ашо 101

НАЦИОНАЛЬНАЯ АКАДЕМИЯ НАУК КЫРГЫЗСКОЙ РЕСПУБЛИКИ
ИНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ

Диссертационный совет Д 01.05.290

На правах рукописи
УДК 517.966.2

АБДУКАРИМОВ АБДУВАЛИ МАНСУРОВИЧ

КВАДРАТИЧНАЯ ИНТЕГРИРУЕМОСТЬ РЕШЕНИЙ ИНТЕГРО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ТИПА ВОЛЬТЕРРА НА НЕОГРАНИЧЕННЫХ ОБЛАСТЯХ

01.01.02 – дифференциальные уравнения

АВТОРЕФЕРАТ
диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Бишкек – 2006

Работа выполнена в Институте математики НАН Кыргызской Республики.

Научный руководитель: доктор физико-математических наук, профессор **Асанов Авыт**

Официальные оппоненты: доктор физико-математических наук, профессор **Саадабаев Аскербек**
кандидат физико-математических наук, доцент **Пахыров Закир**

Ведущая организация: Институт систем энергетики им. Л.А. Мелентьева СО РАН (Россия, г. Иркутск, ул. Лермонтова 130)

Защита состоится "15" марта 2006 г. в 15.00 часов на заседании диссертационного совета Д 01.05.290 по защите диссертаций на соискание ученых степеней доктора и кандидата физико-математических наук в Институте математики НАН Кыргызской Республики по адресу: Кыргызстан, 720071, г. Бишкек-71, проспект Чуй, 265.

С диссертацией можно ознакомиться в Центральной научной библиотеке НАН Кыргызской Республики по адресу: Кыргызстан, 720071, г. Бишкек-71, проспект Чуй, 265-а.

Автореферат разослан "14" февраля 2006 г.

Ученый секретарь
диссертационного совета, д.ф.-м.н. **Искандаров С.**

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Актуальность темы. Для изучения динамических процессов, происходящих в окружающем мире, часто применяется метод математического моделирования.

Для описания и изучения процессов в сложных средах в большинстве случаев используются дифференциальные и интегро-дифференциальные уравнения в частных производных. Такие модели позволяют изучать процессы, в частности, на плоскости и в пространстве с течением времени.

В монографии Сиразетдинова Т.К. написано: «Системы или процессы, параметры которых, кроме времени t, зависят от пространственных координат x, называются системами или процессами с распределенными параметрами. Они описываются дифференциальными уравнениями в частных производных, интегральными, интегро-дифференциальными уравнениями или более сложными функциональными соотношениями. Сюда относятся процессы, рассматриваемые в аэрогазодинамике магнитной газодинамике, в строительной механике, процессы горения, химических реакций, термоядерных реакций, нагрева и охлаждения тел и т.д.».

В монографии Блехмана И.И., Мышкиса А.Д., Пановко Я.Г. говорится о необходимости контроля устойчивости математических моделей изучаемых процессов. Известно, что для линейных моделей понятия устойчивости и ограниченности решений эквивалентны.

В монографии Баркина А.И. отмечается, что при разработке систем автоматического управления для задач оценки их качества могут быть использованы интегральные квадратические оценки. Это означает, что появляется необходимость изучения вопроса о квадратичной интегрируемости решений $u(t,x)$ интегро-дифференциальных уравнений в частных производных типа Вольтерра на неограниченной области G. Отметим, что этот вопрос имеет тесную связь с устойчивостью (ограниченностью) решений таких уравнений.

Таким образом, актуальны исследования по качественной теории систем с распределенными параметрами.

В статьях Отелбаева М., Айдарбекова А. как приоритетное в аэрокосмодинамике, наряду с другими, определено научное направление: качественная теория эволюционных дифференциальных уравнений с частными производными. Важность исследований по качественной теории интегро-дифференци-альных уравнений в частных производных подчеркнута в работах Сиразетдинова Т.К. В частности, отмечается, что свойство системы сохранять заданное ей движение или равновесное состояние при действии малых возмущений называется устойчивостью. Не задаваясь вопросом о строгости определений устойчивости, заметим, что имеются многочисленные работы, посвященные устойчивости и оценкам решений дифференциальных и интегро-дифференциальных уравнений в частных производных. Среди них отметим монографии Быкова Я.В., Сиразетдинова Т.К., Арутюняна Н.Х., Дроздова А.Д., Колмановского В.Б., Шестакова А.А., Вельмисова П.А., Дроздова А.Д., статьи Калашникова А.С., Гущина А.К., Нахлингера Р.Р., Фауста К.Д., Хруса В.Я., Варламова В.В. Работы многих авторов отражены в библиографиях к монографиям выше названных авторов, в дополнении Керимова М.К. к монографии Вольтерра В., а также в библиографии к монографии Искандарова С. Заметим, что в монографиях Быкова Я.В. и Сиразетдинова Т.К. изучена квадратичная интегрируемость в ограниченной области по одной из переменных для решений слабо нелинейных и линейных интегро-дифференциальных уравнений в частных производных типа Вольтерра и дифференциальных уравнений в частных производных соответственно.

Отметим также, что в работах Касаткиной Н.В., получена теорема единственности и существования решений для системы многомерных интегральных уравнений Вольтерра. В настоящей работе рассматриваются только линейные уравнения, которые имеют единственные решения в рассматриваемых областях.

Связь с государственными программами. Работа по теме диссертации выполнялась в связи с научно-исследовательским проектом «Прямые и некорректно-поставленные задачи и их приложения» Института математики НАН КР, № Гос. регистрации 0002794 (2003-2004г.)

Научная новизна работы. В диссертации доказаны следующие теоремы:

- о квадратичной интегрируемости решения линейных интегральных уравнений в частных производных;
- о квадратичной интегрируемости решений интегро-дифференциальных уравнений в частных производных первого порядка;
- о квадратичной интегрируемости решения интегро-дифференциальных уравнений в частных производных второго порядка;
- об ограниченности решений дифференциальных уравнений в частных производных второго порядка;
- о квадратичной интегрируемости решений системы линейных двумерных интегральных уравнений второго рода;
- об ограниченности решения системы дифференциальных уравнений в частных производных второго порядка;
- о квадратичной интегрируемости решения системы линейных двумерных интегро-дифференциальных уравнений в частных производных первого порядка;
- о квадратичной интегрируемости решения системы двумерных интегро-дифференциальных уравнений в частных производных второго порядка.

