

П-147

АКАДЕМИЯ НАУК СССР
КАЗАНСКИЙ ФИЛИАЛ

**ИЗВЕСТИЯ
КАЗАНСКОГО ФИЛИАЛА
АКАДЕМИИ НАУК СССР**

*СЕРИЯ ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИХ
И ТЕХНИЧЕСКИХ НАУК*

12



КАЗАНЬ

1958

АКАДЕМИЯ НАУК СССР
КАЗАНСКИЙ ФИЛИАЛ

ИЗВЕСТИЯ
КАЗАНСКОГО ФИЛИАЛА
АКАДЕМИИ НАУК СССР

*СЕРИЯ ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИХ
И ТЕХНИЧЕСКИХ НАУК*

Выпуск 12

НЕКОТОРЫЕ ЗАДАЧИ
НЕЛИНЕЙНОЙ ТЕОРИИ ОБОЛОЧЕК

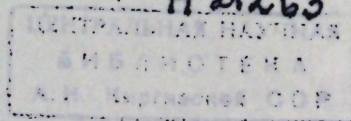
СССР



ПОСВЯЩАЕТСЯ Сороковой ГОДОВЩИНЕ
ВЕЛИКОЙ ОКТЯбрьской
СОЦИАЛИСТИЧЕСКОЙ РЕВОЛЮЦИИ

Ответственный редактор
профессор *Х. М. Муштар*

п. 21263



Печатается по постановлению
Редакционно-издательского совета
Казанского филиала Академии наук СССР

Х. М. Муштари

**РАБОТЫ КАЗАНСКИХ УЧЕНЫХ ПО НЕЛИНЕЙНОЙ ТЕОРИИ
 ОБОЛОЧЕК ПОСЛЕ ВЕЛИКОЙ ОКТЯБРЬСКОЙ
 СОЦИАЛИСТИЧЕСКОЙ РЕВОЛЮЦИИ**

Классическая теория упругости построена на предположении, что смещения и деформации точек упругого тела под действием приложенной нагрузки малы и что вследствие этого квадратами и высшими степенями их можно пренебречь по сравнению с первыми степенями. Такая теория, называемая в настоящее время линейной, удовлетворяла запросам расчетной практики до тех пор, пока не назрела необходимость в уточнении расчетов деталей машин и сооружений на прочность и на устойчивость. Для современного машиностроения, в частности, для самолето-моторостроения, для кораблестроения, для приборостроения и т. п. особенно важно развитие теории тонких гибких пластин и оболочек с учетом нелинейных факторов. Еще на заре XX века И. Г. Бубнов, которого справедливо называют отцом современной строительной механики корабля, поставил и разрешил ряд задач теории изгиба пластин, входящих в корабельные конструкции, с учетом мембранных напряжений, возникающих при изгибе и играющих существенную роль, если прогибы точек пластины не малы по сравнению с ее толщиной. С тех пор нелинейная теория гибких пластин и оболочек бурными темпами двигалась вперед.

До Великой Октябрьской революции в Казани не было крупной машиностроительной промышленности. Этим, по-видимому, можно объяснить тот факт, что до Октября ученые Казани вопросами теории тонких оболочек не занимались. Интерес к этой теории у нас появился лишь начиная с тридцатых годов с развитием машиностроения и связанного с ним высшего технического образования.

В настоящее время значительная группа казанских ученых, в числе которых имеется ряд ученых из татар (К. З. Галимов, Н. С. Ганеев, Р. Г. Суркин и др.), вносит свой вклад в нелинейную теорию оболочек, занимаясь по преимуществу теорией устойчивости и больших прогибов упругих оболочек, существенно дополняя этим исследование Московской школы механиков, основное внимание которой обращено на проблемы теории пластичности. Данная статья посвящена краткому обзору соответствующих работ. Значительная часть их получила более полное освещение в монографии Х. М. Муштари и К. З. Галимова [52].

Следует также отметить, что многие из этих исследований были вызваны к жизни запросами новой техники, а в ряде случаев были выполнены по техническим заданиям отраслевых научно-исследовательских институтов и опытных конструкторских бюро крупных машиностроительных заводов.

1. Общие вопросы теории

Основные зависимости нелинейной теории тонких пологих оболочек были получены в 1938 г. в монографии [29] Х. М. Муштари, при чем предполагалось, что материал оболочки ортотропен и подчиняется линейному закону Гука и что имеет место средний изгиб, т. е. компоненты смещения точек оболочки сравнимы с ее толщиной, но малы по сравнению с другими линейными размерами. Пользуясь ими, была разработана теория устойчивости оболочек, которая в случае, когда оболочка при выпучивании делится на большое число пологих частей, была сильно упрощена путем пренебрежения влиянием перерезывающих сил на равновесие мембранных усилий и касательных компонент перемещения на параметры изменения кривизны срединной поверхности оболочки. При этом задача рассматривалась в компонентах перемещения. Дальнейшее упрощение и развитие такой теории, названной впоследствии теорией пологих оболочек, было дано в работах Вей-цанг Чена, В. З. Власова и др.

В статье [34] было доказано, что линейная теория оболочек может привести к погрешности, превышающей возможную погрешность от принятия гипотез Кирхгофа-Лява, если оболочка тонкая или средней толщины, а изгиб — средний.

В статье [35] теория деформации оболочки распространяется на случай сильного изгиба, когда прогиб может быть величиной одного порядка с линейными размерами оболочки.

В статье [37] дается новая классификация задач теории конечного изгиба при малых деформациях и качественное исследование некоторых из этих задач.

В заметке [38] развиты основные положения нелинейной теории краевого эффекта, проиллюстрированные на примере цилиндрической оболочки.

В статье [41] выведены основные зависимости теории тонкой оболочки, срединная поверхность которой имеет малые, но конечные отклонения от некоторой поверхности простой формы, принятой за систему отсчета. В частности, когда системой отсчета является плоскость, получаются уравнения нелинейной теории пологих оболочек в форме Маргерра.

В статье [39] выведены уравнения равновесия и условия совместности деформаций для трех последовательных напряженных состояний, из которых первое представляет начальное напряженное состояние, второе — напряженное состояние после приложения нагрузки, третье состояние получается после бесконечно малой возможной вариации второго состояния равновесия.

В монографии [52] теория обобщена на случай оболочки, имеющей начальные деформации и начальные напряжения, например, температурного происхождения.

В статье [50] ставится проблема малого, но конечного изгиба пологих оболочек. Здесь предполагается, что прогиб — величина порядка $t\sqrt{t/L}$, где t — толщина, L — характерный размер оболочки. При этом оказывается допустимым в пределах точности теории пологих оболочек упростить решение нелинейных уравнений, подставляя в нелинейные члены решения линейных уравнений. Поправка к линейной теории, даваемая этой „полулинейной“ теорией, оказывается существенной, в особенности, при решении задачи изгиба оболочек средней толщины, для которых t/L — величина порядка $\sqrt{\epsilon_p}$, где ϵ_p — допускаемое удлинение.

Общая теория температурных напряжений в пластинках и оболочках дана в статье [1] С. Г. Винокурова. К. З. Галимовым и Х. М. Муштари [12] она обобщена на случай подкрепленных оболочек

и развита применительно к теории устойчивости оболочек под действием „температурной нагрузки“.

Теория устойчивости оболочек ортотропных как по материалу, так и по конструкции, была развита еще в монографии [29]. В частности, уточняя и развивая исследования Губера и Флюгге, было предложено рассматривать изотропную оболочку, подкрепленную равноотстоящими продольными и поперечными упругими ребрами, как ортотропную оболочку с некоторыми приведенными жесткостями на изгиб, сжатие, сдвиг и кручение, если рассматривается такая деформация, частота изменения которой по поверхности оболочки мала по сравнению с частотой расположения подкрепляющих ребер. Удовлетворительность такой модели подкрепленной оболочки была показана путем двойного решения ряда частных задач: на основе теории ортотропной оболочки и не пользуясь ею. В монографии [29] и в статье [33] такому рассмотрению была подвергнута задача устойчивости гофрированной цилиндрической оболочки соответственно при продольном сжатии и при внешнем нормальном давлении. С этой же целью было выполнено исследование [26] В. В. Крылова, в котором рассматривается устойчивость при кручении длинной цилиндрической оболочки, подкрепленной равноотстоящими шпангоутами, не пользуясь теорией ортотропной оболочки. Полученные при этом результаты подтверждают пригодность соответствующего решения монографии [29] по теории ортотропной оболочки. В приложении к нашей статье [44] такое рассмотрение было проведено применительно к задаче устойчивости цилиндрической оболочки средней длины, находящейся под действием всестороннего сжатия.

Ряд существенных результатов в построении общей нелинейной теории оболочек принадлежит К. З. Галимову. В его статьях [10, 11] значительно упрощены выражения параметров изменения кривизны при произвольных изгибах и дан новый вывод условий неразрывности конечных деформаций оболочки. В статье [4] выведены уравнения равновесия нелинейной теории оболочек, отнесенные к деформированному и недеформированному состояниям оболочки, путем введения особых тензоров усилий и моментов. В статье [5] сформулированы в общем виде статические граничные условия при конечных деформациях. Эти условия выражены в усилиях и моментах в главе VI монографии [52]. В статье [6] изложена нелинейная теория оболочек, подвергнутых трем последовательным напряженным состояниям, относя векторные и тензорные величины к недеформированному состоянию оболочки. В статье [7] доказывается, что решения однородных уравнений равновесия при произвольных перемещениях и деформациях выражаются через три произвольные функции. Там же сформулирован принцип вариации напряженного состояния для геометрически и физически нелинейных задач. В статье [8] дано доказательство вариационной теоремы смешанного типа для общей нелинейной теории оболочек. В главе VI монографии [52] изложен принцип вариации напряженного состояния применительно к теории пологих оболочек и доказано, что статически возможная вариация осуществляется вариацией одной функции напряжения.

В статье А. П. Нордена [53] были рассмотрены некоторые вопросы геометрической теории конечных деформаций.

2. Методы решения задач нелинейной теории оболочек

В монографии [29] и в ряде статей [27, 28, 31, 33, 36] Х. М. Муштари применял к решению задач прочности и устойчивости оболочек метод точного интегрирования упрощенных им уравнений равновесия в компонентах перемещения. Наряду с этим в ра-

боте [29] был предложен энергетический критерий устойчивости оболочек в малом, исходя из принципа возможных перемещений, для случая, когда внешние силы даны независимо от деформации оболочки.

В статьях [40, 48] рассматривается вопрос о применении метода Ритца к решению нелинейных задач, причем отмечается, что при аппроксимации функций напряжения и прогиба с помощью функции, зависящей от небольшого числа независимых параметров, необходимо варьировать полную энергию оболочки не только по параметрам амплитуды прогиба и функции напряжения, но и по искомым частотам изменения этих величин.

В тех случаях, когда область образования выпучины также является искомой, при применении метода Бубнова — Галеркина следует интегрировать уравнения равновесия по площади срединной поверхности оболочки, предварительно умножив их на вариации аппроксимирующих функций (а не на эти функции, как делается обычно). Этот вопрос на примере теории хлопка сферической оболочки был рассмотрен в статье Р. Г. Суркина [69], а на примере симметричной деформации длинной полотой цилиндрической панели был исследован в статье М. С. Корнишина [20]. В этой последней показано, что влияние варьирования области хлопка особенно велико для панелей с большим параметром кривизны.

В статье [7] К. З. Галимов излагает вариационные методы решения задач нелинейной теории оболочек. В частности, им выведены такие уравнения метода Бубнова — Галеркина, которые не связаны с энергетическим функционалом. В главе XIV монографии [52] Галимовым предложен метод интегрирования в рядах основных уравнений нелинейной теории пологих оболочек, применение которого иллюстрируется на примере цилиндрической панели, находящейся под действием равномерно распределенного нормального давления, при различных граничных условиях. Решение тех же задач методом Папковича было рассмотрено в статье [9].

Работы И. В. Свирского были посвящены в основном оценке точности ныне существующих методов Бубнова — Галеркина и Ритца, и построению новых вариантов вариационных методов.

В работе [59] на примере определения критической нагрузки, вызывающей выпучивание стержня переменного сечения, описан способ оценки точности метода Ритца или Галеркина, применимый даже в тех случаях, когда аппроксимирующие функции не удовлетворяют статическим граничным условиям.

В статьях [60—63] даются способы оценки точности метода Бубнова—Галеркина при определении частот колебаний и критических нагрузок упругих систем, а также при решении статических задач и задач о вынужденных колебаниях упругих систем. Особенностью этих способов является аппроксимация дифференциального оператора, описывающего упругую систему, с помощью двух операторов — верхнего и нижнего (с избытком и недостатком), что дает возможность оценить искомые величины как сверху, так и снизу. В статье [61], кроме того, указывается, в каких случаях метод Бубнова — Галеркина является достаточно оправданным и когда при решении линейных задач погрешности аппроксимирующих функций вызывают малую погрешность результатов. В статьях [65, 66] тот же вопрос рассматривается для любых краевых задач математической физики и для задач нелинейной теории оболочек. Указывается, как можно видоизменить метод Бубнова — Галеркина, чтобы можно было применять аппроксимирующие функции, лишь частично удовлетворяющие геометрическим граничным условиям, при сохранении малой зависимости погрешности результата от аппроксимирующих функций.

В статье [67] тот же вопрос рассматривается для задач определения устойчивости в малом. В ней выясняется, как влияет неполная жесткость укрепления краев оболочки на ее устойчивость.

В статье [68] предлагается метод последовательных приближений для расчета больших прогибов оболочек, при применении которого на каждом шаге приближений с целью ускорения сходимости процесса корректируется не только прогиб оболочки, но и ее нагрузка.

В связи с вычислительными трудностями, возникающими при решении нелинейных задач, обычно при применении вариационных методов ограничиваются решением в первом приближении, пользуясь аппроксимирующими функциями, содержащими по одному варьируемому параметру. В ряде работ советских и зарубежных ученых был рассмотрен вопрос об удовлетворительности такого решения. Было показано, например, что при определении верхней критической нагрузки, соответствующей началу выпучивания, в большинстве случаев решение в первом приближении является удовлетворительным и что для определения нижней критической нагрузки, соответствующей началу выхлопа необходимо решение в высших приближениях. Из казанских работ, посвященных этому вопросу, отметим, кроме указанных выше, статью Х. М. Муштари и И. В. Свирского [42], заметку Х. М. Муштари и М. С. Корнишина [49] и статью Н. И. Кривошеева и Х. М. Муштари [22]. В статье [42] условие совместности деформаций интегрируется точно, в рядах Фурье, а уравнение равновесия — приближенно по Галеркину. Оказывается, что решение, взятое во втором приближении, в случае симметричного изгиба цилиндрической панели, дает значение нижнего критического давления, совершенно отличное от результата решения в первом приближении. В заметке [49] дается решение по Галеркину задачи изгиба бесконечно длинной цилиндрической панели, которое сравнивается с точным решением, полученным в статье М. С. Корнишина и Х. М. Муштари [18].

В статье [42] дается развитие метода последовательных приближений В. Ц. Чена применительно к симметричному изгибу пологого сферического купола путем разложения решения по степеням прогиба центра купола и параметра кривизны. Во втором варианте метод Чена применяется в чистом виде, при чем за функцию, аппроксимирующую прогиб, принимается точное решение линейной задачи в функциях Бесселя. В противоположность этому ряд авторов за первое приближение принимает функцию прогиба круглой плоской пластины, что приводит их к существенной погрешности. В статье дается также решение по Галеркину во втором приближении и сравнение его с решением первого приближения.

В статье М. С. Корнишина [21] на примере задачи изгиба пологих цилиндрических панелей рассматривается построение функции напряжения на тот случай применения метода раздельного интегрирования по Галеркину уравнения совместности и уравнения равновесия теории пологих оболочек, когда функция напряжения должна удовлетворять как статическим, так и некоторым геометрическим условиям.

В статье [59] А. В. Саченкова на примере равномерного поперечного давления, находящейся под действием равномерного поперечного давления, предлагается метод интегральных уравнений при решении задач устойчивости оболочек.

3. Частные задачи теории устойчивости и больших прогибов оболочек

Еще в 1934 году в статье [27] Х. М. Муштари было дано определение критического значения крутящего момента, приложенного к концевым сечениям цилиндрической оболочки, при котором начи-

нается выпучивание оболочки. С тех пор в Казани получено решение многих задач теории устойчивости оболочек различных очертаний при различных граничных условиях и нагрузках.

А. Определение верхних критических нагрузок по линеаризованной теории

В статьях [28, 29] Х. М. Муштари были рассмотрены некоторые задачи устойчивости цилиндрических оболочек произвольного сечения. В частности, здесь были выведены формулы для определения критического сжимающего усилия в оболочке кругового сечения с синусоидальной гофрировкой и в оболочке эллипсообразного сечения небольшого эксцентриситета.

В главе IX монографии [52] проведено исследование круговой цилиндрической оболочки при совместном действии равномерно распределенных осевых, поперечных и сдвигающих нагрузок в случае преобладающего сдвига.

В статьях [22, 23] Н. И. Кривошеева по методу Ритца определяется критическое усилие чистого сдвига и усилие сдвига совместно с поперечным давлением, при чем доказывалось, что формулы Л. Доннеля дают завышенное до 20% значение критического сдвига.

В статье [54] Ю. Г. Одинокова рассматривается круговая цилиндрическая оболочка под действием изгибающего момента. Оказывается, что в случае тонкой оболочки средней длины критическое усилие в сжатой зоне мало отличается от критического усилия при продольном сжатии оболочки.

В статье [58] А. В. Саченкова дано определение критического поперечного давления при неодинаковых на обоих концах оболочки граничных условиях.

В статье [51] Х. М. Муштари и С. В. Прохорова рассматривается устойчивость цилиндрической оболочки при поперечном давлении, неравномерно распределенном по длине.

В статье [43] Х. М. Муштари и А. В. Саченкова выведены расчетные формулы для определения критической комбинации осевого сжатия и внешнего нормального давления для цилиндрических и усеченных конических оболочек кругового сечения.

В статье [57] А. В. Саченков определяет критическое внешнее давление для замкнутой конической оболочки, решая обобщенные уравнения метода Бубнова — Галеркина относительно функций напряжения ψ и функции прогиба w . Полученная им расчетная формула не только своим числовым коэффициентом, но и по структуре отличается от результата решения той же задачи предыдущими авторами, которые задавались в первом приближении аппроксимирующими функциями для выражения трех компонент перемещения u , v , w . Это расхождение автор резонно объясняет тем, что при аппроксимации решения с помощью избранных функций ψ и w уравнения равновесия тангенциальных усилий выполнены, в то время, как задавались u , v , w и не заботясь об удовлетворении этих уравнений, мы можем существенно отойти от истинного решения.

Ввиду этого при решении задачи в компонентах перемещения необходимо аппроксимировать u , v в высших приближениях.

Приближенная формула для определения критической нагрузки при кручении конической оболочки была выведена в статье [31] Х. М. Муштари. В статье [41] Х. М. Муштари выведена формула для определения критического значения внутреннего давления в случае сплюснутой эллипсоидальной оболочки вращения.

В статье [56] А. В. Саченкова на основе теории локальной устойчивости Ю. Н. Работнова рассматривается устойчивость цилиндрических и конических оболочек эллиптического сечения под действием продольного сжатия. Полученные результаты близки к результатам соответствующих точных решений [29].

В монографическом исследовании [44] Х. М. Муштари и И. В. Сvirского рассматривается устойчивость конструктивно-ортотропной цилиндрической оболочки под действием равномерно распределенного осевого сжатия и поперечного давления с точки зрения обеспечения наименьшего веса при данной нагрузке.

В статье [45] Х. М. Муштари выведен критерий устойчивости ортотропной оболочки под действием комбинации внешнего нормального давления, линейно изменяющегося по длине и синусоидального по окружности, а также сжимающих и сдвигающих усилий, состоящих из постоянных и синусоидальных частей, приложенных к торцевым сечениям. При этом предполагается, что напряженное состояние оболочки до потери устойчивости определяется по безмоментной теории и что выпучивание ее происходит с образованием небольшого числа волн по окружности.

В статье [58] А. В. Саченкова, цитированной выше, рассматривается устойчивость конической оболочки, подкрепленной упругими шпангоутами, под действием поперечного давления, при чем попутно дается оценка погрешности приближенного решения для оболочек средней длины и выясняется природа поправочных коэффициентов к формулам линейной теории.

Б. Результаты, полученные по нелинейной теории

Критические нагрузки, найденные по линеаризованной теории, оказываются завышенными. Из экспериментальных работ, проведенных в Казанском филиале АН СССР с целью проверки теории, мы укажем здесь кандидатскую диссертацию М. С. Корнишина, посвященную исследованию изгиба цилиндрической панели под действием внешнего нормального давления, и большое, еще не опубликованное, исследование Р. Г. Суркина о поперечном изгибе сферического купола. Полученные при этом результаты подтверждают выводы других авторов о нелинейном характере явления выпучивания оболочек.

Соответствующие теоретические исследования велись в двух направлениях. С одной стороны изучалось влияние начальных несовершенств оболочки на ее изгиб под действием нагрузки. В частности, определялась верхняя критическая нагрузка для оболочек с начальными отклонениями от рассматриваемой формы срединной поверхности. С другой стороны, рассматривалось состояние оболочки правильной формы после потери устойчивости и определялась нижняя граница ее несущей способности, названная нижней критической нагрузкой.

В статье [19] М. С. Корнишина было показано, что несимметричное синусоидальное отклонение панели от круговой цилиндрической формы сильно уменьшает величину критического поперечного давления.

В статьях [18, 21] этого автора проведено исследование изгиба цилиндрической панели под действием поперечного давления в предположении, что опорный контур является в той или иной мере упруго-податливым тангенциальному и нормальному перемещениям, а также повороту. Оказывается, что эта податливость ведет к существенному снижению критической нагрузки по сравнению с шарнирной заделкой или защемлением.

Изгиб цилиндрической панели, опирающейся на гибкие в своей плоскости ребра, рассматривался в статье [42]. В. Г. Выборнов в статье [3] применил к решению этой задачи принцип вариации напряженного состояния, при чем получил результат, почти совпадающий с предыдущими решениями.

М. С. Ганеева в статье [13] рассмотрела влияние неравномерного температурного поля на изгиб цилиндрической панели, жестко заделанной по краям.

Ф. С. Исанбаева в статье [17] определила по методу Ритца нижнюю критическую нагрузку для свободно опирающейся цилиндрической оболочки при всестороннем сжатии. Оказалось, что в случае недлинных и не очень коротких оболочек для определения нижнего критического давления необходимо ввести поправочный коэффициент 0,68 к значению верхнего критического давления, найденному по соответствующей формуле статьи [43].

В статье [25] Н. И. Кривошеев исследовал влияние некоторых видов начальных неправильностей в форме на устойчивость цилиндрической оболочки под действием крутящего момента, при чем им предложена простая формула, позволяющая оценить влияние этих неправильностей на критический сдвиг.

В статье [55] А. В. Саченкова доказывается, что при продольном сжатии тонкой конической усеченной оболочки средней длины за коэффициент, характеризующий нелинейный фактор, можно принять соответствующую величину, найденную для цилиндрической оболочки.

В статье [40] Х. М. Муштари и Р. Г. Суркина и в их зачетках [48] и [69] рассматривается определение нижнего критического давления для сферической оболочки, находящейся под действием внешнего нормального давления.

В § 58 монографии [52] метод, предложенный Гениевым и Чаусовым для определения критического давления, при котором происходит несимметричное выпучивание сферического купола, и учитывающий изменение кривизны до выпучивания, уточняется и переносится на случай, когда купол имеет начальный прогиб. Полученные таким путем теоретические значения давления близки к экспериментальным значениям, найденным Р. Г. Суркиным.

В статье [70] Р. Г. Суркина рассматривается деформация сферической мембраны под действием внутреннего давления. Задача определения прогиба и мембранных напряжений решается точно, в хорошо сходящихся рядах. В частности, это решение переходит в известное решение задачи поперечного изгиба круглой мембраны, принадлежащее Генки.

В статье [71] Р. Г. Суркина дается определение нижнего критического внешнего давления для не очень сильно вытянутых эллипсоидальных оболочек вращения.

Вопрос об определении несущей способности обшивки цилиндрической панели, окаймленной упругими ребрами, после потери устойчивости под действием продольного сжатия впервые был рассмотрен еще в 1946 г. в статье [32] Х. М. Муштари.

Впоследствии он получил более полное освещение в статье того же автора [47].

В заключение отметим, что в Казани были решены и некоторые задачи теории устойчивости оболочек за пределами упругости. Не останавливаясь на изложении их содержания, ограничимся указанием соответствующих опубликованных работ Н. С. Ганеева и А. В. Саченкова [14, 15, 16, 56], в которых получен ряд формул расчетного характера для определения верхних критических нагрузок.

БИБЛИОГРАФИЯ *

1. Винокуров С. Г. Температурные напряжения в пластинках и оболочках. Изв. ФТИ, вып. 3, 1953, стр. 16—38.
2. Винокуров С. Г. Применение метода Галеркина к решению задачи о больших прогибах круглой шарнирно опертой пластинки. Изв. ФТИ, вып. 10, 1956, стр. 57—62.
3. Выборнов В. Г. Изгиб цилиндрической панели, опертой на гибкие нерастяжимые ребра, с учетом больших прогибов. Уч. записки КГУ, т. 116, кн. 5, 1956.
4. Галимов К. З. Уравнения равновесия теории упругости при конечных перемещениях и их приложение к теории оболочек. Изв. ФТИ, вып. 1, 1948.
5. Галимов К. З. Общая теория упругих оболочек при конечных перемещениях. Изв. ФТИ, вып. 2, 1950.
6. Галимов К. З. О некоторых задачах теории оболочек при произвольных перемещениях. Изв. ФТИ, вып. 3, 1950.
7. Галимов К. З. К общей теории пластин и оболочек при конечных перемещениях и деформациях. ПММ, т. XV, вып. 6, 1951.
8. Галимов К. З. К вариационным методам решения задач нелинейной теории пластин и оболочек. Изв. ФТИ, вып. 10, 1956.
9. Галимов К. З. О больших прогибах прямоугольных цилиндрических панелей. Инж. сборник т. 25, 1957.
10. Галимов К. З. Условия неразрывности деформации поверхности при произвольных изгибах и деформациях. Уч. записки КГУ, т. 113, кн. 10, 1953.
11. Галимов К. З. К теории изгиба тонких оболочек при малых деформациях и больших перемещениях. Уч. записки КГУ, том 116, кн. 5, 1956.
12. Галимов К. З., Муштари Х. М. Некоторые вопросы прочности и устойчивости пластин и оболочек в неравномерном температурном поле. Тр. ФТИ, вып. 1, 1954, стр. 121—147.
13. Ганеева М. С. Устойчивость прямоугольной цилиндрической панели, жестко заделанной по краям и находящейся в неравномерном температурном поле. Уч. записки КГУ, т. 116, кн. 1, 1956.
14. Ганеев Н. С. Определение критической нагрузки цилиндрической оболочки за пределом упругости при осевом сжатии и внешнем нормальном давлении. Изв. ФТИ, № 7, стр. 59—75, 1955.
15. Ганеев Н. С. Определение верхней границы критического всестороннего давления короткой цилиндрической оболочки за пределом упругости. Тр. КХТИ, вып. 19—20, 1955 стр. 317—324.
16. Ганеев Н. С. Устойчивость биметаллической цилиндрической оболочки под действием равномерного внешнего давления за пределом упругости. Тр. КХТИ, вып. 22, 1957.
17. Исанбаева Ф. С. Определение нижней критической нагрузки цилиндрической оболочки при всестороннем сжатии. Изв. ФТИ, вып. 7, 1955.
18. Корнишин М. С., Муштари Х. М. Устойчивость бесконечно длинной пологой цилиндрической панели под действием нормального равномерного давления. Изв. ФТИ, вып. 7, 1955.
19. Корнишин М. С. Влияние несимметричной неправильности на деформацию пологой панели при поперечной нагрузке. Изв. ФТИ, вып. 10, 1956.
20. Корнишин М. С. К вопросу о варьировании области выпучивания. Изв. ФТИ, вып. 12, 1958.
21. Корнишин М. С. Изгиб пологих цилиндрических панелей и пластин с податливыми краями. Изв. ФТИ, вып. 12, 1958.
22. Кривошеев Н. И., Муштари Х. М. Об изгибе пологого сферического сегмента под действием внешнего нормального давления. Изв. ФТИ, вып. 12, 1958.
23. Кривошеев Н. И. Об устойчивости цилиндрической оболочки под действием сдвига. Изв. ФТИ, вып. 12, 1958.
24. Кривошеев Н. И. Об устойчивости цилиндрической оболочки при совместном действии кручения и равномерного поперечного давления. Изв. ФТИ, вып. 12, 1958.
25. Кривошеев Н. И. Влияние начальных неправильностей в форме средней поверхности на устойчивость цилиндрической оболочки при кручении. Изв. ФТИ, вып. 10, 1956, стр. 69—80.
26. Крылов В. В. К устойчивости на кручение бесконечно длинной цилиндрической оболочки, подкрепленной упругими ребрами. Тр. КАИ, № 8.

* Здесь приняты следующие сокращения: Изв. ФТИ — Известия Казанского филиала Академии наук СССР, серия физико-математических и технических наук; Тр. ФТИ — Труды Физико-технического института Казанского филиала АН СССР; Тр. КХТИ — Труды Казанского химико-техн. ин-та; Тр. КАИ — Труды Казанского авиационного ин-та; Уч. записки КГУ — Ученые записки Казанского государственного университета; ПММ — Прикладная математика и механика, Москва.

27. Муштарь Х. М. Об устойчивости круглой тонкой цилиндрической оболочки при кручении. КАИ, вып. 2, 1934, стр. 3—17.
28. Муштарь Х. М. Об одном возможном подходе к решению задач устойчивости тонких цилиндрических оболочек произвольного сечения. Тр. КАИ, вып. 4, 1935, стр. 19—31.
29. Муштарь Х. М. Некоторые обобщения теории тонких оболочек с приложениями к задаче устойчивости упругого равновесия. Изв. физ.-матем. О-ва при КГУ, т. XI, серия 3, стр. 71—150, 1938.
30. Муштарь Х. М. Некоторые обобщения теории тонких оболочек. ПММ, т. II, вып. 4, стр. 439—456, 1939.
31. Муштарь Х. М. Приближенное решение некоторых задач устойчивости тонкостенной конической оболочки кругового сечения. ПММ, т. VII, 1943, стр. 155—166.
32. Муштарь Х. М. Об упругом равновесии цилиндрической оболочки под действием продольного сжатия в закрытой области. Тр. КАИ, т. XVII, 1946.
33. Муштарь Х. М. Некоторые задачи об упругом равновесии и устойчивости его в случае тонких цилиндрических трубок некругового сечения. Тр. КХТИ, № 10, 1946, стр. 127—134.
34. Муштарь Х. М. Об области применимости приближенной теории оболочек Кирхгофа-Лява. ПММ, т. XI, вып. 5, 1947, стр. 517—520.
35. Муштарь Х. М. Об определении деформации срединной поверхности оболочки при произвольных изгибах. Тр. КХТИ, № 13, 1948, стр. 132—137.
36. Муштарь Х. М., Винокуров С. Г. Определение напряженного состояния при упругом равновесии в пограничной зоне тонких оболочек некоторых типов. Изв. ФТИ, вып. 1, 1948, стр. 9—24.
37. Муштарь Х. М. Качественное исследование напряженного состояния упругой оболочки при малых деформациях и произвольных смещениях. ПММ, т. XIII, № 2, 1949, стр. 121—134.
38. Муштарь Х. М. Нелинейная теория равновесия пограничной зоны упругой оболочки. ДАН СССР, т. 69, № 4, 1949.
39. Муштарь Х. М. Теория упругого равновесия пластин и оболочек с учетом начальных напряжений. Изв. ФТИ, вып. 2, 1950, стр. 39—52.
40. Муштарь Х. М., Суркин Р. Г. О нелинейной теории устойчивости упругого равновесия тонкой сферической оболочки под действием равномерно распределенного внешнего нормального давления. ПММ, т. XIV, № 6, 1950, стр. 373—386.
41. Муштарь Х. М. Об упругом равновесии тонкой оболочки с начальными неправильностями в форме срединной поверхности. ПММ, т. XV, № 6, 1951, стр. 743—750.
42. Муштарь Х. М., Свирский И. В. Определение больших прогибов цилиндрической панели, опертой на гибкие нерастяжимые ребра, под действием внешнего нормального давления. ПММ, т. XVII, № 6, 1953, стр. 755—760.
43. Муштарь Х. М., Саченков А. В. Об устойчивости цилиндрических и конических оболочек кругового сечения при совместном действии осевого сжатия и внешнего нормального давления. ПММ, т. XVIII, № 6, 1954, стр. 667—674.
44. Муштарь Х. М., Свирский И. В. Об устойчивости цилиндрической оболочки под действием равномерно распределенных осевого сжатия и внешнего нормального давления. Тр. ФТИ, вып. 1, 1954, стр. 3—67.
45. Муштарь Х. М. Об устойчивости цилиндрической оболочки под действием неравномерных нагрузок. Тр. ФТИ, вып. 1, 1954, стр. 77—103.
46. Муштарь Х. М. Об устойчивости и прочности корпуса бака под действием равномерно распределенного осевого сжатия и внутреннего давления. Тр. ФТИ, вып. 1, 1954, стр. 104—120.
47. Муштарь Х. М. Приближенное определение редуцированного коэффициента обшивки подкрепленной плоской и цилиндрической пластинки при осевом сжатии. Изв. ФТИ, вып. 7, 1955, стр. 22—35.
48. Муштарь Х. М. К теории устойчивости сферической оболочки под действием внешнего давления. ПММ, т. XIX, № 2, 1955.
49. Муштарь Х. М., Корнишин М. С. О сходимости метода Галеркина при определении верхней и нижней критических нагрузок в одной нелинейной задаче. Изв. ФТИ, вып. 10, 1956.
50. Муштарь Х. М. Некоторые математические проблемы нелинейной теории пологих оболочек. Тр. III Всесоюзного математического съезда, т. I, стр. 207, Москва, 1956.
51. Муштарь Х. М., Прохоров С. В. Об устойчивости цилиндрической оболочки при неравномерном обжатии. Тр. КХТИ, вып. 22, 1957.
52. Муштарь Х. М., Галимов К. З. Нелинейная теория упругих оболочек. Таткингонздат, 1957, стр. 1—432.
53. Норден А. П. К вопросу о геометрической теории конечных деформаций. Изв. ФТИ, вып. 2, 1950, стр. 53—62.
54. Одинцов Ю. Г. Об устойчивости цилиндрической оболочки при изгибе. Тр. КАИ, 1940.

55. Саченков А. В. Приближенное определение нижней границы критической нагрузки при продольном сжатии тонкой конической оболочки. Изв. ФТИ, вып. 7, 1955, стр. 16—22.
56. Саченков А. В. Об устойчивости оболочек за пределом упругости. Изв. ФТИ, вып. 10, 1956, стр. 81—100.
57. Саченков А. В. Об устойчивости конических оболочек кругового сечения под действием равномерного внешнего давления. Изв. ФТИ, вып. 12, 1958.
58. Саченков А. В. Об устойчивости цилиндрической оболочки при произвольных краевых условиях под действием равномерного поперечного давления. Изв. ФТИ, вып. 12, 1958.
59. Свирский И. В. О точности вариационных методов определения величины критических сил при продольном изгибе. Изв. ФТИ, вып. 2, 1950.
60. Свирский И. В. Об оценке точности вариационных методов определения собственных значений. Доклады АН СССР, т. 87, № 6, 1952.
61. Свирский И. В. О методе Бубнова — Галеркина. Научно-техн. конференция по расчету гибких оболочек. Изд. ВВИА, Москва, 1952.
62. Свирский И. В. Об оценке точности приближенных методов определения частот колебаний. Изв. ФТИ, вып. 3, 1953.
63. Свирский И. В. О точности метода Галеркина. Доклады АН СССР, т. 88, № 5, 1953.
64. Свирский И. В. К вопросу о построении вариационных методов расчета. ПММ, 1955, вып. 4.
65. Свирский И. В. Видоизменение метода Галеркина для решения нелинейных задач о хлопке искривленной пластины. Инж. сборник, т. XXII, 1955.
66. Свирский И. В. О построении вариационных формул для решения задач теории упругости. Изв. ФТИ, вып. 10, 1956.
67. Свирский И. В. К вопросу о построении вариационных формул задач устойчивости. Изв. ФТИ, вып. 10, 1956.
68. Свирский И. В. Различные варианты метода последовательных приближений. Изв. ФТИ, вып. 12, 1958.
69. Суркин Р. Г. К вопросу о потере устойчивости сферической оболочки при внешнем равномерно распределенном давлении. Изв. ФТИ, вып. 10, 1956.
70. Суркин Р. Г. К теории больших перемещений сферической мембраны. Сб. научно-техн. конф. ВВИА, 1952.
71. Суркин Р. Г. К теории устойчивости вытянутой эллипсоидальной оболочки вращения при внешнем равномерном давлении. Изв. ФТИ, вып. 7, 1955.

