БУЛЕТИНУЛ
АКАДЕМИЕЙ ДЕ ШТИИНЦЕ А РСС МОЛДОВЕНЕШТЬ

ИЗВЕСТИЯ
АКАДЕМИИ НАУК МОЛДАВСКОЙ ССР

4
1966

физтех и математ

АКАДЕМИЯ НАУК МОЛДАВСКОЙ ССР

БУЛЕТИНУЛ
АКАДЕМИЕЙ ДЕ ШТИИНЦЕ А РСС МОЛДОВЕНЕШТЬ

ИЗВЕСТИЯ
АКАДЕМИИ НАУК МОЛДАВСКОЙ ССР

№ 4
1966

СЕРИЯ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИХ И МАТЕМАТИЧЕСКИХ НАУК

ИЗДАТЕЛЬСТВО «КАРТЯ МОЛДОВЕНЯСКЭ»
КИШИНЕВ • 1966

В. Д. БЕЛОУСОВ, И. А. ФЛОРЯ

КВАЗИГРУППЫ СО СВОЙСТВОМ ОБРАТИМОСТИ

Одним из наиболее близких классов луп к группам является класс IP-луп. Они определяются с помощью двух тождеств: $^{-1}x \cdot xy = y$, $yx \cdot x^{-1} = y$, где $^{-1}x\,x = x\,x^{-1} = 1$, 1 — единица лупы. Эти тождества называются соответственно левой и правой обратимостью. Лупы со свойством обратимости (кратко, IP-лупы) подробно были изучены Браком в [1]. Однако, как отмечает Брак, эти тождества могут быть взяты в качестве определения IP-квазигрупп, частным случаем которых являются IP-лупы.

В настоящей статье изучаются IP-квазигруппы при помощи специальных элементов, называемых элементами Муфанг и Бола. Найдены необходимые и достаточные условия, чтобы лупа, изотопная IP-квазигруппе, была IP-лупой. Доказывается, что в любой IP-квазигруппе множество элементов Бола совпадает с множеством элементов Муфанг и что множество элементов Бола образует подквазигруппу.

Вводится специальный класс квазигрупп, называемых квазигруппами Муфанг. Доказывается следующее: квазигруппы Муфанг являются IP-квазигруппами и обладают свойством, состоящим в том, что любая лупа, изотопная им, является лупой Муфанг.

Обобщены некоторые результаты Брака [1] о сердцевине лупы Муфанг.

1°. Элементарные свойства IP-квазигрупп.

Как известно, в группе большую роль играет свойство обратимости, которое выражается в следующем: для каждого элемента x существует обратный элемент x^{-1} такой, что выполняется равенство

$$x\,x^{-1} = x^{-1}\,x = 1,$$

и отсюда на основании ассоциативного закона получаем:

$$x^{-1} \cdot xy = y, \quad yx \cdot x^{-1} = y. \tag{1}$$

Равенства (1) можно взять в качестве определения одного весьма широкого класса квазигрупп.

Как известно, группоид $Q\ (\cdot)$ называется квазигруппой, если уравнения $ax = b$ и $ya = b$ однозначно разрешимы для любых $a, b \in Q$. Если квазигруппа $Q(\cdot)$ обладает единицей, т. е. существует такой элемент 1, что выполняется равенство $x1 = 1x = x$ для любых $x \in Q$, то $Q(\cdot)$ называется лупой.

Определение 1. Квазигруппа $Q\ (\cdot)$ называется *квазигруппой с правым свойством обратимости* (кратко, *RIP-квазигруппой*), если существует такое отображение I_r множества Q в себя, что выполняется равенство

$$yx \cdot xI_r = y \tag{2}$$

для любых x и $y \in Q$.

Аналогично определяется *квазигруппа с левым свойством обратимости* (кратко, *LIP-квазигруппа*). В этом случае должно существовать такое отображение I_l, что имеет место равенство

$$x I_l \cdot xy = y \tag{3}$$

для любых $x,\ y \in Q$.

Если в квазигруппе $Q(\cdot)$ выполняется одновременно (2) и (3), то она называется *квазигруппой со свойством обратимости* (кратко, *IP-квазигруппой*). Аналогично определяются RIP, LIP и IP-лупы.

Докажем теперь ряд простых свойств, которые сразу вытекают из определения IP-квазигруппы.

1) Отображения I_r, I_l являются подстановками*) множества Q, причем $I_r^2 = I_l^2 = 1$, где 1 — тождественная подстановка.

Действительно, из $yx \cdot xI_r = y$ следует $(yx \cdot xI_r)(xI_r)I_r = y \cdot (xI_r)I_r$ или $yx = y \cdot xI_r^2$, откуда $xI_r^2 = x$, т. е. $I_r^2 = 1$. Теперь очевидно, что I_r — подстановка множества Q. Аналогично доказывается, что I_l — подстановка множества Q и $I_l^2 = 1$.

Введем обозначения: $xI_r = x^{-1}$, $xI_l = {}^{-1}x$.

2) Решением уравнения $ax = b$ будет ${}^{-1}ab$, а уравнения $ya = b$ будет ba^{-1}.

Действительно, $a({}^{-1}a\,b) = {}^{-1}({}^{-1}a)\,({}^{-1}a\,b) = b$.

3) $(xy)^{-1} = {}^{-1}y\,{}^{-1}x$, ${}^{-1}(xy) = y^{-1}x^{-1}$. (4)

В самом деле, пусть $xy = z$, следовательно, $y = {}^{-1}xz$, а отсюда следует ${}^{-1}x = yz^{-1}$ и, наконец, $z^{-1} = {}^{-1}y\,{}^{-1}x$, т. е. $(xy)^{-1} = {}^{-1}y\,{}^{-1}x$.

Аналогично доказывается и второе из равенств (4).

4) Для любых $a \in Q$ выполняются равенства

$$L_a^{-1} = L_{{}^{-1}a},\quad R_a^{-1} = R_{a^{-1}}, \tag{5}$$

которые следуют из (3) и (2) соответственно, где L_a и R_a являются соответственно левой и правой трансляциями квазигруппы $Q(\cdot)$, т. е. $xL_a = ax$, $xR_a = xa$.

5) ${}^{-1}x\,x = e_x$, $x\,x^{-1} = f_x$, (6)

где e_x, f_x — соответственно правая и левая локальные единицы для x, т. е.

$$xe_x = x,\quad f_x x = x.$$

Равенства (6) получаются соответственно из (3) и (2).

Пример IP-квазигруппы, для которой $I_r \neq I_l$.

Пусть $Q(\cdot)$ — абелева группа, в которой не все элементы являются элементами второго порядка. Рассмотрим группоид $Q(\circ)$, где $x \circ y = x \cdot y^{-1}$, $y^{-1}y = yy^{-1} = 1$. Очевидно, что $Q(\circ)$ — квазигруппа с правой единицей. Имеем:

$$x \circ (x \circ y) = x \circ (xy^{-1}) = x\,(x^{-1}y) = y,$$
$$(y \circ x) \circ x^{-1} = (y \circ x)\,x = (yx^{-1})x = y.$$

Следовательно, $Q(\circ)$ — IP-квазигруппа, в которой $I_r \neq I_l$.

---

*) Взаимно однозначное отображение множества Q на себя назовем подстановкой множества Q.

2°. Обратные квазигруппы к IP-квазигруппе.

Как известно [2], если дана квазигруппа $Q(A)$, то ей соответствуют еще пять обратных операций, которые определяются так: пусть $A(a, x) = b$, тогда $x = A^{-1}(a, b)$, пусть $A(y, a) = b$, тогда $y = {}^{-1}A(b, a)$. $Q(A^{-1})$ и $Q({}^{-1}A)$ являются соответственно правой и левой обратными квазигруппами для $Q(A)$. Взяв для $Q(A^{-1})$ и $Q({}^{-1}A)$ обратные операции и повторяя этот процесс, мы получаем: $Q({}^{-1}(A^{-1}))$, $Q(({}^{-1}A)^{-1})$ и $Q(A^*)$, где $A^* = [{}^{-1}(A^{-1})]^{-1} = {}^{-1}[({}^{-1}A)^{-1}]$, $A^*(x, y) = A(y, x)$.

Как известно, квазигруппа $Q(B)$ изотопна квазигруппе $Q(A)$, если существуют такие три подстановки α, β, γ множества Q, что имеет место равенство

$$B(x, y) = [A(x\alpha, y\beta)]\,\gamma^{-1} \tag{7}$$

для любых $x,\ y \in Q$.

Равенство (7) записывается короче так: $B = A^T$, где $T = (\alpha, \beta, \gamma)$. Частным случаем изотопии является главная изотопия, когда $\gamma = 1$, где 1 — тождественная подстановка. Упорядоченная тройка подстановок $T = (\alpha, \beta, \gamma)$ из (7) называется изотопией. Частным случаем изотопии является автотопия, когда в (7) операции B и A совпадают, т. е. $A(x, y) = [A(x\alpha, y\beta)]\,\gamma^{-1}$. Все изотопии, определяемые на множестве Q, образуют группу.

Заметим, что IP-квазигруппу $Q(A)$ можем определить с помощью обратных операций: квазигруппа $Q(A)$ тогда и только тогда является IP-квазигруппой, если существуют две подстановки I_r и I_l такие, что имеет место

$$A^{-1} = A^{(I_l,\, 1,\, 1)},\quad {}^{-1}A = A^{(1,\, I_r,\, 1)}. \tag{8}$$

Действительно, согласно определению IP-квазигруппы $Q(A)$ имеем $A[A(y, x), xI_r] = y$, откуда $A(y, x) = {}^{-1}A(y, xI_r)$, т. е. $A = ({}^{-1}A)^{(1,\, I_r,\, 1)}$. Отсюда ${}^{-1}A = A^{(1,\, I_r,\, 1)^{-1}} = A^{(1,\, I_r^{-1},\, 1)} = A^{(1,\, I_r,\, 1)}$. Аналогично доказывается и первое из равенств (8). Из равенств (8) следует

Теорема 1. *Все обратные квазигруппы для IP-квазигруппы $Q(A)$ изотопны между собой.*

Сначала докажем, что в любой квазигруппе $Q(A)$ имеет место:

$$\left(A^T\right)^{-1} = \left(A^{-1}\right)^{T^r},\quad {}^{-1}\left(A^T\right) = \left({}^{-1}A\right)^{T^l}, \tag{9}$$

где

$$T = (\alpha, \beta, \gamma),\ T^r = (\alpha, \gamma, \beta),\ T^l = (\gamma, \beta, \alpha).$$

Действительно, так как $Q({}^{-1}(A^T))$ — квазигруппа, то существует такой элемент x', что имеет место $\left({}^{-1}A\right)^{T^l}(x, y) = {}^{-1}\left(A^T\right)(x', y)$, откуда $x' = A^T\left[({}^{-1}A)^{T^l}(x, y), y\right]$,

$$x' = A^{(\alpha, \beta, \gamma)}\,[({}^{-1}A)^{(\gamma, \beta, \alpha)}(x, y), y],$$
$$x' = \{A\,[[{}^{-1}A(x\gamma, y\beta)]\,\alpha^{-1}\alpha, y\beta]\}\,\gamma^{-1},$$
$$x' = \{A\,[{}^{-1}A(x\gamma, y\beta), y\beta]\}\,\gamma^{-1},$$
$$x' = x.$$

Аналогично доказывается первое из равенств (9).

Переходим к доказательству теоремы 1. Из (8) видим, что квазигруппы $Q(A)$, $Q(^{-1}A)$, $Q(A^{-1})$ изотопны между собой. Ввиду равенств (9) и (8), обозначая $T_1 = (I_l, 1, 1)$, $T_2 = (1, I_r, 1)$, имеем

$$^{-1}(A^{-1}) = {}^{-1}\left(A^{T_1}\right) = (^{-1}A)^{T_1{}^l} = A^{T_2 T_1{}^l},$$

$$(^{-1}A)^{-1} = \left(A^{T_2}\right)^{-1} = \left(A^{-1}\right)^{T_2{}^r} = A^{T_1 T_2{}^r};$$

$$A^* = \left[^{-1}(A^{-1})\right]^{-1} = \left(A^{T_2 T_1{}^l}\right)^{-1} = \left(A^{T'}\right)^{-1} = \left(A^{-1}\right)^{(T')^r} = A^{T_1 (T')^r}.$$

Теорема доказана.

Возникает вопрос, при каких условиях обратные операции IP-квазигруппы $Q(\cdot)$ будут тоже IP-квазигруппами.

Ответ дает

Теорема 2. *Все обратные операции IP-квазигруппы $Q(A)$ будут тоже IP-квазигруппами тогда и только тогда, когда существует подстановка α множества Q, что выполняется равенство*

$$[A(x, y)]\,\alpha = A(y, x). \tag{10}$$

Доказательство. Пусть обратные операции являются IP-квазигруппами, тогда, в частности, имеем:

$$A^{-1}\left[A^{-1}(y, x), x\alpha\right] = y.$$

Пусть $A^{-1}(y, x) = z$, тогда $x = A(y, z)$, $A^{-1}(z, x\alpha) = y$, откуда $x\alpha = A(z, y)$, $[A(y, z)]\,\alpha = A(z, y)$. Получили равенство (10).

Обратно, пусть имеет место равенство (10). Обозначим $A(x, y) = z$, тогда $y = A^{-1}(x, z)$, $z\alpha = A(y, x) = A\,[A^{-1}(x, z), x]$, откуда получаем

$$A^{-1}[A^{-1}(x, z), z\alpha] = x. \tag{11}$$

Из определения IP-квазигруппы $Q(A)$ имеем $A\,[xI_l, A(x, y)] = y$. Пусть $A(x, y) = z$, тогда $y = A^{-1}(x, z)$, $A(xI_l, z) = y$, $z = A^{-1}(xI_l, y) = A^{-1}[xI_l, A^{-1}(x, z)]$,

$$A^{-1}[xI_l, A^{-1}(x, z)] = z. \tag{12}$$

Из (11) и (12) следует, что $Q(A^{-1})$ — IP-квазигруппа.

В равенстве (10) обозначим $A(x, y) = z$, тогда $x = {}^{-1}A(z, y)$, $z\alpha = A(y, x) = A\,[y, {}^{-1}A(z, y)]$, откуда

$$^{-1}A\,[z\alpha, {}^{-1}A(z, y)] = y. \tag{13}$$

Из определения IP-квазигруппы имеем $A\,[A(y, x), xI_r] = y$. Обозначим $A(y, x) = z$, тогда $y = {}^{-1}A(z, x)$, $A(z, xI_r) = y$, $z = {}^{-1}A(y, xI_r) = {}^{-1}A\,[{}^{-1}A(z, x), xI_r]$,

$$^{-1}A\,[{}^{-1}A(z, x), xI_r] = z. \tag{14}$$

Из (13) и (14) следует, что $Q(^{-1}A)$ — IP-квазигруппа.

Так как имеем равенство $A\,[xI_l, A(x, y)] = y$, то, обозначая $A(x, y) = z$, имеем $x = {}^{-1}A(z, y)$, $A(xI_l, z) = y$, $xI_l = {}^{-1}A(y, z)$, откуда

$$^{-1}A(z, y) = [{}^{-1}A(y, z)]\,I_l. \tag{15}$$

Учитывая равенство (15) и тот факт, что $Q(^{-1}A)$ — IP-квазигруппа, мы заключаем, что и $Q(^{-1}A)^{-1})$ — IP-квазигруппа.

В равенстве $A\,[A(y, x), xI_r] = y$, обозначая $A(y, x) = z$, получаем $x = A^{-1}(y, z)$, $A(z, xI_r) = y$, $xI_r = A^{-1}(z, y)$,

$$[A^{-1}(y, z)]\,I_r = A^{-1}(z, y). \tag{16}$$

Равенство (16) показывает, что $Q\left({}^{-1}(A^{-1})\right)$ является IP-квазигруппой, так как мы уже доказали, что $Q(A^{-1})$ — IP-квазигруппа. Для операции A^* утверждение теоремы очевидно.

Следствие. *Обратные операции коммутативной IP-квазигруппы являются IP-квазигруппами.*

Пример некоммутативной IP-квазигруппы, для которой все обратные операции являются IP-квазигруппами.

Возьмем тот же пример IP-квазигруппы, о котором говорили выше. Рассмотрим подстановку $x \to x^{-1} = xI$, где $xx^{-1} = x^{-1}x = 1$. Тогда $(x \circ y)\,I = (xy^{-1})^{-1} = x^{-1}y = yx^{-1} = y \circ x$.

3. Автотопии IP-квазигруппы.

Лемма 1. *Если (α, β, γ) — автотопия IP-квазигруппы $Q(\cdot)$, тогда $(I_l\,\alpha\,I_l, \gamma, \beta)$ и $(\gamma, I_r\,\beta\,I_r, \alpha)$ тоже являются автотопиями IP-квазигруппы $Q(\cdot)$.*

Действительно, $(xy)\,\gamma = x\alpha \cdot y\beta$, $x\alpha I_l \cdot (xy)\,\gamma = y\beta$. Заменяя $y \to xy$, $x \to xI_l$, получаем: $(xy)\,\beta = xI_l\,\alpha\,I_l \cdot (xI_l \cdot xy)\,\gamma$; следовательно, $(I_l\,\alpha\,I_l, \gamma, \beta)$ — автотопия.

Аналогично доказывается, что $(\gamma, I_r\,\beta\,I_r, \alpha)$ — автотопия. Естественно поставить вопрос, когда изотоп IP-квазигруппы будет тоже IP-квазигруппой? Ответ дает

Теорема 3. *Пусть $Q(\circ)$ является изотопом IP-квазигруппы $Q(\cdot)$, где изотопия имеет вид $x \circ y = (x\alpha \cdot y\beta)\,\gamma^{-1}$. Тогда необходимым и достаточным условием, чтобы изотоп $Q(\circ)$ был тоже IP-квазигруппой, является следующее: существуют две подстановки I_r' и I_l' такие, что $(\alpha^{-1}\gamma, \beta^{-1}I_r'\beta I_r, \gamma^{-1}\alpha)$ и $(\alpha^{-1}I_l'\alpha I_l, \beta^{-1}\gamma, \gamma^{-1}\beta)$ являются автотопиями квазигруппы $Q(\cdot)$.* Докажем необходимость. Пусть $xI_l' \circ (x \circ y) = y$, тогда имеем $xI_l'\alpha \cdot (x\alpha \cdot y\beta)\,\gamma^{-1}\beta = y\gamma$, $(x\alpha \cdot y\beta)\,\gamma^{-1}\beta = xI_l'\alpha I_l \cdot y\gamma$, откуда $(\alpha^{-1}I_l'\alpha I_l, \beta^{-1}\gamma, \gamma^{-1}\beta)$ — автотопия.

Пусть $(y \circ x) \circ xI_r' = y$, тогда $(y\alpha \cdot x\beta)\,\gamma^{-1}\alpha \cdot xI_r'\beta = y\gamma$, $(y\alpha \cdot x\beta)\,\gamma^{-1}\alpha = y\gamma \cdot xI_r'\beta I_r$; следовательно, $(\alpha^{-1}\gamma, \beta^{-1}I_r'\beta I_r, \gamma^{-1}\alpha)$ — автотопия. Доказательство достаточности не представляет никаких трудностей: надо идти обратным путем.

Применим предыдущую теорему для случая, когда $Q(\circ)$ — лупа, т. е. найдем условия, чтобы некоторый изотоп $Q(\circ)$ IP-квазигруппы $Q(\cdot)$ был IP-лупой. Очевидно, что достаточно рассмотреть случай, когда $Q(\circ)$ главно изотопна $Q(\cdot)$. В таком случае, как известно, изотопия имеет вид:

$$x \circ y = xR_a^{-1} \cdot yL_b^{-1}. \tag{17}$$

В силу теоремы 3, если $Q(\circ)$ является IP-лупой, то существуют две подстановки I_r' и I_l' такие, что $(R_a I_l' R_a^{-1} I_l, L_b, L_b^{-1})$ и $(R_a, L_b^{-1} I_r' \ldots I_r, R_a^{-1})$ являются автотопиями IP-квазигруппы $Q(\cdot)$, т. е.

$$(xy)\,L_b^{-1} = x\varphi \cdot yL_b,$$
$$(xy)\,R_a^{-1} = xR_a \cdot y\psi. \tag{18}$$

Подставляем в первое из равенств (18) $y = e_b$, где e_b — правая локальная единица для b, т. е. $b e_b = b$. Тогда получаем $x \varphi R_b = x R_{e_b} L_b^{-1}$, откуда $\varphi = R_{e_b} L_b^{-1} R_b^{-1}$, т. е. $(R_{e_b} L_b^{-1} R_b^{-1}, L_b, L_b^{-1})$ — автотопия, но тогда и $(R_{e_b} L_b^{-1} R_b^{-1}, L_b, L_b^{-1})^{-1} = (R_b L_b R_{e_b}^{-1}, L_b^{-1}, L_b)$ тоже является автотопией, т. е.

$$(x y) L_b = x R_b L_b R_{e_b}^{-1} \cdot y L_b^{-1},$$

$$b (x \cdot b y) = (b \cdot x b) R_{e_b}^{-1} \cdot y. \tag{19}$$

Аналогично второе из равенств (18) дает:

$$(x a \cdot y)\, a = x \left[(a y \cdot a) L_{f_a}^{-1} \right]. \tag{20}$$

4°. Элементы Бола и Муфанг в *IP*-квазигруппе.

Элемент b, удовлетворяющий равенству (19), назовем левым элементом Бола [3], а элемент a, удовлетворяющий равенству (20), назовем правым элементом Бола. Таким образом, мы получаем

Следствие. *Изотоп* $(\circ) = (\cdot)^{(R_a^{-1}, L_b^{-1}, 1)}$ *тогда и только тогда будет IP-лупой, когда a и b являются соответственно правым и левым элементами Бола IP-квазигруппы* $Q(\cdot)$.

Естественно поставить вопрос о зависимости левого и правого элементов Бола в *IP*-квазигруппе $Q(\cdot)$. Ответ дает

Лемма 2. *В любой IP-квазигруппе* $Q(\cdot)$ *любой левый элемент Бола является и правым элементом Бола и, наоборот, любой правый элемент Бола является и левым элементом Бола.*

Доказательство. Пусть элемент a удовлетворяет равенству (20), тогда $(R_a^{-1}, L_a R_a L_{f_a}^{-1}, R_a)$ — автотопия. Ввиду леммы 1 имеем, что $(I_l R_a^{-1} I_l, R_a, L_a R_a L_f^{-1})$, $(L_a R_a L_f^{-1}, I_r R_a I_r, I_l R_a^{-1} I_l)$ являются автотопиями, но $I_r R_a I_r = I_r I_l L_a^{-1}$, $I_l R_a^{-1} I_l = I_l I_r L_a$.

В самом деле, $y I_r R_a I_r = (y^{-1} a)^{-1} = {}^{-1}a\ {}^{-1}(y^{-1}) = y I_r I_l L_a^{-1}$, откуда $I_r R_a I_r = I_r I_l L_a^{-1}$, $y I_l R_a^{-1} I_l = {}^{-1}({}^{-1}y\, a^{-1}) = a\, ({}^{-1}y)^{-1} = y I_l I_r L_a$, т. е. $I_l R_a^{-1} I_l = I_l I_r L_a$. Следовательно, $(L_a R_a L_{f_a}^{-1}, I_r I_l L_a^{-1} I_l, I_r L_a)$ — автотопия. Далее найдем, чему равно $(xy) I_l I_r$. Получим: $(x y) I_l I_r = [{}^{-1}(x y)]^{-1} = (y^{-1} x^{-1})^{-1} = {}^{-1}(x^{-1}) \cdot {}^{-1}(y^{-1}) = x I_r I_l \cdot y I_r I_l$, т. е. $(I_r I_l, I_r I_l, I_l I_r)$ — автотопия, но тогда и $(I_r I_l, I_r I_l, I_l I_r)^{-1} (L_a R_a L_{f_a}^{-1}, I_r I_l L_a^{-1}, I_l I_r L_a) = (\alpha, L_a^{-1}, L_a)$ — автотопия, где $\alpha = I_l I_r L_a R_a L_{f_a}^{-1}$, но тогда и $(\alpha^{-1}, L_a, L_a^{-1})$ является автотопией, т. е. $(x y) L_a^{-1} = x \alpha^{-1} \cdot y L_a$. Дальше доказывается, как и выше, что $\alpha^{-1} = R_{e_a} L_a^{-1} R_a^{-1}$, т. е. $(R_a L_a R_{e_a}^{-1}, L_a^{-1}, L_a)$ — автотопия, следовательно, a — элемент, удовлетворяющий равенству (19), т. е. он является левым элементом Бола.

Замечание. Из доказательства этой леммы мы видели, что если (α, L_a^{-1}, L_a) — автотопия, то $\alpha = R_a L_a R_{e_a}^{-1}$ и a является левым элементом Бола.

Дальше под элементом Бола будем понимать левый элемент Бола. Ввиду леммы 2 можем уточнить следствие теоремы 3, а именно: лупа $Q(\circ)$, изотопная *IP*-квазигруппе $Q(\cdot)$, где изотопия имеет вид (17), будет *IP*-лупой тогда и только тогда, когда a и b являются элементами Бола.

Лемма 3. *В любой LIP-квазигруппе* $Q(\cdot)$ *имеет место равенство*

$${}^{-1}f_x = f_x, \tag{21}$$

где f_x — левая локальная единица для x, т. е. $f_x x = x$. В любой RIP-квазигруппе $Q(\cdot)$ *имеет место равенство*

$$e_x^{-1} = e_x, \tag{22}$$

где e_x — правая локальная единица для x, т. е. $xe_x = x$.

Доказательство. Пусть $Q(\cdot)$ — *LIP*-квазигруппа, т. е. в $Q(\cdot)$ выполняется равенство ${}^{-1}x \cdot xy = y$. Рассмотрим левую производную операцию $(\circ)$ [4], т. е. $x \circ y = (x \cdot yR_a) R_a^{-1}$. $Q(\circ)$ имеет правую единицу $e = f_a$, где $f_a a = a$. Элемент a мы взяли произвольный. Тогда имеем $xy = (x \circ y R_a^{-1}) R_a$. Из равенства ${}^{-1}x \cdot xy = y$ следует $[{}^{-1}x \circ (x \circ y R_a^{-1}) R_a R_a^{-1}] R_a = y$, откуда имеем равенство ${}^{-1}x \circ (x \circ y) = y$. Пусть $y = f_a = e$, тогда ${}^{-1}x \circ x = e$; если $x = e$, получаем ${}^{-1}e \circ e = e$, т. е. ${}^{-1}e = e$, ${}^{-1}f_a = f_a$.

Далее, пусть $Q(\cdot)$ — *RIP*-квазигруппа, т. е. в $Q(\cdot)$ выполняется равенство $yx \cdot x^{-1} = y$. Рассмотрим правую производную операцию $(*)$ [4], т. е. $x * y = (xL_a \cdot y) L_a^{-1}$. Квазигруппа $Q(*)$ имеет левую единицу $1 = e_a$, где $ae_a = a$. Тогда имеем $xy = (xL_a^{-1} * y) L_a$. Из равенства $yx \cdot x^{-1} = y$ следует $(yL_a^{-1} * x) L_a L_a^{-1} * x^{-1} = yL_a^{-1}$, откуда имеем $(y * x) * x^{-1} = y$. Пусть $y = x = 1 = e_a$, тогда получаем $e_a^{-1} = e_a$. Лемма доказана.

Замечание. Из доказательства леммы 3 мы видим, что левая производная операция *LIP*-квазигруппы является тоже *LIP*-квазигруппой, а правая производная операция *RIP*-квазигруппы является *RIP*-квазигруппой.

Следствие. В любой *IP*-квазигруппе выполняются равенства (21), (22), а учитывая равенства (5), получаем:

$$R_{e_x}^{-1} = R_{e_x}, \quad L_{f_x}^{-1} = L_{f_x}. \tag{23}$$

Как известно [1], лупа $Q(\cdot)$ называется лупой Муфанг, если в $Q(\cdot)$ выполняется одно из следующих трех тождеств:

$$xy \cdot zx = x(yz \cdot x), \quad x(y \cdot xz) = (xy \cdot x) z, \quad (zx \cdot y) x = z(x \cdot yx).$$

Как доказал Брак [1], эти тождества в лупе $Q(\cdot)$ эквивалентны. Ниже обобщим эти результаты для квазигрупп.

Пусть a — элемент Бола *IP*-квазигруппы $Q(\cdot)$, т. е. элемент a удовлетворяет равенству (19). Ввиду (19) и (23) получаем

$$a(x \cdot ay) = (a \cdot xa)\, e_a \cdot y. \tag{24}$$

Лемма 4. *Пусть $Q(\cdot)$ — IP-квазигруппа. Если элемент $a \in Q$ удовлетворяет одному из равенств (25) для любых $y, z \in Q$, то a удовлетворяет и остальным двум из равенств (25):*

$$\left.\begin{aligned} a(y\cdot az) &= (a\cdot yf_a)a\cdot z, \\ (ya\cdot z)a &= y[a\cdot(e_a z\cdot a)], \\ a(yz\cdot a) &= [ay\cdot(z^{-1}L_a^{-1})^{-1}]R_{e_a}^{-1}, \end{aligned}\right\} \tag{25}$$

где $zz^{-1} = f_z$, $f_z z = z$.

Доказательство. Сначала докажем, что если элемент a является элементом Бола, то a удовлетворяет первому из равенств (25). В самом деле, так как $Q(\cdot)$ — квазигруппа, то существует такой элемент x', что имеет место равенство $(a\cdot xa)e_a = (a\cdot x'f_a)a$. Умножаем последнее равенство справа на a^{-1} и, учитывая (24), получаем $(a\cdot xa)e_a\cdot a^{-1} = a\cdot x'f_a$, $a(x\cdot aa^{-1}) = a\cdot x'f_a$, $a\cdot xf_a = a\cdot x'f_a$, откуда $x = x'$. Очевидно, что имеет место и обратное утверждение, т. е. если элемент a IP-квазигруппы $Q(\cdot)$ удовлетворяет первому из равенств (25), то a является элементом Бола. Ввиду леммы 2, если элемент a является элементом Бола, то a удовлетворяет и равенству (20). Учитывая (23), докажем, что элемент Бола a IP-квазигруппы $Q(\cdot)$ удовлетворяет равенству

$$a(e_a x\cdot a) = f_a(ax\cdot a). \tag{26}$$

Пусть $a(e_a x'\cdot a) = f_a(ax\cdot a)$. Умножаем последнее равенство слева на ${}^{-1}a$ и учитывая, что a удовлетворяет равенству (20), получаем $e_a x'\cdot a = ({}^{-1}aa\cdot x)a = e_a x\cdot a$, т. е. $x' = x$. Следовательно, элемент Бола a удовлетворяет и второму из равенств (25).

Обратно, пусть a удовлетворяет второму из равенств (25), тогда при $y = f_a$ получаем равенство (26), а следовательно, и (20), (24). Если a — элемент Бола, то a удовлетворяет равенству (19), т. е. элемент a является элементом Бола тогда и только тогда, когда $(R_a L_a R_{e_a}^{-1}, L_a^{-1}, L_a)$ является автотопией. Но тогда, ввиду леммы 1, и $(L_a, I_r L_a^{-1} I_r, R_a L_a R_{e_a}^{-1})$ является автотопией, т. е. $(xy)R_a L_a R_{e_a}^{-1} = xL_a\cdot yI_r L_a^{-1} I_r$. Учитывая (22), получаем

$$a(xy\cdot a) = [ax\cdot(y^{-1}L_a^{-1})^{-1}]R_{e_a}^{-1}.$$

Обратное утверждение очевидно, т. е. если элемент a удовлетворяет третьему из равенств (25), то a является элементом Бола, а следовательно, удовлетворяет и первым двум равенствам из (25). Лемма доказана.

Определение. *Элемент a IP-квазигруппы $Q(\cdot)$ назовем элементом Муфанг, если он удовлетворяет равенству*

$$a(x\cdot ay) = (a\cdot xf_a)a\cdot y$$

для любых $x, y \in Q$.

Следствие. Пусть B — множество элементов Бола IP-квазигруппы $Q(\cdot)$, а M — множество элементов Муфанг в $Q(\cdot)$. Тогда из доказательства леммы 4 следует $B = M$. Имеет место

Теорема 4. *В любой IP-квазигруппе $Q(\cdot)$ множество элементов Бола B образует подквазигруппу.*

Доказательство. Сначала докажем, что если элемент $a \in Q$ является элементом Бола, т. е. $a \in B$, то и $e_a \in B$, где e_a — правая локальная единица для a в квазигруппе $Q(\cdot)$, т. е. $al_a = a$. В самом деле, так как элемент a удовлетворяет равенству (24) и второму из равенств (25), то $(R_a^{-1}, L_{e_a}R_a L_a, R_a)(R_a L_a R_{e_a}, L_a^{-1}, L_a) = (L_a R_{e_a}, L_{e_a}R_a, R_a L_a)$ является автотопией IP-квазигруппы $Q(\cdot)$. Но тогда и $(I_l L_a R_{e_a} I_l, R_a L_a, L_{e_a} R_a)^{-1} = (\alpha, L_a^{-1} R_a^{-1}, R_a^{-1} L_{e_a}^{-1})$ тоже является автотопией, где $\alpha = I_l^{-1} R_{e_a}^{-1} L_a^{-1} I_l^{-1}$. Далее получаем автотопию $(R_a^{-1}, L_{e_a} R_a L_a, R_a)(\alpha, L_a^{-1} R_a^{-1}; R_a^{-1} L_{e_a}^{-1}) = (\beta, L_{e_a}, L_{e_a}^{-1})$, где $\beta = R_a^{-1}\alpha$. Отсюда очевидно, что e_a — элемент Бола, т. е. $e_a \in B$. Следовательно, $(R_{e_a} L_{e_a} R_{e_{l_a}}, L_{e_a}^{-1}; L_{e_a})$ — автотопия.

Пусть $a, b \in B$. Тогда

$$(L_b, I_r L_b^{-1} I_r, R_b L_b R_{e_b})(L_a, I_r L_a^{-1} I_r, R_a L_a R_{e_a}) =$$
$$= (L_b L_a, I_r L_b^{-1} L_a^{-1} I_r, R_b L_b R_{e_b} R_a L_a R_{e_a}) \text{ — автотопия, т. е.}$$
$$(xy) R_b L_b R_{e_b} R_a L_a R_{e_a} = x L_b L_a \cdot y I_r L_b^{-1} L_a^{-1} I_r.$$

Подставляя в последнее равенство $x = e_b$, получаем:

$$L_{ab} = I_r L_a L_b I_r L_{e_b} R_b L_b R_{e_b} R_a L_a R_{e_a}. \tag{27}$$

Рассмотрим следующую автотопию:

$$(R_{e_b} L_b^{-1} R_b^{-1}, L_b, L_b^{-1})(R_{e_a} L_a^{-1} R_a^{-1}, L_a, L_a^{-1}) =$$
$$= (R_{e_b} L_b^{-1} R_b^{-1} R_{e_a} L_a^{-1} R_a^{-1}, L_b L_a, L_b^{-1} L_a^{-1}),$$

т. е. имеем

$$(xy) L_b^{-1} L_a^{-1} = x R_{e_b} L_b^{-1} R_b^{-1} R_{e_a} L_a^{-1} R_a^{-1} \cdot y L_b L_a.$$

Подставляя в последнее равенство $y = e_b$, получаем:

$$R_{ab} = R_a L_a R_{e_a} R_b L_b R_{e_b} R_{e_b} L_b^{-1} L_a^{-1}. \tag{28}$$

Из леммы 1 следует, что если (α, β, γ) — автотопия IP-квазигруппы $Q(\cdot)$, тогда и $(I_r \alpha I_r, I_r I_l \gamma I_l I_r, I_l I_r \beta I_r I_l)$ — автотопия. В самом деле,

$$(\alpha, \beta, \gamma) \to (\gamma, I_r \beta I_r, \alpha) \to$$
$$\to (I_l \gamma I_l, \alpha, I_r \beta I_r) \to (I_r \beta I_r, I_r \alpha I_r, I_l \gamma I_l) \to$$
$$\to (I_l I_r \beta I_r I_l, I_l \gamma I_l, I_r \alpha I_r) \to (I_r \alpha I_r, I_r I_l \gamma I_l I_r, I_l I_r \beta I_r I_l).$$

Так как $(L_a L_b, I_r L_a^{-1} L_b^{-1} I_r, R_a L_a R_{e_a} R_b L_b R_{e_b})$ — автотопия, тогда и $(I_r L_a L_b I_r, I_r I_l R_a L_a R_{e_a} R_b L_b R_{e_b} I_l I_r, I_l I_r I_r L_a^{-1} L_b^{-1} I_r I_r I_l) = (I_r L_a L_b I_r,$ $\alpha, \beta)$ — автотопия, где $\beta = I_l L_a^{-1} L_b^{-1} I_l$, $\alpha = I_r I_l R_a L_a R_{e_a} R_b L_b R_{e_b} I_l I_r$. Далее, учитывая (27), имеем: $(I_r L_a L_b I_r, \alpha, \beta)(L_{e_b}, I_r L_{e_b}^{-1} I_r, R_{e_b} L_{e_b} R_{e_b})\cdot$

$\cdot (R_b L_b R_{e_b}, L_b^{-1}, L_b)(R_a L_a R_{e_a} L_a^{-1}, L_a) = (L_{ab}, \alpha I_r L_{e_b}^{-1} I_r L_b^{-1} L_a^{-1}, \gamma)$, где $\gamma = \beta R_{e_b} L_{e_b} R_{e_{l_b}} L_b L_a$. Откуда, ввиду (28), получаем:

$$\alpha I_r L_{e_b}^{-1} I_r L_b^{-1} L_a^{-1} = L_r L_l R_a L_a R_{e_a} R_b L_b R_{e_b} I_l I_r I_r L_{e_b}^{-1} I_r I_b^{-1} I_a^{-1} =$$

$$= I_r I_l R_{ab}, \text{ так как } I_l L_{e_b}^{-1} I_r = R_{e_b}.$$ Действительно, $x I_l L_{e_b}^{-1} I_r = ({}^{-1}e_b {}^{-1}x)^{-1} = xe_b = xR_{e_b}$. Следовательно, получили автотопию $(L_{ab}, I_r I_l R_{ab}, \gamma)$, но $I_r I_l R_a = I_r L_a^{-1} I_r$. В самом деле, $x I_r L_a^{-1} I_r = ({}^{-1}a\, x^{-1})^{-1} = {}^{-1}(x^{-1})\, a = x I_r I_l R_a$. Тогда $(L_{ab}, I_r L_{ab}^{-1} I_r, \gamma)$ — автотопия, но тогда и $(\gamma, L_{ab}^{-1}, L_{ab})$ — автотопия, т. е. $ab \in B$. Если $a \in B$, то $(\alpha, L_a^{-1}, L_a) = (\alpha, L_{{}^{-1}a}, L_{{}^{-1}a}^{-1})$—автотопия, где $\alpha = R_a L_a R_{e_a}$, но тогда и $(\alpha^{-1}, L_{{}^{-1}a}^{-1}, L_{{}^{-1}a})$ — автотопия. Следовательно, ${}^{-1}a \in B$. Если $a \in B$, то ввиду леммы 2, $(R_a^{-1} \cdot L_a R_a L_{f_a}, R_a) = (R_{a^{-1}}, L_a R_a L_{f_a}, R_{a^{-1}}^{-1})$ является автотопией, т. е. $(xy) R_{a^{-1}}^{-1} = x R_{a^{-1}} \cdot y\alpha$, где $\alpha = L_a R_a L_{f_a}$. Пусть $x = f_{a^{-1}}$, тогда $\alpha = L_{f_{a^{-1}}} R_{a^{-1}}^{-1} L_{a^{-1}}^{-1}$. Имеем автотопию $(R_{a^{-1}}, L_{f_{a^{-1}}} R_{a^{-1}}^{-1} L_{a^{-1}}^{-1}, R_{a^{-1}}^{-1})^{-1} = (R_{a^{-1}}^{-1}, L_{a^{-1}} R_{a^{-1}} L_{f_{a^{-1}}}, R_{a^{-1}})$, т. е. a^{-1} удовлетворяет равенству (20), следовательно, $a^{-1} \in B$. Рассмотрим уравнения $ax = b$, $ya = b$, где $a, b \in B$. Имеем $x = {}^{-1}a\, b \in B$, $y = ba^{-1} \in B$. Теорема доказана.

5°. Квазигруппы Муфанг.

Лемма 5. *В любой квазигруппе $Q(\cdot)$ следующие три равенства*

$$\left.\begin{aligned} x(y \cdot xz) &= (x \cdot y f_x)\, x \cdot z, \\ (zx \cdot y)\, x &= z\,[x\,(e_x y \cdot x)], \\ x(yz \cdot x) &= [xy \cdot (z^{-1} L_x^{-1})^{-1}] R_{e_x}^{-1} \end{aligned}\right\} \qquad (29)$$

(где f_x — левая локальная единица для x, т. е. $f_x x = x$, e_x—правая локальная единица для x, т. е. $xe_x = x$, $zz^{-1} = f_z$) эквивалентны.

Доказательство. Пусть в квазигруппе $Q(\cdot)$ имеет место первое из равенств (29). Подставляем в равенство $x(y \cdot xz) = (x \cdot y f_x)\, x \cdot z$ $z = x^{-1}$, где $xx^{-1} = f_x$, тогда получаем $x(y \cdot xx^{-1}) = (x \cdot yf_x)\, x \cdot x^{-1}$, $x(yf_x) = (x \cdot yf_x)\, x \cdot x^{-1}$. Получили равенство $yx \cdot x^{-1} = y$ для любых $x, y \in Q$. Следовательно, квазигруппа $Q(\cdot)$ является RIP-квазигруппой. Пусть решением уравнения $x \cdot y f_x = f_x$ будет $y = {}^{-1}x$, т. е. $x \cdot {}^{-1}x f_x = f_x$. Тогда имеем $(x\,({}^{-1}x \cdot xz) = (x \cdot {}^{-1}x f_x)\, x \cdot z$, откуда ${}^{-1}x \cdot xz = z$ для любых $x, z \in Q$. Итак, $Q(\cdot)$ является IP-квазигруппой. Ввиду леммы 4 заключаем, что в $Q(\cdot)$ выполняются и последние два из равенств (29). Аналогично доказывается, что если в квазигруппе $Q(\cdot)$ имеет место второе из равенств (29), то в $Q(\cdot)$ выполняются и остальные два равенства из (29).

Наконец, пусть в $Q(\cdot)$ выполняется третье из равенств (29). Достаточно доказать, что $Q(\cdot)$ является IP-квазигруппой. Подставляя $z^{-1} = x$ в третье из равенств (29), находим: $x(yz \cdot z^{-1}) = [xy \cdot (z^{-1} L_x^{-1})^{-1}] R_{e_x}^{-1} = (xy \cdot e_x) R_{e_x}^{-1} = xy$, т. к. $z^{-1} L_x^{-1} = e_x$. Следовательно, $yz \cdot z^{-1} = y$. Следовательно, $Q(\cdot)$ является RIP-квазигруппой, а отображение $x \to x^{-1} = xI_r$ — подстановкой. Тогда третье равенство из (29) означает, что $(L_x, I_r L_x^{-1} I_r, R_x L_x R_{e_x}^{-1})$ является автотопией. Но тогда и $(R_x L_x R_{e_x}^{-1}, I_r I_r L_x^{-1} I_r I_r, L_x) = (R_x L_x R_{e_x}^{-1}, L_x^{-1}, L_x)$ — автотопия, т. е. $(yz) L_x = y R_x L_x R_{e_x}^{-1} \cdot z L_x^{-1}$, $x(y \cdot xz) = (x \cdot yx) R_{e_x}^{-1} \cdot z$. Обозначим решение уравнения $yx = e_x$ через $y = {}^{-1}x$, т. е. ${}^{-1}x\, x = e_x$. Тогда $x\,({}^{-1}x \cdot xz) = (x \cdot {}^{-1}x\, x) R_{e_x}^{-1} \cdot z = x R_{e_x}^{-1} \cdot z = xz$, откуда ${}^{-1}x \cdot xz = z$ для любых $x, z \in Q$. Лемма доказана.

Замечание. Легко заметить, что равенства (29) превращаются в тождества Муфанг $x(y \cdot xz) = (xy \cdot x)\, z$, $(zx \cdot y)\, x = z(x \cdot yx)$, $x(yz \cdot x) = xy \cdot zx$, если $Q(\cdot)$ — лупа.

Определение. Квазигруппа $Q(\cdot)$ называется *квазигруппой Муфанг,* если в $Q(\cdot)$ выполняется равенство

$$x(y \cdot xz) = (x \cdot y f_x)\, x \cdot z,$$

где f_x—левая локальная единица для x, т. е. $f_x x = x$.

Следствие. Из доказательства леммы 5 следует, что квазигруппа Муфанг является IP-квазигруппой, а также является квазигруппой Бола [3].