Теоретическая и практическая ценность. Результаты работы носят теоретический характер и ее результаты могут быть использованы при изучении устойчивости вязко-упругих тел, процессов в средах с памятью, а также в изучении аэроупругости и аэроавтоупругости.

Основные положения, выносимые на защиту. Установлены достаточные условия квадратичной интегрируемости решений в неограниченных областях для:

- интегрального уравнения типа Вольтерра второго рода;
- интегро-дифференциального уравнения в частных производных первого и второго порядков типа Вольтерра;
- системы интегральных уравнений типа Вольтерра второго рода;
- системы интегро-дифференциальных уравнений типа Вольтерра первого и второго порядков с двумя независимыми переменными,

и ограниченности решений в неограниченных областях для:

- дифференциального уравнения в частных производных второго порядка;
- системы дифференциальных уравнений с частными производными второго порядка.

Для проведения намеченных исследований в настоящей работе развивается единый метод преобразования уравнений Искандарова С., который по содержанию близок к методу функций Ляпунова.

Апробация результатов: Результаты работы докладывались и обсуждались на семинарах лаборатории нелинейных колебаний Института математики и информационных технологий НАН КР (2001-2003); на семинаре в Кыргызско-Турецком университете «Манас» (г. Бишкек, 2003 г.); на юбилейной Международной научной конференции «Асимптотические, топологические и компьютерные методы в математике», посвященной 70-летию академика М.И. Иманалиева (г. Бишкек – с. Бостери, 2001 г.); на научно-теоретической конференции «Актуальные проблемы физики, математики и информатики», посвященной 60-летию доктора ф.-м.н., профессора Б. Арапова (г. Ош, 2003 г.).

Публикации. Основное содержание диссертации опубликовано в статьях [1-8], приведенных в конце автореферата. В совместных работах с А. Асановым [1, 6, 8] постановки задач принадлежат ему, а результаты принадлежат автору.

Структура и объем диссертации. Диссертация состоит из введения, двух глав, содержащих 8 параграфов, заключения, списка литературы, содержащего 66 наименований, и приложения. Объем текста 89 страниц.

КРАТКОЕ СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ

Глава I посвящена исследованию квадратичной интегрируемости решений линейных интегральных и интегро-дифференциальных уравнений типа Вольтерра, а также линейного дифференциального уравнения второго порядка.

В первом параграфе рассматривается линейное двумерное интегральное уравнения Вольтерра второго рода

$$u(t,x)+\int_0^t a(t,x,s)u(s,x)ds+\int_0^x b(t,x,y)u(t,y)dy+$$

$$+\int_0^t\int_0^x c(t,x,s,y)u(s,y)dyds=f(t,x),\ (t,x)\in G=R_+\times R_+ \qquad (1.1.1)$$

$$f(t,x)\in L_2(G)\cap C(G), \qquad (f)$$

где $u(t,x)$ - неизвестная функция, $a(t,x,s), b(t,x,y), c(t,x,s,y), f(t,x)$ - известные непрерывные функции в своих областях определения. И изучается вопрос о $u(t,x)\in L_2(G)\cap C(G)$ в случае выполнения условия *(f)* для его свободного члена, т.е. вопрос о сохранении свойства свободного члена *f(t,x)* для его решения. Для этого развивается метод преобразования уравнений. Суть этого метода состоит в

- умножении (1.1.1) на *u(t,x)*, интегрировании по области $G_{t,x}=\{0\le s\le t;\ \ 0\le y\le x\}$ и в получении следующего тождества:

$$\int_0^t\int_0^x u^2(s,y)dyds+\int_0^t\int_0^x\int_0^s a(s,y,\tau)u(\tau,y)u(s,y)d\tau dyds+\int_0^t\int_0^x\int_0^y b(s,y,z)u(s,z)u(s,y)dzdyds+$$

$$+\int_0^t\int_0^x\int_0^s\int_0^y c(s,y,\tau,z)u(\tau,z)u(s,y)dzd\tau dyds=\int_0^t\int_0^x f(s,y)u(s,y)dyds; \qquad (1.1.2)$$

- затем в преобразовании каждого из тройных и четырехкратных интегралов из левой части (1.1.2) по формуле интегрирования по частям с использованием идей работ Цалюка З.Б. и Асанова А.;
- в использовании справедливых для гладких функций соотношений вида

$$KWW_s'=\frac{1}{2}(KW^2)_s'-K_s'W^2,\ Cv''_{\tau z}=(Cv)''_{\tau z}-(C_\tau'v)'_z-(C_z'v)'_\tau+C''_{\tau z}v,$$

$$Cvv''_{sy}=\frac{1}{2}(Cv^2)''_{sy}-\frac{1}{2}(C_s'v^2)'_y-\frac{1}{2}(C_y'v^2)'_s+\frac{1}{2}C''_{sy}v^2-Cv_y'v_s';$$

- и в получении неравенства энергетического типа для искомой функции *u(t,x)*.

Из полученного неравенства с применением неравенства Коши–Буняковского получается, что $u(t,x)\in L_2(G)\cap C(G)$ при выполнении условия *(f)*. А именно, устанавливается оценка

$$\left(\int_0^t\int_0^x u^2(s,y)dyds\right)^{\frac{1}{2}}\le\left(\int_0^t\int_0^x f^2(s,y)dyds\right)^{\frac{1}{2}},\quad (t,x)\in G, \qquad (u)$$

из которой, с переходом к пределу при $t\to\infty$ и $x\to\infty$ вытекает, что $u(t,x)\in L_2(G)\cap C(G)$.

Устанавливаются достаточные условия типа знака функций в формулировке Искандарова С., на функции $a(t,x,s), b(t,x,y), c(t,x,s,y)$, которые легко проверяются.

