

АКАДЕМИЯ НАУК СССР  
КАЗАНСКИЙ ФИЛИАЛ

---

**ИЗВЕСТИЯ  
КАЗАНСКОГО ФИЛИАЛА  
АКАДЕМИИ НАУК СССР**

*СЕРИЯ ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИХ  
И ТЕХНИЧЕСКИХ НАУК*

13



---

КАЗАНЬ

1959

# ИЗВЕСТИЯ КАЗАНСКОГО ФИЛИАЛА АКАДЕМИИ НАУК СССР

*СЕРИЯ ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИХ  
И ТЕХНИЧЕСКИХ НАУК*

Выпуск 13

НЕКОТОРЫЕ ГИДРОДИНАМИЧЕСКИЕ ЗАДАЧИ  
РАЦИОНАЛЬНОЙ РАЗРАБОТКИ НЕФТЯНЫХ  
МЕСТОРОЖДЕНИЙ



ПОСВЯЩАЕТСЯ Сорокалетию  
ТАТАРСКОЙ АВТОНОМНОЙ СОВЕТСКОЙ  
СОЦИАЛИСТИЧЕСКОЙ РЕСПУБЛИКИ

Ответственный редактор доктор физико-математических наук  
профессор Г. С. Силехов

п 45885  
Центральная научная  
БИБЛИОТЕКА  
Академии наук Киргизской ССР

Печатается по постановлению Редакционно-издательского совета  
Казанского филиала Академии наук СССР

В. Д. ЧУГУНОВ

### К ОПРЕДЕЛЕНИЮ ДАВЛЕНИЯ В НЕОДНОРОДНЫХ ПЛАСТАХ

В работе дано решение задачи о восстановлении давления в неограниченно простирающемся кусочно-однородном пласте при упруго-водонапорном режиме. Предполагается, что коэффициенты проницаемости и пьезопроводности имеют постоянные, но различные значения в соответствующих областях. В области  $G_1$  имеются  $l_1$ , а в области  $G_2 - l_2$  источников или стоков интенсивности

$$Q_i(t) \quad (i=1, 2, \dots, l_1 + l_2).$$

§ 1. Постановка задачи. Требуется найти давление в неограниченно простирающемся кусочно-однородном пласте, если известно, что в области  $G_1$  имеется  $l_1$  эксплуатационных скважин с дебитами  $Q_{1i}(t)$  ( $i=1, 2, \dots, l_1$ ), а в области  $G_2$ , внешней к  $G_1$ , имеется  $l_2$  скважин с дебитами  $Q_{2i}(t)$  ( $i=1, 2, \dots, l_2$ ). Область  $G_1$  — круг радиуса  $R$ . Режим пласта всюду постоянен и равен  $h$ . Вязкости воды и нефти равны ( $\mu_w = \mu_n = \mu_1$ ).

Математически задача может быть сформулирована таким образом: найти решения дифференциальных уравнений [1]

$$a_1 \Delta p_1 = \frac{\partial p_1}{\partial t}, \quad (1.1)$$

$$a_2 \Delta p_2 = \frac{\partial p_2}{\partial t}, \quad (1.2)$$

удовлетворяющие следующим начальным и краевым условиям

$$p_1(r, \theta, 0) = p_2(r, \theta, 0) = 0, \quad (1.3)$$

$$p_1(R, \theta, t) = p_2(R, \theta, t), \quad (1.4)$$

$$c_1 \frac{\partial p_1}{\partial r} \Big|_{r=R} = c_2 \frac{\partial p_2}{\partial r} \Big|_{r=R}, \quad (1.5)$$

$$\lim_{r \rightarrow \infty} p_2(r, \theta, t) = 0. \quad (1.6)$$

(В условиях (1.3) и (1.6) в правой части можно положить  $p = p_0 = \text{const}$ ). Кроме того, функции  $p_1(r, \theta, t)$  и  $p_2(r, \theta, t)$  соответственно в точках  $N_{1i}(r_{1i}, \alpha_{1i}) \in G_1$  и  $N_{2i}(r_{2i}, \alpha_{2i}) \in G_2$  должны иметь особенность типа теплового источника или стока заданной обильности.

Здесь введены следующие обозначения:

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \quad \text{— оператор Лапласа,}$$

$p_{1i}$  и  $p_{2i}$  — пластовые давления,

$$c_1 = \frac{k_1}{\mu_1}, \quad c_2 = \frac{k_2}{\mu_1}, \quad k_1 \text{ и } k_2 - \text{проницаемости,}$$

$a_1, a_2$  — коэффициенты пьезопроводности соответственно в областях  $G_1$  и  $G_2$ . Предполагается, что параметры  $k_1, k_2, a_1$  и  $a_2$  являются постоянными.

Для решения поставленной выше задачи воспользуемся функциональным преобразованием Лапласа по переменному  $t$

$$\bar{p}(r, \theta, s) = \int_0^\infty e^{-s\tau} p(r, \theta, \tau) d\tau,$$

где  $\bar{p}(r, \theta, s)$  — Лапласово изображение функции (оригинала)  $p(r, \theta, t)$ . Дифференциальные уравнения (1.1), (1.2) после применения к ним преобразования Лапласа, с учетом начальных условий (1.3), принимают вид

$$a_1 \Delta \bar{p}_1 - s \bar{p}_1 = 0, \quad (1.7)$$

$$a_2 \Delta \bar{p}_2 - s \bar{p}_2 = 0. \quad (1.8)$$

Соотношения (1.4), (1.5), (1.6) записываются в следующей форме:

$$\bar{p}_1(R, \theta, s) = \bar{p}_2(R, \theta, s), \quad (1.9)$$

$$c_1 \left. \frac{\partial \bar{p}_1}{\partial r} \right|_{r=R} = c_2 \left. \frac{\partial \bar{p}_2}{\partial r} \right|_{r=R}, \quad (1.10)$$

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \bar{p}_2(r, \theta, s) = 0. \quad (1.11)$$

Рассмотрим прежде всего две следующие задачи.

**Задача I.** Найти изображения функций давления  $\bar{p}_{11}$  и  $\bar{p}_{12}$ , удовлетворяющие дифференциальным уравнениям (1.7) и (1.8) и условиям (1.9), (1.10) и (1.11), если в области  $G_1$  имеется только одна эксплуатационная скважина с дебитом  $Q_1(t)$ , расположенная в точке  $N_1(\rho_1, \alpha_1)$ . В области  $G_2$  отсутствуют эксплуатационные и нагнетательные скважины.

**Задача II.** Найти изображения функций давления  $\bar{p}_{21}$  и  $\bar{p}_{22}$ , удовлетворяющие тем же дифференциальным уравнениям и краевым условиям, если известно, что в точке  $N_2(\rho_2, \alpha_2)$  области  $G_2$  имеется только одна скважина с дебитом  $Q_2(t)$  (отрицательный знак дебита соответствует эксплуатационной скважине, положительный — нагнетательной скважине). В области  $G_1$  отсутствуют скважины.

В силу линейности дифференциальных уравнений (1.7), (1.8), а также краевых условий (1.9), (1.10), (1.11), общее решение поставленной задачи получится суперпозицией  $l_1$  решений задачи I и  $l_2$  решений задачи II.

§ 2. Решение задачи I. Будем искать решение уравнений (1.7) и (1.8) в виде

$$\bar{p}_{11}(r, \theta, s) = \frac{\mu_1}{2\pi k_1 h} \bar{Q}_1(s) \left\{ K_0 \left[ \sqrt{\frac{s}{a_1}} (r^2 - 2r\rho_1 \cos(\theta - \alpha_1) + \rho_1^2) \right] + \sum_{p=0}^{\infty} \bar{a}_p(s) I_p \left( r \sqrt{\frac{s}{a_1}} \right) K_p \left( R \sqrt{\frac{s}{a_1}} \right) \cos p(\theta - \alpha_1) \right\}, \quad (2.1)$$

$$\bar{p}_{12}(r, \theta, s) = \sum_{p=0}^{\infty} \bar{b}_p(s) I_p \left( R \sqrt{\frac{s}{a_2}} \right) K_p \left( r \sqrt{\frac{s}{a_2}} \right) \cos p(\theta - \alpha_1), \quad (2.2)$$

где

$$\bar{Q}_1(s) = \int_0^\infty Q_1(\tau) e^{-s\tau} d\tau, \quad \bar{a}_p(s) = \int_0^\infty e^{-s\tau} a_p(R, \tau) d\tau,$$

$$\bar{b}_p(s) = \int_0^\infty e^{-s\tau} b_p(R, \tau) d\tau,$$

$I_p, K_p$  — видоизмененные функции Бесселя первого и второго рода. Формально каждый член ряда (2.1) удовлетворяет уравнению (1.7) при любых  $\bar{a}_p(s)$ .

То же самое можно сказать и о ряде (2.2), каждый член которого удовлетворяет уравнению (1.8) при произвольных  $\bar{b}_p(s)$ . Попытаемся удовлетворить соотношениям (1.9) и (1.10). После несложных вычислений, для определения коэффициентов  $\bar{a}_p(s)$  и  $\bar{b}_p(s)$  получим следующую систему уравнений:

$$\left\{ \begin{aligned} I_0 \left( R \sqrt{\frac{s}{a_2}} \right) K_0 \left( R \sqrt{\frac{s}{a_2}} \right) \bar{b}_0(s) - I_0 \left( R \sqrt{\frac{s}{a_1}} \right) K_0 \left( R \sqrt{\frac{s}{a_1}} \right) \bar{a}_0(s) &= \\ &= \frac{1}{2\pi k_1 h} \bar{Q}_1(s) I_0 \left( \rho_1 \sqrt{\frac{s}{a_1}} \right) K_0 \left( R \sqrt{\frac{s}{a_1}} \right), \\ \frac{k_2}{k_1} \sqrt{\frac{a_1}{a_2}} I_0 \left( R \sqrt{\frac{s}{a_2}} \right) K_0' \left( R \sqrt{\frac{s}{a_2}} \right) \bar{b}_0(s) - \\ - I_0' \left( R \sqrt{\frac{s}{a_1}} \right) K_0 \left( R \sqrt{\frac{s}{a_1}} \right) \bar{a}_0(s) &= \\ &= \frac{1}{2\pi k_1 h} \bar{Q}_1(s) I_0 \left( \rho_1 \sqrt{\frac{s}{a_1}} \right) K_0' \left( R \sqrt{\frac{s}{a_1}} \right), \end{aligned} \right.$$

$$\left\{ \begin{aligned} I_p \left( R \sqrt{\frac{s}{a_2}} \right) K_p \left( R \sqrt{\frac{s}{a_2}} \right) \bar{b}_p(s) - I_p \left( R \sqrt{\frac{s}{a_1}} \right) K_p \left( R \sqrt{\frac{s}{a_1}} \right) \bar{a}_p(s) &= \\ &= \frac{1}{\pi k_1 h} \bar{Q}_1(s) I_p \left( \rho_1 \sqrt{\frac{s}{a_1}} \right) K_p \left( R \sqrt{\frac{s}{a_1}} \right), \\ \frac{k_2}{k_1} \sqrt{\frac{a_1}{a_2}} I_p \left( R \sqrt{\frac{s}{a_2}} \right) K_p' \left( R \sqrt{\frac{s}{a_2}} \right) \bar{b}_p(s) - \\ - I_p' \left( R \sqrt{\frac{s}{a_1}} \right) K_p \left( R \sqrt{\frac{s}{a_1}} \right) \bar{a}_p(s) &= \\ &= \frac{1}{\pi k_1 h} \bar{Q}_1(s) I_p \left( \rho_1 \sqrt{\frac{s}{a_1}} \right) K_p' \left( R \sqrt{\frac{s}{a_1}} \right). \end{aligned} \right.$$

Откуда

$$\bar{a}_0(s) = \frac{\mu_1}{2\pi k_1 h} \bar{Q}_1(s) I_0 \left( \rho_1 \sqrt{\frac{s}{a_1}} \right) \left[ \frac{K_0 \left( R \sqrt{\frac{s}{a_2}} \right) K_0' \left( R \sqrt{\frac{s}{a_1}} \right)}{K_0 \left( R \sqrt{\frac{s}{a_1}} \right) D_{10}} - \frac{k_2}{k_1} \frac{V \frac{a_1}{a_2} K_0' \left( R \sqrt{\frac{s}{a_2}} \right) K_0 \left( R \sqrt{\frac{s}{a_1}} \right)}{K_0 \left( R \sqrt{\frac{s}{a_1}} \right) D_{10}} \right],$$

$$\bar{v}_0(s) = \frac{\mu_1}{2\pi k_1 h} \bar{Q}_1(s) \frac{I_0\left(\rho_1 \sqrt{\frac{s}{a_1}}\right)}{R \sqrt{\frac{s}{a_1}} I_0\left(R \sqrt{\frac{s}{a_2}}\right) D_{10}},$$

$$\bar{a}_p(s) = \frac{\mu_1}{2\pi k_1 h} \bar{Q}_1(s) I_p\left(\rho_1 \sqrt{\frac{s}{a_1}}\right) \left[ \frac{K_p\left(R \sqrt{\frac{s}{a_2}}\right) K_p'\left(R \sqrt{\frac{s}{a_1}}\right)}{K_p\left(R \sqrt{\frac{s}{a_1}}\right) D_{1p}} - \frac{\frac{k_2}{k_1} \sqrt{\frac{a_1}{a_2}} K_p'\left(R \sqrt{\frac{s}{a_2}}\right) K_p\left(R \sqrt{\frac{s}{a_1}}\right)}{K_p\left(R \sqrt{\frac{s}{a_1}}\right) D_{1p}} \right],$$

$$\bar{b}_p(s) = \frac{\mu_1}{2\pi k_1 h} \frac{I_p\left(\rho_1 \sqrt{\frac{s}{a_1}}\right)}{R \sqrt{\frac{s}{a_1}} I_p\left(R \sqrt{\frac{s}{a_2}}\right) D_{1p}},$$

где

$$\begin{aligned} D_{1p} &= K_p\left(R \sqrt{\frac{s}{a_2}}\right) I_p'\left(R \sqrt{\frac{s}{a_1}}\right) - \\ &- \frac{k_2}{k_1} \sqrt{\frac{a_1}{a_2}} K_p'\left(R \sqrt{\frac{s}{a_2}}\right) I_p\left(R \sqrt{\frac{s}{a_1}}\right) = \\ &= \frac{1}{2} \left\{ K_p\left(R \sqrt{\frac{s}{a_2}}\right) \left[ I_{p+1}\left(R \sqrt{\frac{s}{a_1}}\right) + I_{p-1}\left(R \sqrt{\frac{s}{a_1}}\right) \right] + \right. \\ &\left. + \frac{k_2}{k_1} \sqrt{\frac{a_1}{a_2}} I_p\left(R \sqrt{\frac{s}{a_1}}\right) \left[ K_{p+1}\left(R \sqrt{\frac{s}{a_2}}\right) + K_{p-1}\left(R \sqrt{\frac{s}{a_2}}\right) \right] \right\}. \end{aligned}$$

При этом было учтено, что при  $r > \rho_1$  имеет место следующее разложение [5]

$$\begin{aligned} K_0\left[\sqrt{\frac{s}{a_1} (r^2 - 2r\rho_1 \cos(\theta - \alpha_1) + \rho_1^2)}\right] &= \\ &= I_0\left(\rho_1 \sqrt{\frac{s}{a_1}}\right) K_0\left(r \sqrt{\frac{s}{a_1}}\right) + \\ &+ 2 \sum_{p=1}^{\infty} I_p\left(\rho_1 \sqrt{\frac{s}{a_1}}\right) K_p\left(r \sqrt{\frac{s}{a_1}}\right) \cos p(\theta - \alpha_1), \end{aligned}$$

а также использовано соотношение [7]

$$K_p\left(R \sqrt{\frac{s}{a_1}}\right) I_p'\left(R \sqrt{\frac{s}{a_1}}\right) - K_p'\left(R \sqrt{\frac{s}{a_1}}\right) I_p\left(R \sqrt{\frac{s}{a_1}}\right) = \frac{1}{R \sqrt{\frac{s}{a_1}}}.$$

Определители систем  $D_{1p}$  отличны от нуля, как это будет показано ниже.

Заменяя коэффициенты  $\bar{a}_p(s)$  и  $\bar{b}_p(s)$  в (2.1), (2.2) найденными значениями, получаем:

$$\bar{p}_{11}(r, \theta, s) = \frac{\mu_1}{2\pi k_1 h} \bar{Q}_1(s) \left\{ K_0\left[\sqrt{\frac{s}{a_1} (r^2 - 2r\rho_1 \cos(\theta - \alpha_1) + \rho_1^2)}\right] + \right.$$

$$\begin{aligned} &+ \sum_{p=0}^6 \varepsilon_p \left[ \frac{K_p\left(R \sqrt{\frac{s}{a_2}}\right) \left\{ K_{p+1}\left(R \sqrt{\frac{s}{a_1}}\right) + K_{p-1}\left(R \sqrt{\frac{s}{a_1}}\right) \right\}}{D_{1p}} \right. \\ &\left. - \frac{\lambda_1 K_p\left(R \sqrt{\frac{s}{a_1}}\right) \left\{ K_{p+1}\left(R \sqrt{\frac{s}{a_2}}\right) + K_{p-1}\left(R \sqrt{\frac{s}{a_2}}\right) \right\}}{D_{1p}} \right] \times \end{aligned} \quad (2.4)$$

$$\times I_p\left(\rho_1 \sqrt{\frac{s}{a_1}}\right) I_p\left(r \sqrt{\frac{s}{a_1}}\right) \cos p(\theta - \alpha_1) \Big\},$$

$(r \in G_1)$

$$\bar{p}_{12}(r, \theta, s) = \frac{\mu_1}{2\pi k_1 h} \bar{Q}_1(s) \sum_{p=0}^{\infty} \varepsilon_p \frac{I_p\left(\rho_1 \sqrt{\frac{s}{a_1}}\right) K_p\left(r \sqrt{\frac{s}{a_2}}\right) \cos p(\theta - \alpha_1)}{R D_{1p} \sqrt{\frac{s}{a_1}}},$$

$(r \in G_2)$

(2.5)

где

$$\varepsilon_p = \begin{cases} 1 & \text{при } p = 0, \dots \\ 2 & \text{при } p = 1, 2, \dots \end{cases} \quad \lambda_1 = \frac{k_2}{k_1} \sqrt{\frac{a_1}{a_2}}.$$

Покажем, что ряды, входящие в выражения для  $\bar{p}_{11}(r, \theta, s)$  и  $\bar{p}_{12}(r, \theta, s)$  являются равномерно сходящимися в соответствующих областях  $G_1$  и  $G_2$ . Действительно рассмотрим ряды

$$\bar{u}_{11}(r, \theta, s) = \sum_{p=0}^{\infty} \varepsilon_p \left\{ \frac{K_p\left(R \sqrt{\frac{s}{a_2}}\right) \left[ K_{p+1}\left(R \sqrt{\frac{s}{a_1}}\right) + K_{p-1}\left(R \sqrt{\frac{s}{a_1}}\right) \right]}{D_{1p}} - \frac{\lambda_1 K_p\left(R \sqrt{\frac{s}{a_1}}\right) \left[ K_{p+1}\left(R \sqrt{\frac{s}{a_2}}\right) + K_{p-1}\left(R \sqrt{\frac{s}{a_2}}\right) \right]}{D_{1p}} \right\} \times$$

(2.6)

$$\times I_p\left(\rho_1 \sqrt{\frac{s}{a_1}}\right) I_p\left(r \sqrt{\frac{s}{a_1}}\right) \Big|$$

$$\bar{u}_{12}(r, \theta, s) = \sum_{p=0}^{\infty} \varepsilon_p \left| \frac{I_p\left(\rho_1 \sqrt{\frac{s}{a_1}}\right) K_p\left(r \sqrt{\frac{s}{a_2}}\right)}{D_{1p} R \sqrt{\frac{s}{a_1}}} \right|, \quad (2.7)$$

являющиеся мажорантами рядов, входящих в соотношения (2.4) и (2.5). Убедимся в том, что ряды (2.6) и (2.7) являются сходящимися.

Рассмотрим, например, ряд (2.7). Известно, что при  $p \rightarrow \infty$  имеют место следующие асимптотические представления функций  $I_p(z)$  и  $K_p(z)$  [5]

$$\lim_{p \rightarrow \infty} \left[ \frac{I_p(z)}{2^p \Pi(p)} \right] = 1, \quad \lim_{p \rightarrow \infty} \left[ \frac{K_p(z)}{2^p \left(\frac{2}{z}\right)^p} \right] = 1,$$

где

$$\Pi(p) = p!$$

Легко убедиться в том, что

$$\lim_{p \rightarrow \infty} \frac{\bar{B}_{p+1}}{\bar{B}_p} = \alpha < 1,$$

где

$$\bar{B}_p = \frac{I_p(x) K_p(y)}{z_1 \{K_p(z_2) [I_{p+1}(z_1) + I_{p-1}(z_1)] + \lambda_1 I_p(z_1) [K_{p+1}(z_2) + K_{p-1}(z_2)]\}},$$

$$\bar{B}_{p+1} = \frac{I_{p+1}(x) K_{p+1}(y)}{z_1 \{K_{p+1}(z_2) [I_{p+2}(z_1) + I_p(z_1)] + \lambda_1 I_{p+1}(z_1) [K_{p+2}(z_2) + K_p(z_2)]\}},$$

$$x = r_1 \sqrt{\frac{s}{a_1}}, \quad y = r \sqrt{\frac{s}{a_2}}, \quad z_1 = R \sqrt{\frac{s}{a_1}}, \quad z_2 = R \sqrt{\frac{s}{a_2}}.$$

Действительно

$$\lim_{p \rightarrow \infty} \frac{\bar{B}_{p+1}}{\bar{B}_p} = \lim_{p \rightarrow \infty} \frac{2^{p+1} \Pi(p+1) \cdot \frac{\Pi(p+1)}{2(p+1)} \left(\frac{2}{y}\right)^{p+1}}{2^p \Pi(p) \cdot \frac{\Pi(p)}{2^p} \left(\frac{2}{y}\right)^2} \left\{ \frac{\Pi(p)}{2^p} \left(\frac{1}{z_2}\right)^p \left[ \frac{z_1^{p+1}}{2^{p+1} \Pi(p+1)} + \right. \right.$$

$$\left. \left. + \frac{z_1^{p-1}}{2^{p-1} \Pi(p-1)} \right] + \lambda_1 \frac{z_1^p}{2^p \Pi(p)} \left[ \frac{\Pi(p+1)}{2(p+1)} \left(\frac{2}{z_2}\right)^{p+1} + \frac{\Pi(p-1)}{2(p-1)} \left(\frac{2}{z_2}\right)^{p-1} \right] \right\} \times$$

$$\times \left\{ \frac{\Pi(p+1)}{2(p+1)} \left(\frac{1}{z_2}\right)^{p+1} \left[ \frac{z_1^{p+2}}{2^{p+2} \Pi(p+2)} + \frac{z_1^p}{2^p \Pi(p)} \right] + \right.$$

$$\left. + \lambda_1 \frac{z_1^{p+1}}{2(p+1) \Pi(p+1)} \left[ \frac{\Pi(p+2)}{2(p+2)} \left(\frac{2}{z_2}\right)^{p+1} + \frac{\Pi(p)}{2^p} \left(\frac{2}{z_2}\right)^p \right] \right\}^{-1} =$$

$$= \lim_{p \rightarrow \infty} \frac{\frac{x}{y} \frac{p}{p+1} \left\{ \frac{z_1^{p-1}}{z_2^p} + \lambda_1 \frac{z_1^p}{z_2^{p+1}} \right\}}{\frac{z_1^p}{z_2^{p+1}} + \lambda_1 \frac{z_1^{p+1}}{z_2^{p+2}}} = \frac{r_1}{r} < 1, \text{ так как } r \in G_2.$$

Аналогичным образом можно показать, что

$$\lim_{p \rightarrow \infty} \frac{\bar{A}_{p+1}}{\bar{A}_p} = \frac{r p_1}{R^2} < 1 \quad (r \in G_1),$$

где  $\bar{A}_{p+1}$ ,  $\bar{A}_p$  соответственно  $p+1$  и  $p$  члены ряда (2.6).

Точно так же можно доказать и равномерную сходимость рядов, полученных в результате одного и двукратного почленного дифференцирования рядов (2.4) и (2.5) по  $r$  и  $\theta$ .

Вследствие специального выбора решения, функция  $\bar{p}_{12}(r, \theta, s)$  стремится к нулю при  $r \rightarrow \infty$ . Таким образом, ряды (2.4) и (2.5) действительно являются решениями соответствующих дифференциальных

уравнений (1.7) и (1.8), удовлетворяющими условиям (1.9), (1.10) и (1.11). Нетрудно показать и то, что

$$\lim_{r_1 \rightarrow 0} \int_c^{\infty} \frac{kh}{r_1} \frac{\partial \bar{p}_{11}}{\partial r_1} dl = \bar{Q}_1(s),$$

где

$$r_1 = \sqrt{r^2 - 2r p_1 \cos(\theta - \alpha_1) + p_1^2},$$

т. е. функция  $\bar{p}_{11}(r, \theta, s)$  имеет в точке  $N_1(p_1, \alpha_1)$  особенность теплового стока, интенсивности  $\bar{Q}_1(s)$ . Функция  $\bar{p}_{12}$  особенностей не имеет. Итак, функции  $\bar{p}_{11}(r, \theta, s)$  и  $\bar{p}_{12}(r, \theta, s)$  удовлетворяют всем условиям задачи 1.

Для перехода от изображений к оригиналам исследуем поведение функции

$$u_{11}(r, \theta, s) = \sum_{p=0}^{\infty} \epsilon_p \left\{ \frac{K_p \left( R \sqrt{\frac{s}{a_2}} \right) \left[ K_{p+1} \left( R \sqrt{\frac{s}{a_1}} \right) + K_{p-1} \left( R \sqrt{\frac{s}{a_1}} \right) \right]}{D_{1p}} - \right.$$

$$\left. \frac{\lambda_1 K_p \left( R \sqrt{\frac{s}{a_1}} \right) \left[ K_{p+1} \left( R \sqrt{\frac{s}{a_2}} \right) + K_{p-1} \left( R \sqrt{\frac{s}{a_2}} \right) \right]}{D_{1p}} \right\} \times$$

$$\times I_p \left( r_1 \sqrt{\frac{s}{a_1}} \right) I_p \left( R \sqrt{\frac{s}{a_1}} \right) \cos p(\theta - \alpha_1), \quad (2.8)$$

$$u_{12} = \sum_{p=0}^{\infty} \epsilon_p \frac{I_p \left( r_1 \sqrt{\frac{s}{a_1}} \right) K_p \left( r \sqrt{\frac{s}{a_2}} \right) \cos p(\theta - \alpha_1)}{R \sqrt{\frac{s}{a_1}} D_{1p}}, \quad (2.9)$$

при малых  $s$ . Известно, что при  $s \rightarrow 0$  имеют место следующие асимптотические представления функций  $I_p(s)$ ,  $K_p(s)$

$$I_0(s) \simeq 1, \quad K_0(s) \simeq -\ln s,$$

$$I_p(s) \simeq \frac{1}{p!} \left(\frac{s}{2}\right)^p, \quad K_p(s) \simeq \frac{1}{2} (p-1)! \left(\frac{2}{s}\right)^p. \quad (2.10)$$

Если воспользоваться соотношениями (2.10), то легко показать, что при  $s \rightarrow 0$

$$u_{11}(r, \theta, s) = \frac{1}{2} \left( \sqrt{\frac{a_2}{a_1}} - \frac{k_1}{k_2} \sqrt{\frac{a_1}{a_2}} \right) \ln s + A,$$

$$u_{12}(r, \theta, s) = -\frac{k_1}{2k_2} \ln s + B,$$

где

$$A = \sqrt{\frac{a_2}{a_1}} \ln \frac{R}{\sqrt{a_1}} - \frac{k_1}{k_2} \sqrt{\frac{a_1}{a_2}} \ln \frac{R}{\sqrt{a_2}} +$$

$$+ \frac{k_1 - k_2}{k_1 + k_2} \ln \frac{1}{\sqrt{1 - 2 \frac{r p_1}{R^2} \cos(\theta - \alpha_1) + \left(\frac{r p_1}{R^2}\right)^2}},$$

$$B = -\frac{k_1}{k_2} \ln \frac{r}{\sqrt{a_2}} + \frac{k_1}{k_1 + k_2} \ln \frac{r}{\sqrt{r^2 - 2r p_1 \cos(\theta - \alpha_1) + p_1^2}}.$$

Таким образом, для подынтегральных функций (2.8), (2.9) начало координат ( $s=0$ ) является точкой разветвления.

Далее покажем, что функции  $u_{11}(r, \theta, s)$  и  $u_{12}(r, \theta, s)$  не имеют полюсов. Для этого следует убедиться в том, что выражения

$$D_{1p} = K_p \left( R \sqrt{\frac{s}{a_2}} \right) \left[ I_{p+1} \left( R \sqrt{\frac{s}{a_1}} \right) + I_{p-1} \left( R \sqrt{\frac{s}{a_1}} \right) \right] + \lambda_1 I_p \left( R \sqrt{\frac{s}{a_1}} \right) \left[ K_{p+1} \left( R \sqrt{\frac{s}{a_2}} \right) + K_{p-1} \left( R \sqrt{\frac{s}{a_2}} \right) \right] \quad (2.11)$$

не имеют нулей.

Произведем в соотношении (2.11) замену переменных, положив

$$s = -a_2 \mu^2.$$

Тогда

$$D_{1p} = K_p(iR\mu) [I_{p+1}(R\delta\mu i) + I_{p-1}(R\delta\mu i)] + \lambda_1 I_p(R\delta\mu i) [K_{p+1}(R\mu i) + K_{p-1}(R\mu i)]. \quad (2.12)$$

Если учесть, что

$$I_p(iz) = i^p J_p(z), \quad K_p(iz) = \frac{1}{2} \pi (-i)^{p+1} [J_p(z) - iY_p(z)],$$

где  $J(z)$  и  $Y_p(z)$  — функции Бесселя порядка  $p$  первого и второго рода, то выражение (2.12) можно привести к виду

$$D_{1p} = \frac{1}{2\pi} \{ J_p(R\mu) [J_{p+1}(R\delta\mu) - J_{p-1}(R\delta\mu)] - \lambda_1 J_p(R\delta\mu) [J_{p+1}(R\mu) - J_{p-1}(R\mu)] \} - \frac{1}{2\pi} i \{ Y_p(R\mu) [J_{p+1}(R\delta\mu) - J_{p-1}(R\delta\mu)] - \lambda_1 Y_p(R\delta\mu) [Y_{p+1}(R\mu) - Y_{p-1}(R\mu)] \}. \quad (2.13)$$

Корни соотношения (2.13) найдутся из условий:

$$J_p(R\mu) [J_{p+1}(R\delta\mu) - J_{p-1}(R\delta\mu)] - \lambda_1 J_p(R\delta\mu) [J_{p+1}(R\mu) - J_{p-1}(R\mu)] = 0,$$

$$Y_p(R\mu) [J_{p+1}(R\delta\mu) - J_{p-1}(R\delta\mu)] - \lambda_1 Y_p(R\delta\mu) [Y_{p+1}(R\mu) - Y_{p-1}(R\mu)] = 0.$$

Отсюда, при  $\mu \neq 0$  следует

$$J_p(R\mu) Y'_p(R\mu) - J'_p(R\mu) Y_p(R\mu) = 0,$$

что противоречит известному соотношению

$$J_p(R\mu) Y'_p(R\mu) - Y_p(R\mu) J'_p(R\mu) = \frac{2}{\pi R\mu}.$$

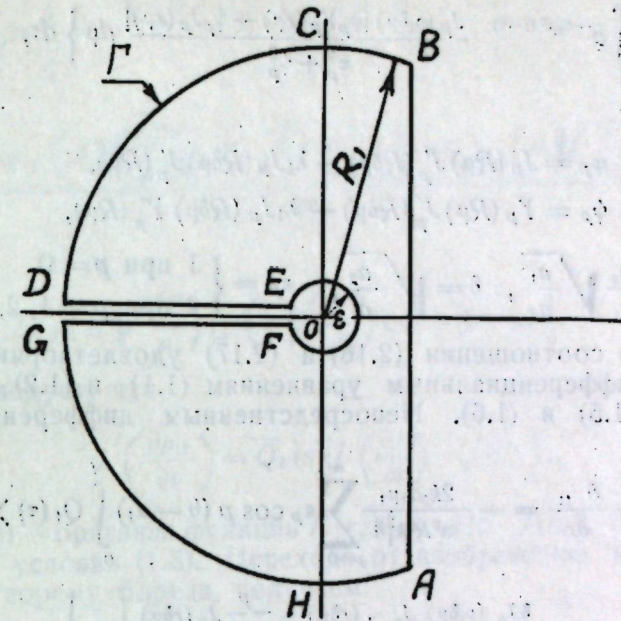
Приведенные выше рассуждения показывают, что функции  $u_{11}(r, \theta, s)$  и  $u_{12}(r, \theta, s)$  не имеют полюсов. Как следует из вышесказанного, для вычисления оригиналов следует выбрать такой контур, внутри которого не содержится начало координат. Выберем за контур интегрирования контур  $\Gamma$ , изображенный на фиг. 1.

В силу того, что функции  $\bar{p}_{11}(r, \theta, s)$  и  $\bar{p}_{12}(r, \theta, s)$  не имеют полюсов в области, ограниченной контуром  $\Gamma$ , интегралы

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} e^{st} \bar{p}_{11}(r, \theta, s) ds \quad \text{и} \quad \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} e^{st} \bar{p}_{12}(r, \theta, s) ds,$$

взятые по этому замкнутому контуру, равны нулю.

Нетрудно показать и то, что интегралы вдоль дуг окружностей  $BSC$  и  $GHA$  при достаточно большом  $R_1$ , а также интеграл вдоль маленькой окружности радиуса  $\epsilon$  при  $\epsilon \rightarrow 0$ , равны нулю.



Фиг. 1.

Следовательно, интеграл

$$p_{11}(r, \theta, t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} e^{st} \bar{p}_{11}(r, \theta, s) ds \quad (2.14)$$

равен сумме интегралов вдоль берегов разреза по отрицательной части вещественной оси  $GF$  и  $ED$ , то же справедливо и для интеграла

$$p_{12}(r, \theta, t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} e^{st} \bar{p}_{12}(r, \theta, s) ds. \quad (2.15)$$

При вычислении интегралов вдоль  $GF$  положим  $s = \mu e^{-\pi i}$ , а при вычислении по  $ED$   $s = \mu e^{\pi i}$ .

Тогда, если воспользоваться теоремой Бореля [3] и учесть, что

$$I_p(iz) = i^p J_p(z) \quad K_p(iz) = \frac{1}{2} \pi (-i)^{p+1} [J_p(z) - iY_p(z)],$$

$$I_p(-iz) = (-i)^p J_p(z), \quad K_p(-iz) = \frac{1}{2} \pi (i)^{p+1} [J_p(z) + iY_p(z)],$$

то решение задачи I получаем в следующей форме

$$p_{11}(r, \theta, t) = \frac{2k_2 a_1 \mu_1}{\pi^2 R^2 k_1^2 h} \sum_{p=0}^{\infty} \epsilon_p \cos p(\theta - \alpha_1) \int_0^t Q_1(\tau) \times \left\{ \int_0^{\infty} e^{-a_2 \mu^2 (t-\tau)} \frac{J_p(r_1 \delta \mu) J_p(r \delta \mu)}{\mu (\varphi_p^2 + \psi_p^2)} d\mu \right\} d\tau, \quad (2.16)$$

$$p_{12}(r, \theta, t) = \frac{\mu_1 \sqrt{a_1 a_2}}{\pi^2 R k_1 h} \sum_{p=0}^{\infty} \epsilon_p \cos p(\theta - \alpha_1) \int_0^t Q_1(\tau) \times$$



$$\times \left\{ \int_0^{\infty} e^{-a_1 \mu^2 (t-\tau)} \frac{J_p(\rho_1 \delta \mu) [\varphi_p Y_p(r\mu) - \psi_p J_p(r\mu)]}{\varphi_p^2 + \psi_p^2} d\mu \right\} d\tau, \quad (2.17)$$

где

$$\varphi_p = J_p(R\mu) J'_p(R\delta\mu) - \lambda_1 J_p(R\delta\mu) J'_p(R\mu),$$

$$\psi_p = Y_p(R\mu) J'_p(R\delta\mu) - \lambda_1 J_p(R\delta\mu) Y'_p(R\mu),$$

$$\lambda_1 = \frac{k_2}{k_1} \sqrt{\frac{a_1}{a_2}}, \quad \delta = \sqrt{\frac{a_2}{a_1}}, \quad \varepsilon_p = \begin{cases} 1 & \text{при } p=0 \\ 2 & \text{при } p=1, 2, 3, \dots \end{cases}$$

Покажем, что соотношения (2.16) и (2.17) удовлетворяют соответствующим дифференциальным уравнениям (1.1) и (1.2) и условиям (1.3), (1.4), (1.5) и (1.6). Непосредственным дифференцированием находим:

$$\frac{1}{r} \frac{\partial p_{11}}{\partial r} = - \frac{2k_2 a_1 \mu_1}{\pi^3 R^2 k_1^2 h} \sum_{p=0}^{\infty} \varepsilon_p \cos p(\theta - \alpha_1) \int_0^t Q_1(\tau) \times$$

$$\left\{ \int_0^{\infty} e^{-a_1 \mu^2 (t-\tau)} \frac{\delta J_p(\rho_1 \delta \mu) \left[ J_{p-1}(r\delta\mu) - \frac{p}{r\delta\mu} J_p(r\delta\mu) \right]}{r(\varphi_p^2 + \psi_p^2)} d\mu \right\} d\tau, \quad (2.18)$$

$$\frac{\partial^2 p_{11}}{\partial r^2} = \frac{2k_2 a_1 \mu_1}{\pi^3 R^2 k_1^2 h} \sum_{p=0}^{\infty} \varepsilon_p \cos p(\theta - \alpha_1) \int_0^t Q_1(\tau) \left\{ \int_0^{\infty} e^{-a_1 \mu^2 (t-\tau)} \times \right.$$

$$\times \frac{J_p(\rho_1 \delta \mu) \left[ \delta^2 \mu^2 J_{p-2}(r\delta\mu) - \frac{(p-1)}{r} J_{p-1}(r\delta\mu) \right]}{\varphi_p^2 + \psi_p^2} +$$

$$\left. + \frac{p}{\mu r^2} J_p(r\delta\mu) + \frac{p^2}{r^2 \mu} J_p(r\delta\mu) - \frac{\delta p}{r} J_{p-1}(r\delta\mu) \right\} d\mu \Big\} d\tau, \quad (2.19)$$

$$\frac{\partial^2 p_{11}}{\partial \theta^2} = - \frac{2k_2 a_1 \mu_1}{\pi^3 R^2 k_1^2 h} \sum_{p=0}^{\infty} \varepsilon_p \cos p(\theta - \alpha_1) \int_0^t Q_1(\tau) \left\{ \int_0^{\infty} e^{-a_1 \mu^2 (t-\tau)} \times \right.$$

$$\times \frac{p^2 J_p(\rho_1 \delta \mu) J_p(r\delta\mu)}{\mu(\varphi_p^2 + \psi_p^2)} d\mu \Big\} d\tau. \quad (2.20)$$

Здесь учтено, что

$$J'_p(z) = J_{p-1}(z) - \frac{p}{z} J_p.$$

Чтобы найти производную  $\frac{\partial p_{11}}{\partial t}$ , рассмотрим выражение (2.4), записав его в виде

$$\bar{p}_{11}(r, \theta, s) = \bar{Q}_1(s) \bar{F}(r, \theta, s)$$

или

$$s \bar{p}_{11}(r, \theta, s) = \bar{Q}_1(s) s \bar{F}(r, \theta, s), \quad (2.21)$$

где

$$\bar{F}(r, \theta, s) = \frac{\mu_1}{2\pi k_1 h} \left\{ K_0 \left[ \sqrt{\frac{s}{a_1} (r^2 - 2r\rho_1 \cos(\theta - \alpha_1) + \rho_1^2)} \right] + \right.$$

$$+ \sum_{p=0}^{\infty} \varepsilon_p \left[ \frac{K_p \left( R \sqrt{\frac{s}{a_2}} \right) \left[ K_{p+1} \left( R \sqrt{\frac{s}{a_1}} \right) + K_{p-1} \left( R \sqrt{\frac{s}{a_1}} \right) \right]}{D_{1p}} - \right.$$

$$\left. - \frac{\lambda_1 K_p \left( R \sqrt{\frac{s}{a_1}} \right) \left[ K_{p+1} \left( R \sqrt{\frac{s}{a_2}} \right) + K_{p-1} \left( R \sqrt{\frac{s}{a_2}} \right) \right]}{D_{1p}} \right] \times$$

$$\times I_p \left( \rho_1 \sqrt{\frac{s}{a_1}} \right) I_p \left( r \sqrt{\frac{s}{a_1}} \right) \cos p(\theta - \alpha_1). \quad (2.22)$$

Из (2.21) следует, что

$$L \left( \frac{\partial p_{11}}{\partial t} \right) = \bar{Q}_1(s) \left\{ L \left( \frac{\partial f}{\partial t} \right) - f(0) \right\},$$

где  $f(r, \theta, t)$  — оригинал функции  $\bar{F}(r, \theta, s)$ . Но  $f(r, \theta, 0) = 0$  в силу начального условия (1.3). Переходя от изображения к оригиналу и учитывая теорему Бореля, получаем:

$$\frac{\partial p_{11}(r, \theta, t)}{\partial t} = - \frac{2a_1 a_2 k_2 \mu_1}{\pi^3 R^2 k_1^2 h} \sum_{p=0}^{\infty} \varepsilon_p \cos p(\theta - \alpha_1) \int_0^t Q_1(\tau) \left\{ \int_0^{\infty} e^{-a_1 \mu^2 (t-\tau)} \times \right.$$

$$\times \frac{\mu J_p(\rho_1 \delta \mu) J_p(r\delta\mu)}{\varphi_p^2 + \psi_p^2} d\mu \Big\} d\tau. \quad (2.23)$$

Подставляя соотношения (2.18), (2.19), (2.20) и (2.23) в (1.1), убеждаемся в том, что выражение (2.16) удовлетворяет исходному дифференциальному уравнению (1.1).

Аналогичным образом можно показать, что выражение (2.17) удовлетворяет уравнению (1.2). Из самого вида решений (2.16) и (2.17) усматриваем, что они удовлетворяют и начальному условию (1.3).

Убедимся и в том, что решения (2.16) и (2.17) удовлетворяют крайним условиям (1.4) и (1.5).

Приравнявая соответствующие выражения, получаем, что условия (1.4) и (1.5) выполнены, если имеют место равенства

$$\frac{2k_2 a_1}{\pi R k_1} \times \frac{J_p(R\delta\mu)}{\mu} = \sqrt{a_1 a_2} [\varphi_p Y_p(R\mu) - \psi_p J_p(R\mu)],$$

$$\frac{2a_1 \delta}{\pi R} J'_p(R\delta\mu) = \sqrt{a_1 a_2} [\varphi_p Y'_p(R\mu) - \psi_p J'_p(R\mu)],$$

справедливость которых может быть доказана, если воспользоваться известным соотношением

$$J_p(R\mu) Y'_p(R\mu) - J'_p(R\mu) Y_p(R\mu) = \frac{2}{\pi R \mu}. \quad (2.24)$$

Далее, пользуясь асимптотическим представлением функций  $J_p(z)$  и  $Y_p(z)$  при  $z \rightarrow \infty$  [7], находим, что

$$\lim_{r \rightarrow \infty} p_{12}(r, \theta, t) = 0.$$

Таким образом, выражения (2.16) и (2.17) удовлетворяют всем поставленным условиям, а следовательно, являются решением задачи I,

§ 3. Решение задачи II. Будем искать решения в виде

$$\bar{p}_{21}(r, \theta, s) = \sum_{p=0}^{\infty} \bar{c}_p(s) I_p \left( r \sqrt{\frac{s}{a_1}} \right) K_p \left( R \sqrt{\frac{s}{a_1}} \right) \cos p(\theta - \alpha_2), \quad (3.1)$$

$$\bar{p}_{22}(r, \theta, s) = \frac{\mu_1}{2\pi k_2 h} \bar{Q}_2(s) \left\{ K_0 \left[ \sqrt{\frac{s}{a_2}} (r^2 - 2r\rho_2 \cos(\theta - \alpha_2) + \rho_2^2) + \rho_2^2 \right] + \sum_{p=0}^{\infty} \bar{d}_p(s) I_p \left( R \sqrt{\frac{s}{a_2}} \right) K_p \left( r \sqrt{\frac{s}{a_2}} \right) \cos p(\theta - \alpha_2) \right\}, \quad (3.2)$$

$r, \rho_2 \in G_2.$

Формально каждый член ряда (3.1) удовлетворяет дифференциальному уравнению (1.7). Точно то же можно сказать и о ряде

$$\bar{u}_{22}(r, \theta, s) = \sum_{p=0}^{\infty} \bar{d}_p(s) I_p \left( R \sqrt{\frac{s}{a_2}} \right) K_p \left( r \sqrt{\frac{s}{a_2}} \right) \cos p(\theta - \alpha_2), \quad (3.3)$$

каждый член которого удовлетворяет уравнению (1.8) при произвольных коэффициентах  $\bar{d}_p(s)$ .

Найдем коэффициент  $\bar{c}_p(s)$  и  $\bar{d}_p(s)$  из условий равенства давлений (1.9) и нормальных скоростей потока (1.10) на границе областей  $G_1$  и  $G_2$ . Подставляя в эти условия выражения (3.1) и (3.2), будем иметь для  $\bar{c}_p(s)$  и  $\bar{d}_p(s)$  системы уравнений:

$$\begin{aligned} & \bar{c}_0(s) I_0 \left( R \sqrt{\frac{s}{a_1}} \right) K_0 \left( R \sqrt{\frac{s}{a_1}} \right) - \\ & - \bar{d}_0(s) I_0 \left( R \sqrt{\frac{s}{a_2}} \right) K_0 \left( R \sqrt{\frac{s}{a_2}} \right) = \\ & = \frac{1}{2\pi k_2 h} \bar{Q}_2(s) I_0 \left( R \sqrt{\frac{s}{a_2}} \right) K_0 \left( \rho_2 \sqrt{\frac{s}{a_2}} \right), \quad (3.4) \\ & \frac{k_1}{k_2} \sqrt{\frac{a_2}{a_1}} \bar{c}_0(s) I_0' \left( R \sqrt{\frac{s}{a_1}} \right) K_0 \left( R \sqrt{\frac{s}{a_1}} \right) - \\ & - \bar{d}_0(s) I_0 \left( R \sqrt{\frac{s}{a_1}} \right) K_0' \left( R \sqrt{\frac{s}{a_2}} \right) = \\ & = \frac{1}{2\pi k_2 h} \bar{Q}_2(s) I_0' \left( R \sqrt{\frac{s}{a_2}} \right) K_0 \left( \rho_2 \sqrt{\frac{s}{a_2}} \right), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \bar{c}_p(s) I_p \left( R \sqrt{\frac{s}{a_1}} \right) K_p \left( R \sqrt{\frac{s}{a_1}} \right) - \\ & - \bar{d}_p(s) I_p \left( R \sqrt{\frac{s}{a_2}} \right) K_p \left( R \sqrt{\frac{s}{a_2}} \right) = \\ & = \frac{1}{2\pi k_2 h} \bar{Q}_2(s) I_p \left( R \sqrt{\frac{s}{a_2}} \right) K_p \left( \rho_2 \sqrt{\frac{s}{a_2}} \right), \quad (3.5) \\ & \frac{k_1}{k_2} \sqrt{\frac{a_2}{a_1}} \bar{c}_p(s) I_p' \left( R \sqrt{\frac{s}{a_1}} \right) K_p \left( R \sqrt{\frac{s}{a_1}} \right) - \\ & - \bar{d}_p(s) I_p \left( R \sqrt{\frac{s}{a_2}} \right) K_p' \left( R \sqrt{\frac{s}{a_2}} \right) = \\ & = \frac{1}{2\pi k_2 h} \bar{Q}_2(s) I_p' \left( R \sqrt{\frac{s}{a_2}} \right) K_p \left( \rho_2 \sqrt{\frac{s}{a_2}} \right). \end{aligned}$$

Здесь учтено, что при  $r < \rho_2$  имеет место следующее разложение

$$\begin{aligned} K_0 \left[ \sqrt{\frac{s}{a_2}} (r^2 - 2r\rho_2 \cos(\theta - \alpha_2) + \rho_2^2) \right] &= I_0 \left( r \sqrt{\frac{s}{a_2}} \right) K_0 \left( \rho_2 \sqrt{\frac{s}{a_2}} \right) + \\ &+ 2 \sum_{p=1}^{\infty} I_p \left( r \sqrt{\frac{s}{a_2}} \right) K_p \left( \rho_2 \sqrt{\frac{s}{a_2}} \right) \cos p(\theta - \alpha_2). \end{aligned}$$

Решая системы (3.4), (3.5), найдем:

$$\begin{aligned} \bar{c}_0(s) &= \frac{1}{2\pi k_2 h} \bar{Q}_2(s) \frac{K_0 \left( \rho_2 \sqrt{\frac{s}{a_2}} \right)}{R \sqrt{\frac{s}{a_2}} K_0 \left( R \sqrt{\frac{s}{a_1}} \right) D_{20}}, \\ \bar{d}_0(s) &= \frac{1}{2\pi k_2 h} \bar{Q}_2(s) \frac{K_0 \left( \rho_2 \sqrt{\frac{s}{a_2}} \right) \left[ I_0 \left( R \sqrt{\frac{s}{a_1}} \right) I_0' \left( R \sqrt{\frac{s}{a_2}} \right) - \right. \\ & \left. - \lambda_2 I_0 \left( R \sqrt{\frac{s}{a_2}} \right) I_0' \left( R \sqrt{\frac{s}{a_1}} \right) \right]}{I_0 \left( R \sqrt{\frac{s}{a_2}} \right) D_{20}}, \\ \bar{c}_p(s) &= \frac{1}{\pi k_2 h} \bar{Q}_2(s) = \frac{K_p \left( \rho_2 \sqrt{\frac{s}{a_2}} \right)}{R \sqrt{\frac{s}{a_2}} K_p \left( R \sqrt{\frac{s}{a_1}} \right) D_{2p}}, \\ \bar{d}_p(s) &= \frac{1}{\pi k_2 h} \bar{Q}_2(s) \frac{K_p \left( \rho_2 \sqrt{\frac{s}{a_2}} \right) \left[ I_p \left( R \sqrt{\frac{s}{a_1}} \right) I_p' \left( R \sqrt{\frac{s}{a_2}} \right) - \right. \\ & \left. - \lambda_2 I_p \left( R \sqrt{\frac{s}{a_2}} \right) I_p' \left( R \sqrt{\frac{s}{a_1}} \right) \right]}{I_p \left( R \sqrt{\frac{s}{a_2}} \right) D_{2p}}, \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} D_{2p} &= \lambda_2 I_p' \left( R \sqrt{\frac{s}{a_1}} \right) K_p \left( R \sqrt{\frac{s}{a_2}} \right) - I_p \left( R \sqrt{\frac{s}{a_1}} \right) K_p' \left( R \sqrt{\frac{s}{a_2}} \right), \\ \lambda_2 &= \frac{k_1}{k_2} \sqrt{\frac{a_2}{a_1}}. \end{aligned}$$

Подставляя найденные значения коэффициентов  $\bar{c}_p(s)$  и  $\bar{d}_p(s)$  ( $p=0, 1, 2, \dots$ ) в соотношения (3.1) и (3.2), получаем

$$\bar{p}_{21}(r, \theta, s) = -\frac{\mu_1}{2\pi k_2 h} \bar{Q}_2(s) \sum_{p=0}^{\infty} \bar{c}_p \frac{I_p \left( r \sqrt{\frac{s}{a_1}} \right) K_p \left( \rho_2 \sqrt{\frac{s}{a_2}} \right)}{R \sqrt{\frac{s}{a_2}} D_{2p}} \cos p(\theta - \alpha_2), \quad (3.6)$$

Центральная библиотека  
ВМБЛ-СТЕРИЛЬ

$$\bar{p}_{22}(r, \theta, s) = \frac{\mu_1}{2\pi k_2 h} \bar{Q}_2(s) \left\{ K_0 \left[ \sqrt{\frac{s}{a_2}} (r^2 - 2r\rho_2 \cos(\theta - \alpha_2) + \rho_2^2) \right] - \sum_{p=0}^{\infty} \varepsilon_p \left[ \frac{\lambda_2 J_p \left( R \sqrt{\frac{s}{a_2}} \right) J_p' \left( R \sqrt{\frac{s}{a_1}} \right) - J_p' \left( R \sqrt{\frac{s}{a_2}} \right) J_p \left( R \sqrt{\frac{s}{a_1}} \right)}{D_{2p}} \right] \times \right. \\ \left. \times K_p \left( r \sqrt{\frac{s}{a_2}} \right) K_p \left( \rho_2 \sqrt{\frac{s}{a_2}} \right) \cos p(\theta - \alpha_2) \right\}. \quad (3.7)$$

Далее можно показать подобно тому, как в § 2, что ряды, входящие в  $\bar{p}_{21}(r, \theta, s)$  и  $\bar{p}_{22}(r, \theta, s)$ , будут равномерно сходящимися. Равномерно сходятся и ряды, полученные одно- и двукратным почленным дифференцированием рядов (3.6) и (3.7) по  $r$  и  $\theta$ . В силу специального выбора решения,  $\bar{p}_{22}(r, \theta, s)$  обращается в нуль при  $r \rightarrow \infty$ . Таким образом, выражения (3.6) и (3.7) являются решениями уравнений (1.7) и (1.8), удовлетворяющими краевым условиям (1.9) и (1.10) и условию на бесконечности (1.11). Не приводя исследований функций  $\bar{p}_{21}(r, \theta, s)$  и  $\bar{p}_{22}(r, \theta, s)$ , аналогичных тем, которые были сделаны в § 2 для функций  $\bar{p}_{11}(r, \theta, s)$  и  $\bar{p}_{12}(r, \theta, s)$ , укажем, что  $\bar{p}_{21}(r, \theta, s)$  и  $\bar{p}_{22}(r, \theta, s)$  имеют точку разветвления при  $s=0$  и не имеют полюсов.

Поэтому при переходе от изображений к оригиналам можно воспользоваться контуром, изображенным на рис. 1. После несложных вычислений получаем

$$\bar{p}_{21}(r, \theta, t) = \frac{a_2 \mu_1}{k_2 \pi^2 R h} \sum_{p=0}^{\infty} \varepsilon_p \cos p(\theta - \alpha_2) \int_0^t Q_2(\tau) \left\{ \int_0^{\infty} e^{-a_2 \mu^2 (t-\tau)} \times \right. \\ \left. \times \frac{J_p(r\delta\mu) \omega_p}{u_p^2 + v_p^2} d\mu \right\} d\tau, \quad (3.8) \\ r \in G_1$$

$$\bar{p}_{22}(r, \theta, t) = \frac{a_2 \mu_1}{2\pi k_2 h} \sum_{p=0}^{\infty} \varepsilon_p \cos p(\theta - \alpha_2) \int_0^t Q_2(\tau) \left\{ \int_0^{\infty} e^{-a_2 \mu^2 (t-\tau)} \times \right. \\ \left. \times \frac{\omega_p [J_p(r\mu) v_p - Y_p(r\mu) u_p]}{u_p^2 + v_p^2} \mu d\mu \right\} d\tau, \quad (3.9) \\ r \in G_2$$

где

$$\left. \begin{aligned} u_p &= J_p(R\delta\mu) J_p'(R\mu) - \lambda_2 J_p(R\mu) J_p'(R\delta\mu), \\ v_p &= J_p(R\delta\mu) Y_p'(R\mu) - \lambda_2 Y_p(R\mu) J_p'(R\delta\mu), \\ \omega_p &= J_p(\rho_2\mu) v_p - Y_p(\rho_2\mu) u_p, \end{aligned} \right\} \quad (3.9a)$$

$$\lambda_2 = \frac{k_1}{k_2} \sqrt{\frac{a_2}{a_1}}, \quad \varepsilon_p = \begin{cases} 1 & \text{при } p=0 \\ 2 & \text{при } p=1, 2, 3, \dots \end{cases}$$

Можно показать, что выражения (3.8) и (3.9) удовлетворяют соответствующим дифференциальным уравнениям (1.1) и (1.2). Покажем, что найденные соотношения (3.8) и (3.9) удовлетворяют условиям непрерывности давлений и нормальных скоростей на границе областей  $G_1$  и  $G_2$ .

Для этого надо убедиться в том, что при  $r=R$  имеют место следующие равенства

$$J_p(R\delta\mu) = \frac{\pi R \mu}{2} [J_p(R\mu) v_p - Y_p(R\mu) u_p], \\ k_1 \delta J_p'(R\delta\mu) = \frac{\pi R \mu k_2}{2} [J_p'(R\mu) v_p - Y_p'(R\mu) u_p].$$

Справедливость их легко показать, если подставить в них выражения  $u_p$  и  $v_p$  из (3.9a) и учесть (2.24). Далее, воспользовавшись асимптотическим представлением функции  $J_p(r\mu)$  и  $Y_p(r\mu)$  при  $r \rightarrow \infty$ , нетрудно доказать, что

$$\lim_{r \rightarrow \infty} p_{22}(r, \theta, t) = 0.$$

Таким образом, соотношения (3.8) и (3.9) удовлетворяют всем условиям задачи II, а следовательно, являются ее решением.