Естественно поставить вопрос, к какому классу луп принадлежит лупа, изотопная квазигруппе Муфанг? Ответ дает

Теорема 5. *Любая лупа $Q(\circ)$, изотопная квазигруппе Муфанг $Q(\cdot)$, является лупой Муфанг.*

Доказательство. Достаточно рассмотреть главный изотоп $Q(\circ)$, где изотопия имеет вид $x \circ y = x R_a^{-1} \cdot y L_b^{-1}$, откуда

$$xy = x R_a \circ y L_b. \qquad (30)$$

Так как $Q(\cdot)$ — квазигруппа Муфанг, то в $Q(\cdot)$ имеет место равенство $(zx \cdot y)\, x = z\,[f_x\,(xy \cdot x)]$. Ввиду (30) получаем

$$[(zR_a \circ xL_b)\, R_a \circ yL_b]\, R_a \circ xL_b = zR_a \circ [f_x(xy \cdot x)]\, L_b.$$

Подставляя $zR_a = 1$, где 1 — единица лупы $Q(\circ)$ и обозначая $L_b = L$, $R_a = R$, получаем: $(xLR \circ yL)\, R \circ xL = [f_x(xy \cdot x)]\, L$, откуда

$$[(zR \circ xL)\, R \circ yL]\, R \circ xL = zR \circ [(xLR \circ yL)\, R \circ xL].$$

Упрощая последнее равенство, находим:

$$[(z \circ x)\, R \circ y]\, R \circ x = z \circ [(xR \circ y)\, R \circ x].$$

Если $x = 1$, то следует равенство $(zR \circ y)\, R = z \circ y\varphi$, откуда

$$(z \circ y)\, R = zR^{-1} \circ y\varphi, \qquad (31)$$

$$[(z \circ x) \circ y\varphi] \circ x = z \circ [(x \circ y\varphi) \circ x],$$

$$[(z \circ x) \circ y] \circ x = z \circ [(x \circ y) \circ x]. \qquad (32)$$

Как известно, тождество (32) является правым тождеством Бола. Так как в квазигруппе Муфанг $Q(\cdot)$ выполняется равенство $x(y \cdot xz) = (x \cdot yx)\, R_{e_x}^{-1} \cdot z$, то аналогично доказывается, что лупа $Q(\circ)$ удовлетворяет левому тождеству Бола, а именно:

$$x \circ [y \circ (x \circ z)] = [x \circ (y \circ x)] \circ z. \qquad (33)$$

Отсюда очевидно, что лупа $Q(\circ)$ является лупой Муфанг.

В процессе доказательства тождества (33) мы воспользовались равенством

$$(x \circ y) L = x\psi \circ y L^{-1}, \tag{34}$$

где $x\psi = (x \circ 1 L) L$.

Обратно: пусть $Q(\circ)$ — лупа Муфанг и R, L — такие подстановки, что удовлетворяют равенствам (31) и (34), т. е. имеет место $(x \circ y) R = x R^{-1} \circ y\varphi$, $(x \circ y) L = x\psi \circ y L^{-1}$ для некоторых подстановок φ, ψ. Тогда $Q(\cdot)$, где $xy = xR \circ yL$, является квазигруппой Муфанг.

Действительно, имеем: $(xy \cdot z) y = [(xR \circ yL) R \circ zL] R \circ yL = [(xR \circ yL) \circ zL\varphi] \circ yL = xR \circ [yL \circ (zL\varphi \circ yL)]$.

С другой стороны, получаем: $x[y(e_y z \cdot y)] = xR \circ \{yR \circ [(e_y R \circ zL) R \circ yL] L\} L = xR \circ \{yR\psi \circ [(e_y R \circ zL) R \circ yL]\} = xR \circ \{yR\psi \circ [(e_y \circ zL\varphi) \circ yL]\}$.

$Q(\cdot)$ была бы квазигруппой Муфанг тогда и только тогда, когда имеет место равенство $yR\psi \circ [(e_y \circ zL\varphi) \circ yL] = yL \circ (zL\varphi \circ yL)$ или

$$y \circ (z \circ y) = yL^{-1} R\psi \circ [(e_y L^{-1} \circ z) \circ y]. \tag{35}$$

Чтобы доказать равенство (35), мы найдем e_x:

$$x e_x = x,\ xR \circ e_x L = x,\ e_x L = (xR)^{-1} \circ x = xRI \circ x,$$
$$e_x = (xRI \circ x) L^{-1}.$$

Но из (34) следует

$$(x \circ y) L^{-1} = x\psi^{-1} \circ yL. \tag{36}$$

Таким образом, $e_x = xRI\psi^{-1} \circ xL$, следовательно,

$$e_y L^{-1} = yL^{-1}RI\psi^{-1} \circ y.$$

Докажем теперь следующее равенство:

$$\psi^{-1} = I\psi I. \tag{37}$$

Положим в (34) $x = y^{-1}$, тогда $1L = y^{-1}\psi \circ yL^{-1}$. Так как лупа Муфанг является IP-лупой, то из последнего равенства получаем

$$y^{-1}\psi = 1L \circ (yL^{-1})^{-1},$$
$$(y^{-1}\psi)^{-1} = [1L \circ (yL^{-1})^{-1}]^{-1} = yL^{-1} \circ (1L)^{-1}. \tag{38}$$

С другой стороны, из (36) при $y = 1$ находим $xL^{-1} = x\psi^{-1} \circ 1L$, откуда

$$x\psi^{-1} = xL^{-1} \circ (1L)^{-1}. \tag{39}$$

Сравнивая (38) и (39), заключаем, что $x\psi^{-1} = (x^{-1}\psi)^{-1}$, т. е. получаем равенство (37). Теперь можно закончить доказательство равенства (35):

$$yL^{-1}R\psi \circ [(e_y L^{-1} \circ z) \circ y] =$$
$$= yL^{-1}R\psi \circ \{[(yL^{-1}RI\psi^{-1} \circ y) \circ z] \circ y\} =$$
$$= yL^{-1}R\psi \circ \{yL^{-1}RII\psi I \circ [y \circ (z \circ y)]\} =$$
$$= yL^{-1}R\psi \circ \{yL^{-1}R\psi I \circ [y \circ (z \circ y)]\} = y \circ (z \circ y).$$

Следовательно, (35) доказано, а это означает, что $Q(\cdot)$ — квазигруппа Муфанг.

6°. Сердцевина квазигруппы Муфанг.

Мы видели, что любая квазигруппа Муфанг является квазигруппой Бола. Поэтому рассмотрим сердцевину $Q(+)$ квазигруппы Муфанг $Q(\cdot)$, введенную в [3], следующим образом:

$$x + y = (x \cdot {}^{-1}y\, x) R_{e_x}^{-1} = (x \cdot {}^{-1}y\, x) e_x,$$

где ${}^{-1}y\, y = e_y$, $y e_y = y$. Пусть $Q(\circ)$ — лупа, главно изотопная квазигруппе Муфанг $Q(\cdot)$, где изотопия имеет вид:

$$x \circ y = x R_a^{-1} \cdot y L_b^{-1}.$$

Ввиду теоремы 5, $Q(\circ)$ — лупа Муфанг. Рассмотрим сердцевину $Q(\oplus)$ лупы Муфанг $Q(\circ)$, введеную Браком в [1], следующим образом: $x \oplus y = x \circ y^{-1} \circ x$, где $y \circ y^{-1} = 1$.

В [3] доказано, что сердцевины $Q(+)$ и $Q(\oplus)$ изоморфны, причем изоморфизм задается равенством

$$x \oplus y = (xR_a^{-1} + yR_a^{-1})\, a.$$

Относительно сердцевины $Q(\oplus)$ лупы Муфанг $Q(\circ)$ в [1] доказаны равенства:

$$(x \oplus y) \circ z = (x \circ z) \oplus (y \circ z),$$
$$z \circ (x \oplus y) = (z \circ x) \oplus (z \circ y),$$
$$(x \oplus y)^{-1} = x^{-1} \oplus y^{-1}.$$

Для сердцевины $Q(+)$ квазигруппы Муфанг $Q(\cdot)$ имеют место те же самые утверждения, а именно:

$$(x + y) z = xz + yz,$$
$$z(x + y) = zx + zy,$$
$$(x + y)^{-1} = x^{-1} + y^{-1},$$
$${}^{-1}(x + y) = {}^{-1}x + {}^{-1}y.$$

Действительно, из $(x \oplus y) \circ z = (x \circ z) \oplus (y \circ z)$ следует $(xR_a^{-1} + yR_a^{-1}) R_a R_a^{-1} \cdot zL_b^{-1} = [(xR_a^{-1} \cdot zL_b^{-1}) R_a^{-1} + (yR_a^{-1} \cdot zL_b^{-1}) R_a^{-1}] R_a$.

Упрощая последнее равенство, получаем:

$$(x + y) z = [(xz) R_a^{-1} + (yz) R_a^{-1}] R_a = [(xz) a^{-1} + (yz) a^{-1}]\, a =$$
$$= \{(xz \cdot a^{-1}) [{}^{-1}(yz \cdot a^{-1}) (xz \cdot a^{-1})]\} e_{xz \cdot a^{-1}} \cdot a.$$

Ввиду равенства (24) правая часть последнего равенства принимает вид:

$$(xz \cdot a^{-1}) \{{}^{-1}(yz \cdot a^{-1}) [(xz \cdot a^{-1})\, a]\} = (xz \cdot a^{-1}) [{}^{-1}(yz \cdot a^{-1}) (xz)].$$

Но в квазигруппе Муфанг выполняется равенство

$$x(yz \cdot x) = [xy \cdot (z^{-1} L_x^{-1})^{-1}] e_x = [xy \cdot (z I_r I_l \cdot x)] e_x,$$

откуда $xy \cdot zx = \{x [(y \cdot z I_l I_r) x]\} e_x$.

Учитывая последнее равенство, получаем:

$$(x+y)\,z = [xz\,\{[a^{-1}\cdot {}^{-1}(yz\cdot a^{-1})\,I_l\,I_r]\,xz\}]\,e_{xz} =$$
$$= [xz\,\{[a^{-1}\,(yz\cdot a^{-1})^{-1}]\,xz\}]\,e_{xz} = [xz\,\{{}^{-1}[(yz\cdot a^{-1})\,a]\,xz\}]\,e_{xz} =$$
$$= \{xz\,[{}^{-1}(yz)\cdot xz]\}\,e_{xz} = xz + yz.$$

Заметим, что правая трансляция квазигруппы Муфанг является автоморфизмом для сердцевины $Q\,(+)$.

Далее, из $z\circ(x\ominus y) = (z\circ x)\oplus(z\circ y)$ следует:

$$zR_a^{-1}\cdot(xR_a^{-1} + y\,R_a^{-1})\,R_a\,L_b^{-1} = [(z\,R^{-1}\cdot x\,L_b^{-1})\,R_a^{-1} +$$
$$+ (zR_a^{-1}\cdot yL_b^{-1})\,R_a^{-1}]\,R_a.$$

Упрощая последнее равенство, получаем:

$$z\,(x+y)\,L_b^{-1} = z\cdot x\,L_b^{-1} + z\cdot y\,L_b^{-1},$$
$$z\,(xL_b + yL_b)\,L_b^{-1} = zx + zy.$$

Вычислим выражение $(xL_b + yL_b)\,L_b^{-1}$. Имеем $(xL_b + y\,L_b)\,L_b^{-1} =$

$$= {}^{-1}b\,(bx + by) = {}^{-1}b\,\{[bx\cdot({}^{-1}(by)\cdot bx)]\,e_{bx}\} =$$
$$= {}^{-1}b\,\{[bx\cdot(y^{-1}\,b^{-1})\,bx]\,e_{bx}\} = {}^{-1}b\,\{(bx\cdot y^{-1})\,[(b^{-1})^{-1}\,L_{bx}^{-1}]^{-1}\} =$$
$$= {}^{-1}b\,[(bx\cdot y^{-1})\,x].$$

Ввиду второго из равенств (29) имеем $(xL_b + yL_b)\,L_b^{-1} =$

$$= {}^{-1}b\,\{b\,[x\,(e_x\,y^{-1}\cdot x)]\} = x\,(e_x\,y^{-1}\cdot x),$$

откуда, используя снова третье из равенств (29), получаем:

$$(xL_b + yL_b)\,L_b^{-1} = \{xe_x\cdot[(y^{-1})^{-1}\,L_x^{-1}]^{-1}\}\,e_x = (x\cdot{}^{-1}yx)\,e_x = x + y.$$

Заметим, что левая трансляция L_x квазигруппы Муфанг $Q\,(\cdot)$ является автоморфизмом сердцевины $Q\,(+)$.

Теперь докажем равенство

$$ {}^{-1}(x+y) = {}^{-1}x + {}^{-1}y. \tag{40}$$

Пусть ${}^{-1}(x+y)\,t = z$, тогда имеем $(x+y)\,z = t$, $(x\cdot{}^{-1}y\,x)\,e_x\cdot z = t$, откуда, ввиду (24), имеем $x\,({}^{-1}y\cdot xz) = t$, т. е. ${}^{-1}x\,(y\cdot{}^{-1}xt) = z$. Снова используя (24), получаем $({}^{-1}x\cdot y^{-1}x)\,e_{{}^{-1}x}\cdot t = z$. Но ${}^{-1}x + {}^{-1}y = ({}^{-1}x\cdot y^{-1}x)\,e_{{}^{-1}x}$. Равенство (40) доказано.

Более сложно доказывается равенство

$$(x+y)^{-1} = x^{-1} + y^{-1}. \tag{41}$$

Из третьего равенства из (29) при $y = e_x$, где $xe_x = x$, имеем $x\,(e_x\,z\cdot x) = (x\cdot{}^{-1}(z^{-1})\,x)\,e_x$. Заменяя в последнем равенстве $z\to z^{-1}$, получаем:

$$x\,(e_x\,z^{-1}\cdot x) = (x\cdot{}^{-1}zx)\,e_x = x + z. \tag{42}$$

Далее, из второго из равенств (29) и равенства (20), а также (42) следует:

$$x\,(e_x\,z^{-1}\cdot x) = f_x\,(xz^{-1}\cdot x) = x + z.$$

Пусть $t\,(x+z)^{-1} = y$, тогда $t = y\,(x+z) = y\,[f_x\,(xz^{-1}\cdot x)]$, откуда, ввиду (20), имеем $t = (yx\cdot z^{-1})\,x$, т. е.

$$y = (tx^{-1}\cdot z)\,x^{-1} = t\,[f_{x^{-1}}\,(x^{-1}\,z\cdot x^{-1})].$$

Но $x^{-1} + z^{-1} = f_{x^{-1}}\,(x^{-1}\,z\cdot x^{-1})$. Равенство (41) доказано.

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

1. R. N. Bruck. A survey of binary systems, Springer Verlag, Berlin — Gottingen-Heidelberg, 1958.

2. В. Д. Белоусов, О структуре дистрибутивных квазигрупп, Мат. сб., т. 50 (92), 3, 1960.

3. И. А. Флоря. Квазигруппы Бола (в печати).

4. В. Д. Белоусов, Производные операции и ассоциаторы в лупах, Мат. сб., № 45, (87), 1958.

М. С. БУДЯНУ

РЕШЕНИЕ НЕКОТОРЫХ КЛАССОВ УРАВНЕНИЙ ВИНЕРА—ХОПФА С ОПЕРАТОРНЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ

В настоящей заметке обобщаются результаты статьи И. Ц. Гохберга и М. Г. Крейна [1] об уравнении Винера—Хопфа с матричными коэффициентами на случай уравнений с операторными коэффициентами. Это обобщение получено с помощью теорем о факторизации оператор-функций из статьи [2].

Исследуются системы уравнений Винера — Хопфа

$$\sum_{k=0}^{\infty} A_{j-k}\varphi_k = f_j \ (j=0,\ 1,\ 2 \ . \ . \ .),$$

парные системы уравнений

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} A_{j-k}\varphi_k = f_j \ (j=0,\ 1,\ 2,\ . \ . \ .),$$

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} B_{j-k}\varphi_k = f_j \ (j=-1,-2,-3,\ . \ . \ .),$$

и транспонированные системы

$$\sum_{k=0}^{\infty} A_{j-k}\varphi_k + \sum_{k=-\infty}^{-1} B_{j-k}\varphi_k = f_j \ (j=0,\ \pm 1,\ \pm 2,\ \ . \ . \ .),$$

где коэффициенты A_j, B_j $(j=0,\ \pm 1,\ \pm 2,\ . \ . \ .)$ являются операторами специального вида, а φ_j и f_j—векторы некоторого банахова пространства. Приводится также приближенный метод решения этих уравнений, обобщающий соответствующий метод для матричных уравнений (см. [3]).

§ 1. Уравнения Винера—Хопфа

1. Пусть L — бесконечномерное банахово пространство, R — кольцо всех линейных ограниченных операторов, действующих в L. Обозначим через E двусторонний идеал кольца R, состоящий из всех вполне непрерывных операторов, а через $F(\subset E)$ — замыкание (по норме R) множества конечномерных операторов.

Рассмотрим бесконечную систему уравнений

$$\sum_{k=0}^{\infty} A_{j-k}\varphi_k = f_j \ (j=0,\ 1,\ 2,\ . \ . \ .), \tag{1.1}$$

в которой $A_0 = I + T_0$, $A_j = T_j$ $(j=\pm 1,\ \pm 2,\ . \ . \ .)$, где $T_j \in F$ $(j=0,\ \pm 1\ \pm 2,\ . \ . \ .)$, и удовлетворяют условию

$$\sum_{j=-\infty}^{\infty} \| T_j \| < \infty.$$

Систему уравнений (1.1) можно рассматривать в семействе банаховых пространств L_p^+, где через L_p^+ $(1 \leqslant p < \infty)$ обозначается банахово пространство последовательностей $f=(f_0, f_1, f_2,\ . \ . \ .)$ $(f_j \in L,\ j = 0,\ 1,\ . \ .\ )$ с нормой

$$\| f \|_p = \Big(\sum_{j=0}^{\infty} \| f_j \|_L^p\Big)^{1/p}.$$

Через L_m^+ обозначим банахово пространство ограниченных по норме L последовательностей $f=(f_0, f_1, f_2,\ . \ . \ .)$ $(f_j \in L,\ j=0,\ 1,\ 2,\ . \ . \ .)$ с нормой

$$\| f \|_m = \sup_j \| f_j \|_L,$$

а через L_c^+ и L_0^+ — подпространства L_m^+, состоящие соответственно из всех сходящихся к нулю последовательностей. В дальнейшем через $\mathbf{L}_+$ будем обозначать одно из пространств $L_p^+,\ L_m^+,\ L_c^+,\ L_0^+$.

Обозначим через V изометрический оператор, действующий в пространстве $\mathbf{L}_+$ по правилу

$$V(f_0,\ f_1,\ f_2,\ . \ . \ .) = (0,\ f_0,\ f_1,\ f_2,\ . \ . \ .), \tag{1.2}$$

а через $V^{(-1)}$— оператор, заданный в пространстве $\mathbf{L}_+$ равенством

$$V^{(-1)}(f_0,\ f_1, f_2,\ . \ . \ .) = (f_1,\ f_2,\ f_3,\ . \ . \ .).$$

Легко видеть, что

$$V^{(-1)}\ V = \mathbf{I},\ VV^{(-1)} \neq \mathbf{I},$$

где $\mathbf{I}$ — единичный оператор в пространстве $\mathbf{L}_+$.

Через P_n обозначим проектор, действующий в $\mathbf{L}_+$ по правилу

$$P_n f = (f_0,\ f_1,\ f_2,\ . \ . \ .\ ,\ f_n,\ 0,0,\ . \ . \ .)\ (Q_n = \mathbf{I} - P_n). \tag{1.3}$$

Легко видеть, что

$$V^n\ V^{(-n)} = \mathbf{I} - P_{n-1}\ (n=1,\ 2,\ . \ . \ .). \tag{1.4}$$

Известно (см. [4]), что спектр каждого из операторов V и $V^{(-1)}$ совпадает с единичным кругом.

Оператор $\mathbf{K}$, порожденный в пространстве $\mathbf{L}_+$ левой частью бесконечной системы уравнений (1.1), можно представить в виде

$$\mathbf{K} = \mathbf{I} + \sum_{j=-\infty}^{\infty} \mathbf{T}_j\ V^{(j)},$$

где операторы $\mathbf{T}_j$ $(j=0,\pm 1,\ . \ . \ .)$ действуют в пространстве $\mathbf{L}_+$ по правилу

$$\mathbf{T}_j f = (T_j f_0,\ T_j f_1,\ T_j f_2,\ . \ . \ .)\ (j=0,\pm 1,\pm 2,\ . \ . \ .).$$

Тогда

$$\| \mathbf{K} \| \leqslant 1 + \sum_{j=-\infty}^{\infty} \| T_j \| .$$

Оператору

$$\mathrm{T}(V) = \sum_{j=-\infty}^{\infty} \mathrm{T}_j V^{(j)},$$

действующему в пространстве L_+, сопоставим оператор-функцию, определенную на единичной окружности $|\varsigma| = 1$ равенством

$$\mathrm{T}(\varsigma) = \sum_{j=-\infty}^{\infty} \mathrm{T}_j \varsigma^j. \tag{1.5}$$

Через $W(F)$ обозначим нормированное кольцо всех оператор-функций вида (1.5), в котором норма определена равенством

$$\| T(\varsigma) \|_{W(F)} = \sum_{j=-\infty}^{\infty} \| T_j \| ,$$

а через $W_+(F)$ ($W_-(F)$) — подкольцо $W(F)$, состоящее из оператор-функций, разлагающихся в ряд по неотрицательным (неположительным) степеням ς. В [2] установлена следующая

Теорема. *Пусть оператор-функция $T(\varsigma) \in W(F)$ и при каждом ς ($|\varsigma| = 1$) оператор $I + T(\varsigma)$ обратим. Тогда оператор-функция $I + T(\varsigma)$ допускает следующую факторизацию:*

$$I + T(\varsigma) = (I + T_-(\varsigma))(\varsigma^{\varkappa_1} P_1 + \varsigma^{\varkappa_2} P_2 + \ldots + \varsigma^{\varkappa_n} P_n + P_{n+1})(I + T_+(\varsigma)),$$

где $T_\pm(\varsigma)$ и $(I + T_\pm(\varsigma))^{-1} - I \in W_\pm(F)$; $\varkappa_1 > \varkappa_2 > \ldots > \varkappa_n$ — некоторые целые числа, а $P_1, P_2, \ldots, P_n, P_{n+1}$ — система взаимно ортогональных проекторов в L, таких, что

$$\sum_{j=1}^{n+1} P_j = I, \ \dim P_j L = m_j < \infty \ (j = 1, 2, \ldots, n).$$

Имеет место следующая

Теорема 1.1. *Пусть $T(\varsigma) \in W(F)$. Если оператор $I + T(\varsigma)$ обратим в каждой точке ς ($|\varsigma| = 1$) и равенство*

$$I + T(\varsigma) = (I + T_-(\varsigma))(\varsigma^{\varkappa_1} P_1 + \varsigma^{\varkappa_2} P_2 + \ldots + \varsigma^{\varkappa_n} P_n + P_{n+1})(I + T_+(\varsigma)) \tag{1.6}$$

дает правую факторизацию оператор-функции $I + T(\varsigma)$ на единичной окружности $|\varsigma| = 1$, то оператор $\mathrm{I} + \mathrm{T}(V)$, действующий в пространстве L_+, нормально разрешим, размерность α подпространства всех нулей оператора $\mathrm{I} + \mathrm{T}(V)$ и размерность β дефектного подпространства оператора $\mathrm{I} + \mathrm{T}(V)$ даются соответственно формулами

$$\alpha = -\sum_{\varkappa_j < 0} \varkappa_j m_j, \quad \beta = \sum_{\varkappa_j > 0} \varkappa_j m_j,$$

где m_j — размерность проектора P_j ($j = 1, 2, \ldots, n$).

Если уравнение

$$(\mathrm{I} + \mathrm{T}(V))\varphi = f \tag{1.7}$$

разрешимо, то одно из его решений дается формулой

$$\varphi = (\mathrm{I} + \mathrm{T}(V))^{(-1)} f, \tag{1.8}$$

где

$$(\mathrm{I} + \mathrm{T}(V))^{(-1)} = (\mathrm{I} + \mathrm{T}_+(V))^{-1}(V^{(-\varkappa_1)} \mathrm{P}_1 + V^{(-\varkappa_2)} \mathrm{P}_2 + \ldots + V^{(-\varkappa_n)} \mathrm{P}_n + \mathrm{P}_{n+1})(\mathrm{I} + \mathrm{T}_-(V))^{-1},$$

а проекторы P_j действуют в пространстве L_+ по правилу

$$\mathrm{P}_j(\varphi_0, \varphi_1, \varphi_2, \ldots) = (P_j \varphi_0, P_j \varphi_1, P_j \varphi_2, \ldots) \ (j = 1, 2, \ldots, n+1).$$

Доказательство. Из равенства (1.6) получаем, что оператор $\mathrm{I} + \mathrm{T}(V)$ можно представить в виде

$$\mathrm{I} + \mathrm{T}(V) = (\mathrm{I} + \mathrm{T}_-(V))(V^{(\varkappa_1)} \mathrm{P}_1 + V^{(\varkappa_2)} \mathrm{P}_2 + \ldots + V^{(\varkappa_n)} \mathrm{P}_n + \mathrm{P}_{n+1})(\mathrm{I} + \mathrm{T}_+(V)).$$

Легко видеть, что $\mathrm{I} + \mathrm{T}_\pm(V)$ является обратимым оператором, причем обратный оператор задается равенством

$$(\mathrm{I} + \mathrm{T}_\pm(V))^{-1} = \mathrm{I} + \mathrm{S}_\pm(V),$$

где $\mathrm{S}_\pm(V)$ определяется соотношением $S_\pm(\varsigma) = (I + T_\pm(\varsigma))^{-1} - I$. Отсюда вытекает, что оператор $\mathrm{I} + \mathrm{T}(V)$ нормально разрешим тогда и только тогда, когда нормально разрешим оператор

$$\mathrm{D}(V) = V^{(\varkappa_1)} \mathrm{P}_1 + V^{(\varkappa_2)} \mathrm{P}_2 + \ldots + V^{(\varkappa_n)} \mathrm{P}_n + \mathrm{P}_{n+1}.$$

Оператор $\mathrm{D}(V)$ равен прямой сумме операторов $V^{(\varkappa_j)} \mathrm{P}_j$, действующих в подпространствах $\mathrm{P}_j \mathrm{L}_+$ ($j = 1, 2, \ldots, n+1$, $\varkappa_{n+1} = 0$).

Очевидно, что операторы V, $V^{(-1)}$ коммутируют с проектором P_j ($j = 1, 2, \ldots, n$). Так как при $\varkappa_j > 0$ оператор $V^{\varkappa_j} \mathrm{P}_j$ обратим слева в $\mathrm{P}_j \mathrm{L}_+$, а при $\varkappa_j < 0$ оператор $V^{(\varkappa_j)} \mathrm{P}_j$ обратим справа в $\mathrm{P}_j \mathrm{L}_+$, то отсюда вытекает, что оператор $V^{(\varkappa_j)} \mathrm{P}_j$ ($j = 1, 2, \ldots, n+1$) нормально разрешим и, следовательно, нормально разрешим и оператор $\mathrm{I} + \mathrm{T}(V)$. Кроме того, размерность подпространства всех нулей оператора $\mathrm{I} + \mathrm{T}(V)$ в L_+ совпадает с размерностью подпространства всех нулей оператора $\mathrm{D}(V)$, которая равна сумме размерностей подпространств нулей операторов $V^{(\varkappa_j)} \mathrm{P}_j$ в $\mathrm{P}_j \mathrm{L}_+$ ($j = 1, 2, \ldots, n$). Из вышесказанного следует, что при $\varkappa_j > 0$ $\alpha(V^{(\varkappa_j)} \mathrm{P}_j) = 0$ в $\mathrm{P}_j \mathrm{L}_+$. Непосредственно проверяется, что при $\varkappa_j < 0$ $\alpha(V^{(\varkappa_j)} \mathrm{P}_j) = -\varkappa_j m_j$, где m_j — размерность проектора P_j в пространстве L. Таким образом,

$$\alpha(\mathrm{I} + \mathrm{T}(V)) = \alpha(\mathrm{D}(V)) = -\sum_{\varkappa_j < 0} \varkappa_j m_j.$$

Аналогично доказывается, что

$$\beta(\mathrm{I} + \mathrm{T}(V)) = \sum_{\varkappa_j > 0} \varkappa_j m_j.$$

Легко проверить справедливость следующего равенства:

$$\mathrm{D}(V) = \mathrm{D}(V) \mathrm{D}^{(-1)}(V) \mathrm{D}(V),$$

где

$$D^{(-1)}(V) = V^{(-\varkappa_1)}P_1 + V^{(-\varkappa_2)}P_2 + \ldots + V^{(-\varkappa_n)}P_n + P_{n+1}.$$

Отсюда вытекает соотношение

$$I + T(V) = (I + T(V))(I + T(V)^{(-1)}(I + T(V)). \tag{1.9}$$

Из этого равенства непосредственно следует формула (1.8). Теорема доказана.

Из доказанной теоремы следует, что если все правые индексы $\varkappa_1 > \varkappa_2 \ldots > \varkappa_n$ оператор-функции $I + T(\varsigma)$ положительны, то оператор $I + T(V)$ обратим только слева, а если все эти индексы отрицательны, то оператор $I + T(V)$ обратим только справа.

Теорема 1.2 *Пусть оператор-функция $T(\varsigma) \in W(F)$. Для того, чтобы оператор $I + T(V)$, действующий в пространстве L_+, был $\Phi_\pm$-оператором, необходимо и достаточно, чтобы оператор $I + T(\varsigma)$, действующий в пространстве L, был обратим в каждой точке ς единичной окружности $|\varsigma| = 1$.*

Доказательство. Достаточность условия этой теоремы уже доказана в теореме 1.1.

Докажем ее необходимость. Предположим, что оператор $A(V) = I + T(V)$, действующий в пространстве L_+, является $\Phi_\pm$-оператором (см. [5]). Тогда существует число $\delta > 0$ такое, что всякий оператор $C(V)$, для которого выполняется неравенство

$$\| A(V) - C(V) \| < \delta, \tag{1.10}$$

также является $\Phi_\pm$-оператором.

Пусть оператор $A(\varsigma) = I + T(\varsigma)$, действующий в пространстве L, в точке $\varsigma_0(|\varsigma_0| = 1)$ необратим. Так как оператор $A(\varsigma_0) = I + T(\varsigma_0)$ $(T(\varsigma_0) \in F)$, то точка $\lambda = 0$ является его изолированным собственным числом конечной алгебраической кратности, которому отвечает конечномерное нормально отщепляющееся корневое подпространство. В силу теоремы об устойчивости корневого числа (см. [5]) для числа $\varepsilon = \delta/2$ можно найти такое число $\rho > 0$, что если для оператора C выполняется неравенство

$$\| A(\varsigma_0) - C \| < \rho,$$

то он имеет хотя бы одно собственное значение λ, удовлетворяющее условию $|\lambda| < \varepsilon$. Рассмотрим оператор-функцию $R(\varsigma)$, определенную равенством

$$R(\varsigma) = I + \sum_{j=-n}^{n} K_j \varsigma^j \qquad (|\varsigma| = 1),$$

где $K_j (j = -n, \ldots, n)$ — конечномерные операторы, удовлетворяющие условию

$$\sum_{j=-n}^{n} \| T_j - K_j \| + \sum_{j=-\infty}^{-n-1} \| T_j \| + \sum_{j=n+1}^{\infty} \| T_j \| < \min(\delta/2, \rho).$$

Оператор

$$R(V) = I + \sum_{j=-n}^{n} K_j V^{(j)},$$

действующий в пространстве L_+, удовлетворяет неравенству

$$\| A(V) - R(V) \| \leqslant \sum_{j=-n}^{n} \| T_j - K_j \| + \sum_{j=-\infty}^{-n-1} \| T_j \| + \sum_{j=n+1}^{\infty} \| T_j \| < \delta/2,$$

и, стало быть, $R(V)$ является $\Phi_\pm$-оператором. Кроме того, для оператора $R(\varsigma_0)$, действующего в пространстве L, выполняется соотношение

$$\| A(\varsigma_0) - R(\varsigma_0) \| \leqslant \sum_{j=-n}^{n} \| T_j - K_j \| + \sum_{j=-\infty}^{-n-1} \| T_j \| + \sum_{j=n+1}^{\infty} \| T_j \| < \rho,$$

и следовательно, $R(\varsigma_0)$ имеет собственное значение λ_0 такое, что $|\lambda_0| < \varepsilon$. Отсюда следует, что оператор

$$R_1(\varsigma) = R(\varsigma) - \lambda_0 I$$

в точке ς_0 необратим. Легко видеть, что для оператора

$$R_1(V) = R(V) - \lambda_0 I$$

имеет место неравенство

$$\| A(V) - R_1(V) \| < \delta.$$

Следовательно, $R_1(V)$ является $\Phi_\pm$-оператором в L_+.

Пространство L можно разложить в прямую сумму подпространств M и N:

$$L = M \dot{+} N,$$

где M — конечномерное подпространство, инвариантное относительно операторов $K_j (j = -n, \ldots, n)$, а на подпространстве N все эти операторы аннулируются. Оператор

$$R_1(\varsigma_0) = (1 - \lambda_0) I + \sum_{j=-n}^{n} K_j \varsigma_0^j$$

на подпространстве N обратим и обратный оператор на этом подпространстве равен $(1 - \lambda_0)^{-1} I$. Так как подпространство M инвариантно относительно оператора $R_1(\varsigma_0)$, то $R_1(\varsigma_0)$ является необратимым оператором на подпространстве M.

Разложение пространства L индуцирует следующее разложение пространства L_+:

$$L_+ = M \dot{+} N,$$

где подпространство $\mathbf{M}$ инвариантно относительно операторов $\mathbf{K}_j$ $(j=-n, \ldots, n)$, а на $\mathbf{N}$ все эти операторы аннулируются. Так как оператор

$$\mathbf{R}_1(V) = (1-\lambda_0)\,\mathbf{I} + \sum_{j=-n}^{n} \mathbf{K}_j V^{(j)}$$

является $\Phi_{\pm}$-оператором в пространстве $\mathbf{L}_+$, а на подпространстве $\mathbf{N}$ этот оператор обратим, то $\mathbf{R}_1(V)$ является $\Phi_{\pm}$-оператором в $\mathbf{M}$. Оператор $\mathbf{R}_1(V)$ порожден системой уравнений типа Винера—Хопфа с матричными коэффициентами, ограниченной размерности ($\leqslant \dim M$), а соответствующая матрица-функция $R_1(\varsigma_0)$ на конечномерном пространстве M необратима. В силу теоремы статьи [1] последнее невозможно. Полученное противоречие доказывает теорему.

§ 2. Парные системы уравнений и транспонированные к ним

Обозначим через $\mathbf{L}$ одно из пространств $L_p (1 \leqslant p < \infty)$, L_m, L_c, L_0, состоящих из последовательностей $\varphi = \{\varphi_j\}_{j=-\infty}^{\infty}$ $(\varphi_j \in L,\ j=0,\ \pm 1,\ \pm 2, \ldots)$, бесконечных в обе стороны (норма в $\mathbf{L}$ определена так же, как и в $\mathbf{L}_+$).

Парной системой уравнений называется следующая система (см. [6]):

$$\begin{aligned} &\sum_{k=-\infty}^{\infty} A_{j-k}\varphi_k = f_j \qquad (j=0,\ 1,\ 2, \ldots), \\ &\sum_{k=-\infty}^{\infty} B_{j-k}\varphi_k = f_j \qquad (j=-1,\ -2,\ -3, \ldots), \end{aligned} \tag{2.1}$$

а транспонированной к парной называется система

$$\sum_{k=0}^{\infty} A_{j-k}\varphi_k + \sum_{k=-\infty}^{-1} B_{j-k}\varphi_k = f_j \qquad (j=0,\ \pm 1,\ \pm 2, \ldots), \tag{2.2}$$

где коэффициенты A_j, B_j $(j=0,\ \pm 1,\ \pm 2, \ldots)$ удовлетворяют тем же условиям, что и коэффициенты системы уравнений (1.1). Бесконечные системы уравнений (2.1) и (2.2) будем рассматривать в банаховом пространстве $\mathbf{L}$.

Системы уравнений (2.1) и (2.2), а также их континуальные аналоги в классических банаховых пространствах были исследованы в статье И. Ц. Гохберга и М. Г. Крейна [6] (см. также [4]).

Обозначим через U изометрический оператор, действующий в пространстве $\mathbf{L}$ по правилу

$$U\{\varphi_j\}_{j=-\infty}^{\infty} = \{\varphi_{j+1}\}_{j=-\infty}^{\infty}.$$

Обратный к U оператор в пространстве $\mathbf{L}$ задается равенством

$$U^{-1}\{\varphi_j\}_{j=-\infty}^{\infty} = \{\varphi_{j-1}\}_{j=-\infty}^{\infty}.$$

Через P_+ обозначим оператор проектирования в пространстве $\mathbf{L}$, определенный равенством

$$P_+\varphi = (\ldots, 0, 0, \varphi_0, \varphi_1, \varphi_2, \ldots).$$

Легко видеть, что операторы $\mathbf{K}_1$ и $\mathbf{K}_2$, порожденные левыми частями бесконечных систем уравнений (2.1) и (2.2), можно представить в следующем виде:

$$\mathbf{K}_1 = P_+\mathbf{A}(U) + P_-\mathbf{B}(U),$$

$$\mathbf{K}_2 = \mathbf{A}(U)P_+ + \mathbf{B}(U)P_- \quad (P_- = \mathbf{I} - \mathbf{P}_+),$$

где

$$\mathbf{A}(U) = \sum_{j=-\infty}^{\infty} \mathbf{A}_j \mathbf{U}^j, \quad \mathbf{B}(U) = \sum_{j=-\infty}^{\infty} \mathbf{B}_j U^j.$$

Операторам $\mathbf{A}(U)$ и $\mathbf{B}(U)$, действующим в пространстве $\mathbf{L}$, сопоставим оператор-функции $A(\varsigma)$ и $B(\varsigma)$, определенные на единичной окружности $|\varsigma| = 1$ равенствами

$$A(\varsigma) = I + \sum_{j=-\infty}^{\infty} T_j\varsigma^j, \quad B(\varsigma) = I + \sum_{j=-\infty}^{\infty} S_j\varsigma^j.$$

Имеет место следующая

Теорема 2.1. *Пусть* $A(\varsigma) = I + T(\varsigma)$, $B(\varsigma) = I + S(\varsigma)$, *где* $T(\varsigma)$, $S(\varsigma) \in W(F)$. *Если операторы* $I + T(\varsigma)$, $I + S(\varsigma)$, *действующие в пространстве* $\mathbf{L}$, *обратимы в каждой точке* $\varsigma\ (|\varsigma| = 1)$ *и равенство*

$$I + C(\varsigma) = (I + C_-(\varsigma))(\varsigma^{\varkappa_1}P_1 + \varsigma^{\varkappa_2}P_2 + \ldots + \varsigma^{\varkappa_n}P_n + $$
$$+ P_{n+1})(I + C_+(\varsigma))$$

дает правую факторизацию оператор-функции

$$I + C(\varsigma) = (I + T(\varsigma))(I + S(\varsigma))^{-1}$$

на единичной окружности $|\varsigma| = 1$, *то оператор*

$$\mathbf{K}_1 = P_+\mathbf{A}(U) + P_-\mathbf{B}(U),$$

действующий в пространстве $\mathbf{L}$, *нормально разрешим и размерности* α *и* β *подпространства нулей и дефектного подпространства оператора* $\mathbf{K}_1$ *даются соответственно формулами*

$$\alpha = -\sum_{\varkappa_j<0} \varkappa_j m_j, \quad \beta = \sum_{\varkappa_j>0} \varkappa_j m_j,$$

где m_j — *размерность проектора* P_j $(j = 1, 2, \ldots, n)$.

Если уравнение

$$(P_+\mathbf{A}(U) + P_-B(U))\varphi = f$$

разрешимо, то одно из его решений дается формулой

$$\varphi = (P_+\mathbf{A}(U) + P_-\mathbf{B}(U))^{(-1)}f,$$

где

$$(P_+\mathbf{A}(U) + P_-\mathbf{B}(U))^{(-1)} =$$

$$= \mathbf{B}^{-1}(U)(\mathbf{I} + \mathbf{C}_+(U))^{-1}(P_+\mathbf{D}^{-1}(U) + P_-)(P_+(\mathbf{I} + \mathbf{C}_-(U))^{-1} +$$
$$+ P_-(\mathbf{I} + \mathbf{C}_+(U)),$$

а
$$D^{-1}(U) = U^{-\varkappa_1} P_1 + U^{-\varkappa_2} P_2 + \ldots + U^{-\varkappa_n} P_n + P_{n+1}.$$
После представления оператора $P_+ \mathbf{A}(U) + P_- \mathbf{B}(U)$ в виде
$$P_+ \mathbf{A}(U) + P_- \mathbf{B}(U) = \left[P_+ \left(\mathbf{I} + \mathbf{C}_-(U)\right) + \right.$$
$$\left. + P_- \left(\mathbf{I} + \mathbf{C}_+(U)\right)_-^{-1}\right] \left(P_+ \mathbf{D}(U) + P_-\right) \left(\mathbf{I} + \mathbf{C}_+(U)\right) \mathbf{B}(U),$$
где
$$P_+ \mathbf{D}(U) + P_- = \sum_{j=1}^{n} \mathbf{P}_j (P_+ U^{\varkappa_j} + P_-) + \mathbf{P}_{n+1},$$
доказательство этой теоремы проводится в основном, как и доказательство теоремы 1.1. Аналогичная теорема имеет место и для оператора
$$\mathbf{K}_2 = \mathbf{A}(U) P_+ + \mathbf{B}(U) P_-.$$

Теорема 2.2. *Пусть $A(\zeta) = I + T(\zeta)$, $B(\zeta) = I + S(\zeta)$, где $T(\zeta)$, $S(\zeta) \in W(F)$. Для того, чтобы оператор $\mathbf{K}_1 = P_+ \mathbf{A}(U) + P_- \mathbf{B}(U)$, $(\mathbf{K}_2 = \mathbf{A}(U) P_+ + \mathbf{B}(U) P_-)$, действующий в пространстве $\mathbf{L}$, был $\Phi_\pm$-оператором, необходимо и достаточно, чтобы операторы $I + T(\zeta)$, $I + S(\zeta)$, действующие в пространстве L, были обратимыми операторами в каждой точке ζ единичной окружности $|\zeta| = 1$.*

Достаточность условия этой теоремы вытекает из теоремы 2.1.

Пусть $P_+ \mathbf{A}(U) + P_- \mathbf{B}(U)$ является $\Phi_\pm$-оператором в пространстве $\mathbf{L}$. Этот оператор можно представить в виде
$$P_+ \mathbf{A}(U) + P_- \mathbf{B}(U) = P_+ \mathbf{A}(U) P_+ + P_- \mathbf{B}(U) P_- +$$
$$+ P_+ \mathbf{A}(U) P_- + P_- \mathbf{B}(U) P_+.$$

Без труда можно показать, что $P_+ \mathbf{A}(U) P_- + P_- \mathbf{B}(U) P_+$ является вполне непрерывным оператором. Следовательно, оператор $P_+ \mathbf{A}(U) P_+ + P_- \mathbf{B}(U) P_-$ является $\Phi_\pm$-оператором (см. [5]). Так как оператор $P_+ \mathbf{A}(U) P_+ + P_- B(U) P_-$ является прямой суммой операторов $P_+ \mathbf{A}(U) P_+$ и $P_- \mathbf{B}(U) P_-$, действующих в подпространствах $P_+ \mathbf{L}$, $P_- \mathbf{L}$ соответственно, то каждый из операторов $P_+ \mathbf{A}(U) P_+$ и $P_- \mathbf{B}(U) P_-$ является $\Phi_\pm$-оператором в своем подпространстве. Операторы $P_+ \mathbf{A}(U) P_+$, $P_- \mathbf{B}(U) P_-$ можно представить в виде
$$P_+ \mathbf{A}(U) P_+ = P_+ + \sum_{j=-\infty}^{\infty} \mathbf{T}_j V_+^{(j)},$$
$$P_- \mathbf{B}(U) P_- = P_- + \sum_{j=-\infty}^{\infty} S_j V_-^{(j)},$$
где $V_+^{(j)} = P_+ U^j P_+$, $V_-^{(j)} = P_- U^j P_-$. Легко показать, что изометрический оператор $V_+ = P_+ U P_+$ обратим только слева, а изометрический оператор $V_- = P_- U P_-$ обратим только справа и обратные к ним операторы с соответствующей стороны задаются равенствами
$$V_+^{(-1)} = P_+ U^{-1} P_+, \quad V_-^{(-1)} = P_- U^{-1} P_-.$$

Так как операторы V_+ и V_- удовлетворяют тем же условиям, что и оператор V, определенный равенством (1.2), то из теоремы 1.2 вытекает, что оператор-функции
$$I + \sum_{j=-\infty}^{\infty} T_j \zeta^j, \quad I + \sum_{j=-\infty}^{\infty} S_j \zeta^j$$
принимают только обратимые значения в каждой точке ζ $(|\zeta| = 1)$.

§ 3. Метод редукции

1. Обозначим через R кольцо всех линейных ограниченных операторов, действующих в некотором банаховом пространстве B. Пусть P_n $(\in R)$ — последовательность проекторов, сильно сходящаяся к единичному оператору I $(\in R)$ при $n \to \infty$.

Говорят, что к обратимому оператору $A \in R$ применим проекционный метод (см. [3]), если, начиная с некоторого n, уравнение
$$P_n A P_n x = P_n y$$
имеет единственное решение $x^{(n)} \in P_n B$, каков бы ни был вектор $y \in B$, и векторы $x^{(n)}$ сходятся при $n \to \infty$ по норме пространства B к решению уравнения
$$Ax = y.$$

Приводимые ниже теоремы обобщают некоторые теоремы из [3] на случай уравнений Винера—Хопфа с операторными коэффициентами.

Бесконечной системе уравнений (1.1) сопоставим следующую конечную систему уравнений:
$$\sum_{k=0}^{n} A_{j-k} \varphi_k = f_j \; (j = 0, 1, 2, \ldots, n). \tag{3.1}$$

В дальнейшем под $\mathbf{L}_+$ будем понимать одно из пространств L_p^+ $(1 \leqslant p < \infty)$, L_0^+; а в теоремах 3.2 и 3.3 под $\mathbf{L}$ понимается L_p, L_0'.

Теорема 3.1. *Пусть $T(\zeta) \in W(F)$. Для того, чтобы система уравнений (3.1) начиная с некоторого n имела единственное решение $\{\varphi_j^{n}\}_{j=0}^{n}$ при любой правой части из $\mathbf{L}_+$ и последовательность векторов $\varphi^n = (\varphi_0^{(n)}, \varphi_1^{(n)}, \ldots, \varphi_n^{(n)}, 0, 0, \ldots)$ имела предел при $n \to \infty$, необходимо и достаточно выполнение следующих условий:*

а) *оператор $I + T(\zeta)$ обратим в каждой точке ζ $(|\zeta| = 1)$;*

б) *правые и левые индексы оператор-функции $I + T(\zeta)$ равны нулю.*

Если эти условия выполняются, то последовательность векторов $\varphi^{(n)}$ сходится к единственному решению системы (1.1).

