БУЛЕТИНУЛ
АКАДЕМИЕЙ ДЕ ШТИИНЦЕ А РСС МОЛДОВЕНЕШТЬ

ИЗВЕСТИЯ
АКАДЕМИИ НАУК МОЛДАВСКОЙ ССР

6
1964

физ- мат

АКАДЕМИЯ НАУК МОЛДАВСКОЙ ССР

БУЛЕТИНУЛ
АКАДЕМИЕЙ ДЕ ШТИИНЦЕ А РСС МОЛДОВЕНЕШТЬ

ИЗВЕСТИЯ
АКАДЕМИИ НАУК МОЛДАВСКОЙ ССР

№ 6

СЕРИЯ ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИХ И ТЕХНИЧЕСКИХ НАУК

ИЗДАТЕЛЬСТВО «КАРТЯ МОЛДОВЕНЯСКЭ»
КИШИНЕВ • 1964

В. Д. БЕЛОУСОВ

К ОПРЕДЕЛЕНИЮ ПОНЯТИЯ КВАЗИТЕЛА

Понятие поля обобщалось различными путями—отказом от ассоциативности умножения (получаем то, что называется неассоциативным телом) или отказом от ассоциативности сложения (получаем то, что Пэйдж [1] назвал неополем). Далее, в связи с изучением некоторых вопросов проективной геометрии, был сделан еще один шаг на этом пути — отказ от ассоциативности обеих операций — полученное обобщение Хьюз [2] назвал неокольцом с делением, сохранив при этом существование нейтральных элементов (нуль в аддитивной лупе и единицу в мультипликативной лупе неокольца с делением). При этом Пэйдж и Хьюз постулируют аксиому умножения на нуль.

В настоящей статье делается еще один естественный шаг в обобщении неокольца с делением (здесь мы их называем неотелами) и доказывается, что аксиома умножения на нуль зависит от остальных аксиом: доказательство этого факта тривиально для обобщений поля, упомянутых выше, но требует некоторых усилий для квазитела, которое мы определим ниже. Кроме того, будет доказано, что всякое квазитело изотопно некоторому неотелу, а также будет доказан один аналог известной теоремы Альберта [3[об изотопии групп.

Определение. *Пусть в множестве Q, конечном или бесконечном, обладающем по крайней мере двумя элементами, определены две операции: сложение* $+$ *и умножение* $\cdot$, *т. е.* $Q(+)$ *и* $Q(\cdot)$ — *группоиды, удовлетворяющие следующим аксиомам:*

I) $Q(+)$ — квазигруппа[1] (аддитивная).

II) Пусть $Q' = Q \setminus 0$, где 0 — некоторый фиксированный элемент из Q. Тогда $Q'(\cdot)$ — квазигруппа (мультипликативная). $Q(\cdot)$ назовем мультипликативным группоидом.

III) Дистрибутивные законы:

$$a\,(b+c) = ab + ac,$$
$$(b+c)\,a = ba + ca$$

для всех $a, b, c \in Q$.

Тогда $Q(+, \cdot)$ назовем *квазителом*, 0 — *нулем квазитела.*

Замечание. Для того чтобы не вводить новый термин, мы назвали только что введенное понятие квазителом и сохранили термин неассоциативное тело (названное в книге А. Г. Куроша [4] квазителом) для случая, когда $Q(+)$ — группа.

---

[1]) Множество Q с одной бинарной операцией „$\cdot$“ называется *квазигруппой*, если уравнения $ax = b$, $ya = b$ однозначно разрешимы для любых $a, b \in Q$. Квазигруппа с единицей (т. е. $x1 = 1x = x$ для любых $x \in Q$) называется *лупой* [4, 5].

Пример. Пусть $Q'(\cdot)$ — дистрибутивная квазигруппа[1]). Рассмотрим множество $Q = Q' \cup 0$ $(0 \bar{\in} Q')$ и определим в Q операцию $+$ следующим образом:

$$\begin{cases} 0+0=0, & \\ 0+a=a+0=a & \text{для любых } a \in Q', \\ a+b=ab & \quad " \quad " \quad a, b \in Q',\ a \neq b, \\ a+a=0 & \quad " \quad " \quad a \in Q'. \end{cases}$$

Легко видеть, что $Q\,(+)$ — квазигруппа и даже лупа, так как единицей этой лупы будет 0. Определим еще операцию „$\circ$" в Q:

$$\begin{cases} a \circ 0 = 0 \circ a = 0 & \text{для любых } a \in Q, \\ a \circ b = ab, & \text{если } a \neq 0,\ b \neq 0. \end{cases} \qquad (1)$$

Проверим дистрибутивные законы. Если $c = 0$, то они выполняются ввиду (1). Пусть $c \neq 0$.

1) $(0+0) \circ c = 0 \circ c = 0$, $0 \circ c + 0 \circ c = 0 + 0 = 0$.

2) $(a+0) \circ c = a \circ c$; $a \circ c + 0 \circ c = a \circ c + 0 = a \circ c$.

3) Пусть $a, b \in Q'$, $a \neq b$. Тогда $a \circ c \neq b \circ c$ и $a \circ c, b \circ c \in Q'$.

Следовательно,

$$(a+b) \circ c = (ab)\,c = ac \cdot bc = ac + bc = a \circ c + b \circ c.$$

4) $(a+a) \circ c = 0 \circ c = 0$, $a \circ c + a \circ c = 0$. Аналогично проверяется левый дистрибутивный закон. Таким образом, мы показали, что $Q\,(+, \circ)$ — квазитело. Это квазитело было рассмотрено Осборном в [7] в связи с изучением некоторых геометрических вопросов.

Легко видеть также, что если $Q(+, \cdot)$ — квазитело, то и $Q(-, \cdot)$, где „$-$" знак какой-нибудь обратной операции для $+$, тоже квазитело. Пусть, например, $a - b = c \leftrightarrows a = b + c$. Тогда аксиомы квазитела для $Q(-, \cdot)$ выполняются. Проверим здесь дистрибутивность (выполнение остальных аксиом очевидно). Из $ad = (b+c)d = bd + cd$ следует $ad - bd = cd$, т. е. $ad - bd = (a-b)\, d$. Таким образом, если $Q(+, \cdot)$ — поле, то $Q\,(-, \cdot)$, где $-$ знак вычитания в поле $Q\,(+, \cdot)$, будет квазителом.

Следующая теорема показывает, что нуль квазитела 0 обладает обычным свойством нуля, т. е. $a0 = 0a = 0$, если только квазитело имеет не менее трех элементов. Для двух элементов это предложение не верно, вообще говоря. Так, пусть $Q = \{0, 1\}$; определим операции сложения и умножения следующим образом:

$$0+0=1+1=1,\ 0+1=1+0=0,$$
$$00=01=10=11=1.$$

Тогда аксиомы квазитела выполняются, в $Q(+, \cdot)$ нулем будет элемент 0, но $01 = 10 \neq 0$.

Проверка дистрибутивного закона: пусть $a + b = c$. Тогда

$$(a+b)\,0 = c0 = 1,\ a0 + b0 = 1 + 1 = 1,$$
$$(a+b)\,1 = c\,1 = 1,\ a1 + b1 = 1 + 1 = 1.$$

---

1) Квазигруппа $Q\,(\cdot)$ называется дистрибутивной, если $a \cdot bc = ab \cdot ac$, $bc \cdot a = ba \cdot ca$ для любых $a, b, c \in Q$ [6].

Теорема 1. *В любом квазителе $Q\,(+, \cdot)$ с нулем 0, содержащем не менее трех элементов, имеет место равенство $a0 = 0a = 0$ для любых $a \in Q$.*

Доказательство. Сначала сделаем следующие замечания.

A) Из $ab = 0$ следует либо $a = 0$, либо $b = 0$. Это следует из определения квазитела.

B) В мультипликативном группоиде $Q\,(\cdot)$ уравнение $ax = b$, где $a \neq 0$, $b \neq 0$, имеет самое большее два решения. Одно из них получается при рассмотрении того же уравнения в мультипликативной квазигруппе $Q'(\cdot)$ квазитела $Q(+, \cdot)$, оно единственное. Другим решением может быть нуль квазитела.

Перейдем к доказательству теоремы. Предположим, что в Q' существуют такие два элемента a, b, что $a0 = b$. Уравнение $ax = b$ в мультипликативной квазигруппе $Q'\,(\cdot)$ имеет единственное решение x_0 $(x_0 \neq 0)$. Таким образом, мы имеем

$$a0 = b,\ ax_0 = b,$$

где $a, x_0, b \in Q'$. Имеем:

$$\begin{aligned} a\,(x_0 + x_0) &= ax_0 + ax_0 = b + b, \\ a\,(x_0 + 0) &= ax_0 + a0 = b + b, \\ a\,(0 + x_0) &= a0 + ax_0 = b + b, \\ a\,(0 + 0) &= a0 + a0 = b + b. \end{aligned}$$

Следовательно, уравнение

$$ay = b + b \qquad (2)$$

имеет в Q решения $x_0 + x_0$, $x_0 + 0$, $0 + x_0$, $0 + 0$. Рассмотрим два случая:

Случай 1: $b + b \neq 0$.

Тогда ввиду замечания B) уравнение $ay = b + b$ может иметь самое большее два решения, причем одно из них равняется 0. Это означает, что среди четырех элементов $x_0 + x_0$, $x_0 + 0$, $0 + x_0$, $0 + 0$ некоторые совпадают. Мы не можем иметь $x_0 + x_0 = x_0 + 0$, так как тогда $x_0 = 0$ $(Q\,(+)$ — квазигруппа). Но $x_0 \in Q'$. Аналогично не может быть $x_0 + 0 = 0 + 0$. Остаются следующие возможности:

$$x_0 + x_0 = 0 + 0,$$
$$x_0 + 0 = 0 + x_0.$$

Но одно из решений уравнения (2) должно быть 0, поэтому мы должны рассмотреть следующие два подслучая.

1.1 $\begin{cases} x_0 + x_0 = 0 + 0 = 0, \\ x_0 + 0 = 0 + x_0 \neq 0, \end{cases}$ 1.2 $\begin{cases} x_0 + x_0 = 0 + 0 \neq 0, \\ x_0 + 0 = 0 + x_0 = 0. \end{cases}$

Подслучай 1.1. Пусть $z \neq 0$ является решением уравнения $x_0 = zb$ в $Q'\,(\cdot)$. Тогда $0 = x_0 + x_0 = zb + zb = z\,(b + b) = z\,(a0 + a0) = z\,[a\,(0 + 0)] = z\,(a0) = zb = x_0$.

Противоречие.

Подслучай 1.2. Обозначим через $\bar{b}$ решение уравнения $b + u = 0$ в $Q\,(+)$, т. е. $b + \bar{b} = 0$. Пусть $\bar{b} \neq 0$, тогда в Q' существует такой элемент w, что $\bar{b}=aw$. Следовательно, $0=b+\bar{b}=a0+aw=a(0+w)$. Так как $a\neq 0$, то в силу замечания А) следует $0+w=0$. Но и $0+x_0=0$, поэтому следует $w=x_0$, откуда

$$\bar{b}=aw=ax_0=b,$$

и, следовательно,

$$0=b+\bar{b}=b+b.$$

Получили противоречие с предположением случая 1. Поэтому мы должны положить $\bar{b}=0$. Таким образом, $b+\bar{b}=b+0=0$. Сравнивая последнее с равенством $x_0+0=0$ (из предположения подслучая 1.2), заключаем, что $b=x_0$. Кроме того, мы имеем:

$$a(x_0+0)=a0,\ ax_0+a0=a0,\ b+b=b.$$

Пусть c — любой элемент из Q', тогда существует такой $t \ni Q'$, что $c=tb$, и, следовательно,

$$c+c=tb+tb=t(b+b)=tb=c.$$

Из всего сказанного следует, что в случае 1.2 имеет место следующее предположение:

С) Если для какого-нибудь $a\neq 0$ имеем $a0\neq 0$, тогда

$$a0=x_0,\ 0+0=x_0,\ x_0+0=0+x_0,\ ax_0=x_0,\ c+c=c \qquad (3)$$

для всех $c\neq 0$.

Действительно, первое и четвертое равенства из (3) следуют из того факта, что $b=x_0$. Покажем, что $0+0=x_0$. Пусть $0+0=m\neq 0$. Имеем: $am=a(0+0)=a0+a0=b+b=b=ax_0$, следовательно, $m=x_0$.

Считая, что предположения подслучая 1.2 выполняются, мы рассмотрим внутри его следующие два подслучая:

Подслучай 1.2.1: $0^2\neq 0$.

Пусть $0^2=p$. Тогда $(x_0+0)0=00=p$, $x_00+0^2=p$, $x_00+p=p$. Так как $p\neq 0$, то $x_00=p$. Применим к равенству $x_00=p$ предложение С): $x_00=p$, $0+0=p$, $0+p=p+0=0$, $x_0p=p$. Но $0+0=x_0$. Следовательно, $p=x_0$ и из $x_0p=p$ следует, что $x_0^2=x_0$. Но $ax_0=x_0$, откуда $a=x_0$. Из всего сказанного следует, что предложение С) в случае $0^2\neq 0$ принимает вид:

C′) Если существует такой элемент $a\neq 0$, что $a0\neq 0$, то $a^2=a$, $a+0=0+a=0$, $0+0=a$, $a0=a$, $0^2=a$.

Отсюда вытекает, что существует только один элемент, который удовлетворяет условию предложения C′). Это следует, например, из равенства $0^2=a$. Если $d\neq 0$, a, то мы должны иметь $d0=0$. Пусть d будет таким элементом; тогда существуют элементы $y\neq 0$ и $\bar{y}$ такие, что $dy=a$, $d+\bar{d}=0$. Тогда $d(y+\bar{y})=d0$, $dy+d\bar{y}=0$, $a+d\bar{y}=0$. Но $a+0=0$, следовательно, $d\bar{y}=0$. Так как $d\neq 0$, то $\bar{y}=0$ и, следовательно, $y+0=0$. Сравнивая последнее опять с равенством $a+0=0$, получаем $y=a$. Следовательно, $a^2=a=dy=da$, откуда $d=a$, что противоречит выбору d.

Подслучай 1.2.2: $0^2=0$.

Пользуясь равенством (3), имеем:

$$x_00=(0+0)0=0^2+0^2=0+0=x_0.$$

И в этом подслучае предположение С) сохраняет силу, следовательно, $x_0^2=x_0$. Но и $ax_0=x_0$, поэтому $x_0=a$. Следовательно, $0+0=a$, $a0=a$. Отсюда заключаем, что a—единственный отличный от 0 элемент, для которого $a0\neq 0$. Рассуждая дальше, как в подслучае 1.2.1, приходим к противоречию.

Следовательно, случай 1.2.2 также приводит к противоречию. Остается, наконец, рассмотреть

Случай 2. $b+b=0$.

Имеем

$$b+b=ax_0+a0=a(x_0+0)=0,$$
$$b+b=a0+a0=a(0+0)=0.$$

Ввиду замечания А) следует, что $x_0+0=0+0=0$, откуда $x_0=0$. Получили противоречие с выбором x_0 ($x_0\in Q'$).

Таким образом, предположение, что существует такой элемент $a\neq 0$, что $a0\neq 0$, приводит во всех случаях к противоречию. Следовательно, $a0=0$. Аналогично доказывается, что $0a=0$.

Мы показали, что для любых $a\neq 0$ имеем $a0=0a=0$.

Следствие. Нуль квазитела является идемпотентным элементом относительно обеих операций квазитела, т. е. $0+0=0$ и $0^2=0$.

Пусть $0+0=q\neq 0$, тогда для любых $a\neq 0$ имеем:

$$aq=a(0+0)=a0+a0=0+0=q.$$

Следовательно, уравнение $xq=q$ в $Q'(\cdot)$ имеет больше одного решения, чего не может быть; итак, $0+0=0$.

Для того чтобы доказать, что $0^2=0$, рассмотрим в $Q\,(+)$ уравнение $a+x=0$, где $a\neq 0$. Мы должны иметь $x\neq 0$, так как иначе и $a=0$. Найдем 0^2:

$$0^2=(a+x)0=a0+x0=0+0=0.$$

Заметим здесь, что отсюда не вытекает, что 0 является нейтральным элементом аддитивной квазигруппы.

Частным случаем квазитела является неотело. Назовем *неотелом* квазитело, у которого аддитивная и мультипликативная квазигруппы являются лупами. Известно [4], что каждая квазигруппа изотопна[1)] некоторой лупе. Аналогичная теорема имеет место для квазител. Прежде чем сформулировать теорему, дадим следующее

Определение 2. *Два квазитела $Q(\oplus,\circ)$ и $Q(+,\cdot)$ изотопны (главно изотопны), если аддитивный и мультипликативный группоиды соответственно изотопны (главно изотопны).*

Таким образом, если квазитела $Q(\oplus,\circ)$ и $Q(+,\cdot)$ изотопны, то существует шесть подстановок α, β, γ, φ, ψ, θ множества Q таких, что

$$\alpha\,(x\oplus y)=\beta\,x+\gamma y,\ \varphi\,(x\circ y)=\psi\,x\cdot\theta y.$$

Покажем, что $\varphi 0'=\psi 0'=\theta 0'=0$, где 0 — нуль квазитела $Q(+,\cdot)$ и $0'$ — нуль квазитела $Q(\oplus,\circ)$. Действительно, мы должны иметь $x\circ 0'=0'$, откуда $\varphi 0'=\psi x\cdot\theta 0'$. Если бы $a=\varphi 0'\neq 0$, $b=\theta 0'\neq 0$, то уравнение $a=\psi x\cdot b$ имело бы более чем два решения в $Q'(\cdot)$. Таким образом, $\varphi 0'=0$ либо $\theta 0'=0$. В обоих случаях получаем $\varphi 0'=\theta 0'=0$. Рассматривая равенство $0'\circ x=0'$, мы получаем $\psi 0'=0$. Из всего сказанного вытекает, что аддитивные и мультипликативные квазигруппы изотопных квазител соответственно изотопны.

Доказанное только что свойство изотопных квазител может быть

1) Группоид $Q(\circ)$ изотопен группоиду $Q(\cdot)$, если существуют три подстановки α, β, γ множества Q такие, что $x\circ y=\alpha^{-1}(\beta x\cdot\gamma y)$. Если $\alpha=1$ — тождественная подстановка, то $Q(\circ)$ главно изотопен $Q(\cdot)$.

принято за определение изотопии. Имеет место следующая теорема, аналогичная теореме о квазигруппах:

Теорема 2. *Любое квазитело изотопно некоторому неотелу.*

Доказательство. Рассмотрим трансляции обеих квазигрупп $Q(+)$ и $Q'(\cdot)$: $R_a x = x+a$, $L_a x = a+x$, $\rho_a x = xa$, $\lambda_a x = ax$. В частности, обозначим $R_0 = R$, $L_0 = L$. Рассмотрим следующие изотопы: $x\oplus y = R^{-1}x + L^{-1}y$, $x\circ y = \rho_a^{-1}x\cdot\lambda_b^{-1}y$, где a, b — какие-нибудь фиксированные ненулевые элементы из Q.

Покажем, что $Q(\oplus,\circ)$ — неотело. Нужно показать, что: 1) $Q(\oplus)$ и $Q'(\circ)$ — лупы. Но это вытекает из определения операций $\oplus$ и $\circ$. Нулем лупы $Q(\oplus)$ будет нуль квазитела 0, так как $x\oplus 0 = R^{-1}x + L^{-1}0 = R^{-1}x + 0 = R(R^{-1}x) = x$. Единицей лупы $Q'(\circ)$ будет элемент $1 = ba = \lambda_b a = \rho_a b$:

$$x\circ 1 = \rho_a^{-1}x\cdot\lambda_b^{-1}1 = \rho_a^{-1}x\cdot\lambda_b^{-1}(\lambda_b a) = \rho_a^{-1}x\cdot a = \rho_a(\rho_a^{-1}x) = x.$$

2) „$\circ$" дистрибутивно относительно „$\oplus$". Для этой цели покажем, что

а) ρ_a, λ_b — автоморфизмы квазигруппы $Q(+)$ и б) трансляции квазигруппы $Q'(\cdot)$ коммутируют с R и L.

Действительно: а) $\rho_a(x+y) = (x+y)a = xa+ya = \rho_a x + \rho_a y$;
б) $\rho_a Lx = \rho_a(0+x) = (0+x)a = 0 + xa = L\rho_a x$ и т. д.

Теперь легко видеть, что в $Q(\oplus,\circ)$ выполняется дистрибутивный закон:

$$x\circ(y\oplus z) = \rho_a^{-1}x\cdot\lambda_b^{-1}(R^{-1}y + L^{-1}z) = \rho_a^{-1}x\,(\lambda_b^{-1}R^{-1}y + \lambda_b^{-1}L^{-1}z) =$$
$$= \rho_a^{-1}x\cdot R^{-1}\lambda_b^{-1}y + \rho_a^{-1}x\cdot L^{-1}\lambda_b^{-1}z.$$

Но $L(x\cdot y) = x\cdot Ly = Lx\cdot y$, $R(xy) = x\cdot Ry = Rx\cdot y$: $x\cdot Ly = x(0+y) = x0 + xy = 0 + xy = L(xy)$ и т. д.

Такие же равенства имеют место для R^{-1} и L^{-1}. Следовательно, $x\circ(y\oplus z) = R^{-1}(\rho_a^{-1}x\cdot\lambda_b^{-1}y) + L^{-1}(\rho_a^{-1}x\cdot\lambda_b^{-1}z) = R^{-1}(x\circ y) + L^{-1}(x\circ z) = x\circ y\oplus x\circ z$.

Так, если взять пример квазитела $Q(+,\cdot)$, приведенный в настоящей статье, то $Q(+,\cdot)$ изотопно неотелу с аддитивной лупой, вообще говоря, неассоциативной, в которой все элементы имеют порядок два, и с мультипликативной лупой, которая является коммутативной лупой Муфанг[1], так как любая дистрибутивная квазигруппа изотопна коммутативной лупе Муфанг [6].

Теорема 3. *Если неотело изотопно неополю (телу, полю), то и оно само будет неополем (телом, полем).*

Доказательство. Как известно [1], $Q(+,\cdot)$ является *неополем*, если $Q(+)$ — лупа, $Q'(\cdot)$ — группа и имеют место дистрибутивные законы. Пусть неотело $Q(\oplus,\circ)$ изотопно неополю $Q(+,\cdot)$. Тогда лупа $Q(\oplus)$ и группа $Q(+)$ изотопны. Но в силу известной теоремы Алберта [3], лупа $Q(\oplus)$ — сама группа, которая изоморфна группе $Q(+)$. Таким образом, $Q(\oplus,\circ)$ тоже неополе. Если $Q'(\cdot)$ — группа (т. е. $Q(+,\cdot)$ — неассоциативное тело), то $Q'(\circ)$ тоже будет группой в силу той же теоремы Алберта; поэтому и $Q(\oplus,\circ)$ будет неассоциативным телом.

Для главно изотопных неотел имеет место более сильная

[1]) Лупа $Q(\cdot)$ называется лупой Муфанг, если $x(yz\cdot x) = xy\cdot zx$ для любых x, y, $z\in Q$ [5].

Теорема 4. *Пусть $Q(\oplus,\circ)$ и $Q(+,\cdot)$ — два главно изотопные неотела. Тогда их аддитивные лупы совпадают.*

Пусть

$$x\oplus y = Vx + Wy, \tag{4}$$
$$x\circ y = \beta x\cdot\gamma y.$$

Имеем

$$x\circ(y\oplus z) = \beta x\cdot\gamma\,(Vy+Wz),$$
$$x\circ y\oplus x\circ z = \beta x\cdot\gamma y\oplus\beta x\cdot\gamma z = V(\beta x\cdot\gamma y) + W(\beta x\cdot\gamma z).$$

Откуда

$$\beta x\cdot\gamma\,(Vy+Wz) = V(\beta x\cdot\gamma y) + W(\beta x\cdot\gamma z),$$

или

$$x\cdot\gamma(Vy+Wz) = V(x\cdot\gamma y) + W(x\cdot\gamma z).$$

В частности, при $x=1$ — единице лупы $Q'(\cdot)$ получаем:

$$\gamma(Vy+Wz) = V\gamma y + W\gamma z.$$

Следовательно,

$$x(V\gamma y + W\gamma z) = V(x\cdot\gamma y) + W(x\cdot\gamma z),$$

или

$$x(Vy+Wz) = V(xy) + W(xz),$$
$$x(y\oplus z) = xy\oplus xz, \tag{5}$$

т. е. $Q(\oplus,\cdot)$ — тоже неотело.

В частности, при $z=0'$, где $0'$ — нуль неотела $Q(\oplus,\circ)$ из (5), следует $xy = xy\oplus x0'$, откуда $x0' = 0'$. Если $x=0$, то $00'=0'$, откуда $0'=0$. Полагая в (4) по очереди $x=0'$ и $y=0'$, получаем:

$$x = Vx + W0',\quad y = V0' + Wy, \tag{6}$$

откуда

$$x\oplus y = (Vx + W0')\oplus(V0'+Wy) = Vx + Wy,$$

или

$$(x + W0')\oplus(V0'+y) = x+y. \tag{7}$$

Если $W0' = V0' = 0$, тогда $x\oplus y = x+y$. Если, например, $V0'=0$, тогда из (7) получаем $(x+W0')\oplus y = x+y$, откуда при $y=0$ имеем $x + W0' = x$, т. е. $W0'=0$, и, следовательно, опять имеем $x\oplus y = x+y$. Положим поэтому $V0'\neq 0$, $W0'\neq 0$. Умножаем слева (в смысле лупы $Q'(\cdot)$) равенство (7) на $z\neq 0$, используя при этом тождество (5):

$$(zx + zW0')\oplus(zV0' + zy) = zx + zy.$$

Пусть $zx = x_1$, $zy = y_1$ (очевидно, x_1, y_1 могут принимать любые значения из Q):

$$(x_1 + zW0')\oplus(zV0' + y_1) = x_1 + y_1. \tag{8}$$

Сравнивая равенства (7) и (8), получаем:

$$(x + zW0')\oplus(zV0' + y) = (x + W0')\oplus(V0'+y),$$

которое верно при любых x, y и z ($z\neq 0$). Пользуясь трансляциями, последнее равенство можно переписать в таком виде:

$$R_{zW0'}\,x\oplus L_{zV0'}\,y = R_{W0'}\,x\oplus L_{V0'}\,y$$

или

$$R_{zW0'}\,R^{-1}_{W0'}\,x\oplus L_{zV0'}\,L^{-1}_{V0'}\,y = x\oplus y.$$

Пусть $\varphi_z = R_{zW0'}R^{-1}_{W0'}$, $\psi_z = L_{zV0'}L^{-1}_{V0'}$.

Тогда

$$\varphi_z x\oplus\psi_z y = x\oplus y. \tag{9}$$

Используем теперь следующее утверждение, доказанное в [6]: *если в лупе $Q\,(\oplus)$ имеет место равенство*

$$\alpha x \oplus \beta y = x \oplus y$$

для любых $x, y \in Q$ и для некоторых подстановок α, β множества Q, тогда $\alpha x = x \oplus w$, $\beta x = w' \oplus x$, где *w, w' принадлежат среднему ядру*[1] *лупы $Q(\oplus)$ и $w = \alpha 0'$, $w' = \beta 0'$, где $0'$—нуль лупы $Q\,(\oplus)$.* Согласно этому утверждению, из равенства (9) вытекает, что $w = \varphi_2 0'$ принадлежит среднему ядру лупы $Q(\oplus)$. Найдем w:

$$w = \varphi_2 0' = R_{zW0'} \cdot R_{W0'}^{-1} 0' = R_{W0'}^{-1} 0' \oplus zW0' = k \oplus zW0'.$$

Так как $W0' \neq 0$, мы заключаем, что любой элемент $z \neq 0$ из Q принадлежит среднему ядру лупы $Q\,(\oplus)$. Нуль $0'$ квазитела $Q\,(\oplus, \circ)$, очевидно, тоже принадлежит этому ядру, таким образом, лупа $Q(\oplus)$ совпадает со своим средним ядром, следовательно, $Q\,(\oplus)$—группа. Так как лупа $Q(+)$ изотопна группе $Q\,(\oplus)$, то ввиду теоремы Алберта, лупа $Q(+)$ также является группой. Из равенства (4) следует, что $V0' + W0' = 0$ и, кроме того, ввиду равенств (6), будем иметь:

$$x \oplus y = Vx + Wy = (x - W0') + (y - V0') = (x + y) - (V0' + W0'),$$

т. е. $x \oplus y = x + y$. Теорема доказана.

В заключение заметим, что группа $Q(+)$ коммутативна. Это утверждение следует из теоремы Пиккерта [8]: если аддитивная квазигруппа квазитела является IP-лупой[2], тогда она коммутативна. Так как группа является IP-лупой, то наше утверждение доказано.

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. L. J. Paige, Neofields, Duke Math. Journ., 1949, 16,1 39-60.
2. D. R. Hughes, Planar division rings, Trans. Amer. Math. Soc., 1955, 80,2, 502-527.
3. A. A. Albert, Quasigroups I, Trans. Amer. Math. Soc., 1943, 54, 507—519.
4. А. Г. Курош, Лекции по общей алгебре, М., 1962.
5. R. H. Bruck, A survey of binary systems, Berlin-Göttingen—Heidelberg, 1958.
6. В. Д. Белоусов, О структуре дистрибутивных квазигрупп, Математический сб., 1960, 50 (92): 3, 267—298.
7. M. J. Osborn, New loops from old geometries, Amer. Math. Monthly, 1961, 68, 2, 103—107.
8. G. Pickert, Projective Ebenen, Berlin—Göttingen—Heidelberg, 1955.

В. Д. БЕЛОУСОВ

ДЕСПРЕ НОЦИУНЯ ДЕ КВАЗИКОРП

Резумат

Мулцимя Q ку доуэ операций $(+)$ ши $(\cdot)$ се нумеште квазикорп; дакэ 1) $Q(+)$—квазигруп; 2) $Q' = Q \setminus 0$ (0—ун елемент арбитрар); $Q'(\cdot)$—квазигруп; 3) ау лок амбеле лежь дистрибутиве. Се демонстрязэ, кэ 0 (елементул зеро ал квазикорпулуй) аре проприетэциле куноскуте але луй 0 ын корпул обишнуит. Ноциуня де изотопие а доуэ квазикорпурь се ынтродуче ку ажуторул изотопиилор квазигрупурилор адитивь ши групоизилор мултипликативь. Фиекаре квазикорп есте изотоп ла ун неокорп (квазикорп ку унитате): Аре лок теорема: лупеле адитиве а доуэ неокорпурь принчипал изотопь коинчид. Пентру неокорпурь аре лок о теоремэ аналоагэ теоремей луй Алберт.

[1]) Совокупность всех элементов a лупы $Q\,(\cdot)$ таких, что $xa \cdot y = x \cdot ay$, называется средним ядром лупы $Q\,(\cdot)$. Среднее ядро является ассоциативной подлупой (т. е. подгруппой) лупы $Q\,(\cdot)$ [5].

[2]) Лупа $Q(\cdot)$ называется IP-лупой [5], если $x^{-1}(xy) = (yx)x^{-1} = y$ для любых x, y и $xx^{-1} = x^{-1}x = 1$.

Известия Академии наук Молдавской ССР № 6, 1964

И. У. БРОНШТЕЙН, Н. И. ЗИЛЬБЕРБЕРГ

ОТНОСИТЕЛЬНО ПЛОТНАЯ УСТОЙЧИВОСТЬ ПО ЛЯПУНОВУ

В статье вводятся и изучаются различные типы относительно плотной устойчивости по Ляпунову в общих динамических системах. Такого рода устойчивость оказывается тесно связанной с понятиями, введенными ранее в работах [1, 2, 3, 4].

Пусть (X, T, π) — общая динамическая система (группа преобразований [1]), где X — равномерное пространство, T — топологическая группа. Введем следующие обозначения: U — база равномерной структуры в пространстве X; $\mathbf{K}$ — класс всех компактных [5] подмножеств T; $\mathbf{A}$ — множество всех относительно плотных подмножеств T ($A \in \mathbf{A}$ тогда и только тогда, когда существует $K \in \mathbf{K}$ такое, что $T = AK$); P — множество всех пар точек $(x, y) \in X \times X$ таких, что для всякого $\alpha \in U$ существует $t \in T$, для которого $(xt, yt) \in \alpha$; Q — множество всех пар точек $(x, y) \in X \times X$ таких, что для любого $\alpha \in U$ и любых окрестностей $V_1(x)$ и $V_2(y)$ найдутся $x_1 \in V_1(x)$, $y_1 \in V_2(y)$ и $t \in T$, для которых $(x_1 t, y_1 t) \in \alpha$; L — множество всех пар точек $(x, y) \in X \times X$ таких, что если $\alpha \in U$, то существует $A \in \mathbf{A}$, удовлетворяющее условию $(x, y)\, A \subset \alpha$.

Легко видеть, что $P = \bigcap\limits_{\alpha \in U} \alpha T$, а $Q = \bigcap\limits_{\alpha \in V} \overline{\alpha T}$. Кроме того, группа преобразований (X, T, π) равностепенно непрерывна тогда и только тогда, когда $Q = \Delta$ ($\Delta = \{(x, x) \in X \times X \mid x \in X\}$).

Введем следующие определения.

Определение 1. Точку $x \in X$ назовем L_1-устойчивой (L_1-уст.) относительно группы преобразований (X, T, π), если для всякого окружения $\alpha \in U$ найдется окружение $\beta \in U$ и множество $K \in \mathbf{K}$ такие, что для любой точки $y \in x\beta$ и произвольного $t \in T$ существует $k \in \mathbf{K}$, для которого $ytk^{-1} \in xtk^{-1}\alpha$.

Определение 2. Точку $x \in X$ назовем L_2-устойчивой (L_2-уст.) относительно группы преобразований (X, T, π), если для любого окружения $\alpha \in U$ существуют $\beta \in U$ и $A \in \mathbf{A}$ такие, что для $y \in x\beta$ и $a \in A$ выполняется включение $ya \in xa\alpha$.

Из этих определений следует, что всякая точка $x \in X$, L_2-устойчивая относительно группы преобразований (X, T, π), является L_1-устойчивой относительно (X, T, π).

Лемма 1. *Точка $x \in X$ является L_1-устойчивой относительно (X, T, π) тогда и только тогда, когда для любого $\alpha \in U$ можно подобрать $\beta \in U$ и $K \in \mathbf{K}$ так, что для всякого $y \in x\beta$ существует $A_y \in \mathbf{A}$, для которого $A_y K = T$ и $(x, y)\, A_y \subset \alpha$.*

Доказательство. Пусть точка $x \in X$ является L_1-устойчивой. Для $\alpha \in U$ и $x \in X$ найдем $\beta \in U$ и множество $K \in \mathbf{K}$ из условия L_1-устойчивости точки. Для произвольного $t \in T$ находим $k \in K$ такое, что $ytk^{-1} \in xtk^{-1}\alpha$. Множества $A_y = \{tk^{-1} \mid t \in T\}$ и $\beta \in U$ являются искомыми. Обратно, предположим, что для любого $\alpha \in U$ существуют $\beta \in U$ и $K \in \mathbf{K}$ такие, что для всякого $y \in x\beta$ найдется $A_y \in \mathbf{A}$, для которого $A_y K = T$ и $(x, y) A_y \subset \alpha$. Рассмотрим любую точку $y \in x\beta$ и $t \in T$. Ясно, что $t = ak$ для некоторого $a \in A_y$ и некоторого $k \in K$. Тогда $a = tk^{-1}$ и включение $ya \in xa\alpha$ принимает вид $ytk^{-1} \in xtk^{-1}\alpha$.

Аналогично доказывается

Лемма 2. *Точка $x \in X$ является L_2-устойчивой относительно (X, T, π) тогда и только тогда, когда для любого $\alpha \in U$ можно подобрать $\beta \in U$ и $K \in \mathbf{K}$ так, что для любого $t \in T$ найдется $k \in K$, для которого $x\beta tk^{-1} \subset xtk^{-1}\alpha$.*

Теорема 1. *Множество всех точек пространства X, L_1-устойчивых (L_2-устойчивых) относительно группы преобразований (X, T, π), является инвариантным* [1].

Доказательство. Для определенности предположим, что $x \in X$ является L_1-устойчивой. Пусть $y = xt\ (t \in T)$ и $\alpha \in U$. По $\alpha \in U$ найдем $\gamma \in U$ и $K \in \mathbf{K}$ такие, что для $y \in x\gamma$ и $t \in T$ существует $k \in K$, для которого $ytk^{-1} \in xtk^{-1}\alpha$. По $\gamma \in U$ и $t \in T$, в силу непрерывности отображения π, найдем окружение $\beta \in U$ такое, что если $z \in xt\beta$, то $zt^{-1} \in x\gamma$. Согласно выбору γ для $tt_1 \in T$ найдется элемент $k_1 \in K$ такой, что $zt^{-1}tt_1k_1^{-1} \in xtt_1k_1^{-1}\alpha$, то есть $zt_1k_1^{-1} \in xtt_1k_1^{-1}\alpha$ или $zt_1k_1^{-1} \in yt_1k_1^{-1}\alpha$.

Определение 3. Будем говорить, что множество $M \subset X$ равномерно L_2-устойчиво относительно группы преобразований (X, T, π), если для произвольного окружения $\alpha \in U$ существует окружение $\beta \in U$ такое, что для любой точки $x \in M$ найдется $A_x \in \mathbf{A}$, для которого из $y \in x\beta$ следует $(x, y) A_x \subset \alpha$.

Теорема 2. *Если множество $M \subset X$ равномерно L_2-устойчиво относительно группы преобразований (X, T, π), то множество $\overline{M} \subset X$ также равномерно L_2-устойчиво относительно (X, T, π).*

Доказательство. Пусть $\alpha \in U$. Рассмотрим симметричное окружение α_1 такое, что $\alpha_1^2 \subset \alpha$. Для $\alpha_1 \in U$ можно в силу равномерной L_2-устойчивости множества M найти симметричное окружение γ такое, что для $x \in M$ существует $A_x \in \mathbf{A}$, для которого $(x, y) A_x \subset \alpha_1$ при всех $y \in x\gamma$. Рассмотрим $\beta \in U$ такое, что $\beta = \beta^{-1}$ и $\beta^2 \subset \gamma$. Пусть $z \in \overline{M}$. Тогда $z\beta \cap M \neq \Lambda$. Для любой точки $x \in z\beta \cap M$ найдем соответствующее $A_x \in \mathbf{A}$ и докажем, что $(y, z) A_x \subset \alpha$, где y — произвольная точка из $z\beta$. Так как $x \in z\beta$ и $\beta = \beta^{-1}$, то $z \in x\beta \subset x\gamma$, отсюда в силу выбора $\gamma \in U$ и $A_x \in \mathbf{A}$ имеем, что для всякого $a \in A_x$

$$za \in xa\alpha_1. \tag{1}$$

Далее из того, что $y \in z\beta$ и $z \in x\beta$, получаем, что $y \in x\gamma$. Поэтому для любого $a \in A_x$, в силу выбора $A_x \in \mathbf{A}$ и $\gamma \in U$,

$$ya \in xa\alpha_1. \tag{2}$$

Из (1) и (2) получаем, что $ya \in xa\alpha_1 \subset za^2\alpha_1 \subset za\alpha$ для всякого $a \in A_x$. Таким образом, в качестве A_z можно взять A_x.

Следствие 1. *Если хотя бы одна из траекторий минимального множества M является равномерно L_2-устойчивой, то всё минимальное множество M равномерно L_2-устойчиво.*

Теорема 3. *Если множество X компактно и каждая его точка L_2-устойчива относительно группы преобразований (X, T, π), то X равномерно L_2-устойчиво относительно (X, T, π).*

Доказательство. Пусть $\alpha \in U$. Рассмотрим $\alpha_1 \in U$ такое, что $\alpha_1 = \alpha_1^{-1}$ и $\alpha_1^2 \subset \alpha$. Для $\alpha_1 \in U$ и всякой точки $x \in X$ существуют $\beta_x \in U$ и $A_x \in \mathbf{A}$, для которых $x\beta_x a \subset xa\alpha_1$ при всех $a \in A_x$. Пусть $x_1\beta_1, x_2\beta_2, \ldots, x_n\beta_n$ является конечным покрытием X. Множество $\beta = \bigcup_{l=1}^{n} [x_i\beta_l \times x_i\beta_l]$ является окружением равномерной структуры (см. [5], стр. 178, теорема 1). Пусть $x \in X$ и $y \in x\beta$. Найдется $1 \leqslant s \leqslant n$ такое, что $x \in x_s\beta_s$, $y \in x_s\beta_s$, тогда $(x, x_s) A_s \subset \alpha_1$ и $(x_s, y) A_s \subset \alpha_1$, где $A_s \in \mathbf{A}$. Отсюда получаем, что $(x, y) A_s \subset \alpha_1^2 \subset \alpha$. Таким образом, доказано, что для всякого $\alpha \in U$ существует $\beta \in U$ такое, что для любой точки $x \in X$ найдется $A_x \in \mathbf{A}$, для которого $(x, y) A_x \subset \alpha$ при всех $y \in x\beta$.