Теперь обратимся к основной задаче.

Если в области  $G_1$  находится  $l_1$  источников или стоков в точках  $N_i(\rho_{1i}, \alpha_{1i})$ , интенсивности которых  $Q_{1i}(i=1, 2, \dots, l_1)$ , а в области  $G_2$  расположены  $l_2$  источников или стоков, координаты которых  $\rho_{2i}, \alpha_{2i}$ , а интенсивности соответственно равны  $Q_{2i}(i=1, 2, \dots, l_2)$ , то давления в областях  $G_1$  и  $G_2$  получим суперпозицией решений задач I и II. Они соответственно равны:

$$p_1(r, \theta, t) = \frac{2k_2 a_1 \mu_1}{\pi^2 R^2 k_1 h} \sum_{i=1}^{l_1} \int_0^t Q_{1i}(\tau) \left\{ \sum_{p=0}^{\infty} \varepsilon_p \cos p(\theta - \alpha_{1i}) \int_0^{\infty} e^{-a_1 \mu^2 (t-\tau)} \times \right. \\ \left. \times \frac{J_p(\rho_{1i}\delta\mu) J_p(r\delta\mu)}{\mu (\varphi_p^2 + \psi_p^2)} d\mu \right\} d\tau + \frac{a_2 \mu_1}{\pi^2 R^2 k_2 h} \sum_{i=1}^{l_2} \int_0^t Q_{2i}(\tau) \left\{ \sum_{p=0}^{\infty} \varepsilon_p \cos p(\theta - \alpha_{2i}) \int_0^{\infty} e^{-a_2 \mu^2 (t-\tau)} \times \right. \\ \left. \times \frac{J_p(r\delta\mu) \omega_p}{u_p^2 + v_p^2} d\mu \right\} d\tau, \quad (3.10)$$

$$p_2(r, \theta, t) = \frac{\mu_1 \sqrt{a_1 a_2}}{\pi^2 R k_1 h} \sum_{i=1}^{l_1} \int_0^t Q_{1i}(\tau) \left\{ \sum_{p=0}^{\infty} \varepsilon_p \cos p(\theta - \alpha_{1i}) \int_0^{\infty} e^{-a_1 \mu^2 (t-\tau)} \times \right. \\ \left. \times \frac{J_p(\rho_{1i}\delta\mu) [\varphi_p Y_p(r\mu) - \psi_p J_p(r\mu)]}{\varphi_p^2 + \psi_p^2} d\mu \right\} d\tau + \\ + \frac{\mu_1 a_2}{2\pi k_2 h} \sum_{i=1}^{l_2} \int_0^t Q_{2i}(\tau) \left\{ \sum_{p=0}^{\infty} \varepsilon_p \cos p(\theta - \alpha_{2i}) \int_0^{\infty} e^{-a_2 \mu^2 (t-\tau)} \times \right. \\ \left. \times \frac{\omega_p [J_p(r\mu) v_p - Y_p(r\mu) u_p]}{u_p^2 + v_p^2} \mu d\mu \right\} d\tau, \quad (3.11)$$

где

$$\varphi_p = J_p(R\mu) J_p'(R\delta\mu) - \lambda_1 J_p(R\delta\mu) J_p'(R\mu), \\ \psi_p = Y_p(R\mu) J_p'(R\delta\mu) - \lambda_1 J_p(R\delta\mu) Y_p'(R\mu),$$

$$u_p = J_p(R\delta\mu) J'_p(R\mu) - \lambda_2 J_p(R\mu) J'_p(R\delta\mu),$$

$$v_p = J_p(R\delta\mu) Y'_p(R\mu) - \lambda_2 Y_p(R\mu) J'_p(R\delta\mu),$$

$$w_p = J_p(\rho_{2l}\mu) v_p - Y(\rho_{2l}, \mu) u_p.$$

$$\lambda_1 = \frac{k_2}{k_1} \sqrt{\frac{a_1}{a_2}}, \quad \lambda_2 = \frac{k_1}{k_2} \sqrt{\frac{a_2}{a_1}},$$

$$\varepsilon_p = \begin{cases} 1 & \text{при } p=0 \\ 2 & \text{при } p=1, 2, \dots \end{cases}, \quad \delta = \sqrt{\frac{a_2}{a_1}}.$$

Рассмотрим некоторые частные случаи.

1. Однородный пласт ( $k_1 = k_2 = k, a_1 = a_2 = a$ ).  
В этом случае  $\lambda_1 = \lambda_2 = \delta = 1, \varphi_p = u_p = 0$ ,

$$\psi_p = -\frac{2}{\pi R\mu}, \quad v_p = \frac{2}{\pi R\mu}, \quad w_p = J_p(\rho_{2l}\mu) \frac{2}{\pi R\mu}.$$

Подставляя полученные выше значения в соотношения (3.10) и (3.11), получаем

$$p_1(r, \theta, t) = p_2(r, \theta, t) = \frac{a\mu_1}{2\pi k_1 h} \sum_{i=1}^{l_1} \int_0^t Q_{1i}(\tau) \left\{ \sum_{p=0}^{\infty} \varepsilon_p \cos p(\theta - a_{1i}) \int_0^{\infty} e^{-a\mu^2(t-\tau)} \times \right.$$

$$\times \mu J_p(\rho_{1l}\mu) J_p(r\mu) d\mu \Big\} d\tau + \frac{a\mu_1}{2\pi k_2 h} \sum_{i=1}^{l_2} \int_0^t Q_{2i}(\tau) \left\{ \sum_{p=0}^{\infty} \varepsilon_p \cos p(\theta - a_{2i}) \int_0^{\infty} e^{-a\mu^2(t-\tau)} \times \right.$$

$$\times \mu J_p(\rho_{2l}\mu) J_p(r\mu) d\mu \Big\} d\tau. \quad (3.12)$$

Если учесть, что [4], [5]

$$\int_0^{\infty} n e^{-n^2 p^2} J_n(\lambda n) J_n(\mu n) dn = \frac{1}{2p^2} e^{-\frac{\lambda^2 + \mu^2}{4p^2}} J_n\left(\frac{\lambda\mu}{2p^2}\right)$$

$$e^{-\frac{ab \cos \theta}{\varepsilon}} = I_0\left(\frac{ab}{\varepsilon}\right) + 2 \sum_{p=1}^{\infty} I_p\left(\frac{ab}{\varepsilon}\right) \cos p\theta,$$

то соотношение (3.12) принимает вид

$$p_1(r, \theta, t) = p_2(r, \theta, t) = \frac{\mu_1}{4\pi k h} \sum_{i=1}^{l_1+l_2} \int_0^t Q_{ii}(\tau) e^{-\frac{r^2 - 2r\rho_{ii} \cos(\theta - a_{ii}) + \rho_{ii}^2}{4a(t-\tau)}} \frac{1}{t-\tau} d\tau, \quad (3.13)$$

в котором оно записывается в случае однородного пласта.

2. Одна центральная скважина в области  $G_1$  интенсивности  $Q(t)$ .  
В этом случае из формул (3.10) и (3.11) получаем

$$p_1(r, t) = -\frac{2a_1 k_2 \mu_1}{\pi^2 R^2 k_1^2 h} \int_0^t Q(\tau) \left\{ \int_0^{\infty} e^{-a_1 \mu^2(t-\tau)} \frac{J_0(r\delta\mu)}{\mu(\varphi_0^2 + \psi_0^2)} d\mu \right\} d\tau, \quad (3.14)$$

$$p_2(r, t) = -\frac{V a_1 a_2}{\pi^2 R k_1 h} \int_0^t Q(\tau) \left\{ \int_0^{\infty} e^{-a_1 \mu^2(t-\tau)} \frac{Y_0(r\mu) \varphi_0 - J_0(r\mu) \psi_0}{\varphi_0^2 + \psi_0^2} d\mu \right\} d\tau. \quad (3.15)$$

Данная задача ранее была рассмотрена В. Н. Щелкачевым [2], который нашел приближенные выражения для давлений  $p_1$  и  $p_2$  при малых и больших значениях времени  $t$ , считая при этом дебит  $Q(t)$  — постоянным.

Если положить в выражениях (3.14) и (3.15)

$$a_1 = a_2 = a, \quad k_1 = k_2 = k,$$

то

$$p_1(r, t) = p_2(r, t) = \frac{\mu_1}{4\pi k h} \int_0^t \frac{Q(\tau)}{t-\tau} e^{-\frac{r^2}{4a(t-\tau)}} d\tau.$$

Не представляет труда получить из выражений (3.10) и (3.11) формулы для давлений в соответствующих областях  $G_1$  и  $G_2$  при равных коэффициентах пьезопроводности, но различных коэффициентах проницаемости и наоборот.

В силу известной термо-гидродинамической аналогии [1] решение задачи о фильтрации жидкости в пласте при упругом режиме применимо к родственной задаче теории теплопроводности.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Щелкачев В. Н. Упругий режим пластовых водонапорных систем. М. Гостехиздат, 1948.
2. Щелкачев В. Н. Применение операционных методов к решению задачи о движении упругой жидкости в упругом пласте. ДАН, т. 79, № 5, 1951.
3. Лыков А. В. Теория теплопроводности. Госиздат, М., 1952.
4. Карслоу Х. и Егер Д. Операционные методы в прикладной математике. Госиздат, ИЛ, М., 1948.
5. Грей Э. и Метьюз Г. Б. Функции Бесселя и их приложения к физике и механике. ИЛ, М., 1949.
6. Диткин В. Л. и Кузнецов П. И. Справочник по операционному исчислению. Госиздат, МА, 1951.
7. Ватсон Г. Н. Теория Бесселевых функций, ч. 1, ИЛ, М., 1949.

Поступила  
20 марта 1958 г.

В. Ю. КИМ

### К ЗАДАЧЕ ОПРЕДЕЛЕНИЯ ФУНКЦИИ ДАВЛЕНИЯ В ПЛАСТЕ ПЕРЕМЕННОЙ МОЩНОСТИ ПРИ УПРУГОМ РЕЖИМЕ

Рассматривается задача определения функции давления в ограниченном пласте переменной мощности при упругом режиме. Для случая, когда  $\sqrt{H(x, y)}$  — гармоническая функция, найдено точное выражение функции давления в круговом пласте с одной центральной скважиной.

§ 1. Задача определения функции давления в ограниченном однородном по проницаемости пласте переменной мощности сводится к решению уравнения

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( H \frac{\partial p}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( H \frac{\partial p}{\partial y} \right) = \kappa \frac{\partial p}{\partial t} \quad (1.1)$$

в некоторой области  $G$ , ограниченной контуром питания  $\Gamma$ , при начальном и граничном условиях  $p|_{t=0} = p_0$  и  $p|_{\Gamma} = p_1$  и определенному условию на забое скважины.

В уравнении (1.1)  $\kappa$  — коэффициент пьезопроводности

$$\kappa = \frac{k}{\mu (m\beta_{ж} + \beta_c)} \quad (1.2)$$

Здесь  $k$  — проницаемость пласта,  $m$  — пористость,  $\mu$  — динамическая вязкость жидкости,  $\beta_{ж}$  и  $\beta_c$  — соответственно коэффициенты упругости жидкости и пористой среды,  $H(x, y) > 0$  — переменная мощность пласта. Уравнение (1.1) выведено при условии, что мощность пласта изменяется плавно, без резких скачков. Нахождение функции давления  $p$ , удовлетворяющей уравнению (1.1), начальному и граничному условиям, в общем случае представляет большие трудности. Для частного вида функции  $\sigma = kH$  иногда можно найти точное решение задачи.

Решение указанной задачи для водонапорного режима было дано Г. С. Салеховым [2] в предположении, что  $\sqrt{kH}$  является гармонической функцией, регулярной всюду в области  $G$  вплоть до контура питания.

Нетрудно показать, что и для упругого режима, если  $\sqrt{H(x, y)}$  — гармоническая функция, можно построить точное выражение функции давления. Докажем следующую теорему: если в некоторой области  $G$ , ограниченной контуром питания  $\Gamma$ , определены две функции  $\sqrt{H(x, y)}$  и  $v(x, y, t)$ , из которых первая — гармоническая функция,

регулярная в области  $G$ , вплоть до контура  $\Gamma$ , а вторая — удовлетворяет уравнению

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = \frac{1}{z} \frac{\partial v}{\partial t} \quad (1.3)$$

и нулевому начальному и граничному условиям, то функция

$$p = p_0 + c \frac{v}{\sqrt{H}}, \quad (1.4)$$

( $p_0$  и  $c$  — некоторые постоянные) удовлетворяет уравнению (1.1) и начальному и граничному условиям  $p|_{t=0} = p_0$  и  $p|_{\Gamma} = p_1$ .

В самом деле, из (1.1) и (1.4) имеем

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} \left( H \frac{\partial p}{\partial x} \right) &= c \left( \sqrt{H} \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} - v \frac{\partial^2 \sqrt{H}}{\partial x^2} \right), \\ \frac{\partial}{\partial y} \left( H \frac{\partial p}{\partial y} \right) &= c \left( \sqrt{H} \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} - v \frac{\partial^2 \sqrt{H}}{\partial y^2} \right). \end{aligned} \quad (1.5)$$

Беря сумму соотношений (1.5) и учитывая, что

$$\frac{\partial p}{\partial t} = \frac{c}{\sqrt{H}} \frac{\partial v}{\partial t},$$

получаем

$$\Delta v - v \frac{\Delta \sqrt{H}}{\sqrt{H}} = \frac{1}{z} \frac{\partial v}{\partial t}. \quad (1.6)$$

Так как по нашему предположению  $\Delta \sqrt{H} = 0$ , то из (1.6) следует справедливость нашей теоремы.

Аналогичная теорема имеет место для пространства с любым числом измерений.

Очевидно, определение поля давления в неоднородных пластах в более общем случае также возможно, если функция  $\sqrt{H}(x, y)$  хорошо аппроксимируется гармонической функцией внутри области  $G$ .

§ 2. Рассмотрим ограниченный круговой пласт радиуса  $R$  постоянной мощности  $H=1$  с одной скважиной в центре. Скважину заменяем вертикальным стоком постоянной интенсивности. Пусть известно начальное распределение давления  $p|_{t=0} = p_0(r)$  и давление на контуре питания  $p|_{r=R} = p_1(t)$ . Условие постоянства дебита скважины запишем в виде

$$\lim_{a \rightarrow 0} \left( \frac{k}{\mu} r \frac{\partial p}{\partial r} \right)_{r=a} = q_0 = const.$$

Тогда распределение плотности, удовлетворяющее указанным условиям, было дано М. Маскетом [3]. Лишь изменив обозначения, мы приводим выражение для давления при указанных начальных и граничных условиях

$$\begin{aligned} p = \frac{2}{R^2} \sum_s \frac{J_0(\alpha_s r) e^{-\alpha_s^2 t}}{J_1^2(\alpha_s R)} & \left[ \int_0^R r p_0(r) J_0(\alpha_s r) dr - \alpha q_0 \int_0^t e^{\alpha_s^2 \lambda} d\lambda + \right. \\ & \left. + \alpha \alpha_s R J_1(\alpha_s R) \int_0^t p_1(\lambda) e^{\alpha_s^2 \lambda} d\lambda \right], \end{aligned} \quad (2.1)$$

где бесконечный ряд суммируется по корням уравнения

$$J_0(\alpha_s R) = 0.$$

В частности, когда краевое и начальное условия — некоторые постоянные:

$$p|_{r=R} = p_0 = const, \quad p|_{t=0} = p_0 = const,$$

выражение (2.1) можно записать в виде:

$$p = \frac{2p_0}{R} \sum_s \frac{J_0(\alpha_s r)}{\alpha_s J_1(\alpha_s R)} - \frac{2q_0}{R^2} \sum_s \frac{J_0(\alpha_s r)}{\alpha_s^2 J_1^2(\alpha_s R)} + \frac{2q_0}{R^2} \sum_s \frac{J_0(\alpha_s r) e^{-\alpha_s^2 t}}{\alpha_s^2 J_1^2(\alpha_s R)}. \quad (2.2)$$

Бесконечные ряды в (2.2) суммируются на основании общей теории преобразования Ханкеля с конечными пределами [4]. Мы приводим здесь лишь окончательные результаты:

$$\frac{2}{R} \sum_s \frac{J_0(\alpha_s r)}{\alpha_s J_1(\alpha_s R)} = 1 \quad \text{и} \quad \frac{2}{R^2} \sum_s \frac{J_0(\alpha_s r)}{\alpha_s^2 J_1^2(\alpha_s R)} = \ln \frac{R}{r}. \quad (2.3)$$

Таким образом, распределение давления с учетом (2.3) можно представить в виде:

$$p = p_0 + q_0 \ln \frac{r}{R} + \frac{2q_0}{R^2} \sum_s \frac{J_0(\alpha_s r) e^{-\alpha_s^2 t}}{\alpha_s^2 J_1^2(\alpha_s R)}. \quad (2.4)$$

§ 3. Согласно изложенному в § 1 за функцию  $v$  можно принять выражение

$$v = \ln \frac{r}{R} + \frac{2}{R^2} \sum_s \frac{J_0(\alpha_s r) e^{-\alpha_s^2 t}}{\alpha_s^2 J_1^2(\alpha_s R)}. \quad (3.1)$$

Дебит скважины определяется по формуле

$$Q = \lim_{a \rightarrow 0} \int_0^{2\pi} [H v_r]_{r=a} d\theta. \quad (3.2)$$

Но, согласно закону Дарси  $v_r = -\frac{k}{\mu} \frac{\partial p}{\partial r}$ . Из (1.4) и (3.1) следует

$$\begin{aligned} \frac{\partial p}{\partial r} &= \frac{c}{H} \left\{ \sqrt{H} \left[ \frac{1}{r} - \frac{2}{R^2} \sum_s \frac{J_1(\alpha_s r) e^{-\alpha_s^2 t}}{\alpha_s J_1^2(\alpha_s R)} \right] - \right. \\ & \left. - \left[ \ln \frac{r}{R} + \frac{2}{R^2} \sum_s \frac{J_0(\alpha_s r) e^{-\alpha_s^2 t}}{\alpha_s^2 J_1^2(\alpha_s R)} \right] \frac{\partial \sqrt{H}}{\partial r} \right\}. \end{aligned} \quad (3.3)$$

Из (3.2), учитывая (3.3), для дебита получаем

$$\begin{aligned} Q &= -\frac{ck}{\mu} \left\{ 1 - \frac{2a}{R^2} \sum_s \frac{J_1(\alpha_s a) e^{-\alpha_s^2 t}}{\alpha_s J_1^2(\alpha_s R)} \right\} \int_0^{2\pi} \sqrt{H}|_{r=a} d\theta - \\ & - a \left\{ \ln \frac{a}{R} + \frac{2}{R^2} \sum_s \frac{J_0(\alpha_s a) e^{-\alpha_s^2 t}}{\alpha_s^2 J_1^2(\alpha_s R)} \right\} \int_0^{2\pi} \left\{ \frac{\partial \sqrt{H}}{\partial r} \right\}_{r=a} d\theta. \end{aligned} \quad (3.4)$$

При  $a$ , стремящемся к нулю,  $J_1(\alpha_s a)$  также стремится к нулю. Поэтому

$$\lim_{a \rightarrow 0} \frac{a}{R^2} \sum_s \frac{J_1(\alpha_s a) e^{-\alpha_s^2 t}}{\alpha_s J_1^2(\alpha_s R)} = 0. \quad (3.5)$$

В силу известных свойств гармонической функции

$$\int_0^{2\pi} \left\{ \frac{\partial V\bar{H}}{\partial r} \right\}_{r=a} d\theta = 0 \text{ и } \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \{V\bar{H}\}_{r=a} d\theta = \sqrt{H_0}, \quad (3.6)$$

где  $H_0$  — значение функции  $H$  в центре скважины. Пользуясь соотношениями (3.5) и (3.6), определяем

$$c = \frac{Q\mu}{2\pi k \sqrt{H_0}}. \quad (3.7)$$

Подставим значение  $c$  в (1.4). Тогда

$$p = p_0 - \frac{Q\mu}{2\pi k \sqrt{HH_0}} \left\{ \ln \frac{r}{R} + \frac{2}{R^2} \sum_s \frac{J_0(\alpha_s r) e^{-\alpha_s^2 t}}{\alpha_s^2 J_1^2(\alpha_s R)} \right\}. \quad (3.8)$$

Формула (3.8) представляет обобщение на случай переменной мощности пласта известной формулы распределения давления в ограниченном круговом пласте постоянной мощности, которая вытекает из (3.8) при  $H = H_0 = \text{const}$ .

Бесконечный ряд, входящий в выражение давления (3.8), с любой степенью точности можно просуммировать, пользуясь готовыми таблицами для корней уравнения  $J_0(\alpha_s R) = 0$  и соответствующими их значениями  $J_1(\alpha_s R)$ . При обычных значениях  $x$  и  $\frac{r}{R}$  этот ряд будет быстро сходящимся, поэтому при численных подсчетах можно ограничиться несколькими начальными членами.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. А. П. Крылов и др. Научные основы разработки нефтяных месторождений. Гостехиздат, 1948.
2. Г. С. Салехов. К определению функции давления в неоднородных пластах нефтяных месторождений. ДАН СССР, т. 105, № 6, 1955.
3. М. Маскет. Течение однородных жидкостей в пористой среде. Гостоптехиздат, 1949.
4. Н. Снеддон. Преобразования Фурье. Издательство иностранной литературы, Москва, 1955.

Поступила  
 20 марта 1958 г.

Л. В. СТАРШИНОВА

### ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДА КОНЕЧНЫХ РАЗНОСТЕЙ ДЛЯ ОПРЕДЕЛЕНИЯ ДАВЛЕНИЯ В НЕОДНОРОДНЫХ ПЛАСТАХ

В статье рассмотрено решение задачи определения функции давления в неоднородных пластах нефтяных месторождений с  $n$  скважинами методом конечных разностей.

Для упрощения вида рассматриваемой многосвязной области применяется конформное преобразование. Даны числовые примеры.

1. Рассмотрим задачу определения давления в неоднородном по проницаемости  $k(x, y)$  и мощности  $b(x, y)$  пласте, вскрытом  $n$  эксплуатационными и нагнетательными скважинами.

Математически задача ставится так: требуется найти функцию  $p(x, y)$ , удовлетворяющую уравнению [1]

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( kb \frac{\partial p}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( kb \frac{\partial p}{\partial y} \right) = 0 \quad (1)$$

в многосвязной области  $G$  (фиг. 1), ограниченной контуром  $\Gamma_k$  и контурами скважин,  $\Gamma_i$ , и краевым условиям

$$p|_{\Gamma_k} = p_k(x, y, t); \quad p|_{\Gamma_i} = p_{ci}(t), \quad (2)$$

где  $i = 1, 2, \dots, n$ ,  $n$  — число скважин.

В такой общей постановке аналитическое решение этой задачи наталкивается на математические трудности, поэтому естественно воспользоваться для ее решения численными методами, в частности, методом конечных разностей.

Если известная функция давления  $p(x, y)$  удовлетворяет краевым условиям

$$p|_{\Gamma_k} = p_k = \text{const}; \quad p|_{\Gamma_i} = p_{ci} = \text{const}, \quad (3)$$

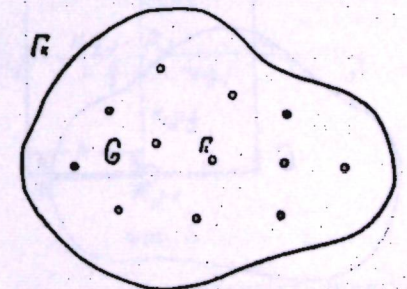
то это будет частным случаем поставленной задачи.

2. Как известно [2], уравнение Лапласа остается инвариантным относительно конформного преобразования. Покажем, что уравнение эллиптического типа (1) при конформном преобразовании также остается инвариантным.

Вместо переменных  $x$  и  $y$  вводим новые переменные  $u$  и  $v$  при помощи равенств

$$u = u(x, y), \quad v = v(x, y), \quad (4)$$

где  $u(x, y)$ ,  $v(x, y)$  — сопряженные гармонические функции.



Фиг. 1.

Когда переменные  $x$  и  $y$  меняются в области  $G$ , новые переменные  $u$  и  $v$  меняются в некоторой другой области  $G'$ .

Посмотрим, как преобразуется уравнение (1) при замене переменных (4). Запишем уравнение (1) в виде:

$$\sigma \left( \frac{\partial^2 p}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 p}{\partial y^2} \right) + \frac{\partial \sigma}{\partial x} \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial \sigma}{\partial y} \frac{\partial p}{\partial y} = 0; \quad \sigma(x, y) = k(x, y) \cdot b(x, y). \quad (1a)$$

Частные производные при замене переменных записываются так:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma}{\partial x} &= \frac{\partial \sigma}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial \sigma}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial x}; & \frac{\partial \sigma}{\partial y} &= \frac{\partial \sigma}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial \sigma}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial y}; \\ \frac{\partial p}{\partial x} &= \frac{\partial p}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial p}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial x}; & \frac{\partial p}{\partial y} &= \frac{\partial p}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial p}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial y}; \\ \frac{\partial^2 p}{\partial x^2} &= \frac{\partial^2 p}{\partial u^2} \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + 2 \frac{\partial^2 p}{\partial u \partial v} \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial^2 p}{\partial v^2} \left( \frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 + \frac{\partial p}{\partial u} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial p}{\partial v} \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}; \\ \frac{\partial^2 p}{\partial y^2} &= \frac{\partial^2 p}{\partial u^2} \left( \frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 + 2 \frac{\partial^2 p}{\partial u \partial v} \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial^2 p}{\partial v^2} \left( \frac{\partial v}{\partial y} \right)^2 + \frac{\partial p}{\partial u} \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial p}{\partial v} \frac{\partial^2 v}{\partial y^2}. \end{aligned}$$

Уравнение (1a) в новых переменных  $u$  и  $v$  приобретает вид:

$$\begin{aligned} \sigma \left[ \frac{\partial^2 p}{\partial u^2} \left[ \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 \right] + 2 \frac{\partial^2 p}{\partial u \partial v} \left[ \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial v}{\partial y} \right] + \frac{\partial^2 p}{\partial v^2} \left[ \left( \frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial v}{\partial y} \right)^2 \right] + \right. \\ \left. + \frac{\partial p}{\partial u} \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) + \frac{\partial p}{\partial v} \left( \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right) \right] + \frac{\partial \sigma}{\partial u} \frac{\partial p}{\partial u} \left[ \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 \right] + \\ + \frac{\partial \sigma}{\partial v} \frac{\partial p}{\partial v} \left[ \left( \frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial v}{\partial y} \right)^2 \right] + \left( \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial v}{\partial y} \right) \cdot \left( \frac{\partial \sigma}{\partial u} \frac{\partial p}{\partial u} + \frac{\partial \sigma}{\partial v} \frac{\partial p}{\partial v} \right) = 0. \end{aligned} \quad (5)$$

Зная, что

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0; & \quad \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = 0; & \quad \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial v}{\partial y} = 0; \\ \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 &= \left( \frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial v}{\partial y} \right)^2, \end{aligned}$$

уравнение (5) записывается в следующем виде:

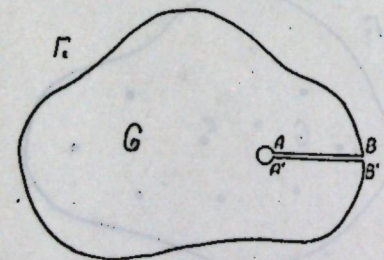
$$\sigma \left( \frac{\partial^2 p}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 p}{\partial v^2} \right) + \frac{\partial \sigma}{\partial u} \frac{\partial p}{\partial u} + \frac{\partial \sigma}{\partial v} \frac{\partial p}{\partial v} = 0.$$

Таким образом, уравнение (1) остается без изменений.

Для многих задач удобно брать в качестве новых переменных такие

$$u = s \ln(x^2 + y^2), \quad v = s \operatorname{arctg} \frac{y}{x}. \quad (6)$$

Для некоторых же задач могут оказаться более удобными другие преобразующие гармонические сопряженные функции. Выбор преобразующих функций зависит от конкретных условий задачи. В предлагаемой работе мы ограничимся этими двумя (6) простейшими функциями. Такое преобразование предложено Д. Ю. Пановым [3] с целью решения задачи в преобразованной области простейшей конфигурации. Для нас же это преобразование выгодно еще и тем, что позволяет учитывать радиус скважины, как бы мал он ни был по сравнению с размерами месторождения.



Фиг. 2.

3. Рассмотрим сначала задачу восстановления давления, когда в пласте с контуром питания  $\Gamma_k$  имеется одна скважина радиуса  $r_c$  с центром в начале координат.

Пусть  $p_k$  — давление на контуре питания  $\Gamma_k$ ,  $p_c$  — давление на скважине.

Требуется определить давление в области  $G$ . Как ясно из предыдущего, для этого нужно найти решение уравнения

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( \sigma \frac{\partial p}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( \sigma \frac{\partial p}{\partial y} \right) = 0 \quad (7)$$

при граничных условиях

$$p|_{\Gamma_k} = p_k = \text{const}; \quad p|_{r_c} = p_c = \text{const}.$$

Если ввести полярные координаты  $(r, \theta)$  с полюсом в начале координат, то уравнение (7) принимает вид:

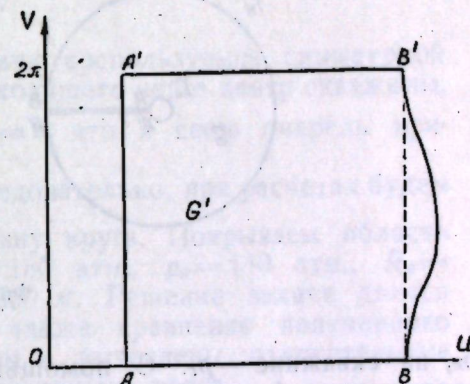
$$\frac{\partial}{\partial r} \left( \sigma r \frac{\partial p}{\partial r} \right) + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \sigma \frac{\partial p}{\partial \theta} \right) = 0, \quad (8)$$

а функции (6) записываются так:

$$u = s \ln r, \quad v = s\theta + 2\pi s n \theta. \quad (9)$$

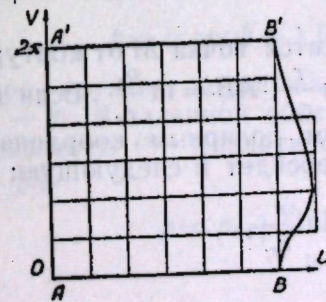
Проведем разрез по лучу  $\theta = 0$  от точки внутренней границы области  $A$  до точки внешней границы  $B$  и посмотрим, как преобразуется область  $G$  с разрезом при переходе к плоскости  $(u, v)$ .

Когда переменные  $r, \theta$  изменяются в области  $G$  с разрезом, то при обходе сначала по левому берегу разреза, затем по границе области против часовой стрелки и, наконец, по правому берегу разреза получаем при отображении контур односвязной области  $G'$ , в которой меняются новые переменные  $u$  и  $v$ . Для решения поставленной задачи к области  $G'$  (фиг. 3) применим метод конечных разностей.

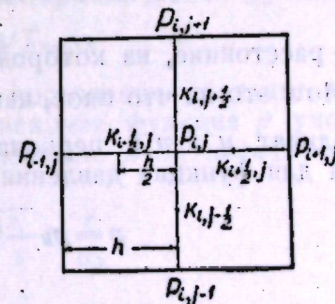


Фиг. 3.

4. Для численного решения задачи область  $G'$  покрываем квадратной сеткой с шагом  $h$ . Множитель  $s$  в преобразующих функциях (6) целесообразно подобрать так, чтобы основание и высота области  $G'$  содержали целое число шагов, аппроксимировать нужно будет лишь одну сторону криволинейного четырехсторонника.



Фиг. 4.



Фиг. 5.

При численном решении задачи все расстояния рассматриваются как величины безразмерные, если  $r_c$  принять за масштабную единицу. Уравнение (8) заменяем уравнением в конечных разностях.

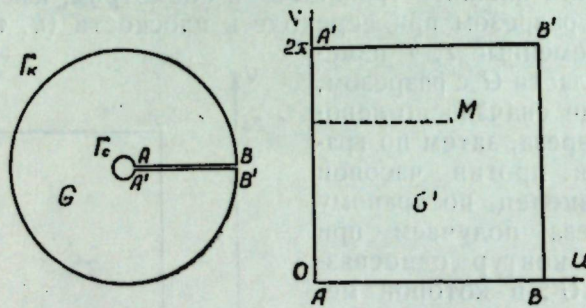


$$p_{ij} = \frac{p_{i+1,j} k_{i+\frac{1}{2},j} + p_{i,j+1} k_{i,j+\frac{1}{2}} + p_{i-1,j} k_{i-\frac{1}{2},j} + p_{i,j-1} k_{i,j-\frac{1}{2}}}{k_{i+\frac{1}{2},j} + k_{i,j+\frac{1}{2}} + k_{i-\frac{1}{2},j} + k_{i,j-\frac{1}{2}}} \quad (10)$$

Граничные значения сеточного контура исправляются методом итерационного процесса по Коллатцу [3]. Основываясь на том, что заданы значения искомой функции  $p$  на контуре питания, контуре скважины,  $p$  является функцией периодической относительно переменной  $v$  и так как на берегах разреза значения функции одинаковые, задается нулевое приближение во всех узлах сетки. Итерационный процесс будем считать законченным лишь тогда, когда два последовательных приближения совпадут в пределах заданной точности. Указанным методом рассмотрим решение таких задач, для которых можно получить точное решение.

5. Приведем три числовых примера.

Пример 1. Определить функцию давления в круговом однородном пласте радиуса  $R_k$  с единственной центральной скважиной радиуса  $r_c$ . На контуре питания поддерживается постоянное давление



Фиг. 6.

$p_k$ , на скважине —  $p_c$ . С помощью преобразующих гармонических сопряженных функций  $u = \ln r$ ,  $v = \theta + 2\pi n$  преобразуем область  $G$  с разрезом  $AB$  в односвязную область  $G'$ . В преобразованной области  $G'$  в качестве исходного приближения получаем линейный поток от контура питания к скважине. В любой точке  $M$  плоского потока функция давления имеет вид

$$p = p_k - \frac{p_k - p_c}{AB} x, \quad (11)$$

где  $x$  — расстояние, на котором находится точка  $M$  от контура скважины. Но  $x$  это не что иное, как  $u = \ln \frac{r}{r_c}$ ,  $AB = \ln \frac{R_k}{r_c}$ . Если перейти от координат  $u$  и  $v$  к первоначальным полярным координатам, то формула для функции давления (11) перейдет в следующую:

$$p = p_k - \frac{p_k - p_c}{\ln \frac{R_k}{r_c}} \ln \frac{r}{r_c}, \quad (12)$$

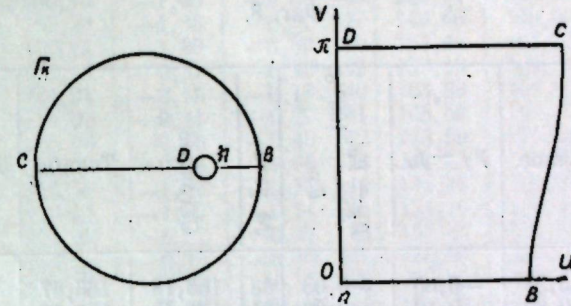
которая является выражением давления в любой точке плоского сечения радиального потока.

Пример 2. Определить функцию давления в круговом однородном пласте радиуса  $R_k$  с одной скважиной радиуса  $r_c$ , расположенной на расстоянии  $\rho$  от центра пласта. На контуре питания

поддерживается постоянное давление  $p_k$ , на скважине —  $p_c$ . Аналитическое решение этой задачи дается формулой [4]

$$p = p_k - (p_k - p_c) \frac{\ln \frac{R_k}{r_1}}{\ln \frac{R_k}{r_c}}, \quad (13)$$

где  $r_1$  — расстояние точки, в которой ищется давление, до отображенной скважины. С помощью конформного преобразования (9) отображим область  $G$  в область  $G'$ .



Фиг. 7.

Для упрощения решения этой задачи воспользуемся симметрией течения относительно диаметра, проходящего через центр скважины, это дает условие  $\frac{\partial p}{\partial \theta} = 0$  при  $\theta = 0, \theta = \pi$ , что в свою очередь приводит к  $\frac{\partial p}{\partial v} = 0$ , т. к.  $v = \theta + 2\pi n$ . Следовательно, при расчетах будем рассматривать лишь верхнюю половину круга. Покрываем область  $G'$  сеткой. Исходные данные:  $p_k = 180$  атм.,  $p_c = 140$  атм.,  $R_k = 1200$  м,  $r_c = 15$  см,  $b = 1$  м,  $\rho = 600$  м. Решение задачи дается в таблице 1. В таблице 1 дается также сравнение полученного сеточного решения с аналитическим и вычислены относительные ошибки. Максимальная относительная ошибка равна

$$\left( \frac{p_T - p_c}{p_T} \cdot 100 \right)_{\max} = 0,7\%$$

Пример 3. Определить функцию давления в круговом неоднородном пласте радиуса  $R_k$ , с одной концентричной скважиной радиуса  $r_c$ . Проницаемость  $k$  является квадратом гармонической функции

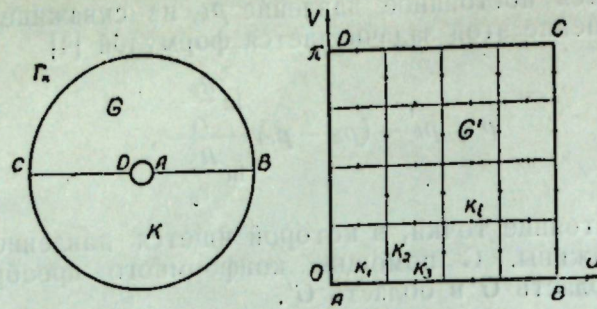
$$k = (r \cos \theta + 1,2R_k)^2, \quad \Delta \sqrt{k} = 0. \quad (14)$$

На контуре питания поддерживается постоянное давление  $p_k$ , на скважине —  $p_c$ . В заданной области  $G$  искомая функция  $p$  удовлетворяет уравнению (8). Аналитическое решение этой задачи дается формулой [5]

$$p = p_k + \frac{p_c - p_k}{\ln \frac{r_c}{R_k}} \sqrt{\frac{k_1}{k}} \ln \frac{r}{R_k}, \quad (15)$$

где  $\sqrt{k_1} = r_c \cos \theta + 1,2R_k$ .

Как и в предыдущих примерах, с помощью конформного преобразования (6) отображаем область  $G$  в область  $G'$ . Вследствие симметрии и в этом примере рассматриваем лишь верхнюю половину круга.



Фиг. 8.

Таблица 1

№ узла	Сеточное	Точное	$p_T - p_c$	$\frac{p_T - p_c}{p_T} \cdot 100\%$	№ узла	Сеточное	Точное	$p_T - p_c$	$\frac{p_T - p_c}{p_T} \cdot 100\%$
1	145,34	145,29	-0,05	-0,03	33	166,18	166,47	0,29	0,17
2	150,71	150,59	-0,12	-0,08	34	171,40	171,75	0,35	0,20
3	156,10	155,89	-0,21	-0,13	35	176,60	176,90	0,30	0,17
4	161,56	161,21	-0,35	-0,22	36	145,20	145,29	0,09	0,06
5	167,12	166,59	-0,53	-0,32	37	150,40	150,59	0,19	0,13
6	172,84	172,16	-0,68	-0,39	38	155,58	155,88	0,30	0,19
7	178,81	178,46	-0,35	-0,29	39	160,74	161,16	0,42	0,29
8	145,33	145,29	-0,04	-0,03	40	165,85	166,42	0,57	0,34
9	150,69	150,59	-0,10	-0,07	41	170,90	171,60	0,70	0,41
10	156,07	155,89	-0,18	-0,11	42	175,84	176,50	0,66	0,37
11	161,51	161,21	-0,30	-0,19	43	145,17	145,29	0,12	0,08
12	167,05	166,58	-0,47	-0,28	44	150,33	150,58	0,25	0,17
13	172,72	172,13	-0,59	-0,34	45	155,46	155,87	0,41	0,26
14	178,59	178,30	-0,29	-0,16	46	160,56	161,15	0,59	0,37
15	145,31	145,29	-0,02	-0,01	47	165,59	166,38	0,79	0,47
16	150,64	150,59	-0,05	-0,03	48	170,52	171,49	0,97	0,56
17	155,99	155,89	-0,10	-0,06	49	175,31	176,20	0,89	0,50
18	161,38	161,20	-0,18	-0,11	50	145,15	145,29	0,14	0,10
19	166,83	166,55	-0,28	-0,17	51	150,28	150,58	0,30	0,20
20	172,39	172,03	-0,36	-0,21	52	155,39	155,87	0,48	0,31
21	178,07	177,92	-0,15	-0,08	53	160,44	161,14	0,70	0,43
22	145,28	145,29	0,01	0,01	54	165,42	166,36	0,94	0,56
23	150,56	150,59	0,03	0,02	55	170,28	171,42	1,14	0,66
24	155,86	155,88	0,02	0,01	56	174,98	176,04	1,06	0,60
25	161,18	161,19	0,01	0,01	57	179,46	179,65	0,19	0,10
26	166,53	166,51	-0,02	-0,01	58	145,14	145,29	0,15	0,10
27	171,92	171,90	-0,02	-0,01	59	150,27	150,58	0,31	0,21
28	177,38	177,38	0,00	0,00	60	155,36	155,87	0,54	0,35
29	145,24	145,29	0,05	0,03	61	160,40	161,14	0,74	0,46
30	150,48	150,59	0,11	0,07	62	165,36	166,35	0,99	0,59
31	155,72	155,88	0,16	0,10	63	170,19	171,39	1,20	0,70
32	160,95	161,17	0,22	0,14	64	174,86	175,98	1,12	0,64
					65	179,29	179,56	0,27	0,15

Для каждой внутренней точки решаем уравнение в конечных разностях (10), для этого в середины всех отрезков, соединяющих соседние узлы сетки, следует перенести значения проницаемости  $k$  из соответствующих точек плоскости  $r, \theta$  (см. формулу (10)). Результаты приведены в таблице 2. В таблице дается также сравнение сеточного решения с аналитическим и вычислены относительные ошибки. Максимальная относительная ошибка равна

$$\left( \frac{p_T - p_c}{p_T} \cdot 100 \right)_{\max} = 1,63\%$$

Таблица 2

№№ узла	Сеточное	Точное	$p_T - p_c$	$\frac{p_T - p_c}{p_T} \cdot 100\%$	№№ узла	Сеточное	Точное	$p_T - p_c$	$\frac{p_T - p_c}{p_T} \cdot 100\%$
1	145,22	145,01	-0,21	-0,14	33	164,75	165,00	0,25	0,15
2	150,47	150,02	-0,45	-0,30	34	169,76	170,00	0,24	0,14
3	155,79	155,06	-0,73	-0,47	35	174,84	175,00	0,16	0,09
4	161,21	160,16	-1,05	-0,66	36	144,84	145,00	0,16	0,11
5	166,71	165,38	-1,33	-0,80	37	149,66	149,99	0,33	0,22
6	172,13	170,77	-1,36	-0,80	38	154,45	154,98	0,53	0,34
7	176,91	176,04	-0,87	-0,49	39	159,18	159,94	0,76	0,47
8	145,20	145,01	-0,19	-0,13	40	163,88	164,85	0,97	0,59
9	150,43	150,02	-0,41	-0,27	41	168,60	169,67	1,07	0,63
10	155,72	155,06	-0,66	-0,43	42	173,59	174,44	0,85	0,49
11	161,11	160,15	-0,96	-0,60	43	144,75	144,99	0,24	0,16
12	166,57	165,36	-1,21	-0,73	44	149,46	149,98	0,52	0,35
13	171,98	170,71	-1,27	-0,74	45	154,10	154,95	0,85	0,55
14	176,80	175,98	-0,82	-0,47	46	158,65	159,88	1,23	0,77
15	145,15	145,00	-0,15	-0,10	47	163,08	164,72	1,64	0,99
16	150,31	150,02	-0,29	-0,19	48	167,48	169,37	1,89	1,11
17	155,53	155,05	-0,48	-0,31	49	172,22	173,85	1,63	0,94
18	160,81	160,12	-0,69	-0,43	50	144,68	144,99	0,31	0,24
19	166,18	165,27	-0,91	-0,55	51	149,32	149,98	0,66	0,44
20	171,52	170,56	-0,96	-0,56	52	153,86	154,94	1,08	0,70
21	176,44	175,79	-0,65	-0,37	53	158,27	159,85	1,58	0,99
22	145,06	145,00	-0,06	-0,04	54	162,52	164,63	2,11	1,28
23	150,12	150,01	-0,11	-0,07	55	166,65	169,17	2,52	1,49
24	155,22	155,02	-0,20	-0,13	56	171,09	173,39	2,30	1,33
25	160,35	160,06	-0,29	-0,18	57	144,66	144,99	0,33	0,23
26	165,55	165,15	-0,40	-0,24	58	149,27	149,98	0,71	0,47
27	170,77	170,31	-0,46	-0,27	59	153,78	154,94	1,16	0,75
28	175,80	175,46	-0,34	-0,19	60	158,14	159,83	1,69	1,06
29	144,95	145,00	0,05	0,03	61	162,31	164,60	2,29	1,39
30	149,89	150,00	0,11	0,07	62	166,34	169,09	2,75	1,63
31	154,84	155,00	+0,16	0,10	63	170,65	173,21	2,56	1,48
32	159,78	160,00	0,22	0,14					

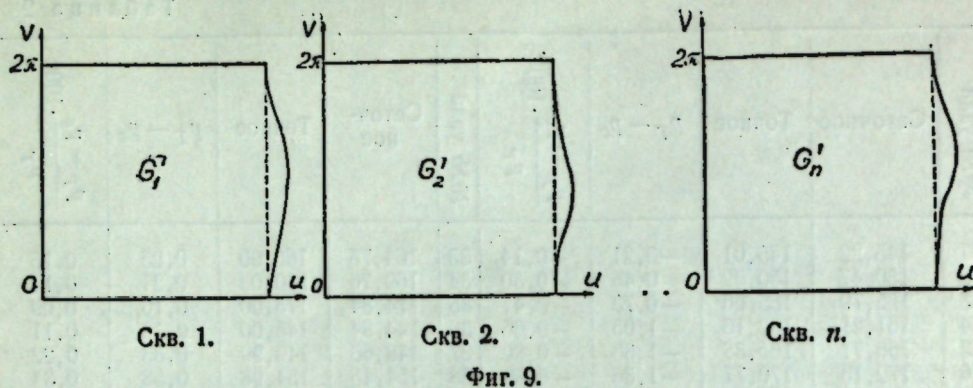
6. Применим разобранный выше метод сеток к решению задач определения давления  $p$ , когда в горизонтальном пласте разбурено  $n$  скважин. Эта многосвязная область  $G$  ограничена звездным замкнутым контуром  $\Gamma_k$  и контурами скважин  $\Gamma_i$ .

Задано давление  $p_k$  на контуре питания  $\Gamma_k$  и  $p_i$  соответственно на контурах, произвольно расположенных скважин  $\Gamma_i$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ). Известно, что функция  $p$  внутри области удовлетворяет дифференциальному уравнению (1). Задача определения функции давления в данном случае будет решаться следующим образом:

1) Для каждой скважины решаем задачу восстановления функции давления в пласте отдельно, считая что все остальные скважины отключены. Отообразим область  $G$  с разрезом на  $G'_i$  (как в п. 4) с помощью гармонических функций (6), покроем полученные области сеткой и проведем вычисления по методу итераций. Расчеты будем проводить исходя из того, что на всех скважинах заданное давление равно единице, а на контуре питания — нулю.

Для неоднородного пласта при проведении вычислений методом итераций необходимо перенести в середины всех отрезков, соединяющих соседние узлы сетки, значения проницаемости  $k$  из соответствующих точек плоскости  $(r, \theta)$ .

2) Считаем, что координаты всех скважин относительно друг друга известны. Таким образом, на фиг. 9 сможем определить зна-



чение единичных функций влияния скважин друг на друга, если на всех скважинах заданные давления равны единице.

Например, влияние скважины 1, с заданным давлением на скважине равным 1, на все остальные скважины сможем найти на фиг. 9 (скв. 1), если считать известными расстояние всех скважин от первой скважины и углы.

Точно также поступаем со всеми остальными скважинами. В результате, сможем считать известными все единичные функции влияния.

$$\left. \begin{aligned} & p_{11}, p_{21}, p_{31}, \dots, p_{n1} \\ & p_{12}, p_{22}, p_{32}, \dots, p_{n2} \\ & p_{13}, p_{23}, p_{33}, \dots, p_{n3} \\ & \dots \dots \dots \\ & p_{1n}, p_{2n}, p_{3n}, \dots, p_{nn} \end{aligned} \right\} \quad (16)$$

При одновременном действии всех скважин на основе принципа суперпозиции решений, справедливого для линейного уравнения (1), давление на каждой скважине равно сумме произведений некоторых коэффициентов  $\lambda_i$  на функции влияния  $p_{ji}$

$$p_i = \sum_{j=1}^n \lambda_j p_{ji} \quad (i=1, 2, \dots, n). \quad (17)$$

Здесь, очевидно,  $p_{ii} = 1$  при  $i=j$ .

Это и есть система линейных неоднородных уравнений для определения коэффициентов  $\lambda_j$ . После того, как  $\lambda_j$  найдены, можно без труда определить давление в произвольной точке  $M$  пласта.

$$p_M = \lambda_1 p_{1M} + \lambda_2 p_{2M} + \dots + \lambda_n p_{nM}, \quad (18)$$

где  $p_{iM}$  — коэффициенты влияния на точку  $M$  берутся в точке  $M_i$  (образе точки  $M$  в плоскости  $u_i, v_i$ ) из решения соответствующих единичных задач.

Необходимо отметить, что для вычисления таблиц фиг. 9 на скважинах давление берется равным единице, а на контуре питания — нулю, исключительно ради удобства пользования этими таблицами. При изменении давления на какой-либо одной или нескольких скважинах не нужно пересчитывать таблицы фиг. 9, они остаются в силе во все время работы данного месторождения, изменится лишь система уравнений (17). Если подключаются новые скважины, то нужно будет просчитать лишь соответствующие им таблицы и решить дополненную систему уравнений (17).

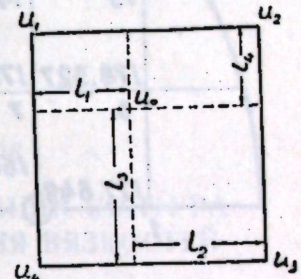
При определении единичных функций влияния  $p_{ji}$  по таблицам фиг. 9 приходится пользоваться интерполяцией.

Чтобы найти сразу значение искомой функции в данной точке по известным значениям функции в узлах сетки, удобно пользоваться следующей формулой:

$$u_0 = \frac{1}{(l_1 + l_3)(l_2 + l_4)} (u_1 l_3 l_4 + u_2 l_1 l_4 + u_3 l_1 l_2 + u_4 l_2 l_3), \quad (19)$$

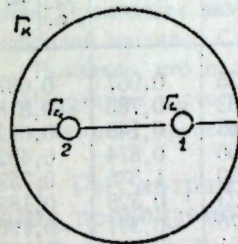
которая легко может быть получена из уравнения для четырех точек.

7. Приведем следующий числовой пример. Определим функцию давления в круговом однородном пласте радиуса  $R_k$ , вскрытом двумя эксцентричными скважинами одинакового радиуса  $r_c$ , расположенными симметрично относительно центра окружности в серединах радиусов. На контуре питания поддерживается постоянное давление  $p_k$  на скважинах —  $p_{c1}$  и  $p_{c2}$ . Аналитическое решение этой задачи дается формулой [4]



Фиг. 10.

$$p = p_k - \frac{p_k - p_c}{\ln \frac{R_k}{r_c}} \left( \ln \frac{R_k}{r_1} + \ln \frac{R_k}{r_2} \right). \quad (20)$$



Фиг. 11.

Исходные данные:  $R_k = 1200$  м,  $r_c = 15$  см,  $p_k = 180$  атм.,  $p_{c1} = 140$  атм.,  $p_{c2} = 160$  атм.,  $r_1 = r_2 = 600$  м.

1. Для первой и второй скважин решаем задачу определения функции давления отдельно. Вследствие симметрии, решение дается лишь для верхней половины круга.

2. Координаты 1 и 2-ой скважин относительно друг друга следующие:

$$\lg \frac{r_{12}}{r_c} = \lg \frac{r_{21}}{r_c} = 3,903; \quad \theta_{12} = \pi, \quad \theta_{21} = 0,$$

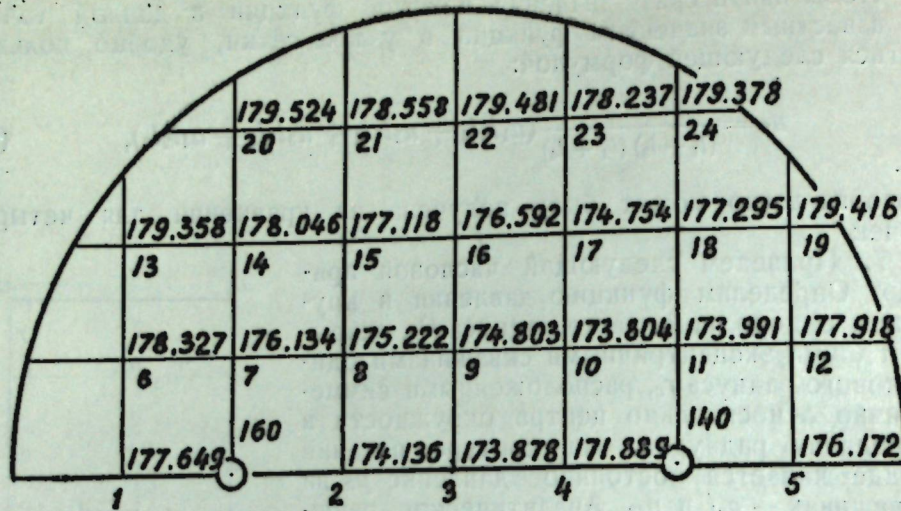
следовательно, на соответствующих таблицах находим функции влияния  $p_{21} = p_{12} = 0,039$ ;  $p_{11} = p_{22} = 1$ . Заданные давления на скважинах, если давление на контуре питания равно нулю, равны:  $p_1 = 40$  атм,  $p_2 = 20$  атм. Отсюда система уравнений (17) для данного примера будет иметь вид:

$$40 = \lambda_1 \cdot 1 + \lambda_2 \cdot 0,039; \quad 20 = \lambda_1 \cdot 0,039 + \lambda_2 \cdot 1. \quad (21)$$

Решив систему уравнений (21), находим  $\lambda_1 = 39,280$ ;  $\lambda_2 = 18,468$ . Покрываем область  $G$  фиг. 12, в которой мы определяем функцию давления, сеткой. Шаг выбираем таким, чтобы узлы находились в точках, где необходимо определить давление. Или, исходя из условия задачи, определяем давление лишь в тех точках области  $G$ , в которых это необходимо сделать. В данном примере мы находим значения функции давления в узлах сетки с шагом  $h = 300$  м. Результаты приведены в таблице 3 и на фиг. 12.

В таблице 3 дается сравнение сеточного решения с аналитическим и вычислены относительные ошибки. Максимальная относительная ошибка равна

$$\left( \frac{p_T - p_c}{p_T} \cdot 100 \right)_{\max} = 0,89\%.$$



Фиг. 12.

Таблица 3

№№ узлов	Сеточное	Точное	$p_T - p_c$	$\frac{p_T - p_c}{p_T} \cdot 100\%$	№№ узлов	Сеточное	Точное	$p_T - p_c$	$\frac{p_T - p_c}{p_T} \cdot 100\%$
1	177,649	177,568	-0,081	-0,046	13	179,358	179,425	0,067	0,037
2	174,136	175,424	1,288	0,734	14	178,046	177,263	-0,783	-0,818
3	173,878	175,339	1,461	0,833	15	177,118	177,263	0,145	0,082
4	171,889	173,425	1,536	0,886	16	176,592	177,466	0,874	0,492
5	176,172	175,630	-0,542	-0,309	17	174,754	176,090	1,336	0,759
6	178,317	178,456	0,139	0,078	18	177,295	177,623	0,328	0,185
7	176,134	176,674	0,540	0,306	19	179,416	179,075	-0,341	-0,190
8	175,282	176,370	1,088	0,617	20	179,524	179,561	0,037	0,021
9	174,803	176,037	1,234	0,701	21	178,558	179,088	0,530	0,296
10	173,804	175,055	1,251	0,715	22	179,481	178,860	-0,621	-0,347
11	173,991	174,516	0,525	0,301	23	178,237	178,913	0,676	0,378
12	177,918	177,200	-0,718	-0,405	24	179,378	179,399	+0,021	0,012

ЛИТЕРАТУРА

1. Крылов А. П., Глоговский М. М. и др. Научные основы разработки нефтяных месторождений. Гостехиздат, 1948.
2. Канторович Л. В. и Крылов В. И. Приближенные методы высшего анализа. Гостехиздат, 1949.
3. Панов Д. Ю. Справочник по численному решению дифференциальных уравнений в частных производных. Гостехиздат, 1949.
4. Щелкачев В. Н., Лапук Б. Б. Подземная гидравлика. Гостехиздат, 1949.
5. Салехов Г. С. К определению функции давления в неоднородных пластах нефтяных месторождений. ДАН, СССР, т. 105, № 6, 1955.