При доказательстве этой теоремы нам понадобится следующая

Лемма 3.1. *Пусть $T(\zeta) \in W(F)$. Если оператор-функция $I + T(\zeta)$ допускает следующую факторизацию:*
$$I + T(\zeta) = \left(I + T_+(\zeta)\right) \left(I + T_-(\zeta)\right) \left(T_\pm(\zeta) \in W_\pm(F)\right),$$
то разность
$$\mathbf{I} + \mathbf{T}(V) - \left(\mathbf{I} + \mathbf{T}_+(V)\right) \left(\mathbf{I} + \mathbf{T}_-(V)\right) = \mathbf{Z} \tag{3.2}$$
является вполне непрерывным оператором в пространстве L_+.

Доказательство. Рассмотрим случай, когда $T(\zeta) = T_n(\zeta)$, где
$$T_n(\zeta) = \sum_{j=-n}^{n} T_j \zeta^j \; (|\zeta| = 1).$$

Согласно условию

$$I + T_n(\varsigma) = (I + \sum_{j=0}^{n} T_j^+ \varsigma^j)\,(I + \sum_{k=-n}^{0} T_k^- \varsigma^k) =$$

$$= I + \sum_{j=0}^{n} T_j^+ \varsigma^j + \sum_{k=-n}^{0} T_k^- \varsigma^k + \sum_{j,\,k} T_j^+ T_k^- \varsigma^{j+k}.$$

Отсюда получим

$$\mathrm{I} + \mathrm{T}_n(V) = \mathrm{I} + \sum_{j=0}^{n} \mathrm{T}_j^+ V^j + \sum_{k=-n}^{0} \mathrm{T}_k^- V^{(k)} + \sum_{j,\,k} \mathrm{T}_j^+ \mathrm{T}_k^- V^{(j+k)}, \qquad (3.3)$$

где суммирование в двойном ряде ведется по положительным индексам j и отрицательным индексам k. Легко видеть, что операторы V, $V^{(-1)}$ коммутируют с операторами T_j $(j = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$. Кроме того, из односторонней обратимости оператора V следуют равенства:

$$\mathrm{T}_p^+ V^p \mathrm{T}_q^- V^{(q)} = \begin{cases} \mathrm{T}_p^+ \mathrm{T}_q^- \; V^{p+q}\,(\mathrm{I} - P_{|q|}) & (p > |q|), \\ \mathrm{T}_p^+ \mathrm{T}_q^- \; (\mathrm{I} - P_p)\, V^{(p+q)} & (p < |q|), \end{cases} \qquad (3.4)$$

где p — положительное целое число, q — отрицательное целое число, а проектор P_n определен равенством (1.3). С другой стороны,

$$\left(\mathrm{I} + \mathrm{T}_n^+(V)\right)\left(\mathrm{I} + \mathrm{T}_n^-(V)\right) = \mathrm{I} + \sum_{j=0}^{n} \mathrm{T}_j^+ V^j + \sum_{k=n}^{0} \mathrm{T}_k^- V^{(k)} +$$

$$+ \sum_{j,\,k} \mathrm{T}_j^+ \mathrm{T}_k^- V^j V^{(k)}.$$

В силу (3.4) получаем:

$$\left(\mathrm{I} + \mathrm{T}_n^+(V)\right)\left(\mathrm{I} + \mathrm{T}_n^-(V)\right) = \mathrm{I} + \sum_{j=0}^{n} \mathrm{T}_j^+ V^j + \sum_{k=-n}^{0} \mathrm{T}_k^- V^{(k)} +$$

$$+ \sum_{j,\,k} \mathrm{T}_j^+ \mathrm{T}_k^- V^{(j+k)} + \sum_{j,\,k} \mathrm{Z}_{j,\,k}, \qquad (3.5)$$

где $\mathrm{Z}_{j,\,k}$ — вполне непрерывные операторы в пространстве L_+. Из (3.3) следует, что равенство (3.5) можно переписать в виде

$$\left(\mathrm{I} + \mathrm{T}_n^+(V)\right)\left(\mathrm{I} + \mathrm{T}_n^-(V)\right) = \mathrm{I} + \mathrm{T}_n(V) + \sum_{j,\,k} \mathrm{Z}_{j,\,k}. \qquad (3.6)$$

Если в последнем равенстве перейти к пределу при $n \to \infty$, то получим (3.2). Лемма доказана.

Доказательство теоремы 3.1. Очевидно, что систему уравнений (3.1) можно записать в виде

$$P_n \left(\mathrm{I} + \mathrm{T}(V)\right) P_n \varphi = P_n f, \qquad (3.7)$$

где проекторы P_n определены равенством (1.3). Теорему 3.1 можно сформулировать тогда в следующей форме.

Для того, чтобы операторы $P_n\left(\mathrm{I} + \mathrm{T}(V)\right) P_n + Q_n$, начиная с некоторого n, были обратимы и последовательность обратных к ним операторов $\left\{P_n\left(\mathrm{I} + \mathrm{T}(V)\right) P_n + Q_n\right\}^{-1}$ имела сильный предел при $n \to \infty$, необходимо и достаточно, чтобы выполнялись условия а) и б) теоремы 3.1.

Если условия а) и б) теоремы 3.1 выполняются, то операторы $\left\{P_n\left(\mathrm{I} + \mathrm{T}(V)\right) P_n + Q_n\right\}^{-1}$ стремятся сильно к оператору $\left(\mathrm{I} + \mathrm{T}(V)\right)^{-1}$ при $n \to \infty$.

Докажем последнее предложение. Легко проверить следующие равенства

$$P_n V^{(-1)} P_n = V^{(-1)} P_n, \quad Q_n V Q_n = V Q_n. \qquad (3.8)$$

Из (3.8) можно получить более общие соотношения

$$P_n\, \mathrm{T}_-(V)\, P_n = \mathrm{T}_-(V)\, P_n; \quad Q_n\, \mathrm{T}_+(V)\, Q_n = \mathrm{T}_+(V)\, Q_n. \qquad (3.9)$$

$$P_n\, \mathrm{T}_+(V)\, P_n = P_n\, \mathrm{T}_+(V); \quad Q_n\, \mathrm{T}_-(V)\, Q_n = Q_n\, \mathrm{T}_-(V). \qquad (3.10)$$

Пусть выполняются условия теоремы. В силу леммы из [7] и леммы 3.1 достаточно доказать теорему для оператора $\left(\mathrm{I} + \mathrm{T}_+(V)\right)\left(\mathrm{I} + \mathrm{T}_-(V)\right)$.

Принимая во внимание (3.9) и (3.10), для последнего оператора получим

$$P_n\left(\mathrm{I} + \mathrm{T}_+(V)\right)\left(\mathrm{I} + \mathrm{T}_-(V)\right) P_n + Q_n =$$

$$= \left[P_n\left(\mathrm{I} + \mathrm{T}_+(V)\right) P_n + Q_n\right]\left[P_n\left(\mathrm{I} + \mathrm{T}_-(V)\right) P_n + Q_n\right].$$

Операторы $P_n\left(\mathrm{I} + \mathrm{T}_+(V)\right) P_n + Q_n$, $P_n\left(\mathrm{I} + \mathrm{T}_-(V)\right) P_n + Q_n$ обратимы и обратные к ним операторы имеют вид:

$$\left\{P_n\left(\mathrm{I} + \mathrm{T}_+(V)\right) P_n + Q_n\right\}^{-1} = P_n\left(\mathrm{I} + \mathrm{T}_+(V)\right)^{-1} P_n + Q_n,$$

$$\left\{P_n\left(\mathrm{I} + \mathrm{T}_-(V)\right) P_n + Q_n\right\}^{-1} = P_n\left(\mathrm{I} + \mathrm{T}_-(V)\right)^{-1} P_n + Q_n.$$

Следовательно,

$$\left[P_n\left(\mathrm{I} + \mathrm{T}_+(V)\right)\left(\mathrm{I} + \mathrm{T}_-(V)\right) P_n + Q_n\right]^{-1} =$$

$$= \left[P_n\left(\mathrm{I} + \mathrm{T}_-(V)\right)^{-1} P_n + Q_n\right]\left[P_n\left(\mathrm{I} + \mathrm{T}_+(V)\right)^{-1} P_n + Q_n\right],$$

или

$$\left[P_n\left(\mathrm{I} + \mathrm{T}_+(V)\right)\left(\mathrm{I} + \mathrm{T}_-(V)\right) P_n + Q_n\right]^{-1} =$$

$$= \left[\left(\mathrm{I} + \mathrm{T}_-(V)\right)^{-1} P_n + Q_n\right]\left[P_n\left(\mathrm{I} + \mathrm{T}_+(V)\right)^{-1} + Q_n\right].$$

Отсюда следует, что последовательность операторов

$$\left[P_n\left(\mathrm{I} + \mathrm{T}_+(V)\right)\left(\mathrm{I} + \mathrm{T}_-(V)\right) P_n + Q_n\right]^{-1}$$

сильно сходится к оператору $\left(\mathrm{I} + \mathrm{T}_-(V)\right)^{-1}\left(\mathrm{I} + \mathrm{T}_+(V)\right)^{-1}$ при $n \to \infty$.

Пусть теперь операторы $P_n\left(\mathrm{I}+\mathrm{T}(V)\right)P_n+Q_n$, начиная с некоторого n, обратимы и обратные к ним операторы

$$\left[P_n\left(\mathrm{I}+\mathrm{T}(V)\right)P_n+Q_n\right]^{-1}$$

ограниченны:

$$\left\|\left[P_n\left(\mathrm{I}+\mathrm{T}(V)\right)P_n+Q_n\right]^{-1}\right\|<C. \qquad (3.11)$$

Тогда можно доказать, что оператор $\mathrm{I}+\mathrm{T}(V)$ является оператором регулярного типа в пространстве L_+, т. е.

$$\left\|\left(\mathrm{I}+\mathrm{T}(V)\right)\varphi\right\|\geqslant m\|\varphi\|\ (\varphi\in\mathrm{L}_+).$$

Отсюда следует, оператор $\mathrm{I}+\mathrm{T}(V)$ нормально разрешим и $\alpha(\mathrm{I}+\mathrm{T}(V))=0$. Следовательно, $\mathrm{I}+\mathrm{T}(V)$ является Φ_+-оператором. В силу теоремы 1.2 оператор-функция $I+T(\zeta)$, $(|\zeta|=1)$ принимает только обратимые значения и, следовательно, допускает правую факторизацию с индексами $\varkappa_1>\varkappa_2>\ldots>\varkappa_n$. Из теоремы 1.1 вытекает, что $\varkappa_j\geqslant0$ $(j=1,2,\ldots,n)$.

Введем в рассмотрение оператор-функцию $I+T(\zeta^{-1})$, имеющую индексы $-\varkappa_1<-\varkappa_2<\ldots<-\varkappa_n$. Можно доказать, что из условия (3. 11) вытекает, что оператор $\mathrm{I}+\mathrm{T}(V^{(-1)})$ также является оператором регулярного типа в пространстве L_+ и, следовательно, $-\varkappa_j\geqslant0$ $(j=1,2,\ldots,n)$. Отсюда следует, что $\varkappa_j=0$ $(j=1,2,\ldots,n)$. Аналогичными рассуждениями можно показать, что равны нулю и левые индексы оператор-функции $I+T(\zeta)$. Теорема доказана.

2. Рассмотрим бесконечную в обе стороны систему уравнений

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty}A_{j-k}\varphi_k=f_j\ (j=0,\pm1,\pm2,\ldots), \qquad (3.12)$$

где $f=\{f_j\}_{j=-\infty}^{\infty}$, $\varphi=\{\varphi_j\}_{j=-\infty}^{\infty}\in\mathrm{L}$. Бесконечная система уравнений (3.12) порождает оператор

$$\mathrm{K}=\mathrm{I}+\sum_{j=-\infty}^{\infty}\mathrm{T}_jU^j.$$

Для того, чтобы оператор K, действующий в пространстве L, был обратимым оператором, необходимо и достаточно, чтобы оператор-функция $I+T(\zeta)$ $(T(\zeta)\in W(F))$ принимала только обратимые значения в каждой точке ζ $(|\zeta|=1)$. Оказывается, что только обратимость оператора $I+T(\zeta)$ в каждой точке ζ $(|\zeta|=1)$ недостаточна для того, чтобы система (3.12) допускала редукцию. Имеет место следующая

Теорема 3. 2. Пусть $T(\zeta)\in W(F)$. *Для того, чтобы система уравнений*

$$\sum_{k=-n}^{n}A_{j-k}\varphi_k=f_j,\qquad (j=0,\pm1,\pm2,\ldots,\mp n),$$

начиная с некоторого n, имела единственное решение $\{\varphi_k^{(n)}\}_{k=-n}^{n}$ *при любой правой части из* L *и векторы* $\varphi^{(n)}=(\ldots,0,\varphi_{-n}^{(n)}\ldots\varphi_n^{(n)},0,\ldots)$ *имели предел при* $n\to\infty$, *необходимо и достаточно выполнение следующих условий:*

а) *оператор* $I+T(\zeta)$ *обратим в каждой точке* ζ $(|\zeta|=1)$;

б) *правые и левые индексы оператор-функции* $I+T(\zeta)$ *равны нулю.*

Если эти условия выполняются, то векторы $\varphi^{(n)}$ *сходятся к единственному решению системы* (3. 12).

Доказательство этой теоремы, как и доказательство ниже приводимой теоремы, сводится к доказательству теоремы 3. 1.

Теорема 3. 3. *Пусть выполняются следующие условия:*

а) *операторы* $A(\zeta)=I+T(\zeta)$, $B(\zeta)=I+S(\zeta)$ $(T(\zeta), S(\zeta)\in W(F))$ *обратимы в каждой точке* ζ $(|\zeta|=1)$;

б) *левые и правые индексы оператор-функций* $A(\zeta)$ *и* $B(\zeta)$ *равны нулю;*

в) *правые индексы оператор-функции* $A(\zeta)B^{-1}(\zeta)$ *равны нулю.*

Тогда, начиная с некоторого n, система уравнений

$$\sum_{k=-n}^{n}A_{j-k}\varphi_k=f_j\qquad(j=0,1,2,\ldots,n),$$

$$\sum_{k=-n}^{n}B_{j-k}\varphi_k=f_j\qquad(j=-1,-2,\ldots,-n)$$

имеет единственное решение $\{\varphi_k^{(n)}\}_{k=-n}^{n}$ *и последовательность векторов* $\varphi^{(n)}=(\ldots,0,\varphi_{-n}^{(n)},\ldots,\varphi_n^{(n)},0,\ldots)$ *сходится при* $n\to\infty$ *по норме пространства* L *к единственному решению системы* 2. 1.

Отметим, что для системы (2. 2.) имеет место теорема, аналогичная теореме 3. 3.

Выражаю искреннюю благодарность И. Ц. Гохбергу, под руководством которого выполнена эта работа.

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

1. И. Ц. Гохберг и М. Г. Крейн, Системы интегральных уравнений на полуоси, с ядрами, зависящими от разности аргументов, Успехи матем. наук, 13, вып. 2 (1958).

2. И. Ц. Гохберг, Задача факторизации оператор-функций, Известия АН СССР (серия математическая), 28, 5 (1964).

3. И. Ц. Гохберг, И. А. Фельдман, О методе редукции для систем уравнений типа Винера — Хопфа, Доклады АН СССР, т. 165, № 2 (1965).

4. И. Ц. Гохберг, Задача факторизации в нормированных кольцах, функции от изометрических и симметрических операторов и сингулярные интегральные уравнения, Успехи матем. наук, 19, вып. 1 (1964).

5. И. Ц. Гохберг и М. Г. Крейн, Основные положения о дефектных числах, корневых числах и индексах линейных операторов, Успехи матем. наук, 12, вып. 2 (1957).

6. И. Ц. Гохберг и М. Г. Крейн, О парном интегральном уравнении и его транспонированном, Журнал теорет. и прикл. матем., 1 (1959).

7. И. Ц. Гохберг, И. А. Фельдман. О приближенном решении некоторых классов линейных уравнений, Доклады АН СССР, 160, 4 (1965).

И. М. ГОЯН

РАДИКАЛ БЭРА ПОЧТИ-КОЛЕЦ

Теория радикалов для почти-колец развивалась в различных работах. В большинстве работ понятие радикала связывалось с теорией представления и обобщенными модулями. В настоящей статье дается построение радикала Бэра для почти-колец, обобщающего радикал Бэра для колец, без теории обобщенных модулей.

Под **почти-кольцом** будем понимать множество N с такими двумя бинарными операциями, что:

1) $N(+)$ — группа, не обязательно коммутативная;
2) $N(\cdot)$ — полугруппа;
3) $(a+b)\,c = ac+bc$ для всех $a,\ b,\ c \in N$.

Если $N(+)$ порождается мультипликативной полугруппой S такой, что для любого $s \in S$ и $a,\ b \in N$

$$s(a+b) = sa+sb,$$

то будем говорить, что N есть **дистрибутивно порожденное почти-кольцо***). В дальнейшем будут рассматриваться только такие почти-кольца.

Под **идеалом** дистрибутивно порожденного почти-кольца (кратко д. п. почти-кольца) понимается нормальная подгруппа I группы $N(+)$ такая, что если $a \in I$, то $ax \in I$ и $ya \in I$ для любых $x,\ y \in N$. Фактор-почти-кольца и гомоморфизмы почти-колец определяются аналогично фактор-кольцам и гомоморфизмам для колец. Идеалы являются ядрами гомоморфизмов почти-колец.

Если рассматривать N как Ω-группу, то понятие идеала, данное выше, совпадает с понятием идеала Ω-группы (см. [6]). Поэтому, если потребуется, мы будем использовать некоторые результаты из теории Ω-групп.

Множество идеалов д. п. почти-кольца замкнуто относительно суммы и пересечения. Рассмотрим идеал, порожденный данным элементом a, который назовем **главным идеалом** и обозначим (a). Покажем, что $(a) = M = \{\Sigma(-t_l+n_l a+r_l a+ar_l'+x_l ay_l+t_l)\}$, где n_l — целые числа, $t_l,\ r_l,\ r_l',\ x_l,\ y_l \in N$.

Покажем сначала, что M есть идеал.

Ясно, что M есть подгруппа группы $N(+)$. Для любого $z \in N$

$$-z+(\sum_m(-t_l+n_l a+r_l a+ar_l'+x_l ay_l+t_l))+z=$$

$$-z-t_1+n_1 a+r_1 a+ar_1'+x_1 ay_1+t_1+z-z-t_2+n_2 a+$$

*) В литературе встречается и другое название этих почти-колец. В [9], например, они названы квазикольцами.

$$+r_2 a+ar_2'+x_2 ay_2+t_2+z-z+\dots-z-t_m+n_m a+$$

$$+r_m a+ar_m'+x_m ay_m+t_m+z=\Sigma(-(t_l+z)+n_l a+r_l a+$$

$$+ar_l'+x_l ay_l+(t_l+z))\in M,$$

т. е. M — нормальная подгруппа.

Далее, для любого $z \in N$

$$(\Sigma(-t_l+n_l a+r_l a+ar_l'+x_l ay_l+t_l))\,z=\Sigma(-t_l z+$$

$$+n_l az+r_l az+ar_l' z+x_l ay_l z+t_l z)\in M,$$

то есть M выдерживает умножение справа.

Используя тот факт, что для любого $z \in N$ $z=\Sigma s_k$, где $s_k(a+b)=s_k a+s_k b$, для любых $a,\ b \in N$ получим:

$$z(\sum_l(-t_l+n_l a+r_l a+ar_l'+x_l ay_l+t_l))=$$

$$=\sum_k s_k(\Sigma(-t_l+n_l a+r_l a+ar_l'+x_l ay_l+t_l))=$$

$$=\sum_k\sum_l(-s_k t_l+s_k n_l a+s_k r_l a+s_k ar_l'+s_k x_l ay_l+s_k t_l)\in M,$$

то есть M выдерживает и умножение слева. Следовательно, M есть идеал в N. Так как $a \in M$ и M содержится в любом идеале, содержащем a, то $(a)=M$.

Ясно, что если $1 \in N$, то $(a)=\{\Sigma(-t_i+x_i ay_i+t_i)\}$. Если N есть просто кольцо, то определенный выше идеал совпадает с главным идеалом, порожденным элементом a.

Определим теперь **произведение** идеалов. Пусть A и B — идеалы в N. Тогда

$$AB=\{\Sigma(-u_l+a_l b_l+u_l)\},$$

где $u_l \in N,\ a_l \in A,\ b_l \in B$.

Покажем, что это произведение будет идеалом. Действительно, AB будет нормальной подгруппой группы $N(+)$. Рассуждения такие же, как и выше. Если $x \in N$, то

$$x(\Sigma(-u_l+a_l b_l+u_l))=\sum_k s_k\,(\sum_l(-u_l+a_l b_l+u_l))=$$

$$=\sum_k\sum_l(-s_k u_l+s_k a_l b_l+s_k u_l)\in AB, \text{ так как } s_k a_l \in A.$$

С другой стороны,

$$(\Sigma(-u_l+a_l b_l+u_l))\,x=\Sigma(-u_l x+a_l b_l x+u_l x)\in AB,$$

так как $b_l x \in B$.

Если N есть кольцо, то это произведение совпадает с обычным. Из определения произведения идеалов вытекает следующее включение

$$AB \subseteq A \cap B.$$

Степень идеала определяется индуктивно: $A^1=A$; $A^{n+1}=A^n\cdot A$. Легко убедиться в том, что $A^n=\{\sum_l(-r_l+a_{l_1}a_{l_2}\dots a_{l_n}+r_l)\}$.

Идеал A называется **нильпотентным**, если существует такое натуральное число m, что $A^m=(0)$, и называется **ниль-идеалом**, если для любого $a \in A$ существует такое n, что $a^n=9$.

Предложение 1. *Идеал A будет нильпотентным с индексом нильпотентности n, если и только если произведение любых n элементов из A равно нулю.*

В самом деле, пусть $A^n=(0)$. Это означает, что $\Sigma(-r_i+a_{i_1}a_{i_2}\ldots a_{i_n}+r_i)=0$. Полагая $r_i=0$, получаем $a_{i_1}a_{i_2}\ldots a_{i_n}=0$. Обратно, если $a_{i_1}a_{i_2}\ldots a_{i_n}=0$ для любых $a_{i_j}\in A$, то $A^n=(0)$.

Идеал P называется простым, если из $AB\subseteq P$ следует $A\subseteq P$ или $B\subseteq P$. Это определение эквивалентно следующим из [12]:

Идеал P будет простым, если и только если:

а) A не содержит P и B не содержит P, то AB не содержит P;

б) a, $b\,\overline{\in}\,P$, то $(a)(b)$ не содержит P;

в) a, $b\,\overline{\in}\,P$, то существуют такие $a_1\in(a)$ и $b_1\in(b)$, что $a_1b_1\,\overline{\in}\,P$.

г) $A\supset P$, $B\supset P$, то AB не содержит P.

Почти-кольцо называется первичным, если (0) есть простой идеал.

Предложение 2. *Идеал P будет простым тогда и только тогда, когда фактор-почти-кольцо $\overline{N}=N/P$ будет первичным.*

Действительно, пусть P—простой идеал в N и $\overline{A}\overline{B}=(\overline{0})$, где $\overline{A}$, $\overline{B}$—идеалы в $\overline{N}$. Тогда $AB\subseteq P$ и поэтому $A\subseteq P$ или $B\subseteq P$. Следовательно, $\overline{A}=(\overline{0})$ или $\overline{B}=(\overline{0})$, что доказывает простоту $(\overline{0})$.

Обратно, пусть $\overline{N}=N/P$ первично и $AB\subseteq P$. Тогда $\overline{A}\overline{B}=(\overline{0})$ и, следовательно, $\overline{A}=(\overline{0})$ или $\overline{B}=(\overline{0})$. Переходя к прообразам, получаем $A\subseteq P$ или $B\subseteq P$, то есть P—простой идеал.

Для дальнейшего нам необходимы еще следующие определения. Идеал Q называется *полупервичным*, если из $I^n\subseteq Q$ (I— идеал в N) следует $I\subseteq Q$. Множество $K=\{a_0, a_1, a_2, \ldots\}$ (см. [4]) называется *k-последовательностью*, если $a_{i+1}\in(a_i)^2$ для любого $i=0, 1, 2, \ldots$

Теорема 1. *Пусть I любой идеал почти-кольца N. Следующие множества совпадают:*

1) S_a—пересечение всех простых идеалов, содержащих I;

2) S_b—множество всех таких $x\in N$, что любая k-последовательность, содержащая x, пересекает I;

3) S_c—пересечение всех полупервичных идеалов, содержащих I.

Доказательство. $S_a\subseteq S_b$. Допустим, что S_a не содержит S_b. Выберем элемент $x\in S_a$, $x\,\overline{\in}\,S_b$. Но тогда существует такая k-последовательность, что $x\in K$, но $K\cap I=\varnothing$. Множество $F=\{I'|I'$—идеал, $x\,\overline{\in}\,I$, $I'\cap K=\varnothing\}$ непусто и индуктивно. По лемме Цорна, существует максимальный элемент этого множества P и $x\,\overline{\in}\,P$. Покажем, что P—простой идеал.

Пусть $B\supset P$, $A\supset P$. Существуют тогда элементы $b_j\in B\cap K$ и $a_k\in A\cap K$. Пусть для определенности $j\leqslant k$. Тогда $(a_k)\subseteq(b_j)$, поэтому $(a_k)^2\subseteq(a_k)(b_j)\subseteq AB$. Выберем $a_{k+1}\in(a_k)^2$; $a_{k+1}\in K$, но $a_{k+1}\,\overline{\in}\,P$. Следовательно, AB не содержит P, что доказывает простоту P.

Так как P—простой идеал, то $S_a\subseteq P$ и поэтому $x\in P$. Полученное противоречие доказывает, что $S_a\subseteq S_b$.

$S_b\subseteq S_c$. Пусть S_b не содержит S_c. Существует тогда элемент $x\in S_b$, $x\,\overline{\in}\,S_c$, поэтому x не принадлежит хотя бы одному полупервичному идеалу Q_α. В этом случае и (x) не содержит Q_α. В силу полупервичности Q_α $(x)^2$ не содержит Q_α. Выбираем $x_1\in(x)^2$, $x_1\,\overline{\in}\,Q_\alpha$. Снова $(x_1)^2$ не содержит Q_α, поэтому существует $x_2\in(x_1)^2$, $x_2\,\overline{\in}\,Q_\alpha$. Повторяя этот процесс, получаем k-последовательность $\{x, x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots\}$,

которая не пересекает Q_α. Но, с другой стороны, по определению множества S_b, любая k-последовательность, содержащая x, пересекает I, следовательно, и Q_α. Противоречие доказывает, что $S_b\subseteq S_c$.

Так как всякий простой идеал является полупервичным, то $S_c\subseteq S_a$, и теорема доказана.

В [12] доказано, что S_a совпадает с множеством всех тех $x\in N$, что любая m-система, содержащая x, пересекает I. Под *m-системой* понимается такое множество M, что если a, $b\in M$, то существуют $a_1\in(a)$, $b_1\in(b)$ такие, что $a_1b_1\in M$.

Определение. *Идеал, определенный в теореме 1, назовем радикалом Бэра идеала I и обозначим его $R(I)$.*

Предложение 3. *Радикал Бэра идеала A есть ниль-идеал по модулю A.*

Действительно, если $a\in R(A)$, то $\{a, a^2, \ldots, a^{2k}, \ldots\}$ есть k-последовательность, содержащая a, и поэтому пересекает A, т. е. существует такое k, что $a^{2k}\in A$.

Предложение 4. $R(R(A))=R(A)$.

Действительно, $R(A)$ и A содержатся в одних и тех же простых идеалах.

Предложение 5. $R(A_1\cap A_2)=R(A_1)\cap R(A_2)$.

В самом деле, из $A_1\cap A_2\subseteq A_1$ следует, что $R(A_1\cap A_2)\subseteq R(A_1)$. Аналогично, $R(A_1\cap A_2)\subseteq R(A_2)$, поэтому $R(A_1\cap A_2)\subseteq R(A_1)\cap R(A_2)$.

С другой стороны, если P—простой идеал, содержащий $A_1\cap A_2$, то $P\supseteq A_1\cdot A_2$, откуда $P\supseteq A_1$ или $P\supseteq A_2$. Поэтому $R(A_1\cup A_2)\supseteq R(A_1)\cap R(A_2)$, что доказывает равенство.

Заметим, что если B—такой идеал в N, что $B^n\subseteq R(A)$, то $B\subseteq R(A)$. Это следует из того, что пересечение полупервичных идеалов есть полупервичный идеал. Поэтому радикал Бэра идеала A содержит все нильпотентные идеалы почти-кольца.

Предложение 6. *$N/R(A)$ не содержит ненулевых нильпотентных идеалов.*

В самом деле, пусть $\overline{B}^n=(\overline{0})$, где $\overline{B}$—идеал в $\overline{N}=N/R(A)$. Тогда $B^n\subseteq R(A)$, поэтому и $B\subseteq R(A)$, откуда $\overline{B}=(\overline{0})$.

Определение. $R(0)$ *называется радикалом почти-кольца.*

Суммируя сказанное выше, получаем утверждение:

Теорема 2. *Радикал Бэра почти-кольца есть пересечение всех простых идеалов почти-кольца. Он является ниль-идеалом и содержит все нильпотентные идеалы почти-кольца. Фактор-почти-кольцо по радикалу Бэра не содержит ненулевых нильпотентных идеалов.*

Определение. Если $R(0)=(0)$, то N называется полупростым. Почти-кольцо называется полупервичным, если (0) есть полупервичный идеал.

Из этих определений следует, что почти-кольцо полупервично тогда и только тогда, когда оно полупросто.

Предложение 7. *Почти-кольцо полупервично тогда и только тогда, когда оно не содержит ненулевых нильпотентных идеалов.*

Действительно, если N полупервично, то из $A^n=(0)$ следует $A=(0)$, т. е. N не содержит ненулевых нильпотентных идеалов.

Обратно, если N не содержит нильпотентных идеалов, отличных от нуля, то из $B^n=(0)$ следует $B=0$, но это означает, что (0) есть полупервичный идеал.

В силу теоремы 2 получаем

Предложение 8. *$N/R(0)$—полупросто.*

Приведем здесь для полноты изложения следующую структурную теорему, которая взята из [12] и справедлива и для д. п. почти-колец:

Теорема 3. *Полупростое почти-кольцо изоморфно подпрямой сумме первичных почти-колец.*

Так же, как и для колец, доказывается следующая

Теорема 4. *Полупростое почти-кольцо с условием минимальности для идеалов изоморфно конечной подпрямой сумме первичных почти-колец.*

Дадим теперь другое, более конструктивное построение радикала Бэра для дистрибутивно порожденных почти-колец.

В силу предложения 1, почти-кольцо будет нильпотентным, если существует такое натуральное n, что произведение $a_{i_1} \ a_{i_2} \dots a_{i_n} = 0$ для любых $a_{i_j} \in N$.

Лемма 1. *Если N есть ниль-(нильпотентное) почти-кольцо, то таким же будет и любой гомоморфный образ N. Расширение ниль-(нильпотентного) почти-кольца при помощи ниль-(нильпотентного) есть ниль-(нильпотентное) почти-кольцо.*

Доказательство. Первое утверждение очевидно. Докажем второе. Пусть $\overline{N}=N/A$ нильпотентное почти-кольцо с индексом нильпотентности n и A—нильпотентный идеал в N с индексом нильпотентности m. Так как $\overline{a}_{i_1} \overline{a}_{i_2} \dots \overline{a}_{i_n}=\overline{0}$ для любых $\overline{a}_{i_j} \in \overline{N}$, то произведение любых n элементов из N содержится в A. Но тогда произведение любых nm элементов из N равно нулю, т. е. N нильпотентно.

Если $\overline{N}$ есть ниль-почти-кольцо и A—ниль-идеал, то для любого $b \in N$, $\overline{b}^n = \overline{0}$, т. е. $b^n \in A$. Поэтому существует такое m, что $b^{nm}=0$ и N есть ниль-почти-кольцо.

Лемма 2. *Сумма двух ниль-(нильпотентных) идеалов почти-кольца есть ниль-(нильпотентный) идеал.*

Доказательство. Пусть A_1 и A_2—ниль-идеалы и положим $A=A_1+A_2$. Тогда $A/A_1 \cong A_2/A_1 \cap A_2$. Последнее есть ниль-почти-кольцо по лемме 2 и по той же лемме таким же будет и A. Для нильпотентных идеалов применимы те же рассуждения.

Предложение 9. *Сумма всех ниль-идеалов и сумма всех нильпотентных идеалов любого почти-кольца будут ниль-идеалами.*

Действительно, пусть U обозначает сумму всех ниль-идеалов, N — сумму всех нильпотентных идеалов из N. Пусть $z \in \mathsf{U}$. Тогда $z \in B_1+B_2+ \dots +B_k$, но последняя сумма, по лемме 2, есть ниль-идеал. Поэтому z будет нильпотентным, а U—ниль-идеал. Так как $\mathsf{U} \supseteq \mathsf{N}$, то и N будет ниль-идеалом.

Определение. Идеал M в N называется ниль-радикалом, если и только если: 1) M есть ниль-идеал и 2) N/M не содержит ненулевых нильпотентных идеалов.

Из доказанного выше следует, что U есть ниль-радикал и он содержит все ниль-радикалы.

Мы используем N для построения некоторой трансфинитной цепочки, определяющей некоторый ниль-радикал. Определим для каждого порядкового числа α идеал $\mathsf{N}(\alpha)$ следующим образом:

1) $\mathsf{N}(0) = (0)$.

2) Пусть $\mathsf{N}(\alpha)$ определен для всех $\alpha < \beta$. Тогда

а) если β — предельное число, то положим $\mathsf{N}(\beta) = \sum\limits_{\gamma<\beta} \mathsf{N}(\gamma)$.

б) $\beta = \gamma + 1$. Определим $\mathsf{N}(\beta)$ как такой идеал, что $\mathsf{N}(\beta)/\mathsf{N}(\gamma)$ есть сумма всех нильпотентных идеалов почти-кольца $N/\mathsf{N}(\gamma)$. Существует такое порядковое число τ, что $\mathsf{N}(\tau) = \mathsf{N}(\tau+1)$. Положим $\mathsf{N}(\tau) = \mathsf{L}$.

Предложение 10. *L есть пересечение таких идеалов M, что N/M не содержит ненулевых нильпотентных идеалов. L есть ниль-радикал и содержится в любом ниль-радикале.*

Доказательство. Пусть M такой идеал в N, что N/M не содержит ненулевых нильпотентных идеалов. Тогда $0 = \mathsf{N}(0) \subseteq M$. Пусть для всех $\alpha < \beta$ $\mathsf{N}(\alpha) \subseteq M$. Если β — предельное порядковое, то $\mathsf{N}(\beta) \subseteq M$. Пусть теперь $\beta = \gamma + 1$. Из определения следует, что $\mathsf{N}(\beta)$ есть сумма таких идеалов P, что $P/\mathsf{N}(\gamma)$ есть нильпотентный идеал. Тогда

$$P + M/M \cong P/P \cap M \cong \frac{P}{\mathsf{N}(\gamma)} \Big/ \frac{P \cap M}{\mathsf{N}(\gamma)}$$

и последнее есть нильпотентное почти-кольцо. Так как $P+M$ есть идеал в N, то $P+M/M = (0)$. Следовательно, $P \subseteq M$, поэтому и $\mathsf{N}(\beta) \subseteq M$. Получаем, что $\mathsf{L} \subseteq \bigcap M$, где N/M не содержит нильпотентных идеалов, отличных от нуля. Так как L тоже такого типа, то $\mathsf{L} = \bigcap M$. Но любой ниль-радикал тоже обладает этим свойством, поэтому L содержится в любом ниль-радикале, а значит, $\mathsf{L} \leq \mathsf{U}$. Из этого заключаем, что L есть ниль-идеал и, следовательно, ниль-радикал.

Назовем U *верхним*, L *нижним радикалами Бэра* почти-кольца N.

Заметим, что если P — простой идеал, то N/P не содержит ненулевых нильпотентных идеалов. Поэтому $\mathsf{L} \subseteq \bigcap P$, где P — простой идеал. Для доказательства равенства нам нужна

Лемма 3. *Если M такой идеал, что N/M не имеет ненулевых нильпотентных идеалов, и B такой идеал, что $B \supset M$, то существует такой простой идеал P, что $P \supseteq M$, P не содержит B.*

Доказательство. Так как $B \supset M$, что существует $b \in B$, $b \overline{\in} M$. В этом случае и (b) не содержит M. Так как N/M не содержит нильпотентных идеалов, отличных от нуля, то $(b)^2$ не содержит M. Выбираем $b_1 \in (b)^2$, $b_1 \overline{\in} M$. Тогда $(b_1)^2 \subseteq M$ и поэтому существует $b_2 \in (b_1)^2$, $b_2 \overline{\in} M$. Повторяя этот процесс, получим k-последовательность $\{b, b_1, b_2, \dots, b_n, \dots\}$, не пересекающую M.

Множество $\{ M' \mid M' \supseteq M,\ M' \cap K = \varnothing \}$ непусто и индуктивно и, по лемме Цорна, обладает максимальным элементом P. Пусть $C \supset P$, $D \supset P$. Тогда существуют элементы $c_j \in C \cap K$ и $d_k \in D \cap K$. Пусть $k \leqslant j$. Тогда $(c_j) \subseteq (d_k)$, $(c_i)^2 \subseteq (c_j)(d_k) \subseteq C D$. Но $c_{j+1} \in (c_j)^2$, поэтому $c_{j+1} \in C D$, $c_{j+1} \overline{\in} P$. Следовательно, CD не содержит P, что доказывает простоту идеала P. Из построения видно, что $P \supseteq M$, P не содержит B.

Теорема 5. *L есть пересечение простых идеалов почти-кольца N.*

Доказательство. Мы уже видели, что $\mathsf{L} \subseteq \bigcap P_\alpha$, P_α — простой идеал. Допустим, что $\mathsf{L} \subset \bigcap P_\alpha = B$. По предыдущей лемме, существует такой простой идеал P, что $P \supseteq \mathsf{L}$, P не содержит B. Но это противоречит тому, что $P \supseteq B$. Следовательно, $\mathsf{L} = \bigcap P_\alpha$, где P_α — простой идеал в N.

В заключение автор благодарит В. А. Андрунакиевича, под руководством которого была выполнена настоящая работа, и Ю. М. Рябухина за советы и указания.

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

1. А. И. Мальцев, О представлениях бесконечных алгебр, Матем. сб., 13 (55) (1943), 263—286.
2. А. И. Мальцев, Об одном представлении неассоциативных колец, УМН, 7, 1 (47) (1952), 181—185.
3. D. W. Blacket, Simple and semi-simple nearrings, Proc. Amer. Math. Soc., 4 (1953), 772—785.
4. В. А. Андрунакиевич, Первичные модули и радикал Бэра, Сиб. матем. журнал, 11, № 6 (1961), 801—806.
5. Н. Джекобсон, Строение колец, М., 1961.
6. А. Г. Курош, Лекции по общей алгебре, М., 1961.
7. G. Joulain, Sur les anneaux non commutatif, I—Radical, Seminaire Dubreil-Pisot (Algebre et theorie des nombres). 1961—62, № 13.
8. G. Betsh, Ein Radical für Fastringe, Math. Zeit., 78, (1962), 86—90.
9. Б. И. Плоткин, Некоторые вопросы общей теории представлений групп, Изв. Академии наук СССР, серия математическая, 27 (1963), 855—882.
10. R. R. Laxton, A radical and its theory for distributively generated near-rings, J. London Math. Soc., 38 (1963), 40—49.
11. R. R. Laxton, Prime ideals and the ideals-radical of a. d. g. near-rings, Math. Zeit., 83 (1) (1964), 8—17.
12. A. P. J. von der Walt, Prime ideals and nil-radicals in near-rings, Arch. Math., 15, № 6 (1964), 408—414.

Известия Академии наук Молдавской ССР, № 4, 1966

И. А. НОВОСЕЛЬСКИЙ

О ЛИНЕЙНЫХ ОПЕРАТОРАХ В ПРОСТРАНСТВЕ С ДВУМЯ ТОПОЛОГИЯМИ

Пусть X — локально выпуклое пространство, которое снабжено также второй (более слабой) топологией, порожденной некоторым скалярным произведением.

Основные теоремы о линейных операторах в пространстве с двумя нормами (т. е. в случае, когда X — нормированное пространство) были получены М. Г. Крейном [1]. В работах И. М. Гельфанда и его сотрудников (см. [2]) были получены важные результаты о линейных операторах в оснащенном гильбертовом пространстве (т. е. в случае, когда X — ядерное пространство).

В этой статье рассматриваются ограниченные и вполне непрерывные операторы в пространстве с двумя топологиями. В п. 1 обобщаются некоторые результаты М. Г. Крейна [1] об эрмитовых операторах в пространстве с двумя нормами. В п.п. 2—4 получены обобщения некоторых признаков полноты системы корневых векторов линейного оператора в пространстве с двумя нормами, установленных в [3].

1. Пусть X — локально выпуклое пространство над полем комплексных чисел. Всюду ниже мы предполагаем, что пространство X полуполно, т. е. что всякая фундаментальная последовательность в X сходится. Линейный оператор A, действующий в X, называется **ограниченным** (**вполне непрерывным**), если существует такая окрестность*) $V \subset X$, которую он переводит в ограниченное (бикомпактное) множество. Через $R(A)$ и $Z(A)$ далее обозначаются множество значений и ядро оператора $A: R(A) = AX$, $Z(A) = \{x : x \in X,\ Ax = 0\}$.

Пусть в пространстве X задано скалярное произведение (x, y), непрерывное по обеим переменным. Пополняя X по норме $|x| = \sqrt{(x, x)}$, получим гильбертово пространство $H \supset X$. Через X^* обозначим сопряженное пространство к X с топологией равномерной сходимости на всех ограниченных множествах из X. Так как каждый элемент $\varphi \in H$ однозначно определяет функционал $f_\varphi \in X^*$ $(f_\varphi(x) = (x, \varphi))$, то можно считать, что $H \subset X^*$.

Если A — линейный оператор, определенный на пространстве X и непрерывный на нем по норме $|x|$, то его расширение по непрерывности на все H будем обозначать той же буквой A. Множество значений и ядро расширенного оператора обозначим соответственно через $R_H(A)$ и $Z_H(A)$.

Линейный оператор A, действующий в X, называется **эрмитовым**, если $(Ax, y) = (x, Ay)$ для всех $x, y \in X$.

---

*) Под окрестностью всюду будем понимать абсолютно выпуклую окрестность нуля.

Теорема 1. *Всякий эрмитов оператор A, ограниченный в X, ограничен и в H, причем его спектр при переходе от X к H не расширяется. Если же эрмитов оператор A вполне непрерывен в X, то он вполне непрерывен и в H, причем спектры оператора A в X и в H совпадают и каждое собственное число $\lambda \neq 0$ оператора A имеет одну и ту же кратность в X и в H.*

Доказательство. Пусть A — линейный ограниченный оператор в X и W_1 — такая окрестность из X, что множество AW_1 ограничено. Если $V = \{\varphi : \varphi \in H, |\varphi| < 1\}$, то, в силу того, что топология в H слабее топологии в X, существует окрестность $W_2 \subset X$ такая, что $W_2 \subset V$. Через $p_u(x)$ $(x \in X)$ обозначим функционал Минковского окрестности $U = W_1 \cap W_2$ (т. е. $p_u(x) = \inf\{r > 0 : x \in rU\}$). Отметим, что $p_u(x_0) = 0$ лишь при $x_0 = 0$, так как в противном случае мы получили бы, что $\alpha x_0 \in U \subset V$ для любого числа α, а это невозможно в силу ограниченности V в пространстве H. Следовательно, $p_u(x)$ есть норма в X, и так как $V \supset U$, то $p_u(x) \geqslant p_V(x) = |x|$ $(x \in X)$. Поэтому банахово пространство B, полученное пополнением X по норме $p_u(x)$, можно считать содержащимся в $H: X \subset B \subset H$.

Из результатов работ [4—6] следует, что всякий ограниченный (вполне непрерывный) оператор A в X допускает ограниченное (вполне непрерывное) расширение на B, причем ненулевые спектры и кратности ненулевых собственных значений оператора A в X и в B совпадают.

Если точка $\lambda = 0$ является точкой спектра оператора A в X, то, применяя к оператору A в пространстве B теоремы 1—3 М. Г. Крейна [1], получим утверждение теоремы. Если же оператор A имеет непрерывный обратный A^{-1}, то оператор $I = A^{-1}A$ ограничен в X. Но тогда в силу теоремы А. Н. Колмогорова [7], пространство X нормируемо, и поэтому заключения теоремы непосредственно следуют из указанных результатов М. Г. Крейна.

Теорема доказана.

Следствие. Если эрмитов оператор $A\ (\neq 0)$ вполне непрерывен в X, то у него существует хотя бы одно ненулевое собственное значение в X.

Действительно, так как оператор A вполне непрерывен в H и эрмитов, то он имеет в H ненулевое собственное значение, которое является собственным значением и в X.

Заметим, что не всякий непрерывный в X эрмитов оператор допускает непрерывное расширение на H. В самом деле, пусть X—пространство бесконечно дифференцируемых функций, носители которых содержатся в отрезке $[0,1]$, H—пространство $L_2(0,1)$ и $(Af)(x) = if'(x)$ $(f \in X)$. Очевидно, что оператор A эрмитов и непрерывен в X, но он не допускает непрерывного расширения на H.

Оператор A, действующий в X, будем называть HX-непрерывным, если для любой окрестности $W \subset X$ найдется окрестность $V \subset H$ такая, что $A(V \cap X) \subset W$. Очевидно, что всякий HX-непрерывный оператор непрерывен в X и допускает непрерывное расширение на H.

