

01-047
АКАДЕМИЯ НАУК СССР
КАЗАНСКИЙ ФИЛИАЛ

ИЗВЕСТИЯ КАЗАНСКОГО ФИЛИАЛА АКАДЕМИИ НАУК СССР

СЕРИЯ ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИХ
И ТЕХНИЧЕСКИХ НАУК

14



КАЗАНЬ

1960

1-197
АКАДЕМИЯ НАУК СССР
КАЗАНСКИЙ ФИЛИАЛ

ИЗВЕСТИЯ КАЗАНСКОГО ФИЛИАЛА АКАДЕМИИ НАУК СССР

*СЕРИЯ ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИХ
И ТЕХНИЧЕСКИХ НАУК*

Выпуск 14

НЕЛИНЕЙНЫЕ ЗАДАЧИ ТЕОРИИ ОБОЛОЧЕК



КАЗАНЬ

1960

Посвящается
профессору Хамиду Музафаровичу
Муштари
в связи с шестидесятилетием
со дня рождения и сорокалетием
научно-педагогической деятельности

Редакционная коллегия:
проф. Г. С. Салехов (ответ. редактор),
к. т. н. М. С. Корнишин,
к. т. н. Р. Г. Суркин

П 36619

ЦЕНТРАЛЬНАЯ НАУЧНАЯ
БИБЛИОТЕКА
А. Н. Киргизской ССР

Печатается по постановлению
Редакционно-издательского совета
Казанского филиала Академии наук СССР



Профессор *X. М. МУШТАРИ*

ХАМИД МУЗАФАРОВИЧ МУШТАРИ

(К 60-летию со дня рождения)

В 1960 году исполнилось 60 лет со дня рождения заслуженного деятеля науки Татарской АССР, руководителя казанской школы по теории тонких пластин и оболочек, доктора физико-математических наук профессора Хамида Музафаровича Муштари.

В лице Х. М. Муштари мы имеем выдающегося ученого-механика, автора многочисленных трудов, одного из создателей нелинейной теории тонких пластин и оболочек.

Хамид Музафарович Муштари родился 22 июля 1900 года в городе Оренбурге в семье народного учителя.

В 1918 году он окончил с золотой медалью Казанскую 2-ю мужскую гимназию. Еще до окончания гимназии Х. М. Муштари начал свою трудовую деятельность в качестве преподавателя математики школы II ступени и с тех пор, параллельно с учебой, вел педагогическую и научную работу.

После окончания гимназии, в 1918 году, Х. М. Муштари поступил на физико-математический факультет Казанского государственного университета. В 1920 году по состоянию здоровья он перевелся в Среднеазиатский государственный университет в г. Ташкенте, который окончил в 1923 г. по специальности математика. По окончании университета работал в г. Казани в должности ученого секретаря академцентра Татарского Народного Комиссариата просвещения. С сентября 1924 г. был переведен в г. Москву, где до сентября 1925 г. работал методистом Совета национальных меньшинств Народного Комиссариата просвещения РСФСР.

В сентябре 1925 года он был принят в научно-исследовательский институт математики и механики при 1-м Московском государственном университете в качестве аспиранта по кафедре теоретической механики, возглавлявшейся тогда академиком С. А. Чаплыгиным.

С. А. Чаплыгин предложил Х. М. Муштари большой объем учебной программы, которая требовала от аспиранта изучения обширных областей математики, физики и механики. Успешно окончив аспирантуру, в 1929 году Х. М. Муштари на заседании Ученого совета физико-математического факультета Московского государственного университета блестяще защитил диссертацию на соискание степени кандидата физико-математических наук по теме "О катании тяжелого твердого тела вращения по неподвижной горизонтальной плоскости".

Таким образом, Х. М. Муштари явился одним из первых ученых-татар в области физико-математических наук. Это оказалось возможным только благодаря победе Великой Октябрьской социалистической революции.

На первых порах (до 1930 г.) его научно-педагогическая деятельность была направлена по преимуществу на поднятие культурного уровня трудящихся-татар — на подготовку учителей-татар, на составление научно-популярных брошюр и учебников на татарском языке и т. п.

С 1929 г. Х. М. Муштари начал вести педагогическую работу в высших учебных заведениях г. Казани. В 1930 году за успехи в научно-педагогической работе он был утвержден доцентом и вскоре был назначен и. о. профессора по кафедре теоретической механики Казанского института инженеров коммунального строительства. Создание в Казани авиационного института вызвало потребность в высококвалифицированных научных кадрах.

В связи с этим Х. М. Муштари был приглашен на работу в авиационный институт, и с 1934 года по 1937 год в должности и. о. профессора возглавлял кафедру теоретической механики КАИ. Одновременно с большой педагогической работой в вузах г. Казани, Х. М. Муштари вел также интенсивную научно-исследовательскую работу. Работа в авиационном институте, а также потребности быстро развивающейся новой техники определили основное научное направление и научные интересы Х. М. Муштари. В 1932—1936 годах он приступает к разработке нелинейной теории пластин и оболочек. Результатом его исследований за эти годы явилась докторская диссертация на тему „Некоторые обобщения теории тонких оболочек с приложениями к задаче устойчивости упругого равновесия“, которая им успешно была защищена в 1937 г. на заседании Ученого совета Московского государственного университета.

Этот труд в виде отдельной монографии в 1938 году был издан Казанским физико-математическим обществом и до сего времени является весьма ценной работой в области теории оболочек.

В мае 1938 г. Хамид Музафарович Муштари за плодотворную научно-исследовательскую и научно-педагогическую деятельность был утвержден Высшей аттестационной комиссией в звании профессора и одновременно ему была присуждена степень доктора физико-математических наук.

В довоенные годы, в годы Великой Отечественной войны и до настоящего времени Х. М. Муштари одновременно с весьма плодотворной научной работой ведет большую научно-организационную работу.

С 1934 по 1937 год он является заместителем директора Казанского авиационного института по научно-исследовательской работе. С 1938 по 1941 год возглавляет кафедру теоретической механики Казанского института инженеров коммунального строительства. С 1939 по 194 год — декан механического факультета Казанского химико-технологического института им. С. М. Кирова. С 1944 г. по 1946 г. руководит кафедрой теории упругости и строительной механики самолета Казанского авиационного института. С января 1946 года Х. М. Муштари является директором физико-технического института созданного в Казани филиала Академии наук Союза ССР и одновременно возглавляет сектор механики того же института.

Хамид Музафарович вложил много труда в организацию работы физико-технического института и сектора механики, проявив себя опытным, любящим свое дело руководителем, пользующимся заслуженным уважением среди научной общественности.

За свою более чем 35-летнюю научную деятельность Хамид Музафарович опубликовал свыше 60 работ по вопросам механики и теории тонких пластин и оболочек.

В небольшой статье, естественно, невозможно дать сколько-нибудь полную характеристику многочисленных трудов профессора Х. М. Муштари. Поэтому мы ограничимся лишь кратким обзором его наиболее важных научных исследований.

Современная теория тонких пластин и оболочек получила в основном развитие в трудах советских ученых. Среди этих работ достойное место занимают выдающиеся работы профессора Х. М. Муштари, который у нас в Советском Союзе начал одним из первых заниматься разработкой одной из важнейших областей теории упругости — теории тонких пластин и оболочек.

Выведенные в его докторской диссертации общие уравнения упругой устойчивости оболочек впоследствии были названы в литературе уравнениями Муштари—Власова. Эти уравнения весьма значительно упрощают решение практически важных задач, позволяя доводить их до простых числовых результатов.

В ряде работ [9—14], выполненных в 1934—1938 годах, Х. М. Муштари заложил основы нелинейной теории тонких оболочек. Полное и законченное изложение этих результатов дано в его известной докторской диссертации („Некоторые обобщения теории тонких оболочек с приложениями к решению устойчивости упругих анизотропных оболочек“. Известия Казанского физико-математического общества, т. XI, 1933).

В ней получены основные зависимости нелинейной теории тонких оболочек в предположении, что материал оболочки ортотропен и подчиняется линейному закону Гука, а компоненты смещения точек срединной поверхности сравнимы с ее толщиной, но малы по сравнению с другими линейными размерами. Исходя из этих зависимостей, Х. М. Муштари развил теорию устойчивости оболочек, обосновал возможность ее упрощения путем пренебрежения влиянием касательных компонент перемещения на изменения кривизны срединной поверхности в случае, когда при потере устойчивости образуется большое число волн.

Последующие работы Х. М. Муштари посвящены дальнейшему развитию и обобщению теории оболочек, а также многочисленным приложениям теории к решению важных для практики задач. В работе [24] дается теория оболочек при произвольных изгибах. В работе [26] им проведено качественное исследование напряженного состояния оболочки при малых деформациях и произвольных смещениях. В ней дается строгая классификация задач теории оболочек и обосновываются допустимые в каждом отдельном случае упрощения теории.

В работах [25], [27], [29], [31] дана законченная теория нелинейного краевого эффекта и теория равновесия оболочек с начальными несовершенствами формы и начальными напряжениями.

В работе [42] развита теория температурных напряжений применительно к устойчивости подкрепленных оболочек под действием „температурных нагрузок“. Работы [30], [34], [37], [45] посвящены решению важных в теоретическом и практическом отношении задач устойчивости и больших прогибов сферических, цилиндрических, конических оболочек под действием различных нагрузок.

В ряде работ Х. М. Муштари, опубликованных в Трудах физико-технического института (выпуск 1, 1954 г. [38, 42]), рассмотрены чрезвычайно важные вопросы об устойчивости подкрепленных цилиндрических оболочек наименьшего веса. Результаты, полученные

в этих работах, много позднее повторены отечественными и зарубежными авторами для более частных случаев. В работе [55] дается постановка обратных краевых задач нелинейной теории пологих оболочек, а в работе [56] развивается важная для практических приложений теория среднего изгиба оболочек.

В капитальном труде „Нелинейная теория упругих оболочек“ [49] Х. М. Муштари совместно с К. З. Галимовым подводит итоги своих многолетних исследований, а также исследований его учеников по нелинейной теории оболочек. В ней также обобщены все важнейшие достижения в этой области отечественных и зарубежных ученых.

В работе [58] Х. М. Муштари разработал эффективный алгоритм решения нелинейных задач теории оболочек вариационными методами применительно к быстродействующим электронным счетным машинам, а в работах [59—61] развивает теорию плит и оболочек средней толщины.

Х. М. Муштари неразрывно сочетает теорию с практикой. Не ограничиваясь разработкой общетеоретических вопросов, он много труда и энергии вкладывает в развитие методов решения задач теории оболочек, в доведение решения важнейших задач до результатов, приемлемых для практических приложений.

В 1950—1953 гг. при его непосредственном участии и под его руководством успешно выполнены важные исследования по теме, утвержденной Правительством и Госпланом СССР. Он поддерживает живую связь с производством, оказывает научную помощь конструкторским бюро и отделам прочности ряда предприятий.

Х. М. Муштари своими научными трудами известен не только у нас в Союзе, но и далеко за его пределами. Он установил личную связь с учеными-механиками Китая, Чехословакии и Польши. Особенно плодотворной была его поездка в Китайскую Народную Республику в октябре — ноябре 1956 г., где он выступил в институте механики АН КНР с рядом докладов о работах советских ученых по теории пластин и оболочек [50].

Заслугой проф. Х. М. Муштари является создание в Казани школы по нелинейной теории пластин и оболочек.

Х. М. Муштари уделяет много внимания воспитанию научных кадров. За последние 10 лет под его руководством защитили кандидатские диссертации 11 человек, из них двое в настоящее время являются докторами наук. Ученики Х. М. Муштари успешно работают в различных вузах, научных учреждениях г. Казани и Союза.

Хамид Музафарович Муштари, ведя большую научно-педагогическую и научно-организационную работу, одновременно принимает активное участие в общественной работе.

Он избирался депутатом районного и городского Советов депутатов трудящихся, избирался членом Президиума областного бюро Совета научных работников. Вел большую организационную работу в качестве заместителя председателя ТатНИТОмаш. Профессор Х. М. Муштари принимает активное участие в работе Татарского отделения Общества по распространению научных и политических знаний — регулярно выступает перед трудящимися, студенчеством с лекциями и докладами о научных и технических достижениях Советского Союза. Он избран членом Национального комитета СССР по теоретической и прикладной механике. Научным Советом „Важнейшие проблемы прочности и пластичности“ профессору Х. М. Муштари поручено руководство и координация работ во всесоюзном масштабе секции „Нелинейная теория пластин и оболочек“.

Успешная научно-педагогическая деятельность Хамида Музафаровича Муштари высоко оценена правительством Татарской АССР. В 1940 г. решением Президиума Верховного Совета Татарской АССР проф. Х. М. Муштари присвоено почетное звание заслуженного деятеля науки и техники Татарской АССР.

За свои заслуги перед Советским государством в области развития науки и за успехи в педагогической деятельности Хамид Музафарович Муштари награжден орденом „Знак почета“ и медалью „За доблестный труд в Великой Отечественной войне“.

Видный ученый-механик, профессор Х. М. Муштари находится в расцвете своих творческих сил. Сотрудники и ученики желают Хамиду Музафаровичу многих лет жизни и дальнейших успехов в труде на благо нашей великой Родины.

*М. С. Корнишин,
Р. Г. Суркин.*

СПИСОК

научных трудов профессора Х. М. Муштары (1924—1960 гг.)

1924 г.

1. Человечество и вселенная. Серия научно-популярных и антирелигиозных статей. 1924, журн. Магариф, Татиздат.

1925 г.

2. Учебник алгебры для средних школ, ч. 1. 1925, Татиздат.

1928—1929 гг.

3. Учебник физики для средних школ, т. I, II, III. 1928—1929, Татиздат.

1931—1932 гг.

4. Курс физики для школ колхозной молодежи, ч. I, II, VI. 1931—1932, Татиздат.

5. Курс физики для вузов и втузов, ч. 1, 1932, Татиздат.

6. О катании тяжелого твердого тела вращения по неподвижной горизонтальной плоскости. Математический сборник Московского математического общества. 1932, 39, № 1, 2, Москва.

1933 г.

7. Курс теоретической механики для вузов и самообразования, ч. 1. 1933, Татиздат.

8. Обобщение одного из способов решения классической задачи кручения призматических тел. 1933. Труды КАИ, № 1, Казань.

1934 г.

9. Об устойчивости круглой тонкой цилиндрической оболочки при кручении. 1934. Труды КАИ, № 2, Казань.

10. К вопросу об устойчивости упругого равновесия круглой тонкостенной цилиндрической оболочки при кручении парами сил, приложенными к концевым сечениям. Труды 1-й всесоюзной конференции по прочности авиационных конструкций. 1934, вып. 1, Москва.

1935 г.

11. Об одном способе получения новых результатов в решении задачи Сен-Венана о поперечном изгибе призматических тел. 1935. Труды КИИКСа, № 1, Казань.

12. Об одном возможном подходе к решению задач устойчивости тонких цилиндрических оболочек произвольного сечения. 1935. Труды КАИ, № 4, Казань.

1936 г.

13. Об устойчивости при кручении конической оболочки кругового сечения. 1936. Труды КАИ, № 2, Казань.

1938 г.

14. Некоторые обобщения теории тонких оболочек с приложениями к решению устойчивости упругих анизотропных оболочек. Известия Казанского физико-математического общества, том XI. 1938, Казань.

1939 г.

15. Об одном способе получения некоторых результатов в решении задачи Сен-Венана. Журн. „Прикладная математика и механика“, том II, № 3, 1939, Москва.

16. Некоторые обобщения теории тонких оболочек. Журн. „Прикладная математика и механика“, т. II, № 4, 1939, Москва.

1940 г.

17. Сборник татарских терминов по физике и геофизике. 1940, Татиздат.

1943 г.

18. Приближенные решения некоторых задач устойчивости упругого равновесия конической оболочки. „Прикладная математика и механика“, т. VI, 1943, Москва.

1946 г.

19. Об упругом равновесии цилиндрической оболочки, подкрепленной ребрами жесткости в закритической области. Труды КАИ, вып. 17, 1946, Казань.

20. Некоторые задачи об упругом равновесии и устойчивости его в случае цилиндрических трубок некругового сечения. Труды КХТИ, вып. 10, 1946, Казань.

1947 г.

21. Об области применимости приближенной теории оболочек Кирхгофа — Лява. ПММ, т. XI, вып. 5, 1947, Москва.

22. Об области применимости линейной теории упругих оболочек. ДАН СССР, т. 58, 1947, Москва.

1948 г.

23. Инвариантные уравнения равновесия пограничной зоны оболочки в комплексной форме. ПММ, т. XII, вып. 2, 1948, Москва.

24. Об определении деформаций срединной поверхности оболочки при произвольных изгибах. Труды КХТИ, вып. 13, 1948, Казань.

25. Определение напряженного состояния при упругом равновесии в пограничной зоне оболочек некоторых типов (совместно с С. Г. Винокуровым). Известия Казанского филиала АН СССР, серия физ.-мат. и техн. наук, вып. 1, 1948, Казань.

1949 г.

26. Качественное исследование напряженного состояния оболочки при малых деформациях и произвольных смещениях. ПММ, т. XIII, вып. 2, 1949, Москва.

27. Нелинейная теория равновесия пограничной зоны упругой оболочки. ДАН СССР, т. XIX, № 4, 1949, Москва.

28. Русско-татарский словарь математических терминов, 1949, Татиздат.

1950 г.

29. Теория упругого равновесия пластины и оболочек с учетом начальных напряжений. Известия КФАН СССР, серия физ.-мат. и техн. наук, вып. 2, 1950, Казань.

30. О нелинейной теории устойчивости упругого равновесия тонкой сферической оболочки под действием внешнего давления (совместно с Р. Г. Суркиным). ПММ, т. XIV, вып. 6, 1950, Москва.

1951 г.

31. Об упругом равновесии тонкой оболочки с начальными неправильностями в форме срединной поверхности. ПММ, т. XV, вып. 6, 1951, Москва.

32. Определение краевого эффекта на стыке эллипсоидального днища с цилиндром на основе нелинейной теории. 1951. Научный отчет по теме Н. 56, ч. V, КФАН СССР.

1952 г.

33. Об устойчивости цилиндрической панели под действием внешнего нормального давления. 1952. Научный отчет по теме т. 17, ч. I, КФАН СССР.

1953 г.

34. Определение больших прогибов цилиндрической панели, опертой на гибкие нерастяжимые ребра, под действием нормального давления (совместно с И. В. Свириным). ПММ, т. XVII, вып. 6, 1953, Москва.

35. О больших прогибах панелей и оболочек с начальными неправильностями при осевом сжатии и внутреннем давлении. 1953. Дополнение к научному отчету по теме т. 17, ч. I, КФАН СССР.

36. Об устойчивости подкрепленной конической оболочки. 1953. Научный отчет по теме т. 17, ч. IV, КФАН СССР.

1954 г.

37. Об устойчивости цилиндрических и конических оболочек кругового сечения при совместном действии осевого сжатия и внешнего нормального давления (совместно с А. В. Саченковым). ПММ, т. XVIII, вып. 4, 1954.

38. Об устойчивости цилиндрической оболочки под действием равномерно распределенных осевого сжатия и внешнего нормального давления (совместно с И. В. Свириным). Труды физ.-техн. ин-та КФАН СССР, вып. 1, 1954, Москва.

39. Некоторые выводы работы П. А. Соколова „Устойчивость цилиндрической оболочки, подкрепленной упругими круговыми ребрами жесткости, при действии продольной и поперечной нагрузок“ (ПММ, 1933). Труды физ.-техн. ин-та КФАН СССР, вып. 1, 1954.

40. Об устойчивости цилиндрической оболочки под действием неравномерных нагрузок. Труды физ.-техн. ин-та КФАН СССР, вып. 1, 1954.

41. Об устойчивости и прочности корпуса бака под действием равномерно распределенного осевого сжатия и внутреннего давления. Труды физ.-техн. ин-та КФАН СССР, вып. 1, 1954.

42. Некоторые вопросы прочности и устойчивости пластин и оболочек в неравномерном температурном поле (совместно с К. З. Галимовым). Труды физ.-техн. ин-та КФАН СССР, вып. 1, 1954.

43. Об устойчивости круговой цилиндрической оболочки под действием осевого сжатия и внутреннего давления по нелинейной теории. КФАН СССР. Научный отчет по теме т. 17, ч. V, 1954.

44. Рекомендации по научно-техническому отчету по теме т. 17. КФАН СССР, научный отчет за 1954.

1955 г.

45. К теории устойчивости сферической оболочки под действием внешнего давления. Прикл. матем. и механ., т. XIX, вып. 2, 1955.

46. Приближенное определение редуцированного коэффициента обшивки подкрепленной плоской и цилиндрической пластины при осевом сжатии. Изв. КФАН СССР, вып. 7, 1955.

47. Устойчивость бесконечно длинной пологой цилиндрической панели под действием нормального равномерного давления. Изв. КФАН СССР, вып. 7, 1955.

48. О сходимости метода Галеркина при определении верхней и нижней критических нагрузок в одной нелинейной задаче. Изв. КФАН СССР, вып. 10, 1956 (совместно с М. С. Корнишиным).

1957 г.

49. Нелинейная теория упругих оболочек (совместно с К. З. Галимовым). Таткиноиздат, 1957.

50. О некоторых работах советских ученых по теории пологих оболочек (на китайском языке). Изд. КНР, 1957.

51. К теории устойчивости цилиндрической панели с гибкими краями под действием нормального давления (совместно с М. Е. Никифоровым). Труды КХТИ, 1957.

52. Об устойчивости подземных цилиндрических резервуаров (совместно с С. В. Прохоровым). Труды КХТИ, 1957, Казань.

53. Об обратных краевых задачах нелинейной теории пологих оболочек. Доклады АН СССР, т. 116, № 1, 1957.

1958 г.

54. Работы казанских ученых по нелинейной теории оболочек после Великой Октябрьской социалистической революции. Изв. КФАН СССР, сер. ф.-м. н., вып. 12, 1958.

55. Некоторые обратные краевые задачи нелинейной теории пологих оболочек вращения. Изв. КФАН СССР, сер. ф.-м. н., вып. 12, 1958.

56. Средний изгиб пологой оболочки, прямоугольной в плане и опирающейся на гибкие в своей плоскости ребра. Изв. КФАН СССР, сер. ф.-м. н., вып. 12, 1958.

57. Об изгибе пологого сферического сегмента под действием внешнего нормального давления (совместно с Н. И. Кривошеевым). Изв. КФАН СССР, сер. ф.-м. н., вып. 12, 1958.

1959 г.

58. Об одном алгоритме решения нелинейных задач теории пологих оболочек (совместно с М. С. Корнишиным). ПММ, т. XXIII, вып. 1, 1959, Москва.

59. Теория плит средней толщины. Известия ОТН, механика и машиноведение, вып. 2, 1959.

60. Теория оболочек средней толщины (совместно с И. Г. Терегуловым). Известия ОТН, механика и машиноведение, вып. 6, 1959.

61. К теории оболочек средней толщины (совместно с И. Г. Терегуловым). ДАН СССР, 1959, том 128, № 6.

1960 г.

62. Поперечный изгиб опертой квадратной пластинки при нелинейной зависимости между деформацией и напряжением (совместно с Р. Г. Суркиным). Известия КФАН СССР, серия физ.-мат. и техн. наук, вып. 14, Казань.

63. Средний изгиб пологой сферической панели, квадратной в плане, при нелинейной зависимости между деформацией и напряжением (совместно с Р. Г. Суркиным). ПМТФ, № 2, 1960.

К. З. Галимов

НЕКОТОРЫЕ ВОПРОСЫ ТЕОРИИ КОНЕЧНЫХ ДЕФОРМАЦИЙ ПЛАСТИН И ОБОЛОЧЕК

В статье излагаются методом векторного исчисления [1] в ортогональных координатах некоторые вопросы нелинейной теории пластин и оболочек без пренебрежения удлинениями и сдвигом по сравнению с единицей. Условия неразрывности деформаций получены из наиболее простого выражения Гауссовой кривизны, приведенного в книге [2]. Выведены соотношения между усилиями, моментами и деформациями поверхности. При этом мы пренебрегали квадратами удлинений и сдвига по сравнению с единицей. Эти соотношения упрощены с учетом условия малости объемной деформации по сравнению с единицей.

§ 1. Тензоры конечных деформаций поверхности

Отнесем срединную поверхность S недеформированной оболочки к ортогональной системе Гауссовых координат α_1 и α_2 с коэффициентами Ляме A_1 и A_2 . После деформации S преобразуется в новую поверхность S_* , точки которой будем определять теми же криволинейными координатами α_1 и α_2 , но неортогональными. Коэффициенты первой квадратичной формы поверхности S_* обозначим через A_1^* , A_2^* и χ^* , где χ^* — угол между α_1 и α_2 на S_* . Нормальные кривизны k_{11} и k_{22} поверхности S в направлениях α_1 и α_2 и кручение этой поверхности k_{12} определяются через коэффициенты второй квадратичной формы b_{ij} по формулам: $k_{ij} = -b_{ij} : A_i A_j$. Вместо нормальных кривизн и кручения поверхности S_* введем величины, пропорциональные им: $k_{ij}^* = -b_{ij}^* : A_i A_j$, где b_{ij}^* — коэффициенты второй квадратичной формы этой поверхности. Компоненты тангенциальной деформации e_{ij} и изгибной деформации ε_{ij} определяются формулами [1]:

$$A_1^* = A_1(1 + 2\varepsilon_{11})^{1/2}, \quad A_1^* A_2^* \cos \chi^* = 2A_1 A_2 \varepsilon_{12}, \quad \varepsilon_{ij} = k_{ij}^* - k_{ij}. \quad (1.1)$$

Здесь и далее все индексы принимают значения 1 и 2.

Введем обозначения: u_1 и u_2 — перемещения в направлениях осей α_1 и α_2 ; w — прогиб; e_{ik} , ω_1 , E_1 и E_3 — углы поворота координат оболочки в процессе деформации:

$$e_{11} = \frac{1}{A_1} \frac{\partial u_1}{\partial \alpha_1} + \frac{u_2}{A_1 A_2} \frac{\partial A_1}{\partial \alpha_2} + k_{11} w, \quad e_{12} = \frac{1}{A_1} \frac{\partial u_2}{\partial \alpha_1} - \frac{u_1}{A_1 A_2} \frac{\partial A_1}{\partial \alpha_2} + k_{12} w, \quad \overleftarrow{1}, \overrightarrow{2}$$
$$\omega_1 = \frac{1}{A_1} \frac{\partial w}{\partial \alpha_1} - k_{11} u_1 - k_{12} u_2, \quad E_1 = e_{12} \omega_2 - (1 + e_{22}) \omega_1,$$
$$E_3 = (1 + e_{11})(1 + e_{22}) - e_{12} e_{21}. \quad (1.2)$$

Здесь и далее символ $\overrightarrow{1, 2}$ означает, что остальные формулы получаются из приведенных перестановкой индексов 1 и 2. Пользуясь обозначениями (1.2) для компонентов конечных тангенциальных деформаций поверхности, можем получить формулы [1]:

$$2l_k = e_{1k} + e_{k1} + e_{11}e_{k1} + e_{12}e_{k2} + \omega_1\omega_k. \quad (1.3)$$

Компоненты конечных изгибов при произвольных деформациях можно вывести так же, как в монографии [1], но нужно воспользоваться тождествами:

$$\left. \begin{aligned} E_1e_{12} - E_2(1 + e_{11}) &= (1 + 2\varepsilon_{11})\omega_2 - 2\varepsilon_{12}\omega_1 = F_{12}, \\ \omega_1E_1 - (1 + e_{11})E_3 &= 2\varepsilon_{12}e_{12} - (1 + 2\varepsilon_{11})(1 + e_{22}) = G_{12}, \\ \omega_1E_2 - E_3e_{12} &= (1 + 2\varepsilon_{11})e_{21} - 2\varepsilon_{12}(1 + e_{11}) = H_{12}. \end{aligned} \right\} \overrightarrow{1, 2} \quad (1.4)$$

При этих обозначениях выражения кривизны координатных линий после деформации будут иметь вид:

$$\left. \begin{aligned} k_{11}^* I^{11} &= -A_1^{-1} \left(E_1 \frac{\partial e_{11}}{\partial a_1} + E_2 \frac{\partial e_{12}}{\partial a_1} + E_3 \frac{\partial \omega_1}{\partial a_1} \right) - \\ &\quad - \frac{F_{12}}{A_1 A_2} \frac{\partial A_1}{\partial a_2} - k_{11} G_{12} - k_{12} H_{12}, \\ k_{12}^* I^{12} &= -A_1^{-1} \left(E_1 \frac{\partial e_{21}}{\partial a_1} + E_2 \frac{\partial e_{22}}{\partial a_1} + E_3 \frac{\partial \omega_2}{\partial a_1} \right) + \\ &\quad + \frac{F_{21}}{A_1 A_2} \frac{\partial A_1}{\partial a_2} - k_{11} H_{21} - k_{12} G_{21}. \end{aligned} \right\} \overrightarrow{1, 2} \quad (1.5)$$

Здесь I — инвариант, связанный с относительным изменением площади поверхности ΔS соотношением $I = (1 + \Delta S)^2$, где

$$I = 1 + 2I_1 + 4I_2, \quad I_1 = \varepsilon_{11} + \varepsilon_{22}, \quad I_2 = \varepsilon_{11}\varepsilon_{22} - \varepsilon_{12}^2. \quad (1.6)$$

Формулы (1.5) несколько упрощаются для малых деформаций, т. е. при пренебрежении удлинениями и сдвигом по сравнению с единицей, так как тогда можно положить $I = 1$, $F_{12} = \omega_2$, $G_{12} = -1 - e_{22}$, $H_{12} = e_{21}$. Если допустимо пренебрежение квадратами удлинений и квадратом сдвига по сравнению с единицей, то такую теорию назовем квадратичной. В этом случае величина $\Delta S \ll 1$ и ею можно пренебречь по сравнению с единицей. Следовательно, в формулах (1.5) можно положить $I = 1$. Это упрощение допустимо также при произвольных деформациях, так как при этом можно пренебречь относительным изменением объема Δ по сравнению с единицей для всех материалов. Тогда при принятии гипотезы Кирхгофа — Лява это приводит к равенству $I = 1$.

§ 2. Условия неразрывности конечных деформаций оболочек

Символы Кристоффеля деформированной поверхности Γ_{jk}^i выражаются формулами

$$\left. \begin{aligned} \Gamma_{11}^{*1} &= \frac{I}{A_1} \frac{\partial A_1}{\partial a_1} + \frac{\varepsilon_{12}}{A_1 A_2} \frac{\partial A_1^2}{\partial a_2} - \frac{4\varepsilon_{12}}{A_2} \frac{\partial A_2 \varepsilon_{12}}{\partial a_1} + (1 + \varepsilon_{22}) \frac{\partial \varepsilon_{11}}{\partial a_1}, \\ \Gamma_{11}^{*2} &= -\frac{2A_1 \varepsilon_{12}}{A_2} \frac{\partial \varepsilon_{11}}{\partial a_1} + 2 \frac{A_1^2}{A_1 A_2^2} \frac{\partial A_2 \varepsilon_{12}}{\partial a_1} - \frac{1}{2} \left(\frac{A_1^*}{A_1 A_2} \right)^2 \frac{\partial A_1^2}{\partial a_2}, \\ \Gamma_{12}^{*2} &= \frac{1}{2} \left(\frac{A_1^*}{A_1 A_2} \right)^2 \frac{\partial A_2^2}{\partial a_1} - \frac{\varepsilon_{12}}{A_1 A_2} \frac{\partial A_1^2}{\partial a_2}. \end{aligned} \right\} \overrightarrow{1, 2} \quad (2.1)$$

Здесь A_1^* и A_2^* вносятся из (1.1). Приращения символов Кристоффеля при деформации $A_{jk}^i = \Gamma_{jk}^i - \Gamma_{jk}^i$ определяются из формул:

$$\left. \begin{aligned} I A_{11}^1 &= A_2^{-1} \varepsilon_{12} \left(A_1^{-1} \frac{\partial A_1^2}{\partial a_2} - 4 \frac{\partial A_2 \varepsilon_{12}}{\partial a_1} \right) + (1 + 2\varepsilon_{22}) \frac{\partial \varepsilon_{11}}{\partial a_1}, \\ I A_2^2 A_{11}^1 &= A_1 \left(I \frac{\partial A_1}{\partial a_2} - 2A_2 \varepsilon_{12} \frac{\partial \varepsilon_{11}}{\partial a_1} \right) + (1 + 2\varepsilon_{11}) \left(\frac{\partial A_2 \varepsilon_{12}}{\partial a_1} - \frac{1}{2} \frac{\partial A_1^2}{\partial a_2} \right), \\ I A_{12}^2 &= (1 + 2\varepsilon_{11}) \frac{\partial \varepsilon_{22}}{\partial a_1} - \frac{\varepsilon_{12}}{A_1 A_2} \frac{\partial A_1^2}{\partial a_2} + \frac{4\varepsilon_{12}^2}{A_2} \frac{\partial A_2}{\partial a_1}. \end{aligned} \right\} \overrightarrow{1, 2} \quad (2.2)$$

Подставляя (2.1) в формулу Гаусса для S_* [2]

$$A_1 A_2 (k_{11}^* k_{22}^* - k_{12}^{*2}) I^{11} = \frac{\partial}{\partial a_2} \left(\frac{A_2 I \Gamma_{11}^{*2}}{A_1 (1 + 2\varepsilon_{11})} \right) - \frac{\partial}{\partial a_1} \left(\frac{A_2 I \Gamma_{12}^{*2}}{A_1 (1 + 2\varepsilon_{11})} \right)$$

и воспользовавшись той же формулой для S , получим одно из условий неразрывности конечных деформаций оболочки

$$\begin{aligned} A_1 A_2 [(k_{11}^* k_{22}^* - k_{12}^{*2}) I^{11} + k_{12}^2 - k_{11} k_{22}] &= \\ &= \frac{\partial}{\partial a_2} \frac{1}{A_2} \left[2 \frac{\partial A_2 \varepsilon_{12}}{\partial a_1} - \frac{1}{A_1} \frac{\partial A_1^2 \varepsilon_{11}}{\partial a_2} - A_2 \varepsilon_{12} \frac{\partial \ln(1 + 2\varepsilon_{11})}{\partial a_1} \right] - \\ &- \frac{\partial}{\partial a_1} \frac{1}{A_1} \left[\frac{1}{A_2} \frac{\partial A_2^2 \varepsilon_{22}}{\partial a_1} - 2\varepsilon_{12} \frac{\partial A_1}{\partial a_2} - A_1 \varepsilon_{12} \frac{\partial \ln(1 + 2\varepsilon_{11})}{\partial a_2} \right]. \end{aligned} \quad (2.3)$$

Другая форма этого условия получится перестановкой индексов 1 и 2. Положив в (2.1) $I = 1$ и $k_{ij}^* = k_{ij} + \varepsilon_{ij}$, получим окончательную формулу.

Третья симметричная форма получится, если произвести симметризацию в (2.3).

Вычитая из уравнений Кодацци для S_*

$$\frac{\partial A_1 A_2 k_{12}^*}{\partial a_1} - \frac{\partial A_1^2 k_{11}^*}{\partial a_2} - A_1 A_2 k_{12}^* (\Gamma_{11}^{*1} - \Gamma_{12}^{*2}) + A_1^2 k_{11}^* \Gamma_{12}^{*1} - A_2^2 k_{22}^* \Gamma_{11}^{*2} = 0 \quad \overrightarrow{1, 2}$$

соответствующие уравнения для S и воспользовавшись (1.1) и (2.1), получим еще два условия неразрывности конечных деформаций оболочки:

$$\begin{aligned} \frac{\partial A_2 \varepsilon_{12}}{\partial a_1} - \frac{\partial A_1 \varepsilon_{11}}{\partial a_2} + \varepsilon_{12} \frac{\partial A_2}{\partial a_1} + \varepsilon_{22} \frac{\partial A_1}{\partial a_2} + A_1 A_{12} k_{11}^* - A_2 k_{12}^* (A_{11}^1 - A_{12}^2) - \\ - A_1^{-1} A_2^2 k_{22}^* A_{11}^1 = 0, \quad \overrightarrow{1, 2}. \end{aligned} \quad (2.4)$$

Соотношения (2.3) и (2.4) являются точными уравнениями неразрывности больших деформаций при произвольных изгибах. Для квадратичной теории в (2.3) полагаем $\partial_j \ln(1 + 2\varepsilon_{ik}) \approx 2\partial_j \varepsilon_{ik}$.

Смешанные компоненты второго метрического тензора δ_k^i поверхности S_* определяются формулами

$$I b_1^* = 2\varepsilon_{12} k_{12}^* - (1 + 2\varepsilon_{22}) k_{11}^*, \quad I b_2^* A_1 A_2^{-1} = 2\varepsilon_{12} k_{22}^* - (1 + \varepsilon_{22}) k_{12}^*, \quad \overrightarrow{1, 2}. \quad (2.5)$$

§ 3. Уравнения равновесия нелинейной теории оболочек

Пусть \bar{X} и \bar{M} — векторы внешних усилий и моментов, отнесенные к единице площади S ; X_1^i и M_1^i — их контравариантные компоненты в системе осей α_i на S_* ; X_1^3 — проекция усилия на нормаль \bar{m}_* к S_* :

$$\bar{X} = X_1^i \bar{r}_i^* + X_1^3 \bar{m}_*, \quad \bar{M} = [\bar{m}_* \bar{r}_i^*] M_1^i, \quad (3.1)$$

где \bar{r}_i^* — координатные векторы на S_* ; \bar{f}_1^i и \bar{L}_1^i — векторы внутренних усилий и моментов, действующих на срезе $\tau_i = \text{const}$ деформированной оболочки, но отнесенные к единице длины α_i на S

$$\bar{f}_1^i = T_1^{ik} \bar{r}_k^* + N_1^i \bar{m}_*, \quad \bar{L}_1^i = [\bar{m}_* \bar{r}_k^*] H_1^{ik}, \quad (3.2)$$

где T_1^{ik} и H_1^{ik} — контравариантные компоненты тензора тангенциальных усилий и моментов в системе координат на S_* ; N_1^i — перерезывающие усилия [3].

Введем величины, пропорциональные усилиям и моментам:

$$X^i = X_1^i A_i, \quad X^3 = X_1^3, \quad M^i = M_1^i A_i, \quad \bar{f}^i = \bar{f}_1^i A_i, \quad (3.3)$$

$$\bar{L}^i = \bar{L}_1^i A_i, \quad T^{ik} = T_1^{ik} A_i A_k, \quad H^{ik} = H_1^{ik} A_i A_k, \quad N^i = N_1^i A_i,$$

где суммирование по i и k не производится.

Для введенных усилий и моментов уравнения равновесия имеют обычный вид [1]:

$$\frac{\partial A_2 \bar{f}^1}{\partial \alpha_1} + \frac{\partial A_1 \bar{f}^2}{\partial \alpha_2} + A_1 A_2 \bar{X} = 0, \quad (3.4)$$

$$\frac{\partial A_2 \bar{L}^1}{\partial \alpha_1} + \frac{\partial A_1 \bar{L}^2}{\partial \alpha_2} + A_2 [\bar{r}_1^* \bar{f}^1] + A_1 [\bar{r}_2^* \bar{f}^2] + A_1 A_2 \bar{M} = 0, \quad (3.5)$$

где

$$\bar{X} = \sum_{k=1}^2 X^k \bar{r}_k^* A_k^{-1} + \bar{m}_* X^3, \quad \bar{M} = \sum_{k=1}^2 [\bar{m}_* \bar{r}_k^*] M^k A_k^{-1}, \quad (3.6)$$

$$\bar{f}^i = \sum_{k=1}^2 T^{ik} \bar{r}_k^* A_k^{-1} + \bar{m}_* N^i, \quad \bar{L}^i = \sum_{k=1}^2 [\bar{m}_* \bar{r}_k^*] H^{ik} A_k^{-1}. \quad (3.7)$$

Подставляя эти векторы в (3.4) и (3.5) и воспользовавшись формулами Гаусса — Вейнгартена

$$\bar{r}_{ik}^* = \bar{r}_{ik}^* + \bar{m}_*^* b_{ik}^*, \quad \bar{m}_i^* = -b_i^* \bar{r}_k^*, \quad (3.8)$$

найдем скалярные уравнения равновесия нелинейной теории оболочек в ортогональных координатах на S :

$$\left. \begin{aligned} & \frac{\partial A_2 T^{11}}{\partial \alpha_1} + \frac{\partial A_1 T^{21}}{\partial \alpha_2} + T^{12} \frac{\partial A_1}{\partial \alpha_2} - T^{22} \frac{\partial A_2}{\partial \alpha_1} + \\ & + A_1^2 A_2 \sum_{i=1}^2 \left(\sum_{k=1}^2 A_{ik}^1 A_i^{-1} A_k^{-1} T^{ik} - b_i^1 N^i \right) + A_1 A_2 X^1 = 0, \\ & \frac{\partial A_2 N^1}{\partial \alpha_1} + \frac{\partial A_1 N^2}{\partial \alpha_2} - A_1 A_2 \left(\sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^2 T^{ij} b_{ij}^* \bar{m}_* X^3 \right) = 0, \end{aligned} \right\} \vec{1}, \vec{2} \quad (3.9)$$

$$\frac{\partial A_2 N^1}{\partial \alpha_1} + \frac{\partial A_1 N^2}{\partial \alpha_2} - A_1 A_2 \left(\sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^2 T^{ij} b_{ij}^* \bar{m}_* X^3 \right) = 0,$$

$$\frac{\partial A_2 T^{11}}{\partial \alpha_1} + \frac{\partial A_1 T^{21}}{\partial \alpha_2} + T^{12} \frac{\partial A_1}{\partial \alpha_2} - T^{22} \frac{\partial A_2}{\partial \alpha_1} + A_1^2 A_2 \sum_{i=1}^2 \sum_{k=1}^2 A_{ik}^1 (A_i A_k)^{-1} H^{ik} + A_1 A_2 (M^1 - N^1) = 0, \quad \vec{1}, \vec{2} \quad (3.10)$$

$$T^{12} - T^{21} + \sum_{i=1}^2 A_i^{-1} (A_2 b_i^* H^{11} - A_1 b_i^* H^{12}) = 0, \quad (3.11)$$

где A_{jk}^i и b_k^i следует подставить из (2.2) и (2.5).

В этих уравнениях мы не пренебрегли удлинениями и сдвигом по сравнению с единицей. Следовательно, они представляют собой точные уравнения равновесия при больших деформациях и изгибах.

Усилия и моменты определяются по обычным формулам:

$$T^{ik} = A_i A_k \int_{-0,5h}^{0,5h} \frac{H_1 H_2}{A_1 A_2} \sum_{j=1}^2 \frac{\sigma_j^{ij}}{H_i H_j} (\delta_j^k - z_* b_j^k) dz_*, \quad (3.12)$$

$$H^{ik} = A_i A_k \int_{-0,5h}^{0,5h} \frac{H_1 H_2}{A_1 A_2} \sum_{j=1}^2 \frac{\sigma_j^{ij}}{H_i H_j} (\delta_j^k - z_* b_j^k) z_* dz_*, \quad (3.13)$$

$$N^i = A_i \int_{-0,5h}^{0,5h} \frac{H_1 H_2}{A_1 A_2} \frac{\sigma_*^{k3}}{H_k} dz_*. \quad (3.14)$$

Здесь суммирование по i и k не производится;

z_* — координата нормальная к S_* , $z_* = 0,5h(+)$ (α_1, α_2) и $z_* = 0,5h(-)$ (α_1, α_2) — уравнения ограничивающих поверхностей деформированной оболочки;

H_1 и H_2 — коэффициенты Ляме недеформированной оболочки, σ_j^{ij} и σ_*^{k3} — обобщенные напряжения [4].

Шестое уравнение равновесия (3.11) является тождеством. Его выполнение обеспечивает парность касательных напряжений $\sigma^{12} = \sigma^{21}$. Формулировка геометрических и смешанных граничных условий в компонентах деформаций дана в работе [3].

§ 4. Соотношения упругости

Упругие свойства изотропного материала при деформациях произвольной величины характеризуются заданием трех скалярных функций от инвариантов деформаций [5], [6]. Первая величина k' — обобщенный модуль объемного расширения, равный отношению гидростатического напряжения σ к относительной объемной деформации Δ :

$$k' = (\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3) : 3\Delta, \quad \Delta = \epsilon_1^0 + \epsilon_2^0 + \epsilon_3^0, \quad (4.2)$$

где σ_1, σ_2 и σ_3 — главные истинные напряжения; $\epsilon_1^0, \epsilon_2^0$ и ϵ_3^0 — главные истинные удлинения, определяемые по формулам:

$$2\epsilon_i^0 = \ln(1 + 2\epsilon_i^2), \quad i = 1, 2, 3; \quad (4.3)$$

ε_i^z — главные значения компонентов тензора деформации оболочки, рассматриваемой как трехмерное тело. Вторая величина G — обобщенный модуль сдвига, пропорциональный отношению интенсивностей касательных напряжений и деформаций сдвига:

$$G = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2}{(\varepsilon_1^0 - \varepsilon_2^0)^2 + (\varepsilon_2^0 - \varepsilon_3^0)^2 + (\varepsilon_3^0 - \varepsilon_1^0)^2}}. \quad (4.4)$$

Третья величина ω — фаза подобия девiatorов напряжения и деформации. Она равна нулю, если эти девiatorы подобны (если параметры Лоде для деформации и напряжения совпадают).