Поступила  
20 марта 1958 г.

РЕШЕНИЕ ОДНОЙ ЗАДАЧИ О СТЫГИВАНИИ КОНТУРА  
НЕФТЕНОСНОСТИ С УЧЕТОМ РАЗЛИЧИЯ ВЯЗКОСТЕЙ  
НЕФТИ И ВОДЫ

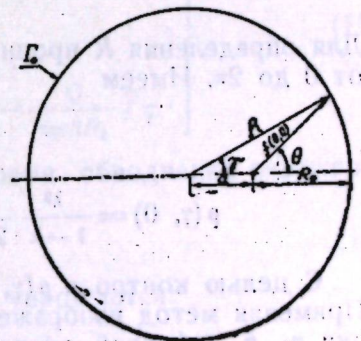
В. Л. ДАНИЛОВ, В. В. СКВОРЦОВ

В работе [1] задача прослеживания контура нефтеносности сведена к задаче Коши для нелинейного интегро-дифференциального уравнения и предложен численный метод ее решения.

В настоящей статье дано решение этой задачи о стягивании первоначально кругового контура нефтеносности к эксцентрически расположенной скважине. Приводятся результаты решения задачи на быстродействующей электронной цифровой машине „Стрела“.

Показано, что излом линий тока на границе раздела жидкостей, учитываемый в приводимом расчете, существенно сказывается на скорости перемещения контура к скважине и пренебрежение им приведет к значительным погрешностям.

1. Рассмотрим неограниченный горизонтальный пласт с постоянными проницаемостью  $k$ , мощностью  $h$  и пористостью  $m$ . Коэффициент текучести нефти обозначим  $c_1$ , коэффициент текучести воды —  $c_2$ . Вследствие различия вязкостей нефти  $\mu_1$  и воды  $\mu_2$  они различны ( $c = k/\mu$ ). Жидкости и породу считаем несжимаемыми, течение — плоским. Начальный контур нефтеносности  $\Gamma_0$  представляет собой окружность радиуса  $R$ . На расстоянии  $a$  от ее центра пласт вскрыт скважиной с объемным дебитом  $Q$ . Совместим начало полярной системы координат со скважиной и направим полярную ось по радиусу окружности  $\Gamma_0$  (фиг. 1). Обозначая радиус текущей точки контура нефтеносности через  $f(\theta, t)$ , имеем уравнение движения в виде (см. [1], формула (1.34)):



Фиг. 1.

$$f(\theta, t) f_t(\theta, t) - \frac{\lambda}{\pi} \int_0^{2\pi} f(v, t) f_t(v, t) \times$$

$$\times \frac{f^2(\theta, t) - f(\theta, t) f(v, t) \cos(\theta - v) - f_0(\theta, t) f(v, t) \sin(\theta - v)}{f^2(\theta, t) - 2f(\theta, t) f(v, t) \cos(\theta - v) + f^2(v, t)} dv = \frac{1 - \lambda}{2\pi mh} Q, (1)$$

где

$$\lambda = \frac{c_1 - c_2}{c_2 + c_1}, \quad f_t = \frac{\partial f}{\partial t}, \quad f_\theta = \frac{\partial f}{\partial \theta}.$$

Начальное условие, налагаемое на искомую функцию  $f(\theta, t)$ , то есть уравнение начального контура  $\Gamma_0$ , следующее:

$$f(\theta, 0) = \sqrt{R^2 - a^2 \sin^2 \theta} - a \cos \theta. \quad (2)$$

Для начала расчета необходимо знать функцию  $f(\theta, 0) f_t(\theta, 0)$  (см. по этому поводу [1], раздел 3). Однако, уравнение Фредгольма второго рода относительно функции  $f(\theta, 0) f_t(\theta, 0)$ , которое получается из (1) после подстановки в него  $f(\theta, 0)$  из (2), имеет довольно сложное ядро. Поэтому проще поступить следующим образом. Известно соотношение ([1], формула (3.3)):

$$f(\theta, 0) f_t(\theta, 0) = -\frac{2}{m} \frac{c_1 c_2}{c_2 - c_1} \pi \rho(\theta, 0) \sqrt{f^2(\theta, 0) + f_t^2(\theta, 0)}, \quad (3)$$

где  $\rho(\theta, 0)$  — плотность потенциала простого слоя, непрерывно распределенного по  $\Gamma_0$ . Будем отыскивать  $\rho(\theta, 0)$ , для чего перейдем к полярной системе координат  $r, \gamma$  с полюсом в центре  $\Gamma_0$ . В этой системе координат начальное условие (2) приобретает вид:

$$r(\gamma, 0) = R. \quad (4)$$

С учетом (4) получаем уравнение для  $\rho(\gamma, 0)$  (см. [1], уравнение (1.18), [2], уравнение (4.4)):

$$\rho(\gamma, 0) - \frac{\lambda}{2\pi} \int_0^{2\pi} \rho(v, 0) dv = \frac{\lambda Q}{2\pi^2 c_1 h} \cdot \frac{R - a \cos \gamma}{R^2 - 2Ra \cos \gamma + a^2}. \quad (5)$$

Отсюда

$$\rho(\gamma, 0) = \frac{\lambda}{2\pi} K + \frac{\lambda Q}{2\pi^2 c_1 h} \cdot \frac{R - a \cos \gamma}{R^2 - 2Ra \cos \gamma + a^2},$$

где

$$K = \int_0^{2\pi} \rho(v, 0) dv = \text{const.}$$

Для определения  $K$  проинтегрируем уравнение (5) по  $\gamma$  в пределах от 0 до  $2\pi$ . Имеем

$$K = \frac{\lambda}{1-\lambda} \frac{Q}{\pi c_1 h R},$$

$$\rho(\gamma, 0) = \frac{\lambda^2}{1-\lambda} \frac{Q}{2\pi^2 c_1 h R} + \frac{\lambda Q}{2\pi^2 c_1 h} \frac{R - a \cos \gamma}{R^2 - 2Ra \cos \gamma + a^2}. \quad (6)$$

С целью контроля  $\rho(\gamma, 0)$  было определено также иным путем. Применяя метод изображений, нетрудно найти распределение давления  $p_1$  в нефтяной области и  $p_2$  — в водной области в начальный момент времени. Тогда, пользуясь формулой

$$\rho = -\frac{1}{2\pi} \left( \frac{\partial p_1}{\partial n} - \frac{\partial p_2}{\partial n} \right)$$

и учитывая, что производная по внутренней нормали  $\frac{\partial}{\partial n} = -\frac{\partial}{\partial r} \Big|_{r=R}$ , приходим снова к выражению (6).

Вернемся к старой системе координат. Из фиг. 1 легко видеть, что

$$\cos \gamma = \frac{f(\theta, 0) \cos \theta + a}{R}.$$

Подставляя это значение в (6) и беря  $f(\theta, 0)$  из соотношения (2), получаем

$$\rho(\theta, 0) = \frac{\lambda Q}{2\pi^2 c_1 h R} \left( \frac{\lambda}{1-\lambda} + \frac{R^2 - a^2 \sin^2 \theta - a \cos \theta \sqrt{R^2 - a^2 \sin^2 \theta}}{R^2 + a^2 - 2a^2 \sin^2 \theta - 2a \cos \theta \sqrt{R^2 - a^2 \sin^2 \theta}} \right). \quad (7)$$

Используя выражения (2) и (7), из (3) находим:

$$f(\theta, 0) f_t(\theta, 0) = \frac{(1-\lambda) Q}{2\pi m h R} \left( \frac{\lambda}{1-\lambda} + \frac{R^2 - a^2 \sin^2 \theta - a \cos \theta \sqrt{R^2 - a^2 \sin^2 \theta}}{R^2 + a^2 - 2a^2 \sin^2 \theta - 2a \cos \theta \sqrt{R^2 - a^2 \sin^2 \theta}} \right) \times$$

$$\times \left[ ( \sqrt{R^2 - a^2 \sin^2 \theta} - a \cos \theta )^2 + \left( a \sin \theta - \frac{a^2 \sin \theta \cos \theta}{\sqrt{R^2 - a^2 \sin^2 \theta}} \right)^2 \right]^{1/2} =$$

$$= \frac{Q}{2\pi m h} \left( 1 - \lambda \frac{a \cos \theta}{\sqrt{R^2 - a^2 \sin^2 \theta}} \right). \quad (8)$$

Если обозначить кратчайшее расстояние от скважины до начального контура нефтеносности через  $R_0$ , то из (2) имеем (при  $\theta = 0^\circ$ ):

$$R_0 = R - a.$$

При постоянном дебите  $Q$  время обводнения скважины в одножидкостной системе ( $\lambda = 0$ ) равно

$$T_0 = -\frac{\pi m h R_0^2}{Q}. \quad (9)$$

Введем безразмерные величины:

$$\bar{f} = \frac{f}{R_0}, \quad \bar{t} = \frac{t}{T_0} = -\frac{Q}{\pi m h R_0^2} t, \quad \bar{R} = \frac{R}{R_0}, \quad \bar{a} = \frac{a}{R_0}. \quad (10)$$

Отсюда

$$\left. \begin{aligned} f &= R_0 \bar{f}, & t &= -\frac{\pi m h R_0^2}{Q} \bar{t}, \\ f_0 &= R_0 \frac{\partial \bar{f}}{\partial \theta} = R_0 \bar{f}_\theta, \\ f_t &= R_0 \frac{\partial \bar{f}}{\partial t} = R_0 \frac{\partial \bar{f}}{\partial \bar{t}} \frac{d\bar{t}}{dt} = -\frac{Q}{\pi m h R_0} \bar{f}_{\bar{t}}. \end{aligned} \right\} \quad (11)$$

Очевидно, в безразмерных величинах время обводнения скважины в одножидкостной системе равно

$$\bar{T}_0 = 1.$$

Уравнение (1) в безразмерных величинах упрощается:

$$\bar{f}(\theta, \bar{t}) \bar{f}_{\bar{t}}(\theta, \bar{t}) - \frac{\lambda}{\pi} \int_0^{2\pi} \bar{f}(v, \bar{t}) \bar{f}_{\bar{t}}(v, \bar{t}) \times$$

$$\times \frac{\bar{f}^2(\theta, \bar{t}) - \bar{f}(\theta, \bar{t}) \bar{f}(v, \bar{t}) \cos(\theta - v) - \bar{f}_\theta(\theta, \bar{t}) \bar{f}(v, \bar{t}) \sin(\theta - v)}{\bar{f}^2(\theta, \bar{t}) - 2\bar{f}(\theta, \bar{t}) \bar{f}(v, \bar{t}) \cos(\theta - v) + \bar{f}^2(v, \bar{t})} dv =$$

$$= -\frac{1-\lambda}{2}. \quad (1a)$$

Начальное условие (2) принимает вид:

$$\bar{f}(\theta, 0) = \sqrt{\bar{R}^2 - \bar{a}^2 \sin^2 \theta} - \bar{a} \cos \theta. \quad (2a)$$

Наконец, вместо выражения (8) имеем:

$$\begin{aligned} \bar{f}(\theta, 0) \bar{f}_{\bar{r}}(\theta, 0) = & -\frac{(1-\lambda)}{2\bar{R}} \left( \frac{\lambda}{1-\lambda} + \right. \\ & \left. + \frac{\bar{R}^2 - \bar{a}^2 \sin^2 \theta - \bar{a} \cos \theta \sqrt{\bar{R}^2 - \bar{a}^2 \sin^2 \theta}}{\bar{R}^2 + \bar{a}^2 - 2\bar{a}^2 \sin^2 \theta - 2\bar{a} \cos \theta \sqrt{\bar{R}^2 - \bar{a}^2 \sin^2 \theta}} \right) \times \\ \times & \left[ \left( \sqrt{\bar{R}^2 - \bar{a}^2 \sin^2 \theta} - \bar{a} \cos \theta \right)^2 + \left( \bar{a} \sin \theta - \frac{\bar{a}^2 \sin \theta \cos \theta}{\sqrt{\bar{R}^2 - \bar{a}^2 \sin^2 \theta}} \right)^2 \right]^{1/2} = \quad (8a) \\ = & -\frac{1}{2} \left( 1 - \lambda \frac{\bar{a} \cos \theta}{\sqrt{\bar{R}^2 - \bar{a}^2 \sin^2 \theta}} \right). \end{aligned}$$

При расчете вязкость нефти была принята втрое превышающей вязкость воды, то есть  $\frac{c_1}{c_2} = \frac{1}{3}$  и  $\lambda = -0,5$ . Кроме того, взяты  $\bar{R} = 2$ ,  $\bar{a} = 1$ .

Перемещение контура определялось по 24 лучам, равноотстоящим по углу  $\theta$ , то есть шаг по  $\theta$  (и при интегрировании по  $\nu$ ) был выбран равным  $15^\circ$ . Вследствие симметрии течения относительно полярной оси объем вычислительной работы уменьшается почти в два раза, и вычисления фактически проводились лишь для 13 значений угла  $\theta$ :  $0, 15^\circ, \dots, 165^\circ, 180^\circ$ .

Все расчеты велись с четырьмя знаками после запятой. Длительность первого шага по времени  $\Delta \bar{t}_1$  была выбрана равной 0,1.

В дальнейшем величина шага по времени оставалась неизменной до тех пор, пока перемещение контура ( $f_{k-1} - f_k$ ) за этап на главном направлении  $\theta = 0^\circ$  оставалось меньше 0,1. На тех этапах, на которых при прежнем  $\Delta \bar{t}$  перемещение превзошло бы 0,1, величина шага по времени уменьшалась вдвое.

Расчет первого этапа производился по формуле [1]:

$$\bar{f}^2(\theta_1, \bar{t}_1) = \bar{f}^2(\theta_1, 0) + \Delta \bar{t}_1 \cdot 2\bar{f}(\theta_1, 0) \bar{f}_{\bar{r}}(\theta_1, 0),$$

в которую подставлялись значения из соотношений (2a) и (8a). Со второго по седьмой этап расчеты производились по формуле:

$$\bar{f}^2(\theta_1, \bar{t}_k) = \bar{f}^2(\theta_1, \bar{t}_{k-1}) + \Delta \bar{t}_k \cdot 2\bar{f}(\theta_1, \bar{t}_{k-1}) \bar{f}_{\bar{r}}(\theta_1, \bar{t}_{k-1}), \quad (12)$$

где (см. (1a))

$$\bar{f}(\theta_1, \bar{t}_{k-1}) \bar{f}_{\bar{r}}(\theta_1, \bar{t}_{k-1}) = -\frac{1-\lambda}{2} + \frac{\lambda}{\pi} \int_0^{2\pi} \bar{f}(\nu, \bar{t}_{k-2}) \bar{f}_{\bar{r}}(\nu, \bar{t}_{k-2}) K(\theta, \nu, \bar{t}_{k-1}) d\nu. \quad (13)$$

Здесь введено обозначение:

$$\begin{aligned} K(\theta_1, \nu, \bar{t}_{k-1}) = \\ = \frac{\bar{f}^2(\theta_1, \bar{t}_{k-1}) - \bar{f}(\theta_1, \bar{t}_{k-1}) \bar{f}(\nu, \bar{t}_{k-1}) \cos(\theta_1 - \nu) - \bar{f}_0(\theta_1, \bar{t}_{k-1}) \bar{f}(\nu, \bar{t}_{k-1}) \sin(\theta_1 - \nu)}{\bar{f}^2(\theta_1, \bar{t}_{k-1}) - 2\bar{f}(\theta_1, \bar{t}_{k-1}) \bar{f}(\nu, \bar{t}_{k-1}) \cos(\theta_1 - \nu) + \bar{f}^2(\nu, \bar{t}_{k-1})}. \quad (14) \end{aligned}$$

Начиная с 8-го этапа, для расчета перемещения использовалась более точная формула, аналогичная формуле „усовершенствованного метода ломаных“ [3]:

$$\bar{f}^2(\theta_1, \bar{t}_{k+1}) = \bar{f}^2(\theta_1, \bar{t}_{k-1}) + 2\Delta \bar{t}_k \cdot 2\bar{f}(\theta_1, \bar{t}_k) \bar{f}_{\bar{r}}(\theta_1, \bar{t}_k). \quad (15)$$

Это соотношение пригодно, если  $\Delta \bar{t}_{k+1} = \Delta \bar{t}_k$ . В тех случаях, когда  $\Delta \bar{t}_{k+1} = \frac{1}{2} \Delta \bar{t}_k$ , недостающие значения  $\bar{f}^2\left(\theta_1, \frac{\bar{t}_{k-1} + \bar{t}_k}{2}\right)$  находились путем интерполяции.

Значения производной  $\bar{f}_0$  подсчитывались по формуле центральных производных для пяти точек [4]. Интегралы вычислены по формуле Симпсона.

Следует отметить, что при  $\nu = 0$  ядро  $K(\theta, \nu, \bar{t})$  (см. (14)) дает неопределенность вида  $\frac{0}{0}$ . Ввиду непрерывности ядра, значение его при  $\nu = 0$  находилось путем интерполяции. В экстремальных точках контура, то есть при  $\bar{f}_0 = 0$  и  $\theta = \nu$  ядро (14) принимает значение

$$\frac{1}{2} \left[ 1 - \frac{\bar{f}_{00}(\theta, \bar{t})}{\bar{f}(\theta, \bar{t})} \right].$$

Таковыми точками в нашей задаче являются точки  $\theta = 0$  и  $\theta = \pi$ . Однако вследствие малого изменения ядра в окрестности  $\theta = \pi$  в этой точке значение вычислялось обычной интерполяцией. В точке  $\theta = \nu = 0^\circ$  производная  $\bar{f}_{00}$  отыскивалась численным методом, а, начиная с восьмого этапа, ядро в окрестности  $\theta = 0^\circ$  аппроксимировалось параболой 4-го порядка.

В связи с потерей значащих цифр ядра при  $\theta$  в окрестности нуля, когда  $\nu$  близко к  $\theta$ , расчет был прекращен на одиннадцатом этапе ( $\bar{t} = 0,6625$ ).

Для того, чтобы проследить движение контура далее, следовало бы провести все расчеты с меньшим шагом по  $\theta$  и с большим числом значащих цифр. Однако, ввиду трудоемкости, целесообразно производить такие расчеты на электронных цифровых машинах.

Для контроля правильности расчетов на каждом этапе использовалась формула [1]:

$$mh \int_0^{2\pi} f(\theta, \bar{t}) f_t(\theta, \bar{t}) d\theta = Q,$$

которая в безразмерных величинах имеет вид:

$$-\frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \bar{f}(\theta, \bar{t}) \bar{f}_{\bar{r}}(\theta, \bar{t}) d\theta = 1. \quad (16)$$

Соотношение (16) выполняется с точностью не ниже 0,3%.

Близость полученного решения к истинному характеризуют результаты расчета с меньшим шагом. Так, если принять за исходный контур, полученный для  $\bar{t} = 0,4$ , и провести далее расчет перемещения по лучу  $\theta = 0^\circ$  до  $\bar{t} = 0,5$  при двух значениях шага:  $\Delta \bar{t} = 0,1$  и  $\Delta \bar{t} = 0,05$ , то при первой величине шага перемещение за шаг на 1,8% меньше перемещения за два шага по  $\Delta \bar{t} = 0,05$ . Это расхождение невелико, но тем не менее уже с  $\bar{t} = 0,4$  шаг был уменьшен до  $\Delta \bar{t} = 0,05$ .

В таблице I приведены значения  $\bar{f}$ , в таблице II — значения  $(-2\bar{f} \bar{f}_{\bar{r}})$  для различных  $\theta$  и  $\bar{t}$ .

На основании таблицы I построены последовательные положения контура (фиг. 2).

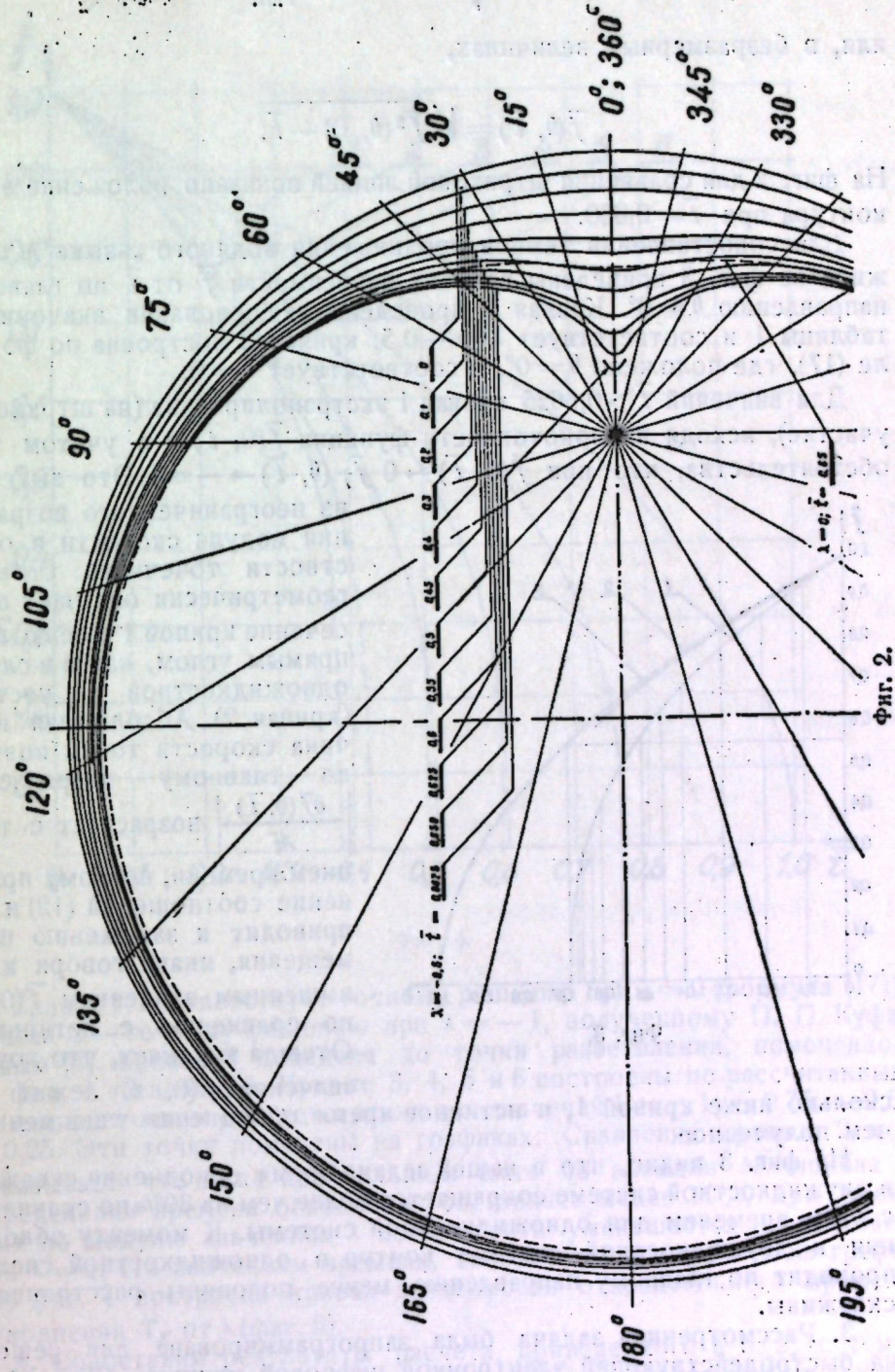
Значения  $\bar{J}(0, \bar{t})$

$\bar{t}$	0°	0	15	30	45	60	75	90	105	120	135	150	165	180
0,0000	1,0173	1,0705	1,1637	1,3028	1,4925	1,7321	2,0101	2,3028	2,5779	2,8025	2,9491	2,9875	3	3
0,1000	0,9542	1,0117	1,1114	1,2583	1,4561	1,7029	1,9869	2,2840	2,5621	2,7886	2,9362	2,9750	2,9925	2,9950
0,2000	0,8854	0,9485	1,0562	1,2122	1,4189	1,6735	1,9637	2,2653	2,5464	2,7746	2,9235	2,9626	2,9810	2,9875
0,3000	0,8092	0,8798	0,9976	1,1644	1,3811	1,6440	1,9405	2,2466	2,5308	2,7609	2,9107	2,9503	2,9696	2,9750
0,4000	0,7225	0,8039	0,9350	1,1147	1,3425	1,6143	1,9173	2,2280	2,5153	2,7472	2,8981	2,9442	2,9626	2,9696
0,4500	0,6419	0,7623	0,9020	1,0893	1,3230	1,5995	1,9058	2,2188	2,5075	2,7404	2,8918	2,9442	2,9626	2,9696
0,5000	0,5825	0,7179	0,8678	1,0633	1,3032	1,5846	1,8942	2,2096	2,4998	2,7337	2,8856	2,9381	2,9565	2,9625
0,5500	0,5106	0,6698	0,8326	1,0376	1,2842	1,5701	1,8831	2,2007	2,4924	2,7271	2,8795	2,9321	2,9491	2,9550
0,6000	0,4225	0,6182	0,7963	1,0110	1,2645	1,5553	1,8611	2,1872	2,4848	2,7204	2,8733	2,9260	2,9436	2,9491
0,6250	0,3604	0,5908	0,7781	0,9981	1,2552	1,5483	1,8561	2,1712	2,4717	2,7072	2,8603	2,9139	2,9315	2,9375
0,6500	0,2870	0,5626	0,7594	0,9849	1,2454	1,5410	1,8606	2,1527	2,4643	2,6999	2,8536	2,9072	2,9248	2,9308
0,6625	0,2313	0,5626	0,7594	0,9849	1,2454	1,5410	1,8606	2,1527	2,4643	2,6999	2,8536	2,9072	2,9248	2,9308

Таблица II

Значения  $[-2\bar{J}(0, \bar{t}) \bar{J}'(0, \bar{t})]$

$\bar{t}$	0°	0	15	30	45	60	75	90	105	120	135	150	165	180
0,010	1,2500	1,2236	1,1890	1,1387	1,0739	1,0000	0,9261	0,8613	0,8111	0,7764	0,7565	0,7500	0,7436	0,7363
0,20	1,2740	1,2390	1,1968	1,1387	1,0682	0,9915	0,9168	0,8525	0,8030	0,7689	0,7496	0,7436	0,7363	0,7285
0,30	1,3046	1,2571	1,2039	1,1365	1,0600	0,9813	0,9121	0,8428	0,7943	0,7617	0,7424	0,7363	0,7285	0,7207
0,40	1,3466	1,2778	1,2097	1,1313	1,0508	0,9681	0,8946	0,8317	0,7843	0,7527	0,7340	0,7285	0,7207	0,7129
0,45	1,4079	1,3015	1,2118	1,1210	1,0376	0,9519	0,8802	0,8100	0,7733	0,7433	0,7254	0,7198	0,7129	0,7051
0,50	1,4310	1,3080	1,2120	1,1115	1,0250	0,9405	0,8698	0,8018	0,7662	0,7362	0,7183	0,7129	0,7051	0,6973
0,55	1,4498	1,3253	1,2033	1,1000	1,0103	0,9296	0,8592	0,7942	0,7586	0,7286	0,7107	0,7051	0,6973	0,6895
0,60	1,4678	1,3323	1,1903	1,0840	0,9950	0,9174	0,8494	0,7842	0,7486	0,7186	0,7007	0,6951	0,6873	0,6795
0,625	1,4934	1,3281	1,1669	1,0611	0,9736	0,8991	0,8341	0,7689	0,7333	0,7033	0,6854	0,6798	0,6720	0,6642
0,650	1,5218	1,3137	1,1484	1,0445	0,9594	0,8893	0,8265	0,7613	0,7257	0,6957	0,6778	0,6722	0,6644	0,6566



При постоянном дебите  $Q$  и одинаковой вязкости нефти и воды уравнение границы раздела имеет вид:

$$f(\theta, t) = \sqrt{f^2(\theta, 0) + \frac{Q}{\pi mh} t},$$

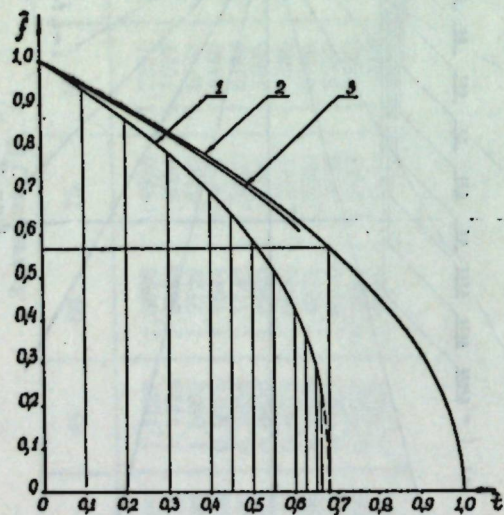
или, в безразмерных величинах,

$$\bar{f}(\theta, \bar{t}) = \sqrt{\bar{f}^2(\theta, 0) - \bar{t}}. \quad (17)$$

На фиг. 2 для сравнения штриховой линией показано положение этого контура при  $\bar{t} = 0,650$ .

Для сопоставления темпов продвижения водяного "языка" к скважине на фиг. 3 приведены графики зависимости  $\bar{f}$  от  $\bar{t}$  по главному направлению  $\theta = 0^\circ$ . Кривая 1 проведена на основании значений из таблицы 1 и соответствует  $\lambda = -0,5$ , кривая 2 построена по формуле (17), где положено  $\theta = 0^\circ$ , и соответствует  $\lambda = 0$ .

Для значений  $\bar{t} > 0,6625$  кривая 1 экстраполирована (на штриховом участке), исходя из монотонности функции  $\bar{f}(\theta, \bar{t})$  и с учетом того обстоятельства, что при  $\bar{f}(\theta, \bar{t}) \rightarrow 0$   $\bar{f}_T(\theta, \bar{t}) \rightarrow -\infty$ . Это вытекает



Фиг. 3.

из неограниченного возрастания модуля скорости в окрестности точечного стока и геометрически означает пересечение кривой 1 с осью  $\bar{t}$  под прямым углом, как и в случае одножидкостной системы (кривая 2). Абсолютная величина скорости точки контура по главному направлению

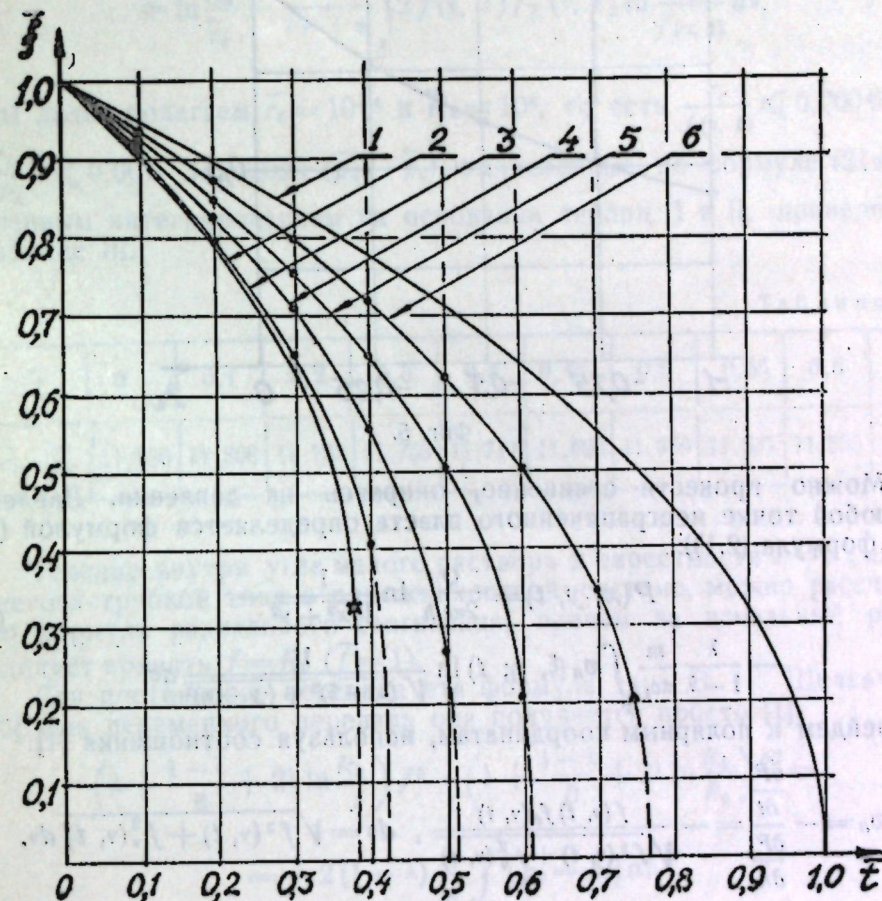
$\left| \frac{\partial \bar{f}(\theta, \bar{t})}{\partial \bar{t}} \right|$  возрастает с течением времени, поэтому применение соотношений (12) и (15) приводит к занижению перемещения, иначе говоря к завышенным значениям  $\bar{f}(\theta, \bar{t})$  по сравнению с истинными. Отсюда вытекает, что точное значение  $\bar{f}(\theta, \bar{t})$  лежит несколько ниже кривой 1, и истинное время обводнения еще меньше, чем полученное.

На фиг. 3 видно, что в нашей задаче время обводнения скважины в двухжидкостной системе сокращается более чем на 30% по сравнению с этим временем для одножидкостной системы. К моменту обводнения в двухжидкостной системе контур в одножидкостной системе проходит по главному направлению менее половины расстояния до скважины.

3. Рассмотренная задача была запрограммирована для решения на быстродействующей электронной цифровой машине "Стрела" при различных значениях эксцентриситета  $a/R$  и параметра  $\lambda$ . Получены первые результаты расчетов для значений  $\frac{a}{R} = \frac{\bar{a}}{\bar{R}} = 0,75$  и  $a = 3$  при различных  $\lambda$ . Разбиение по углу  $\theta$  было выбрано через  $2^\circ$  в пределах от  $0^\circ$  до  $12^\circ$  (то есть в районе наибольшего изменения кривизны

контура) и через  $12^\circ$  от  $12^\circ$  до  $180^\circ$ . Начальный шаг по времени  $\Delta \bar{t}_0 = 0,1$ .

На фиг. 4 приведены графики перемещения контура по главному направлению  $\theta = 0^\circ$ .

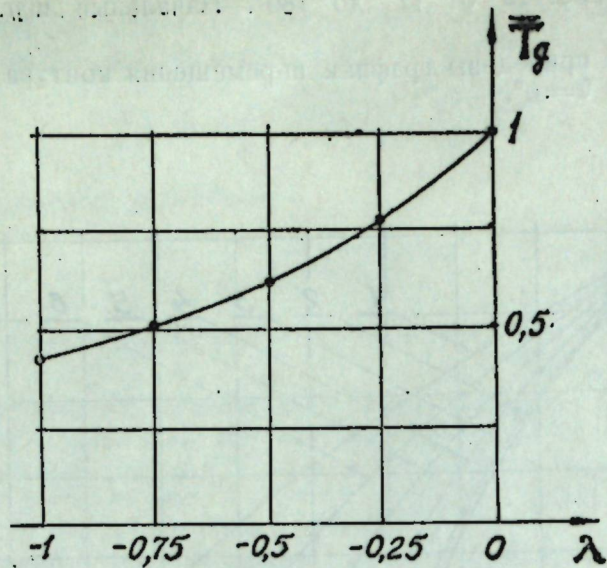


Фиг. 4.

Кривая 1 соответствует точному решению при  $\lambda = 0$  (формула (17)), кривая 2 — точному решению при  $\lambda = -1$ , полученному П. П. Куфаревым [5]. Кривая 2 доведена до точки разветвления, помеченной на фиг. 4 звездочкой. Кривые 3, 4, 5 и 6 построены по рассчитанным на машине точкам соответственно для значений  $\lambda = -1; -0,75; -0,5; -0,25$ . Эти точки помечены на графиках. Сравнение кривых 2 и 3 показывает, что даже при большом шаге по времени  $\Delta \bar{t}$  ошибка в определении времени обводнения составляет менее 10%, при меньших по модулю значениях  $\lambda$  погрешность уменьшается и исчезает при  $\lambda = 0$ . По значениям времени, соответствующим  $f = 0$  из графиков фиг. 4 построена кривая зависимости относительного времени обводнения  $\bar{T}_g$  от  $\lambda$  (фиг. 5).

4. Сопоставим результаты расчета, приведенного в п. 2, с теми, какие дают приближенные методы [6] — [8]. Если предположить трубки тока в двухжидкостной системе теми же, что и в одножидкостной, то течение в нашей задаче следует считать чисто радиальным, но тогда закон движения контура совпадает с (17) и стягиванию по главному направлению  $\theta = 0^\circ$  соответствует кривая 2 (фиг. 3).





фиг. 5.

Можно провести сравнение, опираясь на давления. Давление в любой точке неограниченного пласта определяется формулой (см. [1], формула (2.1)):

$$P(x, y, t) = \frac{Q}{2\pi c_1 h} \ln \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}} - \frac{\lambda}{1-\lambda} \frac{m}{\pi c_1} \int_0^{2\pi} v_n(\xi, \eta; t) \ln \frac{1}{\sqrt{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2}} d\sigma. \quad (18)$$

Перейдем к полярным координатам, используя соотношения [1]:

$$v_n = -\frac{\partial F}{\partial t} = -\frac{f(v, t) f_t(v, t)}{\sqrt{f^2(v, t) + f_v^2(v, t)}}, \quad d\sigma = \sqrt{f^2(v, t) + f_v^2(v, t)} dv.$$

Тогда выражение (18) принимает вид:

$$P(r, \theta, t) = \frac{Q}{2\pi c_1 h} \ln \frac{1}{r} + \frac{\lambda}{1-\lambda} \frac{m}{\pi c_1} \int_0^{2\pi} f(v, t) f_t(v, t) \ln \frac{1}{\sqrt{r^2 - 2rf(v, t) \cos(\theta - v) + f^2(v, t)}} dv. \quad (19)$$

На основании формулы (19) запишем перепад давлений между точками  $r=r_c$  и  $r=R_k$  по главному направлению  $\theta=0^\circ$

$$p_k - p_c = -\frac{Q}{2\pi c_1 h} \ln \frac{R_k}{r_c} - \frac{\lambda}{1-\lambda} \frac{m}{\pi c_1} \int_0^{2\pi} f(v, t) f_t(v, t) \ln \sqrt{\frac{R_k^2 - 2R_k f(v, t) \cos v + f^2(v, t)}{r_c^2 - 2r_c f(v, t) \cos v + f^2(v, t)}} dv. \quad (20)$$

При  $\frac{r_c}{f(v, t)} \ll 1$  и  $\frac{f(v, t)}{R_k} \ll 1$  соотношение (20) можно упростить:

$$p_k - p_c = -\frac{Q}{2\pi c_1 h} \ln \frac{R_k}{r_c} - \frac{\lambda}{1-\lambda} \frac{m}{\pi c_1} \int_0^{2\pi} f(v, t) f_t(v, t) \ln \frac{R_k}{f(v, t)} dv, \quad (21)$$

или, в безразмерных величинах,

$$\bar{p}_k - \bar{p}_c = -\frac{2\pi c_1 h}{Q} (p_k - p_c) = \ln \frac{\bar{R}_k}{\bar{r}_c} - \frac{\lambda}{1-\lambda} \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} 2\bar{f}(v, t) \bar{f}_t(v, t) \ln \frac{\bar{R}_k}{\bar{f}(v, t)} dv. \quad (21a)$$

Мы далее полагаем  $\bar{r}_c = 10^{-4}$  и  $\bar{R}_k = 10^3$ , то есть  $\frac{r_c}{f(v, t)} \leq 0,00043$  и  $\frac{f(v, t)}{R_k} \leq 0,001$ . Значения  $(\bar{p}_k - \bar{p}_c)$ , вычисленные по формуле (21a) численным интегрированием на основании таблиц I и II, приведены в таблице III.

Таблица III

$\bar{t}$	0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,45	0,5	0,55	0,6	0,625
$\bar{p}_k - \bar{p}_c$	11,830	11,808	11,783	11,753	11,717	11,696	11,669	11,637	11,595	11,556

Течение внутри угла малого раствора в окрестности  $\theta = 0^\circ$ , являющегося трубкой тока в одножидкостной системе, можно рассчитать по формуле радиального стягивания, причем за начальный радиус следует принять  $f = R_0$  ( $\bar{f} = 1$ ).

Для постоянного перепада эта формула дана В. Н. Щелкачевым [6]; для переменного перепада она получается просто [1]:

$$\left(\lambda + \frac{1-\lambda}{B} + 2\lambda \ln \frac{R_k}{f}\right) f^2 - \left(\lambda + \frac{1-\lambda}{B} + 2\lambda \ln \frac{R_0}{R_0}\right) R_0^2 = -2(1-\lambda) \frac{c_1}{m} \int_0^t (p_k - p_c) dt, \quad (22)$$

$$B = 1/\ln \frac{R_0}{r_c}.$$

В безразмерных величинах имеем:

$$\left(\lambda + \frac{1-\lambda}{B} + 2\lambda \ln \frac{\bar{R}_k}{\bar{f}}\right) \bar{f}^2 - \left(\lambda + \frac{1-\lambda}{B} + 2\lambda \ln \bar{R}_k\right) = -(1-\lambda) \int_0^{\bar{t}} (\bar{p}_k - \bar{p}_c) d\bar{t}, \quad (22a)$$

где

$$B = 1/\ln \frac{1}{\bar{r}_c}.$$

Подставляя соответствующие значения констант  $\lambda$ ,  $B$  и  $\bar{R}_k$  и вычисляя интеграл в правой части (22a) по значениям из таблицы III, можно построить закон движения  $\bar{f}(\bar{t})$ . На фиг. 3 он изображен кривой 3, которая лежит между кривыми 1 и 2, но очень близка к кривой 2 одножидкостного течения,

Вышеприведенное сравнение показывает, что метод неизменяемых трубок тока не дает в данной задаче истинного представления о влиянии различия вязкостей на перемещение контура.

Заметим в заключение, что при переходе к размерным величинам по формулам (11) и (21a) следует подставлять линейные размеры  $R$  и  $h$  в см,  $Q$  в см<sup>3</sup>/сек,  $c_1 = \frac{k}{\mu_n}$ ,  $k$  в дарси,  $\mu_n$  в сантипуазах. Тогда получим  $f$  в см,  $t$  в сек,  $(p_k - p_c)$  в атм.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Данилов В. Л. Интегро-дифференциальные уравнения движения границ раздела двух жидкостей в пористой среде. Изв. КФАН СССР, серия физ.-мат. и техн. наук, вып. 11, Казань, 1957.
2. Данилов В. Л. Управление перемещением контура нефтеносности с учетом различия вязкостей нефти и воды. Изв. КФАН СССР, серия физ.-мат. и техн. наук, вып. 8, Казань, 1955.
3. Коллатц Л. Численные методы решения дифференциальных уравнений. ИЛ, 1953.
4. Милл В. Э. Численный анализ. ИЛ, 1951.
5. Куфарев П. П. Решение задачи о контуре нефтеносности для круга. Докл. АН СССР, т. 60, № 8, 1948.
6. Чарный И. А. Подземная гидромеханика. Гостехиздат, 1948.
7. Щелкачев В. Н., Лапук Б. Б. Подземная гидравлика. Гостоптехиздат, 1949.
8. Пискунов Н. С. Определение передвижения контура нефтеносности и падения давления при эксплуатации крупных месторождений. Тр. Всесоюзн. нефтегазового научно-иссл. ин-та (ВНИИ), вып. VI, Гостоптехиздат, 1954.

Поступила  
20 марта 1958 г.

В. Л. ДАНИЛОВ

### УСЛОВИЯ ГЕОМЕТРИЧЕСКОЙ ИНВАРИАНТНОСТИ КОНТУРОВ НЕФТЕНОСНОСТИ

Из уравнений движения контура нефтеносности с учетом различия вязкостей нефти и воды найдены условия, обеспечивающие неизменность геометрии последовательных положений контура, проходимых им в процессе стягивания к эксплуатационным скважинам.

1. Рассмотрим стягивание замкнутого контура нефтеносности к скважине в двухжидкостной системе с постоянной проницаемостью при двух различных законах изменения дебита, если в начальный момент контур  $\Gamma$  занимает одно и то же положение  $\Gamma_0$ . Пласт — постоянной мощности, изотропный, жидкости и порода — несжимаемы. Без уменьшения общности будем полагать скважину расположенной в начале полярной системы координат. В первом случае будем обозначать время через  $t$ , закон изменения дебита через  $Q_1(t)$ , а уравнение контура в полярной системе координат — через  $f(\theta, t)$ ; во втором случае: время —  $\tau$ , закон изменения дебита —  $Q_2(\tau)$ , уравнение контура —  $F(\theta, \tau)$ . Тогда для первого режима эксплуатации интегро-дифференциальное уравнение движения контура принимает вид (см. [1], § 1):

$$f(\theta, t) f_t(\theta, t) - \frac{\lambda}{\pi} \int_0^{2\pi} f(\nu, t) f_t(\nu, t) \frac{f^2(\theta, t) - f(\theta, t) f(\nu, t) \cos(\theta - \nu) - f_0(\theta, t) f(\nu, t) \sin(\theta - \nu)}{f^2(\theta, t) - 2f(\theta, t) f(\nu, t) \cos(\theta - \nu) + f^2(\nu, t)} d\nu = \frac{1 - \lambda}{2\pi mh} Q_1(t). \quad (1)$$

Начальное условие, налагаемое на функцию  $f(\theta, t)$ , следующее:

$$f(\theta, 0) = f_0(\theta). \quad (2)$$

Для второго режима эксплуатации уравнение движения записывается в принятых обозначениях так:

$$F(\theta, \tau) F_\tau(\theta, \tau) - \frac{\lambda}{\pi} \int_0^{2\pi} F(\nu, \tau) F_\tau(\nu, \tau) \times \frac{F^2(\theta, \tau) - F(\theta, \tau) F(\nu, \tau) \cos(\theta - \nu) - F_0(\theta, \tau) F(\nu, \tau) \sin(\theta - \nu)}{F^2(\theta, \tau) - 2F(\theta, \tau) F(\nu, \tau) \cos(\theta - \nu) + F^2(\nu, \tau)} d\nu = \frac{1 - \lambda}{2\pi mh} Q_2(\tau); \quad (3)$$

начальное условие:

$$F(0, 0) = f_0(0). \quad (4)$$

Введем функцию

$$\tau = \Phi(t), \quad (5)$$

причем будем считать, что производная  $\Phi'(t)$  существует и не обращается в нуль. Отсюда имеем

$$\left. \begin{aligned} F(0, \tau) &= F[0, \Phi(t)] = \Psi(0, t), & F(v, \tau) &= \Psi(v, t); \\ F_0(0, \tau) &= F_0[0, \Phi(t)] = \Psi_0(0, t); \\ F_\tau(0, \tau) &= F_\tau[0, \Phi(t)] \cdot \frac{dt}{d\tau} = \Psi_\tau(0, t) \cdot \frac{1}{\Phi'(t)}. \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

Подставим выражения (6) в уравнение (3) и умножим все члены на  $\Phi'(t)$ . В результате получаем

$$\begin{aligned} & \Psi(0, t) \Psi_\tau(0, t) - \frac{\lambda}{\pi} \int_0^{2\pi} \Psi(0, t) \Psi_\tau(v, t) \times \\ & \times \frac{\Psi^2(0, t) - \Psi(0, t) \Psi(v, t) \cos(\theta - v) - \Psi_0(0, t) \Psi(v, t) \sin(\theta - v)}{\Psi^2(0, t) - 2\Psi(0, t) \Psi(v, t) \cos(\theta - v) + \Psi^2(v, t)} dv = \\ & = \frac{1 - \lambda}{2\pi mh} Q_2[\Phi(t)] \cdot \Phi'(t). \end{aligned} \quad (7)$$

Условие (4) принимает вид:

$$\Psi(0, 0) = f_0(0). \quad (8)$$

Уравнение (7) с точностью до обозначений совпадает с уравнением (1), если выполняется условие:

$$Q_1(t) = Q_2[\Phi(t)] \cdot \Phi'(t). \quad (9)$$

Учитывая, что начальные условия, налагаемые на функции  $f(0, t)$  и  $\Psi(0, t)$ , в силу (2) и (8) одинаковы, и предполагая, что решения уравнений (1) и (7) существуют и единственны, при выполнении соотношения (9) находим:

$$\Psi(0, t) \equiv f(0, t),$$

или

$$F[0, \Phi(t)] \equiv f(0, t).$$

Это означает, что контуры нефтеносности совпадают при

$$\tau = \Phi(t).$$

Связь между моментами времени  $t$  и  $\tau$  устанавливается из условия (9). Перепишем его в виде

$$Q_1(t) = Q_2(\tau) \frac{d\tau}{dt}.$$

Отсюда

$$Q_1(t) dt = Q_2(\tau) d\tau. \quad (10)$$

Учтем, что  $t=0$  соответствует значению  $\tau=0$ . Интегрируя уравнение (10), получаем

$$\int_0^t Q_1(t) dt = \int_0^\tau Q_2(\tau) d\tau. \quad (11)$$

Это соотношение имеет вполне ясный физический смысл равенства суммарных отборов нефти из пласта. С его помощью имеющееся решение задачи прослеживания контура нефтеносности можно переписать для любого другого закона изменения дебита.

Рассмотрим пример. Пусть имеется решение задачи при  $Q_1 = \text{const}$ . Определим, чему равно время обводнения скважины при линейном законе изменения дебита  $Q_2(\tau) = Q_1\tau$ . Подставляем значения  $Q_1$  и  $Q_2$  в соотношение (11):

$$\int_0^t Q_1 dt = \int_0^\tau Q_1 \tau d\tau, \quad t = \frac{1}{2} \tau^2, \quad \tau = \sqrt{2t}. \quad (12)$$

Если время обводнения при некотором  $\lambda$  и постоянном дебите (см. [2]) равно  $T_1$ , то для линейного закона изменения дебита из (12) получаем:

$$T_2 = \sqrt{2T_1} \approx 1,41 \sqrt{T_1}.$$

Резюмируя вышесказанное, при положенных в основу предположениях о пласте и жидкостях можно сформулировать теорему 1:

При стягивании контура нефтеносности  $\Gamma$  к скважине от некоторого начального положения  $\Gamma_0$ , независимо от изменения дебита со временем, контур нефтеносности принимает одни и те же промежуточные положения.

2. Рассмотрим теперь стягивание контура нефтеносности к скважине при заданных давлениях на контуре питания  $p_0$ , и на забое скважины  $p_c(t)$ . Уравнение движения имеет вид (см. [1], § 8):

$$\begin{aligned} & f(0, t) f_\tau(0, t) - \frac{\lambda}{\pi} \int_0^{2\pi} f(v, t) f_\tau(v, t) \left[ \frac{1}{\ln \frac{R}{r_c}} \ln \frac{f(v, t)}{R} + \right. \\ & + \frac{f^2(0, t) - f(0, t) f(v, t) \cos(\theta - v) - f_0(0, t) f(v, t) \sin(\theta - v)}{f^2(0, t) - 2f(0, t) f(v, t) \cos(\theta - v) + f^2(v, t)} - \\ & \left. - \frac{\frac{1}{R^2} f^2(0, t) f^2(v, t) - f(0, t) f(v, t) \cos(\theta - v) - f_0(0, t) f(v, t) \sin(\theta - v)}{\frac{1}{R^2} f^2(0, t) f^2(v, t) - 2f(0, t) f(v, t) \cos(\theta - v) + R^2} \right] dv = \\ & = (1 - \lambda) \frac{c_1}{m} \frac{p_c(t) - p_0}{\ln \frac{R}{r_c}}, \end{aligned} \quad (13)$$

где  $R$  — радиус контура питания,  
 $r_c$  — радиус скважины.

Начальное условие остается в прежней форме (2). Уравнение движения контура при ином перепаде давлений  $p_c(\tau) - p_0$ , запишем для функции  $F(0, \tau)$ , исходя из (13), аналогично рассуждениям п. 1, а начальное условие возьмем в форме (4). Снова вводя функцию  $\tau = \Phi(t)$  и обозначая  $F[0, \Phi(t)] = \Psi(0, t)$ , прежним путем приходим к выводу:

$$F[0, \Phi(t)] \equiv f(0, t),$$

если выполняется такое условие:

$$p_c(t) - p_0 = \{p_c[\Phi(t)] - p_0\} \Phi'(t). \quad (14)$$

Из (14) интегрированием по  $t$  от 0 до  $t$  и по  $\tau$  от 0 до  $\tau$  получаем

$$\int_0^t [p_c(t) - p_0] dt = \int_0^\tau [p_c(\tau) - p_0] d\tau. \quad (15)$$

Соотношение (15) дает при двух различных режимах эксплуатации связь между моментами времени  $t$  и  $\tau$ , в которые контур нефтеносности  $\Gamma$  занимает одно и то же положение. Отсюда получаем теорему 2:

При стягивании контура нефтеносности  $\Gamma$  к одиночной скважине от некоторого начального положения  $\Gamma_0$ , он проходит одни и те же промежуточные положения, независимо от перепада давлений между контуром питания и скважиной. Поэтому, как справедливо указывает М. Muskat, „система с небольшой разностью давлений будет обладать совершенно тем же семейством поверхностей раздела, что и система с большей разностью, за исключением того, что положения этих поверхностей будут пересекаться в пропорционально более поздние мгновения“ (см. [3], стр. 411).

3. Рассмотрим далее многоскважинную систему. Уравнение движения контура при наличии любого числа произвольно расположенных эксплуатационных и нагнетательных скважин с известными дебитами  $Q_i(t)$  было получено нами в работе [1] как без учета контура питания (уравнение (1.32)), так и с его учетом (уравнение (8.8)). Обозначим дебит  $i$ -й скважины при первом режиме эксплуатации через  $Q_{i1}(t)$ , а при втором —  $Q_{i2}(\tau)$ . Беря уравнения движения для обоих случаев при одном и том же начальном условии и, как прежде, вводя функцию

$$\tau = \Phi(t),$$

без труда находим, что промежуточные положения контуров нефтеносности совпадают при одновременном соблюдении условий

$$Q_{i1}(t) = Q_{i2}[\Phi(t)] \Phi'(t),$$

или

$$\frac{Q_{i1}(t)}{Q_{i2}(\tau)} = \frac{d\tau}{dt} = \Phi'(t)$$

для каждой из  $n$  скважин, то есть

$$\frac{Q_{11}}{Q_{12}} = \dots = \frac{Q_{i1}}{Q_{i2}} = \dots = \frac{Q_{n1}}{Q_{n2}} = \Phi'(t). \quad (16)$$

Отсюда — теорема 3:

При одном и том же начальном положении контура нефтеносности  $\Gamma_0$  последующие его положения  $\Gamma$  совпадают по форме для различных режимов эксплуатации при одновременной работе нескольких скважин тогда, когда отношения дебитов соответственных скважин являются одинаковыми для всех скважин в любой момент времени.

Само это отношение может зависеть от времени. Связь между моментами совпадения контуров дается соотношением (11), которое может быть записано для любой из скважин.

4. Случай нескольких ( $n$ ) скважин при заданных давлениях на забоях  $p_{ci}(t)$  и на контуре питания  $p_0$  был также рассмотрен в работе [1]. Уравнение движения дано формулой (8.8), причем дебиты  $Q_i(t)$  выражаются через разности  $[p_{ci}(t) - p_0]$  из системы уравнений (8.12).

Рассмотрим два режима эксплуатации при одинаковом начальном контуре: первый — с давлениями на забоях  $p_{c11}(t)$ , на контуре питания  $p_{01}$ , и второй — с давлениями на забоях  $p_{c12}(\tau)$ , на контуре питания  $p_{02}$ . Преобразованиями, аналогичными вышеприведенным, можно показать, что уравнения движения контуров совпадают тогда, когда одновременно выполняются  $n$  соотношений.

$$p_{c11}(t) - p_{01} = \{p_{c12}[\Phi(t)] - p_{02}\} \Phi'(t),$$

или

$$\frac{p_{c11} - p_{01}}{p_{c12} - p_{02}} = \frac{p_{c21} - p_{01}}{p_{c22} - p_{02}} = \dots = \frac{p_{cn1} - p_{01}}{p_{cn2} - p_{02}} = \Phi'(t). \quad (17)$$

Поэтому справедлива теорема 4, отличающаяся от теоремы 3 тем, что вместо слов „отношения дебитов“, в ней стоят слова „отношения перепадов давлений“. Связь моментов времени  $t$  и  $\tau$ , когда контуры совпадают, дается соотношением (15), записанным для любой из  $n$  скважин.

Сформулированные выше условия геометрической инвариантности контуров нефтеносности остаются в силе и при учете фазовой проницаемости в зоне вытеснения, как нетрудно усмотреть из уравнений движения, приведенных в работе [4]. Они распространяются также на пространственные течения.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Данилов В. Л. Интегро-дифференциальные уравнения движения границы раздела двух жидкостей в пористой среде. Изв. КФАН СССР, серия физ.-мат. и техн. наук, вып. 11, Казань, 1957.
2. Данилов В. Л., Скворцов В. В. Решение одной задачи о стягивании контура нефтеносности с учетом различия вязкостей нефти и воды (см. настоящий выпуск).
3. Маскет М. Течение однородных жидкостей в пористой среде. Гостоптехиздат, 1949.
4. Данилов В. Л. О влиянии фазовой проницаемости в зоне вытеснения нефти водой на перемещение водонефтяного контакта (см. настоящий выпуск).