Теорема 4. *Пусть $(X_s, T, \pi_s)\ (s \in S)$ — множество групп преобразований, где $X_s (s \in S)$ — компактные пространства. Если все точки пространства $X_s (s \in S)$ L_2-устойчивы относительно группы преобразований (X_s, T, π_s), то все точки топологического произведения $\prod_{s \in S} X_s$ являются L_2-устойчивыми относительно группы преобразований $(\prod_{s \in S} X_s, T, \pi)$.*

Доказательство. Пусть $(x_l) \in \prod_{s \in S} X_s$ и $\hat{\alpha}$ — окружение равномерной структуры в $\prod_{s \in S} X_s$. Тогда по определению $\hat{\alpha} = \prod_{s \in S} \alpha_s$, где $\alpha_s (s \in S)$ — окружение равномерной структуры в $X_s (s \in S)$, причем для всех $s \in S$, за исключением конечного числа индексов $i, j, \ldots, r \in S$, $\alpha_s = X_s \times X_s$. Рассмотрим $x_l \in X_l$ и $\alpha_l \in U_l$. Для α_l и x_l найдется $\beta_l \in U_l$, $A_l \subset T$ и $K_l \in \mathbf{K}$ такие, что

$$x_i\beta_l a \subset x_l a\alpha_l \tag{3}$$

для всех $a \in A_l$ и $T = A_l K$. Множество K_l^{-1} принадлежит $\mathbf{K}$. По $\alpha_j \in U_j$ и $K_l^{-1} \in \mathbf{K}$ найдем в силу условия интегральной непрерывности $\delta_j \in U_j$ такое, что $\delta_j K_l^{-1} \subset \alpha_j$. Далее по $\delta_j \in U_j$ и $x_j \in X_j$ найдем $\beta_j \in U_j$ и $A_j \in \mathbf{A}$, для которых $x_j\beta_j a \subset x_j a\delta_j$ для любого $a \in A_j$, то есть $(y_j a, x_j a) \in \delta_j$ при $y_j \in x_j\beta_j$ и $a \in A_j$. Значит, $(y_j a, x_j a) K_l^{-1} \subset \delta_j K_l^{-1} \subset \alpha_j$. Определим множество $A^j = A_l \cap A_j K_l^{-1}$. Тогда по лемме 2 из [3] получаем, что $A^j \in \mathbf{A}$ и $(y_l a, x_l a) \in \alpha_l$ для $y_l \in x_l\beta_l$ и $a \in A^j$, а $(y_j a, x_j a) \in \alpha_j$ для всех $y_j \in x_j\beta_j$ и $a \in A^j$. Предположим, что мы уже определили множество $A^l\ (1 < l < n)$ и окружения $\beta_l, \beta_j, \ldots, \beta_l$ такие, что $(y_k a, x_k a) \in \alpha_k\ (k = i, j, \ldots, l)$ для всех $y_k \in x_k\beta_k$ и $a \in A^l$. Так как $A^l \in \mathbf{A}$, то существует $K \in \mathbf{K}$ такое, что $A^l K = T$. Теперь в силу условия интегральной непрерывности по $\alpha_{l+1} \in U_{l+1}$ и $K \in \mathbf{K}$ найдем $\delta_{l+1} \in U_{l+1}$ такое, что $\delta_{l+1}K^{-1} \subset \alpha_{l+1}$. Далее по $x_{l+1} \in X_{l+1}$ и $\delta_{l+1} \in U_{l+1}$ найдем $\beta_{l+1} \in U_{l+1}$ и $A_{l+1} \in \mathbf{A}$ такие, что $(y_{l+1}a, x_{l+1}a) \in \delta_{l+1}$ для всех $y_{l+1} \in x_{l+1}\beta_{l+1}$ и $a \in A_{l+1}$. Тогда $(y_{l+1}a, x_{l+1}a) \in \delta_{l+1}$ для всех $y_{l+1} \in x_{l+1}\beta_{l+1}$ и $a \in A_{l+1}$. Следовательно, $(y_{l+1}a, x_{l+1}a) K^{-1} \subset \delta_{l+1}K^{-1} \subset \alpha_{l+1}$. Определяем множество $A^{l+1} = A^l \cap A_{l+1}K^{-1}$. Оно является относительно плотным и $(y_k a, x_k a) \in \alpha_k\ (k = i, j, \ldots, l+1)$ для всех $y_k \in x_k\beta_k\ (k = i, j, \ldots, l+1)$ и $a \in A^{l+1}$. Продолжая этот процесс, мы сможем найти $A \in \mathbf{A}$ и окружения $\beta_l, \beta_j, \ldots, \beta_r$ такие, что для $y_k \in x_k\beta_k\ (k = i, j, \ldots, r)$ и $a \in A$ $(y_k a,$

$x_k a) \in \alpha_k$ $(k = i, j, \ldots, r)$. Последнее соотношение имеет место и для остальных α_k $(k \in S,\ k \neq i, j, \ldots, r)$, если в качестве β_k выбрать $X_k \times X_k$. Пусть $\widehat{\beta} = \prod\limits_{s \in S} \beta_s$. Ясно, что если $(y_l) \in (x_l)\widehat{\beta}$ и $a \in A$, то $((y_l), (x_l))a \in \widehat{\alpha}$, то есть точка $(x_l) \in \prod\limits_{s \in S} X$ является L_2-устойчивой относительно $(\prod\limits_{s \in S} X_s, T, \pi)$.

Теорема 5. *Если точка $x \in X$ почти периодична* [1] *и L_2-устойчива относительно группы преобразований (X, T, π), то x — локально почти периодична* [1].

Доказательство. Пусть $\alpha \in U$. Рассмотрим $\gamma \in U$ такое, что $\gamma = \gamma^{-1}$ и $\gamma^2 \subset \alpha$. Так как x является почти периодической точкой, то для $\gamma \in U$ существует $A_1 \in \mathrm{A}$ такое, что $xA_1 \subset x\gamma$. Так как $A_1 \in \mathrm{A}$, то существует $K_1 \in \mathrm{K}$ такое, что $T = A_1 K_1$. Тогда $K_1^{-1} \in \mathrm{K}$. Теперь по γ и K_1^{-1} из условия интегральной непрерывности найдем $\delta_1 \in U$, для которого $\delta_1 K_1^{-1} \subset \gamma$. Далее, для δ_1 и $x \in X$ найдем $\beta \in U$ и $A_2 \in \mathrm{A}$ такие, что для всякого $y \in x\beta$ $(x, y) A_2 \subset \delta_1$. Отсюда в силу включения $\delta_1 K_1^{-1} \subset \gamma$ вытекает, что $(x, y) A_2 K_1^{-1} \subset \delta_1 K_1^{-1} \subset \gamma$. Рассмотрим теперь относительно плотное множество $A = A_2 K_1^{-1} \cap A_1$. Для доказательства теоремы достаточно установить, что $x\beta A \subset x\alpha$. Пусть $a \in A \subset A_1$ и $y \in x\beta$. Тогда $ya \in xa\gamma$, но $xA \subset xA_1 \subset x\gamma$, поэтому $ya \in xa\gamma \subset x\gamma\gamma = x\gamma^2 \subset x\alpha$, то есть $x\beta A \subset x\alpha$.

Следствие 2. *Если все точки $x \in X$ почти периодичны и L_2-устойчивы относительно (X, T, π), то группа преобразований (X, T, π) локально почти периодична и $P = Q = L$.*

Действительно, эти утверждения вытекают из доказанной теоремы 5, а также из теоремы 13 работы [2] и теоремы 3 [3].

Следствие 3. *Если X — компактное минимальное множество и существует точка $x \in X$, которая L_2-устойчива, то множество X — локально почти периодично.*

Действительно, из теоремы 5 следует, что точка $x \in X$ является локально почти периодической, а из теоремы 4.31 работы [1] следует, что все точки X локально почти периодичны.

Теорема 6. *Если X — равномерное пространство и T — локально почти периодично, то все точки X являются L_2-устойчивыми относительно (X, T, π).*

Доказательство. Пусть $x \in X$ и $\alpha \in U$. Выберем $\alpha_1 \in U$ такое, что $\alpha_1 = \alpha_1^{-1}$ и $\alpha_1^2 \subset \alpha$. Для $x \in X$ и $\alpha_1 \in U$ подбираем $\beta \in U$ и $A \in \mathrm{A}$, для которых $x\beta A \subset x\alpha_1$. Если $y \in x\beta$ и $a \in A$, то $ya \in x\alpha_1$, $xa \in x\alpha_1$ и, следовательно, $ya \in x\alpha_1 \subset xa\alpha_1\alpha_1 = xa\alpha_1^2 \subset xa\alpha$.

Следствие 4. *Если X — компактно и группа преобразований (X, T, π) локально почти периодична, то X — равномерно L_2-устойчиво.*

Следствие 5. *Если X — компактное минимальное множество и существует точка $x \in X$, которая L_2-устойчива, то X является равномерно L_2-устойчивым.*

Действительно, так как X — компактно и минимально, то x — почти периодична. Следовательно, по теореме 5 точка x будет локально почти периодична, но тогда по теореме 4.31 из [1] пространство X — локально почти периодично. Из теоремы 6 вытекает, что все точки

X будут L_2-устойчивыми относительно (X, T, π). Далее из теоремы 3 получаем, что X равномерно L_2-уст. относительно (X, T, π).

Замечание 1. Если X — локально почти периодично, но не почти периодично, то по теореме 4 множество $X \times X$ будет L_2-устойчиво, но не локально почти периодично. Действительно, если $X \times X$ локально почти периодично, то X было бы дистальным [4], то есть $P = \Delta$. Но тогда $P = Q = \Delta$ и группа преобразований (X, T, π) была бы почти периодической [1], вопреки условию. Отсюда следует, что в теореме 5 условие почти периодичности точки $x \in X$ является существенным.

Определение 4. Будем говорить, что группа преобразований (X, T, π) является L_3-устойчивой, если для произвольного окружения $\alpha \in U$ существуют $\beta \in U$ и $K \in \mathrm{K}$ такие, что $\beta T \subset \alpha K$.

Определение 5. Будем говорить, что группа преобразований (X, T, π) является L_4-устойчивой, если для всякого $\alpha \in U$ существуют $\beta \in U$ и $K \in \mathrm{K}$ такие, что $\beta A \subset \alpha$ и $AK = T$.

Легко доказывается следующая лемма.

Лемма 3. *Пусть F_α — направление* [6] *компактов, причем из $\alpha_1 < \alpha_2$ следует, что $F_{\alpha_1} \supset F_{\alpha_2}$. Тогда для любой окрестности $V(\cap F_\alpha)$ найдется индекс α_0 такой, что $F_\alpha \subset V$ при всех $\alpha \geqslant \alpha_0$.*

Теорема 7. *Пусть X — компактное пространство. Тогда для того, чтобы группа преобразований (X, T, π) была бы L_3-устойчивой, необходимо и достаточно, чтобы $P = Q$.*

Доказательство. Предположим, что (X, T, π) является L_3-устойчивой. Для произвольного $\alpha \in U$ рассмотрим $\gamma \in U$ такое, что $\bar{\gamma} \subset \alpha$. Существуют $\beta \in U$ и $K \in \mathrm{K}$, для которых $\beta T \subset \alpha K$. Тогда $Q = \bigcap\limits_{\alpha \in U} \overline{\alpha T} \subset \overline{\beta T} \subset \overline{\gamma K} \subset \bar{\gamma} K \subset \alpha K \subset \alpha T$. Значит, $Q \subset \bigcap\limits_{\alpha \in U} \alpha T = P$. Так как обратное включение всегда имеет место, то $P = Q$. Предположим, что $P = Q$, или, что то же самое, $\bigcap\limits_{\alpha \in U} \overline{\alpha T} = \bigcap\limits_{\alpha \in U} \alpha T$. Согласно теореме Тихонова, $X \times X$ компактно, а значит, $\overline{\alpha T}$ — компакт при любом $\alpha \in U$. Для произвольно взятого $\alpha \in U$ найдется окружение $\alpha_1 \subset \alpha$, открытое в $X \times X$. Так как $\alpha T \supset \alpha_1 T \supset \bigcap\limits_{\beta \in U} \overline{\beta T}$, то по лемме 3 найдется окружение $\beta \in U$ такое, что $\overline{\beta T} \subset \alpha_1 T$. Так как $\overline{\beta T}$ — компактно, то найдется $K \in \mathrm{K}$ такое, что $\overline{\beta T} \subset \alpha_1 K$. Следовательно, $\beta T \subset \alpha_1 K$, тогда $\beta T \subset \alpha K$.

Замечание 2. Пример из замечания 1 показывает, что группа преобразований (X, T, π) может быть L_3-устойчивой, но не локально почти периодической. Кроме того, этот же пример показывает, что L_3-устойчивость группы преобразований не влечет L_2-устойчивость точек $x \in X$ относительно (X, T, π). Так как (X, T, π) является L_3-устойчивой, то все точки $x \in X$ будут L_1-устойчивыми; значит, существуют в компактном пространстве точки, которые L_1-устойчивы, но не L_2-устойчивы.

Теорема 8. *Если X — компактно и все точки $x \in X$ L_2-устойчивы, то группа преобразований (X, T, π) будет L_3-устойчивой.*

Доказательство. По теореме 3 пространство X равномерно L_2-устойчиво. Пусть $\alpha \in U$. Выберем $\alpha_1 \in U$ такое, что $\alpha_1 = \alpha_1^{-1}$ и $\alpha_1^2 \subset \alpha$.

В силу того, что группа преобразований равномерно L_2-уст., существует $\beta \in U$ такое, что для любой точки $x \in X$ найдется $A_x \in \mathbf{A}$, для которого $ya \in xa\alpha_1$ при всех $y \in x\beta$ и $a \in A_x$. Тогда $X = \bigcup\limits_{x \in X} x\beta$. Выбираем конечное покрытие пространства $X = \bigcup\limits_{i=1}^{n} x_i \beta$. Это покрытие определяет некоторое окружение $\gamma \in U$. Рассмотрим множество $K = \bigcup\limits_{i=1}^{n} K_i$. Ясно, что $K \in \mathbf{K}$. Докажем, что $\gamma T \subset \alpha K$. Пусть $(x, y) \in \gamma$. Тогда найдется $1 \leqslant k \leqslant n$ такое, что $x \in x_k \beta$ и $y \in x_k \beta$. Значит, $xa \in x_k a\alpha_1$ и $ya \in x_k a \alpha_1$ при любом $a \in A_k$, то есть $(x, y) A_k \subset \alpha_1^2 \subset \alpha$. Далее,

$$(x, y)\, A_k K_k = (x, y)\, T \subset \alpha\, K_k \subset \alpha\, (\bigcup_{i=1}^{n} K_i) \subset \alpha\, K.$$

Так же, как теорема 3, доказывается

Теорема 9. *Если M — всюду плотное инвариантное подмножество X и группа преобразований (M, T, π) является L_4-устойчивой, то (X, T, π) — L_4-устойчива.*

Теорема 10. *Если X — компактное пространство, группа T коммутативна, а (X, T, π) — L_4-устойчива, то группа преобразований (X, T, π) почти периодична.*

Доказательство. Пусть $\alpha \in U$. Так как (X, T, π) является L_4-устойчивой, то существуют $A \in \mathbf{A}$, $K \in \mathbf{K}$ и $\beta \in U$, для которых $T = AK = KA$ и $\beta A \subset \alpha$. Для окружения $\beta \in U$ и $K \in \mathbf{K}$ в силу условия интегральной непрерывности найдем $\delta \in U$ такое, что $\delta K \subset \beta$, тогда $\delta KA = \delta T \subset \beta A \subset \alpha$. Таким образом, группа преобразований (X, T, π) равностепенно непрерывна и, следовательно [1], почти периодична.

Следствие 6. *Если X — компактное минимальное множество, T — коммутативная группа, а точка $x \in X$ такая, что траектория xT является L_4-устойчивой относительно группы преобразований (xT, T, π), то (X, T, π) — почти периодична.*

Замечание 3. Если группа преобразований (X, T, π) L_4-устойчива, то она L_3-устойчива. Обратное утверждение, как вытекает из теоремы 10 и примера Флойда [1], не имеет места; кроме того, из этого же примера ясно, что равномерная L_2-устойчивость не влечет L_4-уст.

Теорема 11. *Пусть X — компактное минимальное множество и φ — открытый гомоморфизм [1, 5] группы преобразований (X, T, π) на (Y, T, ρ), тогда:*

1. *Если точка $x \in X$ является L_1-устойчивой (L_2-устойчивой) относительно (X, T, π), то $x\varphi$ является L_1-устойчивой (L_2-устойчивой) относительно (Y, T, ρ).*
2. *Если группа преобразований (X, T, π) является L_3-устойчивой (L_4-устойчивой), то (Y, T, ρ) — L_3-устойчива (L_4-устойчива).*
3. *Если X — равномерно L_2-устойчиво относительно (X, T, π), то Y равномерно L_2-устойчиво относительно (Y, T, ρ).*

Доказательство. Предположим, что точка $x \in X$ — L_1-устойчива. Пусть U — база равномерной структуры в X, $\hat{U}$ — база равномерной структуры в Y и $\hat{\alpha} \in \hat{U}$. Для точки $x\varphi \in Y$ и $\hat{\alpha} \subset \hat{U}$ из условия

непрерывности φ найдем $\alpha \in U$ такое, что $x\alpha\varphi \subset x\varphi\hat{\alpha}$. Для выбранного $\alpha \in U$ и точки $x \in X$ найдем $\beta \in U$ и $K \in \mathbf{K}$ такие, что $x\beta T \subset x\alpha K$. Далее, по β и $x \in X$ из условия открытости отображения φ найдем окружение $\hat{\beta} \in \hat{U}$, для которого $x\beta\varphi \supset x\varphi\hat{\beta}$. Тогда $x\varphi\hat{\beta} T \subset x\varphi\alpha K$ и, следовательно, $x\varphi$ является L_1-устойчивой при (Y, T, ρ). Остальные утверждения теоремы доказываются аналогично.

Лемма 4. *Если компактное равномерное пространство X отображается непрерывно на равномерное пространство Y, то существует точка $x \in X$ такая, что $\operatorname{int} x\alpha\varphi \neq \Lambda$ для любого $\alpha \in U$.*

Доказательство. Допустим противное. Тогда какую бы точку $x \in X$ мы ни взяли, найдется $\alpha_x \in U$, для которого $\operatorname{int} x\alpha_x\varphi = \Lambda$. Пусть $\beta_x \in U$ и $\overline{x\beta_x} \subset x\alpha_x$. Тогда $X = \bigcup\limits_{x \in X} x\beta_x$. Так как X — компактно, то можно выделить конечное покрытие $x_1\beta_1, x_2\beta_2, \ldots, x_n\beta_n$. Тогда $Y = \bigcup\limits_{i=1}^{n} x_i\beta_i\varphi$ и, следовательно, $Y = \bigcup\limits_{i=1}^{n} \overline{x_i\beta_i}\varphi$. Очевидно, что найдется хотя бы одно множество $\overline{x_k\beta_k}\varphi$ $(1 \leqslant k \leqslant n)$, для которого $\operatorname{int} \overline{x_k\beta_k}\varphi \neq \Lambda$ и, тем более, $\operatorname{int} x_k\alpha_k\varphi \neq \Lambda$.

Теорема 12. *Если X — локально почти периодическое компактное пространство и φ — гомоморфизм группы преобразований (X, T, π) на (Y, T, ρ), где Y — метрическое пространство, то Y — локально почти периодично.*

Доказательство. Пусть $\hat{\alpha} \in \hat{U}$, где $\hat{U}$ — база равномерной структуры в Y. Выберем симметричное окружение $\hat{\alpha}_1 \in \hat{U}$ такое, что $\hat{\alpha}_1\hat{\alpha}_1 \subset \hat{\alpha}$. Из равномерной непрерывности φ найдется $\alpha \in U$, для которого $\alpha\varphi \subset \hat{\alpha}_1$. В силу леммы 4 существует точка $x \in X$ такая, что $\operatorname{int} x\gamma\varphi \neq \Lambda$ для любого $\gamma \in U$. Для $\alpha \in U$ и точки $x \in X$ найдутся $\beta \in U$ и $A \in \mathbf{A}$ такие, что $x\beta A \subset x\alpha$ и $\beta \subset \alpha$. Тогда $x\beta\varphi A = x\beta A\varphi \subset x\alpha\varphi \subset x\varphi\hat{\alpha}_1$. Но $\operatorname{int} x\beta\varphi \neq \Lambda$. Для открытого множества $\hat{V} \subset x\beta\varphi$ выполняется включение $\hat{V}A \subset x\varphi\hat{\alpha}_1$. Пусть $y \in \hat{V} \subset x\beta\varphi \subset x\alpha\varphi \subset x\varphi\hat{\alpha}_1$. Отсюда следует, что $x\varphi \in y\hat{\alpha}_1$ и $\hat{V}A \subset x\varphi\hat{\alpha}_1 \subset y\hat{\alpha}_1\hat{\alpha}_1 \subset y\hat{\alpha}$. Тогда по теореме 4.31 работы [1] получаем, что (Y, T, ρ) локально почти периодично.

Следствие. 7. *Если одна точка x компактного минимального множества X является L_2-устойчивой и φ — гомоморфизм (X, T, π) на (Y, T, ρ), где Y — метрическое пространство, то все точки Y будут L_2-устойчивыми относительно (Y, T, ρ).*

ЛИТЕРАТУРА

1. W. H. Gottschalk, G. A. Hedlund, Topological dynamics, Amer. Math. Soc. Coll. Publ., vol. 36 (1955).
2. R. Ellis, W. H. Gottschalk, Homomorphisms of transformation groups, Trans. Amer. Math. Soc. vol. 94 (1960), 258—271.
3. J. P. Clay, Proximity relations in transformation groups, Trans. Amer. Math. Soc., vol. 108 (1963), 88—96.
4. R. Ellis, Distal transformation groups, Pacific J. Math. vol. 8, N 3 (1958), 401—405.
5. Н. Бурбаки, Общая топология (Основные структуры), М., ГИФМЛ, 1958.
6. Б. З. Вулих, Введение в теорию полуупорядоченных пространств, М., ГИФМЛ, 1961.
7. E. E. Floyd, A nonhomogeneous minimal set, Bull. Amer. Math. Soc., 55 (1949), 957—960.

И. У. БРОНШТЕЙН, Н. И. ЗИЛБЕРБЕРГ

СТАБИЛИТАТЯ РЕЛАТИВ ДЕНСЭ ДУПЭ ЛЯПУНОВ

Резумат

Ын артикол се ынтродук ши се черчетязэ диферите ноциунь де стабилитате релатив денсэ дупэ Ляпунов ын системеле динамиче женерале. Се студиазэ релацииле динтре ачесте фелурь де стабилитате ши диферителе ноциунь де апроапе периодичитате, консидерате май ынаинте ын лукрэриле унуй шир де математичиень американь [1—4].

В. Н. ВИЗИТЕЙ

О РАЗЛОЖЕНИИ ПО КОРНЕВЫМ ВЕКТОРАМ СЛАБО ВОЗМУЩЕННОГО НОРМАЛЬНОГО ОПЕРАТОРА

В настоящей заметке обобщаются на случай нормальных операторов некоторые результаты статьи [1].

1. Пусть H—сепарабельное гильбертово пространство и A — вполне непрерывный оператор, действующий в H. Обозначим через $\{\mu_j(A)\}$ полную систему характеристических чисел оператора A, занумерованных в порядке неубывания модулей с учетом их кратностей. Через $n(r;A)(0<r<\infty)$ будем обозначать число характеристических чисел $\mu_j(A)$, содержащихся в круге $|\lambda|\leqslant r$. Систему всех различных характеристических чисел A, занумерованных в порядке неубывания модулей, обозначим $\left\{\widetilde{\mu_j}(A)\right\}$. Через $E_j(A)$ будем обозначать корневое подпространство оператора A, соответствующее характеристическому числу $\widetilde{\mu_j}(A)$.

Если G—нормальный вполне непрерывный оператор и φ_j $(j=1, 2, \ldots)$—нормированный собственный вектор G, отвечающий характеристическому числу $\mu_j(G)$, то положим для $\alpha>0$

$$G^\alpha=\sum_{j=1}^{\infty}\frac{1}{\mu_j^\alpha(G)}(\cdot,\varphi_j)\varphi_j,$$

где под μ^α понимается $|\mu|^\alpha \exp(i\arg\mu)$.

Через $R(A)$ и $Z(A)$ будем обозначать множество значений и ядро линейного оператора A: $R(A)=AH$, $Z(A)=\overset{-1}{A}(0)$.

Теорема 1. *Пусть G—нормальный вполне непрерывный оператор, оператор G^n для некоторого натурального n самосопряжен, $\alpha>0$ и выполнено хотя бы одно из двух следующих условий:*

а) $T=BG^\alpha$, где B—ограниченный оператор, и

$$\lim_{r\to\infty}\frac{n(r;G)}{r^\alpha}=0; \tag{1}$$

б) $T=BG^\alpha$, где B — вполне непрерывный оператор, и

$$\lim_{r\to\infty}\frac{n(r;G)}{r^\alpha}<\infty. \tag{2}$$

Если $A=(I+T)G$ и $\overline{R(A)}=H$, то существует такая подпоследовательность $\{m_j\}_0^\infty$ $(m_0=1)$ натурального ряда, что последовательность подпространств $\{M_j\}_1^\infty$, где

$$M_j=E_{m_{j-1}}(G)\dotplus\ldots\dotplus E_{m_j-1}(G)(j=1, 2, \ldots)$$

является базисом Бари[1]) *пространства H.*

[1]) Определение базиса Бари из подпространств см. в [2].

Доказательство. Положим $\mu_k=\mu_k(G)$ и $\Delta_k=|\mu_{k+1}|-|\mu_k|$ $(k=1, 2, \ldots)$. Если $\alpha\leqslant 1$, то, как легко видеть,

$$\varliminf_{k\to\infty}\Delta_k|\mu_k|^{\alpha-1}\geqslant\varliminf_{n\to\infty}n^{-1}\sum_{k=1}^{n}\Delta_k|\mu_k|^{\alpha-1}=\alpha^{-1}\varliminf_{r\to\infty}r^\alpha[n(r;G)]^{-1}.$$

Аналогично при $\alpha>1$

$$\varliminf_{k\to\infty}\Delta_k|\mu_{k+1}|^{\alpha-1}\geqslant\alpha^{-1}\varliminf_{r\to\infty}r^\alpha[n(r;G)]^{-1}.$$

Следовательно, существует такая подпоследовательность $\{k_j\}$ натурального ряда, что
$\lim_{j\to\infty}\Delta_{k_j}|\mu_{k_j}|^{\alpha-1}>0$, если $\alpha\leqslant 1$, и $\lim_{j\to\infty}\Delta_{k_j}|\mu_{k_j+1}|^{\alpha-1}>0$, если $\alpha>1$, а при условии (1), более того,

$$\lim_{j\to\infty}\Delta_{k_j}|\mu_{k_j}|^{\alpha-1}=\infty, \text{ если } \alpha\leqslant 1, \text{ и } \lim_{j\to\infty}\Delta_{k_j}|\mu_{k_j+1}|^{\alpha-1}=\infty,$$

если $\alpha>1$.

Положим

$$\rho_j=\frac{1}{2}\left(|\mu_{k_j+1}|+|\mu_{k_j}|\right) \text{ и } \Gamma_j=\{\lambda: |\lambda|=\rho_j\}\ (j=1, 2\ \ldots).$$

Существует последовательность чисел $\delta_j(>0)$, таких, что

$$\rho_j-\delta_j=a_j\geqslant|\mu_{k_j}|;\ \rho_j+\delta_j=b_j\leqslant|\mu_{k_j+1}|;\ \delta_j\leqslant\frac{1}{2}\rho_j\ (j=1, 2, \ldots)\quad(3)$$

$$\sup_j\rho_j^{1-\alpha}\delta_j^{-1}<\infty,\quad(4)$$

а если выполнено (1), то, более того,

$$\lim_{j\to\infty}\rho_j^{1-\alpha}\delta_j^{-1}=0.\quad(5)$$

Установим теперь оценку нормы оператора $D_\lambda=G^\alpha(I-\lambda G)^{-1}$ для точек $\lambda\in\Gamma_j$. Положим

$$\beta_k=-\frac{k\pi}{n}\ (k=0, 1, \ldots, 2n-1);$$

$$\Gamma_{jk}=\left\{\lambda: |\lambda|=\rho_j, |\arg\lambda-\beta_k|\leqslant\frac{\pi}{2n}\right\},$$

$$u_{jk}(\lambda)=\rho_j^{1-\alpha}|\lambda-a_je^{i\beta_k}|\ (k=0, 1, \ldots, 2n-1;\ j=1, 2, \ldots).$$

Так как все числа $\mu_m(m=1, 2, \ldots)$ находятся на лучах $\arg\mu=\beta_k$ $(k=0, 1, \ldots, 2n-1)$ и так как в кольце $a_j<|\mu|<b_j$ и в некотором круге $|\mu|<\delta(\delta>0)$ нет чисел μ_m, то

$$\|D_\lambda\|=\max_m(|\mu_m|^{1-\alpha}|\mu_m-\lambda|^{-1})=\max_\mu f_\lambda(\mu),$$

где $f_\lambda(\mu)=|\mu|^{1-\alpha}|\mu-\lambda|^{-1}$, а максимум при $\lambda\in\Gamma_{jk}$ распространяется на все значения μ, лежащие на луче $\arg\mu=\beta_k$ и удовлетворяющие одному из условий: $\delta\leqslant|\mu|<a_j$ или $|\mu|\geqslant b_j$. Отсюда нетрудно получить, что

$$\|D_\lambda\|\leqslant c(\alpha)\max(\rho_j^{-1}, u_{jk}(\lambda))\quad(\lambda\in\Gamma_{jk}).\quad(6)$$

Покажем теперь, что для любого вполне непрерывного оператора существуют зависящие от α число c и сходящаяся к нулю последовательность положительных чисел $\{\varepsilon_j\}_1^\infty$, такие, что

$$\|VD_\lambda\|\leqslant\varepsilon_ju_{jk}(\lambda)+c\rho_j^{-1}(\lambda\in\Gamma_{jk};\ k=0, 1, \ldots, 2n-1;\ j=1, 2, \ldots).\quad(7)$$

В силу оценки (6) достаточно установить (7) для конечномерного оператора V, а этот случай, очевидно, сводится к случаю одномерного оператора $V=(\cdot, g)\psi$ $(g, \psi\in H)$. Так как при этом

$$\|VD_\lambda\|=\|D_\lambda^*g\|\,\|\psi\|$$

и система собственных векторов оператора G полна в H, то в силу (6) можно ограничиться рассмотрением случая, когда $Gg=\lambda_0g$ $(\lambda_0\neq 0)$ и, стало быть,

$$\|D_\lambda^*g\|=\frac{|\lambda_0|^\alpha}{|1-\lambda\lambda_0|}.$$

Таким образом, соотношение (7) доказано.

Положим $I-(I+T)^{-1}=S$, тогда $S(I-\lambda G)=B_1D_\lambda$, где B_1 — ограниченный оператор, а если выполнено условие б), то B_1—вполне непрерывный оператор. Следовательно,

$$\|S(I-\lambda G)^{-1}\|\leqslant c(\alpha)\max(\rho_j^{-1}, u_{jk}(\lambda))\ (\lambda\in\Gamma_{jk}),\quad(8)$$

а при условии б)

$$\|S(I-\lambda G)^{-1}\|\leqslant\varepsilon_ju_{jk}(\lambda)+c\rho_j^{-1}(\lambda\in\Gamma_{jk}, \varepsilon_j\to 0).\quad(9)$$

Так как $u_{jk}(\lambda)\leqslant\rho_j^{1-\alpha}\delta_j^{-1}(\lambda\in\Gamma_{jk})$, то в силу (4) и (5) из (8) и (9) следует, что

$$\lim_{j\to\infty}\max_{\lambda\in\Gamma_j}\|S(I-\lambda G)^{-1}\|=0$$

и поэтому можно считать, что для всех $\lambda\in\Gamma_j$ операторы $I-S-\lambda G$, $I-\lambda A$ обратимы и

$$\|(I-S-\lambda G)^{-1}\|\leqslant 2\|(I-\lambda G)^{-1}\|\quad(\lambda\in\Gamma_j, j=1, 2, \ldots).\quad(10)$$

Рассмотрим операторы

$$\widetilde{P}_j=\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_j}\lambda^{-1}(I-\lambda G)^{-1}d\lambda,\ \widetilde{Q}_j=\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_j}\lambda^{-1}(I-\lambda A)^{-1}d\lambda (j=1, 2, \ldots),$$

$$P_j=\widetilde{P}_{j-1}-\widetilde{P}_j,\ Q_j=\widetilde{Q}_{j-1}-\widetilde{Q}_j(j=2, 3, \ldots),\ P_1=I-\widetilde{P}_1,\ Q_1=I-\widetilde{Q}_1.$$

Как известно (см., например, [3], гл. IX), операторы Q_j (P_j) $(j=1, 2, \ldots)$ являются проекторами (ортогональными проекторами), причем $Q_j(P_j)$ $(j=2, 3, \ldots)$ проектирует H на прямую (ортогональную) сумму корневых (собственных) подпространств оператора A (G), отвечающих его характеристическим числам, лежащим в кольце $\rho_{j-1}<\mu<\rho_j$, а $Q_1(P_1)$—на сумму этих подпространств, отвечающих его характеристическим числам, лежащим в круге $|\mu|<\rho_1$. Так как последовательность $\widetilde{P}_j$ сильно сходится к нулю и T вполне непрерывный, то

$$\lim_{j\to\infty}\|\widetilde{P}_jT\|=0.$$

Для доказательства теоремы достаточно установить соотношение

$$\lim_{j\to\infty}\|\widetilde{Q}_j(I+T)-\widetilde{P}_j\|=0.$$

В самом деле, тогда из (11) и (12) следует

$$\lim_{j\to\infty} \|\widetilde{Q}_j - \widetilde{P}_j\| = 0.$$

Если N_j — ортогональный проектор на $R(Q_j)$, то, как известно,

$$\|N_j - P_j\| \leqslant \|Q_j - P_j\|.$$

Переходя к некоторой подпоследовательности и не меняя обозначений, получим

$$\sum_{j=1}^{\infty} \|N_j-P_j\|^2 \leqslant \sum_{j=1}^{\infty} \|Q_j - P_i\|^2 \leqslant 2\sum_{j=1}^{\infty} \|\widetilde{Q}_j - \widetilde{P}_j\|^2 < 1,$$

и поэтому (см. [2]) последовательность подпространств $\{R(Q_j)\}$ является базисом Бари пространства H.

Перейдем к доказательству соотношения (12). Очевидно,

$$\widetilde{Q}_j(I+T) - \widetilde{P}_j = \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_j} \lambda^{-1}(I-S-\lambda G)^{-1} S (I-\lambda G)^{-1} d\lambda$$

и, в силу (10),

$$\|\widetilde{Q}_j(I+T) - \widetilde{P}_j\| \leqslant \frac{1}{\pi\rho_j}\sum_{k=0}^{2n-1}\int_{\Gamma_{jk}} \|(I-\lambda G)^{-1}\| \, \|S(I-\lambda G)^{-1}\| \, |d\lambda| . \quad (13)$$

Очевидно, для $\lambda\in\Gamma_{jk}$

$$\|(I-\lambda G)^{-1}\| \leqslant |\lambda|^{-1}\left(\min_j|\lambda^{-1}-\mu_j^{-1}|\right)^{-1} \leqslant \frac{3}{2\sqrt{2}}\rho_j|\lambda - a_j e^{i\beta_k}|^{-1}. \quad (14)$$

Как легко видеть, в силу оценок (8), (9), (13) и (14) для доказательства (12) достаточно установить, что интегралы

$$J_{jk} = \frac{1}{\rho_j}\int_{\Gamma_{jk}} |\lambda - a_j e^{i\beta_k}|^{-1}|d\lambda| \quad (k=0,1,\dots,2n-1)$$

стремятся к нулю при $j\to\infty$ и что интегралы

$$\widetilde{J}_{jk} = \int_{\Gamma_{jk}} |\lambda - a_j e^{i\beta_k}|^{-1} u_{jk}(\lambda) \, |d\lambda| \quad (k=0,1,\dots,2n-1;\ j=1,2,\dots)$$

ограничены, а если выполнено условие (1), то $\lim\limits_{j\to\infty}\widetilde{J}_{jk}=0$ ($k=0,1,\dots,2n-1$). Так как $\widetilde{J}_{jk}=\widetilde{J}_{j0}$ и $J_{jk}=J_{j0}$ ($k=1,2,\dots,2n-1$; $j=1,2,\dots$), то будем рассматривать далее лишь $\widetilde{J}_{j0}$ и J_{j0}.

Полагая $\sigma = Re\lambda$ и $\sigma_j = \rho_j\cos\frac{\pi}{2n}$, получим

$$\widetilde{J}_{j0} = 2\rho_j^{2-\alpha}\int_{\sigma_j}^{\rho_j}\left(a_j^2+\rho_j^2-2a_j\sigma\right)^{-1}\left(\rho_j^2-\sigma^2\right)^{-1/2}d\sigma \leqslant 2\pi\rho_j^{1-\alpha}\delta_j^{-1}. \quad (15)$$

Согласно (4) и (5) отсюда следует, что $\sup \widetilde{J}_{j0}<\infty$, а если выполнено условие (1), то $\lim\limits_{j\to\infty}\widetilde{J}_{j0}=0$.

Перейдем к оценке J_{j0}. Заметим, что при выборе чисел δ_j можно предполагать, что кроме условий (3)—(5) выполняются также условия

$$\rho_j^{\beta}\delta_j^{-1}\geqslant\sqrt{2}\quad(j=1,2,\dots),$$

где β — число, удовлетворяющее неравенствам

$$1-\alpha<\beta<\min\left(2-\alpha,\ 1-\frac{1}{2}\alpha\right).$$

Очевидно,

$$J_{j0}=\rho_j^{-1}\int_{\Gamma_{j0}}|\lambda-a_j|^{-1}|d\lambda| =$$

$$=2\int_{\sigma_j}^{\rho_j}|\sigma+i(\rho_j^2-\sigma^2)^{1/2}-a_j|^{-1}(\rho_j^2-\sigma^2)^{-1/2}d\sigma.$$

Разобьем промежуток интегрирования $[\sigma_j,\rho_j]$ на две части точкой τ_j:

$$\tau_j=\frac{a_j^2+\rho_j^2-\rho_j^{2\beta}}{2a_j}.$$

Тогда

$$X_j=\int_{\sigma_j}^{\tau_j}|\sigma+i(\rho_j^2-\sigma^2)^{1/2}-a_j|^{-1}(\rho_j^2-\sigma^2)^{-1/2}d\sigma\leqslant\frac{1}{2\rho_j}\ln\frac{\rho_j-\tau_j}{\rho_j+\tau_j}.$$

Так как

$$\rho_j-\tau_j\geqslant\frac{1}{4}\rho_j^{2\beta-1},$$

то

$$X_j<\frac{1}{2\rho_j}[\ln 8+(2-2\beta)\ln\rho_j],$$

т. е.

$$\lim_{j\to\infty}X_j=0.$$

Для оценки интеграла с пределами τ_j и ρ_j воспользуемся тем, что

$$|\sigma+i(\rho_j^2-\sigma^2)^{1/2}-a_j|\leqslant\rho_j^{\beta}$$

при $\rho_j\geqslant\sigma\geqslant\sigma_j$ и, следовательно,

$$Y_j=\int_{\tau_j}^{\rho_j}|\sigma+i(\rho_j^2-\sigma^2)^{1/2}-a_j|^{-1}(\rho_j^2-\sigma^2)^{-1/2}d\sigma\leqslant$$

$$\leqslant\rho_j^{\beta}\int_{\tau_j}^{\rho_j}(a_j^2+\rho_j^2-2a_j\sigma)^{-1}(\rho_j^2-\sigma^2)^{-1/2}d\sigma.$$

В силу (15)

$$Y_j<\rho_j^{\beta}\frac{\pi}{\rho_j^2-a_j^2}<\pi\rho_j^{1-\alpha}\delta_j^{-1}\rho_j^{\beta+\alpha-2}.$$

В силу (4) и (6) отсюда следует, что $\lim\limits_{j\to\infty}Y_j=0$.

Таким образом, соотношение $\lim\limits_{j\to\infty} J_{j0}=0$ установлено, что и завершает доказательство теоремы.

Приведем несколько замечаний к теореме 1.

1°. В условиях теоремы 1 можно заменить BG^α на $G^\alpha B$.

2°. В условиях теоремы 1 можно вместо $A=(I+T)G$ положить $A=G(I+T)$; при этом условие $\overline{R(A)}=H$ надо заменить условием $Z(A)=0$.

3°. В условиях (1) и (2) можно заменить $n(r;G)$ на $\tilde{n}(r;G)$ — число характеристических чисел $\mu_j(G)$, лежащих в круге $|\mu|\leqslant r$.

4°. Условие (1) можно заменить условием

$$\varlimsup_{j\to\infty} |\mu_{j+1}(G)-\mu_j(G)|\,|\mu_j(G)|^{\alpha-1}=\infty,$$

а условие (2) — условием

$$\varlimsup_{j\to\infty} |\mu_{j+1}(G)-\mu_j(G)|\,|\mu_j(G)|^{\alpha-1}>0.$$

5°. Если выполнено условие

$$\varlimsup_{j\to\infty} |\mu_{j+1}(G)-\mu_j(G)|\,|\mu_j(G)|^{-1}>0,$$

то теорема 1 справедлива для любого вполне непрерывного оператора T.

6°. Условие $(G^n)^*=G^n$ можно заменить следующим: все числа $\mu_j(G)$ находятся на конечном числе лучей, исходящих из одной точки a.

7°. Условие $(G^n)^*=G^n$ в теореме 1 при $\alpha<1$ можно отбросить, если заменить BG^α на $BG^{2\alpha}$.

