 2. *Любая F-квазигруппа изотопна некоторой специальной лупе.*

Докажем сначала, что лупа $Q(\circ)$, о которой идет речь в теореме 1, на самом деле является специальной, точнее, покажем, что $\theta_{x, y}$ является автоморфизмом и лупы $Q(\circ)$. Для этого покажем, что

$$\theta_{x, y} R = R \theta_{x, y}. \tag{11}$$

Имеем:

$$\theta_{x, y} Rz = \theta_{x, y} B(z, f) = B(\theta_{x, y} z, \theta_{x, y} f).$$

Так как $\theta_{x, y}$ — автоморфизм квазигруппы $Q(B)$, то $\theta_{x, y} f = f$, следовательно, получаем:

$$\theta_{x, y} Rz = R\theta_{x, y} z.$$

Далее имеем:

$$\theta_{x, y}(u \circ v) = \theta_{x, y} R^{-1} B(u, Rv) = R^{-1} B(\theta_{x, y} u, R\theta_{x, y} v) = \theta_{x, y} u \circ \theta_{x, y} v.$$

Теорема 2 следует теперь из теоремы 1 и из следующего предложения, которое доказывается в [6]:

Любая F-квазигруппа изотопна F-квазигруппе с левой единицей.

Следствие. *Любая леводистрибутивная квазигруппа Q (A) изотопна некоторой специальной лупе Q $(\circ)$.*

Изотопия дается следующей формулой:

$$x \circ y = R^{-1}A\,(x,\ L^{-1}Ry), \tag{12}$$

где $R = R_f$, $L = L_f$, f — произвольный фиксированный элемент. Равенство (12) следует из равенства

$$B\,(x,\ y) = A\,(x,\ L^{-1}y), \tag{13}$$

причем изотоп B будет F-квазигруппой с левой единицей f, ввиду равенства (10). Из равенства (12) следует

$$A\,(x,\ y) = R\,(x \circ R^{-1}Ly). \tag{14}$$

Заметим, что L является автоморфизмом квазигруппы Q (A) и лупы $Q\,(\circ)$. Первое утверждение следует из определения леводистрибутивной квазигруппы Q (A). Для доказательства второго утверждения воспользуемся очевидным равенством

$$LR = RL,$$

которое означает, что

$$A\,[A(f,\ x),\ f] = A\,[f,\ A\,(x,\ f)].$$

Последнее равенство вытекает из леводистрибутивности операции A. Тогда

$$L\,(x \circ y) = LR^{-1}A\,(x,\ L^{-1}Ry) = R^{-1}A\,(Lx, L^{-1}RLy) = Lx \circ Ly.$$

Пользуясь второй частью теоремы 1, т. е. равенством (9), можем найти другое представление квазигруппы A через лупу $(\circ)$. Сначала докажем, что $e_x^{-1} = Lx^{-1}$. Действительно, $B\,(x,\ e_x) = x$, откуда $A(x,\ L^{-1}e_x) = x$. В силу идемпотентности леводистрибутивной квазигруппы получаем $L^{-1}e_x = x$ или $e_x = Lx$, т. е. $e_x^{-1} = (Lx)^{-1} = Lx^{-1}$. Тогда из равенства (9) имеем:

$$A(x, L^{-1}y) = x \circ (y \circ Lx^{-1}),\ \text{или}\ A\,(x,\ y) = x \circ (Ly \circ Lx^{-1}),$$
$$A\,(x,\ y) = x \circ L\,(y \circ x^{-1}).$$

3°. В настоящем n^0 рассмотрим некоторые простые свойства автоморфизмов $\theta_{x,\,y}$. Выше мы видели, что $\theta_{x,\,y}$ коммутирует с R. Докажем, что $\theta_{x,\,y}$ коммутирует с L.

Действительно, из

$$\theta_{x,\,y}\,B\,(u,\ v) = B\,(\theta_{x,\,y}\,u,\ \theta_{x,\,y}\,v),\ \text{переходя к операции}\ A,\ \text{получаем:}$$

$$\theta_{x,\,y}\,A\,(u,\ L^{-1}v) = A\,(\theta_{x,\,y}\,u,\ L^{-1}\theta_{x,\,y}\,v).$$

Подставляем вместо u элемент $L^{-1}\,v$ и используем тот факт, что леводистрибутивная квазигруппа идемпотентна. Получаем:

$\theta_{x,\,y}\,L^{-1}\,v = A\,(\theta_{x,\,y}\,L^{-1}\,v,\ L^{-1}\,\theta_{x,\,y}\,v) = L^{-1}\,\theta_{x,\,y}\,v$, следовательно, $\theta_{x,\,y}\,L^{-1} = L^{-1}\,\theta_{x,\,y}$, откуда имеем

$$L\,\theta_{x,y} = \theta_{x,\,y}\,L.$$

Лемма 1. *Автоморфизмы $\theta_{x,\,y}$ представляются через левые трансляции леводистрибутивной квазигруппы Q (A) следующим образом:*

$$\theta_{x,\,y} = L_y^{-1}\,L\,L_x^{-1}\,L_{x\circ y}. \tag{15}$$

Действительно, в тождестве (8) переходим к операции A:

$$R^{-1}A\,[x \circ y,\ L^{-1}Rz] = R^{-1}A\,[x,\ L^{-1}RR^{-1}A\,(y,\ L^{-1}R\theta_{x,\,y}z)],$$
$$A\,[x \circ y,\ L^{-1}\,R\,z] = A\,[x,\ A\,(L^{-1}\,y,\ \theta_{x,\,y}\,L^{-2}\,Rz)],$$

так как $\theta_{x,\,y}$ коммутирует с L и R.

Упрощаем последнее равенство:

$$A\,(x \circ y,\ z) = A\,[x,\ A\,(L^{-1}\,y,\ \theta_{x,\,y}L^{-1}z)].$$

Переходим к левым трансляциям:

$$L_{x\circ y}z = L_x\,L_{L^{-1}y}\,\theta_{x,\,y}\,L^{-1}\,z,$$

откуда

$$\theta_{x,\,y} = L^{-1}_{L^{-1}y}\,L_x^{-1}\,L_{x\circ y}\,L. \tag{16}$$

Но

$$L^{-1}_{L^{-1}y} = L^{-1}\,L_y^{-1}\,L. \tag{17}$$

В самом деле

$$L_{L^{-1}_y}z = A\,(L^{-1}y,\ z) = A(L^{-1}\,y\,L^{-1}\,L\,z) = L^{-1}\,A\,(y,\ Lz) = L^{-1}L_y\,Lz,$$

откуда получаем (17). Равенство (16) принимает следующий вид:

$$\theta_{x,y} = L^{-1}L_y^{-1}L\,L_x^{-1}\,L_{x\circ y}\ L,$$

откуда

$$L\,\theta_{x,y}\,L^{-1} = L_y^{-1}\,L\,L_x^{-1}\,L_{x\circ y},$$

или

$$\theta_{x,y} = L_y^{-1}\,L\,L_x^{-1}L_{x\circ y}.$$

Следствие. $\theta_{x,y}$ — автоморфизм и для леводистрибутивной квазигруппы A.

Лемма 2. *Имеет место следующее соотношение для автоморфизмов $\theta_{x,\,y}$:*

$$\theta_{Lx,\ Ly} = \theta_{x,\,y}.$$

Доказательство. Используем равенство (15):

$$\theta_{Lx,Ly} = L_{Ly}^{-1}\,L\,L_{Lx}^{-1}\,L_{Lx\circ Ly} = L_{Ly}^{-1}L\,L_{Lx}^{-1}\,L_{L(x\circ y)}.$$

Из равенства (17) находим L_{Ly}:

$$L_{Ly} = L\,L_y\,L^{-1}. \tag{18}$$

Следовательно,

$$\theta_{Lx,\ Ly} = L\,L_y^{-1}\,L^{-1}\cdot L\cdot L\,L_x^{-1}\,L^{-1}\cdot L\,L_{x\circ y}\,L^{-1} = L\,L_y^{-1}\,L\,L_x^{-1}\,L_{x\circ y}\,L^{-1} =$$
$$= L\,\theta_{x,y}\,L^{-1} = \theta_{x,y}.$$

Лемма 3. *В любой специальной лупе Q ($\circ$) выполняется равенство:*

$$x \circ (x^{-1} \circ y) = \delta_x\, y, \tag{19}$$

где x^{-1} — правый обратный элемент для x, а δ_x—некоторый автоморфизм, зависящий от x.

В самом деле, положим в равенстве (8) $y = x^{-1}$, тогда $(x \circ x^{-1}) \circ z = x \circ (x^{-1} \circ \theta_{x,x^{-1}} z)$.

Заменяя z на $\theta^{-1}_{x,x^{-1}} z$, получим равенство (19), где $\delta_x = \theta^{-1}_{x,x^{-1}}$.

Следствие. *Если Q (A) — леводистрибутивная квазигруппа, то*

$$\delta_x = L^{-1} L_x L^{-1} L_{x^{-1}}. \tag{20}$$

Действительно,

$$\delta_x = \theta^{-1}_{x,x^{-1}} = (L^{-1}_{x^{-1}} L\, L^{-1}_x L_{x \circ x^{-1}})^{-1} = L^{-1}_{x \circ x^{-1}} L_x L^{-1} L_{x^{-1}}.$$

Но $x \circ x^{-1} = 1$, где 1 — единица лупы Q ($\circ$), т. е. $1 = f$ и $L_1 = L_f = L$. Тогда $\delta_x = L^{-1} L_x L^{-1} L_{x^{-1}}$.

4°. Выше было доказано (следствие теоремы 2), что каждая леводистрибутивная квазигруппа Q (A) изотопна некоторой специальной лупе Q ($\circ$). Как было показано в [6], в специальной лупе Q ($\circ$) выполняется следующее тождество:

$$\left[x \ (y \circ e_x^{-1})\right] \circ (e_x \circ z) = x \circ (y \circ z), \tag{21}$$

где e_x — правая локальная единица квазигруппы Q (B), определяемой равенством (13). Однако выше видели, что $e_x = L\,x$. Таким образом, тождество (21) принимает следующий вид:

$$\left[x \circ (y \circ L\,x^{-1})\right] \circ (L\,x \circ z) = x \circ (\,y \circ z). \tag{22}$$

В равенстве (22), заменяя z на $L\,x^{-1} \circ z$, получаем:

$$\left[\,x \circ (y \circ L\,x^{-1})\,\right] \circ \left[\,L\,x \circ (L\,x^{-1} \circ z)\,\right] = x \circ \left[y \circ (L\,x^{-1} \circ z)\,\right]. \tag{23}$$

Но $L^{-1} x = (L\,x)^{-1}$, следовательно, ввиду леммы 3, находим:

$$L\,x \circ \left(L\,x^{-1} \circ z\right) = L\,x \circ \left(L\,x^{-1} \circ z\right) = \delta_{Lx} z.$$

Однако $\delta_{Lx} = \theta^{-1}_{Lx,\,(Lx)^{-1}} = \theta^{-1}_{Lx,\ Lx^{-1}} = \theta^{-1}_{x,\,x^{-1}} = \delta_x$. Здесь мы использовали лемму 2.

Итак, равенство (23) принимает вид:

$$\left[x \circ (y \circ L x^{-1})\right] \circ \delta_x z = x \circ \left[\,y \circ (L\,x^{-1} \circ z\,)\,\right]. \tag{24}$$

Исследуем частный случай, когда $L^2 = 1$. Это означает, что имеет место:

$$A\left[\,f, A\,(f,\,y)\,\right] = y.$$

Откуда

$$L_x A\left[\,f, A\,(f,\,y)\,\right] = L_x\,y,$$

$$A\,[L_x f, A\,(L_x f, L_x\,y)] = L_x\,y,$$

$$A\,[u,\ A\,(u, v)] = v. \tag{25}$$

Последнее равенство имеет место для любых $u, v \in Q$, т. е.

$$L_u^2 = 1. \tag{26}$$

Если в (25) перейдем к лупе Q ($\circ$), получим:

$$R\,[u \circ R^{-1}\,L\,R\,(u \circ R^{-1}\,L\,v)] = v,\ R\,[u \circ (L\,u \circ R^{-1}\,v)] = v,$$

$$u \circ (L\,u \circ R^{-1}\,v) = R^{-1}\,v,\ u \circ (L\,u \circ v) = v.$$

Если $v = 1$, то имеем $u \circ L\,u = 1$, откуда

$$L\,u = u^{-1}. \tag{27}$$

Пусть в леводистрибутивной квазигруппе Q (A) выполняется тождество (25). Тогда в равенстве (22), которое выполняется в специальной лупе Q ($\circ$), изотопной леводистрибутивной квазигруппе Q (A), вместо $L\,x^{-1}$ можем писать просто x, так как $L\,x^{-1} = L\,(L\,x) = L^2\,x = x$.

Следовательно, в этом случае равенство (24) принимает вид:

$$[x \circ (y \circ x)] \circ \delta_x z = x \circ [y \circ (\,x \circ z)]. \tag{28}$$

Но из равенств (20), (27) и (19) следует:

$$\delta_x = L^{-1}\,L_x\,L^{-1}\,L_{x^{-1}} = L^{-1}\,L_x\,L^{-1}\,L_{Lx} = L^{-1}\,L_x\,L^{-1}\,L\,L_x\,L^{-1} = 1.$$

Из всего сказанного вытекает, что равенство (28) превращается в тождество Бола (2). Итак, имеет место следующая

Теорема 3. *Если в леводистрибутивной квазигруппе Q (A)*

$$L_f^2 = 1$$

для некоторого фиксированного элемента f, тогда Q (A) изотопна некоторой лупе Бола Q ($\circ$).

Используем предыдущие результаты для случая, когда леводистрибутивная квазигруппа Q (A) является сердцевиной некоторой лупы Муфанг Q ($\cdot$) [9].

$$A\,(x, y) = x\,y^{-1}\,x.$$

Докажем, что в этом случае $L_x^2 = 1$.

Отсюда, ввиду теоремы 3, сердцевина Q (A) изотопна некоторой лупе Бола.

Действительно,

$$L_x^2 z = A\,[x,\ A\,(x,\ z)] = x\,(x\,z^{-1}\ x)^{-1}\,x = x\ \ (x^{-1}\ z x^{-1})\,x = z.$$

Здесь использовали известную теорему Муфанг: любые два элемента лупы Муфанг порождают ассоциативную подлупу. Поэтому в предыдущих преобразованиях скобки расположены произвольно.

Теорема 4. *Специальная лупа Q ($\circ$) будет лупой Бола тогда и только тогда, когда*

$$\theta_{y,x}\,\theta_{\ ,\ \circ\ } = 1 \tag{29}$$

для любых $x, y \in Q$.

Действительно,

$$[x \circ (y \circ x)] \circ z = x \circ [(y \circ x) \circ \theta_{x,\,y \circ x} z].$$

$$[x \circ (y \circ x)] \circ z = x \circ [y \circ (x \circ \theta_{y,x}\,\theta_{x,\,y \circ x}\,z)]. \tag{30}$$

Сравнивая полученное равенство с равенством (2), получаем утверждение теоремы.

Для леводистрибутивной квазигруппы условие (29) принимает следующий вид:

$$P_{x \circ (y \circ x)} = P_x P_y P_x, \tag{31}$$

где $P_x = L_x L^{-1}$. Действительно, используем лемму 1:

$$\theta_{y,x} \theta_{x,\, y \circ x} = L_x^{-1} L\, L_y^{-1} L_{y \circ x} \cdot L_{y \circ x}^{-1} L\, L_x^{-1} L_{x \circ (y \circ x)} = 1,$$

откуда $L_{x \circ (y \circ x)} L^{-1} = L_x L^{-1} L_y L^{-1} L_x L^{-1}$.

Получили равенство (31).

Итак, необходимое и достаточное условие, чтобы леводистрибутивная квазигруппа $Q\ (A)$ была изотопна лупе Бола $Q\ (\cdot)$, дается равенством (31); при этом изотопия определяется равенством (12).

Можно найти и другие необходимые и достаточные условия, чтобы лупа $Q\ (\circ)$ была лупой Бола, причем эти условия выражаются в терминах самой лупы $Q\ (\circ)$. Как уже видели выше, в лупе $Q\ (\circ)$ выполняются тождества (22) и (30):

$$x \circ (y \circ z) = [x \circ (y \circ L_x^{-1})] \circ (L\, x \circ z), \tag{32}$$

$$[x \circ (y \circ x)] \circ z = x \circ [y \circ (x \circ \psi_{x,y} z)], \tag{33}$$

где $\psi_{x,y} = \theta_{y,x} \theta_{x,\, y \circ x}$.

Из (32) получаем:

$$[x \circ (y \circ x)] \circ z = \{ [x \circ (y \circ L\, x^{-1})] \circ (L\, x \circ x) \} \circ z, \tag{34}$$

$$x \circ [y \circ (x \circ \psi_{x,y} z)] = [x \circ (y \circ L\, x^{-1})] \circ [L\, x \circ (x \circ \psi_{x,y} z)].$$

Введем обозначения:

$$t = x \circ (y \circ L\, x^{-1}), \qquad \lambda\, x = L\, x \circ x. \tag{35}$$

Тогда из равенств (34) и (33) следует

$$(t \circ \lambda\, x) \circ z = t \circ [L\, x \circ (x \circ \psi_{x,y} z)]. \tag{36}$$

Если $t = 1$, т. е. $x \circ (y \circ L\, x^{-1}) = 1$, тогда

$$\lambda\, x \circ z = L\, x \circ (x \circ \varphi_x z), \tag{37}$$

так как $\psi_{x,y} = \varphi_x$ будет зависеть только от x. Из (37) находим

$$L\, x \circ (x \circ z) = \lambda\, x \circ \varphi_x^{-1} z.$$

И, следовательно, равенство (36) принимает вид:

$$(t \circ \lambda\, x) \circ z = t \circ (\lambda\, x \circ \varphi_x^{-1} \psi_{x,y} z).$$

Так как лупа $Q(\circ)$—специальная, получаем окончательно

$$\theta_{t,\, \lambda x} = \varphi_x^{-1} \psi_{x,y}. \tag{38}$$

Напоминаем, что t, y и x связаны соотношением (35). В силу теоремы 4, необходимое и достаточное условие, чтобы лупа $Q\ (\circ)$ была лупой Бола, является

$$\psi_{x,y} = 1, \tag{39}$$

а это условие, как видно из (38), эквивалентно условию

$$\theta_{t,\, \lambda x} = \varphi_x^{-1},$$

где t, x — любые элементы из Q. В частности, при $t = 1$ имеем

$$\varphi_x = 1. \tag{40}$$

Отсюда следует, что

$$\theta_{t,\, \lambda x} = 1. \tag{41}$$

Очевидно, что равенства (40) и (41) эквивалентны равенству (39). С другой стороны, равенство (41) показывает, что λx должен принадлежать среднему ядру N_m лупы $Q\ (\circ)$ или

$$L\, x \circ x \in N_m. \tag{42}$$

А из равенства (40) и (37) следует равенство

$$(L\, x \circ x) \circ z = L\, x \circ (x \circ z). \tag{43}$$

Из всего сказанного вытекает следующая

Теорема 5. *Лупа $Q\ (\circ)$, изотопная леводистрибутивной квазигруппе $Q\ (A)$, будет лупой Бола тогда и только тогда, когда выполняются соотношения* (42) *и* (43).

Замечание. Теорема 5 верна и для любой лупы $Q(\cdot)$, изотопной леводистрибутивной квазигруппе $Q\ (A)$, так как лупа $Q(\cdot)$, будучи изотопной лупе Бола $Q\ (\circ)$, сама будет лупой Бола. Это последнее утверждение в неявном виде имеется в [10].

5°. Вообще говоря, лупа Бола не является специальной. Более того, не всякая лупа Муфанг является специальной.

Действительно, $\theta_{x,\, y}$ является внутренней подстановкой лупы $Q(\circ)$. Если $Q(\circ)$ — лупа Муфанг, тогда $\theta_{x,\, y}$ должен быть псевдоавтоморфизмом [9] с компаньоном $c = x^{-1} y^{-1} xy$, т. е. должно выполняться равенство:

$$\theta_{x,\, y} (u \circ v) \circ c = \theta_{x,\, y}\, u \circ (\theta_{x,\, y}\, v \circ c).$$

Отсюда, ввиду того, что $\theta_{x,\, y}$ является автоморфизмом лупы $Q(\circ)$, получаем:

$$(\theta_{x,\, y}\, u \circ \theta_{x,\, y}\, v) \circ c = \theta_{x,\, y}\, u \circ (\theta_{x,\, y}\, v \circ c),$$

или, заменяя $\theta_{x,\, y}\, u$, $\theta_{x,\, y}\, v$ соответственно на z и t, находим

$$(z \circ t) \circ c = z \circ (t \circ c).$$

Следовательно, c принадлежит ядру лупы Муфанг, что не всегда имеет место. Однако если лупа Муфанг является коммутативной, тогда она является специальной, так как любой псевдоавтоморфизм является автоморфизмом [9]. В связи с этим заметим, что имеет место следующая

Теорема 6. *Если леводистрибутивная квазигруппа $Q(A)$ изотопна коммутативной лупе $Q(\circ)$, где изотопия дается формулой:*

$$x \circ y = R^{-1} A\, (x,\ L^{-1} R\, y), \tag{44}$$

тогда лупа $Q(\circ)$ является лупой Муфанг, а $Q(A)$ — дистрибутивной квазигруппой.

Доказательство. В тождестве

$$A[x,\ A(y,\ z)] = A[A(x,\ y),\ A(x,\ z)]$$

перейдем к операции $(\circ)$ с помощью равенства (44):

$$R[x\circ LR^{-1}R(y\circ LR^{-1}z)] = R[R(x\circ LR^{-1}y)\circ LR^{-1}R(x\circ LR^{-1}z)],$$

$$x\circ(y\circ z) = R(x\circ R^{-1}y)\circ(Lx\circ z). \qquad (45)$$

Подставляем

$$y = Rx^{-1} = RIx:$$

$$Lx\circ z = x\circ(RIx\circ z). \qquad (46)$$

Далее подставляем в (46) $z = IRIx$:

$$x = Lx\circ IRIx. \qquad (47)$$

Так как $Q(\circ)$ — коммутативна, то

$$x = IRIx\circ Lx. \qquad (48)$$

Из (44) получаем

$$A(x,\ y) = R(x\circ LR^{-1}y).$$

Подставляем в последнее равенство $y = x$:

$$x = R(x\circ LR^{-1}x),$$

откуда

$$R^{-1}x = x\circ LR^{-1}x,$$

или

$$x = Rx\circ Lx. \qquad (48)$$

Из (47) и (48) следует

$$R = IRI. \qquad (50)$$

Подставляем в (45) $z = IRIx$ и учитывая (47), находим

$$x\circ(y\circ IRIx) = R(x\circ R^{-1}y)\circ x,$$

откуда в силу коммутативности лупы $Q(\circ)$ и равенства (50), получаем

$$Rx\circ y = R(x\circ R^{-1}y),\quad R(x\circ y) = Rx\circ Ry,$$

т. е. R — автоморфизм лупы $Q(\circ)$.

Теперь покажем, что $Q(A)$ — дистрибутивная квазигруппа:

$$A[A(x,\ y),\ z] = R[R(x\circ LR^{-1}y)\circ LR^{-1}z] =$$
$$= (R^2x\circ LRy)\circ Lz = Lz\circ(R^2x\circ LRy) =$$
$$= (RLz\circ R^2x)\circ(L^2z\circ LRy) = (R^2x\circ RLz)\circ(LRy\circ L^2z) =$$
$$= R\{R(x\circ LR^{-1}z)\circ LR^{-1}R(y\circ LR^{-1}z)\} = A[A(x,\ z),\ A(y,\ z)].$$

Но дистрибутивная квазигруппа изотопна коммутативной лупе Муфанг $Q(\circ)$ [2], где изотопия имеет вид

$$xy = A(R^{-1}x,\ L^{-1}y). \qquad (51)$$

Легко заметить, что лупы $Q(\cdot)$ и $Q(\circ)$ изоморфны. Действительно, из (44) и (51) имеем:

$$A(x,\ y) = R(x\circ R^{-1}Ly),$$
$$A(x,\ y) = Rx\cdot Ly,$$
$$R(x\circ R^{-1}Ly) = Rx\cdot Ly,$$
$$R(x\circ y) = Rx\cdot Ry.$$

Теорема доказана.

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

1. G. Burstin, W. Mayer, Distributive Gruppen von endlicher Ordnung, Journ. reine und angew. math., 160 (1929), 111—130.
2. В. Д. Белоусов, О структуре дистрибутивных квазигрупп, Математический сборник, 50(92), № 3 (1960), 268—298.
3. Fischer Bernd. Distributive Quasigruppen endlicher Ordnung, Math. Z., 83, № 4 (1964), 267—303.
4. Sh. K. Stein. On a construction of Hosszu, Publ. Math. Debrecen, 6 (1959), p. 10—15.
5. В. Д. Белоусов, Об одном классе леводистрибутивных квазигрупп, Известия высших учебных заведений, Математика, 1963, № 1 (32), 16—20.
6. В. Д. Белоусов, Об одном классе квазигрупп, Ученые записки Бельцкого госпединститута им. А. Руссо, вып. 5 (1960,) 29—44.
7. D. C. Murdoch, Quasigroups which satisfy certain generalized associative laws, Amer. Journ. Math. Soc., 61 (1930), pp. 509—522.
8. В. Д. Белоусов, Лупа с ядром индекса два, Исследования по алгебре и математическому анализу АН МССР, 1965, 11—22.
9. R. H. Bruck. A survey of binary systems, Springer Verlag, Berlin-Gottingen-Heidelberg, 1958.
10. A. A. Albert. Studies in modern algebra, vol. 2, The Mathematical Association of America, 1963.

В. Д. БЕЛОУСОВ, И. А. ФЛОРЯ

ДЕСПРЕ КВАЗИГРУПУРЬ ДИСТРИБУТИВЕ ДИН СТЫНГА

Резумат

Ын артикол се студиязэ лупеле изотопиче ла квазигрупурь дистрибутиве дин стынга. Се студиязэ аутоморфизмеле $\theta_{x,\ y}$ але квазигрупулуй дистрибутив дин стынга. Се демонстрязэ, кэ орьче F-квазигруп (квазигрупул дистрибутив дин стынга есте ун каз партикулар ал F-квазигрупулуй) есте изотоп ла о анумитэ лупэ спечиалэ.

И. У. БРОНШТЕЙН

РЕКУРРЕНТНЫЕ ТОЧКИ И МИНИМАЛЬНЫЕ МНОЖЕСТВА В ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМАХ БЕЗ ЕДИНСТВЕННОСТИ

В заметке изучаются некоторые свойства рекуррентности точек в полугруппах неоднозначных отображений топологического пространства (п. н. о.) [1, 2, 3]. Доказываются теоремы, обобщающие на динамические системы без единственности известные теоремы Биркгофа ([4], глава 5, теоремы 27 и 28) и усиливающие некоторые результаты Б. М. Будака [5] и М. И. Минкевича [6]. Мы предполагаем, что читатель знаком с основными понятиями статьи [3]. Результаты настоящей заметки были анонсированы в [2].

Пусть R — равномерное отделимое пространство, S — топологическая полугруппа, (R, S, f) — п. н. о. Введем обозначения: $T_p = f(p, S)$ $(p \in R)$; D — группа действительных чисел; D^+ — полугруппа неотрицательных действительных чисел; U — фильтр окружений равномерной структуры пространства R.

Определение. Скажем, что точка $p \in R$ удовлетворяет условию $R_i (i = 1, 2, \ldots, 5)$, если для любого $\alpha \in U$ найдется бикомпактное множество $K \subseteq S$ такое, что выполнено условие $K_i (i = 1, 2, \ldots, 5)$:

K_1. $T_p \subseteq \alpha [f(p, sK)]$ для любого $s \in S$.

K_2. $T_p \subseteq \alpha [f(q, K)]$ для любой точки $q \in T_p$.

K_3. Для произвольных элементов s_1 и s_2 из S найдется элемент $s_3 \in s_2 K$ такой, что $f(p, s_1) \subseteq \alpha [f(p, s_3)]$.

K_4. Для произвольных элементов s_1 и s_2 из S найдется элемент $s_3 \in s_2 K$ такой, что $f(p, s_1) \subseteq \alpha [f(p, s_3)]$ и $f(p, s_3) \subseteq \alpha [f(p, s_1)]$.

K_5. Для любого элемента $s \in S$ и любой точки $q \in T_p$ найдется элемент $s' \in K$ такой, что $f(p, s) \subseteq \alpha [f(q, s')]$.

Каждое из свойств $R_i (i = 1, 2, \ldots, 5)$ точки $p \in R$ в случае обычной динамической системы [4] ($S = D$, R — метрическое пространство) равносильно рекуррентности движения, выходящего из точки p.

Свойства R_3 и R_4 (в случае, когда пространство R — метрическое, а $S = D^+$) были введены Б. М. Будаком [5] под названием $(+)$-рекуррентности и сильной $(+)$-рекуррентности.

Теорема 1.
$$\begin{array}{ccccc} R_4 & \to & R_3 & \to & R_1 \\ & & \uparrow & & \uparrow \\ & & R_5 & \to & R_2 \end{array}$$
(стрелка означает импликацию).

Теорема 2. *Если точка p удовлетворяет условию R_1, а $\overline{T}_p$ — полное пространство, то $\overline{T}_p$ — бикомпакт.*

Доказательство. Пусть α — произвольное окружение равномерной структуры пространства R и $\beta^3 \subseteq \alpha$, $\beta = \beta^{-1}$. Найдется бикомпактное множество $K \subseteq S$ такое, что $T_p \subseteq \beta [f(p, sK)]$ для любого $s \in S$. В частности, при $s = e$, $T_p \subseteq \beta [f(p, K)]$, поэтому $\overline{T}_p \subseteq \beta^2 [f(p, K)]$. Так как множество K бикомпактно, то, в силу [3], множество $f(p, K)$ тоже бикомпактно. Поэтому найдется конечное покрытие $\beta(p_1), \ldots, \beta(p_n)$ этого множества, то есть $f(p, K) \subseteq \beta \left[\bigcup\limits_{k=1}^{n} p_k \right]$. Тогда

$$\overline{T}_p \subseteq \beta^3 \left[\bigcup_{k=1}^{n} p_k \right] \subseteq \alpha \left[\bigcup_{k=1}^{n} p_k \right],$$

а, в силу полноты пространства $\overline{T}_p$, отсюда следует, что $\overline{T}_p$ — бикомпакт.

Теорема 3. *Если Σ — бикомпактное минимальное полуинвариантное множество, все точки которого — точки непрерывности, то любая точка $p \in \Sigma$ удовлетворяет условию R_2.*

Доказательство. Пусть $p \in \Sigma$, α — произвольное окружение равномерной структуры бикомпакта Σ, $\{U_1, \ldots, U_n\}$ — открытое покрытие множества Σ, определяющее окружение α [7]. Легко показать, что $\overline{T}_p = \Sigma$, поэтому найдутся элементы $s_1(p), \ldots, s_n(p)$ из S такие, что

$$f[p, s_i(p)] \cap U_i \neq \Lambda \quad (i = 1, \ldots, n).$$

Так как все точки из Σ являются точками непрерывности, то найдется окрестность $V(p)$ такая, что $f[q, s_i(p)] \cap U_i \neq \Lambda$ $(i = 1, \ldots, n)$ для любой точки $q \in V(p)$. Из покрытия $\{V(p)\}$ множества Σ выберем конечное покрытие $\{V(p_1), \ldots, V(p_m)\}$. Множество $K = \bigcup\limits_{k=1}^{m} \bigcup\limits_{i=1}^{n} s_i(p_k)$ является искомым.

Замечание. Мы доказали, что для $\alpha \in U$ можно найти конечное множество $K \subseteq S$ такое, что для любой точки $p \in \Sigma$ и любой точки $q \in \Sigma$ выполняется условие $T_p \subseteq \alpha [f(q, K)]$.

Можно построить пример бикомпактного инвариантного транзитивного множества, ни одна точка которого не удовлетворяет условию R_2.

Пример 1. На торе $K^2 = \{(\varphi, \theta)\}$ $(0 \leqslant \alpha, \theta < 2\pi)$ зададим многозначную вектор-функцию (Φ, Θ) такую, что все векторы из (Φ, Θ) параллельны вектору $(1, \alpha)$, где α — иррациональное число, а длины их определяются многозначной функцией $F(\varphi, \theta)$, где

$$F(\varphi, \theta) = \begin{cases} \{\xi\}, \ \sin^2 \frac{\varphi}{2} + \sin^2 \frac{\theta}{2} \leqslant \xi \leqslant \sin^2 \frac{1}{2\pi} + \sin^2 \frac{\alpha}{2\pi}, & \text{если} \\ \theta = \alpha\varphi, \ 0 \leqslant \varphi \leqslant \frac{1}{\pi} \text{ и } 2\pi - \frac{1}{\pi} \leqslant \varphi < 2\pi & \\ \sin^2 \frac{\varphi}{2} + \sin^2 \frac{\theta}{2} \text{ для остальных точек тора.} & \end{cases}$$

Мы задали, таким образом, уравнение в контингенциях [8], которое определяет п. н. о. (K^2, D^+, f), для которой тор K^2 представляет транзитивное бикомпактное минимальное полуинвариантное множество.

Ни одна точка тора не удовлетворяет условию R_2, и лишь одна точка (0,0) удовлетворяет условию R_1. Значит, условие R_2 сильнее условия R_1.

Существуют точки, удовлетворяющие условию R_3, но не удовлетворяющие условию R_2.

Пример 2. Пусть R — кольцо на плоскости, ограниченное окружностями $r=1$ и $r=2$, где r — радиус-вектор. В кольце R построим систему спиралей, сходящих при вращении радиуса-вектора в положительном направлении с окружности $r=1$ и спиралевидно приближающихся к окружности $r=2$. Если точка p лежит на окружности $r=a$, $1 \leqslant a < 2$, то определим $f(p, t)$ $(t \geqslant 0)$ как отрезок радиуса-вектора (образующего угол t с радиусом-вектором точки p), заключенный между точками пересечения его с окружностью $r=a$ и спиралью, проходящей через точку p. На окружности $r=2$ зададим равномерное движение в положительном направлении. В определенной таким образом п. н. о. (R, D^+, f) все точки, лежащие на окружности $r=1$, удовлетворяют условию R_3, но не удовлетворяют условию R_2. При этом все точки кольца R — точки непрерывности.

Пример Е. А. Барбашина ([9], стр. 130) показывает, что условие R_4 сильнее R_3 (даже если все точки пространства — точки непрерывности и $S = D^+$).

Покажем, что R_3 сильнее R_1.

Пример 3. На плоскости зададим систему уравнений

$$\frac{dx}{dt} = 1; \qquad \frac{dy}{dt} = \sqrt{2}. \tag{1}$$

В квадрате $K = [0 \leqslant x,\ y \leqslant 2\pi]$ сделаем прямолинейный «разрез» от точки $A(1; \sqrt{2})$ до точки $B(1{,}1;\ 1{,}1\sqrt{2})$, то есть будем считать отрезок AB двойным. «Раздвинем» разрез так, чтобы квадрат K с разрезом отобразился на квадрат с вырезанным открытым кругом C, построенным на отрезке AB как на диаметре. Это можно сделать так, чтобы отображение квадрата K с исключенным отрезком AB на квадрат с вырезанным замкнутым кругом $\overline{C}$ было равномерным и чтобы отображение на сторонах квадрата было тождественным.

Отождествляя у квадрата с вырезанным открытым кругом противоположные стороны, получим тор с вырезом. Система уравнений (1) индуцирует на полученном торе с вырезом п. н. о. (R, D^+, f).

Точка A удовлетворяет условию R_1 (и даже R_2), но не удовлетворяет условию R_3, так как $f(A, t)$ при $t = 0{,}05$ состоит из двух точек, а при достаточно больших $t > 0$ множество $f(A, t)$ состоит из одной точки. Заметим, что в этом примере не все точки пространства являются точками непрерывности.

Теорема 4. *Если точка p удовлетворяет условию R_2 и пространство R — полное, то $\overline{T}_p$ — бикомпактное транзитивное множество.*

Доказательство. Из теоремы 1 и теоремы 2 следует, что $\overline{T}_p$ — бикомпактное множество. Докажем, что множество $\overline{T}_p$ транзитивно, то есть что для любой точки $q \in \overline{T}_p$ выполняется $\overline{T}_p \subseteq \overline{T}_q$. Допустим противное: найдется точка $q \in \overline{T}_p$ такая, что $A \equiv \overline{T}_p \cap \overline{T}_q$ — собственное подмножество множества $\overline{T}_p$. Пусть $r \in \overline{T}_p \setminus A$. Так как R — регулярное пространство, то найдется такое симметрическое окружение $\alpha \in U$, что $\alpha(r) \cap \alpha(A) = \Lambda$. Найдем $\beta \in U$ из условия $\beta^2 \subset \alpha$, $\beta = \beta^{-1}$. Для окружения β найдется, в силу R_2, такое бикомпактное множество $K \subseteq S$, что $T_p \subseteq \beta\,[f(x, K)]$ для любой точки $x \in T_p$. Так как $r \in \overline{T}_p$, то найдется точка $a \in T_p \cap \beta(r)$. Поэтому

$$r \in \beta(a) \subseteq \beta^2\,[f(x, K)] \subset \alpha\,[f(x, K)]$$

для любой точки $x \in T_p$.

Для точки q, окружения $\alpha \in U$ и бикомпактного множества $K \subseteq S$ найдется, в силу [3], такое окружение γ, что $f(y, K) \subseteq \alpha\,[f(q, K)]$ для любой точки $y \in \gamma(q)$.

Так как $q \in \overline{T}_p$, то найдется точка $y_0 \in \gamma(q) \cap T_p$. Тогда

$$f(y_0, K) \subseteq \alpha\,[f(q, K)] \subseteq \alpha(A)$$

и поэтому $f(y_0, K) \cap \alpha(r) = \Lambda$, а это противоречит тому, что $r \in \alpha\,[f(x, K)]$ для любой точки $x \in T_p$. Теорема доказана.

Замечание. Пример 2 показывает, что утверждение теоремы 4 не имеет места, если R_2 заменить на R_3 (даже если все точки из $\overline{T}_p$ — точки непрерывности).

Рассмотрим теперь свойство R' точки p, которое в случае обычной динамической системы [4] $(S = D)$ означает почти рекуррентность точки p [10].

R'. Для любой окрестности $U(p)$ найдется бикомпактное множество $K \subseteq S$ такое, что $U(p) \cap f(q, K) \neq \Lambda$ для любой точки $q \in T_p$.

Ясно, что из R_2 следует R'. Покажем, что R_2 сильнее, чем R' (даже если пространство бикомпактно).

Пример 4. В кольце $R = \{1 < x^2 + y^2 \leqslant 4\}$ плоскости XY рассмотрим семейство спиралей L_θ:

$$x = (1 + e^{\theta - \varphi}) \cos\varphi; \quad y = (1 + e^{\theta - \varphi}) \sin\varphi \quad (\theta \leqslant \varphi < +\infty;\quad 0 \leqslant \theta < 2\pi),$$

где φ — полярный угол.

П. н. о. (R, D^+, f) определим так. Если точка p лежит на окружности $r = 2$, то $f(p, t)$ — отрезок радиуса-вектора, образующего угол t с радиусом-вектором точки p, заключенный между окружностью $r = 2$ и спиралью L_θ, проходящей через точку p. Если же точка p лежит между окружностями $r = 1$ и $r = 2$, то $f(p, t)$ определим как точку, лежащую на пересечении спирали и радиуса-вектора, образующего угол t с радиусом-вектором точки p.

Отождествим теперь окружности $r = 1$ и $r = 2$. Полученный тор является минимальным полуинвариантным нетранзитивным множеством. Точки, лежащие на окружности $r = 2$, удовлетворяют условию R', но не удовлетворяют условию R_2.

Построенный пример показывает, что в теореме 4 условие R_2 нельзя заменить условием R'. Однако имеет место следующая теорема, обобщающая одну теорему М. В. Бебутова [10].

Теорема 5. *Если точка p удовлетворяет условию R' и $\overline{T}_p$ — полуинвариантное множество, то $\overline{T}_p$ — минимальное полуинвариантное множество.*

Доказательство. Допустим противное: найдется собственное замкнутое полуинвариантное множество $A \subset \overline{T}_p$. Точка p не принадлежит A, ибо если $p \in A$, то $T_p \subseteq A$ и $\overline{T}_p \subseteq A$, что противоречит допущению. Найдется симметрическое окружение $\alpha \in U$ такое, что $\alpha(p) \cap \alpha(A) = \Lambda$.

Для окружения α найдется такое бикомпактное множество K, что $p\in\alpha[f(x,K)]$ для любой точки $x\in\overline{T}_p$. Выберем точку $q\in A$. Для точки q, окружения α и бикомпактного множества $K\subseteq S$ найдем такое окружение $\beta\in U$, что из $r\in\beta(q)$ следует $f[r,K)\subseteq\alpha[f(q,K)]\subseteq\alpha(A)$. Так как $q\in\overline{T}_p$, то найдется точка $y_0\in\beta(q)\cap T_p$. Тогда $f(y_0,K)\subseteq\alpha(A)$, поэтому $\alpha(p)\cap f(y_0,K)=\Lambda$, а это противоречит выбору множества K.

Теорема доказана.

Следствие 1. Если точка p удовлетворяет условию R' и все точки из $\overline{T}_p$ — точки непрерывности, то $\overline{T}_p$ — транзитивное минимальное полуинвариантное множество.

Следствие 2. В бикомпактных пространствах, все точки которых — точки непрерывности, условия R_2 и R' эквивалентны.

Из теорем 3 и 4 вытекает следующая

Теорема 6. *Пусть R — полное пространство, все точки которого — точки непрерывности. Для того, чтобы множество $\overline{T}_q\subseteq R$ было бикомпактным минимальным полуинвариантным, необходимо и достаточно, чтобы все точки $p\in\overline{T}_q$ удовлетворяли условию R_2.*

Таким образом, теоремы 3 и 4 являются обобщением известных теорем Биркгофа [4].

Теорема 7. *Если точка p удовлетворяет условию R_2, а $\overline{T}_p$ — полное пространство, то точка p удовлетворяет условию R_5.*

Доказательство. Пусть точка p удовлетворяет условию R_2. Предварительно докажем, что для любой точки $q\in\overline{T}_p$, окружения $\alpha\in U$ и произвольного элемента $s_0\in S$ найдется элемент $\bar{s}\in S$ такой, что $f(p,s_0)\subseteq\alpha[f(q,\bar{s})]$. Так как p — точка непрерывности, то для окружения α и элемента s_0 найдется такое симметрическое окружение δ, что $f(p,s_0)\subseteq\alpha[f(x,s_0)]$ для всех $x\in\delta(p)$. Так как точка p удовлетворяет условию R_2, то найдется элемент $s'\in S$ такой, что $f(q,s')\cap\delta(p)\neq\Lambda$. Пусть $a\in f(q,s')\cap\delta(p)$. Тогда $f(p,s_0)\subseteq\alpha[f(a,s_0)]$. Но

$$f(a,s_0)\subseteq f[f(q,s'),s_0]=f(q,s's_0),$$

и поэтому $f(p,s_0)\subseteq\alpha[f(q,\bar{s})]$, где $\bar{s}=s's_0$.

В силу теорем 1 и 2 множество $\Sigma=\overline{T}_p$ является бикомпактом. Пусть $B(\Sigma)$ — пространство всех бикомпактных подмножеств из Σ, наделенное финитной [11] топологией. Известно [11], что $B(\Sigma)$ — бикомпакт. Обозначим через $\overline{C}$ замыкание в $B(\Sigma)$ множества всех сечений $f(p,s)$ $(s\in S)$. Множество $\overline{C}$ является бикомпактом.

Пусть β — произвольное окружение равномерной структуры бикомпакта Σ, и $\alpha^3\subset\beta$. Окружению α соответствует некоторое окружение V равномерной структуры пространства $\overline{C}$. Пусть $\{V_1,\ldots,V_m\}$ — покрытие бикомпакта $\overline{C}$, определяющее окружение V. Так как множество сечений $f(p,s)$ $(s\in S)$ всюду плотно в $\overline{C}$, то найдутся элементы $s_i\in S$ такие, что $\widetilde{f(p,s_i)}\in V_i$ $(i=1,\ldots,n)$. (Если A — бикомпактное множество из Σ, то через $\widetilde{A}$ мы обозначаем соответствующий элемент в множестве $B(\Sigma)$.)

Согласно доказанному выше, для произвольной точки $q\in T_p$ найдутся элементы $a_1(q),\ldots,a_m(q)$ из S такие, что

$$f(p,s_i)\subseteq\alpha[f(q,a_i(q))]\quad(i=1,\ldots m).\tag{2}$$

Для окружения α найдем окрестность $W(q)$ такую, что из $x\in W(q)$ следует

$$f(x,a_i(q))\subseteq\alpha[f(q,a_i(q))],\qquad f(q,a_i(q))\subseteq\alpha[f(x,a_i(q))]\tag{3}$$

при $i=1,\ldots,m$.

Из покрытия $\{W(q)\}$ множества $\overline{T}_p$ выберем конечное покрытие $\{W(q_1),\ldots,W(q_n)\}$.