Теорема 2. *Если эрмитов оператор A вполне непрерывен в H и HX-непрерывен, то его спектральное разложение безусловно сходится в топологии пространства X, т. е. для любого $\varphi \in H$*

$$A\varphi = \Sigma_X \lambda_j (\varphi, y_j) y_j, \tag{1}$$

где $\{\lambda_j\}$—полная система ненулевых собственных чисел оператора A (с учетом их кратностей), а $\{y_j\}$ — система соответствующих собственных векторов (ортонормированная в H).

Действительно, для любого вектора $\varphi \in H$ имеет место безусловно сходящееся (по норме H) разложение

$$\varphi = \Sigma_H (\varphi, y_j) y_j + \psi,$$

где $A\psi = 0$. Применяя к обеим частям этого равенства HX-непрерывный оператор A, получим (1).

2. Если A—вполне непрерывный в X оператор, то обозначим через $E(A)$ линейную замкнутую оболочку всех его корневых векторов, а через $\widetilde{E}(A)$—линейную замкнутую оболочку корневых векторов, соответствующих ненулевым собственным значениям. Будем называть оператор A полным, если $\widetilde{E}(A) = X$.

Лемма 1. *Если HX-непрерывный оператор A является полным в H и $\overline{R(A)} = X$, то A полный и в X.*

Доказательство. В самом деле, пусть x—некоторый вектор из X и V—произвольная окрестность в X. В силу плотности $R(A)$ найдется такой вектор y, что $Ay - x \in \frac{1}{2}V$. Так как оператор A является HX-непрерывным, то существует $\varepsilon > 0$ такое, что из неравенства $|z| < \varepsilon$ следует $Az \in \frac{1}{2} V$. Для вектора y можно указать такую линейную комбинацию $\sum_{j=1}^{n} \alpha_j y_j$ корневых векторов оператора A, отвечающих ненулевым собственным значениям, что

$$\left| y - \sum_{j=1}^{n} \alpha_j y_j \right| < \varepsilon.$$

Очевидно, $x - \sum_{j=1}^{n} \alpha_j Ay_j \in V$, и так как векторы Ay_j также являются корневыми векторами оператора A, то лемма доказана.

Обозначим через $N_p(X)$ $(0 < p \leqslant 1)$ множество всех действующих в X операторов A, представимых в виде

$$Ax = \sum_{j=1}^{\infty} \alpha_j f_j(x) y_j \ (x \in X), \tag{2}$$

где $\sum_{j=1}^{\infty} |\alpha_j|^p < \infty$ и последовательность $\{y_j\}$ (соответственно $\{f_j\}$) содержится в некотором бикомпактном абсолютно выпуклом подмножестве пространства X (соответственно X^*). Операторы $A \in N_1(X)$ называются операторами Фредгольма (см. [8], [9]).

Лемма 2. *Если HX-непрерывный оператор A таков, что $A^m \in N_p(X)$ для некоторого натурального m, то оператор $A^{m+1} \in N_p(H)$.*

Доказательство. Пусть оператор A^m представим в виде (2). Тогда

$$A^{m+1} x = A^m (Ax) = \sum_{j=1}^{\infty} \alpha_j f_j(Ax) y_j = \sum_{j=1}^{\infty} \alpha_j (A^* f_j)(x) y_j.$$

Так как оператор A является HX-непрерывным, то сопряженный оператор A^* непрерывно действует из X^* в H ([10], стр. 225) и поэтому он переводит бикомпактные множества из X^* в бикомпактные множества из H. Так как, кроме того, всякое бикомпактное множество в X является бикомпактным в H, то получаем, что оператор $A^{m+1} \in N_p(H)$.

Следующая лемма дает оценку резольвенты HX-непрерывного оператора в пространстве H.

Лемма 3. *Если HX-непрерывный оператор A входит в $N_p(X)$ $(0<p\leqslant 1)$, то*

$$\varlimsup_{\rho\to\infty} \{\rho^{-r} \ln \max_{|\lambda|=\rho} \|(I-\lambda A)^{-1}\|\} = 0$$

для любого $r > ({}^1/_p - {}^1/_2)^{-1}$.

Доказательство. Если оператор $A \in N_p(X)$, то при любом k оператор $A^k \in N_t(X)$, где $t = \min\left(1, \frac{2p}{2k-p(k+1)}\right)$ (см. [9], гл. II, теорема 3). Так как по лемме 2 оператор $A^{k+1} \in N_t(H)$, то (см., например, [11]):

$$\varlimsup_{\rho\to\infty} \{\rho^{-t} \ln \max_{|\lambda|=\rho} \|(I-\lambda A^{k+1})^{-1}\|\} = 0,$$

откуда вытекает, что

$$\varlimsup_{\rho\to\infty} \{\rho^{-t(k+1)} \ln \max_{|\lambda|=\rho} \|(I-\lambda A)^{-1}\|\} = 0.$$

В силу произвольности числа k из последнего равенства следует утверждение леммы.

Линейный непрерывный оператор A, действующий в X, назовем правильным, если существует непрерывный в X оператор A^+ такой, что $(Ax, y) = (x, A^+ y)$ для всех $x, y \in X$.

Нам понадобится следующее свойство правильных операторов, установленное в [12] для случая, когда X—банахово пространство.

Лемма 4. *Если правильный оператор вполне непрерывен в X, то он допускает вполне непрерывное расширение на H.*

В самом деле, оператор A^+A является эрмитовым и вполне непрерывным в X. По теореме 1 этот оператор допускает вполне непрерывное расширение на H, причем оператор A^+ расширяется до A^* (A^*—оператор, сопряженный к A в H). Таким образом, оператор A^*A вполне непрерывен в H, а поэтому оператор A также вполне непрерывен в H.

Легко видеть, что лемма 4 переносится на ограниченные операторы.

Теорема 3. *Пусть A есть HX-непрерывный эрмитов оператор и A^n при некотором n является оператором Фредгольма. Если T—правильный вполне непрерывный в X оператор, $C=(I+T)A$ и $\overline{R(C)}=X$, то оператор C полный в X.*

Доказательсто. Из лемм 2 и 4 следует, что A^{n+1}— оператор Фредгольма, а оператор T вполне непрерывен в H. Так как $\overline{R_H(I+T)} \supseteq \overline{R_H(C)} = H$, то $\overline{R_H(A)} = H$ и $Z_H(I+T)=0$. Таким образом, для оператора C в H выполнены все условия теоремы М. В. Келдыша [13] (см. также [14], гл. V, теорема 8.1), и поэтому C является полным в H.

Так как оператор $I+T$ непрерывен в X, то оператор $C=(I+T)A$ является HX-непрерывным, и по лемме 1 оператор C полный в X.

Теорема доказана.

Замечание 1. Условие $A^n \in N_1(X)$ в теореме 3 можно заменить следующим: $\sum_j |\lambda_j|^p < \infty$ при некотором $p>0$, где $\{\lambda_j\}$ — полная система ненулевых собственных чисел оператора A (с учетом их кратностей).

В самом деле, по теореме 1 собственные значения $\lambda_j \neq 0$ оператора A в пространствах X и H совпадают, и поэтому к оператору C в пространстве H снова применима теорема М. В. Келдыша.

Теорема 4. *Пусть для HX-непрерывного оператора A выполняются условия:*

а) $|\arg(Ax,x)| \leqslant \gamma\pi/2$ $(\gamma<2)$ *для всех* $x \in X$;

б) $A \in N_p(X)$ $(p < (\gamma + {}^1/_2)^{-1})$.

Если T — правильный вполне непрерывный в X оператор, $C=(I+T)A$ и $\overline{R(C)}=X$, то оператор C полный в H.

Доказательство. Так как всякий HX-непрерывный оператор A является непрерывным в H, то в силу непрерывности скалярного произведения условие а) сохраняет силу для всех $x \in X$.

Учитывая, что оператор C является HX-непрерывным и $C \in N_p(X)$, в силу леммы 3 получим

$$\varlimsup_{\rho\to\infty} \{\rho^{-r} \ln \max_{|\lambda|=\rho} \|(I-\lambda C)^{-1}\|\} = 0 \left(\gamma < \frac{1}{r} < \left(\frac{1}{p} - \frac{1}{2}\right)\right).$$

Так как $\overline{R_H(C)} = H$, то на основании результатов статьи [15] (теорема 8) из сказанного выше нетрудно получить, что оператор C полный в H. В силу леммы 1 оператор C является полным в X.

3. Результаты п. 2 допускают обобщения на полиномиальные операторные пучки, которые мы приведем здесь без доказательства.

Правильный оператор A назовем нормальным, если $A^+A = AA^+$.

Теорема 5. *Пусть A — нормальный HX-непрерывный оператор, причем A^n эрмитов для некоторого натурального n. Если $\overline{R(A)} = X$ и оператор A^k является оператором Фредгольма для некоторого k, то система собственных и присоединенных векторов каждого из пучков*

$$I - \sum_{j=0}^{n-1} \lambda^j A^j T_j - \lambda^n A^n, \quad I - \sum_{j=0}^{n-1} \lambda^j T_j A^j - \lambda^n A^n,$$

где T_j $(j=0,1,\ldots,n-1)$ — правильные вполне непрерывные операторы в X, n-кратно полна в X.

Эта теорема доказывается на основании теоремы 1, лемм 1, 4 и теоремы М. В. Келдыша [13] (см. также [14], гл. V, теорема 9.1).

Теорема 6. *Пусть HX-непрерывный оператор $A \in N_p(X)$ $(p < (\gamma + {}^1/_2)^{-1})$ и $|\arg(Ax,x)| \leqslant \gamma\pi/2$ $(\gamma<2)$ для всех $x \in X$. Если $\overline{R(A)}=X$ и T_j $(j=0,1,\ldots,n-1)$ — правильные вполне непрерывные операторы в X, то система собственных и присоединенных векторов каждого из пучков $I - T_0 - \lambda A T_1 - \ldots - \lambda^{n-1} A T_{n-1} - \lambda^n A$, $I - T_0 - \lambda T_1 A - \ldots - \lambda^{n-1} T_{n-1} A - \lambda^n A$ n-кратно полна в X.*

Эта теорема доказывается аналогично теореме 5 с использованием результатов А. С. Маркуса [16].

4. В этом пункте устанавливается теорема о полноте системы обобщенных корневых векторов вполне непрерывного эрмитова оператора (условие HX-непрерывности не предполагается выполненным).

Приведем вначале два вспомогательных предложения.

Вполне непрерывный оператор A называется вольтерровым, если у него нет отличных от нуля собственных значений. Для множества $M \subset X^*$ через $M^\perp$ будем обозначать его ортогональное дополнение в X: $M^\perp = \{x : x \in X, f(x)=0$ для всех $f \in M\}$.

Лемма 5. *Если оператор A вполне непрерывен в X, то его сужение на подпространство $X_1 = \tilde{E}(A^*)^{\perp}$ есть вольтерров оператор.*

Действительно, если это не так, то существует число $\lambda \neq 0$ и вектор $x \neq 0$ $(x \in X_1)$ такие, что $Ax = \lambda x$. Так как $x \in \overline{R((A - \lambda I)^n)}$ при достаточно большом n [17], то найдется ненулевой функционал $f \in Z((A^* - \lambda I)^n)$ такой, что $f(x) \neq 0$ (см. [18]), а это противоречит условию $x \in X_1$.

Лемма 6. *Если оператор A вполне непрерывен в X и имеет хотя бы одно ненулевое собственное значение в каждом инвариантном подпространстве, где он не равен тождественно нулю, то $R(A^*)^{\perp} = \tilde{E}(A^*)^{\perp}$.*

В самом деле, в силу леммы 5 оператор A аннулируется на $\tilde{E}(A^*)^{\perp}$. Следовательно, $\tilde{E}(A^*)^{\perp} \subseteq Z(A) = R(A^*)^{\perp}$. Так как $\tilde{E}(A^*) \subseteq \overline{R(A^*)}$, то $\tilde{E}(A^*)^{\perp} \supseteq R(A^*)^{\perp}$. Таким образом, $\tilde{E}(A^*)^{\perp} = R(A^*)^{\perp}$.

Ненулевой функционал $f \in X^*$ назовем обобщенным корневым вектором оператора A, соответствующим собственному значению λ, если при некотором натуральном n

$$f((A - \lambda I)^n x) = 0 \tag{3}$$

для всех $x \in X$. Если (3) выполняется при $n = 1$, то f называется обобщенным собственным вектором оператора A. Очевидно, что обобщенные корневые (собственные) векторы оператора A есть не что иное, как корневые (собственные) векторы оператора A^*. Отметим также, что для эрмитова оператора всякий корневой вектор является собственным, а всякий обобщенный корневой вектор, соответствующий ненулевому собственному значению, — обобщенным собственным вектором.

Будем говорить, что система обобщенных корневых векторов оператора A полна, если равенство $f(x_0) = 0$ $(x_0 \in X)$ выполняется для всех обобщенных корневых векторов f оператора A только при $x_0 = 0$.

Это понятие было введено И. М. Гельфандом и А. Г. Костюченко [19], которые установили, что в случае оснащенного гильбертова пространства система обобщенных собственных векторов всякого оператора, допускающего самосопряженное расширение в H, является полной (см. [2], гл. 1, § 4).

Теорема 7. *Если эрмитов оператор A вполне непрерывен в X, то его система обобщенных корневых векторов полна.*

Доказательство. Пусть $\tilde{X}$ — некоторое инвариантное подпространство и $\tilde{A}$ — сужение оператора A на $\tilde{X}$. Так как $\tilde{A}$ является эрмитовым вполне непрерывным в $\tilde{X}$ оператором, то при $\tilde{A} \neq 0$ оператор $\tilde{A}$ имеет хотя бы одно ненулевое собственное значение (см. следствие 1). В силу леммы 6 отсюда вытекает, что $\tilde{E}(A^*)^{\perp} = R(A^*)^{\perp}$.

Покажем теперь, что $\tilde{E}(A^*)^{\perp} = 0$ (это эквивалентно утверждению теоремы).

Пусть $x \in \tilde{E}(A^*)^{\perp}$, тогда $x \in \tilde{E}(A^*)^{\perp} = R(A^*)^{\perp} = Z(A)$ и $x \in Z(A^*)^{\perp} = \overline{R(A)}$ (см. [10], стр. 252). В силу эрмитовости оператора A

$\overline{R_H(A)} \cap Z_H(A) = 0$, а так как $\overline{R_H(A)} \supseteq \overline{R(A)}$ и $Z(A) \subseteq Z_H(A)$, то $\overline{R(A)} \cap Z(A) = 0$ и, следовательно, $x = 0$.

Теорема доказана.

Замечание 2. В условиях теоремы 7 можно утверждать также, что если $f(x_0) = 0$ для всех обобщенных собственных векторов f оператора A, отвечающих ненулевым собственным значениям, то $Ax_0 = 0$.

Это утверждение вытекает из равенства $\tilde{E}(A^*)^{\perp} = R(A^*)^{\perp}$, установленного в доказательстве теоремы.

Замечание 3. Если пространство X полурефлексивно (определение см. [10], стр. 238), то в условиях теоремы 7 система корневых векторов оператора A^* полна в пространстве X^*, а система его собственных векторов, отвечающих ненулевым собственным значениям, полна в $R(A^*)$.

Отметим, что в силу теоремы 1 у всякого вполне непрерывного эрмитова оператора A существует бесконечное число собственных векторов в X. Однако, как показывает приводимый ниже пример, система собственных векторов оператора A может не быть полной даже в $R(A)$.

Пример. Пусть X — гильбертово пространство со скалярным произведением $[x, y]$, $\{\varphi_j\}_1^{\infty}$ — ортонормированный базис в X. Рассмотрим оператор

$$A = \sum_{j=3}^{\infty} \lambda_j [\cdot, \varphi_j] \varphi_j + [\cdot, \varphi_1] \varphi_2 + [\cdot, \varphi_2] \psi,$$

где

$$\psi = \sum_{j=3}^{\infty} \lambda_j \varphi_j, \ \lambda_j > 0, \ (j \geqslant 3), \ \lambda_j \to 0.$$

Очевидно, оператор A вполне непрерывен. Нетрудно проверить также, что собственными векторами оператора A являются только векторы φ_j $(j \geqslant 3)$ и других корневых векторов нет. Так как $\overline{R(A)}$ есть линейная замкнутая оболочка векторов φ_j $(j \geqslant 2)$, то система собственных векторов оператора A не является полной даже в $R(A)$.

Обозначим через G положительный вполне непрерывный оператор, определенный в X равенством:

$$G = \sum_{j=3}^{\infty} \varepsilon_j [\cdot, g_j] g_j + [\cdot, \varphi_1] \varphi_1,$$

где

$$g_j = \varphi_j + \varphi_2 + \frac{1}{\lambda_j} \varphi_1, \ \varepsilon_j > 0 \ (j \geqslant 3), \ \sum_{j=3}^{\infty} \varepsilon_j \| g_j \|^2 < \infty.$$

Нетрудно проверить, что относительно скалярного произведения $(x, y) = [Gx, y]$ оператор A является эрмитовым.

Автор благодарен А. С. Маркусу за постановку задачи и ценные советы.

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

1. М. Г. Крейн, Про лінійні цілком неперервні оператори в функціональних просторах з двома нормами, Сб. трудов Ин-та матем. АН УССР, № 9 (1947), 104—128.
2. И. М. Гельфанд и Н. Я. Виленкин, Обобщенные функции, вып. 4, М., 1961.
3. И. А. Новосельский, Некоторые признаки полноты системы корневых векторов линейного оператора в пространстве с двумя нормами, ДАН СССР 167, № 4 (1966), 747—750.
4. J. R. Ringrose, Precompact linear operators in locally convex spaces, Proc. Cambridge Philos. Soc., 53, № 3 (1957), 581—591.
5. H. Schaefer, On the Fredholm alternative in locally convex linear spaces, Studia Math. 18, № 3 (1959), 229—245.
6. А. С. Маркус и И. А. Фельдман, Об ограниченных операторах в локально выпуклых пространствах, Изв. Молд. фил. АН СССР, № 10(76) (1960), 71—78.
7. А. Н. Колмогоров, Zur Normierbarkeit eines allgemeinen topologischen linearen Raumes, Studia Math., 5 (1934), 29—33.
8. А. Гротендик, Теория Фредгольма, Сб. перевод. Математика, 2, 5 (1958), 51—103.
9. A. Grothendieck, Produits tensoriels topologiques et espaces nucléaires, Providence, 1955.
10. Н. Бурбаки, Топологические векторные пространства, М., ИЛ, 1959.
11. В. Б. Лидский, О суммируемости рядов по главным векторам несамосопряженных операторов, Труды Моск. матем. об-ва, т. II (1962), 3—35.
12. И. Ц. Гохберг и М. К. Замбицкий, О нормально разрешимых операторах в пространствах с двумя нормами, Изв. АН МССР, № 6 (1964), 80—85.
13. М. В. Келдыш, О собственных значениях и собственных функциях некоторых классов несамосопряженных операторов, ДАН СССР, 77, № 1 (1951), 11—14.
14. И. Ц. Гохберг и М. Г. Крейн, Введение в теорию линейных несамосопряженных операторов, М., «Наука», 1965.
15. А. С. Маркус, О некоторых признаках полноты системы корневых векторов линейного оператора и суммируемости рядов по этой системе, ДАН СССР, 155, № 4 (1964), 753—756.
16. А. С. Маркус, О кратной полноте и сходимости кратных разложений по системе собственных и присоединенных векторов операторного пучка, ДАН СССР, 163, № 5 (1965), 1061—1065.
17. Leray J., Valeurs propres et vecteurs propres d'un endomorphisme complètement continu d'un espace vectoriel à voisinages convexes, Acta Scient. Math., 12 B (1950), 177—186.
18. J. H. Williamson, Compact linear operators in linear topological spaces, J. London Math. Soc., 29 (1954), 149—156.
19. И. М. Гельфанд и А. Г. Костюченко, О разложении по собственным функциям дифференциальных и других операторов, ДАН СССР, 103, № 3 (1955), 349—352.

Известия Академии наук Молдавской ССР № 4, 1966

К. С. СИБИРСКИЙ

О ЧЕТНОСТИ ФУНКЦИЙ ДВУХ ПЕРЕМЕННЫХ

В [1] и [2] нами рассматривались алгебраические инварианты [3, 4] линейных представлений группы вращений плоскости унитарными диагональными матрицами с непрерывными элементами. В этих работах, а также в [5] и [6] указанные инварианты нашли приложение к различным вопросам качественной теории дифференциальных уравнений. В настоящей работе эти инварианты применяются к некоторым вопросам четности функций двух переменных.

Под четной (нечетной) функцией двух переменных здесь понимается функция, для которой существует ось симметрии (антисимметрии), то есть такая прямая, которая проходит через начало координат так, что в симметричных относительно этой прямой точках функция принимает одинаковые (противоположные по знаку) значения. Нами получены необходимые и достаточные условия четности и нечетности рациональной функции (теоремы 1 и 2). Найдено число осей симметрии и антисимметрии (теоремы 3 и 4) и составлены уравнения для определения этих осей. В заключение приведены примеры.

1. Определение и условия симметрии и антисимметрии функции относительно оси OX. Функцию $f(M)=f(x, y)$, определенную в некоторой области G плоскости XOY, назовем четной (нечетной), если в XOY существует проходящая через начало координат прямая H такая, что если точка $M \in G$, а M' — симметричная ей точка относительно H, то $f(M')=f(M)$ $(f(M')=-f(M))$. В этом случае прямую H назовем осью симметрии (антисимметрии) функции $f(M)$.

Здесь мы ограничимся вопросом нахождения условий четности (нечетности), а также осей симметрии (антисимметрии) функции $f(x, y)$, заданной равенством

$$f(x, y)=Q(x, y)/P(x, y), \tag{1}$$

где

$$Q(x, y)=\sum_{j+l=0}^{n} c_{jl} x^j y^l, \quad P=\sum_{j+l=0}^{n} b_{jl} x^j y^l, \tag{2}$$

c_{jl} и b_{jl} — действительные числа, индексы принимают лишь целые неотрицательные значения; а x и y — действительные переменные, причем $P(x, y) \neq 0$.

Обозначим $w=x+iy$, $v_{jl}=c_{jl}+ib_{jl}$ и введем в рассмотрение функцию

$$\left.\begin{aligned} F(w) &\equiv Q+iP\equiv \sum_{j+l=0}^{n} v_{jl} x^j y^l \equiv \\ &\equiv \sum_{j+l=0}^{n} 2^{-j-l} i^l v_{jl} (\overline{w}+w)^j (\overline{w}-w)^l \equiv \sum_{j+l=0}^{n} 2^{-j-l} z_{jl} \overline{w}^j w^l. \end{aligned}\right\} \tag{3}$$

Согласно (3) каждой функции вида (1) будет соответствовать некоторая совокупность чисел z_{jl}, которую мы будем рассматривать как точку z комплексного векторного пространства Z. Условимся обозначать через $\bar{z}$ вектор пространства Z с координатами $\bar{z}_{jl}$, а через $\tilde{z}$ — вектор с координатами z_{lj}. Из того, что $P(x, y) \not\equiv 0$ следует, что $z \neq 0$.

Функцию (1) назовем **несократимой**, если в ней $Q(x, y)$ и $P(x, y)$ являются взаимно простыми многочленами, или, что то же, функция $F(w)$ является многочленом от $\bar{w}$ и w, не имеющим действительных множителей ненулевой степени.

Найдем теперь условия, при которых ось OX является осью симметрии (антисимметрии) функции $f(x, y)$. А именно, покажем, что имеет место

Лемма 1. *Для того, чтобы ось OX была осью симметрии (антисимметрии) функции* (1), *достаточно, а в случае ее несократимости и необходимо, чтобы имело место условие*

$$\tilde{z} = z \qquad (\tilde{z} = \pm z). \tag{4}$$

Доказательство. Согласно определению, для симметрии (антисимметрии) функции (1) относительно оси OX необходимо и достаточно, чтобы имело место тождество

$$f(x, -y) \equiv f(x, y) \qquad \big(f(x, -y) \equiv -f(x, y)\big). \tag{5}$$

Допустим теперь, что условие (4) выполнено. Тогда $z_{jl} = z_{lj}$ $(z_{jl} = \pm \bar{z}_{jl})$ и

$$F(\bar{w}) \equiv F(w) \qquad \big(F(\bar{w}) \equiv \pm\overline{F(w)}\big).$$

Отсюда

$$Q(x, -y) + iP(x, -y) \equiv Q(x, y) + iP(x, y)$$

$$\big(Q(x, -y) + iP(x, -y) \equiv \pm Q(x, y) \mp iP(x, y)\big)$$

и имеет место условие (5). Таким образом, доказана достаточность условия (4) для того, чтобы ось OX была осью симметрии (антисимметрии) функции (1).

Предположим теперь, что функция (1) несократима и выполнено условие (5). Тогда

$$Q(x, -y)\,P(x, y) \equiv P(x, -y)\,Q(x, y)$$

$$\big(Q(x, -y)\,P(x, y) \equiv -P(x, -y)\,Q(x, y)\big).$$

Так как P и Q являются взаимно простыми многочленами, то отсюда вытекает существование такого действительного числа $k \neq 0$, что

$$P(x, -y) \equiv kP(x, y), \quad Q(x, -y) \equiv kQ(x, y)$$

$$\big(P(x, -y) \equiv kP(x, y), \quad Q(x, -y) \equiv -kQ(x, y)\big).$$

При этом

$$F(\bar{w}) \equiv kF(w) \qquad \big(F(\bar{w}) \equiv k\overline{F(w)}\big),$$

откуда $\tilde{z} \equiv kz$ $(\tilde{z} = kz)$. Тогда $z = k\tilde{z}$ $(z = k\tilde{z})$ и, следовательно, $z = k^2 z$. Так как $z \neq 0$, отсюда вытекает, что $k^2 = 1$, а $k = \pm 1$. Итак, $\tilde{z} = \pm z$ $(\tilde{z} = \pm z)$.

Остается заметить, что $\tilde{z} \neq -z$. Действительно, если $\tilde{z} = -z$, то

$$F(w) = \sum_{j=0}^{n} \sum_{l=0}^{\left[\frac{j-1}{2}\right]} z_{j-l,\,l}\, \bar{w}^l w^l (\bar{w}^{j-2l} - w^{j-2l}). \tag{6}$$

Функция (6) имеет действительный множитель $(\bar{w} - w)/2i$. При этом функция (1) не может быть несократимой. Лемма доказана.

Условия $\bar{z} = z$ и $\bar{z} = -z$, очевидно, не могут иметь место одновременно, так как $z \neq 0$.

2. **Условия четности и нечетности.** Произведем поворот координатных осей в плоскости XOY на угол φ $(0 \leqslant \varphi < 2\pi)$ по формуле

$$w = w_1 e^{i\varphi}, \tag{7}$$

где $w_1 = x_1 + iy_1$. Тогда в силу (3)

$$F(w) = \sum_{j+l=0}^{n} 2^{-j-l} z_{jl}(\varphi)\, \bar{w}_1^j w_1^l,$$

где

$$z_{jl}(\varphi) = e^{(l-j)i\varphi} z_{jl} \qquad (j + l = 0, 1, \ldots, n). \tag{8}$$

Формулы (8) определяют некоторое преобразование V_φ пространства Z в себя. Группу всех этих преобразований при $\varphi \in [0, 2\pi]$ обозначим через V.

Как видно из формул (8), **характеристические показатели** $l - j$ группы V на единицу больше соответствующих характеристических показателей группы U, рассмотренной в качестве приложения в [1] и [2].

Если $g \in Z$, то обозначим через $Z(g)$ множество точек с координатами z_{jl}, где j и l пробегают лишь такие целые неотрицательные значения, что $0 \leqslant j + l \leqslant n$ и $g_{jl} \neq 0$. Как видно из формул (8), каждое такое множество $Z(g)$ можно рассматривать как инвариантное относительно группы V подпространство пространства Z. В связи с этим имеет смысл говорить о преобразованиях V_φ и их инвариантах на подпространстве $Z(g)$. Обозначим через $V(g)$ группу преобразований, индуцированных преобразованиями группы V на $Z(g)$, а через $|V(g)|$ — наибольший общий делитель характеристических показателей группы $V(g)$, который мы будем называть **характеристическим числом** этой группы.

Поскольку очевидно, что

$$\widetilde{V_\varphi z} = V_{-\varphi}\tilde{z} \quad \text{и} \quad \overline{V_\varphi z} = V_{-\varphi}\bar{z},$$

на основании леммы 1 легко получить условия того, чтобы новая ось абсцисс OX_1 была осью симметрии (антисимметрии) функции (1), а именно:

Лемма 2. *Для того, чтобы прямая* $x \sin\varphi - y\cos\varphi = 0$ *была осью симметрии (антисимметрии) функции* (1), *достаточно, а при ее несократимости и необходимо выполнение условия*

$$V_{-\varphi}\tilde{z} = V_{\varphi} z \qquad (V_{-\varphi}\bar{z} = \pm V_{\varphi} z).$$

Заметим еще, что при одном и том же φ условия

$$V_{-\varphi}\bar{z} = V_{\varphi} z \text{ и } V_{-\varphi}\bar{z} = -V_{\varphi} z \tag{9}$$

выполняться одновременно не могут, так как в противном случае было бы $V_{\varphi} z = 0$, то есть $z = 0$.

Обозначая через П произвольное числовое поле, сформулируем и докажем две теоремы, характеризующие соответственно условия четности и условия нечетности функции (1).

Теорема 1. *Для четности функции* (1) *достаточно, а при ее несократимости и необходимо выполнение условия*

$$J(\tilde{z}) = J(z) \tag{10}$$

для всех алгебраических инвариантов J группы V над П *или, что то же, для некоторой полной системы алгебраических инвариантов группы V.*

Теорема 2. *Для нечетности функции* (1) *достаточно, а при ее несократимости и необходимо, чтобы хотя бы одно из условий*

$$J(\bar{z}) = J(z), \tag{11}$$

$$J(\bar{z}) = J(-z) \tag{12}$$

выполнялось одновременно для всех алгебраических инвариантов J группы V над П или, что то же, для некоторой полной системы алгебраических инвариантов группы V.

Доказательство теоремы 1. Четность функции (1) равносильна существованию у этой функции оси симметрии, для чего на основании леммы 2 достаточна, а в случае несократимости функции (1) и необходима разрешимость уравнения

$$V_{-\varphi}\tilde{z} = V_{\varphi} z \tag{13}$$

относительно φ. В последнем случае отсюда сразу и вытекает необходимость выполнения условия (10).

Здесь и всюду в дальнейшем, где говорится о выполнении условия (10), (11) или (12), всегда подразумевается его выполнение для всех алгебраических инвариантов J группы V над П или, что то же, для некоторой полной системы алгебраических инвариантов группы V.

Допустим теперь, что условие (10) выполнено. Тогда уравнение (13) относительно φ, которое можно переписать в виде $\tilde{z} = V_{2\varphi} z$, имеет решение. Последнее вытекает из того, что алгебраические инварианты группы преобразований $V_{2\varphi}$ совпадают с алгебраическими инвариантами группы V и из полноты системы всех этих инвариантов.

Теорема 2 доказывается аналогично.

В [2] приведена простая полная система алгебраических инвариантов, состоящая из конечного числа инвариантов. Ее как раз удобно использовать при написании условий (10), (11) и (12).

3. Оси симметрии и антисимметрии. Следующие две теоремы устанавливают соответственно число осей симметрии и число осей антисимметрии несократимой функции (1).

Теорема 3. *Если выполнено условие* (10), *число осей симметрии несократимой функции* (1) *равно характеристическому числу* $[V(z)]$ *группы* $V(z)$.

Теорема 4. *Число осей антисимметрии несократимой функции* (1) *равно* $[V(z)]$, *если выполнено одно из условий* (11) *и* (12), *и равно* $2[V(z)]$, *если выполнены оба эти условия.*

Доказательство теоремы 3. Пусть функция (1) несократима. Тогда на основании леммы 2 все ее оси симметрии определяются из уравнения (13).

Допустим теперь, что выполнено условие (10) и рассмотрим сначала случай, когда $[V(z)] = \infty$, то есть когда отличны от нуля лишь координаты вектора z вида z_{jj} (которым соответствуют равные нулю характеристические показатели). В этом случае уравнение (13) удовлетворяется при любом φ и, следовательно, осями симметрии будут все прямые, проходящие через начало координат.

Предположим теперь, что условие (10) выполнено, а $[V(z)] < \infty$. Тогда найдутся такие целые числа ν_{jl}, что

$$\sum_{\substack{0 \leqslant j+l \leqslant n,\\ z_{jl} \neq 0}} (l-j)\,\nu_{jl} = [V(z)]. \tag{14}$$

При этом уравнение (13) эквивалентно уравнению

$$\prod_{\substack{0 \leqslant j+l \leqslant n\\ z_{jl} \neq 0}} z_{lj}^{\nu_{jl}} = e^{2[V(z)]i\varphi} \prod_{\substack{0 \leqslant j+l \leqslant n\\ z_{jl} \neq 0}} z_{jl}^{\nu_{jl}}. \tag{15}$$

Действительно, если некоторое число φ удовлетворяет уравнению (13), то есть $\tilde{z} = V_{2\varphi} z$, то согласно (8)

$$z_{lj} = e^{2(l-j)i\varphi} z_{jl}.$$

Возводя обе части этого равенства в степень ν_{jl} и составляя произведения по всем j и l таким, что $0 \leqslant j+l \leqslant n$ и $z_{jl} \neq 0$, получаем с учетом (14), что φ удовлетворяет уравнению (15).

Допустим теперь, что некоторое число φ удовлетворяет уравнению (15). Тогда

$$\left(\prod_{\substack{0 \leqslant j+l \leqslant n\\ z_{jl} \neq 0}} z_{lj}^{\nu_{jl}}\right)^{\frac{q-p}{[V(z)]}} = e^{2(q-p)i\varphi} \left(\prod_{\substack{0 \leqslant j+l \leqslant n\\ z_{jl} \neq 0}} z_{jl}^{\nu_{jl}}\right)^{\frac{q-p}{[V(z)]}}. \tag{16}$$

Но из (8) и (14) видно, что выражение

$$z_{pq}\left(\prod_{\substack{0 \leqslant j+l \leqslant n\\ z_{jl} \neq 0}} z_{jl}^{\nu_{jl}}\right)^{\frac{p-q}{[V(z)]}}$$

является инвариантом группы V. Поскольку этот инвариант с учетом равенства $z_{rs}^{-1} = \bar{z}_{rs}/(z_{rs}\bar{z}_{rs})$ легко выразить через алгебраические инварианты, для которых выполнено условие (10), то из (16) вытекает, что

$$z_{qp} = e^{2(q-p)i\varphi} z_{pq},$$

то есть φ удовлетворяет уравнению (13).

Таким образом, доказана эквивалентность уравнений (13) и (15). Последнее как раз имеет $|V(z)|$ решений в $[0, \pi]$, которыми и определяются различные оси симметрии функции (1). Теорема 3 доказана.

Теорема 4 доказывается аналогично. При этом в случае $|V(z)| = \infty$ нужно учесть, что z_{jj} являются инвариантами группы V и поэтому при выполнении условия (11) $\bar{z}_{jj} = z_{jj}$, а при выполнении условия (12) $\bar{z}_{jj} = -z_{jj}$. В случае $|V(z)| < \infty$, если выполнено условие (11), то оси антисимметрии определяются из уравнения

$$\prod_{\substack{0<j+l<n \\ z_{jl}\neq 0}} \bar{z}_{jl}^{\nu_{jl}} = e^{2[V(z)]i\varphi} \prod_{\substack{0<j+l<n \\ z_{jl}\neq 0}} z_{jl}^{\nu_{jl}}, \tag{17}$$

а если выполнено условие (12), то из уравнения

$$\prod_{\substack{0<j+l<n \\ z_{jl}\neq 0}} \bar{z}_{jl}^{\nu_{jl}} = e^{2[V(z)]i\varphi} \prod_{\substack{0<j+l<n \\ z_{jl}\neq 0}} (-z_{jl})^{\nu_{jl}}, \tag{18}$$

получающегося из (17) заменой в его правой части z_{jl} на $-z_{jl}$. Если же выполнены оба условия (11) и (12), то оси симметрии определяются как из уравнения (17), так и из уравнения (18), причем эти уравнения не имеют общих решений, поскольку, как уже было отмечено, уравнения (9) не могут иметь общих решений.

Из теорем 3 и 4 вытекает

Следствие 1. *Число N_1 (N_2) осей симметрии (антисимметрии) функции (1) либо равно бесконечности, либо $N_1 \leqslant n$ ($N_2 \leqslant 2n$).*

Для доказательства этого предложения следует, во-первых, заметить, что $|l-j| \leqslant n$ при $0 \leqslant j+l \leqslant n$, и поэтому либо $|V(z)| = \infty$, либо $[V(z)] \leqslant n$. Во-вторых, нужно учесть, что при сокращении числителя и знаменателя функции (1) на возможный общий множитель число осей симметрии (антисимметрии) не может уменьшиться.

4. Примеры. Рассмотрим функцию

$$f(x, y) = \frac{c_{00} + c_{10}x + c_{01}y}{b_{00} + b_{10}x + b_{01}y} \tag{19}$$

при

$$b_{00}^2 + b_{10}^2 + b_{01}^2 \neq 0. \tag{20}$$

В данном случае координатам z_{00}, z_{10} и z_{01} вектора z соответствуют координаты 0, -1 и 1 характеристического вектора, и поэтому полную систему алгебраических инвариантов группы V образуют следующие четыре инварианта [2]:

$$z_{00},\ z_{10}\bar{z}_{10},\ z_{01}\bar{z}_{01},\ z_{10}z_{01}.$$

Условия четности (10) сводятся к равенству

$$z_{10}\bar{z}_{10} = z_{01}\bar{z}_{01}, \tag{21}$$

а условия нечетности (11) и (12) принимают соответственно вид

$$z_{00} = \bar{z}_{00}, \quad z_{10}z_{01} = \bar{z}_{10}\bar{z}_{01} \tag{22}$$

и

$$z_{00} = -\bar{z}_{00}, \quad z_{10}z_{01} = \bar{z}_{10}\bar{z}_{01}. \tag{23}$$

Так как

$$z_{10}\bar{z}_{10} - z_{01}\bar{z}_{01} = -4\begin{vmatrix} c_{10} & c_{01} \\ b_{10} & b_{01}\end{vmatrix},$$

а

$$z_{10}z_{01} - \bar{z}_{10}\bar{z}_{01} = 4i(c_{10}b_{10} + c_{01}b_{01}),$$

условие (21) перепишется в виде

$$\begin{vmatrix} c_{10} & c_{01} \\ b_{10} & b_{01}\end{vmatrix} = 0, \tag{24}$$

а соотношения (22) и (23) примут соответственно вид $b_{00} = 0$, $c_{10}b_{10} + c_{01}b_{01} = 0$ и $c_{00} = 0$, $c_{10}b_{10} + c_{01}b_{01} = 0$. Учитывая это и тот факт, что функция (19) с условием (20) сократима тогда и только тогда, когда $b_{10}^2 + b_{01}^2 \neq 0$, а $\operatorname{rang}\begin{pmatrix} c_{00} & c_{10} & c_{01} \\ b_{00} & b_{10} & b_{01}\end{pmatrix} = 1$, легко прийти к выводу, что для четности функции (19) не только достаточно, но и необходимо выполнение условия (24), а для ее нечетности — выполнение соотношений

$$b_{00}c_{00} = c_{10}b_{10} + c_{01}b_{01} = 0. \tag{25}$$

К тем же результатам легко прийти в данном случае из геометрических соображений, рассматривая линии уровня нуля

$$c_{00} + c_{10}x + c_{01}y = 0 \tag{26}$$

и бесконечности

$$b_{00} + b_{10}x + b_{01}y = 0, \tag{27}$$

а также знаки функции (19) и учитывая, что ось симметрии (антисимметрии) должна либо совпадать с прямой (26), либо быть перпендикулярной ей, а также либо совпадать с прямой (27), либо быть перпендикулярной ей. Условие (24) представляет собой как раз условие параллельности прямых (26) и (27), а соотношения (25) эквивалентны условиям перпендикулярности этих прямых, с учетом того, что хотя бы одна из них должна проходить через начало координат.

Предполагая условия (24) или (25) выполненными и пользуясь уравнениями (15) и соответственно (17) и (18), легко выписать и уравнения осей симметрии и антисимметрии функции (19).

Так, например, функция

$$f(x, y) = c_{00}/(b_{10}x + b_{01}y) \qquad (c_{00} \neq 0, \quad b_{10}^2 + b_{01}^2 \neq 0)$$

является и четной и нечетной, а ее осями симметрии и антисимметрии являются соответственно прямые

$$b_{01}x - b_{10}y = 0 \quad \text{и} \quad b_{10}x + b_{01}y = 0.$$

Функция

$$f(x,\ y)=\alpha\,(b_{01}x-b_{10}y)/(b_{10}x+b_{01}y)\quad (\alpha\neq 0,\ b_{10}^2+b_{01}^2\neq 0)$$

имеет две оси антисимметрии $b_{01}x-b_{10}y=0$ и $b_{10}x+b_{01}y=0$ и не имеет осей симметрии.

Пример четной функции

$$\frac{x^3-3xy^2+x^3y-3xy^3+x^3y^2-3xy^4}{1+y+y^2}$$

(с осью симметрии OX), для которой условие (10) не выполнено (например, $z_{10}^4 z_{04}\neq z_{01}^4 z_{40}$), показывает, что несократимость функции в теореме 1 играет существенную роль.

Примеры функций $f(x,\ y)=1/\operatorname{Im}w^n$, имеющей n осей симметрии, и $f(x,\ y)=\operatorname{Re}w^n/\operatorname{Im}w^n$, имеющей $2n$ осей антисимметрии, показывают, что оценки, установленные в следствии 1, точны при любом натуральном n.

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

1. К. С. Сибирский, Инварианты линейных представлений группы вращений плоскости и проблема центра, ДАН СССР, т. 151, № 3 (1963), 497—500.
2. К. С. Сибирский, Инварианты линейных представлений групп преобразований фазовой плоскости и их приложения в качественной теории дифференциальных уравнений. Тезисы докладов на Всесоюзном симпозиуме по качественной теории дифференциальных уравнений и ее применениям, Самарканд (1964), 64—65.
3. Г. Б. Гуревич, Основы теории алгебраических инвариантов, М.—Л., ГИТТЛ, 1948.
4. Г. Вейль, Классические группы, их инварианты и представления, М., ИЛ, 1947.
5. К. С. Сибирский, Решение проблемы центра для дифференциального уравнения $\dfrac{dy}{dx}=-\dfrac{c_{10}x+c_{01}y+c_{20}x^2+c_{11}xy+c_{02}y^2}{b_{10}x+b_{01}y+b_{20}x^2+b_{11}xy+b_{02}y^2}$, Известия АН МССР, № 11 (1963), 86—91.
6. К. С. Сибирский, О числе предельных циклов, рождающихся из особой точки типа фокуса или центра, ДАН СССР, т. 161, № 2 (1965), 304—307.

КРАТКИЕ СООБЩЕНИЯ

Н. Р. БЕРМАН

ОБ ОДНОЙ ЗАДАЧЕ ТИПА СТЕФАНА

Рассмотрим квазистационарную задачу типа Стефана для движущегося тонкого стержня в приближении безградиентного течения жидкости. При этом тонкость стержня понимается в том смысле, что радиальным распределением температуры можно пренебречь. Кроме того, предполагается, что эффекты, связанные с изменением объема на границе фазового перехода, малы и их можно не учитывать. В таком случае задача формулируется в виде двух уравнений:

$$\begin{gathered}\frac{d^2\Theta_1}{dx^2}-\frac{v}{a_1}\frac{d\Theta_1}{dx}-s_1^2\Theta_1=0,\\ (0\leqslant x<l)\\ \frac{d^2\Theta_2}{dx^2}-\frac{v}{a_2}\frac{d\Theta_2}{dx}-s_2^2\Theta_2=0,\\ (l\leqslant x<\infty)\end{gathered}\tag{1}$$

которые надо интегрировать в следующих граничных условиях:

$$\begin{gathered}\Theta_1\Big|_{x=0}=\Theta_{\text{к}},\ \Theta_1\Big|_{x=l}=\Theta_2\Big|_{x=l}=\Theta_{\text{пл}}\\ \left[\lambda_1\frac{d\Theta_1}{dx}-\lambda_2\frac{d\Theta_2}{dx}\right]_{x=l}=\rho_1 v\gamma,\ \Theta_2\Big|_{x\to\infty}\to 0.\end{gathered}\tag{2}$$

Последний член в уравнениях (1), имеющий смысл отрицательного теплового источника, учитывает теплоотдачу с боковой поверхности стержня во внешнюю среду. Величина s_l отражает геометрию стержня и, в частности, для стержня цилиндрической формы она имеет вид

$$s_l^2=\frac{2\alpha_l}{\lambda_l R}.$$

Здесь λ, ρ, α — коэффициенты теплопроводности, удельный вес и коэффициент теплоотдачи соответственно, $a=\dfrac{\lambda}{c\rho}$ — температуропроводность, c — удельная теплоемкость, v — скорость движения стержня, R — его радиус, γ — удельная теплота плавления (затвердевания), $\Theta_{\text{пл}}$ — температура плавления, $\Theta_{\text{к}}$ — температура верхней границы стержня (температура капли), Θ_l и l — искомые распределение температур и координата изотермической границы фазового перехода, а нижний индекс

($i=1$, 2) относит соответствующие величины к жидкой или твердой областям стержня. За начало отсчета температур принята температура среды.