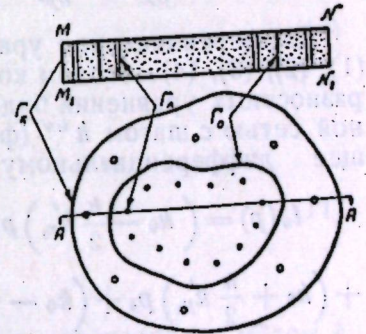
Поступила  
20 марта 1958 г.

Г. Г. ВАХИТОВ

О НЕЗАВИСИМОСТИ ФОРМЫ ВОДОНЕФТЯНОГО КОНТАКТА  
 В НЕОДНОРОДНОМ ПЛАСТЕ ОТ ВЕЛИЧИНЫ ПЕРЕПАДОВ  
 ДАВЛЕНИЙ В СКВАЖИНАХ

Показано, что увеличение или уменьшение в одно и то же число раз перепадов давлений между контуром питания и скважинами не изменяет формы ВНК в неоднородном пласте в процессе его движения.

§ 1. Установившееся движение однородной жидкости в недеформируемой неоднородной пористой среде. Рассмотрим следующую задачу. Пусть дан горизонтальный нефтяной пласт  $D_0(x, y, z)$  постоянной мощности (фиг. 1). При выбранной системе координат в пласте расположены  $n$  эксплуатационных и нагнетательных скважин, поверхности стенок которых обозначим через  $\Gamma_\lambda(x, y, z)$  ( $\lambda = 1, 2, \dots, n$ ). Для простоты рассуждений будем предполагать, что скважины совершенны как по степени, так и по характеру вскрытия\*. Далее обозначим поверхность области питания через  $\Gamma_k(x, y, z)$ , а поверхность первоначального водонефтяного контакта (ВНК) в момент времени  $t = t_0$  через  $\Gamma_0(x, y, z, t_0)$ .



Фиг. 1.

Пусть  $\mu_v = \mu_n = \mu$ ,  $k = k(x, y, z)$ , т. е. будем рассматривать фильтрацию однородной жидкости в неоднородном по проницаемости пласте, где  $\mu_v$  — вязкость воды,  $\mu_n$  — вязкость нефти,  $k = k(x, y, z)$  — проницаемость пласта.

Предположим, что

$$k = k(x, y, z), k'_x(x, y, z), k'_y(x, y, z) \text{ и } k'_z(x, y, z) —$$

непрерывные функции. Функция  $k(x, y, z)$  положительна.

Рассмотрим установившееся движение жидкости в пласте при следующих граничных условиях:

$$p^*(x, y, z)|_{\Gamma_k} = p_k^* = \text{const.} \quad (1)$$

$$p^*(x, y, z)|_{\Gamma_\lambda} = p_\lambda^* = \text{const.} \quad (2)$$

\* Не совершенную скважину всегда можно рассматривать как совершенную, но с иным (меньшим) радиусом.



Переходя к пределу при  $h \rightarrow 0$  получаем, что если перепады давлений во всех скважинах увеличим или уменьшим в несколько раз, то соответственно во всех точках  $x, y, z$  пласта  $D_0$  перепады давлений увеличатся или уменьшатся в том же соотношении.

Например, если

$$\bar{p}_{\lambda II} = \frac{1}{n} \bar{p}_{\lambda I},$$

то

$$\bar{p}_{i II} = \frac{1}{n} \bar{p}_{i I}, \quad (13)$$

где  $\bar{p}_{i I}$  — перепад давления в узле  $i$ , соответствующий перепаду давления на стенках скважин  $\bar{p}_{\lambda I}$ ,

$\bar{p}_{i II}$  — перепад давления в узле  $i$ , соответствующий перепаду давления на стенках скважин  $\bar{p}_{\lambda II}$ .

Из соотношения (13) следует, что при увеличении или уменьшении величин перепадов давлений во всех скважинах в  $n$  раз форма поверхностей изобар остается без изменения, а изменяется лишь абсолютная цифра, характеризующая данную изоповерхность. То же самое можно сказать и относительно поверхностей тока. Нетрудно заметить, что при уменьшении или увеличении в  $n$  раз величин перепадов давлений в эксплуатационных и нагнетательных скважинах в  $n$  раз изменяются (уменьшаются или увеличиваются) и величины градиентов давлений во всех точках  $(x, y, z)$  пласта  $D_0(x, y, z)$ . Например, при уменьшении величин перепадов давлений на стенках эксплуатационных скважин в  $n$  раз, получим для  $i$ -го узла следующие соотношения между градиентами:

$$\left(\frac{\partial \bar{p}}{\partial x}\right)_{i II} = \frac{1}{n} \left(\frac{\partial \bar{p}}{\partial x}\right)_{i I},$$

$$\left(\frac{\partial \bar{p}}{\partial y}\right)_{i II} = \frac{1}{n} \left(\frac{\partial \bar{p}}{\partial y}\right)_{i I},$$

$$\left(\frac{\partial \bar{p}}{\partial z}\right)_{i II} = \frac{1}{n} \left(\frac{\partial \bar{p}}{\partial z}\right)_{i I},$$

где

$\left(\frac{\partial \bar{p}}{\partial x}\right)_{i I}, \left(\frac{\partial \bar{p}}{\partial y}\right)_{i I}, \left(\frac{\partial \bar{p}}{\partial z}\right)_{i I}$  — проекции  $\text{grad } \bar{p}$  на оси  $ox, oy, oz$  в узле  $i$  до изменения перепадов давлений на стенках скважин,

$\left(\frac{\partial \bar{p}}{\partial x}\right)_{i II}, \left(\frac{\partial \bar{p}}{\partial y}\right)_{i II}, \left(\frac{\partial \bar{p}}{\partial z}\right)_{i II}$  — проекции  $\text{grad } \bar{p}$  на оси  $ox, oy, oz$  в том же узле  $i$  при уменьшении величин перепадов давлений на стенках скважин в  $n$  раз.

Выяснив закономерности изменения градиентов давлений в неоднородном по проницаемости пласте в зависимости от величин перепадов давлений в скважинах, перейдем к задаче о перемещении ВНК.

Рассмотрим перемещение некоторой точки ВНК по траектории при двух различных режимах эксплуатации, причем второй имеет в  $n$  раз меньшие перепады давлений на скважинах. В силу закона

Дарси можно записать уравнения движения точки ВНК по траектории для обоих случаев соответственно:

$$\frac{ds}{dt} = -\frac{k}{\mu} \frac{\partial \bar{p}}{\partial s} \quad \text{или} \quad dt = -\frac{k}{\mu} \frac{1}{\partial \bar{p}} ds, \quad (13)$$

$$\frac{ds}{d\tau} = -\frac{k}{\mu} \frac{\partial \bar{p}_1}{\partial s} \quad \text{или} \quad d\tau = -\frac{k}{\mu} \frac{1}{\partial \bar{p}_1} ds. \quad (14)$$

По доказанному выше  $\frac{\partial \bar{p}_1}{\partial s} = \frac{1}{n} \frac{\partial \bar{p}}{\partial s}$ .

С учетом этого из (13) и (14) вытекает:

$$d\tau = n dt$$

на одном и том же участке траектории  $ds$ . Отсюда, беря один и тот же путь  $s$  от начального положения, в котором полагаем  $t = \tau = 0$  до текущего положения  $s$ , соответствующего моментам времени  $\tau$  и  $t$ , имеем:

$$\tau = nt.$$

Это показывает, что точка ВНК при втором режиме проходит тот же путь за время в  $n$  раз большее. Так как рассуждения справедливы для любой точки ВНК, то следует вывод: поверхность ВНК проходит при обоих режимах одни и те же последовательные положения, но в различные моменты времени, то есть геометрическая форма поверхности ВНК при уменьшении перепадов в  $n$  раз остается неизменной. Очевидно, что то же распространяется и на случай увеличения перепадов в одно и то же число раз. Отсюда можно сделать вывод, что и конечная форма поверхности раздела не зависит от величин перепадов давлений в скважинах.

Замечание. При вытеснении нефти водой в порах пласта остается часть нефти, которая уменьшает фазовую проницаемость пласта для воды. Если при этом удовлетворяется следующее равенство

$$\frac{\mu_{II}}{\mu_{II}} = \frac{k}{k_{\text{фаз}}},$$

где  $k$  — проницаемость пласта для одородной жидкости,  $k_{\text{фаз}}$  — фазовая проницаемость пласта для воды в зоне, где первоначально находилась нефть,

$\mu_{II}$  — вязкость воды,  
 $\mu_{II}$  — вязкость нефти,

то вывод о независимости формы водонефтяного контакта в неоднородном пласте от величин перепадов давлений в эксплуатационных скважинах остается справедливым и для случая, когда  $\mu_{II} \neq \mu_{II}$ .

§ 2. Неустановившееся движение сжимаемой жидкости в упругой пористой среде. Пусть дан горизонтальный нефтяной пласт  $D_0(x, y, z)$  (рис. 1). При выбранной системе координат в пласте расположены  $n$  эксплуатационных и нагнетательных скважин, поверхности стенок которых обозначим через  $\Gamma_{\lambda}(x, y, z)$  ( $\lambda = 1, 2, \dots, n$ ). Далее обозначим поверхность области питания через  $\Gamma_k(x, y, z)$ , а поверхность первоначального ВНК в момент времени  $t = t_0$  через  $\Gamma_0(x, y, z, t_0)$ . Пласт предполагается упругим, неоднородным по проницаемости  $k = k(x, y, z)$ , заполненным сжимаемой жидкостью одинаковой вязкости  $\mu_{II} = \text{const}$ . Рассмотрим движение жидкости в пласте при следующих начальных и граничных условиях:

$$p(x, y, z, t_0) = p_0, \quad p(x, y, z, t)|_{\Gamma_k} = p_k = p_0 = \text{const},$$

$$p(x, y, z, t) \quad \lambda = \text{const},$$

$$\left. \frac{\partial p}{\partial z} \right|_{MN} = 0, \quad \left. \frac{\partial p}{\partial z} \right|_{M_1N_1} = 0. \quad (15)$$

Для этих условий выясним вопросы а) и б), указанные в § 1. При сформулированных выше предположениях фильтрация жидкости в пористой среде описывается следующим дифференциальным уравнением:

$$k \frac{\partial^2 p}{\partial x^2} + k \frac{\partial^2 p}{\partial y^2} + k \frac{\partial^2 p}{\partial z^2} + k'_x \frac{\partial p}{\partial x} + k'_y \frac{\partial p}{\partial y} + k'_z \frac{\partial p}{\partial z} = \beta^* \mu \frac{\partial p}{\partial t}, \quad (16)$$

где

$$k = k(x, y, z), \quad k'_x(x, y, z), \quad k'_y(x, y, z), \quad k'_z(x, y, z),$$

заданы как непрерывные функции. Функция  $k(x, y, z)$  положительна.

$$\beta^* = m\beta_{ж} + \beta_c, \quad (17)$$

$m$  — коэффициент пористости,

$\beta_{ж}$  — коэффициент сжимаемости фильтрующейся жидкости,

$\beta_c$  — коэффициент сжимаемости пористой среды.

Дифференциальное уравнение (16) решим при начальных и граничных условиях (15) методом конечных разностей [4], [5]. Для составления разностного уравнения будем пользоваться пространственной сетью с шагом  $h$ , то есть

$$x_l = x_0 + ih,$$

$$y_j = y_0 + jh,$$

$$z_k = z_0 + kh.$$

Шаг разности по оси  $t$  обозначим через  $l$ . Разностное уравнение, соответствующее дифференциальному уравнению (16), имеет следующий вид [2], [5]:

$$\begin{aligned} & r_{i+\frac{1}{2}, j, k} \cdot p_{i+1, j, k, t} + r_{i-\frac{1}{2}, j, k} \cdot p_{i-1, j, k, t} + r_{i, j+\frac{1}{2}, k} \cdot p_{i, j+1, k, t} + \\ & + r_{i, j-\frac{1}{2}, k} \cdot p_{i, j-1, k, t} + r_{i, j, k+\frac{1}{2}} \cdot p_{i, j, k+1, t} + r_{i, j, k-\frac{1}{2}} \cdot p_{i, j, k-1, t} + \\ & + p_{i, j, k, t} \left( 3 - r_{i+\frac{1}{2}, j, k} - r_{i-\frac{1}{2}, j, k} - r_{i, j+\frac{1}{2}, k} - r_{i, j-\frac{1}{2}, k} - \right. \\ & \left. - r_{i, j, k+\frac{1}{2}} - r_{i, j, k-\frac{1}{2}} \right) = p_{i, j, k, t+l}, \end{aligned} \quad (18)$$

где

$$r_{i+\frac{1}{2}, j, k} = \frac{x_{i+\frac{1}{2}, j, k, l}}{h^2}, \quad (19)$$

$$r_{i-\frac{1}{2}, j, k} = \frac{x_{i-\frac{1}{2}, j, k, l}}{h^2},$$

$$\dots$$

$$r_{i+\frac{1}{2}, j, k}; \quad r_{i-\frac{1}{2}, j, k} \dots r_{i, j, k-\frac{1}{2}}$$

— коэффициенты пьезопроводности в точках

$$i + \frac{1}{2}, j, k; \quad i - \frac{1}{2}, j, k; \dots; \quad i, j, k - \frac{1}{2}.$$

Рассматривая уравнение (18), видим, что, зная значения функции в точках  $i-1, j, k; i+1, j, k; i, j-1, k; i, j+1, k; i, j, k-1; i, j, k+1$  в момент времени  $t$ , мы можем вычислить значение функции в точке  $i, j, k$  в следующий момент времени  $t + \Delta t$ , где  $\Delta t = l$ , начиная процесс с момента времени  $t = t_0$ , в который значения функции  $p$  заданы.

Необходимо отметить, что выбор пространственного интервала накладывает ограничение на величину интервала времени, то есть между шагами по осям  $x, y, z$  и  $t$  при решении конкретных задач должны быть установлены, исходя из условий устойчивости схемы, определенные соотношения [2], [4], [5].

При устойчивой схеме решение разностного уравнения (18)  $p_{i, j, k, t}$  при  $h \rightarrow 0$  и  $l \rightarrow 0$  стремится к соответствующему значению  $p(x, y, z, t)$  решения дифференциального уравнения (16) [5]. В наших рассуждениях шаги  $h$  и  $l$  мы можем брать сколь угодно малыми, всегда удовлетворяющими условию устойчивости процесса.

Как и в предыдущем параграфе в дальнейшем изложении будем рассматривать не величину давления  $p_{i, j, k, t}$  в отдельных узловых точках, а величину перепадов давлений, то есть

$$\bar{p}_{i, j, k, t} = p_0 - p_{i, j, k, t}. \quad (20)$$

В соответствии с обозначением (20) разностное уравнение (18) примет следующий вид:

$$\begin{aligned} & r_{i+\frac{1}{2}, j, k} \bar{p}_{i+1, j, k, t} + r_{i-\frac{1}{2}, j, k} \bar{p}_{i-1, j, k, t} + r_{i, j+\frac{1}{2}, k} \bar{p}_{i, j+1, k, t} + \\ & + r_{i, j-\frac{1}{2}, k} \bar{p}_{i, j-1, k, t} + r_{i, j, k+\frac{1}{2}} \bar{p}_{i, j, k+1, t} + r_{i, j, k-\frac{1}{2}} \bar{p}_{i, j, k-1, t} + \\ & + \bar{p}_{i, j, k, t} \left( 3 - r_{i+\frac{1}{2}, j, k} - r_{i-\frac{1}{2}, j, k} - r_{i, j+\frac{1}{2}, k} - r_{i, j, k-\frac{1}{2}} \right) = \\ & = \bar{p}_{i, j, k, t+l}. \end{aligned} \quad (21)$$

Отметим, что в момент времени  $t = t_0 + l$  для узловых внутренних точек  $(i, j, k)$ , которые связывают величины перепадов давлений на стенках скважин  $\bar{p}_\lambda$  со значениями перепадов давлений  $p_{i, j, k, t+l}$  во внутренних точках пласта, разностное уравнение (18) сильно упрощается и имеет вид одного из написанных ниже уравнений:

$$\begin{aligned} r_{i \pm \frac{1}{2}, j, k} \bar{p}_\lambda &= \bar{p}_{i, j, k, t_0+l}; \\ r_{i, j \pm \frac{1}{2}, k} \bar{p}_\lambda &= \bar{p}_{i, j, k, t_0+l}; \\ r_{i \pm \frac{1}{2}, j, k} \bar{p}_\lambda + r_{i, j \pm \frac{1}{2}, k} \bar{p}_\lambda &= \bar{p}_{i, j, k, t_0+l}. \end{aligned} \quad (22)$$

Для всех остальных внутренних узловых точек в момент времени  $t = t_0 + l$  значение функции равно нулю.

Как видно из разностных уравнений (21) и (22), значение функции  $\bar{p}_{i, j, k, t}$  во всех внутренних узловых точках пласта находится в прямой пропорциональной зависимости от величин перепадов давлений в эксплуатационных и нагнетательных скважинах  $\bar{p}_\lambda$ . Следовательно, при увеличении или уменьшении в  $n$  раз величин перепадов давлений на стенках всех эксплуатационных и нагнетательных скважин, в  $n$  раз изменяются (увеличиваются или уменьшаются) и значения



перепадов давлений  $\bar{p}_{l, j, k, i}$  во всех внутренних узловых точках рассматриваемого объема  $\mathcal{V}_0$ . И, следовательно, выводы, сделанные в предыдущем параграфе для случая установившейся фильтрации жидкости в пористой среде относительно градиентов давлений, формы поверхностей изобар и линий тока, остаются справедливыми для каждого рассматриваемого момента времени  $t$  и в случае неустановившейся фильтрации жидкости.

Так как при уменьшении или увеличении величин перепадов давлений  $\bar{p}_k$  на стенках всех эксплуатационных скважин в  $n$  раз во всех точках пласта в любой рассматриваемый момент времени  $t$  также уменьшаются или увеличиваются в  $n$  раз величины градиентов давления, то можно сделать вывод, что форма поверхности ВНК и в случае неустановившейся фильтрации жидкости остается геометрически подобной при увеличении (уменьшении) в одно и то же число раз перепадов давлений в эксплуатационных и нагнетательных скважинах.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Щуров В. И. Влияние перфораций на приток жидкости из пласта в скважину. Труды совещания по развитию научно-исследовательских работ в области вторичных методов добычи нефти, стр. 144—149, АН АзССР, Баку, 1953.
2. Панов Д. Ю. Справочник по численному решению дифференциальных уравнений в частных производных. Гостехиздат, 1951.
3. Коллатц Л. Численные методы решения дифференциальных уравнений. Издательство иностранной литературы, 1953.
4. Милн В. Э. Численное решение дифференциальных уравнений. Издательство иностранной литературы, 1955.
5. Петровский И. Г. Лекции об уравнениях с частными производными. Гостехиздат, 1953.

Поступила  
20 марта 1958 г.

В. Л. ДАНИЛОВ

### О ВЛИЯНИИ ФАЗОВОЙ ПРОНИЦАЕМОСТИ В ЗОНЕ ВЫТЕСНЕНИЯ НЕФТИ ВОДОЙ НА ПЕРЕМЕЩЕНИЕ ВОДОНЕФТЯНОГО КОНТАКТА

Изучается плоская задача о перемещении контура нефтеносности. Предполагается, что в зоне вытеснения движется только вода, причем фазовая проницаемость для воды в ней постоянна. Подробно рассмотрен случай одной скважины и бесконечной цепочки скважин при первоначально прямолинейном контуре нефтеносности.

§ 1. Постановка задачи и общие уравнения. Известно, что вода, замещающая нефть по мере стягивания контура нефтеносности, вытесняет ее неполностью.

В первом приближении нефтенасыщенность и водонасыщенность в зоне вытеснения можно принять постоянными и считать, что в нефтяной зоне  $G_1$  движется только нефть, а в зоне вытеснения  $G'$  — только вода. Тогда наличие второй фазы — неподвижной нефти сказывается на величине динамической пористости пласта  $m'$  и коэффициента текучести воды  $c'$  в зоне вытеснения. Этот коэффициент  $c'$  меньше коэффициента текучести воды  $c_2$  в зоне краевой воды  $G_2$  (фиг. 1). Если положить начальную проницаемость  $k$  постоянной по всему пласту, то коэффициенты текучести в зонах  $G_1$  и  $G_2$  соответственно равны

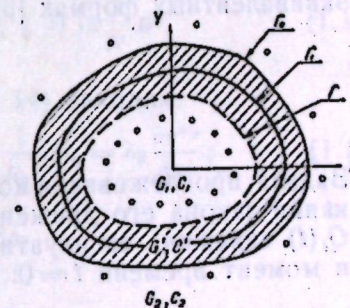
$$c_1 = \frac{k}{\mu}, \quad c_2 = \frac{k}{\mu_n}, \quad (1.1)$$

где  $\mu_n$  — динамическая вязкость нефти,  
 $\mu$  — то же для воды.

Пониженный коэффициент текучести для воды  $c'$  в зоне  $G'$  может быть объяснен понижением эффективной проницаемости:

$$c' = \frac{k'}{\mu_n}, \quad k' < k. \quad (1.2)$$

Этой схеме придерживается ряд авторов [1]—[3]. Иногда полагают, что в зоне вытеснения течет фиктивная жидкость с вязкостью  $\mu'$ , превышающей вязкость воды [4], то есть  $c' = k/\mu'$ . Мы будем придерживаться первой точки зрения, хотя при решении по предлагаемому методу не является существенным, за счет чего отнести понижение коэффициента текучести.



Фиг. 1.

Рассуждения, приводимые ниже, остаются в силе и тогда, когда проницаемость  $k_n$  в зоне  $G_1$  отлична от проницаемости  $k_n$  в зоне  $G_2$ .

Далее принимаем мощность пласта  $h$  постоянной, жидкости и породу — несжимаемыми. Динамическую пористость  $m'$ , взятую с учетом неполного вытеснения нефти, также считаем постоянной по пласту.

Наконец, для простоты рассуждений, рассмотрим пласт, простирающийся неограниченно.

2. При этих условиях распределение давлений вне скважин, подвижной границы раздела нефти и воды  $\Gamma$  и неподвижной границы  $\Gamma_0$ , совпадающей с первоначальным положением контура  $\Gamma$ , удовлетворяет в каждой из областей  $G_1$ ,  $G'$  и  $G_2$  двумерному уравнению Лапласа:

$$\nabla^2 p_1 = \nabla^2 p' = \nabla^2 p_2 = 0. \quad (1.3)$$

При переходе через контуры  $\Gamma$  и  $\Gamma_0$  давление и нормальная составляющая скорости фильтрации остаются непрерывными. Если справедлив закон Дарси  $\bar{v} = -c \nabla p$ , то приходим к условиям:

$$\text{на } \Gamma \begin{cases} p_1 = p', \\ c_1 \frac{\partial p_1}{\partial n} = c' \frac{\partial p'}{\partial n}; \end{cases} \quad (1.4)$$

$$\text{на } \Gamma_0 \begin{cases} p' = p_2, \\ c' \frac{\partial p'}{\partial n_0} = c_2 \frac{\partial p_2}{\partial n_0}. \end{cases} \quad (1.5)$$

Здесь  $n$  — нормаль к контуру  $\Gamma$ , для определенности внутренняя к области  $G_1$ ;  $n_0$  — нормаль к  $\Gamma_0$ , внутренняя к области  $G'$ . Если уравнение границы  $\Gamma$  в неявной форме имеет вид:

$$F(x, y, t) = 0, \quad (1.6)$$

то уравнение движения контура  $\Gamma$  может быть представлено в двух эквивалентных формах [5]:

$$\frac{\partial p_1}{\partial n} = \frac{m'}{c_1} \frac{\partial F}{\partial t} / \frac{\partial F}{\partial n}, \quad (1.7)$$

$$\frac{\partial p'}{\partial n} = \frac{m'}{c'} \frac{\partial F}{\partial t} / \frac{\partial F}{\partial n}. \quad (1.8)$$

Задача прослеживания контура нефтеносности  $\Gamma$  заключается в отыскании закона его движения (1.8), если известны объемные дебиты  $Q_i(t)$  скважин, эксплуатирующих пласт, и исходное положение  $\Gamma_1$  в момент времени  $t=0$ :

$$F(x, y, 0) = \tilde{f}(x, y) = 0. \quad (1.9)$$

Отметим, что в общем случае исходный контур  $\Gamma_1$  не совпадает с первоначальным контуром нефтеносности  $\Gamma_0$ , так как задача может решаться с некоторого момента времени по истечении определенного периода разработки. В этом случае положение контура  $\Gamma_0$  также должно быть задано.

3. Как явствует из приведенных условий, давление должно обладать в точках скважин особенностями типа источников и стоков заданной интенсивности и оставаться непрерывным при переходе через контуры  $\Gamma_0$  и  $\Gamma$ . Нормальные же производные его на  $\Gamma_0$  и  $\Gamma$  претерпевают скачки. Не повторяя рассуждений, приведенных в [5], укажем, что распределение давлений можно отыскивать в виде

$$p(x, y, t) = \varphi(x, y, t) + \int_{(\Gamma)} \rho(\sigma, t) \ln \frac{1}{R} d\sigma +$$

$$+ \int_{(\Gamma_0)} \rho_0(\sigma_0, t) \ln \frac{1}{R_0} d\sigma_0, \quad (1.10)$$

где

$$R = \sqrt{(x - \xi)^2 + (y - \eta)^2}, \quad R_0 = \sqrt{(x - \xi_0)^2 + (y - \eta_0)^2},$$

$(\xi, \eta) \in \Gamma$ ,  $(\xi_0, \eta_0) \in \Gamma_0$ ,  $\sigma$  и  $\sigma_0$  — дуговые абсциссы точек  $(\xi, \eta)$  и  $(\xi_0, \eta_0)$ ,  $\rho$  — плотность логарифмического потенциала простого слоя, непрерывно распределенная по контуру  $\Gamma$ ,  $\rho_0$  — плотность простого слоя, непрерывно распределенная по контуру  $\Gamma_0$ ,  $\varphi$  — известный потенциал внешнего поля, определяемый положением и интенсивностью скважин [5].

Функция (1.10) удовлетворяет в каждой из областей  $G_1$ ,  $G'$  и  $G_2$  уравнению Лапласа (1.3), имеет по построению функции  $\varphi$  заданные особенности в точках скважин и непрерывна при переходе через контуры  $\Gamma_0$  и  $\Gamma$ . Таким образом, уравнения (1.3) и условия (1.4) и (1.6) выполнены. Остается удовлетворить условиям (1.5) и (1.7). Если ввести временно обозначение

$$\varphi^*(x, y, t) = \varphi(x, y, t) + \int_{(\Gamma_0)} \rho_0(\xi_0, \eta_0, t) \ln \frac{1}{R_0} d\sigma_0, \quad (1.11)$$

то, удовлетворяя условию (1.5), в силу известных свойств потенциала простого слоя получаем соотношение [6], [5]:

$$\pi \rho(x, y, t) - \lambda_1 \int_{(\Gamma)} \rho(\xi, \eta, t) \frac{\partial}{\partial n} \ln \frac{1}{R} d\sigma = \lambda_1 \frac{\partial \varphi^*}{\partial n}; \quad (x, y), (\xi, \eta) \in \Gamma, \quad (1.12)$$

где введено обозначение

$$\lambda_1 = \frac{c_1 - c'}{c_1 + c'}, \quad |\lambda_1| < 1. \quad (1.13)$$

Если далее обозначить

$$\varphi^{**}(x, y, t) = \varphi(x, y, t) + \int_{(\Gamma)} \rho(\xi, \eta, t) \ln \frac{1}{R} d\sigma, \quad (1.14)$$

то, выполняя условие (1.7), аналогично (1.14) находим:

$$\pi \rho_0(x, y, t) - \lambda_2 \int_{(\Gamma_0)} \rho_0(\xi_0, \eta_0, t) \frac{\partial}{\partial n_0} \ln \frac{1}{R_0} d\sigma_0 = \lambda_2 \frac{\partial \varphi^{**}}{\partial n_0}; \quad (1.15)$$

$$(x, y), (\xi_0, \eta_0) \in \Gamma_0,$$

где

$$\lambda_2 = \frac{c' - c_2}{c' + c_2}, \quad |\lambda_2| < 1. \quad (1.16)$$

В силу уравнений (1.9), (1.10) плотность потенциала простого слоя равна [5], [6]:

$$\rho = - \left( \frac{1}{c_1} - \frac{1}{c'} \right) \frac{m'}{2\pi} \frac{\partial F}{\partial t} / \frac{\partial F}{\partial n}. \quad (1.17)$$

Подставляя это значение в соотношения (1.4), (1.17) и возвращаясь от  $\varphi^*$  и  $\varphi^{**}$  к прежним обозначениям, приходим к системе уравнений:

$$\left. \begin{aligned} \left( \frac{\partial F}{\partial t} / \frac{\partial F}{\partial n} \right) - \frac{\lambda_1}{\pi} \int_{(\Gamma)} \left( \frac{\partial F}{\partial t} / \frac{\partial F}{\partial n} \right) \frac{\partial}{\partial n} \ln \frac{1}{R} d\sigma - \\ - \frac{2}{m'} \frac{c_1 c'}{c_1 + c'} \int_{(\Gamma_0)} \rho_0 \frac{\partial}{\partial n} \ln \frac{1}{R_0} d\sigma_0 = \frac{2}{m'} \frac{c_1 c'}{c_1 + c'} \frac{\partial \varphi}{\partial n}, \\ (x, y), (\xi, \eta) \in \Gamma, (\xi_0, \eta_0) \in \Gamma_0; \end{aligned} \right\} \quad (1.20)$$

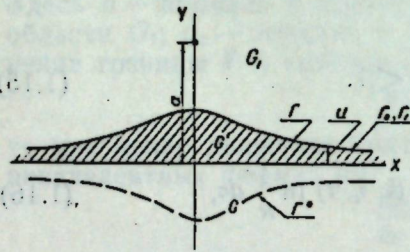
$$\pi \rho_0 - \lambda_2 \int_{(\Gamma_0)} \rho_0 \frac{\partial}{\partial n_0} \ln \frac{1}{R_0} d\sigma_0 - \lambda_1 \lambda_2 \frac{m'}{2} \frac{c_1 + c'}{c_1 c'} \int_{(\Gamma)} \left( \frac{\partial F}{\partial t} / \frac{\partial F}{\partial n} \right) \frac{\partial}{\partial n_0} \ln \frac{1}{R} d\sigma = \left. \begin{aligned} & \\ & = \lambda_2 \frac{\partial \varphi}{\partial n_0}, \quad (x, y), (\xi_0, \eta_0) \in \Gamma_0, (\xi, \eta) \in \Gamma. \end{aligned} \right\} (1.21)$$

Искомыми функциями являются  $F$  и  $\rho_0$ , причем функция  $F$  должна удовлетворять начальному условию (1.11). Сравним систему уравнений (1.20) — (1.21) с системой (8.4) — (8.5) работы [5], полученной нами для случая движения контура  $\Gamma$  в ограниченном пласте, а также с уравнениями (1.8) работы [3]. Если в (1.20) — (1.21) положить  $\lambda_2 = 0$ , то есть  $c' = c_2$ ,  $k' = k$ , то из (1.21) немедленно вытекает  $\rho_0 = 0$ , и тогда (1.20) переходит в уравнение (1.16) статьи [5], полученное без учета фазовой проницаемости в зоне вытеснения  $G'$ .

От уравнений (1.20) — (1.21) с интегралами по неизвестному контуру  $\Gamma$  можно перейти к системе интегро-дифференциальных уравнений с интегралами в определенных пределах, для чего следует выбрать соответствующую систему координат. После этого преобразования можно применить численные методы решения.

§ 2. Задача о перемещении первоначально прямолинейного контура к скважине. 1. При достаточно простой форме контура (прямая, окружность) можно свести задачу к одному уравнению относительно искомой функции (1.8), то есть обойтись без функции  $\rho_0$ , которая непосредственно нас не интересует в задаче о перемещении контура нефтеносности  $\Gamma$ .

В качестве задачи такого типа рассмотрим стягивание первоначально прямолинейного контура к одной эксплуатационной скважине. Для упрощения выкладок за исходный момент времени  $t=0$  примем момент начала разработки, тогда  $\Gamma_0$  и  $\Gamma_1$  совпадают. Начальный контур  $\Gamma_0$  выберем за ось  $x$ ; нефтяная скважина с объемным дебитом  $Q(t)$  расположена в точке  $(0, a)$  (фиг. 2). Начальной нефтяной зоной является верхняя



Фиг. 2.

полуплоскость, начальной водной зоной — нижняя полуплоскость.

Уравнение искомого контура  $\Gamma$  будем искать в форме

$$F(x, y, t) = y - u(x, t) = 0. \quad (2.1)$$

Уравнение начального контура  $\Gamma_0$  тогда принимает вид:

$$F(x, y, 0) = -u(x, 0) = 0, \text{ или } u(x, 0) = 0. \quad (2.2)$$

В данной задаче условия (1.5) и (1.7) можно переписать так:

$$\text{при } y=0 \left\{ \begin{aligned} & p' = p_2, \\ & c' \frac{\partial p'}{\partial y} = c_2 \frac{\partial p_2}{\partial y}. \end{aligned} \right. \quad (2.3)$$

Для их удовлетворения применим метод изображений (см. напр. [7]). Введем в рассмотрение фиктивную скважину с координатами  $(0, -a)$  и дебитом  $Q_1(t)$ , а также фиктивный контур  $\Gamma^*$ :

$$F^*(x, y, t) = y + u(x, t) = 0. \quad (2.5)$$

Пусть  $\rho$  и  $\rho_1$  — плотности логарифмического потенциала простого

слоя, распределенные соответственно на  $\Gamma$  и  $\Gamma^*$ . Тогда давления  $p_1$  в зоне  $G_1$  и  $p'$  в зоне  $G'$  будем искать в единой форме:

$$p = \frac{Q(t)}{2\pi c_1 h} \ln \frac{1}{\sqrt{x^2 + (y-a)^2}} + \frac{Q_1(t)}{2\pi c_1 h} \ln \frac{1}{\sqrt{x^2 + (y+a)^2}} + \int_{(\Gamma)} \rho \ln \frac{1}{R} d\sigma + \int_{(\Gamma^*)} \rho_1 \ln \frac{1}{R^*} d\sigma^*, \quad (2.6)$$

где  $(x, y) \in G_1 + G'$ ,  $(\xi^*, \eta^*) \in \Gamma^*$ ,  $R^* = \sqrt{(x - \xi^*)^2 + (y - \eta^*)^2}$ ,  $\sigma$  и  $\sigma^*$  — дуговые абсциссы точек  $(\xi, \eta)$ ,  $(\xi^*, \eta^*)$  соответственно контуров  $\Gamma$  и  $\Gamma^*$ . Давление  $p_2$  в водной зоне  $G_2$  возьмем в виде

$$p_2 = \frac{Q_2(t)}{2\pi c_2 h} \ln \frac{1}{\sqrt{x^2 + (y-a)^2}} + \int_{(\Gamma)} p_2 \ln \frac{1}{R} d\sigma, \quad (2.7)$$

где  $(x, y) \in G_2$ ,  $(\xi, \eta) \in \Gamma$ ;  $Q_2(t)$  — фиктивный дебит скважины в точке  $(0, a)$ ;  $p_2$  — плотность потенциала простого слоя на  $\Gamma$ . Величины  $Q_1$ ,  $\rho_1$ ,  $Q_2$  и  $p_2$  подлежат определению из условий (2.3) — (2.4). Из соотношений (2.1) и (2.5) имеем

$$\eta = u(\xi, t), \quad \eta^* = -u(\xi, t).$$

Следовательно,

$$d\sigma = \sqrt{1 + u_\xi^2(\xi, t)} d\xi, \quad d\sigma^* = \sqrt{1 + u_\xi^2(\xi, t)} d\xi = d\sigma,$$

где

$$u_\xi = \frac{\partial u(\xi, t)}{\partial \xi}.$$

Пределы интегрирования по  $\xi$  во всех интегралах в (2.6) и (2.7) от  $-\infty$  до  $\infty$ . Таким образом, имеем

$$\left. \begin{aligned} p &= \frac{Q(t)}{2\pi c_1 h} \ln \frac{1}{\sqrt{x^2 + (y-a)^2}} + \frac{Q_1(t)}{2\pi c_1 h} \ln \frac{1}{\sqrt{x^2 + (y+a)^2}} + \\ &+ \int_{-\infty}^{\infty} \rho(\xi, t) \ln \frac{1}{\sqrt{(x-\xi)^2 + [y-u(\xi, t)]^2}} \sqrt{1 + u_\xi^2(\xi, t)} d\xi + \\ &+ \int_{-\infty}^{\infty} \rho_1(\xi, t) \ln \frac{1}{\sqrt{(x-\xi)^2 + [y+u(\xi, t)]^2}} \sqrt{1 + u_\xi^2(\xi, t)} d\xi; \\ p_2 &= \frac{Q_2(t)}{2\pi c_2 h} \ln \frac{1}{\sqrt{x^2 + (y-a)^2}} + \\ &+ \int_{-\infty}^{\infty} p_2(\xi, t) \ln \frac{1}{\sqrt{(x-\xi)^2 + [y-u(\xi, t)]^2}} \sqrt{1 + u_\xi^2(\xi, t)} d\xi. \end{aligned} \right\} (2.8)$$

Подстановка выражений (2.8) — (2.9) в (2.3) дает два соотношения:

$$\frac{1}{c_1} Q(t) + \frac{1}{c_1} Q_1(t) = \frac{1}{c_2} Q_2(t), \quad (2.10)$$

$$\rho(\xi, t) + \rho_1(\xi, t) = p_2(\xi, t). \quad (2.11)$$

Удовлетворяя условию (2.4) с помощью функций (2.8) — (2.9), приходим к следующим уравнениям:

$$\frac{c'}{c_1} Q(t) - \frac{c'}{c_1} Q_1(t) = Q_2(t), \quad (2.12)$$

$$c' \rho(\xi, t) - c' \rho_1(\xi, t) = c_2 p_2(\xi, t). \quad (2.13)$$

Решая совместно уравнения (2.10) — (2.12), находим

$$Q_1(t) = \frac{c' - c_2}{c' + c_2} Q(t) = \lambda_2 Q(t), \quad Q_2(t) = \frac{2c'c_2}{c_1(c' + c_2)} Q(t). \quad (2.14)$$

Из (2.11) и (2.13) следует:

$$\rho_1(\xi, t) = \frac{c' - c_2}{c' + c_2} \rho(\xi, t) = \lambda_2 \rho(\xi, t), \quad \rho_2(\xi, t) = \frac{2c'}{c' + c_2} \rho(\xi, t). \quad (2.15)$$

Подставляем выражения (2.14) и (2.15) в формулы (2.8) и (2.9):

$$p(x, y, t) = \frac{Q(t)}{2\pi c_1 h} \left[ \ln \frac{1}{\sqrt{x^2 + (y-a)^2}} + \lambda_2 \ln \frac{1}{\sqrt{x^2 + (y+a)^2}} \right] + \int_{-\infty}^{\infty} \rho(\xi, t) \left\{ \ln \frac{1}{\sqrt{(x-\xi)^2 + [y-u(\xi, t)]^2}} + \lambda_2 \ln \frac{1}{\sqrt{(x-\xi)^2 + [y+u(\xi, t)]^2}} \right\} \sqrt{1+u_\xi^2(\xi, t)} d\xi; \quad (2.16)$$

$$p_2(x, y, t) = \frac{c'}{c_1(c' + c_2)} \frac{Q(t)}{\pi h} \ln \frac{1}{\sqrt{x^2 + (y-a)^2}} + \frac{2c'}{c' + c_2} \int_{-\infty}^{\infty} \rho(\xi, t) \ln \frac{1}{\sqrt{(x-\xi)^2 + [y-u(\xi, t)]^2}} \sqrt{1+u_\xi^2(\xi, t)} d\xi. \quad (2.17)$$

Эти выражения удовлетворяют условиям (2.3) и (2.4) и сохраняют силу вплоть до момента обводнения скважины. Формулу (2.16) можно записать иначе:

$$p(x, y, t) = \frac{Q(t)}{2\pi c_1 h} \left[ \ln \frac{1}{\sqrt{x^2 + (y-a)^2}} + \lambda_2 \ln \frac{1}{\sqrt{x^2 + (y+a)^2}} \right] + \int_{(\Gamma)} \rho \ln \frac{1}{R} d\sigma + \lambda_2 \int_{(\Gamma)} \rho \ln \frac{1}{R_1} d\sigma, \quad R_1 = \sqrt{(x-\xi)^2 + (y+\eta)^2}. \quad (2.18)$$

Функция

$$\varphi^*(x, y, t) = \frac{Q(t)}{2\pi c_1 h} \left[ \ln \frac{1}{\sqrt{x^2 + (y-a)^2}} + \lambda_2 \ln \frac{1}{\sqrt{x^2 + (y+a)^2}} \right] + \lambda_2 \int_{(\Gamma)} \rho \ln \frac{1}{R_1} d\sigma \quad (2.19)$$

непрерывна вместе со своими производными при переходе через  $\Gamma$ . Претерпевают разрыв лишь нормальные производные потенциала

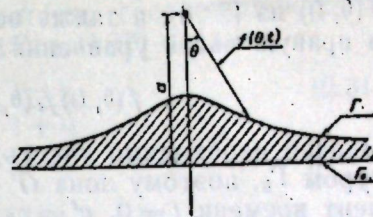
$$\int_{(\Gamma)} \rho \ln \frac{1}{R} d\sigma.$$

Поэтому, удовлетворяя условию (1.5) на  $\Gamma$ , получаем соотношение (1.14), где  $\varphi^*$  — из (2.19). Чтобы получить уравнение движения контура  $\Gamma$ , выразим  $\varphi^*$  из (2.19), а вместо  $\rho$  подставим ее выражение через искомую функцию (1.19). После элементарных преобразований находим:

$$\left. \begin{aligned} & \left( \frac{\partial F}{\partial t} / \frac{\partial F}{\partial n} \right) - \frac{\lambda_1}{\pi} \int_{(\Gamma)} \left( \frac{\partial F}{\partial t} / \frac{\partial F}{\partial n} \right) \frac{\partial}{\partial n} \left[ \ln \frac{1}{R} + \lambda_2 \ln \frac{1}{R_1} \right] d\sigma = \\ & = \frac{2}{m'} \frac{c_1 c'}{c_1 + c'} \frac{Q(t)}{2\pi h c_1} \frac{\partial}{\partial n} \left[ \ln \frac{1}{\sqrt{x^2 + (y-a)^2}} + \lambda_2 \ln \frac{1}{\sqrt{x^2 + (y+a)^2}} \right], \end{aligned} \right\} (2.20)$$

$(x, y), (\xi, \eta) \in \Gamma.$

2. Остается вернуться к старой, декартовой, системе координат. Однако, как мы видели выше, в этой системе пределы интегрирования бесконечны, что неудобно для вычислений. Поэтому введем полярную систему координат  $(r, \theta)$  с центром в скважине и осью по отрицательному направлению оси  $y$  (фиг. 3):



Фиг. 3.

$$x = r \sin \theta, \quad y = a - r \cos \theta. \quad (2.21)$$

Обозначая полярные координаты точки интегрирования через  $\tilde{\rho}, \nu$ , имеем:

$$\xi = \tilde{\rho} \sin \nu, \quad \eta = a - \tilde{\rho} \cos \nu. \quad (2.22)$$

Если искать уравнение контура  $\Gamma$  в форме

$$\Phi(r, \theta, t) = r - f(\theta, t) = 0, \quad (2.23)$$

то под интегралом

$$\Phi(\tilde{\rho}, \nu, t) = \tilde{\rho} - f(\nu, t) = 0. \quad (2.24)$$

Не повторяя преобразований, аналогичных приведенным в [5], запишем интегро-дифференциальное уравнение движения контура  $\Gamma$ , вытекающее из (2.20), в окончательном виде:

$$\begin{aligned} & f(\theta, t) f_t(\theta, t) - \frac{\lambda_1}{\pi} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} f(\nu, t) f_t(\nu, t) \times \\ & \times \left\{ \frac{f^2(\theta, t) - f(\theta, t) f(\nu, t) \cos(\theta - \nu) - f_0(\theta, t) f(\nu, t) \sin(\theta - \nu)}{f^2(\theta, t) - 2f(\theta, t) f(\nu, t) \cos(\theta - \nu) + f^2(\nu, t)} + \right. \\ & + \lambda_2 \left( f^2(\theta, t) + f(\theta, t) f(\nu, t) \cos(\theta + \nu) - 2af(\theta, t) \cos \theta + \right. \\ & \left. + f_0(\theta, t) [f(\nu, t) \sin(\theta + \nu) - 2a \sin \theta] \right) \left( f^2(\theta, t) + \right. \\ & \left. + 2f(\theta, t) f(\nu, t) \cos(\theta + \nu) + f^2(\nu, t) + \right. \\ & \left. + 4a[a - f(\theta, t) \cos \theta - f(\nu, t) \cos \nu] \right)^{-1} d\nu = \\ & = \frac{(1 - \lambda_1) Q(t)}{2\pi m' h} \left[ 1 + \lambda_2 \frac{f^2(\theta, t) - 2f(\theta, t) a \cos \theta - 2f_0(\theta, t) a \sin \theta}{f^2(\theta, t) - 4f(\theta, t) a \cos \theta + 4a^2} \right]. \end{aligned} \quad (2.25)$$

Функция  $f(\theta, t)$  должна удовлетворять начальному условию (2.1), которое в полярных координатах выглядит следующим образом:

$$f(\theta, 0) = \frac{a}{\cos \theta}. \quad (2.26)$$

Таким образом, задача определения контура  $\Gamma$  сведена к задаче Коши для уравнения (2.25). При  $\lambda_2 = 0$  из уравнения (2.25) как частный случай вытекает уравнение движения контура в двухжидкостной системе без учета фазовой проницаемости [6], при этом  $c' = c_2$ ,  $\lambda_1 = \lambda = \frac{c_1 - c_2}{c_1 + c_2}$  (см. (1.15)). Наконец, при  $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$  уравнение (2.25) выродается в уравнение движения контура в системе разноцветных жидкостей одинаковой вязкости при постоянной проницаемости  $k$  по всему пласту.

3. Решить уравнение (2.25) при условии (2.26) можно численным методом, изложенным в работах [5], [8]. Единственное отличие в том, что в правой части процесса решения этим методом требуется иметь значение  $f(\theta, 0) f_t(\theta, 0)$ . Чтобы его определить, подставим функцию

$f(\theta, 0)$  из (2.26), а также ее производную по  $\theta$  в ядро интеграла по  $\nu$  и правую часть уравнения (2.25). Получаем:

$$f(\theta, 0) f_t(\theta, 0) = \frac{(1-\lambda_1)(1-\lambda_2)Q(t)}{2\pi m' h} \quad (2.27)$$

Однако необходимо учесть, что при  $t=0$  контур  $\Gamma$  совпадает с контуром  $\Gamma_0$ , поэтому зона  $G'$  отсутствует. Отсюда следует, что в момент времени  $t=0$ ,  $c' = c_2$ , тогда

$$\lambda_1 = \frac{c_1 - c_2}{c_1 + c_2} = \lambda, \quad \lambda_2 = 0.$$

Подставляя эти значения в (2.27), окончательно находим

$$f(\theta, 0) f_t(\theta, 0) = \frac{(1-\lambda)Q(t)}{2\pi m' h} \quad (2.28)$$

К соотношению (2.28) можно прийти, полагая  $c' = c_1$ , тогда  $\lambda_1 = 0$ ,  $\lambda_2 = 0$ . Коэффициент  $\lambda$  просто выражается через  $\lambda_1$  и  $\lambda_2$  из (1.15) и (1.18):

$$\lambda = \frac{\lambda_1 + \lambda_2}{1 + \lambda_1 \lambda_2} \quad (2.29)$$

Отметим, что переход к полярной системе координат устраняет несобственность интеграла: подынтегральная функция до момента обводнения скважины (при непрерывной  $f(\theta, t)$ ) ограничена на всем интервале интегрирования.

Для придания большей общности результатам расчетов введем безразмерные координаты, полагая далее  $Q = \text{const}$ .

$$\bar{f} = \frac{f}{a}, \quad \bar{t} = -\frac{Q}{\pi m' h a^2} t. \quad (2.30)$$

Здесь время отнесено к времени обводнения  $T_0$  при  $\lambda = 0$  (см. [8]). Тогда соотношения (2.25), (2.26) и (2.28) переходят соответственно в следующие:

$$\begin{aligned} & \bar{f}(\theta, \bar{t}) \bar{f}_t(\theta, \bar{t}) - \frac{\lambda_1}{\pi} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \bar{f}(\nu, \bar{t}) \bar{f}_t(\nu, \bar{t}) \times \\ & \times \left\{ \frac{\bar{f}^2(\theta, \bar{t}) - \bar{f}(\theta, \bar{t}) \bar{f}(\nu, \bar{t}) \cos(\theta - \nu) - \bar{f}_0(\theta, \bar{t}) \bar{f}(\nu, \bar{t}) \sin(\theta - \nu)}{\bar{f}^2(\theta, \bar{t}) - 2\bar{f}(\theta, \bar{t}) \bar{f}(\nu, \bar{t}) \cos(\theta - \nu) + \bar{f}^2(\nu, \bar{t})} + \right. \\ & + \lambda_2 \left( \bar{f}^2(\theta, \bar{t}) + \bar{f}(\theta, \bar{t}) \bar{f}(\nu, \bar{t}) \cos(\theta + \nu) - 2\bar{f}(\theta, \bar{t}) \cos \theta + \right. \\ & \left. + \bar{f}_0(\theta, \bar{t}) [\bar{f}(\nu, \bar{t}) \sin(\theta + \nu) - 2 \sin \theta] \right) \times \\ & \left. \times \left( \bar{f}^2(\theta, \bar{t}) + 2\bar{f}(\theta, \bar{t}) \bar{f}(\nu, \bar{t}) \cos(\theta + \nu) + \bar{f}^2(\nu, \bar{t}) + \right. \right. \quad (2.25a) \\ & \left. \left. 4[1 - \bar{f}(\theta, \bar{t}) \cos \theta - \bar{f}(\nu, \bar{t}) \cos \nu]^{-1} \right\} d\nu = \end{aligned}$$

$$= -\frac{1-\lambda_1}{2} \left[ 1 + \lambda_2 \frac{\bar{f}^2(\theta, \bar{t}) - 2\bar{f}(\theta, \bar{t}) \cos \theta - 2\bar{f}_0(\theta, \bar{t}) \sin \theta}{\bar{f}^2(\theta, \bar{t}) - 4\bar{f}(\theta, \bar{t}) \cos \theta + 4} \right]; \quad (2.26a)$$

$$\bar{f}(\theta, 0) = \frac{1}{\cos \theta}; \quad (2.26a)$$

$$\bar{f}(\theta, 0) \bar{f}_t(\theta, 0) = -\frac{1-\lambda}{2}. \quad (2.28a)$$

3. Численное решение уравнения (2.25a) при начальном условии (2.26a) было выполнено Р. К. Николаевой для трех значений параметра  $\lambda_1 = \frac{1}{3}; 0; -\frac{1}{3}$  при  $\lambda_2 = -\frac{1}{3}$ . Нетрудно установить соотно-

шения между проницаемостями и вязкостями, соответствующими каждому из вариантов. Из (1.1), (1.2), (1.15) и (1.18) следует:

$$\frac{k'}{k} = \frac{1+\lambda_2}{1-\lambda_2}, \quad \frac{\mu_{II}}{\mu_I} \cdot \frac{k'}{k} = \frac{1-\lambda_1}{1+\lambda_1} \quad (2.31)$$

и

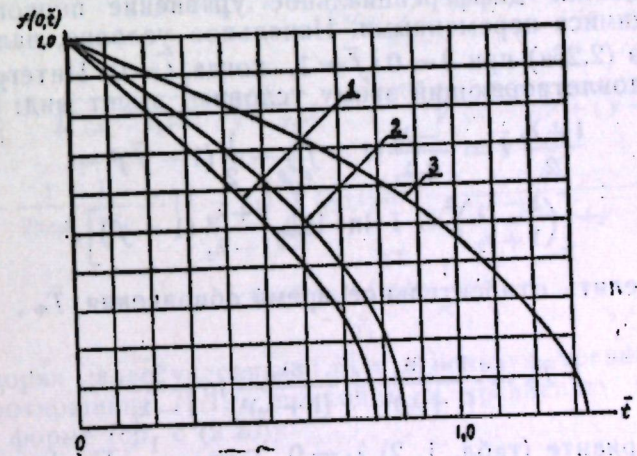
$$\frac{\mu_{II}}{\mu_I} = \frac{1-\lambda_1}{1+\lambda_1} \cdot \frac{1-\lambda_2}{1+\lambda_2}.$$

Используя также (2.29), получаем:

Таблица 1

№ варианта	1	2	3
$\lambda_2$	$-1/3$	$-1/3$	$-1/3$
$\lambda_1$	$1/3$	0	$-1/3$
$\lambda$	0	$-1/3$	$-2/3$
$k'/k$	$1/2$	$1/2$	$1/2$
$\mu_{II}/\mu_I$	1	2	4

Таким образом, во всех вариантах проницаемость  $k'$  в зоне замещения принята вдвое меньшей проницаемости в зонах  $G_1, G_2$ . Ввиду симметрии течения относительно оси  $\theta=0$  расчеты положения контура  $\Gamma$  произведены для положительных значений  $\theta = 0^\circ, 2^\circ, 5^\circ, 10^\circ, 20^\circ, \dots, 80^\circ, 90^\circ$ . Шаг по времени  $\Delta \bar{t}$  принимался равным 0,1. На фиг. 4 приведены графики зависимости расстояния  $\bar{f}(\theta, \bar{t})$  ближайшей точки контура  $\Gamma$  до скважины от времени  $\bar{t}$ .



Фиг. 4.

Ниже приведены значения относительных времен обводнения  $\bar{T}_\Phi$ , соответствующих  $\bar{f}(\theta, \bar{T}_\Phi) = 0$ .

№ варианта	1	2	3
$\bar{T}_\Phi$	1,33	0,85	0,77

Из произведенного сравнения с временами обводнения в чисто двухжидкостной системе при тех же значениях  $\lambda$ , которые можно вычислить методом, изложенным в [5], [8], вытекает, что пониженная проницаемость в зоне вытеснения приводит к удлинению срока безводной эксплуатации. Удлинение это существенно, так что торжественность контура за счет влияния зоны вытеснения следует учитывать в расчетах. Легко видеть далее, что если отношение вязкостей нефти и воды  $\mu_n/\mu_b$  невелико по сравнению с отношением проницаемостей  $k/k'$  и, согласно (2.31),  $\lambda_1 > 0$ , то при данном  $\lambda_2$  существует область таких значений  $\lambda_1$ , при которых влияние фазовой проницаемости на скорость движения контура превосходит обратное по знаку влияние различия вязкостей. Тогда относительное время обводнения  $\bar{T}_\Phi > 1$ .

4. Остановимся на случае  $\lambda_1 = 0$ , который, как вытекает из (2.31), имеет место при условии

$$\frac{\mu_n}{\mu_b} \cdot \frac{k'}{k} = 1, \text{ или } \frac{\mu_n}{\mu_b} = \frac{k}{k'}. \quad (2.32)$$

Уравнение (2.25а) переходит в следующее:

$$\bar{f}(\theta, \bar{t}) \bar{f}_{\bar{t}}(\theta, \bar{t}) = -\frac{1}{2} \left[ 1 + \lambda_2 \frac{\bar{f}^2(\theta, \bar{t}) - 2\bar{f}(\theta, \bar{t}) \cos \theta - 2\bar{f}_0(\theta, \bar{t}) \sin \theta}{\bar{f}^2(\theta, \bar{t}) - 4\bar{f}(\theta, \bar{t}) \cos \theta + 4} \right]. \quad (2.33)$$

По главному направлению  $\theta = 0$  контур  $\Gamma$  наиболее близок к скважине, следовательно,  $\bar{f}_0(0, \bar{t}) = 0$ . Обозначая для краткости  $\bar{f}(0, \bar{t})$  через  $\bar{f}$ , из (2.33) получаем

$$\bar{f} \frac{d\bar{f}}{d\bar{t}} = -\frac{1}{2} \left( 1 + \lambda_2 \frac{\bar{f}}{\bar{f}-2} \right). \quad (2.34)$$

Это обыкновенное дифференциальное уравнение первого порядка с разделяющимися переменными. Начальное условие, налагаемое на  $\bar{f}$ , следует из (2.26а) при  $\theta = 0$ :  $\bar{f} = 1$ , когда  $\bar{t} = 0$ . Интеграл уравнения (2.34), удовлетворяющий этому условию, имеет вид:

$$\frac{1+\lambda_2}{2} \bar{t} = \frac{1-\lambda_2}{1+\lambda_2} (1-\bar{f}) - \frac{1}{2} (1-\bar{f})^2 - \left[ \left( \frac{1-\lambda_2}{1+\lambda_2} \right)^2 - 1 \right] \ln \left[ 1 + \frac{1+\lambda_2}{1-\lambda_2} (1-\bar{f}) \right]. \quad (2.35)$$

Чтобы определить относительное время обводнения  $\bar{T}_\Phi$ , положим в (2.35)  $\bar{f} = 0$ .

$$\bar{T}_\Phi = \frac{1-3\lambda_2}{(1+\lambda_2)^2} + \frac{8\lambda_2}{(1+\lambda_2)^3} \ln \frac{2}{1-\lambda_2}. \quad (2.36)$$

Во втором варианте (табл. 1, 2)  $\lambda_1 = 0$ ,  $\lambda_2 = -\frac{1}{3}$ . По формуле (2.36) находим значение  $\bar{T}_\Phi = 4,5 - 9 \ln 1,5 = 0,8505$ , которое с точностью до 0,06% совпадает с полученным путем численного интегрирования значением  $\bar{T}_\Phi = 0,850$ ,

В предельном случае  $\lambda_2 = -1$  контур  $\Gamma_0$  становится изобарой. Из (2.34) получаем

$$\bar{f} \frac{d\bar{f}}{d\bar{t}} = \frac{1}{\bar{f}-2},$$

откуда, интегрируя по  $\bar{f}$  в пределах от 1 до 0, по  $\bar{t}$  — от 0 до  $\bar{T}_\Phi$ , находим  $\bar{T}_\Phi = 2/3$ . Итак, с ростом отношения  $\frac{\mu_n}{\mu_b} = \frac{k}{k'}$  от 1 до  $\infty$

( $0 \geq \lambda_2 \geq -1$ ) время  $\bar{T}_\Phi$  убывает на 33%.