Поступила
25. IV 1957 г.

К. З. Галимов

О ФОРМУЛИРОВКЕ ГЕОМЕТРИЧЕСКИХ ГРАНИЧНЫХ УСЛОВИЙ НЕЛИНЕЙНОЙ ТЕОРИИ ОБОЛОЧЕК В УСИЛИЯХ И МОМЕНТАХ

Настоящая статья является естественным продолжением прежней статьи автора [1]. Как известно, в теории оболочек существует три способа решения ее задач: 1) в перемещениях, 2) в компонентах усилий и моментов, 3) в компонентах деформации поверхности. В последних двух случаях к уравнениям равновесия присоединяются еще три условия неразрывности деформации. Очевидно, в этих случаях граничные условия также должны быть сформулированы в усилиях и моментах или в компонентах деформации.

§ 1. Некоторые соотношения нелинейной теории оболочек. Пусть S — срединная поверхность недеформированной оболочки, заданная векторным уравнением $\bar{r} = \bar{r}(x^1, x^2)$, где x^1 и x^2 — произвольные Гауссовы координаты на S ; $\bar{r}_\alpha = \partial \bar{r} / \partial x^\alpha$ — координатные векторы этой поверхности, а m — единичный вектор нормали к ней; $a_{\alpha\beta}$ и $b_{\alpha\beta}$ — коэффициенты первой и второй квадратичных форм поверхности, ($\alpha, \beta, \gamma \dots = 1, 2$).

Величины, относящиеся к деформированной поверхности S^* , будем отмечать звездочкой, например, \bar{r}_α^* , $a_{\alpha\beta}^*$, $b_{\alpha\beta}^*$ и т. д. Пусть, далее, C — контур недеформированной оболочки, $\bar{\tau}$ и \bar{n} — единичные векторы касательной и тангенциальной нормали к этому контуру; τ_α и n_α — ковариантные компоненты этих векторов в системе координат на S , причем

$$\bar{\tau} = [\bar{m}, \bar{n}], \quad \bar{m} = [\bar{n}, \bar{\tau}], \quad \bar{n} = [\bar{\tau}, \bar{m}]. \quad (1.1)$$

Производные по касательной и нормали к контуру C от некоторой скалярной или векторной функции будем определять по формулам

$$\frac{d\psi}{ds} = \frac{\partial \psi}{\partial x^\alpha} \tau^\alpha, \quad \frac{d\psi}{dn} = \frac{\partial \psi}{\partial x^\alpha} n^\alpha, \quad (1.2)$$

где τ^α и n^α — контравариантные компоненты векторов $\bar{\tau}$ и \bar{n} .

Далее вводятся следующие геометрические величины: $\bar{\sigma}$ — нормальная кривизна поверхности S в точках контура C в направлении $\bar{\tau}$:

$$\bar{\sigma} = b_{\alpha\beta} \tau^\alpha \tau^\beta = \bar{m} \frac{d\bar{\tau}}{ds}, \quad (1.3)$$

где s — дуга контура C ;

$\tilde{\tau}(s)$ — геодезическое кручение кривой C :

$$\tilde{\tau}(s) = -b_{\alpha\beta} \tau^{\alpha} n^{\beta} = \bar{n} \frac{d\bar{m}}{ds} = -\bar{m} \frac{d\bar{\tau}}{dn}; \quad (1.4)$$

χ — геодезическая кривизна контура C :

$$\chi = \operatorname{div} \bar{n}. \quad (1.5)$$

$\tilde{\tau}(s) = 0$ вдоль линии кривизны, а $\chi = 0$, если контур является геодезической линией поверхности. Нормальная кривизна $\tilde{\sigma}_n$ поверхности S в направлении \bar{n} равна

$$\tilde{\sigma}_n = b_{\alpha\beta} n^{\alpha} n^{\beta} = b_{\alpha}^{\alpha} - \tilde{\sigma}, \quad b_{\alpha}^{\alpha} = a^{\alpha\beta} b_{\alpha\beta}. \quad (1.6)$$

Приведенные соотношения имеют место и для контура C_* деформированной оболочки.

Ковариантные компоненты тензоров тангенциальной и изгибной деформаций определяются как разности:

$$2p_{\alpha\beta} = a_{\alpha\beta}^* - a_{\alpha\beta}, \quad q_{\alpha\beta} = b_{\alpha\beta}^* - b_{\alpha\beta}. \quad (1.7)$$

Для компонентов деформации в системе осей триэдра $\bar{\tau} \bar{m} \bar{n}$ примем обозначения

$$\left. \begin{aligned} \epsilon_n &= p_{\alpha\beta} n^{\alpha} n^{\beta}, & \epsilon_s &= p_{\alpha\beta} \tau^{\alpha} \tau^{\beta}, & \epsilon_{ns} &= p_{\alpha\beta} \tau^{\alpha} n^{\beta}, \\ \chi_n &= q_{\alpha\beta} n^{\alpha} n^{\beta}, & \chi_s &= q_{\alpha\beta} \tau^{\alpha} \tau^{\beta}, & \chi_{ns} &= q_{\alpha\beta} \tau^{\alpha} n^{\beta}. \end{aligned} \right\} \quad (1.8)$$

Выразим векторы \bar{n}_* , $\bar{\tau}_*$ и \bar{m}_* через \bar{n} , $\bar{\tau}$, \bar{m} . Пренебрегая удлинениями и сдвигом по сравнению с единицей, имеем

$$\left. \begin{aligned} \bar{n}_* &= \bar{\rho}_\alpha n_*^\alpha \approx \bar{\rho}_\alpha n^\alpha = \left(\bar{\rho}_\alpha + \frac{\partial \bar{v}}{\partial x^\alpha} \right) n^\alpha = \bar{n} + \frac{d\bar{v}}{dn}, \\ \bar{\tau}_* &= \bar{\rho}_\alpha \tau_*^\alpha \approx \left(\bar{\rho}_\alpha + \frac{\partial \bar{v}}{\partial x^\alpha} \right) \tau^\alpha = \bar{\tau} + \frac{d\bar{v}}{ds}, \\ \bar{m}_* &= [\bar{n}_*, \bar{\tau}_*] \approx \bar{m} + \left[\bar{n}, \frac{d\bar{v}}{ds} \right] - \left[\bar{\tau}, \frac{d\bar{v}}{dn} \right] + \left[\frac{d\bar{v}}{dn}, \frac{d\bar{v}}{ds} \right]. \end{aligned} \right\} \quad (1.9)$$

Откуда, полагая $\bar{v} = \bar{n}u + \bar{\tau}v + \bar{m}w$ и пользуясь формулами дифференцирования единичных векторов \bar{n} , $\bar{\tau}$, \bar{m} [1] находим

$$\left. \begin{aligned} \bar{n}_* &= \bar{n}(1 + e_{nn}) + \bar{\tau}e_{ns} + \bar{m}\omega_n, \\ \bar{\tau}_* &= \bar{n}e_{sn} + \bar{\tau}(1 + e_{ss}) + \bar{m}\omega_s, \\ \bar{m}_* &= \bar{m}E_3 + \bar{\tau}E_s + \bar{n}E_n, \end{aligned} \right\} \quad (1.10)$$

где введены обозначения для углов поворота:

$$\left. \begin{aligned} \epsilon_{sn} &= \frac{du}{ds} + \chi v + \tilde{\tau}w; \quad e_{ss} = \frac{dv}{ds} + \chi u - \tilde{\sigma}w, \quad \omega_s = \frac{dw}{ds} + \tilde{\sigma}v - u\tilde{\tau}, \\ \epsilon_{ns} &= \frac{dv}{dn} + \tilde{\tau}w; \quad e_{nn} = \frac{du}{dn} - \tilde{\sigma}_n w, \quad \omega_n = \frac{dw}{dn} - \tilde{\tau}v + \tilde{\sigma}_n u, \end{aligned} \right\} \quad (1.11)$$

$$\left. \begin{aligned} E_3 &= (1 + e_{nn})(1 + e_{ss}) - e_{ns}e_{sn}, \quad E_n = \omega_s e_{ns} - \omega_n(1 + e_{ss}), \\ E_s &= \omega_n e_{sn} - \omega_s(1 + e_{nn}). \end{aligned} \right\} \quad (1.12)$$

Эти величины удовлетворяют приближенным тождествам

$$\left. \begin{aligned} E_n(1 + e_{nn}) + e_{ns}E_s + E_3\omega_n &= 0; \quad E_s(1 + e_{ss}) + e_{sn}E_n + E_3\omega_s = 0; \\ E_n e_{ns} - E_s(1 + e_{nn}) &= \omega_s; \quad E_s e_{sn} - E_n(1 + e_{ss}) = \omega_n; \\ (1 + e_{nn})E_3 - \omega_n E_n &= 1 + e_{ss}; \quad (1 + e_{ss})E_3 - \omega_s E_s = 1 + e_{nn}; \\ \omega_n E_s - e_{ns}E_3 &= e_{ns}; \quad \omega_s E_n - e_{sn}E_3 = e_{sn}, \end{aligned} \right\} \quad (1.13)$$

вытекающим из условий ортогональности триэдра $\bar{\tau}_*$, \bar{n}_* , \bar{m}_* , а также из векторных произведений вида (1.1), вычисленных при помощи выражений (1.10).

Контурные значения компонентов деформации через перемещения выражаются по формулам

$$\left. \begin{aligned} \epsilon_n &= \bar{n} \frac{d\bar{v}}{dn} + \frac{1}{2} \left(\frac{d\bar{v}}{dn} \right)^2; \quad \epsilon_s = \bar{\tau} \frac{d\bar{v}}{ds} + \frac{1}{2} \left(\frac{d\bar{v}}{ds} \right)^2, \\ 2\epsilon_{ns} &= \bar{n} \frac{d\bar{v}}{ds} + \bar{\tau} \frac{d\bar{v}}{dn} + \frac{d\bar{v}}{ds} \cdot \frac{d\bar{v}}{dn}, \end{aligned} \right\} \quad (1.14)$$

где введены производные по нормали и касательной к контуру оболочки.

Найдем выражения компонентов изгибной деформации на контуре. Из формул статьи [1] имеем

$$\chi_n = \bar{n} \frac{d\bar{m}}{dn} - \bar{n}_* \frac{d\bar{m}_*}{dn} = \bar{n} \frac{d\bar{m}}{dn} + \bar{m}_* \frac{d\bar{n}_*}{dn}.$$

Подставляя сюда \bar{m}_* и \bar{n}_* из (1.10) и пользуясь формулами дифференцирования единичных векторов триэдра \bar{n} , $\bar{\tau}$, \bar{m} [1], получим

$$\chi_n = E_3 \frac{d\omega_n}{dn} + E_n \frac{de_{nn}}{dn} + E_s \frac{de_{ns}}{dn} + (E_s \omega_n - E_3 e_{ns}) \tilde{\tau} + [E_3(1 + e_{nn}) - \omega_n E_n] \sigma_n - \sigma_n.$$

Отсюда, учитывая тождества (1.13), находим

$$\left. \begin{aligned} \chi_n &= E_3 \frac{d\omega_n}{dn} + E_n \frac{de_{nn}}{dn} + E_s \frac{de_{ns}}{dn} + \tilde{\tau}e_{ns} + \tilde{\sigma}_n e_{ss}, \\ \chi_s &= E_3 \frac{d\omega_s}{ds} + E_n \frac{de_{sn}}{ds} + E_s \frac{de_{ss}}{ds} + \chi \omega_n + \tilde{\sigma}e_{nn} + \tilde{\tau}e_{sn}, \\ \chi_{ns} &= E_3 \frac{d\omega_n}{ds} + E_n \frac{de_{nn}}{ds} + E_s \frac{de_{ns}}{ds} - \chi \omega_s - \tilde{\sigma}e_{ns} - \tilde{\tau}e_{ss}. \end{aligned} \right\} \quad (1.15)$$

Компоненты деформации поверхности удовлетворяют уравнениям совместности [2]:

$$C_*^{\alpha\pi} C_*^{\beta\gamma} (2\nabla_\gamma^* \nabla_\pi^* p_{\alpha\beta} + b_{\alpha\gamma} b_{\pi\beta} + A_{\sigma, \pi\beta} A_{\sigma\gamma}^{\alpha} + a_{\alpha\lambda} b_{\pi\gamma}^* b_{\beta}^{\lambda}) = 0, \quad (1.16)$$

$$C_*^{\alpha\pi} (\nabla_\pi^* q_{\alpha\beta} - b_{\alpha\gamma} A_{\pi\beta}^{\gamma}) = 0, \quad (1.17)$$

где

$$\left. \begin{aligned} A_{\sigma, \pi\beta} &= a_{\sigma\lambda} A_{\pi\beta}^{\lambda}, \quad A_{\pi\beta}^{\lambda} = a_{\sigma}^{\lambda\mu} P_{\mu, \pi\beta}, \\ P_{\gamma, \alpha\beta} &= \nabla_\alpha p_{\gamma\beta} + \nabla_\beta p_{\alpha\gamma} - \nabla_\gamma p_{\alpha\beta}. \end{aligned} \right\} \quad (1.18)$$

∇_α^* — знак ковариантного дифференцирования относительно $a_{\alpha\beta}^*$.

При отсутствии внешних поверхностных усилий и моментов однородные уравнения равновесия тождественно удовлетворяются, если положить:

$$S^{\alpha\beta} \sqrt{\frac{a^{\alpha\beta}}{a}} = C^{\alpha\pi} C^{\beta\gamma} \nabla_{\pi}^* \Psi_{\gamma} + b_{\lambda}^{\beta} (C^{\alpha\pi} C^{\lambda\gamma} - C^{\alpha\lambda} C^{\pi\gamma}) \Psi_{\pi\gamma}, \quad (1.19)$$

$$M^{\alpha\beta} \sqrt{\frac{a^{\alpha\beta}}{a}} = \left(C^{\alpha\pi} C^{\beta\gamma} - \frac{1}{2} C^{\alpha\beta} C^{\pi\gamma} \right) \Psi_{\pi\gamma},$$

где

$$\Psi_{\alpha\beta} = \bar{p}_{\beta}^{\alpha} \nabla_{\alpha}^* \bar{\psi}, \quad \Psi_{\alpha} = \bar{m}_{\alpha} \nabla_{\alpha}^* \bar{\psi}, \quad (1.20)$$

а $\bar{\psi} = \bar{p}_{\alpha}^{\alpha} \psi_{\alpha} + \bar{m}_{\alpha} \psi$ — произвольный вектор.

Компоненты деформации поверхности допускают потенциал

$$p_{\alpha\beta} = \frac{\partial F}{\partial S^{\alpha\beta}}, \quad q_{\alpha\beta} = - \frac{\partial F}{\partial M^{\alpha\beta}}, \quad (1.21)$$

где F — функция

$$F = S^{\alpha\beta} p_{\alpha\beta} - M^{\alpha\beta} q_{\alpha\beta} - W(S^{\alpha\beta}, M^{\alpha\beta}), \quad (1.22)$$

выраженная через усилия и моменты, W — удельная работа деформации.

§ 2. Уравнения метода Бубнова — Галеркина для интегрирования уравнений совместности в усилиях и моментах. Как было показано в статье [1], при независимых вариациях перемещений, усилий и моментов вариационное уравнение

$$\delta U = \delta \iint (S^{\alpha\beta} p_{\alpha\beta} - M^{\alpha\beta} q_{\alpha\beta} - F) d\sigma, \quad (2.1)$$

где δU — вариация работы внешних усилий и моментов, содержит в себе уравнения равновесия, статические граничные условия и соотношения упругости (1.21), так как после варьирования по всем функциональным аргументам оно приводится к виду

$$\begin{aligned} & \int_C \{ (\bar{\Phi}_s - \bar{\Phi}) \delta \bar{v} + (G - \bar{G}) \bar{n}_* \delta \bar{m}_* \} ds + (\bar{H} - H) \bar{m}_* \delta \bar{v} \Big|_C + \\ & + \iint (\nabla_{\alpha} T_1^{\alpha\beta} + A_{\alpha\gamma} T_1^{\alpha\gamma} - b_{\alpha}^{\beta} Q^{\alpha} + X^{\beta}) \bar{p}_{\beta}^{\alpha} \delta \bar{v} + \\ & + (\nabla_{\alpha} Q^{\alpha} + b_{\alpha\beta}^* T_1^{\alpha\beta} + X^{\beta}) \bar{m}_{\beta} \delta \bar{v} \} d\sigma - \\ & - \iint \left\{ \left(p_{\alpha\beta} - \frac{\partial F}{\partial S^{\alpha\beta}} \right) \delta S^{\alpha\beta} - \left(q_{\alpha\beta} + \frac{\partial F}{\partial M^{\alpha\beta}} \right) \delta M^{\alpha\beta} \right\} d\sigma = 0. \end{aligned} \quad (2.2)$$

Здесь приняты обозначения статьи [1].

Предположим, что контурный интеграл в этом равенстве обращается в нуль. Это выполняется, например, при удовлетворении классическим граничным условиям теории пластин и оболочек. Предположим также, что уравнения равновесия внутри оболочки удовлетворяются. При этих условиях из (2.2) получаем вариационное уравнение

$$\iint \left\{ \left(p_{\alpha\beta} - \frac{\partial F}{\partial S^{\alpha\beta}} \right) \delta S^{\alpha\beta} - \left(q_{\alpha\beta} + \frac{\partial F}{\partial M^{\alpha\beta}} \right) \delta M^{\alpha\beta} \right\} d\sigma = 0. \quad (2.3)$$

При произвольных $\delta S^{\alpha\beta}$ и $\delta M^{\alpha\beta}$ из него следуют соотношения упругости (1.21). Из (2.3) можно также получить соотношения метода

Бубнова — Галеркина для интегрирования уравнений совместности деформации в усилиях и моментах. С этой целью подставим $\delta S^{\alpha\beta}$ и $\delta M^{\alpha\beta}$ из (1.19) в (2.3). Обозначая

$$\begin{aligned} p_{\alpha\beta} - \frac{\partial F}{\partial S^{\alpha\beta}} &= A_{\alpha\beta}, \\ q_{\alpha\beta} + \frac{\partial F}{\partial M^{\alpha\beta}} &= B_{\alpha\beta}, \end{aligned} \quad (2.4)$$

будем иметь

$$\begin{aligned} & \iint_{\sigma_*} C_*^{\alpha\pi} C_*^{\beta\gamma} [A_{\alpha\beta} \nabla_{\pi}^* \delta \Psi_{\gamma} + (b_{\beta}^{\lambda} A_{\alpha\lambda} - B_{\alpha\beta}) \delta \Psi_{\pi\gamma} - \\ & - b_{\pi}^{\lambda} A_{\alpha\lambda} \delta \Psi_{\beta\gamma}] d\sigma_* = 0, \end{aligned} \quad (2.5)$$

где интегрирование распространяется по всей площади деформированной срединной поверхности σ_* , а

$$\begin{aligned} \delta \Psi_{\alpha\beta} &= \bar{p}_{\beta}^{\alpha} \nabla_{\alpha}^* \delta \bar{\psi}, \quad \delta \Psi_{\alpha} = \bar{m}_{\alpha} \nabla_{\alpha}^* \delta \bar{\psi}, \\ \delta \bar{\psi} &= \bar{p}_{\alpha}^{\alpha} \delta \psi_{\alpha} + \bar{m}_{\alpha} \delta \psi, \end{aligned} \quad (2.6)$$

т. е. перемещения не варьируются.

Подставляя выражения $\delta \Psi_{\alpha\beta}$ и $\delta \Psi_{\alpha}$ в (2.5) и интегрируя по частям члены с производными от $\delta \bar{\psi}$, получим

$$\begin{aligned} & \int_{C_*} [\delta \bar{\psi} \nabla_{\alpha}^* A_{\alpha\beta} - A_{\alpha\beta} \delta \Psi_{\gamma} + \delta \bar{\psi}_{\gamma} (B_{\alpha\beta} - A_{\alpha\lambda} b_{\beta}^{\lambda}) - A_{\lambda\beta} b_{\gamma}^{\lambda} \delta \bar{\psi}_{\alpha}] C_*^{\beta\gamma} ds_* + \\ & + \iint_{\sigma_*} C_*^{\alpha\pi} C_*^{\beta\gamma} \{ \delta \bar{\psi} (\nabla_{\gamma}^* \nabla_{\pi}^* A_{\alpha\beta} - b_{\pi\gamma}^{\lambda} b_{\beta}^{\lambda} A_{\alpha\lambda} + B_{\alpha\beta} b_{\pi\gamma}^*) - \\ & - b_{\gamma}^{\lambda} \delta \bar{\psi}_{\lambda} \nabla_{\pi}^* A_{\alpha\beta} + \delta \bar{\psi}_{\gamma} [\nabla_{\pi}^* B_{\alpha\beta} + \nabla_{\beta}^* (A_{\alpha\lambda} b_{\pi}^{\lambda}) - \nabla_{\pi}^* (A_{\alpha\lambda} b_{\beta}^{\lambda})] \} d\sigma_* = 0, \end{aligned} \quad (2.7)$$

где C_* — контур деформированной оболочки, ds_* — элемент дуги этого контура; при получении (2.7) мы воспользовались формулой Гаусса — Остроградского в общих координатах

$$\iint_{\sigma_*} \nabla_{\alpha}^* B^{\alpha} d\sigma_* = \int_{C_*} B^{\alpha} n_{\alpha} ds_*, \quad (2.8)$$

где $n_{\alpha}^* = C_{\alpha\beta}^* \tau_{\beta}^*$ — компоненты нормали к контуру C_* .

В силу произвольности $\delta \bar{\psi}$ и $\delta \bar{\psi}_{\alpha}$ из (2.7) следуют вариационные уравнения:

$$I_1 + \iint_{\sigma_*} C_*^{\alpha\pi} C_*^{\beta\gamma} (\nabla_{\gamma}^* \nabla_{\pi}^* A_{\alpha\beta} - b_{\pi\gamma}^{\lambda} b_{\beta}^{\lambda} A_{\alpha\lambda} + B_{\alpha\beta} b_{\pi\gamma}^*) \delta \bar{\psi} d\sigma_* = 0, \quad (2.9)$$

$$I_2 + \iint_{\sigma_*} C_*^{\alpha\pi} C_*^{\beta\gamma} \{ \delta \bar{\psi}_{\gamma} [\nabla_{\pi}^* B_{\alpha\beta} + \nabla_{\beta}^* (A_{\alpha\lambda} b_{\pi}^{\lambda}) - \nabla_{\pi}^* (A_{\alpha\lambda} b_{\beta}^{\lambda})] - b_{\gamma}^{\lambda} \nabla_{\pi}^* A_{\alpha\beta} \delta \bar{\psi}_{\lambda} \} d\sigma_* = 0, \quad (2.10)$$

где через I_1, I_2 обозначены контурные интегралы:

$$I_1 = \int_{C_*} (\delta \bar{\psi}_{\gamma} \nabla_{\pi}^* A_{\alpha\beta} - A_{\alpha\beta} \nabla_{\gamma}^* \delta \bar{\psi}_{\pi}) C_*^{\beta\gamma} ds_*, \quad (2.11)$$

$$I_2 = \int_{C_*} [\delta \bar{\psi}_{\gamma} (B_{\alpha\beta} - A_{\beta\lambda} b_{\alpha}^{\lambda}) + A_{\lambda\beta} b_{\gamma}^{\lambda} \delta \bar{\psi}_{\alpha} - b_{\gamma}^{\lambda} A_{\alpha\beta} \delta \bar{\psi}_{\lambda}] C_*^{\beta\gamma} ds_*. \quad (2.12)$$

Рассмотрим вариационное уравнение (2.9), ограничиваясь случаем малых деформаций при произвольных изгибах.

Компоненты деформаций, выраженные через усилия и моменты, обозначим через

$$p_{\alpha\beta} \equiv \frac{\delta F}{\delta S^{\alpha\beta}}, \quad q_{\alpha\beta} \equiv -\frac{\delta F}{\delta M^{\alpha\beta}}. \quad (2.13)$$

При преобразовании уравнения (2.9) будем считать, что соотношения упругости для изгибных деформаций выполняются, т. е. $B_{\alpha\beta} = 0$.

Пренебрегая удлинениями и сдвигом по сравнению с единицей и пользуясь соотношением (1.16), будем иметь:

$$\begin{aligned} C_*^{\alpha\pi} C_*^{\beta\gamma} \nabla_\gamma^* \nabla_\pi^* A_{\alpha\beta} &= C_*^{\alpha\pi} C_*^{\beta\gamma} \nabla_\gamma^* \nabla_\pi^* (p_{\alpha\beta} - \hat{p}_{\alpha\beta}) = \\ &= -C_*^{\alpha\pi} C_*^{\beta\gamma} \left(\nabla_\gamma \nabla_\pi p_{\alpha\beta} + \frac{1}{2} b_{\alpha\gamma} b_{\pi\beta} + \frac{1}{2} b_{\pi\gamma}^* b_{\beta\alpha}^* \cdot a_{\alpha\lambda} \right). \end{aligned}$$

Далее имеем

$$\begin{aligned} C_*^{\alpha\pi} C_*^{\beta\gamma} (-b_{\pi\gamma}^* b_{\beta\alpha}^* A_{\alpha\lambda} + B_{\alpha\beta} b_{\pi\gamma}^*) &= \\ &= C_*^{\alpha\pi} C_*^{\beta\gamma} (b_{\pi\gamma}^* b_{\beta\alpha}^* p_{\alpha\lambda} - b_{\pi\gamma}^* b_{\beta\alpha}^* p_{\alpha\lambda}) = \\ &= C_*^{\alpha\pi} C_*^{\beta\gamma} \left(b_{\pi\gamma}^* b_{\beta\alpha}^* p_{\alpha\lambda} - \frac{1}{2} b_{\pi\gamma}^* b_{\alpha\beta}^* + \frac{1}{2} b_{\pi\gamma}^* b_{\beta\alpha}^* a_{\alpha\lambda} \right). \end{aligned}$$

В силу этих равенств коэффициент при $\delta\psi$ под знаком поверхностного интеграла (2.7) можно представить в форме

$$-C_*^{\alpha\pi} C_*^{\beta\gamma} \left(\nabla_\gamma \nabla_\pi p_{\alpha\beta} + \frac{1}{2} q_{\pi\gamma} q_{\alpha\beta} + q_{\pi\gamma} b_{\alpha\beta} + q_{\alpha\beta} b_{\pi\gamma} - b_{\pi\gamma} b_{\beta\alpha}^* p_{\alpha\lambda} \right) = -L, \quad (2.14)$$

где L — оператор условия совместности деформации в усилиях и моментах.

Следовательно, равенство (2.9) приводится к виду

$$I_1 = \iint L \delta\psi d\sigma. \quad (2.15)$$

Преобразуем (2.10), предполагая, что соотношения упругости для тангенциальных деформаций выполняются, т. е. $A_{\alpha\beta} = 0$.

В силу этого (2.10) переписывается в виде

$$\int_{C^*} B_{\alpha\beta} C_*^{\beta\gamma} \tau^{\alpha\delta} \delta\psi_\gamma ds_* + \int_{C^*} C_*^{\alpha\pi} C_*^{\beta\gamma} \nabla_\pi^* B_{\alpha\beta} \delta\psi_\gamma d\sigma_* = 0. \quad (2.10')$$

Так как

$$\begin{aligned} C_*^{\alpha\pi} (\nabla_\pi q_{\alpha\beta} - b_{\alpha\lambda} A_{\pi\beta}^*) &= 0, \\ C_*^{\alpha\pi} \nabla_\pi q_{\alpha\beta} &= C_*^{\alpha\pi} (\nabla_\pi q_{\alpha\beta} - A_{\pi\beta}^* q_{\alpha\lambda}), \end{aligned}$$

то выражение, стоящее под знаком поверхностного интеграла (2.10'), примет вид

$$-C_*^{\alpha\pi} C_*^{\beta\gamma} (\nabla_\pi q_{\alpha\beta} - A_{\pi\beta}^* q_{\alpha\lambda} - A_{\pi\beta}^* b_{\alpha\lambda}) = -L^1, \quad (2.16)$$

где L^1 — операторы условий совместности в усилиях и моментах. Следовательно, вместо (2.10'), получим

$$\int_{C^*} B_{\alpha\beta} C_*^{\beta\gamma} \tau^{\alpha\delta} \delta\psi_\gamma ds_* = \iint L^1 \delta\psi_\gamma d\sigma; \quad (2.10'')$$

при этом мы пренебрегли удлинениями и сдвигом по сравнению с единицей.

Теперь преобразуем контурные интегралы I_1, I_2 . Так как при малых деформациях

$$\nabla_\gamma^* p_{\alpha\beta} \approx \nabla_\gamma p_{\alpha\beta}, \quad C_*^{\beta\gamma} \approx C^{\beta\gamma},$$

$\tau^{\alpha\delta} ds_* = \tau^{\alpha\delta} ds$, то контурные интегралы запишем в виде:

$$I_1 = \int_C (\delta\psi \nabla_\gamma A_{\alpha\beta} - A_{\alpha\beta} \nabla_\gamma \delta\psi) C^{\beta\gamma} \tau^{\alpha\delta} ds, \quad (2.17)$$

$$I_2 = \int_C B_{\alpha\beta} C^{\beta\gamma} \tau^{\alpha\delta} \delta\psi_\gamma ds.$$

Если ввести компоненты тензоров $A_{\alpha\beta}$ и $B_{\alpha\beta}$ в системе осей триэдра $\{\bar{n}, \bar{\tau}, \bar{m}^*\}$, а также проекции вектора $\delta\psi$ на оси \bar{n} и $\bar{\tau}$

$$\delta\bar{\psi} = p_{\alpha\lambda} \delta\psi_n + \tau_{\alpha\lambda} \delta\psi_s,$$

то I_1 и I_2 примут вид:

$$I_1 = \int_C \left[\left(\lambda A_n - \frac{dA_s}{dn} - \lambda A_s + 2 \frac{dA_{ns}}{ds} \right) \delta\psi + A_s \frac{d\delta\psi}{dn} \right] ds - \delta\psi A_{ns} \Big|_C. \quad (2.18)$$

$$I_2 = \int_C (B_{ns} \delta\psi_s - B_s \delta\psi_n) ds, \quad (2.19)$$

где

$$\begin{aligned} A_n &= A_{\alpha\beta} n^\alpha n^\beta, \quad A_s = A_{\alpha\beta} \tau^\alpha \tau^\beta, \quad A_{ns} = A_{\alpha\beta} \tau^\alpha n^\beta, \\ B_s &= B_{\alpha\beta} \tau^\alpha \tau^\beta, \quad B_{ns} = B_{\alpha\beta} \tau^\alpha n^\beta. \end{aligned} \quad (2.20)$$

При получении (2.18) и (2.19) мы воспользовались формулами статьи [1].

Таким образом, вариационное уравнение (2.3) эквивалентно следующим вариационным уравнениям с контурными интегралами

$$I_1 = \iint L \delta\psi d\sigma, \quad (2.21)$$

$$I_2 = \iint L^1 \delta\psi_\alpha d\sigma \quad (2.22)$$

где I_1 и I_2 выражаются формулами (2.18) и (2.19), а L и L^1 — операторы условий совместности (2.14) и (2.16), выраженные в усилиях и моментах.

§ 3. Формулировка граничных условий в усилиях и моментах. Контурные интегралы, фигурирующие в вариационных уравнениях (2.21) и (2.22), позволяют сформулировать геометрические граничные условия или граничные условия смешанного типа в усилиях и моментах. Рассмотрим некоторые случаи граничных условий.

1. На контуре оболочки заданы тангенциальные перемещения u, v . В этом случае тангенциальные усилия являются произвольными и, следовательно, вариации $\delta\psi$ и $\frac{d\delta\psi}{dn}$ — произвольные. Если условие неразрывности деформации $L = 0$ выполняется, то $I_1 = 0$. По-

этому, в силу произвольности $\delta\psi, \frac{d\delta\psi}{dn}$, из (2.18) следуют граничные условия:

$$\chi(A_n - A_s) - \frac{dA_s}{dn} + 2 \frac{dA_{ns}}{ds} = 0, \quad A_s = 0 \quad \delta\psi A_{ns} \Big|_C = 0,$$

или

$$\chi \left(\overset{\Delta}{\epsilon}_n - \overset{\Delta}{\epsilon}_s \right) - \frac{d\overset{\Delta}{\epsilon}_s}{dn} + 2 \frac{d\overset{\Delta}{\epsilon}_{ns}}{ds} = \chi(\epsilon_n - \epsilon_s) - \frac{d\epsilon_s}{dn} + 2 \frac{d\epsilon_{ns}}{ds}, \quad (3.1)$$

$$\overset{\Delta}{\epsilon}_s = \epsilon_s, \quad \delta\psi A_{ns} \Big|_C = 0, \quad (3.2)$$

где $\overset{\Delta}{\epsilon}_n, \overset{\Delta}{\epsilon}_s$ и $\overset{\Delta}{\epsilon}_{ns}$ — компоненты деформации, выраженные через усилия и моменты на контуре:

$$\overset{\Delta}{\epsilon}_n = \frac{\partial F}{\partial S^2} n^2 n^3, \quad \overset{\Delta}{\epsilon}_s = \frac{\partial F}{\partial S^2} \tau^2 \tau^3, \quad \overset{\Delta}{\epsilon}_{ns} = \frac{\partial F}{\partial S^2} \tau^2 n^3, \quad (3.3)$$

а $\epsilon_n, \epsilon_s, \epsilon_{ns}$ — те же величины, выраженные через перемещения u, v, w по формулам (1.14).

1°. В качестве приложения формулы (3.1) найдем граничные условия для оболочки, жестко заземленной по контуру или по части его. В этом случае на контуре должны выполняться геометрические граничные условия

$$\bar{v} = 0, \quad \bar{n} \bar{m}_s = E_n = 0.$$

Первое из них равносильно условию $\frac{d\bar{v}}{ds} = 0$, а второе — условию

$$\bar{m}_s \bar{n} = -\bar{n} \left[\bar{\tau}, \frac{d\bar{v}}{dn} \right] = \frac{d\bar{v}}{dn} [\bar{\tau}, \bar{n}] = -\bar{m} \frac{d\bar{v}}{dn} = -\omega_n = -\frac{d\omega}{dn} = 0. \quad (3.4)$$

Следовательно,

$$u = v = w = \frac{d\omega}{dn} = 0. \quad (3.5)$$

В силу этих условий из (1.14) для компонентов тангенциальной деформации найдем выражения

$$\epsilon_n = e_{nn} + \frac{1}{2} e_{nn}^2; \quad \epsilon_s = 0, \quad 2\epsilon_{ns} = e_{ns},$$

откуда, пренебрегая ϵ_n по сравнению с единицей, найдем, что

$$e_{nn} = \epsilon_n, \quad \epsilon_s = 0, \quad e_{ns} = 2\epsilon_{ns}. \quad (3.6)$$

Очевидно, в силу граничных условий (3.5)

$$e_{sn} = e_{ss} = \omega_s = \omega_n = 0, \quad E_s \approx 1 + e_{nn} \approx 1 + \epsilon_n \approx 1, \quad E_n = E_s = 0.$$

Тогда из (1.15) следуют выражения для контурных значений компонентов изгибных деформаций:

$$\chi_n = \frac{d\omega_n}{dn} + 2\epsilon_{ns} \tilde{\tau}; \quad \chi_s = \tilde{\sigma} \epsilon_n, \quad \chi_{ns} = -\tilde{\sigma} \cdot 2\epsilon_{ns},$$

Откуда, пренебрегая малыми величинами

$$2\epsilon_{ns} \tilde{\tau}, \quad \tilde{\sigma} \epsilon_n, \quad 2\tilde{\sigma} \epsilon_{ns},$$

получим контурные значения изгибных деформаций:

$$\chi_n = \frac{d\omega_n}{dn}, \quad \chi_s = 0, \quad \chi_{ns} = 0. \quad (3.7)$$

Составим граничные условия для тангенциальных деформаций. Так как на контуре

$$\epsilon_s = 0, \quad \bar{v} = \frac{d\bar{v}}{ds} = \frac{d^2\bar{v}}{ds^2} = 0,$$

то, внося (1.14) в выражение (3.1)

$$A = \chi \epsilon_n - \frac{d\epsilon_s}{dn} + 2 \frac{d\epsilon_{ns}}{ds},$$

получим

$$A = \chi \left\{ \bar{n} \frac{d\bar{v}}{dn} + \frac{1}{2} \left(\frac{d\bar{v}}{dn} \right)^2 \right\} - \bar{\tau} \cdot \frac{d}{dn} \cdot \frac{d\bar{v}}{ds} + \bar{\tau} \frac{d}{ds} \cdot \frac{d\bar{v}}{dn} + \frac{d\bar{\tau}}{ds} \cdot \frac{d\bar{v}}{dn}.$$

Учитывая, что [1]

$$\bar{\tau} \frac{d}{ds} \cdot \frac{d\bar{v}}{dn} - \bar{\tau} \frac{d}{dn} \cdot \frac{d\bar{v}}{ds} = \bar{\tau} \chi \frac{d\bar{v}}{ds} = 0, \quad \frac{d\bar{\tau}}{ds} \cdot \frac{d\bar{v}}{dn} = (\tilde{\sigma} \bar{m} - \chi \bar{n}) \frac{d\bar{v}}{dn},$$

для A найдем выражение

$$A = \frac{\chi}{2} \left(\frac{d\bar{v}}{dn} \right)^2 + \tilde{\sigma} \bar{m} \frac{d\bar{v}}{dn}.$$

Так как

$$\left(\frac{d\bar{v}}{dn} \right)^2 = e_{nn}^2 + e_{ns}^2 = \epsilon_n^2 + 4\epsilon_{ns}^2, \quad \bar{m} \frac{d\bar{v}}{dn} = 0,$$

то, пренебрегая удлинением ϵ_n и сдвигом ϵ_{ns} по сравнению с единицей, получаем $A = 0$ на контуре.