Решая задачу (1) — (2), получаем искомое распределение температур в виде:

$$\Theta_1 = \frac{\rho_1 v \gamma - (\lambda_1 k_2 - \lambda_2 k_3)\,\theta_{к} \exp k_2 l}{(\lambda_1 k_1 - \lambda_2 k_3) \exp k_1 l - (\lambda_1 k_2 - \lambda_2 k_3) \exp k_2 l} \exp k_1 x + \tag{3}$$
$$+ \frac{(\lambda_1 k_1 - \lambda_2 k_3)\,\theta_{к} \exp k_1 l - \rho_1 v \lambda}{(\lambda_1 k_1 - \lambda_2 k_3) \exp k_1 l - (\lambda_1 k_2 - \lambda_2 k_3) \exp k_2 l} \exp k_2 x,$$

$$\Theta_2 = \frac{\lambda_1 g \Theta_{к} (\operatorname{cth} g l - 1) \exp k_1 l + \rho_1 v \gamma}{\lambda_1 \left(g \operatorname{cth} gl + \dfrac{v}{2a_1}\right) - \lambda_2 k_3} \exp k_3 (x - l), \tag{4}$$

где

$$k_1 = \frac{v}{2a_1} + g,\; k_2 = \frac{v}{2a_1} - g,$$
$$g = \left(\frac{v^2}{4a_1^2} + s_1^2\right)^{1/2},\; k_3 = \frac{v}{2a_2} - \left(\frac{v^2}{4a_2^2} + s_2^2\right)^{1/2}.$$

В соответствии со вторым из граничных условий (2) для определения координаты фронта фазового перехода получаем уравнение:

$$\frac{(\lambda_1 k_1 - \lambda_2 k_3)\,\Theta_{пл} - \rho_1 v \gamma}{\rho_1 v \lambda - (\lambda_1 k_2 - \lambda_2 k_3)\,\Theta_{пл}} \exp 2\,gl - \frac{2\lambda_1 g \Theta_{к} \exp k_1 l}{\rho_1 v \lambda - (\lambda_1 k_2 - \lambda_2 k_3)\,\Theta_{пл}} + 1 = 0. \tag{5}$$

Прежде чем перейти к решению уравнения (5), разберем вопрос о числе его корней. При выполнении условия

$$2\lambda_1 g \theta_{пл} > \rho_1 v \gamma - (\lambda_1 k_2 - \lambda_2 k_3)\,\theta_{пл} \tag{6}$$

уравнение (5), вообще говоря, может иметь два корня. Нетрудно показать, что в этом случае хотя бы один корень будет положительным. Корни уравнений (5) являются точками пересечения графиков функций:

$$y_1(l) = (\lambda_1 k_2 - \lambda_2 k_3)\,\theta_{пл} - \rho_1 v \gamma,$$
$$y_2(l) = [(\lambda_1 k_1 - \lambda_2 k_3)\,\theta_{пл} - \rho_1 v \gamma] \exp 2\,gl - \tag{7}$$
$$- 2\lambda_1 g \theta_k \exp k_1 l.$$

Легко видеть, что при $y_2(0) < y_1$ один корень уравнения (5) обязательно будет отрицательным. Последнее условие приводит к неравенству

$$2\lambda_1 g (\theta_{пл} - \theta_{к}) < 0, \tag{8}$$

которое удовлетворяется во всех случаях, имеющих физический смысл. Из (8) следует, что при перемене знака неравенства (6) уравнение (5) вообще не имеет положительных корней и задача, следовательно, лишается какого-либо физического содержания.

Трансцендентное уравнение (5) не может быть решено точно; однако, как показывают вычисления, на практике можно ограничиться первым приближением для его решения. Пренебрегая в (5) единицей по сравнению с другими слагаемыми, находим:

$$l = \frac{1}{g - \dfrac{v}{2a_1}} \ln \frac{2\lambda_1 g \theta_{к}}{(\lambda_1 k_1 - \lambda_2 k_3)\,\theta_{пл} - \rho_1 v \gamma}. \tag{9}$$

Формула (9) является приближенной во всей области изменения v. Уравнение (5) при $v = 0$ дает

$$l = \frac{1}{s_1} \ln \left[\frac{\lambda_1 s_1 \theta_{к}}{(\lambda_1 s_1 + \lambda_2 s_2)\,\theta_{пл}} \left(1 + \sqrt{1 - \frac{\theta_{пл}^2}{\theta_{к}^2} \cdot \frac{\lambda_1^2 s_1^2 - \lambda_2^2 s_2^2}{\lambda_1^2 s_1^2}}\right)\right]. \tag{10}$$

Формула (9) дает несколько завышенные значения для l. При $v=0$ ее максимальная погрешность равна $\ln 2/s_1$. Из (9) и (10) видно, что положение изотермической границы фазового перехода не сильно зависит от тепловых свойств твердого тела.

Переходя к определению условий, при которых в некоторой точке внутри $(0, l)$ вектор теплового потока обращается в нуль, мы должны сделать заключение о знаках предэкспоненциальных множителей в (3). Для этого прежде всего заметим, что в силу положительности температуры оба они (A и B) не могут быть одновременно отрицательными. Кроме того, коэффициент при убывающей экспоненте (B) должен быть существенно положительным. В противном случае температура была бы возрастающей функцией координаты, что противоречит второму началу термодинамики.

Требование положительности первого коэффициента приводит к неравенству

$$\rho_1 v \gamma > (\lambda_1 k_2 - \lambda_2 k_3)\,\theta_{к} \exp k_2 l, \tag{11}$$

решение которого в замкнутой форме получить не удается. Однако, считая (11) выполненным, обратимся к условию

$$0 < x_{\min} = \frac{1}{2g} \ln\left(\frac{B k_2}{A k_1}\right) < l. \tag{12}$$

Если функция (3) имеет минимум, то всегда $x_{\min} > 0$. Действительно, в противном случае температура внутри $(0, l)$ могла бы стать больше $\theta_{к}$, что невозможно. Правая сторона (12) с учетом (5) запишется так:

$$\left[-\frac{k_2}{k_1} \frac{\theta_{к} \exp k_1 l - \theta_{пл}}{\theta_{пл} - \theta_{к} \exp k_2 l}\right]^{-k_l} < \left[\frac{2\lambda_1 g \theta_k}{(\lambda_1 k_1 - \lambda_2 k_3)\,\theta_{пл} - \rho_1 v \gamma}\right]^{2g}. \tag{13}$$

Так как во всех интересных случаях $\theta_{пл} << \theta_{к} \exp k_1 l$, то в числителе левой части (13) $\theta_{пл}$ можно пренебречь по сравнению с другим членом, что только усилит неравенство. Используя (9), получаем:

$$v > a_2 s_2 \sqrt{\frac{c_2 \rho_2 \theta_{пл}}{\rho_1 \gamma \left(1 + \dfrac{\rho_1 \gamma}{c_2 \rho_2 \theta_{пл}}\right)}}. \tag{14}$$

Покажем теперь, что условия (14) достаточно для выполнения неравенства (11). Действительно, последнее с учетом (5) примет вид

$$\theta_{\text{пл}} > \theta_{\text{к}} \exp k_2 l \tag{15}$$

или, используя (9),

$$\lambda_1 k_2 \theta_{\text{пл}} < \lambda_2 k_3 \theta_{\text{пл}} + \rho_1 v \gamma. \tag{16}$$

В (16) $\lambda_1 k_2 \theta_{\text{пл}} < 0$; поэтому, заменив $\lambda_1 k_2 \theta_{\text{пл}}$ нулем, мы только усилим неравенство. А из

$$\lambda_2 k_3 \theta_{\text{пл}} + \rho_1 v \gamma > 0 \tag{17}$$

следует (14). Таким образом, условие (14) является необходимым и достаточным для существования температурного минимума в $(0, l)$. Формула (14) является обобщением соответствующих формул, полученных в [1, 2] на случай кусочно-постоянных термических коэффициентов.

Из формулы (14) следует, что возможность эффекта переохлаждения определяется главным образом тепловыми характеристиками затвердевшей области ($v \sim \lambda_2^{1/2}$). Этот результат вполне очевиден и из простых физических соображений. Действительно, вследствие движения стержня тепло, выделяющееся при фазовом переходе, рассеивается в окружающую среду твердым телом, причем между средой и телом устанавливается динамическое равновесие. Однако при определенных скоростях среда уже не в состоянии принять все предлагаемое ей тепло (теплота от фазового перехода пропорциональна v, в то время как теплоотдача в среду либо постоянна, либо пропорциональна $v^{1/2}$). Тогда в силу конечности коэффициента теплопроводности твердая фаза начинает служить своего рода «запирающим слоем». Вследствие этого избыток выделившегося при фазовом переходе тепла поступает обратно в жидкость и разогревает ее вблизи фронта кристаллизации. Грубо говоря, переохлаждение наступает тогда, когда разность между тепловым потоком в твердую фазу вблизи фронта кристаллизации и теплотой фазового перехода становится отрицательной, т. е.

$$-\lambda_2 \frac{d\theta_2}{dx}\bigg|_{x=l} - \rho_1 v \gamma < 0,$$

что совпадает с (17).

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

1. Г. А. Остроумов, К теории тепловых процессов при жидком волочении проволоки в стационарном режиме, ЖТФ, XXIX, 2, 1959.

2. Н. Р. Берман, Е. М. Лыско, Охлаждение тонкого движущегося стержня при его затвердевании. Труды III конференции молодых ученых МССР, Кишинев, «Картя Молдовеняскэ», 1965.

Известия Академии наук Молдавской ССР, № 4, 1966

В. М. БРОДСКИЙ

ОБ ИНТЕГРАЛЕ ПО ЦЕПОЧКЕ ОРТОПРОЕКТОРОВ*)

В теории несамосопряженных операторов большую роль играют интегралы по цепочке $\mathscr{P}$ ортопроекторов [1, 2]. В частности, в работах [3, 4] показана сходимость по норме S_p $(p > 1)$ интегралов

$$\int_{\mathscr{P}} P X d P, \qquad \int_{\mathscr{P}} (I - P X P)^{-1} P X d P,$$

где $X \in S_p$.

В настоящей статье доказывается, что если $X \in S_2$ и оператор-функция $G(P)$ сильно непрерывна**), то интеграл

$$\int_{\mathscr{P}} G(P) X d P \tag{1}$$

в том и только в том случае сходится по норме S_2, когда для каждого разрыва (P_j^-, P_j^+) цепочки P

$$\left(G(P_j^+) - G(P_j^-)\right) X (P_j^+ - P_j^-) = 0, \ (j = 1, 2, \ldots) \tag{2}$$

При $X \in S_p$ $(p > 2)$ условия (2), вообще говоря, не обеспечивают сходимости интеграла (1) даже в слабом смысле.

Теорема 1. *Пусть H_1 и H_2 — сепарабельные гильбертовы пространства, $\mathscr{P}$ — непрерывная максимальная цепочка в H_1, $F(P)$ $(P \in \mathscr{P})$ и $G(P)$ $(P \in \mathscr{P})$ сильно непрерывные функции, значениями которых являются линейные ограниченные операторы, действующие соответственно в H_1 и H_2, X — оператор класса S_2, действующий из H_1 в H_2. Если функция $F(P)$ не убывает и удовлетворяет условиям $F(0) = 0$, $F(I) = I$, то интеграл*

$$\int_{\mathscr{P}} G(P) X d F(P) \qquad (X \in S_2) \tag{3}$$

сходится в смысле С. О. Шатуновского по норме S_2. Кроме того, имеет место оценка

$$\left\| \int_{\mathscr{P}} G(P) X d F(P) \right\|_2 \leqslant \sup_{P \in \mathscr{P}} \| G(P) \| \, \| X \|_2 . \tag{4}$$

---

*) Здесь использована терминология статьи [4].

**) Сильная непрерывность означает, что если P_n сильно сходится к P, то $G(P_n)$ сильно сходится к $G(P)$.

Доказательство 1. Предварительно рассмотрим интеграл

$$\int\limits_{\mathcal{P}} G(P)\, X\, d\, P, \tag{5}$$

где X — конечномерный оператор. Без ограничения общности можно считать, что X — одномерный оператор вида

$$X h = (h, f)\, g \qquad (\| f \| = \| g \| = 1).$$

Для данного $\varepsilon > 0$ существует такое разбиение

$$0 = P_0 < P_1 < \ldots < P_m = I \tag{6}$$

цепочки $\mathcal{P}$, что для любого его продолжения

$$0 = P'_0 < P'_1 < \ldots < P'_n = I \tag{7}$$

выполняются неравенства

$$\| \big(G(P'_j) - G(P'_{j-1})\big) g \| \leqslant \varepsilon \qquad (j = 1, 2, \ldots, n).$$

Для доказательства сходимости в норме S_2 интеграла (5) достаточно показать, что $\| S' - S \|_2 \leqslant \varepsilon$, где S' и S — интегральные суммы интеграла (5), соответствующие разбиениям (6) и (7). Так как

$$S = \sum_{j=1}^{m} G(Q_j)\, \mathbf{X}\, (\mathbf{P}_j - \mathbf{P}_{j-1}) \qquad (\mathbf{P}_{j-1} \leqslant Q_j \leqslant \mathbf{P}_j;\ Q_j \in \mathcal{P}),$$

$$S' = \sum_{j=1}^{n} G(Q'_j)\, \mathbf{X} (\mathbf{P}'_j - \mathbf{P}'_{j-1}) \qquad (\mathbf{P}'_{j-1} \leqslant Q'_j \leqslant \mathbf{P}'_j;\ Q'_j \in \mathcal{P}),$$

то

$$S' - S = \sum_{j=1}^{n} \big(G(Q'_j) - G(Q''_j)\big)\, \mathbf{X}\, (\mathbf{P}'_j - \mathbf{P}'_{j-1}) = \sum_{j=1}^{n} \Delta\, G_j\, \mathbf{X}\, \Delta\, \mathbf{P}'_j$$

$$\big(\Delta\, \mathbf{P}'_j = \mathbf{P}'_j - \mathbf{P}'_{j-1};\ \Delta\, G_j = G(Q'_j) - G(Q''_j)\big),$$

где каждое Q''_j совпадает с одним из Q_j. Обозначим через e_α ($\alpha = 1, 2, \ldots$) какой-либо ортонормированный базис в H_1. Тогда

$$\| S' - S \|_2^2 = \sum_{j=1}^{n} \mathrm{Sp}(\Delta \mathbf{P}'_j \mathbf{X}^* \Delta G_j^* \Delta G_j \mathbf{X}\, \Delta\, \mathbf{P}'_j) = \sum_{j=1}^{n} \sum_{\alpha=1}^{\infty} \| \Delta\, G_j\, \mathbf{X}\, \Delta\, \mathbf{P}'_j e_\alpha \|^2 =$$

$$= \sum_{j=1}^{n} \sum_{\alpha=1}^{\infty} \| (\Delta\, \mathbf{P}'_j e_\alpha, f)\, \Delta\, G_j\, g \|^2 = \sum_{j=1}^{n} \sum_{\alpha=1}^{\infty} |(\Delta\, \mathbf{P}'_j e_\alpha, f)|^2\, \| \Delta\, G_j\, g \|^2 \leqslant$$

$$\leqslant \varepsilon^2 \sum_{j=1}^{n} \sum_{\alpha=1}^{\infty} |(e_\alpha, \Delta\, \mathbf{P}'_j f)|^2 = \varepsilon^2 \sum_{j=1}^{n} \| \Delta\, \mathbf{P}'_j\, f \|^2 = \varepsilon^2.$$

2. Рассмотрим интеграл

$$\int\limits_{\mathcal{P}} G(P)\, X\, d\, P \tag{8}$$

без ограничения на размерность оператора $\mathbf{X}$. Для произвольной интегральной суммы S интеграла (8) будем иметь:

$$\| S \|_2^2 = \sum_{j=1}^{m} \mathrm{Sp}\,(\Delta\, \mathbf{P}_j\, \mathbf{X}^*\, G^*(Q_j)\, G(Q_j)\, \mathbf{X}\, \Delta\, \mathbf{P}_j) \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{j=1}^{m} \| G(Q_j) \|^2\, \mathrm{Sp}\,(\Delta\, \mathbf{P}_j\, \mathbf{X}^*\, \mathbf{X}\, \Delta\, \mathbf{P}_j) \leqslant \sup_{\mathbf{P} \in \mathcal{P}} \| G(\mathbf{P}) \|^2\, \| \mathbf{X} \|_2^2.$$

Таким образом,

$$\| S \|_2 \leqslant \sup_{\mathbf{P} \in \mathcal{P}} \| G(\mathbf{P}) \|\ \| \mathbf{X} \|_2. \tag{9}$$

3. Теперь можно доказать сходимость интеграла (8). Для данного $\varepsilon > 0$ найдется такой конечномерный оператор $\mathbf{X}_0$, что будет иметь место неравенство

$$\| \mathbf{X} - \mathbf{X}_0 \| \leqslant \frac{\varepsilon}{4N}, \qquad (N = \sup_{\mathbf{P} \in \mathcal{P}} \| G(\mathbf{P}) \|).$$

Кроме того, существует такое разбиение цепочки P, что интегральные суммы S и S' интеграла $\int\limits_{\mathcal{P}} G(\mathbf{P})\, \mathbf{X}_0\, d\, \mathbf{P}$, соответствующие этому разбиению и произвольному его продолжению, будут удовлетворять условию

$$\| S' - S \|_2 \leqslant \frac{\varepsilon}{2}.$$

Следовательно, для этих же разбиений

$$\| \sum_{j=1}^{n} G(Q'_j)\, \mathbf{X}\, \Delta\, \mathbf{P}'_j - \sum_{j=1}^{m} G(Q_j)\, \mathbf{X}\, \Delta\, \mathbf{P}_j \|_2 \leqslant \| \sum_{j=1}^{n} G(Q'_j)(\mathbf{X} - \mathbf{X}_0) \Delta \mathbf{P}'_j \|_2 +$$

$$+ \| \sum_{j=1}^{n} G(Q'_j) \mathbf{X}_0 \Delta \mathbf{P}'_j - \sum_{j=1}^{m} G(Q_j)\, \mathbf{X}_0 \Delta \mathbf{P}_j \|_2 + \| \sum_{j=1}^{m} G(Q_j)\, (\mathbf{X}_0 - \mathbf{X})\, \Delta\, \mathbf{P}_j \|_2 \leqslant$$

$$\leqslant 2M\, \| \mathbf{X} - \mathbf{X}_0 \|_2 + \frac{\varepsilon}{2} \leqslant \varepsilon.$$

4. Для доказательства существования интеграла (3) достаточно заметить, что по известной теореме М. А. Наймарка он может быть переписан в виде

$$\int\limits_{\tilde{\mathcal{P}}} G(\tilde{\mathbf{P}})\, \mathbf{X}\, Q\, d\, \tilde{\mathbf{P}},$$

где $\tilde{\mathcal{P}}$ — максимальная непрерывная цепочка ортопроекторов в некотором пространстве $\tilde{H} \supset H_1$, а Q — действующий в $\tilde{H}$ ортопроектор на H_1.

Оценка (4) получается из неравенства (9).

Теорема 2. *Пусть H — сепарабельное гильбертово пространство, $\mathcal{P}$ — максимальная цепочка ортопроекторов в H, $G(P)$ $(\mathrm{P}\in\mathcal{P})$ — сильно непрерывная функция, значения которой являются линейными ограниченными операторами в H, X — оператор класса S_2, действующий в H. Для сходимости интеграла*

$$\int_{\mathcal{P}} G(P)\,X\,d\,P \qquad (10)$$

по норме S_2 в смысле С. О. Шатуновского необходимо и достаточно, чтобы для всех разрывов $(\mathrm{P}_j^-, \mathrm{P}_j^+)$ $(j=1,2,\dots)$ цепочки $\mathcal{P}$ выполнялись равенства

$$\big(G(\mathrm{P}_j^+) - G(\mathrm{P}_j^-)\big)\,\mathrm{X}\,(\mathrm{P}_j^+ - \mathrm{P}_j^-) = 0 \qquad (j=1,2,\dots). \qquad (11)$$

Если интеграл (10) *существует, то*

$$\Big\|\int_{\mathcal{P}} G(P)\,X\,d\,P\Big\|_2 \leqslant \sup_{\mathrm{P}\in\mathcal{P}} \|G(\mathrm{P})\|\,\|\mathrm{X}\|_2. \qquad (12)$$

Доказательство. Если интеграл (10) сходится, то существуют интегралы

$$\int_{\mathrm{P}_j^- < \mathrm{P} < \mathrm{P}_j^+} G(P)\,X\,d\,P, \quad (\mathrm{P}\in\mathcal{P};\ j=1,2,\dots).$$

Каждому из них отвечают только две интегральные суммы

$$G(\mathrm{P}_j^-)\,\mathrm{X}(\mathrm{P}_j^+ - \mathrm{P}_j^-) \quad \text{и} \quad G(\mathrm{P}_j^+)\,\mathrm{X}(\mathrm{P}_j^+ - \mathrm{P}_j^-).$$

Равенство этих сумм эквивалентно условию (11).

Для доказательства достаточности произведем параметризацию цепочки $\mathcal{P}$, что приведет к строго возрастающей функции $\mathrm{P} = \mathrm{P}(t)$ $(t\in M)$, где M — ограниченное замкнутое множество действительных чисел. Введем функции $\tilde{\mathrm{P}}(t)$ и $\tilde G(t)$ $(\alpha = \min M \leqslant t \leqslant \max M = \beta)$, полагая

$$\left.\begin{aligned} \tilde{\mathrm{P}}(t) &= \begin{cases} \mathrm{P}(t); & t\in M \\ \mathrm{P}(a) + \frac{t-a}{b-a}\big(\mathrm{P}(b) - \mathrm{P}(a)\big); & t\in(a,b); \end{cases} \\ \tilde G(t) &= \begin{cases} G(t); & t\in M \\ G(a) + \frac{t-a}{b-a}\big(G(b) - G(a)\big); & t\in(a,b), \end{cases} \end{aligned}\right\} \qquad (13)$$

где (a, b) произвольный смежный интервал множества M. Поскольку функции (13) удовлетворяют условию теоремы 1, то при любом $\mathrm{X}\in\mathrm{S}_2$ интеграл

$$\int_\alpha^\beta \tilde G(t)\,\mathrm{X}\,d\,\tilde{\mathrm{P}}(t) \qquad (14)$$

сходится по норме S_2 в смысле С. О. Шатуновского. Пусть разбиение

$$\alpha = t_0 < t_1 < \dots < t_n = \beta \qquad (15)$$

сегмента $[\alpha, \beta]$ таково, что вместе с каждой точкой, принадлежащей смежному интервалу (a, b) множества M, оно содержит также точки a и b. Построим интегральную сумму

$$\sum_{j=1}^n \tilde G(\xi_j)\,\mathrm{X}\,\Delta\tilde{\mathrm{P}}_j, \quad (t_{j-1}\leqslant \xi_j \leqslant t_j) \qquad (16)$$

интеграла (14), соответствующую разбиению (15), выбирая точки ξ_j так, чтобы они принадлежали множеству M в том случае, когда точки t_{j-1} и t_j не принадлежат одному и тому же смежному интервалу. Достаточно установить, что интегральная сумма (16) является также интегральной суммой интеграла (10). Рассмотрим разбиение

$$a = t_0' < t_1' < \dots < t_m' = b \qquad (17)$$

смежного интервала (a, b), являющееся частью разбиения (15), и пусть в сумму

$$\sum_{j=1}^m \tilde G(\xi_j)\,\mathrm{X}\,\Delta\tilde{\mathrm{P}}_j$$

входят слагаемые, отвечающие разбиению (17) в сумме (16). Пользуясь равенствами (11), получим

$$\sum_{j=1}^m \tilde G(\xi_j)\,\mathrm{X}\,\Delta\tilde{\mathrm{P}}_j = \frac{1}{b-a}\sum_{j=1}^m (t_j' - t_{j-1}')\Big[G(a) + \frac{\xi_j - a}{b-a}\big(G(b) - G(a)\big)\Big]\,\mathrm{X}\big(\mathrm{P}(b) - \mathrm{P}(a)\big) = G(a)\,\mathrm{X}\big(\mathrm{P}(b) - \mathrm{P}(a)\big).$$

Оценка (12) следует из равенства интегралов (10) и (14).

Теорема доказана.

Следующий пример показывает, что если оператор $G(\mathrm{P})$ удовлетворяет условиям теоремы 2, а $\mathrm{X}\in\mathrm{S}_p$ $(p > 2)$, то интеграл

$$\int_{\mathcal{P}} G(P)\,X\,d\,P, \qquad (18)$$

вообще говоря, не является сходящимся даже в слабом смысле*).

Пусть $2 < r < q < p$ $\left(r = \frac{2+p}{2}\right)$ и α_k — такая последовательность положительных чисел, что

$$\sum_{k=1}^\infty \alpha_k^q = \infty, \quad \sum_{k=1}^\infty \alpha_k^p < \infty.$$

Выберем некоторый ортонормированный базис $e_1, e_2, \dots$ пространства H и обозначим через P_k $(k = 1, 2, \dots)$ оператор проектирования на линейную оболочку векторов $e_1, e_2, \dots, e_k$. Введем обозначения

$$g_0 = \beta_1 e_1, \quad g_k = \beta_k e_k + \beta_{k+1} e_{k+1}; \quad (k = 1, 2, \dots;\ \beta_k = \alpha_k^{q-r}).$$

Операторы X и $G(\mathrm{P})$ определим равенствами

$$\mathrm{X}\,e_k = \alpha_k e_k \quad (k=1, 2, \dots)$$

$$G(0) = (\cdot, g_0)\,e_1; \quad G(\mathrm{P}_k) = (\cdot, g_k)\,e_1, \quad (k = 1, 2, \dots); \quad G(I) = 0.$$

*) Этим примером автор обязан И. Ц. Гохбергу.

Легко видеть, что функция $G(\mathrm{P})$ сильно непрерывна и ее значения одномерны, а оператор X принадлежит классу S_p. Кроме того,

$$\left(G(\mathrm{P}_1)-G(0)\right) \mathrm{X}\,\mathrm{P}_1 = \left(\cdot, \mathrm{P}_1 \mathrm{X}(g_1-g_0)\right) e_1 = (\cdot, \mathrm{P}_1 \alpha_2 \beta_2 e_2)\, e_1 = 0;$$

$$\left(G(\mathrm{P}_k)-G(\mathrm{P}_{k-1})\right) \mathrm{X} (\mathrm{P}_k - \mathrm{P}_{k-1}) = \left(\cdot, (\mathrm{P}_k-\mathrm{P}_{k-1}) \mathrm{X} (g_k - g_{k-1})\right) e_1 =$$
$$= \left(\cdot, (\mathrm{P}_k-\mathrm{P}_{k-1}) \mathrm{X}(\beta_{k+1} e_{k+1} - \beta_{k-1} e_{k-1})\right) e_1 =$$
$$= \left(\cdot,(\mathrm{P}_k-\mathrm{P}_{k-1})(\alpha_{k+1}\beta_{k+1}e_{k+1} - \alpha_{k-1}\beta_{k-1}e_{k-1})\right)e_1 = 0, \quad (k=2,\ 3,\ \ldots).$$

Рассмотрим разбиение

$$0=\mathrm{P}_0<\mathrm{P}_1<\ldots<\mathrm{P}_{n-1}<I$$

и соответствующую ему интегральную сумму

$$S_n = \sum_{k=1}^{n-1} G(\mathrm{P}_k)\, \mathrm{X} (\mathrm{P}_k - \mathrm{P}_{k-1}) = \sum_{k=1}^{n-1} (\cdot, (\mathrm{P}_k-\mathrm{P}_{k-1})\, \mathrm{X}\, g_k)\, e_1 =$$
$$= \left(\cdot, \sum_{k=1}^{n-1}(\mathrm{P}_k-\mathrm{P}_{k-1})(\alpha_k\beta_k e_k + \alpha_{k+1}\beta_{k+1}e_{k+1})\right) e_1 = \left(\cdot, \sum_{k=1}^{n-1}\alpha_k\beta_k e_k\right) e_1.$$

Если $\gamma_k = \alpha_k^{\frac{p}{2}}$ и $h=\sum_{k=1}^{\infty} \gamma_k e_k$, то

$$(S_n h,\ e_1) = \sum_{k=1}^{n-1}\alpha_k\beta_k\gamma_k = \sum_{k=1}^{n-1}\alpha_k^q \to\infty.$$

Автор выражает глубокую благодарность И. Ц. Гохбергу за помощь при выполнении работы.

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

1. М. С. Бродский, И. Ц. Гохберг, М. Г. Крейн, В. И. Мацаев. Труды IV Всесоюзного математического съезда, т. II (1964), 261—271.
2. М. С. Бродский, УМН, 16, вып. 1 (97), (1961), 135—141.
3. И. Ц. Гохберг и М. Г. Крейн, ДАН СССР, 128 (1959), 227—230.
4. И. Ц. Гохберг и М. Г. Крейн, Acta Scient. Math., 15, № 1—2 (1964), 90—132.

Известия Академии наук Молдавской ССР, № 4, 1966

А. Ф. ГАМЕЦКИЙ, И. А. БАЛТАГ

ОБ ОДНОЙ ЗАДАЧЕ С. Л. СОБОЛЕВА

Рассмотрим в n-мерном эвклидовом пространстве E^n некоторую решетку Г с метрической квадратичной формой $f=\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}\, x_i\, x_j$ определителя Δ. Составим ряд

$$\sum \frac{\Delta^{\frac{m}{n}}}{f\,(x_1,x_2\ldots x_n)^m}, \tag{1}$$

где суммирование проводится по всевозможным $(x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_n)$ целым, кроме $(0,\ 0,\ \ldots,\ 0)$, и m целое. Очевидно, что ряд (1) при $m>\frac{n}{2}$ абсолютно сходится для любой решетки Г.

С. Л. Соболев в связи с кубатурными формулами поставил следующую задачу: среди всех n-мерных решеток найти ту, которая дает наименьшее значение сумме ряда (1). Очевидно,что задача Соболева инвариантна по отношению к подобию пространства E^n, т. е. подобные между собой решетки дают одно и то же значение суммы ряда (1).

Для $n=2$ эта задача решена совсем недавно в работе [2]. В этой заметке приводится подробное доказательство леммы 1 из работы [2].

Сумма (1) при любом $m\geqslant 2$ для решетки, построенной на правильном треугольнике, имеет локально экстремальное значение*).

Доказательство. Рассмотрим некоторую решетку Г в пространстве E^2, выберем в ней приведенный репер Зеллинга [1] с векторами $\bar a_1$, $\bar a_2$, $\bar a_3$, обозначим через $-g_{ij}=\bar a_i \bar a_j$ $(i<j;\ i=1,2;\ j=2,3)$ приведенные параметры Зеллинга [1]. Тогда форму f можно представить в виде

$$f=\sum_{i,j} g_{ij}\,(x_i-x_j)^2 \quad (i<j;\ i=1,2;\ j=2,3;\ x_3=0)$$

относительно основного репера решетки Г, составленного векторами $\bar a_1$, $\bar a_2$ приведенного репера Зеллинга. Из векторов $\bar a_1$, $\bar a_2$, $\bar a_3$ приведенного репера Зеллинга можно составить три основных репера решетки Г: $(\bar a_1,\ \bar a_2)$, $(\bar a_1,\ \bar a_3)$, $(\bar a_2,\ \bar a_3)$. Рассмотрим относительно одного из этих трех реперов точки с целыми неотрицательными координатами $(k_1,\ k_2)$

*) Этот результат получен независимо от авторов Н. Н. Сандаковой другим методом.

и (k_2, k_1), где $k_1 \leqslant k_2$, и вычислим $f(k_1, k_2)$ и $f(k_2, k_1)$ относительно выбранного репера. Повторив этот процесс для каждого из трех основных реперов, получим следующие значения f:

$$f_l = k_{s_1}^2 g_{12} + k_{s_2}^2 g_{13} + k_{s_3}^2 g_{23},$$

где $l = 1,2, \ldots, 6$; s_1, s_2, s_3 — любая перестановка чисел 1, 2, 3 и $k_3 = k_1 - k_2$. Перебирая точки решетки описанным выше способом, мы охватим все точки решетки, причем точки решетки с равными между собой координатами, а также те, у которых одна из координат равна нулю, повторятся по два раза каждая. Так как ряд (1) абсолютно сходится при $m > 1$ для любой решетки Г, то члены ряда можно объединить в суммы любым способом. Объединим члены ряда (1) в суммы, каждая из которых соответствует построенной системе $\{f_l\}$, и составим ряд из таких сумм, причем суммы, соответствующие точкам с равными между собой обеими координатами или с одной координатой, равной нулю, берутся с коэффициентом $\frac{1}{2}$. Ряд, составленный из таких сумм, сходится к той же функции, что и ряд (1).

Исследуем любую отдельную такую сумму

$$F(g_{12}, g_{13}, g_{23}) = \sum_{l=1}^{6} \frac{\Delta^{\frac{m}{2}}}{f_l^m},$$

где $\Delta = g_{12}\, g_{13} + g_{12}\, g_{23} + g_{13}\, g_{23}$, на экстремум. Решая систему уравнений

$$\frac{\partial F}{\partial g_{ij}} = \frac{m}{2} \Delta^{\frac{m}{2}-1} \left[\frac{\partial \Delta}{\partial g_{ij}} \sum_{l=1}^{6} \frac{1}{f_l^m} - 2\Delta \sum_{l=1}^{6} \frac{\frac{\partial f_l}{\partial g_{ij}}}{f_l^{m+1}} \right] = 0,$$

где $i < j, i = 1,2$; $j = 2,3$, получаем единственное решение $g_{12} = g_{13} = g_{23}$. Чтобы исключить подобие, положим $g_{12} = g_{13} = g_{23} = 1$.

Разложив функцию F в ряд Тейлора в окрестности точки $g_{12} = g_{13} = g_{23} = 1$, для квадратичной части разложения получаем выражение:

$$\frac{m\, \Delta^{\frac{m}{2}-1}}{(k_1^2 + k_2^2 + k_3^2)^{m+2}} \left[\sum_{l=1}^{3} (2m+1)\, k_l^4 - 2(m+2) \sum_{1<l<j<3} k_l^2 k_j^2. \right] . (\varepsilon_{12}^2 + \varepsilon_{13}^2 + \varepsilon_{23}^2 - \varepsilon_{12}\, \varepsilon_{13} - \varepsilon_{12}\, \varepsilon_{23} - \varepsilon_{13}\, \varepsilon_{23}),$$

где ε_{12}, ε_{13}, ε_{23} — приращения параметров $g_{12} = g_{13} = g_{23} = 1$, причем ε_{12}, ε_{13}, ε_{23} не равны между собой, так как равные между собой ε_{12}, ε_{13}, ε_{23} приводят к подобной решетке. Квадратичная часть разложения положительна, так как квадратичная форма от ε_{12}, ε_{13}, ε_{23} положительна при неравных между собой ε_{12}, ε_{13}, ε_{23}, а коэффициент

$$\sum_{l=1}^{3} (2m+1)\, k_l^4 - 2(m+2) \sum_{1<l<j<} k_l^2\, k_j^2 > 0$$

при $m > 1$, так как $\sum_{l=1}^{3} k_l^4 = 2 \sum_{1<l<j<3} k_l^2\, k_j^2$.

Следовательно, любая сумма F имеет минимум при $g_{12} = g_{13} = g_{23}$.

Можно показать, что ряд (1) и ряды, составленные из первых и вторых частных производных от членов ряда (1), равномерно сходятся в окрестности точки $g_{12} = g_{13} = g_{23} = 1$. Следовательно, сумма ряда (1) при $g_{12} = g_{13} = g_{23}$ имеет локальный минимум, т. е. решетка с параметрами Зеллинга $g_{12} = g_{13} = g_{23}$, которая и является решеткой по правильным треугольникам, локально экстремальна для ряда (1).

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

1. Б. Н. Делоне, Геометрия положительных квадратичных форм, УМН, вып. 3, 1937.

2. Б. Н. Делоне, Н. Н. Сандакова, С. С. Рышков, Об оптимальной кубатурной решетке для всесторонне гладких функций от двух переменных, ДАН СССР, 162, № 6, 1965.

Л. С. ГОЛЬДЕНШТЕЙН

ОБ ОДНОСТОРОННЕЙ ОБРАТИМОСТИ НЕКОТОРЫХ ЭЛЕМЕНТОВ НОРМИРОВАННЫХ КОЛЕЦ

В настоящей статье дается подробное изложение признака односторонней обратимости некоторых элементов специальных колец, сформулированного в [1].

1. Пусть R — целочисленная решетка векторов $j=(j_0, j_1, \ldots, j_n)$ и $R^+ (R^-)$ — подмножество R, определенное неравенством $j_0 \geqslant 0$ $(j_0 \leqslant 0)$. Через F обозначим множество всех точек $\varsigma = (\varsigma_0, \varsigma_1, \ldots, \varsigma_n)$ $n+1$-мерного комплексного эвклидова пространства таких, что $|\varsigma_l| = 1$ $(l=0, 1, \ldots, n)$.

Пусть K — произвольное нормированное кольцо с единицей e и пусть $v_0, v_1, \ldots, v_n$ — коммутирующие между собой элементы из K, обладающие следующими свойствами:

а) спектр каждого из элементов v_l $(l=1, 2, \ldots, n)$ совпадает с единичной окружностью;

б) элемент v_0 имеет обратный только слева $v_0^{(-1)}$ $(v_0^{(-1)} v_0 = e;$ $v_0 v_0^{(-1)} \neq e)$, коммутирующий с элементами $v_1, v_2, \ldots, v_n$, причем $\| v_0 \| = \| v_0^{(-1)} \| = 1$;

в) $\left| \sum_j a_j \varsigma^j \right| \leqslant \left\| \sum_j a_j v^j \right\|$ $(\varsigma \in F)$, где $\varsigma^j = \varsigma_0^{j_0} \varsigma_1^{j_1} \cdots \varsigma_n^{j_n}$, $v^j = v_0^{(j_0)} v_1^{j_1} \cdots v_n^{j_n}$, $v_0^{(j_0)} = v_0^{j_0}$ при $j_0 \geqslant 0$ и $v_0^{(j_0)} = (v_0^{(-1)})^{-j_0}$ при $j_0 < 0$.

Условие в) будем называть условием независимости элементов $v_0, v_1, \ldots, v_n$.

Из ограничений, наложенных на элемент v_0, можно легко вывести, что спектр каждого из элементов v_0 и $v_0^{(-1)}$ совпадает с единичным кругом, причем для всех точек λ таких, что $|\lambda| < 1$ элемент $v_0 - \lambda e$ обратим только слева, а элемент $v_0^{(-1)} - \lambda e$ обратим только справа. Отсюда уже непосредственно следует, что во всех точках λ единичной окружности элементы $v_0 - \lambda e$ и $v_0^{(-1)} - \lambda e$ не имеют в K обратных ни с одной стороны.

Обозначим через $\hat{K}[v]$ линейную оболочку элементов v^j $(j \in R)$, через $\hat{K}_+[v]$ $(\hat{K}_-[v])$ — линейную оболочку элементов v^j, где $j \in R^+$ $(j \in R^-)$ и через $\hat{K}[v_l]$ $(\hat{K}_+[v_l], \hat{K}_-[v_l])$ — линейную оболочку элементов $v_l^{j_l}$, где $-\infty < j_l < \infty$ $(j_l \geqslant 0,\ j_l \leqslant 0)$. Через $K[v]$ $(K_\pm[v], K[v_l],$ $K_\pm[v_l])$ обозначим замыкание множества $\hat{K}[v]$ $(\hat{K}_\pm[v], \hat{K}[v_l], \hat{K}_\pm[v_l])$.

Каждому элементу $r = \sum_j a_j v^j \in \hat{K}[v]$ сопоставим функцию $r(\varsigma) =$

$= \sum_j a_j \varsigma^j$. Следуя работе [2], определим в кольце $K[v]$ новое умножение, полагая

$$r_1 \circ r_2 = r \qquad (r_1, r_2 \in \hat{K}[v]),$$

где $r \in \hat{K}[v]$ определяется функцией $r(\varsigma) = r_1(\varsigma) r_2(\varsigma)$. Очевидно, что это умножение является коммутативным, дистрибутивным и ассоциативным.

Для каждой пары элементов $r_1, r_2 \in \hat{K}[v]$ можно легко найти такое натуральное число m, что $v_0^{(-m)} r_1 r_2 v_0^m = r_1 \circ r_2$. Отсюда следует, что

$$\| r_1 \circ r_2 \| \leqslant \| r_1 r_2 \| \leqslant \| r_1 \| \cdot \| r_2 \|. \tag{1}$$

Отметим, что в смысле нового умножения элемент $v_0^{(-1)}$ является двусторонне обратным к элементу v_0, причем спектр каждого из элементов v_0 и $v_0^{(-1)}$ состоит из единичной окружности.

Соотношение (1) позволяет распространить по непрерывности новое умножение на все пары элементов из $K[v]$, после чего $K[v]$ становится нормированным коммутативным кольцом.

Кольцо $K[v]$ называется **р а с п а д а ю щ и м с я**, если каждый элемент $a \in K[v]$ представим в виде $a = a_+ + a_-$, где $a_\pm \in K_\pm[v]$.

Для каждого элемента $r \in \hat{K}[v]$ в силу свойства в) имеем $|r(\varsigma)| \leqslant \| r \|$. Распространяя это соответствие по непрерывности, сопоставим каждому элементу $a \in K[v]$ непрерывную функцию $a(\varsigma)$ $(\varsigma \in F)$, причем $|a(\varsigma)| \leqslant \| a \|$.

Аналогично тому, как это доказано в [2], можно доказать, что если $a(\varsigma) \neq 0$ $(\varsigma \in F)$ и кольцо $K[v]$ является распадающимся, то элемент $a \in K[v]$ допускает факторизацию

$$a = a_- v_0^{\varkappa} a_+ \qquad (a_\pm \in K_\pm[v]), \tag{2}$$

где элементы $a_\pm$ обратимы, причем $a_\pm^{-1} \in K_\pm[v]$. Заметим, что число $\varkappa$ из формулы (2) определяется равенством

$$\varkappa = \frac{1}{2\pi} \left[\arg a(e^{i\varphi}, \varsigma_1, \ldots, \varsigma_n)\right]_{\varphi=0}^{\varphi=2\pi}.$$

Методами, аналогичными тем, что применены в [2] для случая $n=0$, можно доказать следующую теорему.

Т е о р е м а 1. *Пусть a — произвольный элемент кольца $K[v]$, удовлетворяющий условию*

$$a(\varsigma) \neq 0 \qquad (\varsigma \in F).$$

Если $\varkappa = \varkappa(a) > 0$, где

$$\varkappa(a) = \frac{1}{2\pi} \left[\arg a(e^{i\varphi}, \varsigma_1, \ldots, \varsigma_n)\right]_{\varphi=0}^{\varphi=2\pi},$$

то элемент a обратим в K только слева, при $\varkappa < 0$ он обратим только справа, а при $\varkappa = 0$ элемент a имеет в K двусторонний обратный. Если кольцо $K[v]$ является распадающимся и равенство (2) дает факторизацию элемента a, то элемент $a^{(-1)}$, обратный к a с соответствующей стороны, определяется формулой

$$a^{(-1)} = a_+^{-1} v_0^{(-\varkappa)} a_-^{-1}.$$

2. Если условие в) заменить условием

в) для любых элементов $r_l \in \widehat{K}[v_l]$ $(l=0,\ 1, \ldots, n)$ имеет место равенство $\| r_0 r_1 \ldots r_n \| = \| r_0 \| \, \| r_1 \| \ldots \| r_n \|$, то теорема I допускает обращение. Это обращение основано на следующей лемме.

Лемма 1. *Если выполняются условия а), б) и в'), то для всякой точки $\varsigma^{(0)} \in F$ существуют последовательности ортов $s_{\pm}^{(m)} \in \widehat{K}_{\pm}[v]$ $(m=1,\ 2, \ldots)$ такие, что для любого элемента $x \in \widehat{K}[v]$*

$$\lim_{m\to\infty} \| x s_{+}^{(m)} \| = \lim_{m\to\infty} \| s_{-}^{(m)} x \| = | x(\varsigma^{(0)}) |. \tag{3}$$

Доказательство. Пусть $\varsigma^{(0)} = (\varsigma_0,\ \varsigma_1, \ldots, \varsigma_n)$ — какая-нибудь точка из F. Заметим, что для каждого ς_l $(l=0,\ 1, \ldots, n)$

$$\inf_{\substack{\|x\|=1 \\ x \in \widehat{K}[v_l]}} \| (v_l - \varsigma_l e) x \| = 0.$$

Действительно, допустив противное, получим, что оператор A_λ, определенный на элементах $K[v_l]$ равенством $A_\lambda x = (v_l - \lambda e) x$, является оператором регулярного типа*) при $\lambda = \varsigma_l$. Но тогда A_λ является оператором регулярного типа и в некоторой окрестности точки ς_l. В этой окрестности число $\beta(A_\lambda)$ является постоянным. Учитывая, что в некоторых точках этой окрестности $\beta(A_\lambda) = 0$, заключаем, что $\beta(A_\lambda) = 0$ всюду в этой окрестности. Таким образом, оператор A_{ς_l} взаимно однозначно и взаимно непрерывно отображает $K[v_l]$ на себя. В частности, существует элемент $y \in K[v_l]$ такой, что $A_{\varsigma_l} y = e$, т. е. $(v_l - \varsigma_l e) y = e$, что противоречит тому, что элемент $v_l - \varsigma_l e$ не обратим ни с одной стороны.

В силу сделанного замечания можно построить последовательность элементов $r_l^{(m)} \in \widehat{K}[v_l]$ $(\| r_l^{(m)} \| = 1;\ l = 1,\ 2, \ldots, n;\ m=1,\ 2, \ldots)$ такую, что

$$\lim_{m\to\infty} \| (v_l - \varsigma_l e) r_l^{(m)} \| = 0. \tag{4}$$

Так как при $k > 1$

$$v_l^k - \varsigma_l^k e = (v_l^{k-1} + v_l^{k-2} \varsigma_l + \ldots + \varsigma_l^{k-1} e)(v_l - \varsigma_l e),$$

то из (4) следует

$$\lim_{m\to\infty} \| (v_l^k - \varsigma_l^k e) r_l^{(m)} \| = 0 \qquad (k = 1,\ 2, \ldots). \tag{5}$$

Последнее равенство верно и при $k = -1$. Это следует из (4) и очевидного равенства

$$v_l^{-1} - \varsigma_l^{-1} e = -\varsigma_l^{-1} v_l^{-1} (v_l - \varsigma_l e).$$

---

*) Линейный ограниченный оператор A, действующий в банаховом пространстве B, называется оператором регулярного типа, если $\inf\limits_{\|x\|=1} \| Ax \| > 0$. Через $\beta(A)$ обозначается размерность факторпространства $B/A(B)$.