При $\omega = 0$ для главных напряжений имеет место закон Гука с переменными K' и G :

$$\sigma_1 = K'\Delta + 2G \left(\varepsilon_1^0 - \frac{\Delta}{3} \right), \quad \sigma_2 = K'\Delta + 2G \left(\varepsilon_2^0 - \frac{\Delta}{3} \right), \quad (4.5)$$

$$\sigma_3 = K'\Delta + 2G \left(\varepsilon_3^0 - \frac{\Delta}{3} \right).$$

Эти главные истинные напряжения связаны с главными значениями обобщенных напряжений σ_1^* , σ_2^* и σ_3^* по формулам [5]:

$$\sigma_1^* = \sqrt{(1 + 2\varepsilon_2^z)(1 + 2\varepsilon_3^z)(1 + 2\varepsilon_1^z)^{-1}} \sigma_1, \quad (4.6)$$

$$\sigma_2^* = \sqrt{(1 + 2\varepsilon_1^z)(1 + 2\varepsilon_3^z)(1 + 2\varepsilon_2^z)^{-1}} \sigma_2$$

$$\sigma_3^* = \sqrt{(1 + 2\varepsilon_1^z)(1 + 2\varepsilon_2^z)(1 + 2\varepsilon_3^z)^{-1}} \sigma_3. \quad (4.7)$$

В дальнейшем мы принимаем гипотезу Кирхгофа — Лява, которая приводит к линейному распределению деформаций по толщине оболочки

$$\varepsilon_{ik}^z = \varepsilon_{ik} + z\chi_{ik}, \quad i, k = 1, 2. \quad (4.8)$$

При получении этих формул приходится пренебречь величинами порядка $h:R$ по сравнению с единицей. Поэтому при построении квадратичной теории оболочек будем считать, что $h:R \sim \varepsilon_p^z$. Так же, как в линейной теории, деформацию ε_3^0 будем определять из условия $\sigma_3 = 0$:

$$\varepsilon_3^0 = -\nu(\varepsilon_1^0 + \varepsilon_2^0):(1 - \nu), \quad (4.9)$$

где ν — переменный коэффициент Пуассона.

Внося это в (4.5), находим главные истинные напряжения в оболочке

$$\sigma_1 = E(\varepsilon_1^0 + \nu\varepsilon_2^0):(1 - \nu^2); \quad \sigma_2 = E(\varepsilon_2^0 + \nu\varepsilon_1^0):(1 - \nu^2); \quad (4.10)$$

E — переменный модуль Юнга, причем

$$E = 9K'G:(G + 3K'), \quad \nu = (3K' - 2G):(2G + 6K'); \quad (4.11)$$

$$E/(1 - \nu^2) = G(G + 3K'):\left(G + \frac{3}{4}K'\right).$$

Пренебрегая квадратами деформаций по сравнению с единицей, из (4.6) для главных обобщенных напряжений находим выражения

$$\sigma_1^* = (1 + \varepsilon_2^z + \varepsilon_3^z - \varepsilon_1^z) \sigma_1; \quad \sigma_2^* = (1 + \varepsilon_1^z + \varepsilon_3^z - \varepsilon_2^z) \sigma_2;$$

с принятой точностью можно написать

$$\sigma_1^* = (1 + \varepsilon_1^z + \varepsilon_2^z + \varepsilon_3^z - 2\varepsilon_1^z) \sigma_1 \approx (1 + \Delta - 2\varepsilon_1^z) \sigma_1 \approx (1 - 2\varepsilon_1^z) \sigma_1,$$

где Δ — относительное изменение объема, причем $\Delta \ll 1$ для всех материалов. Пренебрегая Δ по сравнению с единицей, для обобщенных напряжений находим формулы

$$\sigma_1^* = (1 - 2\varepsilon_1^z) \sigma_1, \quad \sigma_2^* = (1 - 2\varepsilon_2^z) \sigma_2. \quad (4.12)$$

Из (4.3) и (4.10) с рассматриваемой точностью имеем

$$\varepsilon_1^0 = \varepsilon_1^z - (\varepsilon_1^z)^2, \quad \sigma_1 = E[\varepsilon_1^z + \nu\varepsilon_2^z - (\varepsilon_1^z)^2 - \nu(\varepsilon_2^z)^2]:(1 - \nu^2) \quad \overrightarrow{1, 2}.$$

Внося отсюда σ_1 и σ_2 в (4.12) и пренебрегая квадратами деформаций по сравнению с единицей, находим главные значения обобщенных напряжений:

$$\sigma_1^* = E[\varepsilon_1^z + \nu\varepsilon_2^z - 3(\varepsilon_1^z)^2 - 2\nu\varepsilon_1^z\varepsilon_2^z - \nu(\varepsilon_2^z)^2]:(1 - \nu^2) \quad \overrightarrow{1, 2}.$$

Здесь для преобразования к произвольным осям α_1 и α_2 удобно произвести замену $(\varepsilon_2^z)^2 = (\varepsilon_1^z + \varepsilon_2^z)^2 - 2\varepsilon_1^z\varepsilon_2^z - (\varepsilon_1^z)^2$:

$$\sigma_1^* = E[\varepsilon_1^z + \nu\varepsilon_2^z + (\nu - 3)(\varepsilon_1^z)^2 - \nu(\varepsilon_1^z + \varepsilon_2^z)^2]:(1 - \nu^2) \quad \overrightarrow{1, 2}.$$

Отсюда, преобразуя к произвольным осям, найдем обобщенные напряжения в оболочке

$$\sigma_{11}^* = E[\varepsilon_{11}^z + \nu\varepsilon_{22}^z + (\nu - 3)(\varepsilon_{11}^z + \varepsilon_{12}^z)^2 - \nu(\varepsilon_{11}^z + \varepsilon_{22}^z)^2]:(1 - \nu^2) \quad \overrightarrow{1, 2}, \quad (4.13)$$

$$\sigma_{12}^* = E\varepsilon_{12}^z:(1 + \nu) + E(\nu - 3)\varepsilon_{12}^z(\varepsilon_{11}^z + \varepsilon_{22}^z):(1 - \nu^2).$$

Эти соотношения допускают дальнейшие упрощения, так как можно пренебречь относительным изменением объема по сравнению с единицей: $\Delta \ll 1$ для всех материалов. Поэтому с большой степенью точности имеет место равенство [5]:

$$\varepsilon_1^0 + \varepsilon_2^0 + \varepsilon_3^0 \approx \Delta.$$

Подставляя сюда ε_3^0 из (4.9), получим

$$\varepsilon_1^0 + \varepsilon_2^0 = (1 - \nu)\Delta:(1 - 2\nu). \quad (4.13')$$

Откуда, заменяя истинные удлинения ε_1^0 и ε_2^0 их значениями $\varepsilon_1^0 = \varepsilon_1^z - (\varepsilon_1^z)^2$..., будем иметь

$$\varepsilon_1^z + \varepsilon_2^z - (\varepsilon_1^z)^2 - (\varepsilon_2^z)^2 = (1 - \nu)\Delta:(1 - 2\nu);$$

сумма $\varepsilon_1^z + \varepsilon_2^z$ и произведение $\varepsilon_1^z\varepsilon_2^z$ являются инвариантами по отношению к преобразованию Гауссовых координат на поверхностях $z = \text{const}$. Поэтому последнее равенство можно переписать так:

$$I_1^z - (I_1^z)^2 + 2I_2^z = (1 - \nu)\Delta:(1 - 2\nu), \quad (4.14)$$

где введены инварианты

$$I_1^z = \varepsilon_1^z + \varepsilon_2^z = \varepsilon_{11}^z + \varepsilon_{22}^z, \quad I_2^z = \varepsilon_1^z\varepsilon_2^z = \varepsilon_{11}^z\varepsilon_{22}^z - (\varepsilon_{12}^z)^2.$$

Подставляя сумму $\epsilon_{11}^z + \epsilon_{22}^z$ из (4.14) в (4.13) и пренебрегая квадратами удлинений и сдвига по сравнению с единицей, получим

$$\sigma_{11}^* = E[\epsilon_{11}^z + \nu \epsilon_{22}^z + (\nu - 3)(\epsilon_{11}^{z^2} + \epsilon_{12}^{z^2})] : (1 - \nu^2), \quad \sigma_{12}^* = E\epsilon_{12}^z : (1 + \nu) \quad \overrightarrow{1, 2} \quad (4.15)$$

так как члены

$$E(\epsilon_{11}^z + \epsilon_{22}^z)^2 \quad \text{и} \quad E\epsilon_{12}^z(\epsilon_{11}^z + \epsilon_{22}^z)$$

оказываются пренебрежимо малыми по сравнению с остальными, вследствие малости $\Delta \ll 1$. Теперь, внося в (4.15) значения ϵ_{ik}^z из (4.8), будем иметь

$$\sigma_{11}^*(1 - \nu^2) = E[\epsilon_{11} + \nu \epsilon_{22} + z(\alpha_{11} + \nu \alpha_{22})] + E(\nu - 3)[\epsilon_{11}^z + \epsilon_{12}^z + 2z(\epsilon_{11}\alpha_{11} + \epsilon_{22}\alpha_{22}) + z^2(\alpha_{11} + \alpha_{12}^2)], \quad \sigma_{12}^* = E(\epsilon_{12} + z\alpha_{12}) : (1 + \nu) \quad (4.16)$$

Геометрические характеристики оболочки будем считать такими, что $h:R$ есть величина порядка квадрата деформации. Пренебрегая $h:R$ по сравнению с единицей, усилия и моменты будем определять по обычным формулам

$$T^{11} = \int_{-0,5h}^{0,5h} \sigma_{11}^* dz, \quad H^{11} = \int_{-0,5h}^{0,5h} \sigma_{11}^* z dz, \dots$$

Подставляя сюда (4.16), получим

$$T^{11} = K\epsilon_{11} + K_1\epsilon_{22} + D_1\alpha_{11} + (D_1 - G_1)\alpha_{22} + (K_1 - 3K)(\epsilon_{11}^z + \epsilon_{12}^z) - 2(G_1 + 2D_1)(\epsilon_{11}\alpha_{11} + \epsilon_{22}\alpha_{22}) - (G_2 + 2D) (\alpha_{11}^z + \alpha_{12}^z); \quad \overrightarrow{1, 2}$$

$$T^{12} = G_0\alpha_{12} + G_1\alpha_{12};$$

$$H^{11} = D_{11}\epsilon_{11} + (D_1 - G_1)\epsilon_{22} + D\alpha_{11} + (D - G_2)\alpha_{22} - (G_1 + 2D_1)(\epsilon_{11}^z + \epsilon_{12}^z) + D_2(\alpha_{11}^z + \alpha_{12}^z) - 2(G_2 + 2D)(\epsilon_{11}\alpha_{11} + \epsilon_{22}\alpha_{22}); \quad H^{12} = G_1\epsilon_{12} + G_2\alpha_{12}, \quad \overrightarrow{1, 2} \quad (4.17)$$

где введены обозначения жесткостей: K — обобщенная жесткость на растяжение и D — цилиндрическая жесткость

$$K = \int_{-0,5h}^{0,5h} \frac{Edz}{1 - \nu^2}, \quad D = \int_{-0,5h}^{0,5h} \frac{Ez^2 dz}{1 - \nu^2} \quad (4.18)$$

и другие жесткости

$$K_1 = \int_{-0,5h}^{0,5h} \frac{E\nu dz}{1 - \nu^2}, \quad D_1 = \int_{-0,5h}^{0,5h} \frac{Ez dz}{1 - \nu^2}, \quad D_2 = \int_{-0,5h}^{0,5h} \frac{E(\nu - 3)z^2 dz}{1 - \nu^2}, \quad (4.19)$$

$$G_0 = \int_{-0,5h}^{0,5h} \frac{Edz}{1 + \nu}, \quad G_1 = \int_{-0,5h}^{0,5h} \frac{Ez dz}{1 + \nu}, \quad G_2 = \int_{-0,5h}^{0,5h} \frac{Ez^2 dz}{1 + \nu}. \quad (4.20)$$

По экспериментальным исследованиям Бриджмена закон объемной деформации для изотропной среды выражается зависимостью $\sigma = \sigma(\Delta)$. В рассматриваемом случае эта зависимость является квадратичной $\sigma = K'\Delta + K''\Delta^2$, (4.21)

Так как $\Delta \ll 1$, то эта зависимость должна быть линейной: $\sigma = K'\Delta$, где K' — постоянный модуль объемного расширения. Добавочный член в (4.21) дает незначительную поправку к линейному закону объемной деформации.

В общем случае модули упругости зависят от трех скалярных функций, например, от $e_1^0 = \Delta$, e_2^0 и ψ^0 , где $\sqrt{e_2^0}$ — истинная интенсивность деформаций сдвига [5]:

$$6e_2^0 = (\epsilon_1^0 - \epsilon_2^0)^2 + (\epsilon_2^0 - \epsilon_3^0)^2 + (\epsilon_3^0 - \epsilon_1^0)^2, \quad (4.22)$$

а ψ^0 — угол вида деформации. Приращение удельной работы деформаций при $\Delta \ll 1$ выражается формулой [5]

$$\delta(A) = K'\Delta\delta\Delta + 2G[\cos\omega\delta e_2^0 + 2e_2^0\sin\omega\delta\psi^0], \quad (4.23)$$

откуда следует дифференциальное соотношение между модулями упругости

$$\partial K'\Delta/\partial e_2^0 = \partial(2G\cos\omega)/\partial\Delta.$$

Так как $K' = \text{const}$ и $\omega = 0$, то $\partial G/\partial\Delta = 0$. Из дифференциального соотношения

$$\partial(G\cos\omega)/\partial\psi^0 = 2\partial(e_2^0 G \sin\omega)/\partial e_2^0$$

следует, что $\partial G/\partial\psi^0 = 0$. Следовательно, G может зависеть только от e_2^0 . Модуль Юнга E и коэффициент Пуассона ν , ввиду (4.11), также будут зависеть от деформаций. Из первых двух равенств соотношений (4.11) следует, что (при $K' = \text{const}$) E и ν зависят только от переменного G и, следовательно, от e_2^0 . Далее заметим, что при $\Delta \ll 1$ малым является также $e_3^0 \ll 1$. Действительно, подставляя (4.13') в (4.9), будем иметь

$$e_3^0 = -\nu\Delta : (1 - 2\nu). \quad (4.24)$$

Если, например, $\nu = 0,4$, то $e_3^0 \approx -2\Delta$. Таким образом, до предела упругости $e_3^0 \ll 1$. Ввиду этого, с достаточной точностью можно отождествлять $e_3^0 \approx e_3^z$, где e_3^z — главное значение тензора деформации. Так как $\epsilon_{23}^z = \epsilon_{33}^z = 0$, то e_3^z совпадает с этим главным значением. Следовательно, $e_3^0 = e_3^z = e_{33}^z \ll 1$. При определении интенсивности деформаций сдвига $\sqrt{e_2^0}$ для оболочки будем применять полностью гипотезу Кирхгофа—Лява: $\epsilon_{13}^z = \epsilon_{23}^z = \epsilon_{33}^z = 0$. Полагая $e_3^z = 0$, из (4.22) получим

$$6e_2^0 = (\epsilon_1^0 - \epsilon_2^0)^2 + (\epsilon_1^0)^2 + (\epsilon_2^0)^2. \quad (4.25)$$

Далее имеем

$$\epsilon_1^0 - \epsilon_2^0 = (\epsilon_1^z - \epsilon_2^z)(1 - \epsilon_1^z - \epsilon_2^z) \approx \epsilon_1^z - \epsilon_2^z;$$

при этом мы пренебрегли суммой $\epsilon_1^z + \epsilon_2^z = I_1^z$ по сравнению с единицей, так как согласно (4.14) $I_1^z \ll 1$. В правой части равенства

$$(\epsilon_1^0)^2 + (\epsilon_2^0)^2 \approx (\epsilon_1^z)^2 + (\epsilon_2^z)^2 - 2[(\epsilon_1^z)^2 + (\epsilon_2^z)^2]$$

сумма

$$(\epsilon_1^z)^2 + (\epsilon_2^z)^2 = (I_1^z)^2 - 3I_2^z/I_1^z$$

в силу той же оценки (4.14) пренебрежимо мала. Следовательно,

$$(\epsilon_1^0)^2 + (\epsilon_2^0)^2 \approx (\epsilon_1^z)^2 + (\epsilon_2^z)^2.$$

Поэтому интенсивность истинных деформаций e_2^0 можно отождествлять с интенсивностью деформаций сдвига e_2 теории малых деформаций:

$$e_2^0 = e_2 = \frac{1}{3} \left[(\epsilon_{11}^z)^2 + (\epsilon_{22}^z)^2 - \epsilon_{11}^z \epsilon_{22}^z + \frac{3}{4} (\epsilon_{12}^z)^2 \right]. \quad (4.26)$$

Обобщенный модуль сдвига вследствие условия $\sigma_3 = 0$ определяется формулой

$$G = \frac{1}{2} \sqrt{(\sigma_1^2 + \sigma_2^2 - \sigma_1 \sigma_2) : [(\epsilon_1^z)^2 + (\epsilon_2^z)^2 - \epsilon_1^z \epsilon_2^z]}, \quad (4.27)$$

где ϵ_1^z и ϵ_2^z можно отождествлять относительными удлинениями волокон в направлении осей координат l_{x_1} и l_{x_2} . Модуль Юнга и коэффициент Пуассона определяются через эту экспериментальную функцию G по формулам (4.11).

В случае квадратичной теории G можно аппроксимировать линейной функцией

$$G = G_0 - G' e_1, \quad e_1 = \sqrt{e_2}, \quad (4.28)$$

где e_1 — интенсивность деформации сдвига, G_0 — постоянный модуль сдвига по линейной теории $G_0 = E_0 / 2(1 + \nu_0)$; E_0 и ν_0 — модуль Юнга и коэффициент Пуассона по этой теории; G' — экспериментальный коэффициент. Коэффициент Пуассона можно вычислить по формуле (4.11) и аппроксимировать линейной функцией:

$$\nu = \nu_0 + \nu_1 e_1. \quad (4.29)$$

Тогда модуль Юнга представится также линейной функцией

$$E = E_0 [1 - 2\nu_1 e_1 / (1 - 2\nu_0)]. \quad (4.30)$$

Таким образом, соотношения упругости будут содержать новый постоянный экспериментальный коэффициент G' , который определяется из опыта на кручение. При малой нелинейности значение G' для меди приводится в статье [9], причем модуль сдвига G взят в виде

$$G = G^0 - G' e_2. \quad (4.31)$$

Метод, изложенный в этом параграфе, применим также для вывода соотношений упругости с сохранением членов более высокого порядка.

Для пластин и оболочек удобно определить функции $E/(1 - \nu^2)$ и $E\nu/(1 - \nu^2)$ из опыта на растяжение — сжатие и аппроксимировать их линейными функциями от интенсивности e_2 , а затем разложить их в ряды по степеням h . Интегралы (4.18) и (4.19) можно вычислить с точностью до h^3 включительно.

ЛИТЕРАТУРА

1. Муштари Х. М. и Галимов К. З. Нелинейная теория упругих оболочек. Казань, 1957.
2. Каган В. Ф. Основы теории поверхностей. Гостехиздат, Москва, 1947, стр. 351.
3. Галимов К. З. Некоторые вопросы нелинейной теории оболочек. Диссертация, ин-т механики АН СССР, 1956; Известия Казанск. филиала АН СССР, сер. физ.-мат. наук, № 10—12.
4. Новожилов В. В. Теория упругости. Судпромгиз, 1958.
5. Новожилов В. В. О принципах обработки результатов статических испытаний изотропных материалов. ПММ, том XV, вып. 2 и 6, 1951.
6. Толокольников Л. А. О связи между напряжениями и деформациями в нелинейной теории упругости. ПММ, том XX, вып. 3, 1956; том XXI, вып. 6, 1957.
7. Kauderer H. Über ein nichtlineares Elastizitätsgesetz. Ingenieur-Archiv, Bd XVII, 1949, Berlin.
8. Ozden K. Biegung dünner Platten und Variationssätze bei einem nichtlinearen Elastizitätsgesetz. Ingenieur-Archiv, Bd XXIV, 1956, Berlin.
9. Каудерер. Нелинейный закон упругости. Основные уравнения и возможности применения. РЖ „Механика“, № 10, 1957. Реферат 11963.

Поступила 1.IX 1959 г.

Х. М. Муштари, Р. Г. Суркин

ПОПЕРЕЧНЫЙ ИЗГИБ ОПЕРТОЙ КВАДРАТНОЙ ПЛАСТИНКИ ПРИ НЕЛИНЕЙНОЙ ЗАВИСИМОСТИ МЕЖДУ ДЕФОРМАЦИЕЙ И НАПРЯЖЕНИЕМ

В статье рассматривается поперечный изгиб опертой квадратной пластинки с гибкими в своей плоскости краями при нелинейной зависимости между деформацией и напряжением. Задача решается согласно теории среднего изгиба оболочек [1].

Обозначения:

E — модуль упругости, μ — коэффициент поперечного сжатия;

x, y — декартовы координаты в плоскости пластинки;

t, a — толщина и размер пластинки;

p — интенсивность поперечного давления;

$\bar{w} = wt$ — проекция перемещения на внешнюю нормаль;

T_{11}, T_{22}, T_{12} — компоненты мембранного усилия, выражаемые через функцию усилий ψ по формулам

$$T_{11} = Et^3 \psi_{yy}, \quad T_{12} = -Et^3 \psi_{xy}, \quad T_{22} = Et^3 \psi_{xx}. \quad (0.1)$$

Здесь и далее индексы x, y, ξ, η указывают на частное дифференцирование по x, y, ξ, η ;

$$\xi = \frac{\pi x}{a}, \quad \eta = \frac{\pi y}{a}, \quad \left(-\frac{\pi}{2} \leq \xi \leq \frac{\pi}{2}, \quad -\frac{\pi}{2} \leq \eta \leq \frac{\pi}{2} \right),$$

$$D = \frac{1}{12(1 - \mu^2)}, \quad p^* = \frac{pa^4}{Et^4}, \quad (0.2)$$

$$\Delta(\dots) = \left(\frac{\partial^2}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2}{\partial \eta^2} \right) (\dots),$$

ζ — амплитуда прогиба по основной гармонике;

ζ^0 — прогиб в центре пластинки;

$$P = \frac{4}{\pi^4} \frac{pa^4}{Et^4} \text{ — параметр нагрузки.}$$

1. Соотношения теории упругости

Примем зависимость между напряжением и деформацией в виде

$$\sigma_i = E e_i, \quad (1.1)$$

где

$$E = E_0(1 - \gamma e_i^2) \quad (1.2)$$

— секущий модуль упругости,

$$e_i = \frac{\sqrt{2}}{2(1+\mu)} \sqrt{(e_{11} - e_{22})^2 + (e_{22} - e_{33})^2 + (e_{33} - e_{11})^2} + \frac{3}{2}(e_{12}^2 + e_{23}^2 + e_{31}^2) \quad (1.3)$$

— интенсивность деформаций. В (1.2) E_0 и γ — постоянные величины. Например, по данным работы [2] для алюминивно-бронзового сплава $E_0 = 1,43 \cdot 10^6 \text{ кг/см}^2$, $\gamma \approx 8 \cdot 10^4$, по нашим данным для сплава $AlMg5$ $E_0 = 1,126 \cdot 10^6 \text{ кг/см}^2$, $\gamma \approx 7,5 \cdot 10^4$.

Выражение для модуля сдвига имеет обычный вид:

$$G = \frac{E}{2(1+\mu)}$$

Предполагается, кроме того, что у физически нелинейного материала коэффициент поперечного сжатия μ изменяется в зависимости от e_i по закону квадратной параболы

$$\mu = \mu_0(1 + me_i^2), \quad (1.4)$$

где μ_0 и m — постоянные величины.

Далее исходим из обычных формул теории пластинок:

$$\sigma_{11} = \frac{E}{1-\mu^2}(e_{11} + \mu e_{22}), \quad \overleftarrow{1, 2} \quad (1.5)$$

Здесь и далее символ $\overleftarrow{1, 2}$ или $\overleftarrow{i, j}$ обозначает, что остальные формулы получаются из приведенных путем замены в них первых индексов на вторые и наоборот.

Напряжение сдвига на расстоянии z от срединной плоскости равно

$$\sigma_{12} = 2G\varepsilon_{12}^z. \quad (1.6)$$

В дальнейшем ограничиваемся рассмотрением малой физической нелинейности.

Подставляя (1.2) и (1.4) в уравнения (1.5) и пренебрегая малыми величинами $\gamma^2 e_i^4$, $m\gamma e_i^4$, $m^2 e_i^4$, после некоторых преобразований получаем

$$\sigma_{11} \approx \frac{E_0}{1-\mu_0^2} [e_{11}(1 + \alpha e_i^2) + e_{22}(\mu_0 + \beta e_i^2)], \quad \overleftarrow{1, 2} \quad (1.7)$$

где обозначено

$$\alpha = -\gamma + \frac{2\mu_0^2}{1-\mu_0^2} m, \quad \beta = \mu_0 \left(-\gamma + \frac{1+\mu_0^2}{1-\mu_0^2} m \right). \quad (1.8)$$

При подстановке в (1.7) в малых членах αe_i^2 и βe_i^2 полагаем $\mu = \mu_0$, кроме того, ограничимся рассмотрением изгиба пластинок, для материала которых $\mu = \frac{1}{4} + \frac{1}{3}$ (как в случае металлов). Тогда

$$e_i^2 \approx \frac{1-\mu_0+\mu_0^2}{(1-\mu_0^2)^2} (e_{11}^2 + e_{22}^2) + \frac{3}{4(1+\mu_0)^2} e_{12}^2. \quad (1.9)$$

Тогда уравнения (1.7) приведутся к виду

$$\sigma_{11} \approx \frac{E_0}{1-\mu_0^2} \{ e_{11} [1 + a'(e_{11}^2 + e_{22}^2) + a''e_{12}^2] + e_{22} [\mu_0 + b'(e_{11}^2 + e_{22}^2) + b''e_{12}^2] \}, \quad \overleftarrow{1, 2} \quad (1.10)$$

где приняты обозначения

$$\frac{1-\mu_0+\mu_0^2}{(1-\mu_0^2)^2} \alpha = a', \quad \frac{3}{4} \frac{\alpha}{(1+\mu_0)^2} = a'', \quad (1.11)$$

$$\frac{1-\mu_0+\mu_0^2}{(1-\mu_0^2)^2} \beta = b', \quad \frac{3}{4} \frac{\beta}{(1+\mu_0)^2} = b''.$$

Для напряжения сдвига, при тех же допущениях, что были ранее, имеем

$$\sigma_{12} \approx \frac{E_0}{1+\mu_0} (1 - ce_i^2) \varepsilon_{12}^z, \quad c = \gamma + \frac{\mu_0}{1+\mu_0} m. \quad (1.12)$$

Мембранные усилия в срединной плоскости пластинки вычисляем по известным формулам

$$T_{ij} = \int_{-\frac{t}{2}}^{\frac{t}{2}} \sigma_{ij} dz, \quad i, j = 1, 2. \quad (1.13)$$

Составляющие деформаций и изменения кривизны берем в виде, данном в работе [3]:

$$\begin{aligned} e_{11} &= \varepsilon_1 + z\chi_1, & e_{22} &= \varepsilon_2 + z\chi_2, & \varepsilon_{12}^z &= \varepsilon_{12} + z\chi_{12}, \\ \varepsilon_1 &= \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \bar{w}}{\partial x} \right)^2, & \varepsilon_2 &= \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \bar{w}}{\partial y} \right)^2, \\ 2\varepsilon_{12} &= \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial \bar{w}}{\partial x} \frac{\partial \bar{w}}{\partial y}, & \chi_1 &= -\frac{\partial^2 \bar{w}}{\partial x^2}, & \chi_2 &= -\frac{\partial^2 \bar{w}}{\partial y^2}, \\ & & \chi_{12} &= -\frac{\partial^2 \bar{w}}{\partial x \partial y}. \end{aligned} \quad (1.14)$$

Подставляя (1.14) в уравнения (1.10) и (1.12), по формулам (1.13) вычисляем мембранные усилия T_{11} , T_{22} и T_{12}

$$\begin{aligned} T_{11} &= K(\varepsilon_1 + \mu_0 \varepsilon_2) + D_0 \{ \varepsilon_1 (3a'\chi_1^2 + a''\chi_2^2 + 2b'\chi_1\chi_2) + \\ &+ \varepsilon_2 (b'\chi_1^2 + 3b''\chi_2^2 + 2a'\chi_1\chi_2) + 2\varepsilon_{12}\chi_{12} (a''\chi_1 + b''\chi_2) + \chi_{12}^2 (a''\varepsilon_1 + b''\varepsilon_2) \}, \quad \overleftarrow{1, 2} \end{aligned} \quad (1.15)$$

$$T_{12} = (1-\mu_0) K \varepsilon_{12} - (1-\mu_0) D_0 \{ \varepsilon_{12} [c'(\chi_1^2 + \chi_2^2) + 3c''\chi_{12}^2] + 2c'\chi_{12}(\varepsilon_1\chi_1 + \varepsilon_2\chi_2) \},$$

где

$$K = \frac{E_0 t}{1-\mu_0^2}, \quad D_0 = \frac{E_0 t^3}{12(1-\mu_0^2)},$$

$$c' = \frac{1-\mu_0+\mu_0^2}{(1-\mu_0^2)^2} c, \quad c'' = \frac{3}{4(1+\mu_0)^2} c.$$

В выражениях (1.15) мы пренебрегли членами вида

$$\varepsilon_1 [a'(\varepsilon_1^2 + \varepsilon_2^2) + a''\varepsilon_{12}^2], \dots,$$

малыми по сравнению с линейными членами, которые в случае среднего изгиба сами являются второстепенными.

В последующем усилия выражаем через функцию напряжения $\bar{\psi}$:

$$T_{11} = \frac{\partial^2 \bar{\psi}}{\partial y^2}, \quad T_{22} = \frac{\partial^2 \bar{\psi}}{\partial x^2}, \quad T_{12} = -\frac{\partial^2 \bar{\psi}}{\partial x \partial y}. \quad (1.16)$$

Далее, в (1.15) в малые члены, зависящие от изгибной жесткости D_0 , вместо $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_{12}$ подставляем их первые приближения $\varepsilon_1^1, \varepsilon_2^1, \varepsilon_{12}^1$, выраженные через функцию напряжения, т. е. берем

$$\varepsilon_1 \approx \varepsilon_1^1 = \frac{1}{E_0 t} \left(\frac{\partial^2 \bar{\psi}}{\partial y^2} - \mu_0 \frac{\partial^2 \bar{\psi}}{\partial x^2} \right), \quad \varepsilon_2 \approx \varepsilon_2^1 = \frac{1}{E_0 t} \left(\frac{\partial^2 \bar{\psi}}{\partial x^2} - \mu_0 \frac{\partial^2 \bar{\psi}}{\partial y^2} \right),$$

$$\varepsilon_{12} \approx \varepsilon_{12}^1 = -\frac{1 + \mu_0}{E_0 t} \frac{\partial^2 \bar{\psi}}{\partial x \partial y}. \quad (1.17)$$

В (1.15) малые члены, зависящие от физической нелинейности материала, обозначим через

$$\bar{F}_1 = D_0 \{ \varepsilon_1^1 (3a'x_1^2 + a'x_2^2 + 2b'x_1x_2) + \varepsilon_2^1 (b'x_1^2 + 3b'x_2^2 + 2a'x_1x_2) +$$

$$+ 2\varepsilon_{12}^1 x_{12} (a''x_1 + b''x_2) + x_{12}^2 (a''\varepsilon_1^1 + b''\varepsilon_2^1) \}, \quad \overrightarrow{1, 2} \quad (1.18)$$

$$\bar{F}_{12} = -(1 - \mu_0) D_0 \{ c' (x_1^2 + x_2^2) + 3c'' x_{12}^2 \} \varepsilon_{12}^1 + c' (2\varepsilon_1^1 x_1 + 2\varepsilon_2^1 x_2) x_{12}.$$

При этих обозначениях выражения (1.15) переписутся в виде

$$T_{11} \approx K(\varepsilon_1 + \mu_0 \varepsilon_2) + \bar{F}_1,$$

$$T_{22} \approx K(\varepsilon_2 + \mu_0 \varepsilon_1) + \bar{F}_2, \quad (1.19)$$

$$T_{12} \approx (1 - \mu_0) K \varepsilon_{12} + \bar{F}_{12}.$$

Отсюда

$$\varepsilon_1 \approx \frac{1}{E_0 t} \left\{ \left(\frac{\partial^2 \bar{\psi}}{\partial y^2} - \mu_0 \frac{\partial^2 \bar{\psi}}{\partial x^2} \right) - (\bar{F}_1 - \mu_0 \bar{F}_2) \right\},$$

$$\varepsilon_2 \approx \frac{1}{E_0 t} \left\{ \left(\frac{\partial^2 \bar{\psi}}{\partial x^2} - \mu_0 \frac{\partial^2 \bar{\psi}}{\partial y^2} \right) - (\bar{F}_2 - \mu_0 \bar{F}_1) \right\}, \quad (1.20)$$

$$\varepsilon_{12} \approx -\frac{(1 + \mu_0)}{E_0 t} \left(\frac{\partial^2 \bar{\psi}}{\partial x \partial y} + \bar{F}_{12} \right).$$

2. Условие совместности деформаций для квадратной пластинки

Как известно [3], условие совместности деформаций для пластинки имеет вид:

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_1}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_2}{\partial x^2} - 2 \frac{\partial^2 \varepsilon_{12}}{\partial x \partial y} = \left(\frac{\partial^2 \bar{w}}{\partial x \partial y} \right)^2 - \frac{\partial^2 \bar{w}}{\partial x^2} \frac{\partial^2 \bar{w}}{\partial y^2} + \dots$$

Подставляя сюда $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_{12}$ из (1.20) и опуская промежуточный счет при обозначениях

$$w = \frac{\bar{w}}{t}, \quad \xi = \frac{\pi x}{a}, \quad \eta = \frac{\pi y}{a}, \quad \left(-\frac{\pi}{2} \leq \xi \leq \frac{\pi}{2}, \quad -\frac{\pi}{2} \leq \eta \leq \frac{\pi}{2} \right),$$

$$\psi = \frac{\bar{\psi}}{E_0 t^3}, \quad D = \frac{1}{12(1 - \mu_0^2)}, \quad \bar{F} = E_0 t^3 D F, \quad (2.1)$$

получаем уравнение условия совместности деформаций для квадратной пластинки:

$$\Delta \Delta \psi - D \frac{a^2}{\pi^2} \left(\frac{\partial^2 F_1}{\partial \eta^2} - 2 \frac{\partial^2 F_{12}}{\partial \xi \partial \eta} + \frac{\partial^2 F_2}{\partial \xi^2} \right) +$$

$$+ \mu_0 D \frac{a^2}{\pi^2} \left(\frac{\partial^2 F_1}{\partial \xi^2} + 2 \frac{\partial^2 F_{12}}{\partial \xi \partial \eta} + \frac{\partial^2 F_2}{\partial \eta^2} \right) = w_{\xi\xi}^2 - w_{\xi\xi} w_{\eta\eta}. \quad (2.2)$$

Уравнение (2.2) в последующем будем интегрировать по методу Бубнова—Галеркина.

Граничным условиям задачи о поперечном изгибе пластинки с гибкими в своей плоскости краями будут удовлетворять ряды

$$\psi = \sum_{m, n} \psi_{mn} \cos m\xi \cos n\eta; \quad w = \sum_{m, n} w_{mn} \cos m\xi \cos n\eta. \quad (2.3)$$

При составлении уравнений метода Бубнова—Галеркина учитываем, что

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\partial^2 F_1}{\partial \eta^2} \cos m\xi \cos n\eta d\xi d\eta = -n^2 \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} F_1 \cos m\xi \cos n\eta d\xi d\eta,$$

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\partial^2 F_{12}}{\partial \xi \partial \eta} \cos m\xi \cos n\eta d\xi d\eta = mn \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} F_{12} \sin m\xi \sin n\eta d\xi d\eta.$$

При подстановке (2.3) в уравнение (2.2), для среднего изгиба с достаточной точностью можно взять выражения

$$\psi = \psi_{11} \cos \xi \cos \eta + \psi_{13} (\cos \xi \cos 3\eta + \cos 3\xi \cos \eta) +$$

$$+ \psi_{33} \cos 3\xi \cos 3\eta + \psi_{15} (\cos \xi \cos 5\eta + \cos 5\xi \cos \eta), \quad (2.4)$$

$$w = w_{11} \cos \xi \cos \eta + w_{13} (\cos \xi \cos 3\eta + \cos 3\xi \cos \eta).$$

В малых членах первого уравнения метода Бубнова—Галеркина сохраняем лишь произведения вида $\psi_{11} w_{11}^2$, пренебрегая членами

$$\psi_{11} w_{11} w_{13}, \quad \psi_{13} w_{11} w_{13}, \dots$$

Кроме того, согласно теории среднего изгиба всюду пренебрегаем $w_{13}^2, w_{33}^2, \dots$, по сравнению с w_{11}^2 .

После интегрирования уравнения (2.2) по методу Бубнова—Галеркина, пренебрегая малыми членами и разрешая линейные уравнения относительно $\psi_{11}, \psi_{13}, \psi_{33}, \psi_{15}$, находим:

$$\psi_{11} = -\frac{\zeta^2}{\delta} (1,333 + 3,911 \zeta_{13}), \quad (2.5)$$

$$\psi_{13} = -\frac{\zeta^2}{25\pi^2} \left[0,978 + 1,598\zeta_{13} + \frac{A_2\zeta^2}{\delta} (1,333 + 3,911\zeta_{13}) \right], \quad (2.6)$$

$$\psi_{33} = -\frac{\zeta^2}{81\pi^2} \left[-0,800 + 7,406\zeta_{13} + \frac{A_3\zeta^2}{\delta} (1,333 + 3,911\zeta_{13}) \right], \quad (2.7)$$

$$\psi_{15} = -\frac{\zeta^2}{169\pi^2} (-0,243 + 6,309\zeta_{13}), \quad (2.8)$$

где

$$\delta = \pi^2 - A_1\zeta^2.$$

Здесь A_1, A_2, A_3 — постоянные, зависящие от μ_0, m и γ и учитывающие физическую нелинейность материала:

$$A_1 = \frac{1-\mu_0}{32} \frac{D\pi^0 t^4}{a^4} [54(1-\mu_0)(a'+b') + (3+\mu_0)(a''+b'') - 2(1+\mu_0)(1-3\mu_0)c' - 27(1+\mu_0)^2 c''],$$

$$A_2 = \frac{1-\mu_0}{32} \frac{D\pi^0 t^4}{a^4} [90(1-\mu_0)(a'+b') - 5(3+\mu_0)(a''+b'') + 6(1+\mu_0)(1-3\mu_0)c' + 27(1+\mu_0)^2 c''], \quad (2.9)$$

$$A_3 = \frac{9}{32} (1-\mu_0) \frac{D\pi^0 t^4}{a^4} [6(1-\mu_0)(a'+b') + (3+\mu_0)(a''+b'') + 2(1+\mu_0)(1-3\mu_0)c' - 3(1+\mu_0)^2 c''].$$

3. Составление и решение уравнения изгиба

Из уравнения (7.4) работы [3] получаем уравнение изгиба пластинки

$$\Phi = \frac{\partial^2 M_{11}}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 M_{12}}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 M_{22}}{\partial y^2} + T_{11} \frac{\partial^2 \bar{w}}{\partial x^2} + 2T_{12} \frac{\partial^2 \bar{w}}{\partial x \partial y} + T_{22} \frac{\partial^2 \bar{w}}{\partial y^2} + p = 0, \quad (3.1)$$

где M_{11}, M_{22} и M_{12} — изгибающие и крутящий моменты, p — поперечное давление.

Для решения уравнения изгиба, как и ранее, применяем процедуру Бубнова—Галеркина, взяв в качестве аппроксимирующих функций выражения (2.3). При этом, при составлении первого уравнения Бубнова—Галеркина, согласно работе [1], в левой части уравнения (3.1) полагаем:

$$w = w_{11} \cos \xi \cos \eta + w_{13} (\cos \xi \cos 3\eta + \cos 3\xi \cos \eta) + w_{33} \cos 3\xi \cos 3\eta + w_{15} (\cos \xi \cos 5\eta + \cos 5\xi \cos \eta) + w_{17} (\cos \xi \cos 7\eta + \cos 7\xi \cos \eta). \quad (3.2)$$

При составлении всех уравнений Бубнова—Галеркина в нелинейных членах пренебрегаем членами, содержащими w_{33}, w_{15} и w_{17} , а также квадратами w_{13} , а при составлении уравнений

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \Phi \cos 3\xi \cos 3\eta d\xi d\eta = 0, \quad \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \Phi \cos \xi \cos 5\eta d\xi d\eta = 0$$

$$\text{и} \quad \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \Phi \cos \xi \cos 7\eta d\xi d\eta = 0$$

в нелинейных членах оставляем только w_{11} .

При составлении уравнений

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \Phi \cos \xi \cos \eta d\xi d\eta = 0,$$

а также

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \Phi \cos \xi \cos 3\eta d\xi d\eta = 0$$

можно пренебречь членами вида $\psi_{13}w_{13}, \psi_{23}w_{13}$, сохраняя $\psi_{11}w_{13}, \psi_{15}w_{13}$.

Для решения уравнения (3.1) необходимо вычислить моменты M_{11}, M_{22}, M_{12} . Вычисляем их по формулам

$$M_{ik} = \int_{-\frac{t}{2}}^{\frac{t}{2}} \sigma_{ij} z dz, \quad (i, j = 1, 2),$$

пользуясь уравнениями (1.10), (1.12) и соотношениями (1.14), получаем

$$M_{11} = D_0 [(z_1 + \mu_0 z_2) + M_1^*],$$

$$M_{22} = D_0 [(z_2 + \mu_0 z_1) + M_2^*], \quad (3.3)$$

$$M_{12} = (1 - \mu_0) D_0 [z_{12} + M_{12}^*].$$

Здесь члены M_1^*, M_2^*, M_{12}^* учитывают влияние физической нелинейности материала и имеют вид

$$M_1^* = (a'z_1 + b'z_2) (\varepsilon_1^2 + \varepsilon_2^2) + (a''z_1 + b''z_2) \varepsilon_{12}^2 + 2(a'\varepsilon_1 + b'\varepsilon_2) (\varepsilon_1 z_1 + \varepsilon_2 z_2) + 2(a''\varepsilon_1 + b''\varepsilon_2) \varepsilon_{12} z_{12} + \frac{3}{20} t^2 [(a'z_1 + b'z_2) (z_1^2 + z_2^2) + (a''z_1 + b''z_2) z_{12}^2], \quad 1, 2 \quad (3.4)$$

$$M_{12}^* = - \left\{ c' (\varepsilon_1^2 + \varepsilon_2^2) z_{12} + 3c'' \varepsilon_{12} z_{12} + 2c' (\varepsilon_1 z_1 + \varepsilon_2 z_2) \varepsilon_{12} + \frac{3t^2}{20} [c' (z_1^2 + z_2^2) z_{12} + c'' z_{12}^3] \right\}.$$

После введения функции напряжения по формулам (1.16), подстановки (3.3) и замены переменных по (2.1), уравнение изгиба (3.1) окончательно получит вид

$$D \left[\Delta \Delta w - \frac{a^2}{\pi^2 t} \left(\frac{\partial^2 M_1^*}{\partial \xi^2} + 2 \frac{\partial^2 M_{12}^*}{\partial \xi \partial \eta} + \frac{\partial^2 M_2^*}{\partial \eta^2} \right) \right] - \frac{\partial^2 w}{\partial \xi^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial \eta^2} + 2 \frac{\partial^2 w}{\partial \xi \partial \eta} \frac{\partial^2 \psi}{\partial \xi \partial \eta} - \frac{\partial^2 w}{\partial \eta^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial \xi^2} - \frac{p^*}{\pi^4} = 0, \quad (3.5)$$

где

$$p^* = \frac{pa^4}{E_0 t^4}.$$

При составлении уравнения Бубнова — Галеркина учитываем, что

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\partial^2 M_1^*}{\partial \xi^2} \cos m\xi \cos n\eta d\xi d\eta =$$

$$= -m^2 \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} M_1^* \cos m\xi \cos n\eta d\xi d\eta,$$

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\partial^2 M_{12}^*}{\partial \xi \partial \eta} \cos m\xi \cos n\eta d\xi d\eta =$$

$$= mn \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} M_{12}^* \sin m\xi \sin n\eta d\xi d\eta.$$

(1, 2; \overrightarrow{m}, n ; $\overleftarrow{\xi}, \overleftarrow{\eta}$)

После интегрирования уравнения (3.5) по методу Бубнова — Галеркина, пренебрегая малыми членами, получаем систему уравнений:

$$D\pi^2 \zeta \{1 + A_1' \psi_{11}^2 + B_1' \psi_{11}^2 \zeta_{13} + C_1' \psi_{11} \psi_{13} + D_1' \zeta^2 + E_1' \zeta^2 \zeta_{13}\} -$$

$$- 2,633 \psi_{11} \zeta - 3,911 \zeta (\psi_{11} \zeta_{13} + \psi_{13}) - 31,96 \psi_{13} \zeta_{13} - P = 0, \quad (3.6)$$

$$D\pi^2 \zeta \{25 \zeta_{13} + A_2' \psi_{11}^2 + D_2' \zeta^2 + E_2' \zeta^2 \zeta_{13}\} -$$

$$- 1,956 \psi_{11} \zeta - 15,58 (\psi_{11} \zeta_{13} + \psi_{13}) - 55,77 \psi_{13} \zeta_{13} + 0,333 P = 0, \quad (3.7)$$

$$D\pi^2 \zeta \{81 \zeta_{33} + A_3' \psi_{11}^2 + D_3' \zeta^2\} +$$

$$+ 1,6 \psi_{11} \zeta - 7,406 (\psi_{11} \zeta_{13} + \psi_{13}) - 0,111 P = 0, \quad (3.8)$$

$$169 D\pi^2 \zeta \zeta_{15} + 0,686 \psi_{11} \zeta - 6,678 \psi_{11} \zeta_{13} - 0,2 P = 0, \quad (3.9)$$

$$625 D\pi^2 \zeta \zeta_{17} - 0,432 \psi_{11} \zeta + 0,143 P = 0, \quad (3.10)$$

где обозначено

$$\zeta = -w_{11}, \quad \zeta_{13} = \frac{w_{13}}{w_{11}}, \quad \zeta_{33} = \frac{w_{33}}{w_{11}}, \quad \zeta_{15} = \frac{w_{15}}{w_{11}},$$

$$\zeta_{17} = \frac{w_{17}}{w_{11}}, \quad P = \frac{4\rho^*}{\pi^4},$$

$$A_1' = \frac{1}{32} \frac{\pi^4 t^4}{a^4} [54(1 - \mu_0)^2 (a' + b') + (1 + \mu_0)(3 - \mu_0)(a'' + b'') +$$

$$+ 2(1 - \mu_0)(3 + \mu_0)c' + 27(1 + \mu_0)^2 c''],$$

$$B_1' = \frac{1}{32} \frac{\pi^4 t^4}{a^4} [180(1 - \mu_0)^2 (a' + b') + (2 - 20\mu_0 - 22\mu_0^2)(a'' + b'') -$$

$$- (28 + 24\mu_0 + 52\mu_0^2)c' - 54(1 + \mu_0)^2 c''],$$

$$C_1' = \frac{1}{16} \frac{\pi^4 t^4}{a^4} [540(1 - \mu_0)^2 (a' + b') + (2 + 12\mu_0 + 10\mu_0^2)(a'' + b'') -$$

$$- (28 - 24\mu_0 - 12\mu_0^2)c' - 54(1 + \mu_0)^2 c''],$$

$$D_1' = \frac{3}{640} \frac{\pi^4 t^4}{a^4} [18(a' + b') + a'' + b'' + 2c' + 9c''],$$

$$E_1' = \frac{3}{320} \frac{\pi^4 t^4}{a^4} [45(a' + b') + a'' + b'' - 14c' - 27c''],$$

$$A_2' = \frac{1}{32} \frac{\pi^4 t^4}{a^4} [90(1 - \mu_0)^2 (a' + b') - 5(1 + \mu_0)(3 - \mu_0)(a'' + b'') +$$

$$+ 6(1 - \mu_0)(3 + \mu_0)c' - 27(1 + \mu_0)^2 c''], \quad (3.11)$$

$$D_2' = \frac{3}{640} \frac{\pi^4 t^4}{a^4} [30(a' + b') - 5(a'' + b'') + 6c' - 9c''],$$

$$E_2' = \frac{3}{640} \frac{\pi^4 t^4}{a^4} [5(121a' + 89b') + 61a'' + 29b'' + 114c' + 189c''],$$

$$A_3' = \frac{9}{32} \frac{\pi^4 t^4}{a^4} [6(1 - \mu_0)^2 (a' + b') + (1 + \mu_0)(3 - \mu_0)(a'' + b'') +$$

$$+ 2(1 - \mu_0)(3 + \mu_0)c' + 3(1 + \mu_0)^2 c''],$$

$$D_3' = \frac{27}{640} \frac{\pi^4 t^4}{a^4} [2(a' + b' + c') + a'' + b'' + c''].$$

4. Решение системы уравнений

Исключив P из уравнений (3.6) и (3.7) и учитывая выражения ψ_{11}, ψ_{13} из (2.5) и (2.6), получаем:

$$\zeta_{13} = -\frac{M}{N}, \quad (4.1)$$

где

$$M = \frac{0,825}{1 - \mu_0^2} \left[1 + (1,778A_1' + 5,333A_2') \frac{\zeta^4}{8} + \right.$$

$$\left. + (0,005 + 0,07 \frac{A_2'^2}{8}) \frac{\zeta^4}{8} C_1' + (D_1' + 3D_2') \zeta^2 \right] + 11,38 \frac{\zeta^2}{8} +$$

$$+ 0,2053 \zeta^2 + 0,28 \frac{A_2'}{8} \zeta^4, \quad (4.2)$$

$$N = \frac{0,825}{1 - \mu_0^2} \left[75 + (10,43A_1' + 31,29A_2' + 1,778B_1') \frac{\zeta^4}{8} + \right.$$

$$\left. + (0,096 + 0,04 \frac{A_2'^2}{8}) \frac{\zeta^4}{8} C_1' + (E_1' + 3E_2') \zeta^2 \right] +$$

$$+ \left(\frac{102,5}{8} + 4,147 + 1,898 \frac{A_2'^2}{8} \right) \zeta^2. \quad (4.3)$$

При известном ζ_{13} , P определяется из уравнения (3.6); $\zeta_{33}, \zeta_{15}, \zeta_{17}$ определяются из уравнений (3.8), (3.9), (3.10) соответственно.