ТЕОРЕМА 1.1. Если выполняются условия: *(f)*,

а) функции $a(t,x,s), a_t'(t,x,s), a_s'(t,x,s), a''_{ts}(t,x,s))\in C(G_1)$,

$G_1=\{(t,x,s)/0\le s\le t<\infty,\ \ 0\le x<\infty\}$, $a(t,x,0)\ge0$ и $a_t'(t,x,0)\le0$ при $(t,x)\in G$;

$a_s'(t,x,s)\ge0$ и $a''_{ts}(t,x,s)\le0$ при $(t,x,s)\in G_1$;

б) функции $b(t,x,y)$, $b_x'(t,x,y)$, $b_y'(t,x,y)$, $b''_{xy}(t,x,y)\in C(G_2)$,

$G_2=\{(t,x,y)/0\le t<\infty,\ \ 0\le y\le x<\infty\}$, $b(t,x,0)\ge0$ и $b_x'(t,x,0)\le0$ при $(t,x)\in G$;

$b_y'(t,x,y)\ge0$ и $b''_{xy}(t,x,y)\le0$ при $(t,x,y)\in G_2$;

в) функции $c(t,x,s,y)$, $c_t'(t,x,s,y)$, $c_x'(t,x,s,y)$, $c''_{tx}(t,x,s,y)$, $c_s'(t,x,s,y)$, $c_y'(t,x,s,y)$,

$c''_{ts}(t,x,s,y)$, $c''_{tx}(t,x,s,y)$, $c''_{sy}(t,x,s,y)$, $c'''_{txs}(t,x,s,y)$, $c'''_{xys}(t,x,s,y)$, $c^{(IV)}_{txsy}(t,x,s,y)\in C(G_3)$,

$G_3=\{(t,x,s,y)/0\le s\le t<\infty,\ \ 0\le y\le x<\infty\}$,

$c_y'(t,x,0,y)\equiv0$ при $(t,x,y)\in G_2$, $c_s'(t,x,s,0)\equiv0$ при $(t,x,s)\in G_1$,

$c(t,x,0,0)\ge0$, $c_t'(t,x,0,0)\le0$, $c_x'(t,x,0,0)\le0$, $c''_{tx}(t,x,0,0)\ge0$ при $(t,x)\in G$ $c''_{sy}(t,x,s,y)\ge0$

$c'''_{sys}(t,x,s,y)\le0$, $c'''_{txs}(t,x,s,y)\le0$, $c^{(IV)}_{txsy}(t,x,s,y)\ge0$ при $(t,x,s,y)\in G_3$;

г) $c^2(t,x,0,0)-a_t'(t,x,0)b_x'(t,x,0)\le0$ при $(t,x)\in G$, $sy(c''_{sy}(t,x,s,y))^2-a''_{ts}(t,x,s)b''_{xy}(t,x,y)\le0$ при $(t,x,s,y)\in G_4$,

то уравнение (1.1.1) имеет единственное решение в $L_2(G)\cap C(G)$.

ПРИМЕР 1.1.1. Рассматривается уравнение (1.1.1) при

$a(t,x,s)=e^{-t}e^{-x}s^2$, $b(t,x,y)=e^{-t}e^{-x}y^2$, $c(t,x,s,y)=e^{-t}e^{-x}sy$,

$f(t,x)=2e^{-t}e^{-x}+e^{-2t}e^{-2x}(tx-t^2-x^2-t-x-3)+e^{-2t}e^{-x}(1-t)+e^{-t}e^{-2x}(1-x)\in L_2(G)\cap C(G)$.

Здесь выполняются условия а), б), в) и г). Уравнение имеет решение $u(t,x)=e^{-t}e^{-x}\in L_2(G)\cap C(G)$.

ПРИМЕР 1.1.2. Рассматривается уравнение (1.1.1) при

$a(t,x,s)=2(1+t)^{-1}s^2(1+x)^{-2}$, $b(t,x,y)=2(1+x)^{-1}y^2(1+t)^{-2}$, $c(t,x,s,y)=(1+t)^{-2}(1+x)^{-2}sy$,

$$f(t,x)=xe^{-x^2}te^{-t^2}+2(1+t)^{-1}(1+x)^{-2}xe^{-x^2}\left(\frac{1}{2}-\frac{t^2+1}{2}e^{-t^2}\right)+2(1+x)^{-1}(1+t)^{-2}te^{-t^2}\left(\frac{1}{2}-\frac{x^2+1}{2}e^{-x^2}\right)+(1+t)^{-2}(1+x)^{-2}\times$$

$$\times\left(\frac{\sqrt{\pi}}{4}erf(t)+\frac{1}{2}-\frac{t}{2}e^{-t^2}\right)\left(\frac{\sqrt{\pi}}{4}erf(x)+\frac{1}{2}-\frac{t}{2}e^{-x^2}\right)\in L_2(G)\cap C(G).$$

(erf – интеграл вероятности). Здесь выполняются условия а), б), в) и г). Уравнение имеет решение

$u(t,x) = te^{-t^2} xe^{-x^2} \in L_2(G) \cap C(G)$.

Приведены примеры, показывающие, что условия теоремы 1.1 является существенными.

ПРИМЕР 1.1.3. Для уравнения (1.1.1) с

$a(t,x,s) = e^{-t}e^{-x}s^2 - e^{-s}$, $b(t,x,y) = e^{-t}e^{-x}y^2$, $c(t,x,s,y) = e^{-t}e^{-x}sy$

$$f(t,x) = e^{-t}e^{-2x}\frac{t^3}{3} + e^{-t}e^{-x} - e^{-t}e^{-x}[e^{-x}x^2 + 2e^{-x}x + 2e^{-x} + 2] - e^{-t}e^{-x}\frac{t^2}{2}[e^{-x}(1+x)+1] \in L_2(G) \cap C(G)$$

выполняется условия б), в) и г), но не выполняется условие а). Уравнение имеет решение $u(t,x) = e^{-x} \notin L_2(G) \cap C(G)$.

ПРИМЕР 1.1.4. (Показывает существенность условий на производные заданных функций)

$$a(t,x,s) = 0, \quad c(t,x,s,y) = 0, \quad b(t,x,y) = \begin{cases} 0, & x < \frac{3\pi}{2}; \\ 1, & x \ge \frac{3\pi}{2}, \quad x - \frac{3\pi}{2} \le y \le x - \frac{\pi}{2}; \\ 0, & \text{если } x \ge \frac{3\pi}{2}, \quad y < x - \frac{3\pi}{2} \text{ или } y > x - \frac{\pi}{2}; \end{cases}$$

$$f(t,x) = \begin{cases} e^{-t}\sin x, & x < \frac{3\pi}{2}; \\ 0, & x > \frac{3\pi}{2}; \end{cases}, \quad f(t,x) \in L_2(G),$$

это уравнение имеет решение $u(t,x) = e^{-t}\sin x \notin L_2(G) \cap C(G)$.