Наконец, при $k < -1$ имеем

$$v_l^k - \varsigma_l^k e = -\left[(v_l^{-1})^{-k-1} + (v_l^{-1})^{-k-2} \varsigma_l^{-1} + \ldots + (\varsigma_l^{-1})^{-k-1} e \right] \varsigma_l^{-1} v_l^{-1} (v_l - \varsigma_l e)$$

и, следовательно, равенство (5) остается в силе и при $k < -1$. Итак,

$$\lim_{m\to\infty} \| (v_l^k - \varsigma_l^k e) r_l^{(m)} \| = 0 \qquad (k = 0,\ \pm 1, \ldots).$$

Аналогичную последовательность $\tilde{r}_0^{(m)}$ можно построить и для элемента v_0 и точки ς_0, если рассматривать $K[v_0]$ как кольцо с новым умножением.

Образуем элементы $r_{+}^{(m)} = \tilde{r}_0^{(m)} v_0^{N_m}$ и $r_{-}^{(m)} = v_0^{(-N_m)} \tilde{r}_0^{(m)}$ $(m = 1,\ 2, \ldots)$, где N_m — столь большие натуральные числа, что $r_{\pm}^{(m)} \in \widehat{K}_{\pm}[v_0]$. Легко проверить, что из $\| y \| = \| y^{-1} \| = 1$ следует $\| xy \| = \| x \|$. Отсюда, в частности, получается, что $\| r_{\pm}^{(m)} \| = 1$ $(m=1,\ 2, \ldots)$. Итак,

$$\lim_{m\to\infty} \| (v_0^{(k)} - \varsigma_0^k e) \circ r_{\pm}^{(m)} \| = 0 \qquad (k = 0,\ \pm 1, \ldots),$$

или, учитывая специфику нового умножения,

$$\lim_{m\to\infty} \| (v_0^{(k)} - \varsigma_0^k e) r_{+}^{(m)} \| = \lim_{m\to\infty} \| r_{-}^{(m)} (v_0^{(k)} - \varsigma_0^k e) \| = 0 \qquad (k = 0,\ \pm 1, \ldots).$$

Обозначим через $s_{\pm}^{(m)}$ элемент $r_{\pm}^{(m)} r_1^{(m)} \ldots r_n^{(m)}$ $(m=1,\ 2 \ldots)$. Согласно условию в') имеем: $\| s_{\pm}^{(m)} \| = 1$ $(m = 1,\ 2, \ldots)$. Так как $v_0^{(k)} r_{+}^{(m)} = \varsigma_0^k r_{+}^{(m)} + \varepsilon_{0,k}^{(m)}$, $v_l^k r_l^{(m)} = \varsigma_l^k r_l^{(m)} + \varepsilon_{l,k}^{(m)}$ $(k = 0,\ \pm 1, \ldots;$ $l = 1,\ 2, \ldots, n;$ $m = 1,\ 2, \ldots)$, где

$$\lim_{m\to\infty} \| \varepsilon_{l,k}^{(m)} \| = 0 \qquad (l = 0,\ 1, \ldots, n;\ k = 0,\ \pm 1, \ldots),$$

то для любого элемента $v^j = v_0^{(j_0)} v_1^{j_1} \ldots v_n^{j_n}$ имеют место равенства

$$v^j s_{+}^{(m)} = (\varsigma^{(0)})^j s_{+}^{(m)} + \varepsilon_j^{(m)} \quad (m = 1,\ 2, \ldots), \tag{6}$$

где

$$\lim_{m\to\infty} \| \varepsilon_j^{(m)} \| = 0.$$

Пусть x — любой элемент из $\widehat{K}[v]$:

$$x = \sum_j a_j v^j.$$

Тогда из (6) следует, что

$$x s_{+}^{(m)} = \sum_j a_j (\varsigma^{(0)})^j s_{+}^{(m)} + \varepsilon^{(m)} \qquad (m = 1,\ 2, \ldots), \tag{7}$$

где

$$\lim_{m\to\infty} \| \varepsilon^{(m)} \| = 0.$$

Отсюда

$$\lim_{m\to\infty} \| x s_{+}^{(m)} \| = \left| \sum_j a_j (\varsigma^{(0)})^j \right| = | x(\varsigma^{(0)}) |.$$

Аналогично получаем

$$\lim_{m\to\infty} \| s_{-}^{(m)} x \| = | x(\varsigma^{(0)}) | .$$

Лемма доказана.

Замечание 1. В условиях леммы выполняется и условие независимости элементов $v_0, v_1, \ldots, v_n$.

Действительно, из (7) получаем

$$\| x \| \geqslant \| x s_{+}^{(m)} \| \geqslant | \sum_j a_j \varsigma^j | - \| \varepsilon^{(m)} \|,$$

откуда, переходя к пределу при $m \to \infty$, получаем

$$| \sum_j a_j \varsigma^j | \leqslant \| x \|,$$

т. е.

$$| \sum_j a_j \varsigma^j | \leqslant \| \sum_j a_j v^j \| \qquad (\varsigma \in F).$$

Замечание 2. Если выполнены условия леммы 1, то равенство (3) остается в силе для любых элементов $x \in K[v]$.

Действительно, для произвольного положительного числа ε_1 находим такой элемент $\hat{x} \in \hat{K}[v]$, что $\| x - \hat{x} \| < \frac{\varepsilon_1}{2}$. Тем более $| x(\varsigma) - \hat{x}(\varsigma) | < \frac{\varepsilon_1}{2}$ для любой точки $\varsigma \in F$. Для элемента $\bar{x} = \hat{x} - [\hat{x}(\varsigma^{(0)}) - x(\varsigma^{(0)})] e \in \hat{K}[v]$ получаем $\bar{x}(\varsigma^{(0)}) = x(\varsigma^{(0)})$ и $\| x - \bar{x} \| < \varepsilon_1$. Пусть $x - \bar{x} = \delta$. Тогда $x s_{+}^{(m)} = \bar{x} s_{+}^{(m)} + \delta s_{+}^{(m)}$, откуда

$$\| \bar{x} s_{+}^{(m)} \| - \varepsilon_1 \leqslant \| x s_{+}^{(m)} \| \leqslant \| \bar{x} s_{+}^{(m)} \| + \varepsilon_1$$

или

$$| x(\varsigma^{(0)}) | + \varepsilon_2 - \varepsilon_1 \leqslant \| x s_{+}^{(m)} \| \leqslant | x(\varsigma^{(0)}) | + \varepsilon_2 + \varepsilon_1,$$

где $\lim\limits_{m\to\infty} \varepsilon_2 = 0$.

В силу произвольности ε_1 получаем

$$\lim_{m\to\infty} \| x s_{+}^{(m)} \| = | x(\varsigma^{(0)}) | .$$

Аналогично доказывается равенство

$$\lim_{m\to\infty} \| s_{-}^{(m)} x \| = | x(\varsigma^{(0)}) | .$$

3. Перейдем к обращению теоремы 1. При выполнении условий а), б) и в′) имеет место следующая

Теорема 2. *Для того, чтобы элемент $a \in K[v]$ имел обратный в K хотя бы с одной стороны, необходимо, чтобы*

$$a(\varsigma) \neq 0 \qquad (\varsigma \in F). \tag{8}$$

Если условие (8) *не выполняется, то элемент a является двусторонним обобщенным делителем нуля.*

Доказательство. Допустим, что функция $a(\varsigma)$ обращается в нуль в некоторой точке $\varsigma^{(0)} \in F$. В силу леммы существуют последовательности ортов $s_{\pm}^{(m)}$ $(\in \hat{K}_{\pm}[v])$ $(m = 1, 2, \ldots)$ такие, что

$$\lim_{m\to\infty} \| a s_{+}^{(m)} \| = \lim_{m\to\infty} \| s_{-}^{(m)} a \| = | a(\varsigma^{(0)}) | = 0.$$

Таким образом, элемент a является двусторонним обобщенным делителем нуля. Отсюда непосредственно вытекает, что элемент a не имеет обратного ни с одной стороны.

Следствие. *Если выполняются условия теоремы 2, то спектр всякого элемента a $(\in K[v])$ в K состоит из множества всех значений функции $a(\varsigma)$ $(\varsigma \in F)$ и всех точек λ, для которых*

$$a(\varsigma) - \lambda \neq 0 \ (\varsigma \in F) \text{ и } \varkappa = \frac{1}{2\pi} \Big[\arg \big(a(e^{i\varphi}, \varsigma_1, \ldots, \varsigma_n) - \lambda \big) \Big]_{\varphi=0}^{\varphi=2\pi} \neq 0.$$

В точках λ из множества значений функции $a(\varsigma)$ $(\varsigma \in F)$ элемент $a - \lambda e$ является двусторонним обобщенным делителем нуля, а в точках λ, для которых $a(\varsigma) - (\lambda) \neq 0$ и $\varkappa = \frac{1}{2\pi} \Big[\arg \big(a(e^{i\varphi}, \varsigma_1, \ldots, \varsigma_n) - \lambda \big) \Big]_{\varphi=0}^{\varphi=2\pi} \neq 0$ элемент $a - \lambda e$ имеет обратный только слева при $\varkappa > 0$ и только справа при $\varkappa < 0$.

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

1. Л. С. Гольденштейн. Признаки односторонней обратимости функций от нескольких изометрических операторов и их приложения, ДАН СССР, 155, № 1 (1964), 28—31.
2. И. Ц. Гохберг, Задача факторизации в нормированных кольцах, функции от изометрических и симметрических операторов и сингулярные интегральные уравнения, УМН, 19, вып. 1 (1964), 71—124.

М. Г. ГОНЦА

ОБ ОДНОМ МЕТОДЕ ТРАНСЛЯЦИИ АРИФМЕТИЧЕСКИХ ВЫРАЖЕНИЙ ЯЗЫКА АЛГОЛ-60

При разработке трансляторов наиболее сложным этапом является составление блока обработки арифметических выражений. Принцип поэлементной расшифровки алгоритмов, предложенный М. М. Бушко-Жуком, дает значительную экономию памяти и времени при трансляции таких выражений. По такому принципу работает созданный в нашем институте транслятор на ЭВМ Урал-2. Однако наиболее полную информацию о тех или иных действиях несет не один, а группа соответствующих символов, и поскольку машина обозревает одновременно не более одной ячейки памяти, целесообразно так упорядочить информацию, чтобы поднять уровень ее полноты в каждой ячейке.

В этой статье предлагается двухступенчатый метод трансляции арифметических выражений, при котором окончательному формированию машинных команд предшествует специальная расстановка символов с учетом их структуры.

Арифметическое выражение в АЛГОЛе-60 есть совокупность чисел, переменных и функций, соединенных знаками арифметических операций и круглыми скобками. Для обозначения операций применяются обычные символы: $+$, $-$, $\times$, / (деление) и $\uparrow$ (возведение в степень). С их помощью строятся выражения любой сложности.

Примеры:

$$x \times (x \uparrow 2 - y \uparrow 2) / (x \uparrow 2 + y \uparrow 2);$$

$$x\,[i,\ j] / (a - b\,[k] \uparrow n) \times \ln\Big(a + b \times \exp(p \times s)\Big).$$

Арифметическое выражение определяет единственное числовое значение, дальнейшее использование которого зависит от того, где написано и в каких операторах оно применяется. В операторе присваивания значение арифметического выражения присваивается переменным списка левой части. Например, оператор $x := y := u \uparrow 2 + r \uparrow 2$ означает, что переменные x и y получают новое значение, которое является результатом вычисления выражения в правой части. Более подробно о синтаксисе арифметических выражений см. [1, 2, 5].

На первой ступени трансляции каждый выделенный символ арифметического выражения размещается на «рабочем поле» следующим образом:

а) знаки (коды) операций последовательно заносятся в кодовую часть ячейки;

б) условные адреса, соответствующие идентификаторам переменных и функций, заносятся в адресную часть ячейки с учетом старшинства производимых над ними операций: условное число соответствующее идентификатору, заключенному между двумя знаками действий, записывается в адресную часть ячейки, содержащей в КОП более сильный знак; в случае одинакового старшинства преимущество отдается первому знаку.

в) знаки (коды) скобок, запятых и др. размещаются по адресу результата операции (в одноадресной машине — в адресную часть).

Проиллюстрируем все сказанное на примере трехадресной машины, в которой третий адрес является обычно адресом результата операции.

Выражение $u := a - b \times c\,[i - j] - (u - v) \uparrow p$ запишется на рабочем поле так:

КОП	I*A*	II*A*	III*A*
	u		$:=$
$-$	a		
$\times$	b	c	[
$-$	i	j	]
$-$			(
$-$	u	v	)
$\uparrow$		p	

Таким образом, получили довольно удобнообозримую запись, при которой слева выделены столбцом все знаки операций, а справа также столбцом вся информация о порядке выполнения операций, их характере и компонентности. Алгоритм такого распределения довольно прост, и мы его приводить не будем.

Поскольку нас интересует принципиальная схема трансляции, предположим, что действия производятся только над простыми переменными (без индексов) в естественной скобочной записи. Алгоритм второй ступени приведем на языке АЛГОЛ-60, не придерживаясь всюду его строгости с целью большей простоты и наглядности.

Вводим следующие идентификаторы фиксаторов и рабочих адресов:

Ψ — идентификатор места (ячейки) на рабочем поле,
β — идентификатор произвольного адреса рабочего поля,
R — идентификатор массива рабочих адресов,
$\overline{\Psi}$ — фиксатор конца записи выражения,
Φ — идентификатор массива готовых команд,
Ψ_1, Ψ_2, α, r — вспомогательные идентификаторы,
z — идентификатор массива вспомогательных адресов.

Начальное значение идентификаторов массивов следующее:

$$R = \Psi = \overline{\Psi} = \Psi_2 = 0,\ \overline{\Psi}_1 = 3777\,^{*)},\ \Phi - \text{произв.}$$

Для меток применим большие латинские буквы с числовыми индексами.

```
begin switch P := A₁, T₁;
      switch Q := B, C, F;
A :   Ψ := Ψ + 1
      if Ψ > Ψ̄₁ then go to C else
      if Ψ > Ψ̄ then go to F else
A₁:   if β₃ [Ψ] ≠ 0 then go to B else **)
```

---

*) Максимальный адрес (все единицы).
В БЭСМ-2 М это будет 3777.

**) У идентификаторов α и β индексы внизу 0, 1, 2, 3 означают соответственно КОП, IA, IIA и IIIA.

M: if $\beta_1[\Psi] \wedge \beta_2[\Psi] \neq 0$ then
begin $R := R + 1$;
$\beta_3[\Psi] := r[R]$; go to T
end
else if $\beta_0[\underline{\Psi}] = 0$ then go to C_1 else
if $z[n] \leqslant \overline{\Psi}$ then go to A_3 else
A_2: if $\beta_0[\Psi] > \beta_0\left[z[n]\right]$ then
A_3: begin if $\beta_2[\Psi] = 0$ then $n := n + 1$;
$z[n] := \Psi$; go to A else
$\beta_1[\Psi] := \beta_3[\Psi] := r[R]$;
go to T;
end
else $i := 1$;
L: $\alpha := \beta\left[z[n]\right]$; $\beta\left[z[n]\right] := 0$;
if $\alpha_1 = 0$ then
begin $\alpha_2 := r[R]$;
$R := R - 1$;
$\alpha_1 := \alpha_3 := r[R]$;
end
else $\alpha_2 := \alpha_3 := r[R]$;
$n := n - 1$;
go to $P[i]$;
B: if $\beta_3[\Psi] =$ „)“ then go to M else
if $z[n] > \overline{\Psi}$ then
begin
if $\beta_0[\Psi] > \beta_0\left[z[n]\right]$ then go to B_1 else
$i := 2$; $j := 1$; go to L;
end
B_1: $\overline{\Psi} := \Psi$; go to A;
C: if $z[n] > \overline{\Psi}$ then $i := j := 2$;
go to L else go to C_2;
C_1: if $\beta[\Psi] = 0$ then go to A else
if $\beta_3[\Psi] =$ „)“ then go to C_3 else
C_2: $\Psi := \Psi - 1$;
C_3: $n := n + 1$;
$z[n] := \overline{\Psi}$;
$\beta_3[\overline{\Psi}] := 0$; $\overline{\Psi}_1 := 3777$;
C_4: $\overline{\Psi} := \overline{\Psi} - 1$;
if $\overline{\Psi} = \Psi_2$ then $\overline{\Psi} := 0$; $\Psi_2 := \Psi$;
go to A else
if $\beta_3[\overline{\Psi}] =$ „(“ then go to A else go to C_4;
T: $\beta[\Phi] := \beta[\Psi]$; $\beta[\Psi] := 0$;
$\Phi := \Phi + 1$; go to A;
T_1: $\beta[\Phi] := \alpha$; $\Phi := \Phi + 1$;
go to $Q[j]$;
F: if $n = 0$ then go to K else
$i := 2$; $j := 3$;
go to L
K: end

Как видно из алгоритма, основную роль при формировании команд играет старшинство операций, а коммутативность учитывается автоматически. Конкретный смысл операции учитывается только на последнем этапе, когда символ операции заменяется соответствующей группой машинных кодов. Количество рабочих ячеек, используемых в рабочей программе, редко превышает необходимое.

Трансляция по этому методу позволяет избежать групповых пересылок кодов на рабочем поле, а готовые команды располагаются в естественной последовательности так же, как и при ручном программировании.

Предлагаемый метод может применяться для машин любой адресности и позволяет составить довольно компактный арифметический блок.

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

1. Дж. В. Бэкус и др. Сообщение об алгоритмическом языке АЛГОЛ-60, изд. ВЦ АН СССР, М., 1960.
2. М. И. Агеев, Основы алгоритмического языка АЛГОЛ-60, изд. ВЦ АН СССР, М., 1964.
3. М. М. Бушко-Жук, О применении одного принципа построения программирующих программ на трехадресной машине, Уч. записки Кишинев. гос. университета, Кишинев, 1962.
4. Дж. Мак-Кракен, Программирование на АЛГОЛе, М., Изд-во «Мир», 1964.
5. С. С. Лавров, Универсальный язык программирования, М., Изд-во «Наука» 1964.

В. М. ЕНИ

ОБ УСТОЙЧИВОСТИ КОРНЕВОГО ЧИСЛА ОПЕРАТОРНОГО ПУЧКА

Рассмотрим полиномиальный операторный пучок

$$L(\lambda) = \sum_{j=0}^{n} \lambda^j A_j, \tag{1}$$

где A_j $(j=0, 1, \ldots, n)$ линейные ограниченные операторы, действующие в банаховом пространстве E, а λ — комплексный параметр. Число λ_0 называется характеристическим числом пучка $L(\lambda)$, если уравнение $L_{(\lambda_0)}\varphi = 0$ имеет нетривиальное решение φ_0. Через $\nu(L, \lambda_0)$ обозначим кратность характеристического числа λ_0 пучка $L(\lambda)$ (определение см., например, в [1], стр. 302). Точка λ называется регулярной точкой пучка $L(\lambda)$, если оператор $L(\lambda)$ непрерывно обратим, и Φ-точкой пучка $L(\lambda)$, если оператор $L(\lambda)$ есть Φ-оператор (см. [2], стр. 52).

Пусть Γ — произвольный спрямляемый контур, ограничивающий область G и обладающий относительно пучка $L(\lambda)$ следующими свойствами:

а) внутри области G имеется конечное число характеристических чисел $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m$ пучка $L(\lambda)$, которые являются его Φ-точками;

б) все остальные точки λ $(\lambda \neq \lambda_j,\ j = 1, 2, \ldots, m)$ замкнутой области G являются регулярными точками пучка $L(\lambda)$.

Корневым числом операторного пучка $L(\lambda)$, соответствующим контуру Γ, назовем сумму кратностей всех характеристических чисел λ_j $(j = 1, 2, \ldots, m)$ пучка $L(\lambda)$, попадающих в G, т. е. число

$$\nu(L, \Gamma) = \nu(L, \lambda_1) + \nu(L, \lambda_2) + \ldots + \nu(L, \lambda_m).$$

В настоящей заметке обобщается на случай полиномиального операторного пучка (1) теорема И. Ц. Гохберга и М. Г. Крейна ([2], теорема 4.3) об устойчивости корневого числа линейного оператора.

Теорема. *Пусть Γ — спрямляемый замкнутый контур, ограничивающий область G и обладающий относительно операторного пучка (1) свойствами а), б). Тогда существует такое число $\delta > 0$, что, каковы бы ни были операторы C_j $(j = 0, 1, \ldots, n)$, удовлетворяющие неравенствам*

$$\| C_j - A_j \| < \delta \quad (j = 0, 1, \ldots, n),$$

контур Γ обладает свойствами а), б) и относительно пучка

$$M(\lambda) = \sum_{j=0}^{n} \lambda^j C_j, \tag{2}$$

причем $\nu(L, \Gamma) = \nu(M, \Gamma)$.

Доказательство. Рассмотрим сначала случай, когда пучки $L(\lambda)$ и $M(\lambda)$ являются линейными, т. е.

$$L(\lambda) = A_0 + \lambda A_1, \quad M(\lambda) = C_0 + \lambda C_1, \quad \| C_j - A_j \| < \delta \ (j = 0, 1),$$

где $\delta\ (> 0)$ будет выбрано позже. Без ограничения общности можно считать, что существует ограниченный оператор A_0^{-1} (в противном случае следует вместо $L(\lambda)$ взять пучок $L(\lambda + a)$, где a не является характеристическим числом пучка $L(\lambda)$). Если предполагать, что $\delta < \| A_0^{-1} \|^{-1}$, то из обратимости оператора A_0 и из неравенства $\| C_0 - A_0 \| < \delta$ следует обратимость оператора C_0. Умножая слева пучки $L(\lambda)$ и $M(\lambda)$ на A_0^{-1} и C_0^{-1} соответственно, получим пучки

$$L_1(\lambda) = A_0^{-1} L(\lambda) = I + \lambda A_0^{-1} A_1, \quad M_1(\lambda) = C_0^{-1} M(\lambda) = I + \lambda C_0^{-1} C_1.$$

У пучков $L(\lambda)$ и $L_1(\lambda)$ (соответственно $M(\lambda)$ и $M_1(\lambda)$) регулярные точки, Φ-точки и их кратности совпадают ([3], гл. V, § 8, п. 2). Поэтому вместо пучков $L(\lambda)$ и $M(\lambda)$ можно рассматривать пучки $L_1(\lambda)$ и $M_1(\lambda)$. Чтобы свести эту теорему к теореме И. Ц. Гохберга и М. Г. Крейна, достаточно показать, что оператор $C_0^{-1} C_1 - A_0^{-1} A_1$ можно сделать по норме сколь угодно малым за счет выбора δ. Так как

$$C_0^{-1} C_1 - A_0^{-1} A_1 = C_0^{-1}(C_1 - A_1) + (C_0^{-1} - A_0^{-1}) A_1 =$$
$$= [A_0^{-1}(I - A_0^{-1}(A_0 - C_0))^{-1}(C_1 - A_1)] + A_0^{-1}[(I + A_0^{-1}(C_0 - A_0))^{-1} - I] A_1,$$

то, обозначив $\| A_0^{-1} \| = k_1$, $\| A_1 \| = k_2$, получим

$$\| C_0^{-1} C_1 - A_0^{-1} A_1 \| \leqslant \| A_0^{-1} \| \cdot \| (I - A_0^{-1}(A_0 - C_0))^{-1} \| \cdot \| C_1 - A_1 \| +$$
$$+ \| A_0^{-1} \| \cdot \| (I - A_0^{-1}(A_0 - C_0))^{-1} - I \| \cdot \| A_1 \| \leqslant \frac{\| A_0^{-1} \| \cdot \| C_0 - A_0 \|}{1 - \| A_0^{-1} \| \cdot \| A_0 - C_0 \|} +$$
$$+ \frac{\| A_0^{-1} \|^2 \cdot \| A_0 - C_0 \| \cdot \| A_1 \|}{1 - \| A_0^{-1} \| \cdot \| A_0 - C_0 \|} \leqslant \frac{k_1 \delta}{1 - k_1 \delta} + \frac{k_1^2 k_2 \delta}{1 - k_1 \delta} = \frac{k_1 \delta (1 + k_1 k_2)}{1 - k_1 \delta}.$$

Из этого неравенства вытекает требуемое утверждение.

Перейдем теперь к общему случаю пучка (1). Обозначим через $\tilde{E}$ банахово пространство, являющееся прямой суммой n экземпляров пространства E, и рассмотрим действующие в $\tilde{E}$ операторы

$$\tilde{D}_0 = \begin{pmatrix} A_0 & A_1 & \ldots & A_{n-1} \\ 0 & I & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & I \end{pmatrix}, \quad \tilde{D}_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \ldots & 0 & A_n \\ -I & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & -I & \ldots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & & -I & 0 \end{pmatrix},$$

$$\tilde{F}_0 = \begin{pmatrix} C_0 & C_1 & \ldots & C_{n-1} \\ 0 & I & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & I \end{pmatrix} \text{ и } \tilde{F}_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \ldots & 0 & C_n \\ -I & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & -I & \ldots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & & -I & 0 \end{pmatrix}$$

и линейные операторные пучки $\tilde{L}(\lambda) = \tilde{D}_0 + \lambda \tilde{D}_1$ и $\tilde{M}(\lambda) = \tilde{F}_0 + \lambda \tilde{F}_1$.

Норму элемента $\tilde{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \tilde{E}$, где $x_j \in E$ $(j = 1, 2, \ldots, n)$, определим равенством $\|\tilde{x}\| = \sqrt{\sum_{j=1}^{n} \|x_j\|^2}$. Тогда норма оператора $\tilde{A} = (A_{jk})_{j,k=1}^{n}$, действующего в $\tilde{E}$, допускает следующую оценку

$$\|\tilde{A}\| \leqslant \sqrt{\sum_{j,k=1}^{n} \|A_{jk}\|^2}. \tag{3}$$

Пучок $\tilde{L}(\lambda)$ можно записать в виде следующей матрицы:

$$\tilde{L}(\lambda) = \begin{pmatrix} A_0 & A_1 & \dots & A_{n-2} & A_{n-1} + \lambda A_n \\ -\lambda I & I & \dots & 0 & 0 \\ 0 & -\lambda I & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & -\lambda I & I \end{pmatrix}.$$

Непосредственно проверяется справедливость следующего равенства:

$$\tilde{S}(\lambda) = \tilde{N}_1(\lambda)\tilde{L}(\lambda)\tilde{N}_2(\lambda), \tag{4}$$

где

$$\tilde{S}(\lambda) = \begin{pmatrix} L(\lambda) & 0 & \dots & 0 \\ 0 & I & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & I \end{pmatrix},$$

$$\tilde{N}_1(\lambda) = \begin{pmatrix} I - (A_1 + \lambda A_2 + \dots + \lambda^{n-1} A_n) & \dots & -(A_{n-1} + \lambda A_n) \\ 0 \quad\quad I & \dots & 0 \\ \vdots \quad\quad \vdots & \dots & \vdots \\ 0 \quad\quad 0 & \dots & I \end{pmatrix},$$

$$\tilde{N}_2(\lambda) = \begin{pmatrix} I & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \lambda I & I & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \lambda^2 I & \lambda I & I & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \lambda^{n-1} I & \lambda^{n-2} I & \lambda^{n-3} I & \dots & \lambda^2 I & \lambda I & I \end{pmatrix},$$

Очевидно, что оператор $\tilde{S}(\lambda)$ обратим или является Φ-оператором тогда и только тогда, когда $L(\lambda)$ является обратимым или Φ-оператором. Так как операторы $\tilde{N}_1(\lambda)$ и $\tilde{N}_2(\lambda)$ обратимы при любом λ, то в силу (4), у операторов $L(\lambda)$ и $\tilde{L}(\lambda)$ регулярные точки и Φ-точки совпадают. Более того, совпадают и кратности характеристических чисел пучков $L(\lambda)$ и $\tilde{L}(\lambda)$ (см. [3], гл. V, § 9, п. 1). Аналогичные утверждения имеют место и для пучков $M(\lambda)$ и $\tilde{M}(\lambda)$. Следовательно, вместо пучков $L(\lambda)$ и $M(\lambda)$ можно рассматривать пучки $\tilde{L}(\lambda)$ и $\tilde{M}(\lambda)$. Оценим $\|\tilde{F}_0 - \tilde{D}_0\|$ и $\|\tilde{F}_1 - \tilde{D}_1\|$. В силу (3) получим

$$\|\tilde{F}_0 - \tilde{D}_0\| \leqslant \sqrt{\sum_{j=0}^{n-1} \|C_j - A_j\|^2} \leqslant \delta\sqrt{n}$$

$$\text{и } \|\tilde{F}_1 - \tilde{D}_1\| \leqslant \|C_n - A_n\| \leqslant \delta.$$

Применяя теперь к пучкам $\tilde{L}(\lambda)$ и $\tilde{M}(\lambda)$ доказанную часть теоремы, убеждаемся в справедливости теоремы и для пучков (1) и (2).

Автор выражает глубокую благодарность И. Ц. Гохбергу и А. С. Маркусу за ценные советы.

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

1. В. Н. Визитей и А. С. Маркус, О сходимости кратных разложений по системе собственных и присоединенных векторов операторного пучка, Матем. сб., 66 (108), 2, 1965, 287—320.

2. И. Ц. Гохберг и М. Г. Крейн, Основные положения о дефектных числах, корневых числах и индексах линейных операторов, Успехи матем. наук, 12, вып. 2(74), 1957, 43—118.

3. И. Ц. Гохберг и М. Г. Крейн, Введение в теорию линейных несамосопряженных операторов в гильбертовом пространстве, М., «Наука», 1965.

В. И. ПАРАСКА

ОДНА ТЕОРЕМА О ЗАМКНУТЫХ ОПЕРАТОРАХ В ПРОСТРАНСТВЕ С ДВУМЯ НОРМАМИ

В настоящей заметке переносится на неограниченные операторы одна теорема из статьи [1] о нормально разрешимых операторах, действующих в пространстве с двумя нормами.

1. Пусть H — гильбертово пространство, а B — банахово пространство, элементы которого образуют плотное множество в H, причем

$$\sup_{x \in B} \left(\| x \|_H / \| x \|_B \right) < \infty. \tag{1}$$

Обозначим через $T(B)$ метрическое пространство (см. [6]) всех линейных замкнутых операторов A, действующих в B и имеющих плотную область определения $D(A)$.

Если $A \in T(B)$, то через A_H обозначим оператор A, рассматриваемый как оператор, действующий в H. Очевидно, область определения $D(A_H) = D(A)$ оператора A_H плотна в H и, следовательно, существует сопряженный к нему (в H) оператор A^*_H.

Оператор $A \in T(B)$ назовем п р а в и л ь н ы м оператором, если множество

$$D = \{ f : f \in D(A^*_H) \cap B, \ A^*_H f \in B \}$$

плотно в B. Через A^+ обозначим действующий в B оператор, полученный сужением оператора A^*_H на множество D, а через Λ — множество всех правильных операторов.

1°. *Если* $A \in \Lambda$, *то оператор* A^+ *также принадлежит* Λ *и* $A^{++} \supseteq A$.

В самом деле, область определения $D(A^+) = D$ оператора A^+ плотна в B и, в силу замкнутости оператора A^*_H и (1), оператор A^+ также замкнут. Следовательно, $A^+ \in T(B)$. Кроме того, для любых $x \in D(A)$ и $y \in D(A^+)$ имеем: $(Ax, y) = (x, A^+ y)$. Так как $D(A^+)$ плотно в B, а значит, и в H, то отсюда вытекает, что $x \in D(A^{++})$ и $A^{++} x = Ax$.

Каждый элемент $\varphi \in H$ по формуле $f_\varphi(x) = (x, \varphi)$ определяет функционал*) из B^*. Если отождествить функционалы f_φ с соответствующими элементами φ, то получаем $B^* \supset H$, причем

$$\sup_{\varphi \in H} \left(\| \varphi \|_{B^*} / \| \varphi \|_H \right) < \infty.$$

Таким образом, $B \subset H \subset B^*$.

*) Предполагается, что умножение функционала $f \in B^*$ на число λ производится по правилу $(\lambda f)(x) = \bar{\lambda} f(x)$ $(x \in B)$.

2°. *Если* $A \in T(B)$ *и оператор* $\tilde{A}$ *является сужением оператора* A^* *на множество* $\{ f : f \in D(A^*) \cap H, \ A^* f \in H \}$, *то* $\tilde{A} = A^*_H$.

Пусть $\varphi \in D(\tilde{A})$ и $\tilde{A}\varphi = f$, т. е. $f(x) = \varphi(Ax)$ $(x \in D(A))$. Так как $\varphi, f \in H$, то $f(x) = (x, f) = (x, \tilde{A}\varphi) = (Ax, \varphi) = \varphi(Ax)$. Отсюда в силу плотности множества $D(A)$ в H следует, что $\varphi \in D(A^*_H)$ и $A^*_H \varphi = \tilde{A}\varphi$.

Обратно, пусть $\varphi \in D(A^*_H)$ и $A^*_H \varphi = f$, т. е. для всех $x \in D(A)$ имеем: $(Ax, \varphi) = (A_H x, \varphi) = (x, A^*_H \varphi) = (x, f)$. Отсюда вытекает, что $\varphi(Ax) = f(x)$ $(x \in D(A))$, т. е. $\varphi \in D(\tilde{A})$ и $\tilde{A}\varphi = f$.

2. Для оператора $A \in T(B)$ через $Z(A)$ обозначим подпространство всех решений уравнения $Ax = 0$ $(x \in D(A))$, а через $\alpha(A)$ — размерность подпространства $Z(A)$.

Оператор $A \in T(B)$ называется Ф-о п е р а т о р о м (см. [3]), если $\alpha(A)$ и $\alpha(A^*)$ конечны и A нормально разрешим, т. е. уравнение $Ax = y$ разрешимо тогда и только тогда, когда $f(y) = 0$ для всех $f \in Z(A^*)$. Как известно, последнее условие эквивалентно тому, что множество значений $R(A)$ оператора A замкнуто.

Разность $\alpha(A^*) - \alpha(A) = \varkappa(A)$ называется индексом оператора A.

Целью настоящей заметки является доказательство следующей теоремы.

Т е о р е м а. *Если* $A (\in \Lambda)$, A^+ *являются* Ф-*операторами в* B *и* $\varkappa(A) = -\varkappa(A^+)$, *то оператор* A_H *допускает замыкание* $\bar{A}_H$, *которое является* Ф-*оператором в* H, *причем* $Z(\bar{A}_H) = Z(A)$, $Z((\bar{A}_H)^*) = Z(A^+)$ и $\varkappa(\bar{A}_H) = \varkappa(A)$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Так как оператор $A \in \Lambda$, то область определения оператора A^*_H плотна в H и, следовательно, (см. [4], стр. 330) оператор A_H допускает замыкание $\bar{A}_H = A^{**}_H$.

Как известно, $(\bar{A}_H)^* = A^*_H$ и из $A^+ \subseteq A^*_H$ следует, что $(A^+_H)^* \supseteq A^{**}_H = \bar{A}_H$. Отсюда и из 2° вытекают соотношения

$$A \subseteq \bar{A}_H \subseteq (A^+)^* \text{ и } A^+ \subseteq (\bar{A}_H)^* \subseteq A^*. \tag{2}$$

Согласно условиям теоремы $\alpha(A) - \alpha((A^+)^*) = \alpha(A^*) - \alpha(A^+)$. С другой стороны, из (2) следует, что $\alpha(A) \leqslant \alpha((A^+)^*)$ и $\alpha(A^+) \leqslant \alpha(A^*)$. Следовательно, $Z(A) = Z(\bar{A}_H) = Z((A^+)^*)$ и $Z(A^+) = Z((\bar{A}_H)^*) = Z(A^*)$ и, стало быть, $\varkappa(\bar{A}_H) = \varkappa(A)$.

Нам осталось доказать, что оператор $\bar{A}_H$ нормально разрешим. Для этого рассмотрим оператор $C = AA^+$, который является Ф-оператором в B с индексом $\varkappa(C) = \varkappa(A) + \varkappa(A^+) = 0$ (см. [3], теорема 2.1). Покажем, что область его определения $D(C)$ (состоящая из тех $x \in D(A^+)$, для которых $A^+ x \in D(A)$) плотна в B. Действительно, так как числа $\alpha(A^+)$ и $\alpha((A^+)^*)$ конечны, то пространство B можно представить в виде следующих прямых сумм: $B = N \dot{+} R(A^+)$ и $B = Z(A^+) \dot{+} M$, где N, M — некоторые подпространства пространства B, причем $\dim N = \alpha((A^+)^*)$. Кроме того, множества $D(A) \cap R(A^+)$ и $D(A^+) \cap M$ плотны соответственно в $R(A^+)$ и M (см. [3], лемма 2.1) и оператор A^+, рассматриваемый как оператор, действующий из M в $R(A^+)$, имеет ограниченный обратный. Следовательно, прообраз множества $D(A) \cap R(A^+)$ плотен в B, т. е. $D(C)$ плотно в B.

В силу 1° оператор C симметричен и поэтому подпространства $R(C)$ и $Z(C)$ пересекаются только в нуле. Учитывая еще, что $\alpha(C^*) = \dim(B/R(C)) = \alpha(C)$, заключаем, что

$$B = R(C) \dotplus Z(C). \tag{3}$$

Обозначим через C_1 симметричный действующий в гильбертовом пространстве $\overline{R(C_H)}$-оператор, полученный сужением оператора C_H на множество $D(C) \cap R(C)$. Очевидно, оператор C_1 имеет симметричный обратный C_1^{-1}. Кроме того, оператор C_1^{-1}, рассматриваемый как оператор, действующий в банаховом пространстве $R(C)$, ограничен. Тогда, как известно (см. [2]), оператор C_1^{-1} ограничен также и в $\overline{R(C_H)}$. Продолжая его по непрерывности на все $\overline{R(C_H)}$, получим некоторый действующий в $\overline{R(C_H)}$ ограниченный оператор C_2. Так как оператор C_1 симметричен и, следовательно, допускает замыкание $\overline{C}_1$ в $\overline{R(C_H)}$, то (см [5], стр. 555) оператор $\overline{C}_1$ имеет ограниченный обратный $\overline{C}_1^{-1} = C_2$. Отсюда и из (3) в силу конечномерности подпространства $Z(C)$ получаем, что $Z(\overline{C}_H) = Z(C)$. Очевидно, $D(\overline{C}_H) = D(\overline{C}_1) \dotplus Z(C_H)$ и поэтому $R(\overline{C}_H) = \overline{R(C_H)}$.

Таким образом, множество значений $R(\overline{C}_H)$ оператора $\overline{C}_H$ замкнуто, и пространство H можно представить в виде прямой суммы:

$$H = R(\overline{C}_H) \dotplus Z(\overline{C}_H). \tag{4}$$

Так как оператор $\overline{C}_1$ также симметричен и $R(\overline{C}_1) = R(\overline{C}_H)$, то (см. [5], стр. 562) оператор $\overline{C}_1$ самосопряжен. Следовательно, для любого невещественного λ оператор $\overline{C}_1 - \lambda I$ имеет ограниченный обратный. А на подпространстве $Z(\overline{C}_H)$, очевидно, оператор $\overline{C}_H - \lambda I$ имеет ограниченный обратный для любого $\lambda \neq 0$. Таким образом, для любого невещественного λ оператор $\overline{C}_H - \lambda I$ имеет ограниченный обратный (в H), т. е. индексы дефекта симметричного оператора $\overline{C}_H$ равны нулю и, следовательно, оператор $\overline{C}_H$ самосопряжен.

С другой стороны, $C_H \subseteq A_H A_H^*$, и поэтому $\overline{C}_H = C_H^{**} \subseteq \overline{A}_H A_H^*$, а так как оператор $\overline{A}_H A_H^*$ также самосопряжен, то $\overline{C}_H = \overline{A}_H A_H^*$.

Очевидно, что $R(C) \subseteq R(A)$. Пусть сейчас $y \in R(A)$. Тогда существует такой элемент $x_1 \in D(A)$, что $Ax_1 = y$ и $f(x_1) = 0$ для всех $f \in Z(A)$. Но так как оператор A^+ нормально разрешим и $Z(A) = Z((A^+)^*)$, то уравнение $A^+ x = x_1$ имеет некоторое решение x_2. Следовательно, $y = Ax_1 = AA^+ x_2 \in R(C)$, т. е. $R(A) \subseteq R(AA^+)$. Отсюда, из (3) и (4) непосредственно вытекает, что замыкание множества $R(A)$ в H совпадает с множеством $R(\overline{A}_H A_H^*)$, а следовательно, $R(\overline{A}_H) \subseteq R(\overline{C}_H)$. С другой стороны, очевидно, $R(\overline{A}_H A_H^*) \subseteq R(\overline{A}_H)$, а значит, $\overline{R}(A_H) = R(\overline{A}_H A_H^*)$.

Таким образом, оператор $\overline{A}_H$ нормально разрешим и теорема полностью доказана.

З а м е ч а н и е. Доказанная теорема является обобщением утверждения 4° из [1] не только для неограниченных операторов, но и для ограниченных, так как из ограниченности оператора $A \in \Lambda$, вообще говоря, не вытекает ограниченность оператора $A^+ \in T(B)$.

Действительно, пусть $H = l_2$, $B = l_1$ и линейный оператор A, действующий в l_1, определяется матрицей (a_{jk}), где $a_{jk} = 0$, если $k > j$; $a_{jk} = 0$, если $k \leqslant j$ и $j \neq n^3$ $(n = 1, 2, \ldots)$; $a_{jk} = \frac{1}{\sqrt{j^3}}$, если $j = n^3$ $(n = 1, 2 \ldots)$.

Оператор A ограничен в пространстве l_1 и $\| A \|_{l_1} = \sup_k \sum_{j=1}^{\infty} | a_{jk} | = \sum_{n=1}^{\infty} 1/\sqrt{n^3} < \infty$. Сопряженный оператор A^*, действующий в $l_1^* = m$, определяется матрицей (b_{jk}), где $b_{jk} = \overline{a_{kj}}$.

Очевидно, оператор A^* переводит элементы с конечным числом отличных от нуля координат, которые составляют плотное множество в пространстве l_1, в такие же. Следовательно, оператор $A \in \Lambda$. Однако оператор A^+ неограничен, так как $\sup_k \sum_{j=1}^{\infty} | b_{jk} | = \sup_k \frac{k^3}{\sqrt{k^3}} = \infty$.

Автор выражает глубокую благодарность И. Ц. Гохбергу и А. С. Маркусу за полезные замечания.

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

1. И. Ц. Гохберг и М. К. Замбицкий, О нормально разрешимых операторах в пространствах с двумя нормами, Известия АН МССР, 1964, № 6, 80—84.
2. М. Г. Крейн, Про лінійні цілком неперервні оператори функціональних просторах з двома нормами. Збірник праць Ін-ту матем. АН УРСР, 1947, № 9, 104—129.
3. И. Ц. Гохберг и М. Г. Крейн, Основные положения о дефектных числах, корневых числах и индексах линейных операторов, Успехи математических наук, 12, вып. 2 (74), 1957, 43-118.
4. Ф. Рисс и Б. С.-Надь, Лекции по функциональному анализу, М., ИЛ, 1954.
5. В. И. Смирнов, Курс высшей математики, 5, М., 1959.
6. В. И. Параска, Об одной метрике в множестве замкнутых операторов и ее применении в теории возмущений, Известия АН МССР, 1964, № 6, 91—96.

Е. И. СИГАЛ

О ДИАГОНАЛЬНЫХ ЭЛЕМЕНТАХ И СПЕКТРЕ МАТРИЦ

Все рассматриваемые ниже матрицы предполагаются квадратными и с элементами из произвольного поля P. Диагональю матрицы $A=(a_{jk})_1^n$ будем называть вектор $(a_{11}, a_{22}, \ldots, a_{nn})$. След матрицы (сумму ее диагональных элементов) будем обозначать $\mathrm{Sp}\,A$: $\mathrm{Sp}\,A=\sum\limits_{j=1}^{n} a_{jj}$.

В настоящей заметке исследуются связи между спектром $\{\lambda_j\}_1^n$ матрицы и ее диагональю $\{d_j\}_1^n$, а также между спектром $\{\lambda_j\}_1^n$ суммы (произведения) двух матриц и спектрами $\{\alpha_j\}_1^n$ и $\{\beta_j\}_1^n$ слагаемых (сомножителей).

Как известно, $\sum\limits_{j=1}^{n} \lambda_j = \sum\limits_{j=1}^{n} d_j$ и $\sum\limits_{j=1}^{n} \alpha_j + \sum\limits_{j=1}^{n} \beta_j = \sum\limits_{j=1}^{n} \gamma_j$ (соответственно $\prod\limits_{j=1}^{n} \alpha_j \prod\limits_{j=1}^{n} \beta_j = \prod\limits_{j=1}^{n} \gamma_j$). Мы покажем, что никаких других связей между указанными величинами в случае произвольных матриц не существует*).

Эти результаты (кроме теоремы 6 о спектре произведения матриц) получаются как следствия теоремы 1, дающей полное описание диагоналей всевозможных матриц, подобных заданной.

1. Теорема 1. *Пусть A — нескалярная матрица порядка n. Вектор $(d_1, d_2, \ldots d_n)$ тогда и только тогда является диагональю некоторой матрицы, подобной A, когда $\sum\limits_{j=1}^{n} d_j = \mathrm{Sp}\,A$.*

Доказательство. Необходимость условия теоремы известна. Достаточность докажем сначала для $n=2$. Пусть задана произвольная нескалярная матрица второго порядка A. Нетрудно найти невырожденную матрицу C такую, что у матрицы $C^{-1}AC=Q=(q_{ij})_1^2$ в правом верхнем углу находится элемент, отличный от нуля ($q_{12}\neq 0$). Если положить

$$B=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ (d_1-q_{11})\,q_{12}^{-1} & 1 \end{pmatrix},$$

то, как легко проверить, матрица $P=B^{-1}QB$ будет иметь заданную диагональ (d_1, d_2).

*) Заметим, что в случае, когда P—поле комплексных (вещественных) чисел, а матрицы являются эрмитовыми (симметрическими), между рассматриваемыми величинами существует еще целый ряд соотношений (см., например, обзорные статьи [1, 2], в которых есть подобная библиография).