Пусть $K=\bigcup_{k=1}^{n}\bigcup_{i=1}^{m}a_i(q_k)$. Для любой точки $x\in\overline{T}_p$ найдется номер k $(1\leqslant k\leqslant n)$ такой, что $x\in W(q_k)$. Тогда в силу (2) и (3) получаем, что

$$f(p,s_i)\subseteq\alpha[f(q_k,a_i(q_k))]\subseteq\alpha^2[f(x,a_i(q_k))]\quad(i=1,\ldots,m).$$

Пусть теперь $f(p,s)$ — произвольное сечение воронки точки p. Найдется номер i такой, что $\widetilde{f(p,s)}\in V_i$. Тогда $(\widetilde{f(p,s)},\widetilde{f(p,s_i)})\in V$, то есть

$$f(p,s)\subseteq\alpha[f(p,s_i)]\ \text{и}\ f(p,s_i)\subseteq\alpha[f(p,s)].$$

Отсюда следует, что

$$f(p,s)\subseteq\alpha^3[f(x,a_i(q_k))]\subseteq\beta[f(x,a_i(q_k))].$$

Таким образом, для окружения $\beta\in U$ мы нашли конечное множество K такое, что для любого $s\in S$ и любой точки $x\in\overline{T}_p$ существует элемент $a_i(q_k)\in K$, для которого $f(p,s)\subseteq\beta[f(x,a_i(q_k))]$. Поэтому точка p удовлетворяет условию R_5.

Следствие. Если Σ — бикомпактное минимальное полуинвариантное множество, все точки которого — точки непрерывности, то любая точка $p\in\Sigma$ удовлетворяет условию R_5 и, следовательно, условию R_3.

Теорема 8. Из R_4 следует R'.

Доказательство. Пусть точка p удовлетворяет условию R_4 и $U(p)$ — произвольная окрестность точки p. Найдем окружение $\alpha\in U$ такое, что $\alpha(p)\subset U(p)$. Из R_4 следует, что для α найдется бикомпактное множество $K\subseteq S$ такое, что для произвольного элемента $s\in S$ существует такой элемент $s'\in sK$, что $f(p,s')\subset\alpha(p)\subset U(p)$. Пусть $q\in T_p$. Тогда $q\in f(p,s)$ для некоторого $s\in S$. Элемент $s'\in sK$ представим в виде sk, где $k\in K$. Тогда $f(q,k)\subseteq f[f(p,s),k]=f(p,sk)=f(p,s')\subseteq U(p)$ и, тем более, $f(q,K)\cap U(p)\neq\Lambda$. Теорема доказана.

Следствие. Если точка p удовлетворяет условию R_4, $\overline{T}_p$ — полное пространство, все точки которого — точки непрерывности, то $\overline{T}_p$ — бикомпактное минимальное полуинвариантное множество.

Теорема 9. *Если точка p удовлетворяет условию R_1 и является точкой непрерывности, а $\overline{T}_p$ — полное пространство, то точка p удовлетворяет условию R_3.*

Доказательство. Пусть a и b — произвольные элементы из S, α — окружение равномерной структуры пространства R. Так как

p — точка непрерывности, то для элемента a найдется симметрическое окружение δ такое, что $f(p, a) \subseteq \alpha [f(x, a)]$ при всех $x \in \delta(p)$. Так как p удовлетворяет условию R_1, то для окружения δ найдется бикомпактное множество K (зависящее от δ и, следовательно, от $a \in S$) такое, что $T_p \subseteq \delta [f(p, sK)]$ для любого элемента $s \in S$. В частности, для $b \in S$ найдется элемент $k \in K$ такой, что $\delta(p) \cap f(p, bk) \neq \Lambda$. Пусть $y \in \delta(p) \cap f(p, bk)$.

Тогда
$$f(p, a) \subseteq \alpha [f(y, a)] \subseteq \alpha [f(f(p, bk), a)] = \alpha [f(p, bka)].$$

Так как точка p удовлетворяет условию R_1, то $\Sigma = \overline{T}_p$ — бикомпакт. Пусть β — произвольное окружение равномерной структуры бикомпакта Σ и $\alpha^2 \subset \beta$. Пусть $\overline{C}$ имеет тот же смысл, что и в теореме 7, а V — окружение равномерной структуры в $\overline{C}$, соответствующее α.

Окружение V определяется конечным покрытием $\{V_1, \ldots, V_n\}$ множества $\overline{C}$. Найдутся элементы $s_i \in S$ такие, что $\widetilde{f(p, s_i)} \in V_i$ $(i = 1, \ldots, n)$, а для s_i найдутся бикомпактные множества K_i такие, что если $b \in S$, то существует элемент $k_i \in K_i$, для которого
$$f(p, s_i) \subseteq \alpha [f(p, bk_is_i)] \quad (i = 1, \ldots n). \tag{4}$$

Покажем, что бикомпактное множество $K = \bigcup_{i=1}^{n} K_i s_i$ является искомым. Пусть $s' \in S$, $s'' \in S$. Найдется номер i такой, что $\widetilde{f(p, s')} \in V_i$. Тогда $(\widetilde{f(p, s')}, \widetilde{f(p, s_i)}) \in V$. Отсюда следует, что $f(p, s') \subseteq \alpha [f(p, s_i)]$. В силу (4) найдется элемент $k_i \in K_i$ такой, что
$$f(p, s_i) \subseteq \alpha [f(p, s'' k_i s_i)].$$
Тогда
$$f(p, s') \subseteq \alpha [f(p, s_i)] \subseteq \alpha^2 [f(p, s'' k_i s_i)] \subset \beta [f(p, s_3)],$$
где $s_3 = s'' k_i s_i \in s'' K$. Теорема доказана.

Из теоремы 1 и указанных выше примеров следует, что условия $R_4 (R_5, R_3, R_2)$ сильнее, соответственно, условий $R_3 (R_3, R_2, R_1, R_1)$. Примеры 2 и 3 показывают, что условия R_2 и R_3 независимы.

Рассмотрим отдельно случай, когда пространство R полное и все его точки являются точками непрерывности.

Из теорем 1 и 7 следует, что в этом случае условия R_2 и R_5 эквивалентны. Аналогично, из теорем 1 и 9 следует, что условия R_1 и R_3 эквивалентны. Из теоремы 8, следствия 2 из теоремы 5 и теоремы 1 следует, что R_4 влечет R_2. Отсюда и из упомянутого выше примера Е. А. Барбашина [9] следует, что R_4 сильнее R_2. Из теоремы 1 и примера 2 следует, что R_2 (или, что то же, R_5) сильнее R_3. Таким образом, в рассматриваемом случае $R_4 \to (R_2 \approx R_5) \to (R_3 \approx R_1)$.

Настоящая работа выполнена под руководством К. С. Сибирского, которому автор приносит искреннюю благодарность за постоянное внимание к работе.

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

1. И. У. Бронштейн, ДАН СССР, 144, № 5 (1962), 954—957.
2. И. У. Бронштейн, ДАН СССР, 151, № 1 (1963), 15—18.
3. И. У. Бронштейн, Изв. АН МССР, № 1 (1963), 3—17.
4. В. В. Немыцкий, В. В. Степанов, Качественная теория дифференциальных уравнений, М.—Л., 1949.
5. Б. М. Будак, Вестн. Моск. унив., № 8 (1947).
6. М. И. Минкевич, Уч. зап. Моск. унив., вып. 135, Математика, 2 (1948), 134—151.
7. Н. Бурбаки, Общая топология (основные структуры), М., ГИФМЛ, 1958.
8. Е. А. Барбашин, Ю. И. Алимов, Изв. ВУЗов, Математика, № 1 (26), (1962), 3—13.
9. Е. А. Барбашин, Уч. зап. Моск. унив., вып. 135, Математика, 2 (1948), 110—133.
10. М. В. Бебутов, Бюлл. Моск. унив., Математика, II, вып. 5 (1941), 1—52.
11. E. Michael, Trans. Amer. Math. Soc., 71 (1951), 152—183.

И. У. БРОНШТЕЙН

ПУНКТЕ РЕКУРЕНТЕ ШИ МУЛЦИМЬ МИНИМАЛЕ ЫН СИСТЕМЕЛЕ ДИНАМИЧЕ ФЭРЭ УНИЧИТАТЕ

Резумат

Ын артикол се студиязэ унеле проприетэць де рекуренцэ але пунктелор ын системеле динамиче фэрэ уничитате [1, 2, 3]. Се женерализязэ теоремеле Биркгоф ([4], капитолул 5, теоремеле 27 ши 28) ши унеле резултате обцинуте де Б. М. Будак [5] ши М. И. Минкевич [6]. Резултателе принчипале але артиколулуй де фацэ ау фост анунцате ын [2].

М. С. БУДЯНУ

ОДНА ТЕОРЕМА О ФАКТОРИЗАЦИИ ОПЕРАТОР-ФУНКЦИЙ

В статье [1] И. Ц. Гохберг поставил задачу о факторизации оператор-функций и решил ее для некоторых классов оператор-функций. Полученные в [1] теоремы обобщают на оператор-функции теоремы о факторизации матриц-функций, установленные в [2] и [3].

В настоящей статье известная теорема, установленная И. Племели, Н. И. Мусхелишвили, Н. П. Векуа (см. [4], [5]) о факторизации матриц-функций, с элементами, удовлетворяющими условию Гельдера, обобщается для случая оператор-функций.

§ 1. Определения. Формулировка основной теоремы. 1. Обозначим через Γ некоторый простой гладкий замкнутый ориентированный контур, разбивающий комплексную плоскость z на две части: внутреннюю D_+ и внешнюю D_-. Через $G_\pm$ обозначим объединение $D_\pm \cup \Gamma$.

Пусть B — бесконечномерное банахово пространство, R — кольцо всех линейных ограниченных операторов, действующих в B и $A(\varsigma)$ — непрерывная в смысле равномерной операторной топологии оператор-функция, определенная на Γ и принимающая значения из R.

Правой стандартной факторизацией непрерывной и обратимой оператор-функции $A(\varsigma)$ $(\varsigma \in \Gamma)$ называется (см. [1]) представление $A(\varsigma)$ в виде

$$A(\varsigma) = A_-(\varsigma)\, D(\varsigma)\, A_+(\varsigma), \ (\varsigma \in \Gamma), \tag{1.1}$$

где оператор-функция $D(\varsigma)$ $(\varsigma \in \Gamma)$ определяется равенством

$$D(\varsigma) = \sum_{j=1}^{n} \left(\frac{\varsigma - \lambda^+}{\varsigma - \lambda^-}\right)^{\varkappa_j} P_j, \ (\varsigma \in \Gamma), \ (\lambda^\pm \in D_\pm),$$

в котором P_j $(j = 1, 2, \ldots, n)$ обозначают взаимно ортогональные проекторы из кольца R такие, что $\sum P_j = I$; $\varkappa_1 > \varkappa_2 > \ldots > \varkappa_n$ — некоторые целые числа, а оператор-функции $A_\pm(\varsigma)$ допускают продолжения, голоморфные в области $D_\pm$ и непрерывные в $G_\pm$, причем оператор-функции $A_\pm(\varsigma)$ обратимы в $G_\pm$.

Если в равенстве (1.1) поменять множители $A_-(\varsigma)$ и $A_+(\varsigma)$ местами, то получающаяся при этом факторизация оператор-функции $A(\varsigma)$ $(\varsigma \in \Gamma)$ называется *левой стандартной факторизацией*. Приведем еще некоторые определения, заимствованные из [1].

Оператор-функция $D(\varsigma)$ $(\varsigma \in \Gamma)$ в правой и левой стандартной факторизациях называется *диагональным множителем*.

Стандартная факторизация (1.1), в которой диагональный множитель $D(\varsigma) = I$, называется *регулярной факторизацией*.

Факторизация (1.1) оператор-функции $A(\varsigma)$ $(\varsigma \in \Gamma)$ называется *правильной*, если среди всех проекторов P_j $(j = 1, 2, \ldots, n)$ только один бесконечномерен.

Если оператор-функция $A(\varsigma)$ допускает правильную правую (левую) стандартную факторизацию, то числа $\varkappa_1 > \varkappa_2 > \ldots > \varkappa_n$ и $m_j = \dim P_j B$ $(j = 1, 2, \ldots, n)$ однозначно определяются самой оператор-функцией $A(\varsigma)$ (см. [1]).

В зависимости от типа факторизации, числа $\varkappa_1 > \varkappa_2 > \ldots > \varkappa_n$ называются *правыми* или *левыми индексами* оператор-функции $A(\varsigma)$, а m_j $(j = 1, 2, \ldots, n)$ — их *кратностями*.

Обозначим через E двусторонний идеал нормированного кольца R, состоящий из всех вполне непрерывных операторов.

Правильная факторизация оператор-функции $A(\varsigma) = I - T(\varsigma)$ $(\varsigma \in \Gamma)$; где оператор-функция $T(\varsigma)$ принимает значения из E, называется вполне правильной, если на Γ все множители в правой части равенства (1.1) отличаются от единичного оператора вполне непрерывным слагаемым. В этом случае индекс бесконечной кратности равен нулю.

2. Обозначим через H_α нормированное кольцо всех функций, определенных на Γ и удовлетворяющих условию Гельдера (см. [4] или [6]) с показателем α $(0 < \alpha < 1)$. Норма в H_α определяется равенством

$$\|\varphi\|_{H_\alpha} = \max_{\varsigma \in \Gamma} |\varphi(\varsigma)| + \sup_{\varsigma_1, \varsigma_2 \in \Gamma} \frac{|\varphi(\varsigma_1) - \varphi(\varsigma_2)|}{|\varsigma_1 - \varsigma_2|^\alpha}.$$

Через H_α^+ (H_α^-) обозначим подкольцо нормированного кольца H_α, состоящее из всех функций, допускающих голоморфное продолжение в область D_+ (D_-).

Пусть F — произвольное нормированное кольцо с нормой $\|\cdot\|_F$, обладающее следующими свойствами (см. [1]):

а) F является алгебраическим подкольцом кольца E;

б) для любого оператора U, принадлежащего F, имеет место соотношение $\|U\| \leqslant \|U\|_F$;

в) множество K всех конечномерных линейных операторов принадлежит F и образует в нем по норме F плотное множество;

г) если оператор $I - U$ $(U \in F)$ обратим, то оператор $(I - U)^{-1} - I \in F$.

Присоединим к кольцу F единицу I (I — единичный оператор) и сохраним для полученного кольца прежнее обозначение.

Рассмотрим множество оператор-функций вида

$$A(\varsigma) = \sum_{j=1}^{n} \varphi_j(\varsigma)\, T_j, \ (\varsigma \in \Gamma), \tag{1.2}$$

где

$$\varphi_j(\varsigma) \in H_\alpha, \ T_j \in F \ (j = 1, 2, \ldots, n).$$

Образуем нормированное кольцо оператор-функций $H_\alpha(F)$ (см. [7]), являющееся замыканием множества оператор-функций вида (1.2) по норме

$$\|A\|_{H_\alpha(F)} = \max_{\varsigma \in \Gamma} \|A(\varsigma)\|_F + \sup_{\varsigma_1, \varsigma_2 \in \Gamma} \frac{\|A(\varsigma_1) - A(\varsigma_2)\|_F}{|\varsigma_1 - \varsigma_2|^\alpha}. \tag{1.3}$$

Без труда можно показать, что все элементы из $H_\alpha(F)$ являются оператор-функциями со значениями из F, удовлетворяющими на Γ условию Гельдера с показателем α (по норме F).

Если в определении нормированного кольца $H_\alpha(F)$ кольцо H_α заменить на кольцо $H_\alpha^\pm$, то получим определение нормированного кольца $H_\alpha^\pm(F)$. Заметим, что оператор-функции из кольца $H_\alpha^\pm(F)$ допускают голоморфные продолжения в область $D_\pm$.

Основной в этой статье является следующая

Теорема 1.1. *Пусть оператор-функция $T(\varsigma)$ $(\varsigma\in\Gamma)$ принадлежит нормированному кольцу $H_\alpha(F)$. Если при любом ς $(\varsigma\in\Gamma)$ оператор $I-T(\varsigma)$ обратим, то оператор-функция $I-T(\varsigma)$ допускает вполне правильную факторизацию*

$$I-T(\varsigma)=(I+T_-(\varsigma))\,D(\varsigma)\,(I+T_+(\varsigma))\quad(\varsigma\in\Gamma),$$

в которой

$$T_\pm(\varsigma)\ \text{и}\ (I+T_\pm(\varsigma))^{-1}-I\in H_\alpha^\pm(F).$$

Аналогичная теорема имеет место и для левой факторизации.

§ 2. Сингулярные операторы. 1. Понятие главного значения сингулярного интеграла (см. [4] или [6]) в пространстве H_α переносится на случай пространства $H_\alpha(F)$.

Ниже устанавливаются некоторые свойства оператора сингулярного интегрирования в пространстве $H_\alpha(F)$, аналогичные свойствам сингулярного оператора в пространстве H_α.

Теорема 2.1. *Оператор сингулярного интегрирования*

$$(SU)(z)=\frac{1}{\pi i}\int_\Gamma\frac{U(\varsigma)}{\varsigma-z}\,d\varsigma\quad(z\in\Gamma)\tag{2.1}$$

в смысле главного значения в пространстве $H_\alpha(F)$ является линейным ограниченным оператором.

Легко видеть, что оператор S отображает всякую оператор-функцию вида (1.2) в оператор-функцию такого же вида. Ограниченность оператора (2.1) в пространстве $H_\alpha(F)$ доказывается, в основном, как и ограниченность аналогичного оператора в пространстве H_α (см. [4], § 133).

Из ограниченности оператора S в $H_\alpha(F)$ можно вывести, что нормированное кольцо $H_\alpha(F)$ распадается в прямую сумму своих подколец $H_\alpha^+(F)$ и $H_\alpha^-(F)$: $H_\alpha(F)=H_\alpha^+(F)\dotplus H_\alpha^-(F)$.

Проекторы, которые проектируют кольцо $H_\alpha(F)$ соответственно на подкольца $H_\alpha^+(F)$ и $H_\alpha^-(F)$, имеют вид

$$P=\frac{1}{2}(I+S),\ Q=\frac{1}{2}(I-S),$$

где S — оператор сингулярного интегрирования в смысле главного значения в $H_\alpha(F)$.

2. Пусть q — некоторый одномерный проектор из кольца R: $q=(\cdot,l)\,y$ $(y\in B,\ l\in B^*,\ (y,l)=1)$. Через $H_\alpha(F)q$ обозначим подпространство банахова пространства $H_\alpha(F)$, состоящее из всех оператор-функций вида

$$U(\varsigma)\,q\quad(U(\varsigma)\in H_\alpha(F)).$$

Для сокращения обозначим $U(\varsigma)q$ через $X(\varsigma)$ $(\varsigma\in\Gamma)$.

Теорема 2.2. *Пусть $T(\varsigma)\in H_\alpha(F)$. Тогда оператор V_T, определенный в пространстве $H_\alpha(F)q$ равенством*

$$(V_TX)(z)=\int_\Gamma\frac{T(\varsigma)}{\varsigma-z}X(\varsigma)\,d\varsigma-\int_\Gamma\frac{T(z)}{\varsigma-z}X(\varsigma)\,d\varsigma,\tag{2.2}$$

вполне непрерывен.

Доказательство. Очевидно, достаточно доказать теорему для случая, когда

$$T(\varsigma)=\sum_{k=1}^{n}\varphi_k(\varsigma)T_k\quad(\varphi_k(\varsigma)\in H_\alpha,\ T_k\in\mathbf{K},\ k=1,2,\ldots,n).$$

В этом случае оператор V_T можно представить в виде

$$(V_TX)(z)=\sum_{k=1}^{n}\int_\Gamma\frac{\varphi_k(\varsigma)-\varphi_k(z)}{\varsigma-z}\,T_k(X(\varsigma))\,d\varsigma\quad(X(\varsigma)\in H_\alpha(F)\,q).$$

Последний оператор будет вполне непрерывен, если будут вполне непрерывными все слагаемые

$$\int_\Gamma\frac{\varphi_k(\varsigma)-\varphi_k(z)}{\varsigma-z}\,T_k(X(\varsigma))\,d\varsigma\ (k=1,2,\ldots,n).$$

Без ограничения общности можно считать операторы

$$T_k\ (k=1,2,\ldots,n)$$

одномерными.

Пусть $\varphi(\varsigma)\in H_\alpha$ $(\varsigma\in\Gamma)$ и $T=(\cdot,\psi)\,x$ $(x\in B,\ \psi\in B^*)$.

Рассмотрим оператор

$$\int_\Gamma\frac{\varphi(\varsigma)-\varphi(z)}{\varsigma-z}\,T(X(\varsigma))\,d\varsigma\quad(X(\varsigma)\in H_\alpha(F)q).$$

Тогда

$$\int_\Gamma\frac{\varphi(\varsigma)-\varphi(z)}{\varsigma-z}\,T(X(\varsigma))\,d\varsigma=(\cdot,l)\int_\Gamma\frac{\varphi(\varsigma)-\varphi(z)}{\varsigma-z}\,(U(\varsigma)\,y,\psi)\,x\,d\varsigma.$$

Легко видеть, что функция $F(\varsigma)=(U(\varsigma)\,y,\psi)$ удовлетворяет на Γ условию Гельдера с показателем α.

Таким образом, для доказательства теоремы достаточно установить полную непрерывность оператора

$$(Gf)(z)=\int_\Gamma\frac{\varphi(\varsigma)-\varphi(z)}{\varsigma-z}\,f(\varsigma)\,d\varsigma,\tag{2.3}$$

действующего в пространстве H_α*). Пусть $\{f\}$ — ограниченное множество функций пространства H_α: $\|f\|_{H_\alpha}<k$. Тогда множество $\{f\}$ компактно в $C(\Gamma)$. Следовательно, из множества $\{f\}$ можно выделить последовательность $\{f_n\}$, сходящуюся к f по норме пространства $C(\Gamma)$.

---

*) Полная непрерывность оператора (2.3) в пространстве H_α установлена И. А. Фельдманом.

Обозначим

$$\Phi(z)=\int\limits_{\Gamma}\frac{\varphi(\varsigma)-\varphi(z)}{\varsigma-z}f(\varsigma)\,d\varsigma,\quad \Phi_n(z)=\int\limits_{\Gamma}\frac{\varphi(\varsigma)-\varphi(z)}{\varsigma-z}f_n(\varsigma)\,d\varsigma.$$

Для доказательства полной непрерывности оператора (2.3) достаточно показать, что $\| \Phi-\Phi_n \|_{H_\alpha}$ стремится к нулю.

Легко видеть, что $\max | \Phi-\Phi_n |$ стремится к нулю.

Кроме того,

$$| \Phi(z_1)-\Phi_n(z_1)-(\Phi(z_2)-\Phi_n(z_2)) | \leqslant \max | f-f_n | \int\limits_{\Gamma}\left| \frac{\varphi(\varsigma)-\varphi(z_1)}{\varsigma-z_1} - \frac{\varphi(\varsigma)-\varphi(z_2)}{\varsigma-z_2}\right| | d\varsigma | .$$

Можно показать (см. [2] или [3]), что

$$\int\limits_{\Gamma}\left| \frac{\varphi(\varsigma)-\varphi(z_1)}{\varsigma-z_1} - \frac{\varphi(\varsigma)-\varphi(z_2)}{\varsigma-z_2}\right| | d\varsigma | \leqslant m \| \varphi \|_{H_\alpha} | z_1-z_2 |^\alpha,$$

где m — постоянная. Следовательно,

$$\frac{| \Phi(z_1)-\Phi_n(z_1)-(\Phi(z_2)-\Phi_n(z_2)) |}{| z_1-z_2 |^\alpha} \leqslant \max | f-f_n | m \| \varphi \|_{H_\alpha}. \qquad (2.4)$$

Но правая часть из (2.4) стремится к нулю. Теорема доказана.

3. Пусть $T(\varsigma)\in H_\alpha(F)$. Тогда равенством

$$\mathrm{A}(X(\varsigma))=(I-T(\varsigma))X(\varsigma)\quad (X(\varsigma)\in H_\alpha(F)q)$$

определяется линейный ограниченный оператор A, действующий в пространстве $H_\alpha(F)q$.

Из теоремы Р. Бохнера и Р. Филлипса (см. [8]) вытекает, что если оператор-функция $U(\varsigma)\in H_\alpha(F)$ и при каждом значении ς $(\varsigma\in\Gamma)$ оператор $I-U(\varsigma)$ обратим, то оператор-функция $(I-U(\varsigma))^{-1}-I$ также принадлежит $H_\alpha(F)$. Отсюда вытекает, что оператор A обратим, если при всех значениях $\varsigma(\varsigma\in\Gamma)$ оператор $I-T(\varsigma)$ обратим.

В соответствии со сказанным выше $H_\alpha(F)q=H_\alpha^+(F)q\dot{+}H_\alpha^-(F)q$.

Обозначим через P проектор, проектирующий пространство $H_\alpha(F)q$ на $H_\alpha^+(F)q$ параллельно $H_\alpha^-(F)q$, а через Q — проектор $I-P$.

Имеет место следующая (см. [1], лемма 3.2)

Теорема 2.3. *Пусть оператор-функция* $T(\varsigma)$ $(\varsigma\in\Gamma)$ *принадлежит нормированному кольцу* $H_\alpha(F)$ *и оператор* $I-T(\varsigma)$ *обратим при всех значениях* $\varsigma(\varsigma\in\Gamma)$.

Тогда оператор A, *действующий в пространстве* $H_\alpha^+(F)q$ *по правилу*

$$\mathrm{A}(X(\varsigma))=P(I-T(\varsigma))X(\varsigma)\quad (X(\varsigma)\in H_\alpha^+(F)q, \qquad (2.5)$$

является Φ-*оператором.*

Доказательство. Так как

$$P=\frac{1}{2}(I+S),$$

где S — оператор сингулярного интегрирования, то из полной непрерывности оператора $ST-TS$ $(T(\varsigma)\in H_\alpha(F))$ (теорема 2.2), действующего в пространстве $H_\alpha(F)q$, следует полная непрерывность оператора $P(I-T)-(I-T)P$ в том же пространстве.

Отсюда вытекает, что оператор $\mathbb{W}$, действующий в пространстве $H_\alpha(F)q$ по правилу

$$\mathbb{W}(X(\varsigma))=P\{(I-T(\varsigma))Q(X(\varsigma))\}\ (\mathbb{W}(X(\varsigma))=Q\{(I-T(\varsigma))P(X(\varsigma))\}),$$

где $T(\varsigma)\in H_\alpha(F)$, вполне непрерывен.

Оператор $I-T(\varsigma)$ представим в виде

$$I-T(\varsigma)=P(I-T(\varsigma))P+P(I-T(\varsigma))Q+Q(I-T(\varsigma))P+Q(I-T(\varsigma))Q$$

или

$$I-T(\varsigma)=P(I-T(\varsigma))P+Q(I-T(\varsigma))Q+Z,$$

где Z — вполне непрерывный оператор. Таким образом, оператор $P(I-T(\varsigma))P+Q(I-T(\varsigma))Q$, действующий в пространстве $H_\alpha(F)q$, равен разности обратимого и вполне непрерывного операторов и, следовательно (см. [9]), он является Φ-оператором. Но так как оператор

$$P(I-T(\varsigma)P+Q(I-T(\varsigma))Q$$

является прямой суммой операторов

$$P(I-T(\varsigma))P,\ Q(I-T(\varsigma))Q,$$

действующих соответственно в пространствах

$$H_\alpha^+(F)q,\ H_\alpha^-(F)q,$$

то каждый из операторов

$$P(I-T(\varsigma))P,\ Q(I-T(\varsigma))Q$$

является Φ-оператором в своем пространстве. Теорема доказана.

§ 3. Вспомогательные предложения. 1. Обозначим через R_1 и R_2 нормированные кольца с нормами $\|\cdot\|_1$ и $\|\cdot\|_2$ соответственно, удовлетворяющие условиям:

а) $R_1\subset R_2$;

б) для любых двух элементов $x, y\in R_1$

$$\| xy \|_1 \leqslant k_1(\| x \|_1 \| y \|_2 + \| x \|_2 \| y \|_1),$$

где k_1 $(\geqslant 1)$ — постоянная, не зависящая от x и y;

в) для любого элемента $x\in R_1$ имеет место соотношение

$$\| x \|_2 \leqslant k_2 \| x \|_1 \quad (k_2>0).$$

Пусть A — линейный ограниченный оператор в R_2, отображающий R_1 в себя. Легко показать, что оператор A ограничен и в R_1.

Через A_a, где a — некоторый элемент из R_1, обозначим линейный оператор, действующий в R_1 по правилу

$$A_a x=A(ax)\quad (A_a x=A(xa))\quad (x\in R_1). \qquad (3.1)$$

Очевидно, оператор A_a ограничен и

$$\| A_a \|_1 \leqslant \| A \|_1 \| a \|_1.$$

Лемма 3.1. *Пусть* $a \in R_1$ *и оператор* A_a *действует в* R_1 *по правилу*

$$A_a x = A(ax) \quad (A_a x = A(xa)).$$

Тогда

$$\lim \sqrt[n]{\| A_a^n \|_1} \leqslant c \| a \|_2, \tag{3.2}$$

где $c\ (>0)$ — *константа.*

Доказательство. Доказательство проводим методом математической индукции. В силу условий б) и в)

$$\| A_a^2 x \|_1 \leqslant k^2 \| A \|^2 \ \| a \|_2^2 \left(\frac{(k+1) \| a \|_1}{\| a \|_2} + 1 \right) \| x \|_1,$$

где $k = \max \{ k_1, k_2 \}$, $\| A \| = \max \{ \| A \|_1, \| A \|_2 \}$.

Предположим, что

$$\left\| A_a^n x \right\|_1 \leqslant k^n \| A \|^n \| a \|_2^n \left(\frac{(k+n-1) \| a \|_1}{\| a \|_2} + 1 \right) \| x \|_1.$$

Тогда

$$\| A_a^{n+1} x \|_1 \leqslant \| A \| \ \| a A_a^n x \|_1 \leqslant k_1 \| A \| (\| a \|_1 \| A_a^n x \|_2 + \| a \|_2 \| A_a^n x \|_1) \leqslant$$

$$\leqslant k_1 \| A \| \{ \| a \|_1 \| A \|^n \| a \|_2^n k_2 \| x \|_1 + k^n \| A \|^n \| a \|_2^{n+1} \left[\frac{(k+n-1) \| a \|_1}{\| a \|_2} + 1 \right] \| x \|_1 \} \leqslant$$

$$\leqslant k^{n+1} \| A \|^{n+1} \| a \|_2^{n+1} \left(\frac{(n+k) \| a \|_1}{\| a \|_2} + 1 \right) \| x \|_1.$$

Следовательно,

$$\| A_a^{n+1} \|_1 \leqslant k^{n+1} \| A \|^{n+1} \| a \|_2^{n+1} \left(\frac{(n+k) \| a \|_1}{\| a \|_2} + 1 \right).$$

Отсюда вытекает, что

$$\lim_{m \to \infty} \sqrt[m]{\| A_a \|_1} \leqslant k \| A \| \ \| a \|_2 \ (= c \| a \|_2).$$

Лемма доказана.

Из лемы 3.1 вытекает следующее соотношение

$$\lim_{n \to \infty} \sqrt[n]{\| a^n \|_1} \leqslant k \| a \|_2 \ (a \in R_1), \tag{3.3}$$

где $k = \max \{ k_1, k_2 \}$.

Имеет место следующая (см. [10])

Лемма 3.2. *Если нормированные кольца* R_1 *и* R_2 *обладают общей единицей* e *и кольцо* R_2 *распадается в прямую сумму своих подколец* R_2^+ *и* R_2^-, *а прямая сумма подколец* $R_1^+ = R_1 \cap R_2^+$ *и* $R_1^- = R_1 \cap R_2^-$ *равна* R_1, *тогда существуют такие числа* δ *и* $\rho_0 > 0$ $(0 < \delta < 1)$, *что при* $a \in R_1$ *и* $\| a \|_2 < \delta$, $| \lambda | < \rho_0$ *элемент* $e - \lambda a$ *допускает факторизацию вида*

$$e - \lambda a = (e + x_\lambda^-) \ (e + x_\lambda^+),$$

где $x_\lambda^\pm$ *и* $(e + x_\lambda^\pm)^{-1} - e \in R_1^\pm$.

Доказательство. Обозначим через P проектор, проектирующий кольцо R_1 на R_1^+ параллельно R_1^-, а через Q проектор $I - P$. Каждому элементу $a \in R_1$ сопоставим линейные ограниченные операторы U_a и V_a, действующие в R_1 по правилу

$$U_a x = P[a(Px)], \quad V_a x = Q[(Qx)a] \quad (x \in R_1).$$

Рассмотрим уравнения

$$y_\lambda^+ - \lambda P(a y_\lambda^+) = \lambda Pa, \quad v_\lambda^- - \lambda Q(v_\lambda^- a) = \lambda Qa \ (a \in R_1). \tag{3.4}$$

Если оператор A из (3.1) рассматривать как оператор проектирования в R_1, то для всех λ из круга радиуса ρ $(\rho = c\delta)$ с центром в начале координат каждое из уравнений (3.4) имеет единственное решение y_λ^+ и v_λ^- соответственно

$$y_\lambda^+ = \lambda (I - \lambda U_a)^{-1} Pa \ (y_\lambda^+ \in R_1^+), \quad v_\lambda^- = \lambda (I - \lambda V_a)^{-1} Qa \ (v_\lambda^- \in R_1^-).$$

Из (3.4) следует

$$(e - \lambda a) \ (e + y_\lambda^+) = e + y_\lambda^- \quad (y_\lambda^- \in R_1^-), \tag{3.5}$$

$$(e + v_\lambda^-) \ (e - \lambda a) = e + v_\lambda^+ \quad (v_\lambda^+ \in R_1^+). \tag{3.6}$$

Элемент $e - \lambda a$ обратим для всех λ, таких что $| \lambda | < \rho_1$ $(\rho_1 = k\delta)$. В дальнейшем будем предполагать, что λ принадлежит кругу радиуса $\rho_0 = \min \{ \rho, \rho_1 \}$. Из (3.5) и (3.6) для λ, принадлежащих кругу радиуса ρ_0, следует

$$(e + v_\lambda^+) \ (e + y_\lambda^+) = (e + v_\lambda^-) \ (e + y_\lambda^-) = e,$$

т. е. элементы $e + y_\lambda^+$ и $e + y_\lambda^-$ обратимы слева.

Элементы $e + y_\lambda^+$ и $e + y_\lambda^-$ обратимы в достаточно малой окрестности точки $\lambda = 0$. С помощью аналитического продолжения легко установить обратимость элементов $e + y_\lambda^+$, $e + y_\lambda^-$ внутри круга радиуса ρ_0. Тогда из (3.5) следует

$$e - \lambda a = (e + y_\lambda^-) \ (e + y_\lambda^+)^{-1}$$

или

$$e - \lambda a = (e + x_\lambda^-) \ (e + x_\lambda^+),$$

где

$$x_\lambda^- = y_\lambda^-, \quad x_\lambda^+ = (e + y_\lambda^+)^{-1} - e.$$

Лемма доказана.

В дальнейшем нам понадобится следующее предложение, установленное И. Ц. Гохбергом (см. [1], лемма 3.3).

Лемма 3.3. *Пусть выполняются следующие условия:*

а) *оператор-функции* $A(\varsigma) = I - T(\varsigma)$ *и* $Y(\varsigma) = I - X(\varsigma)$ $(T(\varsigma)$ *и* $X(\varsigma) \in H_\alpha(F))$ *обратимы при каждом* ς $(\varsigma \in \Gamma)$;

б) *существуют взаимно ортогональные проекторы* $Q_1, Q_2, \ldots, Q_m$ *такие, что оператор-функции* $Y_j^+(\varsigma) = Y(\varsigma) Q_j$ *имеют вид*

$$Y_j^+(\varsigma) = \varsigma^{\nu_j} Y_j(\varsigma) \ Q_j,$$

где ν_j — *некоторые неотрицательные числа, а* $Y_j(\varsigma) \in H_\alpha^+(F)$;

в) $(I - T(\varsigma)) \ (I - X(\varsigma)) \ Q_j \in H_\alpha^-(F)$ $(j = 1, 2, \ldots, m)$.

Тогда

$$\sum_{j=1}^{m} \nu_j \leqslant \alpha(\mathrm{A}), \ (<\infty),$$

где оператор **A** *определяется равенством* (2.5).

§ 4. **Доказательство основной теоремы.** Доказательство теоремы 1.1 разобьем на три части:

а) Рассмотрим случай, когда оператор-функцию

$$I - T(\zeta) \quad (T(\zeta) \in H_\alpha(F))$$

можно представить в виде

$$I-T(\zeta) = (I+U_+(\zeta))\,(I-K_n(\zeta)) \quad (\zeta\in\Gamma),$$

где $K_n(\zeta)$ — конечномерная оператор-функция вида

$$K_n(\zeta)=\sum_{j=-l}^{n} \zeta^j K_j \quad (\zeta\in\Gamma),$$

K_j $(j=-l,\dots,n)$ — конечномерные операторы, $U_+(\zeta)\in H^+_\alpha(F)$, оператор $I+K_n(\zeta)$ обратим при всех значениях ζ $(\zeta\in\Gamma)$, а оператор $I+U_+(\zeta)$ обратим при всех значениях ζ из G_+.

Доказательство теоремы в этом случае проводится с помощью теоремы 2.3 и леммы 3.3 аналогично доказательству теоремы 2.1 статьи [1].

б) Рассмотрим случай, когда оператор-функция $T(\zeta)$ $(\in H_\alpha(F))$ имеет достаточно малую норму в кольце $H_\beta(F)$ $(\beta<\alpha)$.

Заметим, что если $\beta<\alpha$, то $H_\alpha(F)\subset H_\beta(F)$. Нетрудно показать, что для произвольных $T_1(\zeta)$, $T_2(\zeta)\in H_\alpha(F)$ имеют место соотношения:

1) $\|T_1T_2\|_{H_\alpha(F)} \leqslant k_1(\|T_1\|_{H_\alpha(F)}\|T_2\|_{H_\beta(F)} + \|T_1\|_{H_\beta(F)}\|T_2\|_{H_\alpha(F)})$,

где $k_1\,(\geqslant 1)$ — константа, не зависящая от $T_1(\zeta)$ и $T_2(\zeta)$;

2) $\|T_1\|_{H_\beta(F)} \leqslant k_2 \|T_1\|_{H_\alpha(F)}$ $(k_2>0)$.

Нетрудно проверить, что для колец $H_\alpha(F)$ $(=R_1)$ и $H_\beta(F)$ $(=R_2)$ выполняются все условия леммы 3.2.

Итак, пусть для оператор-функции $T(\zeta)$ из $H_\alpha(F)$, $\|T\|_{H_\beta(F)}<\varepsilon$ $(\beta<\alpha)$, где ε — достаточно малое положительное число.

В силу леммы 3.2 оператор-функция $I-T(\zeta)$ $(\zeta\in\Gamma)$ допускает регулярную факторизацию

$$I-T(\zeta)=(I+U_-(\zeta))\,(I+U_+(\zeta)) \quad (U_\pm(\zeta)\in H^\pm_\alpha(F)).$$

в) Общий случай. Функции пространства H_α можно апроксимировать рациональными функциями (см. [11]) по норме пространства H_β $(\beta<\alpha)$. Следовательно, для оператор-функций $T(\zeta)\in H_\alpha(F)$ и любого числа $\varepsilon\,(>0)$ существует оператор-функция

$$K_n(\zeta)=\sum_{j=1}^{n} r_j(\zeta)K_j \quad (\zeta\in\Gamma),$$

где $r_j(\zeta)$ $(j=1, 2,\dots,n)$ — рациональные функции, не имеющие полюсов на Γ, $K_j\in \mathrm{K}$ $(j=1, 2,\dots,n)$ такая, что

$$\|T-K_n\|_{H_\beta(F)}<\varepsilon.$$

Отсюда вытекает, что оператор-функцию $I-T(\zeta)$ можно представить в виде

$$I-T(\zeta)=[I-R(\zeta)\,(I-K_n(\zeta))^{-1}]\,(I-K_n(\zeta)) \quad (\zeta\in\Gamma),$$

где

$$R(\zeta)=T(\zeta)-K_n(\zeta),\ \|R\|_{H_\beta(F)}<\varepsilon,\ \|R(I-K_n)^{-1}\|_{H_\beta(F)}<\varepsilon\,\|(I-K_n)^{-1}\|_{H_\beta(F)}.$$

Как показано в случае б), оператор-функция $I-R(\zeta)\,(I-K_n(\zeta))^{-1}$ допускает регулярную факторизацию

$$I-R(\zeta)\,(I-K_n(\zeta))^{-1}=(I+U_-(\zeta))\,(I+U_+(\zeta)) \quad (U_\pm(\zeta)\in H^\pm_\alpha(F)).$$

Следовательно,

$$I-T(\zeta)=(I+U_-(\zeta))\,(I+U_+(\zeta))\,(I-K_n(\zeta)). \qquad (4.1)$$

В силу доказанного в пункте а) оператор-функция

$$(I+U_+(\zeta))\,(I-K_n(\zeta))$$

допускает вполне правильную факторизацию

$$(I+U_+(\zeta))\,(I-K_n(\zeta))=(I+Y_-(\zeta))\,D(\zeta)\,(I+Y_+(\zeta)), \qquad (4.2)$$

где $Y_\pm(\zeta)\in H^\pm_\alpha(F)$. Из (4.1) и (4.2) следует

$$I-T(\zeta)=(I+U_-(\zeta))\,(I+Y_-(\zeta))\,D(\zeta)\,(I+Y_+(\zeta)). \qquad (4.3)$$

Так как $(I+U_-(\zeta))\,(I+Y_-(\zeta))-I\in H^-_\alpha(F)$, то из (4.3) следует

$$I-T(\zeta)=(I+T_-(\zeta))\,D(\zeta)\,(I+T_+(\zeta)) \quad (T_\pm(\zeta)\in H^\pm_\alpha(F)).$$

Теорема доказана. Это теорема позволяет исследовать некоторые классы бесконечных систем сингулярных интегральных уравнений, содержащих интегралы типа Коши в смысле главного значения.

Выражаю искреннюю благодарность И. Ц. Гохбергу, под руководством которого выполнена эта работа. Автор также признателен И. А. Фельдману за полезные советы.

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

1. И. Ц. Гохберг, Задача факторизации оператор-функций, Известия АН СССР (серия математическая), 28, № 5 (1964).
2. И. Ц. Гохберг и М. Г. Крейн, Системы интегральных уравнений на полуоси с ядрами, зависящими от разности аргументов, Усп. матем. наук, 13, вып. 2 (1958).
3. И. Ц. Гохберг, Задача факторизации в нормированных кольцах, функции от изометрических и симметрических операторов и сингулярные интегральные уравнения, Усп. матем. наук, 19, вып. 1 (1964).
4. Н. И. Мусхелишвили, Сингулярные интегральные уравнения, Физматгиз, 1962.
5. Н. П. Векуа, Системы сингулярных интегральных уравнений, Гостехиздат, 1950.
6. Ф. Д. Гахов, Краевые задачи, Физматгиз, 1963.
7. М. С. Будяну, О факторизации оператор-функций, Труды IV конференции молодых ученых Молдавии, Кишинев, 1965.
8. S. Bochner and R. Phillips, Absolutely convergent Fourier expansions for non-commutative normeg rings, Ann. of Math., 43, № 3 (1942), 409—418.

9. И. Ц. Гохберг и М. Г. Крейн, Основные положения о дефектных числах, корневых числах и индексах линейных операторов, Усп. матем. наук, 12, вып. 2 (1957).
10. М. С. Будяну и И. Ц. Гохберг, Одна общая теорема о факторизации матриц-функции, Исследования по алгебре и математическому анализу (сборник статей), Кишинев, 1965, стр. 118—123.
11. Г. Ф. Манджавидзе, Приближенное решение граничных задач теории аналитических функций, Исследования по современным проблемам теории функций комплексного переменного (сборник статей), 1960.

М. С. БУДЯНУ

О ТЕОРЕМЭ ДЕСПРЕ ФАКТОРИЗАРЯ ОПЕРАТОРИЛОР-ФУНКЦИЙ

Резумат

Ын артиколул [1] И. Ц. Гохберг а пус проблема деспре факторизаря операторилор-функций ши а резолват ачастэ проблемэ пентру унеле класе де операторь-функций.

Ын ачест артикол куноскута теоремэ, стабилитэ де И. Племели, Н. И. Мусхелишвили, Н. П. Векуа (везь [4], [5]), деспре факторизаря матричелор-функций, елементеле кэрора сатисфак инегалитатя луй Гьолдер, се женерализязэ пентру операторь-функций.

Известия Академии наук Молдавской ССР № 7, 1965 г.

В. Н. ВИЗИТЕЙ

О РАЗЛОЖЕНИИ ПО СОБСТВЕННЫМ И КОРНЕВЫМ ВЕКТОРАМ ОГРАНИЧЕННОГО ОПЕРАТОРА

В настоящей заметке устанавливаются некоторые достаточные условия существования базиса из собственных или корневых подпространств ограниченного оператора, являющиеся аналогами теорем, полученных Б. Р. Мукминовым [1], И. М. Глазманом [2] и А. С. Маркусом [3] для диссипативного оператора.