Итак, для оболочки, жестко заземленной по контуру, вместо обычных граничных условий (3.5) получаем граничные условия в компонентах деформации поверхности

$$\left. \begin{aligned} \epsilon_s = 0, \quad \chi \epsilon_n - \frac{d\epsilon_s}{dn} + 2 \frac{d\epsilon_{ns}}{ds} = 0, \\ \chi_s = 0, \quad \chi_{ns} = 0. \end{aligned} \right\} \quad (3.8)$$

При этом деформации считаются малыми, а перемещения произвольными. Граничные условия (3.8) позволяют решать задачу в компонентах деформации или в усилиях и моментах.

2°. В качестве другого примера рассмотрим граничные условия для оболочки, шарнирно опертой по краям

$$u = v = w = 0, \quad (3.9)$$

$$G = M^{\alpha\beta} n_\alpha n_\beta = 0, \quad (3.10)$$

где G — изгибающий момент на контуре. Учитывая (3.9), из формул (1.11) и (1.12), для углов поворота находим значения

$$e_{sn} = e_{ss} = \omega_s = 0, \quad (3.11)$$

$$E_s = 1 + e_{nn}, \quad E_n = -\omega_n, \quad E_s = 0. \quad (3.12)$$

В силу этих равенств для контурных значений компонентов деформаций из (1.14) и (1.15) найдем формулы

$$\epsilon_n = e_{nn} + \frac{1}{2} (e_{nn}^2 + \omega_n^2), \quad 2\epsilon_{ns} = e_{ns}, \quad \epsilon_s = 0. \quad (3.13)$$

$$\left. \begin{aligned} \chi_n &= (1 + e_{nn}) \frac{d\omega_n}{dn} - \omega_n \frac{de_{nn}}{dn} + \tilde{t}e_{ns}, \\ \chi_s &= \chi\omega_n + \tilde{\sigma}e_{nn}, \\ \chi_{ns} &= (1 + e_{nn}) \frac{d\omega_n}{ds} - \omega_n \frac{de_{nn}}{ds} - \tilde{\sigma}e_{ns}. \end{aligned} \right\} (3.14)$$

Здесь компоненты изгибных деформаций можно линеаризировать. Для этого покажем, что $e_{nn} \approx e_n$. Подставляя e_n и e_{ns} из (1.14), для разности производных находим равенство

$$2 \frac{de_{ns}}{ds} - \frac{de_s}{dn} = \tilde{\sigma}\omega_n - \chi e_{nn}; \quad (3.15)$$

при этом мы учли соотношение

$$\frac{d^2\bar{v}}{dsdn} - \frac{d^2\bar{v}}{dn ds} = \chi \frac{d\bar{v}}{ds} = 0. \quad (3.16)$$

Исключая ω_n из соотношений (3.13) и (3.15), получим одно уравнение для e_{nn} вида

$$e_{nn}(\tilde{\sigma}^2 + \chi^2) + 2\tilde{\sigma}e_{nn} - e_n\tilde{\sigma}^2 = 0. \quad (3.17)$$

При этом мы пренебрегли левой частью (3.15) по сравнению с единицей.

Решая (3.17) относительно e_{nn} и пренебрегая удлинением e_n по сравнению с единицей, найдем, что $e_{nn} \approx e_n$. В силу этого приближенного равенства, из (3.14) находим контурные значения компонентов изгибных деформаций:

$$\chi_n = \frac{d\omega_n}{dn} + 2e_{ns} \cdot \tilde{t}, \quad \chi_{ns} = \frac{d\omega_n}{ds} - 2e_{ns}\tilde{\sigma}, \quad \chi_s = \chi\omega_n + \tilde{\sigma}e_n,$$

или, отбрасывая малые величины $2e_{ns}\tilde{\sigma}$, $2e_{ns}\tilde{t}$ и $\tilde{\sigma}e_n$, получим

$$\chi_n = \frac{d\omega_n}{dn}, \quad \chi_{ns} = \frac{d\omega_n}{ds}, \quad \chi_s = \chi\omega_n; \quad (3.18)$$

отсюда для угла поворота ω_n найдем формулу

$$\omega_n = \int_0^s \chi_{ns} ds + c, \quad (3.19)$$

где c — постоянная интегрирования.

Учитывая это выражение, имеем граничные условия для компонентов изгибных деформаций

$$\chi_s = \chi \left(\int_0^s \chi_{ns} ds + c \right), \quad \chi_n + \nu\chi_s = 0, \quad (3.20)$$

где ν — коэффициент Пуассона. Второе из этих равенств заменяет граничное условие (3.10). Для компонентов тангенциальной деформации из (3.13) и (3.15), находим следующие граничные условия

$$e_s = 0, \quad \chi e_n - \frac{de_s}{dn} + 2 \frac{de_{ns}}{ds} = \tilde{\sigma} \left(\int_0^s \chi_{ns} ds + c \right). \quad (3.21)$$

Таким образом, при шарнирном закреплении краев оболочек должны выполняться граничные условия (3.20) и (3.21).

1. Галимов К. З. К вариационным методам решения задач нелинейной теории пластин и оболочек. Изв. Казахск. филиала АН СССР, сер. физ.-матем. и техн. наук, № 10, 1956.
2. Галимов К. З. Общая теория упругих оболочек при конечных перемещениях. Изв. Казахск. филиала АН СССР, № 2, 1950.

Поступила
26. XI 1956 г.

И. В. Свирский

РАЗЛИЧНЫЕ ВАРИАНТЫ МЕТОДА ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНЫХ ПРИБЛИЖЕНИЙ И МЕТОДА ВОЗМУЩЕНИЙ

Метод последовательных приближений для решения нелинейных уравнений является одним из наиболее старых и зарекомендовавших себя на практике методов. Наряду с ним широко применяется метод разложения решения в ряд по степеням малого параметра (метод возмущений).

Метод возмущений можно рассматривать как своего рода модификацию метода последовательных приближений, при применении которого для вычисления n -ого приближения игнорируются члены, имеющие порядок выше n -ого. Весьма важным является вопрос о расширении области применимости метода возмущений, ибо при больших возмущениях исходного уравнения ряды, получающиеся в результате применения метода, расходятся.

Важному вопросу о расширении области применения метода возмущений посвящены работы [1], [2] и [3]. Оригинальный синтез метода последовательных приближений и метода Бубнова — Галеркина предложил В. В. Новожилов [4]. В работе Цянь Вей-чана [5] излагается применение нового варианта метода малого параметра к определению больших прогибов круглых пластин.

При этом нагрузка и прогиб пластины раскладываются в ряд по степеням малого параметра — прогиба центра пластины.

Метод Цянь Вэй-чана можно применять лишь в том случае, когда данное для решения уравнение имеет вид:

$$Ax + Bx = P,$$

где A — линейный оператор, для которого уравнение $Ax = P$ решается достаточно легко, а B — нелинейный оператор, линейная часть которого равна нулю, т. е. оператор, для которого первая вариация δBx при $x = 0$ равна нулю.

В этой статье сделана попытка освободиться от указанного существенного ограничения области применения метода Цянь Вей-чана.

Цель статьи — изложение варианта метода последовательных приближений и метода малого параметра, которые применимы даже в тех случаях, когда линейная часть оператора B отлична от нуля. В отличие от метода Цянь Вей-чана, нижепредлагаемый метод может оказаться полезным также при решении линейных уравнений. В качестве примера применения предлагаемого в статье метода рассматривается расчет больших прогибов пологого сферического купола.

1. Первый вариант метода последовательных приближений. Напомним процедуру обычного метода последовательных приближений.

Пусть формула

$$Bx = P$$

символизирует совокупность системы дифференциальных уравнений и ее начальных или граничных условий, а x — совокупность подлежащих определению неизвестных функций.

Представим предыдущие уравнения в виде:

$$Ax + (B - A)x = P; \quad Ax + Cx = P, \quad (1.1)$$

где A — некоторый линейный оператор достаточно простого строения, а $C = B - A$.

В качестве первого приближения к решению задачи принимается решение уравнения

$$Ax_1 = P; \quad (1.2)$$

предполагается, что оператор A выбран так, что уравнение (1.2) решается легко.

Если это решение подставить в (2.1), то разность между правыми и левыми частями уравнений будет $\Delta_2 = P - Ax_1 - Cx_1$. Выражаясь образно, можно сказать, что погрешность первого приближения x_1 "вызывается" наличием неуровновешенности Δ_2 .

Для устранения неуровновешенности, поправку δ_2 к первому приближению определяют из уравнений

$$A\delta_2 = \Delta_2$$

и в качестве второго приближения к истинному решению принимают $x_2 = x_1 + \delta_2$. Аналогичным образом определяются "неуровновешенность второго приближения", новая поправка к решению и т. д.

В качестве простого примера, на котором легко показать применение различных методов и сравнить результаты с имеющимся точным решением задачи, рассмотрим дифференциальное уравнение и граничные условия

$$\frac{d^2}{dx^2} y - y = p, \quad y(1) = y(-1) = 0. \quad (1.3)$$

Здесь роль операторов A и B будут играть операторы

$$Ay = \frac{d^2}{dx^2} y \quad \text{и} \quad By = -y.$$

Первым способом последовательные приближения к решению уравнения (1.3) определяются путем решения уравнений:

$$\frac{d^2}{dx^2} y_1 = p; \quad y_1(1) = y_1(-1) = 0;$$

$$\dots$$

$$\frac{d^2}{dx^2} y_{n+1} = p + y_n; \quad y_{n+1}(1) = y_{n+1}(-1) = 0.$$

При этом получаются результаты:

$$y_1 = (x^2/2 - 1/2)p;$$

$$y_2 = (x^4/4! + x^2/4 - 1/4! - 1/4)p$$

и т. д.

2. Второй вариант метода последовательных приближений. Пусть дана система уравнений:

$$Ax + Cx = pP, \quad (2.1)$$

где P — некоторая заданная функция координат, а p — число, характеризующее величину нагрузки.

Можно, например, представить себе, что речь идет об определении перемещений сферической оболочки-сегмента, защемленной по краям, при действии на нее нагрузки pP , и пусть требуется определить перемещения оболочки при различных значениях числового параметра p , характеризующего величину нагрузки.

Для определения зависимости прогиба от величины нагрузки зададимся каким-либо значением параметра $p = p_1$ и определим в первом приближении соответствующий прогиб путем решения уравнений:

$$Ax_1(p_1) = p_1P. \quad (2.2)$$

Далее подставим полученное решение в уравнения:

$$A\delta_2(p_1) = p_2P - Ax_1(p_1) - Cx_1(p_1) \quad (2.3)$$

и определим поправку $\delta_2(p_1)$ к первому приближению, а также величину второго приближения к решению:

$$x_2(p_1) = x_1(p_1) + \delta_2(p_1).$$

Число p_2 определяется из условия равенства поперечных прогибов центра оболочки в первом и втором приближениях. При вышеописанной процедуре вычислений, "неуровновешенность" — неравенство левой и правой частей уравнения — устраняется не только путем изменения приближенной формы прогиба, но и путем изменения величины нагрузки, которая подбирается так, чтобы "неуровновешенность" как можно меньше сказывалась на прогибе оболочки (в нашем случае нагрузка на оболочку подбиралась так, чтобы она не вызвала дополнительных поперечных прогибов центра оболочки).

При этом можно ожидать, что перемещения других точек также будут малы.

Итак, в качестве второго приближения к истинной зависимости между перемещением оболочки и ее нагрузкой следует принять ее параметрическое представление

$$x \approx x_2(p_1); \quad p \approx p_2(p_1)$$

через параметр p_1 .

Для определения следующих поправок к параметрическому представлению искомой зависимости решаем систему уравнений:

$$A\delta_2(p_1) = p_3P - Ax_2(p_1) - Cx_2(p_1)$$

и полагаем

$$x_3(p_1) = x_2(p_1) + \delta_2(p_1),$$

причем число p_3 определяем из условия равенства поперечных прогибов центра оболочки для решений $x_3(p_1)$ и $x_2(p_1)$. Тем самым мы получаем следующие более точные параметрические представления искомой зависимости между прогибом и нагрузкой на оболочку. Задаваясь рядом последовательных значений p_1 , мы можем найти соответствующие друг другу значения x_3 и p_3 и построить графики их зависимости.

Заметим, что вместо равенства поперечных прогибов центра оболочки, можно было бы потребовать равенства поперечных прогибов какой-либо другой ее точки, или равенства какой-либо другой обобщенной компоненты перемещения оболочки; эта возможность будет более подробно обсуждаться далее.

При применении второго метода последовательных приближений можно ожидать, что поправки к приближенным решениям окажутся меньше, чем поправки при применении первого метода, ибо путем соответствующих изменений параметра нагрузки поправки для центра оболочки сводятся к нулю. Поэтому естественно ожидать, что и для других точек оболочки, которые находятся ближе к ее краю, изменения прогибов при втором способе последовательных приближений будут иметь меньшую величину, чем при применении первого варианта метода (следует учесть, что обычно точки оболочки, находящиеся ближе к ее краям, где прогибы оболочки равны нулю, имеют сравнительно малые прогибы). Поэтому вероятно, что скорость сходимости второго метода будет значительно более быстрая, чем первого.

Вышеописанный метод можно применять не только к решению уравнений теории оболочек, но и к разрешению самых разнообразных

математических задач, в которых требуется найти решение задачи для непрерывного ряда значений некоторого параметра.

В качестве примера рассмотрим решение уравнения (1.3), которое запишем в следующем виде:

$$\frac{d^2}{dx^2} y = p + y, \quad y(1) = y(-1) = 0, \quad (2.4)$$

где p — некоторый параметр. Этот параметр мы будем менять при каждом шаге последовательных приближений.

При первом шаге приближений положим $p = p_1$ и определим \bar{y}_1 из уравнения

$$\frac{d^2 \bar{y}_1}{dx^2} = p_1, \quad \bar{y}_1(1) = \bar{y}_1(-1) = 0,$$

при этом получим:

$$\bar{y}_1 = p_1(x^2/2 - 1/2).$$

Далее подставим это выражение в правую часть (2.4)

$$\frac{d^2}{dx^2} \bar{y}_2 = p_2 + \bar{y}_1 = p_2 + p_1(x^2/2 - 1/2)$$

и определим \bar{y}_2 :

$$\bar{y}_2 = p_2(x^2/2 - 1/2) + p_1[(x^4 - 1)/4! - (x^2 - 1)/4]. \quad (2.5)$$

Для определения величины p_2 составим уравнение:

$$\bar{y}_2(0) = \bar{y}_1(0), \quad \text{т. е.} \quad -p_2/2 + p_1(-1/4! + 1/4) = -p_1/2.$$

Из этого уравнения определяем величину p_2 :

$$p_2 = p_1(3/2 - 2/4!). \quad (2.6)$$

Формула (2.5) представляет собой приближенное решение уравнения (2.4) при значении параметра $p = p_2$:

$$\frac{d^2 \bar{y}}{dx^2} = p_2 + \bar{y}.$$

Поэтому в качестве второго приближения к решению уравнения (2.4) мы примем функцию

$$y_2 = \bar{y}_2 p/p_2.$$

Подставим (2.5) в (2.4)

$$\frac{d^2 \bar{y}_3}{dx^2} = p_3 + \bar{y}_2. \quad (2.7)$$

Решение этого уравнения определяется формулой:

$$\bar{y}_3 = [0,001388x^6 + 0,038194x^4 - 0,25x^2 + 0,21048] p_1 + p_2(0,5x^2 - 0,5). \quad (2.8)$$

Величину p_3 далее определяем из уравнения

$$\bar{y}_3(0) = \bar{y}_2(0),$$

откуда получаем:

$$p_3 = 1,42084 p_1.$$

Формула (2.8) представляет приближенное решение уравнения

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = p_3 + y, \quad y(1) = y(-1) = 0.$$

Отсюда следует, что в третьем приближении решение уравнения (2.4) можно определить формулой:

$$y_3 = \bar{y}_3 p/p_3$$

и т. д.

3. Третий вариант метода последовательных приближений. Для изложения третьего метода последовательных приближений необходимо предварительно остановиться на некоторых общих соображениях, без которых не будет понятна идея метода.

Пусть формула

$$Bw = P \quad (3.1)$$

символически изображает нелинейное уравнение, связывающее между собой величину давления на оболочку и ее прогиб. Если давление на оболочку несколько увеличить на бесконечно малую величину δP , то изменение прогиба будет определяться уравнением

$$B'(w) \delta w = \delta P. \quad (3.2)$$

Левая часть этого уравнения символизирует первую вариацию левой части уравнения (3.1), $B'(w)$ — линейный оператор, зависящий нелинейно от w .

Этот оператор является линейным относительно δw . Так как наша система консервативна, то согласно теореме Максвелла, оператор $B'(w)$ — симметричен. Обозначим его собственные числа, занумерованные в порядке возрастания их абсолютной величины, через

$$\lambda_1, \lambda_2, \dots; |\lambda_1| \leq |\lambda_2| \leq \dots$$

Через $\varphi_1, \varphi_2, \dots$ обозначим собственные функции оператора $B'(w)$, т. е. функции, удовлетворяющие уравнениям:

$$B'(w) \varphi_i = \lambda_i \varphi_i \quad (i = 1, 2, \dots). \quad (3.3)$$

При этом будем предполагать, что эти функции являются нормированными и между собой ортогональными, то есть удовлетворяющими соотношениям:

$$\begin{aligned} (\varphi_i \varphi_k) &= 1, \quad \text{если } i = k, \\ (\varphi_i \varphi_k) &= 0, \quad \text{если } i \neq k, \end{aligned} \quad (3.4)$$

где (φ_i, φ_k) — скалярное произведение функций φ_i и φ_k , т. е., например, интеграл от их произведения.

Разложим правую часть уравнения (3.2) в ряд по собственным функциям:

$$dP = \sum_{i=1}^{\infty} dc_i \varphi_i. \quad (3.5)$$

Коэффициенты dc_i определяются непосредственно, если умножить скалярно уравнение на φ_i и воспользоваться соотношениями ортогональности (3.4):

$$dc_i = (dP, \varphi_i) \quad (i = 1, 2, \dots). \quad (3.6)$$

Решение уравнения (3.2) будем разыскивать в виде ряда:

$$\delta w = \sum_{i=1}^{\infty} dy_i \varphi_i, \quad \text{где } dy_i = (\delta w, \varphi_i). \quad (3.7)$$

Величины dy_i будем именовать обобщенными компонентами перемещения пластины вдоль направления функций φ_i , рассматриваемых как векторы некоторого функционального пространства; величины dc_i , определяемые формулами (3.6), будем называть обобщенными

компонентами нагрузки вдоль направления функций φ_i . Подставляя (3.5) и (3.7) в (3.2), и учитывая (3.3), имеем:

$$B'(\omega) \sum_{i=1}^{\infty} dy_i \varphi_i = \sum_{i=1}^{\infty} dc_i \varphi_i; \sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i dy_i \varphi_i = \sum_{i=1}^{\infty} dc_i \varphi_i. \quad (3.8)$$

Сравнивая коэффициенты при одинаковых собственных функциях обеих частей уравнения (3.8), получим:

$$\lambda_i dy_i = dc_i, \quad dy_i = dc_i / \lambda_i.$$

Подставляя эти выражения в (3.7), имеем:

$$\delta\omega = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{dc_i}{\lambda_i} \varphi_i. \quad (3.9)$$

Рассматривая это выражение, легко заметить, что наибольшее влияние на изменение прогиба $\delta\omega$ имеет величина dc_1 , которая делится на наименьший по абсолютной величине делитель — λ_1 . Заметим, что для многих задач теории пластин и оболочек величины λ_i быстро возрастают по абсолютной величине при увеличении их номера, и поэтому часто можно в выражении (3.9) пренебречь всеми членами, кроме первого, положив приближенно:

$$\delta\omega \approx \frac{dc_1}{\lambda_1} \varphi_1. \quad (3.10)$$

В качестве примера можно указать, что при применении метода Навье двойных тригонометрических рядов к решению задачи о малых прогибах свободно опертой, равномерно нагруженной квадратной пластины, первый член ряда доставляет значение прогиба центра пластины с погрешностью, не превышающей 2,6 процента.

Введем понятие жесткости системы относительно бесконечно-малых изменений нагрузки, которые не предполагаются обязательно равномерными по всей поверхности оболочки. Жесткостью системы будем называть отношение средней квадратичной величины изменения нагрузки оболочки к средней квадратичной величине изменения ее прогиба:

$$V(\delta P, \delta P) / V(\delta\omega, \delta\omega).$$

Используя предыдущие результаты, можно показать, что наименьшую величину λ_1 жесткость принимает для нагрузок вида: $c\varphi_1$.

Возвращаясь к обсуждению рационального варианта применения метода последовательных приближений, напомним, что при применении второго варианта нагрузки p при каждом шаге приближений выбиралась так, чтобы неуравновешенность не вызвала изменения поперечного прогиба центра оболочки. Однако, по-видимому, коррекция окажется более совершенной, если так изменять при каждом шаге приближений параметр нагрузки p , чтобы не изменялась та обобщенная компонента перемещений оболочки

$$x = (\varphi_1, \omega_n) = (\varphi_1, \omega_{n+1}), \quad (3.11)$$

которой соответствует наименьшая жесткость оболочки, ибо можно ожидать, что изменения других обобщенных компонент окажутся сами по себе малыми в силу больших значений соответствующих жесткостей $|\lambda_2|, |\lambda_3|, \dots$.

Следует заметить, что практическое применение только что описанного варианта метода последовательных приближений может оказаться затруднительным из-за того, что собственные функции φ_i , в большинстве случаев бывают неизвестными. Следует также учесть,

что функции φ_i изменяются при изменении прогиба пластины, ибо при этом изменяется оператор $B'(\omega)$. Указанное затруднение можно во многих случаях устранить, если учесть, что для многих задач о прогибах пластин и оболочек наименьшее по абсолютной величине собственное значение имеет абсолютную величину, в несколько раз меньшую, чем остальные собственные значения; в особенности это относится к случаю, когда оболочка находится в состоянии, близком к состоянию потери устойчивости.

В этих случаях уравнение (3.10) является достаточно точным, и при применении формулы (3.11) вместо φ_1 можно подставить функцию

$$\lambda_1 \frac{\delta\omega}{dc_1} \approx \varphi_1. \quad (3.12)$$

и корректировать величину p при каждом шаге последовательных приближений так, чтобы для двух последовательных приближений оказались одинаковыми величины

$$\left(\lambda_1 \frac{\delta\omega}{dc_1}, \omega_n\right) = \left(\lambda_1 / \frac{dc_1}{dp_1}\right) \left(\frac{\delta\omega}{dp_1}, \omega_n\right) = \left(\lambda_1^2 / \frac{dc_1}{dp_1}\right) \cdot \left(\frac{\delta\omega}{dp_1}, \omega_{n+1}\right). \quad (3.13)$$

Итак, третий метод последовательных приближений отличается от второго тем, что при его применении на каждом этапе приближений величина p корректируется так, чтобы в двух последовательных приближениях оставались одинаковыми не поперечные прогибы центра оболочки, а обобщенные перемещения:

$$\left(\frac{\delta\omega}{dp_1}, \omega_n\right) = \left(\frac{\delta\omega}{dp_1}, \omega_{n+1}\right);$$

при этом вместо величины $\frac{\delta\omega}{dp_1}$ в эту формулу подставляется ее приближенное значение $\frac{d\omega_n}{dp_1}$.

Для упрощения вычислений можно подставить вместо величины $\frac{d\omega_n}{dp_1}$ величину $\frac{d\omega_1}{dp_1}$.

При этом сходимость приближений может оказаться менее быстрой, зато вычисления упрощаются.

Заметим, что в некоторых случаях, например, при расчете нижнего критического значения полной сферической оболочки, когда первое приближение к решению является очень грубым и оно сильно отличается от истинной вариации прогиба в момент потери устойчивости, вышеуказанная замена является нежелательной.

Вышеизложенные приемы решения могут быть применены не только к решению задач нелинейной теории упругости, но и вообще к решению нелинейных уравнений, левая часть которых является градиентом в функциональном пространстве некоторого функционала. Роль этого функционала в задачах теории упругости играет энергия системы.

По-видимому, предлагаемые здесь методы можно применять также и к другим уравнениям; однако в этом случае параметр p на каждом шаге последовательных приближений следует изменять так, чтобы оставалось неизменным скалярное произведение (ω_n, ψ) , где ψ есть полученное каким-либо способом грубо приближенное решение уравнений, сопряженных к уравнениям в вариациях исходной системы уравнений.

Рассмотрим вопрос о применении метода последовательных приближений к задачам, для которых абсолютные величины собственных значений возрастают медленно (это, например, бывает для интеграль-

ных уравнений второго рода). В этих случаях величину параметра p при каждом шаге приближений будем так корректировать, чтобы средняя квадратичная величина разности двух последовательных приближений оказалась минимальной.

Рассмотрим уравнение (2.1), и пусть x_n и p_n суть n -ые приближенные значения p и x . Для определения $(n+1)$ -ых приближений рассмотрим уравнения

$$Ax_{(n+1)} = p_{(n+1)}P - Cx_n.$$

Решения этих уравнений представляются в виде

$$x_{(n+1)} = p_{(n+1)}x_1 + x'_{(n+1)},$$

где $x'_{(n+1)}$ — решение уравнений:

$$Ax'_{(n+1)} = -Cx_n,$$

а x_1 есть решение уравнения:

$$Ax_1 = P.$$

Очевидно, что x_1 есть решение уравнения (2.1) в первом приближении при $p=1$.

Значение $p_{(n+1)}$ будем определять из условия минимальности величины

$$(x_{(n+1)} - x_n, x_{(n+1)} - x_n) = (p_{n+1}x_1 + x'_{n+1} - x_n, p_{n+1}x_1 + x'_{n+1} - x_n).$$

Приравняв нулю производную по p_{n+1} от этого выражения, получим уравнение для определения p_{n+1} :

$$2(p_{n+1}x_1 + x'_{n+1} - x_n, x_1) = 0,$$

т. е.

$$(x_{n+1} - x_n, x_1) = 0, (x_{n+1}, x_1) = (x_n, x_1).$$

Итак, мы снова пришли к вышеуказанной упрощенной процедуре метода последовательных приближений.

В качестве примера применения третьего метода последовательных приближений снова рассмотрим решение уравнения

$$\frac{d^2y}{dx^2} = p + y; y(1) = y(-1) = 0, \quad (3.14)$$

где p — некоторый параметр. Величину этого параметра мы будем менять при каждом шаге приближений.

При первом шаге положим $p = p_1$ и определим \bar{y}_1 из уравнения:

$$\frac{d^2\bar{y}_1}{dx^2} = p_1, y_1(1) = y_1(-1) = 0;$$

$$\bar{y}_1 = p_1(x^2/2 - 1/2).$$

Далее рассмотрим уравнение

$$\frac{d^2\bar{y}_2}{dx^2} = p_2 + \bar{y}_1 = p_2 + p_1(x^2/2 - 1/2). \quad (3.15)$$

Его решение есть —

$$\bar{y}_2 = p_2(x^2/2 - 1/2) + p_1\left(\frac{x^4 - 1}{4!} - \frac{x^2 - 1}{4}\right).$$

Для определения величины p_2 составим уравнение:

$$\int_{-1}^1 \bar{y}_2 \bar{y}_1 dx = \int_{-1}^1 \bar{y}_1 \bar{y}_1 dx.$$

Выполняя интегрирование и решая полученное уравнение относительно p_2 , получим:

$$p_2 = 1,51464 p_1.$$

Формула (3.15) представляет собой приближенное решение уравнения

$$\frac{d^2y}{dx^2} = p_2 + y, y(1) = y(-1) = 0.$$

Поэтому в качестве второго приближения к решению уравнения (3.14) мы примем функцию

$$y_2 = \bar{y}_2 p / p_2.$$

Для определения третьего приближения решим уравнение

$$\frac{d^2\bar{y}_3}{dx^2} = p_3 + \bar{y}_2; \quad (3.16)$$

его решение дает:

$$\bar{y}_3 = (0,0013888x^6 + 0,03769x^4 - 0,2470x^2 + 0,2472)p_1 + p_3(x^2/2 - 1/2).$$

Величину p_3 определяем из уравнения

$$\int_{-1}^1 \bar{y}_3 \bar{y}_1 dx = \int_{-1}^1 \bar{y}_2 \bar{y}_1 dx.$$

Выполняя интегрирование и решая полученное уравнение относительно p_3 , получим:

$$p_3 = 1,45135 p_1.$$

Формула (3.16) представляет собой приближенное решение уравнения

$$\frac{d^2y}{dx^2} = p_3 + y.$$

В качестве третьего приближения к решению уравнения (3.14) мы примем поэтому функцию

$$y_3 = \bar{y}_3 p / p_3.$$

Заметим, что точное решение уравнения (3.14) определяется формулой

$$y = p \frac{\operatorname{ch} x - \operatorname{ch} 1}{\operatorname{ch} 1}.$$

В следующей таблице представлены приближенные значения решения $y(x)$ в точках $x=0$ и $x=0,5$, полученные тремя вышеописанными методами; наряду с ними представлены их точные значения.

Первое приближение

	$x=0$	$x=0,5$
Первый метод	-0,5 p	-0,375 p
Второй метод	-0,5 p	-0,375 p
Третий метод	-0,5 p	-0,375 p

Второе приближение

	$x=0$	$x=0,5$
Первый метод	-0,29166 p	-0,2253 p
Второй метод	-0,35295 p	-0,22611 p
Третий метод	-0,35168 p	-0,26932 p

Третье приближение

Первый метод	-0,37638 p	-0,28526 p
Второй метод	-0,35191 p	-0,26921 p
Третий метод	-0,351922 p	-0,269207 p
Точное решение	-0,351945 p	-0,269238 p

4. Расчет прогибов сферического купола. Рассмотрим задачу определения больших прогибов равномерно нагруженного пологого сферического купола.

Здесь приводится приближенное решение этой задачи третьим вариантом метода последовательных приближений для случая свободного защемления краев купола, когда радиальные мембранные усилия краев купола равны нулю, а повороты краев купола отсутствуют.

Основные дифференциальные уравнения прогиба купола, как известно (см., например, [7]), имеют вид:

$$\rho \frac{d}{d\rho} \left[\frac{1}{\rho} \cdot \frac{d}{d\rho} (\rho\Phi) \right] = \vartheta \left[\frac{\vartheta}{2} + \frac{1}{a} \cdot \frac{df(\rho\rho)}{d\rho} \right], \quad (4.1)$$

$$\rho \frac{d}{d\rho} \left[\frac{1}{\rho} \frac{d}{d\rho} (\rho\vartheta) \right] = -\lambda\Phi \left[\vartheta + \frac{1}{a} \cdot \frac{df(\rho\rho)}{d\rho} \right] + \frac{a^2}{D} \int_0^\rho z\rho d\rho,$$

где:

a — радиус основания оболочки, E — модуль упругости,
 $f(r)$ — вертикальная координата купола, t — толщина оболочки,
 N_r — радиальное мембранное напряжение оболочки,
 r — расстояние до центра оболочки, w — прогиб оболочки,
 z — величина плотности нагрузки оболочки,

$$\lambda = 12(1 - \nu^2) a^2 / t^2, \quad \rho = r/a,$$

$$\vartheta = \frac{dw}{dr}, \quad \Phi = -N_r \frac{\rho}{Et},$$

ν — коэффициент продольно-поперечного сжатия.

Если ввести безразмерные параметры

$$x = 1 - \rho^2; \quad v = \sqrt{3(1 - \nu^2)/2} \cdot w/t; \quad v^0 = \sqrt{3(1 - \nu^2)/2} \cdot f(r)/t;$$

$$Q = \frac{3}{4} (1 - \nu^2) \sqrt{3(1 - \nu^2)/2} \cdot a^4 z / Et^4;$$

$$s = 3(1 - \nu^2) \sqrt{3(1 - \nu^2)/2} \cdot a^4 z / Et^4, \quad (4.3)$$

то уравнение (4.2) примет вид:

$$\frac{d^2}{dx^2} \left[(1-x) \frac{dv}{dx} \right] = s \cdot \frac{d(v+v^0)}{dx} - Q, \quad (4.4)$$

где величина s определяется решением уравнения (4.1), которое при применении новых переменных имеет вид:

$$\frac{d^2}{dx^2} [(1-x)s] = - \left(\frac{dv}{dx} \right)^2 - 2 \frac{dv^0}{dx} \cdot \frac{dv}{dx}. \quad (4.5)$$

Вертикальные координаты точек купола до деформации определяются формулой

$$f(r) = - (a^2 - r^2) / 2R;$$

следовательно,

$$v^0 = kx/2, \quad \text{где } k = -\sqrt{3/2} (1 - \nu^2) \cdot a^2 / Rt. \quad (4.6)$$

Подставляя (4.6) в (4.4) и (4.5), получим:

$$\frac{d^2}{dx^2} \left[(1-x) \frac{dv}{dx} \right] = s \left(\frac{dv}{dx} + k/2 \right) - Q, \quad (4.7)$$

$$\frac{d^2}{dx^2} [(1-x)s] = - \left(\frac{dv}{dx} \right)^2 - k \frac{dv}{dx}. \quad (4.8)$$

Ввиду того, что края оболочки не могут поворачиваться, и радиальные мембранные напряжения у краев равны нулю, имеют место граничные условия:

$$v = \frac{dv}{dx} = 0; \quad s = 0 \quad \text{при } x = 0. \quad (4.9)$$

Ввиду ограниченности изгибных напряжений и мембранных усилий в центре оболочки, имеют место еще два условия:

$$\left| \frac{dv}{dx} \right| < \infty, \quad |s| < \infty \quad \text{при } x = 1. \quad (4.10)$$

Для определения первого приближения устраним в уравнении (4.7) первый член его правой части и решим уравнения:

$$\left. \begin{aligned} \frac{d^2}{dx^2} \left[(1-x) \frac{dv_1}{dx} \right] &= -Q_1, \\ v_1 = \frac{dv_1}{dx} &= 0 \quad \text{при } x=0, \quad \left| \frac{dv_1}{dx} \right| < \infty \quad \text{при } x=1. \end{aligned} \right\} \quad (4.11)$$

Решая эти уравнения, находим

$$v_1 = Q_1 x^2 / 4. \quad (4.12)$$

Подставляем это выражение вместо v в правую часть уравнения (4.8):

$$\frac{d^2}{dx^2} [(1-x)s] = -Q_1^2 x^2 / 4 - kQ_1 x / 2.$$

Решение этого уравнения, удовлетворяющее граничным условиям типа (4.9) и (4.10), имеет вид

$$s_1 = (x^3 + x^2 + x) Q_1^2 / 48 + (kQ_1 / 12) (x^2 + x). \quad (4.13)$$

Подставляя выражение (4.12) и (4.13) вместо v и s в правую часть уравнения (4.7):

$$\frac{d^2}{dx^2} \left[(1-x) \frac{dv_2}{dx} \right] = s_1 \left(\frac{dv_1}{dx} + k/2 \right) - Q_2,$$

найдем его решение, удовлетворяющее граничным условиям типа (4.9) и (4.10):

$$\begin{aligned} v_2 = & -\frac{Q_1^3}{34560} (2x^6 + 6x^5 + 15x^4 + 20x^3 + 30x^2) - \\ & -\frac{kQ_1^2}{34560} (18x^5 + 60x^4 + 100x^3 + 150x^2) - \\ & -\frac{k^2Q_1}{1152} (x^4 + 4x^3 + 6x^2) + Q_2 x^2 / 4. \end{aligned} \quad (4.14)$$

Величину Q_2 будем определять из условия равенства обобщенных перемещений, полученных при первом и втором шаге процесса приближений:

$$\int_0^a w_1 w_1 r dr = \int_0^a w_2 w_2 r dr,$$

где

$$w_1 = v_1 t / \sqrt{3(1-v^2)/2}, \quad w_2 = v_2 t / \sqrt{3(1-v^2)/2}.$$

Производя замену переменных и выполнив вычисления, мы получим уравнение, из которого определяется величина Q_2 :

$$Q_2 = Q_1 + 0,0072039 Q_1^3 + 0,03328 k Q_1^2 + 0,03488 k^2 Q_1. \quad (4.15)$$

Итак, уравнения (4.14) и (4.15) приближенно представляют параметрическую зависимость параметра прогиба v_2 и параметра нагрузки Q_2 через параметр Q_1 .