§ 3. Многоскважинные системы. Цепочка скважин. 1. Сохраняя обозначения § 1, рассмотрим более общий случай, когда в зоне  $G_1$  расположены  $j$  эксплуатационных, а в зоне  $G_2$  —  $l$  нагнетательных скважин с координатами  $(x_i, y_i)$  и объемными дебитами  $Q_i(t)$ . Первым соответствуют значения индекса  $i = 1, 2, \dots, j$ , вторым — значения  $i = j+1, j+2, \dots, j+l$ . Первоначальный контур  $\Gamma_0$ , совпадающий с  $\Gamma_1$ , задан уравнением  $y = 0$ . Тогда, удовлетворяя уравнениям (1.3), условиям (2.3) и (2.4) на  $\Gamma_0$  и условию (1.4) на  $\Gamma$  методом, изложенным в § 2, можно получить следующие выражения для давления  $p$  в зонах  $G_1$ ,  $G'$  и  $E_2$  в зоне  $G_2$ , сохраняющие силу до момента обводнения первой из эксплуатационных скважин:

$$p(x, y, t) = \varphi(x, y, t) + \int_{(\Gamma)} p \left[ \ln \frac{1}{R} + \lambda_2 \ln \frac{1}{R_1} \right] d\sigma, \quad (3.1)$$

где

$$\varphi(x, y, t) = \frac{1}{2\pi c_1 h} \sum_{i=1}^j Q_i(t) \times \left[ \ln \frac{1}{V(x-x_i)^2 + (y-y_i)^2} + \lambda_2 \ln \frac{1}{V(x-x_i)^2 + (y-y_i)^2} \right] + \quad (3.2)$$

$$+ \frac{1}{2\pi c_1 h} \frac{1+\lambda_1}{1-\lambda_1} (1+\lambda_2) \sum_{i=j+1}^{j+l} Q_i(t) \ln \frac{1}{V(x-x_i)^2 + (y-y_i)^2};$$

$$p_2(x, y, t) = \frac{1}{2\pi c_2 h} \sum_{i=j+1}^{j+l} Q_i(t) \times$$

$$\times \left[ \ln \frac{1}{V(x-x_i)^2 + (y-y_i)^2} - \lambda_2 \ln \frac{1}{V(x-x_i)^2 + (y-y_i)^2} \right] + \quad (3.3)$$

$$+ \frac{1}{2\pi c_2 h} \frac{1-\lambda_1}{1+\lambda_1} (1-\lambda_2) \sum_{i=1}^j Q_i(t) \ln \frac{1}{V(x-x_i)^2 + (y-y_i)^2} +$$

$$+ (1+\lambda_2) \int_{(\Gamma)} p \ln \frac{1}{R} d\sigma.$$

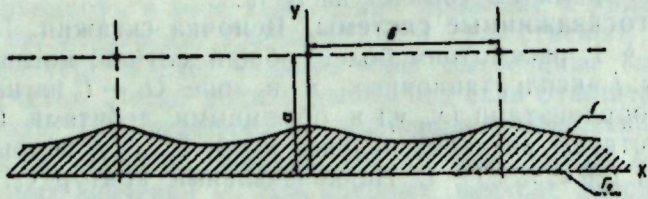
Удовлетворяя далее условию (1.5) и используя уравнение движения (1.9) и соотношение (1.19), приходим к уравнению движения контура  $\Gamma$  в форме (ср. с (2.20)):

$$\left( \frac{\partial F}{\partial t} / \frac{\partial F}{\partial n} \right) - \frac{\lambda_1}{\pi} \int_{(\Gamma)} \left( \frac{\partial F}{\partial t} / \frac{\partial F}{\partial n} \right) \frac{\partial}{\partial n} \left[ \ln \frac{1}{R} + \lambda_2 \ln \frac{1}{R_1} \right] d\sigma = \frac{2}{m'} \frac{c_1 c'}{c_1 + c'} \frac{\partial \varphi}{\partial n}. \quad (3.4)$$

$$(x, y), (\xi, \eta) \in \Gamma.$$

Из выражений (3.1) — (3.4) при  $\lambda_2 = 0$  ( $c' = c_2$ ,  $\lambda_1 = \lambda$ ) вытекают формулы для двухжидкостной системы без учета фазовой проницаемости, при  $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$  ( $c_1 = c' = c_2$ ) — для одножидкостной.

2. Остановимся подробнее на случае пласта с бесконечной цепочкой равноудаленных друг от друга эксплуатационных скважин с одинаковыми дебитами  $Q(t)$ , расположенных на расстоянии  $a$  от начального контура  $\Gamma_0$ . Интервал между скважинами равен  $b$  (фиг. 5). Из приведенных условий очевидно, что течение является периодическим по  $x$ , причем период равен  $b$ .



Фиг. 5.

Обращаясь к (3.2), для этого случая возьмем  $\varphi$  в форме

$$\begin{aligned} \varphi &= \frac{Q(t)}{2\pi c_1 h} \left[ \sum_{n=-\infty}^{\infty} \ln \frac{1}{V(x-nb)^2 + (y-a)^2} + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \ln bn + \ln \frac{b}{\pi} \right] = \\ &= -\frac{Q(t)}{2\pi c_1 h} \left[ \ln \left| \frac{bz}{\pi} \right| + \sum_{n=1}^{\infty} \ln \left| \frac{bz}{\pi} - nb \right| + \sum_{n=1}^{\infty} \ln \left| nb - \frac{bz}{\pi} \right| - \right. \\ &\quad \left. - 2 \sum_{n=1}^{\infty} \ln bn - \ln \frac{b}{\pi} \right], \end{aligned} \quad (3.5)$$

где

$$z = \frac{\pi x}{b} + i \frac{\pi (y-a)}{b}, \quad (3.6)$$

( $i$  — мнимая единица), и дополнительные постоянные введены для обеспечения ограниченности функции  $\varphi$ .

Выражение в квадратных скобках несложными преобразованиями приводится к виду

$$\operatorname{Re} \left\{ \ln z \prod_{n=1}^{\infty} \left( 1 - \frac{z^2}{n^2 \pi^2} \right) \right\}.$$

Пользуясь представлением синуса в форме бесконечного произведения, запишем выражение (3.5) в форме

$$\varphi = -\frac{Q(t)}{2\pi c_1 h} \operatorname{Re} \{ \ln \sin z \}. \quad (3.7)$$

Окончательно, с учетом обозначения (3.6), находим

$$\varphi = \frac{Q(t)}{2\pi c_1 h} \ln \frac{1}{V \sin^2 \frac{\pi x}{b} \operatorname{ch}^2 \frac{\pi (y-a)}{b} + \cos^2 \frac{\pi x}{b} \operatorname{sh}^2 \frac{\pi (y-a)}{b}}. \quad (3.8)$$

Интеграл по  $\Gamma$  в (3.1), беря уравнение искомого контура в форме (2.2), преобразуем к виду

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} \rho(\xi, t) \left\{ \ln \frac{1}{V(x-\xi)^2 + [y-u(\xi, t)]^2} + \lambda_2 \ln \frac{1}{V(x-\xi)^2 + [y+u(\xi, t)]^2} \right\} \times$$

$$\times \sqrt{1+u_x^2(\xi, t)} d\xi = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int_{nb}^{(n+1)b} \rho(\xi, t) \times$$

$$\times \left\{ \ln \frac{1}{V(x-\xi)^2 + [y-u(\xi, t)]^2} + \lambda_2 \ln \frac{1}{V(x-\xi)^2 + [y+u(\xi, t)]^2} \right\} \times \sqrt{1+u_x^2(\xi, t)} d\xi. \quad (3.9)$$

Введем новую переменную интегрирования  $v = \xi - nb$ . Вследствие периодичности течения  $\rho(v+nb, t) = \rho(v, t)$ ,  $u(v+nb, t) = u(v, t)$ ,  $u_x(v+nb, t) = u_x(v, t)$ . Добавляя постоянные члены, обеспечивающие сходимость рядов под интегралом, из (3.9) получаем:

$$\begin{aligned} &\int_0^b \rho(v, t) \left\{ \sum_{n=-\infty}^{\infty} \ln \frac{1}{V(x-v-nb)^2 + [y-u(\xi, t)]^2} + \right. \\ &\quad \left. + \lambda_2 \sum_{n=-\infty}^{\infty} \ln \frac{1}{V(x-v-nb)^2 + [y+u(\xi, t)]^2} + \right. \\ &\quad \left. + 2(1+\lambda_2) \sum_{n=1}^{\infty} \ln bn + (1+\lambda_2) \ln \frac{b}{\pi} \right\} \sqrt{1+u_x^2(\xi, t)} d\xi. \end{aligned}$$

Суммы в фигурных скобках можно преобразовать подобно функции  $\varphi$ . В результате, после замены обозначения переменной интегрирования  $v$  на  $\xi$ , приходим к следующему выражению для  $p$ :

$$\begin{aligned} p &= \varphi(x, y, t) - \frac{1}{2} \int_0^b \rho(\xi, t) \times \\ &\times \left\{ \ln \left( \sin^2 \frac{\pi}{b} (x-\xi) \operatorname{ch}^2 \frac{\pi}{b} [y-u(\xi, t)] + \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \cos^2 \frac{\pi}{b} (x-\xi) \operatorname{sh}^2 \frac{\pi}{b} [y-u(\xi, t)] \right) + \right. \\ &\quad \left. + \lambda_2 \ln \left( \sin^2 \frac{\pi}{b} (x-\xi) \operatorname{ch}^2 \frac{\pi}{b} [y+u(\xi, t)] + \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \cos^2 \frac{\pi}{b} (x-\xi) \operatorname{sh}^2 \frac{\pi}{b} [y+u(\xi, t)] \right) \right\} \sqrt{1+u_x^2(\xi, t)} d\xi. \end{aligned} \quad (3.10)$$

Аналогичные преобразования выражения (3.3) дают:

$$\begin{aligned} p_2 &= \frac{1+\lambda}{1-\lambda} \cdot \frac{1-\lambda_2}{1+\lambda_2} (1-\lambda_1) \varphi(x, y, t) + \\ &+ \frac{1}{2} (1+\lambda_2) \int_0^b \rho(\xi, t) \ln \left\{ \sin^2 \frac{\pi}{b} (x-\xi) \operatorname{ch}^2 \frac{\pi}{b} [y-u(\xi, t)] + \right. \\ &\quad \left. + \cos^2 \frac{\pi}{b} (x-\xi) \operatorname{sh}^2 \frac{\pi}{b} [y-u(\xi, t)] \right\} \sqrt{1+u_x^2(\xi, t)} d\xi. \end{aligned} \quad (3.11)$$

Из уравнения искомого контура  $\Gamma$  в форме (2.5) для производной скалярной функции  $\psi$  по направлению  $n$  вытекает соотношение

$$\begin{aligned} \frac{\partial \psi}{\partial n} \Big|_{\Gamma} &= \frac{\partial \psi}{\partial x} \cos(n, x) + \frac{\partial \psi}{\partial y} \cos(n, y) = \\ &= \left[ -u_x(x, t) \frac{\partial \psi}{\partial x} + \frac{\partial \psi}{\partial y} \right]_{y=u(x, t)} \cdot \frac{1}{\sqrt{1+u_x^2(x, t)}}. \end{aligned} \quad (3.12)$$

С его помощью из (2.5) находим:

$$\left(\frac{\partial F}{\partial t} / \frac{\partial F}{\partial n}\right) = -\frac{u_t(x, t)}{\sqrt{1+u_x^2(x, t)}}$$

и уравнение движения (3.4) после преобразований приобретает следующий вид:

$$\begin{aligned} & u_t(x, t) + \frac{\lambda_1}{2b} \int_0^b u_t(\xi, t) \times \\ & \times \left\{ \left( \operatorname{sh} \frac{2\pi}{b} [u(x, t) - u(\xi, t)] - u_x(x, t) \sin \frac{2\pi}{b} (x - \xi) \right) \times \right. \\ & \times \left( \sin^2 \frac{\pi}{b} (x - \xi) \operatorname{ch}^2 \frac{\pi}{b} [u(x, t) - u(\xi, t)] + \right. \\ & \left. \left. + \cos^2 \frac{\pi}{b} (x - \xi) \operatorname{sh}^2 \frac{\pi}{b} [u(x, t) - u(\xi, t)] \right)^{-1} + \right. \\ & \left. + \lambda_2 \frac{\operatorname{sh} \frac{2\pi}{b} [u(x, t) + u(\xi, t)] - u_x(x, t) \sin \frac{2\pi}{b} (x - \xi)}{\sin^2 \frac{\pi}{b} x \operatorname{ch}^2 \frac{\pi}{b} [u(x, t) + u(\xi, t)] + \cos^2 \frac{\pi}{b} x \operatorname{sh}^2 \frac{\pi}{b} [u(x, t) + u(\xi, t)]} d\xi = \right. \\ & = \frac{1 - \lambda_1 Q(t)}{4 m' h b} \left\{ \frac{\operatorname{sh} \frac{2\pi}{b} [u(x, t) - a] - u_x(x, t) \sin \frac{2\pi}{b} x}{\sin^2 \frac{\pi}{b} x \operatorname{ch}^2 \frac{\pi}{b} [u(x, t) - a] + \cos^2 \frac{\pi}{b} x \operatorname{sh}^2 \frac{\pi}{b} [u(x, t) - a]} + \right. \\ & \left. + \lambda_2 \frac{\operatorname{sh} \frac{2\pi}{b} [u(x, t) + a] - u_x(x, t) \sin \frac{2\pi}{b} x}{\sin^2 \frac{\pi}{b} x \operatorname{ch}^2 \frac{\pi}{b} [u(x, t) + a] + \cos^2 \frac{\pi}{b} x \operatorname{sh}^2 \frac{\pi}{b} [u(x, t) + a]} \right\}. \end{aligned} \quad (3.13)$$

Функция  $u(x, t)$  должна удовлетворять начальному условию (2.2).

3. При  $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$  из (3.13) получаем уравнение движения контура в одножидкостной системе:

$$u_t(x, t) = \frac{Q(t)}{4m'hb} \frac{\operatorname{sh} \frac{2\pi}{b} [u(x, t) - a] - u_x(x, t) \sin \frac{2\pi}{b} x}{\sin^2 \frac{\pi}{b} x \operatorname{ch}^2 \frac{\pi}{b} [u(x, t) - a] + \cos^2 \frac{\pi}{b} x \operatorname{sh}^2 \frac{\pi}{b} [u(x, t) - a]}. \quad (3.14)$$

Оно легко интегрируется по главным направлениям  $x = nb$  и нейтральным направлениям  $x = (n + 1/2)b$  ( $n = 0$  или целое), на которых  $u_x(x, t) = 0$ . По главным направлениям из (3.14) имеем

$$\frac{du}{dt} = \frac{Q(t)}{2m'hb} \operatorname{cth} \frac{\pi}{b} (u - a).$$

Интеграл его при начальном условии  $u(0) = 0$  и  $Q = \text{const}$  следующий:

$$t = -\frac{2m'hb^2}{\pi Q} \ln \frac{\operatorname{ch} \frac{\pi a}{b}}{\frac{\pi}{b} (u - a)}.$$

Отсюда, если положить  $\dot{u} = \dot{a}$ , получаем формулу для времени обводнения:

$$T_0 = -\frac{2m'hb^2}{\pi Q} \ln \operatorname{ch} \frac{\pi a}{b}. \quad (3.15)$$

Для решения уравнения (3.13) при начальном условии (2.2) полностью применим численный метод, изложенный в § 3 работы [5]. Значение  $u_t(x, 0)$ , необходимое для его применения, находится из (3.13), если подставить в него начальное значение (2.2) (см. § 2, п. 3)

$$u_t(x, 0) = -\frac{1 - \lambda_1 Q}{4 m' h b} \frac{\operatorname{sh} \frac{2\pi}{b} a}{\sin^2 \frac{\pi}{b} x \operatorname{ch}^2 \frac{\pi}{b} a + \cos^2 \frac{\pi}{b} x \operatorname{sh}^2 \frac{\pi}{b} a}. \quad (3.16)$$

4. Введем безразмерные величины

$$\begin{aligned} \bar{x} &= \frac{\pi}{b} x, \quad \bar{\xi} = \frac{\pi}{b} \xi, \quad \bar{u} = \frac{\pi}{b} u, \quad \bar{a} = \frac{\pi}{b} a, \\ \bar{t} &= \frac{t}{T_0} = -\frac{\pi Q}{2m'hb^2} \frac{t}{\ln \operatorname{ch} \frac{\pi a}{b}}. \end{aligned} \quad (3.17)$$

Тогда уравнение (3.13) при  $Q = \text{const}$  принимает форму:

$$\begin{aligned} & \bar{u}_{\bar{t}}(\bar{x}, \bar{t}) + \frac{\lambda_1}{2\pi} \int_0^{\pi} \bar{u}_{\bar{t}}(\bar{\xi}, \bar{t}) \times \\ & \times \left\{ \frac{\operatorname{sh} 2[\bar{u}(\bar{x}, \bar{t}) - \bar{u}(\bar{\xi}, \bar{t})] - \bar{u}_{\bar{x}}(\bar{x}, \bar{t}) \sin 2(\bar{x} - \bar{\xi})}{\sin^2(\bar{x} - \bar{\xi}) \operatorname{ch}^2[\bar{u}(\bar{x}, \bar{t}) - \bar{u}(\bar{\xi}, \bar{t})] + \cos^2(\bar{x} - \bar{\xi}) \operatorname{sh}^2[\bar{u}(\bar{x}, \bar{t}) - \bar{u}(\bar{\xi}, \bar{t})]} + \right. \\ & \left. + \lambda_2 \frac{\operatorname{sh} 2[\bar{u}(\bar{x}, \bar{t}) + \bar{u}(\bar{\xi}, \bar{t})] - \bar{u}_{\bar{x}}(\bar{x}, \bar{t}) \sin 2(\bar{x} - \bar{\xi})}{\sin^2(\bar{x} - \bar{\xi}) \operatorname{ch}^2[\bar{u}(\bar{x}, \bar{t}) + \bar{u}(\bar{\xi}, \bar{t})] + \cos^2(\bar{x} - \bar{\xi}) \operatorname{sh}^2[\bar{u}(\bar{x}, \bar{t}) + \bar{u}(\bar{\xi}, \bar{t})]} \right\} d\bar{\xi} = \\ & = -\frac{1 - \lambda_1}{2} \ln \operatorname{ch} \bar{a} \left\{ \frac{\operatorname{sh} 2[\bar{u}(\bar{x}, \bar{t}) - \bar{a}] - \bar{u}_{\bar{x}}(\bar{x}, \bar{t}) \sin 2\bar{x}}{\sin^2 \bar{x} \operatorname{ch}^2[\bar{u}(\bar{x}, \bar{t}) - \bar{a}] + \cos^2 \bar{x} \operatorname{sh}^2[\bar{u}(\bar{x}, \bar{t}) - \bar{a}]} + \right. \\ & \left. + \lambda_2 \frac{\operatorname{sh} 2[\bar{u}(\bar{x}, \bar{t}) + \bar{a}] - \bar{u}_{\bar{x}}(\bar{x}, \bar{t}) \sin 2\bar{x}}{\sin^2 \bar{x} \operatorname{ch}^2[\bar{u}(\bar{x}, \bar{t}) + \bar{a}] + \cos^2 \bar{x} \operatorname{sh}^2[\bar{u}(\bar{x}, \bar{t}) + \bar{a}]} \right\}. \end{aligned} \quad (3.13a)$$

Начальное условие (2.2) записывается в виде

$$\bar{u}(\bar{x}, 0) = 0. \quad (3.18)$$

Решая уравнение (3.13a) при начальном условии (3.18) для различных  $\lambda_1, \lambda_2, \bar{a}$ , можно установить зависимость формы контура и относительного времени обводнения от  $\frac{k'}{k}, \frac{v_n}{v_n}, \frac{a}{b}$ .

5. Как и в случае одной скважины (§ 2, п. 4), уравнение (3.13a) удается точно проинтегрировать по главным и нейтральным направлениям при  $\lambda_1 = 0$ , то есть при условии (2.32). Интеграл по главным направлениям ( $x = n\pi$ ), удовлетворяющий условию (3.18), имеет вид:

$$\begin{aligned} & \frac{\operatorname{cth} 2\bar{a}}{2\sqrt{\left(\frac{1+\lambda_2}{2}\right)^2 \operatorname{cth}^2 2\bar{a} - \lambda_2}} \ln \frac{[\operatorname{cth}(\bar{u} - \bar{a}) + a_1] (\operatorname{cth} \bar{a} - a_2)}{[\operatorname{cth}(\bar{u} - \bar{a}) + a_2] (\operatorname{cth} \bar{a} - a_1)} \\ & - \frac{1}{1 + \lambda_2} \ln \frac{[\operatorname{cth}(\bar{u} - \bar{a}) - a_1] [\operatorname{cth}(\bar{u} - \bar{a}) - a_2] (\operatorname{cth}^2 \bar{a} - 1)}{(\operatorname{cth} \bar{a} - a_1) (\operatorname{cth} \bar{a} - a_2) [\operatorname{cth}^2(\bar{u} - \bar{a}) - 1]} = 2 \ln \operatorname{ch} \bar{a} \cdot \bar{t}, \end{aligned} \quad (3.19)$$



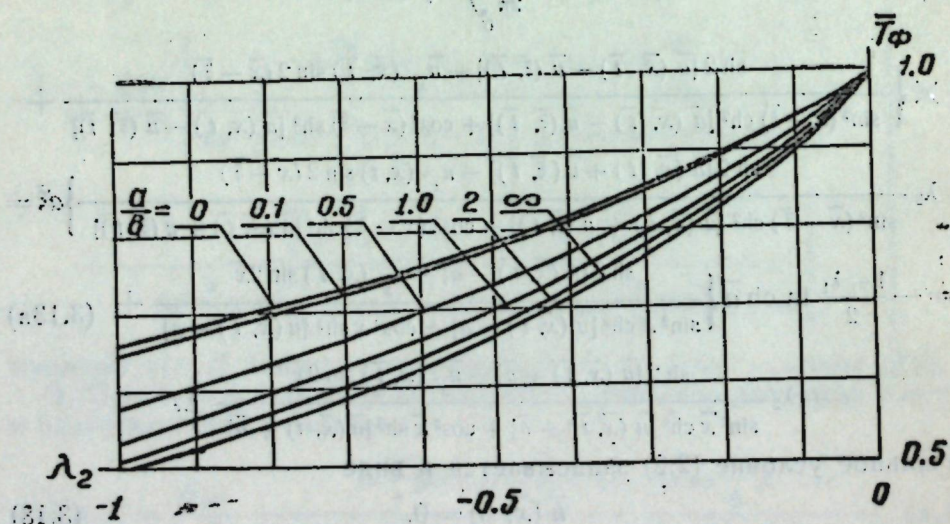
где

$$(3.18) \quad \alpha_{1,2} = \frac{1+\lambda_2}{2} \operatorname{cth} 2\bar{a} \pm \sqrt{\left(\frac{1+\lambda_2}{2}\right)^2 \operatorname{cth}^2 2\bar{a} - \lambda_2}$$

Для определения относительного времени обводнения  $\bar{T}_\Phi$  устремим в (3.19) и к  $a$ . После раскрытия неопределенностей вида  $\frac{0}{0}$  и упрощений получаем

$$(3.19) \quad \bar{T}_\Phi = \frac{1}{2 \ln \operatorname{ch} \bar{a}} \left[ \frac{\operatorname{cth} 2\bar{a}}{2 \sqrt{\left(\frac{1+\lambda_2}{2}\right)^2 \operatorname{cth}^2 2\bar{a} - \lambda_2}} \ln \frac{\operatorname{cth} \bar{a} - \alpha_2}{\operatorname{cth} \bar{a} - \alpha_1} - \frac{1}{1+\lambda_2} \ln \frac{2}{1-\lambda_2} \right] \quad (3.20)$$

Отсюда, в частности, имеем при  $\lambda_2=0$   $\bar{T}_\Phi=1$ , при  $\lambda_2=-1$   $\bar{T}_\Phi = \frac{1}{2 \ln \operatorname{ch} \bar{a}} \left( \bar{a} \operatorname{cth} 2\bar{a} - \frac{1}{2} \right)$ . На фиг. 6 приведены графики зависимости  $\bar{T}_\Phi$  от  $\lambda_2$  при различных  $\bar{a}$ , или  $\frac{a}{b}$ ; на фиг. 7 те же графики перестроены в функции от  $\frac{a}{b}$  для различных  $\lambda_2$ .



Фиг. 6.

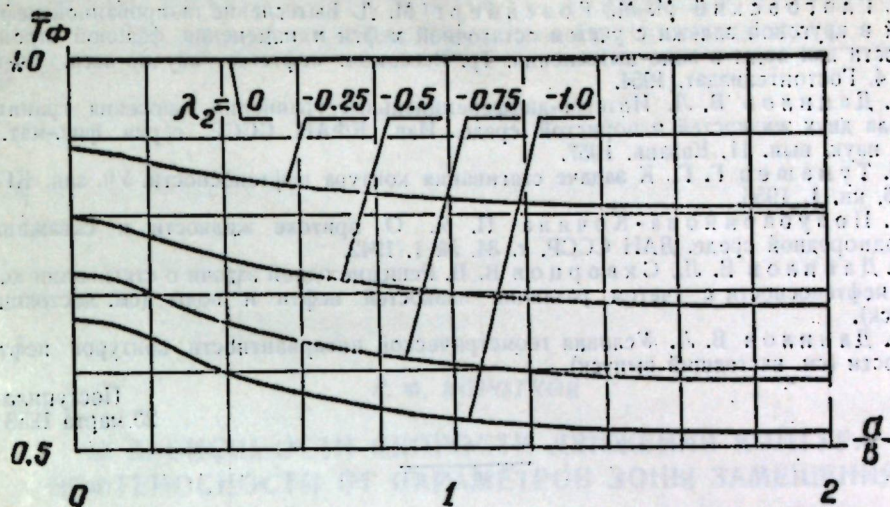
На фиг. 6 кривая  $\frac{a}{b}=0$ , соответствующая одиночной скважине, построена по формуле (2.36). Кривая  $\frac{a}{b}=\infty$  построена по формуле

$$(3.21) \quad \bar{T}_\Phi = \frac{1}{1-\lambda_2}$$

полученной из (3.20) предельным переходом при  $\bar{a} \rightarrow \infty$ .

6. Если по линии цепочки скважин расположить галерею с отбором  $q=Q/b$  с единицы длины, то при условии (2.32) можно получить уравнение движения контура  $\Gamma$  в виде

$$\frac{du}{dt} = -\frac{(1-\lambda_2)Q}{2bhm'}$$



Фиг. 7.

Интегрируя его при  $Q=\text{const}$  по  $u$  в пределах от  $a$  до 0 и по  $t$  в пределах от 0 до  $T_\Gamma$ , находим время обводнения галереи:

$$T_\Gamma = -\frac{2abhm'}{(1-\lambda_2)Q}$$

Относя его ко времени обводнения цепочки в одножидкостной системе  $T_0$  (3.15), получаем относительное время  $\bar{T}_\Gamma$ :

$$\bar{T}_\Gamma = \frac{1}{1-\lambda_2} \frac{\pi a}{b} \frac{1}{\ln \operatorname{ch} \frac{\pi a}{c}} = \frac{1}{1-\lambda_2} \frac{\bar{a}}{\ln \operatorname{ch} \bar{a}}$$

откуда при  $\frac{a}{b}=\bar{a} \rightarrow \infty$  приходим к  $\bar{T}_\Gamma = \frac{1}{1-\lambda_2}$ , что совпадает с соотношением (3.21). Это означает, что время обводнения цепочки скважин тем ближе к времени обводнения галереи с тем же отбором на единицу длины, чем дальше отстоит начальный контур нефтеносности. Как следует из поведения кривых на фиг. 12, уже при  $\frac{a}{b} > 2$  относительное время обводнения  $\bar{T}_\Phi$  цепочки скважин можно считать не зависящим от  $\frac{a}{b}$  и определять с достаточной для практики точностью из простого соотношения (3.21).

7. Решение, построенное для какого-либо определенного закона изменения дебита  $Q(t)$ , может быть без труда использовано для любого иного закона вследствие инвариантности формы контура [9].

В заключение отметим, что рассмотренные задачи можно решать, исходя не из закона изменения дебита, а из заданных давлений на забоях скважин и на контуре питания подобно тому, как это сделано в § 8 работы [5].

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Аван'есов В. Т. К задаче о вытеснении нефти водой из пористой среды. Тр. АЗНИИ по добыче нефти, вып. 1. Азнефтеиздат, 1954.
2. Вахитов Г. Г., Говорова Г. Л. Некоторые радиальные задачи вытеснения нефти водой из неоднородного по проницаемости пласта. Труды Всесоюз. нефтегаз. научн.-иссл. ин-та, вып. 8, Гостолтехиздат, 1956.
3. Коротков С. Ф. Управление перемещением контура нефтеносности с учетом фазовой проницаемости в зоне замещения, Изв. КФАН СССР, серия физ.-мат. и техн. наук, вып. 11, Казань, 1957.

4. Глоговский М. М., Розенберг М. Д. Вытеснение газированной нефти водой в круговой залежи с учетом остаточной нефти и изменения фазовой проницаемости для воды в зоне вытеснения. Тр. Всесоюзн. нефтегаз. научно-иссл. ин-та, вып. 4, Гостоптехиздат, 1954.

5. Данилов В. Л. Интегро-дифференциальные уравнения движения границы раздела двух жидкостей в пористой среде. Изв. КФАН СССР, серия физ.-мат. и техн. наук, вып. 11, Казань, 1957.

6. Тумашев Г. Г. К задаче стягивания контура нефтеносности. Уч. зап. КГУ, т. 116, кн. 1, 1956.

7. Полубаринова-Кочина П. Я. О притоке жидкости к скважинам в неоднородной среде. ДАН СССР, т. 34, № 1, 1942.

8. Данилов В. Л., Скворцов В. В. Решение одной задачи о стягивании контура нефтеносности с учетом различия вязкостей нефти и воды (см. настоящий выпуск).

9. Данилов В. Л. Условия геометрической инвариантности контуров нефтеносности (см. настоящий выпуск).

Поступила  
20 марта 1958 г.

С. Ф. КОРОТКОВ

## О ЗАВИСИМОСТИ СКОРОСТИ ДВИЖЕНИЯ КОНТУРА НЕФТЕНОСНОСТИ ОТ ПАРАМЕТРОВ ЗОНЫ ЗАМЕЩЕНИЯ

Рассматривается задача о перемещении первоначально кругового контура нефтеносности (КН) к концентричной ему круговой батарее скважин. Учитывается различие вязкостей нефти и воды и снижение проницаемости для воды в зоне замещения.

Предлагается метод оценки влияния параметров зоны замещения на скорости перемещения КН по главным и нейтральным направлениям. Приводится пример численного расчета.

1. Исследуем задачу о стягивании кругового КН в неограниченном пласте постоянной мощности  $h$  в условиях водонапорного режима. Вязкости нефти  $\mu_n$  и воды  $\mu_w$  предполагаем различными. Полагаем далее, что во всей зоне вытеснения нефти водой сразу устанавливается некоторая постоянная остаточная нефтенасыщенность. При этом проницаемость для воды в ней снижается до некоторой величины постоянной фазовой проницаемости  $k' < k$ , где  $k = \text{const}$  — проницаемость в зонах нефти и краевой воды [1].

Пусть начальное положение КН  $\Gamma(\Gamma_0)$  — окружность радиуса  $R_0$ . Разработка месторождения ведется круговой батареей из  $l$  равнодебитных скважин с объемными дебитами  $Q$  и полярными координатами

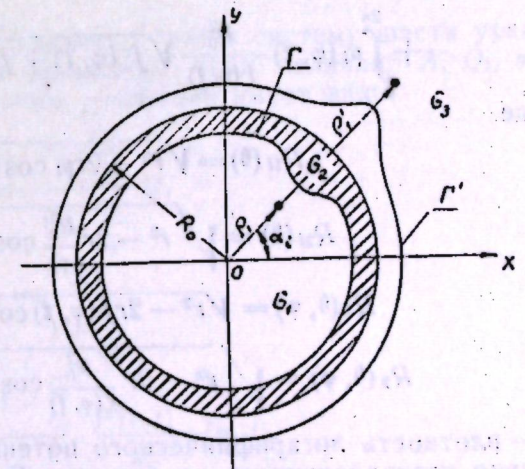
$$\left( r_i, \frac{2\pi}{l} i \right) \quad (i = 0, 1, \dots, l-1).$$

Поставим задачей определить такие размеры зоны замещения, при которых зона краевой воды не оказывает существенного влияния на скорости перемещения КН по главным и нейтральным направлениям.

Обозначим функции давления в зоне нефти  $G_1$ , в зоне вытеснения  $G_2$  и зоне воды  $G_3$  (фиг. 1) соответственно через  $p_1$ ,  $p_2$  и  $p_3$ . Для определения этих функций имеем следующую краевую задачу:

$$\Delta p_i = 0, \quad (i = 1, 2, 3) \quad (1.1)$$

$$(p_1)_\Gamma = (p_2)_\Gamma, \quad (1.2)$$



Фиг. 1.

$$C_1 \left( \frac{\partial p_1}{\partial n} \right)_\Gamma = C_2 \left( \frac{\partial p_2}{\partial n} \right)_\Gamma, \quad (1.3)$$

$$(p_2)_{\Gamma_0} = (p_3)_{\Gamma_0}, \quad (1.4)$$

$$C_2 \left( \frac{\partial p_2}{\partial n_0} \right)_{\Gamma_0} = C_3 \left( \frac{\partial p_3}{\partial n_0} \right)_{\Gamma_0}, \quad (1.5)$$

где  $n$  и  $n_0$  — внутренние нормали соответственно к контурам  $\Gamma$  и  $\Gamma_0$ ,

$$C_1 = \frac{k}{\nu_{11}}, \quad C_2 = \frac{k'}{\nu_{12}} \quad \text{и} \quad C_3 = \frac{k}{\nu_{13}}.$$

Уравнение контура  $\Gamma$  запишем в полярных координатах

$$r = f(\theta, t). \quad (1.6)$$

Движение КН рассматриваем только до обводнения скважин  $f(\theta, t) > r_1$ . При построении функции давления, для простоты выкладок, все рассуждения сначала проведем для одной эксцентрично расположенной скважины, так как они остаются совершенно аналогичными и для функций давления для  $l$  скважин. Пусть эта скважина имеет координаты  $(r_1, \alpha_1)$  (рис. 1). Отобразим скважину и контур  $\Gamma$  в окружности  $r = R_0$ . Уравнение отображенного контура  $\Gamma'$  при этом имеет вид:

$$r = \frac{R_0^2}{f(\theta, t)}.$$

Координаты отображенной скважины будут  $\left( \frac{R_0^2}{r_1}, \alpha_1 \right)$ . Дифференциалы дуг контуров  $\Gamma$  и  $\Gamma'$  выражаются следующим образом:

$$ds = \sqrt{f^2(\varphi, t) + f'^2(\varphi, t)} d\varphi,$$

$$ds_1 = \frac{R_0^2}{f(\varphi, t)} \sqrt{f^2(\varphi_1, t) + f'^2(\varphi_1, t)} d\varphi_1.$$

Функцию давления для зон  $G_1$  и  $G_2$  ищем в единой форме:

$$p = \frac{Q}{2\pi h C_1} \ln \frac{1}{R_{1l}(\theta)} + \frac{Q_1}{2\pi h C_1} \ln \frac{1}{R_{2l}(\theta)} + \int_0^{2\pi} \rho(\varphi, t) \sqrt{f^2(\varphi, t) + f'^2(\varphi, t)} \ln \frac{1}{R_1(\theta, \varphi)} d\varphi + \int_0^{2\pi} \rho_1(\varphi, t) \frac{R_0^2}{f(\varphi, t)} \sqrt{f^2(\varphi, t) + f'^2(\varphi, t)} \ln \frac{1}{R_2(\theta, \varphi)} d\varphi, \quad (1.7)$$

где

$$R_{1l}(\theta) = \sqrt{r^2 - 2r r_1 \cos(\theta - \alpha_1) + r_1^2},$$

$$R_{2l}(\theta) = \sqrt{r^2 - 2r \frac{R_0^2}{r_1} \cos(\theta - \alpha_1) + \left( \frac{R_0^2}{r_1} \right)^2},$$

$$R_1(\theta, \varphi) = \sqrt{r^2 - 2r f(\varphi, t) \cos(\theta - \varphi) + f^2(\varphi, t)},$$

$$R_2(\theta, \varphi) = \sqrt{r^2 - 2r \frac{R_0^2}{f(\varphi, t)} \cos(\theta - \varphi) + \left[ \frac{R_0^2}{f(\varphi, t)} \right]^2},$$

$\rho$  — плотность логарифмического потенциала простого слоя, непрерывно распределенного по контуру  $\Gamma$ ;  $\rho_1$  — плотность логарифмиче-

ского потенциала простого слоя, непрерывно распределенного по контуру  $\Gamma'$ . Функцию  $p_3$  будем определять в таком виде:

$$p_3 = \frac{A}{2\pi h C_1} \ln \frac{1}{r} + \frac{Q_2}{2\pi h C_1} \ln \frac{1}{R_{1l}(\theta)} + \int_0^{2\pi} \rho_2(\varphi, t) \sqrt{f^2(\varphi, t) + f'^2(\varphi, t)} \ln \frac{1}{R_1(\theta, \varphi)} d\varphi + C, \quad (1.8)$$

где  $\rho_2$  — плотность логарифмического потенциала простого слоя, непрерывно распределенного по контуру  $\Gamma$ , отличная от плотности  $\rho$ . Функции  $p$  и  $p_3$  благодаря их выбору в виде (1.7) и (1.8) являются гармоническими по построению, следовательно, уравнения (1.1) удовлетворяются.

Потребуем выполнения условия (1.4). Для этого необходимо выполнение следующих соотношений:

$$Q + Q_1 = Q_2,$$

$$\left. \begin{aligned} \frac{Q}{2\pi h C_1} \ln \frac{r_1}{R_0} + \int_0^{2\pi} \rho_1(\varphi, t) \frac{R_0^2}{f(\varphi, t)} \sqrt{f^2(\varphi, t) + f'^2(\varphi, t)} \ln \frac{f(\varphi, t)}{R_0} d\varphi &= \\ &= \frac{A}{2\pi h C_1} \ln \frac{1}{R_0} + C, \\ \rho(\varphi, t) + \frac{R_0^2 \rho_1(\varphi, t)}{f^2(\varphi, t)} &= \rho_2(\varphi, t). \end{aligned} \right\} \quad (1.9)$$

Переходим к выполнению условия (1.5). Для того, чтобы оно имело место, требуется выполнение следующих уравнений:

$$\left. \begin{aligned} Q - Q_1 &= \frac{C_3}{C_2} Q_2, \\ \rho(\varphi, t) - \frac{R_0^2 \rho_1(\varphi, t)}{f^2(\varphi, t)} &= \frac{C_3}{C_2} \rho_2(\varphi, t), \\ \frac{C_2 Q}{2\pi h C_1 R_0} + \frac{C_2}{R_0} \int_0^{2\pi} \rho(\varphi, t) \sqrt{f^2(\varphi, t) + f'^2(\varphi, t)} d\varphi &= \frac{A C_3}{2\pi h C_1 R_0} + \\ &+ \frac{Q_2 C_3}{2\pi h C_1 R_0} + \frac{C_3}{R_0} \int_0^{2\pi} \rho_2(\varphi, t) \sqrt{f^2(\varphi, t) + f'^2(\varphi, t)} d\varphi. \end{aligned} \right\} \quad (1.10)$$

Соотношения (1.9) и (1.10) представляют собою систему шести уравнений для определения шести введенных нами величин:  $A$ ,  $Q_1$ ,  $\rho_1$ ,  $Q_2$ ,  $\rho_2$  и  $C$ . Решение этой системы уравнений имеет вид:

$$Q_1 = \frac{1 - \frac{C_3}{C_2}}{1 + \frac{C_3}{C_2}} Q,$$

$$Q_2 = \frac{2Q}{1 + \frac{C_3}{C_2}},$$

$$\rho_1(\varphi, t) = \frac{1 - \frac{C_3}{C_2}}{1 + \frac{C_3}{C_2}} \frac{f^2(\varphi, t)}{R_0^2} \rho(\varphi, t),$$

$$p_2(\varphi, t) = \frac{2}{1 + \frac{C_3}{C_2}} p(\varphi, t),$$

$$A = \frac{\lambda_2 C_2 Q}{C_3} + \frac{2\pi h C_1 C_2 \lambda_2}{C_3} \int_0^{2\pi} p(\varphi, t) \sqrt{f^2(\varphi, t) + f'^2(\varphi, t)} d\varphi,$$

$$C = \frac{\lambda_2 Q}{2\pi h C_1} \left( \ln \frac{r_1}{R_0} - \frac{C_2}{C_3} \ln \frac{1}{R_0} \right) +$$

$$+ \lambda_2 \int_0^{2\pi} p(\varphi, t) \left[ \ln \frac{f(\varphi, t)}{R_0} - \frac{C_2}{C_3} \ln \frac{1}{R_0} \right] \sqrt{f^2(\varphi, t) + f'^2(\varphi, t)} d\varphi,$$

где

$$\lambda_2 = \frac{C_2 - C_3}{C_3 + C_2}.$$

После подстановки этих значений в выражения (1.7) и (1.8) функции  $p$  и  $p_2$  принимают следующую форму:

$$p = \frac{Q}{2\pi h C_1} \ln \frac{1}{R_{1l}(\theta)} + \frac{\lambda_2 Q}{2\pi h C_1} \ln \frac{1}{R_{2l}(\theta)} +$$

$$+ \int_0^{2\pi} p(\varphi, t) \sqrt{f^2(\varphi, t) + f'^2(\varphi, t)} \left\{ \ln \frac{1}{R_1(\theta, \varphi)} + \lambda_2 \ln \frac{1}{R_2(\theta, \varphi)} \right\} d\varphi, \quad (1.11)$$

$$p_2 = \frac{1}{2\pi h C_1} \left[ \frac{\lambda_2 C_2 Q}{C_3} + \frac{2\pi h C_1 C_2 \lambda_2}{C_3} \int_0^{2\pi} p(\varphi, t) \sqrt{f^2(\varphi, t) + f'^2(\varphi, t)} d\varphi \right] \ln \frac{1}{r} +$$

$$+ \frac{1}{2\pi h C_1} \cdot \frac{2Q}{1 + \frac{C_3}{C_2}} \ln \frac{1}{R_{1l}(\theta)} + \frac{2}{1 + \frac{C_3}{C_2}} \int_0^{2\pi} p(\varphi, t) \sqrt{f^2(\varphi, t) + f'^2(\varphi, t)} \times$$

$$\times \ln \frac{1}{R_1(\theta, \varphi)} d\varphi + \frac{\lambda_2 Q}{2\pi h C_1} \left( \ln \frac{r_1}{R_0} - \frac{C_2}{C_3} \ln \frac{1}{R_0} \right) +$$

$$+ \lambda_2 \int_0^{2\pi} p(\varphi, t) \left[ \frac{f(\varphi, t)}{R_0} - \frac{C_2}{C_3} \ln \frac{1}{R_0} \right] \sqrt{f^2(\varphi, t) + f'^2(\varphi, t)} d\varphi.$$

Соотношение (1.11) представляет собою функцию  $p_1$  для  $r_1 < r \leq f(\theta, t)$  и функцию  $p_2$  для  $f(\theta, t) \leq r \leq R_0$ . Теперь непосредственной проверкой можно убедиться в том, что условия сопряжения (1.4) и (1.5) на контуре  $\Gamma_0$  выполняются при любой интегрируемой функции  $p$ . При построении функций  $p$  и  $p_2$  при решении задачи, когда КН перемещается к батарее из  $l$  скважин, все приведенные выше рассуждения остаются в силе. Для этого случая функции давления имеют вид:

$$p = \frac{Q}{2\pi h C_1} \sum_{l=0}^{l-1} \ln \frac{1}{R_{1l}(\theta)} + \frac{\lambda_2 Q}{2\pi h C_1} \sum_{l=0}^{l-1} \ln \frac{1}{R_{2l}(\theta)} +$$

$$+ \int_0^{2\pi} p(\varphi, t) \sqrt{f^2(\varphi, t) + f'^2(\varphi, t)} \left\{ \ln \frac{1}{R_1(\theta, \varphi)} + \lambda_2 \ln \frac{1}{R_2(\theta, \varphi)} \right\} d\varphi, \quad (1.12)$$

$$p_2 = \frac{1}{2\pi h C_1} \left[ \frac{\lambda_2 C_2 Q}{C_3} + \frac{2\pi h C_1 C_2 \lambda_2}{C_3} \int_0^{2\pi} p(\varphi, t) \sqrt{f^2(\varphi, t) + f'^2(\varphi, t)} d\varphi \right] \ln \frac{1}{r} +$$

$$+ \frac{1}{2\pi h C_1} \cdot \frac{2Q}{1 + \frac{C_3}{C_2}} \sum_{l=0}^{l-1} \ln \frac{1}{R_{1l}} +$$

$$+ \frac{2}{1 + \frac{C_3}{C_2}} \int_0^{2\pi} p(\varphi, t) \sqrt{f^2(\varphi, t) + f'^2(\varphi, t)} \ln \frac{1}{R(\theta, \varphi)} d\varphi +$$

$$+ \frac{\lambda_2 Q}{2\pi h C_1} \left( \ln \frac{r_1}{R_0} - \frac{C_2}{C_3} \ln \frac{1}{R_0} \right) +$$

$$+ \lambda_2 \int_0^{2\pi} p(\varphi, t) \left[ \frac{f(\varphi, t)}{R_0} - \frac{C_2}{C_3} \ln \frac{1}{R_0} \right] \sqrt{f^2(\varphi, t) + f'^2(\varphi, t)} d\varphi. \quad (1.13)$$

В формулах (1.12) и (1.13)  $r = f(\theta, t)$  — уравнение КН  $\Gamma$  при его перемещении к батарее из  $l$  скважин.

2. В условиях нашей задачи при работе круговой батареи из  $l$  равнодебитных скважин направления  $\theta = \frac{2\pi}{l} i$  являются главными, а направления  $\theta = \frac{\pi}{l} (1 + 2i)$  — нейтральными ( $i = 0, 1, 2, \dots, l-1$ ). Для этих направлений выполняется соотношение:

$$\frac{\partial}{\partial n} = -\frac{\partial}{\partial r}. \quad (2.1)$$

Исходя из выражения для функции давления (1.12) и используя условия (1.3), (2.1) по методу, изложенному в работах [2], [3], получим интегро-дифференциальное уравнение перемещения КН, которое для точки  $A(R_1, 0)$  КН на главном направлении в момент  $t = t_1$  можно записать в виде [4]:

$$(v_n)_A = (v_n)_A^{(2)} - \frac{(1 - \lambda_1) \lambda_2 Q}{2\pi h m} \sum_{l=0}^{l-1} R_{1l}^* -$$

$$- \frac{\lambda_1 \lambda_2}{\pi} \int_0^{2\pi} v_n(\varphi, t_1) R_{1l}^*(\varphi) \sqrt{f^2(\varphi, t_1) + f'^2(\varphi, t_1)} d\varphi, \quad (2.2)$$

где

$$R_{1l}^* = \frac{R_1 - \frac{R_0^2}{r_1} \cos \frac{2\pi}{l} i}{R_1^2 - 2R_1 \frac{R_0^2}{r_1} \cos \frac{2\pi}{l} i + \left( \frac{R_0^2}{r_1} \right)^2},$$

$$R_{1l}^*(\varphi) = \frac{R_1 - \frac{R_0^2}{f(\varphi, t_1)} \cos \varphi}{R_1^2 - 2R_1 \frac{R_0^2}{f(\varphi, t_1)} \cos \varphi + \left[ \frac{R_0^2}{f(\varphi, t_1)} \right]^2}, \quad (2.3)$$

$$\lambda_1 = \frac{C_1 - C_2}{C_1 + C_2}.$$

В точке  $B\left(R_2, \frac{\pi}{l}\right)$  КН на нейтральном направлении в тот же момент  $t = t_1$  имеем:

$$(v_n)_B = (v_n)_B^{(2)} - \frac{(1-\lambda_1)\lambda_2 Q}{2\pi hm} \sum_{l=0}^{l-1} R_{2l}^* + \quad (2.4)$$

$$+ \frac{\lambda_1 \lambda_2}{\pi} \int_0^{2\pi} v_n(\varphi, t_1) R_2^*(\varphi) \sqrt{f^2(\varphi, t_1) + f'^2(\varphi, t_1)} d\varphi,$$

где

$$R_{2l}^* = \frac{R_2 - \frac{R_0^2}{\rho_1} \cos \frac{\pi}{l} (1-2l)}{R_2^2 - 2R_2 \frac{R_0^2}{\rho_1} \cos \frac{\pi}{l} (1-2l) + \left(\frac{R_0^2}{\rho_1}\right)^2},$$

$$R_2^*(\varphi) = \frac{R_2 - \frac{R_0^2}{f(\varphi, t_1)} \cos\left(\frac{\pi}{l} - \varphi\right)}{R_2^2 - 2R_2 \frac{R_0^2}{f(\varphi, t_1)} \cos\left(\frac{\pi}{l} - \varphi\right) + \left[\frac{R_0^2}{f(\varphi, t_1)}\right]^2}.$$

В формулах (2.2) и (2.4) через  $(v_n)_A^{(2)}$  и  $(v_n)_B^{(2)}$  обозначены соответственно скорости КН в точках А и В, полученные в предположении, что фазовая проницаемость  $k'$  зоны вытеснения  $G_2$  распространена и на зону  $G_3$ , то есть в двухжидкостной системе с коэффициентом  $\lambda = \lambda_1$ .

Для оценки влияния параметров зоны  $G_2$  на скорости перемещения КН по главным направлениям введем относительные величины:

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_A &= \frac{(v_n)_A - (v_n)_A^{(2)}}{(v_n)_A^{(2)}}, \\ \varepsilon_B &= \frac{(v_n)_B - (v_n)_B^{(2)}}{(v_n)_B^{(2)}}. \end{aligned} \right\} \quad (2.5)$$

Для дальнейшего нам необходимо установить оценки интегральных членов в формулах (2.2) и (2.4).

Так как при условиях нашей задачи КН имеет максимальную скорость по главным направлениям, а минимальную — по нейтральным, то в любой момент времени  $t = t_1$ , выполняется неравенство  $R_1 \leq f(\varphi, t_1) \leq R_2$ , следствием которого являются следующие неравенства:

$$-\frac{1}{\frac{R_0^2}{R_1} - R_2} \leq R_1^*(\varphi) \leq \frac{1}{\frac{R_0^2}{R_2} + R_1}, \quad (2.6)$$

$$-\frac{1}{\frac{R_0^2}{R_2} - R_2} \leq R_2^*(\varphi) \leq \frac{1}{\frac{R_0^2}{R_2} + R_2}. \quad (2.7)$$

Если учесть, что в нашей задаче  $v_n$  величина определенно-положительная, а в условиях водонапорного режима имеет место соотношение:

$$mh \int_0^{2\pi} v_n(\varphi, t) \sqrt{f^2(\varphi, t) + f'^2(\varphi, t)} d\varphi = -Q(t)l, \quad (Q(t) < 0),$$

то получаем следующие оценки:

$$\frac{Ql}{mh \left(\frac{R_0^2}{R_1} - R_1\right)} \leq \int_0^{2\pi} v_n(\varphi, t) R_1^*(\varphi) \sqrt{f^2(\varphi, t) + f'^2(\varphi, t)} d\varphi \leq - \frac{Ql}{mh \left(\frac{R_0^2}{R_2} + R_1\right)}, \quad (2.8)$$

$$\frac{Ql}{mh \left(\frac{R_0^2}{R_2} - R_2\right)} \leq \int_0^{2\pi} v_n(\varphi, t) R_2^*(\varphi) \sqrt{f^2(\varphi, t) + f'^2(\varphi, t)} d\varphi \leq - \frac{Ql}{mh \left(\frac{R_0^2}{R_2} + R_2\right)}. \quad (2.9)$$

Будем считать  $\lambda_1 > 0$ , что соответствует случаю  $\frac{\mu_n}{\mu_n} < \frac{k}{k'}$ . Для этого случая  $\max(v_n)_A^{(2)}$  и  $\min(v_n)_B^{(2)}$  определены ранее [4]. Так как для интегралов в формулах (2.2) и (2.4) и  $(v_n)_A^{(2)}$  и  $(v_n)_B^{(2)}$  мы располагаем только оценками сверху и снизу, то для подсчетов относительных величин  $\varepsilon_A$  и  $\varepsilon_B$  (2.5) нам необходимо подсчитать в каждой точке главного и нейтрального направления по четыре значения и выбрать наибольшие из них. Для точки А главного направления они имеют вид:

$$\varepsilon_A^{(1)} = \frac{1}{\max(v_n)_A^{(2)}} \left\{ -\frac{(1-\lambda_1)\lambda_2 Q}{2\pi hm} \sum_{l=0}^{l-1} R_{1l}^* + \frac{\lambda_1 \lambda_2 Q l}{\pi mh} \cdot \frac{1}{\frac{R_0^2}{R_2} - R_1} \right\},$$

$$\varepsilon_A^{(2)} = \frac{1}{\min(v_n)_B^{(2)}} \left\{ -\frac{(1-\lambda_1)\lambda_2 Q}{2\pi hm} \sum_{l=0}^{l-1} R_{1l}^* + \frac{\lambda_1 \lambda_2 Q l}{\pi hm} \cdot \frac{1}{\frac{R_0^2}{R_2} - R_1} \right\},$$

$$\varepsilon_A^{(3)} = \frac{1}{\max(v_n)_A^{(2)}} \left\{ -\frac{(1-\lambda_1)\lambda_2 Q}{2\pi hm} \sum_{l=0}^{l-1} R_{1l}^* - \frac{\lambda_1 \lambda_2 Q l}{\pi mh} \cdot \frac{1}{\frac{R_0^2}{R_2} + R_1} \right\},$$

$$\varepsilon_A^{(4)} = \frac{1}{\min(v_n)_B^{(2)}} \left\{ -\frac{(1-\lambda_1)\lambda_2 Q}{2\pi hm} \sum_{l=0}^{l-1} R_{1l}^* - \frac{\lambda_1 \lambda_2 Q l}{\pi mh} \cdot \frac{1}{\frac{R_0^2}{R_2} + R_1} \right\}.$$

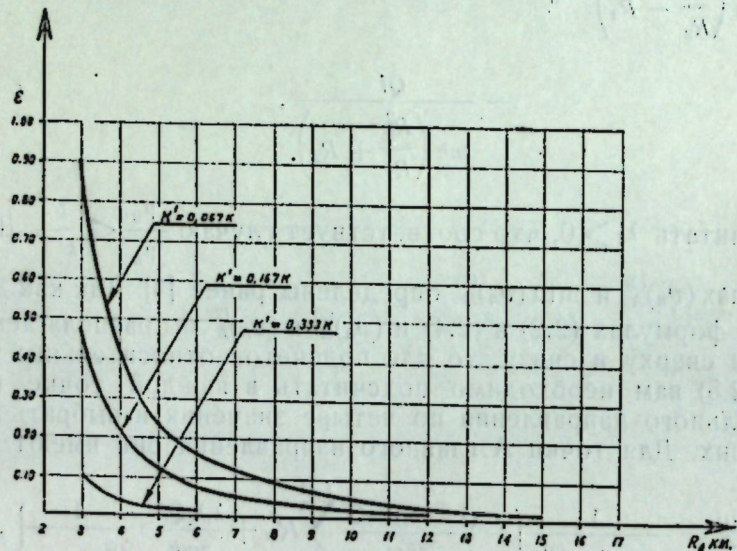
Аналогичным путем получают и четыре соответствующих соотношения для точки В нейтрального направления  $\varepsilon_B^{(i)}$  ( $i = 1, 2, 3, 4$ ). Для оценки выбираем величину  $\varepsilon$ , наибольшую из величин  $\varepsilon_A = \max|\varepsilon_A^{(i)}|$  и  $\varepsilon_B = \max|\varepsilon_B^{(i)}|$ , ( $i = 1, 2, 3, 4$ ).