1. Приведем необходимые определения. Вектор ψ называется *корневым* вектором линейного оператора A, соответствующим его собственному числу λ, если существует такое натуральное число n, что $(A-\lambda I)^n\psi=0$. Множество всех таких векторов называется *корневым линеалом* (а если оно замкнуто — *корневым подпространством*) оператора A, соответствующим собственному числу λ. Через $\nu(\lambda)$ $(\alpha(\lambda))$ будем обозначать *алгебраическую* (*собственную*) *кратность* собственного значения λ, т. е. размерность соответствующего корневого (собственного) подпространства K_λ (Z_λ). Если существует такое натуральное число μ, что $(A-\lambda I)^\mu K_\lambda=0$, то наименьшее из этих чисел обозначим через $\mu(\lambda)$; в противном случае положим $\mu(\lambda)=\infty$. Как известно, всегда $\mu(\lambda)\leqslant\nu(\lambda)$.

Базис $\{\psi_j\}_1^\infty$ гильбертова пространства H называется *базисом Рисса*, если существует ортонормированный базис $\{\chi_j\}_1^\infty$ пространства H и действующий в H линейный ограниченный обратимый оператор A такие, что $A\chi_j=\psi_j$ $(j=1, 2, \ldots)$. Базис $\{\psi_j\}_1^\infty$ пространства H называется *базисом Бари*, если существует ортонормированный базис $\{\chi_j\}_1^\infty$ такой, что $\sum_{j=1}^{\infty}\|\psi_j-\chi_j\|^2<\infty$.

Последовательность $\{M_j\}_1^\infty$ ненулевых подпространств называется *базисом* гильбертова пространства H, если любой вектор $x\in H$ разлагается единственным образом в ряд вида $x=\sum_{j=1}^{\infty}\psi_j$ $(\psi_j\in M_j, j=1, 2, \ldots)$. Если подпространства M_j $(j=1, 2, \ldots)$ попарно ортогональны, то базис называется *ортогональным*.

Две последовательности подпространств $\{M_k\}_1^\infty$ и $\{N_k\}_1^\infty$ будем называть *квадратично близкими*, если $\sum_{k=1}^{\infty}\|P_k-Q_k\|^2<\infty$, где $P_k(Q_k)$ — ортогональные проекторы на подпространства M_k (N_k) $(k=1, 2, \ldots)$. Базис из подпространств, квадратично близкий к некоторому ортогональному базису, будем называть *базисом Бари*.

Минимальным углом [4] между двумя подпространствами M и N гильбертова пространства H называется угол $\varphi(M, N)$ $(0 \leqslant \varphi \leqslant \pi/2)$, который определяется равенством

$$\cos \varphi(M, N) = \sup_{\substack{x \in S(N) \\ y \in S(M)}} |(x, y)|, \tag{1}$$

где $S(N)$ и $S(M)$ — единичные сферы подпространств N и M соответственно.

Нам понадобится предложение, близкое к одной теореме М. Г. Крейна [5] и доказываемое аналогично.

1°. *Полная в H последовательность векторов $\{\psi_j\}_1^\infty$, удовлетворяющая условию*

$$\sum_{\substack{j, k=1 \\ j \neq k}}^{\infty} |(\psi_j, \psi_k)|^2 < 1,$$

является базисом Бари пространства H.

Следующее предложение используется в [3] при доказательстве теоремы 2.

2°. *Если последовательность подпространств $\{M_j\}_1^\infty$ удовлетворяет условию*

$$\sum_{\substack{j, k=1 \\ j \neq k}}^{\infty} \cos^2 \varphi(M_k, M_j) < (\sqrt{3}-1)^2,$$

то она является базисом Бари своей замкнутой линейной оболочки.

2. Лемма 1. *Пусть $\{N_j\}_1^\infty$ — последовательность корневых подпространств ограниченного оператора A, соответствующих собственным значениям $\{\lambda_j\}_1^\infty$ $(\lambda_k \neq \lambda_j$ при $k \neq j)$ конечной алгебраической кратности. Если выполнено условие*

$$\sum_{\substack{j, k=1 \\ j \neq k}}^{\infty} \cos^2 \varphi(N_k, N_j) < \infty, \tag{2}$$

то последовательность $\{N_j\}_1^\infty$ является базисом Бари своей замкнутой линейной оболочки.

Доказательство. В силу условия (2) можно выбрать натуральное число n так, что для последовательности подпространств $\{N_j\}_n^\infty$ будет выполняться условие предложения 2°, и, следовательно, последовательность корневых подпространств $\{N_j\}_n^\infty$ будет базисом Бари своей замкнутой линейной оболочки $N_{(n)}$. Покажем, что

$$N_{n-1} \cap N_{(n)} = 0.$$

Допуская противное, получим

$$x_{n-1} = \sum_{j=n}^{\infty} x_j \quad (x_j \in N_j,\ j = n, n+1, \ldots). \tag{3}$$

Пусть λ_{n-1} — собственное значение порядка $\mu(\lambda_{n-1})$, соответствующее корневому подпространству N_{n-1}. Применим к обеим частям равенства (3) оператор $(A - \lambda I)^{\mu(\lambda_{n-1})}$, получим

$$0 = \sum_{j=n}^{\infty} (A - \lambda_n I)^{\mu(\lambda_{n-1})} x_j. \tag{4}$$

Так как $(A - \lambda I)^{\mu(\lambda_{n-1})} x_j \in N_j$ $(j = n, n+1, \ldots)$, то (4) противоречит тому, что последовательность $\{N_j\}_n^\infty$ образует базис своей замкнутой линейной оболочки $N_{(n)}$. Таким образом, прямая сумма подпространств N_{n-1} и $N_{(n)}$ замкнута. Обозначим ее через $N_{(n-1)}$. Пусть $x \in N_{(n-1)}$, тогда $x = y + z$, где $y \in N_{(n)}, z \in N_{n-1}$, но $y = \sum_{j=n}^{\infty} x_j$, где $x_j \in N_j$ $(j = n, n+1, \ldots)$. Отсюда $x = \sum_{j=n-1}^{\infty} x_j$, т. е. последовательность $\{N_j\}_{n-1}^\infty$ является базисом своей замкнутой линейной оболочки. Более того, $\{N_j\}_{n-1}^\infty$ есть базис Бари своей замкнутой линейной оболочки. В самом деле, пусть $\{M_j\}_n^\infty$ есть ортогональный базис $N_{(n)}$, квадратично близкий к базису $\{N_j\}_n^\infty$. Обозначим через M_{n-1} ортогональное дополнение к $N_{(n)}$ в $N_{(n-1)}$. Очевидно, что последовательность $\{M_j\}_{n-1}^\infty$ есть ортогональный базис, а базис $\{N_j\}_{n-1}^\infty$ к нему квадратично близок, т. е. является базисом Бари.

Присоединяя к базису $\{N_j\}_{n-1}^\infty$ подпространство N_{n-2}, точно так же доказываем, что $\{N_j\}_{n-2}^\infty$ есть базис Бари своей замкнутой линейной оболочки. Повторяя этот процесс $n-1$ раз, получим, что последовательность корневых подпространств $\{N_j\}_1^\infty$ является базисом Бари своей замкнутой линейной оболочки.

Лемма 2. *Пусть $\{N_j\}_1^\infty$ — последовательность корневых подпространств ограниченного оператора A, соответствующих собственным значениям $\{\lambda_j\}_1^\infty$ $(\lambda_j \neq \lambda_k$ при $k \neq j)$ конечной алгебраической кратности. Если выполнено условие*

$$\sum_{\substack{j, k=1 \\ j \neq k}}^{\infty} \min\left(\nu(\lambda_k), \nu(\lambda_j)\right) \cos^2 \varphi\left(N_k, N_j\right) < \infty, \tag{5}$$

то последовательность векторов, полученная объединением ортонормированных базисов корневых подпространств N_j $(j = 1, 2, \ldots)$, является базисом Бари своей замкнутой линейной оболочки.

Доказательство. Имеет место следующее неравенство, установленное при доказательстве теоремы 3 из [3]:

$$\sum_{\substack{j, k=1 \\ j \neq k}}^{\infty} \sum_{l=1}^{\nu(\lambda_j)} \sum_{m=1}^{\nu(\lambda_k)} |(\psi_{km}, \psi_{jl})|^2 \leqslant \sum_{\substack{j, k=1 \\ j \neq k}}^{\infty} \min\left(\nu(\lambda_k), \nu(\lambda_j)\right) \cos^2 \varphi\left(N_k, N_j\right), \tag{6}$$

где $\{\psi_{km}\}_{m=1}^{\nu(\lambda_k)}$ — ортонормированные базисы подпространств N_k $(k = 1, 2, \ldots)$.

В силу условия (4) можно выбрать натуральное число n так, что

$$\sum_{\substack{j, k=n \\ j \neq k}}^{\infty} \min\left(\nu(\lambda_k), \nu(\lambda_j)\right) \cos^2 \varphi\left(N_k, N_j\right) < 1.$$

Отсюда в силу (6) и предложения 1° следует, что объединение ортонормированных базисов подпространства $\{N_j\}_n^\infty$ будет базисом Бари своей замкнутой линейной оболочки $N_{(n)}$. Для завершения доказательства леммы надо провести рассуждения, совершенно аналогичные рассуждениям из леммы 1.

Замечание. Легко видеть, что леммы 1 и 2 сохраняют силу, если заменить $\{N_j\}_1^\infty$ на $\{Z_j\}_1^\infty$ — последовательность собственных подпространств, отвечающих собственным числам λ_j конечной собственной кратности $\alpha(\lambda_j)$ $(j = 1, 2, \ldots)$.

3. Теорема 1. *Пусть A — ограниченный оператор, действующий в H, обладающий бесконечным множеством различных собственных значений $\{\lambda_j\}_1^\infty$ конечной собственной кратности $\alpha(\lambda_j)$ $(j = 1, 2, \ldots)$, и пусть $\{Z_j\}_1^\infty$ — соответствующие собственные подпространства. Если выполнено условие*

$$\sum_{\substack{j,\,k=1\\ j\neq k}}^{\infty} \frac{(\|A\| - |\lambda_j|)(\|A\| - |\lambda_k|)}{|\,\|A\|^2 - \lambda_j\bar{\lambda}_k\,|^2} < \infty, \tag{7}$$

то последовательность подпространств $\{Z_j\}_1^\infty$ является базисом Бари своей замкнутой линейной оболочки Z и, следовательно, последовательность $\{\psi_j\}_1^\infty$, составленная из ортонормированных базисов подпространств Z_j $(j = 1, 2, \ldots)$, является базисом Рисса Z. Если же выполняется более строгое условие

$$\sum_{\substack{j,\,k=1\\ j\neq k}}^{\infty} \min\left(\alpha(\lambda_j), \alpha(\lambda_k)\right) \frac{(\|A\| - |\lambda_j|)(\|A\| - |\lambda_k|)}{|\,\|A\|^2 - \lambda_j\bar{\lambda}_k\,|^2} < \infty, \tag{8}$$

то последовательность $\{\psi_j\}_1^\infty$ является базисом Бари Z.

Доказательство. Пусть $\psi_j \in Z_j$, $\psi_k \in Z_k$, $\|\psi_j\| = \|\psi_k\| = 1$; оценим $|(\psi_k, \psi_j)|^2$. Для этого рассмотрим оператор $B = \frac{1}{\|A\|}A$. Очевидно, что для любого вектора ψ

$$(\psi, \psi) - (B\psi, B\psi) \geqslant 0, \text{ т. е. } I - B^*B \geqslant 0.$$

Для любого положительного оператора C имеет место обобщенное неравенство Буняковского

$$|(C\chi, \psi)|^2 \leqslant (C\chi, \chi)(C\psi, \psi).$$

Следовательно,

$$\left|\left((I - B^*B)\,\psi_j, \psi_k\right)\right|^2 \leqslant \left((I - B^*B)\,\psi_j, \psi_j\right)\left((I - B^*B)\,\psi_k, \psi_k\right).$$

После преобразований получим

$$\left|\left(1 - \frac{1}{\|A\|^2}\lambda_j\bar{\lambda}_k\right)(\psi_j, \psi_k)\right|^2 \leqslant \left(1 - \frac{1}{\|A\|^2}|\lambda_j|^2\right)\left(1 - \frac{1}{\|A\|^2}|\lambda_k|^2\right).$$

Отсюда вытекает следующая оценка для $|(\psi_j, \psi_k)|^2$:

$$|(\psi_j, \psi_k)|^2 \leqslant \frac{(\|A\|^2 - |\lambda_j|^2)(\|A\|^2 - |\lambda_k|^2)}{|\,\|A\|^2 - \lambda_j\bar{\lambda}_k\,|^2},$$

или

$$|(\psi_j, \psi_k)|^2 \leqslant 4\|A\|^2 \frac{(\|A\| - |\lambda_j|)(\|A\| - |\lambda_k|)}{|\,\|A\|^2 - \lambda_j\bar{\lambda}_k\,|^2}. \tag{9}$$

Из (9), (7), (1), леммы 1 и замечания следует первое утверждение теоремы, а из (9), (8), (1), леммы 2 и замечания следует второе утверждение теоремы.

Отметим, что для случая, когда $\sup_j \alpha(\lambda_j) < \infty$, второе утверждение теоремы 1 установил В. Г. Поляцкий [6].

4. Для доказательства теоремы о базисах, составленных из корневых подпространств оператора, нам понадобится следующая лемма.

Лемма 3. *Пусть оператор A — сжатие (т. е. $\|A\| \leqslant 1$) и λ и τ — его собственные значения конечного порядка. Тогда*

$$\cos\varphi(K_\lambda, K_\tau) \leqslant \frac{\sqrt{\mu(\lambda)\mu(\tau)(1 - |\lambda|)(1 - |\tau|)}}{|1 - \lambda\bar{\tau}|} \sum_{j=0}^{\mu(\lambda)-1} a^j \sum_{k=0}^{\mu(\tau)-1} b^k, \tag{10}$$

где

$$a = \frac{2\sqrt{2}(\mu(\lambda) - 1)(1 - |\lambda|)\,|1 - \tau|}{|1 - \lambda\bar{\tau}|\,|1 - \lambda|}, \quad b = \frac{2\sqrt{2}(\mu(\tau) - 1)(1 - |\lambda|)\,|1 - \lambda|}{|1 - \lambda\bar{\tau}|\,|1 - \tau|}.$$

Доказательство. Из неравенства (9) следует, что собственные векторы оператора сжатия, соответствующие различным собственным значениям, лежащим на единичной окружности, ортогональны. В силу сепарабельности пространства H отсюда следует, что на единичной окружности находится не более чем счетное множество собственных значений оператора A. Поэтому, не ограничивая общности, можно считать, что $(A - I)\,\psi = 0$ лишь при $\psi = 0$.

Рассмотрим оператор $B = i\,(I + A)\,(I - A)^{-1}$ (вообще говоря, неограниченный). Покажем, что оператор B является диссипативным, т. е. что $\operatorname{Im}(Bf, f) \geqslant 0$ для всех f из области определения $D(B)$ оператора B:

$$\operatorname{Im}(Bf, f) = -\frac{i}{2}\left[\left(Bf, f\right) - \left(f, Bf\right)\right] =$$

$$= -\frac{i}{2}\left[\left(i\,(I + A)\,(I - A)^{-1} f, f\right) - \left(f, i\,(I + A)\,(I - A)^{-1} f\right)\right].$$

Обозначим $(I - A)^{-1} f = h$, тогда

$$\operatorname{Im}(Bf, f) = -\frac{i}{2}\left[i\left((I + A)\,h, (I - A)\,h\right) + i\left((I - A)h, (I + A)h\right)\right] =$$

$$= (h, h) - (Ah, Ah).$$

Последнее выражение неотрицательно, так как A — сжатие.

Установим теперь, что число λ тогда и только тогда является собственным значением оператора A, когда число

$$\alpha = i\frac{1 + \lambda}{1 - \lambda}$$

является собственным значением оператора B, причем порядки этих собственных значений и соответствующие корневые подпространства совпадают.

Пусть $(A - \lambda I)^n\psi = 0$. Так как $\lambda \neq 1$, то существует вектор g такой, что $(I - A)g = \psi$, т. е. $g = (I - A)^{-1}\psi$. Как легко видеть,

$$(B - \alpha I)\,\psi = \frac{2i}{1 - \lambda}(I - A)^{-1}\,(A - \lambda I)\,\psi. \tag{11}$$

и аналогично

$$(B-\alpha I)^n\psi=\left(\frac{2i}{1-\lambda}\right)^n(I-A)^{-n}(A-\lambda I)^n\psi=0.$$

Обратно, пусть $(B-\alpha I)^n\psi=0$. В силу (11)

$$(A-\lambda I)\psi=\frac{1-\lambda}{2i}(I-A)(B-\alpha I)\psi$$

и, следовательно,

$$(A-\lambda I)^n\psi=\left(\frac{1-\lambda}{2i}\right)^n(I-A)(B-\alpha I)^n\psi=0.$$

Утверждение доказано. Перейдем к доказательству неравенства (10). Положим

$$\alpha=i\frac{1+\lambda}{1-\lambda},\quad \beta=i\frac{1+\tau}{1-\tau}. \tag{12}$$

В силу доказанного утверждения и леммы из [3] имеем

$$\cos\varphi(K_\lambda, K_\tau)\leqslant\frac{2\sqrt{\mu(\lambda)\mu(\tau)\operatorname{Im}\alpha\operatorname{Im}\beta}}{|\alpha-\overline{\beta}|}\sum_{j=0}^{\mu(\lambda)-1}a^j\sum_{k=0}^{\mu(\tau)-1}b^k, \tag{13}$$

где

$$a=\frac{2\sqrt{2}(\mu(\lambda)-1)\operatorname{Im}\alpha)}{|\alpha-\overline{\beta}|},\quad b=\frac{2\sqrt{2}(\mu(\tau)-1)\operatorname{Im}\beta}{|\alpha-\overline{\beta}|}.$$

Подставляя (12) в (13), после преобразований получим (10).

Лемма доказана.

Теорема 2. *Пусть A — ограниченный оператор, обладающий последовательностью собственных значений $\{\lambda_k\}_1^\infty$ ($\lambda_k\neq\lambda_j$ при $k\neq j$) конечной алгебраической кратности. Если выполнены условия*

$$\sum_{\substack{j,k=1\\ j\neq k}}^{\infty}\mu(\lambda_k)\mu(\lambda_j)\frac{(\|A\|-|\lambda_j|)(\|A\|-|\lambda_k|)}{|\|A\|^2-\lambda_j\overline{\lambda}_k|^2}<\infty, \tag{14}$$

$$\overline{\lim_{\substack{j,k\to\infty\\ j\neq k}}}\frac{(\mu(\lambda_j)-1)(\|A\|-|\lambda_j|)|\|A\|-\lambda_k|}{|\|A\|^2-\lambda_j\overline{\lambda}_k|\;|\|A\|-\lambda_j|}<\frac{1}{\|A\|2\sqrt{2}}, \tag{15}$$

то последовательность соответствующих корневых подпространств N_j ($j=1, 2, \ldots$) образует базис Бари своей замкнутой линейной оболочки N, а последовательность векторов $\{\psi_k\}_1^\infty$, полученная объединением ортонормированных базисов подпространств N_j, ($j=1, 2, \ldots$), образует базис Рисса подпространства N.

Если же выполнено условие (15), а условие (14) заменено следующим более сильным условием

$$\sum_{\substack{j,k=1\\ j\neq k}}^{\infty}\min\left(\nu(\lambda_k), \nu(\lambda_j)\right)\mu(\lambda_k)\mu(\lambda_j)\frac{(\|A\|-|\lambda_j|)(\|A\|-|\lambda_k|)}{|\|A\|^2-\lambda_j\overline{\lambda}_k|^2}<\infty, \tag{16}$$

то последовательность $\{\psi_k\}_1^\infty$ является базисом Бари подпространства N.

Доказательство. Из условия (15) следует, что множество чисел

$$M_{jk}=\sum_{r=1}^{\mu(\lambda_j)-1}a^r_{jk}\quad (j, k=1, 2, \ldots; j\neq k),$$

где

$$a_{jk}=\frac{(\mu(\lambda_j)-1)(\|A\|-|\lambda_j|)|\|A\|-\lambda_k|\,\|A\|2\sqrt{2}}{|\|A\|^2-\lambda_j\overline{\lambda}_k|\,|\|A\|-\lambda_j|}\quad (j, k=1, 2, \ldots; j\neq k),$$

ограничено; $\sup\limits_{j,k}M_{jk}=M$. Рассмотрим оператор $C=\frac{1}{\|A\|}A$, он удовлетворяет условиям леммы 3. Следовательно,

$$\cos\varphi(N_j, N_k)\leqslant M^2\frac{\sqrt{\mu(\lambda_j)\mu(\lambda_k)(1-|\lambda_j|)(1-|\lambda_k|)}}{|1-\lambda_j\overline{\lambda}_k|}\quad (j, k=1, 2, \ldots; j\neq k). \tag{17}$$

Из (17), (14) и леммы 1 следует первое утверждение теоремы, а из (17), (14) и леммы 2 вытекает второе утверждение.

Автор выражает благодарность А. С. Маркусу за полезные замечания.

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

1. Б. Р. Мукминов, О разложении по собственным функциям диссипативных ядер, ДАН СССР, 99, № 4 (1954), 499—502.
2. И. М. Глазман, О разложимости по системе собственных элементов диссипативных операторов, Усп. матем. наук, 13, вып. 3 (81), (1958), 179—181.
3. А. С. Маркус, О базисе из корневых векторов диссипативного оператора, ДАН СССР, 132, № 3, (1960), 524—527.
4. М. Г. Крейн, М. А. Красносельский и Д. П. Мильман, О дефектных числах линейных операторов в банаховом пространстве и о некоторых геометрических вопросах, Сб. трудов ин-та матем. АН УССР, № 11 (1948), 97—112.
5. М. Г. Крейн, О базисах Бари пространства Гильберта, Усп. матем. наук, 12, вып. 3 (75) (1957), 333—341.
6. В. Г. Поляцкий, Приведение к треугольному виду некоторых неунитарных операторов, Канд. дисс., Одесса, 1959.

В. Н. ВИЗИТЕЙ

ДЕСПРЕ ДЕЗВОЛТАРЯ ЫН СЕРИЕ ДУПЭ ВЕКТОРИЙ ПРОПРИЙ ШИ АСОЧИЯЦЬ АЙ ОПЕРАТОРУЛУЙ МЭРЖИНИТ

Резумат

Ын артиколул презент се стабилеск кытева кондиций суфичиенте де екзистенцэ а базей дин субспаций проприй ши де рэдэчинэ а операторулуй мэржинит, каре сынт аналогул теоремелор доведите де Б. Р. Мукминов [1], И. М. Глазман [2] ши А. С. Маркус [3] пентру операторул диссипатив.

Известия Академии наук Молдавской ССР № 7, 1965 г.

М. Г. КРЕЙН

К ТЕОРИИ НАГРУЖЕННЫХ ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

1. Предметом дальнейших рассмотрений будет нагруженное интегральное уравнение вида:

$$\varphi(x) = \lambda \int_a^b K(x, s)\, \varphi(s)\, d\sigma(s), \tag{1}$$

где $\sigma(x)$ $(a \leqslant x \leqslant b)$ вещественная нормированная*) функция ограниченной положительной вариации, а $K(x,s)$ $(a \leqslant x, s \leqslant b)$ непрерывное и притом эрмитово-неотрицательное ядро. Условие эрмитовой неотрицательности для $K(x, y)$ означает, что для любых $s_1, s_2, \ldots, s_n$ из $[a, b]$ и любых комплексных $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ $(n = 1, 2, \ldots)$

$$\sum_{j, k=1}^{n} K(s_j, s_k)\, \xi_k \bar{\xi}_j \geqslant 0. \tag{2}$$

Для непрерывного ядра $K(x, y)$ это условие эквивалентно тому что для любой комплекснозначной функции $\tau(x)$ $(a \leqslant x \leqslant b)$ ограниченной вариации

$$\int_a^b \int_a^b K(x, s)\, d\tau(s)\, \overline{d\tau(x)} \geqslant 0. \tag{3}$$

При рассмотрении решений φ (фундаментальных функций уравнения (1)) можно ограничиться непрерывными решениями (всякое решение $\varphi \in L^2_\sigma$ в силу самого уравнения (1) будет эквивалентно в L^2_σ некоторой непрерывной функции).

Для уравнения (1) при сделанных предположениях справедливы следующие утверждения [1]**).

---

*) Т. е. $\sigma(x) = \frac{1}{2}[\sigma(x+0) + \sigma(x-0)]$ при $a < x < b$.

** В [1] показано, что формулируемые ниже предложения 1°—5° справедливы также при более слабых предположениях, нежели непрерывность ядра $K(x, y)$ на квадрате $a \leqslant x, y \leqslant b$, а именно, если ядро $K(x, y)$ ограничено на квадрате и непрерывно по $y \in [a, b]$ при любом фиксированном $x \in [a, b]$. В [1] рассматривался случай вещественного симметрического ядра $K(x, y)$, но все рассуждения непосредственно переносятся на случай комплексного эрмитова ядра $K(x, y)$.

1°. *Уравнение (1) имеет по крайней мере одно характеристическое число в том и только том случае, когда*

$$K^{(2)}(x, y) = \int_a^b K(x, s)\, K(s, y)\, d\sigma(s) \not\equiv 0. \tag{4}$$

Дальнейшие предложения имеют смысл только при выполнении условия (4).

2°. *Всякое характеристическое число уравнения (1) вещественно (и положительно — если σ неубывающая функция).*

3°. *Из фундаментальных функций уравнения (1) может быть выделена последовательность $\{\psi_j\}_{j \in J}$, индефинитно ортонормированная:*

$$\int_a^b \varphi_j(x)\, \overline{\varphi_k(x)}\, d\sigma(x) = \begin{cases} \operatorname{sign} \lambda_j, & j = k \\ 0, & j \neq k \end{cases} \tag{5}$$

и полная в том смысле, что любая фундаментальная функция φ уравнения (1) может быть получена по формуле

$$\varphi = \sum_{\lambda_j = \lambda} c_j \varphi_j,$$

где c_j — некоторые комплексные числа.

Здесь через λ_j обозначено характеристическое число, отвечающее функции φ_j, так что

$$\varphi_j(x) = \lambda_j \int_a^b K(x, s)\, \varphi_j(s)\, d\sigma(s) \quad (j \in J). \tag{6}$$

Что же касается J, то это либо весь натуральный ряд, либо некоторый его отрезок $(1, 2, \ldots, l)$.

4°. *Для полной последовательности $\{\varphi_j\}$ справедливо равномерно сходящееся разложение*

$$K(x, y) = R(x, y) + \sum_{j \in J} \frac{\varphi_j(x)\, \overline{\varphi_j(y)}}{|\lambda_j|} \quad (a \leqslant x, y \leqslant b), \tag{7}$$

где остаточное ядро $R(x, y)$ также является эрмитово-неотрицательным ядром, причем

$$R^{(2)}(x, y) = \int_a^b R(x, s)\, R(s, y)\, d\sigma(s) \equiv 0 \quad (a \leqslant x, y \leqslant b).$$

Если $\tau(x)$ $(a \leqslant x \leqslant b)$ нормированная функция ограниченной вариации, то через E_τ будем обозначать замкнутое множество всех точек изменения функции τ, т. е. дополнение в $[a, b]$ множества F_τ всех интервалов постоянства функции $\tau(x)$.

Условимся говорить, что непрерывное ядро $K(x, y)$ $(a \leqslant x, y \leqslant b)$ *строго эрмитово-положительно* на данном множестве $E \subset [a, b]$, если для любой нормированной комплекснозначной функции $\tau(x)$ ограниченной положительной вариации с $E_\tau \subset E$ интеграл (3) положителен.

В дальнейшем особый интерес будет представлять тот случай, когда выполняется хотя бы одно из двух условий:

1) функция σ монотонна (т. е. не убывает или не возрастает),

2) эрмитово-неотрицательное ядро строго эрмитово-положительно на E_σ.

Стоит отметить, что при выполнении условия 2) условие (4) всегда выполняется.

5°. *Если выполняется хотя бы одно из условий* 1) *и* 2)*), *то в разложении* (7) *остаток* $R(x, y) = 0$ *при любом* $x \in E_\sigma$ *и всех* $y \in [a, b]$ (*а следовательно, любом* $y \in E_\sigma$ *и всех* $x \in [a, b]$).

Оказывается, предложения 4° и 5° допускают следующее существенное дополнение:

6°. *Если выполняется одно из условий* 1) *или* 2), *то ядро* $R(x, s)$ *полностью определяется ядром* $K(x, y)$ *и множеством* E_σ.

Последнее утверждение (т. е. тот факт, что ядро $R(x, s)$ полностью определяется множеством E_σ) для случая монотонной функции σ и при дополнительном требовании, близком к условию 2), но несколько более слабом (см. формулу (14)), установил М. Д. Дольберг [2].

Мы покажем здесь, что утверждение 6° в полном объеме следует из предложений 3°, 4°, 5° и хорошо известного факта (см., например, [3] и [4]), что всякое непрерывное эрмитово-неотрицательное ядро $K(x, y)$ $(a \leqslant x, y \leqslant b)$ порождает некоторое гильбертово пространство H и непрерывное отображение $x \to e_x$ $(x \in [a, b],\ e_x \in H)$ такое, что

$$(e_x, e_y) = K(x, y) \quad (a \leqslant x, y \leqslant b) \tag{8}$$

и линейная замкнутая оболочка элементов $e_x \in H$ $(a \leqslant x \leqslant b)$ совпадает с H.

Одновременно мы получим новую характеристику остаточного ядра $R(x, s)$ по $K(x, s)$ и множеству E_σ.

Для полноты укажем, как конструируется H и вложение $x \to e_x$. Каждому $x \in [a, b]$ отнесем символ e_x и образуем множество L всевозможных агрегатов X вида:

$$X = \sum_{j=1}^{n} \xi_j e_{x_j},$$

где $x_j \in [a, b]$ $(j = 1, 2, \ldots, n)$, а ξ_j $(j = 1, 2, \ldots, n)$ произвольные комплексные числа.

Множество L мы будем рассматривать как линейное множество, определяя операцию сложения двух агрегатов и умножение агрегата на скаляр в согласии с обычными правилами алгебры действий над буквенными выражениями с числовыми коэффициентами.

Введем в L квазискалярное произведение, полагая для любых двух агрегатов

$$X = \sum_{j=1}^{n} \xi_j e_{x_j},\quad Y = \sum_{k=1}^{m} \eta_k e_{y_k}$$

это произведение равным

$$(X, Y) = \sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{m} K(x_j, y_k)\, \xi_j \bar{\eta}_k.$$

---

*) В статье [1] вместо условия 2) рассматривалось условие строгой эрмитовой положительности ядра $K(x, y)$ на всем сегменте, но фактически использовалось более слабое условие 2).

Отождествляя в L всякие два элемента X, Y, для которых $(X - Y, X - Y) = 0$, мы превратим L в некоторое предгильбертово пространство, которое после пополнения даст нам требуемое гильбертово пространство H.

Отображение $x \to e_x$ после этого становится отображением сегмента $[a, b]$ в H, притом непрерывным, так как $(e_x - e_y, e_x - e_y) = K(x, x) - K(x, y) - K(y, x) + K(y, y) \to 0$ при $y \to x$.

Обозначим через M подпространство в H, являющееся линейной замкнутой оболочкой всех векторов e_s, где s пробегает E_σ.

Рассмотрим векторы

$$g_j = \sqrt{|\lambda_j|} \int_a^b \overline{\varphi_j(s)}\, e_s\, d\sigma(s) \quad (j \in J). \tag{9}$$

Так как каждый вектор g_j может быть получен как предел сумм вида

$$\sqrt{|\lambda_j|} \sum_\nu \overline{\varphi_j(s_\nu)}\, e_{s_\nu} [\sigma(s_{\nu+1}) - \sigma(s_\nu)],$$

где $s_\nu \in E_\sigma$ всякий раз, когда $\sigma(s_{\nu+1}) - \sigma(s_\nu) \neq 0$, то

$$g_j \in M \quad (j \in J).$$

В силу (5), (6) и (8) будем иметь:

$$(g_j, g_k) = \sqrt{|\lambda_j \lambda_k|} \int_a^b \int_a^b \overline{\varphi_j(x)}\, (e_x, e_s)\, \varphi_k(s)\, d\sigma(s)\, d\sigma(x) =$$

$$= \sqrt{|\lambda_j \lambda_k|} \int_a^b \left(\int_a^b K(x, s) \varphi_k(s)\, d\sigma(s) \right) \overline{\varphi_j(x)}\, d\sigma(x) = \delta_{jk} \quad (j, k \in J).$$

Таким образом, векторы $\{g_j\}_{j \in J}$ образуют ортонормированную систему. Более того, они образуют базис в M. В самом деле, их линейная замкнутая оболочка M_1, очевидно, $\subset M$. Для доказательства равенства $M_1 = M$ остается показать, что $e_s \in M_1$ при $s \in E_\sigma$, т. е. что

$$(e_s, e_s) = \sum_{j \in J} |(e_s, g_j)|^2 \text{ при } s \in E_\sigma. \tag{10}$$

Легко видеть, что согласно (6), (8) и (9) при любых $x, y \in [a, b]$:

$$\sum_{j \in J} (e_x, g_j)\, \overline{(e_y, g_j)} = \sum_{j \in J} \frac{\varphi_j(x) \overline{\varphi_j(y)}}{|\lambda_j|},$$

и так как $(e_s, e_s) = K(s, s)$, то равенство (10) имеет место в силу предложения 5°.

Таким образом, $M_1 = M$. Одновременно из (10) заключаем, что

$$\sum_{j \in J} \frac{\varphi_j(x) \overline{\varphi_j(y)}}{|\lambda_j|} = (e_{xM}, e_{y,M}) \quad (a \leqslant x, y \leqslant b),$$

а следовательно,

$$R(x, y) = (e_x, e_y) - (e_{xM}, e_{yM}) = (e_{xN}, e_{yN}), \tag{11}$$

где e_{xM} $(a \leqslant x \leqslant b)$ ортогональная проекция вектора e_x на M, а $e_{xN} = e_x - e_{xM}$ ортогональная проекция вектора e_x на $N = H \ominus M$.

Так как пространство M определяется исключительно множеством E_σ, то предложение 6° доказано.

С помощью формулы (11) можно получить следующую характеристику ядра $R(x, y)$ по ядру $K(x, y)$ и замкнутому множеству $E\ (= E_\sigma)$ из $[a, b]$, из которой уже элиминировано вспомогательное гильбертово пространство H.

X) *Обозначим через* $P = P\ (K, E)$ *выпуклое множество всех эрмитовых ядер* $Q\ (x, y)$ $(a \leqslant x, y \leqslant b)$, *удовлетворяющих двум условиям:*

I) $0 \prec Q\ (x, y) \prec K\ (x, y)$;

II) $Q\ (x, y) = 0$ *при* $x, y \in E$.

Тогда $R\ (x, y)$ *является максимальным элементом множества* P; *т. е.* $R\ (x, y) \succ Q\ (x, y)$, *каково бы ни было* $Q\ (x, y) \in P$.

В этой формулировке использована символика, согласно которой пишут $Q_1\ (x, y) \prec Q_2\ (x, y)$ или $Q_2\ (x, y) \succ Q_1\ (x, y)$, если $Q_2\ (x, y) - Q_1\ (x, y)$ эрмитово-неотрицательное ядро (на $[a, b]$).

2. Рассмотрим, например, тот случай, когда E_σ конечное множество: $E_\sigma = (s_1, s_2, \ldots, s_n)$. Строгая эрмитова положительность ядра $K\ (x, y)$ на E_σ означает положительность формы (2). Для эрмитово-неотрицательного ядра $K\ (x, y)$ на E_σ форма (2) будет положительной в том и только в том случае, когда

$$K\left(\begin{smallmatrix} s_1 & \ldots & s_n \\ s_1 & \ldots & s_n \end{smallmatrix}\right) \equiv \det \| K\ (s_j, s_k) \|_1^n > 0. \qquad (12)$$

В рассматриваемом случае

$$e_{yM} = R_1(y)\, e_{s_1} + R_2(y)\, e_{s_2} + \ldots + R_n(y)\, e_{s_n},$$

где $R_j(y)$ $(j = 1, 2, \ldots, n)$ скалярные функции от $y \in [a, b]$. Поэтому согласно (11)

$$R\ (x, y) = K\ (x, y) - (e_x, e_{yM}) = K\ (x, y) - \sum_{j=1}^{n} \overline{R_j(y)}\, K\ (x, s_j).$$ Записывая, что $R\ (s_j, y) = 0$ $(j = 1, 2, \ldots, n)$, легко найдем, используя условие (12), функции $R_j\ (y)$ $(j = 1, 2, \ldots, n)$; после этого обнаружится, что $R\ (x, y)$ совпадает с ядром

$$K\ (x, y; s_1, s_2, \ldots, s_n) = K\left(\begin{smallmatrix} x & s_1 & \ldots & s_n \\ y & s_1 & \ldots & s_n \end{smallmatrix}\right) \Big/ K\left(\begin{smallmatrix} s_1 & \ldots & s_n \\ s_1 & \ldots & s_n \end{smallmatrix}\right). \qquad (13)$$

Если ядро $K\ (x, y)$ является функцией влияния некоторого упругого континуума S, простирающегося от $x = a$ до $x = b$, то условие (12) будет означать *подвижность* точек $s_1, s_2, \ldots, s_n$. Функция (13) будет функцией влияния континуума S^*, получающегося из S путем установки в точках $s_1, s_2, \ldots, s_n$ неподвижных шарнирных опор (см. [5], стр. 56).

Пусть теперь E_σ произвольное замкнутое подмножество сегмента $[a, b]$, а $\{s_j\}_1^\infty$ последовательность точек, плотно расположенная на E_σ. Пусть, кроме того, выполняется условие (12) при любом n. Тогда нетрудно показать (особенно просто это получается с помощью предложения X)), что

$$R\ (x, y) = \lim_{n \to \infty} K\ (x, y; s_1, s_2, \ldots, s_n). \qquad (14)$$

Эта формула принадлежит М. Д. Дольбергу [2]; именно путем ее установления он и доказал предложение 6° (для монотонной функции σ).

Из (14) после сказанного о функции (13) получается соответствующая механическая интерпретация ядра $R\ (x, y)$ для случая, когда $K\ (x, y)$ является функцией влияния некоторого сегментного упругого континуума.

3. Нетрудно понять, что все изложенное непосредственно обобщается на случай интегрального уравнения

$$\varphi\ (p) = \lambda \int_Q K\ (p, q)\, \varphi\ (q)\, d\sigma(q),$$

где Q — некоторый компакт, $K\ (p, q)$ — непрерывное на $Q \times Q$ эрмитово-неотрицательное ядро, а $\sigma\ (\cdot)$ некоторая вещественная радонова мера на Q.

Рассмотрим совершенно элементарный случай, когда компакт Q состоит из конечного числа точек: $Q = \{q_1, q_2, \ldots, q_m\}$ $(m < n)$. Пусть $E_\sigma =$ $\{q_1, q_2, \ldots, q_n\}$. Положим

$$K\ (q_j, q_k) = a_{jk},\ R\ (q_j, q_k) = b_{jk},\ c_{jk} = a_{jk} - b_{jk}\ (j, k = 1, 2, \ldots, n).$$

В предположении

$$\Delta_m \equiv A\left(\begin{smallmatrix} 1 & 2 & \ldots & m \\ 1 & 2 & \ldots & m \end{smallmatrix}\right) \equiv \det \| a_{jk} \|_1^m > 0$$

будем иметь в согласии с (13):

$$b_{jk} = A\left(\begin{smallmatrix} 1 & 2 & \ldots & m & j \\ 1 & 2 & \ldots & m & k \end{smallmatrix}\right) \Big/ A\left(\begin{smallmatrix} 1 & 2 & \ldots & m \\ 1 & 2 & \ldots & m \end{smallmatrix}\right)\ (j, k = 1, 2, \ldots, n),$$

так что, как оно и должно быть, $b_{jk} = 0$, если один из индексов j или $k \leqslant m$. Легко видеть, что разложение $a_{jk} = b_{jk} + c_{jk}$ для соответствующих эрмитовых форм означает следующее:

$$\sum_{j, k=1}^{n} a_{jk}\, \xi_k \bar{\xi}_j = \frac{1}{\Delta_m} \begin{vmatrix} \Delta_m & \begin{matrix} \eta_1 \\ \vdots \\ \eta_m \end{matrix} \\ \bar{\eta}_1 \ldots \bar{\eta}_m & 0 \end{vmatrix} + \sum_{j, k=m+1}^{n} b_{jk}\, \xi_k \bar{\xi}_j, \qquad (15)$$

где

$$\eta_j = \sum_{k=1}^{n} a_{jk}\, \xi_k\ (j = 1, 2, \ldots, m).$$

Мы пришли к известному тождеству Сильвестера (см. [5], стр. 40), справедливого при единственном предположении $\Delta_m \neq 0$.

В случае неотрицательности эрмитовой формы с матрицей $\| a_{jk} \|_1^n$ предложение X) позволяет дать новую характеристику формы, соответствующей матрице $\| b_{jk} \|_{m+1}^n$: *эта форма является максимальной эрмитовой формой среди эрмитовых форм, содержащих лишь переменные* $\xi_{m+1}, \ldots, \xi_n$ *и не превосходящих данную форму* $\Sigma\, a_{jk}\, \xi_j \bar{\xi}_k$.

Согласно (7) первое слагаемое в правой части (15) допускает любопытное представление через собственные векторы и собственные числа укороченной матрицы $\| a_{jk} \|_1^n$, которое предоставляем выписать читателю.

Разложения (7) и (15) имеют аналоги в теории неотрицательных эрмитовых операторов в абстрактном гильбертовом пространстве, на выяснении которых, однако, мы не имеем возможности здесь остановиться.

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

1. М. Г. Крейн, О нагруженных интегральных уравнениях, функции распределения которых не монотонны, Сборник памяти академика Д. А. Граве, ГТТИ, 1940, 88—103.
2. М. Д. Дольберг, О разложении позитивного ядра в билинейный ряд, ДАН СССР, т. 120, № 5, 945—948.
3. М. Г. Крейн, Эрмитово-положительные ядра на однородных пространствах, Укр. матем. журнал, т. 1, № 4 (1949), 64—98.
4. N. Aronszajn, Theory of reproducing kernels, Trans. Amer. Math. Soc., 68, № 3 (1950), 337—404 (русский перевод в сб. «Математика», № 7: 2, (1963).
5. Ф. Р. Гантмахер и М. Г. Крейн, Осцилляционные матрицы и ядра и малые колебания механических систем, ГТТИ, 1950, 1—359.

М. Г. КРЕЙН

УНЕЛЕ КЕСТИУНЬ ДИН ТЕОРИЯ ЕКУАЦИИЛОР ИНТЕГРАЛЕ СУБ САРЧИНЭ

Резумат

Се черчетязэ екуация интегралэ суб сарчинэ (1) ку нуклеул континуу хермитиан ненегатив $K(x, y)$ ши функция (норматэ) де дистрибуцие $\sigma(x)$ ку вариацие мэржинитэ. Се демонстрязэ, кэ дакэ аре лок чел пуцин уна дин кондицииле: 1) функция де дистрибуцие σ есте монотонэ ши 2) нуклеул $K(x, y)$ есте стрикт хермитиан позитив пе мулцимя E_σ а пунктелор де вариацие а функцией σ (везь дефиниция ачестей ноциунь ла паж. 41), атунч ын дескомпунеря женерализатэ а луй Мерсер (7) а нуклеулуй $K(x, y)$ рестул $R(x, y)$ се детерминэ ын мод уник де кэтре нуклеул $K(x, y)$ ши мулцимя E_σ.

Пентру казул, кынд аре лок кондиция 1) (ши унеле кондиций суплиментаре), ачаста а фост демонстрат принтр'о алтэ методэ де М. Д. Долберг [2].

Се дэ о аналожие алжебрикэ а афирмацией демонстрате ши а характеристичелор рестулуй $R(x, y)$ ын теория формелор хермит.

И. А. НОВОСЕЛЬСКИЙ

О НЕКОТОРЫХ ПРИЗНАКАХ ПОЛНОТЫ СИСТЕМЫ КОРНЕВЫХ ВЕКТОРОВ ВПОЛНЕ НЕПРЕРЫВНОГО ОПЕРАТОРА

Пусть H — гильбертово пространство, Ω — нормированное кольцо всех линейных ограниченных операторов, действующих в H, и S_∞ — идеал вполне непрерывных операторов. Если оператор $A \in S_\infty$, то через $\{s_n(A)\}_1^\infty$ обозначим последовательность всех собственных чисел оператора $(A^*A)^{1/2}$, занумерованных в порядке убывания и с учетом их кратностей. Для оператора $A \in \Omega$ через $\theta(A)$ обозначим наименьший угол в комплексной плоскости с вершиной в точке $\lambda = 0$, содержащий *числовую область* оператора A, т. е. множество всех чисел вида $(A\varphi, \varphi)$, где $\varphi \in H$ и $\|\varphi\| = 1$. Через $R(A)$ и $Z(A)$ далее обозначаются множество значений и ядро оператора A: $R(A) = AH$, $Z(A) = \{\varphi: \varphi \in H,\ A\varphi = 0\}$.

Вектор φ называется *корневым вектором* оператора A, соответствующим собственному значению λ, если $(A - \lambda I)^n \varphi = 0$ для некоторого натурального n. Линейную замкнутую оболочку всех корневых векторов оператора $A \in \Omega$ обозначим через $E(A)$, а через $\tilde{E}(A)$ — линейную замкнутую оболочку всех корневых векторов, соответствующих собственным значениям $\lambda \neq 0$. Ортогональное дополнение в H к $\tilde{E}(A)$ будем обозначать $L(A)$.