Очевидно, что можно построить такую функцию $\tilde{b}(t,x,y) \in L_2(G) \cap C(G)$, что $\left|\tilde{b}(t,x,y) - b(t,x,y)\right| \in L_2(G)$ (и эта разность даже сколь угодно мала по норме $L_2(G)$) и $\tilde{b}(t,x,y)$ - достаточно гладкая. Тогда также будет

$\tilde{f}(t,x) = e^{-t}\sin x + \int\limits_0^x \tilde{b}(t,x,y)e^{-t}\sin y dy \in L_2(G) \cap C(G)$, но (то же решение)

$u(t,x) = e^{-t}\sin x \notin L_2(G) \cap C(G)$.

Во втором параграфе рассматривается вопрос об ограниченности решений дифференциальных уравнений с частными производными второго порядка на бесконечных областях.

Рассматривается уравнение

$$u_{tx}(t,x) + a(t,x)u_x(t,x) + b(t,x)u_t(t,x) + C(t,x)u(t,x) = f(t,x), \quad (t,x) \in G, \tag{1.2.1}$$

с условиями

$$u(0,x) = 0, \qquad x \in [0, +\infty),$$
$$u(t,0) = 0, \qquad t \in [0, +\infty). \tag{*}$$

$a(t,x), b(t,x), c(t,x), f(t,x)$ - известные функции, а $u(t,x)$ - неизвестная функция.

ТЕОРЕМА 1.2. Если выполняются условия: *(f)*,

а) функции $a(t,x), b(t,x), C(t,x), a'_t(t,x), b'_x(t,x), C'_t(t,x), C'_x(t,x), C''_{tx}(t,x) \in C(G)$;

б) $a(t,x) \ge 0, a'_t(t,x) \le 0, \quad b(t,x) \ge 0, \quad b'_x(t,x) \le 0$ при $(t,x) \in G$;

в) $C'_t(t,x) \le 0, \quad C'_x(t,x) \le 0, \quad C(t,x) \ge \alpha > 0, \quad C''_{tx}(t,x) \ge 0$, $C^2(t,x) - a'_t(t,x)b'_x(t,x) \le 0$

при $(t,x) \in G$,

то задача 1.2.1-(*) имеет единственное решение в пространстве непрерывных и ограниченных со своими производными функций $\overline{C}^2(G)$.

Для доказательства в дифференциальном уравнении (1.2.1) делается подстановка

$$u(t,x) = \int\limits_0^t\int\limits_0^x \vartheta(s,y)dyds \tag{1.2.2}$$

и для новой неизвестной функции получается интегральное уравнение

$$\vartheta(t,x) + a(t,x)\int\limits_0^t \vartheta(s,x)ds + b(t,x)\int\limits_0^x \vartheta(t,y)dy + C(t,x)\int\limits_0^t\int\limits_0^x \vartheta(s,y)dsdy = f(t,x). \tag{1.2.3}$$

К этому интегральному уравнению применяется метод из § 1.1, который дает следующую оценку

$$u^2(t,x) \le \frac{1}{\alpha}\int\limits_0^t\int\limits_0^x f^2(s,y)dyds,$$

откуда следует заключение теоремы.

В третьем параграфе рассматривается вопрос о квадратичной интегрируемости решений линейных двумерных интегро-дифференциальных уравнений с частными производными на бесконечных областях.

Рассматривается уравнение

$$a(t,x)u_x(t,x) + b(t,x)u_t(t,x) + c(t,x)u(t,x) + \int\limits_0^t A(t,x,s)u(s,x)ds + \int\limits_0^x B(t,x,y)u(t,y)dy +$$
$$+ \int\limits_0^t\int\limits_0^x K(t,x,s,y)u(s,y)dyds = f(t,x), \; (t,x) \in G \tag{1.3.1}$$

с условиями (*),

где $A(t,x,s), B(t,x,y), K(t,x,s,y), C(t,x), a(t,x), b(t,x), f(t,x)$ - известные функции, а $u(t,x)$ - неизвестная функция.

ТЕОРЕМА 1.3. Если выполняются условия: *(f)*,

а) функции $a(t,x), b(t,x), c(t,x), a'_x(t,x), b(t,x), \; b'_t(t,x) \in C(G)$,

$a(t,x) \ge 0, \quad b(t,x) \ge 0, \; C(t,x) - \frac{1}{2}a'_x(t,x) - \frac{1}{2}b'_t(t,x) \quad \ge \alpha > 0$ при $(t,x) \in G$;

б) функции $A(t,x,s), A'_t(t,x,s), A'_s(t,x,s), A''_{ts}(t,x,s) \in C(G_1)$,

$A(t,x,0) \ge 0, A'_t(t,x,0) \le 0$ при $(t,x) \in G$ и $A'_s(t,x,s) \ge 0 \quad A''_{ts}(t,x,s) \le 0$ при $(t,x,s) \in G_1$;

в) функции $B(t,x,y), B'_x(t,x,y), B'_y(t,x,y)$ и $B''_{xy}(t,x,y) \in C(G_2)$,

$B(t,x,0)\ge 0, B'_x(t,x,0)\le 0$ при $(t,x)\in G$ и $B'_y(t,x,y)\ge 0$, $B''_{xy}(t,x,y)\le 0$ при $(t,x,y)\in G_2$;

г) функции $K(t,x,s,y), K'_y(t,x,s,y), K'_s(t,x,s,y)$, $K'_t(t,x,s,y), K'_x(t,x,s,y), K''_{ts}(t,x,s,y)$, $K''_{tx}(t,x,s,y), K''_{xs}(t,x,s,y), K''_{sy}(t,x,s,y)$, $K'''_{txy}(t,x,s,y), K'''_{sys}(t,x,s,y), K'''_{xsy}(t,x,s,y)$ и $K^{(IV)}_{txsy}(t,x,s,y)$ $\in C(G_3)$.