Из полученных соотношений следует, что величина  $\varepsilon$  зависит от величины  $R_0$ , то есть от ширины зоны замещения.

$$H = R_0 - \frac{R_1 + R_2}{2}.$$

Используя их, подсчитаем, при каких значениях радиуса  $R_0$  для данного положения КН и отношения  $\frac{k'}{k}$  величина  $\varepsilon \ll 1$ . Это представляет интерес потому, что при  $\varepsilon \ll 1$  для расчетов перемещения КН сохраняет свою силу методика двухжидкостной системы с коэффициентом  $\lambda = \lambda_1$  [2], [4].

3. Для расчетов выберем следующие значения:  $Q = 80$  м<sup>3</sup>/сутки,  $r_1 = 1200$  м,  $R_2 = 2025$  м,  $R_1 = 1975$  м,  $h = 6$  м,  $l = 12$ ,  $m = 0,2$ ,  $k = 3$  дарси,  $\mu_n = 2,5$  сантипуаза,  $\mu_w = 1$  сантипуаз. При этих условиях расчет проведен для трех значений коэффициента фазовой проницаемости  $k' = 1$  дарси ( $\lambda_1 = 0,0909$ ,  $\lambda_2 = -0,5000$ );  $0,5$  дарси ( $\lambda_1 = 0,4118$ ,  $\lambda_2 = -0,7143$ ) и  $0,2$  дарси ( $\lambda_1 = 0,7140$ ,  $\lambda_2 = -0,8750$ ).



Фиг. 2.

На фиг. 2 приведены зависимости  $\varepsilon$  от  $R_0$  для различных значений  $k'$ . Допустим, что относительная погрешность в определении нормальных скоростей не должна превосходить 5%. Тогда для  $k \geq k' > 0$ ,  $333k$  величины нормальных скоростей можно подсчитывать по формулам двухжидкостной системы, с коэффициентом  $\lambda = \lambda_1$  при ее ширине  $H$  порядка 1,5 км; для  $0,333k \geq k' > 0,167k$  при ширине  $H = 5$  км и для  $0,167k \geq k' > 0,067k$  при  $H = 8$  км.

Итак, в том случае, когда  $\lambda_2$  мало отличается от нуля, то есть величина  $k'$  близка к  $k$ , уже при небольшой ширине зоны замещения для подсчета величин нормальных скоростей можно исходить из двухжидкостной системы с коэффициентом  $\lambda = \lambda_1$ , предполагая тем самым, что сниженная проницаемость в зоне вытеснения распространена и на область краевой воды. Допускаемая при этом погрешность невелика, в нашем случае не более 5%. В том же случае, когда  $\lambda_2$  близка к  $-1$ , то есть величина  $k' \ll k$ , те же величины относительной погрешности при определении нормальных скоростей исходя из двухжидкостной системы с коэффициентом  $\lambda = \lambda_1$ , имеют место только при зоне вытеснения достаточно большой ширины.

Таким образом, для решения задачи о перемещении КН с учетом снижения проницаемости для воды в зоне замещения можно использовать методику двухжидкостной системы с коэффициентом  $\lambda = \lambda_1$

в случае небольшого снижения проницаемости в зоне замещения ( $\lambda_2$  близка к нулю) уже при малой ширине этой зоны; если же фазовая проницаемость в зоне замещения низка ( $\lambda_2$  близка к  $-1$ ), то это допустимо лишь при достаточно большой ширине зоны замещения.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Аванесов В. Т. К задаче о вытеснении нефти водой из пористой среды. АзНИИ по добыче нефти. Труды, вып. 1, Азнефтеиздат, 1954.
2. Данилов В. Л. Интегро-дифференциальные уравнения движения границы раздела двух жидкостей в пористой среде. Изв. КФАН СССР, сер. физ.-мат. и техн. наук, вып. 11, 1957.
3. Данилов В. Л. О влиянии фазовой проницаемости в зоне вытеснения нефти водой на перемещение водо-нефтяного контакта (см. настоящий выпуск).
4. Коротков С. Ф. Об одной частной задаче прослеживания контура нефтеносности. Изв. КФАН СССР, сер. физ.-мат. и техн. наук, вып. 11, 1957.

Поступила  
20 марта 1958 г.

Г. П. ЦЫБУЛЬСКИЙ

**МЕТОД ОЦЕНКИ ТОЧНОСТИ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ УПРАВЛЕНИЯ  
 ДВИЖЕНИЕМ КОНТУРА НЕФТЕНОСНОСТИ**

В статье излагается один метод оценки точности решения задач управления движением контура нефтеносности, который иллюстрируется на конкретном примере.

§ 1. Введение. Рассмотрим две системы дифференциальных уравнений

$$\frac{d\bar{x}}{dt} = f_1(\bar{x}, \bar{y}, t) + \varepsilon_1(\theta, t); \quad \frac{d\bar{y}}{dt} = f_2(\bar{x}, \bar{y}, t) + \varepsilon_2(\theta, t) \quad (1.1)$$

и

$$\frac{dx}{dt} = f_1(x, y, t); \quad \frac{dy}{dt} = f_2(x, y, t) \quad (1.2)$$

с одинаковыми начальными условиями

$$x|_{t=0} = \bar{x}|_{t=0} = x_0(\theta), \quad y|_{t=0} = \bar{y}|_{t=0} = y_0(\theta).$$

Параметр  $\theta$  может изменяться или непрерывно в некоторых пределах  $(\theta_0, \theta_1)$ , или принимать ряд отдельных значений  $\theta_k$  ( $k = 1, 2, \dots, l$ ).

Пусть решение системы (1.1)

$$\bar{x} = \bar{x}(\theta, t), \quad \bar{y} = \bar{y}(\theta, t)$$

известно, а решение системы (1.2) неизвестно. Поставим задачу, не находя решения системы (1.2), оценить разность решений систем (1.2) и (1.1)

$$u(\theta, t) = x(\theta, t) - \bar{x}(\theta, t), \quad v(\theta, t) = y(\theta, t) - \bar{y}(\theta, t). \quad (1.3)$$

Этот вопрос рассматривался ранее в работе [1].

Составим разности соответствующих уравнений систем (1.2) и (1.1)

$$\left. \begin{aligned} \frac{d(x - \bar{x})}{dt} &= [f_1(x, y, t) - f_1(\bar{x}, \bar{y}, t)] - \varepsilon_1(\theta, t) \\ \frac{d(y - \bar{y})}{dt} &= [f_2(x, y, t) - f_2(\bar{x}, \bar{y}, t)] - \varepsilon_2(\theta, t) \end{aligned} \right\} \quad (1.4)$$

Будем считать, что функции  $f_1(x, y, t)$  и  $f_2(x, y, t)$  вместе со своими частными производными по  $x$  и  $y$  до 2 порядка включительно, в некоторой области  $G(x, y, t)$  непрерывны, ограничены по модулю и удовлетворяют условиям Липшица. Функции  $\varepsilon_1(\theta, t)$  и  $\varepsilon_2(\theta, t)$  непрерывны и ограничены по модулю.

Воспользуемся для представления разностей, стоящих в квадратных скобках в системе (1.4), теоремой о конечных приращениях,

как это было сделано, в [1], а формулой Тейлора. Система (1.4) примет вид

$$\left. \begin{aligned} \frac{du}{dt} &= g_{11}(\theta, t)u + g_{12}(\theta, t)v + A_1(u, v, \theta, t) - \varepsilon_1(\theta, t), \\ \frac{dv}{dt} &= g_{21}(\theta, t)u + g_{22}(\theta, t)v + A_2(u, v, \theta, t) - \varepsilon_2(\theta, t), \end{aligned} \right\} \quad (1.5)$$

где введены обозначения:

$$\begin{aligned} g_{11}(\theta, t) &= \frac{\partial f_1}{\partial x}(\bar{x}, \bar{y}, t); & g_{12}(\theta, t) &= \frac{\partial f_1}{\partial y}(\bar{x}, \bar{y}, t); \\ g_{21}(\theta, t) &= \frac{\partial f_2}{\partial x}(\bar{x}, \bar{y}, t); & g_{22}(\theta, t) &= \frac{\partial f_2}{\partial y}(\bar{x}, \bar{y}, t); \\ A_1(u, v, \theta, t) &= \frac{1}{2} \left\{ \frac{\partial^2 f_1}{\partial x^2}(\bar{x} + \theta_{11}u, \bar{y} + \theta_{12}v, t)u^2 + \right. \\ &+ 2 \frac{\partial^2 f_1}{\partial x \partial y}(\bar{x} + \theta_{11}u, \bar{y} + \theta_{12}v, t)uv + \left. \frac{\partial^2 f_1}{\partial y^2}(\bar{x} + \theta_{11}u, \bar{y} + \theta_{12}v, t)v^2 \right\}; \\ A_2(u, v, \theta, t) &= \frac{1}{2} \left\{ \frac{\partial^2 f_2}{\partial x^2}(\bar{x} + \theta_{21}u, \bar{y} + \theta_{22}v, t)u^2 + \right. \\ &+ 2 \frac{\partial^2 f_2}{\partial x \partial y}(\bar{x} + \theta_{21}u, \bar{y} + \theta_{22}v, t)uv + \left. \frac{\partial^2 f_2}{\partial y^2}(\bar{x} + \theta_{21}u, \bar{y} + \theta_{22}v, t)v^2 \right\}; \\ 0 &\leq \{\theta_{ij}\} \leq 1, & (i, j) &= (1, 2). \end{aligned}$$

Начальные условия для этой системы

$$u|_{t=0} = v|_{t=0} = 0, \quad (1.6)$$

Система (1.5) является нелинейной благодаря наличию членов  $A_1(u, v, \theta, t)$  и  $A_2(u, v, \theta, t)$ .

Составим теперь вспомогательную систему дифференциальных уравнений, которая от (1.4) отличается тем, что вместо членов  $A_1(u, v, \theta, t)$  и  $A_2(u, v, \theta, t)$  стоят функции  $B_1(\theta, t)$  и  $B_2(\theta, t)$

$$\left. \begin{aligned} \frac{d\tilde{u}}{dt} &= g_{11}(\theta, t)\tilde{u} + g_{12}(\theta, t)\tilde{v} + B_1(\theta, t) - \varepsilon_1(\theta, t), \\ \frac{d\tilde{v}}{dt} &= g_{21}(\theta, t)\tilde{u} + g_{22}(\theta, t)\tilde{v} + B_2(\theta, t) - \varepsilon_2(\theta, t). \end{aligned} \right\} \quad (1.7)$$

Эта система будет линейной неоднородной с переменными коэффициентами. Представляется возможным так выбрать функции  $B_1(\theta, t)$  и  $B_2(\theta, t)$ , что решение вспомогательной системы (1.7) будет оценкой „сверху“ для модуля решения системы (1.5). В отдельных случаях можно построить оценки „сверху“ и „снизу“ для самих решений системы (1.5). Правила для выбора функций  $B_1(\theta, t)$  и  $B_2(\theta, t)$  вытекают из схемы решения системы (1.5) методом последовательных приближений.

§ 2. О решении системы (1.5) методом последовательных приближений. При сделанных в § 1 относительно функций

$$f_1(x, y, t), f_2(x, y, t), \varepsilon_1(\theta, t) \text{ и } \varepsilon_2(\theta, t)$$

предположениях система (1.5) в некоторой области переменных  $x, y, t$  имеет единственное решение, которое можно получить методом последовательных приближений по схеме

$$u_0 = 0; \quad v_0 = 0;$$

$$u_1 = - \int_0^t \varepsilon_1(\theta, \tau) d\tau, \quad v_1 = - \int_0^t \varepsilon_2(\theta, \tau) d\tau;$$

$$\left. \begin{aligned} u_n &= \int_0^t g_{11}(\theta, \tau) u_{n-1} d\tau + \int_0^t g_{12}(\theta, \tau) v_{n-1} d\tau + \\ &+ \int_0^t [A_1(u_{n-1}, v_{n-1}, \theta, \tau) - \varepsilon_1(\theta, \tau)] d\tau \\ v_n &= \int_0^t g_{21}(\theta, \tau) u_{n-1} d\tau + \int_0^t g_{22}(\theta, \tau) v_{n-1} d\tau + \\ &+ \int_0^t [A_2(u_{n-1}, v_{n-1}, \theta, \tau) - \varepsilon_2(\theta, \tau)] d\tau. \end{aligned} \right\} \quad (2.1)$$

Исследуем влияние членов  $\int_0^t A_1(u, v, \theta, \tau) d\tau$  и  $\int_0^t A_2(u, v, \theta, \tau) d\tau$  на решения  $u$  и  $v$  при различных сочетаниях знаков функций  $g_{ij}(\theta, t)$ ,  $\int_0^t \varepsilon_j(\theta, \tau) d\tau$  ( $i, j = 1, 2$ ) в области сходимости последовательных приближений.

$$\text{I.} \quad g_{ij}(\theta, t) \geq 0; \quad \int_0^t \varepsilon_j(\theta, \tau) d\tau \leq 0;$$

$$\int_0^t [A_j(u, v, \theta, \tau) - \varepsilon_j(\theta, \tau)] d\tau \geq 0; \quad (i, j = 1, 2). \quad (2.2)$$

При этом все последовательные приближения  $u_n, v_n$ , а следовательно, и предельные функции  $u$  и  $v$  будут неотрицательными.

$$\text{II.} \quad g_{ij}(\theta, t) \geq 0; \quad \int_0^t \varepsilon_j(\theta, \tau) d\tau \geq 0;$$

$$\int_0^t [A_j(u, v, \theta, \tau) - \varepsilon_j(\theta, \tau)] d\tau \leq 0; \quad (i, j = 1, 2). \quad (2.3)$$

Все последовательные приближения  $u_n, v_n$  и предельные функции  $u$  и  $v$  будут неположительными.

$$\text{III.} \quad g_{ij}(\theta, t) \begin{cases} \geq 0 & \text{при } i=j, \\ \leq 0 & \text{при } i \neq j, \end{cases} \quad (i, j = 1, 2).$$

$$\int_0^t \varepsilon_1(\theta, \tau) d\tau \leq 0; \quad \int_0^t [A_1(u, v, \theta, \tau) - \varepsilon_1(\theta, \tau)] d\tau \geq 0; \quad (2.4)$$

$$\int_0^t \varepsilon_2(\theta, \tau) d\tau \geq 0; \quad \int_0^t [A_2(u, v, \theta, \tau) - \varepsilon_2(\theta, \tau)] d\tau \leq 0.$$



Все последовательные приближения  $u_n$  и решение  $u$  будут неотрицательными; последовательные приближения  $v_n$  и решение  $v$  будут неположительными.

$$\text{IV. } g_{ij}(\theta, t) \begin{cases} \geq 0 & \text{при } i=j, \\ \leq 0 & \text{при } i \neq j, \end{cases} \quad (i, j=1, 2),$$

$$\int_0^t \varepsilon_1(\theta, \tau) d\tau \geq 0; \quad \int_0^t [A_1(u, v, \theta, \tau) - \varepsilon_1(\theta, \tau)] d\tau \leq 0; \quad (2.5)$$

$$\int_0^t \varepsilon_2(\theta, \tau) d\tau \leq 0; \quad \int_0^t [A_2(u, v, \theta, \tau) - \varepsilon_2(\theta, \tau)] d\tau \geq 0.$$

Все последовательные приближения  $u_n$  и решение  $u$  будут неположительными; последовательные приближения  $v_n$  и решение  $v$  будут неотрицательными.

§ 3. Построение вспомогательной системы. Если функции  $B_1(\theta, t)$  и  $B_2(\theta, t)$  в системе (1.7) будут непрерывными и ограниченными в области  $G$ , то система будет иметь в этой области единственное решение, которое можно получить методом последовательных приближений по той же схеме, что и для системы (1.5)

$$\left. \begin{aligned} \tilde{u}_n &= \int_0^t g_{11}(\theta, \tau) \tilde{u}_{n-1} d\tau + \int_0^t g_{12}(\theta, \tau) \tilde{v}_{n-1} d\tau + \\ &+ \int_0^t [B_1(\theta, \tau) - \varepsilon_1(\theta, \tau)] d\tau, \\ \tilde{v}_n &= \int_0^t g_{21}(\theta, \tau) \tilde{u}_{n-1} d\tau + \int_0^t g_{22}(\theta, \tau) \tilde{v}_{n-1} d\tau + \\ &+ \int_0^t [B_2(\theta, \tau) - \varepsilon_2(\theta, \tau)] d\tau, \end{aligned} \right\} \quad (3.1)$$

причем

$$\tilde{u}_0 = 0; \quad \tilde{v}_0 = 0;$$

$$\tilde{u}_1 = - \int_0^t \varepsilon_1(\theta, \tau) d\tau, \quad \tilde{v}_1 = - \int_0^t \varepsilon_2(\theta, \tau) d\tau.$$

Построение вспомогательной системы вида (1.7), заключающееся в замене членов  $A_1(u, v, \theta, t)$  и  $A_2(u, v, \theta, t)$  исходной системы (1.5) на функции  $B_1(\theta, t)$  и  $B_2(\theta, t)$  зависит от свойств системы (1.5). Рассмотрим несколько случаев.

1. Система (1.5) удовлетворяет условиям (2.2). Выберем функции  $B_1^{(1)}(\theta, t)$  и  $B_2^{(1)}(\theta, t)$  так, чтобы при всех  $u$  и  $v$  в области  $G$  выполнялись неравенства

$$B_i^{(1)}(\theta, t) \geq A_i(u, v, \theta, t) \quad (i=1, 2).$$

Тогда все последовательные приближения системы (1.7) будут не меньше соответствующих приближений системы (1.5)

$$\tilde{u}_n^{(1)} \geq u_n, \quad \tilde{v}_n^{(1)} \geq v_n.$$

В силу равномерной сходимости и для решений систем (1.5) и (1.7) будут справедливы неравенства:

$$\tilde{u}^{(1)} \geq u, \quad \tilde{v}^{(1)} \geq v.$$

Если выберем функции  $B_1^{(2)}(\theta, t)$  и  $B_2^{(2)}(\theta, t)$  так, чтобы выполнялись неравенства

$$B_i^{(2)}(\theta, t) \leq A_i(u, v, \theta, t) \quad (i=1, 2),$$

то получим

$$u^{(2)} \leq u, \quad \tilde{v}^{(2)} \leq v.$$

II. Система (1.5) удовлетворяет условиям (2.3). Выберем функции  $B_1^{(1)}(\theta, t)$  и  $B_2^{(1)}(\theta, t)$  так, чтобы при всех  $u$  и  $v$  в области  $G$  выполнялись неравенства

$$B_i^{(1)}(\theta, t) \geq A_i(u, v, \theta, t) \quad (i=1, 2).$$

При этом последовательные приближения  $\tilde{u}_n^{(1)}$ ,  $\tilde{v}_n^{(1)}$  и решения  $\tilde{u}^{(1)}$ ,  $\tilde{v}^{(1)}$  будут неположительными и будут выполняться неравенства

$$\begin{aligned} \tilde{u}_n^{(1)} &\leq u_n, & \tilde{v}_n^{(1)} &\leq v_n, \\ \tilde{u}^{(1)} &\leq u, & \tilde{v}^{(1)} &\leq v. \end{aligned}$$

Если выбрать функции  $B_1^{(2)}(\theta, t)$  и  $B_2^{(2)}(\theta, t)$  так, чтобы выполнялись неравенства

$$B_i^{(2)}(\theta, t) \leq A_i(u, v, \theta, t) \quad (i=1, 2),$$

то будут справедливы неравенства

$$\tilde{u}^{(2)} \geq u, \quad \tilde{v}^{(2)} \geq v.$$

III. Система (1.5) удовлетворяет условиям (2.4). Выберем функции  $B_1^{(k)}(\theta, t)$  и  $B_2^{(k)}(\theta, t)$  ( $k=1, 2$ ) так, чтобы в  $G$  выполнялись неравенства

$$\begin{aligned} B_1^{(1)}(\theta, t) &\leq A_1(u, v, \theta, t) \leq B_1^{(2)}(\theta, t), \\ B_2^{(1)}(\theta, t) &\geq A_2(u, v, \theta, t) \geq B_2^{(2)}(\theta, t). \end{aligned}$$

Тогда очевидно будут справедливы неравенства

$$\begin{aligned} \tilde{u}^{(1)} &\geq u \geq \tilde{u}^{(2)}, \\ \tilde{v}^{(1)} &\leq v \leq \tilde{v}^{(2)}. \end{aligned}$$

IV. Система (1.5) удовлетворяет условиям (2.5). Выберем функции  $B_1^{(k)}(\theta, t)$  и  $B_2^{(k)}(\theta, t)$  ( $k=1, 2$ ) так, чтобы в  $G$  выполнялись неравенства

$$\begin{aligned} B_1^{(1)}(\theta, t) &\leq A_1(u, v, \theta, t) \leq B_1^{(2)}(\theta, t), \\ B_2^{(1)}(\theta, t) &\geq A_2(u, v, \theta, t) \geq B_2^{(2)}(\theta, t). \end{aligned}$$

При этом будут справедливы неравенства

$$\begin{aligned} \tilde{u}^{(1)} &\leq u \leq \tilde{u}^{(2)}, \\ \tilde{v}^{(1)} &\geq v \geq \tilde{v}^{(2)}. \end{aligned}$$

V. Общий случай системы (1.5).

Построим вспомогательную систему вида

$$\left. \begin{aligned} \frac{d\tilde{u}}{dt} &= |g_{11}(\theta, t)| \tilde{u} + |g_{12}(\theta, t)| \tilde{v} + B_1(\theta, t), \\ \frac{d\tilde{v}}{dt} &= |g_{21}(\theta, t)| \tilde{u} + |g_{22}(\theta, t)| \tilde{v} + B_2(\theta, t), \end{aligned} \right\} \quad (3.2)$$

с начальными условиями

$$\tilde{u}|_{t=0} = \tilde{v}|_{t=0} = 0.$$

Здесь

$$B_i(\theta, t) \geq |A_i(u, v, \theta, t) - \varepsilon_i(\theta, t)| \quad (i=1, 2)$$

для любых  $u$  и  $v$  в области  $G$ . Для последовательных приближений системы (3.2)  $\tilde{u}_n$  и  $\tilde{v}_n$  будут справедливы неравенства

$$\tilde{u}_n \geq |u_n|, \quad \tilde{v}_n \geq |v_n|.$$

Вследствие равномерной сходимости последовательных приближений аналогичные неравенства будут иметь место и для решений систем (1.5) и (3.2)  $\tilde{u} \geq |u|$ ,  $\tilde{v} \geq |v|$ .

Т. о. в I, II, III и IV случаях мы можем получить оценки „сверху“ и „снизу“ для решения систем вида (1.7). В последнем случае мы получаем оценки „сверху“ для модулей решений систем вида (1.5).

§ 4. Выводы. На основании результатов § 3 можно рекомендовать следующий порядок вычисления оценок уравнений вида (1.5).

1. Задается отрезок времени  $(0, T)$ , в течение которого рассматривается движение.

2. Выбираются предположительные границы изменения величин  $u$  и  $v$ .

3. Определяются знаки величин

$$\int_0^1 (A_i - \varepsilon_i) d\tau \quad (i=1, 2)$$

в рассматриваемой области.

4. Выбирается способ составления вспомогательных уравнений.

5. Решаются составленные уравнения.

6. Если величины  $\tilde{u}$  и  $\tilde{v}$ , получаемые в п. 5, не превышают границ, выбранных в п. 2, то вычисления на этом можно закончить.

7. Если  $\tilde{u}$  и  $\tilde{v}$  в п. 5 выходят за границы п. 2, то последние следует расширить и повторить все вычисления.

8. Величины  $\tilde{u}$  и  $\tilde{v}$  п. 5 можно положить новыми границами вместо выбранных в п. 2 и повторить вычисления. При этом оценки, очевидно, будут более точными.

Следует отметить, что излагаемый в настоящей статье метод получения оценок может быть успешно применен в тех случаях, когда вторые частные производные функций  $f_1$  и  $f_2$  по  $x$  и  $y$  малы.

Уравнение движения контура нефтеносности в параметрической форме имеет вид (1.1) (для заданного движения) и (1.2) (для действительного движения). Поэтому все вышесказанное применимо непосредственно к оценке величин отклонения координат заданного и действительного контуров нефтеносности.

§ 5. Пример. Найдем оценки отклонения координат заданного и действительного контуров нефтеносности при концентричном стягивании кругового контура двумя батареями по 4 скважины, расположенных шахматно. Этот случай рассматривался ранее в [1], откуда мы воспользуемся исходными данными. Численные расчеты проведем для  $\theta=0$ , что соответствует движению по оси  $x$ .

Уравнения для определения  $u$  и  $v$  имеют вид

$$\frac{du}{dt} = \frac{1}{2\pi} \left\{ Q_1 \left[ \frac{-1}{(\bar{x} - \rho_1)^2} + \frac{-1}{(\bar{x} + \rho_1)^2} + \frac{2(\rho_1^2 - \bar{x}^2)}{(\bar{x}^2 + \rho_1^2)^2} \right] + \right.$$

$$\left. + 2Q_2 \left[ \frac{\frac{\rho_2^2}{2} - (\bar{x} - \frac{\rho_2}{\sqrt{2}})^2}{\left[ (\bar{x} - \frac{\rho_2}{\sqrt{2}})^2 + \frac{\rho_2^2}{2} \right]^2} + \frac{\frac{\rho_2^2}{2} - (\bar{x} + \frac{\rho_2}{\sqrt{2}})^2}{\left[ (\bar{x} + \frac{\rho_2}{\sqrt{2}})^2 + \frac{\rho_2^2}{2} \right]^2} \right] \right\} u +$$

$$+ \frac{1}{\pi} \left\{ Q_1 \left[ \frac{1}{(\bar{x}_1 - \rho_1)^3} + \frac{1}{(\bar{x}_1 + \rho_1)^3} - 2\bar{x}_1 \frac{3\rho_1^2 - \bar{x}_1^2}{(\bar{x}_1^2 + \rho_1^2)^3} \right] + \right.$$

$$\left. + 2Q_2 \left[ (\bar{x}_1 - \frac{\rho_2}{\sqrt{2}}) \frac{3\frac{\rho_2^2}{2} - (\bar{x}_1 - \frac{\rho_2}{\sqrt{2}})^2}{\left[ (\bar{x}_1 - \frac{\rho_2}{\sqrt{2}})^2 + \frac{\rho_2^2}{2} \right]^3} + \right.$$

$$\left. + (\bar{x}_1 + \frac{\rho_2}{\sqrt{2}}) \frac{3\frac{\rho_2^2}{2} - (\bar{x}_1 + \frac{\rho_2}{\sqrt{2}})^2}{\left[ (\bar{x}_1 + \frac{\rho_2}{\sqrt{2}})^2 + \frac{\rho_2^2}{2} \right]^3} \right] \right\} u^2 - \varepsilon_1(0, t), \quad (5.1)$$

$$\frac{dv}{dt} = 0,$$

где

$$\bar{x} = \sqrt{r_0^2 - \frac{t}{T} (r_0^2 - r_1^2)},$$

$r_0 = 600$  м — начальное положение КН,  
 $r_1 = 450$  м — заданное конечное положение КН,  
 $\rho_1 = 400$  м — радиус 1-й батареи скважин,  
 $\rho_2 = 300$  м — радиус 2-й батареи скважин,

$$\bar{x}_i = \bar{x} + \theta_{1i} u, \quad (0 \leq \theta_{1i} \leq 1),$$

$$\varepsilon_1(0, t) = \frac{1}{2} \frac{r_1^2 - r_0^2}{\bar{x}} \cdot \frac{1}{T} - \frac{Q_1}{2\pi} \left( \frac{1}{\bar{x} - \rho_1} + \frac{1}{\bar{x} + \rho_1} + \frac{2\bar{x}}{\bar{x}^2 + \rho_1^2} \right) -$$

$$- \frac{Q_2}{\pi} \left[ \frac{\bar{x} - \frac{\rho_2}{\sqrt{2}}}{\left( \bar{x} - \frac{\rho_2}{\sqrt{2}} \right)^2 + \frac{\rho_2^2}{2}} + \frac{\bar{x} + \frac{\rho_2}{\sqrt{2}}}{\left( \bar{x} + \frac{\rho_2}{\sqrt{2}} \right)^2 + \frac{\rho_2^2}{2}} \right],$$

$$Q_1 = -\pi \frac{(r_0^2 - r_1^2) \rho_1^4}{4(\rho_1^4 + \rho_2^4)} \cdot \frac{1}{T}; \quad Q_2 = -\pi \frac{(r_0^2 - r_1^2) \rho_2^4}{4(\rho_1^4 + \rho_2^4)} \cdot \frac{1}{T}.$$

Примерим порядок вычисления оценок, рекомендованный в § 4. 1), 2). Предположим, что за время  $(0, t)$   $0 \geq u \geq -25$  м, ( $v=0$ ).

3) Определим знак интеграла  $\int_0^T [A - \varepsilon_1(0, t)] dt$ , где  $A$  — коэффициент

при  $u^2$  в уравнении (5.1). Легко проверить, что при всех  $u$

$$\int_0^T [A - \varepsilon_1(0, t)] dt < 0.$$

4) Составим вспомогательные уравнения согласно 2. случаю § 3.

$$\frac{d\bar{u}}{dt} = \frac{1}{2\pi} \left\{ Q_1 \left[ \frac{2(\rho_1^2 - \bar{x}^2)}{(\bar{x}^2 + \rho_1^2)^2} - \frac{1}{(\bar{x} - \rho_1)^2} - \frac{1}{(\bar{x} + \rho_1)^2} \right] + \right. \\ \left. + 2Q_2 \left[ \frac{\frac{\rho_2^2}{2} - \left(\bar{x} - \frac{\rho_2}{\sqrt{2}}\right)^2}{\left[\left(\bar{x} - \frac{\rho_2}{\sqrt{2}}\right)^2 + \frac{\rho_2^2}{2}\right]^2} + \frac{\frac{\rho_2^2}{2} - \left(\bar{x} + \frac{\rho_2}{\sqrt{2}}\right)^2}{\left[\left(\bar{x} + \frac{\rho_2}{\sqrt{2}}\right)^2 + \frac{\rho_2^2}{2}\right]^2} \right] \right\} \bar{u} - \varepsilon_1(0, t), \quad (5.2)$$

$$\frac{d\bar{u}}{dt} = \frac{1}{2\pi} \left\{ Q_1 \left[ \frac{2(\rho_1^2 - \bar{x}^2)}{(\bar{x}^2 + \rho_1^2)^2} - \frac{1}{(\bar{x} - \rho_1)^2} - \frac{1}{(\bar{x} + \rho_1)^2} \right] + \right. \\ \left. + 2Q_2 \left[ \frac{\frac{\rho_2^2}{2} - \left(\bar{x} - \frac{\rho_2}{\sqrt{2}}\right)^2}{\left[\left(\bar{x} - \frac{\rho_2}{\sqrt{2}}\right)^2 + \frac{\rho_2^2}{2}\right]^2} + \frac{\frac{\rho_2^2}{2} - \left(\bar{x} + \frac{\rho_2}{\sqrt{2}}\right)^2}{\left[\left(\bar{x} + \frac{\rho_2}{\sqrt{2}}\right)^2 + \frac{\rho_2^2}{2}\right]^2} \right] \right\} \bar{u} + \\ + B - \varepsilon_1(0, t), \quad (5.3)$$

где

$$B = \frac{1}{\pi} \left\{ Q_1 \left[ \frac{1}{(r_1 - \rho_1)^3} + \frac{1}{(r_1 + \rho_1)^3} - 2r_0 \frac{3\rho_1^2 - r_0^2}{(r_1^2 + \rho_1^2)^3} \right] + \right. \\ \left. + 2Q_2 \left[ \left(r_0 - \frac{\rho_2}{\sqrt{2}}\right) \frac{\frac{3}{2}\rho_2^2 - \left(r_1 - \frac{\rho_2}{\sqrt{2}}\right)^2}{\left[\left(r_1 - \frac{\rho_2}{\sqrt{2}}\right)^2 + \frac{\rho_2^2}{2}\right]^3} + \right. \right. \\ \left. \left. + \left(r_1 + \frac{\rho_2}{\sqrt{2}}\right) \frac{\frac{3}{2}\rho_2^2 - \left(r_1 + \frac{\rho_2}{\sqrt{2}}\right)^2}{\left[\left(r_0 + \frac{\rho_2}{\sqrt{2}}\right)^2 + \frac{\rho_2^2}{2}\right]^3} \right] \right\} 25^2.$$

5) Решения уравнений (5.2) и (5.3) при нулевых начальных условиях имеют вид

$$\bar{u}(t) = -e^{\int_0^t g d\tau} \cdot \int_0^t \varepsilon_1(0, \tau) e^{-\int_0^\tau g d\tau} d\tau, \quad (5.4)$$

$$\underline{u}(t) = -e^{\int_0^t g d\tau} \cdot \int_0^t [\varepsilon_1(0, \tau) - B] e^{-\int_0^\tau g d\tau} d\tau, \quad (5.5)$$

где  $g$  — коэффициент при  $u$  и  $\bar{u}$  в уравнениях (5.2) и (5.3). Вычисления по формулам (5.4) и (5.5) дают  $\bar{u}(T) = -14,28$  м,  $\underline{u}(T) = -14,64$  м,  $u = -14,4$  м.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Цыбульский Г. П. Аналитический метод оценки точности решения задач управления движением контура нефтеносности. Изв. Казанского филиала АН СССР, сер. физ.-мат. и техн. наук, вып. 11, 1957.

Поступила  
20 марта 1958 г.

В. Ю. КИМ

### ОЦЕНКА ПОГРЕШНОСТИ РЕШЕНИЙ ЗАДАЧ УПРАВЛЕНИЯ ДВИЖЕНИЕМ КОНТУРА НЕФТЕНОСНОСТИ

Дается оценка точности решений некоторых задач управления движением контура нефтеносности, решения которых получены в замкнутой форме. Оценка производится по главным и нейтральным линиям тока.

1. В статье [1] дана общая постановка задачи управления движением контура нефтеносности (КН) и приближенный метод ее решения. Решения задач управления движением КН для прямолинейных цепочек и круговых батарей скважин приведены в работах [1] и [2]. В этой заметке при некоторых упрощающих предположениях относительно первоначального КН и пласта дается оценка погрешности полученных решений. При этом мы пользуемся методом интегрирования уравнения движения по главным и нейтральным линиям тока, где следует ожидать наибольших искажений.

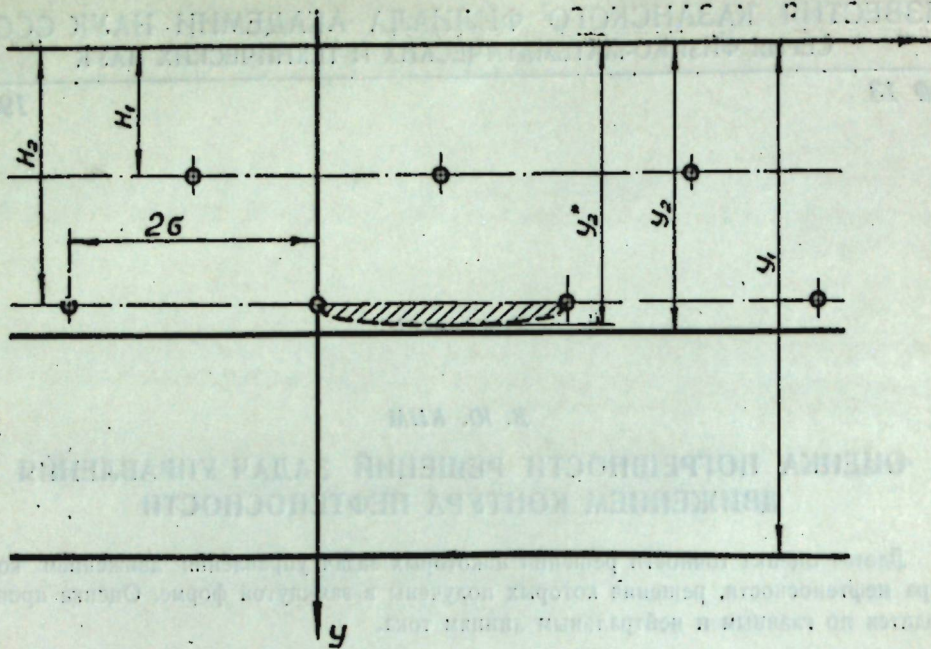
Пусть полосообразная залежь с одной непроницаемой стенкой (сброс) эксплуатируется  $n$ -эксплуатационными и  $l$ -нагнетательными цепочками скважин, размещенными параллельно этой стенке. Для системы „разноцветных“ жидкостей давление легко получается методом суперпозиции (3).

$$p = \frac{\mu}{4\pi k} \sum_{i=1}^{n+l} Q_i \left\{ \ln \left[ \operatorname{ch} \frac{\pi(y-H_i)}{\sigma} - \cos \frac{\pi(x-x_i)}{\sigma} \right] + \right. \\ \left. + \ln \left[ \operatorname{ch} \frac{\pi(y+H_i)}{\sigma} - \cos \frac{\pi(x-x_i)}{\sigma} \right] \right\} + C, \quad (1)$$

где  $c$  — некоторая постоянная;  $k$  — коэффициент проницаемости;  $\mu$  — динамическая вязкость;  $2\sigma$  — расстояние между скважинами в цепочках, одинаковое для всех цепочек;  $x_i$  — расстояние ближайшей к оси  $oy$  скважины в  $i$ -й цепочке;  $H_i$  — расстояние от оси  $ox$ , совпадающей с линией сброса, до  $i$ -й цепочки. Мощность пласта принята равной единице. Рассмотрим случай двух эксплуатационных цепочек с дебитами  $Q_1$  и  $Q_2$ . Из решения задачи управления с прямолинейным законом стягивания  $y - y_1 = \frac{t}{T}(y_1 - y_2)$  для указанного случая следует (фиг. 1):

а) скважины в цепочках должны быть размещены в шахматном порядке;

б) между дебитами существует зависимость  $Q_1 \operatorname{ch} \frac{\pi H_1}{\sigma} = Q_2 \operatorname{ch} \frac{\pi H_2}{\sigma}$ .



Фиг. 1.

Уравнение движения по главным линиям тока имеет вид

$$m \frac{dy}{dt} = -\frac{k}{\mu} \frac{dp}{dy}, \quad (2)$$

где  $m$  — пористость, а  $\frac{dp}{dy}$  определяется из формулы (1). Учитывая шахматное размещение скважин и интегрируя уравнение (2) по  $t$  от 0 до  $T_0$  и по  $y$  от  $y_1$  до  $H_2$ , находим время начала обводнения скважин второй цепочки

$$T_0 = -\frac{2c}{Q_1 + Q_2} \left[ \frac{1-N+L}{2(1+K)} \ln \frac{\operatorname{ch} \frac{\pi y_1}{\sigma} - 1}{\operatorname{ch} \frac{\pi H_2}{\sigma} - 1} - \frac{1-N-L}{2(1-K)} \ln \frac{\operatorname{ch} \frac{\pi y_1}{\sigma} + 1}{\operatorname{ch} \frac{\pi H_2}{\sigma} + 1} + \frac{N+KL-L^2}{1-K^2} \ln \frac{\operatorname{ch} \frac{\pi y_1}{\sigma} + K}{\operatorname{ch} \frac{\pi H_2}{\sigma} + K} \right], \quad (3)$$

где

$$L = \operatorname{ch} \frac{\pi H_1}{\sigma} - \operatorname{ch} \frac{\pi H_2}{\sigma}, \quad N = \operatorname{ch} \frac{\pi H_1}{\sigma} \operatorname{ch} \frac{\pi H_2}{\sigma},$$

$$K = \frac{Q_2 \operatorname{ch} \frac{\pi H_1}{\sigma} - Q_1 \operatorname{ch} \frac{\pi H_2}{\sigma}}{Q_1 + Q_2}, \quad c = \sigma m.$$

Аналогично определяется время перемещения частицы жидкости из положения  $y_1$  до некоторого  $y_2^*$  по главной линии относительно скважин первой цепочки

$$T_0 = -\frac{2c}{Q_1 + Q_2} \left[ \frac{1-N-L}{2(1-K)} \ln \frac{\operatorname{ch} \frac{\pi y_1}{\sigma} - 1}{\operatorname{ch} \frac{\pi y_2^*}{\sigma} - 1} + \frac{1-N+L}{2(1+K)} \ln \frac{\operatorname{ch} \frac{\pi y_1}{\sigma} + 1}{\operatorname{ch} \frac{\pi y_2^*}{\sigma} + 1} + \frac{N+KL-L^2}{1-K^2} \ln \frac{\operatorname{ch} \frac{\pi y_1}{\sigma} - K}{\operatorname{ch} \frac{\pi y_2^*}{\sigma} - K} \right]. \quad (4)$$

Поставим задачей определить, какое положение займет точка контура, движущаяся по главной линии тока относительно скважин первой цепочки в момент обводнения скважин второй цепочки. Тогда, используя условия  $T_0 = T_0$  и б), получаем уравнение для искомой ординаты  $y_2^*$

$$\begin{aligned} & \frac{1-N-L}{1-L} \ln \frac{(\operatorname{ch} \frac{\pi y_1}{\sigma} - 1)(\operatorname{ch} \frac{\pi H_2}{\sigma} + 1)}{(\operatorname{ch} \frac{\pi y_1}{\sigma} + 1)(\operatorname{ch} \frac{\pi y_2^*}{\sigma} - 1)} + \\ & + \frac{1-N+L}{1+L} \ln \frac{(\operatorname{ch} \frac{\pi y_1}{\sigma} + 1)(\operatorname{ch} \frac{\pi H_2}{\sigma} - 1)}{(\operatorname{ch} \frac{\pi y_1}{\sigma} - 1)(\operatorname{ch} \frac{\pi y_2^*}{\sigma} + 1)} = \\ & = \frac{2N}{1-L} \ln \frac{(\operatorname{ch} \frac{\pi y_1}{\sigma} + L)(\operatorname{ch} \frac{\pi y_2^*}{\sigma} - L)}{(\operatorname{ch} \frac{\pi y_1}{\sigma} - L)(\operatorname{ch} \frac{\pi H_2}{\sigma} + L)}. \end{aligned} \quad (5)$$

В уравнении (5)  $y_1$  есть расстояние от оси абсцисс до контура нефтеносности в начальный момент времени. Устремим  $y_1$  к бесконечности. Этому будет соответствовать наиболее сильно выраженный язык обводнения, то есть наибольшие отклонения действительного КН от заданного прямолинейного закона стягивания.

Уравнение (5) переходит в следующее

$$\frac{1-N-NL-L^2}{2N} \ln \frac{\operatorname{ch} \frac{\pi H_2}{\sigma} + 1}{\operatorname{ch} \frac{\pi y_2^*}{\sigma} - 1} + \frac{1-N+NL-L^2}{2N} \ln \frac{\operatorname{ch} \frac{\pi H_2}{\sigma} - 1}{\operatorname{ch} \frac{\pi y_2^*}{\sigma} + 1} =$$

$$= \ln \frac{\operatorname{ch} \frac{\pi y_2^*}{\sigma} - L}{\operatorname{ch} \frac{\pi H_2}{\sigma} + L} \quad (6)$$

Корень трансцендентного уравнения (6), найденный графическим методом при  $H_2 = 2H_1$ ,  $H_1 = \sigma$ , равен  $\operatorname{ch} \frac{\pi y_2^*}{\sigma} \approx 293$ . С другой стороны,  $\operatorname{ch} \frac{\pi H_2}{\sigma} \approx 267$ . Отсюда  $y_2^* \approx 1,015H_2$ , то есть точка, движущаяся по главной линии относительно первой цепочки, несколько отстает. Нетрудно показать, что относительная погрешность  $\frac{y_2^*}{H_2}$  для точек контура между главными линиями будет меньше 1,5%. Из произведенных подсчетов следует такой вывод: если между  $Q_1$  и  $Q_2$  существует зависимость, полученная из решения задачи управления движением КН, то точки первоначально прямолинейного КН практически лежат на прямой линии, вплоть до момента обводнения второй цепочки.

2. Переходим ко второй задаче. Пусть однородный горизонтальный пласт единичной мощности, ограниченный круговым контуром питания радиуса  $R_k$ , разрабатывается батареями эксплуатационных и нагнетательных скважин. Функция давления имеет вид [4]:

$$p = p_n + \frac{\mu}{4\pi K} \sum_{i=1}^{n+l} Q_i \ln \frac{\frac{1}{2} \left[ \left( \frac{r}{\rho_i} \right)^{m_i} + \left( \frac{\rho_i}{r} \right)^{m_i} \right] - \cos m_i (\varphi - \varphi_i)}{\frac{1}{2} \left[ \left( \frac{r \rho_i}{R_k^2} \right)^{m_i} + \left( \frac{R_k}{r \rho_i} \right)^{m_i} \right] - \cos m_i (\varphi - \varphi_i)} \quad (7)$$

где  $r, \varphi$  — полярные координаты любой точки пласта,  $\rho_i, \varphi_i$  — полярные координаты центра ближайшей к оси  $ox$  скважины  $i$ -й батареи,  $m_i$  — число скважин в  $i$ -й батарее;  $n, l$  — соответственно число эксплуатационных и нагнетательных батарей. Возьмем две эксплуатационные батареи по  $n$  скважины в каждой в неограниченном пласте.

Для концентрического закона стягивания КН  $r^2 = R_n^2 - \frac{t}{T} (R_n^2 - R_0^2)$  из решения задачи управления для двух эксплуатационных батарей следует:

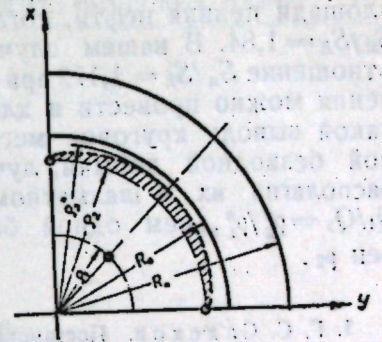
- а) размещение скважин остается шахматно-круговым,
- б) между дебитами  $Q_1$  и  $Q_2$  должна существовать зависимость  $Q_1 \rho_1^n = Q_2 \rho_2^n$ .

Тогда, учитывая условия а) и б) и производя такие же выкладки как и в п. 1, получаем уравнения для определения неизвестного расстояния  $\rho_2^*$  (фиг. 2)

$$\rho_2 + 2\rho_1^n \rho_2^n \int_{\rho_1}^{R_n} \frac{r dr}{r^{2n} - (\rho_2^n - \rho_1^n) r^n} = \rho_2^{*2} + 2\rho_1^n \rho_2^{*n} \int_{\rho_2^*}^{R_n} \frac{r dr}{r^{2n} + (\rho_2^n - \rho_1^n) r^n} \quad (8)$$

Здесь  $\rho_1$  и  $\rho_2$  — радиусы первой и второй батарей,  $R_n$  — радиус первоначального КН.

Приведем расчет для  $n = 4, \rho_2 = 2\rho_1, R_n = 5\rho_2$ . Корень уравнения (8) приблизительно равен  $\rho_2^* = 1,073\rho_2$ , т. е. относительная погрешность  $\frac{\rho_2^*}{\rho_2}$  не превышает 7,3%. Отсюда следует такой вывод: точки первоначально кругового КН в каждый последовательный момент времени практически лежат на окружности, вплоть до момента обводнения скважин второй батареи. Площадь целика нефти, заключенной контуром нефтеносности в момент, соответствующий обводнению скважин второй батареи, равна:



Фиг. 2.

$$S_n = \pi R_n^2 - \frac{S_0}{m} = \pi \rho_2^n + 2\rho_1^n \rho_2^n \int_{\rho_1}^{R_n} \frac{r dr}{r^n [r^n - (\rho_2^n - \rho_1^n)]} \quad (9)$$

где  $S_0 = T_0 n (Q_1 + Q_2)$  — суммарный безводный дебит всех  $2n$  скважин. Площадь круга с радиусом  $\rho_2$  обозначим через  $S_E = \pi \rho_2^2$ . Тогда из формулы (9) относительная величина площади целика нефти определяется формулой:

$$\frac{S_n}{S_E} = 1 + 2\rho_1^n \rho_2^{n-2} \int_{\rho_1}^{R_n} \frac{r dr}{r^n [r^n - (\rho_2^n - \rho_1^n)]} \quad (10)$$

На основании формулы (10) составлена таблица 1 для разных значений  $n, \rho_1/\rho_2, R_n$ .

Таблица 1

Относительная величина площади целика нефти в момент обводнения второй батареи

число скв. в кажд. бак.	$\rho_2: R_n = 0,4$				$\rho_2: R_n = 0,1$				
	1	2	4	$\infty$	1	2	4	$\infty$	
$S_n/S_E$	1,973	1,172	1,006	1	2,805	1,184	1,006	1	$\rho_1/\rho_2 = 0,25$
	2,387	1,458	1,068	1	3,944	1,535	1,075	1	$\rho_1/\rho_2 = 0,50$
	2,647	1,646	1,190	1	4,846	1,734	1,194	1	$\rho_1/\rho_2 = 0,75$

Из этой таблицы видно, что относительная величина площади целика нефти в основном зависит от числа скважин в батареях и отношения радиусов  $\rho_1$  и  $\rho_2$ . При значительном числе скважин в батареях влиянием отношения  $\rho_2/R_n$  на величину площади целика нефти  $S_n$  можно пренебречь.

Сопоставление таблицы 1 с подсчетами, произведенными ранее В. Н. Щелкачевым [4], показывает эффективность метода управления

движения КН. Так, например, при  $n=4$  относительная величина площади целика нефти, согласно подсчетам В. И. Щелкачева равна  $S_n/S_E=1,84$ . В нашем случае (по 2 скважины в каждой батарее) отношение  $S_n/S_E=1,172$  при  $\rho_1/\rho_2=0,25$ ,  $\rho_2/R_n=0,4$ . Аналогичные сравнения можно провести и для любых  $n$ ,  $\rho_1/\rho_2$ ,  $\rho_2/R_n$ . Отсюда следует такой вывод: круговое месторождение, с точки зрения максимальной безводной добычи, лучше эксплуатировать двумя батареями, располагая их в шахматном порядке и осуществляя соотношения  $Q_1/Q_2=\rho_2^2/\rho_1^2$ , чем одной батареей из  $2n$  скважин с радиусом батареи  $\rho_2$ .

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Г. С. Салехов. Постановка и метод решения гидродинамических задач управления движением контура нефтеносности. Изв. Каз. филиала АН СССР, сер. физ.-мат. и техн. наук, выпуск 6, 1955.
2. В. Ю. Ким. Некоторые задачи управления движением контура нефтеносности с учетом влияния сброса. Диссертация, Институт механики АН СССР, 1955.
3. И. А. Чарный. Подземная гидромеханика, Гостехиздат, 1948.
4. В. Н. Щелкачев, Б. Б. Лапук. Подземная гидравлика. Гостехиздат, 1949.

Поступила  
20 марта 1958 г.

Г. С. САЛЕХОВ

### ОБ УСТОЙЧИВЫХ ФОРМАХ ДВИЖЕНИЯ КОНТУРА НЕФТЕНОСНОСТИ С УЧЕТОМ ПОГРЕШНОСТЕЙ В ИСХОДНЫХ ДАННЫХ

В настоящей работе, наряду с некоторым уточнением постановки задачи управления движением контура нефтеносности (КН) в соответствии с требованиями нефтепромысловой практики, указывается метод решения задачи управления с учетом погрешностей в знании самого КН, а также реально возможных вариаций дебитов и координат скважин на конкретном месторождении. Показывается, что новое понятие об устойчивых формах движения КН с учетом допустимых погрешностей в скоростях фильтрации, установленное в работе, имеет существенное значение при решении как задач прослеживания, так и задач управления движением КН.

#### 1. Введение

Известно, что на конкретных месторождениях КН (контур нефтеносности) не представляет собой четко выраженную геометрическую кривую или поверхность. В картах разработки КН указывается лишь в форме грубо начерченной кривой со значительной допускаемой погрешностью. Особенно в начальной стадии разработки месторождения полоса погрешности может иметь сравнительно широкие размеры. Значительные погрешности имеются также в знании различных физических параметров пласта и жидкостей (пористость, проницаемость, вязкости воды и нефти и др.), в определении изменения мощности пласта, в измерении дебитов скважин и т. д. Все эти факторы настоятельно требуют особенно при количественной оценке полученных решений на основании гидродинамических расчетов, чтобы этими решениями пользовались с учетом практически допускаемых погрешностей в исходных данных. При решении каких-либо задач разработки нефтяных месторождений, основанных на математических расчетах, следует учитывать степень влияния на полученные решения особенно тех данных, которые известны со значительными погрешностями. Для правильного решения многих практических задач это обстоятельство может иметь весьма существенное значение.

Можно было бы привести много примеров в области подземной гидромеханики нефтяных месторождений, когда для получения практически разумных выводов точность выбираемых математических методов расчета должна быть согласована с величинами допускаемых погрешностей в исходных данных.

Как показывают, например, решения ряда конкретных задач управления движением КН, применение даже приближенных методов минимальной погрешности при достаточно большом числе скважин иногда может привести к настолько точному решению

задачи, что оно может превышать точность знания самого КН, координат и дебитов скважин\*. Поэтому при этих расчетах, хотя и получаются правильные качественные характеристики о влиянии тех или других факторов на управление движением КН, однако, с точки зрения количественной оценки все это следует критически проанализировать, принимая во внимание размеры погрешностей в исходных данных с учетом возможных вариаций дебитов и координат скважины при разработке конкретных месторождений.

В настоящей работе наряду с некоторым практическим уточнением постановки задачи управления движением КН, дается и метод решения некоторых задач управления движением КН с учетом допустимых погрешностей в знании самого КН, а также реально возможных вариаций дебитов и координат скважин на конкретном месторождении. При этом показывается, что понятие об устойчивых формах движения КН с учетом допустимых погрешностей в скоростях фильтрации, установленное в работе, имеет существенное значение при решении как задач прослеживания, так и задач управления движением КН.

## 2. Постановка задачи управления движением КН с учетом погрешностей в исходных данных

В ранее опубликованных работах [1] задача управления движением КН формулировалась следующим образом:

*Определить такие оптимальные способы размещения и эксплуатации скважин в данном месторождении, которые в пределах практически возможной их вариации наилучшим образом обеспечивали бы желаемый закон стягивания КН.*

При такой формулировке задачи требование наилучшего обеспечения желаемого закона стягивания КН, вообще говоря, зависит от выбранного метода решения самой задачи, и в этом смысле постановка задачи нуждалась в практическом ее уточнении. Очевидно, для нефтепромысловых расчетов достаточно совпадение желаемого закона стягивания КН с действительным движением КН в пределах практически допускаемых погрешностей в исходных данных и эти погрешности в задачах подземной гидромеханики нефтяных месторождений иногда могут иметь значительные размеры. С учетом этих погрешностей должна быть поставлена и решена любая задача разработки нефтяных месторождений. В соответствии с этим постановка задачи управления движением КН может быть уточнена следующим образом:

*Определить такие оптимальные способы размещения и работы эксплуатационных и нагнетательных скважин в данном месторождении, которые в пределах практически возможной вариации координат и дебитов обеспечивали бы желаемый закон стягивания КН, совпадающий с фактическим движением КН с учетом допустимых погрешностей в исходных данных.*

При такой постановке задачи следует отметить то существенное обстоятельство, что точность и характер решения задачи не будут зависеть от выбранного метода решения, а целиком и полностью определяются величиной, характером и способом задания допускаемых погрешностей, фактически неизбежных в знании самих исходных данных, получаемых из нефтепромысловых наблюдений и измерений.

\* См. Известия Казанского филиала АН СССР (серия физ.-мат. и техн. наук), вып. 5, 6.

Как показывают решения ряда конкретных задач управления движением КН, в вышеуказанной постановке получаются вполне приемлемые с точки зрения нефтепромысловой практики пределы возможных изменений дебитов и расстановки скважин на месторождении\*.

Что касается желаемого закона стягивания КН, то вполне естественно, что он может быть выбран лишь в некотором классе допустимого семейства движений КН, который определяется семейством параметрических кривых, получающихся при всевозможных реально допустимых вариациях дебитов и координат скважин, и совпадающих с действительным движением КН с точностью до допускаемых начальных погрешностей.

Как будет показано в дальнейшем, выбор желаемого закона стягивания КН связан с понятием об устойчивых формах движения КН с учетом допускаемых погрешностей в исходных данных.

## 3. Об $\varepsilon$ -устойчивых формах движения контура нефтеносности (КН)

Пусть радиальная составляющая скорости движения КН для выбранного полюса полярной системы координат в некотором фазовом пространстве  $G \{0 \leq \theta \leq 2\pi, 0 \leq t \leq T\}$  определяется уравнением

$$m \frac{dr}{dt} = V_d(0, r, t; q_1, q_2, \dots, q_N; \varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_N; \rho_1, \rho_2, \dots, \rho_N), \quad (3.1)$$

где  $m$  — пористость,  $q_i$  — объемные дебиты,  $(\varphi_i, \rho_i)$  — полярные координаты скважин,  $N$  — число скважин,  $V_d$  — является радиальной составляющей скорости движения КН для выбранного полюса полярной системы координат.

Начальное положение КН —  $\Gamma_0$  считается известным, т. е. задано

$$r|_{t=0} = r_0(\theta). \quad (3.2)$$

Для определенности рассуждений будем предполагать контур  $\Gamma_0$  замкнутым\*\*, звездным и полюс полярной системы координат выбранным внутри  $\Gamma_0$  в возможно наиболее удаленной точке от всех точек контура  $\Gamma_0$ .