Оператор $A \in \Omega$ назовем *полным*, если $\tilde{E}(A) = H$, и *0-полным*, если $E(A) = H$. Если же имеет место соотношение $\tilde{E}(A) = \overline{R(A)}$ (соответственно $E(A) \supseteq R(A)$), то оператор будем называть *R-полным* (соответственно *R—0-полным*).

Основной целью настоящей заметки является установление некоторых связей между полнотой оператора $A \in S_\infty$ и полнотой операторов вида AG и GA, где $G \in \Omega$ — неотрицательный оператор.

В п. 1 рассматривается вопрос о полноте симметризуемых операторов. Во втором пункте указываются некоторые случаи, когда из полноты оператора A можно сделать заключение о полноте операторов AG и GA $(G \geq 0)$. В п. 3 устанавливается полнота некоторых «диссипатизируемых» операторов, т. е. таких операторов A, что $\theta(AG) \leq \pi$ $(G \geq 0.)$

1. Оператор $A \in S_\infty$ называется *вольтерровым*, если у него нет отличных от нуля собственных значений.

Следующие два вспомогательных предложения известны (см., например, [4]); для удобства приведем их доказательства.

Лемма 1. *Если оператор $A \in S_\infty$, то сужение оператора A^* на подпространство $L(A)$ есть вольтерров оператор.*

Доказательство. Сужение оператора A^* на $L(A)$ обозначим через $\tilde{A}^*$ (инвариантность $L(A)$ для A^* очевидна). Допустим, что у оператора $\tilde{A}^*$ существует собственное значение $\lambda \neq 0$, и пусть φ—соответствующий собственный вектор. Тогда для вектора φ существует такое натуральное число n, что уравнение $(A^*-\lambda I)^n f=\varphi$ не имеет решения; поэтому можно найти вектор g такой, что $(A-\bar{\lambda} I)^n g=0$ и $(\varphi, g) \neq 0$. Последнее соотношение приводит к противоречию, так как $\varphi \in L(A)$, $g \in \tilde{E}(A)$.

Лемма доказана.

С помощью леммы 1 устанавливается

Лемма 2. *Если $A \in S_\infty$ и оператор A^* имеет собственное значение, отличное от нуля, в любом инвариантном подпространстве, где он не равен тождественно нулю, то оператор A является R-полным.*

Так как $\tilde{E}(A) \subseteq \overline{R(A)}$, то достаточно установить, что $\tilde{E}(A) \supseteq \overline{R(A)}$. Последнее соотношение равносильно условию $L(A) \subseteq Z(A^*)$. Из леммы 1 следует, что оператор $\tilde{A}^*$ (сужение A^* на $L(A)$) вольтерров и, поэтому, в силу условия, $\tilde{A}^*=0$. Это и означает, что $L(A) \subseteq Z(A^*)$.

Теорема. 1. *Пусть для оператора $A \in S_\infty$ существует такой ограниченный оператор $G \geqslant 0$, что $AG=(AG)^*$, причем $\dim Z(G)<\infty$. Если $\overline{R(A)}=H$, то оператор A полный.*

Доказательство. Очевидно, достаточно установить, что $L(A)=0$. Обозначим через P ортогональный проектор на $L(A)$ и через M—сужение оператора PG на $L(A)$. Оператор M неотрицателен, так как $(Mx, x)=(PGx, x)=(Gx, x) \geqslant 0$ $(x \in L(A))$, а оператор $M\tilde{A}^*$ самосопряженный:

$$(M\tilde{A}^* x, y)=(GA^* x, y)=(AG x, y)=(x, GA^* y)=(x, M\tilde{A}^* y) \quad (x, y \in L(A)).$$

Оператор $\tilde{A}^*$ согласно лемме 1 вольтерров. Но тогда, в силу известных результатов теории симметризуемых операторов (см. [1], стр. 376), $M\tilde{A}^*=0$, т. е. $R(\tilde{A}^*) \subset Z(G)$. Отсюда следует, что вольтерров оператор $\tilde{A}^*$ является конечномерным. Так как $\overline{R(A)}=H$, то точка $\lambda=0$ также не является собственным значением оператора $\tilde{A}^*$. Это возможно лишь в случае, когда $L(A)=0$.

Теорема доказана.

Следствие 1. *Пусть оператор $A \in S_\infty$ и оператор $G \in \Omega$ $(G=G^*)$ таковы, что $AG \geqslant 0$, $\dim Z(AG)<\infty$. Если $\overline{R(A)}=H$, то оператор A полный.*

Действительно, операторы A и $F=AG$ удовлетворяют условиям теоремы 1.

Следствие 2. *Если оператор $A \in S_\infty$, а оператор $G \in \Omega$ $(G=G^*)$ таков, что $AG>0$, то оператор A полный.*

В самом деле, условия теоремы 1 выполнены, так как $Z(AG)=0$ и $\overline{R(A)} \supseteq \overline{R(AG)}=H$.

Замечание 1. В теореме 1 и следствиях из нее условие $A \in S_\infty$ можно заменить условием: $A^n \in S_\infty$ для некоторого натурального n.

Отметим, что для случая, когда $G>0$ (т. е. $Z(G)=0$), теорема 1 следует из результатов М. Г. Крейна [2], а также из более поздних результатов Дьедонне [3]. Точнее говоря, из указанных работ вытекает следующее предложение.

1°. *Если оператор $A \in S_\infty$ и $AG=GA^*$ $(G \in \Omega, G>0)$, то оператор A является R-полным и 0-полным.*

Нетрудно убедиться, что условие $\dim Z(G)<\infty$ в теореме 1 нельзя заменить условием $\dim R(G)=\infty$. Заметим также, что если в условиях теоремы 1 отказаться от требования $\overline{R(A)}=H$, то, как показывает приводимый ниже пример, оператор A может не быть даже R-0-полным. Этот пример показывает также, что в предложении 1° условие $AG=GA^*$ нельзя заменить условием $GA=A^*G$.

Пример. Пусть $\{\varphi_j\}_1^\infty$—ортонормированный базис гильбертова пространства H и $\{\lambda_j\}$—некоторая последовательность положительных чисел $(\lambda_j \to 0)$. Определим операторы $A \in S_\infty$ и $G \in \Omega$ следующим образом:

$$A=\sum_{j=3}^{\infty} \lambda_j(\cdot, \varphi_j)\varphi_j+(\cdot, \varphi_1)\varphi_2+(\cdot, \varphi_2)\psi,$$

$$\psi=\sum_{j=3}^{\infty} \lambda_j \varphi_j, \quad G=\sum_{j=3}^{\infty}(\cdot, \varphi_j)\varphi_j.$$

Нетрудно убедиться, что у оператора A нет корневых векторов, отличных от собственных, а собственными являются только векторы φ_j $(j \geqslant 3)$. Так как оператор $G \geqslant 0$, $\dim Z(G)=2$ и

$$AG=\sum_{j=3}^{\infty} \lambda_j(\cdot\, \varphi_j)\varphi_j \geqslant 0,$$

то все условия теоремы 1, кроме условия $\overline{R(A)}=H$, выполнены. В то же время оператор A не является R—0-полным, так как $\overline{R(A)}$ есть линейная замкнутая оболочка векторов φ_j $(j=2, 3, \ldots)$, а $E(A)$—линейная замкнутая оболочка векторов φ_j $(j=3, 4, \ldots)$.

Рассмотрим, далее, оператор

$$G_1=\sum_{j=3}^{\infty} \varepsilon_j(\cdot\, g_j)g_j+(\cdot, \varphi_1)\varphi_1,$$

где

$$g_j=\varphi_j+\varphi_2+\frac{1}{\lambda_j}\varphi_1, \quad \varepsilon_j>0 \ (j \geqslant 3), \quad \sum_{j=3}^{\infty} \varepsilon_j \| g_j \|^2<\infty.$$

Очевидно, что $G_1 \in \Omega$ и $G_1 \geqslant 0$. Покажем, что $G_1>0$. В самом деле, если $(G_1 x, x)=0$, то $(x, \varphi_1)=(x, g_j)=0$, т. е. $(x, \varphi_j)=-(x, \varphi_2)$ $(j \geqslant 3)$. Так как $\sum_{j=1}^{\infty}|(x, \varphi_j)|^2<\infty$, то $(x, \varphi_j)=0$ $(j=2, 3, \ldots)$ и, следовательно, $x=0$.

Нетрудно проверить, что векторы g_j $(j \geqslant 3)$ являются собственными векторами оператора A^*, соответствующими собственным значениям λ_j, и поэтому

$$A^* G_1 = \sum_{j=3}^{\infty} \varepsilon_j \lambda_j (\cdot, g_j) g_j \geqslant 0.$$

Следовательно, $G_1 A = A^* G_1$, и в то же время оператор A не является R-0-полным.

2. Установим некоторую связь между системами корневых векторов операторов $A_1 A_2$ и $A_2 A_1$ $(A_1, A_2 \in \Omega)$.

2.° *Если φ — корневой вектор оператора $A_1 A_2$, соответствующий собственному значению λ, то $\psi = A_2 \varphi$ есть корневой вектор оператора $A_2 A_1$, соответствующий тому же λ.*

В самом деле, если $(A_1 A_2 - \lambda I)^n \varphi = 0$, то в силу легко проверяемого равенства

$$A_2 (A_1 A_2 - \lambda I)^n = (A_2 A_1 - \lambda I)^n A_2$$

получим, что $(A_2 A_1 - \lambda I)^n A_2 \varphi = 0$, откуда и следует, что $A_2 \varphi$ есть корневой вектор оператора $A_2 A_1$[1].

3.° *Если оператор $A_1 A_2$ полный, то $\widetilde{E}(A_2 A_1) \supseteq R(A_2)$ (и тем более, оператор $A_2 A_1$ является R-полным).*

Действительно, так как оператор $A_1 A_2$ полный, то для любого вектора $x \in H$ и любого числа $\varepsilon > 0$ найдутся такие корневые векторы $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$ и такие числа $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$, что

$$\| x - \sum_{j=1}^{\infty} \alpha_j \varphi_j \| \leqslant \varepsilon.$$

Следовательно,

$$\| A_2 x - \sum_{j=1}^{n} \alpha_j A_2 \varphi_j \| \leqslant \varepsilon \| A_2 \|.$$

Так как $A_2 \varphi_j$ $(j = 1, \ldots, n)$ — корневые векторы оператора $A_2 A_1$ (см. 2°), то отсюда вытекает, что $\widetilde{E}(A_2 A_1) \supseteq R(A_2) \supseteq R(A_2 A_1)$.

Аналогично устанавливаются следующие утверждения.

4°. *Если оператор $A_1 A_2$ R-полный (R-0-полный) и $\overline{R(A_2)} = H$, то оператор $A_2 A_1$ также R-полный (R-0-полный).*

5°. *Если оператор $A_1 A_2$ 0-полный, то $E(A_2 A_1) \supseteq R(A_2)$ (и, тем более, оператор $A_2 A_1$ R-0-полный). Если, кроме того, все корневые векторы оператора $A_1 A_2$, соответствующие собственному значению $\lambda = 0$, являются собственными и если $Z(A_1) = 0$, то $\widetilde{E}(A_2 A_1) \supseteq R(A_2)$ (и, тем более, оператор $A_2 A_1$ является R-полным).*

Теорема 2. *Пусть число α $(0 < \alpha \leqslant 1)$ и двусторонние идеалы Σ_1 и Σ_2 кольца Ω таковы, что всякий оператор A, удовлетворяющий условиям:*

$$1)\ A_R = \frac{A^* + A}{2} \in \Sigma_1;\ 2)\ A_J = \frac{A^* - A}{2i} \in \Sigma_2;\ 3)\ \theta(A) \leqslant \alpha\pi,$$

1) Нетрудно показать, что ψ может равняться нулю, лишь когда φ есть собственный вектор оператора $A_1 A_2$, соответствующий собственному значению $\lambda = 0$.

является 0-полным. Если оператор A удовлетворяет условиям 1)—3) и оператор $G \geqslant 0$ $(G \in \Omega)$, то операторы AG и GA являются R-0-полными; если же оператор $G > 0$, то оператор AG R-полный, а оператор GA 0-полный.

Доказательство. Пусть $F = G^{1/2}$. Покажем, что оператор FAF 0-полный. Действительно, выполнение условий 1), 2) следует из соотношений $(FAF)_R = FA_R F$ и $(FAF)_J = FA_J F$, а выполнение условия 3) — из равенств

$$(FAFx, x) = (AFx, Fx) = (Ay, y) \quad (x \in H,\ y = Fx).$$

Применяя утверждение 5° к операторам F и AF (соответственно, к FA и F), получим, что операторы AG и GA являются R-0-полными.

Из условия $\theta(FAF) \leqslant \alpha\pi$ нетрудно вывести, что все корневые векторы оператора FAF, соответствующие собственному значению $\lambda = 0$, являются собственными. Если оператор $G > 0$, то $Z(F) = 0$, $\overline{R(F)} = H$, и в силу утверждения 5° оператор AG R-полный, а оператор GA 0-полный.

Теорема доказана.

Замечание 2. Если всякий оператор A, удовлетворяющий условиям 1)—3) теоремы 2, является R-полным, то при $G > 0$ оператор GA будет R-полным.

Это следует из предложения 4° (так как $\overline{R(F)} = H$).

С помощью теоремы 2 и известных признаков полноты можно получить ряд предложений о полноте операторов вида AG и GA $(A \in S_\infty,\ G \in \Omega,\ G \geqslant 0)$. Приведем некоторые из них, доказываемые на основании результатов В. Б. Лидского [4] и В. И. Мацаева [5].

Теорема 3. *Пусть для оператора $A \in S_\infty$ выполняются следующие условия: 1) $s_n(A) = o(n^{-\beta})$ $(\beta \leqslant 1)$, 2) $\theta(A) = \beta\pi$. Если оператор $G \geqslant 0$ $(G \in \Omega)$, то операторы AG и GA являются R-0-полными; если $G > 0$, то AG R-полный, а GA R-полный и 0-полный.*

Замечание 3. При $\beta < 1$ теорема 3 сохраняет силу, если заменить условие 1) условием 1'): $s_n(A_J) = o(n^{-\beta})$.

Теорема 4. *Пусть для оператора $A \in S_\infty$ выполняются следующие условия: 1) $A_J \geqslant 0$; 2) $s_n(A_R) = o(n^{-1})$. Если оператор $G \geqslant 0$ $(G \in \Omega)$, то операторы AG и GA являются R-0-полными; если $G > 0$, то оператор AG R-полный, а оператор GA R-полный и 0-полный.*

Укажем также два предложения о полноте операторов вида $G(I + T)G$, где $G, T \in S_\infty$ и $G = G^*$.

Теорема 5. *Пусть операторы G, $T \in S_\infty$, $G = G^*$ и*

$$\sum_{n=1}^{\infty} s_n^p(G) < \infty$$

при некотором $p > 0$. Если $Z(I + T) = 0$ и $Z(G) = 0$, то оператор $G(I + T)G$ является полным.

Оператор $(I + T)G^2$ является полным в силу теоремы М. В. Келдыша (см. [4] или [6]). Применяя утверждение 4° к операторам $(I + T)G$ и G и учитывая, что $\overline{R(G)} = H$, получим, что оператор $G(I + T)G$ полный.

Точно так же с помощью теоремы В. И. Мацаева [7] доказывается следующая

Теорема 6. *Пусть операторы $G, T \in S_\infty$, $G = G^*$ и*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{s_n(T)}{n} < \infty.$$

Если $Z(I+T) = Z(G) = 0$, то оператор $G(I+T)G$ является полным.

Применяя другие признаки полноты (см., например, [5], [8]), можно получить еще ряд предложений, аналогичных теоремам 3—6.

В заключение этого пункта приведем одно простое следствие из теоремы 3 (при $\beta = 1/2$) для интегральных операторов.

Теорема 7. *Пусть $h(t)$ $(a \leqslant t \leqslant b)$ — ограниченная измеримая функция, ядро $A(t, s)$ $(a \leqslant t, s \leqslant b)$ удовлетворяет условиям:*

$$1) \int_a^b\int_a^b |A(t,s)|^2 dt\, ds < \infty;$$

2) *каждое из ядер*

$$A(t,s) + \overline{A(s,t)},\ i\,[\overline{A(s,t)} - A(t,s)]$$

является эрмитово-неотрицательным; и B_1, B_2 — операторы, определенные в $L_2(a, b)$ равенствами:

$$(B_1\varphi)(t) = \int_a^b A(t,s)\,h(s)\,\varphi(s)\,ds,\ (B_2\varphi)(t) = h(t)\int_a^b A(t,s)\ \varphi(s)\,ds.$$

Если $h(t) \geqslant 0$, то операторы B_1 и B_2 являются R-0-полными; если же $h(t) > 0$, то B_1 R-полный, а B_2 R-полный и 0-полный.

3. В этом пункте устанавливаются две теоремы о полноте «диссипатизируемых» справа операторов.

Лемма 3. *Пусть для оператора $A \in S_\infty$ $(A \neq 0)$ выполняется условие: $s_n(A) = o\,(n^{-\beta})$ $(\beta \leqslant 1)$. Если существует такой ограниченный оператор $G > 0$, что $\theta(GA) \leqslant \beta\pi$, то оператор A имеет хотя бы одно ненулевое собственное значение.*

Доказательство. Рассмотрим углы в комплексной плоскости

$$\Lambda = \{z: |\arg z| \leqslant \beta\pi\}$$

и

$$\Lambda_1 = \{z: \beta\pi \leqslant |\arg(z+a)| \leqslant (2-\beta)\pi\}. \quad (a > 0).$$

Положим $F = G^{1/2}$. Так как $(GAx, x) \in \Lambda$ $(x \in H)$, то для любого числа $\mu \in \Lambda_1$ имеем

$$\|F(A-\mu I)x\|\ \|Fx\| \geqslant |(G(A-\mu I)x, x)| =$$

$$= \left|\frac{(GAx,x)}{(Gx,x)} - \mu\right|(Gx,x) \geqslant \rho\,(\mu, \Lambda)\,\|Fx\|^2,$$

где через $\rho(\mu, \Lambda)$ обозначено расстояние от точки μ до Λ. Так как $\rho(\mu, \Lambda) \geqslant a \sin\beta\pi = h$, то, сделав в неравенстве

$$\|F(A-\mu I)x\| \geqslant \rho\,(\mu, \Lambda)\,\|Fx\|$$

замену $\mu = \lambda^{-1}$ и $x = (I - \lambda A)^{-1} y$, получим

$$\|F(I-\lambda A)^{-1} y\| \leqslant h^{-1} |\lambda|\ \|Fy\| \quad (\lambda \in \Lambda_1,\ y \in H). \tag{1}$$

Допустим, что оператор A вольтерров. Тогда имеет место следующая оценка [9]:

$$\ln \max_{|\lambda|=r} \|(I-\lambda A)^{-1}\| = 0\,(r^p)\ (r \to \infty). \tag{2}$$

Функция $\psi(\lambda) = (G(I-\lambda A)^{-1} f, g)$ $(f, g \in H)$ аналитична на всей плоскости. Так как для $\lambda \in \Lambda_1$ имеет место оценка $|\psi(\lambda)| \leqslant K|\lambda|$ и, так как, в силу (2),

$$\ln \max_{|\lambda|=r} |\psi(\lambda)| = o\,(r^p)\ (r \to \infty), \tag{3}$$

то по теореме Фрагмена—Линделефа $|\psi(\lambda)| \leqslant K|\lambda|$ и для всех $\lambda \in \Lambda_1$. Поэтому $\psi(\lambda)$ есть многочлен первой степени относительно λ. Следовательно, все члены разложения

$$\psi(\lambda) = (Gf, g) + \lambda\,(GAf, g) + \lambda^2\,(GA^2 f, g) + \ldots,$$

начиная с третьего, равны нулю; в частности,

$$(GA^2 f, g) = 0 \quad (f, g \in H). \tag{4}$$

Отсюда следует, что $R(A) \subset Z(GA)$. Нетрудно убедиться, что подпространство $Z(GA)$ ортогонально к $R(GA)$. Таким образом, $R(A)$ ортогонально к $R(GA)$. В частности, $(GAx, Ax) = 0$ для любого $x \in H$, и так как $G > 0$, то оператор $A = 0$.

Это противоречие и доказывает лемму.

Теорема 8. *Пусть для оператора $A \in S_\infty$ выполняется условие: $s_n(A) = o\,(n^{-\beta})$ $(\beta \leqslant 1)$. Если существует ограниченный оператор $G > 0$ такой, что $\theta(AG) \leqslant \beta\pi$, то оператор A является R-полным.*

Доказательство. В силу леммы 2 достаточно показать, что оператор A^* имеет в каждом инвариантном подпространстве, где он не равен тождественно нулю, отличное от нуля собственное значение.

Пусть L — некоторое инвариантное подпространство оператора A^*, P — ортогональный проектор на L, M — сужение оператора PG на L и $\tilde{A}^*$ — сужение A^* на L. Операторы $\tilde{A}^*$ и M удовлетворяют условиям леммы 3. Действительно,

$$(Mx, x) = (PGx, x) = (Gx, Px) = (Gx, x) > o\,(x \in L),$$

$$s_n(\tilde{A}^*) \leqslant s_n(A^*) = s_n(A) = 0\,(n^{-\beta}),$$

$$\theta\,(M\tilde{A}^*) = \theta\,(PG\tilde{A}^*) \leqslant \theta\,(GA^*) = \theta\,(AG) \leqslant \beta\pi.$$

Поэтому при условии $\tilde{A}^* \neq 0$ оператор A^* имеет в L ненулевое собственное значение.

Теорема доказана.

Замечание 4. При замене в условиях теоремы 8 AG на GA (т. е. при условиях леммы 3) утверждение теоремы теряет силу.

Действительно, для рассмотренных в приведенном выше примере операторов A и $G_1 > 0$ выполняется условие $\theta(G_1 A) = 0$. Если положить $\lambda_n = n^{-\gamma}$ ($\gamma > \beta$, $n \geqslant 3$), то, очевидно, $s_n(A) = o(n^{-\beta})$, и в то же время оператор A не является R—0-полным.

Лемма 4. *Пусть для оператора $A \in S_\infty$ выполняются условия: 1) $Z(A) = 0$, 2) $s_n(A) = o(n^{-\beta})$ ($\beta \leqslant 1$). Если существует такой оператор $G \in \Omega$, $G \geqslant 0$ ($\dim Z(G) < \infty$); что $\theta(GA) \leqslant \beta\pi$, то оператор A имеет хоть одно ненулевое собственное значение.*

Доказательство этой леммы незначительно отличается от доказательства леммы 3. Необходимые оценки (1) и (3) получаются аналогично, и из (4) следует $R(A^2) \subset Z(G)$. В силу того, что $\dim Z(G) < \infty$, A^2 есть конечномерный оператор. С другой стороны, A^2 не имеет ни одного собственного значения, так как A^2— вольтерров, и $Z(A^2) = 0$. Это возможно лишь при $\dim H = 0$.

Следующая теорема доказывается с помощью леммы 4 аналогично теореме 8.

Теорема 9. *Пусть для оператора $A \in S_\infty$ выполняются условия: 1) $\overline{R(A)} = H$; 2) $s_n(A) = o(n^{-\beta})$ ($\beta \leqslant 1$). Если существует такой ограниченный оператор $G \geqslant 0$ ($\dim Z(G) < \infty$), что $\theta(AG) \leqslant \beta\pi$, то оператор A является полным.*

Замечание 5. С помощью теорем о связи спектров эрмитовых компонент вольтеррова оператора (см. [10], [11]) нетрудно показать, что в леммах 3, 4 и теоремах 8, 9 при $\beta < 1$ условие: $s_n(A) = o(n^{-\beta})$ можно заменить условием: $s_n(A_j) = o(n^{-\beta})$.

Автор выражает благодарность А. С. Маркусу за постановку задачи и советы.

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

1. A. C. Zaanen, Linear analysis, Amsterdam, 1960.
2. М. Г. Крейн, Про лінійні цілком неперервні оператори в функціональных просторах з двома нормами, Сб. трудов Ин-та матем. АН УССР, 9 (1947), 104—128.
3. J. Dieudonné, Quasi-hermitian operators, Proc. Internat. Sympos, Linear Spaces, Jerusalem, 1961, 115—122.
4. М. В. Келдыш, и В. Б. Лидский, Вопросы спектральной теории несамосопряженных операторов, Тр. IV Всесоюзн. матем. съезда, I (1963), 101—120.
5. В. И. Мацаев, Несколько теорем о полноте корневых подпространств вполе непрерывных операторов, ДАН СССР, 155, № 2 (1964), 273—277.
6. М. В. Келдыш, О собственных значениях и собственных функциях некоторых классов несамосопряженных уравнений, ДАН СССР, 77, № 1 (1951), 11—14.
7. В. И. Мацаев, Об одном классе вполне непрерывных операторов, ДАН СССР, 139, № 3 (1961), 548—552.
8. А. С. Маркус, О некоторых признаках полноты системы корневых векторов линейного оператора и суммируемости рядов по этой системе, ДАН СССР, 155, № 4 (1964), 753—756.
9. В. И. Мацаев, Об одном методе оценки резольвент несамосопряженных операторов, ДАН СССР, 154, № 5 (1964), 1034—1038.
10. В. И. Мацаев, О вольтерровых операторах, получаемых возмущением самосопряженных, ДАН СССР, 139, № 4 (1961), 810—814.
11. И. Ц. Гохберг и М. Г. Крейн, О вольтерровых операторах с мнимой компонентой того или иного класса, ДАН СССР, 139, № 4 (1961), 779—780.

И. А. НОВОСЕЛЬСКИЙ

УНЕЛЕ КРИТЕРИЙ ДЕ КОМПЛЕТИЧИТАТЕ АЛЕ СИСТЕМУЛУЙ ДЕ ВЕКТОРЬ ПРОПРИЙ ШИ АСОЧИЯЦЬ АЙ ОПЕРАТОРУЛУЙ КОМПЛЕКТ КОНТИНУ

Резумат

Ын артикол се стабилеск унеле релаций динтре комплетичитатя операторулуй комплет континуу A ши комплетичитатя операторилор де форма AG, GA, унде G есте ун оператор ненегатив мэржинит.

М. Д. САНДИК

ВПОЛНЕ ПРИВОДИМЫЕ n-КВАЗИГРУППЫ

В настоящей статье изучаются алгебры с одной n-арной операцией, названные n-квазигруппами. Одним из вопросов теории n-квазигрупп, представляющих интерес, является вопрос о представлении n-арной квазигрупповой операции через операции меньшей арности, в частности через бинарные. Это дает возможность свести изучение n-квазигрупп к более знакомым бинарным квазигруппам.

В работах [1], [2], [9], [11] рассматривается вопрос о представлении n-арной операции, удовлетворяющей ассоциативному закону (n-группы, n-полугруппы) либо законам, близким к ассоциативному (np-оперативы, квазигруппы с тождеством Диккера) [3], [11]. В [6] авторы рассматривают вопрос о представлении n-квазигрупп через бинарные операции. Дается критерий σ-приводимости n-квазигрупп в случае, когда элементы в неприводимой и приводимой частях находятся в одной и той же упорядоченности.

Целью настоящей статьи является решение вопроса о приводимости (вполне приводимости) n-квазигрупп без каких-либо ограничений над упорядоченностью элементов. Доказываются необходимые и достаточные условия, чтобы n-квазигруппа была вполне приводимой.

Во второй части статьи рассматривается приводимость np-квазигрупп (или позиционных n-квазигрупп, Л. М. Глускин, см. [3]). На основании теоремы о вполне приводимости n-квазигрупп доказывается теорема о приводимости $(1, n)$-ассоциативных n-квазигрупп, частным случаем которых являются np-квазигруппы. Здесь же рассматривается более общий вопрос: приводимость σp-квазигрупп, частным случаем которых являются np-квазигруппы.

§ 1. σp-Приводимость n-квазигрупп

1°. Обозначения и определения. Пусть Q—конечное или бесконечное множество элементов и A—n-арная операция, определенная на этом множестве. Такую алгебру обозначим как $Q(A)$. Иногда (когда это не вызывает путаницы) n-арную операцию будем обозначать только скобками ( ) или [ ]. Некоторые из нижеприведенных определений и результатов взяты из [3], [6], [8].

Запись $\{x_i\}_m^n$ или $\{x_m^n\}$ будет означать последовательность $\{x_m, x_{m+1}, \ldots, x_n\}$, причем $\{x_m^m\} = x_m$, $\{x_m^n\} = \varnothing$ — пустое множество, если $m > n$; $\left\{\overset{n}{x}\right\}$ означает последовательность n одинаковых элементов $\{x, x, \ldots, x\}$.

Определение 1. Алгебра $Q(\ )$ называется *n-квазигруппой*, если в равенстве

$$\left(x_1^n\right) = x_{n+1}$$

любые n элементы однозначно определяют $(n+1)$-го элемента для любых $\left\{x_1^{n+1}\right\} \in Q$.

Если n-квазигруппа $Q(\ )$ содержит такой элемент $e \in Q$, что

$$\left(\overset{i-1}{e}\ x\ \overset{n-i}{e}\right) = x$$

для любого $i = 1, 2, \ldots, n$ и всякого элемента $x \in Q$, тогда $Q(\ )$ называется *n-лупой*, а элемент e — *единицей* n-лупы $Q(\ )$. Очевидно, что при $n = 2$ получаем обычные определения (бинарной) квазигруппы и лупы.

Пусть $Q(A)$ — n-квазигруппа и Σ_0 — совокупность всех квазигрупповых операций, определенных на множестве Q. Если в универсальной алгебре $Q(A, \Sigma_0)$ выполняется тождество:

$$w_1 = w_2, \tag{1}$$

где слово w_1 имеет вид $A\left(x_1^n\right)$, а w_2 является словом относительно $n-1$ операций из Σ_0, причем каждая из свободных перемен x_i, $(i = 1, 2, \ldots, n)$ входит в w_2 только по одному разу, говорим, что $Q(A)$ приводимая n-квазигруппа. Другими словами, n-квазигруппа $Q(A)$ представима через $n-1$ бинарных операций, определенных на том же множестве Q. Очевидно, слово w_2 содержит столько подслов *) (само слово w_2 будет рассматриваться как подслово), сколько бинарных операций из Σ_0 входят в него (т. е. $n-1$), и наоборот. Теперь введем понятие координат операций. Если x_l — первый, а x_r — последний элемент некоторого подслова A_j, тогда числа l и r называются координатами операции A_j: l — левая и r — правая координаты соответственно.

Так, операция A_2 подслова $A_2[x_1, A_3(x_2, x_3)]$ слова

$$w_2 = A_1\{A_2[x_1, A_3(x_2, x_3)], x_4\}$$

имеет в качестве левой и правой координат 1 и 3 соответственно. Заметим, что при заданных бинарных операциях и их координаты слово w_2 однозначно определено. Более того, в [6] дается алгоритм (правило б) **) однозначного вычисления правых координат для заданных левых координат. Таким образом, естественно считать, что слово w_2 задано, если известны все бинарные операции, входящие в слово w_2, и их левые координаты.

Как указано выше, элементы в слове w_2 тождества (1) одинаково упорядочены, как и в слове w_1. Поэтому числа последовательности $\{l_i\}_1^{n-1}$ всех левых координат операций, входящие в слово w_2, должны удовлетворять следующему правилу а) (см. [6]):

1) $l_1 = 1$,
2) $l_i \leqslant l_{i+1}$,
3) $l_i \leqslant i$.

---

*) Определение слова, подслова см. [5].

**) Здесь мы не формулируем этот алгоритм и, если будем на него ссылаться, напишем: на основании правила б).

Таким образом, последовательность $n-1$ бинарных операций из Σ_0 и их левые координаты вполне определяют слово w_2, содержащее n свободных элементов. Таким образом, если заданы $n-1$ бинарные операции $\{A_i\}_1^{n-1}$ и последовательность $\sigma = \{l_i\}_1^{n-1}$ всех левых координат этих операций, тогда определяемое ими слово w_2 считаем заданным и запишем это так:

$$w_2 = \{\overset{l_i}{A_i}\}_1^{n-1} x_1^n,$$

где l_i — левая координата операции A_i.

Определение 2. n-Квазигруппа $Q(\ )$ называется σ-приводимой, где $\sigma = \{l_i\}_1^{n-1}$, а числа l_i, $(i = 1, 2, \ldots, n-1)$ удовлетворяют правилу а), если справедливо равенство

$$\left(x_1^n\right) = \{\overset{l_i}{A_i}\}_1^{n-1} x_1^n$$

или

$$(\ ) = \{\overset{l_i}{A_i}\}_1^{n-1}, \text{ где } \{l_i\}_1^{n-1} = \sigma.$$

Обозначим через ρ подстановку длины n. Дадим следующее

Определение 3. n-Квазигруппа $Q(\ )$ называется $\sigma\rho$-приводимой или вполне приводимой, где $\sigma = \{l_i\}_1^{n-1}$ и числа l_i, $(i = 1, 2, \ldots, n-1)$ удовлетворяют правилу а), если существуют такие $n-1$ бинарные операции $\{A_i\}_1^{n-1}$, что имеет место равенство

$$\left(x_1^n\right) = \{\overset{l_i}{A_i}\}_1^{n-1} y_1^n, \text{ где } y_j = x_{\rho j},\ (j = 1, 2, \ldots, n)$$

или

$$\left(x_1^n\right) = \{\overset{l_i}{A_i}\}_1^{n-1} \{x_1^n\}^{\rho}\ ^{*)}.$$

Нам необходимо будет еще понятие условия $D_{(i, j)}$ (см. [6]).

Говорим, что n-квазигруппа $Q(\ )$ удовлетворяет условию $D_{(i, j)}$, если в $Q(\ )$ имеет место равенство

$$\left(x_1^n\right) = \left(x_1^{i-1}\, y_i^j\, x_{j+1}^n\right) \to \left(z_1^{i-1}\, x_i^j\, z_{j+1}^n\right) = \left(z_1^{i-1}\, y_i^j\, z_{j+1}^n\right)$$

для любых $\left\{z_1^{i-1}, z_{j+1}^n\right\} \in Q$.

Для дальнейшего нам понадобится следующая теорема, которая доказана в [6] (см. теорему 5):

Теорема 1. *Необходимым и достаточным условием, чтобы n-квазигруппа $Q()$ была σ-приводимой, является выполнение в ней $D_{i,j}$-условий.*

Определение 4. Говорим, что n-квазигруппа $Q()$ удовлетворяет *условию* $D_{i,j}^{\rho}$ (где ρ — подстановка индексов $1, 2, \cdots, n$), если

$$\left(x_1^n\right)^{\rho} = \left(x_1^{i-1}\, y_i^j\, x_{j+1}^n\right)^{\rho} \to \left(z_1^{i-1}\, x_i^j\, z_{j+1}^n\right)^{\rho} = \left(z_1^{i-1}\, y_i^j\, z_{j+1}^n\right)^{\rho}$$

для любых элементов $\left\{z_1^{i-1}, z_{j+1}^n\right\} \in Q$.

Пример 1. Пусть $Q()$ — 5-квазигруппа и $\rho_0 = \begin{pmatrix} 1, 2, 3, 4, 5 \\ 4, 1, 2, 5, 3 \end{pmatrix}$, $i = 2$, $j = 4$. Если в $Q()$ имеет место условие

$$(x_4\, x_1\, x_2\, x_5\, x_3) = (y_4\, x_1\, y_2\, x_5\, y_3) \to (x_4\, z_1\, x_2\, z_5\, x_3) = (y_4\, z_1\, y_2\, z_5\, y_3)$$

---

*) В дальнейшем мы часто будем пользоваться такой записью: вместо последовательности $\left\{y_1^n\right\}$, где $y_i = x_{\rho i}$, будем писать $\left\{x_1^n\right\}^{\rho}$.

для любых $z_1, z_5, \in Q$, мы говорим, что 5-квазигруппа $Q()$ удовлетворяет условию $D^{\rho_2}_{(2,4)}$.

Определение 5. n-Квазигруппа $Q()$ называется (i,j) *ρ-приводимой* $(i<j)$, если существуют такие две операции A и B арности $n-j+i$ и $j-i+1$ соответственно, что имеет место равенство:

$$(x_1^n)=A(y_1^{i-1}, B(y_i^j), y_{j+1}^n)$$

для любых $\{x_1^n\}\in Q$, где $y_s=x_{\rho s}$ для $s=1, 2,\cdots, n$.

Заметим, что при $\rho=\varepsilon$ (ε — тождественная подстановка) получаем понятие (i,j)-приводимости n-квазигрупп (см. [6]). В этой же статье [6] доказывается следующая

Лемма 1. *Если n-квазигруппа $Q()$ удовлетворяет условиям $D(i,j)$, тогда существуют две такие квазигруппы $Q(A)$ и $Q(B)$ арности $n-j+i$ и $j-i+1$ соответственно, что имеет место равенство:*

$$(x_1^n)=A(x_1^{i-1}, B(x_i^j), x_{j+1}^n).$$

Следующий пример иллюстрирует понятие $\sigma\rho$-приводимости.

Пример 2. Пусть $Q()$ — 4-квазигруппа, $\rho_0=\binom{1,2,3,4}{4,3,1,2}$ и $\sigma_0=\{1,2,2\}$ — последовательности левых координат операций A_1, A_2, A_3. Тогда

$$(x_1^4)=A_1\ \{x_4, A_2[A_3(x_3, x_1), x_2]\},$$

т. е. 4-квазигруппа $Q()$ — $\sigma_0\rho_0$-приводима или вполне приводима.

2°. (i,j) ρ-приводимость n-квазигрупп. Для n-квазигрупп, удовлетворяющих условию $D^{\rho}_{(i,j)}$, справедлива следующая

Теорема 2. *n-Квазигруппа $Q()$, удовлетворяющая условию $D^{\rho}_{(i,j)}$, является (i,j) ρ^{-1}-приводимой.*

Доказательство. Пусть n-квазигруппа $Q()$ удовлетворяет условию $D^{\rho}_{(i,j)}$:

$$(x_1^n)^{\rho}=(x_1^{i-1}\, y_i^j\, x_{j+1}^n)^{\rho}\to(z_1^{i-1}\, x_i^j z_{j+1}^n)^{\rho}=(z_1^{i-1}\, y_i^j\, z_{j+1}^n)^{\rho} \qquad (2)$$

для любых элементов $\{z_1^{i-1}, z_{i+1}^n\}\in Q$.

Определим новую n-арную операцию $[\,]$:

$$[x_1^n]=(x_1^n)^{\rho}.$$

Очевидно, что $Q[\,]$ также является n-квазигруппой. В равенстве (2) от операции $(\,)$ переходим к операции $[\,]$:

$$[x_1^n]=[x_1^{i-1}\, y_i^j\, x_{j+1}^n]\to[z_1^{i-1}\, x_i^j\, z_{j+1}^n]=[z_1^{i-1}\, y_i^j\, z_{j+1}^n]$$

для любых $\{z_1^{i-1}, z_{j+1}^n\}\in Q$.

Таким образом, получили, что n-квазигруппа $Q[\,]$ удовлетворяет условию $D^{\rho}_{(i,j)}$. Тогда, в силу леммы 1, заключаем, что n-квазигруппа $Q[\,]$ — (i,j)-приводима через некоторые квазигрупповые операции A и B арности $n-j+i$ и $j-i+1$ соответственно:

$$[x_1^n]=A(x_1^{i-1}, B(x_i^j), x_{j+1}^n) \qquad (3)$$

для произвольных элементов $\{x_1^n\}\in Q$.

В равенстве (3) от операции $[\,]$ переходим обратно к операции $(\,)$:

$$(x_1^n)^{\rho}=A(x_1^{i-1}, B(x_i^j), x_{j+1}^n). \qquad (4)$$

Так как элементы $\{x_1^n\}$ произвольные, мы вместо x_i, $(i=1, 2,\cdots, n)$ можем взять элемент $x_{\rho^{-1}i}$, $(i=1, 2,\cdots, n)$. Тогда равенство (4) примет вид:

$$(x_1^n)=A(y_1^{i-1}, B(y_i^j), y_{j+1}^n), \text{ где } y_k=x_{\rho^{-1}k}, (k=1,2,\cdots, n).$$

Заметим, что при некоторых ограничениях, наложенных на подстановку ρ, относительно которой n-квазигруппа $Q()$ удовлетворяет условию $D^{\rho}_{(i,j)}$, можно получить более сильные результаты. Этот вопрос будем рассматривать в другой статье.

Теперь мы можем доказать следующую теорему о вполне приводимости n-квазигрупп:

Теорема 3. *Необходимым и достаточным условием, чтобы n-квазигруппа $Q()$ была $\sigma\rho$-приводимой, где $\sigma=\{l_i\}_1^{n-1}$, является выполнение в ней условий $D^{\rho}_{(l_i, r_i)}$, $(i=1, 2,\cdots, n)$, где $l_i\in\sigma$, а r_i — соответствующая правая координата операции A_i.*

Доказательство.

а) Пусть n-квазигруппа $Q()$ удовлетворяет условиям $D^{\rho}_{(l_i, r_i)}$, $(i=1, 2, \cdots, n-1)$:

$$(x_1^n)^{\rho}=(x_1^{i-1} y_i^j x_{j+1}^n)^{\rho}\to(z_1^{i-1} x_i^j z_{j+1}^n)^{\rho}=(z_1^{i-1} y_i^j z_{j+1}^n)^{\rho} \qquad (5)$$

для любых $\{z_1^{i-1}, z_{j+1}^n\}\in Q$, где числа последовательности $\{l_i\}_1^{n-1}$ удовлетворяют правилу а), а $\{r_i\}_1^{n-1}$ — соответствующие числа, вычисленные согласно правилу б).

Определим n-арную операцию $[\,]$ следующим образом:

$$[x_1^n]=(x_1^n)^{\rho}$$

и в равенстве (5) переходим к этой операции:

$$[x_1^n]=[x_1^{i-1} y_i^j x_{j+1}^n]\to[z_1^{i-1} x_i^j z_{j+1}^n]=[z_1^{i-1} y_i^j z_{j+1}^n]. \qquad (6)$$

Из определения операции $[\,]$ очевидно, что $Q[\,]$ является n-квазигруппой, а (6) показывает нам, что $Q[\,]$ удовлетворяет условиям $D_{(l_i, r_i)}$. Согласно теореме 1, n-квазигруппа $Q[\,]$ будет σ-приводимой, (где $\sigma=\{l_i\}_1^n$) для некоторых бинарных операций $\{A_i\}_1^{n-1}$:

$$[x_1^n]=\{A_i^{l_i}\}_1^{n-1}x_1^n. \qquad (7)$$

Равенство (7) справедливо для любых $\{x_1^n\}\in Q$, т. е. оно будет справедливо и для $\{x_1^n\}^{\rho^{-1}}\in Q$:

$$[x_1^n]^{\rho^{-1}}=\{A_i^{l_i}\}_1^{n-1}\{x_1^n\}^{\rho^{-1}}. \qquad (8)$$

В последнем равенстве от операции $[\,]$ переходим обратно к операции $(\,)$:

$$((x_1^n)^{\rho})^{\rho^{-1}}=(x_1^n)=\{A_i^{l_i}\}_1^{n-1}\{x_1^n\}^{\rho^{-1}}.$$

Таким образом, $Q()$ является $\sigma\rho^{-1}$-приводимой.

б) Обратно, пусть n-квазигруппа $Q(\,)$ — $\sigma\rho^{-1}$-приводима для следующих бинарных операций $\{A_i\}_1^{n-1}$, где $\sigma = \{l_i\}_1^{n-1}$:

$$(x_1^n) = \{A_i^{l_i}\}_1^{n-1}\{x_1^n\}^{\rho^{-1}} \tag{9}$$

для любых $\{x_1^n\} \in Q$.

Так как равенство (9) справедливо для любых $\{x_1^n\} \in Q$, то оно будет верно и для любых $\{x_1^n\}^\rho$, и тогда равенство (9) примет вид:

$$(x_1^n)^\rho = \{A_i^{l_i}\}_1^{n-1} x_1^n. \tag{10}$$

В равенстве (10) от операции ( ) переходим к операции [ ]:

$$[x_1^n] = \{A_i^{l_i}\}_1^{n-1} x_1^n \tag{11}$$

для любых $\{x_1^n\}^\rho \in Q$. Равенство (11) показывает, что n-квазигруппа $Q[\,]$ — σ-приводима, но тогда по теореме 1, в $Q[\,]$ выполняется условие $D_{(l_i,\, r_i)}$:

$$[x_1^n] = [x_1^{i-1}\, y_i^j\, x_{j+1}^n] \to [z_1^{i-1} x_i^j\, z_{j+1}^n] = [z_1^{i-1} y_i^j z_{j+1}^n] \tag{12}$$

для любых $\{z_1^{i-1}, z_{j+1}^n\} \in Q$.

В (12) переходим обратно к операции ( ):

$$(x_1^n)^\rho = (x_1^{i-1}\, y_i^j\, x_{j+1}^n)^\rho \to (z_1^{i-1}\, x_i^j\, z_{j+1}^n)^\rho = (z_1^{i-1}\, y_i^j\, z_{j+1}^n)^\rho,$$

т. е. n-квазигруппа $Q(\,)$ удовлетворяет условиям $D_{(i,\,j)}^\rho$. Теорема доказана.