$K'_y(t,x,0,y)\equiv 0$ при $(t,x,y)\in G_2$, $K'_s(t,x,s,0)\equiv 0$ при $(t,x,s)\in G_1$, $K(t,x,0,0)\ge 0$, $K'_t(t,x,0,0)\le 0$, $K'_x(t,x,0,0)\le 0$, $K''_{tx}(t,x,0,0)\ge 0$ при $(t,x)\in G$ и $K''_{sy}(t,x,s,y)\ge 0$,

$K'''_{tsy}(t,x,s,y)\le 0$, $K'''_{xsy}(t,x,s,y)\le 0$, $K^{(IV)}_{txsy}(t,x,s,y)\ge 0$ при $(t,x,s,y)\in G_3$;

д) $K^2(t,x,0,0)-A'_t(t,x,0)B'_x(t,x,0)\le 0$ при $(t,x)\in G$,

$tx\left(K''_{sy}(t,x,s,y)\right)^2 - A''_{ts}(t,x,s)B''_{xy}(t,x,y)\le 0$ при $(t,x,s,y)\in G_3$,

то задача 1.3.1-(*) имеет единственное решение в $L_2(G)\cap C(G)$.

Для доказательства уравнение (1.3.1) умножается на $u(t,x)$ и развивается метод преобразования уравнений.

В четвертом параграфе изучается квадратичная интегрируемость решений линейных двумерных интегро-дифференциальных уравнений второго порядка с частными производными на неограниченных областях.

Рассматривается уравнение

$$-u''_{xx}(t,x)+a(t,x)u_x(t,x)+b(t,x)u_t(t,x)+c(t,x)u(t,x)+\int_0^t A(t,x,s)u(s,x)ds+\int_0^x B(t,x,y)u(t,y)dy+$$

$$+\int_0^t\int_0^x K(t,x,s,y)u(s,y)dyds = f(t,x),\ (t,x)\in G_x=[0,\infty)\times[0,1] \qquad (1.4.1)$$

с условиями

$$u(0,x)=0,\quad x\in[0,1],$$
$$u(t,0)=u(t,1)=0\quad t\in[0,\infty), \qquad (**)$$

где $A(t,x,s), B(t,x,y), K(t,x,s,y), C(t,x), a(t,x), b(t,x), f(t,x)$ - известные функции, а $u(t,x)$ - неизвестная функция.

ТЕОРЕМА 1.4. Если выполняются условия: *(f)*,

а) функции $a(t,x), b(t,x), c(t,x), a'_x(t,x), b(t,x), b'_t(t,x)$ $\in C(G_x)$.

$a(t,x)\ge 0$, $b(t,x)\ge 0$, $c(t,x)-\frac{1}{2}a'_x(t,x)-\frac{1}{2}b'_t(t,x)\ \ge\alpha>0$ при $(t,x)\in G_x$;

б) функции $A(t,x,s), A'_t(t,x,s), A'_s(t,x,s), A''_{ts}(t,x,s)$ $\in C(G_{1x})$.

$G_{1x}=\{(t,x,s)/0\le s\le t<\infty,\ 0\le x\le 1\}$, $A(t,x,0)\ge 0, A'_t(t,x,0)\le 0$ при $(t,x)\in G_x$ и $A'_s(t,x,s)\ge 0$ $A''_{ts}(t,x,s)\le 0$ при $(t,x,s)\in G_{1x}$;

в) функции $B(t,x,y), B'_x(t,x,y), B'_y(t,x,y)$ и $B''_{xy}(t,x,y)$ $\in C(G_{2x})$.

$G_{2x}=\{(t,x,y)/0\le t<\infty,\ 0\le y\le x\le 1\}$, $B(t,x,0)\ge 0, B'_x(t,x,0)\le 0$ при $(t,x)\in G_x$ и $B'_y(t,x,y)\ge 0$, $B''_{xy}(t,x,y)\le 0$ при $(t,x,y)\in G_{2x}$;

г) функции $K(t,x,s,y), K'_y(t,x,s,y), K'_s(t,x,s,y)$, $K'_t(t,x,s,y), K'_x(t,x,s,y), K''_{ts}(t,x,s,y)$,

$K''_{tx}(t,x,s,y), K''_{sy}(t,x,s,y), K''_{xs}(t,x,s,y)$, $K'''_{txy}(t,x,s,y), K'''_{sys}(t,x,s,y), K'''_{xsy}(t,x,s,y)$ и

$K^{(IV)}_{txsy}(t,x,s,y)$ $\in C(G_{3x})$.

$G_{3x}=\{(t,x,s,y)/0\le s\le t<\infty,\ 0\le y\le x\le 1\}$.

$K'_y(t,x,0,y)\equiv 0$ при $(t,x,y)\in G_{2x}$, $K'_s(t,x,s,0)\equiv 0$ при $(t,x,s)\in G_{1x}$, $K(t,x,0,0)\ge 0$, $K'_t(t,x,0,0)\le 0$, $K'_x(t,x,0,0)\le 0$, $K''_{tx}(t,x,0,0)\ge 0$ при $(t,x)\in G_x$ и $K''_{sy}(t,x,s,y)\ge 0$,

$K'''_{tsy}(t,x,s,y)\le 0$, $K'''_{xsy}(t,x,s,y)\le 0$, $K^{(IV)}_{txsy}(t,x,s,y)\ge 0$ при $(t,x,s,y)\in G_{3x}$;

д) $K^2(t,x,0,0)-A'_t(t,x,0)B'_x(t,x,0)\le 0$ при $(t,x)\in G_x$,

$tx\left(K''_{sy}(t,x,s,y)\right)^2 - A''_{ts}(t,x,s)B''_{xy}(t,x,y)\le 0$ при $(t,x,s,y)\in G_{3x}$, то задача 1.4.1-(**) имеет единственное решение в $L_2(G_x)\cap C(G_x)$.

В этом случае уравнение (1.4.1) также умножается на $u(t,x)$ и развивается метод преобразования уравнений.

Глава 2 посвящена исследованию квадратичной интегрируемости решений систем линейных интегральных интегро-дифференциальных уравнений типа Вольтерра на бесконечной области, а также дифференциальных уравнений второго порядка.

Результаты главы 2 являются векторным аналогом результатов главы 1, и в ней также развивается векторный аналог метода преобразования уравнений из главы 1. Неравенства для матриц понимаются в операторном смысле: положительная определенность и т.д.

В § 2.1 изучается квадратичная интегрируемость решения системы линейных двумерных интегральных уравнений Вольтерра второго рода на бесконечной области.