2. Теорема 2. *Пусть G — нормальный оператор Гильберта—Шмидта и все характеристические числа G, начиная с некоторого номера j_0, простые. Если при некотором $\alpha>0$*[1]

$$\sum_{j=j_0}^{\infty} (\rho_j^{\alpha-1}\delta_j)^{-2}<\infty, \tag{16}$$

где

$$\rho_j=|\mu_j(G)| \quad \text{и} \quad \delta_j=\inf_{k\neq j}|\mu_j(G)-\mu_k(G)|,$$

и если $T=BG^\alpha$, где B ограничен, $A=(I+T)G$ и $\overline{R(A)}=H$, то у оператора A также все характеристические числа, начиная с некоторого, простые, и система корневых векторов оператора A (среди которых лишь конечное число не являются собственными) образует базис Бари[2] *пространства H.*

---

[1] Заметим, что при $\alpha\leqslant 1$ из (16) следует, что G является оператором Гильберта—Шмидта.

[2] Определение базиса Бари см. в [5].

Доказательство. Пусть $\gamma_j=\{\lambda: |\lambda-\mu_j(G)|=\frac{\delta_j}{2}\}$. Рассуждая, как в доказательстве теоремы 1, получим

$$\|Q_j(I+T)-P_j\|\leqslant c\max_{\lambda\in\gamma_j}\|S(I-\lambda G)^{-1}\|,$$

где $S=I-(I+T)^{-1}$ и

$$P_j=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma_j}\lambda^{-1}(I-\lambda G)^{-1}d\lambda,\quad Q_j=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma_j}\lambda^{-1}(I-\lambda A)^{-1}d\lambda.$$

Нетрудно убедиться, что для точек $\lambda\in\gamma_j$ имеет место неравенство

$$\|S(I-\lambda G)^{-1}\|\leqslant c\max(\rho_j^{-1},\ \rho_j^{1-\alpha}\delta_j),$$

и поэтому из соотношения (16) и из того, что G является оператором Гильберта—Шмидта, следует

$$\sum_{j=j_0}^{\infty}\|Q_j(I+T)-P_j\|^2<\infty. \tag{17}$$

Очевидно,

$$\sum_{j=j_0}^{\infty}\rho_j^{-2\alpha}<\sum_{j=j_0}^{\infty}\rho_j^{2-2\alpha}\delta_j^{-2}<\infty.$$

Из последнего неравенства нетрудно получить, что оператор $T=BG^\alpha$ является оператором Гильберта—Шмидта. Так как $\{P_j\}_{j_0}^{\infty}$ — система ортогональных между собой проекторов, то

$$\sum_{j=j_0}^{\infty}\|P_jT\|^2<\infty. \tag{18}$$

Из неравенств (17) и (18) следует

$$\sum_{j=j_0}^{\infty}\|Q_j-P_j\|^2<\infty, \tag{19}$$

а стало быть, и

$$\sum_{j=j_0}^{\infty}\|N_j-P_j\|^2<\infty,$$

где N_j — ортогональный проектор на $R(Q_j)$. В силу (19) проекторы Q_j, начиная с некоторого номера j_1, являются одномерными вместе с P_j. Обозначим через φ_j и ψ_j $(j\geqslant j_1)$ нормированные векторы из $R(P_j)$ и $R(Q_j)$, выбранные так, что $(\varphi_j,\psi_j)>0$, $(j\geqslant j_1)$. Очевидно, векторы φ_j и ψ_j являются собственными векторами операторов G и A соответственно. Нетрудно убедиться, что

$$\sum_{j\geqslant j_1}^{\infty}\|\varphi_j-\psi_j\|^2\leqslant 2\sum_{j\geqslant j_1}^{\infty}\|N_j-P_j\|^2<\infty. \tag{20}$$

Так как система корневых векторов всякого вполне непрерывного оператора минимальна, то в силу теоремы Н. К. Бари([4], теорема 14) и соотношения (20) для доказательства теоремы достаточно установить полноту системы корневых векторов оператора A. Обозначим через L линейную замкнутую оболочку этой системы и через M — ортогональное дополнение к L в H. Из соотношения (20) нетрудно заключить, что подпространство M конечномерно. Допустим, что $\dim M>0$, и пусть $\widehat{A}^*$ — оператор, индуцированный в подпространстве M оператором A^*. Легко убедиться, что оператор A^* не имеет ни одного собственного числа, отличного от нуля, и, стало быть, существует ненулевой вектор $g \in M$ такой, что $A^*g = 0$. Вектор g ортогонален к $R(A)$, что невозможно, так как $\overline{R(A)} = H$.

Теорема доказана.

Отметим, что для случая $\alpha = 1$ теорему 2 можно вывести из результатов Дж. Шварца [6].

Автор выражает благодарность А. С. Маркусу за ценные советы.

ЛИТЕРАТУРА

1. А. С. Маркус, О разложении по корневым векторам слабо возмущенного самосопряженного оператора, ДАН СССР, 142 (1962), № 3, 538—541.
2. А. С. Маркус, О базисе из корневых векторов диссипативного оператора, ДАН СССР, 132 (1960), № 3, 524—527.
3. Ф. Рисс и Б. С.-Надь, Лекции по функциональному анализу, М., ИЛ, 1954.
4. Н. К. Бари, Биортогональные системы и базисы в гильбертовом пространстве, Уч. зап. МГУ, вып. 148, 4 (1951), 69—107.
5. М. Г. Крейн, О базисах Бари пространства Гильберта, Усп. матем. наук, 12, вып. 3 (1957), 333—341.
6. J. Schwartz, Perturbations of spectral operators and applications I. Bounded perturbations, Pacific. J. Math., 4 (1954), 415—458.

В. Н. ВИЗИТЕЙ

ДЕСПРЕ ДЕЗВОЛТАРЯ ЫН СЕРИЕ ДУПЭ ВЕКТОРИЙ ПРОПРИЙ ШИ АСОЧИАЦЬ АЙ ОПЕРАТОРУЛУЙ НОРМАЛ СЛАБ ПЕРТУРБАТ

Резумат

Се стабилеск кондицииле, ын каре дин векторий проприй ши асочиаць ай операторулуй нормал слаб пертурбат се поате конституи о базэ сау о базэ дин субспаций але спациулуй Хилберт. Резултатул принчипал ал артиколулуй констэ ын женерализаря уней теореме дин [1].

Известия Академии наук Молдавской ССР № 6, 1964

Л. С. ГОЛЬДЕНШТЕЙН

О МНОГОМЕРНЫХ ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЯХ ТИПА ВИНЕРА—ХОПФА

В настоящей статье дается подробное изложение (с рядом дополнений) результатов о многомерном интегральном уравнении Винера—Хопфа, парных уравнениях и транспонированных к ним, сформулированных в [1]. Попутно получаются и все результаты заметки [2], относящиеся к указанным уравнениям.

§ 1. Многомерное интегральное уравнение Винера—Хопфа

1. Обозначим через $t = (t_0, t_1, \ldots, t_n)$ векторы $n+1$-мерного ($n \geqslant 1$) эвклидова пространства E и через E^+ (E^-) — полупространство E, определенное неравенством $t_0 \geqslant 0$ ($t_0 \leqslant 0$). Пусть G — одно из множеств E, E^+, E^-.

Через $L_p(G)$ ($1 \leqslant p < \infty$) обозначим банахово пространство, векторами которого являются комплекснозначные функции $x(t)$ ($t \in G$), для которых

$$\| x \| = \left(\int_G | x(t) |^p \, dt \right)^{1/p} < \infty.$$

Как известно, $L_1(E)$ является нормированным кольцом с умножением, определенным сверткой

$$k_1 * k_2 = \int_E k_1(t - s)\, k_2(s) ds.$$

Нормированное кольцо, полученное путем формального присоединения единицы e к $L_1(E)$, обозначим через $\widetilde{L}_1$. Таким образом, элементы $\widetilde{L}_1$ имеют вид $\mu e + x(t)$, где e — присоединенная единица, μ — комплексное число и $x(t) \in L_1(E)$. Для каждого $k(t) = \mu e + x(t) \in \widetilde{L}_1$ положим

$$K(\lambda) = \mu + \int_E x(t) e^{i(\lambda, t)} dt \quad (\lambda \in E).$$

Бикомпакт максимальных идеалов кольца $\widetilde{L}_1$ гомеоморфен пространству E с присоединенной бесконечно удаленной точкой (см. [3] § 17).

Если $x(t) \in L_1(E^+)$, то отображение

$$x(t) \to \hat{x}(t) = \begin{cases} x(t) \text{ при } t \in E^+ \\ 0 \text{ при } t \in E \setminus E^+ \end{cases}$$

осуществляет изометрическое вложение $L_1(E^+)$ в $L_1(E)$. Через $\widetilde{L}_1^+$ обозначим подкольцо кольца L_1, полученное присоединением единицы к подкольцу $L_1(E^+)$ кольца $L_1(E)$. Бикомпакт максимальных идеалов кольца $\widetilde{L}_1^+$ гомеоморфен подмножеству $n+1$-мерного унитарного пространства векторов $\lambda=(\lambda_0, \lambda_1, \ldots, \lambda_n)$, определяемому неравенствами $\mathrm{Im}\lambda_0 \geqslant 0$ и $-\infty<\lambda_j\leqslant\infty$ $(j=1,2, \ldots, n)$, к которому присоединена бесконечно удаленная точка.

Аналогичным образом строится подкольцо $\widetilde{L}_1^-$ кольца $\widetilde{L}_1$.

1°. *Пусть* $k(t) \in L_1(E)$ *и*

$$1-K(\lambda)=1-\int_E k(t)\, e^{i(\lambda, t)}\, dt \neq 0 \quad (\lambda \in E).$$

Тогда функция $1-K(\lambda)$ *допускает факторизацию*

$$1-K(\lambda)=G_-(\lambda)\, G_+(\lambda), \tag{1.1}$$

причем множители $G_\pm(\lambda)$ *представимы в виде*

$$G_\pm(\lambda)=1+\int_{E^\pm} g_\pm(t) e^{i(\lambda, t)}\, dt \quad (g_\pm(t) \in L_1(E^\pm)). \tag{1.2}$$

К такому же виду приводятся функции $G_\pm^{-1}(\lambda)$.

Действительно, по любому замкнутому пути в пространстве E функция $\arg(1-K(\lambda))$ не получает приращения, поэтому на основании теоремы Г. Е. Шилова [3] функция $\ln(1-K(\lambda))$ порождается некоторым элементом $l(t)$ кольца $\widetilde{L}_1$:

$$\ln(1-K(\lambda))=\int_E l(t) e^{i(\lambda, t)}\, dt \quad (l(t) \in L_1(E)).$$

Из этого равенства, вводя обозначения

$$G_\pm(\lambda)=\exp \int_{E^\pm} l(t) e^{i(\lambda, t)}\, dt, \tag{1.3}$$

получаем факторизацию (1.1).

Легко заметить, что функции $G_\pm(\lambda)$ также порождаются некоторыми элементами колец $\widetilde{L}_1^\pm$:

$$G_+(\lambda)=\mu_1+\int_{E^+} g_+(t) e^{i(\lambda, t)}\, dt, \quad G_-(\lambda)=\mu_2+\int_{E^-} g_-(t) e^{i(\lambda, t)} dt.$$

Так как $\lim\limits_{\lambda\to\infty} G_\pm(\lambda)=1$, то $\mu_1=\mu_2=1$.

Заменив в (1.3) функцию $l(t)$ на $-l(t)$, находим, что и функции $G_\pm^{-1}(\lambda)$ могут быть приведены к виду (1.2).

2. Введем операторы сдвига $V_{j,s}$ $(j=0,1, \ldots, n;\ -\infty<s<\infty)$, определенные в $L_p(E^+)$ равенствами:

$$V_{0,s} f(t)=\begin{cases} 0 & \text{при } t_0<s \\ f(t_0-s, t_1, \ldots, t_n) & \text{при } t_0 \geqslant s, \end{cases}$$

$$V_{j,s} f(t)=f(t_0, \ldots, t_{j-1}, t_j-s, t_{j+1}, \ldots, t_n) \quad (j=1,2, \ldots, n). \tag{1.4}$$

При каждом j $(j=1, 2, \ldots, n)$ операторы $V_{j,s}$ $(-\infty<s<\infty)$ образуют однопараметрическую сильно непрерывную группу изометрических операторов. Действительно, из (1.4) легко получить равенства $V_{j,s_1} V_{j,s_2}=V_{j,s_1+s_2}$ и $\|V_{j,s} f\|=\|f\|$, а равенство $\lim\limits_{s\to 0}\|V_{j,s}f-f\|=0$,

т. е. сильная непрерывность следует из того, что множество финитных непрерывных функций плотно в $L_p(E^+)$.

Операторы $V_{0,s}$ $(0\leqslant s<\infty)$ образуют однопараметрическую сильно непрерывную полугруппу изометрических операторов. Операторы $V_{0,-s}$ $(0\leqslant s<\infty)$, определенные равенством

$$V_{0,-s} f(t)=f(t_0+s, t_1, \ldots, t_n) \quad (f(t) \in L_p(E^+)),$$

также образуют однопараметрическую сильно непрерывную полугруппу изометрических операторов. Очевидно, что $V_{0,-s} \cdot V_{0,s}=I$, но $V_{0,s} V_{0,-s} \neq I$.

Для каждого $s=(s_0, s_1, \ldots, s_n) \in E$ введем обозначение $V_s = V_{0,s_0} V_{1,s_1} \ldots V_{n,s_n}$. Легко видеть, что если $k(t) \in L_1(E)$ и оператор К задается формулой[1]

$$\mathrm{K}f=\int_E k(s) V_s f(t) ds,$$

то

$$\mathrm{K}f=\int_{E^+} k(t-s) f(s)\, ds.$$

Если

$$\mathrm{K}_1=\int_E k_1(s) V_s ds \quad \text{и} \quad \mathrm{K}_2=\int_E k_2(\tau) V_\tau d\tau$$

и либо $k_1(t)=0$ $(t \in E^+)$, либо $k_2(t)=0$ $(t \in E^-)$, то

$$\mathrm{K}_1\mathrm{K}_2=\int_E k_1(s) V_s ds \int_E k_2(\tau) V_\tau d\tau=\iint_{E\times E} k_1(s) k_2(\tau) V_{s+\tau} ds d\tau=$$

$$=\int_E \left(\int_E k_1(s) k_2(t-s) ds\right) V_t dt=\int_E k(t) V_t dt,$$

где $k(t)=\int_E k_1(s) k_2(t-s)\, ds$.

3. Лемма 1.1. *Пусть* U_t $(U_0=I;\ 0 \leqslant t<\infty)$ — *однопараметрическая сильно непрерывная полугруппа изометрических операторов, действующих в банаховом пространстве* B. *Если вся мнимая ось принадлежит спектру инфинитезимального оператора* A *полугруппы* U_t, *то для любого* $\mu=i\lambda$ $(-\infty<\lambda<\infty)$ *найдется последовательность ортов* $\{f_m\}_1^\infty$ *такая, что*

$$U_t f_m=e^{i\lambda t} f_m+\varepsilon_m(t) \quad (0 \leqslant t<\infty),$$

где $\|\varepsilon_m(t)\| \to 0$ *при* $m\to\infty$ *равномерно на каждом ограниченном отрезке* $[0, T]$.

Доказательство. Пусть $\{f_m\}_1^\infty$ — последовательность ортов, для которой

$$Af_m=\mu f_m+\varepsilon_m, \quad \lim_{m\to\infty}\|\varepsilon_m\|=0.$$

[1] Роль такого представления оператора К в теории одномерных интегральных уравнений Винера—Хопфа впервые выявил И. Ц. Гохберг [4].

Как известно (см. [5], стр. 322),

$$\int\limits_0^\tau U_t A f_m\, dt = U_\tau f_m - f_m,$$

то есть

$$\frac{dU_t f_m}{dt} = U_t A f_m = \mu U_t f_m + U_t \varepsilon_m.$$

Единственным решением уравнения

$$\frac{d\psi}{dt} = \mu\psi + U_t\varepsilon_m,$$

удовлетворяющим условию $\psi(0) = f_m$, является вектор-функция

$$\psi = e^{\mu t} f_m + e^{\mu t}\int\limits_0^t e^{-\mu\tau} U_\tau \varepsilon_m d\tau.$$

Следовательно,

$$U_t f_m = e^{i\lambda t} f_m + \varepsilon_m(t),\quad \varepsilon_m(t) = e^{i\lambda t}\int\limits_0^t e^{-i\lambda\tau} U_\tau \varepsilon_m d\tau.$$

Легко заметить, что $\|\varepsilon_m(t)\| \leqslant \|\varepsilon_m\| \cdot t$, откуда следует, что $\|\varepsilon_m(t)\| \to 0$ при $m\to\infty$ равномерно на каждом ограниченном отрезке $[0, T]$.

Лемма 1. 2. *Если $k(t) \in L_1(E)$, то для каждого $\lambda^{(0)} = (\lambda_0^{(0)}, \lambda_1^{(0)}, \ldots \lambda_n^{(0)}) \in E$ найдется последовательность ортов $F_m \in L_p(E^+)$ $(m=1, 2, \ldots)$, такая, что для любого комплексного числа ω*

$$\lim_{m\to\infty} \|(\omega I - K) F_m\| = |\omega - K(\lambda^{(0)})|.$$

Доказательство. Без ограничения общности можно считать, что функция $k(t)$ — финитна.

В пространстве $L_p(-\infty, \infty)$ $(p\geqslant 1)$ комплекснозначных функций $f(t)$ $(-\infty < t < \infty)$ рассмотрим операторы сдвига U_s $(-\infty < s < \infty)$, определенные равенством $U_s f(t) = f(t-s)$. В силу предыдущей леммы найдется последовательность ортов $f_m^{(l)}(t)$ $(m=1, 2, \ldots)$ такая, что

$$U_s\left[f_m^{(l)}(t)\right] = e^{i\lambda_l^{(0)} s} f_m^{(l)}(t) + \varepsilon_{m,l}(s) \quad (l = 1, 2, \ldots, n;\ 0 \leqslant s < \infty),$$

где $\|\varepsilon_{m,l}(s)\| \to 0$ при $m\to\infty$ равномерно на любом конечном отрезке положительной полуоси. Нетрудно проверить, что последнее утверждение сохраняет силу и на отрицательной полуоси.

В пространстве $L_p(0, \infty)$ $(p\geqslant 1)$ комплекснозначных функций $f(t)$ $(0 \leqslant t < \infty)$ рассмотрим операторы сдвига W_s $(0 \leqslant s < \infty)$, определенные равенством

$$W_s f(t) = \begin{cases} f(t-s) & \text{при } t \geqslant s \\ 0 & \text{при } t < s. \end{cases}$$

В силу предыдущей леммы найдется последовательность ортов $f_m^{(0)}(t)$ $(m = 1, 2, \ldots)$ такая, что

$$W_s\left[f_m^{(0)}(t)\right] = e^{i\lambda_0^{(0)} s} f_m^{(0)}(t) + \varepsilon_{m,0}(s) \quad (0 \leqslant s < \infty), \tag{1.5}$$

где $\|\varepsilon_{m,0}(s)\| \to 0$ при $m\to\infty$ равномерно на любом конечном отрезке положительной полуоси. Введя также операторы W_{-s} $(0 \leqslant s < \infty)$, определенные в $L_p(0, \infty)$ равенством $W_{-s} f(t) = f(t+s)$, находим, что равенство (1.5) сохраняет силу и на отрицательной полуоси.

Пусть $t = (t_0, t_1, \ldots, t_n) \in E^+$, $s = (s_0, s_1, \ldots, s_n) \in E$, $F_m(t) = \prod_{j=0}^{n} f_m^{(j)}(t_j)$ $(\in L_p(E^+))$ и $V_s = V_{0, s_0} V_{1, s_1} \ldots V_{n, s_n}$ — оператор, рассмотренный в п. 2. Легко заметить, что $\|F_m\| = 1$ $(m = 1, 2, \ldots)$ и

$$V_s F_m(t) = (W_{s_0} f_m^{(0)}(t_0))\,(U_{s_1} f_m^{(1)}(t_1)) \ldots (U_{s_n} f_m^{(n)}(t_n)).$$

Отсюда

$$(\omega I - K) F_m = \omega F_m - \int\limits_E k(s)\, e^{i\sum_{j=0}^{n} \lambda_j^{(0)} s_j} F_m ds + \varepsilon_m = (\omega - K(\lambda^{(0)})) F_m + \varepsilon_m,$$

где $\|\varepsilon_m\| \to 0$ при $m\to\infty$. Следовательно,

$$\lim_{m\to\infty} \|(\omega I - K) F_m\| = |\omega - K(\lambda^{(0)})|\,\|F_m\| = |\omega - K(\lambda^{(0)})|.$$

Лемма доказана.

Лемма 1.3. Пусть $k(t) \in L_1(E)$ *и функция $\omega - K(\lambda)$ обращается в некоторой точке $\lambda^{(0)} \in E$ в нуль. Тогда для любого конечномерного оператора M, действующего в пространстве $L_p(E^+)$ $(1 < p < \infty)$, найдется последовательность ортов $F'_m \in L_p(E^+)$ $(m = 1, 2, \ldots)$ такая, что*

$$\lim_{n\to\infty} \|(\omega I - K + M) F'_m\| = 0. \tag{1.6}$$

Доказательство. В соответствии с леммой 1.2 построим последовательность ортов $F_m \in L_p(E^+)$ $(m = 1, 2, \ldots)$ такую, что

$$\lim_{m\to\infty} \|(\omega I - K) F_m\| = 0.$$

Из доказательства леммы 1.2 легко видеть, что для последовательности ортов $F'_m \in L_p(E^+)$ $(m = 1, 2, \ldots)$, которые получаются из ортов F_m заменой $f_m^{(0)}(t)$ на $W_m f_m^{(0)}(t)$, также выполняется равенство

$$\lim_{m\to\infty} \|(\omega I - K) F'_m\| = 0. \tag{1.7}$$

Очевидно, $F'_m = V_{0, m} F_m$ $(m = 1, 2, \ldots)$.

Пусть оператор M имеет вид

$$M\varphi = \sum_{l=1}^{r} (\psi_l, \varphi)\, \chi_l \quad (\varphi, \chi_l \in L_p(E^+);\ \psi_l \in L_q(E^+),\ p^{-1} + q^{-1} = 1),$$

где

$$(\psi_l, \varphi) = \int\limits_{E^+} \psi_l(t)\, \overline{\varphi(t)}\, dt \quad (l = 1, 2, \ldots, r).$$

Тогда

$$MF'_m = \sum_{l=1}^{r} (\psi_l, F'_m)\, \chi_l = \sum_{l=1}^{r} (\psi_l, V_{0,m} F_m)\, \chi_l \quad (m = 1, 2, \ldots).$$

Но так как

$$(\psi_l, V_{0,m} F_m) = (V^*_{0,m} \psi_l, F_m) = (V_{0,-m} \psi_l, F_m),$$

то

$$\| MF'_m \| \leqslant \sum_{l=1}^{r} \| \chi_l \|_{L_p(E^+)} \| F_m \|_{L_p(E^+)} \| V_{0,-m}\psi_l \|_{L_q(E^+)} =$$

$$= \sum_{l=1}^{r} \| \chi_l \|_{L_p(E^+)} \| V_{0,-m} \psi_l \|_{L_q(E^+)}.$$

Принимая во внимание, что $\| V_{0,-m}\psi_l \|_{L_q(E^+)} \to 0$ при $m \to \infty$ для каждого $l = 1, 2, \cdots, r$, заключаем, что

$$\lim_{m \to \infty} \| MF'_m \| = 0. \tag{1.8}$$

Из (1.8) и (1.7) следует соотношение (1.6).

Лемма доказана.

4. В дальнейшем нам понадобятся следующие определения. Пусть A — линейный ограниченный оператор, действующий из банахова пространства E_1 в банахово пространство E_2 и пусть $Z(A) = \{x : x \in E_1, Ax = 0\}$, $\alpha(A) = \dim Z(A)$, $\beta(A) = \alpha(A^*)$, где A^* — оператор, сопряженный к A. Если хоть одно из чисел $\alpha(A)$ и $\beta(A)$ конечно, то имеет смысл их разность $\varkappa(A) = \alpha(A) - \beta(A)$, которая называется индексом оператора A. Оператор A называется оператором регулярного типа, если существует такое положительное число k, что $\|Ax\| \geqslant k\|x\|$ $(x \in E_1)$. Оператор A называется $\Phi_+(\Phi_-)$-оператором, если он нормально разрешим и $\alpha(A)$ $(\beta(A))$ конечно. Как известно, оператор A тогда и только тогда является $\Phi_+(\Phi_-)$-оператором, когда A^* является $\Phi_-(\Phi_+)$-оператором.

Теорема 1.1. *Для того, чтобы уравнение*

$$\varphi(t) - \int_{E^+} k(t-s)\varphi(s)\,ds = f(t) \quad (t \in E^+,\ k(t) \in L_1(E)) \tag{1.9}$$

было нормально разрешимо в $L_p(E^+)$ $(1 < p < \infty)$ *и хотя бы одно из однородных уравнений*

$$\varphi(t) - \int_{E^+} k(t-s)\varphi(s)\,ds = 0 \quad (t \in E^+,\ \varphi(t) \in L_p(E^+)) \tag{1.10}$$

и

$$\psi(s) - \int_{E^+} k(t-s)\psi(t)\,dt = 0 \quad (s \in E^+, \psi(s) \in L_q(E^+),\ p^{-1} + q^{-1} = 1) \tag{1.11}$$

имело конечное число линейно независимых решений, необходимо и достаточно, чтобы

$$1 - K(\lambda) = 1 - \int_E k(t)\, e^{i(\lambda, t)}\,dt \neq 0 \quad (\lambda \in E). \tag{1.12}$$

Если выполняется условие (1.12), то уравнение (1.9) при любом $f(t) \in L_p(E^+)$ *имеет единственное решение* $\varphi(t) \in L_p(E^+)$, *определяемое по формуле*

$$\varphi(t) = f(t) + \int_{E^+} \gamma(t; s) f(s)\,ds \quad (t \in E^+), \tag{1.13}$$

где

$$\gamma(t; s) = \gamma_+(t-s) + \gamma_-(t-s) + \int_{E^+} \gamma_+(t-r)\gamma_-(r-s)\,dr \quad (t, s \in E^+),$$

а функции $\gamma_\pm(t)$ *определяются из соотношений*

$$(1 - K(\lambda))^{-1} = \left(1 + \int_{E^+} \gamma_+(t)\, e^{i(\lambda, t)}\,dt\right)\left(1 + \int_{E^-} \gamma_-(t)\, e^{i(\lambda, t)}\,dt\right),$$

$$\gamma_+(t) = 0 \quad (t \in E^-), \quad \gamma_-(t) = 0 \quad (t \in E^+).$$

Соответствующая теорема для одномерного случая доказана в работе М. Г. Крейна [6]. Оказывается, что в многомерном случае теорема значительно проще, ибо оператор, порожденный левой частью уравнения (1.9), при условии (1.12) имеет всегда индекс, равный нулю.

Доказательство. Пусть оператор $I - \mathrm{K}$ является $\Phi_\pm$-оператором, и допустим, что функция $1 - K(\lambda)$ обращается в нуль в некоторой точке $\lambda^{(0)} \in E$.

Рассмотрим случай, когда $\alpha(I - \mathrm{K}) \leqslant \beta(I - \mathrm{K})$. В этом случае существует конечномерный оператор M такой, что оператор $I - \mathrm{K} + M$ является оператором регулярного типа (см. [7]). С другой стороны, по лемме 1.3 существует последовательность ортов $F'_m (m = 1, 2, \ldots)$, таких, что $\|(I - \mathrm{K} + M)F'_m\| \to 0$ при $m \to \infty$, что невозможно.

В случае $\alpha(I - \mathrm{K}) > \beta(I - \mathrm{K})$ получим $\alpha\left((I - \mathrm{K})^*\right) < \beta\left((I - \mathrm{K})^*\right)$, где $(I - \mathrm{K})^*$—оператор, действующий в $L_q(E^+)$ $(p^{-1} + q^{-1} = 1)$. Очевидно,

$$(I - \mathrm{K})^* = I - \int_E k(t)\, V^*_t\,dt, \quad V^*_t = V^*_{0,t_0} V^*_{1,t_1} \cdots V^*_{n,t_n}.$$

Легко проверить, что $V^*_{m,t_m} = V_{m,-t_m}$ $(m = 0, 1, \ldots, n)$, и поэтому

$$(I - \mathrm{K})^* = I - \int_E k_1(t)\, V_t\,dt, \quad k_1(t) = k(-t).$$

Отсюда, аналогично предыдущему, получаем

$$1 - K_1(\lambda) = 1 - \int_E k_1(t)\, e^{i(\lambda, t)}\,dt \neq 0 \quad (\lambda \in E).$$

Но тогда $1 - K(\lambda) \neq 0$ $(\lambda \in E)$, ибо $K_1(\lambda) = K(-\lambda)$.

Перейдем к доказательству второй части теоремы. В силу предложения 1° функция $1 - K(\lambda)$ при условии (1.12) допускает факторизацию (1.1), т. е.

$$1 - \int_E k(t)\, e^{i(\lambda, t)}\,dt = \left(1 + \int_{E^-} g_-(t)\, e^{i(\lambda, t)}\,dt\right)\left(1 + \int_{E^+} g_+(t)\, e^{i(\lambda, t)}\,dt\right).$$

Следовательно,

$$-k(t) = g_-(t) + g_+(t) + \int_E g_-(t-s)g_+(s)\,ds.$$

Отсюда

$$(I+\int_{E^-} g_-(t)\, V_t dt)\,(I+\int_{E^+} g_+(t)\;V_t dt)=I-\int_E k\;(t)\;V_t\;dt=I-\mathrm{K}.$$

Пусть

$$(1-K(\lambda))^{-1}=(1+\int_{E^+}\gamma_+(t)\;e^{i(\lambda,\,t)}\,dt)\;\;(1+\int_{E^-}\gamma_-(t)\,e^{i(\lambda,\,t)}dt).$$

Нетрудно проверить, что

$$(I+\int_{E\pm} g_\pm(t)\;\;V_t\;\;dt)^{-1}=I+\int_{E\pm}\gamma_\pm(t)\;\;V_t dt.$$

Но тогда

$$(I-\mathrm{K})^{-1}=(I+\int_{E^+}\gamma_+(t)\;V_t dt)\;(I+\int_{E^-}\gamma_-(t)\;\;V_t\;dt).$$

Следовательно,

$$\varphi(t)=f(t)+\int_{E^+}(\gamma_+(t-s)+\gamma_-(t-s)+\int_E\gamma_+(t-r)\;\gamma_-(r-s)\;dr)\,f(s)\;ds.$$

Теорема доказана.

Замечание. В настоящем параграфе мы ограничились рассмотрением уравнения (1.9) в пространстве $L_p(E^+)$ $(1<p<\infty)$. Однако доказательство достаточности условия (1.12), очевидно, сохраняет силу и для ряда других пространств, например, для пространств[1] $L_1(E^+)$, $M\;(E^+)$, $C(E^+)$, $C_0\;(E^+)$. В доказательстве же необходимости условия (1.12) были существенно использованы свойства пространства $L_p\,(E^+)$ $(1<p<\infty)$.

Тем не менее можно провести независимое доказательство необходимости условия (1.12) и для более широкого класса пространств.

§ 2. Парные интегральные уравнения и транспонированные к ним

1. В этом параграфе будем рассматривать многомерное парное интегральное уравнение

$$\begin{gathered}\varphi(t)-\int_E k_1(t-s)\,\varphi(s)\,ds=f(t)\quad(t\in E^+,\;k_1\;(t)\in L_1\;(E))\\ \varphi(t)-\int_E k_2(t-s)\,\varphi(s)\,ds=f(t)\quad(t\in E^-,\;k_2\;(t)\in L_1\;(E)),\end{gathered}\tag{2.1}$$

а также уравнение

$$\begin{gathered}\varphi(t)-\int_{E^+}k_1(t-s)\varphi(s)ds-\int_{E^-}k_2(t-s)\,\varphi(s)\,ds=f(t)\\ (t\in E;\,k_1(t),\,k_2(t)\in L_1(E)),\end{gathered}\tag{2.2}$$

являющееся транспонированным к парному. В этих уравнениях $f(t)\in L_p(E)$ $(1<p<\infty)$ — заданная функция, а $\varphi(t)\in L_p(E)$ — искомая функция.

Введем действующие в $L_p(E)$ операторы сдвига $V_{j,\,s}$ $(j=0, 1, \ldots, n;$ $-\infty<s<\infty)$, определенные равенством

$$V_{j,s}f(t)=f(t_0,t_1,\ldots,\;t_{j-1},t_j-s,t_{j+1},\ldots,\;t_n),$$

[1]) Эти пространства определяются так же, как в одномерном случае [6].

проектор P, определенный равенством

$$Pf(t)=\begin{cases}f(t) & (t\in E^+)\\ 0 & (t\in E\setminus E^+),\end{cases}$$

и проектор $Q=I-P$. Для каждого $t=(t_0,t_1,\cdots,t_n)\in E$ введем обозначение $V_t=V_{0,t_0}V_{1,t_1}\cdots V_{n,t_n}$.

Нетрудно проверить, что уравнение (2.1) можно записать в виде $(PA+QB)\;\varphi=f$, где

$$A=I-\mathrm{K}_1=I-\int_E k_1(t)\;V_t\;dt\;\;\text{и}\;\;B=I-\mathrm{K}_2=I-\int_E k_2\,(t)\;V_t\;dt,$$

а уравнение (2.2) можно записать в виде $(AP+BQ)\;\varphi=f$, где A и B — те же операторы. Таким образом, вопрос о разрешимости уравнений (2.1) и (2.2) сводится к вопросу об обратимости операторов $PA+QB$ и $AP+BQ$.

Теорема 2.1. *Если*

$$\begin{gathered}1-K_1(\lambda)=1-\int_E k_1(t)\,e^{i(\lambda,\,t)}dt\neq0,\\ 1-K_2(\lambda)=1-\int_E k_2(t)\,e^{i(\lambda,t)}\,dt\neq0\;\;(\lambda\in E),\end{gathered}\tag{2.3}$$

то каждое из уравнений (2.1) и (2.2) имеет единственное решение $\varphi(t)\in L_p(E)$ $(1<p<\infty)$ при любой правой части $f(t)\in L_p(E)$.

Доказательство. Так как $1-K_2(\lambda)\neq0$, то из предложения 1°§ 1 следует, что $\left(1-K_2\;(\lambda)\right)^{-1}=1-\int_E\tilde{k}_2\,(t)\;e^{i(\lambda,\,t)}\,dt$, где $\tilde{k}_2\;(t)\in L_1(E)$.

Легко проверить, что

$$(I-\mathrm{K}_2)^{-1}=I-\int_E\tilde{k}_2\,(t)\,V_t\,dt.$$

Отсюда следует, что

$$(I-\mathrm{K}_2)^{-1}\;(I-\mathrm{K}_1)=I-\mathrm{K},$$

где

$$\mathrm{K}=\int_E k\,(t)\;V_t\,dt,\;\;k\,(t)=k_1\,(t)+\tilde{k}_2\,(t)-\int_E k_1\,(t-s)\;\tilde{k}_2(s)\,ds.$$

Для преобразования Фурье $K(\lambda)$ функции $k(t)$ получаем

$$1-K\;(\lambda)=(1-K_1\,(\lambda))\;\;(1-K_2(\lambda))^{-1}\neq0\;\;(\lambda\in E).$$

Следовательно, функция $1-K(\lambda)$ допускает факторизацию

$$1-K\,(\lambda)=(1+\int_{E^-}g_-(t)\;\;e^{i(\lambda,\,t)}\,dt)\;\;(1+\int_{E^+}g_+\,(t)\;e^{i(\lambda,\,t)}\;dt),$$

откуда

$$I-\mathrm{K}=A_-A_+,\;\;\;A_\pm=I+\int_{E\pm}g_\pm\,(t)\;V_t\,dt.$$

Из факторизации функции $(1-K\,(\lambda))^{-1}$

$$(1-K\,(\lambda))^{-1}=(1+\int_{E^-}\gamma_-(t)\;\;e^{i(\lambda,\,t)}\,dt)\;\;(1+\int_{E^+}\gamma_+(t)\;\;e^{i(\lambda,\,t)}\,dt)$$

получаем
$$A_{\pm}^{-1}=I+\int_{E^{\pm}}\gamma_{\pm}(t)V_t\,dt.$$

Так как
$$AP+BQ=(I-\mathrm{K}_1)P+(I-\mathrm{K}_2)Q=(I-\mathrm{K}_2)((I-\mathrm{K})P+Q)=$$
$$=(I-\mathrm{K}_2)(A_-A_+P+Q)=(I-\mathrm{K}_2)A_-(A_+P+A_-^{-1}Q)$$
и
$$(A_+P+A_-^{-1}Q)^{-1}=A_+^{-1}P+A_-Q,$$
то
$$(AP+BQ)^{-1}=(A_+^{-1}P+A_-Q)A_-^{-1}(I-\mathrm{K}_2)^{-1}.$$

Это равенство дает возможность выписать решение уравнения (2.2). Аналогично доказывается, что оператор $PA+QB$ обратим, чем завершается доказательство теоремы.

Теорема 2.2.[1] *Для того, чтобы уравнение (2.1) было нормально разрешимо в $L_p(E)$ $(1<p<\infty)$ и хотя бы одно из однородных уравнений*
$$\varphi(t)-\int_E k_1(t-s)\varphi(s)\,ds=0\quad(t\in E^+)\qquad(\varphi(t)\in L_p(E))$$
$$\varphi(t)-\int_E k_2(t-s)\varphi(s)\,ds=0\quad(t\in E^-)\tag{2.4}$$
и
$$\psi(t)-\int_{E^+}k_1(s-t)\psi(s)\,ds-\int_{E^-}k_2(s-t)\psi(s)\,ds=0$$
$$(t\in E,\ \psi(t)\in L_q(E),\ p^{-1}+q^{-1}=1)\tag{2.5}$$
имело конечное число линейно независимых решений, необходимо и достаточно, чтобы выполнялось условие (2.3).

Доказательство. Достаточность условия (2.3) установлена в теореме 2.1. Докажем необходимость этого условия. Пусть уравнение (2.1) нормально разрешимо и хотя бы одно из уравнений (2.4) и (2.5) имеет конечное число линейно независимых решений, т. е. оператор $P(I-\mathrm{K}_1)+Q(I-\mathrm{K}_2)$ является $\Phi_{\pm}$-оператором.

Рассмотрим сначала случай $\varkappa(P(I-\mathrm{K}_1)+Q(I-\mathrm{K}_2))\leqslant 0$. В этом случае (см. [7]) существует конечномерный оператор M такой, что оператор $P(I-\mathrm{K}_1)+Q(I-\mathrm{K}_2)+M=P(I-\mathrm{K}_1+M)+Q(I-\mathrm{K}_2+M)$ является оператором регулярного типа. Допустим, что в некоторой точке $\lambda^{(0)}\in E$ функция $1-K_1(\lambda)$ обращается в нуль. Будем считать пространство $L_p(E^+)$ вложенным в $L_p(E)$, отождествляя элемент $\tilde f(t)\in L_p(E^+)$ с элементом $f(t)\in L_p(E)$, где $f(t)=\tilde f(t)$ $(t\in E^+)$ и $f(t)=0$ $(t\in E\setminus E^+)$. Так как сужение операторов $V_{j,s}$ $(j=0,1,\dots,n;\ -\infty<s<\infty)$ на подпространство $L_p(E^+)$ совпадает с операторами $V_{j,s}$ из §1, то в силу леммы 1.3 существует последовательность ортов $F'_m\in L_p(E^+)$ $(m=1,2,\cdots)$ такая, что
$$(I-\mathrm{K}_1+M)F_m=\varepsilon_{1,m},\quad\lim_{m\to\infty}\|\varepsilon_{1,m}\|=0.\tag{2.6}$$

[1]) Теоремы, соответствующие теоремам 2.1 и 2.2, для одномерного случая доказаны И. Ц. Гохбергом и М. Г. Крейном [8]. В одномерном случае индекс уравнений (2.1) и (2.2) (как и индекс уравнения (1.9)), вообще говоря, отличен от нуля.

Нетрудно заметить, что
$$(I-\mathrm{K}_2)F_m=(1-K_2(\lambda^{(0)}))F'_m+\varepsilon_{2,m},\quad\lim_{m\to\infty}\|\varepsilon_{2,m}\|=0.\tag{2.7}$$
Из (2.6), (2.7) и (1.8) следует
$$\lim_{m\to\infty}\|[P(I-\mathrm{K}_1+M)+Q(I-\mathrm{K}_2+M)]F'_m\|=0,$$
что невозможно.

Аналогично приходим к противоречию, допустив, что в некоторой точке $\lambda^{(0)}\in E$ функция $1-K_2(\lambda)$ обращается в нуль.