Согласно (3.2) полный прогиб в центре пластинки (при $\zeta = \eta = 0$) вычисляется по формуле

$$w_0 = \zeta (1 + 2\zeta_{13} + \zeta_{33} + 2\zeta_{15} + 2\zeta_{17}). \quad (4.4)$$

Мембранное напряжение при $\xi = \eta = 0$ будет

$$\sigma_M^0 = \frac{T_1^0}{t} = E_0 t^2 \frac{\pi^2}{a^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial \eta^2} = -E_0 \frac{\pi^2 t^2}{a^2} (\psi_{11} + 10\psi_{13} + 9\psi_{33} + 26\psi_{15})$$

или

$$\sigma_M^{0*} = \frac{\sigma_M^0 a^2}{E_0 \pi^2 t^2} = -(\psi_{11} + 10\psi_{13} + 26\psi_{15} + 9\psi_{33}). \quad (4.5)$$

Все коэффициенты (2.9) и (3.11), которыми учитывается физическая нелинейность материала пластинки, зависят от μ_0 , γ и m . В них для последующих вычислений удобно ввести обозначения

$$\frac{\pi^2 t^4}{a^4} \gamma = r \quad \text{и} \quad \frac{\pi^2 t^4}{a^4} m = s. \quad (4.6)$$

При этих обозначениях полное напряжение в центре пластинки будет вычисляться по формуле

$$\sigma_n^{0*} = \frac{\sigma_n^0 (1 - \mu_0^2) a^2}{E_0 \pi^2 t^2} = (1 + \mu_0) F + 2(f_1 s - f_2 r) F^3, \quad (4.7)$$

где

$$F = -(1 - \mu_0)(\psi_{11} + 10\psi_{13} + 26\psi_{15} + 9\psi_{33}) \left\{ 1 + \frac{\zeta^2}{2} (1 + 10\zeta_{13} + 9\zeta_{33} + 26\zeta_{15} + 50\zeta_{17}) \frac{(f_2 r - f_1 s)}{1 + \mu_0} \right\} + \frac{1}{2} \zeta (1 + 10\zeta_{13} + 9\zeta_{33} + 26\zeta_{15} + 50\zeta_{17}), \quad (4.8)$$

$$f_1 = \frac{\mu_0 (1 - \mu_0 + \mu_0^2)}{(1 + \mu_0)(1 - \mu_0)^2}, \quad f_2 = \frac{1 - \mu_0 + \mu_0^2}{(1 + \mu_0)(1 - \mu_0)^2}. \quad (4.9)$$

Некоторые из результатов вычислений при $\mu_0 = 0,3$ приведены в таблице 1.

Таблица 1

ζ	r	s	ζ_{13}	P	P^*	w_0	σ_M^{0*}	σ_n^{0*}
0,5	0	0	-0,01739	0,4959	12,07	0,4844	0,0358	0,3127
	1	0	-0,015912	0,486917	11,86	0,486487	0,0322	0,2931
	5	0	-0,009140	0,448481	10,92	0,492947	0,024328	0,1159
1,0	0	0	-0,02747	1,2324	30,00	0,9500	0,1307	0,6212
	1	0	-0,021114	1,133836	27,61	0,965336	0,111831	0,3149
	1	0,87	-0,023523	1,186112	28,88	0,9602	0,119796	0,4572
	1	1	-0,023863	1,193773	29,07	0,958783	0,123046	0,4757

Здесь, при вычислениях, для каждого ζ мы задавались значениями параметров r и s . При $r = s = 0$ получаются данные, совпадающие с результатами работы [1] X. М. Муштарн. Для малого прогиба $\zeta = 0,5$, значение параметра r может быть достаточно большим: согласно формуле (2.14) работы [1] максимальное изгибное удлинение в центре квадратной пластинки равно $e_t = \frac{t^2}{2} \frac{\pi^2}{a^2} \zeta$; с другой стороны, γe_t^2 должна быть величиной, < 1 , так что не нарушая корректности задачи, можно пренебречь $\gamma^2 e_t^4$ по сравнению с единицей,

что мы и сделали в начале этой работы. Из примеров, приведенных в начале статьи, известно, что $\gamma \sim 10^5$. Пусть

$$\gamma e_t^2 \approx \frac{1}{10}.$$

Тогда

$$\gamma e_t^2 = \frac{1}{4} \zeta^2 \frac{\pi^2 t^4}{a^4} \gamma = \frac{1}{4} \zeta^2 r \approx \frac{1}{10}.$$

Отсюда $r \approx \frac{0,4}{\zeta^2}$. Таким образом, при малых значениях ζ параметр r является довольно большим и уменьшается с возрастанием ζ .

Для приближенного назначения величины параметра s в зависимости от изменения ζ воспользуемся ранее принятым выражением

$$\mu = \mu_0 (1 + m e_t^2), \quad \text{или} \quad m e_t^2 = \frac{\mu - \mu_0}{\mu_0}.$$

С другой стороны,

$$s = \frac{\pi^2 t^4}{a^4} m = \frac{\mu - \mu_0}{\mu_0} \frac{1}{e_t^2} \frac{\pi^2 t^4}{a^4},$$

так как

$$e_t^2 = \frac{\pi^2 t^4}{4a^4} \zeta^2,$$

то

$$s = \frac{\mu - \mu_0}{\mu_0} \frac{4}{\zeta^2}.$$

В таблице 1 приведены некоторые численные иллюстрации к задаче, рассмотренной в данной статье.

Настоящая работа раскроется более полно при численном решении задачи с помощью электронно-вычислительной машины. Последнее предполагается сделать в ближайшем будущем.

ЛИТЕРАТУРА

1. Муштарн X. М. Средний изгиб пологой оболочки, прямоугольной в плане и опирающейся на гибкие в своей плоскости ребра. Известия КФАН СССР, серия физико-математических и технических наук, выпуск 12, 1958.
2. Kauderer H. Über ein nichtlineares Elastizitätsgesetz. Ingenieur-Archiv, V. XVII, N. 6, 1949.
3. Муштарн X. М. и Галимов К. З. Нелинейная теория упругих оболочек. Казань, Таткнигоиздат, 1957.

Поступила 30.VI 1959 г.

А. В. Саенков

О ЛОКАЛЬНОЙ УСТОЙЧИВОСТИ ОБОЛОЧЕК

Определение величин критических нагрузок значительно облегчается на основе уравнений локальной устойчивости, так как они, будучи отнесенными к наиболее опасной зоне наименьшей кривизны оболочки, являются уравнениями с постоянными коэффициентами и содержат в себе лишь высшие производные. Использование этих уравнений не вызывает особых недоумений, если опасная в смысле устойчивости зона не примыкает к контуру закрепления оболочки. Полагая в этом случае в основных уравнениях радиус кривизны наибольшим, для величин критических нагрузок получим приближенные с недостатком.

Уравнения локальной устойчивости могут быть использованы не только в тех случаях, когда область выпучивания является незначительной по сравнению с характерными размерами оболочки, но и во многих других, когда наблюдается общая потеря устойчивости с образованием одной волны по длине оболочки, например, в случае конической оболочки при внешнем давлении. Однако, в этом последнем случае зона наименьшей кривизны, примыкая к контуру закрепления и являясь перенапряженной, не является опасной в смысле устойчивости, так как область максимального прогиба находится на значительном расстоянии от нее. Поэтому выбрать подходящим образом для этого случая радиус кривизны и фиксировать его в основных уравнениях, считая при этом постоянными и другие переменные коэффициенты, не представляется возможным, поскольку критическая нагрузка обратно пропорциональна радиусу кривизны в степени пять вторых и существенным образом изменяется при его незначительном изменении. Если же уравнения устойчивости отнести к зоне наименьшей кривизны, то критическая нагрузка для конической оболочки оказывается сильно заниженной. Для области применимости полученного ниже решения это занижение может быть двукратным.

В статье на основе уравнений локальной устойчивости рассматривается устойчивость недлинных и коротких конических оболочек под действием комбинированных нагрузок. При этом, предлагается видоизмененная процедура использования этих уравнений, суть которой состоит в следующем. Функция выпучивания и граничными условиями в виде произведения показательной и тригонометрической

функций. Функция напряжений отыскивается из условия совместности деформаций. Далее, возможно использование процедуры метода Бубнова—Галеркина или энергетического метода. В статье используется энергетический метод. При вычислении энергетического функционала учитывается переменность коэффициентов при тригонометрических функциях, однако в соответствии с требованиями теории локальной устойчивости производится последовательное пренебрежение членами, происходящими от низших производных. Степень погрешности от такого рода пренебрежений тем меньше, чем меньше длина оболочки, и зависит также от выбора координат, с помощью которых решается задача. Полученное характеристическое уравнение по внешнему виду полностью совпадает с соответствующим уравнением для цилиндрической оболочки с некоторым фиктивным радиусом. Этот радиус кривизны является различным для различных видов нагружения. Выясняется погрешность применяемого метода. Метод распространяется на нелинейные задачи. Для конических оболочек выясняется природа поправочных коэффициентов к формулам, полученным по линейной теории.

Основные обозначения:

w — функция прогиба; E — модуль упругости; σ — коэффициент Пуассона; 2γ — полный угол при вершине конуса; r — расстояние по образующей от вершины конуса до точки на срединной поверхности оболочки; r_0 — это расстояние до малого торцевого сечения; r_1 — до большего основания; $2h$ — толщина оболочки; φ — угол между некоторой аксиальной плоскостью и плоскостью отсчета; p_0 , T_0 , S_0 — соответственно внешнее давление, погонное сжимающее усилие вдоль образующей и скручивающее усилие, отнесенные к малому торцевому сечению; n — число волн, образующихся по окружности; T_{10} , T_{20} , S_{10} — мембранные усилия до потери устойчивости, определяемые для рассматриваемого общего случая нагружения по формулам

$$T_{10} = -\frac{p_0 r \operatorname{tg} \gamma}{2} - \frac{T_0 r_0}{r} + c_1 - \frac{c_2}{r_2}, \quad T_{20} = -p_0 r \operatorname{tg} \gamma + c_1 + \frac{c_2}{r_2}, \quad (0.1)$$

$$S_{10} = -\frac{S_0 r_0^2}{r^2}.$$

Кроме того, будем пользоваться обозначениями

$$t = \ln \frac{r_1}{r_0}, \quad \varphi_1 = \varphi \sin \gamma, \quad n_1 = \frac{n}{\sin \gamma},$$

α_1 — угол наклона волн к образующей конуса;

$$t_1 = \frac{t}{\cos \alpha_1}, \quad \alpha = \sin^2 \alpha_1, \quad m_1 = \frac{m\pi}{t_1}, \quad \text{где } m = 1, 2, 3, \dots,$$

$$\beta = \frac{m_1^2}{n_1^2}, \quad D = \frac{2}{3} \frac{Eh^3}{1 - \sigma^2}, \quad \eta^2 = \frac{3r_1^2 \operatorname{ctg}^2 \gamma \cdot (1 - \sigma^2)}{h^2}, \quad (0.2)$$

$$A = \frac{S_0 r_0^2 (1 - \sigma^2)}{(2h)^2 \cdot 2Eh}, \quad B = \frac{(1 - \sigma^2) r_1^2 t^2 \cdot p_0 r_1 \operatorname{tg} \gamma}{(2h)^2 \cdot 4Eh},$$

$$C = \frac{(1 - \sigma^2) T_0 r_0 r_1 t^2}{(2h)^2 \cdot 4Eh}, \quad H = \frac{\sqrt{1 - \sigma^2} \cdot r_1 \operatorname{ctg} \gamma \cdot t}{2 \cdot (2h)},$$

$$C_1 = \frac{c_1 r_1^2 t^2}{24 \cdot D}, \quad C_2 = \frac{c_2 t^2}{24D}.$$

Введем дополнительные обозначения

$$A^* = A, \quad B^* = B \frac{[1 - e^{-(2\nu+1)t}] \cdot \left[1 + \frac{(\nu-1)^2 t^2}{(m\pi)^2}\right] (\nu-1)}{\left[1 + \frac{(\nu+0,5)^2 t^2}{(m\pi)^2}\right] \cdot [1 - e^{-2(\nu-1)t}] (\nu+0,5)}$$

$$C^* = C \frac{[1 - e^{-(2\nu-1)t}] \cdot \left[1 + \frac{(\nu-1)^2 t^2}{(m\pi)^2}\right] (\nu-1)}{\left[1 + \frac{(\nu-0,5)^2 t^2}{(m\pi)^2}\right] \cdot [1 - e^{-2(\nu-1)t}] (\nu-0,5)}, \quad (0.3)$$

$$H^{*2} = H^2 \frac{[1 - e^{-2\nu t}] \left[1 + \frac{(\nu-1)^2 t^2}{(m\pi)^2}\right] (\nu-1)}{\left[1 + \frac{\nu^2 t^2}{(m\pi)^2}\right] [1 - e^{-2(\nu-1)t}] \cdot \nu},$$

$$C_1^* = C_1 \frac{[1 - e^{-2\nu t}] \cdot \left[1 + \frac{(\nu-1)^2 t^2}{(m\pi)^2}\right] (\nu-1)}{\left[1 + \frac{\nu^2 t^2}{(m\pi)^2}\right] \cdot [1 - e^{-2(\nu-1)t}] \cdot \nu}, \quad C_2^* = C_2,$$

где A, B, C, A^*, \dots — безразмерные параметры внешних нагрузок, а ν — параметр, подлежащий определению из условия минимума критической нагрузки.

§ 1. Основные соотношения и характеристическое уравнение

Пусть шарнирно опертая по краям круговая усеченная коническая оболочка подвергается одновременному воздействию продольного сжатия T_0 , внешнего давления p_0 , сдвигающего усилия S_0 и растяжения вдоль образующей, которое описывается в выражениях для T_{10} и T_{20} двумя последними членами. Будем предполагать, что состояние оболочки до потери устойчивости является безмоментным. Усилия в этом состоянии определяются формулами (0.1). Критическую комбинацию нагрузок будем определять из выражения энергетического функционала, которое в соответствии с принятой процедурой решения имеет вид:

$$\mathcal{E} = \frac{1}{2Eh \cdot D} \cdot \int \int \Phi^2 r dr d\varphi_1 + \int \int \left(\frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \varphi_1^2} \right)^2 r dr d\varphi_1 +$$

$$+ \frac{1}{D} \int \int \left[T_{10} \left(\frac{\partial w}{\partial r} \right)^2 + T_{20} \cdot \frac{1}{r^2} \left(\frac{\partial w}{\partial \varphi_1} \right)^2 + 2S_{10} \cdot \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial r} \cdot \frac{\partial w}{\partial \varphi_1} \right] r dr d\varphi_1, \quad (1.1)$$

$$\Phi = T_1 + T_2,$$

где T_1, T_2 — добавочные продольные и кольцевые усилия, возникающие при потере устойчивости. Сумма их определяется из условия совместности деформаций

$$r \nabla^2 \Phi = -2Eh \operatorname{ctg} \gamma \frac{\partial^2 w}{\partial r^2}, \quad (1.2)$$

где

$$\nabla^2 (\) = \frac{\partial^2 (\)}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial (\)}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 (\)}{\partial \varphi_1^2}.$$

Вводя новые переменные

$$z = \ln \frac{r}{r_1}, \quad z_1 = \frac{z}{\cos \alpha_1}, \quad \theta = \varphi_1 + z \operatorname{tg} \alpha_1, \quad (1.3)$$

а также новые неизвестные функций

$$\omega = \omega_1 e^{v z_1 \cos \alpha_1}, \quad \Phi = \Phi_1 e^{v z_1 \cos \alpha_1}, \quad v_1 = v - 1, \quad v \leq 1, \quad (1.4)$$

уравнение (1.2), в силу принятого метода решения, приводится к виду

$$\frac{\partial^2 \Phi_1}{\partial z_1^2} + 2k \frac{\partial^2 \Phi_1}{\partial z_1 \partial \theta} + \frac{\partial^2 \Phi_1}{\partial \theta^2} = -\frac{2Eh \operatorname{ctg} \gamma}{r_1} \left(\frac{\partial^2 \omega_1}{\partial z_1^2} + 2k \frac{\partial^2 \omega_1}{\partial z_1 \partial \theta} + k^2 \frac{\partial^2 \omega_1}{\partial \theta^2} \right), \quad (1.5)$$

где

$$k = \sqrt{\bar{\alpha}} = \sin \alpha_1.$$

Для решения этого уравнения форму выпученной поверхности будем аппроксимировать функцией

$$\omega_1 = A_1 \sin m_1 z_1 \sin n_1 \theta. \quad (1.6)$$

Заметим, что при переходе от точного уравнения (1.2) к уравнению (1.4) мы пренебрегли в его правой части величиной порядка $(2v - 1) \cos \alpha_1 \frac{\partial \omega_1}{\partial z_1}$ по сравнению с $\frac{\partial^2 \omega_1}{\partial z_1^2}$; где $v \leq 1$ для области применимости приводимого ниже решения.

В левой части уравнения (1.5) при этом допускается погрешность порядка $2(v - 1) \frac{\partial \Phi_1}{\partial z_1}$ по сравнению с $\frac{\partial^2 \Phi_1}{\partial \theta^2}$, которая, как это нетрудно проследить, в частном решении для Φ_1 еще более уменьшается и оказывается величиной порядка погрешности основного допущения Кирхгофа—Лява. Будем считать, что функции Φ_1 и ω_1 являются существенно возрастающими при дифференцировании по продольной координате, так что

$$\frac{\partial \Phi_1}{\partial z_1} \gg \Phi_1, \quad \frac{\partial \omega_1}{\partial z_1} \gg \omega_1. \quad (1.7)$$

Подставляя (1.6) в правую часть уравнения (1.5) и интегрируя его, находим

$$\Phi_1 = A_1 \{ b_1 \sin m_1 z_1 \sin n_1 \theta + b_2 \cos m_1 z_1 \cos n_1 \theta \}, \quad (1.8)$$

где обозначено

$$b_1 = \frac{[4k^2 m_1^2 n_1^2 - (m_1^2 + n_1^2)(m_1^2 + k^2 n_1^2)]}{[(m_1^2 + n_1^2)^2 - 4k^2 m_1^2 n_1^2]}, \quad b_2 = \frac{2km_1^3(1 - k^2)}{[(m_1^2 + n_1^2)^2 - 4k^2 m_1^2 n_1^2]}. \quad (1.9)$$

Удовлетворительность решения на базе функций (1.6) и (1.8) для цилиндрической оболочки доказана в статьях [5], [6]. В случае конической оболочки дело обстоит аналогично.

Преобразуем энергетический функционал (1.1) с помощью (1.3) и (1.4), а затем, подставляя в его выражение функции (1.6), (1.8), (0.1), интегрируем его в пределах $[-t_1, 0]$, $[0, 2\pi \sin \gamma]$. Пренебрегая в полученном выражении членами от низших производных по z_1 и поль-

зуясь при этом (0.2), (0.3), (1.9), приходим к следующему характеристическому уравнению

$$\begin{aligned} & A^* \sqrt{\alpha(1-\alpha)} + B^*(1-\alpha) + \frac{1}{2} B^*(\alpha+\beta) + C^*(\alpha+\beta) - C_1^*(1+\beta) - \\ & - C_2^*(1-2\alpha-\beta) = \\ & = \beta \left\{ \frac{2}{(m_1)^2} \cdot H^{*2} \left[\frac{[(\alpha+\beta)^2 + 4\alpha\beta][(1+\beta)^2 + 4\alpha\beta] - 16\alpha\beta(\alpha+\beta)(1+\beta)}{[(1+\beta)^2 - 4\alpha\beta]^2} \right] + \right. \\ & \left. + \frac{(m\pi)^2}{24\beta^2} [(1+\beta)^2 + 4\alpha\beta] \right\}. \end{aligned} \quad (1.10)$$

Заметим, что условие (1.7) в процессе интегрирования существенно ослабляется, т. к. на классе функций (1.6) и (1.8) члены от низших производных еще более уменьшаются в выражении энергетического функционала и пренебрежение в исходном уравнении (1.5) функцией по сравнению с ее первой производной фактически означает пренебрежение в характеристическом уравнении единицей по сравнению с m_1^2 . Это пренебрежение не оказывает заметного влияния на величину энергии изгиба, поскольку в выражении последней присутствует член $n_1^4 \gg m_1^2$. Удерживая в левой части (1.10) лишь главные члены, мы допускаем погрешность порядка единицы по сравнению с n_1^2 .

Таким образом, пренебрежение единицей по сравнению с m_1^2 вносит заметную погрешность лишь в величину энергии растяжения срединной поверхности. Поэтому приводимые решения являются справедливыми для значений m_1^2 , удовлетворяющих неравенству

$$m_1^2 \gg 1. \quad (1.11)$$

Для конической оболочки, находящейся под действием продольного сжатия, $m_1^2 \sim \frac{r_1 \operatorname{tg} \gamma}{2h}$.

Следовательно, погрешность в величине критической нагрузки, определяемой на основе теории локальной устойчивости, в общем случае, даже для нелинейных задач, может быть сделана специальным подбором координат меньшей, чем погрешность порядка

$\sqrt{\frac{2h}{R}}$ по сравнению с единицей. Этот вывод, строго говоря, является справедливым лишь в тех случаях, когда критическая нагрузка зависит лишь от радиусов кривизны и не зависит от длины оболочки.

Если потеря устойчивости не носит в направлении одной из координат местного характера, то погрешность в величине критической нагрузки, определенной на основе уравнений локальной устойчивости, существенным образом зависит, как это следует из (1.11), от длины оболочки. Она тем меньше, чем меньше длина и зависит от выбора координат.

Отметим также, что даже ошибка порядка 15% в величине энергии растяжения вносит погрешности в величины критических нагрузок при кручении и внешнем давлении, меньшие 6% и 3%, так как критические нагрузки для этих случаев соответственно пропорциональны степени три восьмых и корню четвертой степени из величины энергии растяжения.

§ 2. Определение критических нагрузок в частных случаях

1. Однослойные оболочки

1. Кручение конической оболочки

В этом случае $B^* = C^* = C_1^* = C_2^* = 0$, $m = 1$, и из уравнения (1.10) находим

$$A^* \sqrt{\alpha(1-\alpha)} = \beta \left\{ \frac{2}{\pi^2} H^{*2} \left[\frac{[(1+\beta)^2 + 4\alpha\beta][(1+\beta)^2 + 4\alpha\beta] - 16\beta(\alpha+\beta)(1+\beta)}{[(1+\beta)^2 - 4\alpha\beta]^2} \right] + \frac{\pi^2}{24\beta^2} [(1+\beta)^2 + 4\alpha\beta] \right\}. \quad (2.1)$$

Для оболочек с параметром $H^* > 200$ критическое значение параметра нагрузки вполне удовлетворительно может быть определено по формуле [5]

$$A_{кр}^* = 1,21 \cdot H^{*2}. \quad (2.2)$$

Эта формула, как будет показано ниже, справедлива для $t \leq \frac{1}{2}$.

2. Сдвиг кольцевой пластинки и бесконечной полосы

В этом случае $H^* = 0$, и из (2.1) находим

$$A^* \sqrt{\alpha(1-\alpha)} = \frac{\pi^2}{24\beta} [(1+\beta)^2 + 4\alpha\beta].$$

Из условия минимума A^* получим

$$S_{0, кр} = \frac{54,6D}{r_0^2} : \left(\ln \frac{r_1}{r_0} \right)^2. \quad (2.3)$$

В силу сделанных упрощений формула (2.3) является применимой, если $\ln \frac{r_1}{r_0} \leq 1$. Из (2.3) может быть получена также формула для бесконечной полосы. В этом случае $r_0 \rightarrow \infty$

$$\ln \frac{r_1}{r_0} = \ln \left(1 + \frac{b}{r_0} \right) \approx \frac{b}{r_0}, \quad S_{0, кр} = \frac{54,6D}{b^2}, \quad (2.4)$$

где b — ширина полосы. Максимальная погрешность формулы (2.4) по сравнению с точным решением составляет 5% [3].

3. Коническая оболочка под действием осевого сжатия

В данном случае $A^* = B^* = C_1^* = C_2^* = \sigma_1 = 0$, и из (1.10) находим

$$C^* = \left\{ \frac{2}{(m\pi)^2} H^{*2} \frac{\beta^2}{(1+\beta)^2} + \frac{(m\pi)^2}{24} \cdot \frac{(1+\beta)^2}{\beta^2} \right\}.$$

Из условия минимума имеем

$$C^* = H^* : \sqrt{3}. \quad (2.5)$$

Отклонение, даваемое этой формулой от аналогичной формулы, полученной в работе [2] другим, более точным методом, не превышает

2—3% при $\nu = 1$. Следует отметить, что при изменении ν в широком диапазоне $0 \leq \nu \leq 1$ критическая нагрузка существенно не изменяется.

4. Равномерное сжатие кольцевой пластинки

Из (1.10) при $A^* = B^* = C_1^* = C_2^* = H^* = \alpha_1 = 0$ получим

$$C^* = \frac{t^2}{24} \cdot \frac{1}{m_1^2} (m_1^2 + n_1^2)^2. \quad (2.6)$$

Минимум критической нагрузки достигается при $n_1 = 1$. Путем предельного перехода из формулы (2.6) можно получить формулу критического напряжения при сжатии бесконечно длинной полосы, а также формулу для пластинки формы вырезанного кругового сектора.

5. Усеченная коническая оболочка под действием равномерного внешнего давления

Из уравнения (1.10) при $A^* = C^* = C_1^* = C_2^* = \alpha_1 = 0$, $m = 1$ находим

$$B^* \left(1 + \frac{1}{2} \beta \right) = \beta \left\{ \frac{2}{\pi^2} H^{*2} \cdot \frac{\beta^2}{(1+\beta)^2} + \frac{\pi^2}{24} \cdot \frac{(1+\beta)^2}{\beta^2} \right\}. \quad (2.7)$$

Эта формула, если учесть введенные обозначения (0.2), (0.3), полностью совпадает с аналогичной формулой, полученной в статье [4] более точным методом. Она является справедливой для значений $t \leq 1$. На границе этой области она дает значение верхней критической нагрузки с занижением на 3%. Указанная погрешность является следствием неточного определения энергии растяжения срединной поверхности.

Полагая, что в случае кручения конической оболочки нами была допущена погрешность такого же порядка в величине энергии растяжения, можно установить более точную границу применимости формулы (2.1). Будем считать, что сделанные пренебрежения не вносят в величину критического сдвигающего усилия погрешность, большую 3%. Учитывая вместе с тем последнее замечание § 1, находим $t \leq \frac{1}{2}$.

Пользуясь (1.10), можно изучить разнообразные случаи действия комбинированных нагрузок на конические, цилиндрические оболочки, а также кольцевые пластины. Во всех случаях в указанной области применимости рассматриваемого решения расчет конической оболочки сводится к расчету цилиндрической с некоторыми приведенными геометрическими характеристиками.

II. БИМЕТАЛЛИЧЕСКИЕ ОБОЛОЧКИ

Пусть μ_1, μ_2 — коэффициенты Пуассона соответственно внутреннего и внешнего слоев оболочки. В статье [7] показано, что если $\mu_1 - \mu_2 \sim \sqrt{\epsilon}$, где ϵ является деформацией на пределе упругости, то с погрешностью $\sqrt{\epsilon}$ по сравнению с единицей расчет биметаллических оболочек сводится к расчету однослойных с некоторыми приведенными жесткостями. Таким образом, для определения критических нагрузок биметаллических цилиндрических и конических оболочек, а также кольцевых пластин, можно воспользоваться форму-

лами (1.10), (2.1) — (2.7), вводя в них вместо параметров A, B, C, C_1, C_2, H , определенных формулами (0.2), следующие

$$A = \frac{S_0 r_0^2 t^2}{12D'}, \quad B = \frac{r_1^2 t^2 p_0 r_1 \lg \gamma}{24D'}, \quad C = \frac{T_0 r_0 r_1 t^2}{24D'}, \quad H = t^2 \eta : 4\sqrt{3},$$

$$\eta^2 = \frac{K' r_1^2 \lg^2 \gamma}{D'}, \quad C_1 = \frac{c_1 r_1^2 t^2}{24D'}, \quad C_2 = \frac{c_2 t^2}{24D'},$$

где K', D' определяются по формулам (0.2) статьи [7], помещенной в настоящем сборнике. Параметры $A^*, B^*, C^*, C_1^*, C_2^*, H^*$ по-прежнему определяются по формулам (0.3).

III. ОБ УСТОЙЧИВОСТИ НЕСИММЕТРИЧНЫХ КОНУСОВ

Задачи такого рода являются особенно трудными. Обычным методом решения их является метод, основанный на уравнениях локальной устойчивости. Однако, если задача, которая ставится в отношении несимметричного конуса или конуса, одно из сечений которого ограничивается кривой второго порядка, является разрешенной для прямого кругового конуса, то решать эту задачу заново для таких оболочек неправильной формы, основываясь на соображениях локального характера потери устойчивости, не следует. Вводя в соответствующие формулы для прямой круговой конической оболочки геометрические параметры наиболее опасной в смысле устойчивости зоны, решение получаем автоматически.

IV. НЕЛИНЕЙНЫЕ ЗАДАЧИ УСТОЙЧИВОСТИ КОНИЧЕСКИХ ОБОЛОЧЕК

Последовательно применяя предлагаемую выше процедуру решения задач к нелинейным задачам устойчивости однослойных и биметаллических конических оболочек, приходим к выводу, что в случаях равномерного внешнего давления для $t \leq 1$ и кручения для значений $t \leq \frac{1}{2}$ поправочные коэффициенты к формулам, полученным по линейной теории, не превосходят соответствующие коэффициенты для цилиндрической оболочки. Для биметаллических оболочек этот вывод справедлив, если $\mu_1 - \mu_2 \sim \sqrt{\epsilon}$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Работнов Ю. Н. Локальная устойчивость оболочек. ДАН СССР, т. II, № 2, 1946.
2. Муштари Х. М. Некоторые обобщения теории тонких оболочек с приложениями к задаче устойчивости упругого равновесия. ПММ, т. 2, выпуск 4, 1939.
3. Тимошенко С. П. Устойчивость упругих систем. Гостехиздат, 1955.
4. Муштари Х. М. и Саченков А. В. Об устойчивости цилиндрических и конических оболочек кругового сечения при совместном действии осевого сжатия и внешнего нормального давления. ПММ, т. 18, вып. 6, 1954.
5. Кривошеев Н. И. Об устойчивости цилиндрической оболочки при совместном действии кручения и равномерного поперечного давления. Изв. Казанского филиала АН СССР. Серия физ.-мат. и техн. наук, № 12, 1958.
6. Кривошеев Н. И. Устойчивость цилиндрической оболочки под действием сдвига. Там же.
7. Саченков А. В. К расчету двухслойных оболочек. Изв. КФАН СССР. Серия физ.-мат. и техн. наук, № 14, 1960.

Поступила 1.VI 1959 г.

М. С. Корнишин

ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДА КОЛЛОКАЦИИ К РЕШЕНИЮ НЕКОТОРЫХ ЛИНЕЙНЫХ И НЕЛИНЕЙНЫХ ЗАДАЧ ТЕОРИИ ПЛАСТИН

Подавляющее большинство задач теории пластин, как линейных, так и, в особенности, нелинейных, не может быть решено точно и решается различными приближенными методами.

При этом наиболее часто применяются методы вариационные, последовательных приближений и метод конечных разностей.

В данной статье излагаются общие соображения по применению к решению некоторых задач теории пластин метода коллокации, дается оценка погрешности определения нагрузки, основанная на анализе фактической неуравновешенности и предлагается способ уточнения решения путем вычисления "эквивалентной" поправки.

В качестве примеров рассмотрены линейная задача об изгибе под действием равномерной поперечной нагрузки прямоугольной пластины с заделанными краями и задача о больших прогибах круглой пластины при той же нагрузке и граничных условиях жесткой заделки.

Автор выражает благодарность Д. А. Касимовой за помощь, оказанную ею в вычислениях.

1. Общие замечания

В математической литературе методу коллокации уделялось значительно меньше внимания, чем другим приближенным методам решения дифференциальных уравнений.

Такие вопросы, как рациональный выбор вида аппроксимирующих функций и выбор точек коллокации, сходимость и оценка погрешности, по существу не разработаны.

По-видимому, этим отчасти объясняется тот факт, что при решении задач теории пластин и оболочек метод коллокации, несмотря на его простоту и меньшую трудоемкость по сравнению с другими методами, применяется чрезвычайно редко. Некоторые сведения о методе можно найти в известной книге Л. Коллатца [1]. Недостатком метода коллокации, по сравнению, например, с вариационными, является то, что этот метод при одной и той же аппроксимирующей функции дает, вообще говоря, решение с меньшей точностью. Это обусловлено известным произволом в выборе точек коллокации.

Однако этот недостаток оказывается существенным лишь в том случае, когда берется малое число точек коллокации. При решении в более высоком приближении, т. е. при наличии в выражении подходящим образом подобранной аппроксимирующей функции нескольких неопределенных параметров, точность метода коллокации в ряде случаев оказывается весьма высокой и применение вариационных или

других приближенных методов, связанных с громоздкими вычислениями, будет не всегда оправданным. Следует также иметь в виду, что в настоящее время в связи с развитием вычислительной техники на первое место выдвигаются такие приближенные методы, применение которых связано с наименьшей затратой подготовительного ручного труда.

С этой точки зрения при решении некоторых задач теории пластин и оболочек метод коллокации наряду с методом конечных разностей является перспективным.

2. Прямоугольная пластина, защемленная по контуру, под действием поперечной нагрузки

Указанной задаче посвящен ряд решений, причем большая часть из них получена методами, связанными с громоздкими вычислениями.

Некоторые из решений приведены в работах [2], [4]. В настоящем параграфе мы решим эту задачу методом коллокации. Уравнение изгиба пластинки под действием поперечной нагрузки имеет вид:

$$\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} = \frac{p}{D}, \quad (2.1)$$

где w — функция прогиба,

p — интенсивность нагрузки,

$D = Et^3 / 12(1 - \nu^2)$ — изгибная жесткость;

E — модуль упругости,

ν — коэффициент Пуассона,

t — толщина.

Если обозначить длину и ширину пластинки соответственно через $2a$ и $2b$ и поместить начало координат в центре пластины, то граничные условия защемления запишутся в виде:

$$\begin{aligned} w = 0, \quad w_x = 0 \quad \text{при } x = \pm a, \\ w = 0, \quad w_y = 0 \quad \text{при } y = \pm b. \end{aligned} \quad (2.2)$$

Вопрос о рациональном выборе аппроксимирующих функций при решении задач приближенными методами, и методом коллокации в особенности, имеет важное значение.

При решении задач теории пластин и оболочек методом коллокации в качестве аппроксимирующих функций желательно брать такие, которые содержат в себе простые по структуре точные решения родственных задач.

Так, например, при решении двумерных задач функцию прогиба можно взять в виде:

$$w = w_1(x) w_2(y) w_k(x, y; c_1, \dots, c_n), \quad (2.3)$$

где $w_1(x)$, $w_2(y)$ — точные решения соответствующих одномерных задач, $w_k(x, y; c_1, \dots, c_n)$ — корректирующая функция.

При решении нелинейных задач функцию прогиба можно брать в виде:

$$w = w_0(x, y) w_k(x, y; c_1, \dots, c_n), \quad (2.4)$$

где $w_0(x, y)$ — точное решение линейной задачи, $w_k(x, y; c_1, \dots, c_n)$ — корректирующая функция.

Заметим, что можно предложить и другие эффективные выражения для функции прогиба.

Можно, например, задавать w не в виде произведения, как в (2.3) и (2.4), а в виде суммы

$$w = w_0(x, y) + \sum_{i=1}^n c_i w_i(x, y), \quad (2.5)$$

причем в тех случаях, когда соответствующие точные решения неизвестны или имеют сложную структуру, в качестве $w_1(x)$, $w_2(y)$, $w_0(x, y)$ следует брать элементарные функции, возможно более близкие к предполагаемому или известному точному решению родственной задачи.

При решении задач прочности пластин и оболочек, за исключением тех случаев, когда действуют сосредоточенные нагрузки, хорошие результаты могут быть получены, если для w использовать степенные полиномы.

Вопрос о выборе точек коллокации также имеет важное значение. Сущность метода не позволяет заранее решить этот вопрос однозначно, однако, учитывая физическую сторону задачи, в ряде случаев можно привести простые соображения, которые следует принимать во внимание при выборе точек коллокации.

Пусть пластина, закрепленная каким-либо образом по контуру, изгибается сосредоточенной нагрузкой Q , приложенной в точке A .

Каждой точке A приложения сосредоточенной силы Q будет соответствовать свой максимальный прогиб пластины, имеющий место в точке A' , в общем случае не совпадающей с A . Центром максимальной гибкости (ц. м. г.) пластины будем называть такую точку, которой соответствует наибольший по величине максимальный прогиб, обусловленный приложенной к ней сосредоточенной силой.

Положение ц. м. г. зависит от геометрических параметров пластины, граничных условий, а также, в меньшей степени, от величины нагрузки.

В рассматриваемых нами случаях ц. м. г. совпадает соответственно с центром симметрии и геометрическим центром пластины. Примерное расположение ц. м. г. можно указать и в более сложных случаях. Очевидно, точки коллокации следует выбирать таким образом, чтобы максимальная неуравновешенность имела место в той части области, в которой она оказывала бы наименьшее влияние на искомые результаты. Например, в случае пластин с неподвижными опорами, находящихся под действием поперечной нагрузки, точки коллокации нужно выбирать так, чтобы максимальная неуравновешенность имела место вблизи опор, а минимальная — вблизи ц. м. г. Следовательно, в этом случае точки коллокации должны быть расположены чаще по направлению к ц. м. г.

Итак, следуя (2.2), прогиб пластины зададим в виде:

$$w = \left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right)^2 \left(1 - \frac{y^2}{b^2}\right)^2 \left(w_{00} + w_{20} \frac{x^2}{a^2} + w_{02} \frac{y^2}{b^2} + w_{22} \frac{x^2 y^2}{a^2 b^2}\right). \quad (2.6)$$

Подставляя (2.6) в (2.1), получаем:

$$\begin{aligned} \frac{p a^4}{D} = & \left[24 w_{00} + w_{20} \left(-48 + 360 \frac{x^2}{a^2} \right) \right] \left(1 - \frac{y^2}{b^2} \right)^2 + \\ & + \left[24 w_{20} + w_{22} \left(-48 + 360 \frac{x^2}{a^2} \right) \right] \frac{y^2}{b^2} \left(1 - \frac{y^2}{b^2} \right)^2 + \\ & + 2 \left\{ \left[w_{00} \left(-4 + 12 \frac{x^2}{a^2} \right) + w_{20} \left(2 - 24 \frac{x^2}{a^2} + 30 \frac{x^4}{a^4} \right) \right] \times \right. \\ & \times \left(-4 + 12 \frac{y^2}{b^2} \right) + \left[w_{20} \left(-4 + 12 \frac{x^2}{a^2} \right) + w_{22} \left(2 - 24 \frac{x^2}{a^2} + 30 \frac{x^4}{a^4} \right) \right] \times \\ & \times \left(2 - 24 \frac{y^2}{b^2} + 30 \frac{y^4}{b^4} \right) \left. \right\} + \left[24 w_{00} + w_{20} \left(-48 + 360 \frac{y^2}{b^2} \right) \right] \left(1 - \frac{x^2}{a^2} \right)^2 + \\ & + \left[24 w_{20} + w_{22} \left(-48 + 360 \frac{y^2}{b^2} \right) \right] \frac{x^2}{a^2} \left(1 - \frac{x^2}{a^2} \right)^2. \end{aligned} \quad (2.7)$$

Ограничимся далее случаем квадратной пластины, когда $2a = 2b$ и $w_{20} = w_{02}$.

Потребуем, чтобы неравномерная нагрузка \tilde{p} совпадала с заданной равномерной нагрузкой p в трех точках с координатами $(0, 0)$, $(\frac{a}{2}, 0)$, $(\frac{a}{2}, \frac{a}{2})$, а также в точках, им симметричных. В результате получим следующую систему трех уравнений для определения трех неизвестных w_{00} , w_{20} , w_{22} :

$$\begin{aligned} 80 w_{00} - 128 w_{20} + 8 w_{22} &= \frac{p a^4}{D}, \\ 45,5 w_{00} + 31,375 w_{20} - 15,25 w_{22} &= \frac{p a^4}{D}, \\ 29 w_{00} + 63,25 w_{20} + 22,15625 w_{22} &= \frac{p a^4}{D}. \end{aligned} \quad (2.8)$$

Как видно из (2.6), w_{00} представляет собой прогиб в центре пластины. Решая (2.8), получим:

$$\begin{aligned} w_{20} &= 0,24977 w_{00}, \quad w_{22} = 0,22827 w_{00}, \\ w_{00} &= 0,01369 \frac{p (2a)^4}{Et^3}. \end{aligned} \quad (2.9)$$

Изгибающий момент достигает наибольшего значения на краю пластины в точке $(a, 0)$:

$$M_x /_{x=a} = 0,05014 p (2a)^2. \quad (2.10)$$

Изгибающий момент в центре:

$$M_x /_{x=0} = 0,02313 p (2a)^2. \quad (2.11)$$

Сравним полученные результаты с результатами, приведенными в книге С. П. Тимошенко [2]. Значения прогиба в центре согласно [2]:

$$w_{11} = 0,0138 \frac{p (2a)^4}{Et^3}. \quad (2.12)$$

Относительная погрешность метода коллокации

$$\varepsilon_1 = \frac{w_{11} - w_{00}}{w_{11}} \cdot 100 = 0,8\%.$$

Изгибающий момент согласно [2]:

$$M_x^{[2]} /_{x=a} = 0,0513 p (2a)^2. \quad (2.13)$$

Относительная погрешность в этом случае составляет:

$$\varepsilon_2 = \frac{M_x^{[2]} - M_x}{M_x^{[2]}} \cdot 100 \approx 2\%.$$

Из предыдущего ясно, что в рассматриваемом случае метод коллокации оказывается весьма эффективным, и даже при наличии малого числа точек коллокации дает хорошие результаты как для прогиба, так и для напряжений.

Можно показать, аналогично тому как это делается в следующем параграфе для круглой пластинки, что полученное близкое совпадение результатов не является случайным.

Здесь необходимо отметить, что упомянутое выше решение [2], содержащее бесконечные ряды тригонометрических и гиперболиче-

ских функций, является более громоздким, и конечные результаты, с которыми производилось сравнение, получены путем решения системы четырех линейных уравнений, а не трех, как это имело место в нашем случае.

Отметим также, что при решении этой задачи методом конечных разностей для достижения той же точности приходится решать систему 15 линейных уравнений.