Рассматривается система

$$u(t,x)+\int_0^t A(t,x,s)u(s,x)ds+\int_0^x B(t,x,y)u(t,y)dy+\int_0^t\int_0^x C(t,x,s,y)u(s,y)dyds = f(t,x),\ (t,x)\in G \quad (2.1.1)$$

$$f(t,x)\in L_{2,n}(G)\cap C_n(G), \qquad (f')$$

где $A(t,x,s)$, $B(t,x,y)$ и $C(t,x,s,y)$ - заданные самосопряженные матричные функции размеров $n\times n$, а $f(t,x)$ - заданная, $u(t,x)$ - неизвестная n-мерные вектор-функции.

ТЕОРЕМА 2.1. Если выполняются условия: (f'),

а) матричные функции $A(t,x,s)$, $A_t(t,x,s)$, $A_x(t,x,s)$, $A_{ts}(t,x,s)$ $\in C_{n\times n}(G_1)$ $G_1=\{(t,x,s):\ 0\le s\le t<\infty;\ \ 0\le x<\infty\}$, $A(t,x,0)\ge 0$ и $A_t(t,x,0)\le 0$ при $(t,x)\in G$; $A_s(t,x,s)\ge 0$ и $A_{ts}(t,x,s)\le 0$ при $(t,x,s)\in G_1$;

б) матричные функции $B(t,x,y)$, $B_x(t,x,y)$ $B_y(t,x,y)$, $B_{xy}(t,x,y)$ $\in C_{n\times n}(G_2)$ $G_2=\{(t,x,y):\ 0\le t<\infty;\ \ 0\le y\le x<\infty\}$, $B(t,x,0)\ge 0$ и $B_x(t,x,0)\le 0$ при $(t,x)\in G$; $B_y(t,x,y)\ge 0$ и $B_{xy}(t,x,y)\le 0$ при $(t,x,y)\in G_2$;

в) матричные функции $C(t,x,s,y)$, $C_t(t,x,s,y)$, $C_x(t,x,s,y)$, $C_s(t,x,s,y)$, $C_y(t,x,s,y)$, $C_{tx}(t,x,s,y)$, $C_{ts}(t,x,s,y)$, $C_{sy}(t,x,s,y)$, $C_{ty}(t,x,s,y)$, $C_{txs}(t,x,s,y)$, $C_{xys}(t,x,s,y)$, $C_{txsy}(t,x,s,y)$, $\in C_{n\times n}(G_3)$ $G_3=\{(t,x,s,y):\ 0\le s\le t<\infty;\ \ 0\le y\le x<\infty\}$, $C_y(t,x,0,y)\equiv 0$ при $(t,x,y)\in G_2$ $C_s(t,x,0,y)\equiv 0$ при $(t,x,s)\in G_1$, $C(t,x,0,0)\ge 0$, $C_t(t,x,0,0)\le 0$, $C_x(t,x,0,0)\le 0$, $C_{tx}(t,x,0,0)\ge 0$ при $(t,x)\in G$ и $C_{sy}(t,x,s,y)\ge 0$, $C_{xys}(t,x,s,y)\le 0$, $C_{sy}(t,x,s,y)\ge 0$, $C_{txsy}(t,x,s,y)\ge 0$ при $(t,x,s,y)\in G_3$;

г) Для любых u, $\vartheta\in R^n$ выполняется неравенство
$<-A_t(t,x,0)u,u>-2<C(t,x,0,0)u,\vartheta>-<B_x(t,x,0)\vartheta,\vartheta>\ge 0$ при $(t,x)\in G$,
то система уравнений (2.1.1) имеет единственное решение в $L_{2,n}(G)\cap C_n(G)$.

Еще раз подчеркнем, что метод, применяемый здесь - такой же, как и в §1.1, с той только разницей, все произведения заменяются скалярным произведением векторов, в частности, обе стороны уравнения (2.1.1) скалярно умножается на вектор-функцию $u(t,x)$.

В § 2.2 изучается вопрос об ограниченности решений систем дифференциальных уравнений с частными производными второго порядка на бесконечных областях.

Рассматривается следующая задача.

$$(t,x)\in G\ u_{tx}(t,x)+A(t,x)u_x(t,x)+B(t,x)u_t(t,x)+C(t,x)u(t,x)=f(t,x),\ (t,x)\in G, \qquad (2.2.1)$$

с условиями (*) в векторном смысле, где $A(t,x)$, $B(t,x)$ и $C(t,x)$ - заданные самосопряженные матричные функции размера $n\times n$, а $f(t,x)$ - заданная, $u(t,x)$ - неизвестная n-мерные вектор-функции, $(t,x)\in G$.

ТЕОРЕМА 2.2. Если выполняются условия: (f'),

а) $A(t,x)$, $B(t,x)$, $C(t,x)$, $A_t(t,x)$, $B_x(t,x)$, $C_t(t,x)$, $C_x(t,x)$, $C_{tx}(t,x)$ $\in C(G)$.

б) $A(t,x)\ge 0$, $B(t,x)\ge 0$, $A_t(t,x)\le 0$, $B_x(t,x)\le 0$,
$C(t,x)\ge\alpha E,\alpha>0$, $C_t(t,x)\le 0$, $C_x(t,x)\le 0$, $C_{xt}(t,x)\ge 0$, при $(t,x)\in C(G)$,

в) для любых $u,\vartheta\in R^n$ имеет место неравенство

$$\left[<\frac{1}{2}A_t(t,x)u,u>+<C(t,x)u,\vartheta>+<\frac{1}{2}B_x(t,x)\vartheta,\vartheta>\right]\le 0;$$

то задача (2.2.1) – (*) имеет единственное решение в $\overline{C}_n(G)$.

В § 2.3 изучается квадратичная интегрируемость решений систем линейных двумерных интегро-дифференциальных уравнений с частными производными на бесконечных областях.

Рассматривается векторно-матричное уравнение

$$A(t,x)u_x(t,x)+B(t,x)u_t(t,x)+C(t,x)u(t,x)+\int_0^t M(t,x,s)u(s,x)ds+\int_0^x N(t,x,y)u(t,y)dy+$$
$$+\int_0^t\int_0^x K(t,x,s,y)u(s,y)dyds=f(t,x),\ (t,x)\in G \qquad (2.3.1)$$

с условиями (*),

где $A(t,x)$, $B(t,x)$, $C(t,x)$, $M(t,x,s)$, $K(t,x,s,y)$, $N(t,x,y)$ - заданные $n\times n$-мерные самосопряженные матричные функции, $f(t,x)$ - заданная и $u(t,x)$ - неизвестная n-мерные вектор-функции.