Рассмотрим теперь случай $\varkappa(P(I-\mathrm{K}_1)+Q(I-\mathrm{K}_2))>0$. В этом случае оператор $(P(I-\mathrm{K}_1)+Q(I-\mathrm{K}_2))^*=(I-\mathrm{K}_1^*)P+(I-\mathrm{K}_2^*)Q$, действующий в пространстве $L_q(E)$ $(p^{-1}+q^{-1}=1)$ является Φ_+-оператором и $\varkappa((I-\mathrm{K}_1^*)P+(I-\mathrm{K}_2^*)Q)<0$. Очевидно,
$$\mathrm{K}_1^*=\int_E k_1(t)V_t^*\,dt,\quad\mathrm{K}_2^*=\int_E k_2(t)V_t^*\,dt,$$
где $V_t^*=V_{0,t_0}^*V_{1,t_1}^*\dots V_{n,t_n}^*$. Легко проверить, что $V_{m,t_m}^*=V_{m,-t_m}$ $(m=0,1,\dots,n)$. Следовательно,
$$\mathrm{K}_1^*=\int_E\tilde k_1(t)V_t\,dt,\quad\mathrm{K}_2^*=\int_E\tilde k_2(t)V_t\,dt,$$
где $\tilde k_1(t)=k_1(-t)$ и $\tilde k_2(t)=k_2(-t)$.

Пусть M — такой конечномерный оператор, действующий в $L_q(E)$, что $(I-\mathrm{K}_1^*+M)P+(I-\mathrm{K}_2^*+M)Q$ является оператором регулярного типа, и допустим, что функция
$$1-\tilde K_1(\lambda)=1-\int_E\tilde k_1(t)e^{i(\lambda,t)}\,dt$$
обращается в нуль в некоторой точке $\lambda^{(0)}\in E$. По лемме 1.3 существует последовательность ортов $F'_m\in L_q(E^+)$ $(m=1,2,\dots)$ такая, что
$$\lim_{m\to\infty}\|(I-\mathrm{K}_1^*+M)F'_m\|=0.$$
Но так как $PF'_m=F'_m$ и $QF'_m=0$, то
$$\lim_{m\to\infty}\|[(I-\mathrm{K}_1^*+M)P+(I-\mathrm{K}_2^*+M)Q]F'_m\|=0,$$
что невозможно. Следовательно, $1-\tilde K_1(\lambda)\neq 0$ $(\lambda\in E)$. Аналогично доказывается, что $1-\tilde K_2(\lambda)=1-\int_E\tilde k_2(t)e^{i(\lambda,t)}\,dt\neq 0$ $(\lambda\in E)$. Но тогда выполнено и условие (2.3), так как $\tilde K_1(\lambda)=K_1(-\lambda)$ и $\tilde K_2(\lambda)=K_2(-\lambda)$.

Теорема доказана.

Аналогичная теорема имеет место для уравнения (2.2).

Наконец, как и в § 1, заметим, что доказательство достаточности условия (2.3) сохраняет силу и в случае, когда уравнения (2.1) и (2.2) рассматриваются в пространствах $L_1(E)$, $M(E)$, $C(E)$, $C_0(E)$. Можно провести независимое доказательство необходимости условия (2.3) и для всех этих пространств.

ЛИТЕРАТУРА

1. Л. С. Гольденштейн, Признаки односторонней обратимости функций от нескольких изометрических операторов и их приложения, ДАН СССР, 155, № 1 (1964), 28—31.
2. Л. С. Гольденштейн и И. Ц. Гохберг. О многомерном интегральном уравнении на полупространстве с ядром, зависящим от разности аргументов, и его дискретном аналоге, ДАН СССР, 131, № 1 (1960), 9—12.
3. И. М. Гельфанд, Д. А. Райков и Г. Е. Шилов, Коммутативные нормированные кольца, М., Физматгиз, 1960.
4. И. Ц. Гохберг, Задача факторизации в нормированных кольцах, функции от изометрических и симметрических операторов и сингулярные интегральные уравнения, УМН, 19, вып. 1 (1964), 71—124.
5. Э. Хилле, Р. Филлипс, Функциональный анализ и полугруппы, Изд. иностр. лит., М. (1962).
6. М. Г. Крейн, Интегральные уравнения на полуоси с ядрами, зависящими от разности аргументов, УМН, 13, 5 (1958), 3—120.
7. И. Ц. Гохберг, О линейных увавнениях в нормированных пространствах, ДАН СССР, 76, № 4 (1951), 477—480.
8. И. Ц. Гохберг и М. Г. Крейн, О парном интегральном уравнении и его транспонированном. Журнал теор. и прикл. матем., 1 (1959), Львов.

Л. С. ГОЛДЕНШТЕЙН

ДЕСПРЕ ЕКУАЦИИЛЕ ИНТЕГРАЛЕ МУЛТИДИМЕНСИОНАЛЕ ДЕ ТИПУЛ ВИНЕР—ХОПФ

Резумат

Артиколул концине о експунере деталиатэ (ку унеле адаусурь) а резултателор анунцате ын [1], реферитоаре ла екуация интегралэ мултидименсионалэ Винер—Хопф, екуацииле дуале ши челе транспусе лор. Ын ачелаш тимп се обцин ши тоате резултателе дин [2], ын легэтурэ ку екуацииле сусаминтите.

Известия Академии наук Молдавской ССР № 6, 1964

К. И. КОЗЛОВСКИЙ

КОНФИГУРАЦИИ ОКРУЖНОСТЕЙ И ЛИНИИ ВТОРОГО ПОРЯДКА

1. Плоской конфигурацией окружностей называется фигура, состоящая из точек и окружностей, расположенных в одной плоскости так, что через каждую точку проходит определенное, одно и то же число окружностей, а на каждой окружности лежит одно и то же число точек.

В дальнейшем мы будем рассматривать только плоские конфигурации.

Конфигурации, в которых число окружностей равно числу точек и через каждую точку проходит столько окружностей, сколько точек лежит на каждой окружности, будем называть правильными. Укажем способ построения таких конфигураций.

Рассмотрим три окружности α_1, α_2, α_3 произвольных радиусов, пересекающиеся в точке A_1. Эти окружности пересекаются попарно еще в трех точках — A_{12}, A_{13}, A_{23}, которые определяют четвертую окружность α_{123}. Совокупность построенных точек и окружностей является правильной конфигурацией четырех окружностей. Действительно, через каждую из четырех точек конфигурации проходит три окружности, а на каждой из четырех окружностей конфигурации лежат три точки. Первые три окружности (α_i) назовем окружностями первого класса, а совокупность их — образующей связкой конфигурации, четвертую окружность α_{123} назовем окружностью второго класса. Точку A_1, в которой пересекаются все окружности первого класса, назовем полюсом конфигурации или точкой первого класса, а их вторые точки пересечения (A_{ij}) — точками второго класса.

Рассмотрим теперь образующую связку, состоящую из четырех окружностей α_i первого класса (проходящих через полюс A_1). Каждые три окружности этой связки определяют одну окружность второго класса. Следовательно, четыре окружности первого класса определяют еще четыре окружности второго класса α_{123}, α_{124}, α_{134}, α_{234}. Все окружности второго класса пересекаются в одной точке — точке третьего класса A_{1234}. Таким образом, мы получили конфигурацию, состоящую из восьми окружностей и восьми точек; через каждую точку проходит четыре окружности, на каждой окружности лежат четыре точки.

Если рассмотреть образующую связку из пяти окружностей, то каждые четыре из них определяют одну точку третьего класса. Таких точек будет пять — A_{1234}, A_{1235}, A_{1245}, A_{1345} и A_{2345}. Все они лежат на одной окружности — α_{12345} — окружности третьего класса. Получаем конфигурацию из 16 окружностей и 16 точек. На каждой окружности лежит пять точек, через каждую точку проходит пять окружностей. Пять из этих окружностей — первого класса, десять — второго и одна — третьего.

Продолжая таким образом, мы приходим к образующей связке из n окружностей. Она определяет конфигурацию из 2^{n-1} окружностей и 2^{n-1} точек, причем через каждую точку проходит n окружностей, а на каждой окружности лежит n точек.

Доказательство этого факта общеизвестно. Впервые его доказал К. А. Андреев [1].

Заметим еще, что в правильной конфигурации 2^{n-1} окружностей n окружностей — первого класса, C_n^3 — второго, C_n^5 — третьего и т. д. Аналогично классифицируются и точки конфигурации: одна точка первого класса, C_n^2 — второго, C_n^4 — третьего и т. д.

2. Конфигурацию будем называть невырожденной, если никакие две из ее точек или окружностей не совпадают и ни одна из ее окружностей не вырождается в точку или прямую. Если хотя бы одно из этих условий не выполнено, конфигурация называется вырожденной.

В правильной невырожденной конфигурации все точки и все окружности равноправны. Каждая точка может быть принята за полюс, а совокупность окружностей, через нее проходящих, — за образующую связку. Таким образом, разбиение окружностей правильных невырожденных конфигураций на классы зависит от выбора образующей связки и, следовательно, является относительным.

3. Тесно связаны с конфигурациями окружностей так называемые „окружности, ассоциированные с n-сторонником“, или, как их еще называют, „центральные окружности n прямых“. Суть дела заключается в следующем. Вместо того, чтобы взять образующую связку из n окружностей, берут n произвольных попарно пересекающихся прямых. Около каждого из треугольников, образованных пересечением этих прямых, описывают окружность, получая таким образом C_n^3 окружностей. Эти окружности ведут себя точно так же, как рассмотренные нами окружности второго класса. Так же, как и в правильных конфигурациях окружностей, определяются окружности третьего класса и т. д. Очевидно, инвертируя правильную конфигурацию окружностей относительно произвольной окружности с центром в полюсе конфигурации, мы получим систему окружностей, ассоциированных с n-сторонником.

Системы таких окружностей очень хорошо изучены. Существует обширная литература (главным образом английская и американская), в которой описываются различные позиционные и метрические свойства этих окружностей, причем последние работы появились совсем недавно (см., например, [3]). В этой литературе упоминается имя Клиффорда, как впервые доказавшего существование таких систем, и совершенно умалчивается о К. А. Андрееве, который одновременно с Клиффордом доказал существование правильных конфигураций окружностей и показал, что система окружностей, ассоциированных с n-сторонником, является частным случаем правильной конфигурации окружностей.

Согласно принятой нами терминологии, система окружностей, ассоциированных с n-сторонником, является примером вырожденной конфигурации окружностей.

4. В настоящей работе мы рассмотрим вырожденные конфигурации окружностей, у которых все точки третьего класса совпадают. Для доказательства существования таких конфигураций воспользуемся следующими простыми теоремами.

Теорема 1. *Если три окружности — α_1, α_2 и α_3 пересекаются в одной точке A_1 и центры их лежат на некоторой окружности, проходящей через A_1, то вторые точки пересечения* A_{12}, A_{13}, A_{23} каждых двух из этих окружностей лежат на одной прямой l_{123}.

Теорема 2 (обратная). *Если три окружности — α_1, α_2 и α_3 пересекаются в точке A_1 и их вторые точки пересечения коллинеарны, то центры этих окружностей и точка A_1 лежат на одной окружности.*

Доказательство этих теорем можно найти, например, в [4].

Рассмотрим теперь n окружностей α_i, пересекающихся в точке A_1, с центрами, лежащими на некоторой окружности k, проходящей через A_1. В силу теоремы 1, каждые три из них определяют некоторую прямую l_{ijk}. Отсюда легко заметить, что все вторые точки пересечения A_{ij} $(i<j;\ i,\ j=1,\ 2,\ \ldots,\ n)$ каждых двух из α_i и все прямые l_{ijk} $(i<j<k;\ i,\ j,\ k=1,\ 2,\ \ldots,\ n)$ принадлежат конфигурации прямых с символом $\{p_{n-2},\ q_3\}$, где $p=C_n^2$ — число точек, а $q=C_n^3$ — число прямых конфигурации. Действительно, пусть A_{ij} — точка пересечения окружностей α_i и α_j. Эти окружности вместе с каждой из $n-2$ оставшихся окружностей образующей связки определяют одну прямую l_{ijk}, проходящую через A_{ij}. Значит, через A_{ij} проходит $n-2$ прямых, а на каждой из этих прямых (согласно теореме 1) лежат три точки типа A_{ij}.

Рассмотренная совокупность окружностей α_i и прямых l_{ijk} представляет собой вырожденную конфигурацию, у которой все окружности второго класса α_{ijk} выродились в прямые l_{ijk}.

Выберем на плоскости произвольную точку P, не принадлежащую ни одной из окружностей α_i или прямых l_{ijk}, и инвертируем построенную нами вырожденную конфигурацию относительно окружности произвольного радиуса с центром в точке P. Полюс A_1 перейдет в некоторую точку A_1', окружности α_i — в некоторые окружности α_i', а прямые l_{ijk} — в окружности α_{ijk}', проходящие через точку P. В результате мы получим новую конфигурацию окружностей с полюсом в точке A_1', образующей связкой, состоящей из окружностей α_i', и окружностями второго класса α_{ijk}', которые все будут проходить через одну и ту же точку третьего класса $A_{1234}'=P$.

Таким образом, мы убеждаемся, что вырожденные конфигурации окружностей, у которых все точки третьего класса совпадают (все окружности второго класса проходят через одну точку), действительно существуют.

Естественно поставить вопрос, каким условиям должны подчиняться окружности образующей связки для того, чтобы правильная конфигурация вырождалась таким образом. Ответ на этот вопрос и составляет содержание этой статьи. Мы докажем, что центры окружностей образующей связки такой конфигурации принадлежат некоторой линии второго порядка, проходящей через полюс конфигурации.

5. Для дальнейшего нам понадобится одно точечное преобразование плоскости, устанавливаемое при помощи правильной конфигурации четырех окружностей. Рассмотрим какую-нибудь правильную конфигурацию четырех окружностей α_1, α_2, γ и γ' (рис. 1). Окружности α_1 и α_2 с центрами A и B зафиксируем, а окружности γ и γ' будем произвольно изменять, но так, чтобы сохранялась конфигурация.

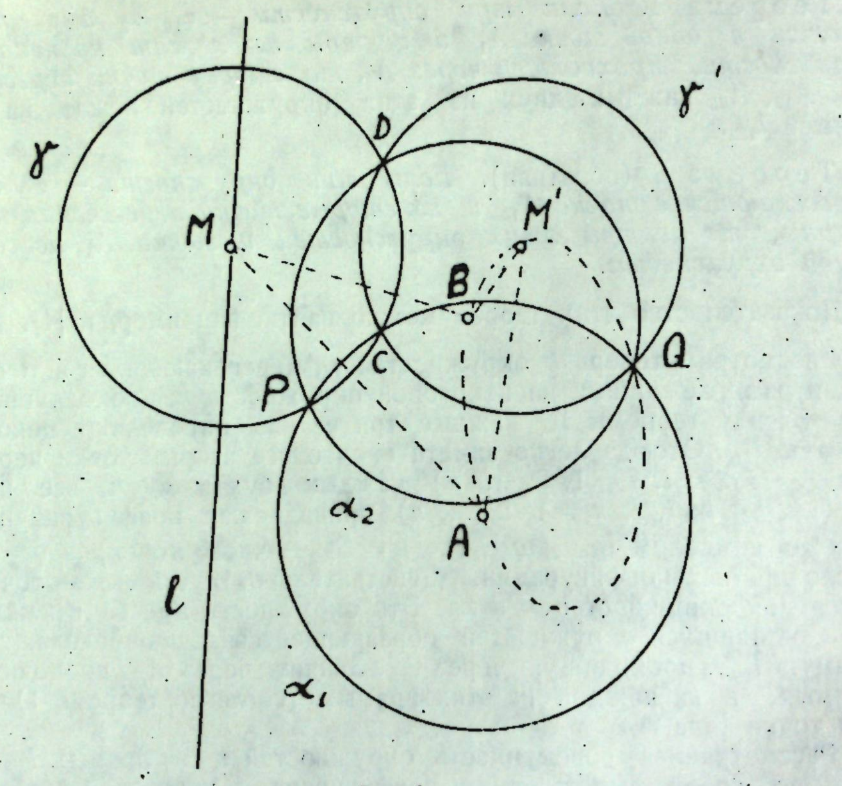

Рис. 1

Это означает следующее: если через точку P пересечения α_1 и α_2 проводится произвольная окружность γ, которая пересекает окружность α_1 в точке C и окружность α_2 в точке D, то окружность γ' однозначно определяется точками C, D и Q (Q — вторая точка пересечения окружностей α_1 и α_2). Таким образом, каждой окружности связки с центром P соответствует единственная окружность связки с центром в Q.

Пусть M — произвольная точка плоскости. Проводим через P окружность γ с центром в точке M, строим окружность γ' (рис. 1) и сопоставляем точке M точку M' — центр окружности γ'. Установленное соответствие, как это легко видеть, является взаимно однозначным для всех точек плоскости, за исключением точек, принадлежащих трехстороннику PAB (каждой точке прямой PA соответствует точка B, каждой точке прямой PB соответствует точка A и каждой точке прямой AB соответствует точка Q).

Итак, указанным выше способом мы установили два соответствия: соответствие окружностей γ и γ' связок с центрами P и Q и точечное соответствие их центров. Так как оба соответствия определяются выбором окружностей α_1 и α_2, то для краткости мы будем говорить, что окружность γ переходит в γ' или точка M преобразуется в точку M' п р и п о м о щ и о к р у ж н о с т е й α_1 и α_2. В случаях, когда будет иметься в виду обратное преобразование, мы также будем говорить, что точка M' преобразуется в точку M или окружность γ' в окружность γ при помощи окружностей α_1, α_2.

Рассмотренное точечное преобразование обладает интересным свойством — оно преобразует любую прямую плоскости (кроме трех уже

упомянутых) в некоторую линию второго порядка, проходящую через точки A, B и Q.

Пусть l — прямая, отличная от сторон трехсторонника PAB, и пусть M — произвольная точка этой прямой. Пусть, наконец, окружность $\gamma(M, MP)$ пересекает окружности α_1 и α_2 соответственно в точках C и D и окружность $\gamma'(M', M'Q)$ проходит через C и D. Докажем, что если точка M описывает прямую l, то M' будет описывать некоторую линию второго порядка G, проходящую через точки A, B и Q, и, обратно, если точка M' описывает линию G, то M описывает l. Для этого соединяем точку M и соответственно точку M' прямыми с точками A и B. Заметим, что точка C симметрична точке P относительно прямой AM, а точка Q симметрична точке C относительно прямой AM'. Произведение отражений от двух пересекающихся осей, как известно, является поворотом вокруг точки пересечения осей на угол, равный удвоенному углу между осями. Поворот вокруг точки A на угол PAQ равен произведению отражений от осей AM и AM'. Это значит, что угол MAM' равен половине угла PAQ, т. е. является постоянной величиной для любого положения точки M на прямой l. Точно так же находим, что и угол MBM' сохраняет постоянную величину, как бы ни была расположена точка M на l. Отсюда следует, что

$$A(AM)\,\overline{\wedge}\,A(AM') \text{ и } B(BM)\,\overline{\wedge}\,B(BM'),$$

т. е. соответствия $AM \to AM'$ в пучке с центром A и $BM \to BM'$ в пучке с центром B проективны. Но так как M описывает прямую l, то

$$A(AM)\,\overline{\overline{\wedge}}\,B(BM).$$

Отсюда следует, что

$$A(AM')\,\overline{\wedge}\,B(BM'),$$

а это значит, что все точки M' лежат на линии второго порядка G, проходящей через A и B. Легко видеть, что если точка M совпадает с точкой M_1 пересечения прямых AB и l, то $AM_1 \to AQ$ и $BM_1 \to BQ$, и, следовательно, точка Q также принадлежит G.

Обратно: пусть точка M' описывает линию второго порядка G, проходящую через A, B и Q. По теореме Штейнера,

$$A(AM')\,\overline{\wedge}\,B(BM').$$

Из предыдущих соображений

$$A(AM)\,\overline{\wedge}\,A(AM') \text{ и } B(BM)\,\overline{\wedge}\,B(BM'),$$

следовательно,

$$A(AM)\,\overline{\wedge}\,B(BM). \qquad (*)$$

В цепи проективных соответствий

$$A(AM)\,\overline{\wedge}\,A(AM'),\ A(AM')\,\overline{\wedge}\,B(BM'),\ B(BM')\,\overline{\wedge}\,B(BM)$$

имеем

$$AB \to AQ \to BQ \to AB.$$

Значит, в проективном соответствии (*) прямая AB — двойная и, следовательно, это соответствие является перспективным

$$A(AM)\,\overline{\overline{\wedge}}\,B(BM).$$

Это значит, что точка M описывает прямую l.

Таким образом, мы установили следующие факты:

1) Любую прямую плоскости можно преобразовать при помощи подходящим образом выбранных окружностей α_1, α_2 в кривую второго порядка, проходящую через центры этих окружностей и одну из их точек пересечения.

2) Любая линия второго порядка, проходящая через центры и одну из точек пересечения окружностей α_1, α_2, преобразуется при помощи этих окружностей в прямую линию.

Примечание 1. Разумеется, окружности γ с центрами на прямой l можно было бы проводить через точку Q; тогда прямая l преобразовалась бы в линию второго порядка G^1, проходящую через A, B и P. Отсюда следовало бы, что прямая l при помощи окружностей α_1, α_2 преобразуется, вообще говоря, в две линии второго порядка — G и G^1. Однако мы всегда будем предполагать, что точка пересечения, через которую проводятся окружности γ, выбрана и, следовательно, речь идет лишь об одной линии второго порядка.

Примечание 2. Рассмотрим окружность ω (A, B, P), т. е. окружность, проходящую через точки A, B и P. Если центр M окружности γ принадлежит ω (A, B, P), то, согласно теореме 1, вторые точки пересечения окружностей α_1, α_2 и γ лежат на одной прямой, следовательно, γ' — прямая линия и, значит, M' — несобственная точка. Это значит, что окружность ω (A, B, P) преобразуется при помощи окружностей α_1, α_2 в несобственную прямую. Это замечание позволяет определить аффинный тип линии второго порядка, в которую преобразуется прямая l. Если l не пересекает окружность ω (A, B, P), то соответствующая кривая G не имеет несобственных точек, т. е. является эллипсом; если l пересекает ω, то G имеет две различные несобственные точки, т. е. является гиперболой, и, наконец, если l касается G, то l имеет одну несобственную точку, т. е. является параболой.

6. Вернемся к основному вопросу, поставленному в конце § 4: найти условия, которым должны удовлетворять окружности образующей связки для того, чтобы конфигурация была вырожденной (определенным образом).

Докажем следующие две теоремы.

Теорема 3. *Если конфигурация окружностей вырождена так, что все точки третьего класса совпадают, то центры окружностей образующей связки и полюс конфигурации принадлежат одной линии второго порядка (отличной от окружности).*

Доказательство. Пусть P — полюс конфигурации, $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ — окружности образующей связки и пусть все окружности второго класса α_{ijk} $(i < j < k;\ i, j, k = 1, 2, \ldots, n)$ проходят через одну и ту же точку третьего класса M. Возьмем какие-нибудь четыре из окружностей α_i. Пусть это будут α_1, α_2, α_3 и α_4. Пять точек — центры O_1, O_2, O_3, O_4 этих окружностей и P — полюс конфигурации определяют некоторую линию второго порядка G. Рассмотрим конфигурацию восьми окружностей, образующую связку которой составляют окружности $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ и α_4. По условию точкой третьего класса этой конфигурации будет точка $A_{1234} = M$ (рис. 2). Согласно изложенному в § 5, при помощи каждых двух из окружностей α_1, α_2, α_3 и α_4 линия второго порядка G может быть преобразована в прямую линию. Рассмотрим, например, соответствие, установленное окружностями α_1 и α_2. Легко видеть (рис. 2), что окружностям α_3 и α_4 связки с центром P соответствуют окружности α_{123} и α_{124} связки с центром A_{12}. Это

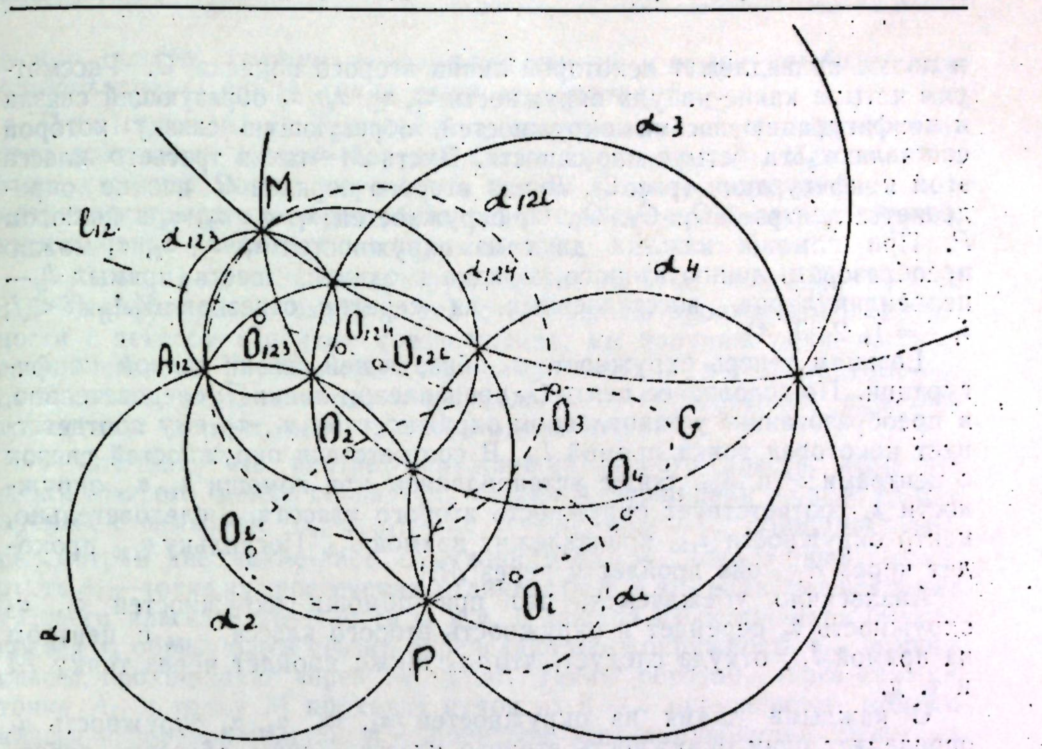

Рис. 2.

значит, что точки O_3 и O_4, принадлежащие G, преобразуются при помощи окружностей α_1, α_2 в точки O_{123} и O_{124} — центры окружностей α_{123} и α_{124} и, следовательно, линия второго порядка G преобразуется в прямую l_{12} — линию центров этих окружностей. Окружности α_{123} и α_{124} — второго класса и, значит, проходят через точку M. Отсюда заключаем, что l_{12} — перпендикуляр, восставленный из середины отрезка MA_{12}.

Таким же образом можно заметить, что эта же линия G преобразуется при помощи окружностей α_1, α_3 в прямую l_{13} — перпендикуляр, восставленный из середины отрезка MA_{13} и т. д.

С другой стороны, прямая l_{12} при помощи окружностей α_1, α_2 и прямая l_{13} при помощи окружностей α_1 и α_3 и т. д. преобразуются в линию G.

Пусть α_i — одна из окружностей образующей связки, отличная от первых четырех, и пусть она пересекает α_1 и α_2 соответственно в точках L_i' и L_i''. Окружность α_{12i} (L_i', L_i'', A_{12}) является окружностью второго класса и по условию должна проходить через точку M. Это значит, что ее центр лежит на прямой l_{12}. В соответствии, установленном при помощи окружностей α_1, α_2, центр окружности α_{12i} преобразуется в центр O_i окружности α_i и поскольку l_{12} преобразуется в G, O_i принадлежит G. Теорема доказана.

Теорема 4. *Если центры окружностей образующей связки и полюс конфигурации принадлежат одной линии второго порядка (отличной от окружности), то конфигурация вырождена так, что все точки третьего класса совпадают (все окружности второго класса проходят через одну точку).*

Доказательство. Пусть P — полюс конфигурации и $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ — окружности образующей связки, причем центры этих окружностей и полюс принадлежат некоторой линии второго порядка G. Рассмотрим четыре какие-нибудь окружности α_1, α_2, α_3, α_4 образующей связки и конфигурацию восьми окружностей, образующую связку которой составляют эти четыре окружности. Пусть M—точка третьего класса этой конфигурации (рис. 2). Линия второго порядка G вполне определяется центрами O_1, O_2, O_3, O_4 окружностей α_1, α_2, α_3, α_4 и полюсом P. При помощи каждых двух из окружностей α_1, α_2, α_3, α_4 можно преобразовать линию второго порядка в одну из шести прямых l_{ij}—перпендикуляров, восстановленных из середин отрезков MA_{ij} $(i<j;\ i, j=1, 2, 3, 4)$.

Возьмем теперь окружность α_5 образующей связки данной конфигурации. По условию ее центр O_5 принадлежит линии G, следовательно, в преобразовании, установленном окружностями α_1, α_2, ему соответствует некоторая точка прямой l_{12}. В соответствии окружностей связок с центрами P и A_{12}, также установленном при помощи α_1, α_2, окружности α_5 соответствует окружность второго класса α_{125}, следовательно, центр окружности α_{125} принадлежит прямой l_{12}. Поскольку α_{125} проходит через A_{12}, она пройдет и через M.

Аналогично убеждаемся, что при помощи окружностей α_1, α_3 окружность α_5 перейдет в окружность второго класса α_{135} с центром на прямой l_{13}, откуда следует, что α_{135} также пройдет через точку M и т. д.

С каждыми двумя из окружностей α_1, α_2, α_3, α_4 окружность α_5 определяет одну окружность второго класса. Таким образом, добавлением в образующую связку, составленную из первых четырех окружностей, окружности α_5 получаются новые шесть окружностей второго класса. Согласно только что сказанному, центры новых окружностей второго класса будут лежать на соответствующих прямых l_{ij} и, следовательно, все они пройдут через точку M.

Добавив к первым пяти окружностям окружность α_6, мы совершенно аналогично убедимся, что все десять новых окружностей второго класса, определенных окружностью α_6 с каждыми двумя из предыдущих пяти, также пройдут через точку M.

Легко убедиться, что если теорема верна для $i=n-1$, т. е. для образующей связки из $n-1$ окружностей, то она верна и для $i=n$, т. е. для образующей связки из n окружностей. Рассуждая точно так же, как и раньше, убеждаемся, что добавление окружности α_n в связку, состоящую из $n-1$ окружностей, порождает новые C^2_{n-1} окружностей второго класса, центры которых лежат на прямых l_{ij}, проходящих через середины отрезков MA_{ij} $(i<j;\ i, j=1, 2, \ldots, n-1)$, и, следовательно, проходят через точку M. Теорема доказана.

Примечание 1. В условиях теорем 3 и 4 была сделана оговорка, что линия второго порядка G отлична от окружности. Если G является окружностью, то, на основании теорем 1 и 2, все окружности второго класса вырождаются в прямые линии и никакой конечной точки третьего класса не существует. Однако если рассмотреть эти конфигурации на конформной плоскости и считать прямые окружностями, проходящими через единственную бесконечно удаленную точку, то ясно, что это вырожденные конфигурации такого же типа, как и конфигурации, построенные на основании теорем 3 и 4. Таким образом, в конформной плоскости нет необходимости в упомянутой оговорке, и, подводя итог теоремам 3 и 4, мы можем сформулировать следующее общее положение:

Для того, чтобы правильная конфигурация была вырождена так, чтобы все точки третьего класса совпадали, необходимо и достаточно, чтобы центры образующей связки и полюс конфигурации принадлежали одной линии второго порядка.

Примечание 2. Теорема 4 устанавливает новое общее свойство всех линий второго порядка (даже вырожденных). При помощи этого свойства можно определить линию второго порядка как геометрическое место центров образующей связки определенным образом вырожденной конфигурации окружностей.

Примечание 3. Инвертируя построенную на основании теорем 3 и 4 конфигурацию окружностей относительно произвольной окружности с центром в полюсе конфигурации, мы получим один частный случай системы окружностей, ассоциированных с n-сторонником. Все окружности, описанные около треугольников, образованных каждыми тремя из n прямых, пересекутся в одной точке.

7. Отметим, что центры окружностей второго класса, если все точки третьего класса совпадают, являются вершинами конфигурации прямых с символом $\{q_3, p_{n-2}\}$, где $p=C^2_n$ и $q=C^3_n$. Действительно, рассмотрим две какие-либо окружности α_i и α_j образующей связки; пусть A_{ij}—точка их пересечения, отличная от P, а M—единственная точка третьего класса. Окружности α_i и α_j с каждой из оставшихся окружностей α_k образующей связки определяют одну окружность α_{ijk} второго класса, проходящую через A_{ij} и M. Таким образом, через каждую точку A_{ij} и точку M проходит пучок из $n-2$ окружностей второго класса и, следовательно, $n-2$ центров этих окружностей лежат на одной прямой—перпендикуляре, восстановленном из середины отрезка $A_{ij}M$. Каждая окружность α_{ijk} второго класса принадлежит одновременно трем различным пучкам окружностей (проходящих через M и соответственно через точки A_{ij}, A_{ik} и A_{jk}), следовательно, через каждый центр проходят три прямые. Число точек второго класса равно C^2_n, а число окружностей второго класса—C^3_n. Отсюда следует, что центры окружностей второго класса действительно являются вершинами упомянутой конфигурации прямых.

8. Применим вырожденные конфигурации окружностей для построения линии второго порядка по пяти ее точкам.

Пусть даны пять точек A, B, C, D и E (рис. 3). Покажем, что при помощи вырожденной конфигурации окружностей можно построить сколь угодно много точек линии второго порядка, определяемой этими точками. Выберем одну из них, например E, за полюс и построим окружности $\alpha_1(A, AE)$, $\alpha_2(B, BE)$, $\alpha_3(C, CE)$ и $\alpha_4(D, DE)$ образующей связки. Построим любые две окружности второго класса, например α_{123} и α_{124}, и пусть $M=\alpha_{123}\times\alpha_{124}$ — точка третьего класса. Через M и A_{12} $(A_{12}=\alpha_1\times\alpha_2)$ проведем произвольную окружность α_{12l} $(l>2)$. Пусть $L_l=\alpha_{12l}\times\alpha_1$, а $L_l'=\alpha_{12l}\times\alpha_2$. Центр O_l окружности α_l, проходящей через E, L_l, L_l', принадлежит линии второго порядка, определенной данными точками.

Действительно, окружность α_{12l} определяется точками пересечения окружностей α_1, α_2 и α_l образующей связки и, следовательно, является окружностью второго класса. Так как она проходит через точку M, общую всем окружностям второго класса, то центры всех окружностей образующей связки должны принадлежать одной кривой второго порядка, проходящей через полюс. Отсюда следует, что O_l является точкой кривой второго порядка, определенной точками A, B, C, D и E. Все построение может быть выполнено одним циркулем.

9. В качестве еще одного приложения вырожденных конфигураций окружностей докажем следующее известное предложение:

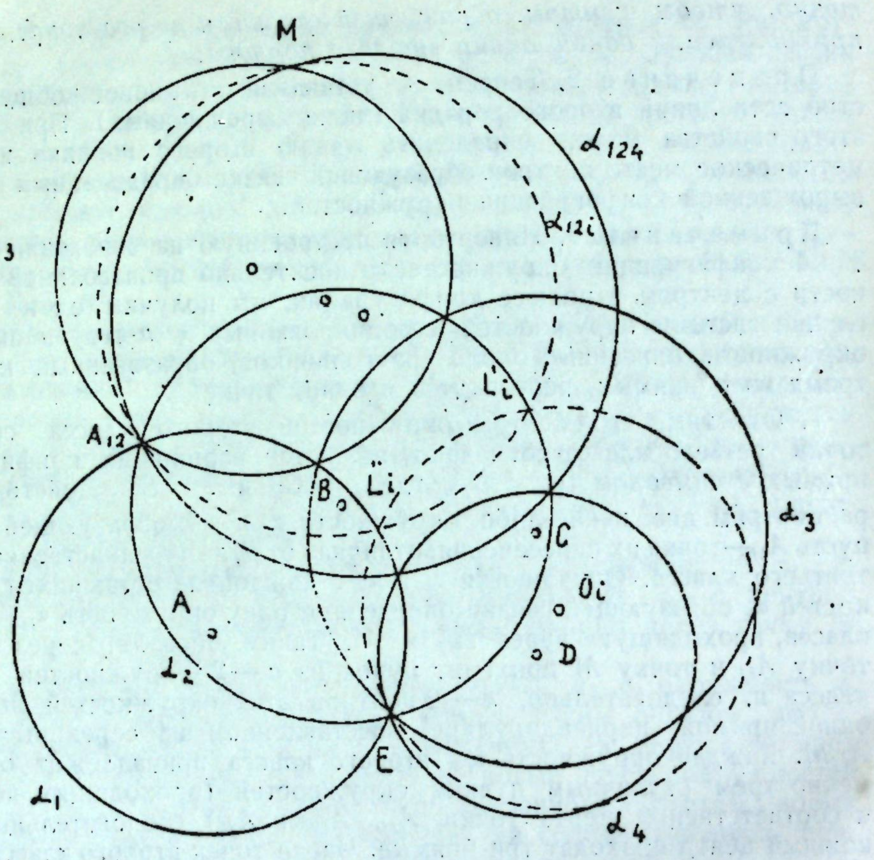

Рис. 3.

Окружность, описанная около треугольника, образованного касательными к параболе, проходит через фокус параболы.

Предварительно рассмотрим вырожденную конфигурацию, у которой все точки третьего класса совпадают с бесконечно удаленной точкой. Окружности второго класса этой конфигурации, как мы видели, вырождаются в прямые линии, а полюс и центры окружностей образующей связки лежат на одной окружности. Пусть r—радиус этой окружности и P—полюс конфигурации. Все окружности образующей связки касаются некоторой кривой, огибающей семейства окружностей с центрами на окружности (O, r), проходящих через P (рис. 4). Найдем уравнение (в полярных координатах) этой огибающей. Это легко сделать, заметив, что через каждую точку огибающей проходит лишь одна окружность семейства. Пусть A—точка огибающей и пусть ρ и φ—ее полярные координаты (P—полюс и P_x—полярная ось). Перпендикуляр MN, восставленный из середины хорды PA окружности α, должен пересечь окружность (O, r) только в одной точке, т. е. коснуться ее в точке N. Проведем $OK \perp PA$ и заметим, что $PK = r\cos\varphi$, а $KM = ON = r$. Тогда $PA = 2PM = 2(r\cos\varphi + r)$ или $\rho = 2r(\cos\varphi + 1)$. Это означает, что огибающая является кардиоидой с особой точкой P.

Пусть парабола задана уравнением (фокус в полюсе)

$$\rho = \frac{p}{1+\cos\varphi}.$$

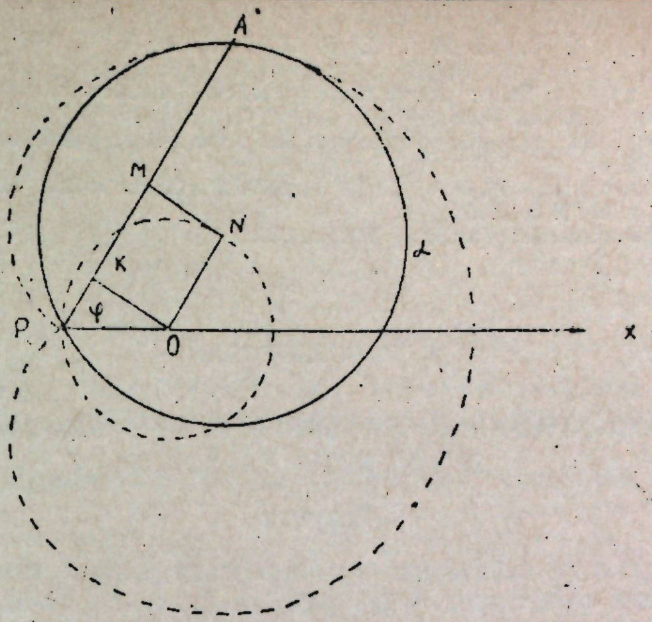

Рис. 4.

Из фокуса параболы как из центра опишем окружность $\left(F, \frac{p}{2}\right)$, проходящую через вершину параболы. Примем ее за окружность инверсии и инвертируем относительно нее параболу. Подставив $\rho = \frac{p^2}{4\rho'}$ в уравнение параболы, получим $\rho' = \frac{p}{4}(1+\cos\varphi)$, т. е. уравнение кардиоиды, особая точка которой находится в фокусе F. Пусть a_1, a_2, a_3—три касательные к параболе и α—окружность, описанная около треугольника, ими образованного. В инверсии эти прямые преобразуются в окружности, проходящие через фокус F и касательные к кардиоиде. Это значит, что эти окружности принадлежат образующей связке вырожденной конфигурации, все точки третьего класса которой совпадают с бесконечно удаленной точкой, или, другими словами, это значит, что центры этих окружностей лежат на некоторой окружности, проходящей через F. Вторые точки пересечения этих окружностей лежат на некоторой прямой l. Отсюда получается, что в рассмотренной инверсии окружности α соответствует прямая l, а это может быть лишь в случае, когда α проходит через F.

10. Вырожденные конфигурации окружностей таят в себе и другие возможности. Обыкновенный пучок окружностей, проходящих через две точки, можно рассматривать также как вырожденную конфигурацию окружностей. Одна из точек является полюсом конфигурации, а вторая — точкой, с которой совпадают все точки второго класса. Отсюда вывод: если все точки второго класса совпадают, то центры окружностей образующей связки лежат на одной прямой — линии первого порядка.

Мы видели, что если совпадают все точки третьего класса, то центры образующей связки лежат на линии второго порядка. Естественно поставить вопрос, существуют ли конфигурации, у которых совпадают точки начиная с четвертого, пятого и вообще n-го класса, и каково будет расположение центров их образующих связок. Можно предположить, что они будут располагаться на кривых высших порядков.