3. Большие прогибы круглой пластины с заделанными краями

При решении этой задачи будем исходить из дифференциальных уравнений, приведенных в работе [2]:

$$\begin{aligned} \frac{d^2 u}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{du}{dr} - \frac{u}{r^2} &= -\frac{1-\nu}{2r^2} \left(\frac{dw}{dr} \right)^2 - \frac{dw}{dr} \frac{d^2 w}{dr^2}, \\ \frac{d^2 w}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d^2 w}{dr^2} - \frac{1}{r^2} \frac{dw}{dr} &= \frac{12}{t^2} \frac{dw}{dr} \left[\frac{du}{dr} + \nu \frac{u}{r} + \frac{1}{2} \left(\frac{dw}{dr} \right)^2 \right] + \\ &+ \frac{1}{Dr} \int_0^a q r dr. \end{aligned} \quad (3.1)$$

Здесь u , w — радиальное и нормальное составляющие перемещения; a — радиус пластины, t — толщина, ν — коэффициент Пуассона, D — изгибная жесткость. Граничные условия заделки имеют вид:

$$u = 0, \quad w = 0, \quad \frac{dw}{dr} = 0 \quad \text{при } r = a. \quad (3.2)$$

Следуя (2.4), функцию прогиба возьмем в виде:

$$w = \left(1 - \frac{r^2}{a^2} \right)^2 \left(w_0 + w_2 \frac{r^2}{a^2} + w_4 \frac{r^4}{a^4} \right). \quad (3.3)$$

Выражение (3.3) удовлетворяет граничным условиям для w .

Подставляя (3.3) в правую часть первого уравнения системы (3.1) и решая его точно, находим u :

$$u = \sum_{i=1}^8 \delta_{2i-1} r^{2i-1}, \quad (3.4)$$

где

$$\delta_1 = - \sum_{l=1}^8 \delta_{2l-1} a^{2l-2} \quad (3.5)$$

$$\begin{aligned} \delta_3 &= -\frac{3-\nu}{4} b_2^2 \frac{1}{a^4}; \quad \delta_5 = -\frac{4(5-\nu)}{12} b_2 b_4 \frac{1}{a^6}; \\ \delta_7 &= -\frac{7-\nu}{6} \left(b_4^2 + \frac{3}{2} b_2 b_6 \right) \frac{1}{a^8}; \quad \delta_9 = -\frac{4(9-\nu)}{40} (2b_2 b_8 + 3b_4 b_6) \frac{1}{a^{10}}; \\ \delta_{11} &= -\frac{11-\nu}{10} \left(\frac{8}{3} b_4 b_8 + \frac{3}{2} b_6^2 \right) \frac{1}{a^{12}}; \quad \delta_{13} = -\frac{24(13-\nu)}{84} b_6 b_8 \frac{1}{a^{14}}; \\ \delta_{15} &= -\frac{15-\nu}{7} b_8^2 \frac{1}{a^{16}}, \end{aligned} \quad (3.6)$$

при обозначениях:

$$\begin{aligned} b_0 &= w_0, \quad b_2 = -2w_0 + w_2; \quad b_4 = w_0 - 2w_2 + w_4, \\ b_6 &= w_2 - 2w_4; \quad b_8 = w_4. \end{aligned} \quad (3.7)$$

Подставляя (3.3) и (3.4) во второе уравнение системы (3.1), получаем:

$$\tilde{q}^* = A_0 + A_2 \xi^2 + A_4 \xi^4 + (B_0 + B_2 \xi^2 + B_4 \xi^4 + B_6 \xi^6 + B_8 \xi^8 + B_{10} \xi^{10} + B_{12} \xi^{12} + B_{14} \xi^{14} + B_{16} \xi^{16} + B_{18} \xi^{18} + B_{20} \xi^{20}), \quad (3.8)$$

где

$$\tilde{q}^* = \frac{\tilde{q} a^4}{Et^4}, \quad \xi = r/a;$$

$$A_0 = \frac{16}{3} \beta_4 \frac{1}{1-\nu^2}; \quad A_2 = 24 \beta_6 \frac{1}{1-\nu^2}; \quad A_4 = 64 \beta_8 \frac{1}{1-\nu^2}$$

$$B_0 = 4 \beta_2 \delta_1 \frac{1}{1-\nu}; \quad B_2 = 8 \beta_4 \delta_1 \frac{1}{1-\nu} - \beta_2^3;$$

$$B_4 = 12 \beta_6 \delta_1 \frac{1}{1-\nu} - \frac{10}{3} \beta_2^2 \beta_4;$$

$$B_6 = 16 \beta_8 \delta_1 \frac{1}{1-\nu} - 4 \beta_2^2 \beta_6 - \frac{10}{3} \beta_2 \beta_4^2;$$

$$B_8 = -\frac{36}{5} \beta_2 \beta_4 \beta_6 - \frac{24}{5} \beta_2^2 \beta_8 - \frac{4}{3} \beta_4^3;$$

$$B_{10} = -8 \beta_2 \beta_4 \beta_8 - \frac{22}{5} \beta_2^2 \beta_{10} - \frac{18}{5} \beta_2 \beta_4^2; \quad (3.9)$$

$$B_{12} = -\frac{72}{15} \beta_2^2 \beta_{12} - \frac{264}{35} \beta_2 \beta_4 \beta_{12} - \frac{24}{5} \beta_4 \beta_6^2;$$

$$B_{14} = -\frac{132}{35} \beta_2 \beta_4 \beta_{14} - \frac{72}{7} \beta_2 \beta_6 \beta_{14} - \frac{9}{5} \beta_4^3;$$

$$B_{16} = -\frac{568}{105} \beta_4 \beta_8^2 - \frac{1224}{210} \beta_2^2 \beta_{16};$$

$$B_{18} = -\frac{44}{7} \beta_6 \beta_8^2; \quad B_{20} = -\frac{16}{7} \beta_8^3;$$

$$\delta_1 = \frac{3-\nu}{4} \beta_2^2 + \frac{5-\nu}{3} \beta_2 \beta_4 + \frac{7-\nu}{6} \beta_4^2 + \frac{7-\nu}{4} \beta_2 \beta_6 + \frac{9-\nu}{5} \beta_2 \beta_8 + \frac{27-3\nu}{10} \beta_4 \beta_6 + \frac{44-4\nu}{15} \beta_4 \beta_8 + \frac{33-3\nu}{20} \beta_6^2 + \frac{26-2\nu}{7} \beta_6 \beta_8 + \frac{15-\nu}{7} \beta_8^2;$$

$$\beta_i = b_i/t, \quad i = 0, 2, 4, 6, 8.$$

Сначала решим задачу во втором приближении, положив всюду $w_1 = 0$.

Потребуем, чтобы неравномерная нагрузка $\tilde{q}^*(\xi)$ (3.8) в точках с координатами $\xi = 0$, $\xi = 0,50$ принимала некоторое значение q_2^* . Подставляя указанные выше значения ξ в (3.8), получим следующие зависимости (при $\nu = 0,3$):

$$0,91 q_2^* = 5,3333 \zeta_0 - 10,6667 \zeta_2 + 7,1067 \zeta_0^3 - 4,3160 \zeta_0^2 \zeta_2 + 1,0920 \zeta_0 \zeta_2^2 + 0,3553 \zeta_2^3, \quad (3.10)$$

$$6 \zeta_2 - 2,9284 \zeta_0^3 + 4,1111 \zeta_0^2 \zeta_2 - 0,7786 \zeta_0 \zeta_2^2 + 0,3109 \zeta_2^3 = 0. \quad (3.11)$$

Здесь и далее $\zeta_1 = w_1/t$.

Задавая величиной ζ_0 , из уравнения (3.11) находим ζ_2 , после чего согласно (3.10) определяем q_2^* . Так, например, полагая $\zeta = 1$, получаем

$$\zeta_2 = 0,295 \text{ и } q_2^* = 8,90.$$

При $\zeta_0 = 3$ получаем $\zeta_2 = 1,998$, $q_2^* = 131,00$.

Полученное решение является приближенным решением исходной задачи, но, с другой стороны, оно является точным решением некоторой обратной задачи, а именно задачи об изгибе пластины нагрузкой, распределенной по закону (3.8).

Для того, чтобы иметь представление, насколько удовлетворительно приближенное решение исходной задачи, нужно сопоставить эту задачу с обратной. В рассматриваемом случае для этого достаточно сравнить эпюры нагрузок.

Вместо параметра нагрузки $\tilde{q}^*(\xi)$ введем новый параметр $\bar{p}^*(\xi)$ по формуле:

$$\bar{p}^*(\xi) = \frac{\tilde{q}^*(\xi)}{\tilde{q}^*(0)} \quad (3.12)$$

и будем в дальнейшем для краткости величины $\tilde{q}^*(\xi)$, $\bar{p}^*(\xi)$ называть просто нагрузками.

Эпюра нагрузки $\bar{p}^*(\xi)$ обратной задачи изображена на рис. 1 площадью, ограниченной прямыми AO , Of' , $f'e$ и кривой $Abcde$ (так как нагрузка осесимметрична; здесь и далее дается половина сечения диаметральной плоскостью).

При этом $\bar{p}^*(0) = 8,90$ и $OA = c'c = f'f = 1 = \bar{p}^*(0) = p^*$. Отклонение от 1 при $\xi = 0,25$ составляет $\Delta p^* = \bar{p}^* - p^* = -0,0015$;

$$\Delta p^* = 0,04 \text{ при } \xi = 0,75;$$

$$\Delta p^* = 0,14 \text{ при } \xi = 1.$$

Очевидно, если дополнить неравномерную нагрузку \bar{p}^* (кривая $Abcde$) до равномерной \bar{p}^* (прямая Be), то нагрузке \bar{p}^* будет соответствовать прогиб в центре $\zeta_0 > 1$. С другой стороны, если вместо \bar{p}^* приложить равномерную нагрузку p^* (прямая Af), то ей будет соответствовать прогиб в центре $\zeta_0 < 1$.

Заметим, что последнее утверждение справедливо в том случае, когда дополнительный прогиб δw , обусловленный приложением нагрузки вблизи края (заштрихованная часть на рис. 1), является функцией, принимающей в центре положительное значение. Невыполнения этого условия можно ожидать в случае мембраны и оболочки, имеющей кривизну.

В рассматриваемом нами случае пластины конечной жесткости, как это будет видно ниже из решения в более высоком приближении, высказанное утверждение является справедливым. Итак, истинная равномерная нагрузка p^* , которая вызовет прогиб $\zeta_0 = 1$, будет удовлетворять неравенству:

$$p^* < p^* < \bar{p}^*.$$

В нашем случае

$$1 < p^* < 1,14$$

или

$$8,90 < q^* < 10,15. \quad (3.13)$$

Эту оценку можно улучшить, если принять во внимание следующее, почти очевидное, положение: если имеются две нагрузки $p_1^*(\xi)$ и $p_2^*(\xi)$ такие, что $p_1^*(\xi) > p_2^*(\xi) > 0$ при $0 < \xi < \xi_1$, $p_2^*(\xi) > p_1^*(\xi) > 0$ при $\xi_1 < \xi < 1$ и, кроме того,

$$\int_0^1 \xi p_1^*(\xi) d\xi = \int_0^1 \xi p_2^*(\xi) d\xi, \quad (3.14)$$

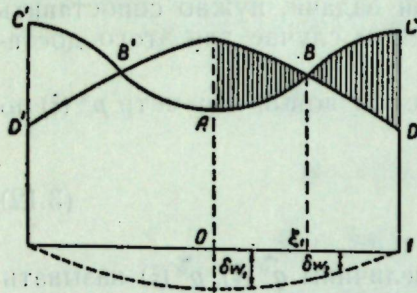


Рис. 2.

то прогиб в центре $\zeta_{0,2}$, вызванный нагрузкой $p_2^*(\xi)$, будет меньше прогиба $\zeta_{0,1}$, вызванного нагрузкой $p_1^*(\xi)$ (см. рис. 2). Чтобы убедиться в этом, покажем, что работа δA неуравновешенности $\Delta p^*(\xi) = p_1^*(\xi) - p_2^*(\xi)$ на возможном перемещении $\delta w(\xi)$, представляющем собой положительную монотонно убывающую от центра по направлению к краю функцию, является положительной.

Разбивая область интегрирования на две части и применяя затем к каждой части теорему о среднем, получим:

$$\begin{aligned} \delta A &= \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^1 [p_1^*(\xi) - p_2^*(\xi)] \xi \delta w d\xi = 2\pi \int_0^{\xi_1} [p_1^*(\xi) - p_2^*(\xi)] \xi \delta w d\xi + \\ &+ 2\pi \int_{\xi_1}^1 [p_1^*(\xi) - p_2^*(\xi)] \xi \delta w d\xi = 2\pi \left\{ \delta w_1 \int_0^{\xi_1} [p_1^*(\xi) - p_2^*(\xi)] \xi d\xi - \right. \\ &\left. - \delta w_2 \int_{\xi_1}^1 [p_2^*(\xi) - p_1^*(\xi)] \xi d\xi, \right. \end{aligned} \quad (3.15)$$

где δw_1 и δw_2 — некоторые средние значения δw соответственно в интервале $[0, \xi_1]$ и $[\xi_1, 1]$, причем $\delta w_1 > \delta w_2$. В силу (3.14)

$$\int_0^{\xi_1} [p_1^*(\xi) - p_2^*(\xi)] \xi d\xi = \int_{\xi_1}^1 [p_2^*(\xi) - p_1^*(\xi)] \xi d\xi > 0.$$

Поэтому

$$\delta A = 2\pi (\delta w_1 - \delta w_2) \int_0^{\xi_1} [p_1^*(\xi) - p_2^*(\xi)] \xi d\xi > 0. \quad (3.16)$$

Можно сформулировать более общее, чем доказано выше, положение о зависимости величины максимального прогиба от характера распределения нагрузки, а именно: **чем большая часть полной нагрузки приложена вблизи центра максимальной гибкости пластины, тем больше вызванный ею максимальный прогиб.**

Из предыдущего следует, что истинная величина равномерной нагрузки p^* удовлетворяет условию $p_{ср}^* > p^* > \underline{p}^*$, где $p_{ср}^*$ — средняя величина нагрузки, определяемая из соотношения

$$\pi \cdot p_{ср}^* = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^1 \tilde{p}^*(\xi) \xi d\xi, \quad (3.19)$$

при этом $\tilde{p}^*(\xi)$ берется согласно (3.12) и (3.8).

В результате получим:

$$1 < p^* < 1,045 \text{ или } 8,90 < q^* < 9,30. \quad (3.20)$$

Заметим, что практически для получения оценки погрешности нет необходимости обращаться к выражению (3.8). Достаточно главную часть выражения $\Delta \tilde{p}^* = \tilde{p}^* - p_{ср}^*$, где $p_{ср}^*$ — значение нагрузки \tilde{p}^* в центре, аппроксимировать простейшей функцией.

На рис. 1 эта часть $\Delta \tilde{p}^*$ представляет собой возвышение кривой cde над прямой af . Заменим кривую cde прямой ce и запишем $\Delta \tilde{p}^*$ в виде:

$$\Delta \tilde{p}^* \approx -0,14 + 0,28\xi. \quad (3.21)$$

Тогда вместо (3.20) получим

$$1 < p^* < 1,05 \text{ или } 8,90 < q^* < 9,35. \quad (3.22)$$

Прежде чем перейти к дальнейшему уточнению величины равномерной нагрузки, соответствующей прогибу в центре $\zeta_0 = 1$, введем понятие об «эквивалентной» нагрузке.

Нагрузки $q_1(x, y)$ и $q_2(x, y)$ будем называть «эквивалентными» по отношению к возможному перемещению δw , если они совершают на этом перемещении одинаковую работу, т. е. если

$$\iint q_1(x, y) \delta w d\sigma = \iint q_2(x, y) \delta w d\sigma. \quad (3.23)$$

Обратимся теперь к рис. 1.

Прогиб $\zeta_0 = 1$ вызывается неравномерной нагрузкой $\tilde{p}^*(\xi)$ (кривая Ace), которую можем представить в виде:

$$\tilde{p}^*(\xi) = p_{ср}^* + \Delta \tilde{p}^*(\xi), \quad (3.24)$$

где $p_{ср}^* = p^* = 1$ — постоянная часть, ограниченная линией Af , а $\Delta \tilde{p}^*(\xi)$ — переменная (заштрихованная) часть, записанная нами в виде (3.21).

Равномерно распределенную нагрузку p^* , которая вызовет такой же по величине прогиб в центре, будем находить как сумму

$$p^* = p_{ср}^* + \Delta p_s^*, \quad (3.25)$$

где Δp_s^* — поправка, представляющая собой равномерно распределенную нагрузку, «эквивалентную» переменной части $\Delta \tilde{p}^*(\xi)$, и определяемая из соотношения:

$$\Delta p_s^* = \frac{\int_0^1 \Delta \tilde{p}^*(\xi) \xi \delta w d\xi}{\int_0^1 \xi \delta w d\xi}. \quad (3.26)$$

Принимая за $\Delta \tilde{p}^*(\xi)$ выражение (3.21), а за δw — функцию прогиба, полученную при решении методом коллокации, т. е. полагая

$$\delta w = (1 - \xi^2)^2 \cdot (1 + 0,295\xi^2) \quad (3.27)$$

и производя необходимые вычисления, получим:

$$q_{2,y}^* = 9,09. \quad (3.28)$$

Таким образом, найденное значение q^* удовлетворяет условию (3.20). Если вместо (3.27) взять

$$\delta w = (1 - \xi^2)^2, \quad (3.29)$$

то получим

$$q^* = 9,06. \quad (3.30)$$

Это значение мало отличается от (3.28).

Полагая $\zeta_0 = 3$, находим

$$\zeta_2 = 1,998 \text{ и } q_2^* = 131,00. \quad (3.31)$$

Эпюра нагрузки $\tilde{p}^*(\xi)$ в этом случае изображена на рис. 1 площадью, ограниченной прямыми AO , Of' , $f'e'$ и кривой $abcd'e'$.

При этом

$$\tilde{q}^*(0) = 131,00, \quad OA = \tilde{p}^*(0) = 1.$$

Отклонение от 1 при $\xi = 0,25$ составляет $\Delta p^* = 0,021$; $\Delta p^* = -0,20$ при $\xi = 0,75$; $\Delta p^* = -0,57$ при $\xi = 1,0$. Используя „среднее“ значение нагрузки, получаем оценку:

$$100,20 < q^* < 131,00. \quad (3.32)$$

Уточняя величину q^* путем вычисления „эквивалентной“ поправки, находим

$$q_{2,y}^* = 117,90. \quad (3.33)$$

Найденное $q_{2,y}^*$ удовлетворяет условию (3.32).

Чтобы судить о сходимости метода коллокации, о правильности приведенной выше оценки погрешности и об эффективности отыскания поправки методом „эквивалентной“ нагрузки, решим задачу в третьем приближении.

Потребуем, чтобы неравномерная нагрузка \tilde{q}^* при $\xi = 0; 0,25; 0,625$ принимала некоторое значение q_3^* . Подставляя указанные значения ξ в (3.5), получим следующие зависимости:

$$\begin{aligned} 0,91 q_3^* &= 5,3333\zeta_0 - 10,6667\zeta_2 + 5,3333\zeta_4 + 7,1067\zeta_0^3 - \\ &- 4,3160\zeta_0^2\zeta_2 - 0,4853\zeta_0^2\zeta_4 + 1,0920\zeta_0\zeta_2^2 + 0,6785\zeta_0\zeta_2\zeta_4 + \\ &+ 0,1337\zeta_0\zeta_4^2 - 0,3553\zeta_2^3 - 0,2179\zeta_2^2\zeta_4 - 0,0669\zeta_2\zeta_4^2, \end{aligned} \quad (3.34)$$

$$\begin{aligned} 1,5\zeta_2 - 2,75\zeta_4 - 0,8532\zeta_0^3 + 1,4446\zeta_0^2\zeta_2 - 0,2960\zeta_0^2\zeta_4 - \\ - 0,3816\zeta_0\zeta_2^2 - 0,0804\zeta_0\zeta_2\zeta_4 + 0,01545\zeta_0\zeta_4^2 + 0,1214\zeta_2^3 + 0,02332\zeta_2^2\zeta_4 - \\ - 0,005933\zeta_2\zeta_4^2 - 0,006844\zeta_4^3 = 0, \end{aligned} \quad (3.35)$$

$$\begin{aligned} 9,3750\zeta_2 - 8,9844\zeta_4 - 4,1017\zeta_0^3 + 4,9917\zeta_0^2\zeta_2 + 0,1241\zeta_0^2\zeta_4 - \\ - 0,791474\zeta_0\zeta_2^2 - 0,50908\zeta_0\zeta_2\zeta_4 - 0,05224\zeta_0\zeta_4^2 + 0,3781\zeta_2^3 + \\ + 0,2137\zeta_2^2\zeta_4 + 0,05481\zeta_2\zeta_4^2 - 0,006199\zeta_4^3 = 0. \end{aligned} \quad (3.36)$$

Для заданного ζ_0 , пользуясь (3.35), (3.36), находим ζ_2, ζ_4 , после чего согласно (3.34) определяем q_3^* .

Полагая $\zeta_0 = 1$, получаем $\zeta_2 = 0,274, \zeta_4 = 0,025, q_3^* = 9,11$. Эпюра нагрузки $\tilde{p}^*(\xi)$ представлена на рис. 3 (кривая Abc), причем $cd = 0,019$. Приближенно полагаем

$$\Delta p^* = -0,032 + 0,051\xi. \quad (3.37)$$

Используя „среднее“ значение нагрузки, получаем следующую оценку:

$$9,11 < q^* < 9,14. \quad (3.38)$$

Полагая $\delta w = (1 - \xi^2)^2$ и уточняя q^* с помощью „эквивалентной“ поправки, получим:

$$q_{3,u}^* = 9,12. \quad (3.39)$$

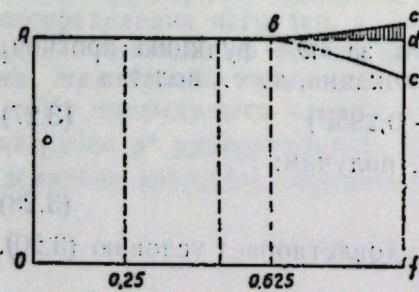


Рис. 3.

При $\zeta_0 = 3$ получаем $\zeta_2 = 2,434; \zeta_4 = 1,241; q_3^* = 118,60$. Эпюра нагрузки $\tilde{p}^*(\xi)$ в этом случае на рис. 3 ограничена сверху кривой Abc' , причем $c'd = -0,25$. Используя „среднее“ значение нагрузки, получаем оценку:

$$113,14 < q^* < 118,60. \quad (3.40)$$

Уточняя величину q^* с помощью „эквивалентной“ поправки, находим

$$q_{3,y}^* = 116,58. \quad (3.41)$$

Полученные результаты приведены в табл. 1

Таблица 1

	Решение во 2 приближении			Решение в 8 пригл.	
	q_2^*	$q_{2,y}^*$	$(q_{2,y}^* - q_2^*) 100/q_{2,y}^*$	q_3^*	$q_{3,y}^*$
$\zeta_0 = 1$	8,90	9,09	0,32	9,11	9,12
$\zeta_0 = 3$	131,00	117,91	1,13	118,60	116,58

Из рассмотрения табл. 1, а также соответствующих эпюр нагрузки, следует, что решение в третьем приближении (значения q_3^*) совершенно незначительно отличается от уточненного решения (значения $q_{3,y}^*$).

Сравнивая значения q_2^* и $q_{2,y}^*$ с $q_{3,y}^*$, видим, что уточнение решения во втором приближении методом „эквивалентной“ нагрузки является весьма эффективным и позволяет получить величину нагрузки с большой точностью, не производя трудоемких вычислений.

Сравним с результатами других авторов.

Рассмотренной в предыдущем параграфе задаче посвящено свыше десяти решений, полученных рядом авторов различными, в отдельных случаях весьма сложными и трудоемкими, методами.

Наиболее известные из этих решений приведены в книге [3], материалами которой мы здесь и пользуемся.

В табл. 2 дается сравнение величин параметра нагрузки q^* для значений прогиба в центре $\zeta_0 = 1, \zeta_0 = 3$, подсчитанных по формулам разных авторов, с величинами $q_{3,y}$, которые, как это ясно из предыдущего, практически можно считать точными.

Таблица 2

	q^*		$100(q_{3,y}^* - q^*)/q_{3,y}^*$	
	$\zeta_0 = 1$	$\zeta_0 = 3$	$\zeta_0 = 1$	$\zeta_0 = 3$
Уотерс	8,64	92,64	5,27	20,5
Тимошенко	8,72	94,80	4,38	18,8
Федергофер	8,96	101,28	1,75	13,3
Цянь Вэй-Чан	9,06	103,96	<u>0,66</u>	10,8
Уэй	= 9,15	—	—	—
Надан	9,26	109,56	-1,42	6,0
Макферсон и др. (исправленное Цянь Вэй-Чаном)	9,43	114,06	-3,74	<u>2,2</u>

Из табл. 2 видно, что при $\zeta_0 = 1$ наряду с решением Уей [3] наименьшую погрешность (0,66%) определения нагрузки дает решение Цянь Вэй-Чана [3]. Что касается прогибов порядка $\zeta_0 = 3$, то все решения, кроме решения Макферсона, Рамберга и Левн, исправленного Цянь Вэй-Чаном [3], дают большую погрешность.

4. Заключение

Полученные выше результаты дают основание предполагать, что метод коллокации будет эффективным во многих случаях расчета на изгиб не только пластин, но и оболочек, а также стержней, когда действующая нагрузка может быть представлена непрерывной и даже кусочно-гладкой функцией.

Его применение может оказаться целесообразным также в тех случаях, когда решение другими, например, вариационными методами становится особенно трудоемким (при наличии переменной жесткости, нелинейного закона упругости и др.).

При решении методом коллокации ручной счет в основном сводится лишь к дифференцированию аппроксимирующих функций с целью подстановки соответствующих производных в исходные уравнения. Весь остальной счет может быть без большого труда запрограммирован для выполнения на быстродействующих машинах.

Подобно тому, как это делалось выше, и при нагрузке более сложного вида, в каждом конкретном случае, анализируя неуравновешенность, можно дать приемлемую для практики оценку погрешности полученного решения.

В настоящей статье мы ставили перед собой, главным образом, методические цели. Решение некоторых линейных и, преимущественно, нелинейных задач, относящихся к изгибу круглых и прямоугольных пластин под действием разных нагрузок и при различных граничных условиях, будет дано в следующей статье.

ЛИТЕРАТУРА

1. Л. Коллатц. Численные методы решения дифференциальных уравнений. ИЛ, Москва, 1953.
2. С. П. Тимошенко. Пластинки и оболочки, Гостехиздат, 1948.
3. Теория гибких круглых пластинок. ИЛ, Москва, 1957.
4. П. М. Огибалов. Изгиб, устойчивость и колебания пластинок. Издательство МГУ, 1958.

Поступила 18.VII 1959 г.

Ф. С. Исанбаева

ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ УСТОЙЧИВОСТИ КРУГОВЫХ ЦИЛИНДРИЧЕСКИХ ОБОЛОЧЕК ПОД ДЕЙСТВИЕМ ВСЕСТОРОННЕГО ВНЕШНЕГО ДАВЛЕНИЯ

Настоящая работа посвящена экспериментальному исследованию устойчивости цилиндрических оболочек под действием всестороннего внешнего давления.

Цель исследования заключалась в получении полуэмпирических формул для определения критических нагрузок исходя из теоретических решений, изложенных в работах [5], [6], и результатов экспериментов, проведенных рядом авторов.

Чтобы получить недостающие экспериментальные данные, были проведены испытания 42 оболочек, длина которых меньше диаметра.

В задачу эксперимента входила также проверка теоретических выводов относительно влияния граничных условий на характер потери устойчивости оболочки и на величину критической нагрузки.

В ранее опубликованных работах, за исключением недавно появившейся работы В. Н. Нагаева [9], этот вопрос экспериментально не изучался.

При экспериментальном исследовании имелось в виду:

- 1) определение критических значений нагрузки для образцов;
- 2) изучение качественной картины потери устойчивости оболочек;
- 3) выявление влияния вида граничных условий на величину критической нагрузки.

Чтобы получить некоторое представление о характере напряженного состояния в оболочке, а именно, о порядке изгибных напряжений и напряжений в срединной поверхности, несколько образцов было испытано с применением проволочных датчиков сопротивления.

Автор благодарит проф. Х. М. Муштару за руководство настоящей работой, а также Б. М. Зуева и С. Г. Степанова за помощь при подготовке и проведении эксперимента.

1. Результаты теоретических решений

Для сопоставления величин критических давлений, полученных экспериментальным путем, с их теоретическими значениями, приведем формулы, полученные в работах [8], [5] и [6].

Как известно, верхняя критическая нагрузка для шарнирно опертой оболочки в случае действия всестороннего внешнего давления находится по формуле Мизеса:

$$p_{\text{ш}}^{\text{в}} = \frac{Et}{R} \frac{1}{n^2 + 0,5m^2} \left\{ \frac{m^4}{(m^2 + n^2)^2} + \frac{t^2}{12R^2(1-\nu^2)} (m^2 + n^2)^2 \right\}, \quad (1.1)$$

где R — радиус оболочки, t — толщина, $m = \frac{\pi R}{l}$, l — длина оболочки, n — число волн, образующихся по окружности, E — модуль упругости, ν — коэффициент Пуассона.

Но предложенная Мизесом формула не совсем удобна для вычислений, так как критическое давление для заданной оболочки каждый раз приходится вычислять, минимизируя нагрузку путем подбора значений n . Величина n может быть, однако, исключена из формулы Мизеса с помощью некоторых преобразований. Такое преобразование было сделано Х. М. Муштари в работе [8], в которой им предложена формула

$$p_{\text{ш}}^{\text{в}} = \frac{0,855 E R}{(1-\nu^2)^{3/4} l} \left(\frac{t}{R} \right)^{3/4} \cdot \{ 1 + 1,8(e-1)\theta + 0,35(e-1)^2 \theta^2 \}, \quad (1.2)$$

где $\theta = \frac{1}{l} \sqrt{\frac{Rt}{2}}$, а для случая всестороннего давления $e = 1/2$.

Эта формула может применяться для вычисления критических нагрузок как в случае оболочек средней длины ($m^2 \sim 1$), так и коротких.

Для определения верхней критической нагрузки для оболочки с защемленными краями в работе [6] предлагается формула:

$$p_3^{\text{в}} = \frac{Et}{R} \left\{ \frac{4m^4}{(4m^2 + n^2)^2} + \frac{t^2}{48R^2(1-\nu^2)} [(4n^2 + n^2) + 2n^4] \right\} \cdot \left\{ 0,82n^2 + 0,5m^2 + \frac{8m^4n^2(2-\nu)}{3(m^2 + n^2)^2} \right\}. \quad (1.3)$$

В отличие от формулы Нэша [14] верхняя критическая нагрузка найдена с учетом моментности состояния после потери устойчивости. Оказалось, что учет моментности снижает $p_3^{\text{в}}$ до 20%. При этом критическое давление для защемленных оболочек в 1,2–1,35 раза больше критического давления для оболочек с шарнирно-закрепленными краями.

В случае оболочек средней длины, т. е. если $m^2 \sim 1$, из (1.3) можно найти упрощенное выражение, которое получается при пренебрежении m^2 по сравнению с n^2 :

$$p_3^{\text{в}} = \frac{1,19 E R}{(1-\nu^2)^{3/4} l} \left(\frac{t}{R} \right)^{3/4} \cdot (1 - 0,75\theta)$$

или при $\nu = 0,3$

$$p_3^{\text{в}} = 1,28 \frac{R}{l} \left(\frac{t}{R} \right)^{3/4} \cdot (1 - 0,75\theta), \quad (1.4)$$

где множитель $(1 - 0,75\theta)$, введенный на основе вычислений, уменьшает погрешность этой формулы, и получающиеся результаты практически совпадают с результатами формулы (1.3).

В работе О. М. Палия [11] получены результаты, указывающие на более слабое влияние защемления кромок оболочки. Так как принятое им выражение для прогиба не удовлетворяет точно основному краевому условию защемления $\psi = 0$, возможно, что это решение дает несколько заниженные значения критического давления.

В работе [5] с целью определения нижней критической нагрузки в случае шарнирного опирания было проведено исследование равновесных форм оболочки после потери устойчивости. Не излагая этого решения, для сравнения с экспериментальными данными приведем лишь результаты числовых расчетов, представленных графиком 1,

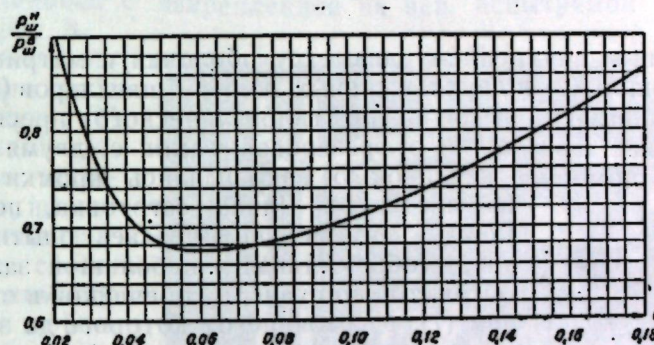


Рис. 1.

где по оси абсцисс отложен параметр θ , а по оси ординат — отношение нижнего критического давления к верхнему. Как видно из графика, отношение $p_{\text{ш}}^{\text{н}}/p_{\text{ш}}^{\text{в}}$ не остается постоянным, а зависит от размеров оболочки. Наименьшее из отношений $p_{\text{ш}}^{\text{н}}/p_{\text{ш}}^{\text{в}}$ равно 0,678 и соответствует $\theta = 0,062$. В случае же более длинных оболочек, или, наоборот, более коротких нижнее критическое давление приближается к верхнему.

Аналогичные выводы содержатся также в ряде работ, посвященных исследованию данного вопроса [2, 3, 4, 9, 10].

2. Описание образцов и оборудования

Было испытано 42 образца. Чтобы обеспечить потерю устойчивости в пределах упругости, образцы должны были иметь тонкую стенку, поэтому в качестве материала для них были взяты тонкая листовая белая жечь и листовая латунь. Радиус и толщина образцов были неизменны, варьировался только один параметр — длина. Ниже, в таблице 1, указаны размеры и количество испытанных образцов.

Образцы были изготовлены путем гибки заготовки из листа на гидравлическом прессе с помощью специального приспособления, изображенного на рис. 2.

Основные части приспособления — пуансон (1), представляющий собой чугунную болванку, обточенную на токарном станке, с диа-

Таблица 1

№ пп	$t, \text{ мм}$	$R, \text{ мм}$	$l, \text{ мм}$	Материал	Кол.
1	0,27	124	206	сталь	5
2	0,27	124	158	сталь	7
3	0,27	124	130	сталь	6
4	0,27	124	104	сталь	6
5	0,27	124	81	сталь	6
6	0,27	124	61	сталь	6
7	0,273	124	82	латунь	2
8	0,273	124	77	латунь	2
9	0,232	124	63	латунь	1
10	0,232	124	32	латунь	1

метром, равным внутреннему диаметру оболочки, и матрица, состоящая из подошвы (2) и двух массивных щечек—швеллеров (3). Матрица устанавливалась на плунжере гидравлического пресса (4). На верхних полках швеллеров отфрезерован замок с двумя уступами, в котором с помощью накладок (5) закреплялись кромки заготовки из листа (6). Длина заготовки, помещенной между замками, подбиралась опытным путем так, чтобы оставался небольшой зазор между обтянутой по пуансону обечайкой и ограничителем (7), расстояние от которого до замка устанавливалось несколько больше расчетного радиуса оболочки. Этот зазор устранялся за счет некоторого вытягивания заготовки при движении плунжера пресса вверх. Обжатый таким образом полудцилиндр с учетом последующей упругой деформации имел наружный диаметр, равный расчетному.

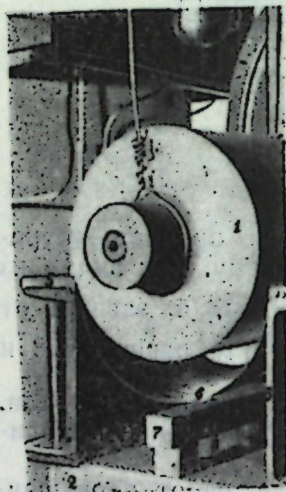


Рис. 2.

Две обечайки соединялись между собой двойным замком на контрольном копире. Замок обкатывался на фрезерном станке.

Технология обкатки шва была выбрана так, чтобы устранить возможные неправильности в загибе шва и обеспечить надежную герметичность.

Кромки оболочки заделывались в два массивных диска с кольцевыми канавками. Перед заделкой в диски на цилиндр одевался разъемный

контрольный контурный шаблон с номинальным диаметром, равным внешнему диаметру оболочки. Тем самым исключалась возможность искажения формы кругового цилиндра.

Граничные условия — защемление и шарнирное опирание — достигались соответствующим закреплением кромок цилиндра в кольцевых канавках дисков. Защемление осуществлялось заливкой канавок сплавом Вуда при $T = 70^\circ \text{C}$, шарнирное опирание — с помощью резиновых прокладок, утопленных в канавки. При этом диски стягивались между собой специальным болтом.

Описанный выше способ изготовления образцов обеспечивал достаточно правильный заданный контур оболочки. Замеренные начальные правильности в форме не превышали толщины оболочки.

Обычно практически невозможно создать идеальную жесткую заделку. Для определения характера заделки кромок оболочки, осу-

ществляемого заливкой сплавом Вуда, моделировалась специальная консольная балочка, которая вставлялась в паз массивной бобышки и заливалась сплавом Вуда. Толщина консольной балочки и размеры паза бобышки выбирались из геометрического подобия толщины оболочки и сечению канавки в дисках. К свободному концу балочки подвешивался груз, прогибы ее измерялись индикаторами часового типа, а нормальные напряжения — проволочными датчиками сопротивления.

Кроме того, испытывалась та же самая балочка, зажатая непосредственно между двумя пластинками.

Сравнение результатов проведенных в обоих случаях замеров прогибов и напряжений с теоретическими позволяет считать выполненную заделку в оболочке весьма близкой к идеальной.

Испытание образцов проводилось на специальной установке. Общий вид установки с закрепленной на ней испытываемой оболочкой показан на рис. 3.

Основной частью установки является литой корпус (1) с внутренней полостью для создания вакуума, на котором устанавливался образец с помощью зажимного кольца (2) и болтов. К корпусу прикреплены четыре штанги (3), несущие кольцо (4) с тремя степенями свободы, на котором устанавливались индикаторы часового типа (5) с ценой деления $0,01 \text{ мм}$, служащие для замера прогибов и осевого смещения верхнего днища. Это кольцо позволяло производить замеры по высоте образца, по окружности и диаметральному сечению верхнего днища.

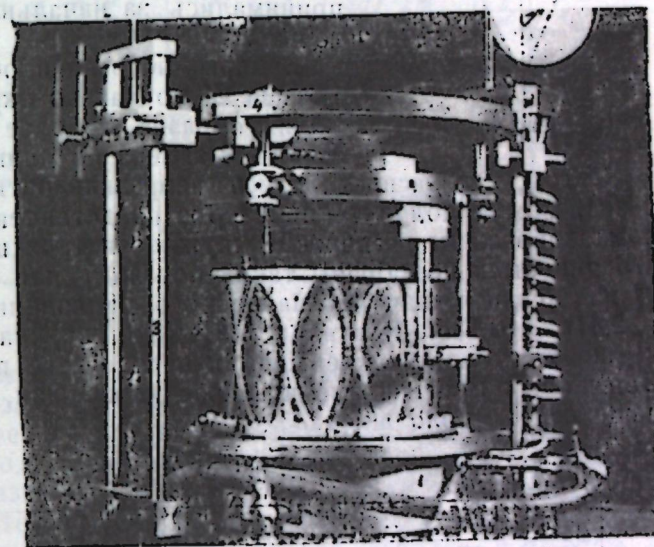


Рис. 3.

Разрежение создавалось с помощью водоструйного насоса, который обеспечивал плавность нагружения без пульсации.

Давление на оболочку измерялось манометром (10) с ценой деления $0,01 \text{ кг/см}^2$.

3. Методы экспериментального исследования

Практически невозможно изготовление оболочек без начальных отклонений от заданной формы. В зависимости от технологии изготовления величина отклонений может колебаться в широких пределах, а форма их может быть самой разнообразной. Поэтому, после закрепления испытываемого образца на установку, были измерены начальные отклонения его поверхности от круговой формы цилиндра. Неправильности определялись с помощью сферометра, приспособленного для измерения отклонения на цилиндрической поверхности. Прибор представляет собой индикатор, укрепленный на специальном

основании с четырьмя игольчатыми ножками. База прибора δ измерялась на горизонтальном оптиметре с точностью до 1μ , нуль прибора устанавливался на инструментальной плите с точностью до $0,01 \text{ мм}$, т. е. цены деления индикатора. Величина отклонения стрелки индикатора при установке прибора на поверхность цилиндра равнялась высоте сегмента d , охватываемого ножками прибора.

Нетрудно видеть из рис. 4, что

$$R = \frac{\delta^2 + 4d^2}{8d}, \quad (3.1)$$

где δ — база прибора, равная $28,57 \text{ мм}$, d — показания стрелки индикатора. Так как расчетный радиус всех образцов равен $R_{\text{расч}} = 124 \text{ мм}$, по формуле (3.1) можно вычислить $d_{\text{расч}}$. Разности между $d_{\text{расч}}$ и показаниями сферометра в отдельных точках на поверхности образца принимались за начальные отклонения в этих точках.

Замеры неправильностей производились в 12 или 24 точках по окружности на середине длины образца. У более длинных оболочек делалось 3 замера по длине.

О том, как распределялись неправильности на поверхности образца, можно получить некоторое представление из рис. 5, на котором изображены развертки окружности трех цилиндров. Для иллюстрации были подобраны такие образцы, для которых наибольшие из измеренных значений начального отклонения равнялись $+0,85t$, $-0,41t$, $-0,185t$. Как видно из этого рисунка, наибольшее отклонение $w_{0 \text{ max}}$ не характеризует качество всей поверхности оболочки. Обычно это местная вмятина, расположенная, как показал анализ, чаще всего около швов.

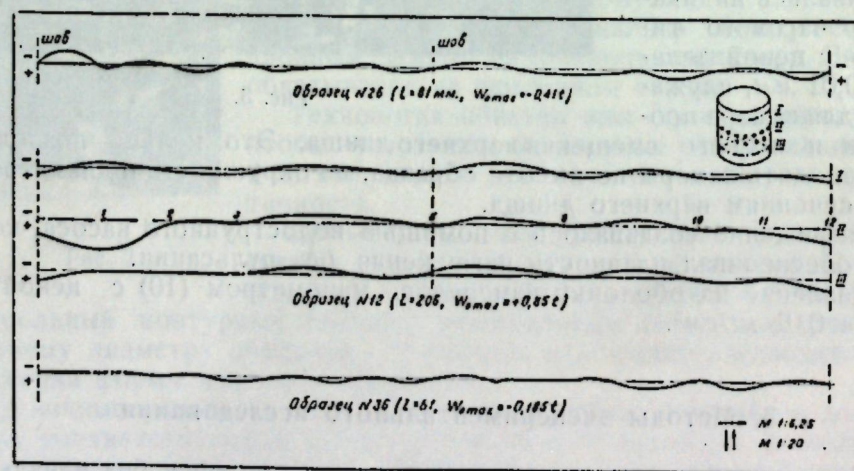


Рис. 5.

Значения наибольшего начального отклонения $+w_{0 \text{ max}}$, направленного к центру кривизны и способствующего преждевременному выпучиванию оболочки, для большинства образцов приведены в таблицах 2 и 3.

С целью определения напряжений, возникающих до и после потери устойчивости, на 7 образцах измерялись деформации с помощью проволочных датчиков сопротивления. При испытаниях были применены датчики с базой $l = 10 \text{ мм}$, сопротивлением $R = 200 \Omega$ и чувствительностью $\gamma = 2,23$. Для измерения деформации использовался электронный измеритель типа ЭЛТ-2М с мостиковой схемой (рис. 6). Двумя плечами моста являются рабочий и компенсационный датчики, два других представляют постоянные сопротивления в 200Ω . Разбаланс моста находился по нулевому методу при помощи гальванометра и реохорда, снабженного шкалой*.

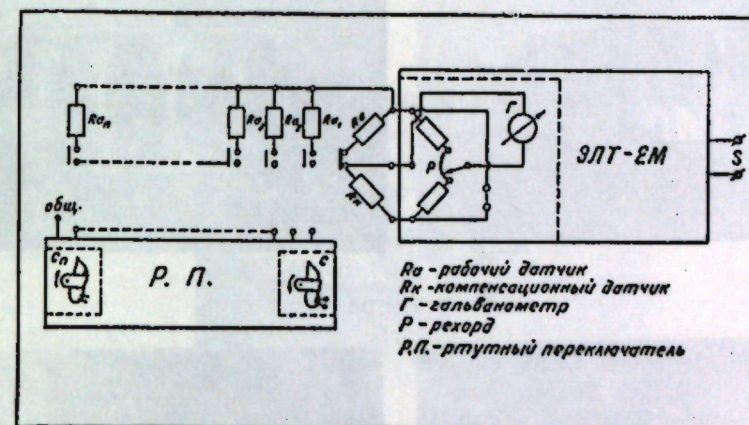


Рис. 6.

Перемещение движка реохорда на одно деление по шкале соответствовало относительной упругой деформации $\varepsilon = 0,555 \cdot 10^{-5}$. Для стали это соответствует напряжению $12,2 \text{ кг/см}^2$.

Для определения одновременно деформации срединной поверхности и деформации изгиба на образец наклеивались датчики с внутренней и внешней стороны в одних и тех же точках. В каждой точке с обеих сторон было наклеено по два датчика в осевом и окружном направлениях, а всего на каждый образец от 12 до 24 датчиков. Для поочередного подключения датчиков к мосту служил специальный ртутный переключатель на 25 точек, изготовленный в лаборатории института, который позволял быстро переключать датчики, не изменяя сопротивления в контактах.