Следствие 1. *Если подстановка* $\rho = \varepsilon$ (ε — *единичная подстановка*), *тогда получаем теорему 1.*

Следствие 2. *Если* $n = 3$ (n — *арность операции*), *получаем теорему 5 Ф. Радо (см. стр. 45—47 [10]).*

Следствие 3. *Если n-квазигруппа $Q(\,)$ является лупой с единицей e и удовлетворяет условиям $D_{(i,\,j)}^\rho$, тогда бинарные квазигруппы $\{A_i\}_1^{n-1}$, в определении которых постоянным элементом был e, также являются лупами с одной и той же единицей, и обратно.*

Действительно, пусть $Q(\,)$ — n-лупа с единицей e и пусть $Q(\,)$ удовлетворяет условиям $D_{(i,\,j)}^\rho$. Тогда для любого $i = 1, 2, \cdots, n$

$$A_i(x, e) = (\overset{i-1}{e}\; x\; \overset{n-i}{e}) = x \text{ и } A_i(e, x) = (\overset{i}{e}\; x\; \overset{n-i-1}{e}) = x.$$

Обратное утверждение следствия очевидно.

Замечание. *Если n-квазигруппа $Q(\,)$ вполне приводима и все бинарные операции $\{A_i\}_1^{n-1}$ являются лупами с единицами $e_1, e_2, \cdots, e_{n-1}$ соответственно, тогда $Q(\,)$ обладает нейтральной последовательностью $\{e_{\rho i}\}_1^{n-1}$.*

Последовательность $\{a_1^{i-1}\, a_{i+1}^n\}$ называется *нейтральной*, если $(a_1^{i-1} x\, a_{i+1}^n) = x$ для любого $x \in Q$ и $i = 1, 2, \cdots, n$ справедливо в n-квазигруппе $Q(\,)$.

§ 2. $n\rho$-Квазигруппы

В этом параграфе рассматриваются n-квазигруппы, которые удовлетворяют так называемому постулату K (см. [4]), или $n\rho$-квазигруппы (см. [3]).

1°. Определение 6. n-Квазигруппа $Q(\,)$ называется $n\rho(i, j)$-*квазигруппой*, если в $Q(\,)$ выполняется равенство

$$(x_1^{i-1}(x_1^{n+i-1})\; x_{n+i}^{2n-1}) = (y_1^{j-1}(y_i^{n+j-1})\; y_{n+j}^{2n-1}),$$

где $y_r = x_{\rho r}$ для $r = 1, 2, \cdots, 2n-1$, ρ — подстановка индексов $1, 2, \cdots, 2n-1$.

Для $n\rho(i, j)$-квазигрупп справедливы следующие предложения.

Лемма 2. *Если $Q(\,)$ является $n\rho(i, j)$-квазигруппой, тогда она является и $n\rho'(i, j)$-квазигруппой, где* $\rho' = \rho^{-1}$.

Справедливость леммы следует из самого определения $n\rho(i, j)$-квазигрупп.

Лемма 3. *Пусть $Q(\,)$ является $n\rho(1, i)\, n\varphi(1, j)$-квазигруппой. Тогда $Q(\,)$ является $n\psi(i, j)$-квазигруппой ($n\delta(j, i)$-квазигруппой), где* $\psi = \varphi\rho^{-1}$ (т. е. $\delta = \rho\varphi^{-1}$, т. е. $\delta = \varphi^{-1}$).

Доказательство. Пусть $Q(\,)$ является $n\rho(1, i)$- и $n\varphi(1, j)$-квазигруппой:

$$((x_1^n) x_{n+1}^{2n-1}) = (y_1^{i-1}(y_i^{n+i-1}) y_{n+i}^{2n-1}), \text{ где } y_s = x_{\rho s},\ (s = 1, 2, \cdots, 2n-1) \tag{12}$$

$$\text{и } ((x_1^n)\, x_{n+1}^{2n-1}) = (z_1^{j-1}(z_j^{n+j-1}) z_{n+j}^{2n-1}), \text{ где } z_s = x_{\varphi s},\ (s = 1, 2 \cdots, 2n-1). \tag{13}$$

Тогда в силу леммы 2 $Q(\,)$ является $n\rho^{-1}(i, 1)$-квазигруппой:

$$(x_1^{i-1}(x_i^{n+i-1}) x_{n+i}^{2n-1}) = ((y_1^n) y_{n+1}^{2n-1}), \text{ где } y_s = x_{\rho^{-1}s},\ (s = 1, 2, \cdots, 2n-1), \tag{14}$$

а в силу равенства (13) из (14) имеем:

$$((y_1^n)\, y_{n+1}^{2n-1}) = (z_1^{j-1}(z_j^{n+j-1}) z_{n+j}^{2n-1}), \text{ где } z_s = y_{\varphi s};\ (s = 1, 2 \cdots, 2n-1). \tag{15}$$

Из равенств (14) и (15) получаем:

$$(x_1^{i-1}(x_i^{n+i-1}) x_{n+i}^{2n-1}) = (z_1^{j-1}(z_j^{n+j-1}) z_{n+j}^{2n-1})), \text{ где } z_s = x_{\varphi\rho^{-1}s},\ (s = 1, 2, \cdots, n).$$

Вторая часть леммы доказывается аналогично.

Для дальнейшего нам понадобится еще следующее

Определение 7. $n\rho^{(m)}$-Квазигруппа $Q(\,)$ называется $\rho^{(m)}$-*коммутативной*, если для $i = 1, 2, \cdots, n$ справедливо соотношение $m \leqslant \rho i \leqslant n + m - 1$.

Пример 3. $4\rho^{(2)}$-Квазигруппа $Q(\,)$ для $\rho = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 5 & 3 & 2 & 1 & 4 & 7 & 6 \end{pmatrix}$ будет $\rho^{(2)}$-коммутативной: $((x_1^4)\; x_5^7) = (x_5\,(x_8\, x_2\, x_1\, x_4)\; x_7\, x_6)$.

Подстановку φ длины n назовем *порожденной подстановкой* для подстановки ρ длины $2n-1$, если

$$\varphi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n \\ d_1 & d_2 & d_3 & \cdots & d_n \end{pmatrix},$$

где $d_i = c_i - n + 1$ для всех $c_i > n$ и $d_i = 1$, если $c_i = d$.

Число d — произвольное число, меньшее $n+1$. Все числа последовательности $\{c_l\}_1^n$ для $c_l > n$ и $c_l = d$ выписываются в том же порядке, в котором они находятся во второй строке подстановки ρ. Так как число $1 \leqslant d \leqslant n$ — произвольное, то заданная подстановка ρ имеет n различных порожденных подстановок φ_d. Таким образом, подстановка φ_d зависит от подстановки ρ и от выбора числа d, поэтому обозначим ее так: $\varphi_d^{(\rho)}$.

Пример 4. Пусть $\rho_2^{(3)} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 7 & 5 & 2 & 8 & 1 & 9 & 3 & 6 & 4 \end{pmatrix}$, тогда

$$\varphi_2^{\rho} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 1 & 4 & 5 & 2 \end{pmatrix}.$$

И, наконец, выделим такие числа $l_i = \varphi d_i^{-1}$ (напомним, что $d_i = c_i - n + 1$, т. е. $c_i = d_i + n - 1$), для которых справедливо соотношение:

$$i \leqslant \rho^{-1} c_i \leqslant n + i - 1.$$

Пусть такими числами будут $l_1, l_2, \cdots, l_r$. Обозначим $l_1 = l$, $l_r = r$ и $r - l = k$.

В примере 4 $l_1 = 2$, $l_2 = 3$, $l_3 = 4$; $k = 2$.

Очевидно, что если n-квазигруппа $Q(\ ) - \rho^{(l)}$ — коммутативна, тогда $\{\rho j\}_l^{n+l-1}$ не содержит числа больше, чем n. В таком случае $k = 0$. В дальнейшем мы будем рассматривать только такие $n\rho$-квазигруппы, для которых $1 \leqslant k \leqslant n-2$, т. е. $n\,\rho$-квазигруппы, отличные от $n\,\rho$-коммутативных, и не будем оговаривать.

Для $n\,\rho^{(l)}$-квазигрупп*) справедлива следующая

Теорема 4. *Всякая $n\,\rho^{(l)}$-квазигруппа $Q(\ )$, для которой $1 \leqslant k \leqslant n-2$, всегда является (l, r) φ_d^{ρ}-представимой через две квазигруппы $Q(A)$ и $Q(B)$ арности $n-k$ и $k+1$ соответственно.*

Доказательство. Пусть $Q(\ ) - n\,\rho^{(l)}$-квазигруппа:
$((x_1^n)\, x_{n+1}^{2n-1}) = (y_1^{l-1}(y_l^{n+l-1})\, y_{n+l}^{2n-1})$, где $y_l = x_{\rho l}$ для всех $\{x_1^{2n-1}\} \in Q$, и пусть $\{x_1^n\}$ — последовательность любых элементов из Q. Для заданной подстановки ρ зафиксируем такое число $1 \leqslant d \leqslant n$, чтобы

$$\text{и } (*) \begin{cases} \rho d < i \text{ или } \rho\, d > j, \text{ если } i \leqslant \rho\, c \leqslant j \text{ для } n+1 \leqslant c \leqslant 2n-1 \\ i \leqslant \rho d \leqslant j, \text{ если } i \leqslant \rho\, c \leqslant j \text{ только для одного } n+1 \leqslant c \leqslant 2n-1. \end{cases}$$

В остальных случаях фиксирование числа d — произвольное.

Рассмотрим подстановку вида L_l:

$L_l\, x = \left(\overset{l-1}{a}\ x\ \overset{n-l}{a}\right)$ для некоторого $a \in Q$.

Для $x_1 \in Q$ будем иметь

$$x_1 = L_d L_d^{-1} x_1 = \left(\overset{d-1}{a}\ L_d^{-1} x_1\ \overset{n-d}{a}\right), \tag{16}$$

где d — заранее фиксированное число согласно правилам $(*)$.

В силу равенства (16) получаем:

$$(x_1^n) = \left(\left(\overset{d-1}{a}\ L_d^{-1} x_1\ \overset{n-d}{a}\right) x_2^n\right). \tag{17}$$

*) Под записью «$n\,\rho^{(l)}$-квазигруппа» будем понимать $n\rho$ $(1, l)$-квазигруппа.

В равенстве (17) подставим $x_1 = y_d$, $x_2 = y_{n+1}, \cdots, x_n = y_{2n-1}$:

$$z = \left(\left(\overset{d-1}{a}\ L_d^{-1}\ \overset{n-d}{a}\right) y_{n+1}^{2n-1}\right) = \left(z_1^{l-1}\left(z_l^{n+l-1}\right) z_{n+l}^{2n-1}\right), \tag{18}$$

$$\text{где } z_l = \begin{cases} a, \text{ если } \rho^{-1} j \leqslant n+1 \text{ и } \rho^{-1} j \neq d \\ L_d^{-1} y_d, \text{ если } \rho^{-1} j = d \text{ и } = y_k, \text{ если } \rho^{-1} j = k + n. \end{cases}$$

Согласно выбору числа d для заданной подстановки ρ внутренние скобки в правой части равенства (18) будут функцией B от некоторых k, $(k = r - l + 1)$ элементов из $\{x_1^n\}$. Внешние же скобки правой части того же равенства (18) будут функцией A от остальных $n-k$ элементов из последовательности $\{x_1^n\}$ и от значения w функции B. Поэтому из равенства (18) получаем:

$$z = A\left(v_1^{l-1}, B\left(v_l^r\right), v_{r+1}^n\right), \tag{19}$$

где v_i, $(i = 1, 2, \cdots, n)$ — некоторый элемент последовательности $\{x_1^n\}$, причем различные элементы $v_i \neq v_l$ соответственно являются различными элементами последовательности $\{x_1^n\}$. Обозначим их через $x_{\varphi i}$ и $x_{\varphi j}$ соответственно. Очевидно, что соответствие φ при заданном d является подстановкой чисел $1, 2, \cdots, n$, именно будет порожденной подстановкой для подстановки ρ. Используя другую запись, из равенства (19) приходим к равенству:

$$z = A\left(x_1^{l-1}, B\left(x_l^r\right), x_{r+1}^n\right)^{\varphi_d}.\text{*)}$$

Теорема доказана.

Следствие 1. Обозначим $B\left(x_{\varphi_d l}^{\varphi_d r}\right) = z'_{n+l-1}$ и $z_2 = z'_{n+1}$, $z_3 = z'_{n+2}, \cdots, z_{l-1} = z'_{n+l-2}$.

Тогда равенство (18) принимает вид:

$$z = \left(z_1\ \ z_{n+1}'^{\,2n-1}\right). \tag{20}$$

В правой части равенства (20) содержится только $n-k+1$ произвольных элементов. Пусть их индексами являются $c_1, c_2, \cdots, c_{n-k+1}$. Если подстановка ρ такая, что $i \leqslant \rho\, c_j \leqslant n + j$ для $2 \leqslant j \leqslant n-k$, тогда по тем же соображениям, что и в теореме 4, операция A представима через две операции A_1 и A_2 меньшей арности, чем $n-k$.

Таким образом, в данном случае операция $(\ )$ представима через три операции — A_1, A_2 и B меньшей арности, чем n.

Рассмотрим теперь операцию B (если только она не бинарна):

$$B\left(x_{\varphi\, d\, l}^{\varphi\, d\, r}\right) = \left(z_l^{n+l-1}\right). \tag{21}$$

В правой части равенства (21) сделаем следующую замену:

$$z_l = v_1,\ z_{l+1} = v_{n+1},\ z_{l+2} = v_{n+2}, \cdots,\ z_{n+l-1} = v_{2n-1}.$$

Тогда

$$\left(z_l^{n+l-1}\right) = \left(v_1\, v_{n+1}^{2n-1}\right). \tag{22}$$

*) Запись $A\left(x_1^{l-1}, B\left(x_l^j\right), x_{j+1}^n\right)^{\varphi}$ означает $A\left(y_1^{l-1}, B\left(y_l^j\right), y_{j+1}^n\right)$, где $y_k = x_{\varphi k}$, $k = 1, 2, \cdots, n$.

Обозначим через $f_1, f_2, \cdots, f_k$ индексы всех произвольных элементов, содержащихся в правой части равенства (22). Если $i \leqslant \rho\, f_j \leqslant n+i$ для $2 \leqslant j < k$, тогда операция B по тем же соображениям, что и в теореме 4, представима через две операции меньшей арности, чем k.

Итак, получили, что при некоторых ограничениях, наложенных на подстановку ρ, операция ( ) арности n представима через четыре операции меньшей арности, чем n.

Очевидно, что аналогичные рассуждения можно провести и дальше, и при некоторых подстановках ρ $n\rho$-квазигруппа Q ( ) будет вполне приводимой.

Пример 5. Пусть $Q(\ )$ — 6 $\rho_6^{(3)}$-квазигруппа, где

$$\rho = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 \\ 7 & 9 & 8 & 10 & 1 & 3 & 5 & 2 & 11 & 6 & 4 \end{pmatrix}.$$

Легко убедиться, что Q ( ) вполне приводима:

$$(x_1^6) = \lambda\, (((((x_3 \textcircled{1} x_5) \textcircled{2} x_6) \textcircled{3} x_1) \textcircled{4} x_2) \textcircled{5} x_4),$$

где бинарные квазигрупповые операции $\textcircled{i}$, $i = 1, 2, 3, 4, 5$ определяются через операцию ( ), а $\lambda x = \left(\overset{2}{a}\, x\, \overset{3}{a}\right)$ для фиксированного $a \in Q$.

2°. Пусть n-квазигруппа $Q(\ )$ — $(1, n)$-ассоциативная (см [6]):

$$((x_1^n)\ x_{n+1}^{2n-1}) = (x_1^{n-1}\,(x_n^{2n-1})).$$

Определим следующую n-арную операцию $(\ )^{(i)}$:

$$(x_1^n)^{(i)} = (x_i^n\ x_{i-1}\ x_{i-2} \cdots x_2\ x_1).$$

Заметим, что n-квазигруппа $Q\ (\ )^{(i)}$ удовлетворяет следующему равенству:

$$((x_1^n)^{(i)}\ y_2^n)^{(i)} = (x_1^{i-1}(x_i\ y_2^n)^{(i)}\ x_{i+1}^n)^{(i)}. \tag{23}$$

В самом деле, используя определение n-арной операции $(\ )^{(i)}$ и $(1,n)$-ассоциативный закон n-квазигруппы Q ( ), имеем:

$$((x_1^n)^{(i)}\ y_2^n)^{(i)} = (y_i^n\ y_{i-1}\ y_{i-2} \cdots y_2 (x_i^n\ x_{i-1}\ x_{i-2} \cdots x_2\, x_1)) =$$

$$((y_i^n\ y_{i-1}\ y_{i-2} \cdots y_2\ x_i)\ x_{i+1}^n\ x_{i-1}\ x_{i-2} \cdots x_2\, x_1) = (x_1^{i-1}(\,x_i\ y_2^n)^{(i)}\ x_{i+1}^n)^{(i)}.$$

Равенство (23) доказано.

Имеет место следующая

Лемма 4. *Пусть $Q(\ )$ — $(1,n)$-ассоциативная n-квазигруппа, тогда n-квазигруппа $Q\ (\ )^{(i)}$ удовлетворяет условию $D_{(2,\ n)}$.*

Доказательство. Пусть $Q(\ )$ — $(1, n)$-ассоциативная n-квазигруппа, тогда n-квазигруппа $Q\ (\ )^{(i)}$ удовлетворяет тождеству (23). Пусть

$$(a\, x_2^n)^{(i)} = (a\, y_2^n)^{(i)}. \tag{24}$$

Для элемента a и произвольного элемента z_i найдутся такие элементы $\{z_1^{i-1}, z_i^n\} \in Q$, что

$$a = (z_1^n)^{(i)}.$$

Подставляя найденное значение для a в равенство (24), получаем:

$$((z_1^n)^{(i)}\ x_2^n)^{(i)} = ((z_1^n)^{(i)}\ y_2^n)^{(i)}.$$

В силу равенства (23) получаем:

$$(z_1^{i-1}(\,z_i\ x_2^n)^{(i)}\ z_{i+1}^n)^{(i)} = (z_1^{i-1}(z_i\ y_2^n)^{(i)}\ z_2^n)^{(i)}. \tag{25}$$

Так как $Q\ (\ )^{(i)}$ — n-квазигруппа, из равенства (25) имеем:

$$(z_i\, x_2^n)^{(i)} = (z_i\ y_2^n)^{(i)} \tag{26}$$

для произвольного $z_i \in Q$ и любого $i = 1, 2, \cdots, n$.

Следовательно, из равенства (24) следует равенство (26). Заметим, что при $i = 1$

$$(\ )^{(i)} = (\ ).$$

Лемма 5. *Если $Q(\ )$ — $(1, n)$ — ассоциативная n-квазигруппа, тогда Q ( ) представима через бинарную квазигрупповую операцию $(\cdot)$ и $(n-1)$-арную квазигрупповую операцию B следующим образом:*

$$(x_1^n) = x_1 .\ B(x_2^n),$$

где $x \cdot y = \left(x\ \overset{n-2}{a}\ y\right)$ и $B(x_2^n) = (b\, x_2^n)$, а элемент b является решением уравнения $\left(\overset{n-1}{a}\ x\right) = a$.

Доказательство. Пусть $Q(\ )$ — $(1, n)$ — ассоциативная n-квазигруппа. Согласно лемме 4 (случай $i = 1$) Q ( ) удовлетворяет условию D $(2, n)$. Тогда по теореме 2 она приводима следующим образом:

$$(x_1^n) = x_1 \cdot B(x_2^n), \tag{27}$$

где

$$x \cdot y = \left(x\ \overset{n-2}{a}\ y\right).$$

Поэтому из равенства (27) при $x_1 = a$ получаем:

$$\left(a\, x_2^n\right) = a \cdot B\left(x_2^n\right) = \left(\overset{n-1}{a} B\left(x_2^n\right)\right).$$

Отсюда следует, что

$$\lambda B\left(x_2^n\right) = \left(a\ x_2^n\right), \text{ где } \lambda x = \left(\overset{n-1}{a}\, x\right), \text{ или}$$

$$B(x_2^n) = \lambda^{-1}(a\ x_2^n). \tag{28}$$

Для элемента a найдется такой элемент b, что

$$a = \left(\overset{n-1}{a}\ b\right).$$

В правой части равенства (28) подставим найденное значение для элемента a и применим ассоциативный закон:

$$\lambda^{-1}\left(\left(\overset{n-1}{a}\ b\right) x_2^n\right) = \lambda^{-1}\left(\overset{n-1}{a}\left(b\ x_2^n\right)\right) = \lambda^{-1}\left(\lambda\left(b\ x_2^n\right)\right) = \left(b\ x_2^n\right).$$

Следовательно,

$$B(x_2^n) = (b\, x_2^n).$$

На основании теоремы 3 и лемм 4 и 5 можно доказать следующую теорему:

Теорема 5. *Всякая* (1, n)-*ассоциативная* n-*квазигруппа* $Q(\,)$, *вполне приводимая через* $n-1$ *бинарные квазигруппы следующим образом:*

$$(x_1^n) = x_1 \,(1)\, (x_2 \,(2)\, (\cdots (x_{n-2} \,(n-2)\, (x_{n-1} \,(n-1)\, x_n))\cdots)),$$

где ((i)) — *некоторая бинарная квазигрупповая операция, определенная через* n-*арную операцию* ( ) *следующим образом:*

$$x \,(i)\, y = (x \overset{n-2}{a} y)^{(i)},$$

$$a \lambda x = (\overset{n-1}{b} x), \text{ где } b \text{ — решение уравнения } (\overset{n-1}{a} x) = a.$$

Доказательство. 1) Пусть $i = 1$. В силу того, что $Q(\,)^{(i)}$ удовлетворяет условию (2, n) для $i = 1, 2, \cdots, n$ и в силу леммы 5 получаем:

$$(x_1^n) = (x_1^n)^{(1)} = x_1 \,(1)\, (b_1 x_2^n) = x_1 \,(1)\, (x_2^n b_1)^{(2)}. \qquad (29)$$

2) Пусть $i = 2$.

$$(x_2^n b_1)^{(2)} = x_2 \,(2)\, (b_2 x_3^n b_1)^{(2)} = x_2 \,(2)\, (b_1 b_2 x_3^n) = x_2 \,(2)\, (x_3^n b_2 b_1)^{(3)}. \qquad (30)$$

3) Пусть $i = 3$.

$$(x_3^n b_2 b_1)^{(3)} = x_3 \,(3)\, (b_3 x_4^n b_2 b_1)^{(3)} = x_3 \,(3)\, (b_1^3 x_4^n) = x_3 \,(3)\, (x_4^n b_3 b_2 b_1)^{(4)}. \qquad (31)$$

На основании равенств (29), (30) и (31) получаем:

$$(x_1^n) = x_1 \,(1)\, (x_2 \,(2)\, (x_3 \,(3)\, (b_1^3 x_4^n))).$$

Продолжая этот процесс, на $(n-1)$-ом шагу получим:

$$(x_1^n) = x_1 \,(1)\, (x_2 \,(2)\, (x_3 \,(3)\, (\ldots (x_{n-2} \,(n-2)\, (x_{n-1} \,(n-1)\, (b_1^{n-1} x_n)))\ldots))). \qquad (32)$$

Обозначим $(b_1^{n-1} x_n)$ через λx_n. Очевидно, λ будет подстановкой*) множества Q. Тогда равенство (32) примет вид:

$$(x_1^n) = x_1 \,(1)\, (x_2 \,(2)\, (x_3 \,(3)\, (\ldots (x_{n-2} \,(n-2)\, (x_{n-1} \,(n-1)\, \lambda x_n))\ldots))). \qquad (33)$$

Теорема доказана.

Аналогичным образом можно доказать и следующую теорему:

Теорема 6. *Всякая* (1, n)-*ассоциативная* n-*квазигруппа* $Q(\,)$ *вполне приводима через* $n-1$ *бинарные квазигруппы следующим образом:*

$$(x_1^n) = ((\ldots((\gamma x_1 \boxed{1} x_2) \boxed{2} x_3)\ldots) \boxed{n-2} x_{n-1}) \boxed{n-1} x_n, \qquad (34)$$

где операция $\boxed{i}$, $i = 1, 2, \ldots, n-1$ *определяется через операцию* ( ), $a \gamma x = (x c_1^{n-1})$, *где* c_i *является решением уравнения* $(\overset{n-1}{x} a) = a$.

Сравнивая правые части равенств (33) и (34), мы получаем так называемое уравновешенное тождество первого рода. Тождество называется уравновешенным, если каждая переменная встречается

*) Для краткости взаимно однозначное отображение множества Q на себя назовем подстановкой множества Q.

только по одному разу как в левой, так и в правой частях данного тождества. Уравновешенное тождество называется первого рода (см. [7]), если переменные в обеих частях тождества упорядочены одинаково. На основании теоремы 2 из [7] заключаем, что все операции (i), $i = 1, 2, \ldots, n-1$ из равенства (33) изотопны одной и той же группе.

Замечание. Из определения np-квазигрупп (np — оператив, см. [3], который является n-квазигруппой) очевидно, что они являются частным случаем (1, n)-ассоциативных n-квазигрупп. Поэтому только что доказанные теоремы относительно (1, n)-ассоциативных n-квазигрупп справедливы и для любой np-квазигруппы.

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

1. А. К. Сушкевич, Теория обобщенных групп, Харьков—Киев, 1937.
2. Б. Трепеновски, Г. Чупона, Финитарни асоциативни операции со неутрални елементи, Билтен Дружт. матем. и физ. НРМ, 1961, кн. 12, с. 15—24.
3. Л. М. Глускин, О позиционных оперативах. ДАН СССР, 157, № 4 (1964), 767—770.
4. С. А. Чунихин, К теории неассоциативных n-групп с постулатом К, ДАН СССР, 48, (1945), 7—10.
5. А. Г. Курош, Лекции по общей алгебре, М., 1962.
6. В. Д. Белоусов, М. Д. Сандик, n-Арные квазигруппы и лупы (в печати).
7. В. Д. Белоусов, Уравновешенные тождества в квазигруппах (в печати).
8. М. Д. Сандик, О единицах в n-лупах. Исследования по алгебре и математическому анализу, Кишинев, 1965.
9. E. Post, Poliadic groups, Trans. Amer. Math. Soc., 48, (1940), 208—350.
10. F. Rado, Generalizarea tesuturilor spatiale pentru structuri algebrice, Studia Univ. Babes-Boliay, Math-Phys, № 1, (1960), 41—45.
11. R. M. Dicker, The substitutive law., Proc. London Math. Soc., 13 (3). (1963), 493—510.

М. Д. САНДИК

n-КВАЗИГРУПУРЬ КОМПЛЕТ РЕДУКТИБИЛЕ

Резумат

Артиколул презент есте континуаря артиколулуй [6]. Се прекаутэ ынтребаря деспре редуктибилитатя комплетэ а операцией де n-квазигруп прин операций бинаре. Се гэсеск кондицииле нечесаре ши суфичиенте, ка n-квазигрупул сэ фие комплет редуктибил. Ын партя а доуа а артиколулуй се прекаутэ ынтребаря деспре редуктибилитатя n-квазигрупурилор позиционале. Пе база теоремей деспре редуктибилитатя n-квазигрупурилор се демонстрязэ теорема деспре редуктибилитатя комплетэ а n-квазигрупурилор (1,n)-асочиативе. Деоарече n-квазигрупуриле позиционале сынт ун каз партикулар але челор (1,n)-асочиативе, ынтребаря деспре редуктибилитатя комплетэ а лор се резолвэ аутомат.

И. А. ФЛОРЯ

ЛУПЫ С ОДНОСТОРОННЕЙ ОБРАТИМОСТЬЮ

Наиболее изученными лупами являются лупы Муфанг, т. е. лупы с тождеством $xy \cdot zx = (x \cdot yz)\,x$. Они возникли в связи с изучением проективных недезарговых плоскостей. С них и началось развитие теории луп и квазигрупп. В частности, теория луп Муфанг послужила источником нового класса луп, который содержит лупы Муфанг, именно класс луп со свойством обратимости (кратко *IP*-лупы). Они определяются равенствами $^{-1}x \cdot xy = y$, $yx \cdot x^{-1} = y$, где $^{-1}xx = 1$, $xx^{-1} = 1$, 1 — единица лупы. Лупы Муфанг и *IP*-лупы подробно изучены Браком. Довольно полное изложение теории луп Муфанг и *IP*-луп можно найти в [1], [2].

Однако некоторые геометрические вопросы теории квазигрупп и луп (теория 3 сетей) приводят к необходимости изучения класса луп, тесно связанных с лупами Муфанг, именно, некоторые теоремы замкнутости эквивалентны наличию в данной лупе тождества Бола $x\,(y \cdot xz) = (x \cdot yx)\,z$ (см. [3], [4]).

Отметим также, что некоторые проективные плоскости тесно связаны с лупами, в которых выполняется тождество Бола (см. [5]).

В отличие от луп Муфанг, которые являются *IP*-лупами, лупы с тождеством Бола обладают только левой обратимостью. Поэтому целесообразно изучать лупы с односторонней обратимостью.

Целью настоящей статьи является изучение луп, обладающих односторонней обратимостью. Мы уже отметили выше, что *IP*-лупы и лупы Муфанг тесно связаны. В работе Брака [1] *IP*-лупы изучаются при помощи специальных элементов, называемых элементами Муфанг. Такой же метод используется и в настоящей статье. Лупы с односторонней обратимостью изучаются при помощи элементов Бола. Результаты Брака о *IP*-лупах получаются как частный случай из результатов, изложенных в настоящей работе.

1°. Как известно [1], лупа $Q\,(\cdot)$ называется лупой Муфанг, если в $Q\,(\cdot)$ выполняется одно из следующих трех тождеств: $xy \cdot zx = (x \cdot yz)\,x$, $x\,(y \cdot xz) = (xy \cdot x)\,z$, $z\,(x \cdot yx) = (zx \cdot y)\,x$. Как доказал Брак [1], эти тождества эквивалентны в лупе $Q\,(\cdot)$. Естественным обобщением лупы Муфанг являются лупы Бола.

Определение 1. *Тождества*

$$x\,(y \cdot xz) = (x \cdot yx)\,z; \qquad (zx \cdot y)\,x = z\,(xy \cdot x) \tag{1}$$

называются тождествами Бола.

Легко видеть, что второе тождество («правое» тождество Бола) из (1) получается из первого тождества («левого» тождества Бола) переходом от операции $(\cdot)$ к сопряженной операции $(*)$: $x * y = y \cdot x$.

В дальнейшем мы будем рассматривать лупы только с первым из тождеств (1) и под словами «тождества Бола» будем понимать только первое из тождеств (1).

Лупу $Q\,(\cdot)$ с тождеством Бола назовем лупой Бола.

Очевидно, что лупа Бола $Q\,(\cdot)$ будет лупой Муфанг тогда и только тогда, когда в $Q\,(\cdot)$ имеет место эластичный закон $x \cdot yx = xy \cdot x$.

Определение 2. *Лупа $Q\,(\cdot)$ называется лупой со свойством обратимости слева (кратко LIP-лупой), если существует такое взаимно однозначное отображение $x \to {}^{-1}x = xI$ множества Q на себя, что в $Q\,(\cdot)$ имеет место равенство*

$$^{-1}x \cdot xy = y \tag{2}$$

для любых $x, y \in Q$.

Аналогично определяется *лупа со свойством обратимости справа (кратко RIP-лупа), в которой существует такое взаимно однозначное отображение $x \to x^{-1} = xI_1$ множества Q на себя, что имеет место равенство $yx \cdot x^{-1} = y$ для любых $x, y \in Q$.*

Лупа $Q\,(\cdot)$ называется *IP*-лупой, если она является одновременно *LIP* и *RIP*-лупой.

LIP-лупы будем изучать с помощью лупы Бола (определяемой, как мы видели выше, с первым из тождеств (1)); полученные результаты автоматически переносятся и на *RIP*-лупы.

Определение 3. *Элемент $a \in Q$ назовем элементом Бола произвольной лупы $Q\,(\cdot)$, если в $Q\,(\cdot)$ имеет место равенство*

$$a\,(x \cdot ay) = (a \cdot xa)\,y \tag{3}$$

для любых $x, y \in Q$.

Определение 4. *Элемент $b \in Q$ назовем элементом Муфанг произвольной лупы $Q\,(\cdot)$, если в $Q\,(\cdot)$ имеет место равенство*

$$bx \cdot yb = (b \cdot xy)\,b \tag{4}$$

для любых $x, y \in Q$.

Ниже мы докажем, что каждый элемент Муфанг в *LIP*-лупе $Q\,(\cdot)$ является элементом Бола. Обратное утверждение, вообще говоря, не имеет места. Элементы Муфанг были введены Браком для *IP*-луп (см. [1]). Как доказал Брак [1], элементы Муфанг в *IP*-лупе $Q\,(\cdot)$ образуют подлупу.

2°. Пусть $Q\,(\cdot)$ — *LIP*-лупа. Имеет место

Лемма 1. *В любой LIP-лупе $Q\,(\cdot)$ выполняются равенства:*

a) $^{-1}x = x^{-1}$, *где* $^{-1}x\,x = 1$, $xx^{-1} = 1$, 1 — *единица лупы* $Q\,(\cdot)$;

b) $(x^{-1})^{-1} = x$, т. е. $I^2 = 1$, 1 — тождественная подстановка;

c) $L_x^{-1} = L_{x^{-1}}$

для любых $x \in Q$ (L_x — левая трансляция в $Q\,(\cdot)$: $yL_x = xy$. Аналогично определяется правая трансляция R_x, именно $yR_x = yx$).

Действительно, пусть $xx^{-1}=1$, тогда, ввиду (2), имеем $^{-1}x \cdot xx^{-1} = x^{-1}$. С другой стороны, $^{-1}x \cdot x x^{-1} = {}^{-1}x$, т. е. $^{-1}x=x^{-1}$. Следовательно, $x x^{-1} = x^{-1} x=1$, откуда $(x^{-1})^{-1} = x$. Пусть $yL_x^{-1}=z$; тогда $y = x z$, $x^{-1} y = z$, $y L_{x^{-1}} = z$, т. е. $L_x^{-1} = L_{x^{-1}}$. Лемма доказана.

Как известно [1], упорядоченная тройка $T = (\alpha, \beta, \gamma)$ подстановок*) множества Q называется автотопией лупы $Q(\cdot)$, если в $Q(\cdot)$ выполняется равенство

$$x y = (x \alpha \cdot y\beta) \gamma^{-1}, \text{ или } (x y) \gamma = x \alpha \cdot y \beta \tag{5}$$

для любых $x, y \in Q$.

Из (3), используя левые и правые трансляции, можем записать: $(x \cdot yL_a) L_a = x R_a L_a \cdot y$, $x y = (x R_a L_a \cdot yL_a^{-1}) L_a^{-1}$, т. е. ввиду определения автотопии (5), $(R_a L_a, L_a^{-1}, L_a)$ — автотопия лупы $Q(\cdot)$.

Аналогично из (4) получаем, что элемент $b \in Q$ является элементом Муфанг лупы $Q(\cdot)$ тогда и только тогда, когда $(L_b, R_b, L_b R_b)$ — автотопия лупы $Q(\cdot)$.

Теорема 1. *Если* (α, β, γ) — *автотопия LIP-лупы* $Q(\cdot)$ *и* $1\alpha = a$, *где* 1 — *единица LIP-лупы* $Q(\cdot)$, *то* a — *элемент Бола.*

Доказательство. Пусть в $Q(\cdot)$ выполняется равенство (5). Тогда, подставляя в (5) $x = 1$, получаем $y\gamma = 1\alpha \cdot y\beta = a \cdot y\beta = y\beta L_a$, откуда $\beta = \gamma L_a^{-1}$. Аналогично, подставляя в (5) $y = 1$, получаем $x\gamma = x\alpha \cdot 1\beta = x\alpha R_b$, где $b = 1\beta$, откуда $\alpha = \gamma R_b^{-1}$. Тогда $(\alpha, \beta, \gamma) = (\gamma R_b^{-1}, \gamma L_a^{-1}, \gamma)$. Но в LIP-лупе $Q(\cdot)$ имеет место следующее утверждение: если (α, β, γ) — автотопия LIP-лупы $Q(\cdot)$, то $(I\alpha I, \gamma, \beta)$ тоже является автотопией LIP-лупы $Q(\cdot)$.

В самом деле, из (2) и (5) следует $x\alpha I \cdot (xy)\gamma = y\beta$. Заменяя $x \to xI$, $y \to xy$, получаем $(xy)\beta = xI\alpha I \cdot (xI \cdot xy)\gamma = xI\alpha I \cdot y\gamma$, т. е. $(I\alpha I, \gamma, \beta)$ — автотопия LIP-лупы $Q(\cdot)$.

Так как все автотопии некоторой лупы образуют группу, заключаем, что $(\gamma R_b^{-1}, \gamma L_a^{-1}, \gamma)^{-1} \cdot (I\gamma R_b^{-1} I, \gamma, \gamma L_a^{-1}) = (\delta, L_a, L_{a^{-1}})$ тоже будет автотопией LIP-лупы $Q(\cdot)$, где $\delta = R_b \gamma^{-1} I \gamma R_b^{-1} I$, т. е. имеем $(xy) L_a^{-1} = x\delta \cdot y L_a$; если $y = 1$, то $x L_a^{-1} = x\delta R_a$, $\delta = L_a^{-1} R_a^{-1}$. Поэтому $(L_a^{-1} R_a^{-1}, L_a, L_a^{-1})^{-1} = (R_a L_a, L_a^{-1}, L_a)$ — автотопия LIP-лупы $Q(\cdot)$, т. е. a — элемент Бола. Теорема доказана.

Рассмотрим множество всех элементов Бола LIP-лупы $Q(\cdot)$, которое обозначим через B. Возникает вопрос, будет ли B подлупой в любой LIP-лупе $Q(\cdot)$? Следующий пример дает отрицательный ответ.

Пусть $Q = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$. Определяем LIP-лупу $Q(\cdot)$ таблицей

·	1	2	3	4	5	6	7	8
1	1	2	3	4	5	6	7	8
2	2	1	6	7	8	3	4	5
3	3	5	1	6	2	4	8	7
4	4	7	8	1	6	5	2	3
5	5	8	4	3	1	7	6	2
6	6	3	2	8	7	1	5	4
7	7	4	5	2	3	8	1	6
8	8	6	7	5	4	2	3	1

*) Для краткости взаимно однозначное отображение множества Q на себя назовем подстановкой множества Q.

Здесь имеет место равенство $x \cdot xy = y$ для любых $x, y \in Q$, т. е. $x^{-1} = x$. Эта лупа не является RIP-лупой, так как, например, $(2 \cdot 5) \cdot 6 = 2$, но $(8 \cdot 5) \cdot 6 = 5$. Непосредственной проверкой можно убедиться, что в этой лупе элементы $2, 5$ являются элементами Бола, однако $2 \cdot 5 = 8$ не является элементом Бола.

Теорема 2. *Множество элементов Бола B LIP-лупы $Q(\cdot)$ будет подлупой тогда и только тогда, когда B замкнуто относительно операции $(\cdot)$.*

Достаточно доказать, что уравнения $ax = b$ и $ya = b$ разрешимы в B для любых $a, b \in B$. Рассмотрим уравнение $ax = b$, $a, b \in B$. Тогда в силу левой обратимости LIP-лупы $Q(\cdot)$ получаем $x = a^{-1}b$. Отсюда видно, что x будет принадлежать B, если $a^{-1} \in B$. Так как $a \in B$, то $(R_a L_a, L_a^{-1}, L_a) = (R_a L_a, L_{a^{-1}}, L_{a^{-1}}^{-1})$ — автотопия LIP-лупы $Q(\cdot)$ (см. лемму 1). Откуда $(xy) L_{a^{-1}}^{-1} = x R_a L_a \cdot y L_{a^{-1}}$. Если $y = 1$, то $x L_{a^{-1}}^{-1} = x R_a L_a R_{a^{-1}}$, $R_a L_a = L_{a^{-1}}^{-1} R_{a^{-1}}^{-1}$, т. е. $(L_{a^{-1}}^{-1} R_{a^{-1}}^{-1}, L_{a^{-1}}, L_{a^{-1}}^{-1})^{-1} = (R_{a^{-1}} L_{a^{-1}}, L_{a^{-1}}^{-1}, L_{a^{-1}})$ — автотопия LIP-лупы $Q(\cdot)$, откуда $a^{-1} \in B$, $x \in B$. Рассмотрим уравнение $ya = b$, $a, b \in B$. Умножая уравнение слева на a, а справа — на a^{-1}, получаем $(a \cdot ya) a^{-1} = ab \cdot a^{-1}$, $a(y \cdot aa^{-1}) = ab \cdot a^{-1}$, $y = a^{-1}(ab \cdot a^{-1}) \in B$, B — подлупа.

Следствие 1. *Пусть LIP-лупа $Q(\cdot)$ обладает следующим свойством: для всех автотопий (α, β, γ) элемент $b = 1\beta \in B$, тогда B — подлупа лупы $Q(\cdot)$.*

Действительно, если $a, b \in B$, то

$$(R_a L_a, L_a^{-1}, L_a)^{-1} \cdot (R_b L_b, L_b^{-1}, L_b)^{-1} = (\alpha', L_a L_b, \gamma')$$

является автотопией LIP-лупы $Q(\cdot)$ и $1 L_a L_b = ba \in B$.

Значительную роль в теории IP-луп играет понятие псевдоавтоморфизма, введенное Браком [1].

Определение 5. *Подстановка τ множества Q называется левым псевдоавтоморфизмом LIP-лупы $Q(\cdot)$, если существует такой элемент $k \in Q$, что выполняется равенство*

$$k \cdot (xy)\tau = (k \cdot x\tau) y\tau$$

для любых $x, y \in Q$. Элемент k называется компаньоном левого псевдоавтоморфизма τ.

Аналогично определяется *правый псевдоавтоморфизм* τ'. Очевидно, что $1\tau = 1$, где 1 — единица лупы.

Для IP-луп понятие левого и правого псевдоавтоморфизмов совпадают. Связь между автотопиями и левыми псевдоавтоморфизмами в LIP-лупе $Q(\cdot)$ дается следующей теоремой.

Теорема 3. *Пусть (α, β, γ) — автотопия LIP-лупы $Q(\cdot)$ и пусть $1\beta = b$ — элемент Бола, тогда существует такой левый псевдоавтоморфизм τ, что выполняется равенство*

$$(\alpha, \beta, \gamma) = (\tau L_k, \tau, \tau L_k)(L_b^{-1} R_b^{-1}, L_b, L_b^{-1}), \tag{6}$$

где $k = b \cdot ab$, $a = 1\alpha$.

Доказательство. Если b — элемент Бола, то $(R_b L_b, L_b^{-1}, L_b)$ является автотопией LIP-лупы $Q(\cdot)$. Тогда и

$(\alpha, \beta, \gamma)(R_b L_b, L_b^{-1}, L_b) = (\alpha_1, \tau, \gamma_1)$ — автотопия LIP-лупы $Q(\cdot)$, где $\tau = \beta L_b^{-1}$. Тогда $I\tau = I\beta L_b^{-1} = b^{-1}b = 1$. Далее имеем $(xy)\gamma_1 = x\alpha_1 \cdot y\tau$. Если $y = 1$, то $\gamma_1 = \alpha_1 = \alpha R_b L_b$, $(xy)\alpha R_b L_b = x\alpha R_b L_b \cdot y\tau$. Если $x = 1$, получаем $y\alpha R_b L_b = (b \cdot ab) y\tau = y\tau L_k$, где $k = b \cdot ab$. Теорема доказана.

Следствие 2. *В лупе Бола* $Q(\cdot)$ *любая автотопия* (α, β, γ) *лупы* $Q(\cdot)$ *может быть записана в виде* (6).

3°. Как известно, лупа $Q(\circ)$ будет изотопной лупе $Q(\cdot)$, если существуют такие три подстановки α, β, γ множества Q, что выполняется равенство $x \circ y = (x\alpha \cdot y\beta)\gamma^{-1}$ для любых $x, y \in Q$. Тройка упорядоченных подстановок $T = (\alpha, \beta, \gamma)$ называется изотопией. Частным случаем изотопии является главный изотоп, когда $\gamma = I$, где I — тождественная подстановка.

Понятие элемента Бола дает нам возможность найти необходимые и достаточные условия, чтобы лупа, изотопная LIP-лупе $Q(\cdot)$, была тоже LIP-лупой.

Пусть $Q(\cdot)$ — LIP-лупа. Рассмотрим главный изотоп $Q(\circ)$, где изотопия имеет вид:

$$x \circ y = x R_a^{-1} \cdot y L_b^{-1}. \tag{7}$$

Как известно, $Q(\circ)$ — лупа с единицей $e = b \cdot a$. Имеет место

Теорема 4. *Лупа* $Q(\circ)$, *изотопная LIP-лупе* $Q(\cdot)$ *по формуле* (7), *будет LIP-лупой тогда и только тогда, когда b является элементом Бола.*

Доказательство. Пусть $xI' \circ (x \circ y) = y$, тогда, ввиду (7), получаем $xI' R_a^{-1} \cdot (x R_a^{-1} \cdot y L_b^{-1}) L_b^{-1} = y$, $(x R_a^{-1} \cdot y L_b^{-1}) L_b^{-1} = x I' R_a^{-1} I \cdot y$, $(xy) L_b^{-1} = x R_a I' R_a^{-1} I \cdot y L_b$. Подставляя $y = 1$, получаем $x L_b^{-1} = x R_a I' R_a^{-1} I R_b$, $R_a I' R_a^{-1} I = L_b^{-1} R_b^{-1}$, откуда следует, что $(L_b^{-1} R_b^{-1}, L_b, L_b^{-1})^{-1} = (R_b L_b, L_b^{-1}, L_b)$ — автотопия лупы $Q(\cdot)$, т. е. b — элемент Бола.