Докажем теперь теорему для произвольного n, предполагая ее справедливой при всех $k<n$.

Предположим вначале, что матрица $A_{n-1}=(a_{ij})_1^{n-1}$, стоящая в левом верхнем углу заданной матрицы A, не является скалярной. Преобразуем матрицу A следующим образом:

$$G=F_n^{-1}A\,F_n=\left(\begin{array}{c|c} F_{n-1}^{-1} & 0 \\ \hline 0 & 1 \end{array}\right)\left(\begin{array}{c|c} A_{n-1} & \begin{matrix} a_{1n} \\ \vdots \\ a_{n-1,\,n} \end{matrix} \\ \hline a_{n1}\ldots a_{n,\,n-1} & a_{nn} \end{array}\right)\left(\begin{array}{c|c} F_{n-1} & 0 \\ \hline 0 & 1 \end{array}\right),$$

где F_{n-1} — невырожденная матрица порядка $n-1$ такая, что матрица $Q=F_{n-1}^{-1}A_{n-1}F_{n-1}$ имеет диагональ $\{d_1\ldots, d_{n-2}, d_{n-1}+\delta\}$ (матрица F_{n-1} существует в силу индуктивного предположения). Очевидно, $d_n = a_{nn}+\delta$ и

$$G=\left(\begin{array}{c|c} \begin{matrix} d_1 & & * \\ & \ddots & d_{n-2} \end{matrix} & * \\ \hline * & \begin{matrix} d_{n-1}+\delta & h \\ f & a'_{nn} \end{matrix} \end{array}\right).$$

Обозначим матрицу второго порядка, стоящую в правом нижнем углу матрицы G, через H. Если $H\neq\lambda I$, то, так как $d_{n-1}+\delta+a'_{nn}=d_{n-1}+d_n$ и так как теорема справедлива для $n=2$, существует невырожденная матрица второго порядка K_2 такая, что у матрицы $K_2^{-1}HK_2$ на диагонали стоят элементы d_{n-1} и d_n.

Рассмотрим матрицу K_n порядка n:

$$K_n=\left(\begin{array}{c|c} \begin{matrix} 1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \end{matrix} & 0 \\ \hline 0 & K_2 \end{array}\right).$$

Легко видеть, что матрица $K_n^{-1}G\,K_n$ является искомой.

Пусть теперь $H=\lambda I$. Это значит, что $f=h=0$ и $d_{n-1}+\delta=a_{nn}=\lambda$, и поэтому $d_{n-1}+d_n=2\lambda$. Покажем, что путем перенумерации элементов d_i можно добиться, чтобы это равенство не имело места, и тем самым исключить случай $H=\lambda I$.

Если $d_i\neq d_{n-1}$ хоть для одного $i<n-1$, то достаточно поменять d_i и d_{n-1} местами. Если же $d_1=\ldots=d_{n-1}\neq d_n$, то достаточно поменять местами d_n и d_i $(i<n-1)$. Если, наконец, $d_1=\ldots=d_{n-1}=d_n$, то $d_n=a_{nn}$ и $\delta=0$, т. е. в этом случае матрица G уже является искомой.

Таким образом, при $A_{n-1}\neq\lambda I$ теорема доказана. Если же $A_{n-1}=\lambda I$, то, так как $A\neq\lambda I$, легко подобрать такую невырожденную матрицу n-го порядка L, что у матрицы $M=L^{-1}AL$ в левом верхнем углу стоит матрица $n-1$-го порядка $M_{n-1}\neq\lambda I$. Теорема доказана.

Замечание. Если A—скалярная матрица $(A=\lambda I)$, то, очевидно, условие $\sum\limits_{j=1}^{n} d_j=\mathrm{Sp}\,A$ в теореме 1 надо заменить условиями $d_j=\lambda_j\ (j=1,\ldots, n)$.

2. Здесь мы приведем некоторые предложения, доказываемые на основании теоремы 1.

Теорема 2. *Пусть $\lambda_1, \ldots \lambda_n$, $d_1, \ldots, d_n$ — некоторые элементы поля P. Тогда условие $\sum\limits_{j=1}^{n} d_j = \sum\limits_{j=1}^{n} \lambda_j$ являются необходимым и достаточным для существования матрицы n-го порядка с элементами из поля P, у которой $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ являются собственными значениями, а $\{d_1, \ldots, d_n\}$—диагональю.*

Для доказательства достаточно применить теорему 1 к треугольной (недиагональной) матрице A с диагональю $\{\lambda_1, \ldots, \lambda_n\}$.

Для случая, когда P—поле вещественных или комплексных чисел, теорема 2 была ранее установлена Мирским ([3], теорема 1).

Теорема 3. *Пусть $d_j\,(j = 1, 2, \ldots, n-1)$ и $p_j\,(j = 0, 1, \ldots, n-1)$ произвольные элементы поля P. Тогда существует матрица A над полем P с характеристическим многочленом $f(\lambda) = \lambda^n + p_{n-1}\lambda^{n-1} + \ldots + p_1\lambda + p_0$ и диагональю $\{d_1, \ldots, d_{n-1}, d_n\}$ $(d_n = -p_{n-1} - \sum\limits_{j=1}^{n-1} d_j)$.*

Доказательство. Как известно, характеристический многочлен матрицы

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \ldots & 0 & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 1 \\ -p_0 & -p_1 & -p_2 & \ldots & -p_{n-2} & -p_{n-1} \end{pmatrix}$$

совпадает с $f(\lambda)$. Так как матрица B не является скалярной, то теорема 3 вытекает непосредственно из теоремы 1.

Теорема 3 была ранее доказана в работе Фарахата и Ледермана [4].

Теорема 4. *Пусть C—нескалярная матрица порядка n над полем P и $\{\alpha_j\}_{j=1}^n$, $\{\beta_j\}_{j=1}^n$—два набора элементов P. Для существования матриц A и B со спектрами $\{\alpha_j\}_1^n$ и $\{\beta_j\}_1^n$ соответственно и таких, что $A + B = C$, необходимо и достаточно, чтобы*

$$\sum_{j=1}^{n} \alpha_j + \sum_{j=1}^{n} \beta_j = \mathrm{Sp}\, C.$$

Доказательство. Необходимость условия теоремы известна. Если же выполняется условие (1), то по теореме 1 существует матрица G с диагональю $\{\alpha_j + \beta_j\}_{j=1}^n$, подобная матрице C $(G = F^{-1}CF)$. Разобьем эту матрицу на сумму двух треугольных матриц следующим образом:

$$G = \begin{pmatrix} \alpha_1 + \beta_1 & & * \\ & \ddots & \\ * & & \alpha_n + \beta_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ * & & \alpha_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \beta_1 & & * \\ & \ddots & \\ 0 & & \beta_n \end{pmatrix} = A_1 + B_1.$$

Очевидно, матрицы $A = FA_1F^{-1}$ и $B = FB_1F^{-1}$ обладают требуемыми свойствами.

Следствием теоремы 4 является

Теорема 5. *Пусть $\alpha_j, \beta_j, \gamma_j$ $(j = 1, \ldots, n)$ — некоторые элементы из произвольного поля P. Для существования матриц n-го порядка A, B, C над полем P, имеющих спектры $\{\alpha_j\}_1^n$, $\{\beta_j\}_1^n$ и $\{\gamma_j\}_1^n$ соответственно и таких, что $A + B = C$, необходимо и достаточно, чтобы*

$$\sum_{j=1}^{n} \alpha_j + \sum_{j=1}^{n} \beta_j = \sum_{j=1}^{n} \gamma_j.$$

Легко видеть, что теоремы 4 и 5 обобщаются на случай любого конечного числа слагаемых.

3. Теорема 6. *Пусть α_j, β_j, γ_j $(j=1, \ldots n)$—некоторые элементы из произвольного поля P. Для существования матриц n-го порядка A, B и C над полем P, имеющих спектры $\{\alpha_j\}_1^n$, $\{\beta_j\}_1^n$ и $\{\gamma_j\}_1^n$ соответственно и таких, что $AB = C$, необходимо и достаточно выполнение условия*

$$\prod_{j=1}^{n} \alpha_j \prod_{j=1}^{n} \beta_j = \prod_{j=1}^{n} \gamma_j. \tag{2}$$

Доказательство. Необходимость условия (2) известна. Перейдем к установлению его достаточности. При этом мы покажем, что матрицу C можно выбрать в нижней треугольной форме.

Для $n = 1$ утверждение очевидно. Допустим, что оно верно для всех $k < n$ и докажем его справедливость для $k = n$. Для этого выберем элемент δ так, чтобы выполнялось условие

$$\prod_{j=1}^{n-1} \alpha_j \prod_{j=1}^{n-1} \beta_j = \gamma_1 \cdot \ldots \cdot \gamma_{n-2} \cdot (\gamma_{n-1} + \delta). \tag{3}$$

В случае, когда $\prod\limits_{j=1}^{n} \gamma_j \neq 0$, для этого следует положить $\delta = \frac{\gamma_n \gamma_{n-1}}{\alpha_n \beta_n} - \gamma_{n-1}$.

Если же $\prod\limits_{j=1}^{n} \gamma_j = 0$, то, не ограничивая общности, можно считать, что $\gamma_{n-1} = 0$ и что выполняется хотя бы одно из равенств $\alpha_{n-1} = 0$ или $\beta_{n-1} = 0$. Следовательно, при этих условиях для справедливости равенства (3) достаточно положить $\delta = 0$.

В силу индуктивного предположения существуют матрицы $A_{n-1} =$ для которых $\{\alpha_j\}_1^{n-1}$,
$= (a_{ij})_1^{n-1}$, $B_{n-1} = (b_{ij})_1^{n-1}$ и $C_{n-1} = (C_{ij})_1^{n-1}$, соответственно являются наборами
$\{\beta_j\}_1^{n-1}$ и $\{\gamma_1, \ldots, \gamma_{n-2}, \gamma_{n-1} + \delta\}$ собственных значений, причем матрица C_{n-1} является нижнетреугольной и $C_{n-1} = A_{n-1}B_{n-1}$. Дополним матрицы A_{n-1} и B_{n-1} до n-мерных следующим образом:

$$A_n = \left(\begin{array}{c|c} A_{n-1} & 0 \\ \hline \xi_1 \ldots \xi_{n-1} & \alpha_n \end{array}\right), \quad B_n = \left(\begin{array}{c|c} B_{n-1} & \begin{matrix} \eta_1 \\ \vdots \\ \eta_{n-1} \end{matrix} \\ \hline 0 & \beta_n \end{array}\right).$$

Очевидно, спектры матриц A_n и B_n совпадают с $\{\alpha_j\}_1^n$ и $\{\beta_j\}_1^n$ соответственно. Рассмотрим матрицу

$$C_n = A_nB_n = \left(\begin{array}{c|c} A_{n-1}B_{n-1} & \begin{matrix} p_1 \\ \vdots \\ p_{n-1} \end{matrix} \\ \hline q_1 \ldots q_{n-1} & p_n \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c|c} \begin{matrix} \gamma_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ * & \gamma_{n-2} & \gamma_{n-1} + \delta \end{matrix} & \begin{matrix} p_1 \\ \vdots \\ p_{n-1} \end{matrix} \\ \hline q_1 \ldots \quad q_{n-1} & p_n \end{array}\right).$$

Здесь

$$p_j=\sum_{l=1}^{n-1} a_{jl}\eta_l,\ q_j=\sum_{l=1}^{n-1}\xi_l b_{lj}\ (j<n),\ p_n=\sum_{l=1}^{n-1}\xi_l\eta_l+\alpha_n\beta_n. \qquad (4)$$

Элементы $\xi_1, \ldots, \xi_{n-1}, \eta_1, \ldots, \eta_{n-1}$ будем находить из условий:

$$p_j=0 \quad (j=1, \ldots, n-2), \qquad (5)$$

$$\delta+p_n=\gamma_n, \qquad (6)$$

$$p_n(\gamma_{n-1}+\delta)-p_{n-1}\,q_{n-1}=\gamma_{n-1}\gamma_n. \qquad (7)$$

Очевидно, условия (6) и (7) являются необходимыми и достаточными для того, чтобы матрица

$$R=\begin{pmatrix}\gamma_{n-1}+\delta & p_{n-1}\\ q_{n-1} & p_n\end{pmatrix}$$

имела собственные значения γ_{n-1} и γ_n, и поэтому если мы подберем $\xi_1, \ldots, \xi_{n-1}, \eta_1, \ldots, \eta_{n-1}$ так, чтобы выполнялись условия (5), (6) и (7), то $\gamma_1, \ldots, \gamma_n$ будут собственными значениями матрицы C_n.

Если хоть один из элементов $b_{l,\,n-1}$ $(i=1, 2, \ldots, n-1)$ отличен от нуля, то в системе (5) положим $\eta_l=b_{l,\,n-1}$ (элементы $b_{l,\,n-1}$ удовлетворяют системе (5), так как матрица $C_{n-1}=A_{n-1}B_{n-1}$ является нижнетреугольной). Тогда $p_{n-1}=\sum_{l=1}^{n-1}a_{n-1,\,l}\eta_l=\sum_{l=1}^{n-1}a_{n-1,\,l}b_{l,\,n-1}=$ $=\gamma_{n-1}+\delta$, и система (6), (7) с учетом (4) примет вид:

$$\sum_{l=1}^{n-1} b_{l,\,n-1}\xi_l=\gamma_n-\alpha_n\beta_n-\delta, \qquad (6')$$

$$(\gamma_{n-1}+\delta)\sum_{l=1}^{n-1} b_{l,\,n-1}\xi_l=(\gamma_{n-1}+\delta)(\gamma_n-\delta)-\gamma_{n-1}\gamma_n. \qquad (7')$$

Легко заметить, что уравнение (7′) получается из (6′) путем умножения обеих частей на элемент $\gamma_{n-1}+\delta$. Так как хоть один из элементов $b_{l,\,n-1}$ $(i=1, \ldots, n-1)$ отличен от нуля, то уравнение (6′) разрешимо.

Если же $b_{l,\,n-1}=0$ $(i=1, \ldots, n-1)$, то $\det B_{n-1}=0$, а значит, $\prod_{j=1}^{n}\gamma_j=0$. Но тогда можно считать, что $\gamma_{n-1}=0$ и $\delta=0$ и поэтому уравнение (7) обращается в тождество $0\equiv 0$, а уравнение (6) относительно ξ_j $(j=1, 2, \ldots, n-1)$ разрешимо, если предварительно выбрать нетривиальное решение η_j $(j=1, \ldots, n-1)$ системы (5).

Для завершения доказательства осталось показать, что матрицу C_n можно привести к треугольному виду. Для этого достаточно привести к нижней треугольной форме матрицу второго порядка R, имеющую собственные значения γ_{n-1} и γ_n, что можно легко проделать в произвольном поле.

Автор выражает благодарность А. С. Маркусу за постановку задачи и советы.

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

1. L. Mirsky, J. Math. Anal. and Appl., 9, № 1 (1964), 99—118.
2. А. С. Маркус, Усп. матем. наук, 19, вып. 4 (118) (1964), 93—123.
3. L. Mirsky, J. London Math. Soc., 33, № 1 (1958), 14—21.
4. H. K. Farahat, W. Ledermann, Proc. Edinburgh Math. Soc., 11, № 3 (1959), 143—146.

Известия Академии наук Молдавской ССР № 4, 1966

П. С. СОЛТАН

ОБ ОТНОШЕНИЯХ МЕЖДУ ЗАДАЧАМИ ПОКРЫТИЯ И ОСВЕЩЕНИЯ ВЫПУКЛЫХ ТЕЛ

Пусть в n-мерном эвклидовом пространстве E^n имеется выпуклое тело K^n. Его внутренность мы обозначим через $\mathrm{Int}\,K^n$, а границу — через $\mathrm{Fr}\,K^n$. Относительно тела K^n рассмотрим следующие четыре задачи.

З а д а ч а 1. *Каково минимальное число выпуклых тел, гомотетичных телу K^n с положительным коэффициентом подобия, меньшим единицы, которыми можно покрыть тело K^n?*

З а д а ч а 2. *Каково минимальное число точечных источников света, расположенных в пространстве E^n, которыми можно осветить извне всю границу тела K^n?* (граничная точка A тела K^n считается освещенной извне некоторым источником света S, если луч SA проходит при его продолжении за точку A через некоторую внутреннюю точку тела K^n).

З а д а ч а 3. *Каково минимальное число открытых выпуклых тел, получающихся из $\mathrm{Int}\,K^n$ параллельными переносами, которыми можно покрыть тело K^n?*

З а д а ч а 4. *Каково минимальное число пучков параллельных лучей света в пространстве E^n, которыми можно осветить извне всю границу $\mathrm{Fr}\,K^n$ тела K^n?* (граничная точка A тела K^n считается освещенной извне некоторым пучком лучей, если луч этого пучка, проходящий через A, проходит при его продолжении за точку A через некоторую внутреннюю точку тела K^n).

Искомые числа для тела K^n обозначим соответственно через $N_1(K^n)$, $N_2(K^n)$, $N_3(K^n)$ и $N_4(K^n)$.

Отметим, что задачи 1—4 рассматривались в работах [1]—[6].

В работе [6] показано, что числа $N_1(K^n)$, $N_2(K^n)$, $N_3(K^n)$ и $N_4(K^n)$ удовлетворяют соотношениям:

$$N_4(K^n)\leqslant N_3(K^n)\leqslant N_1(K^n), \qquad (2)$$

$$N_4(K^n)\leqslant N_2(K^n)\leqslant N_1(K^n). \qquad (3)$$

Если же тело K^n ограниченно, то, оказывается, имеют место равенства:

$$N_1(K^n)=N_2(K^n)=N_3(K^n)=N_4(K^n). \qquad (1)$$

(см. [3], [5], [6]).

Цель настоящей заметки—показать, что в случае неограниченности тела K^n соотношения (2) и (3) не могут быть улучшены, т. е. все приведенные в начале задачи попарно неэквивалентны, причем числа $N_2(K^n)$ и $N_3(K^n)$ несравнимы.

1) Покажем, что на плоскости E^2 существует такая неограниченная фигура K_1, для которой $N_3(K_1) < N_1(K_1)$.

В качестве таковой достаточно рассмотреть выпуклую неограниченную фигуру на E^2, обладающую двумя параллельными асимптотами и не имеющую ни с одной из них общих точек (см. рис. 1).

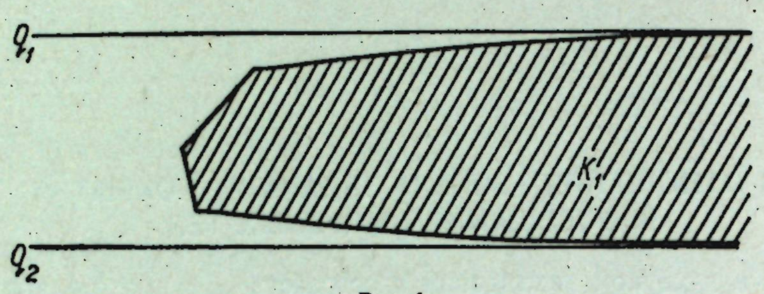

Рис. 1.

В работах [5] и [6] показано, что для фигуры K_1 (на рис. 1 она заштрихована) $N_1(K_1)=2$. В то же время $N_3(K_1)=1$, ибо, если сделать перенос τ открытой фигуры Int K_1 влево на некоторый вектор $x \neq 0$, параллельный направлению q_1, то, как легко заметить, фигура τ Int K_1) покроет фигуру K_1. Следовательно, $N_3(K_1) < N_1(K_1)$.

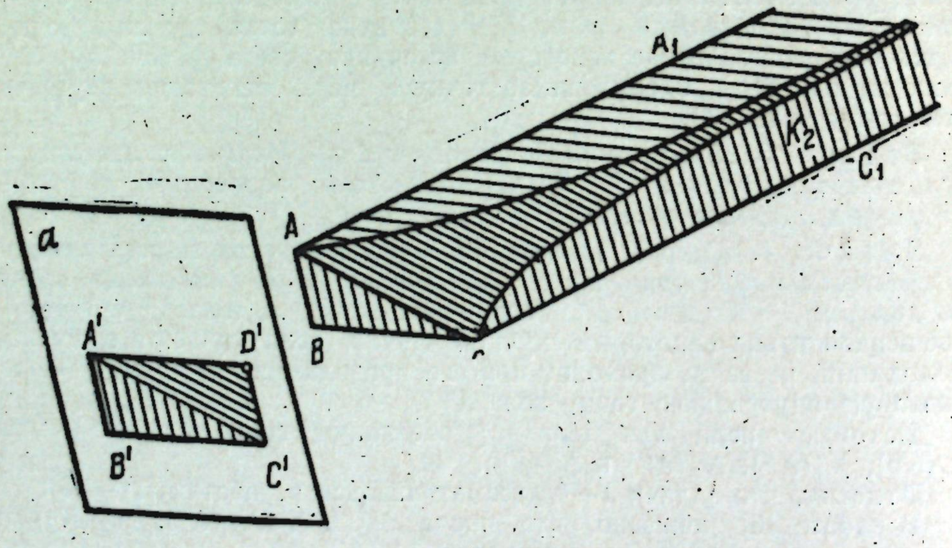

Рис. 2.

2) Пусть K_2 — неограниченное выпуклое тело в E^3, представленное на рис. 2 ($AA_1 \parallel BB_1 \parallel CC_1$), а проекция тела K_2 вдоль AA_1 на плоскость α представляет собой заштрихованный параллелограмм $p = A'B'C'D' = \bar{p} / D'$). Покажем, что $N_4(K_2) < N_3(K_2)$. Легко заметить, что $N_4(K_2) \leqslant 3$, ибо для освещения извне пучками параллельных лучей света всей границы тела K_2 достаточно, как нетрудно видеть, осветить только граничные точки A, B и C этого тела. Более того, $N_4(K_2)=3$, ибо никакие две из точек A, B и C невозможно осветить указанным образом одним пучком. Доказательство неравенства $N_3(K_2)>3$ легко получить от противного. Пусть $N_3(K_2)=3$. Обозначим через $T_i = \tau_i(K_2 / \mathrm{Fr}\, K_2)$, $i=1, 2, 3$ — множества, покрывающие тело

K_2 в смысле задачи 3, где τ_1, τ_2, τ_3 — соответствующие параллельные переносы. Проекцию множества T_i на плоскость α вдоль AA_1, очевидно, можно представить следующим образом: $t_i = \tau'_i(\bar{p} / \mathrm{Fr}\,\bar{p})$, $i=1, 2, 3$. Но так как $T_1 \cup T_2 \cup T_3 \supset K_2$, то и $t_1 \cup t_2 \cup t_3 \supset p$.

Последнее же включение не может иметь место, ибо, как легко заметить, для параллелограмма $\bar{p}$ имеем $N_3(\bar{p}) = N_1(\bar{p}) = 4$, а, очевидно, и $N_3(p)=4$. Следовательно, неравенство $N_3(K_2)>3$ установлено (легко доказывается. что $N_3(K_2)=4$). Таким образом, мы показали, что и задачи 3 и 4 неэквивалентны.

3. Неэквивалентность задач 1 и 4 следует из неравенств (2), примененных к тому же телу K_2: $N_4(K_2) < N_3(K_2) \leqslant N_1(K_2)$.

4) Неравенство $N_2(K_2) < N_1(K_2)$ устанавливается следующим образом. На основе теоремы 4 [6] имеем $N_1(K_2) = N_1(\bar{p})$, а $N_1(\bar{p})$, как было отмечено, равно 4. С другой стороны, равенство $N_2(K_2)=3$ доказывается точно так же, как и равенство $N_4(K_2)=3$. Следовательно, доказана и неэквивалентность задач 1 и 2.

5) Существование фигуры K_3 на плоскости E^2, для которой $N_4(K_3) < N_2(K_3)$ доказано в работе [5]; таким образом, неэквивалентность задач 2 и 4 установлена.

6) На основе соотношений (2) и (3) для K_3 имеем $N_4(K_3) < N_1(K_3)$, что доказывает неэквивалентность задач 1 и 4.

7) Наконец, мы установим неэквивалентность задач 2 и 3 и докажем несравнимость чисел $N_2(K^n)$ и $N_3(K^n)$. Для фигуры K_1 нами было установлено, что $N_3(K_1)=1$. Из работы [5] (пункт 6°) следует, что $N_2(K_1)=2$, следовательно, $N_3(K_1) < N_2(K_1)$. С другой стороны, было доказано, что $N_2(K_2)=3$, а $N_3(K_2)=4$, таким образом, $N_3(K_2) > N_2(K_2)$.

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

1. И. Ц. Гохберг и А. С. Маркус, Одна задача о покрытии выпуклых фигур подобными, Изв. Молд. фил. АН СССР, № 10 (76), 87 (1960).
2. H. Hadwiger, Ungelöste Probleme, № 20, Elem. der Math. 12, 1957, 121.
3. В. Г. Болтянский, Задача об освещении границы выпуклого тела, Изв. Молд. фил. АН СССР, № 10 (76), 79 (1960).
4. F. W., Lewi, Überdeckung eins Eibereiches durch Parallelvers—chibungen eines offenes Kerns, Archiv der Math., 6, 1955, 369—370.
5. В. Н. Визитей. Задачи о покрытии и освещении для неограниченных выпуклых фигур, Изв. АН МССР, № 10 (88), 3 (1962).
6. П. С. Солтан. К задачам о покрытии и освещении выпуклых тел. Изв. АН МССР, № 1,49 (1963).

Известия Академии наук Молдавской ССР, № 4, 1966

И. А. ФЕЛЬДМАН

НЕСКОЛЬКО ЗАМЕЧАНИЙ О СХОДИМОСТИ МЕТОДА ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНЫХ ПРИБЛИЖЕНИЙ

Пусть A — линейный ограниченный оператор, действующий в банаховом пространстве E. В настоящей заметке получены необходимые и достаточные условия применимости метода последовательных приближений к решению уравнения

$$x = Ax + f, \tag{1}$$

т. е. условия сходимости последовательности

$$x_{n+1} = Ax_n + f \qquad (n = 0,\ 1,\ \ldots) \tag{2}$$

при любом начальном приближении x_0.

Очевидно, что если при некотором начальном приближении x_0 последовательность (2) сходится, то ее предел является решением уравнения (1).

Т е о р е м а 1. *Пусть для данного вектора f уравнение (1) разрешимо. Для того чтобы последовательность (2) сходилась при любом начальном приближении x_0, необходимо и достаточно, чтобы последовательность операторов A^k $(k = 0,\ 1, \ldots)$ была сильно сходящейся.*

Н е о б х о д и м о с т ь. Последовательность векторов $B_n f$ $(n=0,\ 1, \ldots)$, где

$$B_n = \sum_{k=0}^{n} A^k,$$

является сходящейся, так как последовательность

$$x_{n+1} = B_n f + A^{n+1} x_0 \tag{3}$$

сходится при любом начальном приближении x_0, и, в частности, при $x_0 = 0$. Теперь в силу того же равенства (3) последовательность операторов A^k $(k = 0, 1, \ldots)$ сильно сходится.

Д о с т а т о ч н о с т ь. Пусть теперь последовательность $A^k (k = 0, 1, \ldots)$ сильно сходится и x — какое-нибудь решение уравнения (1). Тогда последовательность $B_n f = B_n (x - Ax) = x - A^{n+1} x$ $(n = 0, 1, \ldots)$ сходится и в силу (3) сходится последовательность x_n.

З а м е ч а н и е. Если последовательность операторов $A^k (k = 0, 1, \ldots)$ сильно сходится, то ее предел P является проектором на подпространство всех решений уравнения $Ax = x$. Это следует из очевидных равенств $P^2 = P$, $PA = AP = P$.

Остановимся теперь на вопросе о сходимости последовательности (2) при любом свободном члене f и любом начальном приближении x_0. Как известно, условие

а) спектр оператора A находится внутри единичного круга

является достаточным для того, чтобы последовательность (2) сходилась при любых f и x_0. Однако это условие не является, вообще говоря, необходимым. Легко убедиться в том, что если ненулевой спектр оператора A состоит из собственных значений (что имеет место, в частности, когда оператор A вполне непрерывен), то условие а) является и необходимым. Отметим еще известное необходимое условие сходимости последовательности (2) при любых f и x_0: спектр оператора A содержится в замкнутом единичном круге.

Следствием теоремы 1 и замечания к ней является следующий критерий сходимости метода последовательных приближений.

Т е о р е м а 2. *Для того чтобы последовательность (2) сходилась, каковы бы ни были векторы $f, x_0 \in E$, необходимо и достаточно, чтобы оператор $I - A$ был обратим и последовательность операторов A^k $(k = 0,\ 1, \ldots)$ сильно сходилась к нулю.*

Теорема 2 может быть получена также с помощью результатов статьи [1].

В качестве еще одного следствия теоремы 1 можно получить следующее предложение М. А. Красносельского [2].

Т е о р е м а 3. *Пусть A — самосопряженный оператор, действующий в гильбертовом пространстве H. Для того чтобы последовательность (2) сходилась для любого вектора f, для которого разрешимо уравнение (1), необходимо и достаточно, чтобы $\|A\| \leqslant 1$ и число $\lambda = -1$ не было собственным значением оператора A.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Необходимость условий теоремы очевидна. Покажем их достаточность. Пусть P — ортогональный проектор на собственное подпространство оператора A, соответствующее собственному значению $\lambda = 1$, и $Q = I - P$. Тогда $A^n = P + B^n$ $(n = 1,\ 2,\ \ldots)$, где $B = QA = AQ$. Легко видеть, что последовательность операторов B^n $(n = 1,\ 2, \ldots)$ сильно сходится к нулю. Действительно, так как спектральное семейство E_λ оператора B непрерывно в точках ± 1, то для произвольного $\varepsilon > 0$ и произвольного вектора x найдутся числа λ и μ $(-1 < \lambda < \mu < 1)$ такие, что $\|E_\lambda x\| < \varepsilon/3$ и $\|(I - E_\mu) x\| < \varepsilon/3$. Поэтому

$$\|B^n x\| = \|B^n E_\lambda x + B^n (I - E_\mu) x + B^n (E_\mu - E_\lambda) x\| < \frac{2}{3}\varepsilon + \\ + \|B^n (E_\mu - E_\lambda) x\|.$$

Последовательность операторов $B^n (E_\mu - E_\lambda)$ равномерно стремится к нулю, так как $\|B(E_\mu - E_\lambda)\| < 1$. Поэтому для достаточно больших чисел n выполняется соотношение $\|B^n x\| < \varepsilon$. Таким образом, последовательность A^n $(n = 1,\ 2, \ldots)$ сильно сходится к оператору P, и для завершения доказательства достаточно применить теорему 1.

Применимость метода последовательных приближений к решению уравнения (1) при любом свободном члене f эквивалентна сильной сходимости ряда $\sum\limits_{k=0}^{\infty} A^k$. Если единичная окружность содержит точки спектра оператора A, то этот ряд не сходится равномерно. В этом случае полезно воспользоваться следующим замечанием, принадлежащим М. Г. Крейну:

Если ряд $\sum_{k=0}^{\infty} A^k$ *сходится сильно, то последовательность операторов*

$$B_n = I + \sum_{l=1}^{n} \alpha_{l\,n} A^l \ (n=1, 2, \ldots), \text{ где } \alpha_{l\,n} = \sum_{k=l}^{n} 2^{-k} \binom{l-1}{k-1}$$

равномерно сходится к оператору $(I - A)^{-1}$.

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

1. R. Redheffer, Journal of Algebra, 2, № 1 (1965), 42—47.
2. М. А. Красносельский, Усп. матем. наук, 15, вып. 3 (1960), 161—165.

В. Г. ЧЕБАН, Ю. В. ЧУГАЕВСКИЙ

СВОБОДНЫЕ КОЛЕБАНИЯ СТОЛБА НЬЮТОНОВОЙ ЖИДКОСТИ В ТРУБКЕ, ГЕРМЕТИЗИРОВАННОЙ МЕМБРАНАМИ

1. Осесимметричное течение вязкой несжимаемой жидкости по трубке в некотором массовом поле $\vec{F}$ ($F_\varphi = 0$, $F_r = 0$, $F_z = \gamma\,(r, t)$) при отсутствии градиентов давления ($\nabla p = 0$) описывается линеаризованными (для любых Re [1]) уравнениями Навье-Стокса, имеющими в цилиндрической системе координат (r, φ, z) вид [2]:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial V_z(r, t)}{\partial t} = \dfrac{\eta}{\delta}\left(\dfrac{1}{r}\,\dfrac{\partial V_z(r, t)}{\partial r} + \dfrac{\partial^2 V_z(r, t)}{\partial r^2}\right) + \gamma\,(r, t); \\ V_\varphi = V_r = 0. \end{cases} \tag{1}$$

Здесь η и δ — вязкость и плотность жидкости соответственно, z — ось трубы.

Введем смещение $U\,(r, t)$

$$V_z\,(r, t) = \frac{\partial U(r, t)}{\partial t}. \tag{2}$$

Тогда, используя (1), колебания жидкости в трубке можно описать уравнением

$$\delta \frac{\partial^2 U(r, t)}{\partial t^2} - \eta \frac{\partial^2}{\partial r^2}\left(\frac{\partial U\,(r, t)}{\partial t}\right) - \frac{\eta}{r}\,\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{\partial U\,(r, t)}{\partial t}\right) + \\ + \beta\,\frac{\partial U\,(r, t)}{\partial t} + \frac{k}{l}\,U(r, t) = \delta\gamma\,(r, t). \tag{3}$$

Пятый член слева представляет собой при достаточно малых $U\,(r, t)$ упругую реакцию мембраны (k — упругий коэффициент, l — длина трубки). Член $\beta \dfrac{\partial U}{\partial t}$ введен для общности и обусловливает дополнительное затухание, имеющее место, например, если трубку погрузить в вязкую среду ($\beta = \mathrm{const}$).

Граничные и начальные условия естественно выбрать в виде

$$\left.\frac{\partial U\,(r, t)}{\partial r}\right|_{r=0} = 0, \quad \left.U(r, t)\right|_{r=\rho} = 0, \tag{4}$$

$$\left.U(r, t)\right|_{t=0} = f(r), \quad \left.\frac{\partial U\,(r, t)}{\partial t}\right|_{t=0} = 0, \tag{5}$$

где ρ — радиус трубки. Заметим, что первое граничное условие (4) накладывает на $f(r)$ требование иметь в точке $r=0$ экстремум, что практически чаще всего и случается. Вообще же, это ограничение с $f(r)$ можно снять, если условие $\left.\frac{\partial U}{\partial r}\right|_{r=0}=0$ заменить требованием конечности $f(r)$ в области $(0 \leqslant r \leqslant \rho)$. При выводе (3) было предположено, разумеется, что движение жидкости в трубке мало отличается от ее течения внутри бесконечно длинного цилиндра $(l \gg \rho)$.

Рассмотрим свободные колебания $(\gamma(r,\ t)=0)$:

$$\delta\frac{\partial^2 U(r,t)}{\partial t^2} - \eta\frac{\partial^2}{\partial r^2}\left(\frac{\partial U(r,t)}{\partial t}\right) - \frac{\eta}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{\partial U(r,t)}{\partial t}\right) + \beta\frac{\partial U(r,t)}{\partial t} + \xi U(r,\ t) = 0,\quad \xi = \frac{k}{l}. \tag{6}$$

Положим

$$U(r,\ t) = R(r)\,T(t) \tag{7}$$

и разделим переменные. Тогда

$$\left[\delta\frac{\partial^2 T(t)}{\partial t^2} + \beta\frac{\partial T(t)}{\partial t} + \xi T(t)\right]\left(\frac{\partial T(t)}{\partial t}\right)^{-1} = \left[\eta\frac{\partial^2 R(r)}{\partial r^2} + \frac{\eta}{r}\frac{\partial R(r)}{\partial r}\right]R^{-1}(r) = -a, \tag{8}$$

или

$$\eta\frac{\partial^2 R(r)}{\partial r^2} + \frac{\eta}{r}\frac{\partial R(r)}{\partial r} + aR(r) = 0, \tag{9}$$

$$\delta\frac{\partial^2 T(t)}{\partial t^2} + (\beta + a)\frac{\partial T(t)}{\partial t} + \xi T(t) = 0. \tag{10}$$

Решение уравнения (9) представляет собой суперпозицию функций Бесселя первого и второго рода [3]:

$$R(r) = C_1 I_0\left(\sqrt{\frac{a}{\eta}}\, r\right) + C_2 Y_0\left(\sqrt{\frac{a}{\eta}}\, r\right). \tag{11}$$

Требование конечности $R(r)$ в точке $r=0$ (или первое условие (4) дает $C_2=0$. Второе условие (4) задает уравнение собственных значений a:

$$I_0\left(\sqrt{\frac{a}{\eta}}\,\rho\right) = 0. \tag{12}$$

Если λ_n — один из корней функции $J_0(x)$, то соответствующее собственное значение a равно

$$a_n = \frac{\lambda_n^2}{\rho^2}\eta. \tag{13}$$

Вид решения уравнения (10), как известно [3], определяется свойствами корней его характеристического уравнения. Именно при разных вещественных корнях решение описывает апериодическое движение жидкости вида:

$$T_n(t) = A_n \exp\left[\left\{-\frac{(\beta + a_n)}{2\delta} + \frac{1}{2\delta}\sqrt{(\beta + a_n)^2 - 4\xi\delta}\right\}t\right] + B_n \exp\left[\left\{-\frac{(\beta + a_n)}{2\delta} - \frac{1}{2\delta}\sqrt{(\beta + a_n)^2 - 4\xi\delta}\right\}t\right], \tag{14}$$

$$(\beta + a_n)^2 - 4\xi\delta > 0. \tag{15}$$

Комплексные сопряженные корни задают затухающие колебания:

$$T_n(t) = \exp\left[-\frac{(\beta + a_n)}{2\delta}\,t\right]\left[A_n\cos\alpha_n t + B_n \sin\alpha_n t\right], \tag{16}$$

$$\alpha_n = \frac{1}{2\delta}\sqrt{4\xi\delta - (\beta + a_n)^2}, \tag{17}$$

$$(\beta + a_n)^2 - 4\xi\delta < 0. \tag{18}$$

Наконец, кратные действительные корни дадут решение

$$T_n(t) = (A_n + B_n t)\exp\left[-\frac{(\beta + a_n)}{2\delta}\,t\right], \tag{19}$$

$$(\beta + a_n)^2 - 4\xi\delta = 0, \tag{20}$$

как и (15), описывающее апериодическое движение жидкости в трубке.

В случае (15) полное решение уравнения (6), следовательно, запишется в виде ряда:

$$U(r,\ t) = \sum_{n=1}^{\infty} I_0\left(\frac{\lambda_n}{\rho}\, r\right)\left\{A_n \exp\left[\left(-\frac{(\beta + a_n)}{2\delta} + \frac{1}{2\delta}\sqrt{(\beta + a_n)^2 - 4\xi\delta}\right)t\right] + B_n \exp\left[\left(-\frac{(\beta + a_n)}{2\delta} - \frac{1}{2\delta}\sqrt{(\beta + a_n)^2 - 4\xi\delta}\right)t\right]\right\}. \tag{21}$$

Воспользуемся первым начальным условием (5):

$$U(r,\ 0) = \sum_{n=1}^{\infty} I_0\left(\frac{\lambda_n}{\rho}\, r\right)(A_n + B_n) = f(r). \tag{22}$$

Рассматривая (22) как ряд Фурье—Бесселя для $f(r)$ [4], найдем коэффициенты этого разложения по Ломмелю:

$$p_n = A_n + B_n = \frac{2}{\rho^2 I_1^2(\lambda_n)}\int_0^{\rho} t\, f(t)\, I_0\left(\frac{\lambda_n}{\rho}\, t\right) dt. \tag{23}$$

Используя далее второе начальное условие (5), найдем

$$A_n\left[-\frac{(\beta + a_n)}{2\delta} + \frac{1}{2\delta}\sqrt{(\beta + a_n)^2 - 4\xi\delta}\right] + B_n\left[-\frac{(\beta + a_n)}{2\delta} - \frac{1}{2\delta}\sqrt{(\beta + a_n)^2 - 4\xi\delta}\right] = 0, \tag{24}$$

что определит A_n и B_n в виде

$$A_n = \frac{(\beta + a_n) + \sqrt{(\beta + a_n)^2 - 4\xi\delta}}{2\sqrt{(\beta + a_n)^2 - 4\xi\delta}}\, p_n,\qquad B_n = \frac{-(\beta + a_n) + \sqrt{(\beta + a_n)^2 - 4\xi\delta}}{2\sqrt{(\beta + a_n)^2 - 4\xi\delta}}\, p_n. \tag{25}$$

В случае (16) точное решение исходного уравнения запишется как:

$$U(r,\ t) = \sum_{n=1}^{\infty} I_0\left(\frac{\lambda_n}{\rho}\, r\right)\exp\left[-\frac{(\beta + a_n)}{2\delta}\,t\right]\cdot\left[A_n\cos\alpha_n t + B_n \sin\alpha_n t\right], \tag{26}$$

где, как легко видеть, для выполнения (5) следует положить

$$A_n = p_n,\quad B_n = \frac{(\beta + a_n)}{2\delta\alpha_n}\, p_n. \qquad (27)$$

Аналогично в последнем варианте (19) найдем

$$U(r,\ t) = \sum_{n=1}^{\infty} I_0\left(\frac{\lambda_n}{\rho} r\right)\left(A_n + B_n t\right)\exp\left[-\frac{(\beta + a_n)}{2\delta} t\right], \qquad (28)$$

где

$$A_n = p_n,\quad B_n = \frac{(\beta + a_n)}{2\delta}\, p_n. \qquad (29)$$

3. Приведем выражения коэффициентов p_n для одного практически интересного случая. Положим

$$f(r) = \sigma(\rho^2 - r^2),\ \sigma = \text{const}. \qquad (30)$$

Такая функция соответствует параболоидальной геометрии мембран и может быть получена в результате движения вязкой жидкости в трубе под действием массового поля вида $\vec{F}(F_\varphi = 0,\ F_r = 0,\ F_z = \gamma_0 = \text{const})$ (например, поля тяжести). Причем предполагается, что поле действует в течение времени $\tau \geqslant \tau^* \sim \frac{\rho}{c}$ (τ^* — время релаксации, c — скорость звука), но малого настолько, что упругой реакцией мембраны можно пренебречь. В момент $t = \tau$ поле отключается и жидкость начинает свободно колебаться в трубе под действием реакции мембран.

Итак,

$$p_n = \frac{2\sigma}{\rho^2 I_1^2(\lambda_n)} \int_0^{\rho} t(\rho^2 - t^2)\, I_0\left(\frac{\lambda_n}{\rho} t\right) dt. \qquad (31)$$

Полагая $I = \frac{\lambda_n}{\rho} t$ и трижды интегрируя по частям, найдем:

$$p_n = 8\sigma\rho^2\lambda_n^{-3} I_1^{-1}(\lambda_n). \qquad (32)$$

Примечание. Корни характеристического уравнения для $T(t)$ ввиду положительности коэффициентов не могут быть положительными. При $t = 0$ ряды сходятся, ибо они представляют начальное значение $U(r,\ t)$ в интервале $(0,\ \rho)$. При $t > 0$ у членов ряда имеются множители вида $e^{\varepsilon t}$, где $\varepsilon < 0$ для вещественного ε, и $\varepsilon = \mathrm{Re}\,\varepsilon + \mathrm{Im}\,\varepsilon$, $\mathrm{Re}\,\varepsilon < 0$ для комплексных ε. Последнее обстоятельство только улучшает сходимость рядов.

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

1. Н. А. Слезкин, Динамика вязкой несжимаемой жидкости, М., Гостехиздат, 1955.
2. Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц, Механика сплошных сред, М., 1953 стр. 70.
3. Э. Камке, Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям ИЛ, 1951.
4. Г. Н. Ватсон, Теория бесселевых функций, ч. I, ИЛ, 1949.

Известия Академии наук Молдавской ССР № 4, 1966

И. С. ЧЕБОТАРУ

О ПРИБЛИЖЕННОМ РЕШЕНИИ УРАВНЕНИЙ ТИПА ВИНЕРА—ХОПФА В НЕКОТОРЫХ ПРОСТРАНСТВАХ

В работах [1], [2], [3] дается обоснование одного приближенного метода решения интегральных уравнений типа Винера—Хопфа и их дискретных аналогов, рассматриваемых в пространствах $l_p (p \geqslant 1)$, c_0, $L_p (p \geqslant 1)$, C_0 (см. [4]). В настоящей заметке эти результаты распространяются на случай пространств m, M^+, c, C^+ (см. [4]).

1. Пусть L — пространство Банаха, L^* — его сопряженное пространство, а Λ — некоторое неограниченное множество положительных чисел. В L рассмотрим семейство проекторов P_τ ($\tau \in \Lambda$), которое сильно сходится к единичному оператору при $\tau \to \infty$. Вводим обозначение: $Q_\tau = P_\tau^*$ ($\tau \in \Lambda$). Пусть, далее, C — линейный ограниченный оператор, являющийся сопряженным оператором к некоторому линейному ограниченному обратимому оператору A из L.

Тогда имеет место следующая

Теорема 1. *Если, начиная с некоторого $\tau \in \Lambda$ операторы $P_\tau A P_\tau$ ($\tau \in \Lambda$, $\tau \geqslant \tau_0$) обратимы в $P_\tau L$ и $(P_\tau A P_\tau)^{-1} P_\tau$ при $\tau \to \infty$ стремятся сильно к A^{-1}, то операторы $Q_\tau C Q_\tau$* обратимы на $Q_\tau L^*$ *и при $\tau \to \infty$ имеет место соотношение*

$$[(Q_\tau C Q_\tau)^{-1} Q_\tau f]\ (x) \to C^{-1} f\ (x) \qquad (1.1)$$

для любого $f \in L^*$ и $x \in L$.