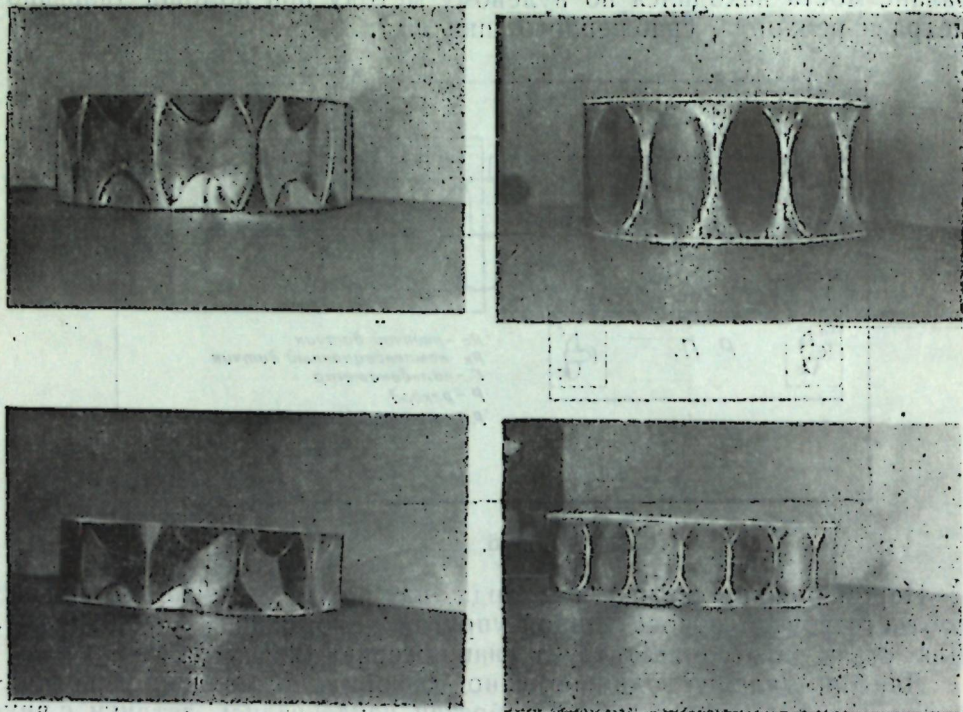
Нагружение образца производилось через интервалы давления $0,05 - 0,1 \text{ кг/см}^2$. Для каждого значения давления записывались показания всех датчиков.

4. Результаты испытания

С заземленными краями было испытано 34 образца из стали и латуни. Радиусы оболочек были одинаковы и равны $R = 124 \text{ мм}$, $t = 0,27 \text{ мм}$ и $t = 0,23 \text{ мм}$. Переменной была только длина образцов. В помещенных ниже таблицах 2 и 3 приводятся геометрические параметры образцов и результаты испытаний, а также сравнение результатов с теорией. Фотографии типичных форм потери устойчивости образцов показаны на рис. 7.

* Подробное описание этого метода можно найти в книге В. И. Красикова „Испытания строительных конструкций“, Москва, 1952.

Момент потери устойчивости испытываемых образцов определялся по резкому изменению величины замеренных прогибов и визуально. Для большинства оболочек визуальное определение критической нагрузки было сравнительно просто, так как выпучивание сопровождалось хлопком с образованием выпучин, каждая из которых захватывала вдоль образующей всю оболочку и была направлена к центру кривизны.



Шарнирно опертые образцы.

Защемленные образцы.

Рис. 7. Формы потери устойчивости.

Но этот процесс проходил неодинаково для всех образцов. Шарнирно опертые оболочки и некоторые из защемленных теряли первоначальную устойчивость внезапно с образованием глубоких выпучин по всей окружности одновременно. Для большинства же защемленных оболочек процесс потери устойчивости распадался на несколько стадий. Чаще всего в месте наибольшего прогиба, направленного к центру кривизны, возникали одна, две или несколько выпучин сразу. При увеличении нагрузки выпучивание, начавшееся в одном месте, постепенно распространялось на всю окружность. При этом могло происходить и некоторое перераспределение прогибов. После хлопка оболочка, как правило, была не в состоянии нести возрастающую нагрузку. Дальнейшее нагружение вызывало увеличение прогибов, что вело к расширению впадин и сужению гребней, искривлению последних и разрушению образца. Форма изогнутой поверхности образцов показана на рис. 8. Эти снимки сделаны после полной разгрузки образцов: а) непосредственно после потери устойчивости, б) после дополнительного нагружения, в) после потери устойчивости гребней, т. е. разрушения образца.

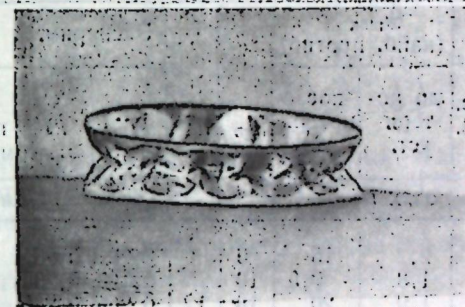
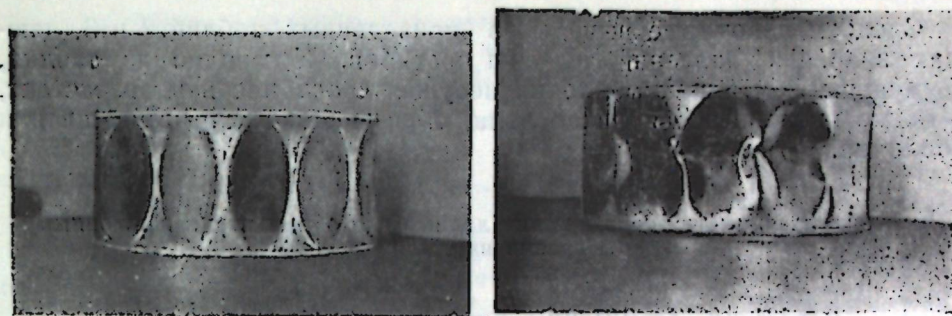


Рис. 8. Форма изогнутой поверхности защемленных по торцам образцов.

Интенсивность хлопка с укорочением оболочки падала. Волнообразование самых коротких образцов из стали ($l=61$ мм) сопровождалось лишь отдельными местными хлопками. Выпучивание на отдельных участках наступало без хлопка в результате интенсивного роста относительно больших начальных вмятин, влияние которых возрастает с укорочением оболочки.

В тех случаях, когда оболочка теряет устойчивость постепенно, возникает вопрос, какую же нагрузку принимать за критическую? Ту, при которой наступает быстрое возрастание прогиба в одной или более точках на поверхности образца и образуется хотя бы одна выпучина (назовем эту нагрузку p_1) или же нагрузку, при которой выпучивание распространяется на всю поверхность (назовем ее p_2).

Как показали теоретические исследования устойчивости цилиндрических оболочек, даже самый незначительный начальный прогиб оболочки существенно снижает верхнюю критическую нагрузку по сравнению со случаем идеального цилиндра. Поскольку мы имеем дело с реальными образцами, неизбежно имеющими определенные начальные неправильности в форме срединной поверхности, за экспериментальное значение критической нагрузки было принято давление p_1 .

Давление p_2 характеризует несущую способность оболочки в деформированном состоянии, так как при $p > p_2$ наступает разрушение образца.

Для образцов, которые теряли устойчивость с образованием волн одновременно по всей поверхности, p_1 и p_2 совпадают.

Сделаем некоторые выводы из приведенных таблиц 2 и 3, дающих значения давлений p_1 , p_2 и прогибов. Как видно из таблиц, с уменьшением длины оболочки несущая способность ее возрастает, а также увеличивается число волн, образующихся при выпучивании оболочки.

Экспериментальные и теоретические данные для образцов с защемленными краями из стали

$$R = 124 \text{ мм}, t = 0,27 \text{ мм}, \frac{R}{t} = 460, E = 2 \cdot 10^6 \text{ кг/см}^2, \nu = 0,3$$

Таблица 2

№ обр.	$\frac{l}{R}$	θ	w_{\max} (наиб. прогиб)			n^0	n^T	Эксперим.		Теор.	$\frac{p_{1кр}^0}{p_3^0}$	$\frac{p_2^0}{p_3^0}$	
			+ w_0 нач. отклон.	до потери уст.	после потери уст.			$p_{1кр}$	p_2				
			в долях t					кг/см ²					
1	1,66	0,020	0,26	2,2	15	10		0,25	0,26	0,336	0,745	0,774	
2			0,85	1,8	9,5	10		0,195	0,265		0,580	0,790	
13			0,22	1,9	20	10	12		0,265		0,265	0,795	0,790
20*			0,18	—	—	10			0,24		0,25	0,725	0,745
16*			0,18	—	—	10			0,21		0,225	0,625	0,670
11	1,27	0,026	0,11	1,3	14	11		0,27	0,37	0,436	0,620	0,850	
19*			0,37	—	—	10	13		0,275		0,295	0,630	0,680
21*			—	—	—	10			0,27		0,29	0,620	0,665
39			—	—	—	11			0,27		—	0,620	—
40			—	—	—	11			0,27		—	0,620	—
2	1,05	0,031	0,59	0,81	—	13		0,40	0,40	0,536	0,746	0,746	
3			0,18	0,90	9,9	12		0,38	0,43		0,710	0,800	
4			0,48	1,08	—	13		0,445	0,445		0,830	0,830	
18*			—	—	—	12		0,35	0,40		0,654	0,750	
17*	0,85	0,039	—	—	—	14		0,525	0,575	0,653	0,804	0,880	
7			0,22	0,59	11	13		0,525	0,60		0,804	0,920	
8			0,22	0,33	10	14		0,475	0,55		0,727	0,840	
15			0,30	0,96	10	14	16		0,505		0,556	0,772	0,850
29*			0,11	1,14	—	13		0,575	0,575		0,880	0,880	
38			0,18	—	—	13		0,51	—		0,830	—	
25	0,65	0,050	0,22	1,04	7,6	15		0,60	0,70	0,831	0,722	0,840	
26			0,26	1,18	8	16	17		0,61		0,77	0,734	0,930
41			—	—	—	15		0,60	—		0,722	—	
42			—	—	—	15		0,62	—		0,746	—	
22	0,49	0,067	0,67	1,15	3,5	16		0,70	0,90	1,100	0,636	0,820	
23			0,48	0,70	6,4	16	19		0,75		0,90	0,680	0,820
24			0,15	1,30	4,0	17		0,825	0,90		0,750	0,820	
28			0,15	1,10	—	17		0,82	0,92		0,745	0,840	

* Образцы, испытанные с проволочными датчиками.

Экспериментальные и теоретические данные для образцов с защемленными краями из латуни

$$R = 124 \text{ мм}, E = 1 \cdot 10^6 \text{ кг/см}^2, \nu = 0,3$$

Таблица 3

№ обр.	$\frac{l}{R}$	θ	+ w_0 нач. отклон.	w_{\max} (наиб. прогиб)		n^0	n^T	Эксперим.		Теор.	$\frac{p_{1кр}^0}{p_3^0}$	$\frac{p_2^0}{p_3^0}$	
				до потери уст.	после потери уст.			$p_{1кр}$	p_2				
			в долях t				кг/см ²						
6	455	0,66	0,05	0,18	1,15	6,7	15	17	0,345	0,395	0,424	0,814	0,920
14	455	0,66	0,05	0,58	0,67	6,9	14	17	0,350	0,400	0,424	0,825	0,945
5	455	0,62	0,053	0,73	0,70	6,7	15	17	0,310	0,485	0,446	0,695	1,090
27	455	0,62	0,053	0,48	1,50	6,7	15	17	0,350	0,480	0,446	0,847	1,070
10	535	0,51	0,085	0,09	0,33	4,6	16	20	0,294	0,294	0,356	0,826	0,826
9	535	0,26	0,168	—	0,63	1,5	24	26	0,600	0,800	0,716	0,836	1,120

Сравнение экспериментальных значений нагрузок с теоретическими показывает, что они составляют 0,6—0,75 от величины, определяемой линейной теорией для зашпеленных оболочек.

Что касается экспериментального числа волн, то оно ниже, чем найденное теоретически, причем это расхождение возрастает с укорочением оболочки.

В таблицах 2 и 3 приводятся также наибольшие из значений прогибов, направленных к центру кривизны, замеренных в нескольких точках по среднему поясу образцов. Проведенные замеры показывают, что потеря устойчивости образцов происходит при значении прогибов, равном 1—2 толщинам. После хлопка прогибы возрастают до 5—20 толщин, причем более коротким оболочкам соответствуют меньшие значения прогиба.

В целях качественного анализа влияния граничных условий наряду с зашпеленными были испытаны 8 образцов при граничных условиях, близких к шарнирному опиранию. Геометрические размеры и экспериментальные значения критических нагрузок представлены в таблице 4.

Сравнение результатов испытания образцов с зашпеленными и шарнирно опертыми краями обнаруживает значительное влияние уменьшения изгибной жесткости краев цилиндра.

Величины критических нагрузок для зашпеленных оболочек оказались в 1,3—1,5 раза выше критических нагрузок для аналогичных шарнирно опертых оболочек.

Число волн, образующихся при потере устойчивости шарнирно опертой оболочки, меньше, чем для зашпеленной, и разница в числах n увеличивается по мере уменьшения длины оболочки.

Характерным для испытаний на внешнее давление, независимо от осуществленных граничных условий, является то, что каждая выпучина распространяется на всю длину оболочки, что соответствует предположению, принятому в теоретическом решении.

Что касается величины прогибов, при которых оболочки теряли устойчивость, то они составили 2—3 толщины, т. е. несколько больше, чем при жесткой заделке. После хлопка глубина вмятин составляла 25—30 толщин.

При определении деформаций и напряжений в образцах имелось в виду получить некоторое представление о характере напряженного состояния образцов до и после выпучивания. Нас эти измерения

интересовали с точки зрения определения максимальных величин изгибных напряжений и напряжений в срединной поверхности, возникающих до и после потери устойчивости, чтобы судить о возможности применения выводов нелинейной теории оболочек, основанной на применении закона Гука.

Теоретические и экспериментальные данные для оболочек из стали с шарнирно опертыми краями

$$R = 124 \text{ м.м.}, t = 0,27 \text{ м.м.}, \frac{R}{t} = 460$$

Таблица 4

№ обр.	l/R	θ	+ω ₀ max начальн. откл. в долях t	p ^э	Теорет. знач. p _ш ^н по формуле		n ^э	n _ш ^т	p ^э / p _ш ^н
					(1.1)	(1.2)			
					кг/см ²				
30	1,27	0,026	0,3	0,23	0,329	0,327	8	10-11	0,70
31	1,27	0,026	0,3	0,20	0,329	0,327	8	10-11	0,61
34	1,05	0,031	0,18	0,245	0,401	0,399	10	12	0,61
35	1,05	0,031	0,22	0,25	0,401	0,399	10	12	0,62
32	0,65	0,050	0,15	0,39	0,652	0,65	11	15	0,61
33	0,65	0,050	0,57	0,30	0,652	0,65	12	15	0,46
36	0,49	0,067	0,15	0,55	0,880	0,878	12	16-17	0,62
37	0,49	0,067	0,15	0,47	0,880	0,878	12	16-17	0,54

Как показали измерения, наибольшие напряжения в срединной поверхности и изгибные напряжения в момент потери устойчивости не превышали 400 кг/см².

Процесс выпучивания сопровождался резким возрастанием изгибных деформаций и напряжений, которые даже в местах наибольшего изгиба непосредственно после хлопка оставались в пределах упругости. Однако местные напряжения, возникающие при дальнейшей деформации образца, превосходили этот предел, а деформации переходили в пластические.

5. Сравнение данных теории и эксперимента

Вывод полуэмпирических формул

Ниже в таблице 5 приведены результаты экспериментальных исследований ряда авторов [1, 2, 3, 7, 9, 12, 13, 15]. Сравнение этих

Таблица 5

Авторы	Материал	Ко- лич.	Геометрические параметры			Гра- ничн. усл.	p _{кр} p _ш ^н
			R, м.м.	R/ t	l/ R		
Винденбург и Триллиг [15]	сталь	36	203	120-262	0,25-4,00	защ.	0,65-1,43
Иосихуми Иван [13]	целлулоид	60	50	100	1-4		0,72-0,9
Исправников [7]	дураль	2	90	188-209	2,22	защ.	1,22; 1,32
Агамиров [1]	дураль	9	90	163-257	1,61-2,22	защ.	0,675-0,95
Бурдин [3]	дураль	10	88	169	2,05-5,11	ш/з	0,71-0,84
Алфутов [2]	сталь	12	90	195-290	1,78-3,88	защ.	0,97-1,04
Магасв [9]	сталь	45	103	124-202	0,97-1,94	шари.	0,67-0,89
			103	194-206	0,485-2,06	шари.	0,74-0,9

данных с результатами теоретических решений [5], [6] и опытными данными настоящей работы дано на рис. 9 и 10.

На рис. 9 построены кривые зависимости параметра нагрузки

$$q = \frac{32 \pi^2 p}{E} \frac{\theta^2 R^2}{t^2}$$

относительно параметра θ для оболочек с шарнирно опертыми краями. Параметром θ удобно пользоваться, так как он отвечает всевозможным относительным размерам оболочки l/R и R/t.

Для построения кривой q_ш^н, соответствующей верхним значениям критической нагрузки, в зависимости от θ, выразим q_ш^н через θ. Для этого, подставив в выражение для q вместо p его значение из формулы (1.2), имеем

$$q_{ш}^n = \frac{38,7 \pi^2 \theta^3}{(1-\nu)^{3/2}} : (1 - 0,9\theta)$$

Для построения кривой q_ш^н можно было бы воспользоваться данными, взятыми из графика (рис. 1), в котором приведены величины коэффициента η = p_ш^н/p_ш^н = q_ш^н/q_ш^н. Поскольку q_ш^н отличается от q_ш^н только величиной коэффициента, меняющегося в зависимости от θ так, как показано на рис. 1, мы задались целью подобрать выражение для функции η(θ) и дать формулу для определения p_ш^н.

Для лучшей аппроксимации зависимости коэффициента η от θ разделим интервал значений θ на две части:

$$0,02 \leq \theta < 0,06 \text{ и } 0,06 \leq \theta \leq 0,20.$$

Задаваясь для каждой части аппроксимирующей функцией в виде многочлена ψ(θ) = a₀ + a₁θ + a₂θ² + a₃θ³ + ... и требуя, чтобы функция ψ(θ) наиболее близко совпадала с η(θ) на выбранном интервале θ, мы получили следующие зависимости:

для 0,02 ≤ θ < 0,06

$$\psi(\theta) = 1,322 - 25,27\theta + 248\theta^2,$$

для 0,06 ≤ θ ≤ 0,20

$$\psi(\theta) = 0,7354 - 2,271\theta + 24,39\theta^2 - 43,50\theta^3,$$

которые с точностью до 0,001 отражают зависимость, данную графиком 1.

Таким образом, параметр нижней критической нагрузки в случае шарнирного опирания может быть определен по формуле:

$$p_{ш}^n = \eta \frac{38,7 \pi^2 \theta^3}{(1-\nu)^{3/2}} : (1 - 0,9\theta), \quad (5.1)$$

где η следует брать по соотношениям:

$$\eta = 1,322 - 25,27\theta + 248\theta^2 \text{ при } 0,02 \leq \theta < 0,06,$$

$$\eta = 0,7354 - 2,271\theta + 24,39\theta^2 - 43,50\theta^3 \text{ при } 0,06 \leq \theta \leq 0,20.$$

Зная q_ш^н, всегда можно найти p_ш^н по формуле

$$p_{ш}^n = \frac{q_{ш}^n E}{32 \pi^2 \theta^3} \frac{t^2}{R^2} \quad (5.2)$$

На основании формулы (5.1) на рис. 9 построена кривая q_ш^н. Наряду с кривыми q_ш^н и q_ш^н на этом же графике нанесены экспериментальные

данные для оболочек с шарнирно опертыми краями. Как видно из графика, экспериментальные точки, как правило, лежат в области между кривыми q_{III}^B и q_{III}^H , что свидетельствует об удовлетворительном согласовании данных расчета с результатами опытов.

Следует отметить, что в опытах В. А. Нагаева образцы находились в условиях только бокового внешнего давления. Однако, как показывают формулы линейной теории и эксперимент, критическое давление при всестороннем сжатии для оболочек средней длины лишь на 2—3% ниже, чем при боковом внешнем давлении. Влияние дополнительного осевого сжатия возрастает с увеличением θ . Расхождение в величине критических нагрузок становится порядка 10% лишь для очень коротких оболочек ($\theta > 0,2$).

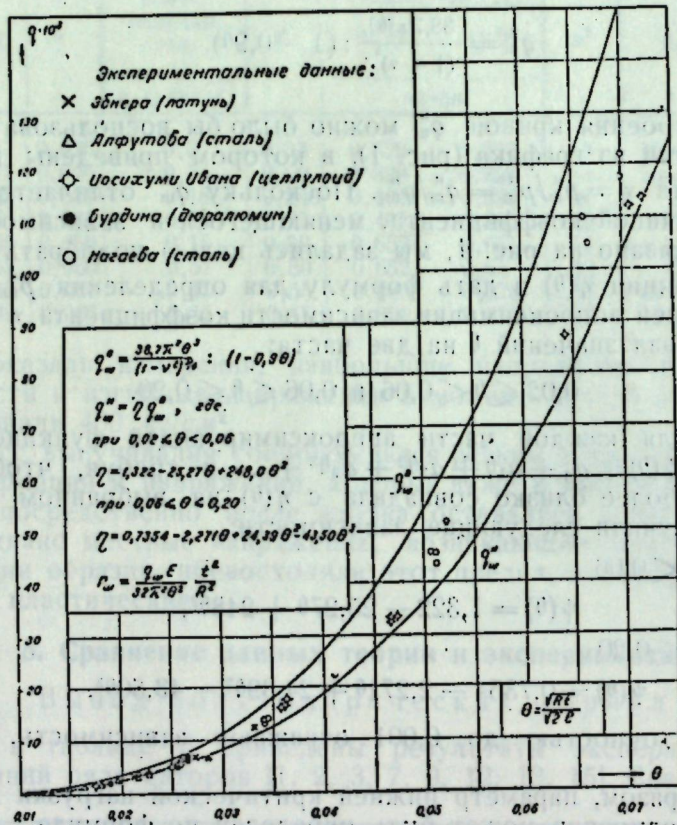


Рис. 9.

Таким образом, формулы (5.1) и (5.2), выведенные для случая всестороннего сжатия, могут применяться и при рассмотрении только бокового внешнего давления. При этом они будут давать несколько заниженные значения критических нагрузок в сторону запаса устойчивости.

На рис. 10 построены кривые зависимости параметра нагрузки q относительно θ и представлены экспериментальные данные для оболочек с заземленными краями.

Кривая q_3^B построена на основании зависимости

$$q_3^B = \frac{53,8 \pi^2 \theta^2}{(1 - \nu^2)^{3/2}} \cdot (1 - 0,75\theta),$$

полученной путем подстановки формулы (1.4) в выражение для q .

Из рис. 10 видно, что экспериментальные точки из различных исследований располагаются ниже кривой q_3^B и довольно хорошо согласуются друг с другом, хотя и имеет место некоторый разброс.

На основе анализа экспериментальных данных получена формула, которая отличается от предыдущей только величиной численного коэффициента:

$$q_3^B = \frac{35 \pi^2 \theta^2}{(1 - \nu^2)^{3/2}} \cdot (1 - 0,75\theta). \quad (5.3)$$

Как видно из рис. 10, построенная на основании этой формулы эмпирическая кривая q_3^B является нижней границей реальных критических нагрузок.

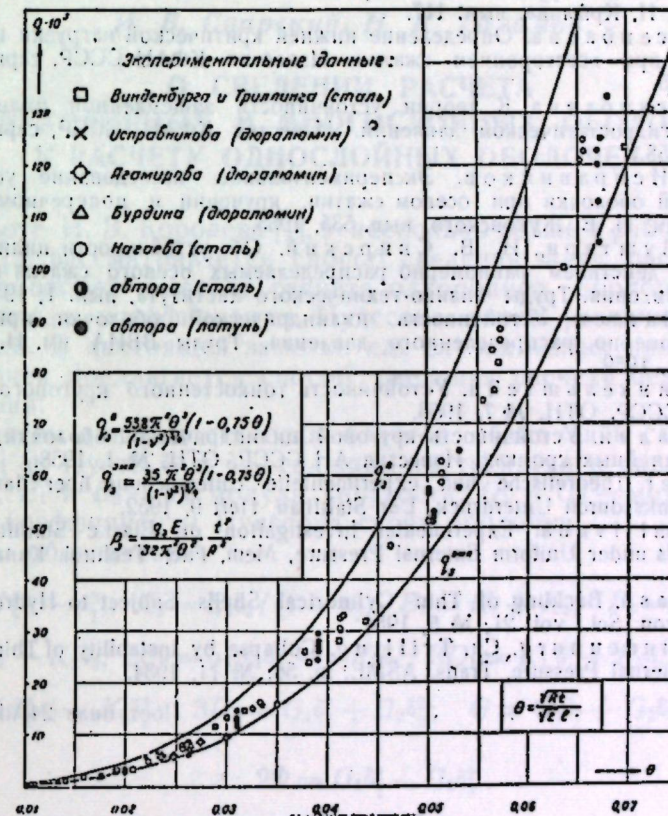


Рис. 10.

Зная q_3^B , можно найти p_3^B по формуле

$$p_3^B = \frac{q_3^B E}{32 \pi^2 \theta^2} \frac{t^2}{R^2}. \quad (5.4)$$

Так как в нашем распоряжении не имелось других экспериментальных данных, формулы (5.3) и (5.4) получены на основе анализа данных испытания оболочек с параметром θ , изменяющимся в интервале 0,01—0,07, и потому могут считаться надежными только для этих значений θ .

1. В. Л. Агамиров. Устойчивость замкнутых цилиндрических оболочек при совместном действии осевого сжатия и внешнего давления. Труды ВВИА имени Н. Е. Жуковского, вып. 605, 1956.

2. Н. А. Алфутов. Устойчивость цилиндрических и конических оболочек, нагруженных внешним давлением. Кандидатская диссертация, МВТУ, 1956; Определение нижнего критического давления упругой цилиндрической оболочки и поведение оболочки после потери устойчивости. Расчеты на прочность в машиностроении (МВТУ, 89), М., 1958.

3. П. Г. Бурдин. Экспериментальное исследование устойчивости замкнутых цилиндрических оболочек при совместном действии изгиба и внешнего давления. Автореферат кандидатской диссертации. Изд. ВВИА им. Н. Е. Жуковского, 1956; Экспериментальное исследование устойчивости круговых цилиндрических оболочек при совместном действии изгиба и внешнего давления. Труды ВВИА им. Н. Е. Жуковского, вып. № 741, 1959.

4. В. С. Иванов. Нелинейная задача об устойчивости упругой короткой цилиндрической оболочки, нагруженной всесторонним сжимающим давлением. Труды НИИ имени акад. А. Н. Крылова, вып. 117.

5. Ф. С. Исамбаева. Определение нижней критической нагрузки цилиндрической оболочки при всестороннем сжатии. Известия КФАН СССР, серия физ.-мат. наук, № 7, 1955.

6. Ф. С. Исамбаева. К теории устойчивости защемленной цилиндрической оболочки при гидростатическом давлении. Известия КФАН СССР, серия физ.-мат. наук, № 12, 1958.

7. Л. Р. Исправников. Экспериментальное исследование устойчивости цилиндрической оболочки при осевом сжатии, кручении и поперечном давлении. Труды ВВИА им. Н. Е. Жуковского, вып. 535, 1955.

8. Х. М. Мушгар, И. В. Свирский. Об устойчивости цилиндрической оболочки под действием равномерно распределяемых осевого сжатия и внешнего нормального давления. Труды Физико-технического института, вып. 1, 1954.

9. В. А. Нагаев. Устойчивость цилиндрической оболочки при действии внешнего равномерно распределенного давления. Труды ВВИА им. Н. Е. Жуковского, вып. 741, 1959.

10. Р. М. Финкельштейн. Устойчивость тонкостенного кругового цилиндра. Известия АН СССР, ОТН, № 7, 1956.

11. О. М. Палий. Устойчивость круговой цилиндрической оболочки, защемленной на криволинейных кромках. Известия АН СССР, ОТН, № 1, 1958.

12. H. Ebner. Theoretische und experimentelle Untersuchung über das Einbeulen zylindrischer Tanks durch Unterdruck, Der Stahlbau, Heft 9, 1952.

13. Iosihumi Ivana. Experimental Investigation on Elastic Stability of Thin Cylindrical Shells under Uniform External Pressure, Mem. Fac. Technol. Kanazawa Univ., № 3, 1954.

14. W. A. Nash. Buckling of Thin Cylindrical Shells Subject to Hydrostatic Pressure, Journ. Aeron. Sci., vol. 21, № 5, 1954.

15. D. F. Windenburg, Ch. Trilling. Collapse by Instability of Thin Cylindrical Shells under External Pressure, Trans. ASME, m. 56, № 11, 1934.

Поступила 24.VIII 1959 г.

И. В. Свирский, Н. К. Галимов

О СВЕДЕНИИ РАСЧЕТА
ДВУХСЛОЙНЫХ И МНОГОСЛОЙНЫХ ОБОЛОЧЕК
К РАСЧЕТУ ОДНОСЛОЙНЫХ ОБОЛОЧЕК

В работе И. В. Королева [1], а несколько позже в работе Э. Л. Аксельрада [2] рассматривается способ сведения задач расчета многослойных оболочек к задаче расчета однородных оболочек для того случая, когда коэффициенты Пуассона слоев различаются между собой мало. В настоящей заметке для случая малых прогибов пологих оболочек предлагается способ сведения расчета без указанного ограничения.

1. Отнесем поверхность сая пологой оболочки к системе координат x и y . Пусть δ_1 и δ_2 — толщины внутреннего и внешнего слоев оболочки, E_1 и E_2 — их модули упругости, G_1 и G_2 — модули сдвига, μ_1 и μ_2 — коэффициенты Пуассона слоев оболочки.

Введем обозначения:

$$K_1 = E_1 \delta_1 / (1 - \mu_1^2); \quad K_2 = E_2 \delta_2 / (1 - \mu_2^2); \quad B_1 = K_1 + K_2; \quad B_2 = \mu_1 K_1 + \mu_2 K_2.$$

$$2C_1 = K_1 \delta_1 - K_2 \delta_2; \quad 2C_2 = \mu_1 K_1 \delta_1 - \mu_2 K_2 \delta_2; \quad 3D_1 = K_1 \delta_1^2 + K_2 \delta_2^2. \quad (1.1)$$

$$3D_2 = \mu_1 K_1 \delta_1^2 + \mu_2 K_2 \delta_2^2; \quad 3D_3 = G_1 \delta_1^2 + G_2 \delta_2^2; \quad G = G_1 \delta_1 + G_2 \delta_2;$$

$$2\Phi = G_1 \delta_1^2 - G_2 \delta_2^2.$$

Обозначим через N_1 , T_1 — нормальные и касательные усилия в сечении $x = \text{const}$; M_1 , H_1 — изгибающий и крутящий моменты в том же сечении, а через N_2 , T_2 , M_2 , H_2 — аналогичные величины в сечении $y = \text{const}$. Далее пусть ε_1 , ε_2 и γ_{12} суть составляющие тензора тангенциальной деформации поверхности приведения, а \varkappa_1 , \varkappa_2 и \varkappa_{12} — составляющие тензора изгибной деформации. Тогда, если принять гипотезу Кирхгофа—Лява, то при малых деформациях оболочки имеют место такие соотношения упругости:

$$N_1 = B_1 \varepsilon_1 + B_2 \varepsilon_2 - C_1 \varkappa_1 - C_2 \varkappa_2, \quad M_1 = C_1 \varepsilon_1 + C_2 \varepsilon_2 - D_1 \varkappa_1 - D_2 \varkappa_2,$$

$$N_2 = B_2 \varepsilon_1 + B_1 \varepsilon_2 - C_2 \varkappa_1 - C_1 \varkappa_2, \quad M_2 = C_2 \varepsilon_1 + C_1 \varepsilon_2 - D_2 \varkappa_1 - D_1 \varkappa_2, \quad (1.2)$$

$$T_1 = T_2 = T = G \gamma_{12}, \quad H_1 = -H_2 = H = \Phi \gamma_{12} - 2D_3 \varkappa_{12}.$$

Определив ε_1 , ε_2 и γ_{12} через N_1 , N_2 и T и подставив их в соотношения для M_1 , M_2 и H , будем иметь:

$$M_1 = C_1^* N_1 + C_2^* N_2 - D_1^* \varepsilon_1 - D_2^* \varepsilon_2; \quad H = \Phi^* T - 2D_3^* \gamma_{12}, \quad (1.3)$$

$$M_2 = C_2^* N_1 + C_1^* N_2 - D_2^* \varepsilon_1 - D_1^* \varepsilon_2,$$

где $C_1^* = (B_1 C_1 - B_2 C_2) / (B_1^2 - B_2^2)$; $C_2^* = (B_1 C_2 - B_2 C_1) / (B_1^2 - B_2^2)$; $\Phi^* = \Phi / G$, $D_1^* = D_1 - C_1 C_1^* - C_2 C_2^*$; $D_2^* = D_2 - C_1 C_2^* - C_2 C_1^*$; $D_3^* = D_3 - \Phi^2 / G$. (1.4)

Обозначим через N_1^0 , N_2^0 и T^0 начальные мембранные усилия до деформации оболочки. Изменения мембранных напряжений при деформации оболочки выражаются через функцию напряжения так:

$$N_1 = \frac{\partial^2 F}{\partial y^2}, \quad N_2 = \frac{\partial^2 F}{\partial x^2}, \quad T = -\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} \quad (1.5)$$

Тогда первые два уравнения тождественно удовлетворяются [3], а третье уравнение и уравнение неразрывности деформаций приводятся при использовании очевидных соотношений

$$C_2^* = C_1^* - \Phi^*, \quad D_1^* = D_2^* + 2D_3^*; \quad 2B_1 / (B_1^2 - B_2^2) = (1/G) - 2B_2 / (B_1^2 - B_2^2)$$

$$D_1^* \Delta \Delta w - C_2^* \Delta \Delta F - \frac{F_{yy}}{R_1} - N_1^0 w_{xx} - \frac{F_{xx}}{R_2} - N_2^0 w_{yy} - 2T^0 w_{xy} - P_z = 0, \quad (1.7)$$

$$B_1 \Delta \Delta F / (B_1^2 - B_2^2) + C_2^* \Delta \Delta w + \frac{w_{xx}}{R_2} + \frac{w_{yy}}{R_1} = 0. \quad (1.8)$$

Этот результат был получен независимо от нас Б. Г. Газизовым и А. В. Саченковым.

2. Введем функцию

$$F^* = F + \omega w,$$

$$\omega = C_2^* (B_1^2 - B_2^2) / B_1. \quad (2.1)$$

$$F = F^* - \omega w. \quad (2.2)$$

Подставляя (2.2) в (1.8), имеем:

$$B_1 \Delta \Delta F^* / (B_1^2 - B_2^2) + \frac{w_{xx}}{R_2} + \frac{w_{yy}}{R_1} = 0. \quad (2.3)$$

$$\Delta \Delta F^* - \frac{F_{yy}^*}{R_1} - \frac{F_{xx}^*}{R_2} - \left(N_1^0 - \frac{2\omega}{R_2} \right) w_{xx} - \left(N_2^0 - \frac{2\omega}{R_1} \right) w_{yy} - 2T^0 w_{xy} - P_z = 0. \quad (2.4)$$

Подставляя (2.2) в (1.7) и используя (2.4), получаем

$$(D_1^* + C_2^* \omega) \Delta \Delta w - \frac{F_{yy}^*}{R_1} - \frac{F_{xx}^*}{R_2} - \left(N_1^0 - \frac{2\omega}{R_2} \right) w_{xx} - \left(N_2^0 - \frac{2\omega}{R_1} \right) w_{yy} - 2T^0 w_{xy} - P_z = 0. \quad (2.5)$$

Сравнивая уравнения (2.4) и (2.5) с аналогичными уравнениями для однородных оболочек, имеющими вид

$$\Delta \Delta F' = -E' h' \left(\frac{w_{xx}}{R_2} + \frac{w_{yy}}{R_1} \right), \quad (2.6)$$

$$\frac{E h'^3}{12(1-\mu^2)} \Delta \Delta w - \frac{F_{yy}'}{R_1} - \frac{F_{xx}'}{R_2} - N_1^0 w_{xx} - N_2^0 w_{yy} - 2T^0 w_{xy} - P_z = 0, \quad (2.7)$$

легко заметить, что они будут тождественны, если будут выполняться равенства:

$$E' h' = (B_1^2 - B_2^2) / B_1^2; \quad \frac{E' h'^3}{12(1-\mu^2)} = (D_1^* + C_2^* \omega), \quad (2.8)$$

$$N_1^0 = \left(N_1^0 - \frac{2\omega}{R_2} \right); \quad N_2^0 = \left(N_2^0 - \frac{2\omega}{R_1} \right); \quad T^0 = T^0. \quad (2.9)$$

Определим из уравнений (2.8) выражение для E' и h' :

$$h' = \sqrt{\frac{12(D_1^* + C_2^* \omega)(1-\mu^2)B_1}{(B_1^2 - B_2^2)}}; \quad E' = \sqrt{\frac{(B_1^2 - B_2^2)^3}{12(D_1^* + C_2^* \omega)(1-\mu^2)B_1^3}}. \quad (2.10)$$

Из предыдущего следует, что определение устойчивости или прогибов двухслойных оболочек непосредственно сводится к исследованию устойчивости или прогибов однослойной оболочки, имеющей толщину и модуль упругости, определяемые по формулам (2.10) при начальных напряжениях (2.9) и соответствующих граничных условиях.

Эти условия будут в некоторых случаях совпадать с граничными условиями для двухслойной оболочки. Это будет, например, в случае свободного защемления оболочки, когда на краях обращаются в нуль прогибы и углы поворота и добавочные мембранные усилия, действующие на краю оболочки, то есть

$$w = \frac{\partial w}{\partial n} = 0, \quad N_n = T_n = 0. \quad (3.1)$$

Эти усилия с помощью местной системы координат, у которой одна из координатных линий $\alpha_2 = 0$ является краем оболочки, выражаются следующим образом [4]:

$$N_n = \frac{1}{A_2} \frac{\partial}{\partial \alpha_2} \left(\frac{1}{A_2} \frac{\partial F}{\partial \alpha_2} \right) - \frac{1}{A_1 A_2} \frac{\partial A_2}{\partial \alpha_1} \frac{1}{A_1} \frac{\partial F}{\partial \alpha_1} = 0. \quad (3.2)$$

$$T_n = \frac{1}{A_1 A_2} \left(\frac{\partial^2 F}{\partial \alpha_1 \partial \alpha_2} - \frac{1}{A_1} \frac{\partial A_1}{\partial \alpha_2} \frac{\partial F}{\partial \alpha_1} - \frac{1}{A_2} \frac{\partial A_2}{\partial \alpha_1} \frac{\partial F}{\partial \alpha_2} \right) = 0. \quad (3.3)$$

Последние условия выполняются, если

$$F = 0, \quad \partial F / \partial \alpha_1 = 0. \quad (3.4)$$

Уравнения (3.4) по форме совпадают с первыми двумя условиями (3.1) для w .

Умножим первые два уравнения (3.1) на ω и сложим с (3.4). Получим, что функция $F^* = F + \omega w$ удовлетворяет тем же граничным условиям, что и функция напряжений F' для однородной оболочки: $F^* = 0, \quad \partial F^* / \partial \alpha_1 = 0$.

Граничные условия будут также совпадать и для случая свободного опирания по краям цилиндрической оболочки на жесткие в своей плоскости тонкие диафрагмы, когда на краях оболочки выполняются условия

$$w = 0, \quad M_1 = 0; \quad N_1 = 0, \quad \varepsilon_2 = 0. \quad (3.5)$$

Из (1.2), учитывая, что у края $z_2 = w_{yy} = 0$, имеем:

$$0 = B_1 \epsilon_1 - C_1 z_1; \quad 0 = C_1 \epsilon_1 - D_1 z_1,$$

отсюда

$$\epsilon_1 = 0, \quad z_1 = 0; \quad N_1 = N_2 = 0; \quad F_{xx} = F_{yy} = 0. \quad (3.6)$$

Из первых двух уравнений (3.5) и последних двух уравнений (3.6) получаем, что и в этом случае функция $F^* = F + \omega w$ удовлетворяет тем же граничным условиям, что и функция напряжений F' для однослойной оболочки $F_{xx}^* = F_{yy}^* = 0$.

Для случая плоских свободно заземленных слоистых пластин ($R_1 = R_2 = \infty$) любого очертания и для свободно опертых по краям прямоугольных слоистых пластин расчет сводится к расчету однослойных пластин с теми же начальными напряжениями и с толщиной и модулем упругости, определяемыми формулами (2.10).

Все предыдущие результаты непосредственно переносятся на многослойные оболочки, если вместо (1.1) использовать формулы (4.10) статьи Э. Л. Аксельрада [2].

ЛИТЕРАТУРА

1. Королев В. И. Тонкие двухслойные пластинки и оболочки. Инженерный сборник, т. 22, 1955.
2. Аксельрад Э. Л. К теории неоднородных изотропных оболочек. Известия АН СССР, № 6, 1958.
3. Григолюк Э. И. Тонкие биметаллические оболочки и пластины. Инженерный сборник, т. 17, 1953.
4. Новожилов В. В. Теория тонких оболочек. Судпромгиз, 1951, стр. 20.

Поступила 23.XI 1959 г.

А. В. Саченков

К РАСЧЕТУ ДВУХСЛОЙНЫХ ОБОЛОЧЕК

В заметке выясняются условия, при которых расчет двухслойных ортотропных оболочек сводится к расчету однослойных ортотропных оболочек постоянной толщины. Доказывается, что основные соотношения теории биметаллических оболочек, выведенные в статье [5], при коэффициентах Пуассона слоев, отличающихся друг от друга на $V \epsilon$ (ϵ — деформация на пределе упругости), могут быть получены из теории, предложенной в работе [2] Э. И. Григолюка. Введение в рассмотрение приведенного коэффициента Пуассона μ является оправданным, если соответствующие коэффициенты для обоих слоев мало отличаются друг от друга. В задачах устойчивости оболочек погрешность от такого подхода будет меньше, чем в задачах на определение деформаций и напряжений.