Обратное утверждение очевидно.

Возникает вопрос: когда лупы $Q(\circ)$ и $Q(\cdot)$, связанные равенством (7), будут изоморфны?

В случае, если элемент a из (7) является элементом Бола LIP-лупы $Q(\cdot)$, тогда ответ дает следующая

Теорема 5. *Пусть* $Q(\cdot)$ — *LIP-лупа и пусть* $Q(\circ)$ — *главный изотоп лупы* $Q(\cdot)$, *где изотопия имеет вид* (7), *и пусть* a — *элемент Бола. Тогда лупы* $Q(\circ)$ *и* $Q(\cdot)$ *изоморфны тогда и только тогда, когда* $Q(\cdot)$ *обладает левым псевдоавтоморфизмом* τ *с компаньоном* $k = a \cdot ba$.

Доказательство. Пусть лупы $Q(\circ)$ и $Q(\cdot)$ изоморфны, т. е. $(xy)\gamma = x\gamma \circ y\gamma$. Ввиду (7), получаем $(xy)\gamma = x\gamma \circ y\gamma = x\gamma R_a^{-1} \cdot y\gamma L_b^{-1} = x\beta \cdot y\alpha$, где $\beta = \gamma R_a^{-1}$, $\alpha = \gamma L_b^{-1}$. Получили, что (β, α, γ) — автотопия лупы $Q(\cdot)$. Так как γ — изоморфизм, то $1\gamma = e$, где $e = ba$ — единица лупы $Q(\circ)$. Далее, $1\alpha = 1\gamma L_b^{-1} = b^{-1}(ba) = a$, $I\beta = I\gamma R_a^{-1} = (ba) R_a^{-1} = b$. Так как a — элемент Бола, то, ввиду теоремы 3, существует такой левый псевдоавтоморфизм τ с компаньоном $k = a \cdot ba$.

Обратно, пусть $Q(\cdot)$ имеет левый псевдоавтоморфизм τ с компаньоном $k = a \cdot ba$. Так как a — элемент Бола, то $(R_a L_a, L_a^{-1}, L_a)^{-1} = (L_a^{-1} R_a^{-1}, L_a, L_a^{-1})$ — автотопия LIP-лупы $Q(\cdot)$. Так как τ — левый псевдоавтоморфизм лупы $Q(\cdot)$, то $(\tau L_k, \tau, \tau L_k)$ — автотопия лупы $Q(\cdot)$, тогда и произведение $(\tau L_k, \tau, \tau L_k)(L_a^{-1} R_a^{-1}, L_a, L_a^{-1}) = (\beta, \alpha, \gamma)$ тоже является автотопией лупы $Q(\cdot)$, где $I\beta = I\tau L_k L_a^{-1} R_a^{-1} = [a^{-1}(a \cdot ba)] R_a^{-1} = b$, $I\alpha = I\tau L_a = a$. Далее имеем $(xy)\gamma = x\beta \cdot y\alpha$. Подставляя $y = 1$, получаем $x\gamma = x\beta R_a$, откуда $\beta = \gamma R_a^{-1}$. Теперь, подставляя $x = 1$, получаем $y\gamma = y\alpha L_b$, откуда $\alpha = \gamma L_b^{-1}$. Следовательно, $(xy)\gamma = x\gamma R_a^{-1} \cdot y\gamma L_b^{-1} = x\gamma \circ y\gamma$. Теорема доказана.

В связи с этим возникает вопрос: когда любая лупа, изотопная LIP-лупе $Q(\cdot)$, будет изоморфна ей? Иначе говоря, следуя терминологии В. Д. Белоусова [6], когда LIP-лупа $Q(\cdot)$ будет G-лупой?

Лупа $Q(\cdot)$ называется G-лупой [6], если любая лупа $Q(\circ)$, изотопная лупе $Q(\cdot)$, изоморфна ей.

Ответ на этот вопрос дает

Теорема 6. *Если LIP-лупа* $Q(\cdot)$ *является G-лупой, то она будет лупой Муфанг.* (Для IP-луп эта теорема была доказана Браком [1].)

Доказательство. Пусть $Q(\cdot)$ является LIP- и G-лупой и пусть $Q(\circ)$ — некоторый главный изотоп этой лупы (теорема не теряет общности, если вместо изотопии берем главный изотоп): $x \circ y = x R_a^{-1} \cdot y L_b^{-1}$. Так как $Q(\circ)$ изоморфна лупе $Q(\cdot)$, то $Q(\circ)$ тоже является LIP-лупой и, следовательно, на основании теоремы 4 элемент b должен быть элементом Бола, но b может быть любым элементом из Q. Поэтому $Q(\cdot)$ является лупой Бола. Далее, мы используем следующий критерий [6] того, чтобы лупа $Q(\cdot)$ была G-лупой: лупа $Q(\cdot)$ тогда и только тогда является G-лупой, если все ее левые и правые производные операции изоморфны между собой.

Правая производная операция определяется равенством: $(xy)z = x(yz)_x$. Операция $(\cdot)_x$ изотопна операции $(\cdot)$

$$(yz)_a = (yL_a \cdot z)L_a^{-1}, \quad (\cdot)_a = (\cdot)^{(L_a, I, L_a)},$$

где $xL_a = ax$.

Аналогично определяется левая производная операция: $x(yz) = {}_z(xy) \cdot z$. Операция ${}_z(\cdot)$ изотопна операции $(\cdot)$, именно:

$${}_b(xy) = (x \cdot yR_b) R_b^{-1}, \quad {}_b(\cdot) = (\cdot)^{(1, R_b, R_b)},$$

где $xR_b = xb$.

Отметим, что лупы $Q(\cdot)$, $Q(\cdot)_x$ и $Q_x(\cdot)$ имеют ту же единицу 1. Таким образом, в частности, лупы $Q(\cdot)_{a^{-1}}$ и $Q_a(\cdot)$ должны быть изоморфны, где a — произвольный элемент множества Q.

$$(\cdot)_{a^{-1}}^{(\alpha, \alpha, \alpha)} = {}_a(\cdot), \text{ откуда } (\cdot)^{(L_{a^{-1}}, I, L_{a^{-1}})(\alpha, \alpha, \alpha)} = (\cdot)^{(I, R_a, R_a)},$$

$$(x L_a^{-1}\alpha \cdot y\alpha)\alpha^{-1} L_a = (x \cdot yR_a) R_a^{-1}, \text{ или } (xy)\alpha^{-1} L_a R_a =$$

$$= x\alpha^{-1} L_a \cdot y\alpha^{-1} R_a, \quad [a(xy)\alpha^{-1}]a = (a \cdot x\alpha^{-1})(y\alpha^{-1} \cdot a).$$

Если $x = I$, то $I\alpha^{-1} = 1$, откуда получаем $(a \cdot y\alpha^{-1})a = a(y\alpha^{-1} \cdot a)$, т. е. $ay \cdot a = a \cdot ya$. Так как a — произвольный элемент, то $Q(\cdot)$ является лупой Муфанг. Теорема доказана.

Выше мы ввели понятие элементов Бола, Муфанг для любой лупы. Брак доказал, что если $Q(\cdot)$ — IP-лупа, то множество всех элементов Муфанг образуют подлупу.

Однако этот же результат можно получить и при более общих предположениях. Имеет место следующая

Теорема 7. *Пусть M будет множество всех элементов Муфанг произвольной лупы $Q(\cdot)$. Если все элементы из M являются и элементами Бола, то M — подлупа лупы $Q(\cdot)$.*

Доказательство. Пусть $b \in M$, т. е. b удовлетворяет (4). Подставляя в (4) $x = 1$, получаем $b \cdot yb = by \cdot b$, или

$$L_b R_b = R_b L_b. \tag{8}$$

Пусть $bb^{-1} = 1$, ${}^{-1}bb = 1$. Подставляя в (4) $x = b^{-1}$, получаем $y b = (b \cdot b^{-1} y) b$, откуда

$$b \cdot b^{-1} y = y \tag{9}$$

для любого $y \in Q$. Следовательно, при $y = b$ имеем $b = b \cdot b^{-1} b$, откуда $b^{-1} b = 1$. Итак, ${}^{-1}b = b^{-1}$, $(b^{-1})^{-1} = b$. Подставляя в (4) $y = b^{-1}$, получаем $b x = (b \cdot x b^{-1}) b$. Ввиду (8), $b x = b (x b^{-1} \cdot b)$, откуда

$$x b^{-1} \cdot b = x \tag{10}$$

для любого $x \in Q$.

Пусть $x R_{b^{-1}} = y$, тогда $y = xb^{-1}$, $yb = xb^{-1} \cdot b$, откуда, ввиду (10), следует $yb = x$, $y = xR_b^{-1}$. Получили

$$R_b^{-1} = R_{b^{-1}}. \tag{11}$$

Аналогично доказывается на основании (9) равенство

$$L_b^{-1} = L_{b^{-1}}. \tag{12}$$

Если $b \in M$, тогда $(L_b, R_b, L_b R_b)$ — автотопия лупы $Q(\cdot)$, откуда и $(L_b^{-1}, R_b^{-1}, R_b^{-1} L_b^{-1})$ — тоже автотопия. Ввиду (8), (11) и (12) следует, что и $b^{-1} \in M$.

Пусть $a, b \in M$. Тогда

$(L_a, R_a, L_a R_a)(L_a^{-1} R_a^{-1}, L_a, L_a^{-1})(L_b, R_b, L_b R_b)(R_a L_a, L_a^{-1}, L_a) = (R_a^{-1} L_b R_a L_a, R_a L_a R_b L_a^{-1}, R_a L_b R_b L_a) = (\alpha, \beta, \gamma)$. Так как a и b являются и элементами Бола, то из предыдущих равенств следует, что $T = (\alpha, \beta, \gamma)$ будет автотопией лупы $Q(\cdot)$. Найдем подстановки α, β, γ: $x \alpha = x R_a^{-1} L_b R_a L_a = a \cdot (b \cdot xa^{-1}) a = a b \cdot (xa^{-1} \cdot a)$. Ввиду (10), $x \alpha = x L_{ab}$, откуда $\alpha = L_{ab}$. Далее, $x \beta = x R_a L_a R_b L_a^{-1} = a^{-1} \cdot (a \cdot x a) b = a^{-1} \{a (x \cdot ab)\}$. Но так как a^{-1} — тоже элемент Муфанг, ввиду (9), имеем $a^{-1} \cdot (a^{-1})^{-1} y = a^{-1} \cdot ay = y$ для любого $y \in Q$. Следовательно, $x \beta = x R_{ab}$, $\beta = R_{ab}$. Наконец, мы должны иметь $x \gamma = (x \cdot 1) \gamma = x \alpha \cdot 1 \beta = x L_{ab} \cdot 1 R_{ab} = x L_{ab} R_{ab}$, т. е. $\gamma = L_{ab} R_{ab}$. Итак, из всего сказанного вытекает, что автотопия $(\alpha, \beta, \gamma) = (L_{ab}, R_{ab}, L_{ab} R_{ab})$, а это означает, что $ab \in M$.

Рассмотрим теперь уравнение $x a = b$, где $a, b \in M$. Ввиду (10) $x = ba^{-1}$, следовательно, $x \in M$. Аналогично из $ay = b$, $a, b \in M$ следует $y = a^{-1} b \in M$. Итак, M — подлупа.

Следствие 3. *В любой LIP-лупе $Q(\cdot)$ множество всех элементов Муфанг M является подлупой лупы $Q(\cdot)$.*

Действительно, если $a \in M$, то $(L_a, R_a, L_a R_a)$ — автотопия лупы $Q(\cdot)$.

На основании теоремы 1 элемент $1 L_a = a$ является элементом Бола. Следовательно, любой элемент Муфанг LIP-лупы $Q(\cdot)$ является элементом Бола.

Замечание 1. Как мы только что видели, в LIP-лупе $Q(\cdot)$ любой элемент Муфанг является элементом Бола. Обратное утверждение неверно. Примером может служить любая лупа Бола, которая не является лупой Муфанг (см. [1]).

Замечание 2. Условие теоремы 7 достаточное, но не необходимое. Ниже приводим пример лупы, в которой элементы Муфанг образуют подлупу, но не все элементы этой подлупы являются элементами Бола.

Пусть $Q = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$. Лупа $Q(\cdot)$ определяется таблицей

$\cdot$	1	2	3	4	5	6	7	8
1	1	2	3	4	5	6	7	8
2	2	1	8	7	6	5	4	3
3	3	8	1	2	4	7	5	6
4	4	7	5	1	3	8	6	2
5	5	6	4	8	1	2	3	7
6	6	5	7	3	2	1	8	4
7	7	4	2	6	8	3	1	5
8	8	3	6	5	7	4	2	1

Здесь $M = \{1, 2\}$ и $B = \{1\}$. Очевидно, что M — подлупа.

4°. Как известно, левое, среднее и правое ядра произвольной лупы $Q(\cdot)$ определяются соответственно следующим образом:

$$N_l = \{a,\ a \in Q \mid ax \cdot y = a \cdot xy\},$$

$$N_m = \{b,\ b \in Q \mid xb \cdot y = x \cdot by\},$$

$$N_r = \{c,\ c \in Q \mid xy \cdot c = x \cdot yc\}$$

для любых $x, y \in Q$.

Все три ядра являются ассоциативными подлупами.

Если $Q(\cdot)$ — IP-лупа, тогда все три ядра совпадают [1].

Ниже мы даем необходимые и достаточные условия, чтобы ядра любой лупы совпадали.

Теорема 8. *Ядра N_l, N_m и N_r произвольной лупы $Q(\cdot)$ совпадают тогда и только тогда, когда элементы всех трех ядер являются элементами Муфанг и элементами Бола.*

Доказательство. Пусть $N_l = N_m = N_r = N$. Если $a \in N$, тогда $(L_a, 1, L_a)$, $(R_a, L_a^{-1}, 1)$ и $(1, R_a, R_a)$ являются автотопиями лупы $Q(\cdot)$, где 1 — тождественная подстановка множества Q. Тогда и $(L_a, 1, L_a)(1, R_a, R_a) = (L_a, R_a, L_a R_a)$ — тоже автотопия, т. е. a — элемент Муфанг. Далее, $(R_a, L_a^{-1}, 1)(L_a, 1, L_a) = (R_a L_a, L_a^{-1}, L_a)$ — автотопия, т. е. a — элемент Бола.

Обратно, пусть $a \in N_l$, т. е. (L_a, I, L_a) — автотопия, и так как $a \in M$ и $a \in B$, то (L_a, R_a, L_aR_a), (R_aL_a, L_a^{-1}, L_a) — автотопии лупы $Q(\cdot)$. Следовательно, (L_a^{-1}, I, L_a^{-1}) $(L_a, R_a, L_aR_a) = (I, R_a, R_a)$ — тоже автотопия, т. е. $a \in N_r$. Итак,

$$N_l \subseteq N_r. \tag{13}$$

Далее, $(R_aL_a, L_a^{-1}, L_a)(L_a^{-1}, I, L_a^{-1}) = (R_a, L_a^{-1}, I)$ — автотопия, т. е. $a \in N_m$. Получили

$$N_l \subseteq N_m. \tag{14}$$

Пусть $b \in N_m$, т. е. (R_b, L_b^{-1}, I) — автотопия, тогда и $(L_b^{-1}R_b^{-1}, L_b, L_b^{-1})(R_b, L_b^{-1}, I) = (L_b^{-1}, I, L_b^{-1})$ — автотопия, но тогда и (L_b, I, L_b) — автотопия, т. е.

$$N_m \subseteq N_l. \tag{15}$$

Из (14) и (15) следует $N_l = N_m$.

Пусть $c \in N_r$, т. е. (I, R_c, R_c) — автотопия, тогда и $(L_c, R_c, L_c R_c)(I, R_c^{-1}, R_c^{-1}) = (L_c, I, L_c)$ — автотопия, т. е.

$$N_r \subseteq N_l. \tag{16}$$

Из (13) и (16) следует $N_l = N_r$. Теорема доказана.

Следствие 4. *Ядра LIP-лупы $Q(\cdot)$ совпадают тогда и только тогда, когда элементы всех ядер являются элементами Муфанг.*

Действительно, известно, что в любой LIP-лупе $Q(\cdot)$ ядра $N_l = N_m$ [7]. Если еще $N_l = N_r = N$, тогда по теореме 8 все элементы из N являются элементами Муфанг.

Достаточность очевидна (см. доказательство следствия 3).

5°. В теории луп большую роль играют так называемые внутренние подстановки [1]. Подстановка θ из группы, порожденной всеми трансляциями лупы $Q(\cdot)$, называется внутренней подстановкой лупы $Q(\cdot)$, если $I\theta = I$. Все внутренние подстановки образуют группу. Некоторая подлупа лупы $Q(\cdot)$ будет нормальной, если она инвариантна относительно группы всех внутренних подстановок. Группа внутренних подстановок порождается следующими тремя подстановками [1]:

$$L_{a,\,b} = L_a L_b L_{ba}^{-1},$$
$$R_{a,\,b} = R_a R_b R_{ab}^{-1},$$
$$T_a = R_a L_a^{-1},$$

где a, b — любые элементы из Q.

Как доказал Брак [1], если в IP-лупе $Q(\cdot)$ элементы a и b являются элементами Муфанг, то приведенные выше внутренние подстановки являются псевдоавтоморфизмами. Такой же результат имеет место и для LIP-луп.

Теорема 9. *Если a, b — элементы Муфанг LIP-лупы $Q(\cdot)$, то $R_{a,\,b} = L_{a^{-1},\,b^{-1}}$, T_a являются одновременно левыми и правыми псевдоавтоморфизмами.*

Доказательство. Пусть a, b — элементы Муфанг, тогда (L_a, R_a, L_aR_a), (L_b, R_b, L_bR_b) — автотопии лупы $Q(\cdot)$, откуда $(L_a, R_a,$

$L_aR_a)$ $(L_b, R_b, L_bR_b) = (L_aL_b, R_aR_b, L_aR_aL_bR_b)$ — тоже автотопия. Следовательно, $(xy)L_aR_aL_bR_b = xL_aL_b \cdot yR_aR_b$. Если $y = I$, тогда $xL_aR_aL_bR_b = xL_aL_bR_{ab}$, откуда $R_{a\cdot b} = L_b^{-1}L_a^{-1}L_aR_aL_bR_b = L_b^{-1}R_aL_bR_b$, $R_{ab}^{-1} = R_b^{-1}L_b^{-1}R_a^{-1}L_b$, откуда $R_{a,\,b} = R_aR_bR_{ab}^{-1} = R_aL_b^{-1}R_a^{-1}L_b$. Итак, $R_{a,\,b} = R_aL_b^{-1}R_a^{-1}L_b$.

Учитывая, что a и b являются и элементами Бола (см. доказательство следствия 3), а также учитывая (8), получаем $(R_aL_a, L_a^{-1}, L_a)(L_a^{-1}, R_a^{-1}, L_a^{-1}R_a^{-1})(L_b^{-1}, R_b^{-1}, L_b^{-1}R_b^{-1})(R_a^{-1}L_a^{-1}, L_a, L_a^{-1})\cdot(L_a,$ $R_a, L_aR_a)(L_b, R_b, L_bR_b) = (R_{a,\,b}, \alpha, \beta)$ — автотопия LIP-лупы $Q(\cdot)$, следовательно, $(xy)\beta = xR_{a,\,b}\cdot y\alpha$, откуда при $x = I$ получаем $\alpha = \beta$, т. е. имеет место равенство $(xy)\alpha = xR_{a,\,b}\cdot y\alpha$. Подставляя в последнее равенство $y = I$, получаем $x\alpha = xR_{a,\,b}\cdot I\alpha = xR_{a,\,b}\cdot$ $\cdot k = xR_{a,\,b}R_k$, откуда $\alpha = R_{a,\,b}R_k$, т. е. $(R_{a,\,b}, R_{a,\,b}R_k, R_{a,\,b}R_k)$ — автотопия. Итак, получили равенство $(xy)R_{a,\,b}\cdot k = xR_{a,\,b}\cdot(yR_{a,\,b}\cdot k)$. Следовательно, $R_{a,\,b}$ — правый псевдоавтоморфизм с компаньоном k. Найдем $k: k = I\alpha = IL_a^{-1}R_a^{-1}R_b^{-1}L_aR_aR_b = a^{-1}b^{-1}ab = (a, b)$. Здесь мы воспользовались следствием 3 и теоремой Муфанг (в лупе Муфанг любые два элемента порождают ассоциативную подлупу). Далее, $(L_a, R_a, L_aR_a)(R_bL_b, L_b^{-1}, L_b)(L_a^{-1}, R_a^{-1}, L_a^{-1}R_a^{-1})\cdot(R_b^{-1}L_b^{-1},$ $L_b, L_b^{-1}) = (\alpha_1, R_{a,\,b}, \beta_1)$ является автотопией LIP-лупы $Q(\cdot)$, т. е. $(xy)\beta_1 = x\alpha_1\cdot yR_{a,\,b}$, откуда при $y = I$ получаем $\alpha_1 = \beta_1$. Теперь при $x = I$ получаем $\alpha_1 = R_{a,\,b}L_{k_1}$, где $k_1 = I\alpha_1$. Отсюда следует, что $(R_{a,\,b}L_{k_1}, R_{a,\,b}, R_{a,\,b}L_{k_1})$ — автотопия лупы $Q(\cdot)$, т. е. имеем $k_1\cdot(xy)R_{a,\,b} = (k_1\cdot xR_{a,\,b})yR_{a,\,b}$. Итак, $R_{a,\,b}$ — левый псевдоавтоморфизм с компаньоном $k_1 = I\alpha_1 = IL_aR_bL_bL_a^{-1}R_b^{-1}L_b^{-1} = b^{-1}a^{-1}ba$ $bb^{-1} = b^{-1}a^{-1}ba = (b, a)$.

Докажем теперь равенство $R_{a,\,b} = L_{a^{-1},\,b^{-1}}$. Так как мы уже доказали, что $(R_{a,\,b}, R_{a,\,b}R_k, R_{a,\,b}R_k)$ — автотопия лупы $Q(\cdot)$, то и $(IR_{a,\,b}I, R_{a,\,b}R_k, R_{a,\,b}R_k)$ — тоже автотопия. Поэтому заключаем, что

$$IR_{a,\,b}I = R_{a,\,b}. \tag{17}$$

Пусть a — элемент Муфанг и пусть $a(xa)^{-1}\cdot xa = az$, тогда $a[(xa)^{-1}\cdot x]a = az$, $(xa)^{-1}\cdot x = za^{-1}$, $x = xa\cdot za^{-1}$, но $xa\cdot a^{-1} = x$, т. е. $z = I$. Следовательно, получили равенство

$$ax^{-1}\cdot x = a \tag{18}$$

для любого $x \in Q$ и любого элемента Муфанг $a \in M$. Пусть $xa\cdot a^{-1}\cdot$ $x^{-1} = z$. Имеем $a^{-1}(xa\cdot a^{-1}x^{-1}) = a^{-1}z$, $[a^{-1}(xa\cdot a^{-1})]x^{-1} = a^{-1}z$, $a^{-1}x\cdot x^{-1} = a^{-1}z$, откуда, ввиду (18), следует $z = I$, $(xa)^{-1} = a^{-1}x^{-1}$. Последнее равенство дает нам возможность найти IR_aI:

$$xIR_aI = (x^{-1}a)^{-1} = a^{-1}x = xL_{a^{-1}} = xL_a^{-1}, \text{ или}$$

$$IR_aI = L_a^{-1}. \tag{19}$$

В силу (17) и (19) получаем:

$$R_{a,\,b} = IR_{a,\,b}I = IR_aIIR_bIIR_{ab}^{-1}I = L_a^{-1}L_b^{-1}L^{-1}_{(ab)^{-1}} =$$
$$= L_{a^{-1}}L_{b^{-1}}L^{-1}_{b^{-1}a^{-1}} = L_{a^{-1},\,b^{-1}}.$$

Рассмотрим, наконец, T_a. Имеем $(R_a L_a, L_a^{-1}, L_a)(L_a^{-1}, R_a^{-1}, L_a^{-1} R_a^{-1})(L_a^{-1}, R_a^{-1}, L_a^{-1} R_a^{-1}) = (T_a, \alpha', \beta')$, это является автотопией LIP-лупы $Q(\cdot)$. Как и выше, доказывается, что $\alpha'=\beta'=T_a R_k$, где $k = 1\alpha' = 1 L_a^{-1} R_a^{-1} R_a^{-1} = a^{-3}$. Автотопия (T_a, α', β') принимает вид $(T_a, T_a R_k, T_a R_k)$, т. е. T_a — правый псевдоавтоморфизм с компаньоном $k = a^{-3}$. Рассматривая произведение автотопий $(L_a, R_a, L_a R_a)$ и $(R_a L_a, L_a^{-1}, L_a)$, мы находим, что T_a — левый псевдоавтоморфизм с компаньоном $k = a^3$. Теорема доказана.

Следствие 5. *При тех же условиях* 1) $R_{a,b} = L_{a^{-1}, b^{-1}}$ *будет автоморфизмом тогда и только тогда, когда компаньон* $k = (a, b)$ *принадлежит, по крайней мере, одному из ядер* LIP-*лупы* $Q(\cdot)$; 2) T_a *будет автоморфизмом тогда и только тогда, когда* a^3 *принадлежит некоторому из ядер.*

Теорема 10. *Каждый левый* (правый) *псевдоавтоморфизм* S LIP-*лупы* $Q(\cdot)$ *индуцирует автоморфизм правого* (*левого*) *ядра* N_r (N_l).

Доказательство. Пусть $a \in N_r$, т. е. $xy \cdot a = x \cdot ya$ и пусть S — левый псевдоавтоморфизм лупы $Q(\cdot)$ с компаньоном k, тогда имеем $k \cdot (xy \cdot a) S = k \cdot (x \cdot ya) S$, откуда $[k(xy) S]\, aS = (k \cdot xS)(ya) S = [(k \cdot xS)\, yS]\, aS$. Следовательно,

$$x(ya)\, S = (x \cdot yS)\, aS. \tag{20}$$

Если подставим $x = 1$ в (20), то получаем

$$(ya)\, S = yS \cdot aS. \tag{21}$$

Из (21) и (20) следует, что $aS \in N_r$. В силу равенства (21) левый псевдоавтоморфизм S LIP-лупы $Q(\cdot)$ является автоморфизмом ядра N_r. Аналогично доказывается, что правый псевдоавтоморфизм лупы $Q(\cdot)$ индуцирует автоморфизм ядра N_l.

Следствие 6. *Ядро* N LIP-*лупы* $Q(\cdot)$ *является нормальной подлупой подлупы Муфанг* M *лупы* $Q(\cdot)$.

Ядро N любой лупы называется пересечением всех трех ядер; если N — ядро LIP-лупы $Q(\cdot)$, тогда $N = N_l \cap N_r$.

Выше мы видели, что $N \subseteq M$. По теореме 9 $R_{a,b}$, $L_{a,b}$, T_a, где $a, b \in M$ являются левыми и правыми псевдоавтоморфизмами лупы $Q(\cdot)$, а по теореме 10 ядро N — инвариант относительно любой внутренней подстановки подлупы Муфанг M, т. е. N является нормальной подлупой подлупы Муфанг M.

Настоящая работа выполнена под руководством В. Д. Белоусова, которому автор приносит искреннюю благодарность.

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

1. R. H. Bruck, A survey of binary systems, Springer Verlag, Berlin-Gottingen-Heidelberg, 1958.
2. R. H. Bruck, Contributions to the theory of loops, Trans. Amer. Math. Soc., 60, (1946), pp. 245—354.
3. J. Aczel, Quasigroups-Nets-Nomograms (в печати).
4. R. H. Bruck, What is a Loop? Studies in math., 2 (1963), 59—99.
5. М. Холл, Теория групп, М., 1962.
6. В. Д. Белоусов, Производные операции и ассоциаторы в лупах, Матем. сборник, № 45 (87), (1958), 51—70.
7. R. Artzy, Relations between loop identities, Proc. of the Amer. Math. Soc., 11, № 6 (1960).

И. А. ФЛОРЯ

ЛУПЕ КУ ПРОПРИЕТАТЯ ИНВЕРСЭ УНИЛАТЕРАЛЭ

Резумат

Ын артикол се студиязэ лупе ку проприетатя инверсэ унилатералэ ку ажуторул елементелор луй Бол. Сынт женерализате унеле теореме але луй Брак пентру лупе ку проприетатя инверсэ.

Б. А. ЩЕРБАКОВ

РЕКУРРЕНТНЫЕ ФУНКЦИИ И РЕКУРРЕНТНЫЕ ДВИЖЕНИЯ

В теории динамических систем [1, 2] большой интерес представляют рекуррентные движения, введенные Дж. Д. Биркгофом [3]. Им доказано (см. [1], теоремы 27 и 28), что движение, траектория которого принадлежит компактному минимальному множеству, рекуррентно, а в полном пространстве замыкание траектории рекуррентного движения есть компактное минимальное множество.

В настоящей заметке рассматривается класс непрерывных на всей оси действительных функций, который характеризуется тем, что семейство сдвигов всякой функции этого класса определяет в универсальной динамической системе М. В. Бебутова [4] рекуррентное движение. Такие функции названы рекуррентными. Ниже для рекуррентных функций установлены некоторые теоремы, аналогичные известным признакам Фавара [5] существования почти периодических решений систем дифференциальных уравнений. Кроме того, рассмотрен ряд свойств, характеризующих рекуррентные функции. Задача изучения такого рода функций и разыскания рекуррентных движений, определяемых системой дифференциальных уравнений, была поставлена В. В. Немыцким в [2].

1°. В дальнейшем буквой I будем обозначать множество всех действительных чисел, а буквой R — множество всех непрерывных на I действительных функций.

Функцию $\varphi(x)$ из R назовем **рекуррентной**, если для любой пары положительных чисел ε и L существует $l>0$ такое, что для всякого действительного t на любом отрезке длины l найдется число τ, при котором

$$\max_{|x|<L} |\varphi(x+t+\tau)-\varphi(x+t)| \leqslant \varepsilon. \qquad (1)$$

Привлекая основные понятия теории динамических систем, устанавливаем, что *функция $\varphi(x)$ из R рекуррентна тогда и только тогда, когда в динамической системе М. В. Бебутова*[1] *(R_u, f) движение $f(\varphi, t)$, определенное функцией $\varphi=\varphi(x)$, рекуррентно.*

Легко показать также, что всякое рекуррентное движение динамической системы, заданной системой дифференциальных уравнений, определяется реккурентными функциями.

[1]) Фазовое пространство R_u динамической системы (R_u, f) есть множество R, в котором введена метрика, притом так, что сходимость в R_u есть равномерная сходимость на каждом конечном отрезке, а отображение f произведения $R_u \times I$ на R_u определено равенством $f(\varphi, t)=\varphi(x+t)$ для любой точки $\varphi=\varphi(x)$ из R_u и любого $t \in I$.

Из приведенного выше определения следует, что *всякая почти периодическая функция*[1]) *рекуррентна*. Однако *существуют рекуррентные функции, не являющиеся почти периодическими*.

Действительно, в [4] доказано, что в динамической системе (R_u, f) движение $f(\varphi, t)$ почти периодично тогда и только тогда, когда функция $\varphi=\varphi(x)$ почти периодична. Поэтому рекуррентной не почти периодической является всякая функция, определяющая в динамической системе (R_u, f) рекуррентное не почти периодическое движение (как показано в [7], такого рода движения в динамической системе (R_u, f) существуют).

В дальнейшем через $\varphi(I)$ будем обозначать семейство функций $\{\varphi(x+t)\}_{t\in I}$, порожденное функцией $\varphi(x)$ из R, а через $\overline{\varphi(I)}$ — замыкание множества $\varphi(I)$ в пространстве R_u (т. е. в смысле равномерной сходимости на каждом конечном отрезке). В пространстве R_u множество $\varphi(I)$ представляет собой траекторию $f(\varphi, I)$ движения $f(\varphi, t)$, определенного в динамической системе (R_u, f) функцией $\varphi=\varphi(x)$.

Лемма 1. *Функция $\varphi=\varphi(x)$ из R рекуррентна тогда и только тогда, когда множество $\varphi(I)$ компактно в R_u и*

$$\overline{\varphi(I)}=\overline{\psi(I)}, \qquad (2)$$

какова бы ни была функция $\psi(x)$ из $\overline{\varphi(I)}$.

Доказательство. Условие (2) равносильно минимальности замыкания траектории $\varphi(I)$ движения $f(\varphi, t)$. Поскольку пространство R_u полно, свойство компактности и минимальности замыкания траектории движения $f(\varphi, t)$ равносильно рекуррентности этого движения и, следовательно, рекуррентности функции $\varphi(x)$.

Теорема 1. *Функция $\varphi=\varphi(x)$ из R рекуррентна тогда и только тогда, когда она ограничена и равномерно непрерывна на I и удовлетворяет следующему условию:*

а) *для любой пары положительных чисел ε и L существует $l>0$ такое, что на любом отрезке длины l найдется число τ, при котором*

$$\max_{|x|<L} |\varphi(x+\tau)-\varphi(x)| \leqslant \varepsilon. \qquad (3)$$

Доказательство. Ясно, что всякая рекуррентная функция удовлетворяет условию а). Последнее равносильно почти рекуррентности движения $f(\varphi, t)$ (см. [4], определение 3). Поскольку замыкание траектории всякого почти рекуррентного движения есть минимальное множество (см. [4], теорема 8), из условия а) следует (2). Принимая во внимание лемму 1 и учитывая, что свойство компактности множества $\varphi(I)$ в пространстве R_u равносильно ограниченности и равномерной непрерывности на I функции $\varphi(x)$ (см. [4], теорема 1), заключаем, что теорема имеет место.

Пользуясь теоремой 1, можно установить связь между рекуррентными функциями и N-почти-периодическими функциями, введенными Б. М. Левитаном [8].

Действительно, из определения N-почти-периодической функции и теоремы 1 следует, что *N-почти-периодическая функция рекуррентна тогда и только тогда, когда она ограничена и равномерно*

[1]) Всюду почти периодической будем называть почти периодическую функцию в смысле Г. Бора [6].

непрерывна на I. Отсюда заключаем, что любая неограниченная N-почти-периодическая функция, какой является, например, функция

$$\varphi(x) = \frac{1}{2+\cos x+\cos x\sqrt{2}},$$

рассмотренная в [8], не является рекуррентной. С другой стороны, функция, построенная в [9] в дополнении 2 к § 1, является рекуррентной, но не N-почти-периодической. Примером N-почти-периодической функции, которая одновременно и рекуррентна, может служить всякая почти периодическая функция.

Заметим еще, что всякая рекуррентная функция рекуррентна и в смысле определения В. И. Зубова [10]. Обратное утверждение, как показывает функция

$$\varphi(t)=\begin{cases}\sin t, & t\,\overline{\in}\,[0, \pi]\\ 0, & t\in[0, \pi],\end{cases}$$

приведенная в [10], не имеет места.

Рассмотрим некоторые свойства рекуррентных функций.

Лемма 2. *Если $\varphi(x)$ — рекуррентная функция, а $\psi(x)$ принадлежит R, то функция $\omega(x)=\psi(\varphi(x))$ рекуррентна.*

Доказательство. Предположим, что условия леммы выполнены, и пусть ε и L — произвольная пара положительных чисел. Так как $\varphi(x)$ ограничена на I, найдется отрезок $[a, b]$, содержащий множество значений $\varphi(x)$. Из условия равномерной непрерывности $\psi(x)$ на $[a, b]$ подберем $\delta>0$, соответствующее данному ε. Для рекуррентной функции $\varphi(x)$ и пары δ и L существует такое $l>0$, что для всякого $t\in I$ на любом отрезке длины l найдется число τ, при котором $|\varphi(x+t+\tau)-\varphi(x+t)|\leqslant\delta$, каково бы ни было $|x|\leqslant L$. Ввиду выбора δ для тех же значений x, t и τ выполняется неравенство $|\omega(x+t+\tau)-\omega(x+t)|\leqslant\varepsilon$. Таким образом, $\omega(x)$ является рекуррентной функцией.

В дальнейшем функцию $\varphi(x)$ из R будем называть почти рекуррентной, если она удовлетворяет условию а) теоремы 1. Это условие равносильно следующему: для любого $\varepsilon>0$ существует относительно плотное множество T такое, что при любом $\tau\in T$

$$\max_{|x|\leqslant\frac{1}{\varepsilon}}|\varphi(x+\tau)-\varphi(x)|\leqslant\varepsilon. \tag{4}$$

Число τ, при котором выполняется (4), называется ε-смещением функции $\varphi(x)$.

Лемма 3. *Если $\varphi(x)$ — рекуррентная функция, то рекуррентными являются функции*

$$\sigma(x)=\sum_{k=1}^{n}A_k\varphi(ax+b_k) \text{ и } \pi(x)=\prod_{k=1}^{n}A_k\varphi(ax+b_k),$$

где A_k, b_k $(k=1, 2, \ldots, n)$ и a — действительные постоянные.

Доказательство. Так как при $a=0$ лемма имеет место, рассмотрим случай, когда $a\neq0$.

Пусть $\varphi(x)$ — рекуррентная функция. Согласно теореме 1, $\varphi(x)$ ограничена, равномерно непрерывна на I и почти рекуррентна. Покажем, что этими свойствами обладает и $\sigma(x)$.

Ограниченность на I функции $\sigma(x)$ усматриваем из неравенства $|\sigma(x)|\leqslant\sum_{k=1}^{n}|A_k\varphi(ax+b_k)|$. Кроме того, пользуясь оценкой

$$|\sigma(x+t)-\sigma(x)|\leqslant\sum_{k=1}^{n}|A_k|\,|\varphi(ax+b_k+at)-\varphi(ax+b_k)|, \tag{5}$$

легко убедиться, что $\sigma(x)$ равномерно непрерывна на I.

Покажем, что $\sigma(x)$ почти рекуррентна.

Пусть $\delta>0$, а T — относительно плотное множество δ-смещений функции $\varphi(x)$. Из (5) следует, что неравенство $\left|\sigma\left(x+\frac{\tau}{a}\right)-\sigma(x)\right|\leqslant\delta\sum_{k=1}^{n}|A_k|$ выполняется при любом $\tau\in T$ и всех x, для которых $|ax+b_k|\leqslant\frac{1}{\delta}$ $(k=1, 2, \ldots, n)$. Отсюда усматриваем, что, каково бы ни было $\varepsilon>0$, при достаточно малом δ относительно плотное множество $\left\{\frac{\tau}{a}\right\}_{\tau\in T}$ состоит из ε-смещений функции $\varphi(x)$. Таким образом, $\sigma(x)$ почти рекуррентна и, по теореме 1, рекуррентна.

Аналогично устанавливаем рекуррентность функции $\pi(x)$. При этом пользуемся следующей оценкой:

$$|\pi(x+t)-\pi(x)|=\left|\sum_{k=1}^{n}B_k[\varphi(ax+b_k+at)-\varphi(ax+b_k)]\right|\leqslant$$
$$\leqslant\sum_{k=1}^{n}|B_k|\,|\varphi(ax+b_k+at)-\varphi(ax+b_k)|,$$

где $B_k=A_1A_2\ldots A_n\varphi(ax+b_1)\varphi(ax+b_2)\ldots\varphi(ax+b_{k-1})\varphi(ax+b_{k+1}+at)\ldots\varphi(ax+b_n+at)$ $(k=1, 2, \ldots, n)$.

Из доказанного следует, что если $\varphi(x)$ — рекуррентная функция, то рекуррентными являются, например, такие функции:

$$|\varphi(x)|,\ \varphi(\varphi(x)),\ \sum_{k=0}^{n}A_k\varphi^k(x),\ \sum_{k=-n}^{0}A_k\varphi^k(x) \text{ при } \inf_{x\in I}|\varphi(x)|>0,\ c\varphi(ax+b),$$

где a, b, c и все коэффициенты A_k — действительные числа.

Лемма 4. *Предел равномерно сходящейся на I последовательности рекуррентных функций $\varphi_n(x)$ $(n=1, 2, \ldots)$ есть рекуррентная функция.*

Доказательство. Пусть $\varphi(x)$ — предел последовательности, о которой идет речь в лемме, а ε и L — произвольная пара положительных чисел. Подберем натуральное n так, чтобы для всех $x\in I$ выполнялось неравенство $|\varphi(x)-\varphi_n(x)|\leqslant\frac{\varepsilon}{3}$. Поскольку $\varphi(x)$ — рекуррентная функция, для пары чисел $\frac{\varepsilon}{3}$ и L найдется такое $l>0$, что для всякого $t\in I$ на любом отрезке длины l существует число τ, при котором

$$|\varphi_n(x+t+\tau)-\varphi_n(x+t)|\leqslant\frac{\varepsilon}{3},$$

каково бы ни было $|x| \leqslant L$. Для тех же значений x, t и τ находим, что

$$|\varphi(x+t+\tau)-\varphi(x+t)| \leqslant |\varphi(x+t+\tau)-\varphi_n(x+t+\tau)| + $$
$$+ |\varphi_n(x+t+\tau)-\varphi_n(x+t)| + |\varphi_n(x+t)-\varphi(x+t)| \leqslant \varepsilon.$$

Таким образом, какова бы ни была пара $\varepsilon > 0$ и $L > 0$, для $\varphi(x)$ существует $l > 0$, участвующее в определении рекуррентных функций.

Лемма 5. *Если производная $\varphi'(x)$ рекуррентной функции $\varphi(x)$ равномерно непрерывна на I, то $\varphi'(x)$ — рекуррентная функция.*

Доказательство. Пусть $\varphi(x)$ — рекуррентная функция, производная которой равномерно непрерывна на I. Рассмотрим последовательность функций

$$\varphi_n(x) = n\left[\varphi\left(x+\frac{1}{n}\right)-\varphi(x)\right] \quad (n = 1, 2, \ldots). \tag{6}$$

Эта последовательность, как следует из леммы 3, состоит из рекуррентных функций. Кроме того, так же как в [11] при доказательстве теоремы 1.8, убеждаемся, что последовательность (6) сходится к $\varphi'(x)$ равномерно на I. На основании леммы 4 заключаем, что $\varphi'(x)$ — рекуррентная функция.

2°. Рассмотрим некоторые признаки существования рекуррентных решений системы дифференциальных уравнений

$$\frac{dx_i}{dt} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}(t)\, x_j + \alpha_i(t) \quad (i = 1, 2, \ldots, n), \tag{7}$$

где $a_{ij}(t)$ и $\alpha_i(t)$ — действительные функции переменной $t \in I$.

Предварительно введем некоторые определения и обозначения, которыми будем пользоваться в дальнейшем.

Через $E_{n,m}$ будем обозначать линейное нормированное пространство всех действительных прямоугольных матриц $A = (a_{ij})$, состоящих из n строк и m столбцов, в котором норма определена равенством $\|A\| = \sum_{i,j} |a_{ij}|$, а сумма матриц и произведение матрицы на действительное число — как обычно.

Всякую матрицу $A(t)$ из n строк и m столбцов, элементы которой являются действительными функциями, определенными на I, будем рассматривать как отображение числовой оси I в пространство $E_{n,m}$.

Действительное τ назовем ε-смещением матрицы $A(t)$, если $\|A(t+\tau)-A(t)\| \leqslant \varepsilon$ при всех $|t| \leqslant \frac{1}{\varepsilon}$.

Непрерывную на I матрицу $A(t)$ назовем почти рекуррентной, если для любого $\varepsilon > 0$ существует относительно плотное множество ε-смещений матрицы $A(t)$.

Матрицу $A(t)$ назовем рекуррентной, если она ограничена и равномерно непрерывна на I и почти рекуррентна. Можно показать, что матрица $A(t)$ рекуррентна тогда и только тогда, когда для любой пары положительных чисел ε и L существует $l > 0$ такое, что, каково бы ни было $t_0 \in I$, на любом отрезке длины l найдется число τ, при котором

$$\max_{|t|<L} \|A(t+t_0+\tau)-A(t+t_0)\| \leqslant \varepsilon.$$

Ясно, что любой элемент рекуррентной матрицы является рекуррентной функцией.

Пользуясь векторно-матричными обозначениями, систему (7) запишем в виде одного уравнения:

$$\frac{dx}{dt} = A(t)\,x + \alpha(t). \tag{8}$$

При этом всякое решение $x(t)$ этого уравнения будем рассматривать как переменную матрицу, принимающую значения в $E_{n,1}$.

Всюду в дальнейшем будем предполагать, что матрица $S(t) = (s_{ij}(t))$, определяемая тождествами

$$s_{ij}(t) = \begin{cases} a_{ij}(t) & \text{при } i = 1, 2, \ldots, n \text{ и } j = 1, 2, \ldots, n \\ \alpha_i(t) & \text{при } i = 1, 2, \ldots, n \text{ и } j = n+1, \end{cases}$$

непрерывна на I. При этом условии для любой пары $t_0 \in I$ и $x_0 \in E_{n,1}$ существует единственное решение $x(t)$ уравнения (8) с начальным значением $x(t_0) = x_0$. Это решение определено при всех $t \in I$.