Движение КН, определенное уравнением (3.1) для некоторых фиксированных значений параметров  $q_i, \varphi_i, \rho_i$  в пространстве  $G$ , в дальнейшем будем называть *действительным движением КН*.

Зависимость  $V_d$  от своих аргументов, вообще говоря, может быть и функциональной. Это имеет место, например, при изучении движения КН в двухжидкостной системе и в неоднородном пласте.

Задачу Коши для уравнения (3.1), с начальным условием (3.2) в фазовом пространстве  $G$  для всех практически возможных вариаций параметров  $q_i, \varphi_i, \rho_i$ , считаем поставленной корректно, то есть уравнение (3.1) — имеющим единственное решение, непрерывно зависящее от начальной функции (3.2) и параметров

$$q_i, \varphi_i, \rho_i \quad (i = 1, 2, \dots, N).$$

Пусть наряду с уравнением (3.1) задано еще некоторое (допустимое) движение КН, определенное уравнением

$$m \frac{d\bar{r}}{dt} = V_s(0, \bar{r}, t) \quad (3.3)$$

в фазовом пространстве  $G' \subset G$ , удовлетворяющее тому же начальному условию (3.2).

\* По этим вопросам в печати готовится статья.

\*\* Далее рассматриваются также случаи незамкнутых контуров.



Радиальное движение КН, определенное уравнением (3.3), будем называть *заданным движением КН*. Заданное движение КН (3.3) по отношению к действительному движению КН (3.1), удовлетворяющему тому же начальному условию (3.2), в некотором фазовом пространстве  $G' \{0 \leq \theta_1 \leq \theta \leq \theta_2 \leq 2\pi, 0 \leq t \leq t_1 \leq T\} \subset G$  будем называть  $\epsilon$ -устойчивым, если для заранее выбранной положительной величины  $\epsilon$  найдется такая  $\delta(\epsilon)$ , независимая от  $\theta, r, t$  что при выполнении условия

$$|V_A(\bar{r}) - V_B(\bar{r})| \leq \delta(\epsilon) \quad (3.4)$$

в пространстве  $G'$  будет иметь место

$$|r - \bar{r}| \leq \epsilon^* \quad (3.5)$$

В дальнейшем практически выбор величины  $\epsilon$  можно осуществить в соответствии с выбором полюса полярной системы координат, учитывая точность знания самого КН в  $G'$  и возможную величину допускаемой ошибки в решении самой задачи по имеющимся картам разработки нефтяных месторождений.

В отношении вышеприведенного определения сделаем некоторые замечания.

Выражение  $|V_A(\bar{r}) - V_B(\bar{r})| = \Delta$  дает абсолютную величину отклонения действительной и заданной радиальной скорости на данном КН, определенном уравнением (3.3). Условие (3.5) выражает максимально возможное отклонение заданного КН  $\bar{r} = \bar{r}(\theta, t) \in \bar{\Gamma}$  от действительного КН  $r = r(\theta, t)$  по направлению лучей, исходящих из выбранного полюса полярной системы координат. При формулировке вышеприведенного определения  $\epsilon$ -устойчивости движения КН мы учитывали следующие положения:

1. Легко доказать, что для совпадения контуров  $\Gamma$  и  $\bar{\Gamma}$  в  $G' \subset G$  необходимо и достаточно, чтобы для каждой выбранной системы параметров  $q_i, \rho_i$  и  $\varphi_i$  всюду в  $G'$  имело место  $\Delta \equiv 0$ .

В самом деле, из уравнений (3.1) и (3.3) в  $G'$  при одном и том же начальном условии (3.2) имеем

$$r - \bar{r} = \frac{1}{m} \int_0^t [V_A(r) - V_B(\bar{r})] dt; \quad (3.6)$$

$$0 \leq t \leq t_1 \leq T$$

отсюда, если всюду в фазовом пространстве  $G'$  будет  $r = \bar{r}$ , то

$$\int_0^t [V_A(r) - V_B(\bar{r})] dt = 0$$

или, что то же самое,  $\Delta = |V_A(\bar{r}) - V_B(\bar{r})| \equiv 0$  (т. к.  $r = \bar{r}$  всюду в пространстве  $G'$ ). Теперь, наоборот, если в  $G'$  имеет место

$$\Delta = |V_A(\bar{r}) - V_B(\bar{r})| \equiv 0,$$

то вследствие единственности решения задачи Коши для уравнений (3.1) и (3.3) при одном и том же начальном условии (3.2) будем иметь  $r \equiv \bar{r}$ , что и требовалось доказать.

2. В силу корректной постановки задачи Коши, чем меньше  $\delta$ , тем меньше должна быть величина  $\epsilon$ , то есть чем меньше будет отклонение скоростей  $\Delta = |V_A(\bar{r}) - V_B(\bar{r})|$  на заданном КН, тем меньше будет отклонение заданного движения от действительного движения КН в данном фазовом пространстве  $G'$ .

\* Принципиально другая постановка и исследование задач об устойчивости перемещения границы раздела жидкостей ранее была рассмотрена в работе В. П. Пилатовского (см. Украинский математический журнал, т. X, № 2, 1958).

Несмотря на указанное, следует отметить, что малость величины  $\epsilon$  означает лишь достаточное условие близости КН в данном фазовом пространстве  $G'$ . Дело в том, что контуры  $\Gamma$  и  $\bar{\Gamma}$  могут быть практически близки в  $G'$  даже при значительно большей величине  $\epsilon$ . Однако, учитывая, что точное математическое определение необходимых и достаточных условий близости двух контуров  $\Gamma$  и  $\bar{\Gamma}$  представляет значительные математические осложнения, связанные с трудностью их проверки и, наконец, учитывая, что проверка условий (3.4) и (3.5) (как будет показано в дальнейшем) практически является удобной, вышеприведенное определение  $\epsilon$ -устойчивости движения КН можно принять за основу практического изучения близости движения КН  $\Gamma$  и  $\bar{\Gamma}$  в заданном фазовом пространстве  $G'$ .

Отметим также, что понятие  $\epsilon$ -устойчивости движения КН, видимо, можно было бы обобщить на случай не звездных КН, когда уравнения движения задаются в параметрической форме.

С вышеуказанной точки зрения приближенное решение задач прослеживания движения КН, при фиксированных значениях параметров  $q_i, \rho_i, \varphi_i$  в некотором фазовом пространстве  $G' \subset G$  должно быть  $\epsilon$ -устойчивым по отношению к точному решению их. При этом величина  $\epsilon$  будет определять величину допускаемой погрешности в приближенном решении. Что же касается решения задач управления движением КН, то при этом надо иметь ввиду следующее:

1) Уравнением (3.1) определяется семейство движений КН, зависящее от параметров  $q_i, \rho_i, \varphi_i$  при начальном условии (3.2). Заданное уравнение движения КН (3.3) с тем же начальным условием (3.2) может быть принято независимо от параметров  $q_i, \rho_i, \varphi_i$  или так же в зависимости от параметров  $q_i, \rho_i, \varphi_i$  как некоторое допустимое параметрическое семейство движений КН. В том или другом случае величина  $|V_A(\bar{r}) - V_B(\bar{r})| = \Delta$  будет, вообще говоря, некоторой функцией параметров  $q_i, \rho_i, \varphi_i$ .

На основании сказанного, решение задачи управления движением КН в некотором фазовом пространстве  $G' \subset G$  сводится к следующему:

1) Необходимо выбрать желательный закон движения КН (3.3), который должен быть  $\epsilon$ -устойчивым по отношению к действительному движению КН (3.1) в фазовом пространстве  $G' \subset G$  по крайней мере в некоторый начальный момент времени  $0 \leq t \leq t_1$ .

2) Выбором значений параметров  $q_i, \rho_i, \varphi_i$  в пределах практически возможной их вариации расширить фазовое пространство  $G' \subset G$ , где сохраняется  $\epsilon$ -устойчивость движения (3.3) по отношению к действительному движению (3.1).

#### 4. О зависимости между величинами $\epsilon$ и $\delta$

Согласно определению  $\epsilon$ -устойчивых движений (см. п. 3) и для того, чтобы иметь практическую возможность выбрать  $\epsilon$ -устойчивые движения по отношению к действительному движению КН, очевидно, необходимо установить способ определения таких  $\delta$ , которые обеспечивали бы заданную величину  $\epsilon$ . Вообще говоря, этот вопрос должен решаться для каждой конкретной задачи самостоятельно.

Поэтому мы ограничимся рассмотрением некоторых частных задач.

Предварительно заметим, что для дальнейших выкладок, вместо величины  $\Delta = |V_A(\bar{r}) - V_B(\bar{r})|$  удобно рассматривать безразмерную

величину

$$U = \left| \frac{V_x(\bar{r}) - V_z(\bar{r})}{V_z(\bar{r})} \right|, \quad (4.1)$$

которая выражает относительную погрешность действительной скорости по отношению к заданной скорости на заданном контуре  $\bar{r}$ .

Очевидно, в практически интересных случаях всегда можно предположить, что в ограниченном фазовом пространстве  $G$ , исключая сколь угодно близкие окрестности скважин, функции  $V_x(\bar{r})$  и  $V_z(\bar{r})$  ограничены и непрерывны. Пусть  $0 < |V_z(\bar{r})| \leq c$ . Поэтому в заданном ограниченном пространстве всегда существует максимальное значение  $U$ , которое в дальнейшем будем обозначать через  $U_1$ . Согласно (4.1) имеет место неравенство

$$\Delta \leq cU$$

и следовательно за величину  $\delta$  можно принять

$$\delta = cU_1. \quad (4.2)$$

Рассмотрим случай водонапорного режима пласта для одножидкостной системы при условии, что  $n+l$  эксплуатационные и нагнетательные скважины размещены по концентрическим круговым батареям, где  $n$  — число эксплуатационных скважин во всех батареях и  $l$  — число нагнетательных скважин. Вычисления будем вести в полярных координатах  $(\theta, r)$ , принимая за полюс общий центр всех батарей.

Уравнение движения КН имеем в виде:

$$m \frac{dr}{dt} = \frac{k}{\mu} \cdot \frac{1}{r^2} \frac{dr}{d\theta} \cdot \frac{dp}{d\theta} - \frac{k}{\mu} \frac{dp}{dr}, \quad (4.3)$$

где

$$p = p_0 + \frac{\mu}{2\pi kh} \sum_{i=1}^{n+l} q_i \ln \frac{1}{\sqrt{r^2 - 2r\rho_i \cos(\theta - \varphi_i) + \rho_i^2}} \quad (4.4)$$

$m$  — пористость,

$k$  — проницаемость,

$\mu$  — вязкость жидкости,

$p_0$  — начальное пластовое давление,

$h$  — мощность пласта,

$(\varphi_i, \rho_i)$  — координаты скважин, которые считаются линейными источниками и стоками,

$q_i$  — текущие объемные дебиты скважин, причем индексы  $i=1, 2, \dots, n$  соответствуют эксплуатационным и  $i=n+1, n+2, \dots, n+l$  — нагнетательным скважинам.

Рассмотрим случай заданного радиального движения КН

$$m \frac{dr}{dt} = \frac{Q}{2\pi hr}, \quad (4.5)$$

где

$$Q = \sum_{i=1}^n q_i$$

в кольце  $K$ , определенном неравенством

$$r_0(\theta) \geq r(\theta, t) \geq r_1(\theta), \quad (4.6)$$

которое само лежит в круговом кольце  $R_0 \geq r_0(\theta) \geq r(\theta, t) \geq r_1(\theta) \geq R_1$ , заключенном между нагнетательными и эксплуатационными батареями.

Покажем, что движение КН, заданное уравнением (4.5), по отношению к действительному движению КН (4.4) с одним и тем же начальным условием

$$r|_{t=0} = r_0(\theta) \quad (4.7)$$

будет  $\epsilon$ -устойчивым в некотором фазовом пространстве  $G$ . При заданном законе стягивания КН (4.5), на основании (4.1) и (4.3) имеем

$$m \frac{d\bar{r}}{dt} = \frac{Q}{2\pi h\bar{r}} \mp \frac{Q}{2\pi h\bar{r}} U, \quad (4.8)$$

где  $r = \bar{r}$  решение уравнения (4.5) при начальном условии (4.7),

$$U = \left| \sum_{i=1}^n q_i \frac{1 - x_i \cos(\theta - \varphi_i)}{1 - 2x_i \cos(\theta - \varphi_i) + x_i^2} + \sum_{i=n+1}^{n+l} q_i \frac{x_i^2 - x_i \cos(\theta - \varphi_i)}{1 - 2x_i \cos(\theta - \varphi_i) + x_i^2} \right| \quad (4.9)$$

$$x_i = \frac{\rho_i}{r} \quad (i=1, 2, \dots, n), \quad x_i = \frac{\bar{r}}{\rho_i} \quad (i=n+1, n+2, \dots, n+l) \quad (4.10)$$

$$q_i = \frac{q_i}{Q} \geq 0 \quad (i=1, 2, \dots, n), \quad \bar{q}_i = \frac{q_i}{Q_i} \leq 0 \quad (i=n+1, n+2, \dots, n+l).$$

Вполне очевидно, что если  $U=0$ , согласно (4.1)  $V_x(\bar{r}) = V_z(\bar{r})$ , следовательно, движения КН, определяемые уравнениями (4.3) и (4.5), в данном фазовом пространстве  $G$ , будут совпадать. С другой стороны, в силу того, что  $\Delta = cU$ , малое изменение  $U$  влечет за собой малое изменение  $\Delta$ , и ввиду кооректности поставленной задачи, при малых  $\Delta$  должна мало искажаться и форма КН. Очевидно, самое сильное отличие формы КН от заданного закона (4.5) при начальном условии (4.7), в кольце  $K$  возможно там, где  $\Delta$  или  $U$  могут принимать свои наибольшие значения  $\Delta_1$  или  $U_1$ . В уравнении (4.8), полагая  $U = U_1$ , имеем

$$m \frac{d\bar{r}}{dt} = \frac{Q}{2\pi h\bar{r}} (1 \pm U_1), \quad (4.11)$$

где  $U_1$  — не зависит от  $\theta, t, r$ . Интегрируя уравнение (4.11) при начальном условии  $r|_{t=0} = r_0(\theta)$ , имеем

$$r^2 = r_0^2 + \frac{(1 \pm U_1)}{\pi mh} \int_0^t Q dt. \quad (4.12)$$

С другой стороны, согласно (4.5), при том же начальном условии (4.7) заданный закон стягивания КН определяется уравнением

$$\bar{r}^2 = r_0^2 + \frac{1}{\pi mh} \int_0^t Q dt. \quad (4.13)$$

Уравнения (4.12) и (4.13) дают

$$\frac{r^2 - r_0^2}{\bar{r}^2 - r_0^2} = 1 \pm U_1,$$

или

$$r^2 = \bar{r}^2 \mp U_1 (\bar{r}^2 - r_0^2) \quad (r_0 \geq r). \quad (4.14)$$

Согласно (4.14) следует, что действительный КН будет всегда находиться в кольце, которое определяется неравенством

$$\bar{r}^2 - U_1(r_0^2 - \bar{r}^2) \leq r^2 \leq \bar{r}^2 + U_1(r_0^2 - \bar{r}^2),$$

или

$$\sqrt{\bar{r}^2 - U_1(r_0^2 - \bar{r}^2)} \leq r \leq \sqrt{\bar{r}^2 + U_1(r_0^2 - \bar{r}^2)}, \quad (4.15)$$

Далее, так как

$$r_0 \geq \bar{r} \geq r_1,$$

где

$$r_1 = r|_{t=T}$$

есть положение КН в конце времени стягивания при заданном законе, самое широкое кольцо, определяемое неравенством (4.15), должно быть при условии, когда  $\bar{r}$  достигает своего конечного положения  $r_1$ . Полагая в (4.15)  $\bar{r} = r_1$ , имеем

$$I_1 = \sqrt{r_1^2 - U_1(r_0^2 - r_1^2)} \leq r \leq \sqrt{r_1^2 + U_1(r_0^2 - r_1^2)} = I_2. \quad (4.16)$$

Для простоты рассмотрим случай, когда  $r_0$  и  $r_1$  не зависят от  $\theta^*$ , т. е., когда задается круговой закон стягивания КН, определенный уравнением (4.5). Ширину кольца (4.16) обозначим через  $L$ , то есть

$$L = I_2 - I_1. \quad (4.17)$$

Очевидно, в течение всего времени стягивания КН выполняется неравенство

$$|r - \bar{r}| \leq L.$$

Теперь найдем, какова должна быть величина  $U_1$ , для того, чтобы  $L$  не превосходило наперед заданной величины  $\epsilon$ , то есть чтобы имело место неравенство

$$\sqrt{r_1^2 + U_1(r_0^2 - r_1^2)} - \sqrt{r_1^2 - U_1(r_0^2 - r_1^2)} \leq \epsilon, \quad (4.18)$$

или

$$|r - \bar{r}| \leq \epsilon.$$

Разрешая неравенство (4.18) относительно  $U_1$ , будем иметь

$$U_1 \leq \frac{\epsilon \sqrt{4r_1^2 - \epsilon^2}}{2(r_0^2 - r_1^2)}. \quad (4.19)$$

Введем обозначения  $r_0 = r_1 + l_0$  и  $r_1 = r_1 + l_1$ , где  $r_1$  — радиус внешней эксплуатационной батареи,  $l_0$  — расстояние первоначального положения КН от внешней эксплуатационной батареи,  $l_1$  — расстояние конечного положения КН от той же внешней батареи,  $\Delta l = l_0 - l_1$  есть ширина кольца, где стягивается КН по заданному закону.

Пусть далее  $n_1$  — число скважин и  $a_1$  — расстояние между скважинами во внешней батарее. Тогда, зная, что

$$\rho = \frac{n_1 a_1}{2\pi},$$

<sup>\*)</sup> В случае, когда  $r_0$  и  $r_1$  зависят от  $\theta$ , надо рассматривать величины  $\max I_2$  и  $\min I_1$  при  $0 \leq \theta \leq 2\pi$ .

неравенство (4.19) преобразуем следующим образом:

$$U \leq U_1 \leq \frac{\epsilon \sqrt{1 - \left[ \frac{\epsilon \pi}{a_1 n_1 + 2\pi l_1} \right]^2}}{2 \left[ 1 + \frac{\pi \Delta l}{(a_1 n_1 + 2\pi l_1)} \right] \cdot \Delta l}. \quad (4.20)$$

Это неравенство по заданным величинам  $\epsilon, a_1, n, l_0, l_1$  позволяет установить верхнюю границу для относительной погрешности  $U$  заданной и действительной скорости на заданном контуре  $\bar{\Gamma}$ .

Если в неравенстве (4.20) перейти к пределу при  $n_1 \rightarrow \infty$ , то, очевидно, будем иметь

$$U \leq U_1 \leq \frac{\epsilon}{2\Delta l}. \quad (4.21)$$

Это неравенство соответствует случаю прямолинейного стягивания КН к прямолинейной батарее скважин. При этом  $\epsilon$  есть максимальная ширина допустимой полосы возможной погрешности для определения положения КН,  $\Delta l = l_0 - l_1$  — ширина полосы за весь период стягивания КН. Легко показать, что, если имеется лишь одна эксплуатационная батарея, то заданный закон (4.5) для случая прямолинейного стягивания КН примет следующий вид:

$$\frac{dy}{dt} = \frac{q}{mha_1}, \quad (4.22)$$

где  $q$  — объемный дебит каждой эксплуатационной скважины. Начальное условие для уравнения (4.22) будет

$$y|_{t=0} = l_0. \quad (4.23)$$

Рассмотрим численный пример на применение неравенства (4.21).

**Пример.** Пусть прямолинейный КН в начальном положении от ряда эксплуатационных батарей отстоит на расстоянии 600 м. Предположим, что мы этот КН желаем прямолинейно стянуть к эксплуатационной батарее по закону, определяемому уравнениями (4.22) и (4.23), то есть

$$y = l_0 + \frac{1}{mha_1} \int_0^t q dt.$$

Пусть  $\Delta l = 500$  м, то есть КН не доходит до эксплуатационной батареи на 100 м. При этом требуется, чтобы КН за все свое время стягивания не выходил за полосу шириной 100 м. Поэтому можно принять, что  $\epsilon \leq 100$  м. Подставляя заданные величины в неравенство (4.21), будем иметь

$$U \leq \frac{100}{2 \cdot 500} = 0,1.$$

Это означает, что при заданных размерах максимальная допустимая относительная погрешность скоростей не должна превышать 10%.

Поступила  
10 сентября 1958 г.

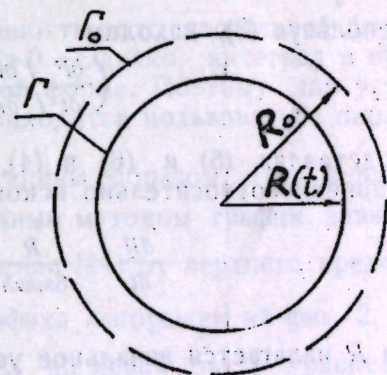
В. Л. ДАНИЛОВ

### О ДВИЖЕНИИ ВОДОНЕФТЯНОГО КОНТАКТА В ПЛАСТЕ ПРИ УПРУГО-ВОДОНАПОРНОМ РЕЖИМЕ

Исследованы задачи о стягивании круговой нефтяной линзы к центральной скважине и о нагнетании воды в пласт при постоянном дебите с учетом сжимаемости жидкостей и породы.

Показано, что закон перемещения границы раздела практически совпадает с законом перемещения несжимаемой жидкости в недеформируемом пласте и поэтому расчет перемещения границы можно вести по формулам водонапорного режима.

1. Рассмотрим неограниченно простирающийся однородный пласт постоянной мощности  $h$ . Начальный контур нефтеносности  $\Gamma_0$  представляет собой окружность радиуса  $R_0$  (фиг. 1). В момент времени  $t=0$  начинает работать эксплуатационная скважина с дебитом  $Q(t)$ . Скважину будем считать линейным вертикальным стоком постоянной интенсивности по высоте. Различием удельных весов, вязкостей и коэффициентов сжимаемости нефти и воды будем пренебрегать.



Фиг. 1.

Как следует из центральной симметрии течения, контур нефтеносности  $\Gamma$  в процессе движения должен оставаться круговым. Поставим целью определить закон движения этого контура  $R(t)$ .

При сделанных выше предположениях течение является плоским, а давление в пласте удовлетворяет уравнению теплопроводности [1]:

$$\frac{\partial^2 p}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 p}{\partial y^2} = \frac{1}{\alpha} \frac{\partial p}{\partial t} \quad (1)$$

Здесь  $\alpha$  — коэффициент пьезопроводности, постоянный по пласту. Он равен

$$\alpha = \frac{k}{\mu (m\beta_{ж} + \beta_c)},$$

где  $k$  — проницаемость,  $m$  — пористость,  $\mu$  — динамическая вязкость жидкости,  $\beta_{ж}$  и  $\beta_c$  — коэффициенты сжимаемости соответственно жидкости и среды. Эти величины считаются постоянными по всему пласту. Если в начальный момент  $t=0$  давление в пласте

$$p = p_0 = \text{const},$$

то в полярной системе координат с центром в скважине давление может быть представлено в форме [2]

$$p(r, t) = p_0 + \frac{1}{4\pi ch} \int_0^t \frac{Q(\tau)}{t-\tau} e^{-\frac{r^2}{4x(t-\tau)}} d\tau \quad (2)$$

( $c = \frac{k}{\mu}$  — коэффициент текучести).

Уравнение искомого контура запишем так:

$$F(r, \theta, t) = r - R(t) = 0. \quad (3)$$

С учетом закона Дарси уравнение движения контура принимает вид [3]:

$$\frac{\partial p}{\partial n} = \frac{m}{c} \left( \frac{\partial F}{\partial t} / \frac{\partial F}{\partial n} \right), \quad (4)$$

где  $n$  — внутренняя нормаль к  $\Gamma$ . В нашем случае

$$\frac{\partial}{\partial n} = - \frac{\partial}{\partial r} \Big|_{r=R(t)}$$

Из (2) имеем

$$\frac{\partial p}{\partial n} \Big|_r = \frac{R(t)}{8\pi m ch} \int_0^t \frac{Q(\tau)}{(t-\tau)^2} e^{-\frac{R^2(t)}{4x(t-\tau)}} d\tau. \quad (5)$$

Используя (3), находим

$$\left( \frac{\partial F}{\partial t} / \frac{\partial F}{\partial n} \right) = \frac{dR(t)}{dt}. \quad (6)$$

Подставляя (5) и (6) в (4), получаем интегро-дифференциальное уравнение относительно искомой функции  $R(t)$ :

$$\frac{dR}{dt} = \frac{R}{8\pi m ch} \int_0^t \frac{Q(\tau)}{(t-\tau)^2} e^{-\frac{R^2}{4x(t-\tau)}} d\tau. \quad (7)$$

На  $R$  налагается начальное условие

$$R(0) = R_0. \quad (8)$$

При  $Q = \text{const}$  интеграл в уравнении (7) берется с помощью подстановки

$$u = -\frac{R^2}{4x(t-\tau)},$$

и уравнение переходит в следующее:

$$\frac{dR^2}{dt} = \frac{Q}{\pi mh} e^{-\frac{R^2}{4xt}}. \quad (9)$$

Существование и единственность решения этого уравнения при начальном условии (8) нетрудно доказать.

Вводя для краткости обозначения

$$\frac{\pi mh}{Q} = -a, \quad \frac{1}{4x} = b \quad (10)$$

и новые переменные

$$z = \frac{t}{bR^2}, \quad f = R^2, \quad (11)$$

вместо уравнения (9) и начального условия (8), получаем соответственно:

$$-\frac{df}{f} = \frac{dz}{z + \frac{a}{b} e^{\frac{1}{z}}}, \quad (12)$$

$$f = R_0^2 \quad \text{при} \quad z = 0. \quad (13)$$

Таким образом, приходим к уравнению с разделяющимися переменными. Из (12) с учетом условия (13) и обозначения (11) следует:

$$-\int_{R_0^2}^{R^2} \frac{df}{f} = \int_0^{\eta b R^2} \frac{dz}{z + \frac{a}{b} e^{\frac{1}{z}}}, \quad (14)$$

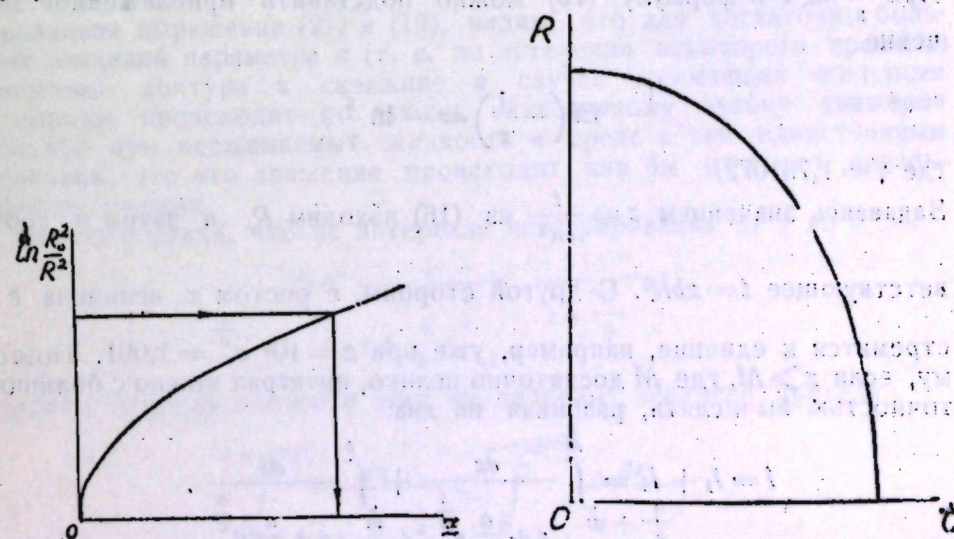
откуда

$$\ln \frac{R_0^2}{R^2} = \int_0^{\eta b R^2} \frac{dz}{z + \frac{a}{b} e^{\frac{1}{z}}}.$$

Ввиду того, что  $Q < 0$  (эксплуатационная скважина), имеем  $\frac{a}{b} > 0$ , после чего легко убедиться в непрерывности подынтегральной функции  $u$ ;  $u \rightarrow 0$  при  $z \rightarrow 0$  и  $u > 0$  при  $z > 0$ . Однако, интеграл в правой части не удается взять в замкнутой форме. Поэтому для установления искомой зависимости  $R(t)$  приходится пользоваться окольными путями.

Можно, например, поступить следующим образом. При данном значении  $\frac{a}{b} = -\frac{4\pi m h}{Q}$  строим численным методом график зависимости интеграла в правой части уравнения (14) от верхнего предела  $\ln \frac{R_0^2}{R^2} = I(z)$ ; типичный вид такого графика изображен на фиг. 2.

Затем, задаваясь значением  $R < R_0$ , по левой части уравнения (14) определяем величину  $I$ , по которой с помощью графика фиг. 2



Фиг. 2.

Фиг.

определяем  $z$ , а следовательно, и  $t = zbR^2$ . Так для ряда значений  $R_0 > R > 0$  устанавливаем соответствие между  $R$  и  $t$ , после чего по точкам строим график  $R(t)$  (фиг. 3).

При

$$z \ll \frac{a}{b} e^{\frac{1}{z}}$$

можно воспользоваться приближенным представлением подынтегральной функции:

$$\begin{aligned} \frac{1}{z + \frac{a}{b} e^{\frac{1}{z}}} &= \frac{a}{b} e^{-\frac{1}{z}} \left(1 + \frac{b}{a} z e^{-\frac{1}{z}}\right)^{-1} \approx \\ &\approx \frac{b}{a} e^{-\frac{1}{z}} \left(1 - \frac{b}{a} z e^{-\frac{1}{z}}\right). \end{aligned}$$

Тогда

$$\begin{aligned} I &\approx \int_0^z \frac{b}{a} e^{-\frac{1}{z}} \left(1 - \frac{b}{a} z e^{-\frac{1}{z}}\right) dz = \\ &= \frac{b}{a} \left[ z e^{-\frac{1}{z}} + Ei\left(-\frac{1}{z}\right) \right] - \left(\frac{b}{a}\right)^2 \left[ \frac{1}{2} z^2 e^{-\frac{2}{z}} - z e^{-\frac{2}{z}} - 2Ei\left(-\frac{2}{z}\right) \right], \end{aligned} \quad (15)$$

где  $Ei(-x)$  — табулированная функция (см., например, [4]). Из (14) и (15) следует:

$$\begin{aligned} \ln \frac{R_0^2}{R^2} &\approx \frac{b}{a} \left[ \frac{t}{bR^2} e^{-\frac{bR^2}{t}} + Ei\left(-\frac{bR^2}{t}\right) \right] - \\ &- \left(\frac{b}{a}\right)^2 \left[ \left(\frac{1}{2} \frac{t}{bR^2} - 1\right) \frac{t}{bR^2} e^{-\frac{2bR^2}{t}} - 2Ei\left(-\frac{2bR^2}{t}\right) \right]. \end{aligned} \quad (16)$$

При  $\frac{1}{z} \ll 1$  в формулу (16) можно подставить приближенное значение

$$Ei\left(-\frac{1}{z}\right) \approx -\ln \frac{z}{\gamma},$$

где  $\gamma = 1,781072$ .

Задаваясь значением  $z = \frac{t}{bR^2}$  из (16) находим  $R$ , а затем и соответствующее  $t = zbR^2$ . С другой стороны, с ростом  $z$  величина  $e^{\frac{1}{z}}$

стремится к единице, например, уже при  $z = 10^3$   $e^{\frac{1}{z}} = 1,001$ . Поэтому, если  $z > M$ , где  $M$  достаточно велико, интеграл можно с большой точностью вычислять, разбивая на два:

$$I = I_1 + I_2 = \int_0^M \frac{dz}{z + \frac{a}{b} e^{\frac{1}{z}}} + \int_M^z \frac{dz}{z + \frac{a}{b} e^{\frac{1}{z}}}.$$

Первый из них найдем численным методом, либо, если соблюдено условие  $M \ll \frac{a}{b} e^{\frac{1}{M}}$  по формуле (16); пусть он равен  $A$ .

Второй можно заменить приближенным значением

$$I_2 \approx \int_M^{zbR^2} \frac{dz}{z + \frac{a}{b}} = \ln \frac{zbR^2 + \frac{a}{b}}{M + \frac{a}{b}}.$$

Следовательно,

$$I = \ln \frac{R_0^2}{R^2} = A + \ln \frac{zbR^2 + \frac{a}{b}}{M + \frac{a}{b}}. \quad (17)$$

После элементарных преобразований получаем:

$$R = \sqrt{R_0^2 e^{-A} \left(M \frac{b}{a} + 1\right) - \frac{t}{a}}. \quad (18)$$

Если рассмотреть задачу о движении контура для случая несжимаемых жидкостей и породы (то есть  $z = \infty$ ) при тех же значениях  $Q, m, h$  и  $R_0$ , то нетрудно получить точный интеграл. Закон движения имеет вид:

$$R_{\infty} = \sqrt{R_0^2 + \frac{Q}{\pi m h} - t} = \sqrt{R_0^2 - \frac{t}{a}}. \quad (19)$$

Если обозначить положительную величину

$$R_0^2 e^{-A} \left(M \frac{b}{a} + 1\right) = R_*^2, \quad (20)$$

то уравнение (18) можно записать в форме

$$R = \sqrt{R_*^2 - \frac{t}{a}}. \quad (21)$$

Сравнивая выражения (21) и (19), видим, что для достаточно больших значений параметра  $z$  (т. е. по истечении некоторого времени) движение контура к скважине в случае сжимаемых жидкостей и породы происходит по закону, аналогичному закону движения контура при несжимаемых жидкостях и среде с тем единственным отличием, что это движение происходит как бы от иного начального положения.

Из того факта, что на интервале интегрирования от 0 до  $z > 0$

$$0 < \frac{1}{z + \frac{a}{b} e^{\frac{1}{z}}} < \frac{1}{z + \frac{a}{b}}$$

следует, что для одного и того же значения верхнего предела

$$\int_0^{z = t_1 / bR^2} \frac{dz}{z + \frac{a}{b} e^{\frac{1}{z}}} < \int_0^{z = t_1 / bR_{\infty}^2} \frac{dz}{z + \frac{a}{b}},$$

или

$$\ln \frac{R_0^2}{R^2} < \ln \frac{R_0^2}{R_{II}^2},$$

откуда  $R_{II} < R$ ;

$$t_1 = zbR^2, \quad t_2 = zbR_{II}^2.$$

Следовательно,  $t_1 > t_2$ . Но  $R$  и  $R_{II}$  — монотонно убывающие функции, поэтому при одинаковых значениях времени  $t$  тем более  $R > R_{II}$ .

Из (19) и (21) вытекает соотношение (для достаточно больших  $t$ )

$$R^2 - R_{II}^2 = R_0^2 - R_0^2 = \text{const}, \quad (22)$$

то есть после истощения упругого запаса в нефтяной области вся жидкость внутри этого контура начинает двигаться как несжимаемая в несжимаемой среде.

Рассмотрим пример при следующих исходных данных:

$$Q = -100 \text{ м}^3/\text{сут} = -1157,4 \text{ см}^3/\text{сек}; \quad h = 10 \text{ м} = 10^3 \text{ см};$$

$$R_0 = 1000 \text{ м} = 10^5 \text{ см}; \quad k = 1 \text{ дарси}; \quad \mu = 2 \text{ сП};$$

$$m = 0,2; \quad \beta_{ж} = 10 \cdot 10^{-5} \frac{1}{\text{ат}}; \quad \beta_c = 2 \cdot 10^{-5} \frac{1}{\text{ат}}.$$

Отсюда по приведенным выше формулам находим:

$$\kappa = 0,125 \cdot 10^5 \text{ см}^2/\text{сек}; \quad b = 2 \cdot 10^{-5} \text{ сек}/\text{см}^2;$$

$$a = 0,543 \text{ сек}/\text{см}^2; \quad \frac{a}{b} = 2,714 \cdot 10^4.$$

Расчеты показали, что различие между  $R$  и  $R_{II}$ , накапливаемое в начальный период, крайне незначительно и составляет величину в пару десятков сантиметров, которой, разумеется, можно пренебречь.

2. Рассмотрим частный случай задачи о радиальном течении сжимаемой жидкости в упругой среде при постоянном дебите, для которого удастся найти точное решение задачи о перемещении контура нефтеносности. Пусть в пласт нагнетается вода. Тогда  $Q = \text{const} > 0$ . В начальный момент  $t = 0$

$$R(0) = 0. \quad (23)$$

Уравнение движения сохраняет вид (9). Будем отыскивать его решение в следующей форме, удовлетворяющей начальному условию (23):

$$R = \sqrt{at}, \quad (24)$$

где  $a = \text{const} > 0$ .

Подставляя выражение (24) в дифференциальное уравнение (9), получаем трансцендентное уравнение относительно постоянной

$$a = \frac{Q}{\pi mh} e^{-\frac{a}{4\kappa}}. \quad (25)$$

В обозначениях (11) его можно переписать так:

$$a = -\frac{1}{a} e^{-ba}. \quad (25a)$$

Положительный корень этого уравнения можно найти графическим построением как абсциссу точки пересечения прямой  $y = a$  с экспонентой  $y = -\frac{1}{a} e^{-ba}$  либо численными методами, например, способом итераций.

Отметим, что более общую задачу с учетом различия вязкостей нагнетаемой и вытесняемой жидкостей и коэффициентов пьезопрод-

водности в обеих зонах исследовал Н. Н. Веригин [5]. Им получено решение (24) и условие (25) как приближенные для двухжидкостной системы.

Однако, он не обратил внимания на то, что эти выражения дают точное решение для одножидкостной системы.

Если имеет место нагнетание несжимаемой жидкости в недеформируемый пласт, то закон движения границы нагнетания при том же постоянном дебите  $Q$ , как следует из (19) и (23), имеет вид:

$$R_{II} = \sqrt{\frac{Q}{\pi mh} t} = \sqrt{-\frac{t}{a}}. \quad (26)$$

Из соотношений (24) и (26) получаем

$$R^2 - R_{II}^2 = \left(a - \frac{Q}{mh\pi}\right)t, \quad (27)$$

то есть разность площадей пятен нагнетаемой жидкости возрастает прямо пропорционально времени, тогда как в предыдущей задаче эта разность оставалась постоянной (см. (22)).

Рассмотрим численный пример, полагая  $Q = 100 \text{ м}^3/\text{сут}$ ,  $R_0 = 0$  и сохраняя остальные данные первого примера. Тогда  $b = 2 \cdot 10^{-5} \text{ сек}/\text{см}^2$ ,  $a = -0,543 \text{ сек}/\text{см}^2$ , и уравнение (25a) принимает вид:

$$a = \frac{1}{0,543} e^{-2 \cdot 10^{-5} a}.$$

Отсюда способом итераций найдено

$$a = \frac{1}{0,543} \cdot 0,99963 = \frac{Q}{\pi mh} \cdot 0,99963.$$

Так как величина  $b = 1/4\kappa$  для реальных пластов и жидкостей имеет порядок  $10^{-5}$ , то с достаточной точностью можно считать  $e^{-ba} = 1$ , но тогда  $a = \frac{Q}{\pi mh}$  и  $R = R_{II}$ , то есть закон движения контура с учетом сжимаемости практически совпадает с законом движения при том же дебите нагнетания без учета сжимаемости.

3. Изученные выше задачи позволяют сделать вывод о том, что при работе скважин с постоянным дебитом перемещение границы раздела сжимаемых „разноцветных“ жидкостей в упругом пласте практически не отличается от перемещения границы раздела несжимаемых „разноцветных“ жидкостей в недеформируемом пласте.

Различие вязкостей жидкостей и коэффициентов пьезопроводности в водной и нефтяной зонах не учитывалось, течение было строго радиальным. Если учесть, что в двухжидкостной системе порядок величины  $\kappa$  в обеих зонах одинаков и близок к принятому в вышеприведенных расчетах, то ясно, что влиянием сжимаемости на перемещение границы раздела и в случае различия вязкостей можно пренебречь без существенной погрешности. Поэтому весьма сложные расчеты перемещения контура нефтеносности в двухжидкостной системе с учетом сжимаемости допустимо заменить более простыми расчетами перемещения контура в двухжидкостной системе без учета сжимаемости [3].

4. Задачи, рассмотренные в п.п. 1 и 2 могут быть поставлены несколько иначе. Будем считать известным не дебит, а давление на забое скважины  $p_c = \text{const}$  на радиусе  $r = r_c$ . Начальное давление в пласте равно  $p_0 = \text{const}$ . При  $r \rightarrow \infty$   $p \rightarrow p_0$ . Тогда нетрудно на

основании имеющегося решения аналогичной задачи теплопроводности [6] записать давление в пласте в виде:

$$p = p_0 + p_c \left[ 1 + \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} e^{-\frac{u^2 r}{r_c}} \frac{J_0\left(u \frac{r}{r_c}\right) Y_0(u) - Y_0\left(u \frac{r}{r_c}\right) J_0(u)}{J_0^2(u) + Y_0^2(u)} \frac{du}{u} \right]. \quad (28)$$

Из соотношений (4) и (6) можно записать уравнение движения контура:

$$\frac{dR}{dt} = -\frac{c}{m} \frac{\partial p}{\partial n} \Big|_{\Gamma} = \frac{c}{m} \frac{\partial p}{\partial r} \Big|_{r=R(t)}. \quad (29)$$

Воспользуемся известными выражениями [7]

$$J_0'(z) = -J_1(z); \quad Y_0'(z) = -Y_1(z);$$

тогда из (28) имеем

$$\frac{\partial p}{\partial r} = -\frac{2p_c}{\pi r_c} \int_0^{\infty} e^{-\frac{u^2 r}{r_c}} \frac{J_1\left(u \frac{r}{r_c}\right) Y_0(u) - Y_1\left(u \frac{r}{r_c}\right) J_0(u)}{J_0^2(u) + Y_0^2(u)} du.$$

Подставляя это значение в (29), получаем уравнение движения:

$$\frac{dR}{dt} = -\frac{2cp_c}{\pi m r_c} \int_0^{\infty} e^{-\frac{u^2 R}{r_c}} \frac{J_1\left(u \frac{R}{r_c}\right) Y_0(u) - Y_1\left(u \frac{R}{r_c}\right) J_0(u)}{J_0^2(u) + Y_0^2(u)} du. \quad (30)$$

В случае стягивания первоначально кругового контура  $\Gamma$   $p_c < p_0$ , и начальное условие имеет вид (8).

При распространении нагнетаемой жидкости по пласту  $p_c > p_0$ , и начальное условие совпадает с (23).

Решение уравнения (30) представляет еще большие трудности, чем решение уравнения (9).

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Щелкачев В. Н., Ланук Б. Б. Подземная гидравлика, Гостехиздат, 1949.
2. Карслоу Х. Математическая теория теплопроводности, Гостехиздат, 1947.
3. Данилов В. Л. Интегро-дифференциальные уравнения движения границы раздела двух жидкостей в пористой среде. Изв. КФАН СССР, сер. физ.-матем. и техн. наук, вып. 11, 1957.
4. Янке Е. и Эмде Ф. Таблицы функций с формулами и кривыми. Гостехиздат, 1949.
5. Веригин Н. Н. Нагнетание вязких растворов в горные породы в целях повышения прочности и водонепроницаемости оснований гидротехнических сооружений. Изв. АН СССР, отделение технич. наук. № 5, 1952.
6. Грантер К. Дж. Интегральные преобразования в математической физике. Гостехиздат, 1956.
7. Грей Э. и Мэтьюз Г. Б. Функции Бесселя и их приложения к физике и механике. ИЛ, 1949.

Поступила  
10 сентября 1958 г.

Г. П. ЦЫБУЛЬСКИЙ, Ю. А. ТЕПЛОВ

### ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ СОВМЕСТНОГО ПРИТОКА К СКВАЖИНЕ ВОДЫ И НЕФТИ

В статье описываются методика и результаты экспериментального исследования совместного притока двух жидкостей с различными физическими константами к незаглубленной скважине на щелевом лотке.

#### § 1. Введение

При эксплуатации нефтяных скважин в пластах с подошвенной водой после прорыва конуса обводнения большое значение имеет знание зависимости отношения дебитов воды и нефти  $\frac{Q_w}{Q_n}$  от физических параметров жидкостей (вязкостей  $\mu_w, \mu_n$ , удельных весов  $\gamma_w, \gamma_n$ ), от мощностей водонасыщенной и нефтенасыщенной частей пласта  $h_w$  и  $h_n$ , от перепада давлений между контуром питания и скважиной  $\Delta p$  и т. д.

Полное теоретическое исследование этого вопроса является чрезвычайно трудной задачей. М. М. Глоговский [1] для ограниченного горизонтального пласта при  $\gamma_w = \gamma_n$  нашел соотношение

$$\frac{Q_w}{Q_n} = \frac{h_w}{h_n} \cdot \frac{\mu_n}{\mu_w}. \quad (1.1)$$

И. С. Пискунов [2] для неограниченного по протяженности пласта с учетом различия удельных весов получил неравенство

$$\frac{Q_w}{Q_n} \leq \frac{h_w}{h_n} \cdot \frac{\mu_n}{\mu_w}. \quad (1.2)$$

Аналогичные соотношения получил при некоторых допущениях И. А. Чарный [3], [4].

Совместный приток исследовался и экспериментально. Так, например, Н. I. Meyer и D. F. Searcy [5] изучали этот вопрос на плоском щелевом лотке. Они предложили следующую зависимость

$$\frac{Q_w}{Q_n} = \eta \frac{H_w h_w \mu_n}{H_n h_n \mu_w}, \quad (1.3)$$

где  $H_w$  и  $H_n$  — потери напора соответственно в водной и нефтяной зонах,  $\eta$  — коэффициент, в общем случае зависящий от всех параметров системы. Следует отметить, что Н. I. Meyer и D. F. Searcy исследовали совместный приток при интенсивном отборе. При этом они получили, что  $\eta \approx 1$ . С. В. Сафронов и Р. А. Аллаhverдиева [6]



изучали совместный приток на параболическом щелевом лотке. Они нашли, что при соблюдении геометрического подобия для совместного притока определяющими являются критерии

$$\frac{\gamma_{II}}{\gamma_B} = \text{idem}, \quad (1.4)$$

$$\frac{\nu_{II}}{\nu_B} = \text{idem}, \quad (1.5)$$

$$\frac{\Delta p}{\Delta \gamma H} = \text{idem}, \quad (1.6)$$

где

$$\Delta \gamma = \gamma_B - \gamma_{II},$$

$\Delta p$  — перепад давления между контуром питания и скважиной,

$$H = h_B + h_{II}.$$

Результаты экспериментов представлены в виде графиков

$$\frac{Q_B}{Q_{II}} = f\left(\frac{\Delta p}{\Delta \gamma H}\right)$$

при различных

$$\frac{\nu_{II}}{\nu_B}, \quad \frac{h_{II}}{h_B}, \quad \frac{\gamma_{II}}{\gamma_B}.$$

Из этих графиков видно, что после прорыва воды, который наступает для каждого семейства параметров при различных значениях  $\Pi = \frac{\Delta p}{\Delta \gamma H}$ , степень обводненности с увеличением  $\Pi$  нарастает и при некоторых значениях  $\Pi$  приближается к теоретической согласно формуле (1.2). В настоящей статье описываются эксперименты по совместному притоку, проведенные в Физико-техническом институте Казанского филиала АН СССР.

## § 2. Постановка задачи и критерии подобия

Рассматривается плоская задача о совместном установившемся притоке к скважине малого радиуса воды и нефти в горизонтальном пласте с подошвенной водой (см. фиг. 1, где указаны соответствующие геометрические параметры). Режим пласта считаем водонапорным, фильтрацию ламинарной, пласт — однородным и изотропным. При этом потенциалы в нефтяной и водной зонах удовлетворяют уравнениям Лапласа:

$$\Delta \Phi_{II} = 0, \quad \Delta \Phi_B = 0,$$

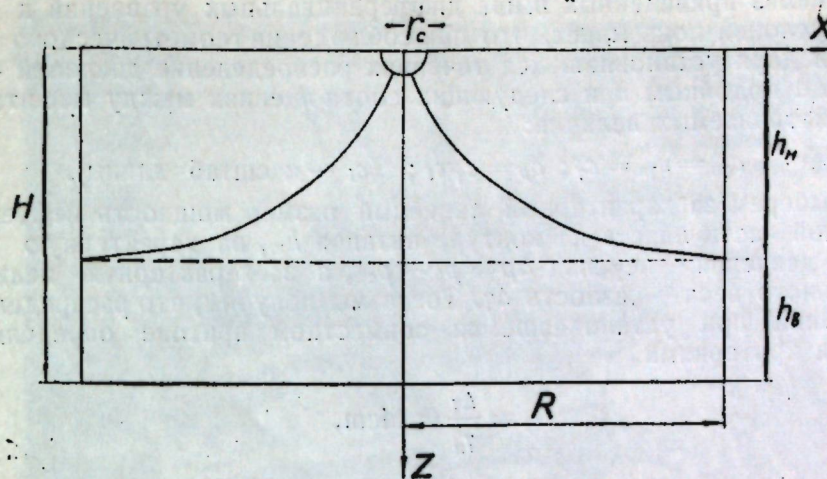
где

$$\Phi_{II} = -\frac{k}{\nu_{II}} p_{II}^* = -\frac{k}{\nu_{II}} (p_{II} - \gamma_{II} z),$$

$$\Phi_B = -\frac{k}{\nu_B} p_B^* = -\frac{k}{\nu_B} (p_B - \gamma_B z),$$

$k$  — проницаемость,  $\nu_B, \nu_{II}$  — динамические вязкости воды и нефти,  $p_{II}^*, p_B^*$  — приведенные давления в водной и нефтяной зонах,  $p_{II}, p_B$  — гидродинамические давления в водной и нефтяной зонах.  $\gamma_B, \gamma_{II}$  — удельные веса воды и нефти. Краевые условия для  $\Phi_{II}$  и  $\Phi_B$  следующие:

а)  $\frac{\partial \Phi_{II}}{\partial z} \Big|_{z=0} = 0$  — условие непроницаемости кровли;



Фиг. 1.

- б)  $\frac{\partial \Phi_B}{\partial z} \Big|_{z=H} = 0$  — условие непроницаемости подошвы;
- в)  $\Phi_{II} \Big|_{\substack{|x|=R \\ 0 < z < h_{II}}} = \text{const} = -\frac{k}{\nu_{II}} p_0$ , где  $p_0$  — начальное пластовое давление на уровне кровли;
- г)  $\Phi_B \Big|_{\substack{|x|=R \\ h_{II} < z < H}} = \text{const} = -\frac{k}{\nu_B} (p_0 - \Delta \gamma h_{II})$ ;
- д)  $\Phi_{II} \Big|_{\text{на скважине}} = \text{const} = -\frac{k}{\nu_{II}} p_c$ , где  $p_c$  — давление в скважине;
- е)  $\Phi_B \Big|_{\text{на скважине}} = \text{const} = -\frac{k}{\nu_B} p_c$ ;
- ж)  $p_B \Big|_{\Gamma} = p_{II} \Big|_{\Gamma}$  — условие равенства давлений на границе раздела воды и нефти  $\Gamma$ ;
- з)  $\frac{\partial p_{II}^*}{\partial n} \Big|_{\Gamma} = 0, \quad \frac{\partial p_B^*}{\partial n} \Big|_{\Gamma} = 0$  — условия неподвижности  $\Gamma$ ;
- и)  $\frac{dz^*}{dx} = \frac{\frac{\partial p_{II,B}^*}{\partial z}}{\frac{\partial p_{II,B}^*}{\partial x}}$  — условие на контуре  $\Gamma: z = z^*(x)$ .

При этом искомое соотношение дебитов воды  $Q_B$  и нефти  $Q_{II}$  можно представить, например, в форме

$$\frac{Q_B}{Q_{II}} = \frac{\nu_{II}}{\nu_B} \cdot \frac{\int_0^H \frac{\partial p_{II}^*}{\partial x} dz}{\int_0^H \frac{\partial p_B^*}{\partial x} dz}. \quad (2.1)$$

Анализ приведенных выше дифференциальных уравнений и крайних условий показывает, что при соблюдении геометрического подобия в двух установившихся течениях распределение давлений будет так же подобным при следующих соотношениях между масштабами рассматриваемых величин:

$$c_{\gamma_{II}} = c_{\gamma_{IV}} = c_{\gamma}; \quad c_p = c_{\gamma} c_l; \quad (c_l - \text{масштаб длины}).$$

Выберем за характерный линейный размер мощность нефтенасыщенной части пласта на контуре питания  $h_{II}$ , за характерную величину давления — перепад  $\Delta p = p_0 - p_c$ , а за характерную величину удельного веса — разность  $\Delta \gamma$ . Тогда мы получим, что распределение давлений при установившемся совместном притоке определяется двумя критериями

$$\Pi_{\gamma} = \frac{\Delta \gamma}{\gamma_{II}} = \text{idem}, \quad (2.2)$$

$$\Pi^* = \frac{\Delta p}{\Delta \gamma h_{II}} = \text{idem}. \quad (2.3)$$

Перепишем (2.1) в виде

$$\frac{Q_{II} \nu_{II} h_{II}}{Q_{IV} \nu_{IV} h_{IV}} = \frac{\left. \frac{\partial p_{II}^*}{\partial x} \right|_{cp}}{\left. \frac{\partial p_{IV}^*}{\partial x} \right|_{cp}}. \quad (2.4)$$

Вместо  $\frac{Q_{II}}{Q_{IV}}$  будем считать искомым отношение  $\frac{Q_{II} \nu_{II} h_{II}}{Q_{IV} \nu_{IV} h_{IV}} = \lambda$ , которое назовем характеристикой совместного притока. Правая часть в (2.4) зависит от геометрии течения и критериев  $\Pi_{\gamma}$ ,  $\Pi^*$  и не зависит от  $\frac{\nu_{II}}{\nu_{IV}}$

$$\lambda = f(\Pi_{\gamma}, \Pi^*, \Pi_{\text{геом.}}). \quad (2.5)$$

Вид функции  $f$  определяется экспериментальным путем. Отметим, что рассмотренная схема течения соответствует, вообще говоря, притоку к галерее, вскрывающей пласт с кровли или к дрене. Но качественно выводы могут быть, очевидно, перенесены и на случай притока к одиночной скважине.

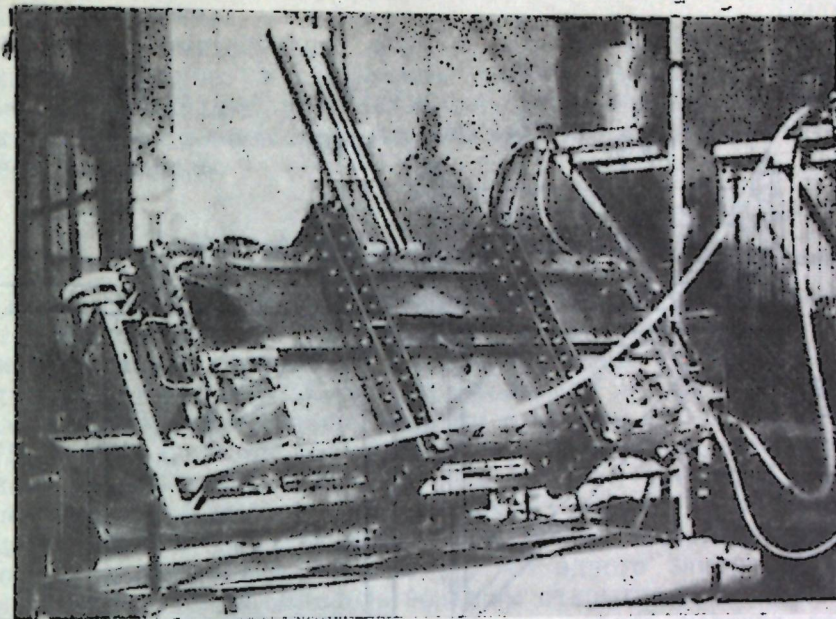
### § 3. Описание экспериментальной установки

Исследования проводились на экспериментальной установке „Вертикальный щелевой лоток“, общий вид которой представлен на фиг. 2, а схема — на фиг. 3.

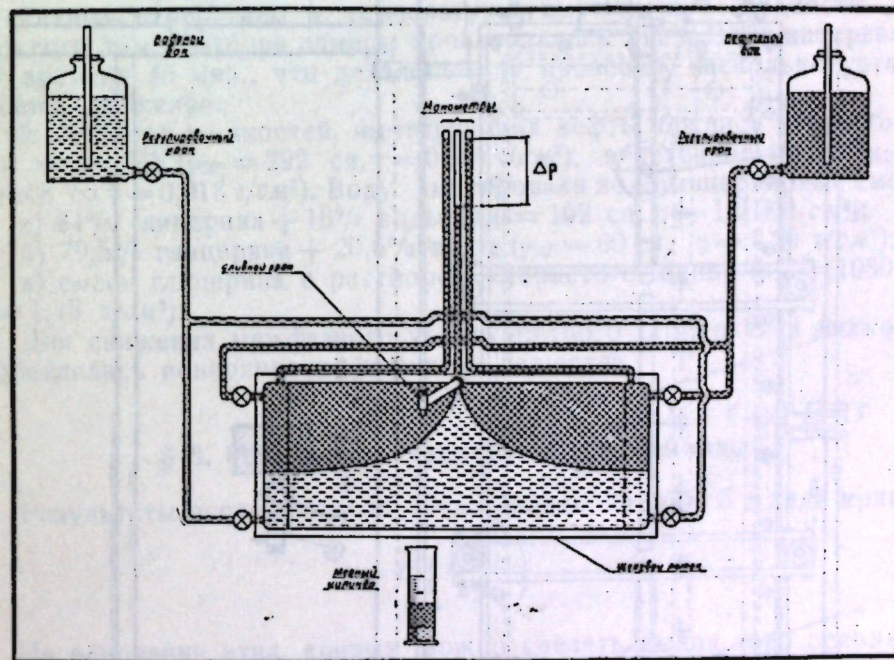
В основу создания установки положена известная аналогия между течениями вязкой жидкости в пористой среде и в узкой щели между двумя поверхностями [7]. Во всех экспериментах число  $Re$  было не более 10, что обеспечивало законность применения щелевого лотка.