Обозначения: α, β — ортогональные криволинейные координаты, совпадающие с линиями кривизны основной координатной поверхности, за которую принята поверхность спая слоев [1]; E_α^m, E_β^m — модули упругости; $G_{\alpha\beta}^m$ — модули сдвига; $\nu_1^m = \nu_{\alpha\beta}^m, \nu_2^m = \nu_{\beta\alpha}^m$ — коэффициенты Пуассона (первый индекс показывает направление действия напряжения, а индекс m означает один или два штриха и указывает, что величины, помеченные этим индексом, относятся соответственно к внутреннему и внешнему слоям оболочки); h_1, h_2 — толщины внутреннего и внешнего слоев; T_1, T_2, S, M_1, M_2, H — внутренние усилия и моменты, которые связаны с деформациями $\epsilon_1, \epsilon_2, \omega$ и искривлениями κ_1, κ_2, τ основной координатной поверхности следующими соотношениями [1], [2]

$$\begin{aligned} T_1 &= C_{11}\epsilon_1 + C_{12}\epsilon_2 + K_{11}\kappa_1 + K_{12}\kappa_2, \\ T_2 &= C_{22}\epsilon_2 + C_{12}\epsilon_1 + K_{22}\kappa_2 + K_{12}\kappa_1, \\ S &= C_{66}\omega + K_{66}\tau, \quad H = D_{66}\tau + K_{66}\omega, \\ M_1 &= D_{11}\kappa_1 + D_{12}\kappa_2 + K_{11}\epsilon_1 + K_{12}\epsilon_2, \\ M_2 &= D_{22}\kappa_2 + D_{12}\kappa_1 + K_{22}\epsilon_2 + K_{12}\epsilon_1, \end{aligned} \quad (0.0)$$

где

$$C_{ik} = (h_2 B_{ik}'' + h_1 B_{ik}'), \quad K_{ik} = \frac{1}{2} (h_2^2 B_{ik}'' - h_1^2 B_{ik}'), \quad D_{ik} = \frac{1}{3} (h_2^3 B_{ik}'' + h_1^3 B_{ik}'), \quad (0.1)$$

$$B_{11}^m = \frac{E_\alpha^m}{1 - \nu_1^m \nu_2^m}, \quad B_{22}^m = \frac{E_\beta^m}{1 - \nu_1^m \nu_2^m}, \quad B_{12}^m = \frac{\nu_2^m E_\alpha^m}{1 - \nu_1^m \nu_2^m} = \frac{\nu_1^m E_\beta^m}{1 - \nu_1^m \nu_2^m}, \quad B_{66}^m = G_{\alpha\beta}^m.$$

Кроме того, будем пользоваться следующими обозначениями:

$$\Delta = C_{11}C_{22} - C_{12}^2, \quad \gamma_1 = K_{11}C_{22} - K_{12}C_{12}, \quad \gamma_2 = K_{12}C_{11} - K_{11}C_{12},$$

$$\gamma_1^* = K_{12}C_{22} - K_{22}C_{12}, \quad \gamma_2^* = K_{22}C_{11} - K_{12}C_{12}, \quad D' = \beta_1 = D_{11} - \frac{K_{11}\gamma_1 + K_{12}\gamma_2}{\Delta},$$

$$\beta_2 = D_{12} - \frac{K_{11}\gamma_1^* + K_{12}\gamma_2^*}{\Delta}, \quad \beta_1^* = D_{12} - \frac{K_{22}\gamma_2 + K_{12}\gamma_1}{\Delta}, \quad \beta_2^* = D_{22} - \frac{K_{22}\gamma_2^* + K_{12}\gamma_1^*}{\Delta},$$

(0.2)

$$\lambda_1 = \frac{1}{2} \frac{(\Delta - 2C_{00} \cdot C_{12})}{C_{11} \cdot C_{00}}, \quad \lambda_2 = \frac{C_{22}}{C_{11}}, \quad K' = \frac{\Delta}{C_{11}}, \quad \lambda_{0,0} = \frac{\gamma_2}{C_{11}},$$

$$\lambda_{1,0} = \frac{1}{2} \left(\gamma_1 + \gamma_2^* - \frac{2K_{00} \cdot \Delta}{C_{00}} \right) : C_{11}, \quad \lambda_{2,0} = \frac{\gamma_1^*}{C_{11}}, \quad \delta^* = \frac{D_{00}C_{00} - K_{00}^2}{C_{00}},$$

$$\delta_1 = \frac{1}{2} (\beta_1^* + \beta_2 + 4\delta^*) : \beta_1, \quad \delta_2 = \frac{\beta_2^*}{\beta_1}, \quad \delta_{0,0} = \frac{\gamma_2}{\beta_1 \cdot \Delta},$$

$$\delta_{1,0} = \frac{1}{2} \left(\gamma_1 + \gamma_2^* - \frac{2K_{00} \cdot \Delta}{C_{00}} \right) : (\beta_1 \Delta), \quad \delta_{2,0} = \frac{\gamma_1^*}{\beta_1 \cdot \Delta}, \quad \nu = B_{11}'' B_{22}'' (1 - \mu_2'' \cdot \mu_1''),$$

$$\beta = B_{11}' B_{22}' (1 - \mu_2' \mu_1'), \quad \gamma = B_{11}'' B_{22}' (1 - \mu_2'' \mu_1') + B_{11}' B_{22}'' (1 - \mu_2' \mu_1''),$$

$$\alpha^* = G_{12}' \left(\alpha + \frac{1}{2} \gamma \right) - G_{12}'' \left(\beta + \frac{1}{2} \gamma \right), \quad \beta^* = \alpha G_{12}' - \frac{1}{2} G_{12}'' \gamma,$$

$$\gamma^* = \frac{1}{2} G_{12}' \gamma - \beta G_{12}''.$$

§ 1. Дифференциальные уравнения равновесия

Деформации $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \omega$ и искривления κ_1, κ_2, τ определяются по формулам

$$\varepsilon_1 = u_x - \frac{w}{R_1} + \frac{1}{2} w_x^2, \quad \varepsilon_2 = v_y - \frac{w}{R_2} + \frac{1}{2} w_y^2, \quad \omega = u_y + v_x + w_x w_y,$$

$$\kappa_1 = -w_{xx}, \quad \kappa_2 = -w_{yy}, \quad \tau = -2w_{xy},$$

(1.1)

где R_1, R_2 — радиусы кривизны поверхности сая; u, v, w — соответственно перемещения точки поверхности сая в направлении осей x, y, z ; индексы x, y обозначают частные производные. Пользуясь (0.0), (1.1), а также обозначениями (0.1), (0.2), уравнение совместности деформации, а также уравнение равновесия проекций сил на нормаль к поверхности сая оболочки можно привести к виду:

$$f_{xxxx} + 2\lambda_1 f_{xxyy} + \lambda_2 f_{yyyy} + \lambda_{0,0} w_{xxx} + 2\lambda_{1,0} w_{xxy} + \lambda_{2,0} w_{yyy} +$$

$$+ K' \left(\frac{1}{R_2} \cdot w_{xx} + \frac{1}{R_1} w_{yy} + w_{xx} w_{yy} - w_{xy}^2 \right) = 0, \quad (1.2)$$

$$w_{xxxx} + 2\delta_1 w_{xxyy} + \delta_2 w_{yyyy} - \delta_{0,0} f_{xxx} - 2\delta_{1,0} f_{xxy} - \delta_{2,0} f_{yyy} -$$

$$- \frac{1}{D'} \left\{ \left(\frac{1}{R_1} + w_{xx} \right) f_{yy} + \left(\frac{1}{R_2} + w_{yy} \right) f_{xx} - 2f_{xy} w_{xy} - q \right\} = 0.$$

Пользуясь формулами (0.1), (0.2), находим

$$\lambda_{0,0} = \frac{(\mu_2'' - \mu_2')}{2} \cdot \frac{B_{11}' B_{11}'' h_1 h_2 (h_1 + h_2)}{C_{11}}, \quad \lambda_{2,0} = \frac{(\mu_1'' - \mu_1')}{2} \cdot \frac{B_{22}' B_{22}'' h_1 h_2 (h_1 + h_2)}{C_{11}},$$

$$\delta_{0,0} = \frac{(\mu_2'' - \mu_2')}{2} \cdot \frac{B_{11}' B_{11}'' h_1 h_2 (h_1 + h_2)}{\beta_1 \Delta}, \quad \delta_{2,0} = \frac{(\mu_1'' - \mu_1')}{2} \cdot \frac{B_{22}' B_{22}'' h_1 h_2 (h_1 + h_2)}{\beta_1 \Delta}, \quad (1.3)$$

$$\lambda_{1,0} = \frac{1}{2} \frac{h_1 h_2 [h_1 h_2 \alpha^* + h_2^2 \beta^* + h_1^2 \gamma^*]}{C_{11} \cdot C_{00}}, \quad \delta_{1,0} = \frac{1}{2} \frac{h_1 h_2 [h_1 h_2 \alpha^* + h_2^2 \beta^* + h_1^2 \gamma^*]}{C_{00} \cdot \beta_1 \cdot \Delta}.$$

Отсюда следует, что расчет двухслойных ортотропных оболочек на указанном этапе сводится к расчету однослойных анизотропных оболочек постоянной толщины, если соблюдаются следующие условия приведения

$$\mu_2'' = \mu_2', \quad \mu_1'' = \mu_1', \quad \frac{G_{12}''}{G_{12}'} = \frac{\gamma}{2\beta} = \frac{2\alpha}{\gamma}. \quad (1.4)$$

Для биметаллических оболочек

$$\lambda_{0,0} = \lambda_{1,0} = \lambda_{2,0}, \quad \delta_{0,0} = \delta_{1,0} = \delta_{2,0}$$

и условия приведения (1.4), как это следует из формул (1.3), выражают требование равенства коэффициентов Пуассона слоев оболочки. Отметим, что условия (1.4) для двухслойных ортотропных оболочек являются более жесткими, чем аналогичные условия для биметаллических оболочек. Если

$$\mu_2'' - \mu_2' \sim \sqrt{\varepsilon}, \quad \mu_1'' - \mu_1' \sim \sqrt{\varepsilon} \quad (1.5)$$

и при этом величины $\lambda_{0,0}, \lambda_{1,0}, \lambda_{2,0}$, а также величины $\delta_{0,0}, \delta_{1,0}, \delta_{2,0}$ являются соизмеримыми между собой, то расчет двухслойной оболочки, как однослойной, будет содержать погрешность $\sqrt{\varepsilon}$ по сравнению с единицей. При соблюдении условий (1.5) может оказаться, что $\lambda_{1,0} \gg \lambda_{2,0}$ и $\delta_{1,0} \gg \delta_{2,0}$. В этом случае двухслойные оболочки, например оболочки нулевой Гауссовой кривизны, можно рассчитывать как однослойные, если они не являются короткими, а поверхностная нагрузка носит плавный характер [4].

§ 2. О двух подходах к теории биметаллических оболочек

Общие уравнения равновесия биметаллических пластинок и оболочек получены в работе [2]. В этой работе за исходную принята поверхность соприкосновения слоев, относительно которой сформулированы основные гипотезы тонкостенности оболочек.

При такой постановке упругие усилия и моменты зависят как от изменений кривизны и кручения, так и от компонентов деформации поверхности сая слоев.

В работе [5] предлагается упрощенная теория тонких двухслойных пластинок и оболочек. За исходную поверхность в ней принимается нейтральная поверхность, положение которой определяется из условия независимости касательных усилий от искривлений κ_1, κ_2, τ . При этом вводится также понятие о некотором приведенном коэффициенте Пуассона. В такой постановке теория биметаллических

оболочек сводится к теории однослойных оболочек, однако пределы ее применимости, по нашему мнению, оказываются обозначенными не вполне четко.

Представляется интересным установить связь между этими двумя подходами к теории биметаллических оболочек.

Будем исходить из основных соотношений (0.0), предложенных в работе [2], предполагая при этом, что $\mu_1 - \mu_2 \sim \sqrt{\varepsilon}$. Полагая в (0.0) $M_1 = M_2 = H = 0$, $\alpha_1 = \alpha_2 = \tau = 0$, имеем

$$T_1 = C_{11} \left(\varepsilon_1 + \frac{C_{12}}{C_{11}} \varepsilon_2 \right), \quad T_2 = C_{22} \left(\varepsilon_2 + \frac{C_{12}}{C_{22}} \varepsilon_1 \right).$$

Для биметаллических оболочек

$$C_{11} = C_{22} = \frac{E_1 h_1}{1 - \mu_1^2} + \frac{E_2 h_2}{1 - \mu_2^2}, \quad C_{12} = \mu_1 \frac{E_1 h_1}{1 - \mu_1^2} + \mu_2 \frac{E_2 h_2}{1 - \mu_2^2}, \quad (2.1)$$

и приведенный коэффициент Пуассона μ , равный

$$\mu = \frac{C_{12}}{C_{11}} = \frac{\mu_1 K_1 + \mu_2 K_2}{K_1 + K_2}, \quad K_1 = \frac{E_1 h_1}{1 - \mu_1^2}, \quad K_2 = \frac{E_2 h_2}{1 - \mu_2^2}, \quad (2.2)$$

оказывается точно совпадающим с соответствующим приведенным коэффициентом работы [5].

Для биметаллических оболочек коэффициенты $\lambda_{00}, \dots, \delta_{20}$ с точностью до постоянного множителя равны

$$\lambda_{0,0} = \lambda_{1,0} = \lambda_{2,0} = (\mu_2 - \mu_1) C_0, \quad \delta_{0,0} = \delta_{1,0} = \delta_{2,0} = (\mu_2 - \mu_1) C_1.$$

Если $(\mu_2 - \mu_1) \sim \sqrt{\varepsilon}$, то члены вида $K_{11}\alpha_1, \dots, K_{66}\tau$, присутствующие в выражениях для усилий T_1, T_2, S , могут быть отброшены в уравнении совместности деформаций, в котором будет допускаться, таким образом, погрешность порядка $\sqrt{\varepsilon}$ по сравнению с единицей. По внешнему виду это уравнение будет совпадать с уравнением для однослойной оболочки. Следовательно, связь между усилиями T_1, T_2, S и деформациями $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \omega$ можно будет представить в виде

$$T_1 = B(\varepsilon_1 + \mu\varepsilon_2), \quad T_2 = B(\varepsilon_2 + \mu\varepsilon_1), \quad S = \frac{B(1 - \mu)}{2} \omega, \quad (2.3)$$

где μ определяется из (2.2).

Составляя условие совместности деформаций на основании (2.3) и сравнивая коэффициенты полученного уравнения с коэффициентами первого из уравнений (1.2), находим

$$B = K' / (1 - \mu^2). \quad (2.4)$$

При коэффициентах Пуассона, удовлетворяющих неравенству

$$\max(\mu_1, \mu_2) \leq 0,3,$$

с погрешностью 1,5–2% величина (2.4) совпадает с аналогичной величиной, которая используется в работе [5].

Аналогичными рассуждениями можно показать, что выражения для изгибающих и крутящего моментов можно представить в виде

$$M_1 = D'(x_1 + \mu x_2), \quad M_2 = D'(x_2 + \mu x_1), \quad H = \frac{D'(1 - \mu)}{2}, \quad (2.5)$$

где D' приводится в обозначениях (0.2) и на 1,5–2% отличается от соответствующей величины, которая используется в работе [5].

Отметим, что при определении напряжений и деформаций на основе упрощенных соотношений (2.3), (2.5) будет допускаться погрешность большая, чем в задачах устойчивости оболочек, так как члены вида $K_{11}\alpha_1, \dots, K_{66}\tau$ в выражениях (0.0) для усилий и моментов имеют одинаковый порядок с членами $C_{11}\varepsilon_1, \dots, D_{66}\tau$. Если

$$\mu_1 - \mu_2 \sim \sqrt{\varepsilon} \quad \text{и} \quad E_1 h_1^2 \neq E_2 h_2^2,$$

то использование в этих целях соотношений (2.3), (2.5) может иногда дать погрешность, по-видимому, превосходящую $\sqrt{\varepsilon}$.

Следует также отметить, что для задач о малом изгибе и устойчивости плоских биметаллических пластин соответствующие дифференциальные уравнения (1.2) без допущения в них какой-либо погрешности приводятся к уравнениям для однослойных оболочек. Учитывая равенства

$$\lambda_1 = \lambda_2 = \delta_1 = \delta_2 = 1, \quad \lambda_{0,0} = \lambda_{1,0} = \lambda_{2,0}, \quad \delta_{0,0} = \delta_{1,0} = \delta_{2,0},$$

из первого уравнения (1.2) находим

$$\nabla^2 \nabla^2 f = -\lambda_{0,0} \nabla^2 \nabla^2 w.$$

Второе уравнение этой системы для задач устойчивости будет иметь вид

$$D'(1 + \lambda_{0,0} \delta_{0,0}) \nabla^2 \nabla^2 w - (T_{10} w_{xx} + T_{20} w_{yy} + 2S_{10} w_{xy}) = 0, \quad (2.6)$$

где T_{10}, T_{20}, S_{10} — мембранные усилия до потери устойчивости. При $\mu_1 - \mu_2 \sim \sqrt{\varepsilon}$ величина $\lambda_{0,0} \delta_{0,0} \sim \varepsilon$. Пренебрегая в уравнении (2.6) ε по сравнению с единицей, получим

$$D' \nabla^2 \nabla^2 w - (T_{10} w_{xx} + T_{20} w_{yy} + 2S_{10} w_{xy}) = 0. \quad (2.7)$$

Следовательно, в задачах устойчивости плоских биметаллических пластин погрешность допущений, принятых в работе [5], будет значительно меньше, чем в задачах устойчивости оболочек. В данном случае при $\mu_1 - \mu_2 \sim \sqrt{\varepsilon}$ эта погрешность не превосходит погрешности гипотезы Кирхгофа—Лява. Уравнение, аналогичное (2.7), можно также записать и для малого изгиба плоских пластин. Оно будет совпадать с соответствующим уравнением для однослойной изотропной пластинки. Однако внешний вид этого уравнения не дает оснований утверждать, что погрешность при определении величин напряжений в биметаллической пластинке при расчете ее как однослойной с приведенными жесткостью D' и коэффициентом Пуассона μ будет меньше $\sqrt{\varepsilon}$.

§ 3. Устойчивость конической оболочки при внешнем давлении

Будем предполагать, что условия приведения (1.4) соблюдаются с погрешностью порядка $\sqrt{\varepsilon}$. Критическую нагрузку для круговой конической оболочки, подверженной действию равномерного внешнего давления, можно определить из уравнения (1.18) статьи [3], вставляя в него соответствующие приведенные жесткости. Применительно к рассматриваемому случаю эта формула примет вид

$$\sigma'_k = \left\{ [m_1^4 + 2\delta_1 m_1^2 n_1^2 + 8\delta_1 n_1^2 + \delta_2 (n_1^2 - \text{ctg}^2 \gamma)^2 + \delta_2 (-2n_1^2 + m_1^2 + 5)] + \right. \\ \left. + \eta_1^2 \frac{(m_1^2 + 9)^2}{[m_1^4 + 2\lambda_1 m_1^2 n_1^2 + \lambda_2 (n_1^4 - 2n_1^2) + 18\lambda_1 n_1^2 + 10\lambda_2 + \lambda_2 m_1^2 - 17m_1^2 - 235]} \right\} : \\ : \left(n_1^2 - \text{ctg}^2 \gamma + \frac{m_1^2}{2} + 6,25 \right), \quad (3.1)$$

где $\lambda_1, \lambda_2, \delta_1, \delta_2$ определяются по формулам (0.2); а величины σ'_k и τ'_{11} определяются по соответствующим формулам статьи [3] заменой в последних жесткостей $K_2(1-\sigma_1\sigma_2)$, D_1 на жесткости K' и D' . Формула (3.1) является справедливой как для усеченных, так и для замкнутых в вершине круговых конических оболочек и может быть использована также для расчета подкрепленных биметаллических цилиндрических и конических оболочек.

ЛИТЕРАТУРА

1. Амбарцумян С. А. О двух методах расчета двухслойных ортотропных оболочек. Изв. АН Арм. ССР, т. X, № 2, 1957.
2. Григолюк Э. И. Тонкие биметаллические оболочки и пластины. Инж. сборник, т. 17, 1953.
3. Саченков А. В. Об устойчивости конических оболочек кругового сечения под действием равномерного внешнего давления. Изв. Каз. филиала АН СССР, сер. физ.-мат. и техн. наук, № 12, 1958.
4. Власов В. З. Общая теория оболочек. Гостехиздат, 1949.
5. Королев В. И. Тонкие двухслойные пластинки и оболочки. Инж. сборник, т. XXII, 1955.

Поступила 16.VI 1959 г.

А. В. Саченков

НЕКОТОРЫЕ ВОПРОСЫ ПРОЧНОСТИ И УСТОЙЧИВОСТИ МНОГОСЛОЙНЫХ ОБОЛОЧЕК

В статье [1] приведены основные физические соотношения для расчета двухслойных ортотропных оболочек.

Ниже выводятся более простые зависимости между усилиями и деформациями, а также выясняются условия, при выполнении которых к расчету многослойных анизотропных оболочек может быть применена теория однослойных анизотропных оболочек. Показывается, что расчет многослойных арок при любых соотношениях между упругими характеристиками слоев в линейной и нелинейной постановках сводится к расчету однослойных.

1. Связь между усилиями и деформациями

Установим вначале соотношения между усилиями и деформациями для двухслойной ортотропной оболочки, выбирая в оболочке такую поверхность приведения, относительно которой эти зависимости будут иметь наиболее простой вид [2]. Условимся при этом величинам, относящимся к внешнему слою, приписывать индекс штрих, к внутреннему — два штриха. За положительное направление нормали будем принимать направление к центру кривизны. Выражения для усилий и моментов имеют вид

$$T_1 = \int_{z_0-H}^{z_0-h'} X'_x dz + \int_{z_0-h''}^{z_0} X''_x dz, \quad T_2 = \int_{z_0-H}^{z_0-h'} Y'_y dz + \int_{z_0-h''}^{z_0} Y''_y dz,$$

$$S = \int_{z_0-H}^{z_0-h'} X'_y dz + \int_{z_0-h''}^{z_0} X''_y dz, \quad M_1 = \int_{z_0-H}^{z_0-h'} X'_x z dz + \int_{z_0-h''}^{z_0} X''_x z dz, \quad (1.1)$$

$$M_2 = \int_{z_0-H}^{z_0-h'} Y'_y z dz + \int_{z_0-h''}^{z_0} Y''_y z dz, \quad H = \int_{z_0-H}^{z_0-h'} X'_y z dz + \int_{z_0-h''}^{z_0} X''_y z dz,$$

где X_x, Y_y, X_y — напряжения в слое оболочки; H, h — соответственно общая толщина оболочки и толщина слоя; z_0, z — расстояния от поверхности приведения до внутренней ограничивающей поверхности и переменное расстояние от той же поверхности по толщине оболочки. Если в качестве исходного допущения принять гипотезу

Кирхгофа — Лява, то напряжения и деформации будут связаны следующими равенствами [4]

$$X_x = b_{11}\varepsilon_1 + b_{12}\varepsilon_2 - z(b_{11}\varkappa_1 + b_{12}\varkappa_2), \quad Y_y + b_{12}\varepsilon_1 + b_{22}\varepsilon_2 - z(b_{12}\varkappa_1 + b_{22}\varkappa_2), \\ X_y = b_{13}\omega - 2b_{13}\tau \cdot z, \quad (1.2)$$

при этом

$$b_{11} = E_1 : (1 - \sigma_1\sigma_2), \quad b_{12} = E_1\sigma_2 : (1 - \sigma_1\sigma_2) = E_2\sigma_1 : (1 - \sigma_1\sigma_2), \\ b_{22} = E_2 : (1 - \sigma_1\sigma_2), \quad b_{13} = \mu_3. \quad (1.3)$$

В этих соотношениях $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \omega, \varkappa_1, \varkappa_2, \tau$ — соответственно деформации и искривления поверхности приведения; $E_1, E_2, \sigma_1, \sigma_2$ — модули упругости и коэффициенты Пуассона, связанные соотношением $E_1\sigma_2 = E_2\sigma_1$; μ_3 — модуль сдвига.

Внося (1.2) в (1.1), находим

$$T_1 = C_{11}\varepsilon_1 + C_{12}\varepsilon_2 - K_{11}\varkappa_1 - K_{12}\varkappa_2, \quad T_2 = C_{12}\varepsilon_1 + C_{22}\varepsilon_2 - K_{12}\varkappa_1 - K_{22}\varkappa_2, \\ S = C_{66}\omega - 2K_{66}\tau, \quad H = K_{66}\omega - 2D_{66}\tau, \quad (1.4)$$

$$M_1 = K_{11}\varepsilon_1 + K_{12}\varepsilon_2 - D_{11}\varkappa_1 - D_{12}\varkappa_2, \quad M_2 = K_{12}\varepsilon_1 + K_{22}\varepsilon_2 - D_{12}\varkappa_1 - D_{22}\varkappa_2,$$

где обозначено

$$C_{11} = b'_{11}h' + b''_{11}h'', \quad C_{12} = b'_{12}h' + b''_{12}h'', \\ C_{22} = b'_{22}h' + b''_{22}h'', \quad C_{66} = b'_{13}h' + b''_{13}h'',$$

$$K_{11} = \frac{1}{2} [b'_{11}h'z_{0,1} + b''_{11}h''z_{0,2}], \quad K_{12} = \frac{1}{2} [b'_{12}h'z_{0,1} + b''_{12}h''z_{0,2}],$$

$$K_{22} = \frac{1}{2} [b'_{22}h'z_{0,1} + b''_{22}h''z_{0,2}], \quad K_{66} = \frac{1}{2} [b'_{13}h'z_{0,1} + b''_{13}h''z_{0,2}],$$

$$D_{11} = \frac{1}{3} [b'_{11}z_1^3 + b''_{11}z_2^3], \quad D_{12} = \frac{1}{3} [b'_{12}z_1^3 + b''_{12}z_2^3], \quad (1.5)$$

$$D_{22} = \frac{1}{3} [b'_{22}z_1^3 + b''_{22}z_2^3], \quad D_{66} = \frac{1}{3} [b'_{13}z_1^3 + b''_{13}z_2^3].$$

Здесь $z_{0,1}, z_{0,2}, z_1^3, z_2^3$ определяются по формулам

$$z_{0,1} = 2z_0 - 2h'' - h', \quad z_{0,2} = 2z_0 - h'',$$

$$z_1^3 = [(z_0 - h'')^3 - (z_0 - h')^3], \quad z_2^3 = [z_0^3 - (z_0 - h'')^3]. \quad (1.6)$$

В приведенных соотношениях параметр z_0 следует определять, приравняв один из коэффициентов K_{ij} нулю. Для анизотропных оболочек соотношения (1.4) будут иметь наиболее простой вид, если $K_{12} = 0$. Остальные коэффициенты K_{11}, K_{22}, K_{66} будут обращаться в нуль, если выполняются равенства

$$\sigma'_1 = \sigma''_1, \quad \sigma'_2 = \sigma''_2, \quad \mu'_3 = \mu''_3. \quad (1.7)$$

В этом случае, а также тогда, когда разности $(\sigma'_1 - \sigma''_1), (\sigma'_2 - \sigma''_2), (\mu'_3 - \mu''_3)$: $\mu''_3 \max$ являются величинами порядка $\sqrt{\varepsilon_p}$, где ε_p — деформация на пределе упругости, к расчету двухслойных анизотропных оболочек может быть применена теория однослойных анизотропных оболочек. При этом будет допускаться максимальная погрешность порядка $\sqrt{\varepsilon_p}$ по сравнению с единицей.

В случае биметаллических изотропных оболочек, приравняв $K_{11} = 0$, соотношениям (1.4) придадим наиболее простой вид

$$T_1 = C_{11}\varepsilon_1 + C_{12}\varepsilon_2 - K_{12}\varkappa_2, \quad T_2 = C_{12}\varepsilon_1 + C_{11}\varepsilon_2 - K_{12}\varkappa_1,$$

$$S = \frac{1}{2}(C_{11} - C_{12})\omega + K_{12}\tau, \quad H = -\frac{K_{12}}{2}\omega - (D_{11} - D_{12})\tau, \quad (1.8)$$

$$M_1 = K_{12}\varepsilon_2 - D_{11}\varkappa_1 - D_{12}\varkappa_2, \quad M_2 = K_{12}\varepsilon_1 - D_{12}\varkappa_1 - D_{11}\varkappa_2.$$

На основании этих соотношений первые два уравнения равновесия пологих оболочек, записанные в перемещениях, будут совпадать с соответствующими уравнениями для однослойных оболочек.

2. Малый изгиб и устойчивость плоских пластинок

Будем пользоваться соотношениями (1.4), полагая в них $K_{12} = 0$. Выведем вначале общие линейные уравнения устойчивости пологих оболочек, из которых, как частный случай, получим уравнения и для плоской пластинки.

В (1.8) деформации и искривления определяются по формулам

$$\varepsilon_1 = \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{w}{R_1} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2, \quad \varepsilon_2 = \frac{\partial v}{\partial y} - \frac{w}{R_2} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)^2, \\ \omega = \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial y}, \quad \varkappa_1 = \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}, \quad \varkappa_2 = \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}, \quad \tau = \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}, \quad (2.1)$$

причем u, v, w — соответственно перемещения точки поверхности приведения в направлении осей x, y, z . Исключая из $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \omega$ перемещения u, v , получим в случае линейных задач следующее уравнение совместности деформаций

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_1}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_2}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \omega}{\partial x \partial y} + \frac{1}{R_1} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{1}{R_2} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0. \quad (2.2)$$

Уравнения равновесия малого элемента в задачах устойчивости имеют вид

$$\frac{\partial T_1}{\partial x} + \frac{\partial S}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial S}{\partial x} + \frac{\partial T_2}{\partial y} = 0, \\ \frac{\partial^2 M_1}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 H}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 M_2}{\partial y^2} - \frac{T_1}{R_1} - \frac{T_2}{R_2} - T_{10} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - T_{20} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - 2S_{10} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} = 0, \quad (2.3)$$

где T_{10}, T_{20}, S_{10} — усилия в оболочке при первоначальном безмоментном состоянии. Первые два уравнения системы (2.3) будут тождественно удовлетворены, если ввести силовую функцию так, что

$$T_1 = \frac{\partial^2 F}{\partial y^2}, \quad T_2 = \frac{\partial^2 F}{\partial x^2}, \quad S = -\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y}. \quad (2.4)$$

Уравнение совместности деформаций (2.2) и третье уравнение (2.3) после необходимых преобразований с учетом (2.4) будут иметь вид

$$\frac{\partial^4 F}{\partial x^4} + 2\lambda_1 \frac{\partial^4 F}{\partial x^2 \partial y^2} + \lambda_2 \frac{\partial^4 F}{\partial y^4} - \lambda_{0,0} \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} - 2\lambda_{1,0} \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} - \lambda_{2,0} \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} + \\ + K' \left(\frac{1}{R_2} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{1}{R_1} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) = 0, \\ - \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2\delta_1 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \delta_2 \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} + \delta_{00} \frac{\partial^4 F}{\partial x^4} + 2\delta_{10} \frac{\partial^4 F}{\partial x^2 \partial y^2} + \delta_{20} \frac{\partial^4 F}{\partial y^4} - \\ - \frac{1}{D'} \left(\frac{1}{R_2} \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} + \frac{1}{R_1} \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} \right) - \frac{1}{D'} \left(T_{10} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + T_{20} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + 2S_{10} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right) = 0, \quad (2.5)$$

где обозначено

$$\Delta = C_{11}C_{22} - C_{12}^2, \quad K' = \frac{\Delta}{C_{11}}, \quad D' = D_{11} - \frac{K_{11}^2 C_{22}}{\Delta}, \quad \lambda_1 = \frac{1}{2} \frac{(\Delta - 2C_{66}C_{12})}{C_{11}C_{66}}, \\ \lambda_2 = C_{22}/C_{11}, \quad \lambda_{0,0} = C_{12}K_{11}/C_{11}, \quad \lambda_{10} = \frac{1}{2} \left(\frac{2\Delta \cdot K_{66}}{C_{11}C_{66}} - \frac{C_{22}}{C_{11}} \cdot K_{11} - K_{22} \right),$$

$$\lambda_{20} = \frac{C_{12}K_{22}}{C_{11}}, \quad \delta_1 = \frac{1}{D'} \left[D_{12} + 2D_{00} + \frac{K_{11} \cdot K_{22} \cdot C_{12}}{\Delta} - \frac{2K_{66}^2}{C_{00}} \right],$$

$$\delta_2 = \frac{1}{D'} \left(D_{22} - \frac{C_{11}K_{22}}{\Delta} \right), \quad \delta_{0,0} = \frac{C_{12} \cdot K_{11}}{\Delta \cdot D'}, \quad \delta_{1,0} = \frac{1}{2D'} \left[\frac{2K_{00}}{C_{00}} - \frac{K_{11}C_{22}}{\Delta} - \frac{K_{22}C_{11}}{\Delta} \right],$$

$$\delta_{20} = \frac{C_{12} \cdot K_{22}}{\Delta \cdot D'}. \quad (2.6)$$

В случае плоской пластинки $\frac{1}{R_1} = \frac{1}{R_2} = 0$ и уравнения (2.5) имеют

вид

$$\frac{\partial^4 F}{\partial x^4} + 2\lambda_1 \frac{\partial^4 F}{\partial x^2 \partial y^2} + \lambda_2 \frac{\partial^4 F}{\partial y^4} - \lambda_{0,0} \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} - 2\lambda_{10} \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} - \lambda_{20} \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} = 0$$

$$\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2\delta_1 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \delta_2 \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} + \delta_{0,0} \frac{\partial^4 F}{\partial x^4} + 2\delta_{10} \frac{\partial^4 F}{\partial x^2 \partial y^2} + \delta_{20} \frac{\partial^4 F}{\partial y^4} -$$

$$- \frac{1}{D'} \left(T_{10} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + T_{20} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + 2S_{10} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right) = 0. \quad (2.7)$$

В этих уравнениях $\lambda_1, \lambda_2, \delta_1, \delta_2$ являются величинами порядка единицы, а коэффициенты $\lambda_{0,0}, \dots, \delta_{0,0}, \dots$, пропорциональные разностям вида $(\sigma'_1 - \sigma''_1), (\sigma'_2 - \sigma''_2), (\mu'_3 - \mu''_3) : \mu_{3 \max}$, соответственно соизмеримы между собой, т. е.

$$\lambda_{0,0} \sim \lambda_{1,0} \sim \lambda_{2,0}, \quad \delta_{0,0} \sim \delta_{1,0} \sim \delta_{2,0}.$$

Допуская, что дифференцирование по обоим переменным не изменяет порядка функции, из первого уравнения системы (2.7) находим

$$F \sim \lambda_{0,0} w.$$

Следовательно, во втором уравнении (2.7) члены с множителями $\delta_{0,0}, \delta_{1,0}, \delta_{2,0}$ будут иметь порядок

$$\delta_{0,0} \frac{\partial^4 F}{\partial x^4} \sim \lambda_{0,0} \cdot \delta_{0,0} \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} \sim (\sigma'_1 - \sigma''_1)^2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^4}.$$

Если $(\sigma'_1 - \sigma''_1) \sim \sqrt{\varepsilon_p}$, то с погрешностью ε_p по сравнению с единицей подчеркнутые члены во втором уравнении (2.7) можно отбросить и систему уравнений заменить следующим уравнением

$$\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2\delta_1 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \delta_2 \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} - \frac{1}{D'} \left(T_{10} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + T_{20} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + 2S_{10} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right) = 0. \quad (2.8)$$

Очевидно, погрешность аналогичных упрощений будет такая же и в случае линейных задач об изгибе плоских пластин. Таким образом, к задачам изгиба и устойчивости двухслойных анизотропных пластин во всех практически важных случаях может быть применена теория однослойных пластин.

3. Устойчивость многослойных оболочек

Выясним возможность упрощения расчета на прочность и устойчивость неоднородных оболочек в тех случаях, когда пренебрежение в основных дифференциальных уравнениях членами с множителями вида $(\sigma'_1 - \sigma''_1)$ и т. д. является недопустимым.

В случае биметаллических изотропных оболочек

$$\lambda_1 = \lambda_2 = \delta_1 = \delta_2 = 1, \quad \lambda_{0,0} = \lambda_{1,0} = \lambda_{2,0}, \quad \delta_{0,0} = \delta_{1,0} = \delta_{2,0}$$

и уравнения (2.5) примут вид

$$\nabla^2 \nabla^2 F - \lambda_{0,0} \nabla^2 \nabla^2 w + K' \left(\frac{1}{R_2} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{1}{R_1} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) = 0, \quad (3.1)$$

$$\nabla^2 \nabla^2 w + \delta_{0,0} \nabla^2 \nabla^2 F - \frac{1}{D'} \left(\frac{1}{R_2} \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} + \frac{1}{R_1} \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} \right) -$$

$$- \frac{1}{D'} \left(T_{10} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + T_{20} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + 2S_{10} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right) = 0.$$

Будем предполагать, что первоначальное напряженное состояние является однородным. Чтобы сделать заключения общего характера, преобразуем уравнения (3.1), используя очень удобное для сравнительных оценок решение в форме

$$F = f(\alpha x + \beta y) = f(u), \quad w = W(\alpha x + \beta y) = W(u), \quad (3.2)$$

где α и β — произвольные величины.

Подставим (3.2) в (3.1). Получим

$$\frac{d^4 f}{du^4} - \lambda_{0,0} \frac{d^4 W}{du^4} + \frac{K'}{\rho^2} \left(\frac{\alpha^2}{R_2} + \frac{\beta^2}{R_1} \right) \frac{d^4 W}{du^4} = 0, \quad (3.3)$$

$$\frac{d^4 W}{du^4} + \delta_{0,0} \frac{d^4 f}{du^4} - \frac{1}{D' \rho^2} \left(\frac{\alpha^2}{R_2} + \frac{\beta^2}{R_1} \right) \frac{d^2 f}{du^2} -$$

$$- \frac{1}{D' \rho^2} (T_{10} \alpha^2 + T_{20} \beta^2 + 2S_{10} \alpha \beta) \frac{d^2 W}{du^2} = 0, \quad \rho^2 = (\alpha^2 + \beta^2)^2.$$

Интегрируя первое уравнение дважды и отбрасывая при этом произвольные постоянные, соответствующие жесткому смещению оболочки, получим

$$\frac{d^2 f}{du^2} = \lambda_{0,0} \frac{d^2 W}{du^2} - \frac{K'}{\rho^2} \left(\frac{\alpha^2}{R_2} + \frac{\beta^2}{R_1} \right) W. \quad (3.4)$$

Второе уравнение (3.3) с помощью первого уравнения этой системы и уравнения (3.4) можно привести к виду

$$\frac{d^4 W}{du^4} - \frac{1}{D'_1 \rho^2} (T_{10}^* \alpha^2 + T_{20}^* \beta^2 + 2S_{10} \alpha \beta) \frac{d^2 W}{du^2} + \frac{K'}{D'_1 \rho^4} \left(\frac{\alpha^2}{R_2} + \frac{\beta^2}{R_1} \right)^2 W = 0, \quad (3.5)$$

где

$$T_{10}^* = T_{10} + (\delta_{0,0} D' \cdot K' + \lambda_{0,0}) : R_2, \quad T_{20}^* = T_{20} + (\delta_{0,0} D' K' + \lambda_{0,0}) : R_1,$$

$$D'_1 = (1 + \lambda_{0,0} \delta_{0,0}) D'.$$

Уравнение (3.5) по внешнему виду совпадает с соответствующим уравнением для однослойной оболочки и, следовательно, расчет на устойчивость пологих оболочек или оболочек, поверхность приведения которых при выпучивании делится на большое число пологих частей, будет в случае шарнирного опирания сводиться к расчету изотропной оболочки с приведенной изгибной жесткостью D'_1 и приведенными безмоментными усилиями T_{10}^*, T_{20}^* . Этот вывод носит довольно общий характер, поскольку, как это устанавливается ниже, он не связан с решением, взятым в форме (3.2).

Рассмотрим более общий случай, когда слои оболочки являются анизотропными. Будем предполагать, что разности $(\sigma'_1 - \sigma''_1), (\sigma'_2 - \sigma''_2), (\mu'_3 - \mu''_3) : \mu_{3 \max}$ являются величинами порядка $\sqrt{\varepsilon_p}$. Все последующие рассуждения будем основывать на возможности пренебрежения в исходных уравнениях величинами порядка $\sqrt{\varepsilon_p}$ по сравнению с единицей.

Пользуясь (3.2), уравнения (2.5) после преобразований, аналогичных выполненным, приводим к одному уравнению вида

$$\frac{d^4 W}{du^4} - \frac{1}{D' \rho_0^2} (T_{10}^* \alpha^2 + T_{20}^* \beta^2 + 2S_{10} \alpha \beta) \frac{d^2 W}{du^2} + \frac{K'}{D' \rho_0^2 \rho_1^2} \left(\frac{\alpha^2}{R_2} + \frac{\beta^2}{R_1} \right)^2 W = 0, \quad (3.6)$$

где

$$T_{10}^* = T_{10} + \left[K' D' \left(\frac{\rho_1}{\rho_1} \right)^2 + \left(\frac{\rho_2}{\rho_1} \right)^2 \right] : R_2,$$

$$T_{20}^* = T_{20} + \left[K' D' \left(\frac{\rho_1}{\rho_1} \right)^2 + \left(\frac{\rho_2}{\rho_1} \right)^2 \right] : R_1,$$

$$\rho_1^2 = \alpha^4 + 2\lambda_1 \alpha^2 \beta^2 + \lambda_2 \beta^4, \quad \rho_2^2 = \lambda_{0,0} \alpha^4 + 2\lambda_{10} \alpha^2 \beta^2 + \lambda_{20} \beta^4, \quad (3.7)$$

$$\rho_3^2 = \alpha^4 + 2\delta_1 \alpha^2 \beta^2 + \delta_2 \beta^4, \quad \rho_4^2 = \delta_{0,0} \alpha^4 + 2\delta_{10} \alpha^2 \beta^2 + \delta_{20} \beta^4, \quad \rho_0^2 = \rho_3^2 + \left(\frac{\rho_2 \rho_4}{\rho_1} \right)^2.$$

Будем считать, что функции напряжений и прогибов таковы, что

$$f_{xx}/f_{yy} \sim w_{xx}/w_{yy} \sim \frac{\alpha^2}{\beta^2} \lesssim \sqrt[4]{\varepsilon_p}.$$

Пренебрегая в выражениях для ρ_0^2 , T_{10}^* , T_{20}^* величинами самое большее порядка $\sqrt[4]{\varepsilon_p}$ по сравнению с единицей, будем иметь приближенные равенства

$$\rho_0^2 \approx \rho_3^2, \quad T_{10}^* = T_{10} + \frac{K' D' \delta_{20} / \lambda_2 + \lambda_{20} / \lambda_2}{R_2}, \quad T_{20}^* = T_{20} + \frac{K' D' \delta_{20} / \lambda_2 + \lambda_{20} / \lambda_2}{R_1}. \quad (3.8)$$

При учете этих равенств, уравнение (3.6) будет совпадать с аналогичным уравнением для однослойных анизотропных оболочек. Следовательно, во многих практически важных случаях расчет на устойчивость двухслойных анизотропных оболочек будет сводиться к решению уравнений для анизотропных однослойных оболочек с приведенными безмоментными усилиями T_{10}^* , T_{20}^* , определяемыми согласно (3.8).

Эти заключения являются справедливыми и в тех случаях, когда напряженное состояние оболочки не является однородным. В самом деле, уравнение (3.5), например, является следствием системы уравнений

$$\nabla^2 \nabla^2 \Phi + K' \left(\frac{1}{R_2} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{1}{R_1} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) = 0,$$

$$\nabla^2 \nabla^2 w - \frac{1}{D_1'} \left(\frac{1}{R_2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \frac{1}{R_1} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} \right) - \frac{1}{D_1'} \left(T_{10}^* \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + T_{20}^* \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + 2S_{10} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right) = 0. \quad (3.9)$$

Сравнивая первое уравнение этой системы с первым уравнением (3.1), находим

$$F = \Phi + \lambda_{0,0} w. \quad (3.10)$$

Второе уравнение (3.9) получается из второго уравнения (3.1) в результате подстановки (3.10). Значит, если напряженное состояние изотропно-слоистой оболочки описывается линейными уравнениями с переменными коэффициентами, например, в случае конических оболочек, то подстановка (3.10) будет всегда приводить их к обычным уравнениям для однослойных оболочек.

4. Некоторые нелинейные задачи прочности и устойчивости оболочек

а) Полосы и арки

Решение одномерных задач о больших прогибах двухслойных полос и арок симметричного сечения (длинная цилиндрическая панель) под действием нормального внешнего давления P приводится к интегрированию системы уравнений

$$\frac{\partial T_2}{\partial \xi} - \rho N = 0, \quad \frac{\partial N}{\partial \xi} + \rho T_2 + bP = 0, \quad M_2 - bN = 0.$$

Здесь $\xi = \frac{s}{b}$, где $2b$ — ширина панели; N — перерезывающее усилие;

$\rho = \frac{b}{R}$ — безразмерная кривизна деформированной панели;

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{R_0} + z_2,$$

где R_0 — начальный радиус кривизны. На основании (1.8) в данном случае имеем

$$M_2 = -D_{11} z_2, \quad T_2 = C_{11} z_2,$$

т. е. изгибающий момент M_2 и усилие T_2 выражаются по формулам, аналогичным с формулами для однослойной панели. Таким образом, путем подходящего выбора поверхности приведения расчет плоских двухслойных полос и длинных искривленных панелей (арок) в линейной и нелинейной постановках будет сводиться к расчету однослойных полос и арок, жесткости на растяжение и изгиб которых соответственно равны C_{11} и D_{11} .

б) Нелинейный краевой эффект [5]

Составляя на основании (1.4) условие совместности деформаций и повторяя выкладки, аналогичные выполненным при выводе уравнений (2.5), получим следующие нелинейные уравнения равновесия при больших прогибах анизотропно-слоистых пологих оболочек:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 F}{\partial x^4} + 2\lambda_1 \frac{\partial^2 F}{\partial x^2 \partial y^2} + \lambda_2 \frac{\partial^2 F}{\partial y^4} - \lambda_{0,0} \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} - 2\lambda_{10} \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} - \lambda_{20} \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} + \\ + K' \left(\frac{1}{R_2} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{1}{R_1} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right)^2 \right) = 0, \quad (4.1) \\ \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2\delta_1 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \delta_2 \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} + \delta_{0,0} \frac{\partial^4 F}{\partial x^4} + 2\delta_{10} \frac{\partial^4 F}{\partial x^2 \partial y^2} + \delta_{20} \frac{\partial^4 F}{\partial y^4} - \\ - \frac{1}{D'} \left(\frac{1}{R_2} \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} + \frac{1}{R_1} \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} \right) - \\ - \frac{1}{D'} \left(\frac{\partial^2 F}{\partial y^2} \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - 2 \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right) - \frac{q}{D'} = 0. \end{aligned}$$

Здесь q — компонента внешней поверхностной нагрузки в направлении оси z , а величины $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \delta_{20}, D', K'$ легко вычисляются в процессе составления уравнений (4.1). При $K_{12} = 0$ эти коэффициенты совпадают с (2.6). Если деформация является осесимметричной, а внешние контурные усилия в направлении оси x отличны от нуля, то согласно первому уравнению (2.3)

$$\frac{\partial T_1}{\partial x} = 0 \quad \text{или} \quad T_1 = C = \text{const.}, \quad (4.2)$$

а систему (4.1), учитывая это равенство, приводим к виду:

$$\frac{d^4 F}{dx^4} - \lambda_{0,0} \frac{d^4 w}{dx^4} + \frac{K'}{R_2} \frac{d^2 w}{dx^2} = 0,$$

$$\frac{d^4 w}{dx^4} + \delta_{00} \frac{d^4 F}{dx^4} - \frac{1}{R_2 D'} \frac{d^2 F}{dx^2} - \frac{C}{D'} \frac{d^2 w}{dx^2} - \frac{q}{D} = 0.$$

Исключая функцию напряжений из этой системы, получим следующее уравнение для определения w

$$\frac{d^4 w}{dx^4} - \frac{C_1^*}{D_1'} \frac{d^2 w}{dx^2} - \frac{q}{D_1'} = 0. \quad (4.3)$$

Здесь обозначено

$$D_1' = (1 + \lambda_{0,0} \delta_{00}) D', \quad C_1^* = C + (K' D' \delta_{00} + \lambda_{0,0}) : R_2.$$

Для описания напряженного состояния в краевой зоне к уравнению (4.3) надо присоединить уравнение (4.2), которое, учитывая (2.1) и (1.4) при допущении $K_{11} = 0$, можно привести к виду

$$\frac{du}{dx} = a + \frac{w}{R_1} + b \frac{w}{R_2} - \frac{1}{2} \left(\frac{dw}{dx} \right)^2, \quad a = \frac{C}{C_{11}}, \quad b = \frac{C_{12}}{C_{11}}. \quad (4.4)$$

Таким образом, задача определения деформаций и напряжений в узкой зоне краевого эффекта путем подходящего выбора поверхности приведения свелась к решению обычных уравнений для однослойных упругих оболочек. Если для решения поставленной задачи пользоваться соотношениями, выведенными в [3], то уравнение типа (4.4) будет иметь более сложную структуру и автоматическое использование решений для однослойных оболочек оказывается невозможным.

Отметим, что выводы настоящей статьи являются справедливыми и в отношении многослойных оболочек, для которых жесткости $C_{11}, \dots, K_{00}, \dots, D_{00}$ легко могут быть вычислены по формулам (1.1) с учетом (1.2) и (1.3).

В заключение приведем нелинейные уравнения равновесия биметаллических оболочек, которые на основании (4.1) и (3.10), с учетом изотропии слоев примут наиболее простой вид

$$\nabla^2 \nabla^2 \Phi + K' \left(\frac{1}{R_2} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{1}{R_1} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right)^2 \right) = 0,$$

$$D_1' \nabla^2 \nabla^2 W - \frac{1}{R_2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} - \frac{1}{R_1} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} - \left[\left(\frac{t_{0,0}}{R_2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} \right) \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \left(\frac{t_{0,0}}{R_1} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} \right) \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - 2 \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial y} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} + t_{1,0} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right)^2 \right) \right] - q = 0,$$

где обозначено

$$t_{0,0} = \delta_{0,0} K' D' + \lambda_{0,0}, \quad t_{1,0} = \delta_{00} K' D' + 2\lambda_{0,0}.$$

ЛИТЕРАТУРА

1. С. А. Амбарцумян. О двух методах расчета двухслойных ортотропных оболочек. Изв. АН Арм. ССР, т. X, № 2, 1957.
2. В. И. Королев. Тонкие двухслойные пластинки и оболочки. Инж. сборник, т. XXII, 1955.
3. Э. И. Григорюк. Тонкие биметаллические оболочки и пластинки. Инж. сборник, т. XVII, 1953.
4. Х. М. Муштарн. Некоторые обобщения теории тонких оболочек с приложениями к задаче устойчивости упругого равновесия. Известия физ.-мат. об-ва КГУ, 1938.
5. Х. М. Муштарн. Нелинейная теория равновесия пограничной зоны упругой оболочки. ДАН СССР, т. 69, № 4, 1949.