Имеет место следующая

Лемма 6. *Для любого решения $x(t)$ уравнения (8) и для любых $t_0 \in I$, $\varepsilon > 0$ и $L > 0$ существует такое $\delta > 0$, что если*

$$\max_{|t-t_0|<L} (\|A(t)-B(t)\| + \|\alpha(t)-\beta(t)\|) \leqslant \delta, \tag{9}$$

где $B(t)$ и $\beta(t)$ — непрерывные на I матрицы со значениями в $E_{n,n}$ и $E_{n,1}$ соответственно, то

$$\max_{|t-t_0|<L} \|x(t)-y(t)\| < \varepsilon, \tag{10}$$

каково бы ни было решение $y(t)$ уравнения

$$\frac{dy}{dt} = B(t)\,y + \beta(t), \tag{11}$$

удовлетворяющее условию

$$\|x(t_0)-y(t_0)\| \leqslant \delta. \tag{12}$$

Доказательство. Выберем произвольно $t_0 \in I$, $\varepsilon > 0$ и $L > 0$. Если $x(t)$ и $y(t)$ — решения уравнений (8) и (11) соответственно, то при любом $t \in [t_0, t_0+L]$

$$\|x(t)-y(t)\| \leqslant \|x(t_0)-y(t_0)\| + \int_{t_0}^{t} \|A(s)\,x(s)-B(s)\,y(s)\|\,ds +$$
$$+ \int_{t_0}^{t} \|\alpha(s)-\beta(s)\|\,ds \leqslant \|x(t_0)-y(t_0)\| + \int_{t_0}^{t} \|A(s)-$$
$$-B(s)\|\,\|x(s)\|\,ds + \int_{t_0}^{t} \|B(s)\|\,\|x(s)-y(s)\|\,ds +$$
$$+ \int_{t_0}^{t} \|\alpha(s)-\beta(s)\|\,ds,$$

откуда находим, что

$$||x(t)-y(t)|| \leqslant M+\int_{t_0}^{t} ||B(s)||\,||x(s)-y(s)||\,ds, \qquad (13)$$

где

$$M=||x(t_0)-y(t_0)||+L\max_{|t-t_0|<L}||A(t)-B(t)||\,||x(t)||+$$
$$+L\max_{|t-t_0|<L}||\alpha(t)-\beta(t)||.$$

Аналогично, рассматривая решения $x(2t_0-t)$ и $y(2t_0-t)$ уравнений

$$\frac{dx}{dt}=-A(2t_0-t)-\alpha(2t_0-t)$$

$$\frac{dy}{dt}=-B(2t_0-t)-\beta(2t_0-t),$$

устанавливаем, что при любом $t\in[t_0,\ t_0+L]$

$$||x(2t_0-t)-y(2t_0-t)||\leqslant M+$$
$$+\int_{t_0}^{t}||B(2t_0-s)||\,||x(2t_0-s)-y(2t_0-s)||\,ds. \qquad (14)$$

Применяя к неравенствам (13) и (14) лемму Беллмана (см. [1], стр. 19), заключаем, что если условия (9) и (12) выполнены при достаточно малом $\delta>0$, то при всех $t\in[t_0,\ t_0+L]$

$$||x(t)-y(t)||<\varepsilon$$
$$\text{и } ||x(2t_0-t)-y(2t_0-t)||<\varepsilon,$$

что эквивалентно (10). Лемма доказана.

Последовательность чисел $\{\tau_n\}$ будем называть λ-последовательностью непрерывной на I матрицы $U(t)$, если последовательность $\{U(t+\tau_n)\}$ сходится к $U(t)$ равномерно на каждом отрезке числовой оси.

Следствие 1. *Если решение $x(t)$ уравнения (8) и λ-последовательность $\{\tau_n\}$ матрицы $S(t)$ таковы, что $\{x(\tau_n)\}$ сходится, то последовательность $\{x(t+\tau_n)\}$ сходится равномерно на каждом конечном отрезке к решению $x^*(t)$ того же уравнения, удовлетворяющему условию $x^*(0)=\lim\limits_{n\to\infty}x(\tau_n)$.*

Действительно, в справедливости сформулированного предложения легко убедиться, если воспользоваться леммой 6. При этом нужно учесть, что $x_n(t)\equiv x(t+\tau_n)$ при любом n является решением уравнения

$$\frac{dx}{dt}=A(t+\tau_n)\,x+\alpha(t+\tau_n),$$

удовлетворяющим условию $x_n(0)=x(\tau_n)$.

Пусть $U(t)$ и $V(t)$ — непрерывные на I матрицы. Будем говорить, что $V(t)$ сравнима по частоте с $U(t)$, если для любого $\varepsilon>0$ существует такое $\delta>0$, что всякое δ-смещение матрицы $U(t)$ является ε-смещением матрицы $V(t)$.

Лемма 7. *Матрица $V(t)$ сравнима по частоте с матрицей $U(t)$ тогда и только тогда, когда из всякой λ-последовательности матрицы $U(t)$ можно выделить λ-последовательность матрицы $V(t)$.*

Доказательство. Предположим, что $V(t)$ сравнима по частоте с $U(t)$ и пусть $\{\tau_n\}$ — произвольная λ-последовательность матрицы $U(t)$. Для любого натурального k подберем δ_k так, чтобы всякое δ_k-смещение матрицы $U(t)$ было $\frac{1}{k}$-смещением матрицы $V(t)$. Так как последовательность $\{U(t+\tau_n)\}$ сходится равномерно на отрезке $\left[-\frac{1}{\delta_k},\ \frac{1}{\delta_k}\right]$, найдется натуральное n_k, для которого τ_{n_k} есть δ_k-смещение матрицы $U(t)$. Ясно, что $\{\tau_{n_k}\}$ является λ-последовательностью матрицы $V(t)$.

Предположим теперь, что $V(t)$ не сравнима по частоте с $U(t)$. В этом случае существует $\varepsilon>0$ такое, что каково бы ни было натуральное n, найдется $\frac{1}{n}$-смещение τ_n матрицы $U(t)$, не являющееся ε-смещением матрицы $V(t)$. Ясно, что $\{\tau_n\}$ есть λ-последовательность матрицы $V(t)$, из которой нельзя выделить λ-последовательность матрицы $V(t)$. Лемма доказана.

Из леммы 7 и следствия 1 вытекает

Лемма 8. *Решение $x(t)$ уравнения (8) сравнимо по частоте с $S(t)$ тогда и только тогда, когда из всякой λ-последовательности $\{\tau_n\}$ матрицы $S(t)$ можно выделить такую подпоследовательность $\{\tau_{n_k}\}$, что $\lim\limits_{k\to\infty}x(\tau_{n_k})=x(0)$.*

Теорема 2. *Пусть матрица $S(t)$ почти рекуррентна (ограничена и почти рекуррентна). Для того чтобы решение $x(t)$ уравнения (8) было почти рекуррентным (рекуррентным), достаточно, чтобы оно было ограниченным и имело место неравенство*

$$\sup_{t\in I}||x(t)||<\sup_{t\in I}||x^*(t)||, \qquad (15)$$

каково бы ни было решение $x^*(t)\not\equiv x(t)$ того же уравнения.

Доказательство. Пусть $x(t)$ — ограниченное решение уравнения (8), удовлетворяющее условию (15), а $\{\tau_n\}$ — произвольная λ-последовательность матрицы $S(t)$. Без ограничения общности рассуждений можно считать, что $\{x(\tau_n)\}$ сходится. Согласно следствию 1, $\{x(t+\tau_n)\}$ сходится равномерно на каждом конечном отрезке к решению $x^*(t)$ уравнения (8), удовлетворяющему условию $x^*(0)=\lim\limits_{n\to\infty}x(\tau_n)$. Покажем, что

$$\sup_{t\in I}||x^*(t)||\leqslant M, \qquad (16)$$

где $M=\sup\limits_{t\in I}||x(t)||$.

Предположим противное. Тогда можно подобрать $t_0\in I$ и $\varepsilon>0$ так, что

$$||x^*(t_0)||=M+\varepsilon. \qquad (17)$$

Для пары чисел ε и $|t_0|$ найдется такое натуральное n, что $||x^*(t)-x_n(t)||<\varepsilon$ при всех $|t|\leqslant|t_0|$. Поэтому

$$||x^*(t_0)||<||x_n(t_0)||+\varepsilon\leqslant M+\varepsilon.$$

Последнее противоречит (17).

Ввиду условия (15), из неравенства (16) следует, что $x^*(t) \equiv \equiv x(t)$. В частности, $x(0) = x^*(0)$, т. е. $\lim\limits_{n\to\infty} x(\tau_n) = x(0)$. Учитывая, что всякая матрица, сравнимая по частоте с почти рекуррентной матрицей, почти рекуррентна, на основании леммы 8 заключаем, что решение $x(t)$ почти рекуррентно. В случае, когда матрица $S(t)$ ограничена, это решение рекуррентно. Действительно, пусть $||S(t)|| \leqslant N$ при всех $t \in I$. Тогда $||x(t_1) - x(t_2)|| \leqslant \int\limits_{t_1}^{t_2} ||A(s)x(s) + \alpha(s)|| ds \leqslant N(M+1)(t_2 - t_1)$, каковы бы ни были $t_1 < t_2$. Отсюда вытекает, что почти рекуррентное решение $x(t)$ равномерно непрерывно и, следовательно, рекуррентно. Теорема доказана.

Наряду с (8) рассмотрим уравнение

$$\frac{dy}{dt} = A(t)\,y. \qquad (18)$$

Теорема 3. *Пусть матрица $S(t)$ почти рекуррентна (ограничена и почти рекуррентна). Если $y(t) \equiv 0$ есть единственное ограниченное решение уравнения (18), а $x(t)$ — ограниченное решение уравнения (8), то $x(t)$ почти рекуррентно (рекуррентно).*

Действительно, в рассматриваемом случае $x(t)$ есть единственное ограниченное решение уравнения (8) и, следовательно, оно удовлетворяет условию (15).

Теорема 4. *Пусть матрица $S(t)$ почти рекуррентна (ограничена и почти рекуррентна). Если уравнение (8) имеет хотя бы одно ограниченное решение, и из того, что $x_1(t)$ и $x_2(t)$—два ограниченных решения уравнения (8), для которых*

$$\sup_{t\in I} ||x_1(t)|| = \sup_{t\in I} ||x_2(t)|| \qquad (19)$$

следует, что $x_1(t) \equiv x_2(t)$, то уравнение (8) имеет почти рекуррентные (рекуррентные) решения.

Доказательство. Предположим, что условия теоремы выполнены, и пусть $x(t)$ — ограниченное решение уравнения (8) такое, что

$$\sup_{t\in I} ||x(t)|| \leqslant \sup_{t\in I} ||x^*(t)||, \qquad (20)$$

каково бы ни было решение $x^*(t)$ того же уравнения. Решение $x(t)$, удовлетворяющее этому условию, существует. Выберем произвольную λ-последовательность $\{\tau_n\}$ матрицы $S(t)$. Без ограничения общности рассуждений можно считать, что $\{x(\tau_n)\}$ сходится. Так же, как и в теореме 2, усматриваем, что

$$\sup_{t\in I} ||x^*(t)|| \leqslant \sup_{t\in I} ||x(t)||,$$

где $x^*(t)$ — решение уравнения (8), удовлетворяющее условию $x^*(0) = \lim\limits_{n\to\infty} x(\tau_n)$. Из последнего неравенства и (19) и (20) следует, что $x(t) \equiv x^*(t)$, откуда, так же как и в теореме 2, убеждаемся, что решение $x(t)$ почти рекуррентно (рекуррентно).

В заключение рассмотрим дифференциальное уравнение

$$\frac{dx}{dt} = ax + \varphi(t), \qquad (21)$$

где действительное $a \neq 0$, а $\varphi(t)$ — ограниченная почти рекуррентная функция. Для определенности будем считать $a > 0$.

Общее решение уравнения (21) имеет вид

$$x(t) = e^{at}\left(C + \int\limits_0^t e^{-as}\varphi(s)\,ds\right).$$

Из него при $C = -\int\limits_0^\infty e^{-as}\varphi(s)\,ds$ получаем частное решение

$$x_0(t) = -e^{at}\int\limits_t^\infty e^{-as}\varphi(s)\,ds,$$

которое, как легко проверить, ограничено. На основании теоремы 3 заключаем, что решение $x_0(t)$ рекуррентно.

Рассмотрим теперь уравнение (21) при условии, что $a = 0$, а $\varphi(t)$ — почти рекуррентная (ограниченная и почти рекуррентная) функция. В рассматриваемом случае общее решение имеет вид:

$$x(t) = C + \Phi(t), \qquad (22)$$

где $\Phi(t)$—одна из первообразных функций для $\varphi(t)$. Учитывая теорему (4), заключаем, что если $\Phi(t)$ ограничена, то найдется действительное C_0 такое, что решение $x_0(t) \equiv C_0 + \Phi(t)$ почти рекуррентно (рекуррентно). В частности, справедливо следующее

Следствие 2. *Всякая ограниченная первообразная почти рекуррентной (ограниченной и почти рекуррентной) функции почти рекуррентна (рекуррентна).*

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

1. В. В. Немыцкий и В. В. Степанов, Качественная теория дифференциальных уравнений, М.—Л., ГИТТЛ, 1949.
2. В. В. Немыцкий, Топологические вопросы теории динамических систем, Успехи матем. наук, 4, вып. 6 (1949), 91—153.
3. Дж. Д. Биркгоф, Динамические системы, М., ГИТТЛ, 1941.
4. М. В. Бебутов, О динамических системах в пространстве непрерывных функций, Бюллетень МГУ, Математика, 2, вып. 5 (1941), 1—52.
5. J. Favard, Sur les équations différentielles linéaires à coefficients presque-périodiques, Acta Math., 51, 1928, 31—81.
6. Г. Бор, Почти периодические функции, М.—Л., ГИТТЛ, 1934.
7. Б. А. Щербаков, Составляющие классы устойчивых по Пуассону движений, Сибирский матем. журнал, 5, № 6 (1964), 1397—1417.
8. Б. М. Левитан, Почти-периодические функции, М., ГИТТЛ, 1953.
9. Б. Я. Левин, О почти периодических функциях Левитана, Украинский матем. журнал, № 1, 1949, 49—101.
10. В. И. Зубов, К теории рекуррентных функций, Сибирский матем. журнал, 3, № 4 (1962), 532—560.
11. C. Corduneanu, Funcţii aproape-periodice, Bucureşti, 1961.

Б. А. ЩЕРБАКОВ

ФУНКЦИЙ ШИ МИШКЭРЬ РЕКУРЕНТЕ

Резумат

Ын артикол се студиязэ функцииле континуе пе акса реалэ, каре детерминэ ын системул динамик М. В. Бебутов мишкэрь рекуренте.

КРАТКИЕ СООБЩЕНИЯ

И. У. БРОНШТЕЙН

ОБ ЭРГОДИЧНОСТИ ДИСТАЛЬНЫХ МИНИМАЛЬНЫХ МНОЖЕСТВ

1. В заметке доказывается теорема 1, утверждающая, что компактное метрическое дистальное минимальное множество является эргодическим. Этот результат используется для доказательства теоремы 2, указывающей необходимые и достаточные условия, при которых почти периодическая по Левитану функция является почти периодической по Бору.

2. Пусть X — компактное метрическое пространство, I — группа действительных чисел, (X, I, π) — динамическая система [1] (группа преобразований [2]).

Динамическая система (X, I, π) называется дистальной [3], если для любых двух различных точек p и q из X найдется число $\delta > 0$ такое, что $d(\pi^t p, \pi^t q) > \delta$ при всех $t \in I$ ($d(p, q)$ — метрика в X).

Замыкание $E(X, I, \pi)$ множества всех отображений

$$\{\pi^t : X \to X \mid t \in I\} \text{ в } X^X$$

является бикомпактной полугруппой относительно композиции двух отображений [3].

В работе Р. Эллиса [3] показано, что динамическая система (X, I, π) является дистальной тогда и только тогда, когда полугруппа

$$E = E(X, I, \pi)$$

является группой.

Отображение $\rho : E \times I \to E$, где $\rho(\xi, t) = \pi^t \xi$ определяет группу преобразований (E, I, ρ).

3. Теорема 1. *Компактное метрическое дистальное минимальное множество X является эргодическим.*

Доказательство. В силу теоремы 5.4 работы Д. Окстоби [4] достаточно показать, что предел

$$\lim_{\tau \to \infty} \tau^{-1} \int_0^\tau f(\pi^t x)\, dt$$

существует при всех $x \in X$ и $f \in C(X)$.

Пусть $f \in C(X)$ и a — фиксированная точка из X. Отображение $\varphi_a : E \to X$, где $\varphi_a \xi = \xi a$ $(\xi \in E)$, является гомоморфизмом группы преобразований (E, I, ρ) на (X, I, π). Тогда функция $\tilde{f} = f \circ \varphi_a$ принадлежит $C(E)$, причем

$$\tilde{f}(\rho^t \xi) = (f \circ \varphi_a)(\rho^t \xi) = f(\pi^t(\varphi_a \xi)).$$

Существует точка $\xi \in E$ такая, что $\varphi_a \xi = x$. Для этой точки

$$f(\pi^t x) = \tilde{f}(\rho^t \xi).$$

Таким образом, достаточно показать, что для любого элемента $\xi \in E$ и любой функции $F \in C(E)$ существует

$$\lim_{\tau \to \infty} \tau^{-1} \int_0^\tau F(\rho^t \xi)\, dt.$$

Используя теорему Рисса о представлении линейного функционала на $C(E)$ и теорему Маркова—Какутани о существовании неподвижной точки, легко доказать ([5], стр. 555, упр. 41) существование счетно-аддитивной неотрицательной нормированной меры λ на алгебре борелевских подмножеств E, инвариантной при всех преобразованиях ρ^t, $t \in I$.

На основании индивидуальной эргодической теоремы Биркгофа ([5], стр. 717) найдется точка $\eta \in E$ такая, что для любой функции $F \in C(E)$ существует

$$\lim_{\tau \to \infty} \tau^{-1} \int_0^\tau F(\rho^t \eta)\, dt.$$

Пусть $\xi \in E$. Так как отображение $\sigma \to \sigma\mu$ $(\sigma \in E, \mu \in E)$ группы E на себя является непрерывным [3], то отображение $h : E \to E$, где $h\alpha = \alpha\eta^{-1}\xi$ $(\alpha \in E)$, является изоморфизмом [2] системы (E, I, ρ) на себя, переводящим η в ξ.

Тогда

$$F(\rho^t \xi) = F(\rho^t(h\eta)) = (F \circ h)(\rho^t \eta).$$

Но $F \circ h \in C(E)$, поэтому существует

$$\lim_{\tau \to \infty} \tau^{-1} \int_0^\tau F(\rho^t \xi)\, dt = \lim_{\tau \to \infty} \tau^{-1} \int_0^\tau (F \circ h)(\rho^t \eta)\, dt.$$

Теорема доказана.

Так как замыкание траектории любой точки в компактной дистальной динамической системе является минимальным множеством [3], то из доказанной теоремы вытекает

Следствие 1. *Если X — компактное метрическое пространство и (X, I, π) — дистальная динамическая система, то все точки $p \in X$ являются квазирегулярными.*

В работе Фурстенберга [6] приводится пример дистальной динамической системы на торе, при которой не все точки тора являются квазирегулярными. Однако в этом примере имеется ошибка.

Замечание 1. Если (X, I, π) — дистальная эргодическая группа преобразований, то она является строго эргодической, а множество X — минимально.

4. Пусть f — ограниченная и равномерно непрерывная почти периодическая по Левитану функция [7]. Через $H(f)$ обозначим множество всех функций φ, которые являются пределом последовательности вида $\{f(x+t_n)\}$ в смысле равномерной сходимости на любом ограниченном интервале. $H(f)$ совпадает с замыканием траектории точки f в системе Бебутова [8].

Теорема 2. *Функция $f(x)$ $(x \in I)$ является почти периодической по Бору тогда и только тогда, когда f — ограничена, равномерно непрерывна и любая функция $\varphi \in H(f)$ является почти периодической по Левитану.*

Доказательство. Необходимость условия очевидна. Пусть f — ограниченная и равномерно непрерывная функция и пусть любая функция $\varphi \in H(f)$ является почти периодической по Левитану. Из результатов работы Эллиса [3] легко следует, что $H(f)$ в системе Бебутова является дистальным компактным минимальным множеством. Функция F называется дистальной, если замыкание ее траектории в системе Бебутова является дистальным минимальным множеством. Таким образом, функция f является дистальной. Отсюда легко следует, что и функция $f(x)\, e^{i\lambda x}$ для любого действительного λ является дистальной.

Поэтому из теоремы 1 следует, что

$$\lim_{T \to \infty} (2T)^{-1} \int_{-T}^{+T} f(x+t)\, e^{i\lambda(x+t)}\, dt = e^{i\lambda x} \cdot \lim_{T \to \infty} (2T)^{-1} \int_{-T}^{+T} f(x+t)\, e^{i\lambda t}\, dt$$

существует равномерно по $x \in I$.

Через N_f обозначим модуль, порожденный множеством всех тех $\lambda \in I$, для которых

$$\lim_{T \to \infty} (2T)^{-1} \int_{-T}^{+T} f(t)\, e^{i\lambda t}\, dt \neq 0.$$

Легко видеть, что N_f — не более чем счетное множество, причем $N_f = N_\varphi$ для любой функции $\varphi \in H(f)$. Из работы Левина [9] следует, что $M_\varphi \subseteq N_\varphi = N_f$, где M_φ — модуль почти периодической функции Левитана φ.

Выберем счетное множество функций $f, \varphi_1 \ldots, \varphi_k, \ldots$ $(\varphi_k \in H(f))$ так, чтобы объединение их модулей содержало модуль M_φ любой функции $\varphi \in H(f)$. Составим прямое произведение счетного числа систем Бебутова. Замыкание $\sum$ траектории точки $\omega = (f, \varphi_1, \ldots, \varphi_k, \ldots)$ является компактным метризуемым дистальным минимальным множеством, причем точка ω является характеристической [10]. В силу теоремы 2 из [10], множество $\sum$ является однородным. Но тогда, в силу теоремы Готтшалка [11], $\sum$ — равностепенно непрерывное [2] минимальное множество. Отсюда легко следует, что $f(x)$ — почти периодическая по Бору функция. Теорема доказана.

Следствие 2. *Если f — ограниченная и равномерно непрерывная почти периодическая по Левитану, но не почти периодическая по Бору функция, то найдется функция $\varphi \in H(f)$, которая не является почти периодической по Левитану.*

Замечание 2. Существуют неограниченные почти периодические функции Левитана f такие, что все функции $\varphi \in H(f)$ являются почти периодическими по Левитану. Например,

$$f(x) = \frac{1}{2 + \cos x + \cos \sqrt{2}\, x}.$$

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

1. В. В. Немыцкий, В. В. Степанов, Качественная теория дифференциальных уравнений, ГИТТЛ, 1949.
2. W. H. Gottschalk, G. A. Hedlund, Topological dynamics, Amer. Math. Soc. Coll. Publ., 36 (1955).
3. R. Ellis, Pacific J. Math., 8, № 3 (1958), 401—405.
4. Д. Окстоби, Успехи матем. наук, 8, вып. 3 (55), (1953), 75—97.
5. Н. Данфорд, Дж. Т. Шварц, Линейные операторы, ИЛ, М., 1962.
6. H. Furstenberg, Amer. J. Math., 83, (1961), 573—601.
7. Б. М. Левитан, Почти-периодические функции, М., ГИТТЛ, 1953.
8. М. В. Бебутов, Бюллетень МГУ, 2, вып. 5 (1941), 1—52.
9. Б. Я. Левин, Укр. матем. журнал, № 1 (1949), 49—101.
10. И. У. Бронштейн, Исследования по алгебре и математическому анализу, Сб. статей, Кишинев, (1965), 113—115.
11. W. H. Gottschalk, Bull. Amer. Math. Soc., 54 (1948), 982—984.

Известия Академии наук Молдавской ССР № 7, 1965 г.

В. М. ЕНИ

О КРАТНОСТИ СОБСТВЕННОГО ВЕКТОРА И КРАТНОСТИ ХАРАКТЕРИСТИЧЕСКОГО ЧИСЛА МАТРИЧНОГО ПУЧКА

В настоящей заметке показывается, что для полиноминального матричного пучка (как и для матрицы) длины жордановых цепочек совпадают со степенями соответствующих элементарных делителей.

Рассмотрим полиноминальный матричный пучок

$$L(\lambda) = \sum_{j=0}^{n} \lambda^j A_j, \tag{1}$$

где $A_j\ (j = 0, 1, \ldots, n)$ — квадратные матрицы порядка s и λ — комплексный параметр. Число λ_0 называется *характеристическим числом* пучка $L(\lambda)$, если уравнение $L(\lambda_0)\varphi = 0$ имеет нетривиальное решение φ_0, а вектор φ_0 называется *собственным вектором* пучка $L(\lambda)$, отвечающим числу λ_0. Подпространство всех собственных векторов, отвечающих λ_0, обозначим через $Z(\lambda_0)$. Набор векторов $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_k$ называется отвечающей числу λ_0-*цепочкой* векторов, присоединенных к собственному вектору φ_0 пучка $L(\lambda)$, если

$$\sum_{p=0}^{j} \frac{1}{p!} L^{(p)}(\lambda_0)\varphi_{j-p} = 0\ (j = 1, 2, \ldots, k).$$

Число $k+1$ называется *длиной* этой цепочки. *Кратностью собственного вектора* φ_0 называется число m, равное максимальной длине цепочки присоединенных к φ_0 векторов.

Далее мы будем рассматривать только тот случай, когда хотя бы одно число λ не является характеристическим числом пучка (1). Так как множество характеристических чисел пучка (1) совпадает с множеством корней полинома $\det L(\lambda)$, то в этом случае число характеристических чисел пучка (1) конечно. Кроме того, как известно, кратность каждого собственного вектора пучка $L(\lambda)$ конечна. *Канонической системой* собственных и присоединенных векторов пучка $L(\lambda)$, отвечающей числу λ_0, называется система

$$\varphi_{j0}, \varphi_{j1}, \ldots, \varphi_{j,\ m_j-1}\ (j = 1, 2, \ldots, \alpha = \dim Z(\lambda_0)),$$

где φ_{j0} — собственный вектор кратности m_j, а $\varphi_{j1}, \ldots, \varphi_{j,\ m_j-1}$ — цепочка присоединенных к нему векторов, причем m_1 — максимальная из кратностей всех собственных векторов, отвечающих λ_0, а $m_j\ (j = 2, \ldots, \alpha)$ — максимальная из кратностей всех собственных векторов из какого-нибудь прямого дополнения в $Z(\lambda_0)$ к подпро-

странству, натянутому на $\varphi_{10}, \ldots, \varphi_{j-1,0}$. Число $m(\lambda_0; L) = \sum_{j=0}^{\alpha} m_j$ будем называть *кратностью характеристического числа* λ_0.

Пусть $(\lambda-\lambda_0)^{p_j}$ $(j = 1, 2, \ldots, \beta;\ p_1 \geqslant p_2 \geqslant \ldots \geqslant p_\beta)$ — элементарные делители (см. [1], стр. 127) матричного пучка $L(\lambda)$, относящиеся к характеристическому числу λ_0. Имеет место

Теорема. *Для любого характеристического числа λ_0 матричного пучка $L(\lambda)$ выполняются равенства* $\beta = \alpha$ и $P_j = m_j\ (j = 1, 2, \ldots, \alpha)$.

Доказательство. Рассмотрим сначала случай линейного пучка $L(\lambda) = A_0 + \lambda A_1$. Можно считать, что матрица A_0 обратима (в противном случае следует вместо пучка $L(\lambda)$ рассмотреть пучок $L(\lambda + a)$, где a не является характеристическим числом пучка $L(\lambda)$). Умножая слева пучок $L(\lambda)$ на A_0^{-1}, получим новый матричный пучок $L_1(\lambda) = I - \lambda B$, где $B = -A_0^{-1}A_1$. Очевидно, что характеристические числа и отвечающие им собственные и присоединенные векторы у пучков $L(\lambda)$ и $L_1(\lambda)$ одинаковы. Длины соответствующих цепочек собственных и присоединенных векторов пучка $L_1(\lambda)$ совпадают с длинами жордановых цепочек матрицы B. Пусть S — нормальная жорданова форма матрицы B. Так как пучки $L(\lambda)$, $L_1(\lambda)$ и $L_2(\lambda) = I - \lambda S$ эквивалентны, то у них одинаковые элементарные делители. Пучок $L_2(\lambda)$ имеет блочную квазидиагональную форму. Поэтому его элементарные делители получаются объединением элементарных делителей диагональных блоков. Очевидно, блок, соответствующий жордановой клетке порядка p_j (при собственном значении λ_0), имеет вид

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda\lambda_0 & -\lambda & & & \\ & 1-\lambda\lambda_0 & \cdot & & \\ & & \cdot & \cdot & \\ & & & \cdot & -\lambda \\ & & & & 1-\lambda\lambda_0 \end{vmatrix} \tag{2}$$

Как легко видеть, эта матрица (2) имеет только один элементарный делитель $\left(\lambda - \frac{1}{\lambda_0}\right)^{p_j}$. Действительно, наибольший общий делитель миноров порядка P_j равен $\left(\lambda - \frac{1}{\lambda_0}\right)^{p_j}$, а наибольший общий делитель миноров порядка $p_j - 1$ равен 1. Так как число диагональных блоков пучка $L_2(\lambda)$ равно α и каждому блоку отвечает только один элементарный делитель (и наоборот), то $\alpha = \beta$. Так как рассматриваемой клетке (2) отвечает жорданова цепочка матрицы B (а, значит, и пучка $L(\lambda)$) длины $m_j = p_j$, то для случая линейного пучка теорема доказана.

Для доказательства теоремы в общем случае пучка (1) введем в рассмотрение матричный линейный пучок $M(\lambda) = C + \lambda D$, где C и D — матрицы порядка sn, заданные в виде блочных матриц:

$$C = \begin{pmatrix} A_0 & A_1 & \cdot & \cdot & \cdot & A_{n-1} \\ 0 & I & \cdot & \cdot & \cdot & 0 \\ \cdot & & & & & \\ 0 & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & I \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdot & \cdot & 0 & A_n \\ -I & 0 & \cdot & \cdot & 0 & 0 \\ 0 & -I & \cdot & \cdot & 0 & 0 \\ \cdot & & & & & \\ 0 & 0 & \cdot & \cdot & -I & 0 \end{pmatrix}.$$

Пучок $M(\lambda)$ имеет вид

$$M(\lambda)=\begin{vmatrix} A_0 & A_1 & A_2 & \cdots & A_{n-2} & A_{n-1}+\lambda & A_n \\ -\lambda I & I & 0 & \cdots & 0 & 0 & \\ 0 & -\lambda I & I & \cdots & 0 & 0 & \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -\lambda I & \cdots & I \end{vmatrix}.$$

Умножая последнюю строку на $-A_{n-1}-\lambda A_n$ и складывая с первой, а предпоследнюю умножая на $-A_{n-2}-\lambda A_{n-1}-\lambda^2 A_n$ и складывая с первой и т. д., получим матрицу

$$\begin{pmatrix} L(\lambda) & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ -\lambda I & I & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & -\lambda I & I \end{pmatrix}. \tag{3}$$

Умножая последний столбец матрицы (3) на λ и складывая с предпоследним, затем умножая предпоследний столбец полученной матрицы на λ и складывая с предыдущим и т. д., получим квазидиагональную блочную матрицу

$$\begin{pmatrix} L(\lambda) & & & \\ & I & & \\ & & \ddots & \\ & & & I \end{pmatrix}. \tag{4}$$

Нетрудно убедиться, что матрица (4) получается из матрицы $M(\lambda)$ путем умножения слева и справа на матрицы с постоянными определителями. Следовательно, матрицы $M(\lambda)$ и (4) имеют одинаковые элементарные делители. Но совокупность элементарных делителей квазидиагональной блочной матрицы (4) равна объединению элементарных делителей блоков, т. е. совпадает с элементарными делителями пучка $L(\lambda)$. Следовательно, элементарные делители пучка $M(\lambda)$ совпадают с элементарными делителями пучка $L(\lambda)$. С другой стороны, как известно, длины соответствующих цепочек присоединенных векторов у пучков $M(\lambda)$ и $L(\lambda)$ совпадают. Но так как для линейного матричного пучка равенства $\alpha=\beta$, $p_j=m_j$ $(j=1, 2, \ldots, \alpha)$ уже установлены, то теорема доказана и в общем случае.

Обозначим через $\nu(\lambda_0, L)$ кратность характеристического числа λ_0, как корня полинома $\det L(\lambda)$.

Следствие. *Для любого характеристического числа* λ_0 *матричного пучка* $L(\lambda)$ *выполняется равенство* $m(\lambda_0, L)=\nu(\lambda_0, L)$.

Это утверждение вытекает из доказанной теоремы и того факта, что $\det L(\lambda)$ с точностью до числового множителя совпадает с произведением всех элементарных делителей пучка $L(\lambda)$.

Отметим в заключение, что размерность линейной оболочки всех собственных и возможных присоединенных векторов пучка $L(\lambda)$, соответствующих характеристическому числу λ_0, не превосходит $\nu(\lambda_0, L)$. Нетрудно привести примеры, когда эта размерность меньше $\nu(\lambda_0, L)$. В самом деле, у пучка

$$L(\lambda)=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}-\lambda\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -4 \end{pmatrix}-\lambda^2\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

для характеристического числа $\lambda_0=1$ указанная размерность равна 1, а $\nu(1, L)=2$.

Автор выражает искреннюю благодарность И. Ц. Гохбергу и А. С. Маркусу за постановку задачи и ценные замечания.

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

1. Ф. Р. Гантмахер, Теория матриц, М., Гостехиздат, 1954.

П. П. ЗАБРЕЙКО, М. А. КРАСНОСЕЛЬСКИЙ,
Е. И. ПУСТЫЛЬНИК

ОБ ОДНОМ ДОКАЗАТЕЛЬСТВЕ ТЕОРЕМЫ МЕРСЕРА

1. Пусть B — линейный самосопряженный вполне непрерывный оператор, действующий в пространстве L_2. Пусть $\{e_k\}$ — полная ортонормированная система собственных векторов оператора B, а λ_k — соответствующие собственные значения.

Тогда

$$Bx = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k (x, e_k) e_k \quad (x \in L_2), \tag{1}$$

причем операторы

$$B_n x = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k (x, e_k) e_k \quad (n = 1, 2, \ldots) \tag{2}$$

сходятся к B по норме операторов, действующих в L_2.

Лемма 1*). *Пусть оператор (1) действует из L_2 в L_∞ и вполне непрерывен. Тогда операторы (2) сходятся к оператору (1) по норме операторов, действующих из L_2 и L_∞.*

Доказательство. Введем обозначение

$$Q_n x = \sum_{k=n+1}^{\infty} (x, e_k) e_k \quad (x \in L_2); \tag{3}$$

легко видеть, что $\lim_{n \to \infty} \| Q_n x \|_{L_2} = 0$ для любого $x \in L_2$.

Сопряженный к B оператор B^* можно рассматривать как вполне непрерывный оператор, действующий из L_1 в L_2. Поэтому значения оператора B^* на единичном шаре $\| x \|_{L_1} \leqslant 1$ образуют компактное в L_2 множество. Следовательно,

$$\lim_{n \to \infty} \sup_{\|x\|_{L_1} < 1} \| Q_n B^* x \|_{L_2} = 0,$$

то есть операторы $Q_n B^*$ сходятся к нулю по норме операторов, действующих из L_1 и L_2. Но $Q_n B^* = (BQ_n)^* = (B - B_n)^*$, откуда вытекает, что операторы $B - B_n$ сходятся к нулю по норме операторов, действующих из L_2 в L_∞.

Лемма доказана.

*) В [1] дано более сложное доказательство этой леммы.

2. Пусть A — линейный вполне непрерывный оператор, действующий из L_1 в L_∞. Пусть, как оператор в L_2, он самосопряжен и положительно определен. В [2] доказано, что его можно представить в виде $A = BB^*$, где B удовлетворяет всем условиям леммы 1. Поэтому из леммы 1 немедленно вытекает

Лемма 2. *Пусть $\{e_k\}$ — полная ортонормированная система собственных векторов оператора A, а μ_k — соответствующие им собственные значения.*

Тогда

$$Ax = \sum_{k=1}^{\infty} \mu_k (x, e_k) e_k \quad (x \in L_1), \tag{4}$$

причем операторы

$$A_n x = \sum_{k=1}^{n} \mu_k (x, e_k) e_k \quad (n = 1, 2, \ldots) \tag{5}$$

сходятся к A по норме операторов, действующих из L_1 в L_∞.

3. Рассмотрим теперь интегральный оператор

$$Kx(t) = \int_\Omega K(t, s)\, x(s)\, ds, \tag{6}$$

где Ω — замкнутое ограниченное множество некоторого эвклидова пространства. Предположим, что оператор K действует из L_1 в L_∞ и непрерывен. Имеет место (см. например, [3]) следующее утверждение:

$$\| K \|_{L_1 \to L_\infty} = \operatorname{vrai} \max_{t, s \in \Omega} | K(t, s) |. \tag{7}$$

4. Известная теорема Мерсера (о равномерной сходимости билинейного разложения положительно определенного непрерывного ядра; см., например, [4]) является простым следствием сформулированных лемм. Мы укажем несколько более общее утверждение.

Теорема. *Пусть ограниченное ядро $K(t, s)$ симметрично и положительно определено. Пусть оператор (6) действует из L_1 в L_∞ и вполне непрерывен.*

Тогда билинейное разложение ядра

$$K(t, s) \sim \sum_{k=1}^{\infty} \mu_k e_k(t) e_k(s) \tag{8}$$

(где μ_k, e_k — собственные значения и собственные функции) является разложением в абсолютно и равномерно (с точностью до множеств меры нуль) сходящийся ряд.

Доказательство. Из леммы 2 вытекает, что нормы интегральных операторов

$$\Phi_n x(t) = \int_\Omega \{ K(t, s) - \sum_{k=1}^{n} \mu_k e_k(t) e_k(s) \} x(s)\, ds \tag{9}$$

(как операторов из L_1 в L_∞) стремятся к нулю при $n \to \infty$. В силу (7) это означает, что

$$\lim_{n \to \infty} \operatorname{vrai} \max_{t, s \in \Omega} | K(t, s) - \sum_{k=1}^{n} \mu_k e_k(t) e_k(s) | = 0.$$

Теорема доказана.

5. Приведем одно условие, при котором оператор (6) с ограниченным ядром действует из L_1 в L_∞ вполне непрерывно. Положим $w(t)=K(t,s)$; тогда $w(t)$ будет функцией, определенной на Ω со значениями в пространстве L_∞. Для того чтобы оператор (6) действовал из L_1 в L_∞ вполне непрерывно, необходимо и достаточно, чтобы для всех t из некоторого подмножества $\Omega_1\subset\Omega$ полной меры множество значений функции $w(t)$ было компактно в L_∞. В частности, в силу компактности множества Ω достаточно, чтобы осуществляемое функцией $w(t)$ отображение Ω в L_∞ было непрерывным.

Аналогичные условия можно налагать на функцию $v(s)=K(t,s)$.

Чтобы получить классическую теорему Мерсера, достаточно заметить, что непрерывное ядро $K(t,s)$ удовлетворяет перечисленным условиям.

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

1. Е. И. Пустыльник, Сиб. матем. журнал, **IV**, № 3 (1963), 705—708.
2. М. А. Красносельский и С. Г. Крейн, Тр. сем. по функц. анализу Воронежского гос. ун-та, вып. 5 (1957), 98—101.
3. Л. В. Канторович и Г. П. Акилов, Функциональный анализ в нормированных пространствах, Физматгиз, 1959.
4. С. Г. Михлин, Интегральные уравнения, изд. 2-е, Гостехиздат, 1949.

Известия Академии наук Молдавской ССР № 7, 1965 г.

А. С. МАРКУС и В. И. ПАРАСКА

ОБ ОЦЕНКЕ ЧИСЛА СОБСТВЕННЫХ ЗНАЧЕНИЙ ЛИНЕЙНОГО ОПЕРАТОРА

В настоящей заметке указывается одна простая оценка функции распределения собственных чисел неограниченного оператора через такую же функцию для самосопряженного оператора с более широкой областью определения. Доказательство основано на некотором неравенстве, связывающем собственные и сингулярные числа вполне непрерывного оператора и эквивалентном известным неравенствам Вейля [1].

1. Пусть H — сепарабельное гильбертово пространство. Если T — вполне непрерывный оператор, то через $\{\lambda_j(T)\}_1^\infty$ обозначим полную систему собственных чисел оператора T, занумерованных в порядке невозрастания модулей и с учетом кратностей*). **Сингулярными числами** оператора T называются числа $s_j(T)=\lambda_j((T^*T)^{1/2})$ $(j=1,2,\ldots)$. Собственные и сингулярные числа оператора T связаны между собой неравенствами Вейля [1]:

$$|\lambda_1(T)\lambda_2(T)\cdots\lambda_k(T)|\leqslant s_1(T)s_2(T)\cdots s_k(T)\ (k=1,2,\ldots). \qquad (1)$$

Обозначим через $n(t,T)$ (соответственно $\nu(t,T)$) $(t>0)$ число членов последовательности $\{|\lambda_j(T)|\}$ (соответственно $\{s_j(T)\}$), превосходящих $\frac{1}{t}$.

Лемма. *Для любого вполне непрерывного оператора T имеет место неравенство***)

$$\int_0^r\frac{n(t,T)}{t}\,dt\leqslant\int_0^r\frac{\nu(t,T)}{t}\,dt\quad(r>0). \qquad (2)$$

Доказательство. Пусть

$$k=\max\{j:|\lambda_j(T)|>1\},\quad m=\max\{j:s_j(T)>1\}. \qquad (3)$$

Покажем, что из неравенств Вейля (1) вытекает неравенство

$$|\lambda_1(T)\lambda_2(T)\cdots\lambda_k(T)|\leqslant s_1(T)s_2(T)\cdots s_m(T). \qquad (4)$$

---

*) **Кратностью** (или **алгебраической кратностью**) собственного числа λ_0 линейного оператора A называется размерность корневого подпространства оператора A, соответствующего числу λ_0.

**) Отметим, что близкое к (2) неравенство вытекает из теоремы 1 В. И. Мацаева [2].

В самом деле, если $k<m$, то $s_j(T)>1$ $(j=k+1,\ldots, m)$, и поэтому (4) следует из (1). Если же $k \geqslant m$, то $s_j(T)\leqslant 1$ $(j=m+1,\ldots,k)$, и опять (1) влечет за собой соотношение (4).

Прологарифмируем неравенство (4):

$$\sum_{j=1}^{k}\ln|\lambda_j(T)| \leqslant \sum_{j=1}^{m}\ln s_j(T).$$

В силу соотношения (3) это неравенство можно переписать в виде

$$\int_0^1 \ln\frac{1}{t}\,dn(t,T)\leqslant\int_0^1 \ln\frac{1}{t}\,d\nu(t,T).$$

Интегрируя по частям, получим

$$\int_0^1 \frac{n(t,T)}{t}dt\leqslant\int_0^1\frac{\nu(t,T)}{t}dt.$$

Если записать последнее неравенство для оператора rT и учесть, что $n(t,rT)=n(rt,T)$ и $\nu(t,rT)=\nu(rt,T)$, то, произведя замену $rt=\tau$, получим (2).

Лемма доказана.

Следствие 1. *Для любого* $\varepsilon>0$

$$n(r,T)\leqslant\frac{1}{\ln(1+\varepsilon)}\int_0^{r(1+\varepsilon)}\frac{\nu(t,T)}{t}dt\quad(r>0).\tag{5}$$

Справедливость этого утверждения следует из неравенства

$$\int_0^r\frac{n(t,T)}{t}dt\geqslant\int_{\frac{r}{1+\varepsilon}}^{r}\frac{n(t,T)}{t}dt\geqslant n\left(\frac{r}{1+\varepsilon},T\right)\ln(1+\varepsilon)\quad(r>0).$$

Следствие 2. *Для любого* $\varepsilon>0$

$$n(r,T)\leqslant\frac{1}{\ln(1+\varepsilon)}\nu(r(1+\varepsilon),T)\ln(r(1+\varepsilon)\,\|T\|)\quad(r>0).$$

Замечание. Покажем, что и, обратно, *из неравенства (4) вытекают неравенства Вейля (1).*

В самом деле, рассуждая, как в доказательстве леммы, получим, что неравенство (2) равносильно неравенству

$$\prod_{r|\lambda_n|>1}(r|\lambda_n(T)|)\leqslant\prod_{rs_n>1}(rs_n(T)).\tag{6}$$

Пусть p — наибольший из индексов $1, 2,\ldots, k-1$, для которого $s_p(T)>s_{p+1}(T)$. Полагая в (6) $r=\dfrac{1}{s_k(T)}$, получим

$$\prod_{j=1}^{i}\frac{|\lambda_j(T)|}{s_k(T)}\leqslant\prod_{j=1}^{p}\frac{s_j(T)}{s_k(T)}=\prod_{j=1}^{k}\frac{s_j(T)}{s_k(T)},\tag{7}$$

где $i=\max\{j:|\lambda_j(T)|>s_k(T)\}$. Если $i\leqslant k$, то $|\lambda_j(T)|\leqslant s_k(T)$ $(j=i+1,\ldots,k)$, и поэтому из (7) вытекает неравенство

$$\prod_{j=1}^{k}\frac{|\lambda_j(T)|}{s_k(T)}\leqslant\prod_{j=1}^{k}\frac{s_j(T)}{s_k(T)},\tag{8}$$

эквивалентное (1). Если же $i>k$, то $|\lambda_j(T)|>s_k(T)$ $(j=k+1,\ldots,i)$, и поэтому из (7) опять следует (8).