ЛИТЕРАТУРА

1. К. А. Андреев, Вывод одного общего свойства многосторонников. Матем. сб., т. VI, вып. 4, М., 457—466 (1873).
2. F. Morley, On the metric geometry of the plane n-line. Trans. Amer. Math. Soc., 1900, p. 99.
3. J. W. Clawson, A chain of Circles associated with the n-line. The Amer. Math. Monthly, v. 63, N 5, 1956.
4. F. G.-M. Exercices de géométrie, 1931, p. 334.

К. И. КОЗЛОВСКИЙ

КОНФИГУРАЦИИЛЕ ЧИРКУМФЕРИНЦЕЙ ШИ ЛИНИИЛЕ ДЕ ОРДИНУЛ АЛ ДОЙЛЯ

Резумат

О мулциме де пункте ши чиркумферинце, астфел ашезате ынкыт прин фиекаре пункт трек n чиркумферинце, яр пе фиекаре чиркумферинцэ се гэсеск n пункте, се нумеште конфигурацие регулатэ де чиркумферинце. Фацэ де фиекаре пункт ал конфигурацией тоате чиркумферинцеле се ымпарт ын чиркумферинце де класа ынтыя, а доуа ш. а. м. д. Пунктул, фацэ де каре се фаче класификаря, се нумеште полул конфигурацией. Дакэ чиркумферинцеле уней анумите класе трек принтр'ун ачелаш пункт, конфигурация се нумеште деженератэ.

Ын лукраре се стабилеште кондиция нечесарэ ши суфичиентэ пентру деженераря конфигурацией — полул ши чентреле чиркумферинцелор де класа ынтыя требуе сэ апарцинэ уней линий де ординул ал дойля.

Известия Академии наук Молдавской ССР № 6, 1964

А. В. МАРИНЧУК, К. С. СИБИРСКИЙ

ИНВАРИАНТЫ ОРТОГОНАЛЬНЫХ ПРЕОБРАЗОВАНИЙ ФАЗОВОЙ ПЛОСКОСТИ СИСТЕМЫ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

1°. Рассмотрим систему дифференциальных уравнений

$$\frac{dx}{dt} = \sum_{j+l\in A} c_{jl}\, x^j\, y^l,\quad \frac{dy}{dt} = \sum_{j+l\in A} b_{jl}\, x^j\, y^l, \tag{1}$$

в которой j и l — целые неотрицательные числа, c_{jl} и b_{jl} — действительные числа, x и y — действительные переменные, A — некоторое множество различных целых неотрицательных чисел. Если множество A бесконечно, будем предполагать, что ряды в правых частях системы (1) сходятся в некоторой окрестности начала координат.

Производя в (1) линейное преобразование v:

$$x_1 = \alpha x + \beta y,\ y_1 = \gamma x + \delta y \tag{2}$$

с невырожденной матрицей $v = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}$, придем к системе

$$\frac{dx_1}{dt} = \sum_{j+l\in A} c^{(1)}_{jl} x^j_1\, y^l_1,\quad \frac{dy_1}{dt} = \sum_{j+l\in A} b^{(1)}_{jl} x^j_1\, y^l_1. \tag{3}$$

Совокупность коэффициентов c_{jl} и b_{jl} правых частей системы (1) будем рассматривать как точку s действительного векторного пространства S. Обозначим через s_1 точку пространства S с координатами $c^{(1)}_{jl}$ и $b^{(1)}_{jl}$. Преобразование (2) индуцирует в пространстве S некоторое линейное преобразование L_v так, что $s_1 = L_v s$. Пусть V — некоторая группа линейных преобразований v. Тогда совокупность преобразований L_v образует группу, являющуюся линейным представлением группы V, которую мы будем обозначать через L_V. В [1] и [2] были найдены целый рациональный базис [3] и полная система [2, 4] алгебраических инвариантов (а. и.) группы $L = L_V$ в случае, когда V является группой вращений плоскости XOY вокруг начала координат. При этом оказалось удобным введением переменной $w = x + iy$ перейти от системы (1) к уравнению

$$\frac{dw}{dt} = \sum_{j+l\in A} 2^{-j-l} z_{jl}\, \overline{w}^j\, w^l \tag{4}$$

и рассматривать совокупность коэффициентов z_{jl} правой части уравнения (4) как точку z комплексного векторного пространства Z. Определяемое при этом соответствие $z = Ks$ индуцирует в Z группу U_V преобразований U_v таких, что $U_v = KL_vK^{-1}$ (в частности, $U = KLK^{-1}$).

В [2] было, например, указано, что совокупность инвариантов z_{jl} $(l-j-1=0)$, $z_{jl}^{\varkappa(p,q,j,l)}\,\overline{z}_{pq}^{\varkappa(j,l,p,q)}$ $((q-p-1)\ (l-j-1)>0$, $j+l<p+q$, причем если $j+l=p+q$, то $j\geqslant p)$ и $z_{jl}^{\varkappa(p,q,j,l)}\,z_{pq}^{\varkappa(j,l,p,q)}$ $((q-p-1)\ (l-j-1)<0$, $j+l\leqslant p+q$, причем если $j+l=p+q$, то $j>p)$ при всех $j+l\in A$ и $p+q\in A$ составляет независимую полную систему а. и. группы U над произвольным числовым полем P. Через $\varkappa\ (j,\ l,\ p,\ q)$ здесь обозначено отношение $|l-j-1|$ к наибольшему общему делителю чисел $l-j-1$ и $q-p-1$.

В данной заметке изучаются а. и. групп L_0 и U_0, соответствующих группе O ортогональных преобразований v фазовой плоскости $(vv'=E)$. В частности, дается построение целого рационального базиса и полной системы а. и. группы L_0, которые в случае $A=\{1\}$ совпадают (после простых преобразований) с полиномиальным базисом и полной системой а. и. унитарных преобразований квадратной матрицы второго порядка, полученных соответственно Ф. Мурнаганом и Д. П. Желобенко в [5] и [6], если рассматривать последние для случая действительных матриц. Как следствие установлена полнота системы всех а. и. группы L_0, и в качестве примера выражены через эти инварианты условия существования особой точки типа центра.

2°. Обозначим через v_φ преобразование поворота координатных осей плоскости XOY на угол φ вокруг начала координат:

$$x_1=x\cos\varphi+y\sin\varphi,\quad y_1=-x\sin\varphi+y\cos\varphi,$$

через v^- — преобразование (2) с матрицей $v^-=\begin{pmatrix}1&0\\0&-1\end{pmatrix}$ (то есть преобразование зеркального отражения относительно оси OX), и пусть $v_\varphi^-\equiv v^-v_\varphi$. Как известно, совокупность преобразований v_φ и v_φ^- при всех $\varphi\in[0,2\pi)$ и образует группу O всех ортогональных преобразований плоскости XOY.

Обозначим для краткости произвольное ортогональное преобразование (2) через $v_\varphi^\pm$, $L^-=L_{v^-}$, $L_\varphi=L_{v_\varphi}$, $L_\varphi^-=L_{v_\varphi^-}$, $L_\varphi^\pm=L_{v_\varphi^\pm}$, $U^-=U_{v^-}$, $U_\varphi=U_{v_\varphi}$, $U_\varphi^-=U_{v_\varphi^-}$ и $U_\varphi^\pm=U_{v_\varphi^\pm}$.

Из того, что преобразование v^- в комплексных переменных $w=x+iy$, $w_1=x_1+iy_1$ имеет вид $w_1=\overline{w}$, а уравнение (4) переходит при этом в $\dfrac{dw_1}{dt}=\sum\limits_{j+l\in A}2^{-j-l}\,\overline{z}_{jl}\,\overline{w}_1{}^j\,w_1{}^l$, легко видеть, что $U^-z=\overline{z}$. Очевидно, что имеет место

Лемма 1. *Алгебраическими инвариантами группы $U_0(L_0)$ над P будут те и только те алгебраические инварианты $J(z)$ $(I(s))$ группы $U(L)$ над P, которые инвариантны при преобразовании $U^-(L^-)$, то есть такие, что*

$$J(\overline{z})=J(z)\quad(I(L^-s)=I(s)).\tag{5}$$

Если ограничиться рассмотрением а. и. группы U_0 над полем D действительных чисел, то равенство (5) примет вид

$$J(\overline{z})=\overline{J(z)}=J(z).\tag{6}$$

Следствие 1. *Если $\{J(z)\}$ — множество всех алгебраических инвариантов группы U над P, то $\{J(z)+J(\overline{z})\}$ — множество всех алгебраических инвариантов группы U_0 над P.*

Действительно, если $J(z)$ — а. и. группы U над P, то согласно лемме 1 многочлен $J(z)+J(\overline{z})$ является а. и. группы U_0 над P. Допустим теперь, что $J_0(z)$ — а. и. группы U_0 над P. Тогда по той же лемме $J_0(z)=J(z)+J(\overline{z})$, где $J(z)=\dfrac{1}{2}J_0(z)$.

Следствие 2. *Если $\{J(z)\}$ — множество всех алгебраических инвариантов группы U над D, то $\{\operatorname{Re}J(z)\}$ — множество всех алгебраических инвариантов группы U_0 над D.*

Через C будем в дальнейшем обозначать поле комплексных чисел.

Лемма 2. *Многочлен $I(s)$ является алгебраическим инвариантом группы L_0 над C (D) тогда и только тогда, когда многочлен $J(z)\equiv I(K^{-1}z)$ является алгебраическим инвариантом группы U_0 над $C(D)$.*

Доказательство. Пусть $I(s)$ — а. и. группы L_0 над P. Тогда $J(U_\varphi^\pm z)=I(K^{-1}U_\varphi^\pm z)=I(L_\varphi^\pm K^{-1}z)=I(L_\varphi^\pm s)=I(s)=J(z)$. Следовательно, $J(z)$ — а. и. группы U_0 над C. Если при этом $P=D$, то $I(s)=\overline{I(s)}$, и тогда выполнено равенство (6). Полагая $J(z)=J_1(z)+iJ_2(z)$, где $J_1(z)$ и $J_2(z)$ — а. и. группы U над D, из равенства (6) получим, что $J_2(z)=0$, и поэтому $J(z)$ является а. и. группы U_0 над D.

Допустим теперь, что $J(z)$ — а. и. группы U_0 над D. Тогда $I(L_\varphi^\pm s)=J(KL_\varphi^\pm s)=J(U_\varphi^\pm Ks)=J(U_\varphi^\pm z)=J(z)=I(s)$. Следовательно, $I(s)$ — а. и. группы L_0 над C. Если при этом $P=D$, то имеет место равенство (6), и тогда $I(s)=\overline{I(s)}$, и $I(s)$ является а. и. группы L_0 над D.

Из леммы 2 и следствия 2 вытекает

Теорема 1. *Если $\{J(z)\}$ — множество всех алгебраических инвариантов группы U над D, то $\{\operatorname{Re}J(Ks)\}$ — множество всех алгебраических инвариантов группы L_0 над D.*

Нетрудно также заметить, что если $I(s)$ — а. и. группы L_0 над C, то $\operatorname{Re}I(s)$ и $\operatorname{Im}I(s)$ являются а. и. группы L_0 над D.

3°. Теорема 2. *Если $\{J_\tau(z)\}$ $(\tau\in T)$ — целый рациональный базис алгебраических инвариантов группы U над D, то*

$$\{\operatorname{Re}J_\tau(z),\ \operatorname{Im}J_\tau(z)\operatorname{Im}J_\sigma(z)\}\quad(\tau,\ \sigma\in T)\tag{7}$$

— целый рациональный базис алгебраических инвариантов группы U_0 над D, а

$$\{\operatorname{Re}I_\tau(s),\ \operatorname{Im}I_\tau(s)\operatorname{Im}I_\sigma(s)\}\quad(\tau,\ \sigma\in T),\tag{8}$$

где $I_\tau(s)\equiv J_\tau(Ks)$ $(\tau\in T)$ — целый рациональный базис алгебраических инвариантов группы L_0 над D.

Доказательство. Пусть $\{J_\tau(z)\}$ $(\tau\in T)$ — целый рациональный базис а. и. группы U над D. Тогда $J_\tau(\overline{z})=\overline{J_\tau(z)}$ и поэтому $\operatorname{Re}J_\tau(z)=\operatorname{Re}J_\tau(\overline{z})$ и $\operatorname{Im}J_\tau(z)\operatorname{Im}J_\sigma(z)=\operatorname{Im}J_\tau(\overline{z})\operatorname{Im}J_\sigma(\overline{z})$. На основании леммы 1 $\operatorname{Re}J_\tau(z)$ и $\operatorname{Im}J_\tau(z)\operatorname{Im}J_\sigma(z)$ являются а. и. группы U_0 над D. Любой а. и. группы U_0 над D согласно следствию 2 имеет вид $\operatorname{Re}J(z)$, где $J(z)$ а. и. группы U над D. Но $J(z)$ представляется как многочлен над D от инвариантов $J_\tau(z)$ $(\tau\in T)$. Тогда $\operatorname{Re}J(z)$ равна сумме действительных частей членов многочлена $J(z)$. Но каждый член многочлена $J(z)$ является произведением конечного числа инвариантов $J_\tau(z)$ $(\tau\in T)$, а действительная часть произведения выражается в виде многочлена с коэффициентами ± 1 от действительных частей сомножителей и попарных произведений их мнимых частей. Следовательно, инварианты (7) образуют целый рациональный базис а. и. группы U_O над D.

Рассмотрим теперь произвольный инвариант $I(s)$ группы L_O над D. Тогда $J(z) \equiv I(K^{-1}z)$ по лемме 2 является а. и. группы U_O над D и по доказанному представим в виде многочлена над D от инвариантов (7). Тогда $I(s)$ представим в виде того же многочлена от инвариантов (8), которые, следовательно, образуют целый рациональный базис а. и. группы L_O над D.

Теорема 3. *Если $\{J_\tau(z)\}$ $(\tau \in T)$ — полная система алгебраических инвариантов группы U над D, то инварианты (7) и (8) образуют соответственно полные системы алгебраических инвариантов групп U_O и L_O над D.*

Доказательство. Допустим, что $\{J_\tau(z)\}$ $(\tau \in T)$ — полная система а. и. группы U над D, и предположим, что значения всех инвариантов (7) в двух точках z_1 и z_2 совпадают, то есть в этих точках все инварианты $J_\tau(z)$ $(\tau \in T)$ имеют одинаковые действительные части и одинаковые произведения их мнимых частей. В частности, $\mathrm{Im}J_\tau(z_1)\,\mathrm{Im}J_\tau(z_1) = \mathrm{Im}J_\tau(z_2)\,\mathrm{Im}J_\tau(z_2)$ для всех $\tau \in T$. Тогда $|\mathrm{Im}J_\tau(z_1)| = |\mathrm{Im}J_\tau(z_2)|$. При этом возможно одно из двух: 1) либо $\mathrm{Im}J_\tau(z_1) = \mathrm{Im}J_\tau(z_2)$ при всех $\tau \in T$ и тогда $J_\tau(z_1) = J_\tau(z_2)$ при всех $\tau \in T$, 2) либо $\mathrm{Im}J_\tau(z_1) = -\mathrm{Im}J_\tau(z_2)$ при всех $\tau \in T$. В первом случае ввиду полноты исходной системы инвариантов найдется преобразование $U_\varphi \in U$ такое, что $U_\varphi z_1 = z_2$. Во втором случае $\mathrm{Im}J_\tau(U^- z_1) = \mathrm{Im}J_\tau(\bar z_1) = -\mathrm{Im}J_\tau(z_1) = \mathrm{Im}J_\tau(z_2)$ и $\mathrm{Re}J_\tau(U^- z_1) = \mathrm{Re}J_\tau(\bar z_1) = \mathrm{Re}J_\tau(z_1) = \mathrm{Re}J_\tau(z_2)$. Найдется тогда преобразование $U_\varphi \in U$ такое, что $U_\varphi(U^- z_1) = z_2$. При этом $U_\varphi U^- \in U_O$ и инварианты (7) образуют полную систему а. и. группы U_O над D. Очевидно, что тогда инварианты (8) образуют полную систему а. и. группы L_O над D.

Следствие 3. *Система всех алгебраических инвариантов группы L_O над D является полной системой инвариантов группы L_O.*

Отсюда уже непосредственно вытекает

Теорема 4. *Пусть (1) и (3) — две произвольно заданные системы дифференциальных уравнений. Для существования ортогонального преобразования фазовой плоскости, переводящего систему (1) в систему (3), не только необходимо, но и достаточно выполнения условия $I(s) = I(s_1)$ для всех алгебраических инвариантов группы L_O над D.*

4°. В качестве примера рассмотрим систему дифференциальных уравнений $\frac{dx}{dt} = c_{10}x + c_{01}y$, $\frac{dy}{dt} = b_{10}x + b_{01}y$. Для нее [1, 2] целый рациональный базис а. и. группы U над P образуют инварианты z_{01}, $\bar z_{01}$ и $z_{10}\bar z_{10}$. Инварианты z_{01} и $z_{10}\bar z_{10}$ образуют при этом полную систему а. и. группы U. Тогда инварианты $\mathrm{Re}z_{01}$, $z_{10}\overline{z_{10}}$ и $(\mathrm{Im}z_{01})^2$ образуют на основании теорем 2 и 3 целый рациональный базис и в то же время полную систему а. и. группы U_O над D. При этом, поскольку $z_{10} = c_{10} - b_{01} + i(b_{10} + c_{01})$, а $z_{01} = c_{10} + b_{01} + i(b_{10} - c_{01})$, многочлены $c_{10} + b_{01}$, $(c_{10} - b_{01})^2 + (b_{10} + c_{01})^2$ и $(b_{10} - c_{01})^2$ образуют целый рациональный базис и полную систему а. и. группы L_O над D, или, что то же, группы ортогональных преобразований матрицы $B = \begin{pmatrix} c_{10} & c_{01} \\ b_{10} & b_{01} \end{pmatrix}$.

Теперь нетрудно видеть, что каждая из систем

$$\mathrm{sp}B,\quad \mathrm{sp}B^2,\quad \mathrm{sp}BB'$$

и

$$\mathrm{sp}B,\quad \det B,\quad \mathrm{sp}\,BB'$$

является целым рациональным базисом, а следовательно, и полной системой а. и. группы L_O над D.

Этот результат вытекает также из работ Ф. Мурнагана [5], получившего полную систему унитарных инвариантов 2×2 матрицы B в виде $\mathrm{sp}B$, $\mathrm{sp}B^2$, и $\mathrm{sp}B^*B$, и Д. П. Желобенко [6], нашедшего целый рациональный базис унитарных инвариантов 2×2 матрицы B в виде $\mathrm{sp}B$, $\overline{\mathrm{sp}B}$, $\det B$, $\overline{\det B}$ и $\mathrm{sp}BB^*$.

5°. Рассмотрим теперь вопрос о нахождении относительных инвариантов [3] групп U_O и L_O. Заметим, во-первых, что поскольку для относительного инварианта $J(z)$ группы U_V по определению должно выполняться тождество $J(U_v z) = \lambda(v)\,J(z)$ для всех $v \in V$ и, как нетрудно видеть, при любом $a \in D$ имеем $\lambda(aE) = a^\varkappa$, где $\varkappa$ — целое неотрицательное число, то, повторяя рассуждения, приведенные в [3] на стр. 44, легко прийти к выводу, что мультипликатор $\lambda(v)$ должен представлять собой целую неотрицательную степень $\det v$. Отсюда уже следует, что поскольку для собственно ортогональной матрицы v $\det v = 1$, то относительные инварианты групп U и L совпадают с их абсолютными инвариантами. По той же причине относительные инварианты ортогональных преобразований являются абсолютными инвариантами поворота координатных осей. Учитывая, что для несобственно ортогональной матрицы v $\det v = -1$, легко установить, что квадрат любого относительного а. и. ортогональных преобразований является их абсолютным инвариантом.

В дальнейшем под относительными а. и. будем понимать лишь относительные инварианты с неравным тождественно единице мультипликатором.

Рассуждениями, аналогичными проведенным в пункте 2°, легко доказать следующие предложения:

1) Относительными а. и. группы U_O (L_O) над P будут те и только те а. и. $J(z)$ $(I(s))$ группы U (L) над P, для которых $J(\bar z) = -J(z)$ $(I(L^- s) = -I(s))$.

2) Если $\{J(z)\}$ — множество всех а. и. группы U над P, то $\{J(z) - J(\bar z)\}$ — множество всех относительных а. и. группы U_O над P.

3) Если $\{J(z)\}$ — множество всех а. и. группы U над D, то $\{i\mathrm{Im}J(z)\}$ — множество всех относительных а. и. группы U_O над D.

4) Многочлен $I(s)$ является относительным а. и. группы L_O над $C(D)$ тогда и только тогда, когда многочлен $iJ(z) \equiv iI(K^{-1}z)$ является относительным а. и. группы U_O над $C(D)$.

Из предложений 3) и 4) вытекает

Теорема 5. *Если $\{J(z)\}$ — множество всех алгебраических инвариантов группы U над D, то $\{\mathrm{Im}\,J(Ks)\}$ — множество всех относительных алгебраических инвариантов группы L_O над D.*

6°. Теорема 3 показывает, что а. и. группы L_O над D полностью определяют качественную картину поведения интегральных кривых системы (1) с точностью до ортогональных преобразований плоскости XOY.

В качестве примера покажем, как можно выразить через эти инварианты условия наличия в начале координат центра системы

$$\frac{dx}{dt} = \sum_{j+l=1}^{\infty} b_{jl} x^j y^l, \qquad \frac{dy}{dt} = -\sum_{j+l=1}^{\infty} c_{jl} x^j y^l \tag{9}$$

при $c_{01} = b_{10} = 0$, $c_{10} = b_{01} = 1$, то есть условия наличия центра для уравнения

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{x + \sum\limits_{j+l=2}^{\infty} c_{jl} x^j y^l}{y + \sum\limits_{j+l=2}^{\infty} b_{jl} x^j y^l}. \tag{10}$$

Для этого заменим систему (9) одним уравнением

$$i\frac{dw}{dt} = w + \sum_{r=2}^{\infty} \varphi_r,$$

где $\varphi_r \equiv \sum\limits_{j+l=r} 2^{-j-l} z_{jl} \bar{w}^j w^l$.

Используя результаты работ [7] и [8] или [9], будем искать действительный голоморфный интеграл этого уравнения в виде

$\sum\limits_{k=2}^{\infty} F_k = C$, где $F_k = \sum\limits_{j+l=k} a_{jl} \bar{w}^j w^l$ $(k \geqslant 2)$, $a_{20} = a_{02} = 0$, $a_{11} = 1$, $a_{jl} = \bar{a}_{lj}$ $(j + l \geqslant 3)$ и $a_{ll} = 0$ $(l > 1)$.

Коэффициенты a_{jl} должны при этом определяться из тождества

$$\sum_{k=2}^{\infty} F'_{k_{\bar{w}}} \left(\bar{w} + \sum_{r=2}^{\infty} \bar{\varphi}_r\right) - \sum_{k=2}^{\infty} F'_{k_w} \left(w + \sum_{r=2}^{\infty} \varphi_r\right) \equiv 0.$$

Приравнивая в нем члены k-ой степени относительно $\bar{w}$ и w, получим:

$$\bar{w} F'_{k_{\bar{w}}} - w F'_{k_w} \equiv \sum_{r=2}^{k-1} \left(F'_{r_w} \varphi_{k-r+1} - F'_{r_{\bar{w}}} \bar{\varphi}_{k-r+1}\right) \quad (k = 3, 4, \ldots).$$

Последнее тождество перепишется так:

$$\sum_{j+l=k} (j - l)\, a_{jl} \bar{w}^j w^l \equiv 2i \operatorname{Im} \sum_{r=2}^{k-1} F'_{r_w} \varphi_{k-r+1}.$$

Приравнивая здесь коэффициенты при одинаковых степенях $\bar{w}$ и w, получим, что

$$(j - l)\, a_{jl} = 2^{-j-l} \sum_{p+q=2}^{j+l-1} 2^{p+q-1} q \left(a_{pq} z_{j-p,\, l-q+1} - \bar{a}_{pq} \bar{z}_{l-p,\, j-q+1}\right). \tag{11}$$

В частности,

$$3a_{30} = \frac{1}{4} z_{20}, \quad a_{21} = \frac{1}{4}(z_{11} - \bar{z}_{02}), \quad a_{12} = -\frac{1}{4}(z_{02} - \bar{z}_{11}), \quad 3a_{03} = -\frac{1}{4}\bar{z}_{20}. \tag{12}$$

Полагая в (11) $j = l$, получим условия наличия центра в виде:

$$\operatorname{Im} \sum_{\substack{p+q=2 \\ p<l,\ q<l+1}}^{2l-1} 2^{p+q-1} q\, a_{pq} z_{l-p,\, l-q+1} = 0 \quad (l = 2, 3, \ldots), \tag{13}$$

причем первое из них (при $l=2$) будет $\operatorname{Im}(z_{11} z_{02} - 2z_{12}) = 0$.

Из (11) и (12) методом математической индукции видно, что a_{pq} являются многочленами от z_{jl}, $\bar{z}_{jl}$, причем $a_{pq}(U_\varphi z) = a_{pq}(z) e^{(q-p)i\varphi}$. Так как при $Q(z) \equiv z_{l-p,\, l-q+1}$, $Q(U_\varphi z) = z_{l-p,\, l-q+1} e^{(p-q)i\varphi}$, отсюда видно, что левые части равенств (13) являются инвариантами поворота координатных осей как для системы (1) при $A = \{1, 2, \ldots\}$, так и для системы (9). В то же время из вышеизложенного следует, что они являются относительными а. и. ортогонального преобразования для системы (1) и уравнения (10).

Теперь снова очевидно, что равенство нулю мнимых частей а. и. группы U над D (или, что то же, полной системы а. и. группы U над D) достаточно для наличия центра [1, 2].

ЛИТЕРАТУРА

1. К. С. Сибирский, Инварианты линейных представлений группы вращений плоскости и проблема центра. ДАН СССР, т. 151, № 3 (1963), 497—500, с поправкой, т. 156, № 2 (1964), 238.
2. К. С. Сибирский, Инварианты линейных представлений групп преобразований фазовой плоскости и их приложения в качественной теории дифференциальных уравнений. Тезисы докладов на Всесоюзном симпозиуме по качественной теории дифференциальных уравнений и ее применениям, Самарканд (1964), 64—65.
3. Г. Вейль, Классические группы, их инварианты и представления, ИЛ, 1947.
4. C. Pearcy, A complete set of unitary invariants for 3×3 complex matrices. Trans. Amer. Math. Soc., vol. 104, № 3 (1962), 425—429.
5. F. D. Murnaghan, On the unitary invariants of a square matrix. Anais da Academia brasileira de ciencias, vol. 26, № 1 (1954), 1—7.
6. Д. П. Желобенко, К решению одной задачи о полиномиальных инвариантах. Успехи матем. наук, т. 18, в. 6 (114) (1963), 193—196.
7. А. М. Ляпунов, Общая задача об устойчивости движения. Гостехиздат, 1950.
8. H. Dulac, Determination et intégration d'une certaine classe d'équations différentielles ayant pour point singulier un centre. Bull. des sciences mathém., t. 32 (1908), 230—252.
9. К. Е. Малкин. Некоторые условия центра, Ученые записки Рязанского пед. ин-та, т. 35 (1963), 151—161.

А. В. МАРИНЧУК, К. С. СИБИРСКИЙ

ИНВАРИАНЦИЙ ТРАНСФОРМЭРИЛОР ОРТОГОНАЛЕ АЛЕ ПЛАНУЛУЙ ФАЗИК АЛ СИСТЕМУЛУЙ ДЕ ЕКУАЦИЙ ДИФЕРЕНЦИАЛЕ

Резумат

Трансформэриле ортогонале але планулуй фазик индук ын спациул коефичиенцилор унуй систем аутоном де доуэ екуаций диференциале (1) ун груп L_0 де трансформэрь линиаре. Пе база резултателор дин [1, 2], ын артикол се студиязэ инварианций алжебричь [3] ай ачестуй груп. Се дескрие конструкция уней базе полиномиале ши а унуй систем комплект де инварианць алжебричь ай групулуй L_0, каре пентру казул унуй систем (1) линеар оможен коинчид (дупэ симпле трансформэрь) ку база полиномиалэ ши системул комплект де инварианць алжебричь ай трансформэрилор унитаре але уней матриче патрате де ординул дой, обциnуте респектив де Ф. Мурнаган ши Д. П. Желобенко ын [5] ши [6], дакэ ачестя се консидерэ пентру казул матричелор реале. Ка урмаре се обцине комплектитатя системулуй тутурор инварианцилор алжебричь ай групулуй L_0 ши ын калитате де екземплу се експримэ прин ачешть инварианць кондицииле де екзистенцэ а чентрулуй пентру екуация (10).

Ю. М. РЯБУХИН

РАДИКАЛЫ В КАТЕГОРИЯХ

В настоящей работе продолжается изучение общей теории радикалов в категориях, начатое в работе [1]. В теорию категорий переносятся основные результаты работы [2], дается определение наследственного радикала, идеально наследственного радикала, обобщенно специального класса объектов и устанавливается связь между этими понятиями, обобщаются некоторые результаты работы [3] Амицура о радикалах колец и усиливается ряд результатов работы Шульгейфера [1] об общей теории радикалов в категориях. Полученные результаты применяются для изучения общих и наследственных радикалов в категориях колец и модулей. Кроме того, продолжается изучение специальных радикалов ассоциативных колец [4].

ВВЕДЕНИЕ

В основном мы будем пользоваться терминологией из работы А. Г. Куроша, А. Х. Лившица и Е. Г. Шульгейфера [5] об основах теории категорий. Основные вспомогательные результаты взяты из работы [1].

Пусть K — произвольная категория, в которой верны

Аксиома 1. Категория K обладает нулевыми отображениями.

Аксиома 2. Всякое отображение обладает ядром.

Аксиома 3. Каждое отображение обладает образом.

Под образом отображения $\alpha : a \to b$ понимается такой подобъект (k, μ), объекта b, что $\alpha = \nu\mu$ для некоторого нормального эпиморфизма $\nu : a \to k$. Под образом подобъекта (u, δ) объекта a при отображении $\alpha : a \to b$ будем понимать образ отображения $\delta\alpha : a \to b$.

Аксиома 4. При любом нормальном эпиморфизме образом идеала является некоторый идеал.

Напомним, что подобъект (k, μ) объекта a называется идеалом объекта a, если (k, μ) — ядро некоторого отображения $\alpha : a \to b$.

Лемма 1 (см. [1], лемма 1.1). *Пусть $\alpha : a \to b$ — произвольное отображение, $\mu : b \to c$ — произвольный мономорфизм. Отображения α и $\alpha\mu$ имеют одинаковые ядра.*

Легко видеть, что всякий идеал является ядром некоторого нормального эпиморфизма. Заметим теперь, что все фактор-объекты вида (ν, b), где $\nu : a \to b$ — нормальные эпиморфизмы с одним и тем же ядром (k, μ), равны между собой. Эти фактор-объекты называются фактор-объектами объекта a по идеалу (k, μ).

Лемма 2, первая лемма об отображении (там же, теорема 2.1). *Пусть $\alpha : a \to b$ — произвольный нормальный эпиморфизм с ядром (k, μ). Тогда:*

а) Произвольный идеал (m, χ) объекта b является образом при эпиморфизме α единственного идеала (p, σ) объекта a, содержащего ядро (k, μ). (Этот идеал называется прообразом идеала (m, χ) объекта b при нормальном эпиморфизме $\alpha : a \to b$.)

б) Если (m, χ) — идеал объекта b, (p, σ) — прообраз этого идеала при нормальном эпиморфизме α, то в фактор-объектах (ν, c) объекта a по идеалу (p, σ) и (ν', c') объекта b по идеалу (m, χ) объекты c и c' эквивалентны.

Лемма 3 (там же, лемма 1.5.). *Пусть (k, μ) — ядро некоторого отображения $\alpha : a \to b$, (u, δ) — произвольный подобъект из a, содержащий ядро (k, μ),* и $\gamma : k \to u$ — *такой мономорфизм, что $\mu = \gamma\,\delta$. Тогда (k, γ) — ядро отображения $\delta\alpha : u \to b$.*

Пусть a — произвольный объект категории K. Под объединением (пересечением) *подобъектов* (k_i, μ_i) объекта a (i пробегает некоторое семейство Λ индексов) понимаем, как обычно, наименьший (наибольший) среди *подобъектов* объекта a, содержащих все (содержащихся во всех) (k_i, μ_i). Заменяя в этом определении слово „подобъект“ на слово „идеал“, получаем определения объединения и пересечения идеалов. Заметим, что объединение идеалов как идеалов не всегда совпадает с объединением тех же идеалов, рассматриваемых как подобъекты. Из аксиом 1—4 следует, что для любого конечного множества идеалов объединение всегда существует.

Лемма 4 (там же, теорема 2.4). *Пусть (k_1, μ_1) и (k_2, μ_2) — любые два идеала объекта a. Прообраз образа идеала (k_2, μ_2) при нормальном эпиморфизме с ядром (k_1, μ_1) и является объединением идеалов (k_1, μ_1) и (k_2, μ_2).*

Кроме всего вышеперечисленного, мы будем пользоваться понятиями точной последовательности, коммутативной диаграммы и некоторыми обозначениями, взятыми из гомологической алгебры [6]. Коммутативную диаграмму, составленную из точных последовательностей, будем называть точной диаграммой. Некоторые сведения о точных последовательностях имеются в работе [4].

Остальные сведения будут даны по мере необходимости.

§ 1. Общая теория радикалов в категориях

1. Пусть K — произвольная категория, в которой верны аксиомы 1—4. Заметим, что из аксиом 1—2 следует существование нулевого объекта в категории K. В дальнейшем мы будем считать категорию K зафиксированной и рассматривать объекты только этой категории.

Предположим, что некоторые объекты категории K обладают некоторым свойством s, т. е. являются *s-объектами*. Мы будем рассматривать только такие свойства s, что объект, эквивалентный s-объекту, сам обладает свойством s. Скажем, что идеал (k, μ) объекта a является *s-идеалом*, если k является s-объектом (сравни [1], § 3).

Будем говорить, что свойство s является *радикальным* или что *в категории K определен радикал s*, если выполнены следующие условия (см. [3], сравни [2], § 3):

А1: Если a — s-объект и последовательность $a \xrightarrow{\nu} b \to 0$ точна, то и объект b обладает свойством s.

A2. Для любого объекта a существует наибольший s-идеал.

A3. Если (r, ρ) — наибольший s-идеал объекта a и последовательность $0 \to r \xrightarrow{\rho} a \xrightarrow{\nu} c \to 0$ точна, то объект c не имеет ненулевых s-идеалов.

Если свойство s является радикальным, то объединение (r, ρ) всех s-идеалов объекта a является s-идеалом и существует. Этот s-идеал называется *s-радикалом* объекта a. Объекты a, для которых $(r, \rho) = (0, \omega)$, т. е. объекты без ненулевых s-идеалов, называются *s-полупростыми* объектами.

Предложение 1.1. *Всякое радикальное свойство s удовлетворяет условию*

A 4. Если объекты k и b являются s-объектами и последовательность $0 \to k \xrightarrow{\mu} a \xrightarrow{\nu} b \to 0$ точна, то и a — s-объект.

Предложение 2.1. *Пусть свойство s удовлетворяет условию $A1$. Тогда:*

1) При любом нормальном эпиморфизме образ s-идеала является s-идеалом.

2) Если $\mathfrak{m}$ — такой класс идеалов (k_i, μ_i) объекта a, что во всякой точной последовательности $0 \to k_i \xrightarrow{\mu_i} a \xrightarrow{\nu_i} c_i \to 0$ объекты c_i не имеют ненулевых s-идеалов, причем пересечение (k, μ) всех идеалов (k_i, μ_i) существует, то и в точной последовательности $0 \to k \xrightarrow{\mu} a \xrightarrow{\nu} c \to 0$ объект c не имеет ненулевых s-идеалов.

Предложение 3.1. *Пусть свойство s удовлетворяет условиям $A1$ и $A4$. Тогда:*

1) Для любого конечного множества s-идеалов объекта a объединение всегда существует и само является s-идеалом объекта a.

2) Если ядро (k, μ) нормального эпиморфизма $\nu: a \to b$ является s-идеалом объекта a, то соответствие, ставящее каждому s-идеалу объекта b его прообраз при нормальном эпиморфизме $\nu: a \to b$, является взаимно однозначным отображением класса всех s-идеалов объекта b на класс всех s-идеалов объекта a, содержащих ядро $(k; \mu)$ нормального эпиморфизма $\nu: a \to b$.

3) Для того чтобы идеал (k, μ) объекта a являлся наибольшим s-идеалом объекта a, необходимо и достаточно выполнения двух условий: а) (k, μ) — s-идеал объекта a; б) (k, μ) является наименьшим среди всех таких идеалов (p, σ) объекта a, что в точной последовательности $0 \to p \xrightarrow{\sigma} a \longrightarrow c \to 0$ объект c не имеет ненулевых s-идеалов.

Следствие 1.1. *Пусть s — произвольное радикальное свойство. Для любого конечного множества s-идеалов объединение всегда существует и само является s-идеалом. Если ядро (k, μ) нормального эпиморфизма $\nu: a \to b$ является s-идеалом, то s-радикал объекта a совпадает с прообразом s-радикала объекта b. Для любого объекта a s-радикал (r, ρ) объекта a совпадает с пересечением всех таких идеалов (p, σ) объекта a, что в точной последовательности $0 \to p \xrightarrow{\sigma} a \xrightarrow{\nu} c \to 0$ объект c s-полупрост.*

Предложение 4.1. *Пусть $\mathfrak{m}$ — такой класс s-идеалов (k_i, μ_i) объекта a, что объединение (k, μ) всех s-идеалов (k_i, μ_i) из $\mathfrak{m}$ существует и совпадает с объединением всех подобъектов (k_i, μ_i). Тогда идеал (k, μ) является s-идеалом.*

Предложение 5.1. *Всякое радикальное свойство s удовлетворяет условию*

A 5. Если во всякой точной последовательности $a \xrightarrow{\nu} b \to 0$, где объект b не является нулевым, объект b обладает ненулевым s-идеалом, то объект a является s-объектом. Для любого радикального свойства s класс $P(s) = M$ всех s-полупростых объектов удовлетворяет условию

B1. Если (b, μ) — ненулевой идеал объекта a из класса M, то существует такая точная последовательность $b \xrightarrow{\nu} c \to 0$, что c — ненулевой объект из класса M.

Теорема 1.1. *Для любого свойства s, удовлетворяющего условиям $A1$ и $A2$, условия $A3$, $A4$, $A5$ равносильны.*

2. Допустим теперь, что в рассматриваемой категории K кроме аксиом 1—4 верны и такие аксиомы:

Аксиома 5. Для любого объекта a категории K совокупность всех идеалов объекта a является множеством.

Аксиома 6. Для любого объекта a и любого множества идеалов (k_i, μ_i) объекта a существует объединение (k, μ), причем идеал (k, μ) совпадает с объединением всех подобъектов (k_i, μ_i).

Теорема 2.1. *Для любого свойства s, удовлетворяющего условию $A1$, условие $A5$ равносильно условиям $A2$ и $A3$, вместе взятым, т. е. свойство s является радикальным тогда и только тогда, когда оно удовлетворяет условиям $A1$ и $A5$.*

Скажем, что свойство s_1 содержит свойство s_2, и будем писать $s_1 \geqslant s_2$, если всякий s_2-объект является s_1-объектом. Очевидно, что свойства s_1 и s_2 совпадают тогда и только тогда, когда $s_1 \geqslant s_2$ и $s_2 \geqslant s_1$ одновременно. В этом случае будем писать $s_1 = s_2$. Наконец, как обычно, $s_1 > s_2$, если $s_1 \geqslant s_2$, но $s_1 \neq s_2$. Нетрудно видеть, что если s_1 и s_2 — радикальные свойства, то $s_1 \geqslant s_2$ в том и только в том случае, когда для любого объекта a справедливо включение $(r_1, \rho_1) \geqslant (r_2, \rho_2)$, где (r_i, ρ_i) — s_i-радикал объекта a $(i = 1,2)$.

Пусть M — произвольный класс объектов, удовлетворяющий условию B1. Скажем, что объект a является S_M-объектом, если во всякой точной последовательности $a \xrightarrow{\nu} b \to 0$ объект b или является нулевым или не принадлежит классу M. Свойство S_M назовем верхним радикалом, определяемым классом M с условием B1.

Предложение 6.1. *Для любого класса M с условием $B1$ свойство S_M удовлетворяет условиям $A1$ и $A5$, т. е. является радикальным свойством. Радикал S_M является наибольшим среди всех таких радикалов s, что все объекты из класса M s-полупросты.*

Скажем, что объект a является *подпрямой суммой объектов* a_i, где i пробегает некоторое множество индексов, если существуют такие идеалы (k_i, μ_i) объекта a, что $\bigcap (k_i, \mu_i) = (0, \omega)$ и во всякой точной последовательности $0 \to k_i \xrightarrow{\mu_i} a \xrightarrow{\nu_i} c_i \to 0$ объекты c_i и a_i эквивалентны.

Скажем, что идеал (p, σ) объекта a является *M-идеалом*, где M — некоторый класс объектов, если в точной последовательности $0 \to p \xrightarrow{\sigma} a \xrightarrow{\nu} c \to 0$ объект c — ненулевой объект из класса M.

Будем считать, что пересечение пустого множества идеалов совпадает с несобственным идеалом и подпрямая сумма пустого множества объектов является нулевым объектом. При такой договоренности равносильны утверждения:

(π). Для любого объекта a верхний радикал (r, ρ) объекта a совпадает с пересечением всех M-идеалов объекта a.