ТЕОРЕМА 2.3. Если выполняются условия: (f'),

а) матричные функции $A(t,x)$, $B(t,x)$, $C(t,x)$, $A_x(t,x)$, $B(t,x)$, $B_t(t,x)$ $\in C_{n\times n}(G)$,
$A(t,x)\ge 0$, $B(t,x)\ge 0$, $C(t,x)-\frac{1}{2}A_x(t,x)-\frac{1}{2}B_t(t,x)\ge\alpha\cdot E,\ \alpha>0$ при $(t,x)\in C(G)$,

б) матричные функции $M(t,x,s)$, $M_t(t,x,s)$, $M_s(t,x,s)$, $M_{ts}(t,x,s)$ $\in C_{n\times n}(G_1)$,
$M(t,x,0)\ge 0$, $M_t(t,x,0)\le 0$, при $(t,x)\in G$ и $M_s(t,x,s)\ge 0$,
$M_{ts}(t,x,s)\le 0$ при $(t,x,s)\in G_1$;

в) матричные функции $N(t,x,y)$, $N_x(t,x,y)$, $M_y(t,x,y)$, $N_{xy}(t,x,y)$ $\in C_{n\times n}(G_2)$,
$N(t,x,0)\ge 0$, $N_x(t,x,0)\le 0$ при $(t,x)\in G$ и $N_y(t,x,y)\ge 0$, $N_{xy}(t,x,y)\le 0$ при $(t,x,y)\in G_2$;

г) матричные функции $K(t,x,s,y)$, $K_y(t,x,s,y)$, $K_s(t,x,s,y)$, $K_t(t,x,s,y)$, $K_x(t,x,s,y)$, $K_{ts}(t,x,s,y)$, $K_{tx}(t,x,s,y)$, $K_{xs}(t,x,s,y)$, $K_{xy}(t,x,s,y)$, $K_{txy}(t,x,s,y)$, $K_{txs}(t,x,s,y)$, $K_{xsy}(t,x,s,y)$ и $K_{txsy}(t,x,s,y)$ $\in C_{n\times n}(G_3)$, $K_y(t,x,0,y)\equiv 0$ при $(t,x,y)\in G_2$, $K_s(t,x,s,0)\equiv 0$ при $(t,x,s)\in G_1$,
$K(t,x,0,0)\ge 0$, $K_t(t,x,0,0)\le 0$, $K_x(t,x,0,0)\le 0$, $K_{tx}(t,x,0,0)\ge 0$
при $(t,x)\in G$ и $K_{sy}(t,x,s,y)\ge 0$, $K_{tsy}(t,x,s,y)\le 0$, $K_{xsy}(t,x,s,y)\le 0$,
$K_{txsy}(t,x,s,y)\ge 0$ при $(t,x,s,y)\in G_3$,

д) для любых $u,\vartheta\in R^n$ $<-M_t(t,x,0)u,u>-2<K(t,x,0,0)u,\vartheta>-<N_x(t,x,0)\vartheta,\vartheta>\le 0$ при $(t,x)\in G$, то задача (2.3.1) – (*) имеет единственное решение в $L_{2,n}(G)\cap C_n(G)$.

В § 2.4 изучается квадратичная интегрируемость решений систем линейных двумерных интегро-дифференциальных уравнений второго порядка с частными производными на неограниченных областях.

Рассматривается векторно-матричное уравнение

$$-u_{xx}(t,x)+A(t,x)u_x(t,x)+B(t,x)u_t(t,x)+C(t,x)u(t,x)+\int_0^t M(t,x,s)u(s,x)ds+\int_0^x N(t,x,y)u(t,y)dy+$$

$$+\int_0^t\int_0^x K(t,x,s,y)u(s,y)dyds=f(t,x),\ (t,x)\in G_x. \qquad (2.4.1)$$

с условиями

$$u(0,x)=0,\qquad x\in[0,1],$$
$$u(t,0)=u(t,1)=0,\qquad t\in[0,\infty), \qquad (**)$$

где $A(t,x), B(t,x), C(t,x), M(t,x,s), K(t,x,s,y), N(t,x,y)$ - заданные $n\times n$-мерные самосопряженные матричные функции, $f(t,x)$- заданная и $u(t,x)$ неизвестная n-мерные вектор-функции.

ТЕОРЕМА 2.4. Если выполняются условия: (f'),

а) матричные функции $A(t,x), B(t,x), C(t,x), A_x(t,x), B(t,x),\ B_t(t,x)\ \in C_{n\times n}(G_x)$,

$A(t,x)\ge 0,\ \ B(t,x)\ge 0,\ C(t,x)-\frac{1}{2}A_x(t,x)-\frac{1}{2}B_t(t,x)\ge\alpha E$ при $(t,x)\in C(G_x)$,

б) матричные функции $M(t,x,s), M_t(t,x,s), M_s(t,x,s), M_{ts}(t,x,s)\ \in C_{n\times n}(G_{1x})$

$M(t,x,0)\ge 0,\ \ M_t(t,x,0)\le 0$, при $(t,x)\in G_x$ и $M_s(t,x,s)\ge 0$,

$M_{ts}(t,x,s)\le 0$ при $(t,x,s)\in G_{1x}$;

в) матричные функции $N(t,x,y), N_x(t,x,y), M_x(t,x,y),\ N_{xy}(t,x,y)\ \in C_{n\times n}(G_{2x})$,

$N(t,x,0)\ge 0\ \ N_x(t,x,0)\le 0$ при $(t,x)\in G_x$ и $N_y(t,x,y)\ge 0,\ N_{xy}(t,x,y)\le 0$ при $(t,x,y)\in G_{2x}$;

г) матричные функции $K(t,x,s,y), K_y(t,x,s,y), K_s(t,x,s,y), K_t(t,x,s,y), K_x(t,x,s,y)$,

$K_{ts}(t,x,s,y), K_{tx}(t,x,s,y), K_{xs}(t,x,s,y), K_{xy}(t,x,s,y), K_{txy}(t,x,s,y), K_{tys}(t,x,s,y), K_{xsy}(t,x,s,y)$ и