2. Пусть A — линейный неограниченный оператор, действующий в H, и $D(A)$ — его область определения. Если хотя бы для одной регулярной точки μ оператора A резольвента $R_\mu(A)=(A-\mu I)^{-1}$ является вполне непрерывным оператором, то для любой его регулярной точки λ резольвента $R_\lambda(A)$ вполне непрерывна, а спектр оператора A состоит только из собственных чисел конечной кратности*) с единственной возможной предельной точкой на бесконечности. Через $N(r,A)$ $(r>0)$ обозначим количество собственных чисел оператора A (с учетом их кратностей), содержащихся в круге $|\lambda|<r$.

Теорема. *Пусть G — некоторый линейный самосопряженный оператор с вполне непрерывной резольвентой. Тогда любой линейный оператор A, удовлетворяющий условию $D(A)\subset D(G)$ и обладающий хотя бы одной регулярной точкой z, также имеет вполне непрерывную резольвенту, причем*

$$N(r,A)\leqslant c_1+\int_0^{cr}\frac{N(t,G)}{t}dt\quad(r>0),\tag{9}$$

где c_1 зависит от A, а c — от A и G.

Доказательство. Пусть μ — какая-нибудь регулярная точка оператора G. Линейный оператор $B=(G-\mu I)R_z(A)$ определен на всем пространстве H и замкнут; следовательно, он ограничен. Но тогда оператор $R_z(A)=R_\mu(G)B$ является вполне непрерывным. В силу известных свойств сингулярных чисел

$$s_j(R_z(A))\leqslant\|B\|\,s_j(R_\mu(G))=\|B\|\,|\lambda_j(R_\mu(G))|\quad(j=1,2,\ldots),$$

и поэтому

$$\nu(t,R_z(A))\leqslant n(\|B\|t,R_\mu(G))\quad(t>0).$$

Так как

$$n(\|B\|t,R_\mu(G))=N(\|B\|t,G-\mu I),\ n(t,R_z(A))=$$
$$=N(t,A-zI)\quad(t>0),$$

то, положив в (5) $\varepsilon=e-1$, получим

$$N(r,A-zI)\leqslant\int_0^{er}\frac{N(\|B\|t,G-\mu I)}{t}dt\quad(r>0).\tag{10}$$

Обозначим через q наименьший из модулей отличных от нуля собственных чисел операторов G и A. Без ограничения общности мож-

*) При этом каждому собственному числу соответствует нормально отщепляющрневое подпространство (см. [3], стр. 66).

но считать $|\mu| = |z| \leqslant \frac{q}{2}$. Тогда, как легко видеть, имеют место соотношения:

$$N(r, A - zI) \geqslant N(r - |z|, A) \geqslant N\left(\frac{r}{2}, A\right) \quad (r \geqslant q),$$

$$N(\|B\| t, G - \mu I) \leqslant N(\|B\| t + |\mu|, G) \leqslant N(2\|B\| t, G) \quad (t > 0).$$

Отсюда и из (10) следует неравенство

$$N\left(\frac{r}{2}, A\right) \leqslant \int_0^{er} \frac{N(2\|B\| t, G)}{t}\, dt \quad (r \geqslant q).$$

Заменяя в интеграле $2\|B\|t$ на τ и полагая $\rho = \frac{r}{2}$, получим

$$N(\rho, A) \leqslant \int_0^{c\rho} \frac{N(\tau, G)}{\tau}\, d\tau \quad \left(\rho \geqslant \frac{q}{2},\ c = 4e\|B\|\right). \tag{11}$$

Если $\lambda = 0$ является регулярной точкой оператора A, то неравенство (11), очевидно, остается в силе для всех $\rho > 0$; в противном же случае из (11) вытекает неравенство (9) с константой c_1, равной кратности собственного числа $\lambda = 0$ оператора A.

Теорема доказана.

Следствие 3. *Пусть $L(t)$ $(0 < t < \infty)$ — положительная неубывающая функция, причем для любого $a > 1$.*

$$\varlimsup_{t \to \infty} \frac{L(at)}{L(t)} < \infty. \tag{12}$$

Если выполнены условия теоремы и

$$N(t, G) = O(t^\alpha L(t)) \quad (t \to \infty) \tag{13}$$

для некоторого $\alpha > 0$, то и

$$N(t, A) = O(t^\alpha L(t)) \quad (t \to \infty). \tag{14}$$

В самом деле, из (9) и (11) следует

$$N(r, A) = O\left(L(cr) \int_0^{cr} t^{\alpha - 1}\, dt\right) = O(L(cr)\, r^\alpha) \quad (r \to \infty),$$

откуда в силу (12) вытекает (14).

Отметим, что следствие 3 можно получить также из некоторых результатов И. Ц. Гохберга и М. Г. Крейна ([4], гл. II, § 3).

Авторы выражают благодарность И. Ц. Гохбергу за полезные замечания.

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

1. H. Weyl, Proc. Nat. Acad. Sci. USA, 35, № 7 (1949), 408—411.
2. В. И. Мацаев, ДАН СССР, 154, № 5 (1964), 1034—1037.
3. И. Ц. Гохберг и М. Г. Крейн, УМН, 12, вып. 2 (74), (1957), 43—118.
4. И. Ц. Гохберг и М. Г. Крейн, Введение в теорию линейных несамосопряженных операторов, М., Наука, 1965.

Известия Академии наук Молдавской ССР № 7, 1965 г.

В. И. ПАРАСКА

ОБ ОЦЕНКЕ КРАТНОСТИ СОБСТВЕННОГО ЗНАЧЕНИЯ НЕОГРАНИЧЕННОГО ОПЕРАТОРА

В этой заметке приводится одна оценка для кратности собственного значения линейного неограниченного оператора через функцию распределения собственных значений самосопряженного оператора с более широкой областью определения. Эта оценка является обобщением результата, полученного для некоторых эллиптических операторов Каниелем и Шехтером [1].

Пусть H — сепарабельное гильбертово пространство и B — действующий в H линейный замкнутый оператор с областью определения $D(B)$ и множеством значений $R(B)$. Через $Z(B)$ обозначим подпространство решений уравнения $Bx = 0$ $(x \in D(B))$, а через $\alpha(B)$ — размерность подпространства $Z(B)$. Оператор B называется Φ_+-оператором, если $\alpha(B) < \infty$ и $R(B)$ является подпространством (см. [2]).

Под кратностью собственного значения λ_0 оператора B будем понимать собственную кратность, т. е. размерность $\alpha(B - \lambda_0 I)$ соответствующего собственного подпространства $Z(B - \lambda_0 I)$. Если B — самосопряженный оператор с вполне непрерывной резольвентой, то через $N(r, B)$ $(r > 0)$ обозначим число собственных значений оператора B (с учетом их кратностей), содержащихся в круге $|\lambda| < r$.

Нам понадобится следующая теорема Калкина [3]:

Если линейный замкнутый оператор T действует из одного гильбертова пространства в другое и имеет плотную область определения, то он вполне непрерывен тогда и только тогда, когда в $R(T)$ не содержится ни одного бесконечномерного подпространства.

Лемма. *Пусть G — некоторый линейный оператор с вполне непрерывной резольвентой. Тогда любой линейный замкнутый оператор A, удовлетворяющий условию $D(A) \subset D(G)$, является Φ_+-оператором.*

Доказательство. Пусть λ — некоторая регулярная точка оператора G. Так как $Z(A) \subset D(G) = R((G - \lambda I)^{-1})$ и согласно теореме Калкина $R((G - \lambda I)^{-1})$ не содержит ни одного бесконечномерного подпространства, то $\alpha(A) < \infty$.

Пусть M — ортогональное дополнение к $Z(A)$ в $\overline{D(A)}$ и A_1 — сужение оператора A на $D_1 = D(A) \cap M$. Очевидно, оператор A_1 имеет определенный на $R(A_1)$ $(= R(A))$ обратный оператор A_1^{-1}, который, в силу замкнутости оператора A_1, также замкнут. Так как $R(A_1^{-1})=D_1\subset R((G-\lambda I)^{-1})$, то $R(A_1^{-1})$ не содержит никакого бесконечномерного подпространства, и согласно теореме Калкина оператор A_1^{-1} вполне непрерывен. Следовательно, область определения оператора A_1^{-1} (совпадающая с $R(A)$) является подпространством.

Лемма доказана.

Теорема. *Пусть G — линейный самосопряженный оператор с вполне непрерывной резольвентой и A — линейный замкнутый оператор такой, что $D(A)\subset D(G)$. Тогда для любого комплексного числа λ*

$$\alpha(A-\lambda I)\leqslant N(c+c_1|\lambda|, G), \tag{1}$$

где константы c и c_1 зависят от A и G.

Доказательство*). Для элементов $f\in D(G)$ введем новую норму: $|f|^2=\|f\|^2+\|Gf\|^2$. Положим

$$c=\sup\{|f|/\|f\|: f\in Z(A)\},\ c_1=\sup\{|f|/\|Af\|: f\in D(A)\cap M\}, \tag{2}$$

где M — ортогональное дополнение к $Z(\mathrm{A})$ в H, и покажем, что $c,\ c_1<\infty$.

В силу леммы подпространство $Z(A)$ конечномерно, и так как в конечномерном пространстве все нормы топологически эквивалентны, то $c<\infty$.

Операторы A и G замкнуты и $D(A)\subset D(G)$, следовательно (см. [2], § 2),

$$\|Gf\|\leqslant a(\|f\|+\|Af\|)\ (f\in D(A),\ a>0). \tag{3}$$

В силу леммы существует такое положительное число $m>0$, что

$$\|f\|\leqslant m\|Af\|\ (f\in D(A)\cap M). \tag{4}$$

Из (3) и (4) вытекает неравенство

$$|f|\leqslant\|f\|+\|Gf\|\leqslant(a+ma+m)\|Af\|\ (f\in D(\mathrm{A})\cap M).$$

Следовательно, $c_1\leqslant a+ma+m<\infty$.

Каждый элемент $f\in D(A)$ можно представить в виде: $f=f'+f''$, где $f'\in Z(A)$, а $f''\in D(A)\cap M$. В силу (2)

$$|f'|\leqslant c\|f'\|\leqslant c\|f\|,\ |f''|\leqslant c_1\|Af''\|=c_1\|Af\|,$$

и поэтому

$$|f|\leqslant|f'|+|f''|\leqslant c\|f\|+c_1\|Af\|\ (f\in D(\mathrm{A})). \tag{5}$$

Если $f\in Z(A-\lambda I)$, то из (5) получим

$$|f|\leqslant c\|f\|+c_1\|Af-\lambda f+\lambda f\|=(c+c_1|\lambda|)\|f\|. \tag{6}$$

Пусть $\{\lambda_j\}_1^\infty$ — последовательность собственных значений оператора G, занумерованных в порядке неубывания абсолютных величин и с учетом кратностей, $\{g_j\}_1^\infty$ — соответствующая полная ортонормированная система собственных векторов и f — ненулевой элемент из $Z(A-\lambda I)$ такой, что $(f, g_j)=0$ $(j=1, 2, \ldots, \alpha-1;\ \alpha=\alpha(A-\lambda I)$.

Тогда

$$f=\sum_{j=\alpha}^\infty(f, g_j)\,g_j,\quad Gf=\sum_{j=\alpha}^\infty\lambda_j(f, g_j)g_j,$$

и, следовательно,

$$|f|^2\geqslant\|f\|^2+|\lambda_\alpha|^2\|f\|^2>|\lambda_\alpha|^2\|f\|^2. \tag{7}$$

Из (6) и (7) следует, что $|\lambda_\alpha|<c+c_1|\lambda|$, откуда вытекает (1).

Теорема доказана.

Отметим, что в случае, когда хотя бы одно число z не является собственным значением оператора A, некоторые оценки для $\alpha(A-\lambda I)$ вытекают из результатов заметки [4].

Автор признателен И. Ц. Гохбергу и А. С. Маркусу за постоянное внимание к работе.

* Идея этого доказательства заимствована из [1].

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

1. S. Kaniel and M. Schechter, Comm. Pure Appl. Math., 16 (1963), 423—448.
2. И. Ц. Гохберг и М. Г. Крейн, УМН, 12, вып. 2 (74), (1957), 43—118.
3. I. W. Calkin, Trans. Amer. Math. Soc., 45, № 3 (1939), 369—442.
4. А. С. Маркус и В. И. Параска, Изв. АН МССР, 7 (1965), 101—104.

В. И. ФЕСЕНКО

К ВОПРОСУ ОБ ОПТИМАЛЬНОСТИ АРИФМЕТИЧЕСКОГО БЛОКА ТРАНСЛЯТОРА

I

Бурное развитие за последние годы вычислительных машин привело, одновременно с улучшением их качества в смысле быстродействия, увеличения объема памяти, малогабаритности и надежности, к разнообразию систем команд на них. Задача более гибкого их использования заострила внимание математиков на работах в области абстрактных алгоритмических языков и, следовательно, трансляторов с этих языков на машинные. Различие методов автоматизации программирования вызывает и поныне споры о степени важности каждого из них. Тем не менее большинство специалистов считает, что наиболее мощным является метод программирующих программ (трансляторов) [1, 2, 3].

В настоящей работе рассматриваются некоторые теоретические вопросы составления трансляторов. При этом используется в качестве входного некоторая версия адресного языка [4], хотя результаты этой статьи могут быть отнесены не только к этому языку.

При составлении транслятора наиболее существенную роль играет структура арифметического блока. Трудности, возникающие при этом, требуют, применительно к адресному языку, строгого определения адресной функции. Данное в [5] определение позволило при программировании арифметических выражений использовать новый принцип элементной расшифровки алгоритмов (ЭРА) [6], выгодно отличающийся от применявшегося ранее принципа, использующего запись Лукасевича [7].

Приведем основные определения [5].

Определение 1. При образовании адресной функции допустимы только следующие пять символов: a, ', (, +,).

Определение 2. Записью адресной функции называется строка из следующих друг за другом символов, перечисленных выше, удовлетворяющая одной из приведенных ниже систем аксиом.

Система аксиом 4.

1. Первым символом записи не может быть +.
2. За ' не может следовать +.
3. За ' не может следовать).
4. За (не может следовать +.

5. За (не может следовать).
6. За + не может следовать +.
7. За + не может следовать).
8. За *a* не может следовать *a*.
9. За *a* не может следовать '.
10. За *a* не может следовать).
11. За) не может следовать *a*.
12. За) не может следовать '.
13. За) не может следовать (.
14. Последним символом записи не может быть '.
15. Последним символом записи не может быть +.
16. На любом начальном отрезке записи число символов (больше или равно числу символов).
17. Для всей записи число символов (равно числу символов).
18. Между любыми соседними символами + имеется по крайней мере один символ: (или).
19. Для каждой пары скобок имеется только две взаимоисключающие возможности: либо символ + стоит левее символа (этой пары так, что между ними нет другого символа); либо символ + стоит непосредственно справа от символа) этой пары. Внутри пары скобок имеется не менее одного символа +.
20. Если самым левым символом является (, то он не составляет пары скобок с самым правым символом.

II

Для практического построения достаточно хорошего арифметического блока данные определения нуждаются в дополнениях.

Определение 3. Глубиной текущего знака в записи (в частности, строго скобочной) адресной функции назовем разность между числом открывающих и закрывающих скобок от начала линейной записи этой функции.

Определение 4. Бесскобочной записью адресной функции назовем такую ее линейную запись, в которой скобки отсутствуют, но каждой операции поставлена в соответствие ее глубина.

Соответствие между номером по порядку операции и ее глубиной назовем глубинной функцией. Легко доказать следующие две теоремы.

Теорема 1. *Для всякой адресной функции существует соответствующая ей глубинная функция.*

Теорема 2. *Строго скобочная запись однозначно восстанавливается из соответствующей ей бесскобочной.*

Непривычность строго скобочной записи наводит на мысль опустить аксиому 18 и первую половину аксиомы 19. Полученная таким образом нестрого скобочная запись (она соответствует системе аксиом 2 из [5]) усложняет формальное применение принципа ЭРА [6]. Введенные определения помогают обойти эту трудность.

Введем вместо одного знака операции четыре: +, —, ×, : и условимся, что порядок выполнения операций определяется последовательно тремя принципами:

а) имеющимися скобками,
б) «силой» знаков (× и : «сильнее», чем + и —),
в) порядком записи слева направо.

Тогда порядок выполнения операций устанавливается точно и можно построить алгоритм восстановления строго скобочной записи из нестрого скобочной, который и является доказательством данного утверждения.

В массиве α расположим закодированный алгоритм. В некоторой его ячейке δ находится $\alpha + n$ как признак конца адресной функции. Массивы β и γ — вспомогательные.

$$'\psi = \alpha + i \; (i = 1,\ 2, \ldots, n), \quad '\theta = \beta + k \; (k < n), \quad '\varphi = \gamma + j \; (j < n),$$

$$'\delta = \alpha + n$$

$$'\psi \Rightarrow {}'\varphi$$

$$B \ldots P\{''\psi \neq (\,\}\ 1$$
$$'\theta + 1 \Rightarrow \theta$$
$$'\varphi + 1 \Rightarrow \varphi$$
$$'\psi \Rightarrow {}'\varphi$$

$$1 \ldots P\{''\psi \neq \,)\}\ 2$$
$$0 \Rightarrow {}'\varphi$$
$$'\varphi - 1 \Rightarrow \varphi$$
$$'\theta - 1 \Rightarrow \theta$$

$$2 \ldots P\{''\psi \neq +\}\ 3$$
$$P\{'''\theta \neq 0\}\ 4$$
$$'\psi \Rightarrow {}'\theta$$
$$5$$

$$3 \ldots P\{''\psi \neq \times\}\ 4$$
$$P\{'''\theta \neq 0\}\ 4$$
$$'\psi \Rightarrow {}'\theta$$
$$5$$

$$4 \ldots P\{'\psi = {}'\delta\}\ ᗺ$$
$$'\psi + 1 \Rightarrow \psi$$
$$B$$

$$ᗺ \ldots \quad !$$

$$5 \ldots Ц\{'\delta - {}''\theta \Rightarrow \varepsilon\}$$
$$'({}'\delta - {}'\varepsilon) \Rightarrow ({}'\delta - {}'\varepsilon + 2)$$
$$КЦ$$
$$) \Rightarrow ({}'\psi + 1)$$
$$Ц\{'\psi - {}''\varphi \Rightarrow \varepsilon\}$$
$$'({}'\psi - {}'\varepsilon - 1) \Rightarrow ({}'\psi - {}'\varepsilon)$$
$$КЦ$$
$$(\Rightarrow {}'\varphi$$
$$'\psi + 3 \Rightarrow \psi$$
$$B$$

Приведенные результаты позволяют использовать при построении транслятора нестрого скобочную запись. При этом арифметический блок транслятора строит глубинную функцию.

Особенности одно- и двухадресных машин позволяют упразднить аксиому 1. При этом предполагается, что в строке $'S + \ldots$ не пишется $'S$ (содержимое сумматора). Это несколько усложняет алгоритм арифметического блока, но упрощает запись исходного алгоритма и качество рабочей программы, экономя рабочие ячейки.

III

Проблему экономии рабочих ячеек при программировании адресной функции свяжем с понятием ориентации, в частности оптимальной ориентации. Скажем, что любая адресная функция ориентирована (в смысле порядка выполнения операций). При этом понимается, что ее программирование потребует определенного числа рабочих ячеек. Если мы хотим минимизировать это число, то соответствующую этому минимуму ориентацию назовем оптимальной. Такая ориентация существует, хотя, вообще говоря, она неоднозначна. Нам необходимо найти одну из таких ориентаций.

Обозначим число рабочих ячеек, необходимых для программирования данной записи адресной функции, через R. Оно зависит от ориентации адресной функции, а последняя определяется глубинной функцией. Будем называть R рабочей функцией и исследуем указанную зависимость.

С этой целью изобразим глубинную функцию графически, откладывая по оси x номер текущей операции в записи, а по оси y—соответствующую глубину.

Определение 5. Адресную функцию назовем строго лево- (право-)ориентированной, если ее глубинная функция монотонно не возрастает (не убывает).

В общем случае $R > 0$.

Теорема 3. *Для того, чтобы $R = 0$, необходимо и достаточно, чтобы адресная функция была строго левоориентированной.*

Достаточность. Введение очередной рабочей ячейки связано с наличием в адресной функции выражений $'a + ({}'a + {}'a)$, что противоречит ее строгой левоориентированности.

Необходимость. Если $R = 0$, то это значит, что в адресной функции указанные выражения отсутствуют, а значит, ее глубинная функция монотонно невозрастает.

Аналогично доказывается

Теорема 4. $R = \max$ *для строго правоориентированной адресной функции.*

В общем случае глубинная функция изменяется произвольно и заведомо не всякую адресную функцию можно привести к строго левоориентированной записи. Желательно, однако, преобразовать адресную функцию с целью минимизации R.

Пусть A и B — адресные функции. Им соответствуют глубинные функции $\varkappa_A$ и $\varkappa_B$. Обозначим $\max \varkappa_A = m_1$ и $\max \varkappa_B = m_2$. Тогда, если C — тоже адресная функция и $C = A + B$, то $m_3 = \max\{m_1, m_2\}$. Если операция коммутативна, то $\overline{C} = B + A$ назовем преобразованием, а C и $\overline{C}$ — эквивалентными функциями. Очевидно, что преобразование адресной функции сохраняет максимум ее глубинной функции. Преобразование назовем оптимизирующим, если $m_1 < m_2$.

Определение. *Адресная функция называется оптимально ориентированной, если никакое преобразование в ней не является оптимизирующим.*

Разобьем все множество эквивалентных адресных функций на классы следующим образом. Пусть рабочие функции R_1 и R_2 соответствуют эквивалентным адресным функциям A и B. Тогда A и B принадлежат одному и тому же классу, если и только если $R_1 = R_2$.

Очевидны следующие две теоремы.

Теорема 5. *Среди множества эквивалентных адресных функций найдется класс оптимально ориентированных функций.*

Теорема 6. *Из всех эквивалентных адресных функций оптимально ориентированные имеют* $R = \min$.

Для минимизации R необходимо построить алгоритм преобразований, дающий в результате оптимально ориентированную адресную функцию.

Введем обозначения. Представим адресную функцию в виде $A = A_1^{(1)} + \ldots + A_{n1}^{(1)}$, где $A_{i1}^{(1)}$ — адресная функция, а все операции имеют равную глубину ($i_1 = 1, \ldots, n_1$). Аналогично

$$A_{i_1}^{(1)} = A_1^{(2)} + \ldots + A_{n_2}^{(2)} \quad (i_1 = 1, \ldots, n_1),$$

$$A_{i_j}^{(j)} = A_1^{(j+1)} + \ldots + A_{n_{j+1}}^{(j+1)} \quad (i_j = 1, \ldots, n_j),$$

$$A_{i_p}^{(p)} = {}^n a.$$

Алгоритм минимизации R состоит из правил:

а) если $A_{ij}^{(j)}$ допускает преобразование, сделай его;

б) если $j = p$, остановись, если нет, увеличь его на единицу и перейди к а).

IV

Изложенные рассуждения использованы автором при составлении блока транслятора с адресного языка на язык ЭВМ Урал-2. При этом блок арифметических и логических операций, совместно с блоком открывающей скобки, производит оптимальное программирование адресной функции. Последовательность выполнения операций на так называемом рабочем столе (место в памяти, где производится программирование очередной адресной функции) определяется глубинной функцией, строящейся по имеющимся в адресной функции скобкам и чередованию более или менее «сильных» операций.

Вводится понятие уровня глубинной функции. Открывающая скобка или переход от менее «сильного» к более «сильному» знаку (фиктивная открывающая скобка) поднимает уровень. При этом сочетания типа $+\times$ или $\times($ поднимают его на единицу, типа $+($ — на двойку. Одновременно делается допустимая перестановка слагаемых (сомножителей) с использованием результатов предыдущих операций на сумматоре, если это приводит к экономии рабочих ячеек. Максимум глубины функции ограничен (не больше семи).

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

1. С. С. Камынин, Э. З. Любимский, М. Р. Шура-Бура, Об автоматизации программирования при помощи программирующей программы, Проблемы кибернетики, 1958, вып. 1.
2. А. П. Ершов, Программирующая программа для быстродействующей электронной счетной машины, изд. АН СССР, 1958.
3. В. А. Федосеев, Методы автоматизации программирования на вычислительных машинах, Проблемы кибернетики, вып. 4.
4. Е. Л. Ющенко, Адресное программирование, Техиздат УССР, 1963.
5. М. М. Бушко-Жук, Об определении адресной функции и принципах построения программирующих программ, Изв. АН МССР, 1962, № 5.
5. М. М. Бушко-Жук, А. А. Гоба, К. К. Щукин, Е. Л. Ющенко, О применении одного принципа построения программирующих программ к трехадресной машине, Уч. зап. Кишинев. гос. ун-та, 1962.
7. Е. Л. Ющенко, Т. А. Гринченко, Программирующая программа с входным адресным языком для машины Урал-1, изд-во. «Наукова думка», 1964.

В. Г. ЧЕБАН

О МЕТОДЕ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНЫХ ПРИБЛИЖЕНИЙ ДЛЯ ЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ

М. А. Красносельский [1] установил следующую теорему: *Пусть A — линейный ограниченный оператор, действующий в гильбертовом пространстве H. Если уравнение*

$$A\varphi = f \tag{1}$$

при данном $f \in H$ разрешимо в H (возможно и неоднозначно), то последовательность векторов $\{\varphi_n\}_0^\infty$

$$\varphi_{n+1} = (I - \delta A^* A)\varphi_n + \delta A^* f \qquad (n = 0,\ 1,\ 2,\ \dots), \tag{2}$$

где φ_0 — произвольный вектор из H, а $\delta (> 0)$ достаточно малое число $\left(0 < \delta < \dfrac{2}{\|A\|^2}\right)$, сходится по норме H к одному из решений уравнения (1).

В настоящей заметке для одного класса операторов эта теорема распространяется на случай банахова пространства.

Этот результат основан на некоторых предложениях М. Г. Крейна [2] (см. также [3]) об операторах, действующих в пространствах с двумя нормами.

§ 1. Вспомогательные предложения. Пусть B некоторое банахово пространство, содержащееся в гильбертовом пространстве H. Через $\|\varphi\|_H$ и $\|\varphi\|_B$ обозначим соответственно норму элемента φ в пространствах H и B. Предполагается, что B плотно в H и имеет место соотношение

$$\|\varphi\|_H \leqslant c\|\varphi\|_B \qquad (\varphi \in B), \tag{3}$$

где c $(c > 0)$ — некоторая константа.

При этих условиях $B^* \supset H$. Оператор A, действующий в B, называется *правильным* (см. [3]), если $A^* B \subset B$. Пусть A^+ — сужение оператора A^* на пространство B. Всякий правильный оператор допускает расширение по непрерывности до ограниченного оператора, действующего в H (см. [3]). Если оператор A правилен и вполне непрерывен в B, то он вполне непрерывен в H и его спектр $\sigma_B(A)$ в B совпадает со спектром $\sigma_H(A)$ в H (см. [3]): $\sigma_H(A) = \sigma_B(A)$.

§ 2. О теореме М. А. Красносельского в пространстве с двумя нормами.

Теорема. *Пусть T — правильный оператор, а T и T^+ — вполне непрерывные операторы в B. Тогда если уравнение*

$$A\varphi = f,$$

$$\text{где } A = I - T,\ f \in B, \tag{4}$$

разрешимо, то последовательность векторов

$$\varphi_{n+1} = (I - \delta A^+ A)\varphi_n + \delta A^+ f, \qquad (n = 0,\ 1,\ 2,\ \dots), \tag{5}$$

где $0 < \delta < \dfrac{2}{\|A\|^2}$, $\varphi_0 \in B$ сходится по норме пространства B к одному из решений уравнения (4).

Справедливость этой теоремы непосредственно вытекает из следующего предложения.

Лемма. *Пусть V—правильный вполне непрерывный оператор, такой, что $V = V^+$, α $(|\alpha| < 1)$ — вещественное число, $C = \alpha I + V$ и спектр оператора C лежит в промежутке $(-1, 1]$. Тогда если уравнение*

$$\varphi = C\varphi + f \tag{6}$$

разрешимо, то последовательность векторов

$$\varphi_{n+1} = C\varphi_n + f \qquad (n = 0,\ 1,\ 2,\ \dots) \tag{7}$$

сходится к одному из его решений.

Доказательство. Если точка $\lambda = 1$ является регулярной для оператора C, то лемма очевидна. Пусть теперь точка $\lambda = 1$ является точкой спектра оператора C. Тогда она является изолированной точкой спектра, которой соответствует конечномерное собственное подпространство. Рассмотрим в пространстве H проектор

$$P = -\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|\lambda - 1| = \gamma} (C - \lambda I)^{-1}\, d\lambda,$$

где γ — достаточно малое число. Спектр оператора C в подпространстве QH, где $Q = I - P$ лежит внутри единичного круга, поэтому последовательность

$$Q\varphi_{n+1} = CQ\varphi_n + Qf \qquad (n = 0,\ 1,\ 2,\ \dots) \tag{8}$$

является сходящейся в H и так как спектры оператора C в инвариантных подпространствах $QH (\subset H)$ и $QB (\subset B)$ совпадают, то эта последовательность является сходящейся и в пространстве B. Отметим, что если уравнение (4) разрешимо, то $Pf = 0$ $(Qf = f)$. Поэтому последовательность

$$P\varphi_{n+1} = CP\varphi_n = P\varphi_n \quad (n = 0,\ 1,\ 2,\ \dots) \tag{9}$$

является стационарной. Из соотношений (8) и (9) вытекает справедливость леммы.

Пользуясь этой леммой, докажем сформулированную выше теорему. Оператор $C = I - \delta A^+ A$ $(C = \alpha T + V$, где $\alpha = 1 - \delta$, $V = T + T^+ - TT^+)$ удовлетворяет всем условиям леммы, так как он имеет один и тот же спектр в H и B.

Поэтому последовательность

$$\varphi_{n+1} = C\varphi_n + \delta A^+ f \quad (n = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots) \tag{10}$$

сходится к одному из решений уравнения $\varphi = (I - \delta A^+ A)\varphi + \delta A^+ f$ или $A^+ A f = A^+ f$. Последнее же уравнение эквивалентно уравнению (4).

Замечание. Если в условиях теоремы вектор $f \in B^*$, то последовательность (5) сходится к одному из решений уравнения (4) по норме пространства B^*. Доказательство этого факта аналогично доказательству теоремы.

§ 3. Некоторые приложения к интегральным уравнениям Фредгольма второго рода. Пусть B — одно из пространств $C(a, b)$ или $M(a, b)$. Рассмотрим в пространстве B интегральное уравнение

$$\varphi(t) - \int_a^b K(t, s)\varphi(s)\,ds = f(t), \tag{11}$$

где $K(t, s)$ непрерывная в квадрате $a \leqslant t, s \leqslant b$ функция в случае, когда B совпадает с пространством $C(a, b)$ и измеримая ограниченная функция в том же квадрате, когда B совпадает с $M(a, b)$. Роль пространства H играет $L_2(a, b)$. Очевидно, что оператор

$$T\varphi = \int_a^b K(t, s)\varphi(s)\,ds$$

удовлетворяет всем условиям теоремы и потому последовательность функций

$$\varphi_{n+1}(t) = (1-\delta)\varphi_n(t) + \int_a^b \gamma(t, s)\varphi_n(s)\,ds + \delta f(t) -$$

$$-\delta \int_a^b K(s, t) f(s)\,ds, \tag{12}$$

$$\text{где } \gamma(t, s) = \delta\left[K(t, s) + \overline{K}(s, t) - \int_a^b \overline{K}(u, t) K(u, s)\,du,\right.$$

а число δ удовлетворяет условию

$$0 < \delta < 2\left[1 + \left(\int_a^b\int_a^b |K(t, s)|^2\,dt\,ds\right)^{\frac{1}{2}}\right]^{-1}, \tag{13}$$

сходится к одному из решений уравнения (11), причем сходимость будет равномерная, если $B = C(a, b)$ и по норме $\|\varphi\| = \operatorname{supess}_{a<t<b} |\varphi(t)|$, если $B = M(a, b)$. Разумеется, уравнение (11) предполагается разрешимым*).

---

*) В работе [4] утверждается равномерная сходимость последовательных приближений $\varphi_n(t)$. Однако указанные в этой работе ограничения на ядро $K(t, s)$ явно недостаточны для такого утверждения. Отметим также, что в этой работе не указано пространство, в котором рассматривается уравнение.

Если ядро $K(t, s)$ непрерывно в квадрате $a \leqslant t, s \leqslant b$ и уравнение (11) рассматривается в пространстве функций с ограниченной вариацией, то последовательность (12) сходится к одному из решений уравнения (11) по норме $\|\varphi\| = \operatorname{Var}_a^b(\varphi)$. Последнее вытекает из замечания.

2. Рассмотрим уравнение (11) в пространстве гельдеровых функций H^α. Если ядро $K(t, s)$ удовлетворяет в квадрате $a \leqslant t, s \leqslant b$ условию Гельдера с показателем $\alpha\ (0 \leqslant \alpha \leqslant 1)$ по обеим переменным, т. е.

$$|K(t_1, s_1) = K(t_2, s_2)| \leqslant c\{|t_1 - t_2|^\alpha + |s_1 - s_2|^\alpha\}, \quad (c > 0)$$

то последовательность (12) при условии (13) сходится к одному из решений уравнения (11) по норме

$$\|\varphi\| = \max_{a<t<b} \varphi|(t)| + \sup_{a<t_1, t_2<b} \frac{\varphi|(t_1) - \varphi(t_2)|}{|t_1 - t_2|^\alpha}.$$

3. Обозначим через $C^1(a, b)$ пространство непрерывно дифференцируемых функций на отрезке (a, b) с нормой

$$\|\varphi\| = \max_{a<t<b} |\varphi(t)| + \max_{a<t<b} |\varphi'(t)|.$$

Пусть ядро $K(t, s)$ имеет непрерывные частные производные первого порядка в квадрате $a \leqslant t, s \leqslant b$. В этом случае мы находимся в условиях теоремы и поэтому последовательность (12) сходится по норме $C^1(a, b)$ к одному из решений уравнения (11), рассматриваемого в пространстве $C^1(a, b)$.

При определенных ограничениях на ядро $K(t, s)$ аналогичные результаты имеют место для уравнения (11), рассматриваемого в соболевских пространствах $W_p^l(a, b)$.

Все приведенные выше результаты распространяются на случаи соответствующих многомерных интегральных уравнений и систем таких уравнений.

Автор выражает глубокую благодарность И. Ц. Гохбергу и И. А. Фельдману за обсуждение результатов этой статьи.

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

1. М. А. Красносельский, Усп. матем. наук, XV, вып. 3 (93), (1960), 161—165.
2. М. Г. Крейн, Сбірник праць Ін-ту математ. АН УРСР, № 9 (1947), 104—129.
3. И. Ц. Гохберг и М. К. Замбицкий, Известия АН МССР, № 6 (1964).
4. Г. Н. Положий, Известия АН СССР, 23 (1959), 295—312.

Известия Академии наук Молдавской ССР № 7, 1965 г.

И. С. ЧЕБОТАРУ

О ЧИСЛЕННОМ РЕШЕНИИ ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ТИПА ВИНЕРА—ХОПФА

Известный метод численного решения интегральных уравнений Фредгольма второго рода, заключающийся в замене этого уравнения алгебраической системой линейных уравнений с помощью применения квадратурных формул, может быть перенесен и на интегральные уравнения типа Винера—Хопфа. Предварительно докажем одну общую теорему о приближенном решении операторных уравнений в банаховых пространствах.

Рассмотрим в банаховом пространстве E уравнение

$$A\,x = y, \tag{1}$$

где A — линейный ограниченный оператор, действующий в E. Пусть $\widetilde{E}_\tau\ (0 \leqslant \tau \leqslant \infty)$ — семейство подпространств из E таких, что $\widetilde{E}_{\tau_1} \subset \widetilde{E}_{\tau_2}$ при $\tau_1 < \tau_2$; предположим также, что объединение $\widetilde{E} = \bigcup_\tau \widetilde{E}_\tau$ всех этих подпространств плотно в E. Наряду с этим семейством рассмотрим семейство банаховых пространств $E_\tau\ (0 \leqslant \tau \leqslant \infty)$ и предположим, что существуют линейные операторы B_τ^0, которые изометрично отображают $\widetilde{E}_\tau$ на E_τ и допускают линейные непрерывные расширения B_τ на все пространство E такие, что $\sup_\tau \| B_\tau \| < \infty$.

Теорема 1. *Пусть A — линейный ограниченный обратимый оператор, действующий в E, а $A_\tau\ (0 \leqslant \tau \leqslant \infty)$ — линейный ограниченный оператор, действующий в E_τ. Если выполняются условия:*

a) $\lim\limits_{\tau\to\infty} \| B_\tau^{0^{-1}} A_\tau B_\tau x - A\,x \| = 0$ *для любого* $x \in E$;

б) *начиная с некоторого τ оператор A_τ обратим, причем $\sup_\tau \| A_\tau^{-1} \| < \infty$, то для любого $x \in E$ имеет место соотношение*

$$\lim_{\tau\to\infty} \| B_\tau^{0^{-1}} A_\tau^{-1} B_\tau\, x - A^{-1}x \| = 0. \tag{2}$$

Доказательство. Оператор $B_\tau^{0^{-1}} A_\tau B_\tau$, начиная с некоторого τ, обратим в $\widetilde{E}_\tau$. В самом деле, обратным к нему служит оператор

$B_\tau^{0^{-1}} A_\tau^{-1} B_\tau$. Тогда для любого $x \in A^{-1}\widetilde{E}$ в силу условий а) и б) теоремы имеем:

$$\lim_{\tau\to\infty} \| B_\tau^{0^{-1}} A_\tau^{-1} B_\tau x - A^{-1} x \| = \lim_{\tau\to\infty} \| B_\tau^{0^{-1}} A_\tau^{-1} B_\tau (A - B_\tau^{0^{-1}} A_\tau B_\tau) A^{-1} x \| \leqslant$$

$$\leqslant K \cdot C \cdot \lim_{\tau\to\infty} \| (A - B_\tau^{0^{-1}} A_\tau B_\tau) A^{-1} x \| = 0,$$

где $K \equiv \sup_\tau \| A_\tau^{-1} \|$, а $C = \sup_\tau \| B_\tau \|$.

Так как множество $A^{-1}\widetilde{E}$ плотно в E, а $\| B_\tau^{0^{-1}} A_\tau B_\tau \| \leqslant K \cdot C$, то равенство (2) имеет место для любого элемента $x \in E$.

Следствие. *Пусть выполняются условия теоремы 1 и x^* и x_τ^* соответственно решения уравнения* (1) *и приближенного уравнения*

$$A_\tau x = B_\tau y. \tag{3}$$

Тогда имеет место следующее неравенство

$$\| x^* - B_\tau^{0^{-1}} x_\tau^* \| \leqslant A^{-1} \| \cdot \| (B_\tau^{0^{-1}} A_\tau B_\tau - A)\ B_\tau^{0^{-1}} x_\tau^* \|.$$

В самом деле: $x^* = A^{-1}y$, $x_\tau^* = A_\tau^{-1} B_\tau y$, поэтому

$$\| x^* - B_\tau^{0^{-1}} x_\tau^* \| = \| A^{-1}y - B_\tau^{0^{-1}} A_\tau^{-1} B_\tau y \| =$$

$$= \| A^{-1} (B_\tau^{0^{-1}} A_\tau B_\tau - A) B_\tau^{0^{-1}} A_\tau^{-1} B_\tau y \| \leqslant$$

$$\leqslant \| A^{-1} \| \cdot \| (B_\tau^{0^{-1}} A_\tau B_\tau - A)\ B_\tau^{0^{-1}} x_\tau^* \|.$$

Замечание. В некоторых специальных случаях формулировка доказанной теоремы может быть значительно упрощена. В самом деле, пусть $\widetilde{E}_n$ — конечномерные подпространства банахова пространства E, а P_n — операторы проектирования на подпространства $\widetilde{E}_n$, причем при $n \to \infty$, $P_n x \to x$ для любого элемента $x \in E$. Пусть, далее, B_n^0 — линейный ограниченный оператор, который изометрично отображает подпространства $\widetilde{E}_n$ на некоторые пространства E_n. Введем обозначение $B_n = B_n^0 P_n$. Тогда имеет место

Теорема 2. *Если линейный ограниченный оператор A обратим в E, а начиная с некоторого n оператор $A_n = B_n A B_n^{0^{-1}}$ обратим в $B_n E$, причем $\sup_n \| A_n^{-1} \| < \infty$, то для любого $x \in E$ имеет место соотношение*

$$\lim_{n\to\infty} \| B_n^{0^{-1}} A_n^{-1} B_n x - A^{-1} x \| = 0.$$

Доказательство. В этом случае условие а) теоремы 1 выполняется автоматически, так как $B_n^{-1} A_n B_n = B_n^{-1} B_n A B_n^{-1} B_n = P_n A P_n$, и в силу предположения сильной сходимости P_n к единичному оператору имеем

$$\lim_{n\to\infty} \| P_n A P_n x - A x \| = 0.$$

В случае, когда $E_n = \tilde{E}_n$, эта теорема установлена в [2].

Теорема 3. *Если для интегрального уравнения*

$$A x(t) \equiv x(t) - \int_0^\infty k(t-s)\, x(s)\, ds = y(t), \quad (0 \leqslant t \leqslant \infty), \tag{4}$$

рассматриваемого в пространстве $C^0_{[0,\infty]}$, *выполняются условия:*

а) *ядро* $k(t) \in L_{(0,\infty)}$ *и непрерывно;*

б) *число* $\varkappa = \text{-}ind\,(1 - K(\lambda)) = 0$, *где* $K(\lambda)$ — *преобразование Фурье функции* $k(t)$, *то, начиная с некоторого* $n > 0$, *существует такое зависящее от* n *целое число* m_n^0, *что при всех целых* $m_n \geqslant m_n^0$ *система уравнений*

$$x_j - h_n \sum_{l=0}^{m_n - 1} k_{j-l}\, x_l = y_j, \quad (j = 0, 1, \ldots, m_n - 1), \tag{5}$$

где $h_n = \frac{n}{m_n}$, $k_{j-l} = k((j-l)\, h_n)$, $y_j = y\,(jh_n)$, *имеет единственное решение;*

2) *при* $n \to \infty$ *так, чтобы* $h_n \to 0$, *непрерывная функция* $x_{h_n}(t)$, *определенная равенством*

$$x_{h_n}(t) = \begin{cases} x_j, \ \text{при } t = jh_n,\ j = 0, 1, \ldots, m_n - 1, \\ 0, \ \text{при } t \geqslant n + \dfrac{1}{n}, \\ \text{линейна в промежутках } [j h_n,\ (j+1) h_n] \text{ и } \left[n, n + \dfrac{1}{n}\right], \\ \qquad j = 0, 1, \ldots, m_n - 2, \end{cases}$$

стремится по норме пространства $C^0_{[0,\infty]}$ *к единственному решению уравнения* (4).

Доказательство. Наряду с уравнением (4) рассмотрим следующее интегральное уравнение Фредгольма второго рода:

$$A_n x(t) \equiv x(t) - \int_0^n k(t-s)\; x(s)\; ds = y(t) \quad (0 \leqslant t \leqslant n). \tag{6}$$

Из работы [1] вытекает, что, начиная с некоторого n, оператор A_n обратим в $C_{[0,n]}$, причем $\sup_n \| A_n^{-1} \| < \infty$, и что функция

$$\tilde{x}_n(t) = \begin{cases} x_n(t), \ 0 \leqslant t \leqslant n \\ 0, \ \text{при } t \geqslant n + \dfrac{1}{n} \\ \text{линейна на } \left[n,\ n + \dfrac{1}{n}\right], \end{cases}$$

где $x_n(t)$ решение уравнения (6), стремится по норме пространства $C^0_{[0,\infty]}$ к единственному решению уравнения (4).

Но из [3] следует, что при существовании оператора A_n^{-1}, начиная с некоторого $m_n \geqslant m_n^0$ система уравнений (5) имеет единственное решение, причем непрерывная функция $x^0_{h_n}(t)$, определенная равенством

$$x^0_{h_n}(t) = \begin{cases} x_j \ \text{при } t = j h_n,\ j = 0, 1, \ldots, m_n - 1, \\ \text{линейна в промежутках } [j h_n,\ (j+1) h_n],\ j = 0, 1, \ldots, m_n - 2, \\ \text{const на } [(m_n - 1)\, h_n,\ n], \end{cases}$$

стремится по норме $C_{[0,n]}$ к $x_n(t)$.

Отсюда уже очевидным образом вытекает и второе утверждение теоремы.

Аналогичные теоремы имеют место для парных интегральных уравнений, для транспонированных к ним, а также для систем интегральных уравнений типа Винера—Хопфа, частные индексы которых равны нулю.

Пользуюсь случаем выразить признательность И. Ц. Гохбергу и И. А. Фельдману за постановку задачи и полезные советы.

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

1. И. Ц. Гохберг и И. А. Фельдман, О приближенном решении некоторых классов линейных уравнений. ДАН СССР, 160, № 4, (1965).
2. Н. И. Польский, Об одной общей схеме применения приближенных методов. ДАН СССР, 160, № 6 (1956).
3. С. Л. Соболев, Некоторые замечания о численном решении интегральных уравнений. Изв. АН СССР, серия матем., 20, № 4 (1956).

СОДЕРЖАНИЕ

КРАТКИЕ СООБЩЕНИЯ