(π^*) S_M-полупростые объекты — это в точности подпрямые суммы объектов из класса M.

Скажем, что радикал s является *наследственным*, если всякий идеал s-объекта является s-идеалом.

Предложение 7.1. *Верхний радикал S_M, определяемый классом M с условием $B1$, является наследственным и удовлетворяет одновременно условиям π и π^* в том и только в том случае, когда класс M удовлетворяет, кроме условия $B1$, такому условию:*

B4. *Если (b, μ) — ненулевой идеал объекта a и существует хотя бы один M-идеал объекта b, то существует такой M-идеал (p, σ) объекта a, что $(p, \sigma) \gg (b, \mu)$.*

Следствие 2.1. *Для любого класса N существует наименьший среди всех таких наследственных радикалов s, что все s-полупростые объекты являются подпрямыми суммами объектов из класса N.*

Перейдем теперь к построению нижних радикалов.

Пусть δ — произвольное свойство объектов категории K, в которой верны аксиомы 1—6. Построим для любого объекта a следующую, быть может трансфинитную, цепь идеалов

$$\left(p_1^a, \sigma_1^a\right) \leqslant \cdots \leqslant \left(p_i^a, \sigma_i^a\right) \leqslant \left(p_{i+1}^a, \sigma_{i+1}^a\right) \leqslant \cdots \qquad (*)$$

В качестве первого члена цепи (*) возьмем объединение всех δ-идеалов объекта a, причем если множество δ-идеалов пусто, то будем считать, как обычно, что $\left(p_1^a, \sigma_1^a\right) = (0, \omega)$.

Допустим, что для всех чисел $j < i$ идеалы $\left(p_j^a, \sigma_j^a\right)$ уже построены, причем если $m \leqslant n < i$, то $\left(p_m^a, \sigma_m^a\right) \leqslant \left(p_n^a, \sigma_n^a\right)$.

а) Если i — предельное, то полагаем по определению

$$\left(p_i^a, \sigma_i^a\right) = \bigcup_{j<i}\left(p_j^a, \sigma_j^a\right).$$

б) Если i — не предельное, т. е. $i-1$ существует, то рассматриваем точную последовательность $0 \to p_{i-1}^a \xrightarrow{\sigma_{i-1}^a} a \xrightarrow{\nu_{i-1}^a} a_{i-1} \to 0$ и берем в качестве $\left(p_i^a, \sigma_i^a\right)$ прообраз объединения всех δ-идеалов объекта a_{i-1}.

Методом трансфинитной индукции цепь (*) построена. Так как совокупность всех идеалов объекта a является множеством, то существует такое число i, что для всех $j \geqslant i$

$$(p_j^a, \sigma_j^a) = (p_i^a, \sigma_i^a) = (p_a^\delta, \sigma_a^\delta).$$

Будем говорить, что объект a является *$\overline{\delta}$-объектом*, если и только если $(p_a^\delta, \sigma_a^\delta) = (a, \varepsilon)$.

Из построения цепи (*) легко следует, что в точной последовательности $0 \to p_a^\delta \xrightarrow{\sigma_a^\delta} a \xrightarrow{\nu_a^\delta} a^\delta \to 0$ объект a^δ не имеет ненулевых

δ-идеалов. Нетрудно видеть, что $(p_a^\delta, \sigma_a^\delta) = (0, \omega)$ тогда и только тогда, когда $(p_1^a, \sigma_1^a) = (0, \omega)$, т. е. когда объект a не имеет ненулевых δ-идеалов.

Лемма 1.1. *Пусть δ — произвольное свойство объектов, удовлетворяющее условию $A1$, $\nu: a \to b$ — произвольный нормальный эпиморфизм, $(m_i^a, \varkappa_i^a)$ — образ (p_i^a, σ_i^a), $(m_a^\delta, \varkappa_a^\delta)$ — образ $(p_a^\delta, \sigma_a^\delta)$ при эпиморфизме $\nu: a \to b$. Тогда:*

$$(m_i^a, \varkappa_i^a) \leqslant (p_i^b, \sigma_i^b), \quad (m_a^\delta, \varkappa_a^\delta) \leqslant (p_b^\delta, \sigma_b^\delta).$$

Лемма 2.1. *Пусть δ — произвольное свойство объектов, удовлетворяющее условию $A1$. Идеал $(p_a^\delta, \sigma_a^\delta)$ является наименьшим среди всех таких идеалов (k, μ) объекта a, что во всякой точной последовательности $0 \to k \xrightarrow{\mu} a \xrightarrow{\nu} b \to 0$ объект b не имеет ненулевых δ-идеалов.*

Предложение 8.1. *Если свойство δ удовлетворяет условию $A1$, а класс $P(\delta)$ всех объектов без ненулевых δ-идеалов — условию $B1$, то свойство $\overline{\delta}$ является радикальным, причем для любого объекта a его $\overline{\delta}$-радикал совпадает с идеалом $(p_a^\delta, \sigma_a^\delta)$, а класс $P(\delta)$ совпадает с классом всех $\overline{\delta}$-полупростых объектов.*

Будем понимать теперь под суммой свойств δ_i свойство $\delta = \Sigma\delta_i$ объектов обладать хотя бы одним из свойств δ_i. Строим цепь свойств

$$\delta_1 \leqslant \delta_2 \leqslant \ldots \leqslant \delta_i \leqslant \delta_{i+1} \leqslant \ldots, \qquad (\cdot)$$

где δ — произвольное свойство объектов, следующим образом.

Скажем, что объект a является *δ_1-объектом*, если существует хотя бы одна точная последовательность $b \xrightarrow{\nu} a \to 0$, где объект b обладает свойством δ. Очевидно, что свойство δ_1 удовлетворяет условию A1. В качестве первого члена цепи $(\cdot)$ берем свойство δ_1.

Если i — предельное, то полагаем по определению $\delta_i = \sum_{j<i} \delta_j$. Если i — не предельное, то полагаем по определению $\delta_i = \overline{\delta}_{i-1}$. Так как свойство δ_1 удовлетворяют условию A1, то легко видеть, что и все свойства δ_i удовлетворяют условию A1. По трансфинитной индукции цепь $(\cdot)$ построена.

Свойство $\delta^{\cdot} = \sum_i \delta_i$ назовем *нижним радикалом*, порожденным свойством δ. Это название оправдано тем, что верно

Предложение 9.1. *Для любого свойства δ свойство $\delta^{\cdot}$ является радикальным, так как оно удовлетворяет условиям $A1$ и $A5$. Радикал $\delta^{\cdot}$ является наименьшим среди всех таких радикалов s, что $s \geqslant \delta$.*

Пусть δ — произвольное свойство объектов. Скажем, что объект a является *δ^0-объектом*, если существует хотя бы одна точная последовательность $0 \to a \xrightarrow{\mu} b \xrightarrow{\nu} c \to 0$ такая, что объект b обладает свойством δ. Будем строить цепь свойств

$$\delta_1' \leqslant \delta_2' \leqslant \ldots \leqslant \delta_i' \leqslant \delta_{i+1}' \leqslant \ldots \qquad (*)$$

следующим образом: если i — предельное, то полагаем $\delta_i' = \sum_{j<i} \delta_j'$; если же i — не предельное, то полагаем по определению

$$\delta_{i-1,1} = (\delta_{i-1}')^0, \quad \delta_{i-1,2} = (\delta_{i-1,1})_1, \quad \delta_i' = \overline{(\delta_{i-1,2})}.$$

Свойство $\delta^* = \sum_i \delta_i'$ назовем *нижним наследственным радикалом*, порожденным свойством δ. Это название оправдано тем, что верно

Предложение 10. 1. *Для любого свойства δ свойство δ^* является радикальным свойством, причем радикал δ^*—наследственный. Радикал δ^* является наименьшим среди всех таких наследственных радикалов s, что $s \geqslant \delta$.*

3. Пусть теперь в категории K кроме аксиом 1—6 верны и такие аксиомы:

Аксиома 7. Для любого объекта a и любого множества идеалов (k_i, μ_i) объекта a пересечение (k, μ) существует, причем идеал (k, μ) совпадает с пересечением всех подобъектов (k_i, μ_i).

Аксиома 8. Для любого объекта a, любой цепи идеалов (k_i, μ_i) объекта a и любого идеала (k, μ) из a верно равенство

$$(k, \mu) \cap (\cup (k_i, \mu_i)) = \cup ((k, \mu) \cap (k_i, \mu_i)).$$

Лемма 3.1, вторая лемма об отображении. *Пусть a — произвольный объект категории K, (k_i, μ_i)—любые два идеала объекта a, $\nu_i: a \to a_i$—нормальные эпиморфизмы с ядром (k_i, μ_i), $(k, \mu) = \cap (k_i, \mu_i)$, $(\bar{k}, \bar{\mu}) = \cup (k_i, \mu_i) (i = 1, 2)$, $\nu: a \to b$—нормальный эпиморфизм с ядром (k, μ), $(\bar{k}_1, \mu')$—образ $(\bar{k}, \bar{\mu})$ при нормальном эпиморфизме ν_1, $(\bar{k}_2, \mu_2')$—образ (k_2, μ_2) при нормальном эпиморфизме ν. Тогда объекты $\bar{k}_1$ и $\bar{k}_2$ эквивалентны.*

Замечая, что образом подобъекта (u, δ) объекта a при мономорфизме $\mu: a \to b$ является $(u, \delta\mu)$, дадим такое

Определение 1. Радикал s называется *идеально наследственным*, если и только если выполнено условие

А6. Для любого объекта a и любого идеала (b, μ) объекта a

$$(r, \rho) \cap (b, \mu) = (r', \rho'\mu),$$

где (r, ρ)—s-радикал объекта a, (r', ρ')—объекта b.

Теорема 3.1. *Всякий идеально наследственный радикал является наследственным. Наследственный радикал s является идеально наследственным тогда и только тогда, когда выполнено хотя бы одно из условий:*

(1) *Если (b, μ)—идеал объекта a, (r', ρ')—s-радикал объекта b, то и $(r', \rho'\mu)$—идеал объекта a.*

(2) *Если (b, μ)—идеал s-полупростого объекта a, то и сам объект b s-полупрост.*

Определение 2. Скажем, что класс M объектов является *обобщенно специальным*, если выполнены условия:

Н1. Если $a \dot{\in} M$ и (b, μ)—ненулевой идеал из a, то и $b \in M$.

Н2. Если $b \in M$, (b, μ)—ненулевой идеал объекта a, причем $(b, \mu) \cap (m, \varkappa) \neq (0, \omega)$ для любого ненулевого идеала $(m, \varkappa)$ из a, то и $a \in M$.

Н3. Если (b, μ)—идеал объекта a, (c, ρ)—M-идеал объекта b, то существует такой идеал $(k, \gamma\rho\mu)$ объекта a, что и $(k, \gamma\rho)$ является M-идеалом объекта b (см. лемму 3).

С помощью леммы Куратовского—Цорна о частично упорядоченных множествах и максимальных элементах доказываем, что верна

Лемма 4.1. *Пусть a—произвольный объект, (k_1, μ_1) и (k_2, μ_2)—идеалы объекта a, причем $(k_1, \mu_1) \geqslant (k_2, \mu_2)$. Существует максимальный среди таких идеалов (k, μ) объекта a, что $(k, \mu) \cap (k_1, \mu_1) = (k_2, \mu_2)$.*

Из лемм 3.1 и 4.1, а также первой леммы об отображении и предложения 7.1 следует

Теорема 4.1. *Пусть M—произвольный обобщенно специальный класс объектов. Класс M определяет некоторый верхний радикал S_M. Радикал S_M является идеально наследственным, причем для любого объекта a его S_M-радикал (r, ρ) совпадает с пересечением всех M-идеалов из a, т. е. S_M-полупростые объекты—это в точности подпрямые суммы объектов из класса M. Всякий идеально наследственный радикал s совпадает с некоторым верхним радикалом S_M, определяемым некоторым обобщенно специальным классом объектов.*

Учитывая, что верна

Лемма 5.1. *Для любого класса M условие Н3 равносильно условию:*

Н4. *Если (b, μ)—идеал объекта a, (c, ρ)—M-идеал объекта b $(k, \gamma\rho\mu)$,—наибольший среди идеалов объекта a, содержащихся в подобъекте $(c, \rho\mu)$, т. е. объединение всех таких идеалов, то и $(k, \gamma\rho)$ является M-идеалом объекта b,*

получаем, что пересечение и объединение обобщенно специальных классов объектов является обобщенно специальным классом объектов. Но тогда нетрудно доказать, что верна

Теорема 5.1. *Пусть δ — произвольное свойство объектов.*

1) *Существует наименьший среди таких идеально наследственных радикалов s, что $s \geqslant \delta$.*

2) *Если свойство δ удовлетворяет условию А5, то существует наибольший среди таких идеально наследственных радикалов s, что $s \leqslant \delta$.*

3) *Существует наименьший среди всех таких идеально наследственных радикалов s, что все s-полупростые объекты являются подпрямыми суммами δ-объектов.*

4) *Существует наибольший среди всех таких идеально наследственных радикалов s, что все δ-объекты s-полупросты.*

§ 2. Радикалы колец и модулей

Применим полученные в § 1 результаты к теории колец и модулей.

1. Начало общей теории радикалов колец было положено в работах Куроша и Амицура [2, 3]. В серии работ [4, 7—10] В. А. Андрунакиевича развивалась теория радикалов ассоциативных колец. Мы продолжим изучение общих и наследственных радикалов колец.

Напомним некоторые сведения и результаты, необходимые нам для дальнейшего. В основном они взяты из работ [2—4].

Рассматривается класс L колец, удовлетворяющий условиям:

(а) Всякий гомоморфный образ кольца из класса L принадлежит классу L.

(б) Всякий идеал кольца из класса L принадлежит классу L.

Заметим, что всякий такой класс L колец является категорией, в которой верны все аксиомы 1—8. Поэтому все результаты, доказанные для категорий в § 1, верны и для категории L. В дальнейшем будем считать, что класс L зафиксирован, и рассматривать кольца только из этого класса.

Пусть s—произвольное свойство колец. Кольца, обладающие свойством s, называются *s-кольцами*. Идеал B кольца A называется *s-идеалом*, если кольцо B является s-кольцом. Сумму всех s-идеалов кольца A обозначим через $s(A)$.

Свойство s называется *радикальным*, если

A1. Гомоморфный образ s-кольца является s-кольцом.

A2. Для любого кольца A $s(A)$ является s-идеалом в A.

A3. Для любого кольца A $s(A/s(A))=0$.

Если свойство s является радикальным, то говорят, что *определен радикал s*. s-Кольца называются *s-радикальными* кольцами, идеал $s(A)$ кольца A — *s-радикалом* кольца A, кольца без ненулевых s-идеалов, т. е. кольца с нулевым s-радикалом — *s-полупростыми* кольцами.

Из результатов, полученных в § 1, следуют известные утверждения.

Предложение 1.2. *Для любого свойства s, удовлетворяющего условию A1, следующие утверждения равносильны:*

1) Свойство s удовлетворяет условиям A2 и

A4. *Расширение s-кольца при помощи s-кольца само является s-кольцом, т. е. если A/B и B — s-кольца, то и A — s-кольцо.*

2) Свойство s удовлетворяет условию

A5. *Если любой ненулевой гомоморфный образ $\overline{A}$ кольца A обладает ненулевым s-идеалом, то кольцо A является s-кольцом.*

3) Свойство s удовлетворяет условиям A2 и A3, т. е. является радикальным свойством.

Предложение 2.2. *Пусть s — произвольный радикал. Для любого кольца A его s-радикал $s(A)$ совпадает с пересечением всех таких идеалов T из A, что фактор-кольца A/T s-полупросты. Поэтому всякая подпрямая сумма s-полупростых колец является s-полупростым кольцом. Кольцо A s-радикально тогда и только тогда, когда оно не отображается гомоморфно на ненулевые s-полупростые кольца, т. е. когда $A=s(A)$. Поэтому всякий ненулевой идеал s-полупростого кольца отображается гомоморфно на ненулевые s-полупростые кольца. Сумма s-радикальных идеалов — s-радикальный идеал. И s-радикально и s-полупросто только нулевое кольцо.*

Пусть M — произвольный класс колец, удовлетворяющий следующему условию.

B1. Любой ненулевой идеал кольца из класса M гомоморфно отображается на некоторое ненулевое кольцо из класса M.

Скажем, что кольцо A является *S_M-кольцом*, если оно не отображается гомоморфно на ненулевые кольца из класса M. Легко видеть, что свойство S_M удовлетворяет условиям A1 и A5, т. е. является радикальным свойством. Радикал S_M называется *верхним радикалом*, определяемым классом M с условием B1 [3]. Радикал S_M является наибольшим среди всех таких радикалов s, что все кольца из класса M s-полупросты.

Напомним, что радикал s называется *наследственным*, если всякий идеал s-радикального кольца сам является s-радикальным кольцом. Идеал B кольца A называется M-идеалом, если фактор-кольцо A/B является ненулевым кольцом из класса M.

Из результатов, полученных в § 1, следует известное [5]

Предложение 3.2. *Пусть M — произвольный класс колец с условием B1. Для того, чтобы верхний радикал S_M, определяемый классом M, являлся наследственным и удовлетворял одновременно условию*

(π). *Для любого кольца A его S_M-радикал $S_M(A)$ совпадает с пересечением всех M-идеалов из A, т. е. S_M-полупростые кольца — это в точности подпрямые суммы колец из класса M,*

необходимо и достаточно выполнения условия:

B2. *Если идеал B кольца A обладает хотя бы одним M-идеалом, то существует хотя бы один такой M-идеал T кольца A, что B не содержится в T.*

Следствие 1.2. *Пусть N — произвольный класс колец. Существует наименьший среди всех таких наследственных радикалов s, что все s-полупростые кольца — подпрямые суммы колец из класса N.*

Перейдем теперь к идеально наследственным радикалам. Под *идеально наследственным радикалом* мы понимаем такой радикал s, что для любого кольца A и любого идеала B из A верно равенство

$$s(B)=B\cap s(A).$$

Из результатов, полученных в § 1, следует известное [4]

Предложение 4.2. *Всякий идеально наследственный радикал является наследственным. Наследственный радикал s является идеально наследственным, если и только если выполнено хотя бы одно из условий:*

1) *Если B — идеал кольца A, то и $s(B)$ — идеал в A.*

2) *Всякий идеал s-полупростого кольца сам s-полупрост.*

Дадим теперь характеристику идеально наследственных радикалов.

Определение 1. Класс M колец называется *обобщенно специальным* классом колец в том и только в том случае, когда выполнены следующие условия:

H1. Если $A\in M$, B — ненулевой идеал кольца A, то и $B\in M$.

H2. Если $B\in M$, B — ненулевой идеал кольца A, причем $B\cap C\neq 0$ для любого ненулевого идеала C из A, то и $A\in M$.

H3. Если B — идеал кольца A, C — M-идеал кольца B, то существует такой идеал T кольца A, что $T\subseteq C$ и T — M-идеал кольца B.

Теорема 1.2. *Пусть M — произвольный обобщенно специальный класс колец. Верхний радикал S_M, определяемый классом M, является идеально наследственным радикалом, причем для любого кольца A его S_M-радикал $S_M(A)$ совпадает с пересечением всех M-идеалов из A, т. е. S_M-полупростые кольца — это в точности подпрямые суммы колец из класса M. Всякий идеально наследственный радикал s совпадает с некоторым верхним радикалом*

S_M, где M — *подходяще выбранный обобщенно специальный класс колец.*

Из результатов, полученных в § 1, следует, что верна

Лемма 1.2. *Для любого класса M колец условие Н3 равносильно следующему условию:*

Н4. *Если B — идеал кольца A, C — M-идеал кольца B, T — наибольший среди идеалов кольца A, содержащихся в C, т. е. сумма всех таких идеалов, то и T — M-идеал кольца B.*

Поэтому пересечение и объединение обобщенно специальных классов колец является обобщенно специальным классом колец. Но тогда легко получаем, что верна

Теорема 2.2. *Пусть δ — произвольное свойство колец.*

1) *Существует наименьший среди таких идеально наследственных радикалов s, что $s \geqslant \delta$.*

2) *Если свойство δ удовлетворяет условию А5, то существует наибольший среди таких идеально наследственных радикалов s, что $s \leqslant \delta$.*

3) *Существует наименьший среди таких идеально наследственных радикалов s, что все s-полупростые кольца являются подпрямыми суммами δ-колец.*

4) *Существует наибольший среди всех таких идеально наследственных радикалов s, что все δ-кольца s-полупросты.*

Предложение 5.2. *Класс колец M является обобщенно специальным классом колец в том и только в том случае, когда для M-идеалов выполнены условия:*

(α) *Если M-идеал T кольца A не содержит идеал B из A, то $T \cap B$ является M-идеалом кольца B.*

(β) *Если C — M-идеал кольца B, B—идеал в A, то существует такой M-идеал T из A, что $T \cap B \subseteq C$.*

2. Допустим теперь, что основной класс L колец совпадает с классом А всех ассоциативных колец. В силу результата Амицура в классе А всякий наследственный радикал является идеально наследственным. Поэтому в классе А теоремы 1.2 и 2.2 верны для наследственных радикалов.

Рассмотрим два частных случая наследственных радикалов.

Напомним, что наследственный радикал s называется *наднильпотентным*, если все нильпотентные кольца s-радикальны. Наследственный радикал s называется *подыдемпотентным*, если все нильпотентные кольца s-полупросты. Большинство радикалов являются либо наднильпотентными, либо подыдемпотентными. Однако нетрудно привести пример наследственного радикала, не являющегося ни наднильпотентным, ни подыдемпотентным.

Предложение 6.2. *Обобщенно специальные классы колец, определяющие наднильпотентные радикалы — это в точности обобщенно специальные классы колец, состоящие только из колец без ненулевых нильпотентных идеалов, т. е. обобщенно специальные классы, не содержащие ни одного кольца с нулевым умножением над циклическими группами. Обобщенно специальные классы колец, определяющие подыдемпотентные радикалы, — это в точности обобщенно специальные классы колец, содержащие все кольца с нулевым умножением над циклическими группами простых порядков, т. е. все простые нильпотентные кольца.*

Предложение 7.2. *Класс колец M является обобщенно специальным и определяет одновременно наднильпотентный радикал тогда и только тогда, когда для M-идеалов выполнено следующее условие:*

(γ) *Пусть B — ненулевой идеал кольца A. Тогда идеал C из B является M-идеалом в том и только в том случае, если $C = T \cap B$ для некоторого M-идеала T кольца A, $T \not\supseteq B$.*

Следствие 2.2. *Наследственный радикал s является наднильпотентным тогда и только тогда, когда выполнено следующее условие:*

(δ) *Если B/T — s-полупростое кольцо, B — идеал в A, то и T—идеал кольца A.*

Частным случаем наднильпотентных радикалов являются *специальные радикалы* — верхние радикалы, определенные специальными классами колец. Специальные классы колец — это в точности обобщенно специальные классы колец, состоящие только из первичных колец. Напомним, что ненулевое кольцо A называется первичным, если всякое произведение любых двух ненулевых идеалов из A является ненулевым идеалом.

Большинство известных и все хорошо известные наднильпотентные радикалы являются специальными. Можно построить пример наднильпотентного, но не специального радикала — это, например, верхний радикал, определяемый классом всех булевых колец, не содержащих в качестве идеала поле Z_2 из двух элементов. Дадим несколько методов построения специальных классов колец, а значит, и специальных радикалов.

Предложение 8.2. *Если все классы M_i являются специальными, то $\bigcup M_i$ и $\bigcap M_i$ — также специальные классы колец. Более того, если все классы M_i являются обобщенно специальными классами колец, но хотя бы один из них — специальный, то и $\bigcap M_i$ — специальный класс колец. Если M_1 и M_2 — специальные классы колец, то и $M_1 \diagdown M_2$ является специальным классом колец.*

Скажем, что свойство δ *наследственно*, если всякий идеал δ-кольца сам является δ-кольцом. Скажем, что свойство δ *сильно наследственно*, если оно наследственно и удовлетворяет условию А1.

Предложение 9.2. *Если свойство δ наследственно, то класс $P(\delta)$ всех первичных колец без ненулевых δ-идеалов и класс $P \diagdown P(\delta)$ всех первичных колец с ненулевыми δ-идеалами являются специальными классами колец. Если свойство δ сильно наследственно, то класс $P(\delta)$ всех первичных колец без ненулевых δ-идеалов определяет наименьший среди специальных радикалов, содержащих свойство δ.*

Следствие 3.2. *Для любого наследственного радикала s существует наименьший среди специальных радикалов, содержащих радикал s.*

Пусть A — произвольное первичное кольцо. Обозначим через $P(A)$ наименьший среди специальных классов колец, содержащих A. В силу предложения 8.2 этот класс существует и совпадает с пересечением всех специальных классов колец, содержащих данное первичное кольцо A.

Строение классов $P(A)$ и значение этих классов дает

Теорема 3.2. *Класс колец M является специальным классом колец в том и только в том случае, когда все кольца из класса M первичны и $M = \bigcup_{A \in M} P(A)$. Для любых двух первичных колец A и B либо $P(A) = P(B)$, либо $P(A) \cap P(B) = \varnothing$. Кольцо K принадлежит классу $P(A)$ тогда и только тогда, когда существуют такие кольца C и B, что B — ненулевой идеал кольца A, C — первичное расширение кольца B, K — первичное расширение кольца C.*

Кроме перечисленных методов построения специальных классов колец и специальных радикалов, можно указать еще построение специальных классов колец и специальных радикалов с помощью теории модулей [9—11]. С помощью теории модулей можно представить любой специальный радикал в виде пересечения некоторых правых идеалов.

3. Применим теперь полученные в § 1 результаты для развития теории радикалов модулей (а значит, и абелевых групп).

Пусть Λ — произвольное ассоциативное кольцо. Как обычно, будем рассматривать левые Λ-модули. В дальнейшем кольцо Λ будем считать зафиксированным и потому будем говорить „модуль", „гомоморфизм", „фактор-модуль" и т. д. вместо „Λ-модуль", „Λ-гомоморфизм", „фактор—Λ-модуль" и т. д.

Рассматриваем класс L модулей такой, что

а) Всякий гомоморфный образ модуля из класса L принадлежит L.

б) Всякий подмодуль модуля из класса L принадлежит L.

Легко проверить, что всякий такой класс L является категорией, в которой верны все аксиомы 1—8. Поэтому все результаты из § 1 верны и в категории L. В дальнейшем будем считать класс L зафиксированным и рассматривать модули только из этого класса.

Пусть s — произвольное свойство модулей. Скажем, что подмодуль B модуля A является *s-подмодулем*, если B — *s-модуль*.

Говорим, что свойство s является *радикальным* или что свойство s *определяет радикал* s, если

А1. Гомоморфный образ s-модуля является s-модулем.

А2. Для любого модуля A существует наибольший s-подмодуль $s(A)$.

А3. Для любого модуля A $s(A/s(A)) = 0$.

Если свойство s радикально, то s-модули называются *s-радикальными* модулями, подмодуль $s(A)$ — *s-радикалом* модуля A, модули с нулевым s-радикалом — *s-полупростыми* модулями.

Из результатов, полученных в § 1, следует

Предложение 1.3. *Для любого свойства s, удовлетворяющего условию А1, следующие утверждения равносильны:*

(1) *Свойство s удовлетворяет условию А2 и условию*

А4. *Расширение s-модуля при помощи s-модуля само является s-модулем, т. е. если A/B и B — s-модули, то и сам модуль A обладает свойством s.*

(2). *Свойство s удовлетворяет условию*

А5. *Если любой ненулевой гомоморфный образ $\bar{A}$ модуля A обладает ненулевым s-подмодулем, то A — s-модуль.*

(3) *Свойство s удовлетворяет условиям А2 и А3, т. е. является радикальным свойством.*

Предложение 2.3. *Пусть s — произвольное радикальное свойство. Для любого модуля A его s-радикал $s(A)$ совпадает с пересечением всех таких подмодулей T из A, что фактор-модули A/T s-полупросты. Поэтому всякая подпрямая сумма s-полупростых модулей является s-полупростым модулем. Модуль A s-радикален тогда и только тогда, когда он не отображается гомоморфно на ненулевые s-полупростые модули.* Всякий подмодуль s-полупростого модуля является s-полупростым модулем. *Единственным и s-радикальным и s-полупростым модулем одновременно является нулевой модуль.*

Пусть M—произвольный класс модулей, удовлетворяющий условию

В1. Любой ненулевой подмодуль модуля из класса M отображается гомоморфно на ненулевые модули из класса M.

Скажем, что модуль A является *S_M-модулем*, если он не отображается гомоморфно на ненулевые модули из класса M. Легко проверить, что для любого класса M с условием В1 свойство S_M удовлетворяет условиям А1 и А5, а потому является радикальным. Радикал S_M называется *верхним радикалом*, определяемым классом M с условием В1. Верхний радикал S_M является наибольшим среди таких радикалов s, что все модули из класса M s-полупросты. Всякий радикал s совпадает с некоторым верхним радикалом. Достаточно взять в качестве класса M класс $P(s)$ всех s-полупростых модулей.

Так как для любого радикала s класс $P(s)$ всех s-полупростых модулей удовлетворяет условию

Н1. Всякий ненулевой подмодуль модуля из класса M сам принадлежит классу M,

то получаем, что верно

Предложение 3.3. *Пусть δ — произвольное свойство модулей. Существует наибольший среди всех таких радикалов s, что все δ-модули s-полупросты.*

Рассмотрим следующие два утверждения.

(π) Для любого модуля A верхний радикал $S_M(A)$ совпадает с пересечением всех M-подмодулей из A, т. е. таких подмодулей T из A, что фактор-модули A/T — ненулевые модули из M.

(π^*) S_M-полупростые модули — это в точности подпрямые суммы модулей из класса M.

Нетрудно видеть, что эти условия равносильны.

Предложение 4.3. *Пусть M — произвольный класс модулей с условием В1. Для того чтобы верхний радикал S_M, определяемый классом M, являлся наследственным и удовлетворял одновременно условиям π и π^*, необходимо и достаточно выполнения условия*

В2. *Если подмодуль B модуля A обладает хотя бы одним M-подмодулем, то модуль A обладает хотя бы одним M-подмодулем, не содержащим модуль B.*

Следствие 1.3. *Для любого класса M существует наименьший среди всех таких наследственных радикалов s, что все s-полупростые модули являются подпрямыми суммами модулей из класса M.*

Легко видеть, что всякий наследственный радикал является идеально наследственным, т. е. наследственные радикалы s — это точно такие радикалы, что для любого модуля A и любого подмодуля B из A

$$s(B) = B \cap s(A).$$

Перейдем к построению нижних радикалов.

Пусть δ — произвольное свойство модулей, но такое, что нулевой модуль 0 является δ-модулем. Построим для любого модуля A следующую, быть может, трансфинитную цепь подмодулей

$$0 \subseteq \delta(A) = R_1^A \subseteq R_2^A \subseteq \cdots \leqslant R_i^A \leqslant R_{i+1}^A \leqslant \cdots. \qquad (*)$$

Если i — предельное, то полагаем $R_i^A = \sum\limits_{j<i} R_j^A$. Если же i — не предельное, то в качестве R_i^A берем прообраз подмодуля $\delta(A_{i-1})$ модуля $A_{i-1} = A/R_{i-1}^A$. По трансфинитной индукции цепь (*) построена. Существует такое число i, что для всех $j \geqslant i$

$$R_j^A = R_i^A = R_A^\delta.$$

Скажем, что модуль A является *$\overline{\delta}$-модулем*, если $A = R_A^\delta$. Из результатов, полученных в § 1, следует

Предложение 5.3. *Для любого свойства δ-модулей, удовлетворяющего условию A1, свойство $\overline{\delta}$ является радикальным. Для любого модуля A $\overline{\delta}$-радикал совпадает с подмодулем R_A^δ, $\overline{\delta}$-полупростые модули — это в точности модули без ненулевых δ-подмодулей.*

Пусть δ — произвольное свойство модулей. Очевидно, что свойство δ_1 быть гомоморфным образом δ-модуля удовлетворяет условию A1. Свойство $\delta^{\cdot} = \overline{\delta}_1$ назовем *нижним радикалом*, порожденным свойством δ. Это название оправдано тем, что верно

Предложение 6.3. *Для любого свойства δ нижний радикал $\delta^{\cdot}$ является наименьшим среди всех таких радикалов s, что $s \geqslant \delta$.*

Пусть δ — произвольное свойство модулей. Скажем, что свойство δ *наследственно*, если всякий подмодуль δ-модуля является δ-модулем. Скажем, что свойство δ *сильно наследственно*, если оно наследственно и удовлетворяет условию A1.

Предложение 7.3. *Для любого сильно наследственного свойства δ модулей свойство $\overline{\delta}$ является радикальным, причем радикал $\overline{\delta}$ — наследственный радикал.*

Обозначим через δ^0 свойство быть подмодулем δ-модуля. Очевидно, что свойство δ^0 наследственно. Но тогда свойство $\delta_1' = (\delta^0)_1$ сильно наследственно. Свойство $\delta^* = (\overline{\delta_1'})$ назовем *нижним наследственным радикалом*, порожденным свойством δ. Это название оправдывается тем, что верно

Предложение 8.3. *Нижний наследственный радикал δ^*, порожденный свойством δ, является наименьшим среди всех таких наследственных радикалов s, что $s \geqslant \delta$.*

Переходим теперь к обобщенно специальным классам модулей.

Определение 1. Скажем, что класс M модулей является *обобщенно специальным классом модулей*, если выполнены условия:

H1. Если $A \in M$, B — ненулевой подмодуль из A, то и $B \in M$.

H2. Если $B \in M$, B — подмодуль модуля A, причем $B \cap C \neq 0$ для любого ненулевого подмодуля C из A, то и $A \in M$.

Условие H3 для модулей всегда выполняется. Из результатов, полученных в § 1, следует, что верна

Теорема 1.3. *Пусть M — произвольный обобщенно специальный класс модулей. Верхний радикал S_M, определяемый классом M, является наследственным, причем для любого модуля A его S_M-радикал $S_M(A)$ совпадает с пересечением всех M-подмодулей из A, т. е. S_M-полупростые модули — это в точности подпрямые суммы модулей из класса M. Всякий наследственный радикал совпадает с некоторым верхним радикалом, определяемым обобщенно специальным классом модулей.*

Очевидно, что пересечение и объединение обобщенно специальных классов модулей является обобщенно специальным классом модулей. Поэтому получаем, что верна

Теорема 2.3. *Пусть δ — произвольное свойство модулей. Тогда:*

1) Существует наименьший среди наследственных радикалов $s \geqslant \delta$.

2) Если свойство δ удовлетворяет условию A5, то существует наибольший среди наследственных радикалов $s \leqslant \delta$.

3) Существует наименьший среди наследственных радикалов s таких, что все s-полупростые модули являются подпрямыми суммами δ-модулей.

4) Существует наибольший среди таких наследственных радикалов s, что все δ-модули s-полупросты.

Предложение 9.3. *Класс модулей M является обобщенно специальным тогда и только тогда, когда для M-подмодулей выполнено условие:*

(γ) Пусть B — ненулевой подмодуль модуля A. Тогда подмодуль C из A является M-подмодулем в том и только в том случае, когда $C = T \cap B$ для некоторого M-подмодуля T модуля A, $T \not\supseteq B$.

В теории модулей легко получается понятие дополнительного радикала, двойственного радикала и теория двойственности для радикалов, аналогичная теории двойственности для радикалов, развитой в теории ассоциативных колец [4].

Пусть R — произвольный радикал. Скажем, что модуль A *сильно R-полупрост*, если всякий гомоморфный образ модуля A является R-полупростым модулем. Легко видеть, что *всякий подмодуль сильно R-полупростого модуля является сильно R-полупростым модулем*. Радикал Q называется *дополнительным* к радикалу R, если Q является наибольшим среди радикалов, имеющих нулевое пересечение с радикалом R. Дополнительный к радикалу R радикал будем обозначать через R'. Радикалы R и Q называются *взаимно дополнительными*, если существуют R' и Q', причем $R' = Q$ и $Q' = R$. Радикал R называется *двойственным*, если существуют радикалы R' и $R'' = (R')'$, причем $R'' = R$.

Замечая, что класс P_δ всех подпрямо неразложимых модулей с сердцевиной, обладающей свойством δ, является обобщенно специальным классом модулей, доказываем, что верны утверждения:

Теорема 3.3. *Пусть R — произвольный наследственный радикал. Для любого модуля A следующие утверждения равносильны:*

(1) A является S_M-радикальным модулем, где $M = P_R$ — класс всех подпрямо неразложимых модулей с R-радикальной сердцевиной.

(2) *Всякий подмодуль модуля A является пересечением таких подмодулей T, что фактор-модули A/T являются подпрямо неразложимыми модулями с R-полупростой сердцевиной.*

(3) *A есть сильно R-полупростой модуль.*

Теорема 4.3. *Для любого наследственного радикала R существуют радикалы R′ и R″, причем радикалы R′ и R″ взаимно дополнительны и являются двойственными радикалами. Радикалы R′ и R″ являются наследственными радикалами.* $R' = S_M$, *где* $M = P_R$ — *класс всех подпрямо неразложимых модулей с R-радикальной сердцевиной, а* $R'' = S_{M'}$, *где* $M' = P'_R$ — *класс всех подпрямо неразложимых модулей с R-полупростой сердцевиной. Наследственный радикал R является двойственным тогда и только тогда, когда* $R = S_M$, *где M — класс всех подпрямо неразложимых модулей с сердцевиной, обладающей некоторым свойством* δ *(а именно, свойством R-полупростоты).*

В заключение автор считает своим приятным долгом выразить благодарность В. А. Андрунакиевичу за руководство работой.

ЛИТЕРАТУРА

1. Е. Г. Шульгейфер. К общей теории радикалов в категориях, Матем. сб., 51 (93), 4 (1960), 487—500.
2. А. Г. Курош. Радикалы колец и алгебр, Матем. сб., 33 (75), 1 (1953), 13—26.
3. S. A. Amitsur. A general theory of radicals, II, Amer. Journ. Math., 76 (1954), 100—125.
4. В. А. Андрунакиевич. Радикалы ассоциативных колец, I, Матем. сб., 44 (86): 2 (1958), 179—212.
5. А. Г. Курош, А. Х. Лившиц, Е. Г. Шульгейфер. Основы теории категорий, УМН, т. XV, вып. 6 (96) (1960), 3—52.
6. А. Картан и С. Эйленберг. Гомологическая алгебра, ИЛ, 1960.
7. В. А. Андрунакиевич. Радикалы ассоциативных колец, II, Матем. сб., 55 (97): 3 (1961), 329—346.
8. В. А. Андрунакиевич. К определению радикала кольца, Известия АН СССР, сер. матем., 16 (1952), 217—224.
9. В. А. Андрунакиевич. Первичные модули и радикал Бэра, Сиб. матем. ж., т. 2, № 6 (1961), 801—806.
10. В. А. Андрунакиевич и Ю. М. Рябухин. Специальные модули и специальные радикалы, ДАН СССР, 147, № 6 (1962), 1274—1277.
11. Н. Джекобсон. Строение колец, ИЛ, 1961.
12. А. Г. Курош. Лекции по общей алгебре, Изд-во физ.-матем. лит., 1962.

Ю. М. РЯБУХИН

РАДИКАЛЕ ЫН КАТЕГОРИЙ

Резумат

Ын артиколул де фацэ континуэ студиеря теорией женерале а радикалелор ын категорий, ынчепутэ ын лукраря [2]. Се ынтродук нощиуниле де радикал де сус ши де жос, радикал ередитар ши идеал ередитар, класэ женералэ спечиалэ де обьекте ши се студиязэ легэтура динтре ачесте нощиунь.

Резултателе обцинуте се апликэ ла студиеря радикалелор ередитаре ын категорииле инелелор ши модулелор. Афарэ де ачаста, се континуэ студиеря радикалелор спечиале ын инелеле асочиативе ши се конструеште теория радикалелор суплиментаре ын модуле.

КРАТКИЕ СООБЩЕНИЯ

В. А. АНДРУНАКИЕВИЧ

О СТРОГО РЕГУЛЯРНЫХ КОЛЬЦАХ

В настоящей заметке дается новая характеристика строго регулярных и слабо регулярных колец.

Напомним сначала некоторые понятия из теории ассоциативных колец.

Кольцо K называется наследственно идемпотентным (f-регулярным) [1], если всякий его главный идеал (a)[1)] идемпотентен, т. е. $(a)^2=(a)$, или, что то же самое, если любой его идеал идемпотентен. Кольцо K называется регулярным (в смысле Неймана) [2], если для любого $a \in K$ существует такой $x \in K$, что $a = axa$. Наконец, кольцо K называется строго регулярным [3], если для всякого $a \in K$ существует такой $x \in K$, что $a = a^2x$.

Лемма. *В любом кольце справедливо равенство*

$$(a)_r^2 = a(a), \tag{1}$$

где $(a)_r$ — *главный правый идеал и* (a) — *главный идеал, порожденные элементом* a.