Задавая рядом значений параметра Q_1 , можно найти во втором приближении ряды соответствующих друг другу значений величин w_2 и Q_2 и построить графики их взаимной зависимости.

5. Методы разложения по степеням малого параметра (методы возмущений). Методы разложения по степеням малого параметра (методы возмущений) для решения уравнений типа:

$$Ax + \mu Cx = pP,$$

где μ — малый параметр, представляют собой видоизменение вышеописанных методов последовательных приближений и отличаются от них лишь тем, что при их применении во время выполнения n -ого шага вычислений пренебрегаются члены, содержащие μ в степени выше n -ой. Этот метод применим лишь в тех случаях, когда оператор C аналитичен, т. е. когда он может быть представлен в виде степенного ряда:

$$Cx = \sum_{s=0}^{\infty} C_s(x_1 \dots x_s),$$

где $C_s(x_1 \dots x_s)$ — полилинейные операторы n -ой степени. При этом подлежащие решению уравнения имеют вид:

$$Ax + \mu \sum_{s=0}^{\infty} C_s(x_1 \dots x_s) = pP, \quad (5.1)$$

где $C_s(x_1, x_2, \dots, x_s)$ — операторы, линейные относительно каждого из аргументов x_1, x_2, \dots, x_s . Рассмотренная в предыдущем параграфе система уравнений пологой сферической оболочки, очевидно, принадлежит к только что указанному классу уравнений. В этом случае в формуле (5.1) будут участвовать лишь линейные и билинейные операторы.

Покажем, например, применение метода малого параметра, соответствующего третьему методу последовательных приближений. В качестве первого приближения выбирается решение уравнения:

$$Ax_0 = p_0 P,$$

где p_0 — произвольно выбранное число.

Решение задачи разыскивается в виде рядов:

$$\begin{aligned} x &= x_0 + \mu x_1 + \mu^2 x_2 + \dots, \\ p &= p_0 + \mu p_1 + \mu^2 p_2 + \dots. \end{aligned} \quad (5.2)$$

Подставляя эти выражения в (5.1), разлагая правую и левую части уравнения в ряды по степеням малого параметра μ и сравнивая коэффициенты при одинаковых степенях μ , получим систему уравнений типа:

$$\begin{aligned} Ax_1 + C_0 &= p_1 P, \\ Ax_2 + C_1(x_1) &= p_2 P, \\ Ax_3 + [C_2(x_1 x_1) + C_1(x_2)] &= p_3 P, \\ &\dots \end{aligned}$$

Коэффициенты p_1, \dots, p_n определяются из условия

$$(x_0 + \dots + \mu^{(n-1)} x_{n-1} + \mu^n x_n, x_0) = (x_0 + \dots + \mu^{n-1} x_{n-1}, x_0).$$

Отсюда следует

$$\text{при } n > 0 \quad (x_n, x_0) = 0 \quad (5.4)$$

Итак, если определены $x_0 \dots x_{n-1}$ и p_0, \dots, p_{n-1} , то следующие коэффициенты x_n и p_n определяются путем решения системы уравнений

$$Ax_n + \gamma_n(x_0 \dots x_{n-1}) = p_n P, \quad (5.5)$$

$$(x_n, x_0) = 0. \quad (5.6)$$

При применении варианта метода возмущений, соответствующего второму варианту метода последовательных приближений, уравнение (5.6) заменяется условием равенства нулю функций x_n , в некоторой, подходящим образом выбранной, точке.

ЛИТЕРАТУРА

1. Канторович Л. В., Крылов В. И. Приближенные методы высшего анализа. Гостехиздат, изд. 4, 130—155, 1955.
2. Bellmann R. On the perturbation method involving expansions in terms of a parameter, Quart. of appl. Math., v. XII, № 2, 1955.
3. Bellmann R. Perturbation methods applied to nonlinear dynamics, Journ. appl. Mech., v. 22, № 4 (1955) 500—503.
4. Новожилов В. В. Об одном приближенном методе решения краевых задач для дифференциальных уравнений в обыкновенных производных. ПММ, т. 16, в. 3, 1952, стр. 304—318.
5. Chien Wei-zang. Large deflection of circular clamped plate under uniform pressure, Chinese Journ. Physics, v. VII, 1947, 102—113.

Поступила
20.XII 1956 г.

И. В. Свирский

ОБ ОЦЕНКЕ ТОЧНОСТИ ВАРИАЦИОННОГО МЕТОДА ОПРЕДЕЛЕНИЯ БОЛЬШИХ ПРОГИБОВ ОБОЛОЧЕК

В статье сделана попытка оценки точности определения вариационным методом прогибов пластин и оболочек. Способ оценки, предложенный в статье, может быть применен, когда в оболочке имеют место растягивающие (положительные) главные мембранные напряжения*.

В работе Н. В. Зволинского [4] указывается способ оценки точности определения редуцированного коэффициента прямоугольной плоской пластины методом Ритца в первом приближении.

§ 1. Основные черты способа оценки точности определения величины минимума функционала вариационным методом

При применении вариационного метода Ритца для решения задач о минимуме функционалов обычно получаются приближенные значения, несколько большие действительного минимума, так как при приближенном решении минимум часто не достигается. Ниже предлагается способ получения приближенного значения минимума функционала с недостатком, что позволяет сделать оценку точности каждого из приближенных решений.

Для простоты рассмотрим частный случай, когда мы имеем дело с определением минимального значения интеграла

$$I = \min \int \Phi(w) dv, \quad (1.1)$$

где $\Phi(w)$ — некоторая функция от функции w и ее производных.

Предполагается, что к конкуренции допускаются функции w некоторого класса Γ , удовлетворяющие некоторым условиям непрерывности и граничным условиям.

Представим функционал (1.1) в виде суммы двух других функционалов:

$$\int \Phi(w) dv = \int \Phi_1(w) dv + \int \Phi_2(w) dv.$$

При этом первый из функционалов правой части уравнения мы подбираем так, чтобы соответствующее ему уравнение Эйлера было достаточно простым и чтобы оно легко решалось.

Задача об определении минимума функционала (1.1) эквивалентна задаче о минимуме функционала с двумя переменными функциями w_1 и w_2 :

$$\min \left[\int \Phi_1(w_1) dx + \int \Phi_2(w_2) dx \right] \quad (1.2)$$

* Содержание работы доложено 24 июня 1957 г. на заседании Казанского физико-математического общества.

при дополнительном условии $w_1 - w_2 = 0$ и требовании, чтобы функции w_1 и w_2 удовлетворяли граничным условиям.

Эту задачу мы будем именовать первой задачей.

Теперь рассмотрим вариационную задачу, которую будем называть второй.

Найти свободный минимум функционала от двух функций w_1 и w_2 .

$$I_2 = \min \int \{ \Phi_1(w_1) + \Phi_2(w_2) + \lambda(w_2 - w_1) \} dv, \quad (1.3)$$

где λ — некоторая заданная функция. Как задается эта функция, мы укажем далее.

При этом предполагается, что функции w_1 и w_2 принадлежат классу Γ . Очевидно, что поставленная задача имеет смысл, если минимум функционалов

$$\int [\Phi_1(w_1) - \lambda w_1] dv \quad (1.3б)$$

$$\int [\Phi_2(w_2) + \lambda w_2] dv \quad (1.3в)$$

имеет место при некоторых функциях класса Γ . Мы будем предполагать, что разложение нашего функционала на сумму двух других произведено так, что функционалы (3б) и (3в) имеют в классе функций Γ один экстремум, имеющий характер минимума. Нетрудно показать, что это требование будет выполняться, если класс функций Γ представляет собой выпуклое множество, и если вторые вариации функционалов (3б) и (3в) положительны при любых функциях w_1 и w_2 из Γ .

Очевидно, что величина минимума функционала (1.3) будет не больше минимума функционала (1.1), ибо, если мы вместо w_1 и w_2 подставим в функционал (1.3) функции $w_1 = w_0$ и $w_2 = w_0$, где w_0 — функция, доставляющая минимум функционалу (1.1), то уже тогда величина функционала (1.3) примет значение, равное минимальному значению функционала (1.1). Необходимыми условиями минимума функционала (1.3) являются соотношения:

$$L\Phi_1(w_1) - \lambda = 0, \quad (1.4)$$

$$L\Phi_2(w_2) + \lambda = 0. \quad (1.5)$$

Эти формулы символизируют совокупность уравнений Эйлера и соответствующих естественных граничных условий.

Отыскание решений системы уравнений (1.4) и (1.5) сильно облегчается тем, что в эту систему уравнений входят две функции w_1 и w_2 и еще одна „лишняя“ функция λ , конкретный вид которой еще не определен, и видом которой мы можем распоряжаться.

Для нахождения решений уравнений (1.4) и (1.5) можно поступить так:

Возьмем некоторую функцию w_2 , удовлетворяющую граничным условиям, и, подставив ее в уравнение (1.5), будем находить из него конкретный вид функции λ .

$$\lambda = -L\Phi_2(w_2). \quad (1.6)$$

Подставив полученное значение функции λ в уравнение (1.4), мы получим из него

$$L_{w_1}\Phi_1(w_1) = L_{w_2}\Phi_2(w_2). \quad (1.7)$$

Так как функционал $\Phi(w_1)$ был выбран достаточно простой структуры, то нетрудно будет найти решение w_1 этого уравнения, удовлетворяющее граничным условиям.

Подставляя полученное значение функции w_1 , а также функции w_2 в формулу (1.3) и вычисляя интеграл, мы получаем искомое значение — приближение с недостатком к минимуму функционала (2.1).

Если функция w_2 совпадает с функцией w , дающей минимум исходного функционала, то тогда приближенное значение с недостатком оказывается точным. В самом деле, в этом случае эта функция удовлетворяет уравнению Эйлера для исходной задачи

$$L\Phi(w) = 0,$$

а, так как $w_2 = w$, то $L\Phi(w_2) = 0$, а так как $w_1 = w_2 = w$, то $L\Phi_1(w_1) = L\Phi_2(w_2) = 0$, то

$$L\Phi_1(w_2) + L\Phi_2(w_2) = 0. \quad (1.8)$$

Отсюда следует, что в данном случае решением уравнения (1.7) будет функция $w_1 = w_2 = w$.

Подстановка этих функций в формулу (1.3) убеждает нас, что в этом случае значение функционала (1.3) совпадает с минимальным значением исходного функционала.

Если функция w_2 не совпадает точно с истинной функцией w , дающей минимум исходного функционала, то можно все же ожидать, что, если функция w_2 и ее производные мало отличаются от функции w и ее производных, то при непрерывной зависимости решения уравнения (1.7) от правой части уравнения, приближенное решение с недостатком будет мало отличаться от точного решения. Практический вид функции $w_2(x)$ следует искать в виде линейной комбинации некоторых функций $\varphi_i(x)$, удовлетворяющих граничным условиям:

$$w_2(x) = \sum c_i \varphi_i(x). \quad (1.9)$$

Тогда приближение с недостатком I_2 будет некоторой функцией от коэффициентов c_i :

$$I_2 = f(c_1, c_2, \dots, c_n). \quad (1.10)$$

Решим задачу на максимум функции конечного числа величин c_1, c_2, \dots, c_n . Для этого соответствующим образом решим систему уравнений:

$$\frac{df(c_1, c_2, \dots, c_n)}{dc_i} = 0, \quad i = 1, 2, \dots, n. \quad (1.11)$$

Подставляя полученные величины c_i в формулу (10), мы получаем приближенное решение с недостатком задачи о минимуме функционала.

Результаты, полученные в этом параграфе, были для частного случая квадратичного функционала (1) получены совершенно другим путем М. Г. Слободянским [1].

§ 2. Некоторые подробности вычислений

Как это указывалось ранее, для того, чтобы оценить минимум функционала сверху, мы должны наметить ожидаемую функцию w_2 , осуществляющую минимум функционала, и вычислить величину

$$I_1 = \int \Phi_1(w_2) dv + \int \Phi_2(w_2) dv. \quad (2.1)$$

а для того, чтобы оценить снизу минимум функционала, мы должны подсчитать выражение (1.3). Пользуясь (1.4), мы можем придать этому выражению следующую форму:

$$I_2 = \int \Phi_1(w_1) dv + \int \Phi_2(w_2) dv + \int L_1 \Phi_1(w_1)(w_2 - w_1) dv, \quad (2.2)$$

где w_1 есть решение уравнения:

$$L_1 \Phi_1(w_1) = -L_1 \Phi_2(w_2). \quad (2.3)$$

Рассмотрим случай, когда в качестве функции $\Phi_1(w_1)$ выбрана достаточно простая квадратичная функция от функции w_1 и ее производных, т. е. функция, которая при любых двух функциях u_1 и u_2 и любых числах α и β удовлетворяет равенству:

$$\int \Phi_1(\alpha u_1 + \beta u_2) dv = c_1 \alpha^2 + c_2 \alpha \beta + c_3 \beta^2, \quad (2.4)$$

где c_1, c_2, c_3 — некоторые коэффициенты, зависящие от u_1 и u_2 . Дифференцируя (2.4) по β и полагая $\beta = 0, \alpha = 1$, получим:

$$\int L_1 \Phi_1(u_1) u_2 dv = c_2. \quad (2.5)$$

Полагая $\alpha = 1$ и $\beta = 0$, имеем

$$\int \Phi_1(u_1) dv = c_1. \quad (2.6)$$

Теперь полагая $\alpha = 0, \beta = 1$, так же получим:

$$\int \Phi_1(u_2) dv = c_3. \quad (2.7)$$

Полагая в формуле (2.4) $\alpha = \beta = 1$, мы можем получить такое равенство, справедливость которого легко проверяется, если воспользоваться формулами (2.5), (2.6) и (2.7):

$$\int \Phi_1(u_1 + u_2) dv = \int \Phi_1(u_1) dv + \int \Phi_1(u_2) dv + \int L_1 \Phi_1(u_1) u_2 dv. \quad (2.8)$$

Положим в этой формуле $u_1 = w_1, u_2 = w_2 - w_1$, тогда мы получим:

$$\int \Phi_1(w_2) dv = \int \Phi_1(w_1) dv + \int \Phi_1(w_2 - w_1) dv + \int L_1 \Phi_1(w_1)(w_2 - w_1) dv. \quad (2.9)$$

Теперь вычислим разность между приближенными решениями вариационной задачи с избытком и недостатком. Эта величина будет характеризовать погрешности этих решений. Из уравнений (2.2) и (2.1) имеем

$$I_1 - I_2 = \int [\Phi_1(w_2) - \Phi_1(w_1)] dv - \int L_1 \Phi_1(w_1)(w_2 - w_1) dv. \quad (2.10)$$

Воспользовавшись (2.9), получим

$$I_1 - I_2 = \int \Phi_1(w_2 - w_1) dv. \quad (2.11)$$

Из уравнения (2.3) имеем

$$L \Phi_1(w_2 - w_1) = L \Phi_1(w_2) + L \Phi_2(w_2). \quad (2.12)$$

При этом мы использовали то обстоятельство, что ввиду квадратичности функционала $\int \Phi_1(w) dv$ оператор $L \Phi_1(w_1)$ оказывается линейным.

Введем обозначение

$$L \Phi_1(w_2) + L \Phi_2(w_2) = L \Phi(w_2) = \varepsilon(w_2). \quad (2.13)$$

Эта величина характеризует, насколько намеченная нами функция w_2 отличается от истинного решения w нашей вариационной задачи, которое точно удовлетворяет уравнению

$$L \Phi(w) = 0.$$

Функцию $\varepsilon(w_2)$ мы будем называть неуравновешенностью. Теперь мы можем уравнение (2.12) переписать так:

$$L \Phi_1(w_2 - w_1) = \varepsilon(w_2). \quad (2.14)$$

Отсюда:

$$w_2 - w_1 = [L \Phi_1]^{-1} \varepsilon(x).$$

Здесь мы через $[L \Phi_1]^{-1}$ обозначили оператор, разрешающий уравнение (2.14).

Теперь мы можем, подставляя полученное выражение в формулу (2.11), получить величину разности между решениями задачи с избытком и недостатком; эта разность характеризует точность каждого из решений

$$I_1 - I_2 = \int \Phi_1 \{ [L \Phi_1]^{-1} \varepsilon \} dv. \quad (2.15)$$

Отсюда

$$I_2 = I_1 - \int \Phi_1 \{ [L \Phi_1]^{-1} \varepsilon \} dv. \quad (2.16)$$

§ 3. Оценка точности вариационного метода определения больших прогибов полой оболочки

Для дальнейших рассуждений нам понадобится вариационная формула, предложенная Н. А. Алумяэ (3.1). Рассмотрим коротко вывод этой формулы, при котором наиболее выукло выясняются ее свойства, позволяющие далее оценивать снизу энергию оболочки и ее нагрузки.

Энергия полой оболочки, ее поперечной нагрузки p и краевых нагрузок \bar{p}^i , приложенных к части края оболочки c_1 (другая часть края оболочки предполагается закрепленной), определяется формулой:

$$\mathcal{E} = \iint \left[\frac{1}{2} E^{ijmn} \chi_{ij} \chi_{mn} + \frac{1}{2} B^{ijmn} \varepsilon_{ij} \varepsilon_{mn} - p w \right] ds - \int_{c_1} u_i \bar{p}^i ds; \quad (3.1)$$

по повторяющимся индексам производится суммирование от 1 до 2, например

$$E^{ijmn} \chi_{ij} \chi_{mn} = \sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^2 \sum_{m=1}^2 \sum_{n=1}^2 E^{ijmn} \chi_{ij} \chi_{mn};$$

постоянные E^{ijmn} и B^{ijmn} зависят от механических свойств материала и толщины оболочки. Величины ε_{ij} и χ_{ij} суть деформации и искривления оболочки, которые следующим образом зависят от прогиба оболочки w и ее касательных перемещений u [3]:

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} (u_{i,j} + u_{j,i}) + k_{ij} w + w_{,i} w_{,j} / 2 \quad \chi_{ij} = w_{,ij}.$$

Здесь и далее запятая обозначает символ дифференцирования, обыкновенного при применении декартовой системы координат, например:

$$u_{i,j} = \frac{\partial u_i}{\partial x_j}, \quad w_{,ij} = \frac{\partial^2 w}{\partial x_i \partial x_j}$$

и ковариантного при применении криволинейной системы координат.

Величины k_{ij} суть кривизны оболочки до ее деформации (коэффициенты второй дифференциальной квадратичной формы).
Если подставить выражения для ϵ_{ij} и χ_{ij} в формулу для энергии системы, то будем иметь:

$$\begin{aligned} \mathcal{E} = \iint \left\{ \frac{1}{2} E^{ijmn} \omega_{,ij} \omega_{,mn} + \frac{1}{2} B^{ijmn} \left[\frac{1}{2} (u_{i,j} + u_{j,i}) + k_{ij} \omega + \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{1}{2} \omega_{,i} \omega_{,j} \right] \left[\frac{1}{2} (u_{mn} + u_{nm}) + k_{mn} \omega + \frac{1}{2} \omega_{,m} \omega_{,n} \right] - p\omega \right\} ds - \\ - \int_{c_1} u_i \bar{p}^i ds. \end{aligned} \quad (3.2)$$

Для оценки снизу величины энергии применим преобразование Фридрихса [2], состоящее в том, что рассматривается минимум следующего функционала:

$$\begin{aligned} I = \iint \left[\frac{1}{2} E^{ijmn} \omega_{,ij} \omega_{,mn} + \frac{1}{2} B^{ijmn} (v_{ij} + k_{ij} \omega + \frac{1}{2} \omega_{,i} \omega_{,j}) \times \right. \\ \left. \times (v_{mn} + k_{mn} \omega + \frac{1}{2} \omega_{,m} \omega_{,n}) - p\omega \right] ds - \int_{c_1} u_i \bar{p}^i ds + \\ + \iint \lambda^{ij} \left[\frac{1}{2} (u_{i,j} + u_{j,i}) - v_{ij} \right] ds, \end{aligned} \quad (3.3)$$

где λ_{ij} — некоторые функции координат.

Если величины v_{ij} и u_i варьировать так, чтобы они удовлетворяли соотношениям:

$$v_{ij} = \frac{1}{2} (u_{i,j} + u_{j,i}), \quad (3.4)$$

то минимум функционала (3.3) будет совпадать по величине с минимумом функционала (3.2), ибо последний интеграл формулы (3.3) будет обращаться в нуль. Если же на величины v_{ij} не накладывать связей (3.4) и считать их независимыми от u_i , то минимум функционала (3.3) будет меньше или по крайней мере не больше минимума функционала энергии (3.2) и будет давать оценку снизу значения минимума функционала энергии. Варьируя функционал (3.3) независимо по u_i и v_{ij} , так, чтобы не нарушались условия закрепления краев пластины, получим с учетом уравнений $B^{ijmn} = B^{nmij} = B^{nmij}$ следующие дифференциальные уравнения Эйлера и естественные граничные условия:

$$\lambda^{ij} = 0, \quad (3.4)$$

$$B^{ijmn} \left(v_{mn} + k_{mn} \omega + \frac{1}{2} \omega_{,m} \omega_{,n} \right) - \lambda^{ij} = 0, \quad (3.5)$$

на c_1

$$\lambda^{ij} n_j - \bar{p}^i = 0. \quad (3.6)$$

Результат решения уравнения (3.5) относительно v_{mn} обозначим через:

$$v_{mn} = B_{mnij}^{(-1)} \lambda^{ij} - k_{mn} \omega - \frac{1}{2} \omega_{,m} \omega_{,n}, \quad (3.7)$$

где $B_{mnij}^{(-1)}$ некоторые постоянные.

На основании (3.5) имеем после интегрирования по частям

$$\begin{aligned} I = \iint \left[\frac{1}{2} E^{ijmn} \omega_{,ij} \omega_{,mn} + \frac{1}{2} \lambda^{ij} (v_{ij} + k_{ij} \omega + \frac{1}{2} \omega_{,i} \omega_{,j}) \right] ds - \\ - \iint \lambda^{ij} v_{ij} ds - \iint p \omega ds, \end{aligned}$$

т. е.

$$I = \iint \left[\frac{1}{2} E^{ijmn} \omega_{,ij} \omega_{,mn} + \frac{1}{2} \lambda^{ij} \left(-v_{ij} + k_{ij} \omega + \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{1}{2} \omega_{,i} \omega_{,j} \right) \right] ds - \iint p \omega ds.$$

Подставляя вместо v_{ij} выражение (3.7), в котором предварительно индексы m и n заменяем на i и j и наоборот, имеем:

$$\begin{aligned} I = \iint \left[\frac{1}{2} E^{ijmn} \omega_{,ij} \omega_{,mn} - \frac{1}{2} B_{ijmn}^{(-1)} \lambda^{ij} \lambda^{mn} + \right. \\ \left. + \lambda^{ij} \left(k_{ij} \omega + \frac{1}{2} \omega_{,i} \omega_{,j} \right) - p\omega \right] ds. \end{aligned} \quad (3.8)$$

Придавая функциям λ^{ij} различные значения при заданном ω , мы можем получить с помощью формулы (3.3) различные приближения снизу к энергии системы. Мы получим точную оценку, если в качестве λ^{ij} положим $\lambda^{ij} = S^{ij}$, где S^{ij} — истинные величины мембранных напряжений оболочки.

В самом деле, в силу уравнений равновесия оболочки, см. [4], уравнения (3.4), (3.5) и (3.6) будут выполняться, если величины v_{mn} положить равными значениям

$$v_{mn} = \frac{1}{2} (u_{m,n} + u_{n,m}), \quad (3.9)$$

при этом последний интеграл формулы (3.3) оказывается равным нулю, а величина, представляемая формулой (3.3), оказывается равной энергии оболочки (3.1).

Для того, чтобы определить, в каких пределах может находиться прогиб некоторой точки A оболочки, решим приближенно методом Ритца задачу о минимуме энергии системы и определим тем самым верхнюю границу $\bar{\mathcal{E}}$ для этого минимума.

Как было показано выше, минимум функционала I [см. (3.3)] не превышает по величине минимума энергии \mathcal{E} . Поэтому для определения нижней границы величины минимума энергии достаточно определить нижнюю границу для минимума функционала I . Для определения нижней границы для минимума функционала I представим его описанным в первом параграфе способом в виде суммы двух других функционалов:

$$I = \iint \Phi_1 ds + \iint \Phi_2 ds, \quad (3.10)$$

где

$$\Phi_1 = \frac{\mu}{2} E^{ijmn} \omega_{,ij} \omega_{,mn} \quad (3.11)$$

$$\begin{aligned} \Phi_2 = \frac{1-\mu}{2} E^{ijmn} \omega_{,ij} \omega_{,mn} - \frac{1}{2} B_{ijmn}^{(-1)} \lambda^{ij} \lambda^{mn} + \\ + \lambda^{ij} \left(k_{ij} \omega + \frac{\omega_{,i} \omega_{,j}}{2} \right) - p\omega, \end{aligned} \quad (3.12)$$

где μ — некоторое подводящее число меньше единицы $0 < \mu < 1$. Тогда, если функционалы

$$I_1 = \iint [\Phi_1 - \lambda \omega] ds \quad \text{и} \quad I_2 = \iint [\Phi_2 + \lambda \omega] ds \quad (3.13)$$

обладают единственными экстремальными значениями типа минимума, то метод, описанный в первом параграфе, здесь может быть применен.

Функционалы I_1 и I_2 будут иметь единственные экстремальные значения типа минимума, если, например, квадратичная форма

$$\frac{1}{2} \lambda^{ij} w_{,i} w_{,j}$$

положительна, т. е. когда выполняются условия

$$\lambda^{11} > 0, \begin{vmatrix} \lambda^{11} & \lambda^{12} \\ \lambda^{21} & \lambda^{22} \end{vmatrix} > 0. \quad (3.14)$$

Эти условия характеризуют положительность главных собственных значений тензора λ^{ij} . Если тензор λ^{ij} интерпретировать как тензор напряжений, то эти условия характеризуют положительность главных напряжений.

Для определения границ, внутри которых может находиться прогиб некоторой точки A оболочки, определим методом Ритца приближенное значение с избытком $\bar{\mathcal{E}}$ энергии системы в состоянии равновесия и соответствующее значение прогиба $\bar{w}(A)$ точки A .

Далее, устроив соответствующую опору у точки A и установив ее так, чтобы точка A оболочки имела прогиб w_0 , определим с помощью вышеизложенного способа приближение с недостатком к энергии системы $\underline{\mathcal{E}}(w_0)$ при фиксированном нормальном перемещении w_0 точки A оболочки.

Точку A оболочки свяжем с демпфером (гасителем колебаний), оказывающим сопротивление, противоположное скорости точки. Построим график зависимости $\underline{\mathcal{E}}(w_0)$ от w_0 . Нетрудно заметить, что если мы придадим прогиб w_0 точке A и далее освободим оболочку, то она с течением времени будет стремиться к состоянию равновесия, для которого прогиб точки A находится между пределами $w_a \leq w \leq w_b$, где w_a и w_b — два ближайших корня уравнения $\underline{\mathcal{E}}(w_0) = \bar{\mathcal{E}}$, лежащие по разные стороны от точки $w(A)$. В самом деле, для того, чтобы прогиб точки A мог выйти за пределы этого интервала, система должна была бы приобрести энергию большую, чем $\bar{\mathcal{E}}$, а это невозможно, так как при наличии демпфера происходит уменьшение энергии системы (предполагается, что процесс установления равновесия происходит так медленно, что инерционными силами можно пренебречь)*.

В качестве примера вышеописанного способа оценки точности рассмотрим задачу об определении прогиба круглой изотропной пластины, нагруженной в окрестности ее центра силой P . Будем предполагать, что нагрузка распределена по малой площади вблизи центра так, что она не вызывает местных пластических деформаций и в то же время при расчете прогибов она может считаться сосредоточенной в центре пластины. Для оценки точности определения прогиба центра пластины найдем верхний предел для энергии системы методом Ритца, принимая в качестве аппроксимирующей функции функцию, пропорциональную прогибу пластины при бесконечно малой сосредоточенной нагрузке:

$$w(r) = w(A) \left[1 - \frac{r^2}{a^2} + 2 \frac{r^2}{a^2} \lg \left(\frac{r}{a} \right) \right]. \quad (3.15)$$

При этом в нашем частном случае удобнее применять метод Ритца в форме, предложенной Папковичем П. Ф. Из уравнения совместности

* Если аппроксимация энергии системы является недостаточно точной, то вышеупомянутая прямая, параллельная оси w_0 , может не пересечь кривой $\underline{\mathcal{E}}(w_0)$, и описанный способ оценки точности окажется неприменимым, однако при достаточно хорошей аппроксимации этого не случится.

деформаций определяется функция напряжений и далее полная энергия системы, она оказывается равной при $\sigma = 0,3$ величине:

$$\bar{\mathcal{E}} = \frac{2\pi E h^3}{3(1-\sigma^2) a^2} \left[\left(\frac{w(A)}{h} \right)^2 + 0,222 \left(\frac{w(A)}{h} \right)^4 \right] - P w(A), \quad (3.16)$$

где a — радиус пластины, E и σ — модуль упругости и коэффициент продольно-поперечного сжатия, h — толщина пластины, $w(A)$ — прогиб центра пластины.

Вычисляя производную от $\bar{\mathcal{E}}$ по $w(A)$ и приравнявая ее нулю, получим формулу для определения $w(A)$:

$$\frac{2}{3(1-\sigma^2)} \cdot \pi E \frac{h^3}{a^2} \left[2 \frac{w(A)}{h^2} + 0,888 \frac{w^3(A)}{h^4} \right] - P = 0. \quad (3.17)$$

Для оценки снизу величины энергии при фиксированном прогибе центра пластины $w(A)$ вычислим величину I (см. 3.8), подставляя в качестве величины λ^{ij} величины мембранных напряжений, полученных при применении метода Папковича — Ритца. Вычисления показали, что для нашего случая пластины (закрепленной по краям) радиальные и кольцевые мембранные напряжения оказываются положительными. Вычисляя выражение Эйлера для функционала (3.8), определим величину функции $\varepsilon(w)$, см. (2.13):

$$\varepsilon(w) = E^{ijkl} w_{,ijkl} + \lambda^{ij} k_{ij} - \lambda^{ij} w_{,ij} - p = 0. \quad (3.18)$$

Для нашего случая нетрудно показать, что

$$E^{ijkl} w_{,ijkl} = D \Delta^2 w, \quad (3.19)$$

где D — цилиндрическая жесткость пластины. Формула (2.14) здесь имеет вид

$$L\Phi_1(w_2 - w_1) = \mu E^{ijkl} (w_2 - w_1)_{,ijkl} \quad (3.20)$$

и аналогично (3.19), если положить $\mu = 1$

$$L\Phi_1(w_2 - w_1) = D \Delta^2 (w_2 - w_1) = \varepsilon(w_2).$$

Рассматривая это уравнение, легко заметить, что выражение правой части уравнения (2.15) представляет собой упругую энергию пластины, нагруженной нагрузкой $\varepsilon(w_2)$, опертой в своем центре, рассчитанную по линейной теории пластин. Для этой энергии легко получить приближенное значение с избытком, применяя вариационный метод П. Ф. Папковича, основанный на принципе Кастильяно. Для нашего случая круглой пластины, опертой в центре на опору, эта энергия вычисляется непосредственно, так как прогиб пластины легко вычисляется при любой осесимметрической нагрузке.

Вычисления по формуле (2.16) показали, что приближенное значение энергии системы с недостатком определяется формулой:

$$\begin{aligned} \underline{\mathcal{E}}(w_0) \geq I(w_0) \geq \frac{2}{3(1-\sigma^2)} \frac{\pi E h^3}{a^2} \left[\left(\frac{w_0}{h} \right)^2 + \right. \\ \left. + 0,222 \left(\frac{w_0}{h} \right)^4 - 0,00435 \left(\frac{w_0}{h} \right)^6 \right] - P w_0. \end{aligned} \quad (3.21)$$

Внутри интервала $w_a \leq w(A) \leq w_b$ должно выполняться неравенство

$$\bar{\mathcal{E}} \geq \underline{\mathcal{E}}(w_0) \geq I(w_0), \quad (3.22)$$

т. е.

$$\bar{\mathcal{E}} - I(w_0) \geq 0$$

и на основании (2.16) и (3.21) ...

$$(3.18) \quad \frac{2\pi E h^3}{3(1-\nu^2)h^2} \left\{ \left[\frac{w_1(A)}{h} \right]^2 + 0,222 \left[\frac{w_1(A)}{h} \right]^4 - \left(\frac{w_0}{h} \right)^2 - 0,222 \left(\frac{w_0}{h} \right)^4 + 0,00435 \left(\frac{w_0}{h} \right)^6 \right\} - P [w_1(A) - w_0] \geq 0;$$

величины w_a и w_b определяются как два ближайшие к w соседние корни $w_0' = w_a$, $w_0'' = w_b$ уравнения, получающегося из (3.22) заменой знака неравенства знаком равенства. Это уравнение может быть решено одним из известных способов, в частности, мы его решали путем аппроксимации его левой части квадратным многочленом (путем разложения в ряд Тейлора) и последующим решением квадратного уравнения.

Результаты вычислений показали, что при нагрузке центра пластины, вызывающей прогиб центра, равный $1,5h$, погрешность формулы (3.17) не превышает 8,3% процента.

Нам в настоящее время неизвестно точное решение нашей задачи и поэтому мы не можем указать, какова погрешность решения в действительности. Чтобы дать хоть какое-нибудь представление о точности решения нелинейных задач, отметим, что приближенные решения задач о прогибах заземленной по краям круглой пластины, нагруженной равномерно распределенной нагрузкой, полученные по способу Федерхофера, С. П. Тимошенко и Надай, отличаются при $w_0 = 1,5$ от решения Чена соответственно на 1,6; 1,5 и 3,5 процента. Выражаю благодарность М. С. Корнишину за ряд замечаний, сделанных им при чтении работы.

ЛИТЕРАТУРА

1. Слободянский М. Г. О преобразовании проблемы минимума функционала к проблеме максимума. ДАН СССР, т. 9, № 4, 1953.
2. Курант Р., Гильберт Д. Методы математической физики, т. 1.
3. Алумяз Н. А. Одна вариационная формула для исследования тонкостенных упругих оболочек в послеэкритической стадии. ПММ, т. 14, в. 2, 197—202, 1950.
4. Зволицкий Н. В. Сжатие прямоугольной пластины за пределом устойчивости. Труды ЦАГИ № 505, 1940.

Поступила
20.IX 1957 г.

Х. М. Муштари

СРЕДНИЙ ИЗГИБ ПОЛОГОЙ ОБОЛОЧКИ, ПРЯМОУГОЛЬНОЙ В ПЛАНЕ И ОПИРАЮЩЕЙСЯ НА ГИБКИЕ В СВОЕЙ ПЛОСКОСТИ РЕБРА

1. *Постановка проблемы. Основные зависимости.* В громадном большинстве работ по теории изгиба гибких пластин и оболочек решение задачи было получено путем аппроксимации функции прогиба и функции напряжений с помощью одного „главного“ члена соответствующего ряда. При этом устанавливалась кубическая зависимость нагрузки от прогиба. Было отмечено, что такие решения „первого приближения“ не всегда удовлетворительны даже для определения прогиба от поперечной нагрузки. А для определения напряжений они непригодны, так как величины компонентов изгибного и мембранного напряжений получаются путем двухкратного дифференцирования рядов, аппроксимирующих функции прогиба и напряжения, причем резко возрастает, например, роль высших гармоник тригонометрического ряда. Между тем как решение задачи в высших приближениях приводит к системе алгебраических уравнений, кубических относительно амплитуд соответствующих частей прогиба. Доведение решения до числовых таблиц и графиков в этом случае наталкивается на вычислительные трудности, которые нелегко преодолеть даже с помощью быстродействующих вычислительных машин.