$K_{txsy}(t,x,s,y)\ \in C_{n\times n}(G_{3x})$,

$K_y(t,x,0,y)\equiv 0$ при $(t,x,y)\in G_{2x}$, $K_s(t,x,s,0)\equiv 0$ при $(t,x,s)\in G_{1x}$,

$K(t,x,0,0)\ge 0,\ \ K_t(t,x,0,0)\le 0,\ K_x(t,x,0,0)\le 0,\ \ K_{tx}(t,x,0,0)\ge 0$ при $(t,x)\in G_x$ и $K_{sy}(t,x,s,y)\ge 0$,

$K_{tsy}(t,x,s,y)\le 0,\ K_{xsy}(t,x,s,y)\le 0,\ K_{txsy}(t,x,s,y)\ge 0$ при $(t,x,s,y)\in G_{3x}$,

д) $\forall u,\vartheta\in R^n\ \ <-M_t(t,x,0)u,u>-2<K(t,x,0,0)u,\vartheta>-<N_x(t,x,0)\vartheta,\vartheta>\le 0$ при $(t,x)\in G_x$,

то задача (2.4.1) – (**) имеет единственное решение в $L_{2,n}(G_x)\cap C_n(G_x)$.

Как видно из выше изложенного, все условия наложены только на известные данные из рассматриваемых уравнений.

Ко всем теоремам, как и к теореме 1.1, приведены иллюстративные примеры, показывающие непротиворечивость установленных условий.

В приложении приведен текст программы на языке pascal для приближенного решения уравнения (1.1.1) и результаты расчетов, подтверждающие выводы теоремы 1.1 и выполнение соотношения (u).

Автор благодарит научного руководителя Авыта Асановича Асанова за постановку задачи исследования и постоянное внимание к работе.

Основное содержание диссертации опубликовано в следующих работах:

1. Асанов А., Абдукаримов А. О квадратичной интегрируемости решений дифференциальных уравнений с частными производными на бесконечных областях //Асимптотические, топологические и компьютерные методы в математике: Тр. Международ. науч. конф., посв. 70-летию акад. М.И. Иманалиева // Вестн. Кыргызского гос. нац. ун-та. Сер. 3. Естественно-техн. науки. - 2001. –Вып. 6. Матем. науки. Информатика и информац. технол. – С. 80-84.

2. Абдукаримов А. Квадратичная суммируемость решения линейного двумерного интегрального уравнения Вольтерра второго рода на бесконечной области //Исследования по интегро-дифференциальным уравнениям. - Бишкек: Илим, 2001. – Вып. 30. – С. 89-93.

3. Абдукаримов А. О квадратичной интегрируемости решений систем дифференциальных уравнений с частными производными на бесконечных областях // Исследования по интегро-дифференциальным уравнениям. - Бишкек: Илим, 2002. – Вып. 31. – С. 142-146.

4. Абдукаримов А. Квадратичная суммируемость решения систем линейного двумерного интегрального уравнения Вольтерра второго рода на бесконечной области // Исследования по интегро-дифференциальным уравнениям. - Бишкек: Илим, 2002. – Вып. 31. – С. 187-192.

5. Абдукаримов А. О квадратичной интегрируемости решений систем линейных двумерных интегро-дифференциальных уравнений с частными производными на бесконечных областях. //Вестник ОшГУ. Сер. физико-математ. наук. – 2003. –Вып. 6. - С. 109-114.

6. Асанов А., Абдукаримов А. О квадратичной интегрируемости решений систем линейных двумерных интегро-дифференциальных уравнений с частными производными на бесконечных областях // Вестник ОшГУ. Сер. физико-математ. наук. – 2003. – Вып. 7. – С. 35-40.

7. Абдукаримов А. О квадратичной интегрируемости решений линейных двумерных интегро-дифференциальных уравнений второго порядка с частными производными на бесконечных областях // Исследования по интегро-дифференциальным уравнениям. - Бишкек: Илим, 2003. – Вып. 32. – С. 114-118.

8. Асанов А., Абдукаримов А. Квадратичная интегрируемость решений систем двумерных интегро-дифференциальных уравнений второго порядка с частными производными на неограниченных областях // Вестник КазНУ им. Аль-Фараби. Сер. матем., механ., информ. – 2004. – №1 (40). – С. 48-58.

Аннотация

Абдукаримов Абдували Мансурович

Вольтерра тибиндеги интегро-дифференциалдык теңдемелердин чыгарылыштарын чектелбеген областтагы квадраттык интегралдоочулук

01.01.02 - дифференциалдуу теңдемелер

Урунттуу сөздөр: интегро-дифференциалдуу теңдеме, интегралдуу теңдеме, квадраттык интегралданууучулук, чектелбеген область, чыгарылыштын жашоосу, чыгарылыштын жалгыздыгы.

Бул диссертацияда терс эмес квадраттык формалар ыкмасын колдонуп, Вольтерра тибиндеги интегралдуу, жекече туундулары бар дифференциалдуу жана интегро-дифференциалдуу теңдемелердин чыгарылыштарын чектелбеген областта квадраттык интегралданууучулуктун шарттары табылган.

Аннотация

Абдукаримов Абдували Мансурович

Квадратичная интегрируемость решений интегро-дифференциальных уравнений типа Вольтерра на неограниченных областях

01.01.02 – дифференциальные уравнения

Ключевые слова: интегро-дифференциальное уравнение, интегральное уравнение, неограниченная область, квадратичная интегрируемость, существование решения, единственность решения.

В диссертации методом неотрицательных квадратичных форм найдены достаточные условия квадратичной интегрируемости решений интегральных, дифференциальных и интегро-дифференциальных уравнений в частных производных типа Вольтерра в неограниченных областях.

Abstract

Abdukarimov Abduvali Mansurovich

Quadratic integrability of solutions of Volterra type integro–differential equations within an unbounded domain

01.01.02 – differential equations

Key words: integro-differential equation, integral equation, unbounded domain, quadratic integratibility, existence of solution, uniqueness of solution.

Sufficient conditions are found for quadratic integrability of integral, partial differential and integro-differential equations solutions of Volterra type within unbounded domains by means of the method of nonnegative quadratic forms.