Доказательство. Легко видеть, что при $\tau \geqslant \tau_0$ имеют место соотношения

$$(Q_\tau C Q_\tau) \cdot [(P_\tau A P_\tau)^{-1} P_\tau]^* = Q_\tau$$

и

$$[(P_\tau A P_\tau)^{-1} P_\tau]^* \cdot (Q_\tau C Q_\tau) = Q_\tau.$$

Следовательно, при $\tau \geqslant \tau_0$ оператор $Q_\tau C Q_\tau$ обратим в подпространстве $Q_\tau L^*$, причем $(Q_\tau C Q_\tau)^{-1} Q_\tau = [(P_\tau A P_\tau)^{-1} P_\tau]^*$. Пусть f — любой элемент из L^*. Тогда в силу условия теоремы для любого $x \in L$ при $\tau \to \infty$ получаем:

$$[(Q_\tau C Q_\tau)^{-1} Q_\tau f]\ (x) = f\,[(P_\tau A P_\tau)^{-1} P_\tau x] \to f\,[A^{-1} x] = (C^{-1} f)\ (x)$$

Теорема доказана.

2. Пусть $L = l_1$. Тогда $L^* = m$. Обозначим через C оператор из m, порожденный левой частью следующей бесконечной системы линейных алгебраических уравнений:

$$\sum_{j=0}^{\infty} a_{i-j} x_j = y_i\ (i = 0, 1, 2 \ldots), \qquad (2.1)$$

где $y=(y_0, y_1, y_2, \ldots) \in m$, а $\sum_{k=-\infty}^{\infty} |a_k| < \infty$.

С помощью теоремы 1 и результатов статьи [1] доказывается следующее утверждение.

Теорема 2. *Если* $a(t)=\sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k t^k \neq 0$ *при* $|t|=1$ *и число*

$$\varkappa = \frac{1}{2\pi}\left[\arg a(e^{i\varphi})\right]_0^{2\pi}=0,$$

то, начиная с некоторого n, *система*

$$\sum_{j=0}^{n} a_{i-j}x_j = y_i \quad (i=0,1,2,\ldots,n) \qquad (2.2)$$

имеет при любом $y\in m$ *единственное решение* $x^{(n)}=(x_0^{(n)}, x_1^{(n)}, \ldots x_n^{(n)})$, *причем для любого вектора* $\xi=(\xi_0,\xi_1,\xi_2,\ldots)\in l_1$ *выполняется соотношение*

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^n x_k^{(n)}\xi_k = \sum_{k=0}^\infty x_k\xi_k, \qquad (2.3)$$

где $x=(x_0,x_1,x_2,\ldots)$ — *единственное решение системы (2.1).*

Доказательство. Очевидно, что C является сопряженным оператором к оператору A из l_1, порожденным левой частью системы

$$\sum_{j=0}^\infty a_{j-i}\xi_j=\eta_i \quad (i=0,1,2,\ldots),$$

где $\eta=(\eta_0,\eta_1,\eta_2,\ldots)\in l_1$.

Обозначим через P_n проектор в l_1, определенный равенством $P_n\eta=(\eta_0,\eta_1,\ldots\eta_n,0,0,\ldots)$. Известно, что P_n сильно сходится при $n\to\infty$ к единичному оператору. Тогда оператор $Q_n=P_n^*$ будет проектором в m, который определяется равенством $Q_n y=(y_0,y_1,\ldots y_n,0,0,\ldots)$. Так как $a(t)\neq 0$ при $|t|=1$ и $\varkappa=0$, то в силу [1] оператор A обратим и, начиная с некоторого n_0, обратимы в $P_n l_1$ и операторы P_nAP_n $(n\geqslant n_0)$, причем $(P_nAP_n)^{-1}P_n$ сходятся сильно к A^{-1}. Применяя теперь теорему 1, получаем, что при $n\geqslant n_0$ операторы Q_nCQ_n обратимы в $Q_n m$, т. е. система (1.3) имеет при любом $y\in m$ единственное решение:

$$x^{(n)}=(Q_nCQ_n)^{-1}Q_n y=(x_0^{(n)},x_1^{(n)},\ldots,x_n^{(n)},0,0,\ldots),$$

причем для любого $\xi=(\xi_0,\xi_1,\xi_2,\ldots)\in l_1$ выполняется соотношение (2.3). Теорема доказана.

Следствие. *Если* $a(t)\neq0$ *при* $|t|=1$ *и* $\varkappa=0$, *то, начиная с некоторого* n, *система (1.3) имеет при любом* $y\in m$ *единственное решение* $x^{(n)}=(x_0^{(n)},x_1^{(n)},\ldots,x_n^{()})$, *причем для любого* k *имеет место соотношение*

$$\lim_{n\to\infty}x_k^{(n)}=x_k,$$

где $x=(x_0,x_1,\ldots)$ — *единственное решение системы (2.1).*

Это предложение вытекает из (2.3), если в этом равенстве положить $\xi=(\underbrace{0,0,\ldots,0}_{k\ \text{нулей}},1,0,0,\ldots)$.

Замечание. Используя предыдущее следствие, легко можно доказать, что для любого фиксированного k последовательность $P_k x^{(n)}$ сходится по норме m к $P_k x$.

3. В качестве другого примера рассмотрим в пространстве M^+ (см. [4]) следующее интегральное уравнение типа Винера—Хопфа:

$$\varphi(t)-\int_0^\infty k(t-s)\varphi(s)\,ds=f(t), \ (0\leqslant t\leqslant\infty) \qquad (3.1)$$

где $f(t)\in M^+$, а $k(t)\in L_1(0,\infty)$.

Вводим обозначения: $K(\lambda)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} k(t)\,e^{i\lambda t}dt$ и $\varkappa=\operatorname{ind}[1-K(\lambda)]=$

$$=\frac{1}{2\pi}\left[\arg(1-K(\lambda))\right]_{-\infty}^{+\infty}.$$

Теорема. 3. *Если* $1-K(\lambda)\neq0$ *при* $-\infty<\lambda<\infty$ *и* $\varkappa=0$, *то, начиная с некоторого* τ, *уравнение*

$$\varphi(t)-\int_0^\tau k(t-s)\,\varphi_\tau(s)\,ds=f_\tau(t)\ \ (0\leqslant t\leqslant\tau) \qquad (3.2)$$

имеет при любой функции $f(t)\in M^+$ *единственное решение* $\varphi_\tau(t)$, *причем для любого* $h(t)\in L_1(0,\infty)$ *выполняется соотношение*

$$\lim_{\tau\to\infty}\int_0^\tau \varphi_\tau(t)\,h(t)\,dt=\int_0^\infty\varphi(t)\,h(t)\,dt, \qquad (3.3)$$

где $\varphi(t)$ — *единственное решение уравнения (3.1).*

Доказательство. Эту теорему также можно доказать применением общей теоремы 1. В самом деле, оператор C, определенный в M^+ левой частью интегрального уравнения (3.1), является сопряженным оператором к оператору A из $L_1(0,\infty)$, определенному формулой:

$$A\psi\equiv\psi(t)-\int_0^\infty k(s-t)\,\psi(s)\,ds \quad (0\leqslant t\leqslant\infty).$$

В силу условия теоремы из [4] следует, что оператор A обратим. Если через P_τ $(\tau\geqslant0)$ обозначать проектор в $L_1(0,\infty)$, определенный равенством

$$P_\tau\psi(t)=\begin{cases}\psi(t) & \text{при } 0\leqslant t\leqslant\tau\\ 0 & \text{при } t>\tau,\end{cases}$$

то оператор $Q_\tau=P_\tau^*$ $(\tau\geqslant0)$ определяется в M^+ равенством

$$Q_\tau\varphi(t)=\begin{cases}\varphi(t) & \text{при } 0\leqslant t\leqslant\tau\\ 0 & \text{при } t>\tau.\end{cases}$$

Для завершения доказательства теоремы 3 ссылкой на теорему 1 остается заметить, что из [2] следует, что, начиная с некоторого τ, операторы $P_\tau AP_\tau$ обратимы в подпространстве $P_\tau L_1$, причем последовательность $(P_\tau AP_\tau)^{-1}P_\tau$ сильно сходится при $\tau\to\infty$ к оператору A^{-1}, и что любой линейный непрерывный функционал в $L_1(0,\infty)$ имеет вид $\int_0^\infty\varphi(t)\,h(t)\,dt$, где функция $h(t)\in M^+$, а $\varphi(t)\in L_1(0,\infty)$.

4. В пространстве c (см. [4]) рассмотрим следующую бесконечную систему линейных алгебраических уравнений:

$$\sum_{j=0}^{\infty} a_{i-j}\xi_j=\eta_i \qquad (i=0,\ 1,\ 2,\ \ldots), \tag{4.1}$$

где $\sum\limits_{k=-\infty}^{\infty} |a_k| < \infty$.

Вводим следующие обозначения: $a(t)=\sum\limits_{k=-\infty}^{\infty} a_k t^k$; $\eta^0=\lim\limits_{k\to\infty}\eta_k$.

Теорема 4. *Если* $a(t)\neq 0$ *при* $|t|=1$ *и число* $\varkappa=\frac{1}{2\pi}\times$ $\times\Big[\arg a(e^{i\varphi})\Big]_{\varphi=0}^{\varphi=2\pi}=0$, *то, начиная с некоторого* n, *система уравнений*

$$\sum_{j=0}^{n} a_{i-j}h_j=\eta_i+\frac{\eta_0\sum\limits_{j=0}^{\infty}a_{i-j}}{a(1)} \qquad (i=0,1,2\ldots,\ n) \tag{4.2}$$

имеет единственное решение $(h_0^{(n)}, h_1^{(n)}, \ldots, h_n^{(n)})$ *при любом* $\eta\in c$ *и что вектор*

$$(h_0^{(n)}+\xi^0,\ h_1^{(n)}+\xi^0,\ \ldots,\ h_n^{(n)}+\xi^0,\ \xi^0,\ \xi^0\ \ldots),\ \textit{где}\ \xi^0=\lim_{n\to\infty}\xi_n$$

стремится по норме пространства c *к единственному решению* $\xi=(\xi_0,\ \xi_1,\ \ldots)$ *уравнения (4.1).*

Доказательство. В силу условия теоремы из [4] следует, что при любой правой части система (4.1) имеет единственное решение $\xi=(\xi_0,\ \xi_1,\ \ldots)$, принадлежащее c. Представим вектор ξ в следующем виде $\xi=(h_0,\ h_1,\ \ldots)+(\xi^0,\xi^0,\xi^0,\ \ldots)$, где вектор $h=(h_0, h_1,\ \ldots)$ принадлежит пространству c_0.

Подставляя h в систему (4.1), получаем, что вектор ξ удовлетворяет следующей бесконечной системе:

$$\sum_{j=0}^{\infty}a_{i-j}\,h_j=\eta_i-\xi^0\sum_{j=0}^{\infty}a_{i-j} \qquad (i=0,\ 1,\ 2,\ \ldots). \tag{4.3}$$

Переходя здесь к пределу при $i\to\infty$, получаем:

$$\eta^0+\xi^0\sum_{l=-\infty}^{\infty}a_l=\eta^0+\xi^0\ a(1)=0.$$

Отсюда, в силу условия $a(1)\neq 0$, получаем $\xi^0=-\frac{\eta^0}{a(1)}$.

Подставляя это значение для ξ^0 в (4.3), получаем:

$$\sum_{j=0}^{\infty}a_{i-j}\,h_j=\eta_i+\frac{\eta^0}{a(1)}\sum_{j=0}^{\infty}a_{i-j} \qquad (i=0,\ 1,\ 2,\ \ldots)$$

Правая часть этой системы является вектором из c_0. В силу условия теоремы из [3] следует, что, начиная с некоторого n, система

$$\sum_{j=0}^{n}a_{i-j}\,h_j=\eta_i+\frac{\eta^0}{a(1)}\sum_{j=0}^{\infty}a_{i-j}, \qquad (i=0,\ 1,\ 2,\ \ldots,\ n)$$

имеет единственное решение $(h_0^{(n)},\ h_1^{(n)}\ \ldots\ h_n^{(n)})$, причем вектор $(h_0^{(n)},\ h_1^{(n)},\ \ldots\ h_n^{(n)};\ 0,\ 0,\ \ldots)$ стремится по норме c_0 к единственному решению $(h_0,\ h_1,\ \ldots) \in c_0$ системы (4.2).

Отсюда уже очевидным образом вытекает и утверждение теоремы 4.

5. В этом пункте мы рассмотрим континуальный аналог предыдущей теоремы.

В пространстве C^+ (см. [4]) рассмотрим уравнение

$$\varphi(t)-\int_{-\infty}^{\infty}k(t-s)\,\varphi(s)\,ds=f(t) \qquad (0\leqslant t\leqslant\infty). \tag{5.1}$$

Пусть $f^0=\lim\limits_{t\to\infty}f(t)$.

Теорема 5. *Если* $1-K(\lambda)\neq 0$ *при* $-\infty\leqslant\lambda\leqslant\infty$ *и число* $\varkappa=$ $=\operatorname{ind}[1-K(\lambda)]=0$, *то, начиная с некоторого* τ, *уравнение*

$$g_\tau^0(t)-\int_0^\tau k(t-s)\,g_\tau^0(s)\,ds=h(t)-\frac{f}{1-K(0)}\cdot\int_t^\infty k(\sigma)\,d\sigma,$$

$$(0\leqslant t\leqslant\tau) \tag{5.2}$$

где $h(t)=f(t)-f^0\in C_0^+$, *имеет при любом* $f(t)\in C^+$ *единственное решение* $g_\tau^0(t)$ *и функция*

$$\varphi_\tau(t)=g_\tau(t)+\frac{f^0}{1-K(0)}, \tag{5.3}$$

где

$$g_\tau(t)=\begin{cases} g_\tau^0(t) \text{ при } 0\leqslant t\leqslant\tau \\ -\tau\, g_\tau^0(\tau)\,t+(\tau^2+1)\,g_\tau^0(\tau) \text{ при } \tau\leqslant t\leqslant\tau+\frac{1}{\tau} \\ 0 \quad \text{при} \quad \tau+\frac{1}{\tau}\leqslant t\leqslant\infty \end{cases}$$

при $\tau\to\infty$ *стремится по норме* C^+ *к единственному решению* $\varphi(t)$ *уравнения* (5.1).

Доказательство. В силу условия теоремы уравнение (5.1) имеет (см. 4) при любой правой части $f(t)\in C^+$ единственное решение $\varphi(t)\in C^+$. Пусть $\lim\limits_{t\to\infty}\varphi(t)=\varphi^0$. Тогда $\varphi(t)$ может быть представлена в виде

$$\varphi(t)=g(t)+\varphi^0,$$

где $g(t)\in C_0$. Постоянную φ^0 легко можно определить. В самом деле, подставляя (5.4) в (5.1), получаем:

$$g(t)-\int_0^\infty k(t-s)\,g(s)\,ds=f(t)-\varphi^0\cdot\Big[1-\int_0^\infty k(t-s)\,ds\Big].$$

$$(0\leqslant t\leqslant\infty)$$

Отсюда, в силу того, что

$$1-\int_{0}^{\infty} k(t-s)\,ds = 1-\int_{-\infty}^{t} k(\sigma)\,d\sigma,$$

при $t \to \infty$ получаем:

$$f^0-\varphi^0\left(1-\int_{-\infty}^{\infty} k(\sigma)\,d\sigma\right)=0.$$

Но

$$1-\int_{-\infty}^{\infty} k(\sigma)\,d\sigma = 1-K(0)\neq 0.$$

Поэтому

$$\varphi^0=\frac{f^0}{1-K(0)}. \tag{5.6}$$

Используя (5.6), уравнение (5.5) может быть приведено к виду

$$g(t)-\int_{0}^{\infty} k(t-s)\,g(s)\,ds = h(t)-\frac{f^0}{1-K(0)}\cdot\int_{t}^{\infty} k(\sigma)\,d\sigma,$$

$$(0\leqslant t\leqslant\infty). \tag{5.7}$$

Наряду с уравнением (5.7) рассмотрим уравнение (5.2). В силу условия теоремы из [3] следует, что, начиная с некоторого τ, уравнение (5.2) разрешимо при любом $f(t)\in C^{+}$ и что функция $g_{\tau}(t)$ при $\tau\to\infty$ стремится по норме C_0 к точному решению $g(t)$ уравнения (5.7). Отсюда уже следует и справедливость теоремы.

Замечание. Результаты, изложенные в этой заметке, легко обобщаются на случаи ненулевого индекса. Кроме того, все результаты переносятся и на другие классы уравнений типа Винера—Хопфа (парные, транспонированные к парным), а также на системы таких уравнений при определенных ограничениях на частные индексы (см. [5].

Автор благодарит И. Ц. Гохберга и И. А. Фельдмана за обсуждение результатов настоящей заметки.

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

1. И. Ц. Гохберг, В. Г. Чебан, О методе редукции для дискретных аналогов уравнений типа Винера—Хопфа, Укр. матем. журнал, 16, № 6 (1964).
2. И. С. Чеботару, Об одном приближенном методе решения интегральных уравнений типа Винера—Хопфа, Исследования по алгебре и математическому анализу, Кишинев, 1965.
3. И. Ц. Гохберг и И. А. Фельдман, О приближенном решении некоторых классов линейных уравнений, ДАН, 160, № 4 (1965).
4. М. Г. Крейн, Интегральные уравнения на полупрямой с ядром, зависящим от разности аргументов, Усп. матем. наук, XII, вып. 5 (1958).
5. И. Ц. Гохберг и И. А. Фельдман, О методе редукции для систем уравнений типа Винера—Хопфа, ДАН СССР. 165, № 2 (1965).

Известия Академии наук Молдавской ССР, № 4. 1966

Д. И. ШИЛЬКРУТ

ОБ ОДНОМ МЕТОДЕ ПРИБЛИЖЕННОГО РЕШЕНИЯ ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ТИПА ВОЛЬТЕРРА

1. В работах [1, 2] дано описание алгоритма одного метода приближенного решения дифференциальных уравнений, а также приведены решения ряда задач механики, полученные посредством этого алгоритма. Указанный метод распространяется и на интегральные уравнения типа Вольтерра, о чем говорится в настоящей статье.

2. Сначала дадим формальное описание алгоритма для уравнения (1):

$$y(t)+\int_{0}^{t} y(\tau)\,S(t,\tau)\,d\tau = f(t). \tag{1}$$

Алгоритм строится по шаговому принципу, и на первом шаге $(0\leqslant t\leqslant\Delta t)$ приближенное решение $y_1(t)$ ищется в виде:

$$y_1(t)=\sum_{m=0}^{k}\overset{(m)}{y}(0)\,\frac{t^m}{m!}+\frac{a_1 t^{k+1}}{(k+1)!}=\tilde{y}_1(t)+\frac{a_1 t^{k+1}}{(k+1)!};$$

$$(0\leqslant t\leqslant\Delta t). \tag{2}$$

Для определения констант $\overset{(m)}{y}(0)$; $(m=0,1,\ldots,k)$ подставим $y_1(t)$ из (2) в (1). Тогда получим:

$$\sum_{m=0}^{k}\overset{(m)}{y}(0)\,\frac{t^m}{m!}+\frac{a_1 t^{k+1}}{(k+1)!}+\sum_{m=0}^{k}\frac{\overset{(m)}{y}(0)}{m!}\int_{0}^{t}\tau^m S(t,\tau)\,d\tau+$$

$$+\frac{a_1}{(k+1)!}\int_{0}^{t}\tau^{k+1} S(t,\tau)\,d\tau = f(t)+0\,(\Delta t^{k+2}). \tag{3}$$

Предполагая существование k непрерывных частных производных у функции $S(t,\tau)$ в квадрате $(0\leqslant t,\ \tau\leqslant b)$ (естественно, что $\Delta t<b$), получим:

$$\lim_{t\to 0}\int_{0}^{t}\tau^{j}\,\frac{\partial^m}{\partial t^m}S(t,\tau)\,d\tau=0,$$

где

$$(m=0,1,\ldots,k);\quad (j=0,1,\ldots,k). \tag{4}$$

Тогда, устремляя в (3) $t \to 0$, получим $y(0) = f(0)$. Дифференцируя (3) по t, устремляя после этого $t \to 0$ и учитывая при этом соотношения (4), получим последовательно $y'(0)$, $y''(0)$, . . . , $\overset{(m)}{y}(0)$, если $f(t)$ также k-раз дифференцируема. Неопределенная константа a_1 найдется из условия удовлетворения $y_1(t)$ уравнению (1) в концевой точке шага $t = \Delta t$. С этой целью подставим в уравнение (3) $t = \Delta t$ и получим a_1 в виде:

$$\frac{a_1}{(k+1)!} = \frac{f(\Delta t) - \tilde{y}_1(\Delta t) - \int\limits_0^{\Delta t} \tilde{y}_1(\tau) S(\Delta t, \tau)\, d\tau}{(\Delta t)^{k+1} + \int\limits_0^{\Delta t} \tau^{k+1} S(\Delta t, \tau)\, d\tau}. \tag{5}$$

На втором шаге $(\Delta t) \leqslant t \leqslant 2\Delta t < b$)*) решение ищется в виде, аналогичном (2):

$$y_2(t) = \sum_{m=0}^{k} \overset{(m)}{y_2}(\Delta t)\, \frac{(t-\Delta t)^m}{m!} + \frac{a_2 (t-\Delta t)^{k+1}}{(k+1)!} =$$

$$= \tilde{y}_2(t) + \frac{a_2(t-\Delta t)^{k+1}}{(k+1)!}; \qquad (\Delta t \leqslant t \leqslant 2\Delta t). \tag{6}$$

Само же уравнение (1) представим на этом шаге в виде:

$$y(t) + \int\limits_{\Delta t}^{t} y(\tau) S(t, \tau)\, d\tau = f(t) - \varphi_2(t), \tag{7}$$

где

$$\varphi_2(t) = \int\limits_0^{\Delta t} y_1(\tau) S(t, \tau)\, d\tau.$$

Параметр $y_2(\Delta t) = y_1(\Delta t)$, а остальные $\overset{(m)}{y_2}(\Delta t)$; $(m = 1, 2, \ldots, k)$ определяются так же, как и $\overset{(m)}{y}(0)$, только с той разницей, что при этом совершается предельный переход $t \to \Delta t$. Новая константа a_2 определяется из условия удовлетворения $y_2(t)$ уравнению (7) в конце данного шага $(t = 2\Delta t)$.

Тогда получим:

$$\frac{a_2}{(k+1)!} = \frac{f(2\Delta t) - \varphi_2(2\Delta t) - \tilde{y}_2(2\Delta t) - \int\limits_{\Delta t}^{2\Delta t} \tilde{y}_2(\tau) S(2\Delta t, \tau)\, d\tau}{(\Delta t)^{k+1} + \int\limits_{\Delta t}^{2\Delta t} \tau^{k+1} S(2\Delta t, \tau)\, d\tau} \text{ и т. д.} \tag{8}$$

*) Равенство длин всех шагов не существенно для рассматриваемого алгоритма.

На каком-то j-том шаге решаемое уравнение представляется в виде:

$$y(t) + \int\limits_{(j-1)\Delta t}^{t} y(\tau) S(t, \tau)\, d\tau = f(t) - \varphi_j(t);$$

$$((j-1)\Delta t \leqslant t \leqslant j\Delta t < b), \tag{9}$$

где

$$\varphi_j(t) = \sum_{i=1}^{j-1} \int\limits_{(i-1)\Delta t}^{i\Delta t} y_i(\tau) S(t, \tau)\, d\tau. \tag{10}$$

Решение ищется в форме, аналогичной (2), (6), где вводится соответствующий поправочный неопределенный параметр a_j, который находится из условия удовлетворения уравнению (9) в конце шага $t = j\Delta t$.

3. Рассмотрим вопрос о стремлении приближенного решения при $\Delta t \to 0$ и при постоянном k на фиксированном отрезке $0 \leqslant t \leqslant T$. Предположим в связи с этим, что ядро $S(t, \tau)$ имеет в квадрате $[0 \leqslant t, \tau \leqslant b]$ $k+1$ непрерывных частных производных по t и τ, а $f(t)$ $(k+1)$ раз дифференцируема в интервале $[0 \leqslant t \leqslant b]$. Тогда, если $T \leqslant b$, уравнение (1) имеет единственное решение, представимое в интервале $[0, T]$ в виде отрезка ряда Тейлора, содержащего $k+1$ членов с остатком в форме Лагранжа [3, 4], и все операции по рассматриваемому алгоритму правомочны при любом $\Delta t \leqslant T < b$. Зафиксируем Δt и построим функцию невязки $\varepsilon_j(t, \Delta t)$ на j-том шаге по формуле:

$$\varepsilon_j(t, \Delta t) = y_j(t, \Delta t) +$$

$$+ \int\limits_{(j-1)\Delta t}^{t} y_j(\tau, \Delta t) S(t, \tau)\, d\tau - f(t) + \varphi_j(t, \Delta t)$$

$$((j-1)\Delta t \leqslant t \leqslant j\Delta t \leqslant T). \tag{11}$$

В силу выбранного алгоритма построения приближенного решения и ограничений, положенных на $f(t)$ и $S(t, \tau)$, невязки $\varepsilon_j(t, \Delta t)$ являются непрерывными функциями от t и Δt удовлетворяют условиям:

$$\varepsilon_j((j-1)\Delta t, \Delta t) = \varepsilon_j(j\Delta t, \Delta t) = 0. \tag{12}$$

Образуем приближенное решение $\overline{y}(t, \Delta t)$ на интервале $(0, T)$ по форме:

$$\overline{y}(t, \Delta t) = \begin{cases} y_1(t) \text{ при } 0 \leqslant t \leqslant \Delta t \\ y_2(t) \text{ при } \Delta t \leqslant t \leqslant 2\Delta t \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ y_j(t) \text{ при } (j-1)\Delta t \leqslant t \leqslant j\Delta t \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \end{cases} \tag{13}$$

и невязку $E(t, \Delta t)$ на интервале $(0, T)$ посредством следующего соотношения:

$$E(t, \Delta t) = \begin{cases} \varepsilon_1(t, \Delta t) & \text{при } 0 \leqslant t \leqslant \Delta t \\ \varepsilon_2(t, \Delta t) & \text{при } \Delta t \leqslant t \leqslant 2\Delta t \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots & \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots & \\ \varepsilon_j(t, \Delta t) & \text{при } (j-1)\Delta t \leqslant t \leqslant j\Delta t \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots & \end{cases} \tag{14}$$

Тогда $\bar{y}(t, \Delta t)$ удовлетворяет на интервале $(0 \leqslant t \leqslant T)$ уравнению:

$$\eta(t) + \int_0^t \eta(\tau) S(t, \tau)\, d\tau = f(t) + E(t, \Delta t). \tag{15}$$

В силу непрерывности функции $E(t, \Delta t)$ по обоим аргументам, что вытекает из непрерывности всех ε_j и из условий (12), $\bar{y}(t, \Delta t)$ есть единственное решение уравнения (15) на интервале $[0, T]$ и, следовательно, может быть представлено в виде:

$$\bar{y}(t, \Delta t) = f(t) + E(t, \Delta t) + \int_0^t [f(\tau) + E(\tau, \Delta t)] R(t, \tau)\, d\tau, \tag{16}$$

где $R(t, \tau)$ есть резольвента ядра $S(t, \tau)$. Обозначим через $r(t, \Delta t)$ функцию ошибки, т. е. $\bar{y}(t, \Delta t) = y(t) - r(t, \Delta t)$, где $y(t)$ — точное решение. Тогда, учитывая уравнения (16) и (1), получим следующее уравнение для $r(t, \Delta t)$:

$$r(t, \Delta t] = -E(t, \Delta t) - \int_0^t E(\tau, \Delta t) R(t, \tau)\, \Delta t. \tag{17}$$

Из соотношения (17) вытекает, что $r(t, \Delta t) \rightrightarrows 0$ при $\Delta t \to 0$ на интервале $[0, T]$ вследствие непрерывности $E(t, \Delta t)$ и в силу условий (12), которые справедливы при любом значении Δt.

Итак, благодаря введению на каждом шаге дополнительного слагаемого, содержащего параметр a_j, определяемого из условия удовлетворения решаемому уравнению, дополнительно в конце шага удается сделать ошибку сколь угодно малой при непрерывном уменьшении шага. В этом преимущество рассматриваемого алгоритма по сравнению с обычным методом представления приближенного решения в виде отрезка ряда Тейлора на каждом шаге.

4. Рассматриваемый алгоритм можно распространять и на нелинейные интегральные уравнения типа Вольтерра. При этом на каждом шаге необходимо решать соответствующее трансцендентное уравнение для a_j, подобно тому как это делается при решении задачи Коши для нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений [1, 2].

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

1. Шилькрут Д. И. Об одном методе приближенного решения обыкновенных дифференциальных уравнений, Журнал вычислительной математической физики, 5, № 4, 1965.
2. Шилькрут Д. И. Расчет элементов конструкций на базе нового метода решения обыкновенных дифференциальных уравнений. Труды Кишиневского политехнического института, вып. 2, 1964.
3. Ловитт У. В. Линейные интегральные уравнения, Гостехтеоретиздат, 1957.
4. Фихтенгольц Г. М. Курс дифференциального и интегрального исчисления, I, Гостехтеоретиздат, 1949.

Известия Академии наук Молдавской ССР. № 4, 1966

Б. А. ЩЕРБАКОВ

ОБ УСТОЙЧИВОСТИ НУЛЕВОГО РЕШЕНИЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ В БАНАХОВОМ ПРОСТРАНСТВЕ

Рассмотрим дифференциальное уравнение

$$\frac{dx}{dt} = f(t, x) \tag{1}$$

и соответствующее ему уравнение с возмущенной правой частью

$$\frac{dx}{dt} = f(t, x) + \alpha(t, x), \tag{2}$$

где $f(t, x)$ и $\alpha(t, x)$ — функции со значениями в банаховом пространстве B, непрерывные на топологическом произведении $W_r = T \times S_r$ $(0 < r \leqslant \infty)$, где T — промежуток $(0, \infty)$, а S_r — открытый шар $\|x\| < r$ пространства B (при этом полагаем $S_\infty = B$). Кроме того, функция $f(t, x)$ в области определения удовлетворяет условию Липшица

$$\| f(t, x) - f(t, y) \| \leqslant L \| x - y \|$$

с постоянной L.

При этих ограничениях (см. [1]), какова бы ни была точка $(t_0, x_0) \in W_r$, существует единственное решение $x(t)$ уравнения (1), удовлетворяющее начальному условию $x(t_0) = x_0$.

Будем предполагать также, что $f(t, 0) = \alpha(t, 0) = 0$ при всех $t \in T$.

В дальнейшем всякую функцию $x(t)$ со значениями в пространстве B, определенную при $t_0 \leqslant t \leqslant t_1 \leqslant \infty$, будем обозначать также через $x(t, t_0, x_0)$, где $x_0 = x(t_0)$.

Пусть N — положительное число, а $\varphi(t)$ — действительная функция, непрерывная на T. Будем говорить, что нулевое решение дифференциального уравнения, заданного в пространстве B, обладает свойством $\omega_\varepsilon(N, \varphi)$, если всякое решение $x(t, t_0, x_0)$ $((t_0, x_0) \in W_\varepsilon)$ этого уравнения во всей области существования удовлетворяет неравенству

$$\| x(t, t_0, x_0) \| \leqslant N \| x_0 \| \varphi(t - t_0). \tag{3}$$

Замечание 1. Если нулевое решение уравнения (1) обладает свойством $\omega_\varepsilon(N, \varphi)$, а $\varphi(t)$ — ограниченная на T функция, то имеет место устойчивость (в смысле А. М. Ляпунова). Если, к тому же, $\varphi(t) \to 0$ при $t \to \infty$, то нулевое решение уравнения (1) асимптотически устойчиво при этом равномерно относительно начальных значений.

Предметом настоящей заметки является сравнительное изучение свойств решений уравнений (1) и (2). Основной результат сформулирован в приводимой ниже теореме, метод доказательства которой близок к одному общему методу, предложенному Е. А. Барбашиным [2] (см. также [3] и [4]).

Теорема. *Пусть нулевое решение уравнения* (*1*) *обладает свойством* $\omega_\varepsilon(N, \varphi)$ *и* $\varphi(t) \to 0$ *при* $t \to \infty$. *Пусть, кроме того, действительное число* $M > N$, *а непрерывная и ограниченная на* T *функция* $\psi(t)$ *удовлетворяет условиям*

а) $\dfrac{\varphi(t)}{\psi(t)} \to 0$ *при* $t \to \infty$;

б) $\varphi(t)] \leqslant \psi(t)$ *при* $t \in T$;

в) $\psi(t_1)\psi(t_2) \leqslant \psi(t_1 + t_2)$ *при любых* t_1 *и* t_2 *из* T.

Тогда существует такое положительное λ, *что если функция* $\alpha(t, x)$ *удовлетворяет неравенству*)*

$$\| \alpha(t, x) \| \leqslant \lambda \| x \| \quad ((t, x) \in W_r), \tag{4}$$

то нулевое ретение урпвнения (2) *обладает свойством* $\omega_\delta(M, \psi)$, *где* δ — *достаточно малое положительное число.*

Доказательство. Легко видеть, что $\chi(t) \equiv \dfrac{\varphi(t)}{\psi(t)}$ является непрерывной, положительной на T функцией. В силу условия а) найдется $h > 0$, при котором $N\chi(h) < 1$. Пусть при всех $(t, x) \in W_r$ выполняется неравенство (4), в котором λ — положительное число, удовлетворяющее условию

$$\frac{\lambda h}{q} e^{(2L+\lambda)h} \leqslant \min\{M - N,\ 1 - N\chi(h)\}, \tag{5}$$

где $q = \inf\limits_{0<t<h} \{\psi(t)\}$. Не ограничивая общности, в дальнейшем будем предполагать, что $\varepsilon < r$.

Покажем, что нулевое решение уравнения (2) обладает свойством $\omega_\delta(M, \psi)$ при

$$\delta = \min\left\{\frac{\varepsilon}{MQ},\ \varepsilon e^{-(L+\lambda)h}\right\}, \tag{6}$$

где $Q = \sup\limits_{t \in T}\{\psi(t)\}$.

Рассмотрим произвольное решение $x(t) = x(t, t_o, x_o)((t_o, x_o) \in W_\delta)$ уравнения (2). Оценим $\| x(t) \|$ при изменении t последовательно в промежутках $[t_o, t_1], [t_1, t_2], \ldots, [t_{n-1}, t_n], \ldots$, где $t_n = t_o + nh$ $(n = 1, 2, \ldots)$.

Пусть $\tau \in [t_o, t_1]$. Пользуясь тождеством

$$x(t) = x_o + \int_{t_0}^{t} [f(s, x(s)) + \alpha(s, x(s))]\, ds, \tag{7}$$

легко убедиться, что

$$\| x(\tau) \| \leqslant \| x_o \| + (L + \lambda) \int_{t_0}^{\tau} \| x(s) \|\, ds.$$

---

*) Условие (4) выполняется, если, например, функция $\alpha(t, x)$ в области определе- у о тв р яет условию Липшица с постоянной λ.

Так как $\| x(\tau) \|$ является непрерывной функцией переменной τ, принимающей положительные значения, из последнего неравенства (см. [5], стр. 19, лемма 1) вытекает, что

$$\| x(t) \| \leqslant \| x_o \| e^{(L+\lambda)h} \tag{8}$$

при всех $t \in [t_o, t_1]$. Ввиду (6), число $\| x_o \| l^{(L+\lambda)h} < \varepsilon$. Поэтому из неравенства (8) следует (см. условие (4)), что на отрезке $[t_o, t_1]$

$$\| \alpha(t, x(t)) \| \leqslant \lambda \| x_o \| e^{(L+\lambda)h}. \tag{9}$$

Рассмотрим теперь решение $y(t) = y(t, t_0, x_0)$ уравнения (1) и оценим $\| x(\tau) - y(\tau) \|$. Предварительно заметим, что решение $y(t)$ может быть продолжено для всех $t \in [t_0, \infty)$. Действительно, при всех t из области существования рассматриваемого решения выполняется неравенство

$$\| y(t) \| \leqslant N \| x_0 \| \varphi(t - t_0). \tag{10}$$

Так как $N \| x_0 \| \varphi(t - t_0) < M \delta Q \leqslant \varepsilon < r$, из (10) следует, что интегральная кривая, определяемая решением $y(t)$, лежит на положительном расстоянии от границы области S_r. Кроме того, функция $f(t, x)$ ограничена равномерно относительно $t \in [t_0, \infty)$ в каждой замкнутой области $S \subset S_r$. Следовательно (см. [1], стр. 14), решение $y(t)$ определено при всех $t \geqslant t_0$.

Пользуясь тождеством (7) и

$$y(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f\big(s, y(s)\big)\, ds$$

и учитывая (9), устанавливаем, что

$$\| x(\tau) - y(\tau) \| \leqslant L \int_{t_0}^{\tau} \| x(s) - y(s) \|\, ds + \lambda h \| x_0 \| e^{(L+\lambda)h},$$

откуда $\| x(\tau) - y(\tau) \| \leqslant P \| x_0 \| q$, где $P = \dfrac{\lambda h}{q} e^{(2L+\lambda)h}$. Из последнего неравенства и (10) следует, что

$$\begin{aligned} \| x(\tau) \| &\leqslant P \| x_0 \| q + N \| x_0 \| \varphi(\tau - t_0) \leqslant \\ &\leqslant \big[P + N\chi(\tau - t_0)\big] \| x_0 \| \psi(\tau - t_0). \end{aligned} \tag{11}$$

Принимая во внимание (5) и условие б), заключаем, что

$$\| x(t, t_0, x_0) \| \leqslant M \| x_0 \| \psi(t - t_0) \tag{12}$$

при всех $t \in [t_0, t_1]$, а $\| x(t_1) \| \leqslant \| x_0 \| \psi(h)$.

Предположим, что неравенство (12) выполняется на отрезке $[t_{n-1}, t_n]$

$$\text{и} \quad \| x_n \| \leqslant \| x_0 \| \psi(n, h), \tag{13}$$

где $x_n = x(t_n)$. Оценим $\| x(t) \|$ при изменении t на отрезке $[t_n, t_{n+1}]$.

Пусть $\tau \in [t_n, t_{n+1}]$, а $z(t)$ — решение уравнения (1), определяемое начальным условием $z(t_n) = x_n$. Учитывая, что при $t \geqslant t_0$ выполняются неравенства

$$x(t) = x_n + \int_{t_n}^{t} \left[f(s, x(s)) + \alpha(s, x(s)) \right] ds,$$

$$z(t) = x_n + \int_{t_n}^{t} f(s, z(s))\, ds,$$

и применяя схему рассуждений, с помощью которой было доказано неравенство (11), устанавливаем, что

$$\| x(\tau) \| \leqslant \left[P + N\chi(\tau - t_n) \right] \| x_n \| \psi(\tau - t_n). \quad (14)$$

Из неравенств (14), (13) и условия в) вытекает следующая оценка

$$\| x(\tau) \| \leqslant \left[P + N\chi(\tau - t_n) \right] \| x_0 \| \psi(\tau - t_0).$$

На основании последней, учитывая (5) и условие б), заключаем, что неравенство (12) выполняется при всех $t \in [t_n, t_{n+1}]$, а

$$\| x(t_{n+1}) \| \leqslant \| x_0 \| \psi\left[(n+1) h \right].$$

Таким образом, нулевое решение уравнения (2) обладает свойством $\omega_\tau (M, \psi)$. Теорема доказана.

В качестве функции $\varphi(t)$, участвующей в теореме, можно выбрать, в частности, $e^{-\nu t}$ $(\nu > 0)$. При этом из доказанной теоремы вытекает следующее предложение об устойчивости нулевого решения по показательному закону:

Следствие. *Пусть нулевое решение уравнения* (1) *обладает свойством* $\omega_\tau (N, e^{-\nu t})$, *где* $\nu > 0$. *Тогда, каковы бы ни были действительные* $M > N$ *и* $0 < \mu < \nu$, *существуют* λ *и* δ *такие, что если функция* $\alpha(t, x)$ *удовлетворяет условию* (4), *то нулевое решение уравнения* (2) *обладает свойством* $\omega_\tau (M, e^{-\mu t})$.

Для случая, когда при каждом $t \in T$ оператор $f(t, x)$ линеен, последнее предложение вытекает также из одного результата М. Г. Крейна (см. [6], теорема 1).

Доказанная теорема применима, например, к системам обыкновенных дифференциальных уравнений или к интегро-дифференциальным уравнениям (пространство B соответственно конечномерно или совпадает с $C[a, b]$). В этих случаях приведенное выше следствие усиливает теорему Е. А. Барбашина и М. А. Скалкиной [3] о равномерной асимптотической устойчивости нулевого решения системы обыкновенных дифференциальных уравнений и теорему Е. А. Барбашина (см. [7], теорема 2) об устойчивости по показательному закону нулевого решения интегро-дифференциального уравнения.

Замечание 2. Пользуясь рассуждениями той части доказательства приведенной выше теоремы, где устанавливается продолжимость решения $y(t)$ уравнения (1), легко убедиться, что всякое решение $x(t, t_0, x_0)$ $((t_0, x_0) \in W\delta)$ уравнения (2) можно продолжить для всех $t \in [t_0, \infty)$.

Замечание 3. В приведенной выше теореме некоторые условия можно ослабить, не изменяя при этом существенно ее доказательство. Так, например, вместо неравенства (4) можно потребовать, чтобы

$$\| \alpha(t, x) \| \leqslant \gamma(t) \| x \|,$$

где $\gamma(t)$ — функция, удовлетворяющая условию $\int_{t}^{t+h} \gamma(s)\, ds \leqslant \lambda h$ при всех $t \in T$ (λ и h — числа, указанные в доказательстве теоремы). При таком ослабленном требовании относительно функции $\alpha(t, x)$ предложение, сформулированное в следствии, обобщает теорему, доказанную в [8], и теорему 2.1 работы [9].

Наконец, заметим, что если $S_r = B$ и нулевое решение уравнения (1) обладает свойством $\omega_\infty (N, \varphi)$, то при выполнении условий теоремы нулевое решение уравнения (2) обладает свойством $\omega_\infty (M, \psi)$. При этом требования, чтобы $\varphi(t) \to 0$ при $t \to \infty$, а $\psi(t)$ была ограниченной, оказываются излишними.

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

1. М. А. Красносельский и С. Г. Крейн, К теории обыкновенных дифференциальных уравнений в банаховых пространствах. Труды семинара по функциональному анализу, вып. 2, Воронеж, 1956, 3—23.
2. Е. А. Барбашин, О двух схемах доказательства теорем об устойчивости по первому приближению, Докл. АН СССР, 111, № 1, 1956, 9—11.
3. Е. А. Барбашин, М. А. Скалкина, К вопросу об устойчивости по первому приближению. Прикладная математика и механика, 19, вып. 5, 1955, 623—624.
4. С. И. Горшин, Об устойчивости движения с постоянно действующими возмущениями, Изв. АН Казахской ССР, № 56, 1948.
5. В. В. Немыцкий и В. В. Степанов, Качественная теория дифференциальных уравнений, М.—Л., ГИТТЛ, 1949.
6. М. Г. Крейн, О некоторых вопросах, связанных с кругом идей Ляпунова в теории устойчивости, Успехи матем. наук, 3, вып. 3, 1948, 166—169.
7. Е. А. Барбашин, Об условиях сохранения свойств устойчивости решений интегро-дифференциальных уравнений, Изв. высш. учебн. заведений, Математика, № 1, 1957, 25—34.
8. В. Е. Гермаидзе, Об асимптотической устойчивости по первому приближению, Прикладная матем. и механика, 21, вып. 1, 1957, 133—135.
9. Л. Х. Либерман, Об устойчивости решений интегро-дифференциальных уравнений, Изв. высш. учебн. заведений, Математика, № 3, 1958, 142—151.

СОДЕРЖАНИЕ

В. Д. Белоусов, И. А. Флоря. Квазигруппы со свойством обратимости 3
М. С. Будяну. Решение некоторых классов уравнений Винера — Хопфа с операторными коэффициентами 18
И. М. Гоян. Радикал Бэра почти-колец 32
И. А. Новосельский. О линейных операторах в пространстве с двумя топологиями 39
К. С. Сибирский. О четности функций двух переменных 47

Краткие сообщения

И. Р. Берман. Об одной задаче типа Стефана 55
В. М. Бродский. Об интеграле по цепочке ортопроекторов 59
А. Ф. Гамецкий, И. А. Балтаг. Об одной задаче С. Л. Соболева 65
Л. С. Гольденштейн. Об односторонней обратимости некоторых элементов нормированных колец 68
М. Г. Гонца. Об одном методе трансляции арифметических выражений языка АЛГОЛ-60 74
В. М. Ени. Об устойчивости корневого числа операторного пучка 78
В. И. Параска. Одна теорема о замкнутых операторах в пространстве с двумя нормами 82
Е. И. Сигал. О диагональных элементах и спектре матриц 87
П. С. Солтан. Об отношениях между задачами покрытия и освещения выпуклых тел 91
И. А. Фельдман. Несколько замечаний о сходимости метода последовательных приближений 94
В. Г. Чебан, Ю. В. Чугаевский. Свободные колебания столба ньютоновой жидкости в трубке, герметизированной мембранами 97
И. С. Чеботару. О приближенном решении уравнений типа Винера — Хопфа в некоторых пространствах 101
Д. И. Шилькрут. Об одном методе приближенного решения интегральных уравнений типа Вольтерра 107
Б. А. Щербаков. Об устойчивости нулевого решения дифференциального уравнения в банаховом пространстве 111

Академия наук Молдавской ССР

ИЗВЕСТИЯ

№ 4 (1966 г.)

Редактор Л. Мальцева. Художественный редактор Л. Кирняк Технический редактор В. Павлова

Сдано в набор 17/I-1966 г. Подписано к печати 30/VIII-1966 г Формат бумаги 70×108$^1/_{16}$. Типографская бумага № 2. Печатных листов 10,15. Уч.-изд. листов 8,28. Тираж 500. АБ04656. Цена 45 коп. Зак. № 181.

Издательство «Картя Молдовеняскэ»
Кишинев, ул. Жуковского, 44.
Полиграфкомбинат, Кишинев, ул. Т. Чорба, 32

ОПЕЧАТКИ

Стр.	Строка	Напечатано	Следует читать
34	11, 12, 14-я сверху		
	3, 4, 6, 9, 18-я снизу	не содержит	не содержатся в
37	12, 20-я снизу		
37	21-я снизу	не содержит M	не содержится в M