В связи с этим является целесообразным построение теории, занимающей промежуточное положение между классической линейной теорией бесконечно малого изгиба и современной теорией „больших прогибов“, сравнимых с толщиной оболочки. В развитии этой мысли здесь ставится проблема построения полулинейной теории, применимой к определению не только прогиба, но и напряжений в наиболее важном случае, когда прогибы не превышают $1\frac{1}{2} - 2$ толщины оболочки. По-видимому, является корректной и постановка аналогичной проблемы „полулинейных колебаний“.

Для определенности рассмотрим задачу поперечного изгиба пологой панели, прямоугольной в плане и симметричной относительно своего центра. Введем обозначения:

- (0.1) E — модуль упругости; ν — коэффициент поперечного сжатия;
- x, y — декартовы координаты в плоскости плана панели,
- a, b — размеры панели по направлениям x и y ;
- t, R_1, R_2 — толщина и радиусы главных кривизн оболочки, считаемые постоянными величинами;
- p — интенсивность внешнего нормального давления;
- w_t — проекция перемещения на внешнюю нормаль;

T_1, T_2, T_{12} — компоненты мембранного усилия, выражаемые через функцию усилий ψ по формулам

$$T_1 = Et^3 \psi_{yy}, \quad T_{12} = -Et^3 \psi_{xy}, \quad T_2 = Et^3 \psi_{xx}, \quad (1.1)$$

где и далее индексы x, y, ξ, η указывают на частное дифференцирование по x, y, ξ, η ;

$$\xi = \frac{\pi x}{a}, \quad \eta = \frac{\pi y}{b}, \quad \left(-\frac{\pi}{2} \leq \xi \leq \frac{\pi}{2}, \quad -\frac{\pi}{2} \leq \eta \leq \frac{\pi}{2}\right),$$

$$D = \frac{1}{12(1-\nu^2)}, \quad \lambda = \frac{b^2}{a^2}, \quad k_1 = \frac{a^2}{R_1 t}, \quad k_2 = \frac{b^2}{R_2 t}, \quad p^* = \frac{p b^4}{Et^4}, \quad (1.2)$$

$$\left(\lambda \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2}{\partial \eta^2}\right)(\dots) = \Delta(\dots);$$

ζ — амплитуда прогиба по основной гармонике;
 ζ^0 — прогиб центра панели,

$P = 1,621p(a^2 + b^2)^2/Et^4$ — параметр нагрузки, (1.3)

$t w_{xx}^0, t w_{yy}^0$ — изменения кривизны в центре панели,

T_1^0, T_2^0 — мембранные усилия в центре панели,

$$A = \frac{w_{\xi\xi}^0}{\zeta}, \quad B = \frac{w_{\eta\eta}^0}{\zeta}, \quad A' = \frac{\pi^2 \psi_{\xi\xi}^0}{\zeta^2}, \quad B' = \frac{\pi^2}{\zeta^2} \psi_{\eta\eta}^0. \quad (1.4)$$

Решение задачи приводится к краевой задаче для системы дифференциальных уравнений Маргерра*:

$$D\Delta\Delta w + \lambda \left[\psi_{\eta\eta} \left(\frac{k_1}{\pi^2} - w_{\xi\xi} \right) + 2\psi_{\xi\eta} w_{\xi\eta} + \psi_{\xi\xi} \left(\frac{k_2}{\pi^2} - w_{\eta\eta} \right) \right] + \frac{p^*}{\pi^4} = 0 \quad (1.5)$$

$$\Delta\Delta\psi = \lambda [(w_{\xi\eta}^0)^2 - w_{\xi\xi} w_{\eta\eta} + (k_2 w_{\xi\xi} + k_1 w_{\eta\eta})/\pi^2]. \quad (1.6)$$

При этом в случае шарнирного опирания на краях оболочки должны удовлетворяться условия

$$w = w_{\xi\xi} = 0 \quad \text{при} \quad \xi = \pm \frac{\pi}{2}, \quad w = w_{\eta\eta} = 0 \quad \text{при} \quad \eta = \pm \frac{\pi}{2}. \quad (1.7)$$

Если p — функция, четная относительно ξ и η , функцию прогиба можно аппроксимировать рядом

$$w = \sum_{mn} w_{mn} \cos m\xi \cos n\eta, \quad m, n = 1, 3, 5, \dots \quad (1.8)$$

Как видно из (1.4) — (1.8), можно ограничиться рассмотрением задачи при $\lambda \leq 1$, так как ее решение для случая $\lambda \geq 1$ получается из данного, если в нем $\xi, \eta, a, b, k_1, k_2$ заменить соответственно через $\eta, \xi, b, a, k_2, k_1$.

Если прогиб бесконечно мал, интегрируя (1.5) по методу Бубнова, при $p = \text{const}, k_1 = k_2 = 0$ для амплитуд прогиба получаем выражения:

$$w_{mn} = 16p^* (-1)^{\frac{m+n}{2}} : [D(\lambda m^2 + n^2)^2 \pi^6 mn].$$

Следовательно, в этом случае

$$\zeta = -w_{11}, \quad \zeta_{mn} = \frac{w_{mn}}{w_{11}} = (-1)^{\frac{m+n-2}{2}} \frac{\lambda_{mn}}{mn}, \quad \lambda_{mn} = \frac{(\lambda + 1)^2}{(\lambda m^2 + n^2)^2} \quad (1.9)$$

и ряд, выражающий прогиб центра пластины:

$$\zeta^0 = |w(\xi = \eta = 0)| = \zeta \left(1 - \frac{1}{3} \lambda_{13} - \frac{1}{3} \lambda_{31} + \frac{1}{9} \lambda_{33} + \frac{1}{5} \lambda_{15} + \dots \right),$$

* См., например, § 26 монографии Х. М. Муштары и К. З. Галимова „Нелинейная теория упругих оболочек“ (Казань, Таткингиздат, 1957).

быстро сходится, если пластина не сильно отличается от квадратной, например, если

$$\frac{1}{4} \leq \lambda \leq 1. \quad (1.10)$$

Значительно хуже сходятся ряды, выражающие параметры изменения кривизны в центре пластины:

$$w_{xx}^0 = \frac{\pi^2}{b^2} \zeta (\lambda + \zeta_{13} + 9\zeta_{31} + 9\zeta_{33} + \zeta_{15} + 25\zeta_{51} + 49\zeta_{71} + \dots) \quad (1.11)$$

$$w_{yy}^0 = \frac{\pi^2}{b^2} \zeta (1 + 9\zeta_{13} + \zeta_{31} + 9\zeta_{33} + \zeta_{51} + 25\zeta_{15} + 49\zeta_{17} + \dots) \quad (1.12)$$

Если сохранить в них указанные здесь члены и пренебречь в (1.12) величиной $25\zeta_{35} + 9\zeta_{53} + 81\zeta_{10} + \dots$, то допускаемая погрешность в величине w_{yy}^0 будет около $-0,3\%$ при $\lambda = 1$ и $-0,6\%$ при $\lambda = \frac{1}{4}$. Погрешность в величине w_{xx}^0 при $\lambda = \frac{1}{4}$ достигает $+2,3\%$, но сама эта величина при $\lambda \leq 1$, как видно из (1.11), порядка λw_{yy}^0 и поэтому при ее определении может быть допущена большая погрешность.

Учитывая сказанное, мы предлагаем интегрировать (1.5) — (1.6) по методу Бубнова, сохраняя в ряду (1.8) члены с амплитудами $w_{11}, w_{13}, w_{31}, w_{33}, w_{15}, w_{51}, w_{17}, w_{71}$, пренебрегая при этом членами, нелинейными относительно амплитуд высших гармоник w_{13}, \dots . Подставляя (1.8) в нелинейный член правой части уравнения (1.6) и сохраняя пока главные нелинейные члены, находим

$$w_{\xi\eta}^2 - w_{\xi\xi} w_{\eta\eta} = \sum_{rs} D_{rs} \cos 2r\xi \cos 2s\eta, \quad (1.13)$$

где

$$D_{00} = 0, \quad D_{01} = -\frac{1}{2} (w_{11}^2 + 2w_{11}w_{13} + 9w_{31}^2 + \dots),$$

$$D_{02} = -4(w_{13} + w_{15})w_{11}, \quad D_{03} = -9(w_{11}w_{15} + \frac{1}{2}w_{13}^2),$$

$$D_{11} = -4(w_{11}w_{13} + w_{11}w_{31} + 4w_{13}w_{31} + \dots), \quad D_{22} = -16(w_{13}w_{31} + \dots),$$

$$D_{21} = -(w_{11}w_{31} + 9w_{11}w_{51} + \dots), \quad D_{31} = -4(w_{11}w_{51} + \dots), \dots \quad (1.14)$$

а неприведенные здесь величины получают заменой индексов ik на ki .

Как видно из этих выражений, после интегрирования уравнения (1.6) по методу Бубнова на величину амплитуд членов ряда Фурье, выражающего функцию ψ , наибольшее влияние могут оказать члены, содержащие D_{01} и D_{10} , пренебрегая в которых $9w_{31}^2$ и $9w_{13}^2$, мы определяем погрешность $9(w_{13}^2 + w_{31}^2)$ по сравнению с $2w_{11}^2$. Если определять ζ_{13} и ζ_{31} по линейной теории для плоской пластины, погрешность в величине (1.13) будет порядка $4,5(\zeta_{13}^2 + \zeta_{31}^2) = 0,5(\lambda_{13}^2 + \lambda_{31}^2)$ по сравнению с единицей. При $\lambda = 1$ она менее, чем $0,1\%$. При $\lambda = \frac{1}{4}$

погрешность составляет $1,1\%$. Но в этом последнем случае мембранные напряжения малы, так как изгиб происходит почти по цилиндрической форме. В самом деле, пусть ребра, окаймляющие пластину, являются гибкими в своей плоскости и слабо сопротивляются закручиванию. Тогда функция ψ должна удовлетворять граничным условиям:

$$\psi_{xx} = \psi_{yy} = 0 \quad \text{при} \quad x = \pm \frac{a}{2}, \quad y = \pm \frac{b}{2}. \quad (1.15)$$

Эти условия удовлетворяются, если

$$\psi = \sum_{mn} \psi_{mn} \cos m\xi \cos n\eta, \quad m, n = 1, 3, 5... \quad (1.16)$$

Интегрируя (1.6) по методу Бубнова, находим

$$\psi_{11} = -\frac{\lambda w_{11}}{\pi^2(\lambda+1)^2} \{k_1 + k_2 + 5,333w_{11} + 7,8(w_{13} + w_{31}) - 2,7(w_{15} + w_{51})\} \quad (1.17)$$

Следовательно, главная часть мембранного удлинения при $k_1 = k_2 = 0$ в центре пластины равна

$$\epsilon_{yy}^m = \frac{T_2^0 - \nu T_1^0}{Et} = \frac{5,333\lambda}{(\lambda+1)^2} \zeta^2 \frac{t^2}{b^2} (\lambda - \nu),$$

в то время как главная часть удлинения от изгиба

$$\frac{t^2}{2} w_{yy}^0 = \frac{t^2 \pi^2}{2b^2} \zeta.$$

Отношение первого ко второму для $\nu = 0,3$ и $\zeta \leq 2$ менее, чем 0,4 при $\lambda = 1$ и менее 0,02 при $\lambda = 1/4$.

Таким образом, во всех случаях пренебрежение квадратами величин w_{13}, w_{31}, \dots по сравнению с линейными членами и w_{11}^2 может привести к погрешности в величине удлинения не более, чем на величину порядка 0,04%, если $\zeta \leq 2$. К сожалению, с увеличением прогиба, как показывают вычисления и немногочисленные имеющиеся решения нелинейной задачи, удельный вес амплитуд высших гармоник возрастает. Например, при прогибе, равном двойной толщине оболочки, ζ_{13} и ζ_{31} могут увеличиться в два-три раза против их линейных значений. Но и тогда, как видно из изложенного, погрешность от линеаризации уравнений (1.5)–(1.6) относительно ζ_{13}, \dots будет величиной не более чем порядка 0,5%. Заметим, что в случае оболочки двоякой положительной кривизны допускаемая погрешность будет еще меньше, так как мембранные растягивающие напряжения, возникающие в силу нелинейного эффекта, будут погашаться сжимающими напряжениями от нормального внешнего давления.

Таким образом, интегрируя уравнения (1.5)–(1.6) по методу Бубнова, получаем систему уравнений, кубических относительно ζ и линейных относительно p^* , ζ_{13} , ζ_{31}, \dots . Задаваясь различными значениями $\zeta \leq 2$, из системы линейных уравнений можем определить величины p^* , ζ_{13}, \dots , а затем с помощью формул (1.11)–(1.12) и формул, аналогичных (1.17), находим компоненты изгибного и мембранного напряжений.

Если пользоваться вариационными уравнениями равновесия, для получения указанного здесь решения в выражении энергии деформации следует сохранить члены, квадратичные относительно всех амплитуд прогиба, пренебрегая лишь их третьими и четвертыми степенями.

Можно показать, что при $\zeta = 2$ погрешность в величине энергии достигает 0,2–0,6%.

Приведенные оценки возможной погрешности показывают, что предлагаемая теория среднего изгиба пологих оболочек позволяет определять прогиб и напряжения в оболочке от равномерно распределенного поперечного давления с хорошей для практических целей точностью. Она может быть применена также и в случае, когда нагрузка является достаточно гладкой функцией от координат.

2. Решение задачи в случае равномерно распределенной поперечной нагрузки. Для иллюстрации теории рассмотрим поперечный

изгиб слегка искривленной прямоугольной панели, опертой по всем кромкам на ребра, которые являются абсолютно жесткими на растяжение-сжатие и на изгиб по нормали к срединной поверхности панели, но не сопротивляются касательным перемещениям. Тогда каждый из членов рядов (1.8) и (1.16) удовлетворяет граничным условиям задачи. Интегрируя уравнение (1.6) по методу Бубнова и пренебрегая в (1.14) членами, нелинейными относительно w_{13}, \dots, w_{17} , а также вводя обозначения (1.9) и дополнительные обозначения

$$k_{ij} = -\frac{k_1 i^2 + k_2 j^2}{\zeta}, \quad \mu_{ij} = \frac{\lambda}{\pi^2(\lambda i^2 + j^2)^2}, \quad (2.1)$$

получим приближенные выражения амплитуд функции усилий:

$$\begin{aligned} \psi_{11} &= -\mu_{11} \zeta^2 \{k_{11} + 5,333 + 7,82(\zeta_{13} + \zeta_{31}) - 2,7(\zeta_{15} + \zeta_{51})\}, \\ \psi_{13} &= -\mu_{13} \zeta^2 \{3,911 + k_{13} \zeta_{13} + 52\zeta_{13} + 11,8\zeta_{31} + 48\zeta_{15}\}, \\ \psi_{15} &= -\mu_{15} \zeta^2 \{-1,37 + 26,67\zeta_{13} + k_{31} \zeta_{15} + 62,2\zeta_{15}\}, \\ \psi_{33} &= -\mu_{33} \zeta^2 \{-3,2 + 19,8(\zeta_{13} + \zeta_{31}) + k_{33} \zeta_{33}\}, \\ \psi_{17} &= -\mu_{17} \zeta^2 (0,863 + k_{71} \zeta_{17}), \quad \overleftarrow{i, j}. \end{aligned} \quad (2.2)$$

Здесь и далее символ $\overleftarrow{i, j}$ обозначает, что остальные формулы получаются из приведенных путем замены в них первых индексов на вторые и наоборот.

Умножая уравнение (1.5) на $\cos m\xi \cos n\eta$ и интегрируя по площади оболочки, получаем после проведения несложных, но кропотливых вычислений и пренебрежения малыми величинами систему уравнений относительно ζ, ζ_{13}, \dots :

$$\begin{aligned} \mu + (k_1 + k_2) \zeta^2 + \zeta^2 \{16k_{11} + 56,2 + 30,4(\lambda_{13} + \lambda_{31}) + 5(\lambda_{15} + \lambda_{51}) + \\ + \zeta_{13} [15,6k_{11} + 125 + 134\lambda_{31} + (7,83k_{31} + 616)\lambda_{13}] + \\ + \zeta_{31} [15,6k_{11} + 125 + 134\lambda_{13} + (7,83k_{13} + 616)\lambda_{31}] - 6,4(k_{11} + 5,33)\zeta_{33} - \\ - \zeta_{15} (3,4k_{11} + 43 - 416\lambda_{13}) - \zeta_{31} (3,4k_{11} + 43 - 416\lambda_{31})\} - Q = 0 \end{aligned} \quad (2.3)$$

$$\begin{aligned} \left(\frac{\mu}{\lambda_{13}} + \lambda_{13} k_{31}^2 \zeta^2\right) \zeta_{13} + \lambda_{13} k_{31} \zeta^2 (3,91 + 11,8\zeta_{31} + 52\zeta_{13}) + \\ + 4\zeta^2 \{10,29 + 1,956k_{11} + 11,5\lambda_{31} + 50,9\lambda_{13} + \zeta_{13} [85,76 + 13k_{11} + \\ + 153\lambda_{31} + \lambda_{13} (13k_{31} + 646)] + \zeta_{31} [29,76 + 2,95k_{11} + \\ + 237\lambda_{13} + \lambda_{31} (2,95k_{13} + 237)] + \zeta_{33} [3,71(k_{11} + 5,33) + 299\lambda_{31}] + \\ + \zeta_{15} [33,5 + 7,32k_{11} + 654\lambda_{13} + \lambda_{15} (7k_{51} + 434)] + \\ + \zeta_{31} [5,5 - 1,15k_{11} + 187\lambda_{31}] + \frac{1}{3} Q = 0, \quad \overleftarrow{i, j} \end{aligned} \quad (2.4)$$

$$\begin{aligned} \left(\frac{\mu}{\lambda_{15}} + \lambda_{15} k_{51}^2 \zeta^2\right) \zeta_{15} + \zeta^2 \{-15,7 - 2,74k_{11} + 116\lambda_{13} - 20\lambda_{31} + \\ + \zeta_{13} [139 + 29,6k_{11} + \lambda_{13} (1540 + 29,6k_{31})] + \zeta_{31} [-47,3 - 5k_{11} - \\ - \lambda_{31} (344 + 5k_{13}) + 820\lambda_{13}] + \zeta_{33} [1060\lambda_{31} + 26,7(k_{11} + 5,33)] + \\ + \zeta_{15} (793 + 138k_{11})\} - \frac{1}{5} Q = 0, \quad \overleftarrow{i, j} \end{aligned} \quad (2.5)$$

$$\begin{aligned} \left(\frac{\mu}{\lambda_{17}} + \lambda_{17} k_{17}^2 \zeta^2\right) \zeta_{17} + \zeta^2 (1,78k_{11} + 9,2 + 27\zeta_{13} + 10\zeta_{31}) + \\ + \frac{1}{7} Q = 0, \quad \overleftarrow{i, j} \end{aligned} \quad (2.6)$$

Некоторые из результатов вычислений приведены в таблице.

λ	k_1	k_2	ζ	P	ζ^*	A	B	A'	B'
1	0	0	0,5	78	0,484	0,865	0,865	1,37	1,37
			1,0	193	0,953	0,803	0,803	1,24	1,24
			1,5	371	1,40	0,753	0,753	1,09	1,09
			2,0	627	1,85	0,752	0,752	0,956	0,956
			2,5	974	2,30	0,815	0,815	0,846	0,846
1	0	3	0,5	71	0,488	0,894	0,891	-0,017	-0,064
			1,0	159	0,964	0,847	0,843	0,635	0,598
			1,5	294	1,421	0,783	0,782	0,749	0,712
			2,0	494	1,86	0,749	0,752	0,729	0,693
			2,5	772	2,31	0,770	0,778	0,677	0,641
1	0	6	0,5	73	0,490	0,915	0,907	-1,45	-1,52
			1,0	141	0,976	0,896	0,883	-0,013	-0,061
			1,5	239	1,44	0,832	0,820	0,384	0,328
			2,0	391	1,88	0,770	0,766	0,499	0,437
			2,5	607	2,32	0,75	0,757	0,512	0,452
1	3	6	0,5	83	0,491	0,919	0,915	-2,93	-2,96
			1,0	139	0,987	0,938	0,930	-0,709	-0,720
			1,5	208	1,46	0,888	0,878	-0,021	-0,037
			2,0	317	1,91	0,810	0,803	0,234	0,211
			2,5	480	2,35	0,754	0,756	0,294	0,321
1	6	6	0,5	103	0,491	0,909	0,909	-4,43	-4,43
			1,0	154	0,997	0,977	0,977	-1,42	-1,42
			1,5	198	1,49	0,952	0,952	-0,427	-0,427
			2,0	271	1,95	0,873	0,873	-0,020	-0,020
			2,5	389	2,38	0,787	0,787	0,143	0,143
1/2	0	0	0,5	97	0,481	0,771	0,907	1,23	1,16
			1,0	230	0,949	0,694	0,873	1,06	1,08
			1,5	426	1,40	0,649	0,842	0,884	0,99
			2,0	702	1,85	0,677	0,833	0,750	0,90
			2,5	1073	2,309	0,785	0,856	0,672	0,822
1/2	0	3	0,5	90	0,485	0,813	0,921	0,150	-0,108
			1,0	196	0,959	0,747	0,894	0,642	0,496
			1,5	349	1,41	0,669	0,858	0,672	0,628
			2,0	567	1,86	0,644	0,835	0,608	0,644
			2,5	865	2,31	0,698	0,839	0,546	0,626
1/2	0	6	0,5	92	0,488	0,852	0,930	-1,02	1,40
			1,0	179	0,972	0,823	0,917	0,16	-0,102
			1,5	296	1,43	0,730	0,880	0,446	0,268
			2,0	465	1,88	0,654	0,845	0,48	0,394
			2,5	700	2,32	0,645	0,830	0,446	0,434
1/2	3	0	0,5	90	0,495	0,806	0,921	-0,010	-0,112
			1,0	196	0,959	0,742	0,896	0,528	0,494
			1,5	348	1,41	0,677	0,862	0,580	0,630
			2,0	566	1,86	0,665	0,839	0,538	0,652
			2,5	866	2,32	0,728	0,842	0,500	0,638
1/2	3	3	0,5	92	0,487	0,836	0,929	-1,14	-1,40
			1,0	178	0,970	0,804	0,918	0,074	-0,108
			1,5	295	1,43	0,719	0,883	0,358	0,204
			2,0	463	1,88	0,658	0,849	0,400	0,396
			2,5	697	2,32	0,665	0,835	0,386	0,442
1/2	3	6	0,5	102	0,489	0,859	0,932	-2,34	-2,7
			1,0	177	0,982	0,884	0,939	-0,452	-0,718
			1,5	265	1,45	0,807	0,910	0,112	-0,100
			2,0	391	1,90	0,702	0,868	0,276	0,148
			2,5	571	2,34	0,644	0,836	0,298	0,254

$$\left(\frac{\mu}{\lambda_{33}} + \lambda_{33} k_{33}^2 \zeta^2\right) \zeta_{33} + \zeta^2 \{-37,2 - 6,8k_{11} + 76(\lambda_{12} + \lambda_{31}) +$$

$$+ \zeta_{13} [45 + 17k_{11} + \lambda_{13} (15k_{31} + 640) + 1550\lambda_{31}] + \zeta_{31} [45 + 17k_{11} +$$

$$+ \lambda_{31} (15k_{13} + 640) + 1550\lambda_{13}] - \frac{1}{9} Q = 0 \quad (2.7)$$

где

$$\mu = \frac{\pi^4}{12(1-\nu^2)} \frac{(\lambda+1)^4}{\lambda^2}, \quad Q = 1,621 \frac{p^*}{\zeta} \frac{(\lambda+1)^2}{\lambda^2} = \frac{P}{\zeta} \quad (2.8)$$

При этом предполагалось, что кроме условия (1.10) выполняется условие

$$k_1 \leq 15, \quad k_2 \leq 15, \quad (2.9)$$

так как более искривленные панели при $\zeta \geq 2$ могут потерять устойчивость по несимметричной форме.

Таким образом, получены зависимости, из которых легко можно найти выражения $\zeta_{33}, \dots, \zeta_{17}$ через $\zeta, \zeta_{13}, \zeta_{31}$ и Q , причем все величины, кроме ζ , входят линейно. Исключая из (2.3) — (2.4) величины $\zeta_{33}, \dots, \zeta_{17}$, получаем для каждого заданного значения ζ систему трех линейных уравнений относительно $Q, \zeta_{13}, \zeta_{31}$. Эти уравнения, а также уравнения (2.5—2.7) можно еще более упростить, полагая в малых членах последних уравнений $\lambda = 1$ и допуская погрешность при $\lambda < 1$, которая мало влияет на величину наибольшего напряжения, так как с уменьшением λ величины $\zeta_{33}, \zeta_{15}, \zeta_{17}$ уменьшаются, а удельный вес амплитуд ζ_{31} и ζ_{17} согласно (1.12) невелик.

Допустимость всех сделанных упрощений подтверждается последующей оценкой их влияния на величину наибольшего напряжения, согласно которой при $\zeta \leq 2$ погрешность данного решения в величине напряжения менее 2%, а в величине прогиба — еще меньше. Заметим, что все указанные упрощения, за исключением линеаризации уравнений метода Бубнова относительно $\zeta_{13}, \zeta_{31}, \dots$, не являются характерными для предлагаемой теории среднего изгиба. Они необходимы лишь при выполнении численного решения без быстродействующих вычислительных машин. Мы воспользовались ими с целью упрощения программирования численного решения, а также для получения нескольких контрольных точек на обычном арифмометре. Вычисления были выполнены* для значения $\nu = 0,3$.

Кроме параметров изменения кривизны центра панели, определяемых формулами (1.11) и (1.12), были найдены для ряда значений ζ, λ, k_1 и k_2 величины отношения прогиба в центре панели к ее толщине, определяемые по формуле

$$\zeta^* = \zeta(1 + \zeta_{13} + \zeta_{31} + \zeta_{33} + \zeta_{15} + \zeta_{31}) \quad (2.10)$$

и параметры мембранных усилий в центре панели, определяемые согласно (2.2) формулами:

$$A' = \frac{\pi^2 \zeta^0}{\zeta^2} = \frac{\lambda}{(\lambda+1)^2} \{4,977 + 10(\zeta_{13} + \zeta_{31}) - 2,7(\zeta_{15} + \zeta_{31}) + k_{11} +$$

$$+ \lambda_{13}(3,911 + 52\zeta_{13} + 11,8\zeta_{31} + k_{31}\zeta_{13}) +$$

$$+ 9\lambda_{31}(3,911 + 52\zeta_{31} + 11,8\zeta_{13} + 48\zeta_{31} + k_{13}\zeta_{31}) +$$

$$+ 25\lambda_{51}(-1,37 + 26,67\zeta_{21} + 62,2\zeta_{51} + k_{15}\zeta_{51})\}, \quad 1, 2 \quad (2.11)$$

* Программа вычислений была составлена А. В. Саченковым, которому автор выражает свою признательность. Вычисления выполнены в Московском вычислительном центре АН СССР на машине „Стрела“.

Продолжение табл.

λ	k_1	k_2	ζ	P	ζ^0	A	B	A'	B'
1/2	6	0	0,5	92	0,486	0,827	0,930	-1,28	-1,41
			1,0	178	0,969	0,793	0,919	-0,018	-0,112
			1,5	294	1,43	0,718	0,867	0,274	0,264
			2,0	461	1,88	0,670	0,854	0,334	0,402
			2,5	697	2,33	0,689	0,840	0,338	0,452
1/2	6	3	0,5	103	0,488	0,842	0,932	-2,44	-2,72
			1,0	177	0,980	0,860	0,940	-0,51	-0,726
			1,5	264	1,45	0,785	0,913	0,042	-0,106
			2,0	388	1,90	0,694	0,872	0,204	0,146
			2,5	567	2,34	0,654	0,842	0,238	0,258
1/2	6	6	0,5	122	0,488	0,846	0,926	-3,64	-4,02
			1,0	193	0,991	0,941	0,960	-1,08	-1,35
			1,5	256	1,48	0,903	0,947	-0,222	-0,474
			2,0	346	1,94	0,781	0,902	0,082	-0,098
			2,5	478	2,37	0,675	0,856	0,167	0,076
1/4	0	0	0,5	180	0,473	0,605	0,911	0,672	0,776
			1,0	394	0,937	0,561	0,898	0,532	0,732
			1,5	669	1,39	0,562	0,888	0,420	0,688
			2,0	1025	1,85	0,632	0,887	0,380	0,652
			2,5	1484	2,32	0,770	0,896	0,404	0,616
1/4	0	3	0,5	174	0,475	0,636	0,917	-0,268	-0,096
			1,0	362	0,942	0,578	0,905	0,420	0,32
			1,5	592	1,40	0,531	0,890	0,352	0,424
			2,0	866	1,85	0,547	0,883	0,288	0,456
			2,5	1264	2,31	0,64	0,88	0,268	0,616
1/4	0	6	0,5	176	0,479	0,692	0,925	-0,26	-0,984
			1,0	347	0,953	0,647	0,916	0,280	-0,092
			1,5	544	1,41	0,558	0,897	0,336	0,168
			2,0	787	1,85	0,507	0,882	0,268	0,270
			2,5	1095	2,30	0,533	0,877	0,208	0,464
1/4	3	3	0,5	176	0,477	0,652	0,921	-0,620	-1,04
			1,0	345	0,949	0,618	0,914	0,048	-0,124
			1,5	539	1,41	0,558	0,900	0,156	0,144
			2,0	781	1,86	0,538	0,888	0,148	0,256
			2,5	1090	2,32	0,587	0,885	0,144	0,312
1/4	3	6	0,5	187	0,479	0,695	0,924	-1,17	-1,93
			1,0	347	0,960	0,695	0,925	-0,136	-0,548
			1,5	514	1,42	0,614	0,910	0,128	-0,112
			2,0	714	1,87	0,531	0,892	0,144	0,072
			2,5	962	2,32	0,511	0,880	0,108	0,016
1/4	6	3	0,5	187	0,477	0,650	0,920	-1,52	-1,98
			1,0	345	0,955	0,655	0,922	-0,342	-0,576
			1,5	510	1,42	0,596	0,910	-0,040	-0,136
			2,0	708	1,87	0,545	0,896	0,020	0,056
			2,5	957	2,33	0,553	0,888	0,034	0,160
1/4	6	6	0,5	207	0,478	0,679	0,920	-2,08	-2,88
			1,0	364	0,966	0,736	0,932	-0,568	-1,01
			1,5	509	1,44	0,684	0,924	-0,084	-0,396
			2,0	673	1,89	0,578	0,904	0,032	-0,124
			2,5	871	2,33	0,512	0,887	0,026	0,016

Здесь приводятся значения P , ζ^0 , A , B , A' и B' для пяти значений величины ζ , играющей роль параметра.

Как видно из этой таблицы, величины ζ^0 , A и B медленно изменяются с изменением ζ , поэтому их величины для промежуточных значений ζ могут быть найдены простым интерполированием. Вели-

чины A' и B' , характеризующие мембранные напряжения, в случае искривленных панелей с увеличением ζ быстро изменяются, начиная от отрицательных значений и переходя к положительным значениям, поэтому для их определения в некоторых случаях приходится строить соответствующие графики. Очень быстро изменяется параметр нагрузки в зависимости от ζ , между тем необходимо достаточно точное определение ζ , соответствующего заданному P , так как при определении параметров деформации $w_{xx}^0, \dots, \psi_{xy}^0$ приходится умножать табличные значения A, \dots, B' соответственно на ζ и ζ^2 . Учитывая это, для данных λ, k_1, k_2 приходится строить график функции $P(\zeta)$, которая в силу (2.3) принимается в виде:

$$P = \zeta \left[8,92 \frac{(\lambda + 1)^4}{\lambda^2} + (k_1 + k_2)^2 \right] - \alpha \zeta^2 + \beta \zeta^3, \quad (2.12)$$

причем коэффициенты α и β находим из уравнений

$$\begin{aligned} P_{\zeta} &= \zeta_{\zeta} \left[8,92 \frac{(\lambda + 1)^4}{\lambda^2} + (k_1 + k_2)^2 \right] - 2\alpha \zeta_{\zeta} + 3\beta \zeta_{\zeta}^2, \\ P_{\zeta^2} &= \zeta_{\zeta^2} \left[8,92 \frac{(\lambda + 1)^4}{\lambda^2} + (k_1 + k_2)^2 \right] - \alpha \zeta_{\zeta^2} + \beta \zeta_{\zeta^2}^2, \end{aligned} \quad (2.13)$$

где P_{ζ} — значение P в начале рассматриваемого интервала $\zeta = \zeta_{\zeta}$, P_{ζ^2} — его значение при $\zeta = \zeta_{\zeta^2}$.

Наконец, определяем максимальные изгибные удлинения $\epsilon_{xx}^{\text{II}}$, $\epsilon_{yy}^{\text{II}}$ и мембранные удлинения ϵ_{xx}^{M} , ϵ_{yy}^{M} в центре панели, пользуясь формулами

$$\begin{aligned} \epsilon_{xx}^{\text{II}} &= \pm \frac{t^2}{2} w_{xx}^0 = \pm \frac{t^2 \pi^2}{2a^2} \zeta A, \quad \epsilon_{yy}^{\text{II}} = \pm \frac{t^2 \pi^2}{2b^2} \zeta B, \\ \epsilon_{xx}^{\text{M}} &= \frac{T_1^0 - \nu T_2^0}{Et} = t^2 (\psi_{yy}^0 - \nu \psi_{xx}^0) = \frac{t^2 \zeta^2}{b^2} (B' - \lambda \nu A'), \\ \epsilon_{yy}^{\text{M}} &= \frac{T_2^0 - \nu T_1^0}{Et} = \frac{t^2 \zeta^2}{b^2} (A' \lambda - \nu B'). \end{aligned} \quad (2.14)$$

В виде примера определим эти величины для квадратной пластинки при $\zeta^0 = 1,85$ (что соответствует $\zeta = 2$) и сравним их с соответствующими величинами, найденными по теории первого приближения и отмеченными индексом „I“. Полагая всюду в наших формулах $\zeta_{13} = \zeta_{31} = \dots = 0$ и учитывая, что в данном случае $\zeta = \zeta_1^0$ является прогибом центра панели, по (2.3) находим

$$P_1 \approx \zeta_1^0 \left\{ 8,92 \frac{(\lambda + 1)^4}{\lambda^2} + (k_1 + k_2)^2 + (\zeta_1^0)^2 [57,2 + 30,4(\lambda_{13} + \lambda_{31})] \right\}. \quad (2.15)$$

При $\zeta = 2$, $P = 627 = P_1$, если $\zeta_1^0 = 1,825$. Следовательно, по (1.11) и (1.12)

$$(\epsilon_{xx}^{\text{II}})_1 = (\epsilon_{yy}^{\text{II}})_1 = \pm 0,91 \frac{t^2 \pi^2}{b^2}.$$

По формулам (2.11), полагая в них $\zeta = \zeta_1^0$, $\zeta_{13} = \dots = 0$, находим

$$(\epsilon_{xx}^{\text{M}})_1 = (\epsilon_{yy}^{\text{M}})_1 = 1,64 (1 - \nu) \frac{t^2}{b^2} (\zeta_1^0)^2 \approx 3,83 \frac{t^2}{b^2}.$$

Максимальное полное удлинение в первом приближении

$$\epsilon_{xx}^{\text{I}} = (0,91\pi^2 + 3,83) \frac{t^2}{b^2} \approx 12,9 \frac{t^2}{b^2},$$

а по формулам (2.14)

$$\epsilon_{xx} = \epsilon_{yy} = \frac{t^2}{b^2} (0,75\pi^2 + 2,68) \approx 10,1 \frac{t^2}{b^2}.$$

Таким образом в данном случае полное удлинение, найденное в первом приближении, на 27% больше величины, полученной по нашей теории.