Главная часть установки — щелевой лоток (фиг. 4) — состоит из двух плексигласовых стенок (дет. 1 и 2) толщиной 30 мм, стянутых по краям болтами (дет. 12). По бокам стенок выбраны карманы глубиной 20 мм.

Полости этих карманов создают область питания. Ширина щели между стенками выдерживается постоянной с помощью калиброванных шайб (дет. 17). Высота рабочей области щели может меняться перестановкой ограничительной прокладки (дет. 6). Для устранения



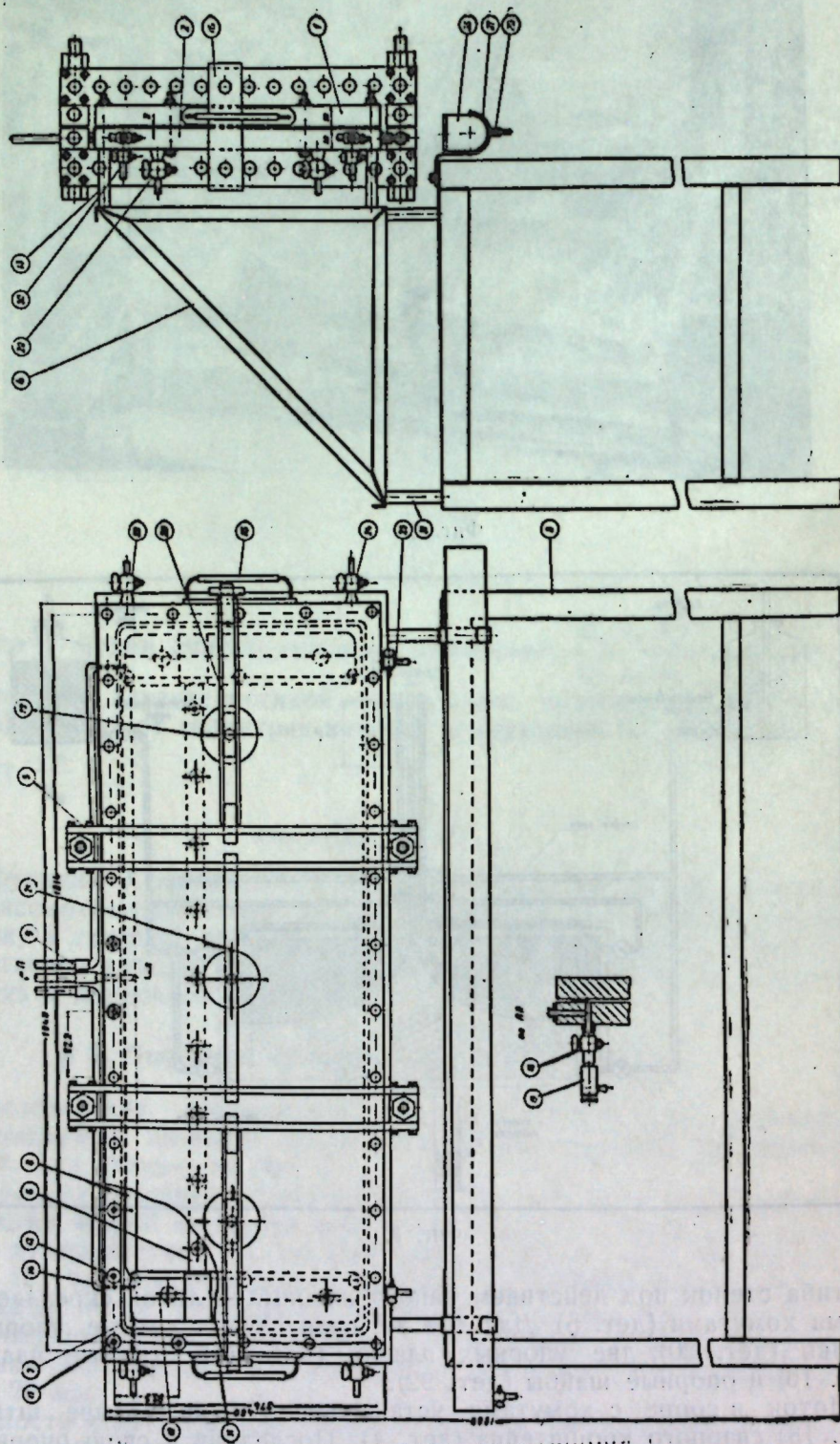
Фиг. 2.



Фиг. 3.

прогиба стенок под действием напора жидкостей лоток скрепляется двумя хомутами (дет. 5). Для той же цели служат четыре упорных стойки (дет. 20), две упорных планки (дет. 21), стяжные планки (дет. 16) и опорные шайбы (дет. 22).

Лоток в сборе с хомутами устанавливается на четыре штыря (дет. 13) сварного кронштейна (дет. 4). Последний в свою очередь, крепится на четырех опорных стойках (дет. 31) опорной рамы (дет. 3). Кронштейн может устанавливаться под различным углом, благодаря



Фиг. 4.

чему лоток может быть установлен под различным углом к вертикальной плоскости.

Жидкости, имитирующие воду и нефть, поступают в карманы лотка из „водяного“ и „нефтяного“ баков, являющихся сосудами Мариотта. Последние установлены на двух стойках с подвижными полками. Отвод жидкостей осуществляется через краны (дет. 18 и 19) в мерные цилиндры.

#### § 4. Методика проведения экспериментов

Перед сборкой лотка производилась очистка рабочих поверхностей стенок. Весьма тщательное удаление с поверхностей загрязнений всех видов достигалось последовательной промывкой теплым раствором тринатрийфосфата, водопроводной и дистиллированной водой и протиркой бензином, спиртом и эфиром.

После сборки лоток заполняется жидкостями так, чтобы граница раздела „вода — нефть“ находилась на заданной высоте. В процессе эксперимента при помощи регулировочных кранов граница раздела „вода — нефть“ в карманах поддерживалась на постоянной заданной высоте, в то время как темп отбора от одного замера к другому увеличивался, что достигалось большим открытием сливного крана. После того, как для выбранного темпа отбора картина течения устанавливалась, производились замеры количества вытекших жидкостей за определенное время, разности давлений между карманами и сливным отверстием и температуры вытекающей жидкости. Для каждого темпа отбора замеры производились два раза с интервалом во времени 45 мин., что делалось для проверки, насколько установилось движение.

В качестве жидкостей, имитирующих нефть, брались автомобильное масло СУ ( $\mu_{20^\circ} = 292$  сп,  $\gamma = 0,907$  г/см<sup>3</sup>), веретенное масло ( $\mu_{20^\circ} = 108$  сп  $\gamma = 0,913$  г/см<sup>3</sup>). Воду имитировали водоглицериновые смеси:

а) 84% глицерина + 16% воды ( $\mu_{20^\circ} = 102$  сп,  $\gamma = 1,218$  г/см<sup>3</sup>);

б) 79,5% глицерина + 20,5% воды ( $\mu_{20^\circ} = 60$  сп,  $\gamma = 1,20$  г/см<sup>3</sup>);

в) смесь глицерина с раствором хлористого цинка ( $\mu_{20^\circ} = 1080$  сп,  $\gamma = 1,45$  г/см<sup>3</sup>).

Для снижения межфазного поверхностного натяжения в жидкости добавлялись поверхностно-активные вещества.

#### § 5. Результаты экспериментов. Выводы

Результаты экспериментов представлены на фиг. 5 в виде кривых

$$\lambda = F \left( \frac{\Delta p}{\Delta \gamma h_{II}} \right).$$

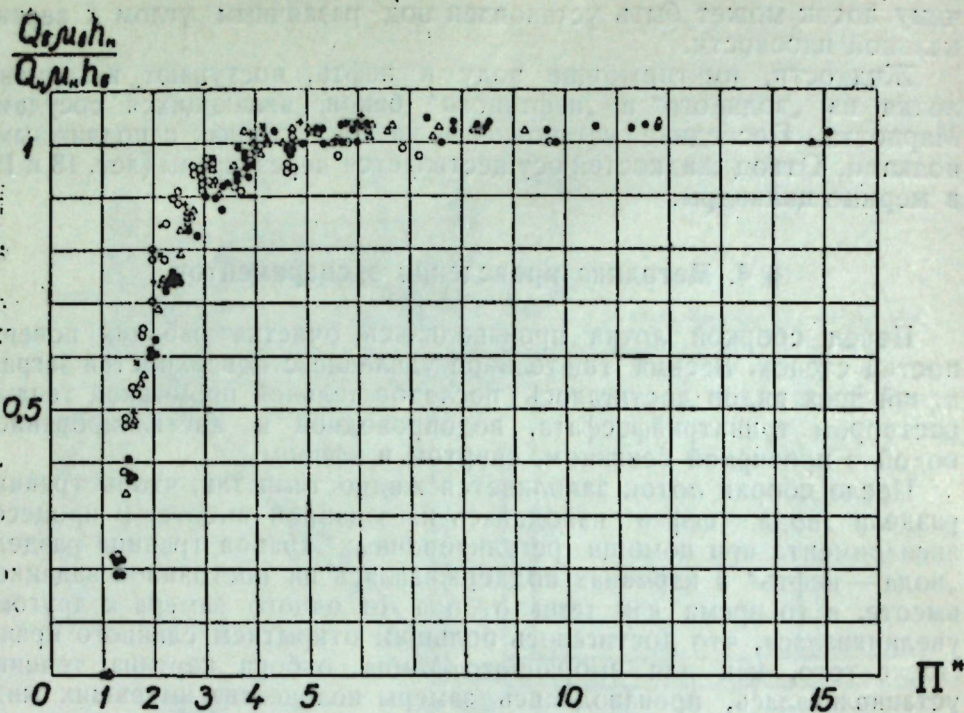
На основании этих кривых можно сделать вывод, что основным критерием, определяющим величину характеристики совместного притока, является

$$\Pi^* = \frac{\Delta p}{\Delta \gamma h_{II}}.$$

Функцию  $f$  в формуле (2.5) можно приближенно представить в следующем виде:

$$\text{при } \Pi^* \leq 1 \quad f(\Pi_\gamma, \Pi^*, \Pi_{\text{геом}}) = 0;$$

$$\text{при } \Pi^* > \Pi_{\text{кр}}^* \quad f(\Pi_\gamma, \Pi^*, \Pi_{\text{геом}}) \approx 1;$$



- $\Pi_r = 0,33, h_n/h_0 = 4$  ;  $\times \Pi_r = 0,58, h_n/h_0 = 3/2$  ;
- $\Pi_r = 0,33, h_n/h_0 = 3/2$  , +  $\Pi_r = 0,58, h_n/h_0 = 2/3$  .
- $\Pi_r = 0,33, h_n/h_0 = 2/3$  .

Фиг. 5.

$$\text{при } 1 < \Pi^* < \Pi_{кр}^* \quad f(\Pi_r, \Pi^*, \Pi_{геом}) \approx \frac{\Pi^* - 1}{\Pi_{кр}^* - 1}$$

Величина  $\Pi_{кр}^*$  зависит от  $\Pi_{геом}$ ,  $\Pi_r$ . Установление зависимости

$$\Pi_{кр}^* = \varphi(\Pi_r, \Pi_{геом})$$

должно быть предметом специальных исследований. Можно лишь указать, что  $\Pi_{кр}^*$  увеличивается с ростом  $\frac{h_n}{h_0}$ ,  $\frac{R}{H}$ . Т. о. описанные эксперименты подтверждают формулу для величины предельной депрессии при безводном конусе

$$\Delta p \leq \Delta \gamma h_n,$$

полученную М. Д. Миллионщиковым [8], справедливость предельного соотношения (1.2) и в основном совпадают с результатами [5], [6] за исключением случая малых  $\Pi^*$ .

Авторы выражают благодарность лаборанту В. К. Якимову за участие в изготовлении экспериментальной установки и подготовке ее к работе.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Глоговский М. М. Дебит скважин, несовершенных по степени вскрытия пласта. Труды МНИ им. И. М. Губкина, вып. 11, 1951.
2. Пискунов П. С. О форме поверхности раздела воды и нефти при отборе нефти из пласта и при нагнетании воды в пласт. Процесс образования водяных конусов. ДАН, 85, № 1 (1952).
3. Чарный И. А. О совместном притоке к скважинам двух жидкостей с различными вязкостью и плотностью. Инженерный сборник, т. VII, 1950.
4. Чарный И. А. Совместный приток нефти и подошвенной воды к несовершенной скважине. Изв. АН СССР, ОТН, № 2, 1955.
5. Meyer, H. I., Searcy D. F. Analog study of water coning. Petroleum Technology, April, 1956, Technical Note 328.
6. Сафронов С. В., Аллахвердиева Р. А. Экспериментальные исследования совместного притока нефти и воды к несовершенным скважинам. Труды ВНИИ МНП СССР, вып. X, 1957.
7. Аравин В. И. Основные вопросы экспериментального исследования движения грунтовых вод в щелевом лотке. Изв. НИИГ, т. 23, 1938.
8. Миллионщиков М. Д. Гидромеханический анализ некоторых способов эксплуатации нефтяных месторождений. Диссертация. Институт механики АН СССР, 1945.

Поступила  
20 марта 1958 г.

Г. П. ЦЫБУЛЬСКИЙ, Ю. А. ТЕПЛОВ

### ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ РАЗДЕЛЬНОГО ОТБОРА ВОДЫ И НЕФТИ ИЗ СКВАЖИН

В статье описываются эксперименты по разделному отбору воды и нефти из скважин в пластах с подошвенной водой, выполненные на вертикальном щелевом лотке. Результаты экспериментов приведены в форме графиков безразмерных величин.

#### § 1. Введение

При эксплуатации скважин в пластах с подошвенной водой с дебитами, превышающими предельный безводный, вместе с нефтью извлекается большое количество воды. Транспортировка обводненной нефти и последующее ее обезвоживание требуют дополнительных затрат.

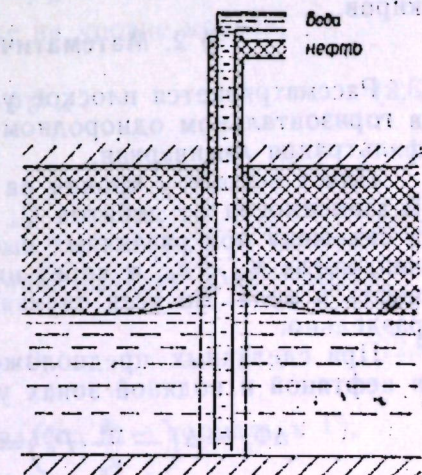
До недавнего времени в качестве мер борьбы с обводнением скважин подошвенными водами применялись ограничение дебита нефти и тампонаж. Однако, еще в 1935 г. М. Muskat и R. D. Wyckoff (1), а в 1944 г. М. Д. Миллионщиков (2) показали, что эти меры, как правило, не являются эффективными, так как сильно ограничивают темпы добычи нефти.

В своей докторской диссертации М. Д. Миллионщиков (2) предложил метод бесконусной эксплуатации скважин, сущность которого заключается в том, что вода и нефть из пласта отбираются отдельно (фиг. 1).

Вопросам практического осуществления разделного отбора воды и нефти посвящена работа М. Г. Осипова (3), под руководством которого этот метод внедрен на месторождениях Куйбышевской области.

Раздельный отбор воды и нефти (бесконусная эксплуатация) может быть осуществлен при условии, что нефти и воды отбирается столько, сколько их поступает в скважину при данном режиме эксплуатации. В противном случае по одной из труб будет идти водо-нефтяная смесь.

Поэтому знание зависимости отношения дебитов нефти и воды  $\frac{Q_n}{Q_v}$  от различных параметров жидкостей и пластов при разделном от



Фиг. 1.

боре является совершенно необходимым для практического применения последнего.

При условии, что нефть и вода отбираются из бесконечного по протяженности пласта через точечные стоки соответственно у кровли и подошвы пласта, а точка границы вода — нефть, расположенная на вертикальной оси, проходящей через стоки, остается неподвижной, М. Д. Миллиончиков (2) получил соотношение:

$$\frac{Q_n}{Q_v} = \frac{\mu_v}{\mu_n} \cdot \frac{K_n}{K_v} \psi(\alpha),$$

где  $\mu_n, \mu_v$  — динамические вязкости воды и нефти,  
 $K_n, K_v$  — проницаемости в нефтяной и водяной зонах,

$\psi(\alpha)$  — некоторая функция от  $\alpha = \frac{h_n}{h_v}$ ,

где  $h_n$  — мощность нефтенасыщенной части пласта,

$h_v$  — мощность водонасыщенной части пласта.

Из условия неподвижности границы раздела в бесконечном горизонтальном пласте Н. С. Пискунов (4) получил соотношение в виде

$$\frac{Q_n}{Q_v} = \frac{h_n \mu_v K_n}{h_v \mu_n K_v}.$$

И. А. Чарный, В. А. Евдокимова и И. Н. Кочина (5) рассмотрели задачу о раздельном отборе в случае, когда под действием капиллярного давления в переходной водо-нефтяной зоне граница раздела остается невозмущенной и течения в водяной и нефтяной зонах можно рассматривать независимо.

Ниже описываются эксперименты, проведенные на вертикальном щелевом лотке с целью установления зависимости отношения дебитов нефти и воды  $\frac{Q_n}{Q_v}$  от вязкостей  $\mu_n, \mu_v$  и удельных весов  $\gamma_n, \gamma_v$  нефти и воды, от геометрии пласта и совершенства скважины по степени и характеру вскрытия.

В проведении экспериментов принимали участие студенты-дипломники Казанского госуниверситета Н. С. Кудрявцева и А. И. Башкиров.

## § 2. Математическая постановка задачи

Рассматривается плоское установившееся течение воды и нефти в горизонтальном однородном пласте; режим пласта водонапорный, фильтрация ламинарная.

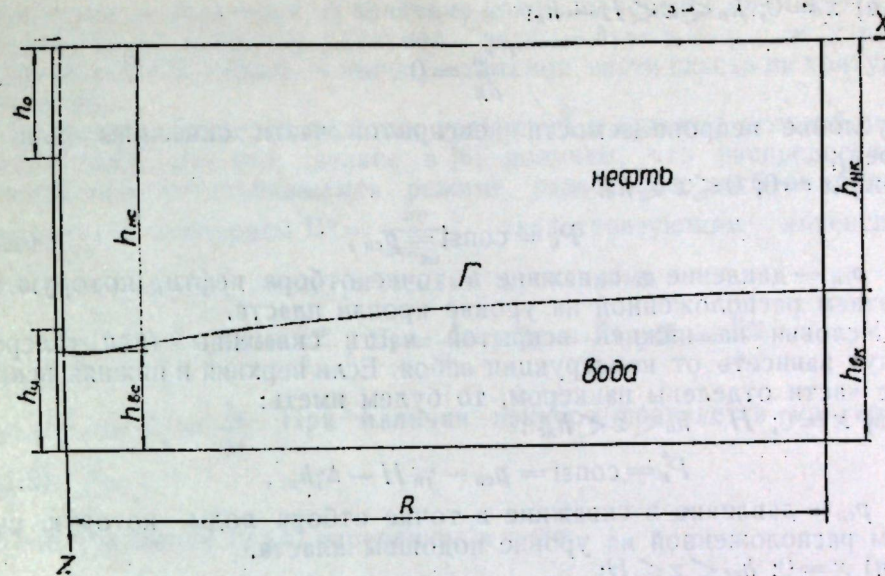
Пласт вскрыт у кровли на длину  $h_o$  и у подошвы на длину  $h_u$ . В зависимости от дебитов  $Q_n$  и  $Q_v$  нефть или вода могут поступать в скважину при различных высотах  $h_{nc}$  и  $h_{vc}$ . На фиг. 2 показан случай, когда  $h_{vc} < h_u$ , и через нижнее вскрытие поступают совместно нефть и вода. Во всех случаях нефть и вода из скважины отводятся раздельно.

При сделанных предположениях потенциалы скоростей  $\Phi_n$  и  $\Phi_v$  в нефтяной и водяной зонах удовлетворяют уравнениям Лапласа:

$$\Delta \Phi_n = \Delta \left( -\frac{k}{\mu_n} \cdot P_n^* \right) = \Delta \left[ -\frac{k}{\mu_n} (\rho_n - \gamma_n z) \right] = 0, \quad (2.1)$$

$$\Delta \Phi_v = \Delta \left( -\frac{k}{\mu_v} \cdot P_v^* \right) = \Delta \left[ -\frac{k}{\mu_v} (\rho_v - \gamma_v z) \right] = 0, \quad (2.2)$$

где  $P_n^*, P_v^*$  — приведенные и  $\rho_n, \rho_v$  — гидродинамические давления в нефтяной и водяной зонах,  
 $k$  — проницаемость.



Фиг. 2.

Краевые условия в нашем случае имеют вид:  
 а)  $z=0; 0 < x \leq R$ :

$$\frac{\partial \Phi_n}{\partial z} = 0 \quad (2.3)$$

— условие непроницаемости кровли;

б)  $z=H; 0 < x \leq R$ :

$$\frac{\partial \Phi_v}{\partial z} = 0 \quad (2.4)$$

— условие непроницаемости подошвы;

в)  $x=R; 0 \leq z < h_{nc}$ :

$$P_n^* = \text{const} = p_o, \quad (2.5)$$

где  $p_o$  — начальное пластовое давление на уровне кровли;

г)  $x=R; h_{nc} < z \leq H$ :

$$P_n^* = \text{const} = p_o - \Delta \gamma h_{nc}, \quad (2.6)$$

где  $\Delta \gamma = \gamma_n - \gamma_v$ ;

д) на  $\Gamma$ :

$$p_n = p_v \quad (2.7)$$

— условие равенства давлений на границе раздела вода — нефть;

$$\frac{\partial P_n^*}{\partial n} = \frac{\partial P_v^*}{\partial n} = 0 \quad (2.8)$$

— условия неподвижности границы раздела ( $n$  — нормаль к  $\Gamma$ );

$$\frac{dz^*}{dx} = \frac{\frac{\partial P_{n,v}^*}{\partial z}}{\frac{\partial P_{n,v}^*}{\partial x}}, \quad (2.9)$$

где  $z = z^*(x)$  — уравнение контура  $\Gamma$ ;

е)  $x=0; h_o < z < H - h_u$ :

$$\frac{\partial \Phi_{II}}{\partial x} = 0 \quad (2.10)$$

— условие непроницаемости не вскрытой части скважины (или галереи);

ж)  $x=0; 0 \leq z \leq h_o$ :

$$P_{II}^* = \text{const} = p_{св}, \quad (2.11)$$

где  $p_{св}$  — давление в скважине в точке отбора нефти, которую мы считаем расположенной на уровне кровли пласта.

Условия на нижней вскрытой части скважины (или галереи) будут зависеть от конструкции забоя. Если верхняя и нижняя вскрытые части отделены паккером, то будем иметь:

з)  $x=0; H - h_u < z < h_{ис}$ :

$$P_{II}^* = \text{const} = p_{св} - \gamma_{II} H - \Delta \gamma h_{ис}, \quad (2.12_1)$$

где  $p_{св}$  — давление в скважине в точке отбора воды, которую считаем расположенной на уровне подошвы пласта.

и)  $x=0; h_{ис} < z \leq H$ :

$$P_{II}^* = \text{const} = p_{св} - \gamma_{в} H. \quad (2.13_1)$$

Если паккер отсутствует и скважина представляет единую систему, то получим:

к)  $x=0; H - h_u \leq z < h_{ис}$ :

$$P_{II}^* = \text{const} = p_{св}; \quad (2.12_2)$$

л)  $x=0; h_{ис} < z \leq H$ :

$$P_{II}^* = \text{const} = p_c - \Delta \gamma h_{ис}. \quad (2.13_2)$$

Очевидно, что условия (2.10) ÷ (2.13) зависят от положения точки пересечения границы раздела  $\Gamma$  с скважиной (или галереей). В случае прерывистой перфорации потенциалы в условиях (2.11) — (2.13) задаются на вскрытых участках, а на не вскрытые участки распространяется условие (2.10). Искомое отношение дебитов нефти и воды выражается формулой

$$\frac{Q_{II}}{Q_{в}} = \frac{\nu_{в}}{\nu_{II}} \cdot \frac{\int_0^{h_{нк}} \frac{\partial p_{II}}{\partial x} dz}{\int_{h_{нк}}^H \frac{\partial p_{II}}{\partial x} dz} = \frac{h_{нк} \cdot \nu_{в}}{h_{вк} \cdot \nu_{II}} \cdot \frac{\left. \frac{\partial p_{II}}{\partial x} \right|_{ср}}{\left. \frac{\partial p_{II}}{\partial x} \right|_{ср}},$$

которую можно переписать в виде

$$\frac{Q_{в} \nu_{в} h_{нк}}{Q_{II} \nu_{II} h_{вк}} = \frac{\left. \frac{\partial p_{в}}{\partial x} \right|_{ср}}{\left. \frac{\partial p_{II}}{\partial x} \right|_{ср}}. \quad (2.14)$$

### § 3. О критериях подобия

Целью настоящей работы было установление зависимости вида (2.14) экспериментальным путем через безразмерные величины — критерии подобия.

Выберем за характерную величину давления перепад  $\Delta p = p_o - p_{св}$ ; за характерную величину удельного веса —  $\Delta \gamma = \gamma_{в} - \gamma_{II}$ ; за характерный линейный размер — высоту нефтяной части пласта на контуре питания  $h_{нк}$ .

Из анализа дифференциальных уравнений и краевых условий аналогично тому, как это сделано в [6], получим, что распределение давлений при установившемся режиме раздельного отбора будет определяться критерием  $\Pi^* = \frac{\Delta p}{\Delta \gamma h_{нк}}$ , характеризующим интенсивность эксплуатации, геометрическими критериями

$$\Pi_1 = \frac{R}{h_{нк}}, \quad \Pi_2 = \frac{h_{вк}}{h_{нк}}, \quad \Pi_3 = \frac{h_o}{h_{нк}}, \quad \Pi_4 = \frac{h_u}{h_{нк}}, \quad \Pi_5 = \frac{h_{ис}}{h_{нк}}$$

и критерием  $\Pi_7 = \frac{\gamma_{II}}{\Delta \gamma}$ . При наличии паккера появляется критерий

$$\Pi_n = \frac{p_o - p_{св}}{\Delta p}.$$

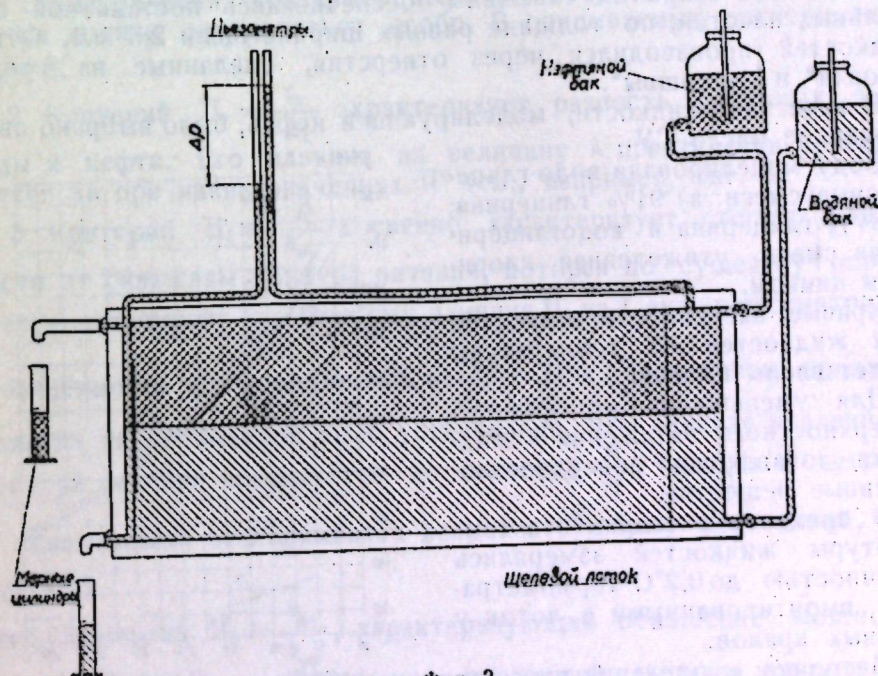
Если уравнение (2.14) перепишем в виде

$$\frac{Q_{в} \nu_{в} h_{нк}}{Q_{II} \nu_{II} h_{вк}} = f(\Pi^*, \Pi_n, \Pi_7, \Pi_{геом}), \quad (3.1)$$

то искомым будет вид функции  $f$ . Под  $\Pi_{геом}$  будем понимать совокупность геометрических критериев подобия.

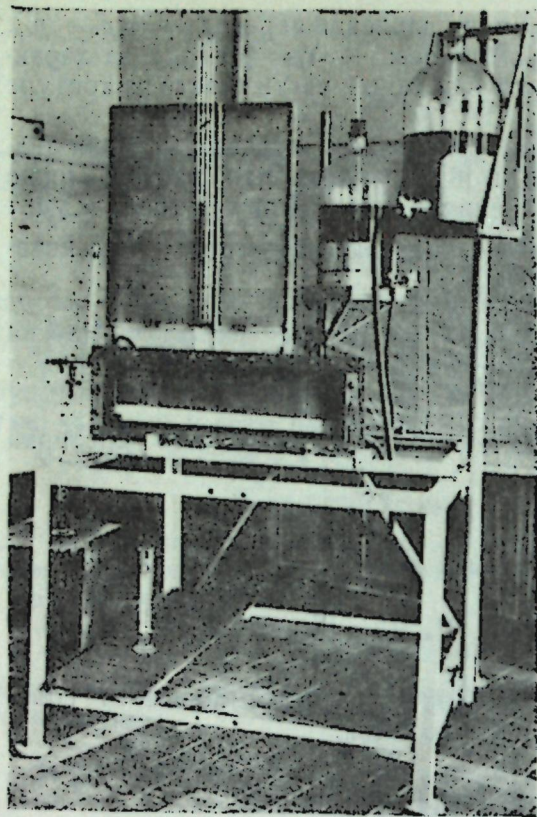
### § 4. Экспериментальная установка

Принципиальная схема экспериментальной установки представлена на фиг. 3, а на фиг. 4 дан ее общий вид в работе.



Фиг. 3.

Основной частью установки является вертикальный щелевой лоток, в котором используется аналогия между движениями вязкой жидкости в пористой среде и в узкой щели между двумя пластинами



Фиг. 4.

Различные вскрытия скважины обеспечивались постановкой специальных пластин, по толщине равных ширине щели 2,5 мм. Отвод жидкостей производился через отверстия, сделанные на уровне „кровли“ и „подошвы“.

В качестве жидкости, моделирующей нефть, было выбрано автомобильное масло СУ.

Воду моделировали водо-глицериновые смеси: а) 91% глицерина; б) 84% глицерина и водоглицериновая смесь, утяжеленная хлористым цинком.

Кривые зависимости вязкостей этих жидкостей от температуры представлены на фиг. 5.

Для уменьшения межфазного поверхностного натяжения в жидкости добавлялись поверхностно-активные вещества.

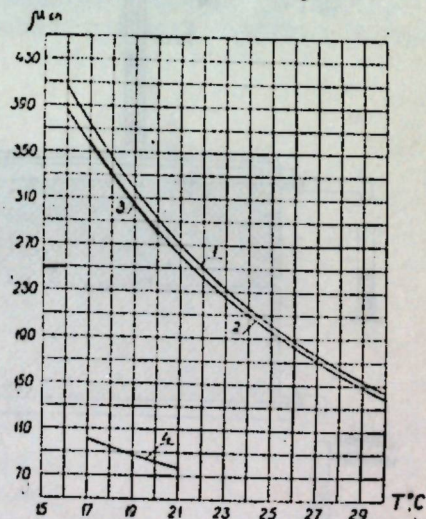
В процессе эксперимента температуры жидкостей замерялись с точностью до 0,2°C термометрами, вмонтированными в лоток у сливных кранов.

Методика проведения экспериментов принципиально ничем не отличалась от описанной ранее [6]\*.

\* В изготовлении экспериментальной установки и подготовке ее к работе принимал участие лаборант В. К. Якимов.

[7]. Во всех экспериментах число Рейнольдса не превышало 10, что обеспечивало указанную выше аналогию. Конструктивно щелевой лоток представляет собой два листа плексигласа толщиной 35 мм и размером 805 × 270 мм, соединенные между собой 34 болтами. Между листами вставлены калиброванные стальные пластины толщиной 2,5 мм, которые обеспечивают щель постоянной толщины, и резиновая прокладка, ограничивающая область течения размером 630 × 160 мм. По краям щели сделаны карман шириной 55 мм и глубиной 35 мм, который моделирует контур питания, и выемка шириной 8 мм и глубиной 12 мм, которая моделирует скважину.

Так как щель была плоской, то мы фактически исследовали приток к галерее. Однако, качественно выводы, очевидно, справедливы и для притока к одиночной скважине.



1-масло СУ; 2-91% глицерина-9% вода; 3-глицерин-вода-мл цинки; 4-84% глицерина-16% вода.

Фиг. 5.

## § 5. Результаты экспериментов

Данные замеров по экспериментам и результаты пересчета на безразмерные величины изображены в виде отдельных точек на графиках фиг. 6—13, где по оси абсцисс отложены значения критерия  $\Pi^*$ , а по оси ординат значения  $\lambda = \frac{Q_{в} \rho_{н} h_{нк}}{Q_{п} \rho_{п} h_{вк}}$ . Критерии  $\Pi_1, \Pi_2, \Pi_3, \Pi_4$  и  $\Pi_5$  при этом рассматривались как параметры. Такая форма построения графиков является наиболее удобной, так как основным параметром, влияющим на искомую величину  $\lambda$ , является  $\Pi^*$ . Влияние других параметров зависит, в свою очередь, от  $\Pi^*$ : при увеличении  $\Pi^*$  оно уменьшается.

Прежде, чем анализировать приведенные ниже графики  $\lambda = f(\Pi^*)$ , необходимо отметить, что при проведении всех замеров допускались неизбежные погрешности. Так, например, объемы жидкостей измерялись с точностью от 1% до 2% в зависимости от точности мерных цилиндров и абсолютных значений отобранных объемов, высоты — с точностью 0,5—1,5%; температура — с точностью до 0,2°C, в результате чего вязкости определялись с точностью 2%. В результате наложения погрешностей величины  $\lambda$  подсчитывались с точностью до 10%.

С учетом сказанного выше из анализа графиков на фиг. 6—13 можно сделать следующие заключения о влиянии различных критериев на величину  $\lambda$ .

1. Критерий  $\Pi^* = \frac{\Delta p}{\Delta \gamma h_{нк}}$ , характеризующий интенсивность эксплуатации, является основным, поскольку его величина определяет влияние на  $\lambda$  всех других параметров. При  $\Pi^* > \Pi_{кр}^*$  во всех случаях практически можно считать  $\lambda \approx 1$ . При  $\Pi^* < \Pi_{кр}^*$  сказывается влияние геометрических критериев. Величина  $\Pi_{кр}^*$  в каждом конкретном случае должна определяться особо. В описываемых экспериментах  $\Pi_{кр}^* = 3$ .

2. Критерий  $\Pi_1 = \frac{\gamma_{п}}{\Delta \gamma}$  характеризует разность удельных весов воды и нефти. Его влияние на величину  $\lambda$  практически не сказывается ни при каких значениях  $\Pi^*$  (см., например, фиг. 6).

3. Критерий  $\Pi_2 = \frac{R}{h_{нк}}$  косвенно характеризует степень удаленности от скважины контура питания, которая по существу определяется величиной  $\frac{R}{H}$ . Поэтому влияние  $\Pi_2$  на  $\lambda$  нужно рассматривать в зависимости от величины  $\Pi_2 = \frac{h_{вк}}{h_{нк}}$ . При проведении предварительных экспериментов было установлено, что влияние удаленности контура питания сказывается до значений  $\frac{R}{H}$ , близких к четырем.

В описываемых экспериментах величина  $\frac{R}{H}$  была постоянной, равной 3,94.

4. Критерий  $\Pi_3 = \frac{h_{вк}}{h_{нк}}$ , характеризующий отношение мощностей водонасыщенной и нефтенасыщенной частей пласта на контуре питания, на величину  $\lambda$  влияния не оказывает (см., например, фиг. 7, 10).

5. Критерий  $\Pi_4 = \frac{h_0}{h_{нк}}$  влияет на  $\lambda$  только при малых значениях  $\Pi^*$  и только в том случае, когда  $\Pi_2 < 1$  и  $\Pi_4 = 0$ . При  $\Pi_2 < 1$



начальный уровень границы раздела вода—нефть находится ниже вскрытой части пласта. Поэтому при  $\Pi_4 = 0$  требуется создать конечный перепад давления на скважине, которому соответствует некоторое значение  $\Pi_1^*$ , а значит и конечный дебит нефти  $Q_n$ , при котором граница раздела, деформируясь и образуя конус, дойдет до скважины и будет возможен отдельный отбор. При  $\Pi^* < \Pi_1^*$   $\lambda = 0$ . При увеличении  $\Pi^*$  значение  $\lambda$  будет также увеличиваться, приближаясь к  $\lambda = 1$  (фиг. 7, 10, 12, 13).

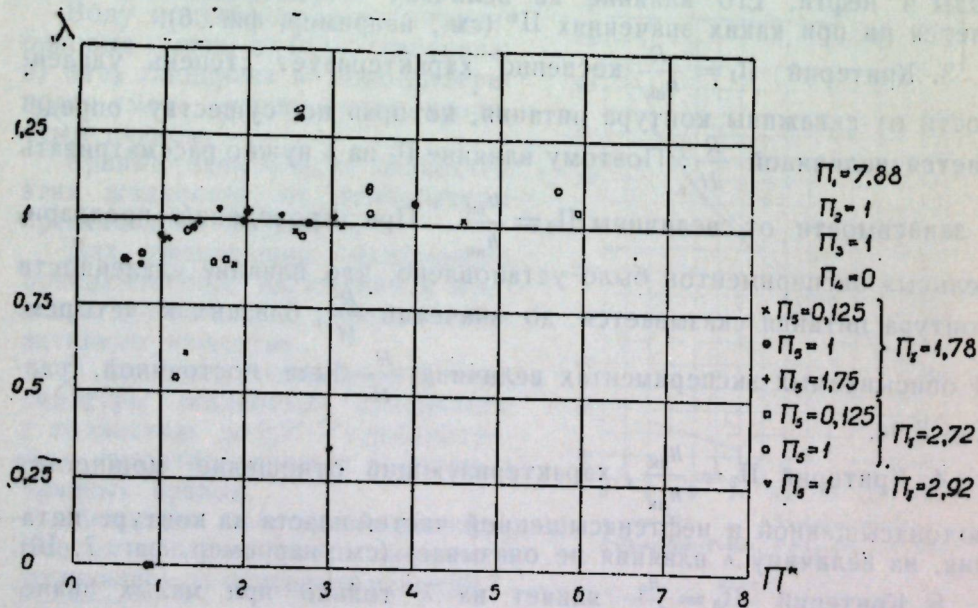
6. Критерий  $\Pi_4 = \frac{h_u}{h_{нк}}$  определяет влияние на величину  $\lambda$  критерия  $\Pi_3$ , о чем сказано выше. Если  $\Pi_4 > 0$  и  $\Pi_3 > 0$ , то при всех значениях  $\Pi^*$  значение  $\lambda$  практически близко к единице (см. фиг. 10, 11, 12, 13).

7. Критерий  $\Pi_5 = \frac{h_{ис}}{h_{нк}}$  характеризует сравнительные положения водо-нефтяного контакта на скважине и на контуре питания.

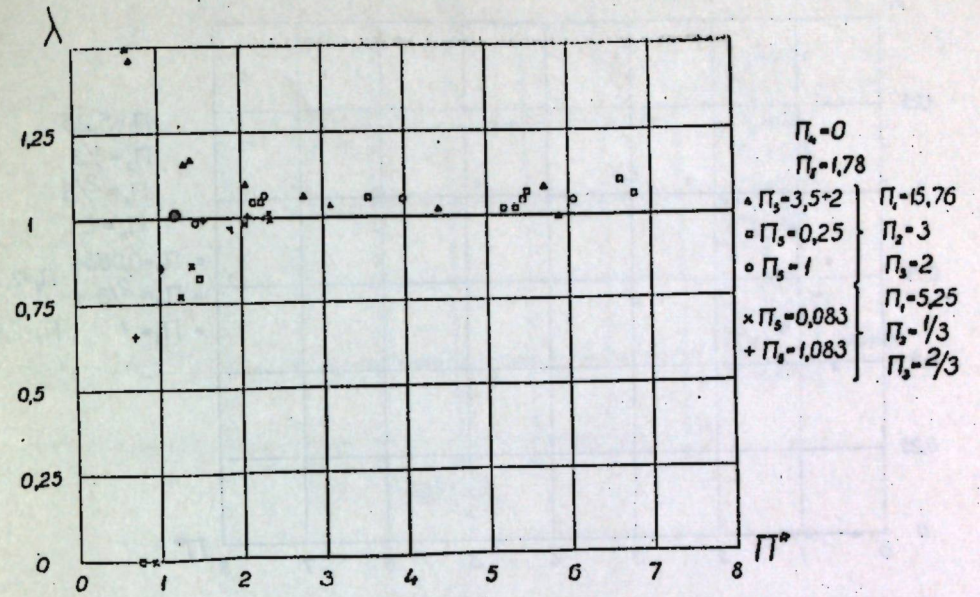
При проведении экспериментов без паккера было замечено, что контакт в скважине очень чувствителен к малейшим изменениям дебитов  $Q_n$  и  $Q_b$  особенно при  $\Pi_4 = 0$ .

С целью выявления влияния положения контакта на величину  $\lambda$  были проведены эксперименты при  $h_{ис} = 10$  мм и  $h_{ис} = 150$  мм, что соответствовало почти предельным положениям вершины конуса обводнения и обращенного конуса. Оказалось, что при малых значениях  $\Pi^*$  влияние  $\Pi_5$  на величину  $\lambda$  весьма существенно (см. расположение экспериментальных точек на фиг. 6, 7, 8, 9, 10, 11). По мере увеличения  $\Pi^*$  это влияние уменьшается, а при  $\Pi^* > \Pi_{кр}^*$  не сказывается совсем.

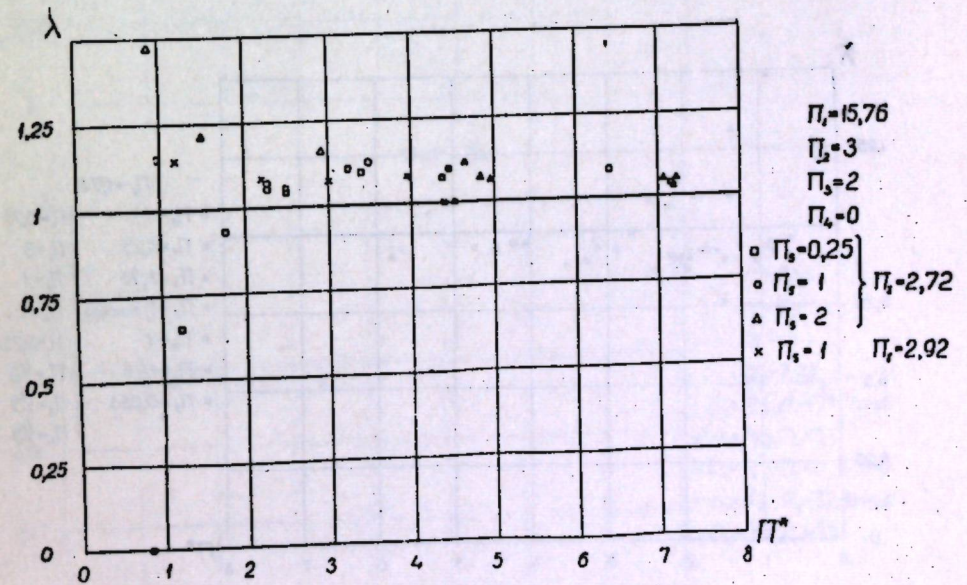
Анализ влияния критерия  $\Pi_5$  на величину  $\lambda$  говорит о том, что при осуществлении интенсивного отдельного отбора необходимо точно соблюдать предельное значение величины  $\lambda$ , иначе по одной из систем труб будет происходить совместный отбор воды и нефти.



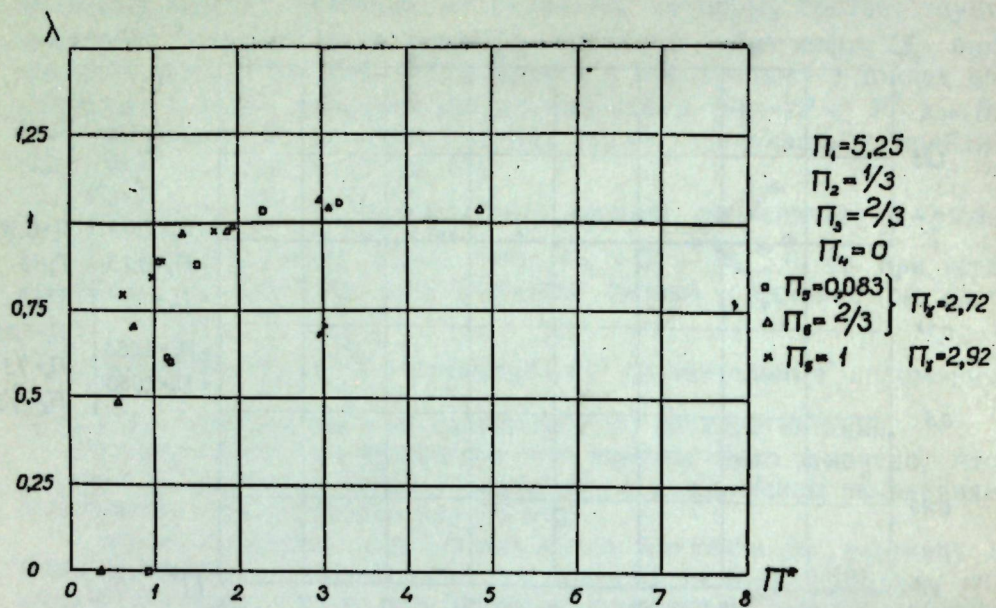
Фиг. 6.



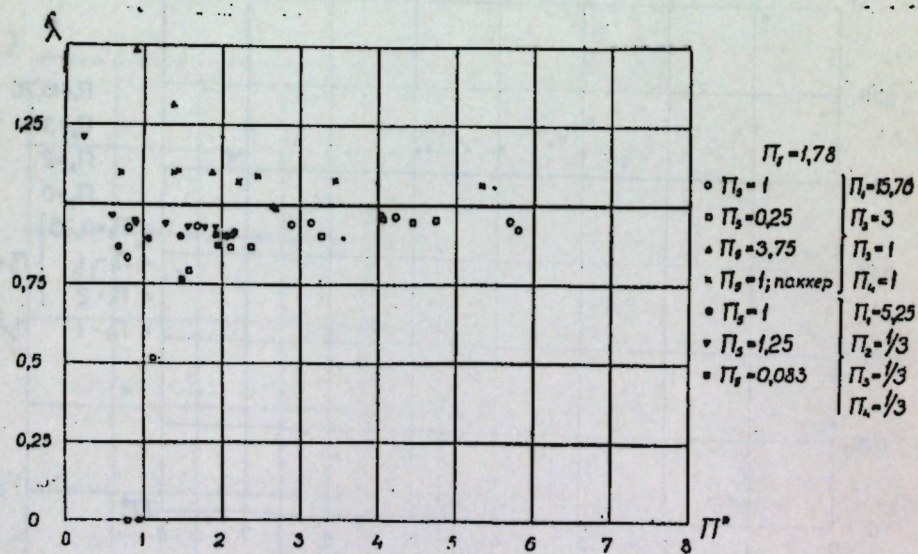
Фиг. 7.



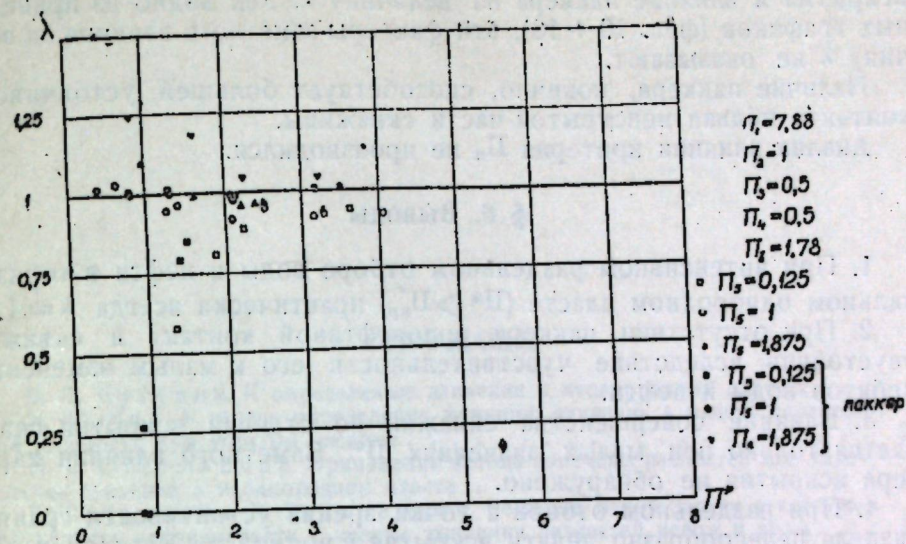
Фиг. 8.



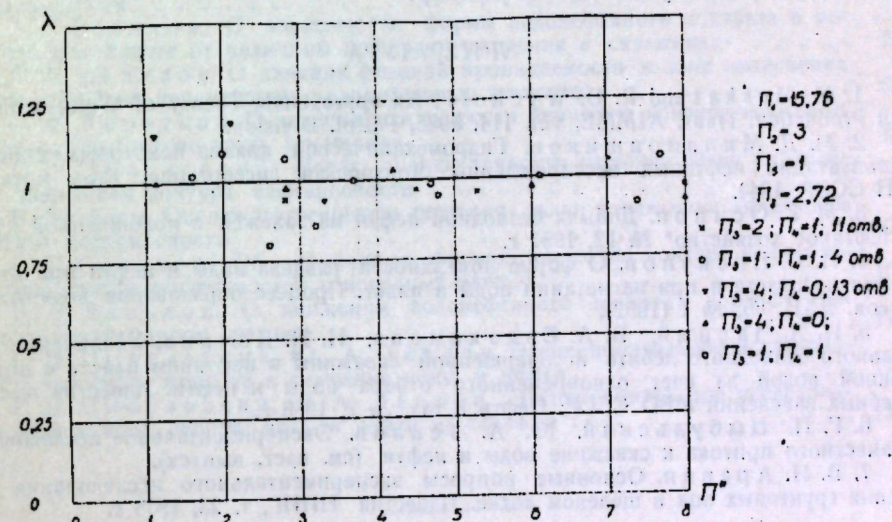
Фиг. 9.



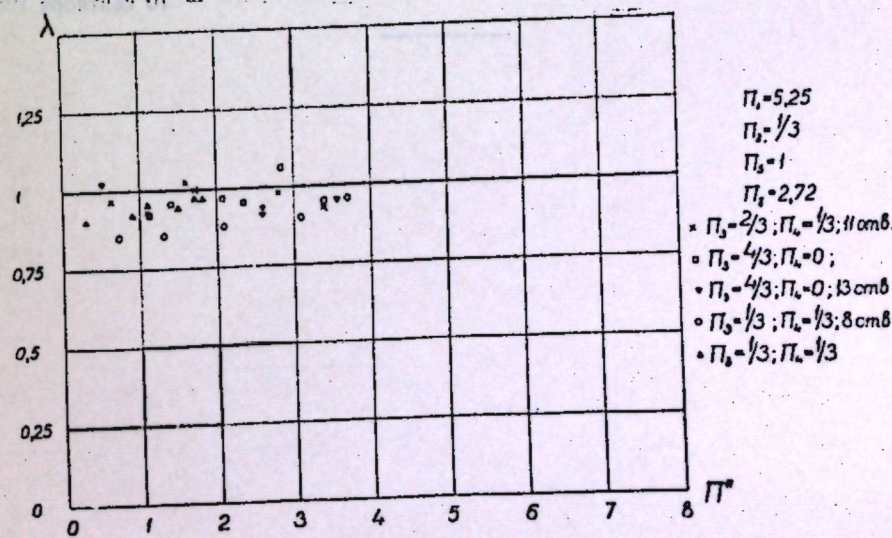
Фиг. 10.



Фиг. 11.



Фиг. 12.



Фиг. 13.

Было исследовано влияние совершенства скважины по характеру вскрытия и влияние паккера на величину  $\lambda$ . Как видно из приведенных графиков (фиг. 10—13), эти факторы заметного влияния на величину  $\lambda$  не оказывают.

Наличие паккера, конечно, способствует большей устойчивости контакта вблизи не вскрытой части скважины.

Анализ влияния критерия  $\Pi_n$  не производился.

## § 6. Выводы

1. При интенсивном раздельном отборе воды и нефти в горизонтальном однородном пласте ( $\Pi^* > \Pi_{кр}^*$ ) практически всегда  $\lambda = 1$ .

2. При отсутствии паккера водонефтяной контакт в скважине неустойчив вследствие чувствительности его к малым изменениям дебитов воды и нефти.

3. Влияние совершенства скважины по степени вскрытия сказывается только при малых значениях  $\Pi^*$ . Заметного влияния характера вскрытия не обнаружено.

4. При раздельном отборе с точки зрения устойчивости границы раздела целесообразно делать вскрытие в водной и нефтяной частях пласта, а также установить паккер.

## ЛИТЕРАТУРА

1. M. Muskat and R. D. Wyckoff. An approximate Theory of Water-coning in Oil Production. Trans. AIME, vol. 114, 1935, Petrol. Division.

2. М. Д. Миллионщиков. Гидромеханический анализ некоторых способов эксплуатации нефтяных месторождений. Докторская диссертация. Ин-т механики АН СССР, 1944.

3. М. Г. Осипов. Добыча безводной нефти из залежей с подошвенной водой. „Нефтяное хозяйство“ № 12, 1957 г.

4. Н. С. Пискунов. О форме поверхности раздела воды и нефти при отборе нефти из пласта и при нагнетании воды в пласт. Процесс образования водяных конусов. ДАН, 85, № 1 (1952).

5. И. А. Чарный, В. А. Евдокимова, И. Н. Кочина. Увеличение предельного безводного дебита несовершенной скважины в нефтяном пласте с подошвенной водой за счет одновременного отбора воды и нефти. Известия высших учебных заведений МВО СССР; Нефть и газ, № 2, 1958 г.

6. Г. П. Цыбульский, Ю. А. Теплов. Экспериментальное исследование совместного притока к скважине воды и нефти (см. наст. выпуск).

7. В. И. Аравин. Основные вопросы экспериментального исследования движения грунтовых вод в щелевом лотке. Известия НИИГ, т. 23, 1938 г.

Поступила  
10 сентября 1958 г.

## СОДЕРЖАНИЕ

В. Д. Чугунов. К определению давления в неоднородных пластах . . . . .	5
В. Ю. Ким. К задаче определения функции давления в пласте переменной мощности при упругом режиме . . . . .	23
Л. В. Старшинов. Применение метода конечных разностей для определения давления в неоднородном пласте . . . . .	27
В. Л. Данилов, В. В. Скворцов. Решение одной задачи о стягивании контура нефтеносности с учетом различия вязкостей нефти и воды . . . . .	37
В. Л. Данилов. Условия геометрической инвариантности контуров нефтеносности . . . . .	49
Г. Г. Вахитов. О зависимости формы водонефтяного контакта в неоднородном пласте от величины перепадов давления в скважинах . . . . .	55
В. Л. Данилов. О влиянии фазовой проницаемости в зоне вытеснения нефти водой на перемещение водонефтяного контакта . . . . .	63
С. Ф. Коротков. О зависимости скорости движения контура нефтеносности от параметров зоны замещения . . . . .	81
Г. П. Цыбульский. Метод оценки точности решения задач управления движением контура нефтеносности . . . . .	91
В. Ю. Ким. Оценка погрешности решения задач управления движением контура нефтеносности . . . . .	101
Г. С. Салехов. Об устойчивых формах движения контура нефтеносности с учетом погрешностей в исходных данных . . . . .	107
В. Л. Данилов. О движении водонефтяного контакта в пласте при упруго-водонапорном режиме . . . . .	117
Г. П. Цыбульский, Ю. А. Теплов. Экспериментальное исследование совместного притока к скважине воды и нефти . . . . .	125
Г. П. Цыбульский, Ю. А. Теплов. Экспериментальное исследование раздельного отбора воды и нефти из скважин . . . . .	135