Действительно, пусть $z \in (a)_r^2$. Тогда

$$z = \sum (m_i a + ax_i)(n_j a + ay_j) =$$
$$= \sum (m_i n_j a^2 + n_j a x_i a + m_i a^2 y_j + a x_i a y_j) =$$
$$= a \sum (m_i n_j a + n_j x_i a + m_i a y_i + x_i a y_j) \in a(a).$$

Обратно, пусть $z \in a(a)$. Тогда

$$z = a(na + xa + ay + \sum x_i a y_i) = na^2 + axa + a^2y +$$
$$+ \sum a x_i a y_i \in (a)_r^2.$$

Теорема 1. *Следующие условия эквивалентны:*

I. *В кольце K для всяких двух правых идеалов* I_1 *и* I_2 *справедливо равенство*

$$I_1 \cap I_2 = I_1 I_2; \tag{2}$$

II. *Кольцо K — строго регулярно;*

III. *K — регулярное кольцо, в котором* $ax = xa$ *для* x, *удовлетворяющего уравнению* $a = axa$;

IV. *K — наследственно идемпотентное кольцо, у которого всякий правый идеал является идеалом.*

1) Под идеалом понимается двусторонний идеал.

Доказательство. I ⇒ II. Положив в равенстве (2) $I_1 = K$, получаем $I_2 = KI_2$, т. е. правый идеал I_2 является и левым идеалом. Следовательно, в кольце K всякий правый идеал является идеалом. Положив теперь в равенстве (1) $I_1 = I_2 = (a)_r$, получим

$$(a)_r = (a)_r^2. \qquad (3)$$

Из равенств (3), (1) и сделанного выше замечания получаем $(a)_r = a(a)_r$. Следовательно,

$$a = aa_1, \text{ где } a_1 = na + ay \in (a)_r.$$

Поэтому

$$a = a(na + ay) = a(naa_1 + ay) = a^2(na_1 + y) = a^2x, \text{ где } x = na_1 + y.$$

II ⇒ III. Пусть a — произвольный элемент в строго регулярном кольце K. Из равенства $a = a^2x$ получаем

$$a = a^3x^2 = a^4x^3 = \ldots = a^nx^{n-1} = \ldots.$$

Следовательно, если $a \neq 0$, то $a^n \neq 0$ для любого n, т. е. в строго регулярном кольце нет ненулевых нильпотентных элементов.

Пусть теперь a — произвольный элемент в K. Тогда

$$(a - axa)^2 = (a - axa)\ (a - axa) = a^2 - axa^2 - a^2xa + axa^2xa = $$
$$= a^2 - axa^2 - a^2 + axa^2 = 0.$$

Следовательно,

$$a - axa = 0, \text{ т. е. } a = axa.$$

Далее

$$(xa^2 - a)^2 = (xa^2 - a)(xa^2 - a) = xa^2xa^2 - axa^2 - xa^3 + a^2 =$$
$$= xa^3 - a^2 - xa^3 + a^2 = 0.$$

Следовательно,

$$xa^2 = a.$$

Таким образом, определение строго регулярного кольца симметрично. Из равенств

$$\begin{cases} a = xa^2 \\ a = a^2x \end{cases}$$

получаем

$$ax = xa^2x = xa,$$

что и требовалось доказать.

Замечание 1. Из равенства $a = axa$ следует, что ax и xa являются идемпотентными элементами.

Заметим теперь, что если в некотором кольце K для любых двух элементов из $ab = 0$ следует $ba = 0$, то всякий идемпотент является центральным. Действительно, пусть $e^2 = e$. Тогда для любого x получаем $e(ex - x) = 0$, откуда $(ex - x)e = 0$, т. е. $exe = xe$. Аналогично из $(xe - x)e = 0$ следует $e(xe - x) = 0$, откуда $exe = ex$. Следовательно, $ex = xe$ для любого x.

Ясно, что в кольце без нильпотентных элементов из $ab = 0$ следует $ba = 0$. Действительно, $(ba)^2 = b(ab)a = 0$, откуда $ba = 0$. Следовательно, справедливо

Замечание 2. В строго регулярном кольце всякий идемпотент централен.

III ⇒ IV. Если K — регулярное кольцо, то $a = axa \in (a)^2$. Следовательно, $(a) = (a)^2$, т. е. K будет наследственно идемпотентным кольцом. Пусть теперь I — правый идеал в K, $a \in I$ и y — произвольный элемент в K. Тогда $ya = yaxa$. Из равенства $ax = xa$ следует, что K будет строго регулярным кольцом, а потому, ввиду замечаний 1 и 2, ax будет центральным идемпотентом. Следовательно, $ya = axya \in I$, т. е. I будет идеалом.

IV ⇒ I. В наследственно идемпотентном кольце, как легко видеть, для любых двух идеалов A и B справедливо равенство

$$A \cap B = AB. \qquad (4)$$

Действительно, всегда справедливо соотношение $A \cap B \supseteq AB$. С другой стороны, если $c \in A \cap B$, то $c \in (c) = (c)^2 \subseteq AB$. Следовательно, $A \cap B \subseteq AB$. Так как по условию всякий правый идеал является двусторонним, то равенство (4) справедливо для любых двух правых идеалов.

В заключение приведем новую характеристику слабо регулярных колец.

Напомним, что кольцо K называется слабо регулярным [4], если для любого $a \in K$ существует такой $x \in (a)$, что $a = ax$.

Теорема 2. *Следующие условия эквивалентны:*

I′. *В кольце K для всяких двух правых идеалов I_1 и I_2 справедливо включение*

$$I_1 \cap I_2 \subseteq I_1I_2.$$

II′. *Всякий правый идеал I идемпотентен, т. е. $I^2 = I$.*

III′. *Кольцо K — слабо регулярно.*

Доказательство. I′ ⇒ II″. Действительно, положив в соотношении $I_1 \cap I_2 \subseteq I_1I_2$, $I_1 = I_2 = I$, получим $I \subseteq I^2$. Так как всегда $I^2 \subseteq I$, то $I^2 = I$.

II′ ⇒ III′. Из $I^2 = I$ следует $(a)_r^2 = (a)_r$ для любого элемента a из K. Отсюда и равенства (1) получаем $(a)_r = a(a)$. Следовательно, $a = ax$, где $x \in (a)$.

III′ ⇒ I. Пусть $a \in I_1 \cap I_2$ и K — слабо регулярное кольцо. Тогда

$$a \in a(a) = (a)_r^2 = (a)_r(a)_r \subseteq I_1I_2.$$

ЛИТЕРАТУРА

1. R. L. Blair, A note on f-regularity in rings, Proc. Amer. Math. Soc., 6(1955), 511—515.
2. J. Neumann, On regular rings, Proc. Nat. Ac. Sci USA, 22(1936), 707—713.
3. R. F. Arens a. J. Kaplansky, Topological representation of algebras, Trans. Amer. Math. Soc., 63(1948), 457—481.
4. B. Brown a. N. H. McCoy, Some theorems on groups with applications to rings theory, Trans. Amer. Math. Soc., 69(1950), 302—311.

В. Д. БЕЛОУСОВ

РЕШЕНИЕ ОДНОЙ ЗАДАЧИ УЛАМА

Пусть R — множество положительных целых чисел. Отображением Пеано $z = p(x, y)$, $x, y, z \in R$ называется взаимно однозначное отображение множества $R \times R$ на R. На множестве R можно определить два отображения σ и μ.

$$\sigma p(x, y) = x + y, \qquad (1)$$
$$\mu p(x, y) = xy$$

(здесь „+" и „·" — обычные операции сложения и умножения целых чисел). На примере отображения Пеано $p(x, y) = 2^{x-1}(2y-1)$ показано, что, вообще говоря, $\sigma\mu \neq \mu\sigma$.

В книге Улама ([1], глава II, § 4) поставлена задача: существует ли пеановское отображение $p(x, y)$ такое, что соответствующие отображения σ и μ коммутируют?

В настоящей заметке дается отрицательный ответ на этот вопрос. Имеет место

Теорема. *Для любого пеановского отображения $p(x,y)$ соответствующие отображения σ и μ не коммутируют.*

Доказательство. Допустим, что существует пеановское отображение $p(x, y)$ такое, что

$$\sigma\mu = \mu\sigma.$$

Пусть x, y — любые целые положительные числа. Тогда, учитывая (1), получаем:

$$\sigma\mu p(x, y) = \sigma(xy),$$
$$\mu\sigma p(x, y) = \mu(x+y).$$

Следовательно,

$$\sigma(xy) = \mu(x+y). \qquad (2)$$

Пусть $y = 1$, тогда из (2) следует

$$\sigma(x) = \mu(x+1),$$

поэтому равенство (2) принимает вид

$$\mu(x+y) = \mu(xy+1). \qquad (3)$$

Покажем, что решением функционального уравнения (3), рассматриваемого на множестве R, является любое отображение, принимающее одно и то же значение для всех $x \geqslant 4$:

$$\mu x = \mu 4 = a. \quad (x \in R, \ x \geqslant 4). \qquad (4)$$

Этим и будет доказана теорема, так как из (4) следует, что μx может принимать самое большее четыре значения ($\mu 1$, $\mu 2$, $\mu 3$, $\mu 4 = a$), а из (1) следует, что это же отображение μx принимает все значения из R.

Докажем сначала, что

$$\mu 6 = \mu 5 = \mu 4. \qquad (5)$$

Для этого применим несколько раз равенство (3)

$$\begin{aligned} x = 2,\ y = 2 &: \mu 4 = \mu 5, \\ x = 3,\ y = 3 &: \mu 6 = \mu 10, \\ x = 2,\ y = 3 &: \mu 5 = \mu 7, \\ x = 3,\ y = 4 &: \mu 7 = \mu 13, \\ x = 2,\ y = 6 &: \mu 8 = \mu 13, \\ x = 4,\ y = 4 &: \mu 8 = \mu 17, \\ x = 2,\ y = 8 &: \mu 10 = \mu 17. \end{aligned} \qquad (6)$$

Из равенства (6) следует, таким образом, равенство (5). Теперь легко доказать равенство (4) методом индукции. Предположим, что (4) верно для любых z, $4 \leqslant z \leqslant k$, где k — некоторое целое положительное число > 4.

а) Пусть k — составное число: $k = xy$; $x, y \geqslant 2$. Тогда

$$\mu(k+1) = \mu(xy+1) = \mu(x+y).$$

Но

$$xy + 1 > x + y, \qquad (7)$$

если $x, y \geqslant 2$. Неравенство (7) следует из очевидного неравенства $(x-1)(y-1) > 0$. Таким образом,

$$k \geqslant x + y \geqslant 4,$$

и, следовательно, по предположению индукции $\mu(x+y) = a$, поэтому и $\mu(k+1) = \mu(x+y) = a$.

б) Пусть k — простое число. В силу (5) можно считать $k \geqslant 7$. Тогда, используя равенство (3), получаем:

$$\mu(k+1) = \mu(k-1+2) = \mu(2(k-1)+1).$$

Далее имеем:

$$\mu(k+1) = \mu\left(4 \cdot \frac{k-1}{2} + 1\right) = \mu\left(4 + \frac{k-1}{2}\right) = \mu\left(\frac{7+k}{2}\right).$$

Очевидно, $k \geqslant \frac{7+k}{2} > 4$, так как $k \geqslant 7$. Следовательно, по предположению индукции $\mu\left(\frac{7+k}{2}\right) = a$, а отсюда и $\mu(k+1) = a$. Итак, равенство (4) доказано. Простые рассуждения показывают, что отображения вида $\mu x = a$, где a — любое целое положительное число и $x \geqslant 4$, удовлетворяют функциональному уравнению (3). Теорема доказана.

ЛИТЕРАТУРА

1. С. Улам. Нерешенные математические задачи М., Изд-во «Наука», 1964.

Известия Академии наук Молдавской ССР № 6, 1964

И. Ц. ГОХБЕРГ и М. К. ЗАМБИЦКИЙ

О НОРМАЛЬНО РАЗРЕШИМЫХ ОПЕРАТОРАХ В ПРОСТРАНСТВАХ С ДВУМЯ НОРМАМИ

Линейный ограниченный оператор A, действующий в банаховом пространстве B, называется нормально разрешимым, если уравнение $Ax = y$ $(x, y \in B)$ разрешимо в том и только в том случае, когда выполняется условие $\psi(y) = 0$, где ψ — произвольный функционал из B^*, являющийся решением уравнения $A^*\psi = 0$. Это определение нормальной разрешимости отличается от понятия нормальной разрешимости, которое встречается в некоторых вопросах классического анализа. Например, в теории различных классов интегральных уравнений, рассматриваемых в пространстве функций, удовлетворяющих условию Гельдера (см. [1]), условие $\psi(y) = 0$ заменяется более простым условием ортогональности правой части уравнения в смысле L_2 к произвольному решению однородного сопряженного интегрального уравнения из исходного пространства гельдеровых функций.

Оказывается, что основные теоремы (теоремы Фредгольма и теоремы Нетера) об интегральных уравнениях в их классических формулировках могут быть получены как следствие общих предложений абстрактной теории операторов, действующих в пространствах с двумя нормами, одна из которых порождается скалярным произведением.

По-видимому, впервые операторы в пространствах с двумя нормами рассматривал М. Г. Крейн в статье [2]. В ней, в частности, с общих позиций была получена вся теория Гильберта—Шмидта для интегральных уравнений. В этой же статье были получены основные результаты о самосопряженных операторах, действующих в пространствах с двумя нормами. Некоторые из этих результатов позже были заново доказаны П. Лаксом [3] и Ж. Дьедонне [4].

В настоящей заметке исследуются „B-нормально разрешимые" операторы в пространствах с двумя нормами. Это понятие находится в соответствии с классическими условиями разрешимости линейных интегральных уравнений. Получены приложения к одномерным сингулярным интегральным уравнениям. В первом пункте некоторые из указанных выше теорем М. Г. Крейна обобщаются на случай несамосопряженных операторов.

1. Об операторах в пространствах с двумя нормами. Пусть H — гильбертово пространство, а B — плотное множество H, образующее банахово пространство с нормой, удовлетворяющей соотношению

$$\sup_{x \in B} (|x|_H / |x|_B) < \infty.$$

Каждый элемент $\varphi \in H$ по формуле $f_\varphi(x) = (x, \varphi)$ определяет функционал[1)] из B^*. Если отождествить функционалы f_φ с соответствующими элементами φ, то получаем $B^* \supset H$, причем

$$\sup_{\varphi \in H} (|\varphi|_{B^*} / |\varphi|_H) < \infty.$$

Обозначим через $\Omega(B)$ кольцо всех линейных ограниченных операторов, действующих в B. Оператор $A \in \Omega(B)$ назовем B-оператором, если $A^* B \subseteq B$. Через Π обозначим множество всех B-операторов. Очевидно, Π является кольцом (незамкнутым в обычной норме операторов). Оно становится полным нормированным кольцом, если принять, что норма в нем определена равенством

$$|A|_\Pi = |A|_B + |A^+|_B \quad (A \in \Pi), \tag{1}$$

где A^+ — сужение оператора A^* на пространство B.

Легко видеть, что если оператор $A \in \Pi$, то и оператор $A^+ \in \Pi$, причем $(A^+)^+ = A$.

Через $\sigma_B(A)$ $(\sigma_H(A))$ обозначим спектр оператора в пространстве B (H).

В дальнейшем будем говорить, что оператор A из $\Omega(B)$ принадлежит $\Omega(H)$, если

$$\sup_{\varphi \in B} (|A\varphi|_H / |\varphi|_H) < \infty,$$

а следовательно, оператор A допускает расширение по непрерывности до линейного ограниченного оператора, действующего в пространстве H.

Из результатов М. Г. Крейна [2] легко выводится следующее предложение:

1°. *Если оператор $A \in \Pi$, то оператор A принадлежит также $\Omega(H)$ и*

$$\sigma_H(A) \subseteq \sigma_B(A) \cup \overline{\sigma_B}(A^+),$$

где $\overline{\sigma_B}(A^+)$ обозначает комплексно сопряженное множество к $\sigma_B(A^+)$. В частности,

$$\lim_{n \to \infty} (|A^n|_H)^{1/n} \leqslant \max \{\lim_{n \to \infty} (|A^n|_B)^{1/n}, \lim (|(A^+)^n|_B)^{1/n}\}.$$

Из последнего соотношения можно вывести некоторые соотношения, связывающие нормы $|A|_H$ и $|A|_B$. Например,

$$|A|_H \leqslant \min\{|A^+A|_B^{1/2}, |AA^+|_B^{1/2}\} (\leqslant \max(|A|_B, |A^+|_B)).$$

Отметим, что даже в случае, когда оператор A в H неотрицателен, спектр оператора A в пространстве B может быть шире спектра оператора A в пространстве H и содержать даже невещественные точки. Соответствующий пример указан Ж. Дьедонне [4].

2°. *Пусть $A \in \Pi$. Если точка λ_0 является изолированным собственным числом оператора A в пространстве B, которому отвечает нормально отщепляющееся конечномерное корневое подпространство N (определение см. в [5] § 4), а $\overline{\lambda_0}$ является изолированной точкой спектра оператора A^+ в пространстве B, то точке λ_0 для оператора A в пространстве H также отвечает*

1) В дальнейшем предполагается, что умножение функционала $f \in B^*$ на число λ производится по правилу $(\lambda f)(x) = \overline{\lambda} f(x)$ $(x \in B)$.

конечномерное нормально отщепляющееся корневое подпространство, совпадающее с N.

Из этого предложения следует, что для любого оператора $A \in \Pi$

$$\lim_{n\to\infty} (\|A^n\|_H)^{1/n} \leqslant \max\left\{\lim_{n\to\infty} (\|A^n\|_B)^{1/n}, \lim_{n\to\infty} (\|(A^+)^n\|_B)^{1/n}\right\},$$

где $\|A\|_H = \min_{T \in J_H} |A+T|_H$, $\|A\|_B = \inf_{T \in J_B} |A+T|_B$, а $J_H(J_B)$ — двусторонний идеал всех вполне непрерывных операторов из $\Omega(H)$ $(\Omega(B))$. В частности,

$$\|A\|_H \leqslant \min\{\|A^+A\|_B^{1/2}, \|A^+A\|_B^{1/2}\} \ (\leqslant \max\{\|A\|_B, \|A^+\|_B\}).$$

Если же, кроме того, оператор A является самосопряженным в H, то

$$\|A\|_H \leqslant \|A\|_B.$$

3°. *Если оператор $A(\in \Pi)$ является вполне непрерывным оператором в пространстве B, то он вполне непрерывен и в пространстве H, $\sigma_B(A) = \sigma_H(A)$ и соответствующие корневые подпространства оператора A в пространствах B и H совпадают.*

Это предложение для случая самосопряженного оператора доказано в [2].

Для операторов $A \in \Pi$ через $Z_B(A)$ $(Z_H(A))$ будем обозначать подпространство всех решений уравнения $Ax = 0$ в пространстве $B(H)$.

Если A $(\in\Pi)$ является Ф-оператором в пространствах B и H (определение см. в [5]), то через $\varkappa_B(A)$, $\varkappa_H(A)$ обозначаются индексы этого оператора в соответствующих пространствах.

4°. *Если операторы A $(\in\Pi)$, A^+ являются Ф-операторами в пространстве B и $\varkappa_B(A) = -\varkappa_B(A^+)$, то A является Ф-оператором в пространстве H, причем $Z_H(A) = Z_B(A)$, $Z_H(A^*) = Z_B(A^+)$ и $\varkappa_B(A) = \varkappa_H(A)$.*

2. О B-нормально разрешимых операторах. Понятию нормальной разрешимости оператора, которое встречается, например, в теории различных классов интегральных уравнений в пространстве гельдеровых функций (см. [1]), отвечает следующее абстрактное определение: оператор A $(\in\Pi)$ назовем B-н о р м а л ь н о р а з р е ш и м ы м, если уравнение $Ax = y$ разрешимо в том и только в том случае, когда выполняется условие $(x, \psi) = 0$, где $\psi \in B$ — произвольное решение уравнения $A^+\psi = 0$.

Оператор A $(\in\Pi)$ называется $B\Phi$-о п е р а т о р о м, если он является Ф-оператором в пространстве B и, кроме того, B—нормально разрешим.

Очевидно, что оператор A $(\in\Pi)$ является $B\Phi$-оператором в том и только в том случае, когда A является Ф-оператором в пространстве B и имеет место равенство $Z_{B^*}(A^*) = Z_B(A^+)$.

5°. *Если $T(\in\Pi)$ и T^+ являются вполне непрерывными операторами в пространстве B, то оператор $I - T$ является $B\Phi$-оператором и $\varkappa_B(I-T) = 0$.*

В качестве следствия из этого предложения получаются в классической формулировке теоремы Фредгольма в пространствах C, $H^\alpha (0 < \alpha \leqslant 1)$ и др. для интегральных уравнений Фредгольма второго рода при естественных ограничениях на ядра уравнений.

Будем говорить, что оператор A $(\in\Pi)$ допускает л е в у ю (п р а в у ю) B-р е г у л я р и з а ц и ю, если существует оператор $M \in \Pi$

такой, что операторы $MA - I$ $(MA - I)^+$ $(AM - I$ $(AM - I)^+)$ вполне непрерывны в пространстве B.

6°. *Если оператор $A(\in\Pi)$ допускает левую и правую B-регуляризации, то он является $B\Phi$-оператором.*

Из этого предложения (при обычных ограничениях) можно вывести теоремы Нетера в формулировке из [1] для сингулярных интегральных уравнений и систем таких уравнений, рассматриваемых в пространстве H^α $(0 < \alpha < 1)$.

Имеет место

Т е о р е м а 1. *Для оператора $A \in \Pi$ следующие предложения эквивалентны:*

а) *Операторы A и A^+ являются $B\Phi$-операторами.*

б) *Операторы A и A^+ являются Ф-операторами в пространстве B и $\varkappa_B(A) = -\varkappa_B(A^+)$.*

в) *Оператор A (A^+) допускает левую и правую B-регуляризации.*

г) *Существует оператор $M \in \Pi$ такой, что все операторы $MA-I$, $AM-I$, M^+A^+-I, A^+M^+-I вполне непрерывны в пространстве B.*

д) *Существует оператор $M \in \Pi$ такой, что операторы $MA-I$, $AM-I$ $(M^+A^+-I$, $A^+M^+-I)$ конечномерны.*

е) *Оператор A представим в виде $A = D + K$, где $K(\in\Pi)$ конечномерный оператор, а оператор $D(\in\Pi)$ имеет обратный слева $D^{-1} \in \Pi$ и $DD^{-1} - I$ конечномерен или $D(\in\Pi)$ имеет обратный справа и оператор $D^{-1}D - I$ конечномерен.*

ж) *Оператор A^+ представим в виде $A^+ = D + K$, где $K(\in\Pi)$ — конечномерный оператор, а $D(\in\Pi)$ имеет обратный слева $D^{-1} \in \Pi$ и $DD^{-1} - I$ конечномерен или $D(\in\Pi)$ имеет обратный справа $D^{-1} \in \Pi$ и $D^{-1}D - I$ — конечномерен.*

Будем считать, что Π — нормированное кольцо с нормой, определенной равенством (1). Через J_B обозначим совокупность всех вполне непрерывных операторов T из Π, для которых операторы T^+ также вполне непрерывны в пространстве B. Очевидно, J_B является двусторонним замкнутым идеалом в Π. Из теоремы 1 вытекает следующее предложение:

7°. *Для того чтобы операторы $A(\in\Pi)$, A^+ были $B\Phi$-операторами, необходимо и достаточно, чтобы класс вычетов из фактор-кольца Π/J_B, содержащий оператор A, был обратим в Π/J_B.*

3. О границах применимости теорем Нетера к системам одномерных сингулярных интегральных уравнений. Пусть Γ—замкнутый простой ограниченный гладкий контур; B — одно из пространств $L_p^{(n)}(\Gamma)$ $(2 \leqslant p < \infty)$, $H^{(\alpha,n)}(\Gamma)$ $(0 < \alpha < 1)$, где $L_p^{(n)}(\Gamma)$ — пространство вектор-функций $\{f_j(t)\}_1^n$ $(t \in \Gamma)$ с компонентами из $L_p(\Gamma)$, а $H^{(\alpha,n)}(\Gamma)$ — пространство вектор-функций $\{f_j(t)\}_1^n$ $(t \in \Gamma)$ с компонентами из $L_p(\Gamma)$, а $H^{(\alpha,n)}(\Gamma)$ — пространство вектор-функций $\{f_j(t)\}_1^n$ $(t\in\Gamma)$ с компонентами, удовлетворяющими неравенству Гельдера с показателем α.

Роль пространства H в рассматриваемом случае играет пространство $L_2^{(n)}(\Gamma)$.

Пусть A — сингулярный интегральный оператор, определенный в B равенством

$$(A\varphi)(t) = a(t)\varphi(t) + \frac{b(t)}{\pi i}\int_\Gamma \frac{\varphi(\tau)}{t-\tau}d\tau \ (t\in\Gamma), \tag{2}$$

где $a(t)$, $b(t)$ — матрицы n-го порядка, составленные в случае $B=L_p^{(n)}(\Gamma)$ из непрерывных на Г функций, а в случае $B=H^{(\alpha,n)}(\Gamma)$ — из функций, принадлежащих пространству $H^{(\alpha,n)}(\Gamma)$. Как известно, при этих условиях оператор A является B-оператором.

В качестве приложения предыдущих результатов получается следующая

Теорема 2. *Для того чтобы оператор A, определенный в B равенством (2), был Ф- или $\Phi_\pm$-оператором*[1] *в пространстве B, необходимо и достаточно, чтобы выполнялись условия*

$$\det(a(t)+b(t))\neq 0 \quad (t\in\Gamma),\ \det(a(t)-b(t))\neq 0 \quad (t\in\Gamma).$$

Если эти условия выполняются, то операторы A и A^+ являются BФ-операторами, причем во всех соответствующих пространствах B подпространства $Z_B(A)$ и $Z_B(A^+)$ одни и те же.

Достаточность условий этой теоремы известна [1]. В части необходимости ее условий теорема 2 представляет собой уточнение и обобщение некоторых результатов работ [6—11].

ЛИТЕРАТУРА

1. Н. И. Мусхелишвили. Сингулярные интегральные уравнения. Физматгиз, 1962.
2. М. Г. Крейн. Про лінійні цілком неперервні оператори в функціональних просторах з двома нормами. Збірник праць ін-ту математ. АН УРСР, №9 (1947), 104—129.
3. P. D. Lax, Symmetrizable Linear Transformations, Comm. on pure and applied Math., v. 7 (1954), 633—647.
4. J. A. Diedonne, Quasi-hermitian operators, Proc. of the Intern. symposium on linear spaces. Ierusalem, 1961, 115—122.
5. И. Ц. Гохберг и М. Г. Крейн. Основные положения о дефектных числах, корневых числах и индексах линейных операторов, Успехи матем. наук., т. 12, вып. 2 (1957), 43—118.
6. И. Ц. Гохберг, Об одном применении теории нормированных колец к сингулярным интегральным уравнениям. Успехи матем. наук, т. 7, вып. 2 (1952), 149—156.
7. И. Ц. Гохберг, О системах сингулярных интегральных уравнений. Уч. зап. Кишиневского университета, т. 11 (1954), 55—60.
8. И. Ц. Гохберг, О границах применимости теорем Ф. Нетера. Уч. зап. Кишиневского университета, т. 17 (1955), 35—44.
9. А. И. Вольперт, Об индексе и нормальной разрешимости граничных задач для эллиптических систем дифференциальных уравнений на плоскости. Труды Моск. матем. об-ва, т. 10 (1961), 41—87.
10. Д. Ф. Харазов и Б. В. Хведелидзе, Некоторые замечания к теории сингулярных интегральных уравнений с ядром Коши, Сообщ. АН Груз. ССР, т. 28, № 2 (1962), 129—135.
11. И. Ц. Гохберг, Задача факторизации в нормированных кольцах, функции от изометрических и симметрических операторов и сингулярные интегральные уравнения. Успехи матем. наук, т. 19, вып. 1 (1964), 71—124.

[1]) Определение $\Phi_\pm$-операторов см. в [5].

Известия Академии наук Молдавской ССР № 6, 1964

И. А. НОВОСЕЛЬСКИЙ

О НЕКОТОРЫХ АСИМПТОТИЧЕСКИХ ХАРАКТЕРИСТИКАХ ЛИНЕЙНЫХ ОПЕРАТОРОВ

В настоящей заметке рассматриваются некоторые числовые характеристики вполне непрерывных операторов, действующих в банаховых пространствах.

1. Пусть E_1 и E_2 — банаховы пространства, S_1 и S_2 — их единичные шары. Обозначим через $\Omega\ (E_1, E_2)$ множество всех линейных ограниченных операторов, действующих из E_1 в E_2, а через $T\ (E_1, E_2)$ — подмножество всех вполне непрерывных операторов.

Для оператора $A\in\Omega\ (E_1, E_2)$ положим

$$s_{n+1}(A)=\inf_{K_n}\|A-K_n\| \quad (n=0,1,\ldots),$$

где inf берется по всем n-мерным операторам $K_n\in\Omega(E_1,E_2)$. Через $d_n(A)$ $(n=0,1,\ldots)$ обозначим n-поперечник (по Колмогорову) множества AS_1 (см., например, [1]), т. е.

$$d_n(A)=\inf_{L_n}\sup_{x\in S_1}\rho\,(Ax, L_n) \qquad (\rho\,(x,L)=\inf_{y\in L}\|x-y\|),$$

где inf в определении $d_n(A)$ берется по всем n-мерным подпространствам $L_n\subset E_2$.

В статье А. Питша [2] было показано, что для всякого оператора $A\in\Omega(E_1, E_2)$

$$d_n(A)\leqslant s_{n+1}(A)\leqslant (n+1)\ d_n\ (A) \quad (n=0,1,\ldots). \tag{1}$$

В этой же статье были установлены некоторые свойства чисел $s_n(A)$.

Аналогичные соотношения имеют место и для чисел $d_n(A)$, а именно:

1) $d_0(A)=\|A\|, d_n(A)\geqslant d_{n+1}(A)\ (A\in\Omega(E_1,E_2);\ n=0,1,\cdots)$.

2) $\lim\limits_{n\to\infty} d_n(A)=0$ *тогда и только тогда, когда* $A\in T(E_1, E_2)$.

3) $d_n(\lambda A)=|\lambda|\ d_n(A)\ (A\in\Omega\ (E_1, E_2);\ n=0,1,\ldots)$.

4) *Если* $K\in\Omega\ (E_1, E_2)$ — *n-мерный оператор, то*

$$d_{m+n}(A+K)\leqslant d_m(A)\ (A\in\Omega(E_1, E_2);\ n,\ m=0,1,\cdots).$$

5) $d_{m+n}(A+B)\leqslant d_m(A)+d_n(B)\ (A, B\in\Omega(E_1,E_2);\ n,m=0,1,\ldots)$.

6) $d_{m+n}(AB)\leqslant d_m(A)\,d_n(B)\ (A\in\Omega(E_2,E_3), B\in\Omega(E_1,E_2);\ n,m=0,1,\ldots)$, *в частности*, $d_n(AB)\leqslant\|A\|\,d_n(B)$, $d_n(AB)\leqslant\|B\|\,d_n(A)\ (n=0,1,\ldots)$.

7) $d_{nk}(A^k)\leqslant d_n^k(A)\ (A\in\Omega(E,E);\ n,\ k=0,1,\cdots)$.

Приведем для примера доказательство свойств 5) и 6).

Для произвольного $\varepsilon > 0$ выберем такие подпространства L_n и $L_m \subset E_2$ ($\dim L_n = n$, $\dim L_m = m$), что

$$\sup_{x \in S_1} \rho\,(A x,\, L_m) < d_m(A) + \varepsilon, \quad \sup_{x \in S_1} \rho\,(B x,\, L_n) < d_n(B) + \varepsilon.$$

Положим $L_{n+m} = L_n + L_m$. Как легко видеть,

$$d_{m+n}(A+B) \leqslant \sup_{x \in S_1} \rho\,((A+B)\,x,\, L_{n+m}) \leqslant \sup_{x \in S_1} \rho\,(A x,\, L_{n+m}) +$$

$$+ \sup_{x \in S_1} \rho\,(B x,\, L_{n+m}) < d_m(A) + d_n(B) + 2\,\varepsilon.$$

В силу произвольности ε отсюда следует свойство 5).

Переходя к доказательству свойства 6), выберем такие подпространства $M_n \subset E_2$ и $M_m \subset E_3$ ($\dim M_n = n$; $\dim M_m = m$), что

$$\sup_{x \in S_1} \rho\,(B x,\, M_n) < d_n(B) + \varepsilon, \quad \sup_{z \in S_2} \rho\,(Az,\, M_m) < d_m(A) + \varepsilon.$$

Тогда для любого вектора $x \in S_1$ найдется вектор $y \in M_n$ такой, что $\| Bx - y \| < d_n(B) + \varepsilon$. Положим

$$z = \frac{Bx - y}{d_n(B) + \varepsilon}.$$

Так как $z \in S_2$, то существует вектор $t \in M_m$ такой, что $\| Az - t \| < d_m(A) + \varepsilon$, т. е.

$$\| ABx - (Ay + (d_n(B) + \varepsilon)\, t) \| \leqslant (d_m(A) + \varepsilon)\,(d_n(B) + \varepsilon). \tag{2}$$

Обозначим подпространство $AM_n + M_m$ через M_{n+m}; очевидно, $\dim M_{n+m} \leqslant n + m$. Из (2) следует, что

$$\sup_{x \in S_1} \rho\,(ABx,\, M_{n+m}) \leqslant (d_m(A) + \varepsilon)\,(d_n(B) + \varepsilon),$$

откуда вытекает свойство 6).

2. Пусть p — некоторые положительное число. Обозначим через $D_p(E_1, E_2)$ множество всех операторов $A \in \Omega\,(E_1, E_2)$, для которых $\sum_{j=1}^{\infty} d_j^p(A) < \infty$. Очевидно, что

$$D_p(E_1, E_2) \subset D_r(E_1, E_2) \subset T(E_1, E_2) \quad (0 < p < r).$$

С помощью приведенных свойств чисел $d_n(A)$ устанавливаются следующие предложения о множествах $D_p(E_1, E_2)$ $(p > 0)$.

1) *Если* $A \in \Omega\,(E_2, E_3)$, $B \in D_p(E_1, E_2)$ *или* $A \in D_p(E_2, E_3)$, $B \in \Omega\,(E_1, E_2)$, *то* $AB \in D_p(E_1, E_3)$; *в частности, если* $A \in D_p(E_1, E_2)$, *то* $\lambda A \in D_p(E_1, E_2)$.

2) *Если* $A, B \in D_p(E_1, E_2)$, *то* $A + B \in D_p(E_1, E_2)$.

3) *Если ввести в* $D_p(E_1, E_2)$ $(p > 0)$ *топологию с помощью квазинормы*[1] $|A| = \left(\sum_n d_n^p(A)\right)^{1/p}$, *то* $D_p(E_1, E_2)$ *становится полным топологическим векторным пространством.*

4) *Если* $A \in D_p(E_2, E_3)$, $B \in D_q(E_1, E_2)$, *то* $AB \in D_r(E_1, E_3)$, *где* $\dfrac{1}{r} = \dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q}$.

5) *Если* $A \in D_p(E, E)$, *то* $A^k \in D_{p/k}(E, E)$.

[1] Определение см. в [3], стр. 162.

Мы не приводим доказательств этих предложений, так как они аналогичны соответствующим доказательствам из статьи [2].

3. Обозначим через $b_n(A)$ $(A \in \Omega\,(E_1, E_2);\ n = 0, 1, \cdots)$ числа, определяемые равенствами[1]

$$b_n(A) = \sup_{L_n} \sup \{ b > 0 : b S_2 \cap L_n \subset AS_1 \},$$

где внешний sup берется по всем n-мерным подпространствам $L_n \subset E_2$.

В силу результатов работ [5] и [6] для любого оператора $A \in \Omega\,(E_1, E_2)$ имеют место следующие неравенства:

$$b_{n+1}(A) \leqslant d_n(A) \leqslant (n+1)^2\, b_{n+1}(A) \quad (n = 0, 1, \cdots). \tag{3}$$

В этом пункте мы рассмотрим некоторые свойства операторов A, для которых $b_n(A) \to 0$.

Пример оператора A, осуществляющего вложение пространства l_1 в c_0 (для этого оператора $b_n(A) = \frac{1}{n}$; $n = 0, 1, \cdots$), показывает, что условие $\lim_{n \to \infty} b_n(A) = 0$ еще не позволяет утверждать, что оператор $A \in T(E_1, E_2)$ (аналогичный пример имеется в [6]).

Обозначим через $C(E_1, E_2)$ класс всех операторов $A \in \Omega\,(E_1, E_2)$, обладающих тем свойством, что каждое подпространство, содержащееся в множестве значений A, конечномерно (см. [7]). Очевидно, $T(E_1, E_2) \subset C(E_1, E_2)$. Из результатов статей [7] и [8] следует, что операторы класса $C(E_1, E_2)$ обладают рядом свойств, аналогичных свойствам вполне непрерывных операторов; в частности, если $A \in C(E, E)$, то для оператора $I - A$ имеет место теория Рисса—Шаудера. В статье [7] показано также, что если $E = l_p$ $(p \geqslant 1)$ или c_0, то $C(E, E) = T(E, E)$.

1°. *Если* $A \in \Omega\,(E_1, E_2)$ *и* $\lim_{n \to \infty} b_n(A) = 0$, *то* $A \in C(E_1, E_2)$.

В самом деле, пусть L — некоторое подпространство, содержащееся в множестве значений оператора A, и M — полный прообраз этого подпространства. Сужение оператора A на подпространство M есть нормально разрешимый оператор, и поэтому найдется такое число $k > 0$, что для любого вектора $y \in L$ существует вектор $x \in M$ такой, что $Ax = y$ и $\|x\| \leqslant k \|y\|$. Отсюда вытекает, что множество AS_1 содержит шар радиуса $1/k$ подпространства L. Итак, если L — бесконечномерно, то $b_n(A) \geqslant 1/k$ $(n = 1, 2, \cdots)$.

Предложение 1° не допускает обращения. Действительно, пусть A — оператор вложения E в c_0, где E — банахово пространство всех числовых последовательностей $\alpha = \{\alpha_j\}_1^{\infty}$, для которых

$$\|\alpha\| = \left(\sum_{n=0}^{\infty} \left(\max_{n^2 < j < (n+1)^2} |\alpha_j| \right)^2 \right)^{1/2} < \infty.$$

Очевидно, что $b_n(A) = 1$ $(n = 1, 2, \cdots)$, но так как вместе с пространством E всякое его подпространство рефлексивно, а любое

[1] По терминологии, принятой в [4], числа $b_n(A)$ являются n-поперечниками по Бернштейну множества AS_1. В [4] введены также n-поперечники по Гельфанду ограниченного множества K $(\subset E_2)$, определенные равенствами

$$l_n(K) = \inf_{L^n} \inf \{ \lambda > 0 : \lambda\,(S_2 \cap L^n) \supset K \cap L^n \} \quad (n = 0, 1, \cdots),$$

где внешний inf берется по всем подпространствам $L^n \subset E_2$ таким, что $\dim E_2 / L^n = n$. Нетрудно показать, что $l_n(K) \geqslant b_{n+1}(K)$ $(n = 0, 1, \cdots)$, а если E_2 — гильбертово пространство, то $l_n(K) \leqslant d_n(K)$ $(n = 0, 1, \cdots)$.

бесконечномерное подпространство пространства c_0 не рефлексивно, то множество значений оператора A не может содержать бесконечномерного подпространства.

4. Если $A \in T(E_1, E_2)$, то через $N(A, \varepsilon)$ обозначим минимальное число элементов в ε-сети для множества AS_1, а через $H(A, \varepsilon)$ — ε-э н т р о п и ю множества AS_1 (см., например, [1]), т. е. $H(A, \varepsilon) = \log N(A, \varepsilon)$. Как известно, ε-энтропия является важной характеристикой массивности компакта.

Приведем некоторые простые свойства функции $H(A, \varepsilon)$.

1) *Оператор* $A \in T(E_1, E_2)$ *конечномерен тогда и только тогда, когда* $H(A, \varepsilon) = O(\log 1/\varepsilon)$ $(\varepsilon \to 0)$.

2) $H(\lambda A, \varepsilon) = H(A, \frac{\varepsilon}{|\lambda|})$ $(A \in T(E_1, E_2), \lambda \neq 0)$.

3) $H(A + B, \varepsilon_1 + \varepsilon_2) \leqslant H(A, \varepsilon_1) + H(B, \varepsilon_2)$ $(A, B \in T(E_1, E_2))$.

4) $H(AB, \varepsilon) \leqslant H(A, \frac{\varepsilon}{\|B\|})$ $(A \in T(E_2, E_3), \quad B \in \Omega(E_1, E_2))$,

$H(BA, \varepsilon) \leqslant H(A, \frac{\varepsilon}{\|B\|})$ $(A \in T(E_1, E_2), B \in \Omega(E_2, E_3))$.

5) $H(AB, \varepsilon_1\varepsilon_2) \leqslant H(A, \varepsilon_1) + H(B, \varepsilon_2)$ $(A \in T(E_2, E_3), B \in T(E_1, E_2))$.

6) $H(A^k, \varepsilon^k) \leqslant k\, H(A, \varepsilon)$ $(A \in T(E, E); k = 1, 2, \ldots)$.

Для доказательства неравенства 3) достаточно заметить, что если x_j $(j = 1, 2, \ldots, N(A, \varepsilon_1))$ — ε_1-сеть для AS_1, и y_k $(k = 1, 2, \ldots, N(B, \varepsilon_2))$ — ε_2-сеть для BS_1, то векторы $x_j + y_k$ $(j = 1, 2, \ldots, N(A, \varepsilon_1); k = 1, 2, \ldots, N(B, \varepsilon_2))$ образуют $\varepsilon_1 + \varepsilon_2$-сеть для множества $(A + B) S_1$.