В заключение заметим, что, как показывают результаты вычислений, при $\zeta > 2$ погрешность от пренебрежения в уравнении совместности деформаций величиной $4,5(\zeta_{13}^2 + \zeta_{31}^2)$ начинает быстро возрастать. Например, при $\zeta = 2,5$ для $\lambda = 1$, $k_1 = k_2 = 0$ получается $\zeta_{13} = \zeta_{31} \approx 0,06$. Следовательно, в этом последнем случае при определении мембранных напряжений допускается погрешность порядка 3%. Увеличивается также погрешность в величине изгибных напряжений, так что общая погрешность в величине максимального напряжения достигает 5%—6%. Несмотря на это мы включили соответствующие данные в нашу таблицу, так как поправка, даваемая нашей теорией по сравнению с теорией первого приближения, в этом случае доходит до 40%.

Поступила
1.III 1958 г.

Х. М. Муштару

НЕКОТОРЫЕ ОБРАТНЫЕ КРАЕВЫЕ ЗАДАЧИ НЕЛИНЕЙНОЙ ТЕОРИИ ПОЛОГИХ ОБОЛОЧЕК ВРАЩЕНИЯ

В статье дается постановка двух типов обратных краевых задач нелинейной теории упругих пологих оболочек. Для иллюстрации первого типа задач рассматривается определение таких оболочек вращения, шарнирно закрепленных вдоль параллели, которые под действием равномерно распределенного внутреннего давления принимают форму сферического сегмента. В качестве примера на задачи II типа рассматривается определение такого закона распределения внутреннего давления, при котором закрепленный по краям сегмент сферической мембраны остается сферическим и после деформации.

Пусть срединная поверхность S^0 тонкой полой оболочкой постоянной толщины t до приложения нагрузки может быть получена путем нормальных перемещений w^0 от некоторой поверхности правильной формы S , называемой системой отсчета; $\alpha = \text{const}$ и $\beta = \text{const}$ — линии кривизны поверхности S , k_{11} и k_{22} — ее главные кривизны, A и B — коэффициенты первой квадратичной формы, w — функция прогиба, переводящая S^0 в положение S^* после деформации под действием нагрузки. Тогда определение связи между внешними нагрузками и деформированным состоянием упругой оболочки приводится [1] к краевой задаче для системы двух дифференциальных уравнений относительно w и функции усилий ψ :

$$\Delta \Delta \psi - Et(\Gamma^* - \Gamma^0) = 0 \quad (1)$$

$$D \Delta \Delta w + T_{11} k_{11}^* + 2T_{12} k_{12}^* + T_{22} k_{22}^* - p = 0, \quad (2)$$

где E — модуль упругости, ν — коэффициент поперечного расширения,

$$k_{ij}^* = k_{ij} + \alpha_{ij}^0 + \alpha_{ij} \quad (i, j = 1, 2),$$

$$\alpha_{11}^0 = -\frac{1}{A} \frac{\partial}{\partial \alpha} \left(\frac{1}{A} \frac{\partial w^0}{\partial \alpha} \right) - \frac{1}{AB^2} \frac{\partial A}{\partial \beta} \frac{\partial w^0}{\partial \beta},$$

$$\alpha_{12}^0 = \frac{1}{AB} \left[-B \frac{\partial}{\partial \alpha} \left(\frac{1}{B} \frac{\partial w^0}{\partial \beta} \right) + \frac{1}{A} \frac{\partial A}{\partial \beta} \frac{\partial w^0}{\partial \alpha} \right],$$

α_{ij} — соответствующие изменения кривизны,

$$\Gamma^* = k_{12}^{*2} - k_{11}^* k_{22}^*$$

$$\Gamma^0 = \alpha_{12}^0 - (k_{11} + \alpha_{11}^0)(k_{22} + \alpha_{22}^0)$$

суть гауссовы кривизны поверхностей S^* и S^0 , Δ — оператор Лапласа,

$$D = Et^3 / [12(1 - \nu^2)],$$

$$T_{11} = \frac{1}{B} \frac{\partial}{\partial \beta} \left(\frac{1}{B} \frac{\partial \psi}{\partial \beta} \right) + \frac{1}{BA^2} \frac{\partial B}{\partial \alpha} \frac{\partial \psi}{\partial \alpha},$$

$$T_{12} = \frac{1}{AB} \left(-\frac{\partial^2 \psi}{\partial \alpha \partial \beta} + \frac{1}{B} \frac{\partial B}{\partial \alpha} \frac{\partial \psi}{\partial \beta} + \frac{1}{A} \frac{\partial A}{\partial \beta} \frac{\partial \psi}{\partial \alpha} \right) \quad (3)$$

— мембранные усилия, $p > 0$ — внутреннее давление, $w > 0$, если перемещение направлено по внешней нормали.

В прямой задаче теории оболочек все величины, кроме w и ψ считаются заданными, при чем оба уравнения (1) и (2) являются нелинейными. Можно поставить следующие обратные задачи нелинейной теории оболочек, представляющие значительный интерес.

I. Пусть при данной системе отсчета необходимо найти такую форму поверхности S^0 до деформации, при которой под действием заданного давления p и заданных контурных сил и граничных условий оболочка принимает заданную форму.

В этом случае, так как $w^* = w^0 + w$ и k_{ij} — заданные величины, по формулам (3) уравнение (2) линейно относительно искомого w^0 и ψ , а уравнение (1) нелинейно относительно w^0 . При этом общий порядок уравнений (1) и (2) равен 8, как и в прямой задаче, что позволяет удовлетворить обычным граничным условиям теории тонких оболочек.

Если, кроме того, Γ^0 мала по сравнению с Γ^* , в первом приближении можно линеаризовать и уравнение (1), пренебрегая в нем членом, содержащим Γ^0 .

II. Пусть система отсчета и функции w^0 и w , удовлетворяющие соответствующим граничным условиям, заданы, а требуется найти давление p и функцию усилий ψ . Тогда из линейного уравнения (1) определяем ψ , подстановка которого в (2) непосредственно дает искомое давление.

Заметим, что решения этих обратных задач могут быть использованы также для разыскания приближенной формы прогиба, пригодной для решения прямой задачи по одному из приближенных методов.

В качестве примера на обратные задачи I типа рассмотрим симметричную деформацию пологого сегмента оболочки вращения, шарнирно прикрепленного к жесткому круговому контуру радиуса a . Примем за систему отсчета полярную систему координат r, θ в плоскости. Тогда

$$A=1, \quad B=r, \quad x_1 = -\frac{d^2w}{dr^2}, \quad x_2 = -\frac{1}{r} \frac{dw}{dr},$$

$$T_{11} = \frac{1}{r} \frac{d\psi}{dr}, \quad T_{22} = \frac{d^2\psi}{dr^2}, \quad x_{12} = T_{12} = 0,$$

$$\Delta(\dots) = \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left[r \frac{d}{dr} (\dots) \right], \dots \quad (4)$$

Вводя эти величины в (1) и (2), а также используя обозначения

$$w^* = w + w^0, \quad \rho = r^2/a^2,$$

$$x^* = -\frac{1}{r} \frac{dw^*}{dr}, \quad x^0 = -\frac{1}{r} \frac{dw^0}{dr}, \quad (5)$$

получим уравнения, которые можно один раз проинтегрировать, причем произвольные постоянные интегрирования следует положить равными нулю, если оболочка не имеет отверстия в полюсе.

Таким образом получим уравнения:

$$\frac{8}{Et a^2} \frac{d^2}{d\rho^2} (\rho T_{11}) + x^{*2} - x^{02} = 0 \quad (6)$$

$$\frac{4D}{a^2} \frac{d^2}{d\rho^2} (\rho x^* - \rho x^0) - T_{11} x^* + \frac{1}{2\rho} \int p d\rho = 0. \quad (7)$$

Рассмотрим далее частный случай, когда

$$p = \text{const}, \quad x^* = \text{const}. \quad (8)$$

При этом

$$x^* = k_{11}^* = k_{22}^*,$$

т. е. после деформации оболочка становится сферической с кривизной x^* .

Определим форму оболочки до деформации, характеризуемую начальным отклонением w^0 от плоскости S .

Из (7) и (6) находим

$$x^* T_{11} = \frac{p}{2} - \frac{4D}{a^2} \frac{d^2}{d\rho^2} (\rho x^0). \quad (9)$$

$$x^{02} = x^{*2} - \frac{8t^2}{3(1-\nu^2) a^4 x^*} \frac{d^2}{d\rho^2} \left[p \frac{d^2}{d\rho^2} (\rho x^0) \right]. \quad (10)$$

Решение этого последнего уравнения ищем в виде ряда

$$x^0 = x^* (b_0 + b_1 \rho + b_2 \rho^2 + \dots). \quad (11)$$

Вводя обозначение

$$\eta = (1-\nu^2) a^4 x^{*2} / 32 t^2, \quad (12)$$

получаем рекуррентные формулы, позволяющие выразить

b_2, b_3, \dots через b_0 и b_1 :

$$b_2 = (1 - b_0^2) \eta, \quad 3b_3 = -b_0 b_1 \eta,$$

$$b_{2n+2} = -3\eta \left[b_n^2 + 2 \sum_{l=0}^{n-1} b_l b_{2n-l} \right] : [(2n+1)(2n+3)(n+1)^2],$$

$$b_{2n+3} = -6\eta \sum_{l=0}^n b_l b_{2n+1-l} : [(n+1)(n+2)(2n+3)^2]. \quad (13)$$

Радиальное перемещение на контуре равно нулю, если выполняется условие

$$T_{22} - \nu T_{11} = 0 \quad \text{при } \rho = 1, \quad (14')$$

которое согласно (4), (9) и (11) приводится к виду:

$$\sum_{n=1}^{\infty} n(n+1)(2n-1-\nu) b_n = q = \frac{3p(1-\nu)(1-\nu^2)a^2}{2Et^2 x^*} \quad (14)$$

Кроме того при шарнирной заделке должно выполняться условие

$$\frac{d^2w}{dr^2} + \frac{\nu}{r} \frac{dw}{dr} = 0 \quad \text{при } r = a,$$

которое с учетом (5), (8) и (11) можно привести к виду:

$$\sum_{n=1}^{\infty} (2n+1+\nu) b_n = (1+\nu)(1-b_0). \quad (15)$$

Для заданных η и q из (14) и (15) с учетом формул (13) получаем два уравнения относительно величин b_0 и b_1 , причем должна быть обеспечена сходимость ряда, входящего в уравнение (14), так как ряды (11) и (15) сходятся быстрее.

При $\eta < 1$ эти ряды сходятся довольно быстро, но все же вычисления, необходимые для прямого определения b_0 и b_1 , оказываются трудно выполнимыми ввиду нелинейности соответствующих уравнений. Гораздо проще идти обратным путем, задаваясь при дан-

ном η значениями b_0 , начиная с величины, близкой к единице, и определяя b_1 из (15) и (13), причем соответствующие значения q определяются по формуле (14).

Результаты таких вычислений для ряда значений η и b_0 при $\nu = 0,3$ сведены в таблицу*, в которой приведены также и округленные значения b_1, b_2, \dots , что позволяет определять по (11) соответствующие значения начальной кривизны оболочки в различных точках.

η	b_0	b_1	b_2	b_3	b_4	b_5	b_6	b_7	q
0,1	0,7	0,039	0,053	-0,001	—	—	—	—	0,78
	0,75	0,029	0,044	-0,001	—	—	—	—	0,66
	0,8	0,023	0,036	-0,001	—	—	—	—	0,54
	0,85	0,023	0,027	-0,001	—	—	—	—	0,42
	0,9	0,010	0,019	-0,000	—	—	—	—	0,28
0,5	0,7	-0,35	0,255	0,041	-0,012	0,001	—	—	4,56
	0,75	-0,31	0,219	0,039	-0,011	0,001	—	—	4,02
	0,8	-0,265	0,180	0,035	-0,009	0,000	—	—	3,55
	0,85	-0,21	0,139	0,030	-0,007	0,000	—	—	2,70
	0,9	-0,148	0,095	0,022	-0,005	-0,00	—	—	1,91
0,75	0,7	-0,668	0,382	-0,117	-0,037	0,005	—	—	8,06
	0,75	-0,600	0,328	-0,112	-0,032	0,003	—	—	7,39
	0,8	-0,515	0,270	-0,103	-0,026	0,002	—	—	6,89
	0,85	-0,415	0,208	-0,088	-0,020	0,000	—	—	5,27
	0,9	-0,290	0,142	-0,065	-0,013	-0,00	—	—	3,80
1	0,7	-1,038	0,510	-0,242	-0,090	0,014	0,003	-0,002	12,4
	0,75	-0,948	0,437	-0,237	-0,078	0,009	0,003	-0,002	11,6
	0,8	-0,836	0,36	-0,223	-0,064	0,005	0,003	-0,001	10,5
	0,85	-0,699	0,277	-0,198	-0,048	0,001	0,003	-0,001	9,1
	0,9	-0,528	0,19	-0,158	-0,031	-0,002	0,002	-0,000	7,1

В случае мембраны изгибная жесткость D пренебрежимо мала; благодаря чему уравнение (7) сильно упрощается, а также автоматически удовлетворяется условие равенства нулю изгибающего момента на контуре и остается выполнить единственное граничное условие (14'), так как условие $w=0$ при $\rho=1$ (или другое аналогичное условие) при данных x^* и x^0 может быть выполнено за счет произвольной постоянной интегрирования, появляющейся при определении выражения прогиба.

При этом уравнение (7) дает зависимость

$$2T_{11}x^* = P = \frac{1}{\rho} \int \rho p d\rho. \quad (16)$$

Если нормальное давление задано, то за x^* можно принять функцию, ограниченную и непрерывную в области $0 \leq \rho \leq 1$ также как и производные ее до второго порядка включительно, причем должны выполняться условия:

$$T_{11} = P/2x^* \geq 0, \quad T_{22} \geq 0 \quad (17)$$

— ограниченные при $0 \leq \rho \leq 1$

$$2\rho \frac{dT_{11}}{d\rho} + T_{11}(1-\nu) = 0 \quad \text{при } \rho=1, \quad (18)$$

* Эти несложные, но весьма кропотливые вычисления были выполнены М. Е. Никифоровым и Д. А. Шахматевой, которым автор выражает свою признательность.

а искомая величина x^0 определяется из уравнения (6). Например, при $p = \text{const}$ можно принять

$$x^* = b \left(1 + \frac{1-\nu}{1+\nu} \rho \right), \quad b > 0.$$

Примером обратных задач II типа может служить определение такого закона распределения внутреннего давления, при котором мембрана деформируется, оставаясь подобной ее первоначальной форме. В этом случае

$$x^* = cx^0, \quad c = \text{const} \geq 1, \quad (19)$$

$$\frac{d^2}{d\rho^2} (\rho T_{11}) = -\frac{E\epsilon a^2}{8} (c^2 - 1) x^{02} = -\lambda x^{02}, \quad \lambda = \text{const} > 0.$$

Отсюда, в силу ограниченности величины T_{11} при $\rho=0$, следует, что

$$T_{11} = -\frac{\lambda}{\rho} \int d\rho \int x^{02} d\rho + c_1. \quad (20)$$

При этом из уравнения (18) находим

$$c_1 = \left\{ -\frac{\lambda(1+\nu)}{1-\nu} \int d\rho \int x^{02} d\rho + \frac{2\lambda}{1-\nu} \int x^{02} d\rho \right\}_{\rho=1}, \quad (21)$$

а искомая функция давления определяется по формуле (16). Пусть

$$x^0 = \gamma + \delta\rho, \quad \gamma = \text{const} > 0, \quad \delta = \text{const} > 0.$$

Тогда

$$T_{11} = \lambda \left\{ \gamma^2 \left[\frac{3-\nu}{2(1-\nu)} - \frac{1}{2} \rho \right] + \delta\gamma \left[\frac{5-\nu}{3(1-\nu)} - \frac{1}{3} \rho^2 \right] + \delta^2 \left[\frac{7-\nu}{12(1-\nu)} - \frac{1}{12} \rho^3 \right] \right\}$$

и условия (17) выполняются.

В частности, если сферическая мембрана после деформации остается сферической, имеем

$$\delta = 0, \quad \gamma = x^0, \quad T_{11} = \frac{\lambda}{2} x^{02} \left(\frac{3-\nu}{1-\nu} - \rho \right), \\ p = \frac{E\epsilon a^2}{8} x^* (x^{*2} - x^{02}) \left(\frac{3-\nu}{1-\nu} - 2\rho \right). \quad (22)$$

ЛИТЕРАТУРА

1. Х. М. Муштарри. Об упругом равновесии тонкой оболочки с начальными не-правильностями в форме срединной поверхности (ПММ., т. XV, вып. 6, 1951).

Поступила 5.X 1957 г.

Н. И. Кривошеев, Х. М. Муштари

ОБ ИЗГИБЕ ПОЛОГОГО СФЕРИЧЕСКОГО СЕГМЕНТА ПОД ДЕЙСТВИЕМ ВНЕШНЕГО НОРМАЛЬНОГО ДАВЛЕНИЯ¹

В статье рассматривается изгиб пологого сферического сегмента под действием равномерно распределенного внешнего давления при граничных условиях (1.3) или (1.4).

В § 2 для слегка искривленной пластины задача решается по методу разложения основных величин в ряды по степеням малых параметров, в качестве которых приняты безразмерный параметр кривизны сегмента k и отношение прогиба в центре пластины к ее толщине.

В частности, при $k=0$ получается известное решение по методу Чена Вейцанга [1].

В § 3 для случая более подъемистых сегментов задача решается по методу этого автора аналогично тому, как было сделано для других граничных условий в работе [2].

Сравнение полученных результатов с известными в литературе решениями [3], [4], найденными по методу Бубнова — Галеркина в первом приближении, аппроксимируя прогиб функцией прогиба круглой пластины по линейной теории, показывает пригодность последних лишь в очень ограниченной области.

В § 4 дается решение по методу Бубнова-Галеркина во втором приближении в сочетании его с методом разложения по степеням малого параметра.

В § 5 делаются некоторые выводы из полученного решения, в частности, рассматривается применение теории к случаю малого, но конечного изгиба и обосновываются упрощенные формулы с указанием области их применимости.

1. Основные соотношения. Рассмотрим тонкий сферический сегмент толщины t , радиуса кривизны R под действием равномерно распределенного внешнего давления P . Задача об изгибе такого сегмента, как известно, приводится к системе двух дифференциальных уравнений вида:

$$D \frac{d}{dr} \cdot \frac{1}{r} \cdot \frac{d}{dr} r \frac{dw}{dr} - \frac{Pr}{2} - N_r \left(\frac{r}{R} + \frac{dw}{dr} \right) = 0 \quad (1.1)$$

$$\frac{1}{Et} r \frac{d}{dr} \cdot \frac{1}{r} \frac{d}{dr} (r^2 N_r) + \frac{r}{R} \cdot \frac{dw}{dr} + \frac{1}{2} \left(\frac{dw}{dr} \right)^2 = 0.$$

Здесь r — расстояние точки срединной поверхности до оси симметрии сегмента, $D = Et^3/12(1-\nu^2)$, E — модуль упругости материала.

После определения прогиба w и радиального момента M_r и радиальное перемещение u :

$$M_r = -D \left(\frac{d^2 w}{dr^2} + \frac{\nu}{r} \frac{dw}{dr} \right), \quad u = r \left\{ \frac{w}{R} + \frac{1-\nu}{Et} N_r + \frac{r}{Et} \cdot \frac{dN_r}{dr} \right\}. \quad (1.2)$$

Функции w и N_r , являющиеся решениями уравнений (1.1), ограничены в центре сегмента. Кроме этого, они должны удовлетворять гра-

¹ §§ 1—4 написаны Н. И. Кривошеевым. § 5 написан Х. М. Муштари, который являлся также научным руководителем по теме.

ничным условиям. Если сегмент шарнирно закреплен по опорному кольцу, то граничные условия имеют вид

$$w=0, M_r=0, u=0 \text{ при } r=a. \quad (1.3)$$

В случае защемления с допущением радиального перемещения w и N_r должны удовлетворять условиям¹:

$$w=0, \frac{dw}{dr}=0, N_r=0 \text{ при } r=a. \quad (1.4)$$

Путем введения безразмерной переменной $\rho = \frac{r}{a}$ и использования обозначений

$$\xi = V \sqrt{12(1-\nu^2)} \frac{w}{t}, \bar{N}_r = 12(1-\nu^2) \frac{a^2}{t^2} \cdot \frac{N_r}{Et}, P^* = \frac{Pa^4 \sqrt{3(1-\nu^2)}}{8Dt}, \quad (1.5)$$

$$\lambda^2 = k = V \sqrt{12(1-\nu^2)} \frac{a^2}{Rt}$$

уравнениям (1.1) можно придать вид:

$$\frac{d}{d\rho} \frac{1}{\rho} \frac{d}{d\rho} \left(\rho \frac{d\xi}{d\rho} \right) - 8\rho P^* - \bar{N}_r \left(k\rho + \frac{d\xi}{d\rho} \right) = 0, \quad (1.6)$$

$$\frac{d}{d\rho} \frac{1}{\rho} \frac{d}{d\rho} (\rho^2 \bar{N}_r) + k \frac{d\xi}{d\rho} + \frac{1}{2\rho} \left(\frac{d\xi}{d\rho} \right)^2 = 0.$$

При этом граничные условия запишутся в форме:

$$\xi=0, \nu \frac{d\xi}{d\rho} + \frac{d^2\xi}{d\rho^2} = 0, \bar{N}_r(1-\nu) + \rho \frac{d\bar{N}_r}{d\rho} = 0 \text{ при } \rho=1 \quad (1.7)$$

для шарнирного закрепления,

$$\xi=0, \frac{d\xi}{d\rho} = 0, \bar{N}_r = 0 \text{ при } \rho=1 \quad (1.8)$$

для „защемления“.

2. Решение при малых значениях k . В этом случае для решения уравнений (1.6) воспользуемся методом возмущений по параметрам. Принимая k и величину, пропорциональную прогибу в центре сегмента, в качестве указанных параметров, будем искать решение в виде:

$$\xi = \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} \xi_{ij} \xi_0^i k^j, \bar{N}_r = \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} \sigma_{ij} \xi_0^i k^j, P^* = \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} P_{ij}^* \xi_0^i k^j, \quad (2.1)$$

где ξ_0 — значение ξ при $k=0$ в точке $\rho=0$. Для упрощения дальнейших вычислений введем новую переменную

$$\eta = \rho^2, \quad 0 \leq \eta \leq 1. \quad (2.2)$$

При этом уравнения равновесия (1.6) и граничные условия (1.7) — (1.8) преобразуются к виду:

$$\frac{d^2}{d\eta^2} \left(\eta \frac{d\xi}{d\eta} \right) - P^* - \frac{\bar{N}_r}{8} \left(k + 2 \frac{d\xi}{d\eta} \right) = 0,$$

¹ В работе [2] был рассмотрен случай жесткого защемления, не допускающего радиальное перемещение.

$$\frac{d^2}{d\eta^2} (\eta \bar{N}_r) + \frac{1}{2} k \frac{d\xi}{d\eta} + \frac{1}{2} \left(\frac{d\xi}{d\eta} \right)^2 = 0, \quad (2.3)$$

$$\xi=0, (1+\nu) \frac{d\xi}{d\eta} + 2\eta \frac{d^2\xi}{d\eta^2} = 0, \bar{N}_r(1-\nu) + 2\eta \frac{d\bar{N}_r}{d\eta} = 0 \quad (2.4)$$

при $\eta=1$

при шарнирном закреплении,

$$\xi=0, \frac{d\xi}{d\eta} = 0, \bar{N}_r = 0 \text{ при } \eta=1 \quad (2.5)$$

для защемления.

Подставляя выражения (2.1) в уравнения (2.3), в силу произвольности параметров k и ξ_0 получим систему уравнений:

$$\frac{d^2}{d\eta^2} \left(\eta \frac{d\xi_{ij}}{d\eta} \right) - P_{ij}^* - \frac{1}{8} \left\{ \sigma_{i,j-1} + 2 \sum_{m=1}^{i-1} \sum_{n=0}^j \sigma_{i-m,j-n} \cdot \frac{d\xi_{mn}}{d\eta} \right\} = 0, \quad (2.6)$$

$$\frac{d^2}{d\eta^2} (\eta \sigma_{ij}) + \frac{1}{2} \frac{d\xi_{i,j-1}}{d\eta} + \frac{1}{2} \sum_{m=1}^{i-1} \sum_{n=0}^j \frac{d\xi_{i-m,j-n}}{d\eta} \cdot \frac{d\xi_{mn}}{d\eta} = 0$$

($i=1, 2, 3, \dots$)
($j=0, 1, \dots$)

Полагая $i=1, j=0$ и интегрируя полученные уравнения, находим:

$$\xi_{10} = \frac{P_{10}^*}{4} \eta^2 + \sigma_{10} \eta + \gamma_{10} \ln \eta + \delta_{10}; \quad \sigma_{10} = \lambda_{10} + \frac{\mu_{10}}{\eta}$$

Из условия ограниченности ξ_{10} и σ_{10} в центре сегмента следует, что $\gamma_{10} = \mu_{10} = 0$. Далее, так как $\xi_{10}(0) = 1$, то $\delta_{10} = 1$. Условия (2.4) и (2.5) удовлетворяются, если положить при

$$\nu = 0,3$$

$$\xi_{10} = \frac{0,98113}{4} \eta^2 - 1,24528\eta + 1; \quad \sigma_{10} = 0, P_{10}^* = 0,98113 \quad (2.7)$$

при шарнирном закреплении и

$$\xi_{10} = (\eta - 1)^2, \quad \sigma_{10} = 0, P_{10}^* = 4 \quad (2.8)$$

для защемления.

Следующую систему двух уравнений получим, положив в (2.6) $i=1, j=1$. Интегрируя эти уравнения и учитывая, что $\xi_{11}(0) = 0$, найдем:

$$\xi_{11} = 0, \quad \sigma_{11} = -0,04088\eta^2 + 0,31132\eta - 0,92632; \quad P_{11}^* = 0 \quad (2.9)$$

в случае шарнирного закрепления и

$$\xi_{11} = 0, \quad \sigma_{11} = -\frac{1}{6}\eta^2 + \frac{1}{2}\eta - \frac{1}{3}, \quad P_{11}^* = 0 \quad (2.10)$$

в случае защемления.

Таким же образом находим

$$\xi_{12} = 10^{-2} \left\{ -\frac{0,042625}{4} \eta^4 + \frac{0,64862}{3} \eta^3 - \frac{1,07899}{2} \eta^2 + 0,33393\eta \right\}, \quad (2.11)$$

$$\sigma_{12} = 0, P_{12}^* = 9,42102 \cdot 10^{-2}$$

для шарнирного закрепления и

$$\xi_{12} = 10^{-2} \{-0,0435\eta^4 + 0,347\eta^3 - 0,565\eta^2 + 0,261\eta\},$$

$$\sigma_{12} = 0, \quad P_{12}^* = 1,91 \cdot 10^{-2} \quad (2.12)$$

для защемления.

Разрешая уравнения (2.6) совместно с граничными условиями при следующих значениях i, j , мы определим последовательно

$$\xi_{21}, \xi_{13}, \xi_{31}, \dots, \sigma_{13}, \sigma_{31}, \dots \text{ и } P_{13}^*, P_{31}^*, \dots$$

При этом легко заметить, что все $\xi_{ij} = 0, P_{ij}^* = 0$, если $i+j = \text{четное}$, и $\sigma_{ij} = 0$, если $i+j = \text{нечетное}$. Ограничиваясь значением $i=3$, получим зависимости

$$P^* = (0,9811 + 9,421 \cdot 10^{-2}k^2 + 7,107 \cdot 10^{-3}k^4 - 4,037 \cdot 10^{-3}k^6 + 1,587 \cdot 10^{-11}k^8 - 4,426 \cdot 10^{-16}k^{10}) \xi_0 - (0,2691k + 7,552 \cdot 10^{-4}k^3 - 2,153 \cdot 10^{-6}k^5) \xi_0^2 + (0,1703 + 3,405 \cdot 10^{-3}k^2 - 2,527 \cdot 10^{-5}k^4) \xi_0^3 \quad (2.13)$$

при граничных условиях (2.4),

$$P^* = (4 + 1,91 \cdot 10^{-2}k^2 + 2,2 \cdot 10^{-6}k^4 - 1,35 \cdot 10^{-9}k^6 + 2,0 \cdot 10^{-13}k^8) \xi_0 - (7,58 \cdot 10^{-2}k + 2,3 \cdot 10^{-6}k^3 - 2 \cdot 10^{-8}k^5) \xi_0^2 + (0,0676 - 6,9 \cdot 10^{-5}k^2 - 5,9 \cdot 10^{-7}k^4) \xi_0^3 \quad (2.14)$$

при граничных условиях (2.5).

Если для интегрирования первого уравнения (2.3) воспользоваться методом Бубнова—Галеркина, то, аппроксимируя форму прогиба функцией

$$\xi = \xi_0 \left\{ \frac{2(1+\nu)}{5+\nu} \left(\frac{1}{2} \eta^2 - \frac{3+\nu}{1+\nu} \eta \right) + 1 \right\}$$

при условиях (2.4), и $\xi = \xi_0(\eta-1)^2$ при условиях (2.5), получим соответственно

$$P^* = (0,98113 + 9,35 \cdot 10^{-2}k^2) \xi_0 - 0,262k \xi_0^2 + 0,165 \xi_0^3 \quad (2.15)$$

$$P^* = (4 + 1,667 \cdot 10^{-2}k^2) \xi_0 - 0,0625k \xi_0^2 + 0,0535 \xi_0^3 \quad (2.16)$$

3. Решение уравнений при немалых значениях k . В данном случае решение уравнений (1.6) будем разыскивать в форме степенных рядов по степеням параметра прогиба ξ_0 в центре сегмента. Для этого положим

$$\xi = \sum_{s=1}^{\infty} \xi_s \xi_0^s, \quad \bar{N}_r = \sum_{s=1}^{\infty} \sigma_s \xi_0^s, \quad P^* = \sum_{s=1}^{\infty} P_s^* \xi_0^s \quad (3.1)$$

Причем ясно, что

$$\xi_{1(0)} = 1, \quad \xi_{s(0)} = 0, \quad \text{если } s \neq 1. \quad (3.2)$$

В этих разложениях P_s^* — постоянные величины, а ξ_s, σ_s — функции ρ . При этом каждая из функций ξ_s, σ_s должна удовлетворять граничным условиям (1.7) или (1.8). Подставляя выражения (3.1) в уравнения (1.6) и приравнявая коэффициенты при одинаковых степенях ξ_0 нулю, получим бесконечную систему дифференциальных уравнений для определения постоянных $P_s^*(s=1, 2, \dots)$ и функций σ_s, ξ_s :

$$\frac{d}{d\rho} \frac{1}{\rho} \frac{d}{d\rho} \left(\rho \frac{d\xi_s}{d\rho} \right) - 8\rho P_s^* - \rho k \sigma_s - \sum_{n=1}^{s-1} \sigma_{s-n} \frac{d\xi_n}{d\rho} = 0,$$

$$\frac{d}{d\rho} \frac{1}{\rho} \frac{d}{d\rho} (\rho^2 \sigma_s) + k \frac{d\xi_s}{d\rho} + \frac{1}{2\rho} \sum_{n=1}^{s-1} \frac{d\xi_{s-n}}{d\rho} \cdot \frac{d\xi_n}{d\rho} = 0. \quad (3.3)$$

Пологая $s=1$, имеем

$$\frac{d}{d\rho} \frac{1}{\rho} \frac{d}{d\rho} \left(\rho \frac{d\xi_1}{d\rho} \right) - 8\rho P_1^* - \rho k \sigma_1 = 0 \quad (3.4)$$

$$\frac{d}{d\rho} \frac{1}{\rho} \frac{d}{d\rho} (\rho^2 \sigma_1) + k \frac{d\xi_1}{d\rho} = 0. \quad (*)$$

Эти уравнения совпадают с уравнениями линейной теории изгиба сегмента. Исключая σ_1 из уравнений (*), получаем дифференциальное уравнение относительно $\frac{d\xi_1}{d\rho}$:

$$\frac{d}{d\rho} \frac{1}{\rho} \frac{d}{d\rho} \left(\rho \frac{d}{d\rho} \left(\rho \frac{d\xi_1}{d\rho} \right) \right) + k^2 \frac{d\xi_1}{d\rho} = 0. \quad (3.4)$$

Так как $\frac{d\xi_1}{d\rho}$ ограничена при $\rho=0$, то общее решение этого уравнения можно записать в форме:

$$\frac{d\xi_1}{d\rho} = C_1 I_1(\alpha\rho) - \bar{C}_1 I_1(\beta\rho), \quad (3.5)$$

где I_1 — цилиндрическая функция первого рода и первого порядка, $\alpha = \sqrt{ik}, \beta = ai, i = \sqrt{-1}, C_1 = A + Bi, \bar{C}_1 = A - Bi$ — комплексные постоянные.