Поступила 23.XI 1959 г.

М. С. Ганеева

НЕКОТОРЫЕ ОСНОВНЫЕ СООТНОШЕНИЯ ТЕОРИИ ПОЛОГИХ ОБОЛОЧЕК, НАХОДЯЩИХСЯ В НЕРАВНОМЕРНОМ ТЕМПЕРАТУРНОМ ПОЛЕ

1. Рассматривается тонкая пологая оболочка постоянной толщины h при малых деформациях, но произвольных перемещениях, под действием внешних сил и неравномерного температурного поля. За систему отсчета выбирается правая система координат α, β, z , связанная с недеформированной срединной поверхностью оболочки; оси α, β — линии кривизны, z отсчитывается по внешней нормали к срединной поверхности.

Закон изменения температуры предполагается линейным по толщине оболочки:

$$T(\alpha, \beta, z, t) = t_0(\alpha, \beta, t) + \frac{z}{h} t_1(\alpha, \beta, t), \quad (1.1)$$

где t — время, $t_0(\alpha, \beta, t)$ — температура срединной поверхности, $t_1(\alpha, \beta, t)$ — перепад температуры по толщине оболочки.

Введем следующие обозначения:
 T_{11}, T_{22}, S — действительные нормальные и касательные усилия,
 M_{11}, M_{22}, H — действительные изгибающие и крутящий моменты.
Следующие величины относятся к срединной поверхности:

$\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_{12}$ — удлинение и сдвиг; $\kappa_1, \kappa_2, \kappa_{12}$ — компоненты изгиба и кручения; u, v — касательные составляющие перемещения; w — прогиб;
 A, B — коэффициенты 1-й квадратичной формы; R_1, R_2 — главные радиусы кривизны; $k_{11} = \frac{1}{R_1}, k_{22} = \frac{1}{R_2}$ — главные кривизны; $1, 2$ —

символ, показывающий, что остальные формулы получаются из приведенных путем перестановки индексов 1, 2, букв u, v и ε, β ;

E — модуль упругости; ν — коэффициент поперечного сжатия;
 $k = \frac{Eh}{1-\nu^2}$ — жесткость на растяжение и сжатие; $D = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}$ —

цилиндрическая жесткость; $l = \frac{\bar{\alpha} E h}{1-\nu}, m = \frac{\bar{\alpha} E h^2}{12(1-\nu)}, \bar{\alpha}$ — линейный коэффициент температурного расширения.

Закон Гука для оболочек при неравномерном нагреве имеет вид [1]:

$$T_{11} = T_{11}^{\Phi} + T_{11}^t \quad \vec{1}, 2, \quad M_{11} = M_{11}^{\Phi} + M_{11}^t \quad \vec{1}, 2,$$

$$S = S^{\Phi}, \quad H = H^{\Phi}, \quad (1.2)$$

где $T_{11}^{\Phi}, \dots, M_{11}^{\Phi}, \dots$ — фиктивные усилия и моменты, связанные с компонентами полной деформации обычным законом Гука:

$$T_{11}^{\Phi} = k(\varepsilon_1 + \nu\varepsilon_2) \quad \vec{1}, 2, \quad M_{11}^{\Phi} = D(\kappa_1 + \nu\kappa_2) \quad \vec{1}, 2,$$

$$S = k(1 - \nu)\varepsilon_{12}, \quad H = D(1 - \nu)\kappa_{12}. \quad (1.3)$$

$T_{11}^t, \dots, M_{11}^t, \dots$ — температурные части усилий и моментов:

$$T_{11}^t = T_{22}^t = T^t = -lt_0(\alpha, \beta, t),$$

$$M_{11}^t = M_{22}^t = M^t = -mt_1(\alpha, \beta, t). \quad (1.4)$$

Как известно [2], уравнения равновесия для пологих оболочек в линиях кривизны имеют вид:

$$\frac{\partial}{\partial \alpha}(BT_{11}) + \frac{\partial}{\partial \beta}(AS) + S \frac{\partial A}{\partial \beta} - T_{22} \frac{\partial B}{\partial \alpha} + ABX_1 = 0 \quad \vec{1}, 2, \quad (1.5)$$

$$- \frac{\partial}{\partial \alpha}(BN_1) + \frac{\partial}{\partial \beta}(AN_2) -$$

$$- AB[T_{11}(\kappa_{11} + \kappa_1) + T_{22}(\kappa_{22} + \kappa_2) + 2S\kappa_{12} - X_2] = 0,$$

$$\frac{\partial}{\partial \alpha}(BM_{11}) + \frac{\partial}{\partial \beta}(AH) + H \frac{\partial A}{\partial \beta} - M_{22} \frac{\partial B}{\partial \alpha} - ABN_1 = 0 \quad \vec{1}, 2. \quad (1.6)$$

В случае действия только нормальной нагрузки ($X_1 = X_2 = 0$) первым двум уравнениям равновесия можно удовлетворить с погрешностью, допускаемой теорией пологих оболочек, вводя функцию усилий Ψ :

$$BT_{11} = \frac{\partial}{\partial \beta} \left(\frac{1}{B} \frac{\partial \Psi}{\partial \beta} \right) + \frac{1}{A^2} \frac{\partial B}{\partial \alpha} \frac{\partial \Psi}{\partial \alpha} \quad \vec{1}, 2,$$

$$ABS = - \frac{\partial^2 \Psi}{\partial \alpha \partial \beta} + \frac{1}{B} \frac{\partial B}{\partial \alpha} \frac{\partial \Psi}{\partial \beta} + \frac{1}{A} \frac{\partial A}{\partial \beta} \frac{\partial \Psi}{\partial \alpha}. \quad (1.7)$$

Подставив выражение моментов через функцию прогиба w , определяем из уравнений моментов перерезывающие силы:

$$AN_1 = -D \frac{\partial}{\partial \alpha} (\Delta w) - m \frac{\partial t_1}{\partial \alpha} \quad \vec{1}, 2, \quad (1.8)$$

где оператор Лапласа

$$\Delta = \frac{1}{AB} \left[\frac{\partial}{\partial \alpha} \left(\frac{B}{A} \frac{\partial}{\partial \alpha} \right) + \frac{\partial}{\partial \beta} \left(\frac{A}{B} \frac{\partial}{\partial \beta} \right) \right]. \quad (1.9)$$

Тогда третье уравнение равновесия принимает вид:

$$D\Delta\Delta w + m\Delta t_1 + T_{11}(\kappa_{11} + \kappa_1) + T_{22}(\kappa_{22} + \kappa_2) + 2S\kappa_{12} - X_2 = 0. \quad (1.10)$$

Перейдем к преобразованию уравнения Гаусса для деформированной поверхности:

$$\frac{\partial}{\partial \alpha} \frac{1}{A} \left[\frac{\partial B \varepsilon_2}{\partial \alpha} - \frac{\partial A \varepsilon_{12}}{\partial \beta} - \varepsilon_1 \frac{\partial B}{\partial \alpha} - \varepsilon_{12} \frac{\partial A}{\partial \beta} \right] +$$

$$+ \frac{\partial}{\partial \beta} \frac{1}{B} \left[\frac{\partial A \varepsilon_1}{\partial \beta} - \frac{\partial B \varepsilon_{12}}{\partial \alpha} - \varepsilon_2 \frac{\partial A}{\partial \beta} - \varepsilon_{12} \frac{\partial B}{\partial \alpha} \right] =$$

$$= AB(\kappa_{12}^2 - \kappa_1 \kappa_2 - \kappa_1 \kappa_{22} - \kappa_2 \kappa_{11}). \quad (1.11)$$

Для этого подставляем выражение компонент деформации через функцию усилий. Если принять во внимание первые 2 уравнения равновесия и то, что $T_{11} + T_{22} = \Delta \Psi$, уравнение Гаусса можно привести к виду

$$-\frac{1}{Eh} \Delta \Delta \Psi + \Delta(\bar{a}t_0) = \kappa_{12}^2 - \kappa_1 \kappa_2 - \kappa_1 \kappa_{22} - \kappa_2 \kappa_{11}. \quad (1.12)$$

Таким образом, получили систему двух нелинейных дифференциальных уравнений (1.10) и (1.12) для функций прогиба и усилий, так как усилия и компоненты изгиба и кручения выражены через функции w и Ψ .

2. Рассмотрим некоторые граничные условия.

Введем систему координат, связанную с контуром оболочки, со следующими осями:

- \vec{n} — орт тангенциальной нормали к контуру,
- $\vec{\tau}$ — орт касательной к контуру,
- \vec{m} — орт нормали к срединной поверхности.

Векторы \vec{n} , $\vec{\tau}$, \vec{m} образуют правую систему координат. Тогда все используемые величины будут иметь обозначения применительно к данной координатной системе в соответствии с общепринятыми обозначениями.

а) Края оболочки шарнирно заделаны. Этому случаю соответствуют естественные граничные условия:

$$u = v = w = 0, \quad M_n = 0. \quad (2.1)$$

Для получения граничных условий через функции w и Ψ необходимо преобразовать условия $u = v = 0$. Для этого воспользуемся принципом статически возможных изменений напряженного состояния [2]. Согласно этому принципу, если заданы на контуре перемещения, должны выполняться условия:

$$\kappa A_n - \frac{dA_s}{dn} + 2 \frac{dA_{ns}}{ds} = 0, \quad A_s = 0, \quad (2.2)$$

где $A_n = \varepsilon_n - \varepsilon_n$, $A_s = \varepsilon_s - \varepsilon_s$, $A_{ns} = \varepsilon_{ns} - \varepsilon_{ns}$.

ε_n , ε_s , ε_{ns} — компоненты деформации, выраженные через перемещения;

ε_n , ε_s , ε_{ns} — те же величины, но выраженные через усилия по соотношениям упругости, κ — геодезическая кривизна кривой контура.

По гипотезе Дюгамеля — Неймана в температурной задаче выражения компонент деформации через перемещения совпадают с выражениями нетемпературной задачи, но отличаются соответствующие выражения через действительные усилия, а именно:

$$\varepsilon_n = \frac{T_n - \nu T_{\tau}}{Eh} + \bar{a}t_0 = F_n + \bar{a}t_0, \quad (2.4)$$

$$\varepsilon_s = \frac{T_{\tau} - \nu T_n}{Eh} + \bar{a}t_0 = F_s + \bar{a}t_0,$$

$$\varepsilon_{ns} = \frac{1 + \nu}{Eh} S = F_{ns}.$$

Благодаря членам $\bar{a}t_0$ получим граничные условия, отличные от [2].

Проведя соответствующие выкладки, получаем следующие граничные условия:

$$x e_n - \frac{d e_s}{d n} + 2 \frac{d e_{ns}}{d s} = \bar{\alpha} \bar{a} t_0 - \frac{d}{d n} (\bar{a} t_0) + \frac{1}{E h} \left[x T_n (1 - \nu) - \frac{d T_\tau}{d n} + (2 + \nu) \frac{d S}{d s} \right];$$

$$e_s = \frac{1}{E h} (T_\tau - \nu T_n) + \bar{a} t_0. \quad (2.5)$$

При шарнирном закреплении и $x=0$, когда контур является геодезической линией срединной поверхности, эти условия упрощаются:

$$\bar{\sigma} \frac{d w}{d n} = - \frac{d}{d n} (\bar{a} t_0) + \frac{1}{E h} \left[(2 + \nu) \frac{d S}{d s} - \frac{d T_\tau}{d n} \right]; \quad (2.6)$$

$$T_\tau - \nu T_n + \bar{\alpha} E h t_0 = 0, \quad (2.7)$$

где $\bar{\sigma} = - \sum_{j=1}^2 k_{j\tau} \tau_j$ — нормальная кривизна срединной поверхности в точках контура в направлении $\bar{\tau}$, τ_j — проекции орта $\bar{\tau}$ на координатные оси основной системы.

б) Просто получаются граничные условия при жесткой заделке, если принять во внимание условие $\frac{d w}{d n} = 0$:

$$w = 0, \quad \frac{d w}{d n} = 0, \quad T_\tau - \nu T_n + \bar{\alpha} E h t_0 = 0,$$

$$\frac{d}{d n} (\bar{a} t_0) = \frac{1}{E h} \left[(2 + \nu) \frac{d S}{d s} - \frac{d T_\tau}{d n} \right]. \quad (2.8)$$

в) Нетрудно получить граничные условия и в случае других способов заделки.

ЛИТЕРАТУРА

1. С. Г. Винокуров. Температурные напряжения в пластинках и оболочках. Известия КФАН, серия физ.-мат. и техн. наук, № 3, 1953.
2. Х. М. Муштарри, К. З. Галимов. Нелинейная теория упругих оболочек. Таткиноиздат, 1957.

Поступила 24.VII 1959 г.

С. Г. Винокуров

К ТЕОРИИ ИЗГИБА ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ПАНЕЛИ, НАХОДЯЩЕЙСЯ В НЕРАВНОМЕРНОМ ТЕМПЕРАТУРНОМ ПОЛЕ

Рассмотрим упругое тело, находящееся в стационарном температурном поле $T(x, y, z)$ и под действием поверхностной нагрузки $\vec{F}_s(x, y, z)$ и объемной нагрузки $\vec{F}(x, y, z)$.

Необходимым и достаточным условием равновесия такого тела является выполнение вариационного уравнения Лагранжа для упругого равновесия

$$\delta \left[\int \int \int U_\tau dV - \int \int P d\Sigma - \int \int \int Q_p dV \right] = 0, \quad (1)$$

где $P = X, u + Y, v + Z, w$, $Q = Xu + Yv + Zw$.

Для вычисления потенциальной энергии термоупругой деформации единицы объема тела U_τ за нулевой уровень энергии примем уровень энергии тела, до приложения к нему сил \vec{F}_s и \vec{F} , нагретого на $T(x, y, z)$, но сохранившего свой первоначальный недеформированный вид. Тензор полного термоупругого напряжения σ^{ik} представим в виде суммы двух тензоров:

а) вспомогательного тензора σ_0^{ik} , компоненты которого определяются по формулам

$$X_x^0 = \lambda \Delta + 2\mu e_{xx}, \quad X_y^0 = \mu e_{xy}, \dots, \quad (2)$$

где λ, μ — упругие постоянные Ляме, $\Delta = e_{xx} + e_{yy} + e_{zz}$,

б) тензора температурного давления σ^{ik} с компонентами

$$X_x^* = Y_y^* = Z_z^* = - \frac{\alpha E T}{1 - 2\nu}, \quad X_y^* = Y_z^* = Z_x^* = 0, \quad (3)$$

где α — коэффициент линейного теплового расширения, E — модуль Юнга, ν — коэффициент Пуассона.

Ввиду того, что с увеличением деформации напряжение σ_0^{ik} возрастает по линейному закону от нуля до конечного своего значения, а температурное давление σ^{ik} сохраняет свое значение неизменным, энергию деформации U_τ получим в виде суммы

$$U_\tau = U_\tau^0 + U_\tau^*, \quad (4)$$

в которой

$$U_T^0 = \frac{1}{2} (X_x^0 e_{xx} + Y_y^0 e_{yy} + Z_z^0 e_{zz} + X_y^0 e_{xy} + Y_z^0 e_{yz} + Z_x^0 e_{zx})$$

$$U_T^* = X_x^* e_{xx} + Y_y^* e_{yy} + Z_z^* e_{zz}.$$

Подставляя в уравнение (1) энергию деформации в виде суммы (4), мы получаем вариационное уравнение термоупругого равновесия

$$\delta \left[\iiint U_T^0 dV + \iiint U_T^* dV - \iint P d\Sigma - \iiint Q \rho dV \right] = 0. \quad (5)$$

Применим это уравнение к решению задачи о больших прогибах полой круговой цилиндрической панели радиуса r , имеющей размеры: a — по прямой образующей, b — вдоль дуги. Предположим, что панель, температура которой линейно меняется по толщине, несет поперечную равномерно распределенную нагрузку интенсивности q , а ее контур шарнирно скреплен с неподвижными опорами. Начало координат выберем в углу срединной поверхности, ось ox направим по прямой стороне, ось oy — по криволинейной, а ось oz — вниз, в сторону вогнутости.

Обозначая через u, v, w смещения точки, примем для них следующие выражения

$$u = k_1 \sin \frac{2\pi x}{a} \sin \frac{\pi y}{b},$$

$$v = k_2 \sin \frac{2\pi y}{b} \sin \frac{\pi x}{a},$$

$$w = f \sin^2 \frac{\pi x}{a} \sin^2 \frac{\pi y}{b}.$$

Усилия и моменты, возникающие в панели под действием внешней нагрузки и из-за неравномерности температурного поля, представим в виде

$$N_x = N_x^0 + N_x^*, \quad N_y = N_y^0 + N_y^*, \quad N_{xy} = N_{xy}^0 + N_{xy}^*, \quad (7)$$

$$M_x = M_x^0 + M_x^*, \quad M_y = M_y^0 + M_y^*, \quad M_{xy} = M_{xy}^0 + M_{xy}^*,$$

$$N_x^0 = \frac{Eh}{1-\nu^2} (e_x + \nu e_y), \quad N_y^0 = \frac{Eh}{1-\nu^2} (e_y + \nu e_x), \quad N_{xy}^0 = \frac{Eh}{2(1+\nu)} e_{xy}.$$

$$N_x^* = N_y^* = -\frac{Eh\alpha t_0}{1-\nu}, \quad N_{xy}^* = 0,$$

$$M_x^0 = -\frac{D}{1-\nu} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right), \quad M_y^0 = -\frac{D}{1-\nu} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right),$$

$$M_{xy}^0 = -\frac{D}{1-\nu} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y},$$

$$M_x^* = M_y^* = -\frac{D(1+\nu)\alpha \Delta t}{h}, \quad M_{xy}^* = 0.$$

Здесь $D = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}$ — цилиндрическая жесткость, t_0 — температура срединной поверхности, $\Delta t = t_2 - t_1$ — перепад температуры по толщине, t_2 — температура нижней поверхности, t_1 — температура верхней.

Энергия деформации растяжения определится суммой интегралов

$$U_{T. \text{раст}} = \frac{1}{2} \int_0^a \int_0^b (N_x^0 e_x + N_y^0 e_y + N_{xy}^0 e_{xy}) dx dy + \int_0^a \int_0^b (N_x^* e_x + N_y^* e_y) dx dy, \quad (8)$$

а энергия деформации изгиба суммой

$$U_{T. \text{изг}} = -\frac{1}{2} \int_0^a \int_0^b \left(M_x^0 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + M_y^0 \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + 2M_{xy}^0 \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right) dx dy - \int_0^a \int_0^b \left(M_x^* \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + M_y^* \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) dx dy. \quad (9)$$

Воспользовавшись уравнением (5), получим зависимость между прогибом панели в центре f , интенсивностью равномерно распределенной нагрузки q , температурой срединной поверхности t_0 и перепадом температуры по толщине Δt . Для случая, когда $b = a, \nu = 0,3$, получим уравнение

$$30,9\zeta^3 - 6,7\kappa\zeta^2 + (0,592\kappa^2 - 17,4\tau + 22)\zeta + 1,43\kappa\tau - 2,35\Delta\tau = q^*, \quad (10)$$

в котором

$$\zeta = \frac{f}{h}, \quad \gamma = \frac{a^2}{h^2}, \quad \tau = \frac{\alpha t_0 a^2}{h^2}, \quad \Delta t = \frac{\alpha \Delta t a^2}{h^2}, \quad q^* = \frac{qa^4}{Eh^4}.$$

Для нахождения прогиба, соответствующего критическому давлению (приравнивая нулю производную $\frac{dq^*}{d\zeta}$), получим квадратное уравнение

$$92,7\zeta^2 - 13,4\kappa\zeta + 0,592\kappa^2 - 17,4\tau + 22 = 0. \quad (11)$$

Для прямоугольной цилиндрической панели при жестком закреплении ее контура в недеформируемые опоры для u, v, w мы воспользовались выражениями

$$u = k_1 \sin \frac{2\pi x}{a} \sin \frac{\pi y}{b}$$

$$v = k_2 \sin \frac{2\pi y}{b} \sin \frac{\pi x}{a}$$

$$w = f \sin^2 \frac{\pi x}{a} \sin^2 \frac{\pi y}{b}$$

и получили (для случая $b = a, \nu = 0,3$) уравнение

$$54,2\zeta^3 - 6,93\kappa\zeta^2 + (0,479\kappa^2 - 21,1\tau + 71,3)\zeta + 1,43\kappa\tau = q^*. \quad (12)$$

Поступила 10.VII 1959 г.

Н. З. Якушев

К ДИНАМИЧЕСКИМ ЗАДАЧАМ ТЕОРИИ ТОНКИХ ОБОЛОЧЕК

В статье выводятся уравнения динамики теории оболочек и для приближенного интегрирования их — уравнение метода Бубнова—Галеркина. Произведены некоторые оценки динамических членов в этих уравнениях. Получены уравнения динамической устойчивости оболочек и решение задачи о динамической устойчивости цилиндра средней длины. Рассмотрен вопрос о влиянии тангенциальных сил инерции на частоту поперечных колебаний.

Пользуюсь случаем выразить мою глубокую благодарность проф. К. З. Галимову и проф. Х. М. Муштару за постановку задачи и ценные указания в процессе выполнения работы.

§ 1. Дифференциальные уравнения теории колебаний тонких оболочек. Уравнения метода Бубнова—Галеркина

Уравнения движения тонких оболочек можно получить из принципа Остроградского — Гамильтона:

$$\delta I = \int_0^h \delta L dt = 0, \quad \delta L = \delta T + \delta A + \delta E - \delta W, \quad (1.1)$$

где δT — вариация кинетической энергии оболочек; δA — вариация работы внешних усилий и моментов, действующих на оболочку [1]; δW — вариация работы деформации оболочки; δE — вариация работы силовых факторов, зависящих от скорости и вызывающих затухание движения. В дальнейшем в обозначениях придерживаемся [1].

Ограничимся рассмотрением квадратичной теории оболочек при малых деформациях. При этих условиях векторы скорости и ускорения точек срединной поверхности представляются в виде:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial^2 \bar{v}}{\partial t^2} &= \sum_{i,j=1}^2 \left[\bar{e}_i \left(\frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} + e_{ij} \frac{\partial^2 u_j}{\partial t^2} + \omega_i \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \right) - \bar{m}^* \omega_i \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} \right] + \bar{m}^* \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}, \quad i \neq j \\ \frac{\partial \bar{v}}{\partial t} &= \sum_{i,j=1}^2 \left[\bar{e}_i \left(\frac{\partial u_i}{\partial t} + e_{ij} \frac{\partial u_j}{\partial t} + \omega_i \frac{\partial w}{\partial t} \right) - \bar{m}^* \omega_i \frac{\partial u_i}{\partial t} \right] + \bar{m}^* \frac{\partial w}{\partial t}. \end{aligned} \right\} \quad (1.2)$$

После некоторых преобразований (над δA_i и δW получим:

$$\int_0^1 \int_{(s)} \int_{l=1}^2 \left\{ (F_1 + Y_1) \delta u_l - (M_l + Z_l) \delta \omega_l \right\} + (F_2 + Y_2) \delta w \} d\alpha_1 ds_2 dt + \\ + \int_0^1 \int_C \left\{ \sum_{l=1}^2 R_l \delta u_l + R_3 \delta w - (\bar{G} - G) \delta \omega_n \right\} ds dt = 0, \quad (1.3)$$

где

$$F_1 = (A_2 T_{11}^*)_{,1} + (A_1 T_{21}^*)_{,2} + T_{12}^* A_{1,2} - T_{22}^* A_{2,1} + \\ + A_1 A_2 (N_1^* k_{11}^* + N_2^* k_{12}^* + \chi_1^*) \quad \overrightarrow{1,2},$$

$$Y_1 = A_1 A_2 \varepsilon h \left(\frac{\partial u_1}{\partial t} + e_{12} \frac{\partial u_2}{\partial t} + \omega_1 \frac{\partial w}{\partial t} \right) - A_1 A_2 \rho h \left(\frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2} + e_{12} \frac{\partial^2 u_2}{\partial t^2} + \omega_1 \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \right),$$

$$F_2 = (A_2 N_1^*)_{,1} + (A_1 N_2^*)_{,2} - A_1 A_2 (T_{11}^* k_{11}^* + T_{22}^* k_{22}^* + \\ + k_{12}^* T_{12}^* + k_{12}^* T_{21}^* - \chi_2), \quad (1.4)$$

$$Y_2 = A_1 A_2 \varepsilon h \left(\frac{\partial w}{\partial t} - \omega_1 \frac{\partial u_1}{\partial t} - \omega_2 \frac{\partial u_2}{\partial t} \right) - A_1 A_2 \rho h \left(\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + \omega_1 \frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2} - \omega_2 \frac{\partial^2 u_2}{\partial t^2} \right);$$

$$M_1 = (A_2 M_{11}^*)_{,1} + (A_1 M_{21}^*)_{,2} + M_{12}^* A_{1,2} - M_{22}^* A_{2,1} + A_1 A_2 (L^* - N_1^*),$$

$$Z_1 = A_1 A_2 \frac{h^3}{12} \left(\rho \frac{\partial^2 \omega_1}{\partial t^2} - \varepsilon \frac{\partial \omega_1}{\partial t} \right),$$

$$R_l = \Phi_s^l + \Phi_s^3 \omega_l - \sum_{k=1}^2 T_{lk}^* n_k, \quad R_3 = \Phi_s^3 - N + \frac{dH}{ds} - \sum_{l,k} T_{lk}^* \omega_l n_k,$$

ε — экспериментальный коэффициент.

Соотношение (1.3) есть уравнение метода Бубнова — Галеркина, позволяющее приближенно интегрировать динамические уравнения теории оболочек. Как обычно, из (1.3) следуют уравнения движения оболочек:

$$F_l + Y_l = 0, \quad F_2 + Y_2 = 0, \quad M_l + Z_l = 0, \quad (1.5)$$

и статические граничные условия: $R_l = 0, R_3 = 0, \bar{G} = G$.

Рассмотрим частные случаи.

1°. Линейные колебания оболочек — это колебания при слабом изгибе. В этом случае перемещения малы, пренебрегаем квадратами самих перемещений и их производных по координатам; так что $u_l \sim w \sim e_{lk} \sim \omega_l \sim \chi_{lk} \sim \varepsilon_p$; $\omega_l \ll 1$ во все время движения, поэтому динамические уравнения и статические граничные условия упрощаются. В рассматриваемом случае в выражениях F_l и F_2 кривизны координатных линий k_{ij}^* заменяем их начальными значениями k_{ij} , а инерционные члены и выражения неуравновешенных контурных сил линеаризуются.

$$Y_1 = A_1 A_2 \left(\varepsilon \frac{\partial u_1}{\partial t} - \rho \frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2} \right) h, \quad Y_2 = A_1 A_2 h \left(\varepsilon \frac{\partial w}{\partial t} - \rho \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \right), \quad (1.7)$$

$$R_l = \Phi_s^l - \sum_{k=1}^2 T_{lk}^* n_k, \quad R_3 = \Phi_s^3 - N + \frac{dH}{ds}. \quad (1.8)$$

Действительно, учитывая (1.4), уравнение $F_2 + Y_2 = 0$ можно записать в виде

$$F_2 + A_1 A_2 \varepsilon h \left(\frac{\partial w}{\partial t} \right) - A_1 A_2 \rho h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + \sum_{l=1}^2 \omega_l Y_l = 0,$$

где члены, содержащие ω_l , представляют собой влияние продольных сил инерции. Для F_2 и F_l имеют место оценки

$$F_2 \sim E h^3 \frac{r^4}{R^4}, \quad F_l \sim E h \frac{r}{R^2},$$

где r есть $\max\{n, \lambda\}$, n — число поперечных волн, $\lambda = \pi R \frac{m}{l}$, m — число продольных полуволн. Если $\omega \sim h^2 \frac{r}{R^2}$, $r^2 \gg 1$, то, как видно

из предыдущей оценки, можно пренебречь $\sum \omega_l F_l$ по сравнению с F_2 .

2°. Нелинейные колебания при среднем изгибе. Изгиб назовем средним, если $u_l \sim e_{lk} \sim \varepsilon_p$, но члены изгибного происхождения $w \sim \omega_l \sim \chi_{lk} \sim V \varepsilon_p$, $\omega_l^2 \ll 1$, во все время движения. F_l, F_2 и кривизны k_{ij}^* заменяются их выражениями по линейной теории

$$k_{11}^* = k_{11} (1 + e_{22}) - k_{12} e_{21} - \frac{1}{A_1} \frac{\partial \omega_1}{\partial \alpha_1} - \frac{\omega_2}{A_1 A_2} \frac{\partial A_1}{\partial \alpha_2},$$

$$k_{12}^* = k_{12} (1 - e_{11}) - k_{11} e_{21} - \frac{1}{A} \frac{\partial \omega_2}{\partial \alpha_1} + \frac{\omega_1}{A_1 A_2} \frac{\partial A_1}{\partial \alpha_2}, \quad \overrightarrow{1,2} \quad (1.9)$$

и выражаются формулами (1.4), а в выражениях Y_l отбрасываются члены, содержащие e_{12} и e_{21} , Y_2 остается без изменения.

3°. Нелинейные колебания пологих оболочек при среднем изгибе. Здесь, как известно, возможны следующие упрощения: во-первых, пренебрегаем влиянием тангенциальных перемещений u_l на углы поворота ω_l , т. е. полагаем $\omega_l = \frac{1}{A_l} \frac{\partial w}{\partial \alpha_l}$; во-вторых, в выражениях F_l и F_2 отбрасываем члены, содержащие усилия N_1^* и N_2^* ; в-третьих, пренебрегаем влиянием углов поворота e_{lk} на изгибные деформации, т. е. в выражениях кривизн (1.9) отбрасываем члены, содержащие e_{lk} .

Выведенные в этом параграфе динамические уравнения нелинейной теории оболочек применимы к коротким оболочкам и оболочкам средней длины. Случай длинных оболочек мы рассмотрим особо.

§ 2. Дифференциальные уравнения динамической устойчивости оболочек

Рассмотрим два последовательных состояния оболочки. Пусть срединная поверхность σ при помощи перемещения $\bar{v}^1 = u_1^1 \bar{e}_1 + u_2^1 \bar{e}_2 + w^1 m$ переходит в поверхность σ^1 . Зная \bar{v}^1 , мы можем определить величины, характеризующие деформацию, и напряжения, которые удовлетворяют уравнениям движения:

$$F_l^1 + Y_l^1 = 0, \quad M_l^1 + Z_l^1 = 0, \quad F_3^1 + Y_3^1 = 0. \quad (2.1)$$

При некотором значении времени или некоторых соотношениях параметров движения [2], возможно другое состояние, наряду с движением, обозначенным индексом "1". Уравнения движения, соответствующие этому состоянию, назовем уравнениями безразличного движения, а параметры — критическими. Под параметрами движения мы подразумеваем внешнюю нагрузку, время, частоты колебаний и т. д.

Пусть вектор дополнительного перемещения $\bar{v} = u_1 \bar{e}_1 + u_2 \bar{e}_2 + \omega t$ приводит поверхность σ^1 в σ^* , где $\bar{v}^* = \bar{v}^1 + \bar{v}$. Определим величины, характеризующие деформацию и напряжения при перемещении \bar{v}^* . Будем предполагать, что величина \bar{v} — первого порядка малости, а \bar{v}^1 — конечная (например, порядка единицы). В величинах, характеризующих деформацию и напряжения, сохраним члены первого порядка малости наряду с конечными:

$$T_{11}^* = K(\epsilon_{11}^* + \nu \epsilon_{22}^*) = T_{11}^1 + T_{11}'; \quad T_{11}^1 = K(\epsilon_{11}^1 + \nu \epsilon_{22}^1); \quad T_{11}' = K(\epsilon_{11}' + \nu \epsilon_{22}'); \\ \epsilon_{11}^* = \epsilon_{11}^1 + \frac{1}{2}(\epsilon_{11}^{*2} + \epsilon_{12}^{*2} + \omega_1^{*2}) = \epsilon_{11}^1 + \epsilon_{11}', \quad (2.2)$$

где

$$\epsilon_{11}^1 = \epsilon_{11}^1 + \frac{1}{2}(\epsilon_{11}^{12} + \epsilon_{12}^{12} + \omega_1^{12}), \quad \epsilon_{11}' = (1 + \epsilon_{11}^1) \epsilon_{11} + \epsilon_{12}^1 \epsilon_{12} + \omega_1^1 \omega_1.$$

Уравнения движения в безразличном состоянии:

$$F_i^* + Y_i^* = 0, \quad F_3^* + Y_3^* = 0, \quad Z_i^* + M_i^* = 0 \quad i = 1, 2. \quad (2.3)$$

Теперь, вычитая из уравнений (2.3) уравнения (2.1), получим уравнения динамической устойчивости:

$$[A_2 \epsilon_{22} T_{11}' + A_2(1 + \epsilon_{22}^1) T_{11}^1]_{,1} + (A_1 T_{21}')_{,2} + (T_{12}' A_{1,2}) - T_{22}^1 (A_2 \epsilon_{22})_{,1} - \\ - T_{22}' [A_2(1 + \epsilon_{22}^1)]_{,1} + A_1 A_2 [N_1' x_{11}' + N_1'(k_{11} + x_{11}') + N_2' x_{12}' + \\ + N_2'(k_{12} + x_{12}') + X_1^* - X_1^1 + \epsilon h \frac{\partial u_1}{\partial t} + \epsilon_{12} \frac{\partial u_2}{\partial t} + \epsilon_{12}' \frac{\partial u_2}{\partial t} + \omega_1 \frac{\partial \omega^1}{\partial t} + \omega_1' \frac{\partial \omega}{\partial t}] = \\ = A_1 A_2 \rho h \left\{ \frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2} + \epsilon_{12} \frac{\partial^2 u_2}{\partial t^2} + \epsilon_{12}' \frac{\partial^2 u_2}{\partial t^2} + \omega_1 \frac{\partial^2 \omega^1}{\partial t^2} + \omega_1' \frac{\partial^2 \omega}{\partial t^2} \right\}_{1,2}, \quad (2.5)$$

$$(A_2 N_1')_{,1} + (A_1 N_2')_{,2} - A_1 A_2 [T_{11}^1 x_{11}' + T_{11}'(k_{11} + x_{11}') + 2 T_{12}' x_{12}' + \\ + 2 T_{12}'(k_{12} + x_{12}') + T_{22}^1 x_{22}' + T_{22}'(k_{22} + x_{22}') - X_3^* - X_3^1 - \\ - \epsilon h \left(-\omega_1 \frac{\partial u_1}{\partial t} - \omega_1' \frac{\partial u_1}{\partial t} - \omega_2 \frac{\partial u_2}{\partial t} - \omega_2' \frac{\partial u_2}{\partial t} + \frac{\partial \omega}{\partial t} \right)] = \\ = \rho h A_1 A_2 \left\{ -\omega_1 \frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2} - \omega_1' \frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2} - \omega_2 \frac{\partial^2 u_2}{\partial t^2} - \omega_2' \frac{\partial^2 u_2}{\partial t^2} + \frac{\partial^2 \omega}{\partial t^2} \right\}, \\ M_i + Z_i = 0. \quad (2.6)$$

Статическая часть соответствует уравнениям безразличного состояния [1].

§ 3. Уравнения динамической устойчивости цилиндрической оболочки круглого сечения средней длины

Рассмотрим динамическую устойчивость цилиндрической оболочки средней длины, т. е. пусть $l \sim \pi R$. К таким оболочкам можно применить теорию пологих оболочек. Предположим, что первоначальное положение безмоментно или почти безмоментно. Тогда $\frac{1}{2} h x_{ij} \ll \omega^1$, а ω_1^1, ω_2^1 будут величинами одного порядка с удлинениями. Предположим также первоначальное состояние почти статическим, т. е. будем считать, что скорости и ускорения точек оболочки малы и ими можно пренебречь.

Ограничимся рассмотрением линейных колебаний цилиндрической оболочки. Тогда компоненты деформации выражаются формулами:

$$\chi_{ik} = -\omega_{,ik}; \quad \epsilon_1 = u_{,1}; \quad \epsilon_2 = v_{,2} + \omega/R; \quad 2\epsilon_{12} = u_{,2} + v_{,1}. \quad (3.1)$$

В первоначальном же безмоментном состоянии усилия будут выражаться формулами:

$$T_1^1 = -N; \quad T_{12}^1 = T; \quad T_2^1 = -PR, \quad (3.2)$$

где N — интенсивность осевого сжатия, P — внешнее давление, T — сдвигающее усилие.

Уравнения динамической устойчивости в перемещениях имеют вид:

$$u_{,11} + \frac{1-\nu}{2} u_{,22} + \frac{1+\nu}{2} v_{,1,2} + \frac{\nu}{R} \omega_{,1} + \chi_1 = \rho h / K \ddot{u} - \frac{\epsilon h}{K} \dot{u}, \\ v_{,22} + \frac{1-\nu}{2} v_{,11} + \frac{1+\nu}{2} u_{,12} + 1/R \omega_{,2} + \chi_2 = \rho h / K \ddot{v} - \frac{\epsilon h}{K} \dot{v}, \quad (3.3)$$

$$D \Delta \Delta w - \rho \frac{h^3}{12} \Delta \ddot{w} + \Phi + k/R (v_{,2} + \nu u_{,1} + 1/R \omega) + \rho h \ddot{w} - \epsilon h \dot{w} - \chi_3 = 0,$$

где

$$\Phi = N \omega_{,11} + 2T \omega_{,12} + PR \omega_{,22}; \quad \Delta(\) = (\)_{,11} + (\)_{,22};$$

χ_i — некоторые возмущения соответственно осям, а $\rho \frac{h^3}{12} \Delta \ddot{w}$ — член, возникший ввиду учета силы инерции вращения, $\omega_{,1} = \frac{\partial \omega}{\partial x}$, $\dot{w} = \frac{\partial w}{\partial t}$.

Сначала рассмотрим задачу осесимметричного колебания, когда $v = 0$, $u = u(x, t)$, $w = w(x, t)$. Выражая уравнения движения через одно перемещение (см. общий случай колебания) для различных предположений: 1) $\dot{u} \neq 0$, $\dot{w} \neq 0$, 2) $\dot{u} = 0$, $\dot{w} \neq 0$, 3) $\dot{u} \neq 0$, $\dot{w} = 0$, получим соответственно:

$$\frac{\partial^4}{\partial \tau^4} \left\{ w - h^2 / 12 R^2 \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right\} + \frac{\partial^2}{\partial \tau^2} \left\{ 2 \frac{h^2}{12 R^2} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{N}{K} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - \frac{\sigma^2 w}{\partial x^2} - w \right\} - \\ - \left\{ \frac{h^2}{12 R^2} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial a^2} \left(\frac{N}{K} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) + (1 - \nu)^2 \frac{\partial^2 w}{\partial a^2} \right\} = 0; \quad (3.4)$$

$$\frac{\partial^2}{\partial \tau^2} \left\{ \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - \frac{h^2}{12 R^2} \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} \right\} + \frac{h^2}{12 R^2} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial a^2} \left(\frac{N}{K} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) + (1 - \nu)^2 \frac{\partial^2 w}{\partial a^2} = 0; \quad (3.5)$$

$$\frac{h^2}{12 R^2} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{1}{K} \frac{\partial^2}{\partial a^2} \left(N \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right) + (1 - \nu)^2 \frac{\partial^2 u}{\partial a^2} = \frac{\partial^2}{\partial \tau^2} \left\{ \frac{h^2}{12 R^2} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{N}{K} \frac{\partial^2 u}{\partial a^2} + u \right\}, \quad (3.6)$$

при

$$\epsilon = 0 \text{ и } \chi_i = 0, \quad \tau = t \left(\frac{K}{\rho h} \right)^{1/2}, \quad x = \pi R.$$

В каждом из случаев (3.4), (3.5), (3.6) определим для примера частоты собственных колебаний при шарнирной опоре краев оболочки, выбирая перемещения в виде:

$$\omega = \sum A_m(\tau) \sin \lambda \alpha; \quad u = \sum B_m(\tau) \cos \lambda \alpha, \quad \text{где } \lambda = m \frac{\pi R}{l}.$$

A_m и B_m берем в виде:

$$A_m(\tau) = A_0 \begin{cases} \sin \omega \tau \\ \cos \omega \tau \end{cases}; \quad B_m(\tau) = B_0 \begin{cases} \sin \omega \tau \\ \cos \omega \tau \end{cases},$$

где A_0 и B_0 — постоянные, а ω — безразмерная круговая частота.

Тогда из (3.4), (3.5), (3.6) получим при $N = \text{const}$:

$$\omega_{(3.4)1,2}^2 = \frac{\lambda^2 + 1}{2} \pm \left[\left(\frac{\lambda^2 + 1}{2} \right)^2 - \lambda^2 \left[\frac{h^2}{12R^2} \lambda^4 - \frac{N}{K} \lambda^2 + (1 - \nu^2) \right] \right]^{1/2}; \quad (3.7)$$

$$\omega_{(3.5)}^2 = \left\{ \frac{h^2}{12R^2} \lambda^4 - \frac{N}{K} \lambda^2 + (1 - \nu^2) \right\};$$

$$\omega_{(3.6)}^2 = \lambda^2 \left\{ 1 - \nu^2 \left(\frac{h^2}{12R^2} \lambda^4 - \frac{N}{K} \lambda^2 + 1 \right)^{-1} \right\}. \quad (3.8)$$

где $\omega_{(3.4)1}$ — собственная частота продольных колебаний с учетом поперечных сил инерции; $\omega_{(3.4)2}$ — собственная частота поперечных колебаний с учетом продольных сил инерции; $\omega_{(3.5)}$ — собственная частота поперечных колебаний без учета продольных сил инерции; $\omega_{(3.6)}$ — собственная частота продольных колебаний без учета поперечных сил инерции. Выше предполагалось, что силой инерции вращения можно пренебречь, если $m \lesssim \left(\frac{l^2}{hR} \right)^{1/2}$. Известно, что $\frac{N}{K} \sim \frac{h}{R}$.

Это дает возможность в (3.4) пренебречь $\frac{N}{K} \lambda^2$ по сравнению с λ^2 .

В выражениях (3.7), (3.8) $\frac{N}{K}$ оставляем, т. к. при $\lambda \sim \sqrt{\frac{R}{h}}$ предварительное сжатие и растяжение может оказать существенное влияние на частоту собственных колебаний.

Таблица 1

$R = 20 \text{ см}, h = 0,1, \nu = 0,3, N = 0$

m	ω^2	40 см	60 см	80 см	100 см	120 см
1	$\omega_{(3.4)1}^2$	2,6073	1,3650	1,1118	1,0539	1,03,5
	$\omega_{(3.4)2}^2$	0,8607	0,7303	0,5047	0,3409	0,2416
	$\omega_{(3.5)}^2$	0,9100	0,9100	0,9100	0,9100	0,9100
	$\omega_{(3.6)}^2$	2,2459	0,9975	0,5613	0,3593	0,2495
	$\omega_{3.5}^2 \cdot \omega_{3.4.2}^{-2}$	1,0573	1,2461	1,8030	2,6694	3,7666
	$\omega_{3.4}^2 \cdot \omega_{3.6}^{-2}$	1,1609	1,3693	1,9808	2,9332	4,1383

m	ω^2	40 см	60 см	80 см	100 см	120 см
2	$\omega_{3.4.1}^2$	9,9717	4,4977	2,6073	1,7657	1,3659
	$\omega_{3.4.2}^2$	0,9009	0,8871	0,8607	0,8143	0,7303
	$\omega_{3.5}^2$	0,9102	0,9100	0,9100	0,9100	0,9100
	$\omega_{3.6}^2$	8,9841	3,9902	2,2459	1,4378	0,9975
	$\omega_{3.5}^2 \cdot \omega_{3.4.2}^{-2}$	1,0103	1,0259	1,0573	1,1175	1,2461
	$\omega_{3.4.1}^2 \cdot \omega_{3.6}^{-2}$	1,1099	1,1272	1,1609	1,2281	1,3693

Выражение $\omega_{(3.5)}^2$ имеет экстремумы при $\lambda = 0$ и $\lambda^2 = \frac{N}{K} \cdot \frac{6R^2}{h^2}$ соответственно:

$$\omega_{(3.5), \text{min}}^2 = (1 - \nu^2), \quad \omega_{(3.5), \text{max}}^2 = (1 - \nu^2) \left[1 - \left(\frac{N}{N_{\text{кр}}} \right)^2 \right]. \quad (3.81)$$

Нагрузка изменяет наименьшую частоту в сторону уменьшения. Из (3.81) видно, что влияние предварительного натяжения становится значительным при $N \sim N_{\text{кр}}$, а при $N \sim \sqrt{\frac{h}{R}} N_{\text{кр}}$ ее влиянием можно пренебречь.

Продольные силы инерции влияют на частоты поперечных колебаний в сторону уменьшения и становятся значительными при увеличении длины. Например, при $l = 120 \text{ см}, m = 1$ (т. е. для наименьшей частоты) $\omega_{(3.5)}^2 \cdot \omega_{(3.4)2}^{-2} = 3,7666$. Если допустимо определить квадрат частоты с ошибкой до 6%, то формулу (3.8) можно применять при $m = 1$ до $l = 2R$, при $m = 2$ до $l = 4R$ и т. д. При совместном учете продольной и поперечной сил инерции собственная частота поперечных колебаний может быть меньше $1 - \nu^2$. Поперечные силы инерции влияют на частоты продольных колебаний в сторону увеличения, что видно из таблицы 1.

Итак, при решении задач осесимметрического колебания не всегда можно пренебрегать влиянием продольных сил инерции на поперечные колебания и наоборот.