Докажем неравенство 5). Пусть векторы $x_j \in E_2$ $(j = 1, 2, \ldots, N(B, \varepsilon_2))$ образуют ε_2-сеть для BS_1, а векторы $y_k \in E_3$ $(k = 1, 2, \ldots, N(A, \varepsilon_1))$ — ε_1-сеть для AS_2. Очевидно, достаточно установить, что векторы $Ax_j + \varepsilon_2 y_k$ $(j = 1, 2, \ldots, N(B, \varepsilon_2); k = 1, 2, \ldots, N(A, \varepsilon_1))$ образуют $\varepsilon_1\varepsilon_2$-сеть для множества ABS_1. Для любого вектора $x \in S_1$ найдется вектор x_j $(1 \leqslant j \leqslant N(B, \varepsilon_2))$ такой, что $\|Bx - x_j\| \leqslant \varepsilon_2$. Так как вектор $y = \frac{Bx - x_j}{\varepsilon_2} \in S_2$, то существует вектор y_k такой, что $\|Ay - y_k\| \leqslant \varepsilon_1$, т. е.

$$\|ABx - (Ax_j + \varepsilon_2 y_k)\| \leqslant \varepsilon_1\varepsilon_2 .$$

5. Обозначим через $\rho(A)$ п о р я д о к множества AS_1 (см. [1]), т. е.

$$\rho(A) = \overline{\lim_{\varepsilon \to 0}} \frac{\log H(A, \varepsilon)}{\log 1/\varepsilon}.$$

Очевидно, что $\rho(A)$ есть нижняя грань множества чисел ρ, обладающих следующим свойством: существует такая постоянная K_ρ, что

$$H(A, \varepsilon) \leqslant K_\rho \varepsilon^{-\rho} \quad (\varepsilon > 0).$$

Из приведенных свойств функции $H(A, \varepsilon)$ вытекают следующие утверждения:

1) *Если* K — *конечномерный оператор*, то $\rho(K) = 0$.

2) $\rho(\lambda A) = \rho(A)$ $(A \in T(E_1, E_2), \lambda \neq 0)$.

3) $\rho(A + B) \leqslant \max[\rho(A), \rho(B)]$ $(A, B \in T(E_1, E_2))$.

4) $\rho(AB) \leqslant \frac{\rho(A)\,\rho(B)}{\rho(A) + \rho(B)}$ $(A \in T(E_2, E_3), B \in T(E_1, E_2))$

5) $\rho(A^k) \leqslant \frac{1}{k}\rho(A)$ $(A \in T(E, E); k = 1, 2, \ldots)$.

Докажем, например, утверждение 4). Так как

$$H(AB, \varepsilon_1\varepsilon_2) \leqslant H(A, \varepsilon_1) + H(B, \varepsilon_2),$$

то положив $a = \rho(A) + \delta$ и $b = \rho(B) + \delta$, где δ — произвольное положительное число, получим

$$H(AB, \varepsilon_1\varepsilon_2) \leqslant K_a \varepsilon_1^{-a} + K_b \varepsilon_2^{-b}.$$

Примем $\varepsilon_2 = \varepsilon^a$, $\varepsilon_1 = \varepsilon^b$; тогда

$$H(AB, \varepsilon^{a+b}) \leqslant (K_a + K_b)\, \varepsilon^{-ab}.$$

Следовательно, $\rho(AB) \leqslant ab\,(a + b)^{-1}$. В силу произвольности δ из последнего неравенства следует утверждение 4).

Из результатов статьи [1] (следствия 4 и 5 из теоремы 4) непосредственно вытекает следующее предложение, указывающее на некоторую связь между поведением чисел $d_n(A)$ $(n = 0, 1, \ldots)$ и функции $H(A, \varepsilon)$ $(\varepsilon > 0)$.

2°. *Пусть* $A \in T(E_1, E_2)$ и $\alpha = \inf\{p : A \in D_p(E_1, E_2)\}$. *Тогда* $\rho(A) \leqslant \alpha$; а если $\rho(A) < 1$, *то* $\alpha \leqslant \frac{\rho(A)}{1 - \rho(A)}$.

6. Здесь мы уточним некоторые из приведенных выше результатов для случая, когда $E_1 = H_1$ и $E_2 = H_2$ — гильбертовы пространства.

Если $\{\varphi_j\}$ — некоторая ортонормированная система в H_2, а $\{\alpha_j\}$ — некоторая монотонно невозрастающая последовательность положительных чисел, то множество всех векторов $x = \sum_j \eta_j \varphi_j$, удовлетворяющих условию

$$\sum_j \frac{|\eta_j|^2}{\alpha_j^2} \leqslant 1,$$

называется э л л и п с о и д о м, а числа α_j — его п о л у о с я м и.

Пользуясь полярным представлением линейного оператора, легко показать, что для любого оператора $A \in T(H_1, H_2)$ множество AS_1 есть эллипсоид с полуосями, равными $\lambda_j((A^*A)^{1/2})$, где $\lambda_j((A^*A)^{1/2})$ $(j = 1, 2, \ldots)$ — собственные числа оператора $(A^*A)^{1/2}$, расположенные в порядке невозрастания с учетом их кратностей.

3°. *Если* $A \in T(H_1, H_2)$, *то*
$s_n(A) = d_{n-1}(A) = b_n(A) = \lambda_n((A^*A)^{1/2})$ [1] $(n = 1, 2, \ldots)$.
В статье [2] установлено[2], что $s_n(A) = \lambda_n((A^*A)^{1/2})$ $(n = 1, 2, \ldots)$.
Так как $b_n(A) \leqslant d_{n-1}(A) \leqslant s_n(A)$ (см. (1) и (3)), то для доказательства предложения 3° достаточно установить, что $b_n(A) \geqslant s_n(A)$, а это неравенство нетрудно вывести из того факта, что множество AS_1 есть эллипсоид с полуосями $\lambda_n((A^*A)^{1/2})$ $(= s_n(A))$.

Заметим, что равенства $s_n(A) = d_{n-1}(A) = b_n(A)$[1] $(n = 1, 2, \ldots)$ сохраняют силу для любого оператора $A \in \Omega(H_1, H_2)$.

---

[1]) В силу подстрочного замечания на стр. 87 к этим равенствам можно добавить: $= l_{n-1}(AS_1)$.

[2]) Отметим, что равенства $s_n(A) = d_{n-1}(A) = \lambda_n((A^*A)^{1/2})$ $(A \in T(H_1, H_2)$, $n = 1, 2, \ldots)$ были установлены ранее И. Ц. Гохбергом и М. Г. Крейном.

В заключение отметим, что из леммы 8 статьи [1] вытекает следующее уточнение предложения 2°.

4°. *Если* $A \in T(H_1, H_2)$ *и* $\alpha = \inf\{p : A \in D_p(H_1, H_2)\}$, *то* $\rho(A) = \alpha$.

Автор выражает благодарность А. С. Маркусу за ценные замечания.

ЛИТЕРАТУРА

1. Б. С. Митягин, Усп. матем. наук, 16, вып. 4 (1961), 63—132.
2. A. Pietsch. Rev. math. pures et appl. (RPR), 8, № 3 (1963), 427—447.
3. G. Köthe, Topologische lineare Räume, Berlin—Göttingen—Heidelberg, 1960.
4. Б. С. Митягин и В. М. Тихомиров, Труды 4-го Всесоюзного матем. съезда, т. 2, Л. (1964), 299—308.
5. М. Г. Крейн, М. А. Красносельский и Д. П. Мильман, Сб. трудов Ин-та матем. АН УССР, 11 (1948), 97—112.
6. Б. С. Митягин и Г. М. Хенкин, Труды семинара по функ. анализу, вып. 7, Воронеж (1963), 98—107.
7. И. Ц. Гохберг, А. С. Маркус, И. А. Фельдман, Изв. Молд. фил. АН СССР, № 10 (76) (1960), 51—70.
8. T. Kato, Journal d'analise math., 6 (1958), 261—322.

В. И. ПАРАСКА

ОБ ОДНОЙ МЕТРИКЕ В МНОЖЕСТВЕ ЗАМКНУТЫХ ОПЕРАТОРОВ И ЕЕ ПРИМЕНЕНИИ В ТЕОРИИ ВОЗМУЩЕНИЙ

1. *Раствором* двух подпространств N_1 и N_2 банахова пространства E называется (см. [1] и [2]) число $\theta(N_1, N_2)$, определяемое равенством

$$\theta(N_1, N_2) = \max\left\{ \sup_{\substack{x \in N_1 \\ \|x\| = 1}} d(x, N_2), \ \sup_{\substack{y \in N_2 \\ \|y\| = 1}} d(y, N_1) \right\},$$

где $d(z, N)$ означает расстояние вектора z до подпространства N.

Это понятие было введено в статье М. Г. Крейна, М. А. Красносельского и Д. П. Мильмана [1]. В той же статье были установлены основные положения о растворе как о мере отклонения друг от друга двух подпространств N_1, N_2, позволяющей судить о равенстве размерностей подпространств N_1 и N_2.

В статье [3] И. Ц. Гохберга и А. С. Маркуса предложено некоторое видоизменение понятия раствора. Согласно этой статье *раствором* двух подпространств N_1, $N_2 (\subset E)$ называется число $\tilde{\theta}(N_1, N_2)$, определяемое равенством

$$\tilde{\theta}(N_1, N_2) = \max\left\{ \sup_{x \in S(N_1)} d(x, S(N_2)), \ \sup_{y \in S(N_2)} d(y, S(N_1)) \right\},$$

где через $S(N)$ обозначается единичная сфера подпространства N.

Числа $\theta(N_1, N_2)$, $\tilde{\theta}(N_1, N_2)$ связаны между собой следующими соотношениями:

$$\theta(N_1, N_2) \leqslant \tilde{\theta}(N_1, N_2) \leqslant 2\theta(N_1, N_2).$$

Раствор $\tilde{\theta}(N_1, N_2)$ отличается от раствора $\theta(N_1, N_2)$ тем, что он удовлетворяет аксиоме треугольника и, следовательно, может служить метрикой в множестве всех подпространств банахова пространства E (см. [3]).

Говоря, что некоторый (ограниченный или неограниченный) оператор A действует из банахова пространства E_1 в банахово пространство E_2, будем иметь в виду лишь то, что область определения D_A оператора A лежит в E_1, а область значений R_A — в E_2.

Через $E_1 \times E_2$ будем обозначать банахово пространство всех векторов вида $\{x_1, x_2\}$ $(x_j \in E_j;\ j = 1, 2)$, в котором норма определяется равенством: $\|\{x_1, x_2\}\| = \|x_1\| + \|x_2\|$.

Графиком линейного оператора A, действующего из E_1 в E_2, называется линеал $G_A \subset E_1 \times E_2$, состоящий из всех векторов вида

$\{x, Ax\}$ $(x \in D_A)$. Как известно, линеал G_A замкнут тогда и только тогда, когда оператор A замкнут.

На множестве T всех линейных замкнутых операторов, действующих из E_1 в E_2, равенством

$$\rho(A, B) = \tilde{\theta}(G_A, G_B) \; (A, B \in T)$$

определяется метрика $\rho(A, B)$, превращающая множество T в метрическое пространство¹⁾.

Впервые метрика такого рода была введена в статье Ньюберга [4]. В [4] эта метрика была использована как мера близости операторов при доказательстве устойчивости некоторых свойств линейных операторов. Как показано в статье Берксона [5], метрика Ньюберга эквивалентна метрике $\rho(A, B)$.

В статье Кордеса и Лабруса [6] были установлены теоремы об устойчивости свойств операторов более широкого класса, чем в [4], но только для случая гильбертова пространства. Методы доказательства некоторых теорем из [6] существенно опираются на специфические свойства гильбертова пространства.

В настоящем сообщении устанавливается ряд свойств метрики $\rho(A, B)$. Основные из них (теорема 1, свойство 9°) показывают, что близость двух операторов в метрике $\rho(A, B)$ означает в определенном смысле близость их резольвент. Это позволяет обобщить известные теоремы о непрерывности спектральной функции (см. [7], стр. 400) и об устойчивости корневого числа (см. [2], теорема 4.3). Кроме того, обобщаются на случай банаховых пространств некоторые результаты Кордеса и Лабруса.

2. Приведем некоторые свойства функции $\rho(A, B)$.

1°. *Если операторы A, $B \in T$ и $\overline{D}_A = \overline{D}_B = E_1$, то*

$$\rho(A, B) = \rho(A^*, B^*).$$

2°. *Если операторы A, $B \in T$ аннулируются только в нуле, то*

$$\rho(A, B) = \rho(A^{-1}, B^{-1}),$$

где A^{-1}, B^{-1} — операторы, осуществляющие обратное отображение, соответственно R_A на D_A и R_B на D_B.

3°. *Если A, $B \in T$, оператор B является A-ограниченным (определение см. [2], § 2) и* $|B| = \sup\limits_{\substack{x \in D_A \\ x \neq 0}} \dfrac{\|Bx\|}{\|x\| + \|Ax\|} < 1$, *то*

$$\rho(A, A + B) < \frac{2|B|}{1 - |B|}.$$

4°. *Если A, $C \in T$, оператор C ограничен и $D_A \subset D_C$, то*

$$\rho(A, A + C) \leqslant 2\|C\|.$$

5°. *Если A, B, $C \in T$, оператор C ограничен и D_A, $D_B \subset D_C$, то*

$$\frac{1}{2(1 + \|C\|)^2} \rho(A, B) \leqslant \rho(A + C, B + C) \leqslant 2(1 + \|C\|)^2 \rho(A, B).$$

6°. *Если A, $B \in T$, оператор A ограничен и* $\rho(A, B) < \dfrac{1}{4 + 2\|A\|}$, *то оператор B также ограничен и*

$$\|B\| \leqslant (1 + 2\|A\|).$$

---

¹⁾ Это пространство неполно (см. [5], стр. 21).

7°. *Если операторы A, $B \in T$ имеют общую область определения и ограничены, то*

$$\frac{\|A - B\|}{(1 + \|A\| + \|B\|)^2} \leqslant \rho(A, B) \leqslant 2\|A - B\|.$$

8°. *Если операторы $A_n \in T$ $(n = 1, 2, \ldots)$, а A — линейный ограниченный оператор и* $\lim\limits_{n \to \infty} \rho(A, A_n) = 0$, *то*

$$\lim_{n \to \infty} \tilde{\theta}(D_A, D_{A_n}) = 0.$$

3. Обозначим через $R_\lambda(A)$ резольвенту оператора A.

Теорема 1. *Пусть F — замкнутое ограниченное множество в комплексной плоскости, $A \in T$ и оператор $A - \lambda I$ непрерывно обратим для всех $\lambda \in F$. Тогда для любого $\varepsilon > 0$ существует такое $\delta > 0$, что для всех операторов $B \in T$, для которых*

$$\rho(A, B) < \delta,$$

точки $\lambda \in F$ также являются регулярными точками и

$$\|R_\lambda(A) - R_\lambda(B)\| < \varepsilon \; (\lambda \in F).$$

Эта теорема доказывается с помощью следующего утверждения.

9°. *Если точка λ комплексной плоскости является регулярной точкой для операторов A, $B \in T$, то*

$$\frac{1}{4(1 + |\lambda|)^2} \rho(A, B) \leqslant \|R_\lambda(A) - R_\lambda(B)\| \leqslant 2(1 + |\lambda|)^2 (1 + \|R_\lambda(A)\| + \|R_\lambda(B)\|)^2 \rho(A, B).$$

Отсюда и из 6° следует также, что

10°. *Если все $\lambda \ni F$ являются регулярными точками для операторов A, $A_n \in T$ $(n = 1, 2, \ldots)$, то*

$$\lim_{n \to \infty} \max_{\lambda \in F} \|R_\lambda(A) - R_\lambda(A_n)\| = 0$$

тогда и только тогда, когда $\lim\limits_{n \to \infty} \rho(A, A_n) = 0$.

С помощью теоремы 1 устанавливаются следующие предложения.

Теорема 2. *Пусть линейные операторы A, A_n $(n = 1, 2, \ldots)$ действуют в гильбертовом пространстве H, операторы A_n $(n = 1, 2, \ldots)$ симметрические, а A — самосопряженный оператор и*

$$\lim_{n \to \infty} \rho(A, A_n) = 0.$$

Тогда, начиная с некоторого номера n_0, все операторы A_n будут самосопряженными и если $\{E_\lambda\}$, $\{E_{n\lambda}\}$ $(n = n_0, n_0 + 1, \ldots)$ — соответствующие спектральные функции, то

$$\lim_{n \to \infty} \|E_n(\delta) - E(\delta)\| = \lim_{n \to \infty} \|AE_n(\delta) - AE(\delta)\| = 0,$$

где $\delta = (\mu_1, \mu_2)$ — любой интервал, концы которого не принадлежат спектру оператора A, $E(\delta) = E_{\mu_2} - F_{\mu_1}$ и $E_n(\delta) = E_{n\mu_2} - E_{n\mu_1}$.

Теорема 3. *Пусть Γ — произвольный спрямляемый замкнутый контур, ограничивающий некоторую область G_Γ и обла-*

дающий относительно замкнутого оператора A, действующего в банаховом пространстве E, следующими свойствами:

а) *внутри G_Γ имеется конечное число собственных значений $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ оператора A, которым отвечают конечномерные нормально отщепляющиеся корневые подпространства*[1];

б) *все остальные точки $\lambda\ (\lambda \neq \lambda_j)$ из замкнутой области G_Γ являются регулярными точками оператора A;*

Тогда существует такое положительное число δ, что контур Γ обладает свойствами а), б) и относительно любого замкнутого оператора B, действующего в том же пространстве E и удовлетворяющего неравенству

$$\rho(A, B) < \delta,$$

причем

$$\nu_B(\Gamma) = \nu_A(\Gamma),$$

где $\nu_A(\Gamma)$, $\nu_B(\Gamma)$ — корневые числа[2] *соответственно операторов A и B относительно контура Γ.*

Теорема 4. *Пусть $A \in T$ является Φ-оператором*[3]. *Тогда для него существует такое положительное число δ, что любой оператор $B \in T$, для которого*

$$\rho(A, B) < \delta,$$

также является Φ-оператором, причем $\varkappa_B = \varkappa_A$, а $\alpha_B \leqslant \alpha_A$.

Доказательство. Сначала докажем теорему для случая, когда $\alpha_A = 0$.

Положим

$$\delta = \frac{k_A}{3_{k_A} + 6},$$

где $k_A = \inf_{x \in D_A,\ \|x\| = 1} \|Ax\|$, и пусть $y \in D_B$, $\|y\| = 1$. Тогда найдется такой элемент $x \in D_A$, что

$$\|x - y\| + \|Ax - By\| < \delta(1 + \|By\|),$$

откуда следует, что

$$\|x\| \geqslant 1 - \delta(1 + \|By\|) \tag{1}$$

и

$$(1 + k_A)\|x\| \leqslant (1 + \delta)(1 + \|By\|). \tag{2}$$

Из (1) и (2) получаем неравенство

$$\|B_y\| > \frac{k_A - \delta k_A - 2\delta}{1 + 2\delta + \delta k_A} = \frac{2k_A}{3 + k_A}, \tag{3}$$

следовательно, оператор B нормально разрешим и $\alpha_B = 0$.

Аналогично доказывается, что, каков бы ни был элемент $Ax \in R_A$, $\|Ax\| = 1$, найдется элемент $By \in R_B$ такой, что

$$\|Ax - By\| < \frac{1}{3}, \tag{4}$$

---

[1] Определение см. в [2], § 4.
[2] Определение см. в [2], § 4.
[3] Определение см. в [2], § 2.

а в силу (3) получаем также, что, каков бы ни был элемент $By' \in R_B$, $\|By'\| = 1$, найдется элемент $Ax' \in R_A$ такой, что

$$\|Ax' - By'\| < c < \frac{1}{2}. \tag{5}$$

Из (4) и (5) следует, что $\theta(R_A, R_B) < \frac{1}{2}$, а значит (см. [2], теорема 6.3), $\beta_B = \beta_A$, и этот случай теоремы полностью доказан.

Пусть теперь $\alpha_A \neq 0$. Можно ограничиться рассмотрением случая, когда $\alpha_A \leqslant \beta_A$, так как случай $\alpha_A > \beta_A$ сводится к предыдущему заменой пространства E_2 пространством $\widetilde{E}_2 = E_2 \dot{+} N$, где N — некоторое $(\alpha_A - \beta_A)$-мерное пространство, не содержащееся в E_2.

Как известно (см. [2], стр. 94), можно найти такой конечномерный оператор C, для которого $\dim R_C = \alpha_A$ и $\alpha_{A_1} = 0$, где $A_1 = A + C$. Пусть $B_1 = B + C$ и положим

$$\delta = \frac{1}{2(1 + \|C\|)^2} \frac{k_{A_1}}{3_{k_{A_1}} + 6}.$$

Тогда в силу свойства 5°

$$\rho(A_1 B_1) \leqslant 2(1 + \|C\|)^2 \rho(A, B) < \frac{k_{A_1}}{3_{k_{A_1}} + 6}.$$

Таким образом, операторы A_1 и B_1 удовлетворяют всем условиям первого случая. Значит, оператор B_1 нормально разрешим,

$$\alpha_{B_1} = 0 \text{ и } \beta_{B_1} = \beta_{A_1}. \tag{6}$$

В силу теоремы 2.3 из [2] оператор $B = B_1 - C$ является Φ-оператором и $\varkappa_B = \varkappa_{B_1}$, и в силу той же теоремы $\beta_{A_1} = \varkappa_A$. Отсюда и из (6) получаем, что $\varkappa_B = \varkappa_A$.

Покажем, наконец, что $\alpha_B \leqslant \alpha_A$. Обозначим через L_B подпространство нулей оператора B. Для любого $y \in L_B$ имеем: $B_1 y = Cy$, следовательно,

$$B_1(L_B) = C(L_B). \tag{7}$$

Но так как $\alpha_{B_1} = 0$, а $\dim R_C = \alpha_A$, то из (7) следует, что

$$\alpha_B = \dim L_B = \dim B_1(L_B) = \dim C(L_B) \leqslant \alpha_A.$$

Теорема доказана.

Теорема 5. *Пусть $A \in T$ — некоторый Φ_+-оператор (Φ_--оператор)*[1]. *Тогда для него найдется такое положительное число δ, что любой оператор $B \in T$, для которого*

$$\rho(A, B) < \delta,$$

также является Φ_+-оператором (Φ_--оператором), $\alpha_B \leqslant \alpha_A$ ($\beta_B \leqslant \beta_A$ и $\beta_B = \beta_A (\alpha_B = \alpha_A)$).

Для Φ_+-операторов эта теорема доказывается аналогично теореме 4

---

[1] Определения см. в [2], § 7.

В силу свойства 3° теоремы 4 и 5 являются обобщением теорем 2.5, 7.1 и 7.2 из [2].

Теоремы 4 и 5 для случая $\alpha_A = 0$ (без доказательства $\beta_A = \beta_B$) доказаны в [4]. Для гильбертова пространства эти же теоремы установлены в [6].

Приведем в заключение следующее предложение.

11°. Пусть A, $A_n \in T$ $(n = 1, 2, \ldots)$, A — нормально разрешим и

$$\lim_{n\to\infty} \rho(A, A_n) = 0.$$

Тогда, если $\alpha_A = 0$, то

$$\lim_{n\to\infty} \tilde{\theta}\,(R_A, R_{A_n}) = 0,$$

а если $\beta_A = 0$, то

$$\lim_{n\to\infty} \tilde{\theta}\,(L_A, L_{A_n}) = 0.$$

Автор выражает искреннюю благодарность И. Ц. Гохбергу и А. С. Маркусу за постановку задачи и постоянное внимание к работе.

ЛИТЕРАТУРА

1. М. Г. Крейн, М. А. Красносельский и Д. П. Мильман, О дефектных числах линейных операторов в банаховом пространстве и о некоторых геометрических вопросах, Сб. трудов ин-та матем. АН УССР, № 11 (1948), 97—112.
2. И. Ц. Гохберг и М. Г. Крейн, Основные положения о дефектных числах, корневых числах и индексах линейных операторов, Успехи матем. наук, XII, вып. 2 (74) (1957), 43—118.
3. И. Ц. Гохберг и А. С. Маркус, Две теоремы о растворе подпространств банахова пространства, Успех. матем. наук, XIV, вып. 5(89) (1959), 135—140.
4. J. D. Newburgh, A Topology for closed operators, Annals of Math., 53 (1951), 250—255.
5. Earl Berkson, Some metrics on the subspaces of a Banach space, Pacisic J. Math, vol. 13 № 1 (1963), 5—22.
6. H. O. Cordes and J. P. Labrousse, The invariance of the index in the metric space of closed operators, J. of Math. and Mechanics, vol. 12, № 5 (1963), 693—619.
7. Ф. Рисс и Б. С.-Надь, Лекции по функциональному анализу, ИЛ, М., 1954.

Известия Академии наук Молдавской ССР, № 6, 1964

Е. М. ШПИГЕЛЬ, Б. А. ЩЕРБАКОВ

О СТРУКТУРЕ КВАЗИМИНИМАЛЬНЫХ МНОЖЕСТВ

В настоящей статье изучаются замыкания траекторий устойчивых по Пуассону движений [1, 2].

1°. Множество фазового пространства произвольной динамической системы, совпадающее с замыканием траектории устойчивого по Пуассону движения, в дальнейшем будем называть *квазиминимальным множеством*. Компактные квазиминимальные множества изучались ранее в работах Г. Ф. Хильми [3, 4] и Т. М. Черри [5].

Пусть (R, f)—динамическая система, а $E \subseteq R$—квазиминимальное множество. Следуя Г. М. Черри [5], точку $p \in E$ назовем: а) *π-точкой*, если $\overline{f(p, I^+)} = \overline{f(p, I^-)} = E$; б) *$\mu$-точкой*, если $\overline{f(p, I^+)} = E$ $(\overline{f(p, I^-)} = E)$ и $\overline{f(p, I^-)} \neq E$ $(\overline{f(p, I^+)} \neq E)$; в) *$\sigma$-точкой*, если $\overline{f(p, I^+)} \neq E$ и $\overline{f(p, I^-)} \neq E$.

Введем в рассмотрение множества E_π, E_μ и E_σ соответственно всем π-точкам, всем μ-точкам, всем σ-точкам множества E. Из определения названных точек непосредственно следует, что множества E_π, E_μ и E_σ попарно не пересекаются и $E = E_\pi \cup E_\mu \cup E_\sigma$, при этом всегда $E_\pi \neq \Lambda$. Установим еще некоторые свойства введенных множеств.

Лемма 1. *Для того, чтобы точка p квазиминимального множества E была σ-точкой, необходимо и достаточно, чтобы траектория $f(p, I)$ не была всюду плотной в E.*

Доказательство. Пусть траектория $f(p, I)$ всюду плотна в квазиминимальном множестве E. Выберем произвольную точку $q \in E_\pi$ (выше уже отмечалось, что $E_\pi \neq \Lambda$). В силу соотношений $q \in E = \overline{f(p, I)} = \overline{f(p, I^+)} \cup \overline{f(p, I^-)}$ точка q принадлежит хотя бы одному из множеств $\overline{f(p, I^+)}$ и $\overline{f(p, I^-)}$. Пусть, для определенности, $q \in \overline{f(p, I^+)}$. Так как $\overline{f(p, I^+)}$—замкнутое, положительно инвариантное множество (см. [4], лемма 2), то из условия $q \in \overline{f(p, I^+)}$ следует, что $\overline{f(q, I^+)} \subseteq \overline{f(p, I^+)}$. А так как $E = \overline{f(q, I^+)}$, то и $\overline{f(p, I^+)} = E$. Но тогда p не может быть σ-точкой. Таким образом, если $p \in E_\sigma$, то траектория $f(p, I)$ не всюду плотна в E. Обратное утверждение является очевидным.

Следствие. *Для того, чтобы квазиминимальное множество было минимальным, необходимо и достаточно, чтобы оно не содержало σ-точек.*

Лемма 2. *Если точка p квазиминимального множества E является π-точкой (μ-точкой), то движение $f(p, t)$ устойчиво по Пуассону (устойчиво по Пуассону только в одном направлении).*

Доказательство. Предположим, что p является π-точкой квазиминимального множества E. Тогда $\overline{f(p, I)} = \overline{f(p, I^+)} = \overline{f(p, I^-)}$.

Следовательно, движение $f(p, t)$ устойчиво по Пуассону [1]. Пусть теперь p есть μ-точка. Так же, как и выше, убеждаемся, что движение $f(p, t)$ устойчиво по Пуассону хотя бы в одном направлении. Оно не может быть устойчиво по Пуассону в обоих направлениях, ибо тогда было бы $\overline{f(p, I^+)} = \overline{f(p, I^-)} = \overline{f(p, I)} = E$ и p не была бы μ-точкой.

Следствие 2. *Пусть квазиминимальное множество E не содержит σ-точек. При этом точка $p \in E$ является π-точкой (μ-точкой) тогда и только тогда, когда движение $f(p, t)$ устойчиво по Пуассону (устойчиво по Пуассону в одном направлении и уходящее — в другом).*

Действительно, по следствию 1 в этом случае множество E минимально. А минимальное множество не может содержать траектории движений, асимптотических хотя бы в одном направлении (см. [6], теорема 5).

Лемма 3. *Множество E_π квазиминимального множества E инвариантно. Этим же свойством обладает множество $E_\mu(E_\sigma)$, если $E_\mu \neq \Lambda(E_\sigma \neq \Lambda)$.*

Доказательство. Пусть $p \in E_\pi$. Поскольку движение $f(p, t)$ устойчиво по Пуассону, то $\overline{f(q, I^-)} = \overline{f(q, I^+)} = \overline{f(q, I)}$ для любой точки $q \in f(p, I)$. Кроме того, $\overline{f(q, I)} = \overline{f(p, I)} = E$. Поэтому q является π-точкой. Следовательно, множество E_π инвариантно. Инвариантность множества E_σ при условии $E_\sigma \neq \Lambda$ вытекает непосредственно из леммы 1. Наконец, множество E_μ, поскольку оно совпадает с разностью $E \setminus (E_\pi \cup E_\sigma)$ двух инвариантных множеств E и $E_\pi \cup E_\sigma$, также инвариантно, если $E_\mu \neq \Lambda$.

Лемма 4. *Множество E_π всюду плотно в E. Этим же свойством обладает множество E_μ, если оно не пусто. Множество E_σ либо всюду плотно в E, либо нигде не плотно в E.*

Доказательство. Первые два утверждения вытекают непосредственно из леммы 3 и определения π-точек и μ-точек. Третье утверждение содержится в одной теореме Г. М. Черри (см. [5], стр. 970, теорема 7), сформулированной для компактных квазиминимальных множеств. Однако из доказательства этого утверждения видно, что оно справедливо для любого квазиминимального множества.

Лемма 5. *Если в квазиминимальном множестве E есть хотя бы одна компактная окрестность, а множество $E_\mu = \Lambda$, то множество E_σ либо пусто, либо всюду плотно в E.*

Доказательство. Допустим, что множество E_σ не пусто и не всюду плотно в E. Тогда по лемме 4 оно нигде не плотно в E. Пусть S — компактная окрестность в множестве E, а p — π-точка, содержащаяся в S. Выберем произвольную σ-точку $q \in E$. Можно считать, что S свободна от σ-точек и $\overline{S} \cap \overline{f(q, I)} = \Lambda$. Существует последовательность моментов t_i таких, что $\{t_i\} \to +\infty$ и $f(p, t_i) \to q$ при $t_i \to +\infty$, причем $f(p, t_i) \in E \setminus \overline{S}$ при всех $i = 1, 2, 3, \ldots$ Для каждого t_i можно подобрать единственное τ_i такое, что при всех $t_i \leqslant t < \tau_i$ точки $f(p, t)$ находятся вне S, а точка $f(p, \tau_i)$ лежит на границе S. Ясно, что тогда для любого отрицательного t найдется номер k такой, что $t_i < t + \tau_i < \tau_i$ при всех $i \geqslant k$. Если теперь $\lim\limits_{i \to \infty} f(p, \tau_i) = r$,

то $\lim\limits_{i \to \infty} f(p, t + \tau_i) = f(r, t)$ и точка $f(r, t)$ находится вне окрестности S, то есть вся отрицательная полутраектория $f(r, I^-)$ лежит вне S. Но тогда r не может быть π-точкой, а потому является σ-точкой.

Из доказанных выше лемм вытекает следующая теорема, описывающая структуру произвольного квазиминимального множества.

Теорема. *Пусть E — квазиминимальное множество. Тогда имеет место один и только один из следующих случаев:*

1. $E = E_\pi$.

2. $E = \overline{E_\pi}$, $E_\mu = \Lambda$, $E_\sigma \neq \Lambda$ и E_σ *нигде не плотно в* E.

3. $E = \overline{E_\pi} = \overline{E_\sigma}$, $E_\mu = \Lambda$.

4. $E = \overline{E_\pi} = \overline{E_\mu}$, $E_\sigma = \Lambda$.

5. $E = \overline{E_\pi} = \overline{E_\mu}$, $E_\sigma \neq \Lambda$ и E_σ *нигде не плотно в* E.

6. $E = \overline{E_\pi} = \overline{E_\mu} = \overline{E_\sigma}$.

Замечание 1. Из леммы 5 и теоремы Биркгофа (см. [1], стр. 402, теорема 27) следует, что если квазиминимальное множество является компактным, то могут осуществляться лишь случаи 1, 3, 5, 6 сформулированной выше теоремы.

Примеры квазиминимальных множеств, структура которых описывается указанными четырьмя случаями, приведены в статье [5].

Замечание 2. Если множество E — локально-компактно, то может осуществляться и случай 4.

Действительно, на поверхности тора определим динамическую систему дифференциальными уравнениями $\frac{d\varphi}{dt} = \varphi^2 + \theta^2$ и $\frac{d\theta}{dt} = \alpha(\varphi^2 + \theta^2)$, где α — иррациональное число (см. [1], стр. 38, пример 6). Если теперь преобразовать тор так, чтобы точка $(0,0)$ стала бесконечно удаленной, то определится новая динамическая система, фазовое пространство которой является локально-компактным квазиминимальным множеством, состоящим только из π- и μ-точек.

Когда E — произвольное квазиминимальное множество, может осуществляться и случай 2. Действительно, в качестве фазового пространства опять рассмотрим тор и определим динамическую систему на всей поверхности тора, исключая кривую $\theta = \alpha\varphi((\theta, \varphi) \neq (0,0))$, теми же уравнениями, что и в предыдущем примере. Тогда квазиминимальное множество состоит из π-точек и одной только σ-точки — точки покоя $(0,0)$.

2°. Покажем, что фазовое пространство R_u универсальной динамической системы М. В. Бебутова [7] является квазиминимальным множеством. Для этого в динамической системе М. В. Бебутова построим пример устойчивого по Пуассону движения, траектория которого всюду плотна в R_u. Существование траекторий, всюду плотных в R_u, было установлено ранее М. В. Бебутовым [7].

На числовой оси выберем бесконечную в обе стороны последовательность попарно непересекающихся отрезков $\Delta_i = [\tau_i - l_i, \tau_i + l_i]$ $= \ldots, -2, -1, 0, 1, 2, \ldots,$ соответствующая последовательност длин которых неограниченно возрастает при $|i| \to +\infty$. Будем считать, что отрезки выбранной последовательности расположены так, что $\tau_i < \tau_j$ при $i < j$. Пусть $B = \{p_n(x)\}(n = 1, 2, \ldots)$—счетное всюду плотное множество R_u, состоящее из полиномов с рациональными коэффициентами. Разность $D = R_u \setminus B$ содержит множество всех периодических функций, которое всюду плотно в R_u (см. [7], теорема 3). Поэтому $\overline{D} = R_u$. Определим теперь непрерывную на всей числовой оси функцию $p(x)$, полагая $p(x) \equiv 0$ на Δ_0 и $p(x) \equiv p_{|i|}(x - \tau_i)$ на Δ_i при $i \neq 0$. На интервалах между любыми двумя соседними отрезками Δ_i и Δ_{i+1} функцию $p(x)$ определим посредством линейной интерполяции. В динамической системе М. В. Бебутова рассмотрим движение $f(p, t)$, определяемое функцией $p(x)$. Согласно определению $p(x)$, каково бы ни было натуральное n, равенство $p(x + \tau_n) \equiv p_n(x)$ имеет место при всех $|x| \leqslant l_n$. Отсюда следует (так как $l_n \to +\infty$ при $n \to \infty$), что $\rho(p_n, f(p, \tau_n)) \to 0$ при $n \to \infty$. Покажем, что $D \subseteq \Omega_p$. Пусть $q = q(x)$ — произвольная точка множества D. Ясно, что $q \in \overline{B} \setminus B$. Поэтому в $B = \{p_n(x)\}$ найдется бесконечная подпоследовательность, сходящаяся к точке q. Чтобы не усложнять обозначений, будем считать, что к точке q сходится сама последовательность $\{p_n(x)\}$. Учитывая, что $\tau_n \to +\infty$ при $n \to \infty$, а $\rho(q, f(p, \tau_n)) \leqslant \rho(q, p_n) + \rho(p_n, f(p, \tau_n))$, заключаем, что $q \in \Omega_p$. Значит, $D \subseteq \Omega_p$ и, поскольку Ω_p — замкнутое множество, $R_u \subseteq \Omega_p$. Отсюда вытекает, что рассматриваемое движение $f(p, t)$ устойчиво по Пуассону в положительном направлении и $\overline{f(p, J^+)} = R_u$. Аналогично можно показать, что движение $f(p, t)$ устойчиво по Пуассону в отрицательном направлении и $\overline{f(p, I^-)} = R_u$.

Итак, *фазовое пространство R_u динамической системы М. В. Бебутова является квазиминимальным множеством*. Покажем, что в нем всюду плотно как множество всех его μ-точек, так и множество всех его σ-точек. Пусть $r = r(x)$—непрерывная функция, определенная равенствами $r(x) \equiv 0$ при $x \leqslant \tau_0$ и $r(x) \equiv p(x)$ при $x > \tau_0$. Так же, как и выше, можно показать, что $\overline{f(r, I^+)} = R_u$. С другой стороны, отрицательная полутраектория $f(r, I^-)$ не всюду плотна в R_u, так как $f(r, t) \to p_0(x) \equiv 0$ при $t \to -\infty$. Следовательно, r — μ-точка. Таким образом, множество всех μ-точек квазиминимального множества R_u непусто и, следовательно, всюду плотно в R_u. В R_u также всюду плотно и множество всех σ-точек. Действительно, М. В. Бебутовым установлено [7], что множество точек пространства R_u, лежащих на периодических траекториях, всюду плотно в R_u. Каждая из этих точек, как легко убедиться, является σ-точкой.

В R_u существует континуум компактных квазиминимальных множеств, содержащих так же, как и R_u, всюду плотные множества μ-точек и σ-точек. Действительно, пусть $M > 0$, а $\delta = \delta(\varepsilon)$—положительная функция, определенная для всех $\varepsilon > 0$. Рассмотрим подмножество $E_M \subseteq R_u$ всех функций $\varphi(x)$, для которых $|\varphi(x)| \leqslant M$, и $|\varphi(x_2) - \varphi(x_1)| \leqslant \varepsilon$, каковы бы ни были x_2 и x_1, удовлетворяющие неравенству $|x_2 - x_1| < \delta$. Легко убедиться, что множество E_M компактно в R_u (см. [8]) и замкнуто. Это множество обладает счетной базой и содержит всюду плотное множество периодических функций. Пользуясь этим, так же как и для R_u, можно показать, что E_M является квазиминимальным множеством, содержащим всюду плотные множества μ-точек и σ-точек.

ЛИТЕРАТУРА

1. В. В. Немыцкий и В. В. Степанов, Качественная теория дифференциальных уравнений. М.—Л., ГИТТЛ, 1949.
2. В. В. Немыцкий, Топологические вопросы теории динамических систем, Успехи матем. наук, т. 4, вып. 6, 1945, 91—153.
3. Г. Ф. Хильми, Sur les ensembles quasi-minimaux dans les systèmes dynamiques, Annals of Mathematics, vol. 37, № 4 (1936), 809—907.
4. Г. Ф. Хильми, О теории квазиминимальных множеств, Доклады АН СССР, т. XV, № 3 (1937), 113—116.
5. T. M. Cherry, Topological properties of the solution of ordinary differential equations, Amer. Journ. of Mathem., v. 59, № 2 (1937), 957—982.
6. Б. А. Щербаков, Минимальные движения и структура минимальных множеств, Исследования по алгебре и математическому анализу, Кишинев, 1964, 99—110.
7. М. В. Бебутов, О динамических системах в пространстве непрерывных функций, Бюллетень МГУ, Математика, т. 2, вып. 5 (1941), 1—52.
8. А. С. Кованько, О компактности систем почти-периодических функций Б. М. Левитана, Уч. записки Львовского госуниверситета, т. XXIX, вып. 1 (1954), 45—49.

СОДЕРЖАНИЕ

Краткие сообщения

ИЗВЕСТИЯ
АКАДЕМИИ НАУК МОЛДАВСКОЙ ССР
№ 6

Редактор Л. Мальцева
Художественный редактор Л. Кирияк
Технический редактор В. Павлова
Корректор Б. Кенигфест

Сдано в набор 25/VIII 1964 г. Подписано к печати 19/XII 1964 г. Формат бумаги $70\times108^1/_{16}$.
Печатных листов 9,10. Уч.-из. листов 6,93. Тираж 500. АБ03442. Цена 45 коп. Зак. № 1808.
Издательство „Картя Молдовеняскэ“, Кишинев, ул. Жуковского, 44.

Полиграфкомбинат, Кишинев, Госпитальная, 32.