Из первого уравнения (*) легко находим

$$\sigma_1 = -\frac{8}{k} P_1^* - \frac{\alpha^2}{k\rho} \{ C_1 I_1(\alpha\rho) + \bar{C}_1 I_1(\beta\rho) \}. \quad (3.6)$$

Интегрируя выражение (3.5) и учитывая, что $\xi_1(1) = 0$, получим

$$\xi_1(\rho) = C_1 \frac{I_0(\alpha) - I_0(\alpha\rho)}{\alpha} - \bar{C}_1 \frac{I_0(\beta) - I_0(\beta\rho)}{\beta}. \quad (3.7)$$

Граничные условия и условие $\xi_1(0) = 1$ будут выполняться, если положить

$$\frac{A}{B} = \frac{\lambda [\text{ber}_0(\lambda) - \text{bei}_0(\lambda)] - \sqrt{2}(1-\nu) \text{bei}_1(\lambda)}{\lambda [\text{ber}_0(\lambda) + \text{bei}_0(\lambda)] + \sqrt{2}(1-\nu) \text{ber}_1(\lambda)} \quad (3.8)$$

$$B = \frac{\sqrt{2} \left\{ \frac{A}{B} [\text{ber}_0(\lambda) - \text{bei}_0(\lambda) - 1] + \text{ber}_0(\lambda) + \text{bei}_0(\lambda) - 1 \right\}}{\lambda \text{ber}_1(\lambda)}$$

$$P_1^* = \frac{B \lambda^3 \sqrt{2}}{8(1-\nu)} \left\{ \frac{A}{B} [\text{ber}_0(\lambda) - \text{bei}_0(\lambda) - \frac{\sqrt{2}}{\lambda} (1+\nu) \text{bei}_1(\lambda)] + \right.$$

$$\left. + \frac{\sqrt{2}}{\lambda} (1+\nu) \text{ber}_1(\lambda) + \text{ber}_0(\lambda) + \text{bei}_0(\lambda) \right\}$$

при шарнирном опирании, и

$$B = \frac{\frac{A}{B} \frac{1+\nu}{\lambda} \text{bei}_1(\lambda) + \text{ber}_1(\lambda)}{\lambda \text{ber}_1(\lambda)} \quad (3.9)$$

$$P_1^* = \frac{\lambda^3 \sqrt{2} [\text{ber}_1^2(\lambda) + \text{bei}_1^2(\lambda)]}{8 \{ \text{ber}_1(\lambda) [\text{bei}_0(\lambda) + \text{ber}_0(\lambda) - 1] + \text{bei}_1(\lambda) [\text{bei}_0(\lambda) - \text{ber}_0(\lambda) + 1] \}}$$

при защемлении, где

$$I_1(\beta) = \text{ber}_1(\lambda) + i \text{bei}_1(\lambda), \quad I_0(\beta) = \text{ber}_0(\lambda) + i \text{bei}_0(\lambda). \quad (3.10)$$

Следующую систему двух уравнений получим, положив в (3.3) $s=2$:

$$\frac{d}{d\rho} \frac{1}{\rho} \frac{d}{d\rho} \left(\rho \frac{d\tilde{\xi}_2}{d\rho} \right) - 8\rho P_2^* - \rho k^2 - \sigma_1 \cdot \frac{d\tilde{\xi}_1}{d\rho} = 0, \quad (3.11)$$

$$\frac{d}{d\rho} \frac{1}{\rho} \frac{d}{d\rho} (\rho^2 \sigma_2) + k_1 \frac{d\tilde{\xi}_2}{d\rho} + \frac{1}{2\rho} \left(\frac{d\tilde{\xi}_1}{d\rho} \right)^2 = 0. \quad (3.12)$$

Исключая σ_2 , имеем.

$$\frac{d}{d\rho} \frac{1}{\rho} \frac{d}{d\rho} \rho \frac{d}{d\rho} \frac{1}{\rho} \frac{d}{d\rho} \left(\rho \frac{d\tilde{\xi}_2}{d\rho} \right) + k^2 \frac{d\tilde{\xi}_2}{d\rho} + \frac{k}{2\rho} \left(\frac{d\tilde{\xi}_1}{d\rho} \right)^2 - \frac{d}{d\rho} \frac{1}{\rho} \frac{d}{d\rho} \left(\rho \sigma_1 \frac{d\tilde{\xi}_1}{d\rho} \right) = 0. \quad (3.13)$$

Подставляя в последнее уравнение выражения $\frac{d\tilde{\xi}_1}{d\rho}$ и σ_1 из (3.5), (3.6), вводя обозначение

$$x = \lambda\rho/2 \quad (3.14)$$

и заменяя функции Бесселя их разложениями в степенные ряды, получим:

$$\begin{aligned} & \frac{d}{d\rho} \frac{1}{\rho} \frac{d}{d\rho} \rho \frac{d}{d\rho} \frac{1}{\rho} \frac{d}{d\rho} \left(\rho \frac{d\tilde{\xi}_2}{d\rho} \right) + k^2 \frac{d\tilde{\xi}_2}{d\rho} - \\ & - \frac{k\sqrt{k}}{2} B^2 \left\{ 3 \left(\frac{A^2}{B^2} - 1 \right) \sum_{2, 4, 6, \dots}^{\infty} \frac{(-1)^{\frac{m}{2}} m(3m+2)(2m)! x^{2m-1}}{(m+2)(m+1)(m!)^4} - \right. \\ & - 6 \frac{A}{B} \sum_{1, 3, 5, \dots}^{\infty} \frac{(-1)^{\frac{m+1}{2}} m(3m+2)(2m)! x^{2m-1}}{(m+2)(m+1)(m!)^4} - \\ & \left. - \left(\frac{A^2}{B^2} + 1 \right) \sum_{0, 1, 2, \dots}^{\infty} \frac{x^{4m+1}}{m!(m+1)!(2m+1)!} \right\} - \\ & - 8P_1^* B \sum_0^{\infty} \frac{x^{2m+1} i^{\frac{1+2m}{2}}}{m!(m+1)!} \left\{ (-1)^m \frac{A}{B} + 1 \right\} [i - (-1)^m] = 0. \end{aligned} \quad (3.15)$$

Общее решение этого уравнения, ограниченное при $\rho=0$, имеет вид:

$$\frac{d\tilde{\xi}_2}{d\rho} = C_2 I_1(\alpha\rho) - \bar{C}_2 I_1(\beta\rho) + \sum_0^{\infty} \gamma_{2m+5} x^{2m+5}. \quad (3.16)$$

Коэффициенты γ_{2m+5} определяются следующими рекуррентными формулами

$$\begin{aligned} & \gamma_{2m+5} + \frac{\gamma_{2m+1}}{(m+3)(m+2)^2(m+1)} - \\ & - \frac{B^2}{2\sqrt{k}} \left\{ - \left(\frac{A^2}{B^2} + 1 \right) \frac{1}{(m+2)(m+1) \left(\frac{m}{2} \right)! \left(\frac{m}{2} + 1 \right)! (m+3)!} + \right. \\ & \left. + 6 \frac{A}{B} \frac{(-1)^{\frac{m}{2}} (3m+5)(2m+2)!}{(m+3)^2 (m+2)^3 [(m+1)!]^4} + \frac{8\sqrt{2}(-1)^{\frac{m}{2}} P_1^* B \left(\frac{A}{B} + 1 \right)}{k^2 (m+3) [(m+2)!]^2} \right\} = 0 \quad (3.17) \\ & m = 0, 2, 4, \dots \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \gamma_{2m+5} + \frac{\gamma_{2m+1}}{(m+3)(m+2)^2(m+1)} - \\ & - \frac{B^2}{2\sqrt{k}} \left\{ 3 \left(\frac{A^2}{B^2} - 1 \right) \frac{(-1)^{\frac{m+1}{2}} (3m+5)(2m+2)!}{(m+3)^2 (m+2)^3 [(m+1)!]^4} - \right. \\ & \left. - \frac{8\sqrt{2}(-1)^{\frac{m-1}{2}} P_1^* B \left(\frac{A}{B} - 1 \right)}{k^2 (m+3) [(m+2)!]^2} \right\} = 0 \\ & m = 1, 3, 5, \dots \end{aligned}$$

причем $\gamma_1 = \gamma_3 = 0$.

Подставив выражения σ_1 , $\frac{d\tilde{\xi}_1}{d\rho}$ и $\frac{d\tilde{\xi}_2}{d\rho}$ в уравнение системы (3.11), найдем

$$\begin{aligned} \sigma_2 = & \frac{1}{\rho k} \left\{ -\alpha^2 [C_2 I_1(\alpha\rho) + \bar{C}_2 I_1(\beta\rho)] + \frac{k}{4} \sum_0^{\infty} (2m+6)(2m+4) \gamma_{2m+5} x^{2m+3} - \right. \\ & \left. - 8\rho P_2^* + \frac{\alpha^2}{k\rho} \left[C_1 I_1(\alpha\rho) + \bar{C}_1 I_1(\beta\rho) + \frac{8P_1^*}{\alpha^2} \rho \right] [C_1 I_1(\alpha\rho) - \bar{C}_1 I_1(\beta\rho)] \right\}. \end{aligned} \quad (3.18)$$

Интегрируя уравнение (3.16) и учитывая, что $\xi_2(0) = 0$, получим

$$\xi_2(\rho) = C_2 \frac{1 - J_0(\alpha\rho)}{\alpha} + \bar{C}_2 \frac{I_0(\beta\rho) - 1}{\beta} + \frac{1}{\sqrt{k}} \sum_0^{\infty} \frac{\gamma_{2m+5} x^{2m+6}}{m+3}. \quad (3.19)$$

Обозначим через d и f (реальную и мнимую части величины C_2). Из граничных условий (1.7), (1.8) определяем

$$\begin{aligned} & \frac{d}{f} = \frac{A}{B} \frac{\sum_0^{\infty} (2m+5+\nu) \gamma_{2m+5} x_1^{2m+5}}{f \{ 2(1-\nu) \text{ber}_1(\lambda) + \lambda \sqrt{2} [\text{ber}_0(\lambda) + \text{bei}_0(\lambda)] \}}, \\ & \frac{f}{B} = \frac{[\text{ber}_0(\lambda) - \text{bei}_0(\lambda) - 1] \sum_0^{\infty} (2m+5+\nu) \gamma_{2m+5} x_1^{2m+5}}{\lambda \{ (1-\nu) \sqrt{2} \text{ber}_1(\lambda) + \lambda [\text{ber}_0(\lambda) + \text{bei}_0(\lambda)] \}} + \sum_0^{\infty} \frac{\gamma_{2m+5} x_1^{2m+5}}{2m+6}, \\ & P_2^* = \frac{4\nu B P_1^*}{\lambda(1-\nu)} \frac{\text{ber}_1(\lambda) [\text{ber}_0(\lambda) - \text{bei}_0(\lambda)] + \text{bei}_1(\lambda) [\text{ber}_0(\lambda) + \text{bei}_0(\lambda)]}{(1-\nu) \sqrt{2} \text{ber}_1(\lambda) + \lambda [\text{ber}_0(\lambda) + \text{bei}_0(\lambda)]} + \\ & + \frac{B^2 \sqrt{2}}{4(1-\nu)} \left\{ \left(\frac{A^2}{B^2} - 1 \right) \lambda [\text{ber}_1(\lambda) (\text{bei}_0(\lambda) - \text{ber}_0(\lambda)) + \text{bei}_1(\lambda) (\text{bei}_0(\lambda) + \right. \\ & \left. + \text{ber}_0(\lambda)) + \frac{\sqrt{2}}{\lambda} (3+\nu) \text{ber}_1(\lambda) \text{bei}_1(\lambda)] + 2\lambda \frac{A}{B} [\text{ber}_1(\lambda) (\text{ber}_0(\lambda) + \right. \\ & \left. + \text{bei}_0(\lambda)) + \text{bei}_1(\lambda) (\text{ber}_0(\lambda) - \text{bei}_0(\lambda)) + \frac{3+\nu}{\lambda \sqrt{2}} (\text{ber}_1^2(\lambda) - \text{bei}_1^2(\lambda))] \right\} + \\ & + \frac{\lambda^2}{8(1-\nu)} \frac{(1+\nu) \sqrt{2} \text{bei}_1(\lambda) - \lambda [\text{ber}_0(\lambda) - \text{bei}_0(\lambda)]}{(1-\nu) \sqrt{2} \text{ber}_1(\lambda) + \lambda [\text{ber}_0(\lambda) + \text{bei}_0(\lambda)]} \sum_0^{\infty} (2m+5+\nu) \gamma_{2m+5} x_1^{2m+5} + \\ & + \frac{1}{2(1-\nu)} \sum_0^{\infty} (m+3)(m+2)(2m+3-\nu) \gamma_{2m+5} x_1^{2m+5} + P_1^* \frac{f}{B} \quad (3.20) \end{aligned}$$

в случае шарнирного закрепления, и

$$\frac{d}{f} = \frac{A}{B} + \frac{\sum_{0}^{\infty} \gamma_{2m+5} x_1^{2m+5}}{2f \operatorname{ber}_1(\lambda)}; \quad \frac{f}{B} = \frac{\sum_{0}^{\infty} \gamma_{2m+5} x_1^{2m+5}}{\lambda \sqrt{2} \operatorname{ber}_1(\lambda)} + \left(1 + \sum_{0}^{\infty} \frac{\gamma_{2m+5} x_1^{2m+5}}{2m+6}\right); \quad (3.21)$$

в случае защемления, где

$$P_2^* = P_1^* \frac{f}{B} + \frac{\lambda^2 \operatorname{bei}_1(\lambda)}{8 \operatorname{ber}_1(\lambda)} \sum_{0}^{\infty} \gamma_{2m+5} x_1^{2m+5} + \frac{1}{2} \sum_{0}^{\infty} (m+3)(m+2) \gamma_{2m+5} x_1^{2m+5}$$

Уравнения третьего приближения будут иметь вид:

$$\left\{ \frac{d}{dp} \frac{1}{\rho} \frac{d}{dp} \left(\rho \frac{d\zeta_3}{dp} \right) - 8\rho P_3^* \left(k\rho\sigma_3 + \sigma_2 \frac{d\zeta_1}{dp} + \sigma_1 \frac{d\zeta_2}{dp} \right) = 0; \right. \\ \left. \frac{d}{dp} \frac{1}{\rho} \frac{d}{dp} (\rho^2 \sigma_3) + k \frac{d\zeta_3}{dp} + \frac{1}{\rho} \frac{d\zeta_1}{dp} \cdot \frac{d\zeta_2}{dp} = 0 \right. \quad (3.22)$$

После исключения σ_3 получим уравнение относительно ζ_3 :

$$\frac{d}{dp} \frac{1}{\rho} \frac{d}{dp} \rho \frac{d}{dp} \frac{1}{\rho} \frac{d}{dp} \left(\rho \frac{d\zeta_3}{dp} \right) + k^2 \frac{d\zeta_3}{dp} = - \frac{k}{\rho} \frac{d\zeta_1}{dp} \cdot \frac{d\zeta_2}{dp} + \left(\sigma_2 \frac{d\zeta_1}{dp} + \sigma_1 \frac{d\zeta_2}{dp} \right) = 0. \quad (3.23)$$

Подставляя вместо $\frac{d\zeta_1}{dp}$, σ_1 , $\frac{d\zeta_2}{dp}$ и σ_2 их выражения соответственно из равенств (3.5), (3.6), (3.16) и (3.18), уравнению (3.23) можно придать вид:

$$\frac{d}{dp} \frac{1}{\rho} \frac{d}{dp} \rho \frac{d}{dp} \frac{1}{\rho} \frac{d}{dp} \left(\rho \frac{d\zeta_3}{dp} \right) + k^2 \frac{d\zeta_3}{dp} = - \frac{k\sqrt{k}}{2} \left\{ -2\rho \sum_{1,3,5,\dots}^{\infty} (-1)^{\frac{m+1}{2}} \alpha_{2m} x^{2m+1} - \right. \\ \left. - 2q \sum_{0,2,4,\dots}^{\infty} (-1)^{\frac{m}{2}} \alpha_{2m} x^{2m+1} + 0 \sum_{0}^{\infty} \beta_{4m} x^{4m+1} + \sum_{0}^{\infty} M_{2m+5} x^{2m+5} \right\} + \\ + \frac{\sqrt{k}}{8} \left\{ -2\omega \sum_{1,3,5,\dots}^{\infty} (-1)^{\frac{m}{2}} (2m+2) 2m \alpha_{2m} x^{2m-1} - \left(2\mu \sum_{2,4,6,\dots}^{\infty} (-1)^{\frac{m}{2}} (2m+2) 2m \alpha_{2m} x^{2m-1} + \right. \right. \\ \left. \left. + 2 \sum_{0}^{\infty} 4m(4m+2) \beta_{4m} x^{4m-1} + k \sum_{0}^{\infty} (m+2)(m+1) C_{2m+5} x^{2m+1} - k \sum_{0}^{\infty} (2m+6)(2m+4) D_{2m+5} x^{2m+3} + \right. \right. \\ \left. \left. + \sqrt{k} \sum_{0}^{\infty} (2m+2)m(A_{2m} - B_{2m}) x^{2m-1} \right\} + 8 \left\{ \sum_{0}^{\infty} (\alpha_{2m} - s\varphi_{2m}) x^{2m+1} - P_1^* \sum_{0}^{\infty} (m+3)(m+2) \gamma_{2m+5} x^{2m+3} \right\}. \quad (3.24)$$

Здесь введены обозначения: (0) ...

$$0 = C_1 \bar{C}_2 + C_1 \bar{C}_2, \quad \sigma = P_1^* d + P_2^* A, \quad s = P_1^* f + P_2^* B, \\ C_1 C_2 = p + iq, \quad -2\alpha^2 C_1 C_2 + C_1^2 \frac{8P_1^*}{k} = \omega + iy; \quad 2C_1 \bar{C}_1 \frac{8P_1^*}{k} = z; \\ \alpha_{2m} = \frac{(2+2m)!}{m!(2+m)![(m+1)!]^2}, \quad \beta_{4m} = \frac{(2+4m)!}{m!(m+1)!(2m+1)!}, \\ -\varphi_{2m} = \frac{i}{2} \{(-1)^m - i\}; \quad \chi_{2m} = \frac{i}{2} \{(-1)^m i - 1\}; \\ \chi_{2m} = B\varphi_{2m} \left\{ \frac{A}{B} - (-1)^m \right\}, \quad \psi_{2m} = -B\varphi_{2m} \left\{ (-1)^m \frac{A}{B} + 1 \right\}, \\ C_{2m+5} = \chi_0 (2m+6)(2m+4) \gamma_{2m+5} + \chi_2 (2m+4)(2m+2) \gamma_{2m+3} + \dots + 24 \chi_{2m} \gamma_5; \quad (3.25)$$

$$A_{2m} = 4AB \left\{ -\alpha_2 \chi_{2m-2} + \alpha_6 \chi_{2m-6} + \dots + (-1)^{\frac{m}{2}} \alpha_{2m} \chi_0 \right\}, \\ B_{2m} = 2(A^2 - B^2) \left\{ \alpha_0 \chi_{2m} - \alpha_4 \chi_{2m-4} + \dots + (-1)^{\frac{m}{2}} \alpha_{2m} \chi_0 \right\}, \\ D_{2m+5} = \psi_0 \gamma_{2m+5} + \psi_2 \gamma_{2m+3} + \dots + \psi_{2m} \gamma_5, \\ M_{2m+5} = \chi_{2m} \gamma_5 + \chi_{2m-2} \gamma_7 + \dots + \chi_0 \gamma_{2m+5}$$

Общее решение уравнения (3.24), ограниченное при $\rho=0$, имеет вид:

$$\frac{d\zeta_3}{dp} = C_3 I_1(\alpha\rho) - \bar{C}_3 I_1(\beta\rho) + \sum_{0}^{\infty} \omega_{2m+5} x^{2m+5}, \\ C_3 = d_3 + if_3; \quad \bar{C}_3 = d_3 - if_3. \quad (3.26)$$

Коэффициенты ω_{2m+5} определяются формулами:

$$(m+3)(m+2)^2(m+1)\omega_{2m+5} + \omega_{2m+1} = \frac{1}{k^2} \left\{ -\frac{k\sqrt{k}}{2} [-(-1)^{\frac{m}{2}} 2q\alpha_{2m} + \right. \\ \left. + 0\beta_{2m} + M_{2m+1} \right] + \frac{\sqrt{k}}{8} [(-1)^{\frac{m}{2}} \cdot 2\omega(2m+4)(2m+2)\alpha_{2m+2} + \\ + k(m+2)(m+1)C_{2m+5} - k(2m+4)(2m+2)D_{2m+3} + \\ + (2m+4)(m+1)\sqrt{k}(A_{2m+2} - B_{2m+2})] + 8[\sigma_{2m} - s\varphi_{2m} - \\ - P_1^*(m+2)(m+1)\gamma_{2m+3}], \quad m=0, 2, 4, \dots; \\ (m+3)(m+2)^2(m+1)\omega_{2m+5} + \omega_{2m+1} = \frac{1}{k^2} \left\{ -\frac{k\sqrt{k}}{2} [(-1)^{\frac{m-1}{2}} 2p\alpha_{2m} + \right. \\ \left. + M_{2m+1} \right] + \frac{\sqrt{k}}{8} [(-1)^{\frac{m-1}{2}} \cdot 2\mu(2m+2)(2m+4)\alpha_{2m+2} + \\ + \chi(2m+4)(2m+2)\beta_{2m+2} + k(m+2)(m+1)C_{2m+5} - \\ - k(2m+4)(2m+2)D_{2m+3} + \sqrt{k}(m+2)(2m+2)(A_{2m+2} - B_{2m+2})] + \\ + 8[\sigma_{2m} - s\varphi_{2m} - P_1^*(m+2)(m+1)\gamma_{2m+3}], \quad m=1, 3, 5, \dots, \\ \text{причем } \omega_1 = \omega_3 = 0.$$

Интегрируя (3.26) и учитывая, что $\xi_3(0) = 0$, найдем

$$\xi_3(\rho) = C_3 \frac{1 - I_0(\alpha\rho)}{\alpha} + \bar{C}_3 \frac{I_0(\beta\rho) - 1}{\beta} + \frac{2}{\sqrt{k}} \sum_0^{\infty} \frac{\omega_{2m+5} x_1^{2m+6}}{2m+6} \quad (3.28)$$

Граничные условия (1.7), (1.8) выполняются, если положить

$$\begin{aligned} \frac{d_3}{f_3} &= \frac{A}{B} - \frac{\sum_0^{\infty} (2m+5+\nu) \omega_{2m+5} x_1^{2m+5}}{\sqrt{2} f_3 \{ (1-\nu) \sqrt{2} \operatorname{ber}_1(\lambda) + \lambda [\operatorname{ber}_0(\lambda) + \operatorname{bei}_0(\lambda)] \}}, \\ \frac{f_3}{B} &= \frac{[\operatorname{ber}_0(\lambda) - \operatorname{bei}_0(\lambda) - 1] \sum_0^{\infty} (2m+5+\nu) \omega_{2m+5} x_1^{2m+5}}{\lambda \{ (1-\nu) \sqrt{2} \operatorname{ber}_1(\lambda) + \lambda [\operatorname{ber}_0(\lambda) + \operatorname{bei}_0(\lambda)] \}} + \sum_0^{\infty} \frac{\omega_{2m+5} x_1^{2m+5}}{2m+6}; \\ 8(1-\nu) P_3^* &= -\lambda^3 \sqrt{2} f_3 \left\{ \frac{d_3}{f_3} [\operatorname{ber}_0(\lambda) - \operatorname{ber}_0(\lambda) + \frac{\sqrt{2}}{\lambda} \operatorname{bei}_1(\lambda)] - \right. \\ &\quad \left. - \operatorname{ber}_0(\lambda) - \operatorname{bei}_0(\lambda) - \frac{\sqrt{2}}{\lambda} \operatorname{ber}_1(\lambda) \right\} + 2\lambda^2 \nu f_3 \left\{ \operatorname{ber}_1(\lambda) - \frac{d_3}{f_3} \operatorname{bei}_1(\lambda) \right\} - \\ &\quad - \sqrt{2} \lambda B \sigma_2 \Big|_{\rho=1} \left\{ \frac{A}{B} [\operatorname{ber}_0(\lambda) + \operatorname{bei}_0(\lambda) + \frac{2\sqrt{2}}{\lambda} \operatorname{ber}_1(\lambda)] - \operatorname{ber}_0(\lambda) + \operatorname{bei}_0(\lambda) + \right. \\ &\quad \left. + \frac{2\sqrt{2}}{\lambda} \operatorname{bei}_1(\lambda) \right\} + \sum_0^{\infty} (2m+6)(2m+4)(2m+3-\nu) \omega_{2m+5} x_1^{2m+5} - \\ &\quad - \lambda \sqrt{2} \sigma_1 \Big|_{\rho=1} \left\{ d [\operatorname{ber}_0(\lambda) + \operatorname{bei}_0(\lambda) + \frac{2\sqrt{2}}{\lambda} \operatorname{ber}_1(\lambda)] - f [\operatorname{ber}_0(\lambda) - \operatorname{bei}_0(\lambda) - \right. \\ &\quad \left. - \frac{2\sqrt{2}}{\lambda} \operatorname{bei}_1(\lambda)] + \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_0^{\infty} (m+2) \gamma_{2m+5} x_1^{2m+4} \right\} \quad (3.29) \end{aligned}$$

при шарнирном закреплении, и

$$\begin{aligned} \frac{d_3}{f_3} &= \frac{A}{B} + \frac{\sum_0^{\infty} \omega_{2m+5} x_1^{2m+5}}{2f_3 \operatorname{ber}_1(\lambda)}; \\ \frac{f_3}{B} &= \frac{[\operatorname{ber}_0(\lambda) - \operatorname{ber}_0(\lambda) + 1] \sum_0^{\infty} \omega_{2m+5} x_1^{2m+5}}{\lambda \sqrt{2} \operatorname{ber}_1(\lambda)} + \sum_0^{\infty} \frac{\omega_{2m+5} x_1^{2m+5}}{2m+6}; \quad (3.30) \end{aligned}$$

$$4P_3^* = -\lambda^2 f_3 \left\{ \operatorname{ber}_1(\lambda) - \frac{d_3}{f_3} \operatorname{bei}_1(\lambda) \right\} + 2 \sum_0^{\infty} (m+3)(m+2) \omega_{2m+5} x_1^{2m+5}$$

при защемлении.

4. Применение метода Бубнова — Галеркина и метода малого параметра. Для решения уравнений (2.3), как и в § 3, воспользуемся методом возмущений по параметру ξ_0 , где ξ_0 , как и ранее, представляет параметр прогиба в центре сегмента. При этом мы отказываемся от точного интегрирования линейных уравнений, ввиду слож-

ности получаемых формул. Для приближенного интегрирования линейных уравнений воспользуемся методом Бубнова — Галеркина.

В первом приближении имеем

$$\frac{d^2}{d\eta^2} \left(\eta \frac{d\xi_1}{d\eta} \right) - P_1^* - \frac{k}{8} \sigma_1 = 0, \quad \frac{d^2}{d\eta^2} (\eta \sigma_1) + \frac{k}{2} \frac{d\xi_1}{d\eta} = 0. \quad (4.1)$$

Принимая форму прогиба в случае шарнирного закрепления в виде

$$\frac{d\xi_1}{d\eta} = (\eta - \delta) c_1 + (\eta^2 - \gamma) c_2, \quad (4.2)$$

где

$$\delta = \frac{3+\nu}{1+\nu}, \quad \gamma = \frac{5+\nu}{1+\nu},$$

c_1, c_2 — произвольные постоянные, из уравнения совместности деформации находим

$$\sigma_1 = -\frac{k}{2} \left\{ -\frac{1}{2} (\delta c_1 + \gamma c_2) \eta + \frac{1}{6} c_1 \eta^2 + \frac{1}{12} c_1 \eta^3 \right\} + \lambda_1 + \frac{\mu_1}{\eta}. \quad (4.3)$$

Из граничного условия и условия регулярности σ_1 при $\eta = 0$ следует, что

$$\mu_1 = 0; \quad \lambda_1 = -k(1,88828 c_1 + 3,5325 c_2); \quad \nu = 0,3. \quad (4.4)$$

Подставляя σ_1 и $\frac{d\xi_1}{d\eta}$ в уравнение равновесия и интегрируя результат подстановки по методу Бубнова — Галеркина, получим

$$\begin{aligned} P_1^* &= 2c_1 + 2,75471 c_2 + \frac{k^2}{8} (1,62128 c_1 + 3,07343 c_2), \\ P_1^* &= 2c_1 + 2,86643 c_2 + \frac{k^2}{8} (1,6109 c_1 + 3,05506 c_2). \quad (4.5) \end{aligned}$$

Для определения P_1^* из этих уравнений необходимо выполнить условия

$$\xi_1(0) = 1, \quad \xi_1(1) = 0,$$

которые при $\nu = 0,3$ дают зависимость

$$c_1 = 0,49056 - 1,83648 c_2. \quad (4.6)$$

Заменяя в уравнениях (4.5) c_1 его выражением из (4.6), находим

$$\begin{aligned} P_1^* &= \frac{0,98113 + 0,09494 k^2 + 0,0145 \cdot 10^{-2} k^4}{1 + 0,77501 \cdot 10^{-3} k^2}, \\ c_2 &= \frac{k^2}{0,13603 k^2 + 175,51964}. \quad (4.7) \end{aligned}$$

Уравнения второго приближения будут

$$\begin{aligned} \frac{d^2}{d\eta^2} \left(\eta \frac{d\xi_2}{d\eta} \right) - P_2^* - \frac{1}{8} (k \sigma_2 + 2\sigma_1 \frac{d\xi_1}{d\eta}) &= 0, \\ \frac{d^2}{d\eta^2} (\eta \sigma_2) + \frac{k}{2} \frac{d\xi_2}{d\eta} + \frac{1}{2} \left(\frac{d\xi_1}{d\eta} \right)^2 &= 0. \quad (4.8) \end{aligned}$$

Полагая

$$\frac{d\xi_2}{d\eta} = (\eta - \delta) c_3 + (\eta^2 - \gamma) c_4, \quad (4.9)$$

с учетом соотношений

$$\xi_2(0) = \xi_2(1) = 0,$$

которые дают зависимость

$$c_4 = -0,54452 c_3,$$

найдем путем аналогичных выкладок

$$P_2^* = - \frac{0,2638k + 1,412 \cdot 10^{-3}k^2 - 4,483 \cdot 10^{-7}k^3 - 2,401 \cdot 10^{-9}k^4}{k(19,70c_1^2 + 68,59c_2^2 + 73,49c_1c_2) + 16P_2^*} \quad (4.10)$$

Аналогичным образом в третьем приближении при форме прогиба

$$\frac{d\xi_3}{d\eta} = (\eta - \delta)c_5 + (\eta^2 - \gamma)c_6 \quad (4.11)$$

нами была получена зависимость

$$P_3^* \{ 2,152 \cdot 10^{-6}k^4 + 2,911 \cdot 10^{-3}k^2 - 0,2039 \} - 0,02466 - 4,15 \cdot 10^{-3}k^2 + 2,969 \cdot 10^{-5}k^4 + c_2 \{ -5,403 \cdot 10^{-7}k^4 - 8,658 \cdot 10^{-4}k^2 - 0,03124 \} + c_2^2 \{ 2,57 \cdot 10^{-6}k^4 - 4,429 \cdot 10^{-4}k^2 + 8,955 \cdot 10^{-3} \} + c_2^3 \{ -2,343 \cdot 10^{-6}k^4 + 3,341 \cdot 10^{-4}k^2 - 0,0128 \} + P_2^* \{ 9,517 \cdot 10^{-5}k^3 - 1,542 \cdot 10^{-2}k - c_2 \{ 7,28 \cdot 10^{-6}k^3 + 2,18 \cdot 10^{-3}k \} \} = 0, \quad (4.12)$$

где c_2 определяется из формулы (4.7).

Ограничиваясь третьим приближением, получим

$$P^* = P_1^* \xi_0 + P_2^* \xi_0^2 + P_3^* \xi_0^3, \quad (4.13)$$

причем P_1^* , P_2^* и P_3^* находятся соответственно из формул (4.7), (4.10) и (4.12).

В таблице 1 приведены значения P_1^* , P_2^* и P_3^* , вычисленные по различным формулам данной статьи.

Таблица 1

Шарнирное закрепление

k	По формуле (4.13)			По формуле (2.13)			По формуле (2.15)			По формулам § 3		
	P ₁ [*]	P ₂ [*]	P ₃ [*]	P ₁ [*]	P ₂ [*]	P ₃ [*]	P ₁ [*]	P ₂ [*]	P ₃ [*]	P ₁ [*]	P ₂ [*]	P ₃ [*]
8	7,29	-2,465	0,258	7,29	-2,469	0,284	6,965	-2,096	0,165	7,56	-	-
16	29,029	-5,194	0,197	29,14	-5,141	< 0	24,917	-4,192	0,165	29,13	-5,367	0,216
27,04	94,41	-0,86	< 0	95,69	> 0	< 0	69,28	-7,08	0,165	95,78	-1,144	-

Закрепление

k	По формуле (2.14)			По формуле (2.16)			По формулам § 3		
	P ₁ [*]	P ₂ [*]	P ₃ [*]	P ₁ [*]	P ₂ [*]	P ₃ [*]	P ₁ [*]	P ₂ [*]	P ₃ [*]
8	5,231	-0,607	0,063	5,067	-0,5	0,0535	5,348	-	-
16	9,011	-1,200	0,0109	8,267	-1	0,0535	9,013	-	-
27,04	18,66	-1,787	< 0	16,188	-1,69	0,0535	18,69	-1,922	-

5. Упрощенные формулы. О малом конечном изгибе пологого сегмента. Ограничиваясь тремя членами ряда (3.1), для определения давления в функции параметра прогиба центра сегмента получаем формулу

$$P^* = P_1^* \xi_0 + P_2^* \xi_0^2 + P_3^* \xi_0^3, \quad (5.1)$$

где ξ_0 и P^* — безразмерные величины, введенные согласно (1.5). Как известно из линейной теории, при выпучивании идеальной сфериче-

ской оболочки под действием внешнего нормального давления должны образовываться волны, длина которых в направлении меридиана равна

$$L = 2\pi \sqrt{Rt} / \sqrt{12(1-\nu^2)}.$$

В случае сферического сегмента радиус кривизны в момент потери устойчивости $R_{кр} \geq R$. Учитывая это обстоятельство, будем считать, что несимметричное выпучивание сегмента может произойти при диаметре сегмента

$$2a \geq 2\pi \sqrt{Rt} / \sqrt{12(1-\nu^2)}, \quad k \geq \pi^2. \quad (5.2)$$

По линейной теории определяется верхнее критическое давление для идеальной оболочки:

$$P_v = 4Et^2 / [R^2 \sqrt{12(1-\nu^2)}].$$

По экспериментальным данным критическое давление, при котором оболочка хлопает, в 2-4 раза меньше P_v . Если считать, что до начала хлопка оболочка в среднем сохраняет сферическую форму, при чем радиус кривизны ее увеличивается от R до $R_{кр}$, то за теоретическое значение давления при несимметричной форме выпучивания, найденное по нелинейной теории, можно принять*

$$P_{кр} = 4Et^2 / [R_{кр}^2 \sqrt{12(1-\nu^2)}]. \quad (5.3)$$

Очевидно, что $P_{кр} \geq P_3$ и, так как $P_3 \geq \frac{1}{4} P_v$,

$$R \leq R_{кр} \leq 2R.$$

При этом согласно (5.2) выпучивание будет происходить по несимметричной форме, если

$$a \geq \pi \sqrt{R_{кр} t} / \sqrt{12(1-\nu^2)}.$$

Следовательно на границе области несимметричного выпучивания наибольшие возможные значения величин a и k равны соответственно:

$$a = \pi \sqrt{2Rt} / \sqrt{12(1-\nu^2)}, \quad k = 2\pi^2. \quad (5.4)$$

Поэтому при $k > 2\pi^2$ не имеет смысла рассматривать симметричный изгиб сегмента, не накладывая ограничение на величину прогиба.

В области значений

$$\pi^2 \leq k \leq 2\pi^2 \quad (5.5)$$

вопрос о том, какая форма потери устойчивости имеет место — симметричная или несимметричная, остается открытым. Для решения этого вопроса воспользуемся результатами, данными в §§ 3-4. Пусть H — стрелка подъема сегмента до приложения нагрузки, $H_{кр}$ — ее величина при критической нагрузке. Очевидно

$$H = \frac{a^2}{2R} = \frac{kt}{2\sqrt{12(1-\nu^2)}}, \quad \frac{H_{кр}}{t} = \frac{H}{t} = \frac{\xi_{кр}^0}{\sqrt{12(1-\nu^2)}},$$

где $\xi_{кр}^0$ — параметр прогиба центра сегмента при критической нагрузке для несимметричной формы выпучивания.

* Здесь приходится ограничиваться приближенным рассмотрением вопроса, так как точное теоретическое значение критического давления хлопка сферического сегмента по несимметричной форме еще не найдено.

Отсюда, учитывая, что

$$\frac{R_{кр}^2}{R^2} = \frac{k^2}{(k - 2\xi_{кр}^0)^2},$$

по формулам (1.5) и (5.3) находим

$$P_{кр}^* = \left(\frac{1}{2}k - \xi_{кр}^0\right)^2. \quad (5.6)$$

Вычисления по формулам § 3 показывают, что степенные ряды, входящие в выражения величин P_1^* и P_2^* хорошо сходятся даже при $k=36$. Сходимость рядов, входящих в выражение P_3^* хуже, но она все же удовлетворительна в интересующей нас области, т. е. при $k \leq 2\pi^2$. Как видно из таблицы, в случае шарнирного закрепления при точном решении задачи в функциях Бесселя

$$P^* = 29,13\xi_0 - 5,367\xi_0^2 + 0,211\xi_0^3 \text{ при } k=16. \quad (5.7)$$

Отсюда, обозначая через $P_{кр}^{n*}$ параметр верхнего критического давления при симметричном выпучивании, находим

$$P_{кр}^{n*} \approx 45 \text{ при } \xi_0 \approx 3,38,$$

а по формуле (5.6) при $k=16$ имеем

$$P_{кр}^* = (8 - \xi_{кр}^0)^2. \quad (5.8)$$

Сравнение этих величин показывает, что симметричный прогиб $\xi_0 = 3,38$ не достигается, так как при некотором значении $\xi_{кр}^0$, которое значительно меньше, чем 3,38, оболочка теряет устойчивость по несимметричной форме. На основании (5.6) и (5.1) значение прогиба, при котором происходит несимметричное выпучивание оболочки, можно найти из уравнения

$$\left(\frac{1}{2}k - \xi_{кр}^0\right)^2 = P_1^* \xi_{кр}^0 + P_2^* \xi_{кр}^0^2 + P_3^* \xi_{кр}^0^3, \quad (5.9)$$

которое при $k=16$ принимает вид:

$$(8 - \xi_{кр}^0)^2 = 29,13 \xi_{кр}^0 - 5,367 \xi_{кр}^0^2 + 0,211 \xi_{кр}^0^3.$$

Удельный вес кубического члена в величине правой части этого уравнения при $\xi_0 = 3,38$ составляет около 20% и пренебрегать им нельзя, но при уменьшении ξ_0 влияние этого члена быстро падает, поэтому в первом приближении будем определять $\xi_{кр}^0$ из квадратного уравнения.

$$6,367 \xi_{кр}^0^2 - 45,13 \xi_{кр}^0 + 64 = 0.$$

Меньший из корней этого уравнения $\xi_{кр}^0 \approx 1,95$. Следовательно, по формуле (5.6) $P_{кр}^* \approx 36,7$. При этом погрешность от пренебрежения кубическим членом уравнения (5.9) оказывается менее 5%.

Аналогичные вычисления при $k=8$ показывают, что

$$P_{кр}^* \approx 6,9 \text{ при } \xi_0 \approx 2,3; \quad P_{кр}^* \approx 6,3 \text{ при } \xi_0 \approx 1,5.$$

При этом погрешность в величине критического давления вследствие пренебрежения кубическим членом в (5.9) достигает уже 14%.