Вернемся к общему уравнению (3.3). Введем вспомогательные функции:

$$\nu \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial s} = Q(x, s, t); \quad \frac{\partial u}{\partial s} - \frac{\partial v}{\partial x} = f(x, s, t). \quad (3.9)$$

Умножим первое из (3.3) на ν , продифференцируем по x , затем второе по s и результат сложим. Тогда получим:

$$\Delta Q + \frac{1 - \nu}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial s} + \frac{\nu^2}{R} \frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2} + \frac{1}{R} \frac{\partial^2 \omega}{\partial s^2} = \frac{\rho h}{K} \frac{\partial^2}{\partial t^2} Q - \frac{e h}{K} \frac{\partial}{\partial t} Q. \quad (3.10)$$

Далее, дифференцируя первое из (3.3) по s , а второе по x и вычитая из первого второе, находим:

$$L(f) = \frac{2}{R} \frac{\partial^2 \omega}{\partial x \partial s},$$

где

$$L(\cdot) = \Delta(\cdot) - \frac{2\rho h}{K(1-\nu)} \frac{\partial^2}{\partial t^2}(\cdot) + \frac{2\varepsilon h}{K(1-\nu)} \frac{\partial}{\partial t}(\cdot). \quad (3.11)$$

Применяя оператор (3.11) к выражению (3.10), получим:

$$L_1(Q) = -\frac{\nu^2}{R} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left\{ \Delta w - \frac{2\rho h}{k(1-\nu)} \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + \frac{2\varepsilon h}{k(1-\nu)} \frac{\partial w}{\partial t} \right\} - \frac{1}{R} \frac{\partial^2}{\partial s^2} \left\{ \Delta w - \frac{2\rho h}{k(1-\nu)} \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + \frac{2\varepsilon h}{k(1-\nu)} \frac{\partial w}{\partial t} \right\} - \frac{1-\nu^2}{R} \frac{\partial^4 w}{\partial x \partial s^2}, \quad (3.12)$$

где L_1 — новый оператор:

$$L_1(\cdot) = \Delta \Delta(\cdot) - \frac{3-\nu}{1-\nu} \frac{\rho h}{K} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \Delta(\cdot) + \frac{3-\nu}{1-\nu} \frac{\varepsilon h}{K} \frac{\partial}{\partial t} \Delta(\cdot) + \frac{2}{1-\nu} \left(\frac{\rho h}{K} \right)^2 \frac{\partial^4}{\partial t^4}(\cdot) - \frac{4}{1-\nu} \frac{\rho \varepsilon h^2}{K^2} \frac{\partial^3}{\partial t^3}(\cdot) + \left(\frac{\varepsilon h}{K} \right)^2 \frac{2}{1-\nu} \frac{\partial^2}{\partial t^2}(\cdot).$$

Применяя его к третьему из (3.3) при $\chi_1 = \chi_2 = 0$, получим:

$$\begin{aligned} & \left\{ \frac{h^2}{12} \Delta \Delta \Delta \Delta w + \frac{1}{K} \Delta \Delta \Phi + (1-\nu^2) \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} - \frac{1}{K} \Delta \Delta \chi_3 \right\} + \\ & + \frac{\varepsilon h}{K} \frac{\partial}{\partial t} \left\{ -\Delta \Delta w + \frac{h^2}{12} \frac{3-\nu}{1-\nu} \Delta \Delta \Delta w + \frac{1}{K} \frac{3-\nu}{1-\nu} \Delta \Phi + (3+2\nu) \frac{1}{R^2} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \right. \\ & + \frac{1}{R^2} \frac{\partial^2 w}{\partial s^2} - \frac{1}{K} \frac{3-\nu}{1-\nu} \Delta \chi_3 \left. \right\} + \frac{\rho h}{K} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \left\{ \Delta \Delta w - \frac{2}{(1-\nu)} \frac{h^2}{12} \Delta \Delta \Delta w - \right. \\ & - \frac{1}{K} \frac{3-\nu}{1-\nu} \Delta \Phi - \frac{1}{R^2} \frac{\partial^2 w}{\partial s^2} - (3+2\nu) \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{1}{K} \frac{3-\nu}{1-\nu} \Delta \chi_3 + \\ & + D \left(\frac{\varepsilon h}{K} \right)^2 \frac{1}{\rho h} \frac{2}{(1-\nu)} \Delta \Delta w + \left(\frac{\varepsilon h}{K} \right)^2 \frac{1}{\rho h} \frac{2}{1-\nu} \Phi + \frac{1}{R^2} \frac{2}{1-\nu} \frac{\varepsilon^2 h}{\rho K} w - \\ & - \frac{3-\nu}{1-\nu} \frac{\varepsilon^2 h}{\rho K} \Delta w - \left(\frac{\varepsilon h}{K} \right)^2 \frac{2}{1-\nu} \frac{1}{\rho h} \chi_3 \left. \right\} + \frac{\rho h}{K} \frac{\varepsilon h}{K} \frac{\partial^3}{\partial t^3} \left\{ 2 \frac{3-\nu}{1-\nu} \Delta w + \right. \\ & + \frac{1}{1-\nu} \chi_3 - \frac{7}{1-\nu} \frac{h^2}{12} \Delta \Delta w - \frac{4}{1-\nu} \frac{1}{K} \Phi - \frac{2}{R^2(1-\nu)} \left(2 + \frac{h\varepsilon^2 R}{\rho K} \right) w \left. \right\} + \\ & + \left(\frac{\rho h}{K} \right)^2 \frac{\partial^4}{\partial t^4} \left\{ \frac{h^2}{12} \frac{5-\nu}{1-\nu} \Delta \Delta w + \frac{2}{1-\nu} \frac{1}{K} \Phi + \frac{2}{R^2(1-\nu)} \left(1 + 3 \frac{h\varepsilon^2 R^2}{\rho K} \right) w - \right. \\ & - \frac{2}{1-\nu} \frac{1}{K} \frac{3-\nu}{1-\nu} \left(1 + 2 \frac{\varepsilon^2 h^3}{12\rho K(3-\nu)} \right) \Delta w \left. \right\} + \left(\frac{\rho h}{K} \right)^2 \frac{\varepsilon h}{K} \frac{\partial^5}{\partial t^5} \left\{ -\frac{6}{1-\nu} w + \right. \\ & + \frac{4h^2}{12(1-\nu)} \Delta w \left. \right\} + \left(\frac{\rho h}{K} \right)^3 \frac{\partial^6}{\partial t^6} \left\{ \frac{2}{1-\nu} w - \frac{h^2}{12} \frac{2}{1-\nu} \Delta w \right\} = 0. \quad (3.13) \end{aligned}$$

Уравнение (3.13) в безразмерных координатах при $\varepsilon = 0$ имеет вид:

$$\begin{aligned} & \frac{\partial^6}{\partial \tau^6} \left\{ w - \frac{h^2}{12R^2} \nabla^2 w \right\} + \frac{\partial^4}{\partial \tau^4} \left\{ \frac{3-\nu}{2} \nabla \left(\frac{h^2}{12R^2} \frac{5-\nu}{3-\nu} \nabla w - w \right) + w + \frac{1}{K} \Phi^* \right\} + \\ & + \frac{1-\nu^2}{2} \frac{\partial^2}{\partial \tau^2} \left\{ \nabla \nabla w - 2 \frac{2-\nu}{1-\nu} \frac{h^2}{12R^2} \nabla \nabla \nabla w - \frac{3-\nu}{1-\nu} \nabla \Phi \frac{1}{K} - \frac{\partial^2 w}{\partial \beta^2} - (3+2\nu) \frac{\partial^2 w}{\partial \alpha^2} \right\} + \\ & + \frac{1-\nu}{2} S = 0, \quad (3.14) \end{aligned}$$

где

$$x = \alpha R, \quad s = \beta R, \quad S = \frac{h^2}{12R^2} \nabla \nabla \nabla \nabla w + \frac{1}{K} \nabla \nabla \Phi^* + (1-\nu^2) \frac{\partial^4 w}{\partial \alpha^4}, \quad (3.15)$$

$$\nabla(\cdot) = \frac{\partial^2}{\partial \alpha^2} + \frac{\partial^2}{\partial \beta^2}.$$

Подчеркнутые члены выражают влияние касательных сил инерции вращения. Тангенциальные силы инерции свое влияние на поперечные колебания передают главным образом через члены, содержащие вторую производную по времени. Чтобы заметить влияние тангенциальных сил инерции в отдельности, находим из (3.14)

при $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0$ и $\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = 0$ соответственно:

$$\frac{\partial^4}{\partial \tau^4} \left\{ \frac{\partial^2 L_0}{\partial \alpha^2} + \frac{1-\nu}{2} \frac{\partial^2 L_0}{\partial \beta^2} \right\} + \frac{1-\nu}{2} \frac{\partial^2}{\partial \tau^2} \left\{ \nabla \nabla \left[w - \frac{3-\nu}{1-\nu} \frac{h^2}{12R^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \alpha^2} - 2 \frac{h^2}{12R^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \beta^2} \right] - \right. \\ \left. - \frac{2}{1-\nu} \frac{\partial^2}{\partial \alpha^2} \frac{\Phi^*}{K} - \frac{1}{K} \frac{\partial^2}{\partial \beta^2} \Phi^* - 2(1+\nu) \frac{\partial^2 w}{\partial \alpha^2} - \frac{\partial^2 w}{\partial \alpha^2} - \frac{\partial^2 w}{\partial \beta^2} \right\} + \frac{1-\nu}{2} S = 0, \quad (3.16)$$

$$\frac{\partial^4}{\partial \tau^4} \left\{ \frac{1-\nu}{2} \frac{\partial^2 L_0}{\partial \alpha^2} + \frac{\partial^2 L_0}{\partial \beta^2} \right\} + \frac{1-\nu}{2} \frac{\partial^2}{\partial \tau^2} \left\{ \nabla \nabla \left(w - \frac{h^2}{6R^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \alpha^2} - \frac{3-\nu}{1-\nu} \frac{h^2}{12R^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \beta^2} \right) - \right. \\ \left. - \frac{1}{K} \frac{\partial^2 \Phi^*}{\partial \alpha^2} - \frac{2}{1-\nu} \frac{1}{K} \frac{\partial^2 \Phi^*}{\partial \beta^2} - \frac{\partial^2 w}{\partial \alpha^2} \right\} + \frac{1-\nu}{2} S = 0, \quad (3.17)$$

$$\Phi^* = N \frac{\partial^2 w}{\partial \alpha^2} + 2T \frac{\partial^2 w}{\partial \beta^2} + PR \frac{\partial^2 w}{\partial \beta^2}, \quad L_0 = \frac{h^2}{12R^2} \nabla^2 w - w.$$

Оценим члены, содержащие силы инерции вращения, предполагая, что в течение времени изменяется только амплитуда, а число волн в поперечном и продольном направлениях не меняется. Пусть $r^2 = n^2 + m^2 \frac{\pi^2 R^2}{\varepsilon^2}$, где n — число поперечных волн, m — число продольных волн. При средних длинах $r \sim (m^2 + n^2)^{1/2}$. Влияние сил инерции вращения порядка h/R , если $r \sim \left(\frac{R}{h}\right)^{1/2}$; порядка $(h/R)^{1/2}$, если $r \sim \left(\frac{R}{h}\right)^{3/4}$ и порядка 1, если $r \sim \frac{R}{h}$.

Рассмотрим случай, когда $r \sim \left(\frac{R}{h}\right)^{1/2}$. Тогда силами инерции вращения можно пренебречь. Так как мы пользуемся уравнением движения, где пренебрегли сдвигом по сравнению с единицей, то пренебрежение величинами порядка сил инерции вращения уже сделано. Для нетонких оболочек влияние сил инерции вращения может быть значительным.

Итак, пренебрегая влиянием сил инерции вращения в уравнении (3.14), получим:

$$\frac{\partial^6 w}{\partial \tau^6} + \frac{\partial^4}{\partial \tau^4} \left\{ w - \frac{3-\nu}{2} \nabla w + \frac{1}{K} \Phi^* \right\} + \frac{1-\nu}{2} \frac{\partial^2}{\partial \tau^2} \left\{ \nabla \nabla w - \frac{3-\nu}{1-\nu} \frac{1}{K} \nabla \Phi^* - \right. \\ \left. - \frac{\partial^2 w}{\partial \beta^2} - (3+2\nu) \frac{\partial^2 w}{\partial \alpha^2} \right\} + \frac{1-\nu}{2} S = 0. \quad (3.18)$$

Уравнение такого типа при $\Phi^* = 0$ получено в [5]. Уравнение (3.17) автоматически включает в себя уравнение статической устойчивости [1]:

$$S = 0. \quad (3.19)$$

Пренебрегая тангенциальными силами инерции, получим:

$$\frac{\partial^2}{\partial \tau^2} \nabla \nabla w + \varepsilon^* \frac{\partial}{\partial \tau} \nabla \nabla w + S - \frac{1}{R} \nabla \nabla \chi_3 = 0, \text{ где } \varepsilon^* = -\varepsilon R \left(\frac{h}{\rho K} \right)^{1/2} \quad (3.20)$$

Для примера рассмотрим собственные колебания цилиндра средней длины при шарнирном закреплении концов. Прогиб выбираем в виде:

$$w = \sum_{m, n} f_{n, m}(\tau) \sin \lambda_m \alpha \cdot \sin \beta_n \quad (3.21)$$

Выбирая $f_{n, m} = A_{n, m} \begin{cases} \sin \omega_{nm} \tau \\ \cos \omega_{nm} \tau \end{cases}$ и подставляя выражение (3.21) в (3.18), находим при $\Phi^* = 0$:

$$\omega_{nm}^6 - \varphi_4 \omega_{nm}^4 + \varphi_2 \omega_{nm}^2 - \varphi_0 = 0, \quad (3.22)$$

где ω_{nm}^2 — безразмерная круговая частота;

$$\varphi_4 = 1 + \frac{3-\nu}{2} r^2, \quad \varphi_2 = \frac{1-\nu}{2} [r^4 + n^2 + (3+2\nu)\lambda_m^2], \\ \varphi_0 = \frac{1-\nu}{2} \left[\frac{D}{kR^2} r^8 + (1-\nu^2)\lambda_m^4 \right]. \quad (3.23)$$

Определяя ω_{nm} из уравнения (3.22), находим:

$$\omega_{mn}^2 = \frac{1}{R^2} \cdot \frac{K}{\rho(1-\nu^2)} \omega_{mn}^2 \quad (3.24)$$

Обозначив $\omega_{mn}^2 = z$, для определения z получим уравнение третьей степени:

$$z^3 - \varphi_4 z^2 + \varphi_2 z - \varphi_0 = 0. \quad (3.25)$$

Сначала рассмотрим поперечные колебания без учета тангенциальных сил инерции. Из (3.20) при $\varepsilon = 0$ и $\chi_3 = 0$ получим:

$$\omega_{mn}^2 = \frac{h^2}{12R^2} r^4 + (1-\nu^2) \frac{\lambda_m^4}{r^4}. \quad (3.26)$$

Это уравнение рассмотрено в [3] и [4]. Оказывается, экстремальные значения ω_{mn}^2 находятся из условий: а) $m=1$, а n из условия б) $\frac{h^2}{12R^2} r^8 = (1-\nu^2)\lambda_m^4$. Условие „б“ означает, что при некоторой частоте колебания энергия изгиба должна равняться энергии растяжения серединной поверхности. Учитывая „б“, выражение (3.25) перепишем в виде:

$$\omega_{mn \text{ мин.}}^2 = \left(\frac{1-\nu^2}{3} \right)^{1/2} \frac{\pi^2 R h}{l^2}; \quad \omega_{mn \text{ мин.}}^2 = \left(\frac{1-\nu^2}{3} \right)^{1/2} \left(\frac{\pi}{l} \right)^2 \frac{K}{\rho R}. \quad (3.27)$$

Формула (3.27) очень удобна для практических вычислений. Находим корни (3.25). Пусть $z_1 > z_2 > z_3$, где z_1 и z_2 выражают частоты собственных тангенциальных колебаний. Заметим, что z_1 и z_2 получили бы достаточно точно из (3.16), а z_3 и z_3 из (3.17). Сравним z_3 и $\omega_{(3.26)}^2$ при $m=1$, $R=20$ см, $h=0,1$, $\nu=0,3$.

Таблица 2

l см	ω^2	1	2	3	4	5	6	7
20	$\omega_{3.26}^2 \cdot 10^3$	750	461	246	136	75,4	46,5	32,8
	$z_3 \cdot 10^3$	744	434	224	127	72,6	45,2	32,1
	$\omega_{3.26}^2 \cdot z_3^{-1}$	1,09	1,06	1,11	1,07	1,04	1,03	1,02
40	$\omega_{3.26}^2 \cdot 10^3$	462	133	42,4	11,0	8,92	6,83	7,61
	$z_3 \cdot 10^3$	328	112	37,2	16,0	8,67	6,72	7,42
	$\omega_{3.26}^2 \cdot z_3^{-1}$	1,40	1,18	1,14	1,06	1,03	1,02	1,02
60	$\omega_{3.26}^2 \cdot 10^3$	249	42,2	11,0	4,35	3,03	3,66	5,67
	$z_3 \cdot 10^3$	140	32,9	9,72	4,02	2,90	3,56	5,55
	$\omega_{3.26}^2 \cdot z_3^{-1}$	1,78	1,28	1,13	1,08	1,04	1,03	1,02
80	$\omega_{3.26}^2 \cdot 10^4$	1320	163	39,3	17,03	18,5	30,5	52,2
	$z_3 \cdot 10^4$	660	127	35,1	17,2	17,8	29,7	51,2
	$\omega_{3.26}^2 \cdot z_3^{-1}$	2,01	1,35	1,12	1,08	1,04	1,03	1,02
100	$\omega_{3.26}^2 \cdot 10^4$	729	73,8	17,9	10,9	15,6	28,7	51,4
	$z_3 \cdot 10^4$	348	58,0	16,2	10,2	15,1	27,9	50,2
	$\omega_{3.26}^2 \cdot z_3^{-1}$	2,09	1,27	1,11	1,06	1,04	1,03	1,02
120	$\omega_{3.26}^2 \cdot 10^4$	397	37,8	9,75	7,64	14,4	26,6	50,9
	$z_3 \cdot 10^4$	196	29,9	8,52	7,57	13,8	26,2	49,8
	$\omega_{3.26}^2 \cdot z_3^{-1}$	2,02	1,27	1,14	1,10	1,04	1,01	1,02

Как видно из таблицы 2, влияние тангенциальных сил инерции быстро убывает с ростом n . При определении наименьших собственных частот влиянием тангенциальных сил инерции можно пренебречь. Но они оказывают большое влияние при колебаниях с малым числом поперечных волн. Например, при $n=1$ тангенциальные силы инерции уменьшают поперечную частоту до 40–45%, при $n=2$ — до 12–16%, при $n=3$ — до 6–7%. Казалось бы, что при малых n уравнениями пологих оболочек нельзя пользоваться. Оказывается, для круглого цилиндра средней длины при малых n член изгибного характера $(\lambda^2 + n^2)^4 \frac{h^2}{12R^2}$ намного меньше, чем $(1-\nu^2)\lambda^4$. Если учесть перерезывающие усилия в первых двух уравнениях движения и изменения кривизны за счет тангенциальных перемещений, то получили бы дополнительное выражение одного порядка или меньше, чем $(\lambda^2 + n^2)^4 \frac{h^2}{12R^2}$, но, конечно, намного меньше, чем член $(1-\nu^2)\lambda^4$ (при малых n).

Задачи о влиянии предварительного нагружения на частоты собственных колебаний не представляют особых трудностей. Например, легко найти такое N , чтобы цилиндрическая оболочка имела требуемые частоты собственных колебаний.

1. Х. М. Мушгари, К. З. Галимов. Нелинейная теория упругих оболочек. Таткингонздат, 1957.
2. В. В. Болотин. Динамическая устойчивость упругих систем. Гос. изд. тех.-теор. лит., 1956.
3. О. Д. Онишвили. Некоторые динамические задачи теории оболочек. Изд. АН СССР, 1957.
4. В. Е. Бреславский. О колебаниях цилиндрических оболочек. Инженерный сборник, том XVI, 1953.
5. W. Flugge. Statik und Dynamik der Schalen. Berlin, 1934.

Поступила 30.V 1959 г.

Н. И. Кривошеев

ОБ УСТОЙЧИВОСТИ ПОЛОГОГО СФЕРИЧЕСКОГО СЕГМЕНТА ПРИ СОВМЕСТНОМ ДЕЙСТВИИ ЛИНЕЙНОЙ НАГРУЗКИ И РАВНОМЕРНОГО ВНЕШНЕГО ДАВЛЕНИЯ

В статье рассматривается устойчивость пологого сферического сегмента при одновременном действии линейной нагрузки, равномерно распределенной вдоль концентрической окружности, и внешнего нормального давления. Решение дается с учетом несимметричной формы потери устойчивости.

1. Пусть тонкий изотропный сегмент толщины t , радиуса кривизны R находится под действием линейной нагрузки q , равномерно распределенной вдоль концентрической окружности радиуса b , и равномерного внешнего давления p , действующего на части поверхности сегмента. Задача об изгибе такого сегмента приводит к системе дифференциальных уравнений [1]:

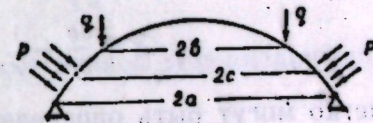


Рис. 1.

$$\frac{D}{t} \Delta \Delta w = \left(\frac{1}{R} + \frac{\partial^2 w}{\partial r^2} \right) \left(\frac{1}{r} \cdot \frac{\partial \Phi}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \cdot \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \varphi^2} \right) + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial r^2} \left(\frac{1}{R} + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial w}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial \varphi^2} \right) - 2 \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \cdot \frac{\partial \Phi}{\partial \varphi} \right) \cdot \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \cdot \frac{\partial w}{\partial \varphi} \right) + \frac{P}{t} + \frac{Q}{t}, \quad (1.1)$$

$$\Delta \Delta \Phi = E \left\{ \left[\frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \cdot \frac{\partial w}{\partial \varphi} \right) \right]^2 - \left(\frac{1}{R} + \frac{\partial^2 w}{\partial r^2} \right) \left(\frac{1}{r} \cdot \frac{\partial w}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial \varphi^2} \right) - \frac{1}{R} \frac{\partial^2 w}{\partial r^2} \right\}. \quad (1.2)$$

Здесь

w — прогиб;

$D = \frac{E t^3}{12(1-\nu^2)}$ — изгибная жесткость оболочки;

$\Delta = \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \cdot \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2}$ — оператор Лапласа. Величины P и Q

связаны с нагрузкой.

Напряжения $\sigma_r, \sigma_\varphi, \tau$ и моменты M_r, M_φ, H выражаются через функции w и Φ формулами:

$$\sigma_r = \frac{1}{r^2} \cdot \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \varphi^2} + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial \Phi}{\partial r}, \quad \sigma_\varphi = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial r^2}, \quad \tau = - \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \cdot \frac{\partial \Phi}{\partial \varphi} \right),$$

$$M_r = -D \left[\frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \nu \left(\frac{1}{r} \cdot \frac{\partial w}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial \varphi^2} \right) \right] \quad (1.3)$$

$$M_\varphi = -D \left[\frac{1}{r} \cdot \frac{\partial w}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial \varphi^2} + \nu \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial r^2} \right], \quad (1.3)$$

$$H = -D(1-\nu) \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \cdot \frac{\partial w}{\partial \varphi} \right).$$

К уравнениям (1.1) — (1.2) необходимо присоединить граничные условия, которые в случае шарнирного закрепления имеют вид:

$$w=0, \quad M_r=0, \quad u=0, \quad v=0 \quad \text{при } r=a, \quad (1.4)$$

где u, v — перемещения точки соответственно по меридиану ($\varphi = \text{const}$) и параллели ($r = \text{const}$).

С помощью закона Гука

$$\sigma_r = \frac{E}{1-\nu^2} (\epsilon_r + \nu \epsilon_\varphi), \quad \sigma_\varphi = \frac{E}{1-\nu^2} (\epsilon_\varphi + \nu \epsilon_r), \quad \tau = \frac{E}{2(1+\nu)} \gamma \quad (1.5)$$

и соотношений между деформациями $\epsilon_r, \epsilon_\varphi, \gamma$ и перемещениями

$$\epsilon_r = \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial r} \right)^2 - \frac{w}{R}, \quad \epsilon_\varphi = \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial v}{\partial \varphi} + \frac{u}{r} + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{r} \cdot \frac{\partial w}{\partial \varphi} \right)^2 - \frac{w}{R},$$

$$\gamma = \frac{\partial v}{\partial r} + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial u}{\partial \varphi} - \frac{v}{r} + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial w}{\partial \varphi} \cdot \frac{\partial w}{\partial r} \quad (1.6)$$

легко могут быть определены u, v .

Переходя к безразмерным величинам

$$\eta = \left(\frac{r}{a} \right)^2, \quad W = V \sqrt{12(1-\nu^2)} \frac{w}{t}, \quad \phi = \frac{\Phi t}{D},$$

$$k^* = V \sqrt{12(1-\nu^2)} \frac{a}{Rt}, \quad (1.7)$$

и принимая во внимание, что состояние равновесия до потери устойчивости является осесимметричным, уравнения (1.1) — (1.2) приводим к виду:

$$\frac{d}{d\eta} \eta \frac{d^2}{d\eta^2} \left(\eta \frac{dW}{d\eta} \right) = \frac{1}{8} \cdot \frac{d}{d\eta} \left[\eta \sigma^* (k^* + 2 \frac{dW}{d\eta}) \right] + \frac{V \sqrt{12(1-\nu^2)}}{16D} a^4 \left(\frac{P}{t} + \frac{Q}{t} \right), \quad (1.8)$$

$$\frac{d}{d\eta} \eta \frac{d^2}{d\eta^2} (\eta \sigma^*) + \frac{1}{2} \cdot \frac{d}{d\eta} \left(V \sqrt{12(1-\nu^2)} \eta \frac{dW}{d\eta} \right)^2 + \frac{k^*}{2} \cdot \frac{d}{d\eta} \left(\eta \frac{dW}{d\eta} \right) = 0. \quad (1.9)$$

Здесь через σ^* обозначено безразмерное радиальное напряжение

$$\sigma^* = 2 \frac{d\phi}{d\eta} \quad (1.10)$$

где ϕ — безразмерный угол поворота.

¹ В работе [2] рассмотрен случай осесимметричной деформации шарнирно закрепленного сегмента с допущением произвольного радиального смещения при действии нагрузки q ($p=0$).

Умножая уравнения (1.8) — (1.9) на $d\eta$ и интегрируя, получим:

$$\frac{d^2}{d\eta^2} \left(\eta \frac{dW}{d\eta} \right) = \frac{1}{8} \sigma^* \left(k^* + 2 \frac{dW}{d\eta} \right) + \frac{V \sqrt{12(1-\nu^2)}}{16Dt} a^4 \cdot \frac{1}{\eta} \left(\int_0^\eta P d\eta + \int_0^\eta Q d\eta \right) \quad (1.11)$$

$$\frac{d^2}{d\eta^2} (\eta \sigma^*) + \frac{k^*}{2} \cdot \frac{dW}{d\eta} + \frac{1}{2} \left(\frac{dW}{d\eta} \right)^2 = 0. \quad (1.12)$$

В случае, показанном на рис. 1,

$$\int_0^\eta P d\eta = 0, \quad \text{при } 0 \leq \eta \leq \left(\frac{c}{a} \right)^2,$$

$$\int_0^\eta P d\eta = P \left[\eta - \left(\frac{c}{a} \right)^2 \right], \quad \text{при } \left(\frac{c}{a} \right)^2 < \eta \leq 1, \quad (1.13)$$

$$\int_0^\eta Q d\eta = 0, \quad \text{при } \eta < \left(\frac{b}{a} \right)^2,$$

$$\int_0^\eta Q d\eta = 2 \frac{b}{a^2} \eta, \quad \text{при } \eta \geq \left(\frac{b}{a} \right)^2.$$

Граничные условия (1.4) в случае осесимметричной деформации преобразуем к виду:

$$W=0, \quad (1+\nu) \frac{dW}{d\eta} + 2\eta \frac{d^2 W}{d\eta^2} = 0,$$

$$(1-\nu) \sigma^* + 2\eta \frac{d\sigma^*}{d\eta} = 0 \quad \text{при } \eta=1. \quad (1.14)$$

Аппроксимируя форму прогиба функцией

$$W = W_0 \left(1 - \frac{6+2\nu}{5+\nu} \eta + \frac{1+\nu}{5+\nu} \eta^2 \right), \quad (1.15)$$

из уравнения (1.12) с учетом граничных условий (1.14) находим при $\nu=0,3$:

$$\sigma^* = -0,01 W_0^2 \eta^3 + (0,1015 W_0^2 - 0,0408 k^* W_0) \eta^2 - (0,388 W_0^2 - 0,311 k^* W_0) \eta + 0,91 W_0^2 - 0,925 k^* W_0. \quad (1.16)$$

Подставляя в уравнение (1.1) вместо W и σ^* их выражения из (1.15), (1.16) и интегрируя результат подстановки по методу Галеркина, получим зависимость между параметрами нагрузок и величиной W_0 безразмерного прогиба в центре сегмента:

$$2(1-1,245\alpha + 0,245\alpha^2) q^* + (0,46 - \beta + 0,622\beta^2 - 0,0815\beta^3) p^* = (0,2 + 0,0191k^{*2}) W_0 - 0,055k^* W_0^2 + 0,0344 W_0^3, \quad (1.17)$$

где

$$q^* = \frac{ba^2}{Et^4} q, \quad p^* = \frac{pa^4}{Et^4}, \quad \alpha = \left(\frac{b}{a} \right)^2, \quad \beta = \left(\frac{c}{a} \right)^2. \quad (1.18)$$

2. Теперь обратимся к рассмотрению неосесимметричной деформации сегмента. При этом мы будем рассматривать только момент

возникновения и исчезновения неосесимметричной деформации, т. е. будем определять критическую комбинацию нагрузок, не интересуясь процессом перехода от первого осесимметричного состояния ко второму. Это несущественное для практики ограничение позволяет нам считать неосесимметричные составляющие бесконечно малыми величинами, пренебрегая в дальнейшем их квадратами и произведениями.

Переходя в уравнениях (1.1) — (1.2) к обозначениям (1.7), подставляем вместо W и ψ величины $W + W_{II}$, $\psi + \psi_{II}$. Здесь и далее величины, отмеченные буквой „II“, характеризуют неосесимметричную деформацию сегмента. После подстановки получим уравнения нейтрального равновесия:

$$\Delta \Delta W_{II} = \left(\frac{1}{\eta} \cdot \frac{\partial^2 \psi_{II}}{\partial \varphi^2} + 2 \frac{\partial \psi_{II}}{\partial \eta} \right) \left(k^* + 4\eta \frac{d^2 W}{d\eta^2} + 2 \frac{dW}{d\eta} \right) + \left(4\eta \frac{\partial^2 \psi_{II}}{\partial \eta^2} + 2 \frac{\partial \psi_{II}}{\partial \eta} \right) \left(k^* + 2 \frac{dW}{d\eta} \right) + \sigma^* \left(4\eta \frac{\partial^2 W_{II}}{\partial \eta^2} + 4 \frac{\partial W_{II}}{\partial \eta} + \frac{1}{\eta} \cdot \frac{\partial^2 W_{II}}{\partial \varphi^2} \right) + 2\eta \frac{d\sigma^*}{d\eta} \left(2 \frac{\partial W_{II}}{\partial \eta} + \frac{1}{\eta} \cdot \frac{\partial^2 W_{II}}{\partial \varphi^2} \right), \quad (2.1)$$

$$\Delta \Delta \psi_{II} = - \left(4\eta \frac{\partial^2 W_{II}}{\partial \eta^2} + 2 \frac{\partial W_{II}}{\partial \eta} \right) \left(k^* + 2 \frac{dW}{d\eta} \right) - \left(2 \frac{\partial W_{II}}{\partial \eta} + \frac{1}{\eta} \cdot \frac{\partial^2 W_{II}}{\partial \varphi^2} \right) \left(k^* + 4\eta \frac{d^2 W}{d\eta^2} + 2 \frac{dW}{d\eta} \right).$$

Эта система уравнений является линейной и однородной относительно неизвестных функций W_{II} и ψ_{II} . Функции W и σ^* , входящие в эти уравнения, даются равенствами (1.15) и (1.16).

Положим

$$W_{II} = \xi(\eta) \cos m\varphi, \quad \psi_{II} = F(\eta) \cos m\varphi,$$

где m — целое число, характеризующее частоту волнообразования.

После подстановки этих выражений в уравнения (2.1) получим систему обыкновенных дифференциальных уравнений для определения функций ξ и F :

$$\Delta_1 \Delta_1 \xi = \left(-\frac{m^2}{\eta} F + 2 \frac{dF}{d\eta} \right) \left(k^* + 4\eta \frac{d^2 W}{d\eta^2} + 2 \frac{dW}{d\eta} \right) + \left(4\eta \frac{d^2 F}{d\eta^2} + 2 \frac{dF}{d\eta} \right) \left(k^* + 2 \frac{dW}{d\eta} \right) + \sigma^* \left(4\eta \frac{d^2 \xi}{d\eta^2} + 4 \frac{d\xi}{d\eta} - \frac{m^2}{\eta} \xi \right) + 2\eta \frac{d\sigma^*}{d\eta} \left(2 \frac{d\xi}{d\eta} - \frac{m^2}{\eta} \xi \right), \quad (2.2)$$

$$\Delta_1 \Delta_1 F = - \left(4\eta \frac{d^2 \xi}{d\eta^2} + 2 \frac{d\xi}{d\eta} \right) \left(k^* + 2 \frac{dW}{d\eta} \right) - \left(2 \frac{d\xi}{d\eta} - \frac{m^2}{\eta} \xi \right) \left(k^* + 4\eta \frac{d^2 W}{d\eta^2} + 2 \frac{dW}{d\eta} \right),$$

где

$$\Delta_1 = 4 \frac{d}{d\eta} \eta \frac{d}{d\eta} - \frac{m^2}{\eta}. \quad (2.3)$$

С помощью закона Гука (1.5) и соотношений между деформациями и перемещениями

$$\epsilon_r = \frac{\partial u_{II}}{\partial r} + \frac{\partial w}{\partial r} \cdot \frac{\partial w_{II}}{\partial r} - \frac{w_{II}}{R}, \quad \epsilon_\varphi = \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial v_{II}}{\partial \varphi} + \frac{u_{II}}{r} - \frac{w_{II}}{R},$$

находим безразмерные перемещения \bar{u}_{II} и \bar{v}_{II} :

$$\bar{u}_{II} = \left\{ \frac{1}{2} \int \frac{1}{V\eta} \left[-\frac{m^2}{\eta} F + 2(1-\nu) \frac{dF}{d\eta} - 4\nu\eta \frac{d^2 F}{d\eta^2} + k^* \xi - 4\eta \frac{dW}{d\eta} \cdot \frac{d\xi}{d\eta} \right] d\eta + \bar{u}_0 \right\} \cos m\varphi, \quad (2.4)$$

$$\bar{v}_{II} = \frac{1}{m} \left\{ V\eta \left[4\eta \frac{d^2 F}{d\eta^2} + 2(1-\nu) \frac{dF}{d\eta} + \nu \frac{m^2}{\eta} F + k^* \xi \right] \sin m\varphi - \int \bar{u}_{II} d\varphi \right\}.$$

Постоянная интегрирования \bar{u}_0 определена ниже.

Примем за ξ выражение

$$\xi = \xi_0 (\eta^2 + \mu_1 \eta^3 + \mu_2 \eta^4). \quad (2.5)$$

Отсутствие прогиба и радиального момента на контуре сегмента приводит к условиям:

$$\xi = 0, \quad 2\eta \frac{d^2 \xi}{d\eta^2} + (1+\nu) \frac{d\xi}{d\eta} - \nu \frac{m^2}{\eta} \xi = 0 \quad \text{при } \eta = 1. \quad (2.6)$$

Эти условия будут выполнены, если положим при $\nu = 0,3$:

$$\mu_1 = -1,699; \quad \mu_2 = 0,699.$$

Подставив в правую часть второго уравнения (2.2) W из (1.15) и ξ из (2.5), найдем

$$F = \left\{ F_0 + \sum_{i=3}^6 \eta^i (B_i + A_i \ln \eta) \right\} \xi_0. \quad (2.7)$$

Здесь F_0 — решение однородного уравнения $\Delta_1 \Delta_1 F_0 = 0$,

$$A_i = -\frac{\lambda_i g_{2i,2}^{(i-1)}}{8(2i-1)[4i(i-1)-m^2]}, \quad B_i = -\frac{\lambda_i g_{2i,2}^{(i-1)}}{(4i^2-m^2)[4(i-1)^2-m^2]},$$

$$\lambda_3 = (16-m^2) \cdot (k^* - 2,49W_0), \quad \lambda_4 = (176-7,17m^2)W_0 - 1,699k^*(36-m^2),$$

$$\lambda_5 = (6,75m^2 - 191,2)W_0 + 0,699k^*(64-m^2);$$

$$\lambda_6 = 0,685(80-3m^2)W_0. \quad (2.8)$$

$$g_{2i,2}^{(i-1)} = \begin{cases} 1, & \text{если } m = 2i, 2(i-1); \\ 0, & \text{если } m \neq 2i, 2(i-1); \end{cases}$$

$$g_{2i,2}^{(i-1)} = \begin{cases} 0, & \text{если } m = 2i, 2(i-1); \\ 1, & \text{если } m \neq 2i, 2(i-1). \end{cases}$$

а) Рассмотрим отдельно случай $m=1$. Полагая в уравнении $\Delta_1 \Delta_1 F_0 = 0$ $m=1$, после интегрирования получим:

$$F_0 = b_1 \eta^{3/2} + b_2 \eta^{1/2} + b_3 \eta^{1/2} \ln \eta + b_4 \eta^{-1/2}. \quad (2.9)$$

Определим постоянные интегрирования b_1, b_2, b_3 и b_4 . Независимо от условий закрепления сегмента мембранные напряжения в центре ($\eta=0$) должны быть ограничены. Из этого следует, что

$$b_2 = b_3 = b_4 = 0. \quad (2.10)$$

Постоянная b_1 позволит нам выполнить одно из условий на контуре для тангенциальных перемещений \bar{u}_{II} и \bar{v}_{II} . Второму условию удовлетворим при помощи постоянной \bar{u}_0 , которая при $m=1$ является свободной. В самом деле, из закона Гука имеем:

$$\gamma_{II} = \frac{2(1+\nu)}{E} \tau_{II}. \quad (2.11)$$

С другой стороны,

$$\gamma_{ii} = \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial u_{ii}}{\partial \varphi} + \frac{\partial v_{ii}}{\partial r} - \frac{v_{ii}}{r} + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial w_{ii}}{\partial \varphi} \cdot \frac{\partial w}{\partial r}. \quad (2.12)$$

Непосредственной проверкой легко убеждаемся, что последние равенства не противоречат друг другу при любых значениях \bar{u}_0 . Таким образом, постоянная \bar{u}_0 остается произвольной, которой мы можем распорядиться так, чтобы $\bar{u}_{ii} = 0$ при $\eta = 1$. Из условия $\bar{v}_{ii} = 0$ при $\eta = 1$ или, что то же,

$$4\eta \frac{d^2 F}{d\eta^2} + 2(1-\nu) \frac{dF}{d\eta} + \nu \frac{m^2}{\eta} F = 0 \quad \text{при } \eta = 1$$

определяем b_1 :

$$b_1 = -\frac{1}{6-2\nu} \sum_{i=3}^6 (2i-1)(2i-\nu) B_i. \quad (2.13)$$

Тем самым все граничные условия выполнены. Из первого уравнения системы (2.2) после подстановки W , σ^* , ξ и F соответственно из (1.15), (1.16), (2.5), (2.7) с помощью метода Галеркина находим уравнение для определения критического значения W_0 :

$$W_0^2 - 1,185k^*W_0 + 0,078k^{*2} + 75,8 = 0. \quad (2.14)$$

Корни этого уравнения действительны при $k^* > 17$. Следовательно, неосесимметричная форма потери устойчивости сферического сегмента имеет место при $k^* > 17$.

б) В случае $m > 1$ решение однородного уравнения $\Delta_1 \Delta_1 F_0 = 0$ имеет вид:

$$F_0 = b'_1 \eta^1 + b'_2 \eta^2 + b'_3 \eta^3 + b'_4 \eta^4, \quad (2.15)$$

$$r_1 = 1 + \frac{m}{2}, \quad r_2 = \frac{m}{2}, \quad r_3 = -\frac{m}{2}, \quad r_4 = 1 - \frac{m}{2}.$$

Из условия ограниченности мембранных напряжений при $\eta = 0$ следует, что

$$b'_3 = b'_4 = 0. \quad (2.16)$$

Далее, при $m > 1$ равенства (2.11) и (2.12) не противоречат друг другу только при $\bar{u}_0 = 0$. Граничные условия $\bar{u}_{ii} = 0$, $\bar{v}_{ii} = 0$ при $\eta = 1$ будут выполняться, если положить:

$$b'_1 = -\frac{1}{2m(3-\nu)} \left\{ \sum_{i=3}^6 [2i(2i-1) + \nu(m^2-2i)] B_i + \right.$$

$$+ (m-1) \sum_{i=3}^6 \frac{2i-m^2+2\nu(1-2i)}{2i-1} B_i + 2 \sum_{i=3}^6 (4i-1-\nu) A_i +$$

$$+ 2(m-1) \sum_{i=3}^6 \left[\frac{1+\nu(1-2i)}{2i-1} - \frac{2i^2-m^2}{(2i-1)^2} A_i + \right.$$

$$\left. + (m-1)(0,03494k^* - 0,0352W_0) \right\}, \quad (2.17)$$

$$b'_2 = -\frac{1}{m(m-1)(1+\nu)} \left\{ (m+1)[m+2+\nu(m-2)] b'_1 + \right.$$

$$\left. + \sum_{i=3}^6 [2i(2i-1) + \nu(m^2-2i)] B_i + 2 \sum_{i=3}^6 (4i-1-\nu) A_i \right\}.$$

Подставив в первое уравнение системы (2.2) вместо W , σ^* , ξ и F их выражения соответственно из равенств (1.15), (1.16), (2.5), (2.7) и интегрируя результат по методу Галеркина, получим уравнение для определения величины W_0 . Это уравнение можно представить в виде:

$$W_0^2 - Lk^*W_0 + Mk^{*2} + N = 0. \quad (2.18)$$

Коэффициенты L , M , N зависят только от m . Во избежание громоздких записей мы не приводим их явных выражений. Численные значения L , M , N даны ниже.

m	L	M	N
1	1,185	0,078	75,8
2	1,17	0,063	80
3	1,14	0,047	90
4	1,12	0,0336	108,5
5	1,095	0,0243	136,2

Решая уравнение (2.18) для заданного значения k^* , найдем критические значения величины W_0 (W_{01}^* , W_{02}^*), при которых соответственно появляется и исчезает неосесимметричная форма прогиба.

Подставляя найденные значения W_{01}^* и W_{02}^* в формулу (1.17), определяем критические комбинации нагрузок хлопка и выхлопа. При этом число волн m подбирается для каждого значения k^* из условия экстремальности критической комбинации нагрузок или, что то же, из условия экстремальности величины W_0 .

В самом деле, положим

$$T = 2 \cdot (1 - 1,245\alpha + 0,245\alpha^2) q^* + [0,46 - (\beta - 0,622\beta^2 + 0,0815\beta^3)] p^*.$$

Тогда при фиксированных значениях k^* , α и β из (1.17) и (2.18) следует, что

$$\frac{\partial T}{\partial m} = \frac{\partial T}{\partial m} + \frac{\partial T}{\partial W_0} \cdot \frac{dW_0}{dm} = 0.$$

Так как $\frac{\partial T}{\partial m} = 0$, то $\frac{\partial T}{\partial W_0} \cdot \frac{dW_0}{dm} = 0$. Если $\frac{\partial T}{\partial W_0} = 0$, то мы имеем случай потери устойчивости по осесимметричной форме. Этот случай имеет место при $k^* < 17$. Следовательно, при $k^* > 17$ условие экстремальности T по m эквивалентно условию $\frac{dW_0}{dm} = 0$, причем число волн m ,

соответствующее критической комбинации нагрузок хлопка, не обязательно должно совпадать со значением m для нагрузки выхлопа.

Вычисления показывают, что зависимость между значениями нагрузок в момент хлопка и геометрическими характеристиками сегмента с удовлетворительной точностью может быть представлена в виде:

$$2(1 - 1,245\alpha + 0,245\alpha^2) \frac{qba^2}{Et^4} + (0,46 - \beta + 0,622\beta^2 - 0,0815\beta^3) \frac{pa^4}{Et^4} =$$

$$= -81 \left(\frac{Rt}{a^2} \right) + 1,24 \left(\frac{a^2}{Rt} \right) + 0,555 \left(\frac{a^2}{Rt} \right)^2, \quad \frac{a^2}{Rt} \geq 6, \quad (2.19)$$

где α и β даны равенствами (1.18).

ЛИТЕРАТУРА

- Муштарн Х. М., Галимов К. З. Нелинейная теория упругих оболочек, стр. 175-180, 1957.
- Hu Hai-Chang. On the Snapping of a Thin Spherical Cap. Sci. Sinica, v. III, № 4, 1954.

Поступила 12.X 1959 г.

ОГЛАВЛЕНИЕ

Хамид Музафарович Муштари (к 60-летию со дня рождения)	5
Список научных трудов профессора Х. М. Муштари (1924—1960 гг.) . . .	10
Галимов К. З. Некоторые вопросы теории конечных деформаций пластин и оболочек.	13
Муштари Х. М., Суркин Р. Г. Поперечный изгиб опертой квад- ратной пластинки при нелинейной зависимости между деформацией и напря- жением	23
Саченков А. В. О локальной устойчивости оболочек	35
Корнишин М. С. Применение метода коллокации к решению некото- рых линейных и нелинейных задач теории пластин	43
Исанбаева Ф. С. Экспериментальное исследование устойчивости круговых цилиндрических оболочек под действием всестороннего внешнего давления	55
Свирский И. В., Галимов Н. К. О сведении расчета двухслой- ных и многослойных оболочек к расчету однослойных оболочек	71
Саченков А. В. К расчету двухслойных оболочек	75
Саченков А. В. Некоторые вопросы прочности и устойчивости мно- гослойных оболочек.	81
Ганеева М. С. Некоторые основные соотношения теории пологих оболочек, находящихся в неравномерном температурном поле	89
Винокуров С. Г. К теории изгиба цилиндрической панели, нахо- дящейся в неравномерном температурном поле.	93
Якушев Н. З. К динамическим задачам теории тонких оболочек	97
Кривошеев Н. И. Об устойчивости пологого сферического сегмен- та при совместном действии линейной нагрузки и равномерного внешнего давления.	109