Ввиду сложности вычислений, необходимых для определения величин P_1^* , P_2^* и, в особенности, величины P_3^* по формулам § 3, в § 4 был предложен комбинированный метод решения задачи, который дает удовлетворительное решение даже при $k=16$. В самом деле, по таблице при $k=16$ определяя P_1^* по формулам § 4, мы делаем

погрешность около 0,3%; погрешность в величине P_2^* около 3%, погрешность в величине P_3^* — около 7%. Так как кубичный член при $k=16$ сам по себе мал, а при уменьшении k точность формул § 4 возрастает, то для определения величин P_1^* при $k \leq 16$ можно рекомендовать формулы (4.7), (4.10) и (4.12). При $k \leq 7$ эти последние можно заменить более простой формулой (2.13). Допуская в ней погрешность менее чем в 1%, получаем для случая шарнирного закрепления следующие выражения величин P_1^* :

$$P_1^* = 0,981 + 0,0942 k^2 + 0,71 k^4 10^{-4}; \quad P_2^* = -0,269 k - 0,755 k^3 10^{-3}; \\ P_3^* = 0,17 + 0,0034 k^2 - 0,253 k^4 10^{-4}. \quad (5.10)$$

Для случая „защемления“ при $k \leq 7$

$$P^* \approx (4 + 0,0191 k^2) \xi_0 - 0,076 k \xi_0^2 + (0,067 - 7k^2 10^{-5}) \xi_0^3. \quad (5.11)$$

Критическим состояниям равновесия по симметричной форме соответствуют прогибы, определяемые из уравнения

$$P_1^* + 2P_2^* \xi_0 + 3P_3^* \xi_0^2 = 0$$

корни которого реальны, если

$$P_2^{*2} - 3P_1^* P_3^* \geq 0.$$

Отсюда пользуясь выражениями (5.10), убеждаемся, что хлопок сегмента возможен лишь при $k > 7$, а при значениях $k \leq 7$ с увеличением нагрузки прогиб будет монотонно увеличиваться. Что касается формул (2.15) и (2.16), полученных по методу Галеркина, то сравнение с (5.10) и (5.11) показывает неудовлетворительность этих формул для значительных величин прогибов, если $k \geq 4$. В частности, они дают неправильное представление о том значении k , при котором оболочка начинает терять устойчивость хлопком.

По нашему мнению, метод Галеркина привел здесь к неудовлетворительному решению потому, что за функцию, аппроксимирующую прогиб, была принята функция, пригодная лишь для прогиба плоской пластины и неучитывающая особенности искривленной пластины.

Если прогиб значительно меньше толщины, кубическим членом в выражении P^* через прогиб можно пренебречь. Например, при $k=16$ по формуле (5.7) погрешность от пренебрежения кубическим членом менее 1%, если

$$\xi_0 \leq 1, \quad \omega_0 \leq \frac{t}{\sqrt{12(1-\nu^2)}}. \quad (5.12)$$

В то же самое время квадратичный член дает поправку к линейной теории около 17%.

С уменьшением параметра k эта погрешность увеличивается. При $k=8$ она доходит до 5%, а поправка, даваемая квадратичным членом, увеличивается до 30%.

При $k=0$ согласно (5.10) указанная погрешность при условии (5.12) доходит до 17%, а квадратичный член в выражении P^* равен нулю. В этом случае учет членов второй степени относительно ξ_0 не влияет на величину определяемого прогиба, но дает возможность вычислить значительные цепные напряжения. Отметим, что при малых значениях параметра ξ_0 пренебрежение кубическим членом в выражении P^* допустимо при $\omega_0 \leq t \sqrt{\epsilon}$, где ϵ — допускаемая погрешность по сравнению с единицей.

1. Chien Wei-zang. Large Deflection of a Circular Clamped Plate under Uniform Pressure. Chinese Journal of Physics, vol. 7, № 2, 1947.
2. Karlan A. and Fung Y. C. A nonlinear Theory of Bending and Buckling of Thin Elastic Shallow Spherical Shells. (NACA., TN. 3212, 58 pp., 1954).
3. Феодосьев В. И. К расчету хлопающей мембраны. (ПММ, т. IX, вып. 2, 1946).
4. Геинев Г. А., Чаусов Н. С. Некоторые вопросы нелинейной теории устойчивости пологих металлических оболочек (ЦНИИПС, научное сообщение, вып. 13, 1954, Москва).

Поступила
15.I 1957 г.

$$\Delta u = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial u}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} = -\frac{p}{D} \quad (1.1)$$

В настоящей заметке этот вопрос рассматривается более детально на простом примере симметричной деформации длинной пологой цилиндрической панели, находящейся под действием равномерной поперечной нагрузки.

Пусть длинная панель (рис. 1) имеет размеры: $2b$ — ширина, t — толщина, R — радиус.

Прямые края панели заделаны. Интенсивность нагрузки — p . Будем решать задачу приближенно, энергетическим методом.

Полная энергия системы запишется в виде:

$$\mathcal{E} = \frac{K}{2} \int_{-b}^{+b} \epsilon_2^2 dy + \frac{D}{2} \int_{-b}^{+b} \kappa^2 dy - \int_{-b}^{+b} p w dy, \quad (1)$$

где $\epsilon_2 = \frac{dw}{dy} \frac{1}{R} + \frac{1}{2} \left(\frac{dw}{dy} \right)^2$ и (3), (4), (5) являются:

(1) деформация укорочения дуги панели AB ; $\frac{1}{R} \left(\frac{dw}{dy} \right)^2$ — изменение кривизны;

(2) $K = Et : (1 - \nu^2)$ — жесткость на растяжение (сжатие);
 (3) $D = Et^3 : 12(1 - \nu^2)$ — жесткость на изгиб.

Здесь w — прогиб по нормали, ν — составляющая перемещения в направлении дуги, E — модуль Юнга, ν — коэффициент Пуассона.

Ввиду пологости панели принимаем $\epsilon_2 = \text{const}$. Граничные условия в перемещениях запишутся

$$v = w = \frac{dw}{dy} = 0 \quad \text{при} \quad y = \pm b. \quad (3)$$

Зададимся прогибом панели в виде:

$$w = \omega_1 \left(1 + \cos \frac{\pi y}{l} \right), \quad \text{где} \quad l — \text{неизвестный размер, причем} \quad l \leq b. \quad (4)$$

Вопрос о влиянии варьирования области хлопка на величину нижнего критического напряжения в случае полной сферической оболочки впервые обсуждался в работе [1] Х. М. Муштары, а в общей постановке в работе [2] И. В. Свирицкого.

М. С. Корнишин

(3) К ВОПРОСУ О ВАРЬИРОВАНИИ ОБЛАСТИ ВЫПУЧИВАНИЯ

Вопрос о влиянии варьирования области хлопка на величину нижнего критического напряжения в случае полной сферической оболочки впервые обсуждался в работе [1] Х. М. Муштары, а в общей постановке в работе [2] И. В. Свирицкого. В настоящей заметке этот вопрос рассматривается более детально на простом примере симметричной деформации длинной пологой цилиндрической панели, находящейся под действием равномерной поперечной нагрузки.

Пусть длинная панель (рис. 1) имеет размеры: $2b$ — ширина, t — толщина, R — радиус.

Прямые края панели заделаны. Интенсивность нагрузки — p . Будем решать задачу приближенно, энергетическим методом.

Полная энергия системы запишется в виде:

$$\mathcal{E} = \frac{K}{2} \int_{-b}^{+b} \epsilon_2^2 dy + \frac{D}{2} \int_{-b}^{+b} \kappa^2 dy - \int_{-b}^{+b} p w dy, \quad (1)$$

где $\epsilon_2 = \frac{dw}{dy} \frac{1}{R} + \frac{1}{2} \left(\frac{dw}{dy} \right)^2$ и (3), (4), (5) являются:

(1) деформация укорочения дуги панели AB ; $\frac{1}{R} \left(\frac{dw}{dy} \right)^2$ — изменение кривизны;

(2) $K = Et : (1 - \nu^2)$ — жесткость на растяжение (сжатие);
 (3) $D = Et^3 : 12(1 - \nu^2)$ — жесткость на изгиб.

Здесь w — прогиб по нормали, ν — составляющая перемещения в направлении дуги, E — модуль Юнга, ν — коэффициент Пуассона.

Ввиду пологости панели принимаем $\epsilon_2 = \text{const}$. Граничные условия в перемещениях запишутся

$$v = w = \frac{dw}{dy} = 0 \quad \text{при} \quad y = \pm b. \quad (3)$$

Зададимся прогибом панели в виде:

$$w = \omega_1 \left(1 + \cos \frac{\pi y}{l} \right), \quad \text{где} \quad l — \text{неизвестный размер, причем} \quad l \leq b. \quad (4)$$

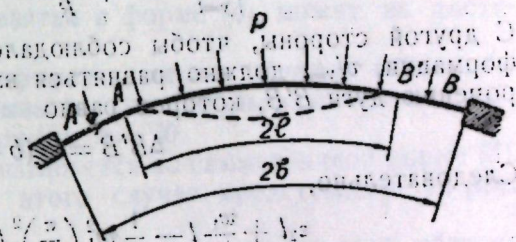


Рис. 1.

Прогиб, представленный функцией (4) и изображенный пунктирной линией на рис. 1, распространяется не на всю ширину панели $2b$, а на часть ширины $2l \leq 2b$. Размер области выпучивания $2l$ является искомой величиной и будет определен из условия минимума полной энергии.

Обычно при решении подобных задач теории пологих оболочек энергетическим методом или методом Бубнова—Галеркина, даже в том случае, когда прогиб аппроксимируется одним-двумя членами некоторого ряда, область выпучивания считается заранее известной и совпадающей с границами оболочки.

В нашем случае это соответствует значению $l=b$. На основании (2) имеем:

$$v = \varepsilon_2 y + \frac{1}{R} \int_0^y w dy - \frac{1}{2} \int_0^y \left(\frac{dw}{dy} \right)^2 dy + c, \quad (5)$$

где $-l \geq y \geq +l$. Из условия $v=0$ при $y=0$ получаем $c=0$.

Подставляя (4) в (5) и производя необходимые вычисления, находим:

$$v|_{y=l} = \varepsilon_2 l + \frac{w_1}{R} l - \frac{1}{4} w_1^2 \left(\frac{\pi}{l} \right)^2 l. \quad (6)$$

С другой стороны, чтобы соблюдалось условие неразрывности деформации, $v|_{y=l}$ должно равняться взятому с обратным знаком укорочению дуги $B'B$, которое равно

$$\Delta B'B = \varepsilon_2 (b-l).$$

Следовательно,

$$\varepsilon_2 l + \frac{w_1}{R} l - \frac{1}{4} w_1^2 \left(\frac{\pi}{l} \right)^2 l = -\varepsilon_2 (b-l),$$

откуда

$$\varepsilon_2 = \left(-\frac{w_1}{R} + \frac{1}{4} w_1^2 \frac{\pi^2}{l^2} \right) \frac{l}{b}. \quad (7)$$

Далее

$$x_2 = -\frac{\pi^2}{l^2} w_1 \cos \frac{\pi y}{l}. \quad (8)$$

Подставляя (7), (4), (8) в (1) и производя необходимые вычисления, получим выражение полной энергии в виде:

$$\mathcal{E} = \frac{K}{2} \left[\frac{w_1^2}{R^2} - \frac{1}{2} w_1^3 \frac{1}{R} \left(\frac{\pi}{l} \right)^2 + \frac{1}{16} w_1^4 \left(\frac{\pi}{l} \right)^4 \right] \frac{2l^2}{b} + \frac{D}{2} \frac{\pi^4}{l^3} w_1^2 - 2p w_1 l. \quad (9)$$

Полагая

$$\frac{\partial \mathcal{E}}{\partial w_1} = 0, \quad \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial l} = 0, \quad (10)$$

получаем соотношения

$$P = 3k \zeta_1 \frac{1}{\alpha} + \alpha^4 \frac{2\pi^4}{k} \zeta_1 - \alpha 9\pi^2 \zeta_1^2 + \alpha^3 \frac{6\pi^4}{k} \zeta_1^3. \quad (11)$$

$$P = 3k \zeta_1 \frac{1}{\alpha} - \alpha^4 \frac{3\pi^4}{k} \zeta_1 - \alpha^3 \frac{3\pi^4}{k} \zeta_1^3. \quad (12)$$

Здесь введены обозначения: $P = \frac{pRb^2}{D}$ — параметр нагрузки; $k = \frac{4b^2}{Rt}$ — параметр кривизны; $\zeta_1 = w_1 : t = 0,5\zeta_0$ — параметр прогиба, где ζ_0 — безразмерный прогиб в вершине; $\alpha = \frac{b}{l}$ — параметр, характеризующий область выпучивания.

Приравнивая правые части выражений (11) и (12), получаем:

$$\alpha^2 \frac{9\pi^4}{k} \zeta_1^2 - 9\pi^2 \zeta_1 + \alpha^3 \frac{5\pi^4}{k} = 0. \quad (13)$$

Соотношения (11), (13) определяют симметричную деформацию панели, соответствующую минимуму полной энергии для возможных перемещений, заданных выражением (4).

Соотношение (11) дает зависимость параметра нагрузки от параметра прогиба и параметра области выпучивания, а соотношение (13) дает зависимость между последними в процессе деформации.

Если с самого начала сузить класс возможных перемещений, положив $l=b$, то, минимизируя энергию только по прогибу, получим одно соотношение, которое следует из (11) при $\alpha=1$:

$$P = 3k \zeta_1 + \frac{2\pi^4}{k} \zeta_1 - 9\pi^2 \zeta_1^2 + \frac{6\pi^4}{k} \zeta_1^3. \quad (14)$$

Так как граничные условия (3) должны удовлетворяться, то мы, очевидно, можем рассматривать лишь значения $\alpha \geq 1$ (15). Условие (15) имеет место при тех значениях параметра кривизны k , для которых уравнение (13) имеет действительные корни $\zeta_{1,1}$ и $\zeta_{1,2}$, если в нем положить $\alpha=1$. Вычисления дают значения $k \geq 14,7$. При $k > 14,7$ область выпучивания, взятая в форме (4), может не достигать границ $y = \pm b$.

Рассмотрим на конкретных примерах, каким образом варьирование области выпучивания сказывается на результатах вычислений.

1. Панель с параметром кривизны $k=20$.

Как известно, такая панель изгибается по симметричной форме [3].

Результаты вычислений для этого случая представлены на рис.

2, 3.

Пунктирная кривая на рис. 2 соответствует переменной области выпучивания и изображает зависимость (11) в интервале значений параметра прогиба в центре $\zeta_0 = 2\zeta_1$ от 0,6 до 3,4. Сплошная кривая соответствует постоянной области выпучивания ($l=b$) и изображает зависимость (14). Штрих-пунктирная кривая соответствует точному решению [3]. Как видно из рассмотрения рис. 2, уже при $k=20$ приближенное решение, полученное в предположении об изменении области выпучивания в процессе деформации, в интервале $0,63 \leq \zeta_0 \leq 3,40$ дает существенную поправку к приближенному решению, в котором область выпучивания считается постоянной ($l=b$).

Таким путем, мы получаем приближенное решение, состоящее из сочетания этих двух решений и изображаемое кривой $OABC$. Кривая на рис. 3, изображающая зависимость (13), дает представление о характере изменения области выпучивания в процессе деформации.

При прогибе $\zeta_0 = 0,63$ область выпучивания охватывает весь интервал $-b \leq y \leq +b$, затем, с возрастанием прогиба от $\zeta_0 = 0,63$ до $\zeta_0 = 1,6$, область выпучивания уменьшается до минимальных размеров ($\beta = \frac{l}{b} = 0,87$), а при дальнейшем возрастании прогиба до $\zeta_0 = 3,4$ область выпучивания также возрастает, достигая краев панели.

2. Панель с параметром кривизны $k=100$.

Такая панель теряет устойчивость по несимметричной форме. Результаты, о которых будет идти речь ниже, получены из рассмотрения симметричной деформации и представляют главным образом методический интерес.

Первое критическое состояние панели (хлопок) согласно соотношению (14) имеет место при значении параметров

$$\zeta_{0,1} = 4,32, \quad P_1 = 296,6.$$

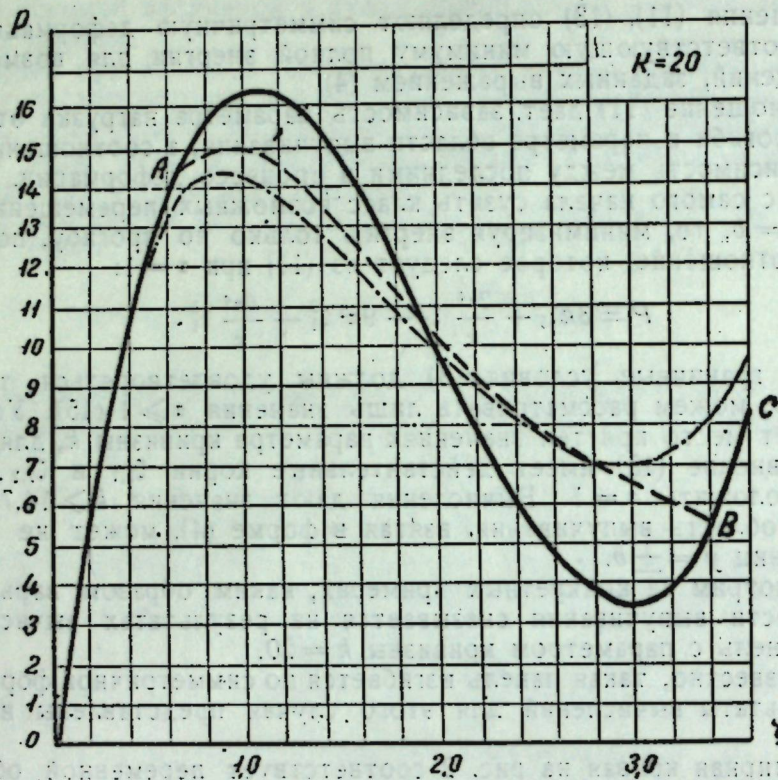


Рис. 2.

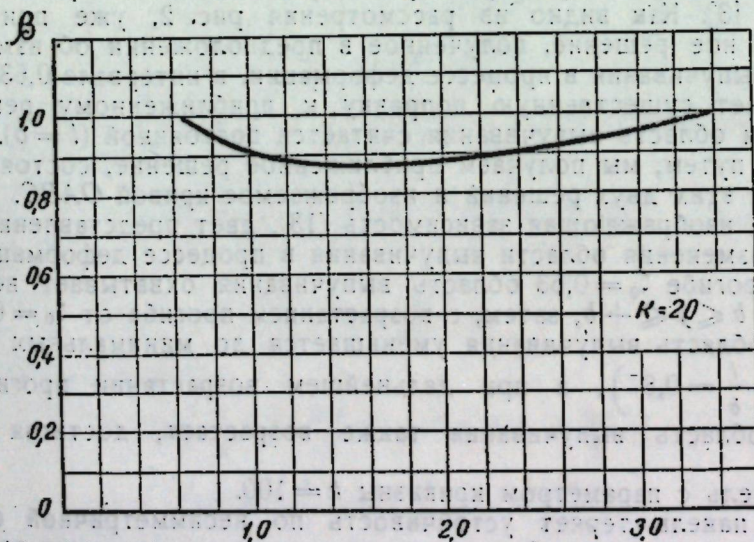


Рис. 3.

Второе критическое состояние (выхлоп) имеет место при

$$\zeta_{0,2} = 15,94, P_2 = -276,87.$$

При учете изменения области выпучивания тем же самым значениям параметра прогиба в центре будут соответствовать совершенно другие значения параметра нагрузки, а именно:

$$\zeta_{0,1} = 4,32, P_1 = 48,34$$

при

$$\zeta_{0,2} = 15,94, P_2 = 4,3.$$

Следовательно, в этом случае полученные решения коренным образом отличаются друг от друга. Что касается параметра β , характеризующего область выпучивания, то последний сначала убывает от 1 до значения 0,47, соответствующего величине $\zeta_0 = 2,0$, а затем возрастает до 1, когда $\zeta_0 = 20,15$.

Поскольку имеется точное решение рассматриваемой задачи, учитывающее также появление и несимметричной деформации [3], целью настоящей заметки было показать на простом примере, каким образом иногда можно улучшить эффективность приближенного решения, если применять ту или иную процедуру не формально, а учитывая физические особенности явления.

Когда при приближенном представлении функции прогиба и других искомым функций берется большое количество членов соответствующего ряда, то, принципиально, нет особой необходимости делать какие-либо дополнительные предположения об области выпучивания.

Однако в таких случаях редко удается довести нелинейную задачу до конца из-за вычислительных трудностей.

Сделаем замечание об истинной и приближенной формах выпучивания. Истинная форма выпучивания пологой панели, как это показывает точное решение и эксперимент, распространяется на всю ширину панели. Хотя приближенная форма выпучивания, взятая в виде $w = w_1 \left(1 + \cos \frac{\pi y}{b}\right)$ также распространяется на всю ширину, но в целом она грубее отражает истинную форму, чем функция $w = w_1 \times \left(1 + \cos \frac{\pi y}{l}\right)$, где l находится из условия минимума полной энергии.

ЛИТЕРАТУРА

1. Муштари Х. М. К теории устойчивости сферической оболочки под действием внешнего давления (в связи со статьей В. И. Феодосьева). ПММ, т. XIX, вып. 2, 1955.
2. Свирский И. В. Видоизменение метода Галеркина для решения нелинейных задач о хлопке искривленной пластины. Инженерный сборник, Изд. АН СССР, т. XXII, 1955.
3. Корнишин М. С., Муштари Х. М. Устойчивость бесконечно длинной пологой цилиндрической панели под действием нормального равномерного давления. Изв. Казанского филиала АН СССР, сер. физ.-матем. и техн. наук, вып. 7, 1955.

Поступила
20.XII 1956 г.

М. С. Корнишин

ИЗГИБ ПОЛОГИХ ЦИЛИНДРИЧЕСКИХ ПАНЕЛЕЙ И ПЛАСТИН С ПОДАТЛИВЫМИ КРАЯМИ

В работе рассматривается изгиб под действием равномерной поперечной нагрузки прямоугольных в плане пологих цилиндрических панелей и пластин, края которых могут раздвигаться в касательной плоскости.

Задача решается путем применения процедуры Бубнова — Галеркина к каждому из двух уравнений теории пологих оболочек.

Полученные решения охватывают предельные случаи свободных и неподвижных границ, а также и промежуточные случаи.

1. Определение конечных прогибов пологой цилиндрической панели под действием равномерной нормальной поперечной нагрузки приводится к решению системы нелинейных дифференциальных уравнений.

$$\Delta^2 \Phi = -Et \left[w_{xx} \left(\frac{1}{R} + w_{yy} \right) - w_{xy}^2 \right], \quad (1.1)$$

$$D\Delta^2 w = \Phi_{yy} w_{xx} + \Phi_{xx} \left(\frac{1}{R} + w_{yy} \right) - 2\Phi_{xy} w_{xy} + p, \quad (1.2)$$

при соответствующих граничных условиях для Φ и w . Здесь Δ^2 — двойной лапласиан; Φ — функция усилий, через которую усилия в срединной поверхности выражаются по формулам:

$$T_1 = \Phi_{yy}, \quad T_2 = \Phi_{xx}, \quad S = -\Phi_{xy}; \quad (1.3)$$

w — прогиб, который считается положительным по направлению внутренней нормали; E — модуль Юнга; t — толщина панели; R — радиус кривизны; $D = Et^3 : 12(1 - \nu^2)$, где ν — коэффициент Пуассона; p — равномерное внешнее нормальное давление.

Длину и ширину панели обозначим соответственно через $2a$ и $2b$; начало координат возьмем в центре панели. Будем решать поставленную задачу, применяя процедуру Бубнова — Галеркина к каждому из уравнений (1.1), (1.2)

Для этого задаемся функцией прогиба

$$w = \sum_{i=1}^n w_i \psi_i, \quad (1.4)$$

где w_i — варьируемые параметры, ψ_i — линейно-независимые функции, удовлетворяющие граничным условиям для w ; и функцией напряжений

$$\Phi = \sum_{i=1}^n f_i \varphi_i + \Psi_1(y) + \Psi_2(x), \quad (1.5)$$

где f_i — варьируемые параметры, φ_i — линейно-независимые функции, удовлетворяющие силовым или геометрическим граничным условиям

некоторой исходной краевой задачи; $\Psi_1(y)$ и $\Psi_2(x)$ — неизвестные функции, подлежащие определению из геометрических граничных условий.

Функцию усилий исходной задачи обозначим через Φ_0 .
Таким образом,

$$\Phi_0 = \sum_{l=1}^n f_l \varphi_l$$

и (1.5) записывается в виде

$$\Phi = \Phi_0 + \Psi_1(y) + \Psi_2(x). \quad (1.6)$$

В дальнейшем мы ограничимся рассмотрением симметричной деформации, а следовательно, малыми значениями параметра кривизны панели $k = 4b^2 : Rt$. Нижняя граница значений параметра кривизны, при которых появляется несимметричная деформация, зависит от граничных условий.

Так, например, в случае неподвижных шарнирно закрепленных краев несимметричная деформация появляется уже при $k > 10,2$ [1]. В случае податливых краев нижняя граница значений k , очевидно, поднимется.

Пользуясь законом Гука, выразим перемещения u и v через функцию усилий Φ и функцию прогиба w .

Мы имеем

$$u_x = \frac{1}{Et} (\Phi_{yy} - \nu \Phi_{xx}) - \frac{1}{2} w_x^2, \quad (1.7)$$

$$v_y = \frac{1}{Et} (\Phi_{xx} - \nu \Phi_{yy}) + \frac{w}{R} - \frac{1}{2} w_y^2.$$

Отсюда

$$u = \int_0^x \left[\frac{1}{Et} (\Phi_{yy} - \nu \Phi_{xx}) - \frac{1}{2} w_x^2 \right] dx + u_1(y),$$

$$v = \int_0^y \left[\frac{1}{Et} (\Phi_{xx} - \nu \Phi_{yy}) + \frac{w}{R} - \frac{1}{2} w_y^2 \right] dy + v_1(x). \quad (1.8)$$

В случае симметричной деформации u и v являются нечетными функциями соответственно от x и y , причем,

$$u(0, y) = 0, \quad v(x, 0) = 0.$$

Следовательно, произвольные интегрирования $u_1(y)$, $v_1(x)$ обращаются в нуль и перемещения u , v однозначно определяются через Φ и w .

Подставляя (1.6) в (1.8) получим:

$$u = \int_0^x \left[\frac{1}{Et} (\Phi_{0yy} - \nu \Phi_{0xx}) - \frac{1}{2} w_x^2 \right] dx + \frac{1}{Et} (\Psi_{1yy} \cdot x - \nu \Psi_{2x}), \quad (1.9)$$

$$v = \int_0^y \left[\frac{1}{Et} (\Phi_{0xx} - \nu \Phi_{0yy}) + \frac{w}{R} - \frac{1}{2} w_y^2 \right] dy + \frac{1}{Et} (\Psi_{2xx} \cdot y - \nu \Psi_{1y}).$$

Обозначим через u_0 , v_0 перемещения, соответствующие функции усилий Φ_0 исходной задачи, т. е.

$$u_0 = \int_0^x \left[\frac{1}{Et} (\Phi_{0yy} - \nu \Phi_{0xx}) - \frac{1}{2} w_x^2 \right] dx, \quad (1.10)$$

$$v_0 = \int_0^y \left[\frac{1}{Et} (\Phi_{0xx} - \nu \Phi_{0yy}) + \frac{w}{R} - \frac{1}{2} w_y^2 \right] dy.$$

Тогда

$$u = u_0 + \frac{1}{Et} (\Psi_{1yy} \cdot x - \nu \Psi_{2x}), \quad (1.11)$$

$$v = v_0 + \frac{1}{Et} (\Psi_{2xx} \cdot y - \nu \Psi_{1y}).$$

Неизвестные функции $\Psi_1(y)$, $\Psi_2(x)$ найдем из граничных условий для u и v соответственно при $x = \pm a$ и $y = \pm b$. В дальнейшем будем иметь в виду, что удовлетворяя граничным условиям при $x = a$, $y = b$, мы автоматически удовлетворяем и условиям при $x = -a$, $y = -b$.

Пусть, например,

$$u(a, y) = \bar{u}(a, y), \quad v(x, b) = \bar{v}(x, b), \quad (1.12)$$

где $\bar{u}(a, y)$, $\bar{v}(x, b)$ — заданные на контуре смещения. Следовательно,

$$\frac{1}{Et} (\Psi_{1yy} \cdot a - \nu \Psi_{2x}^a) = \bar{u}(a, y), \quad (1.13)$$

$$\frac{1}{Et} (\Psi_{2xx} \cdot b - \nu \Psi_{1y}^b) = \bar{v}(x, b),$$

где

$$\tilde{u}(a, y) = \bar{u}(a, y) - u_0(a, y), \quad \tilde{v}(x, b) = \bar{v}(x, b) - v_0(x, b), \quad (1.14)$$

а через Ψ_{2x}^a , Ψ_{1y}^b обозначены значения Ψ_{2x} , Ψ_{1y} соответственно при $x = a$ и $y = b$. Из (1.13) находим

$$\Psi_{1y} \cdot a = Et \int dy \int \tilde{u}(a, y) dy + \nu \Psi_{2x}^a \cdot \frac{y^2}{2} + c_{11}y + c_{12}, \quad (1.15)$$

$$\Psi_{2x} \cdot b = Et \int dx \int \tilde{v}(x, b) dx + \nu \Psi_{1y}^b \cdot \frac{x^2}{2} + c_{21}x + c_{22}.$$

Из условия симметричности деформации следует, что $c_{11} = c_{21} = 0$.
Далее получаем

$$\Psi_{1y}^b = \frac{Et}{a(1-\nu^2)} \left[\nu \int \tilde{v}(x, b) dx \Big|_{x=a} + \int \tilde{u}(a, y) dy \Big|_{y=b} \right], \quad (1.16)$$

$$\Psi_{2x}^a = \frac{Et}{b(1-\nu^2)} \left[\int \tilde{v}(x, b) dx \Big|_{x=a} + \nu \int \tilde{u}(a, y) dy \Big|_{y=b} \right].$$

Для того, чтобы при $\tilde{u}(a, y) \equiv 0$, $\tilde{v}(x, b) \equiv 0$ мы имели решение исходной задачи, должно выполняться условие

$$c_{12} = c_{22} = 0.$$

Тогда окончательно

$$\Psi_1 \cdot a = Et \int dy \int \tilde{u}(a, y) dy + \nu \Psi_{2x}^a \cdot \frac{y^2}{2}, \quad (1.17)$$

$$\Psi_2 \cdot b = Et \int dx \int \tilde{v}(x, b) dx + \nu \Psi_{1y}^b \cdot \frac{x^2}{2}.$$

Итак, при

$$\bar{u} = u_0, \bar{v} = v_0$$

будем иметь решение исходной задачи, при

$$\bar{u} = 0, \bar{v} = 0$$

получим решение для панели с прямолинейными неподвижными границами.

Характер смещения краев панелей или пластин, имеющих ребра, в каждом конкретном случае, очевидно, будет зависеть от жесткости ребер.

Однако, в первом приближении естественно предположить, что это смещение напоминает по форме смещение краев панели или пластины, не имеющих ребер.

Поэтому в следующем параграфе за исходную задачу мы берем задачу об изгибе панели со свободно опертыми краями, когда удовлетворяются граничные условия.

$$\begin{aligned} \Phi_{0yy} = \Phi_{0xy} = 0, \quad w = w_{xx} + \nu w_{yy} = 0 \text{ при } x = \pm a, \\ \Phi_{0xx} = \Phi_{0xy} = 0, \quad w = w_{yy} + \nu w_{xx} = 0 \text{ при } y = \pm b, \end{aligned} \quad (1.18)$$

а функции $\Psi_1(y)$, $\Psi_2(x)$ находим, полагая

$$\bar{u} = \mu_1 \bar{u}_0 \text{ при } x = \pm a, \bar{v} = \mu_2 \bar{v}_0 \text{ при } y = \pm b. \quad (1.19)$$

Тогда значения $\mu_1 = \mu_2 = 1$ будут соответствовать свободно опертым краям; $\mu_1 = \mu_2 = 0$ — прямолинейным неподвижным краям; $0 < \mu_1 < 1$, $0 < \mu_2 < 1$ — различным промежуточным случаям.

2. Рассмотрим панель при следующих граничных условиях.

$$u = \mu_1 u_0, \quad \Phi_{xy} = 0, \quad w = w_{xx} + \nu w_{yy} = 0 \text{ при } x = \pm a, \quad (2.1)$$

$$v = \mu_2 v_0, \quad \Phi_{xy} = 0, \quad w = w_{yy} + \nu w_{xx} = 0 \text{ при } y = \pm b,$$

где

$$0 \leq \mu_1 \leq 1, \quad 0 \leq \mu_2 \leq 1.$$

Граничные условия для w будут удовлетворены, если взять

$$w = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} w_{m,n} \cos \frac{2m-1}{2a} \pi x \cos \frac{2n-1}{2b} \pi y. \quad (2.2)$$

Граничные условия для u , v и Φ_{xy} выполним, взяв функцию усилий Φ в виде:

$$\begin{aligned} \Phi = \Phi_0 + \Psi_1(y) + \Psi_2(x) = \\ = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \Phi_{m,n} \left[1 + (-1)^{m-1} \cos \frac{m\pi x}{a} \right] \left[1 + (-1)^{n-1} \cos \frac{n\pi y}{b} \right] + \\ + \Psi_1(y) + \Psi_2(x), \end{aligned} \quad (2.3)$$

где $\Psi_1(y)$, $\Psi_2(x)$ — функции, определенные согласно (1.10), (1.16), (1.17) Полагая в первом приближении

$$w = w_1 \cos \frac{\pi x}{2a} \cos \frac{\pi y}{2b}, \quad (2.4)$$

$$\Phi = \Phi_1 \left(1 + \cos \frac{\pi x}{a} \right) \left(1 + \cos \frac{\pi y}{b} \right) + \Psi_1(y) + \Psi_2(x) \quad (2.5)$$

и производя вычисления согласно формулам (1.10), (1.16), (1.17), получим:

$$u_0 = \frac{\Phi_1}{Et} \left[-\frac{\pi^2}{b^2} \left(x + \frac{a}{\pi} \sin \frac{\pi x}{a} \right) \cos \frac{\pi y}{b} + \nu \frac{\pi}{a} \sin \frac{\pi x}{a} \left(1 + \cos \frac{\pi y}{b} \right) \right] -$$

$$-\frac{1}{2} \left(\frac{\pi}{2a} \right)^2 w_1^2 \left(\frac{x}{2} - \frac{a}{2\pi} \sin \frac{\pi x}{a} \right) \left(\cos \frac{\pi y}{2b} \right)^2,$$

$$\begin{aligned} v_0 = \frac{\Phi_1}{Et} \left[-\frac{\pi^2}{a^2} \cos \frac{\pi x}{a} \left(y + \frac{b}{\pi} \sin \frac{\pi y}{b} \right) + \nu \frac{\pi}{b} \left(1 + \cos \frac{\pi x}{a} \right) \sin \frac{\pi y}{b} \right] + \\ + \frac{2b w_1}{\pi R} \cos \frac{\pi x}{2a} \sin \frac{\pi y}{2b} - \frac{1}{2} \left(\frac{\pi}{2b} \right)^2 w_1^2 \left(\cos \frac{\pi x}{2a} \right)^2 \left(\frac{y}{2} - \frac{b}{2\pi} \sin \frac{\pi y}{b} \right). \end{aligned} \quad (2.6)$$

$$\Psi_1 = (\mu_1 - 1) \Phi_1 \cos \frac{\pi y}{b} - (\mu_1 - 1) Et \frac{\pi^2}{32a^2} w_1^2 \left(\frac{y^2}{2} - \frac{b^2}{\pi^2} \cos \frac{\pi y}{b} \right) +$$

$$+ (\mu_2 - 1) Et \frac{\nu}{1 - \nu^2} \left(\frac{4 w_1}{\pi^2 R} - \frac{\pi^2}{32b^2} w_1^2 \right) \frac{y^2}{2} - (\mu_1 - 1) Et \frac{\nu^2}{1 - \nu^2} \frac{\pi^2}{32a^2} w_1^2 \frac{y^2}{2},$$

$$\Psi_2 = (\mu_2 - 1) \Phi_1 \cos \frac{\pi x}{a} - (\mu_2 - 1) Et \frac{8a^2 w_1}{\pi^3 R} \cos \frac{\pi x}{2a} -$$

$$- (\mu_2 - 1) Et \frac{\pi^2}{32b^2} w_1^2 \left(\frac{x^2}{2} - \frac{a^2}{\pi^2} \cos \frac{\pi x}{a} \right) +$$

$$+ (\mu_2 - 1) Et \frac{\nu^2}{1 - \nu^2} \left(\frac{4 w_1}{\pi^2 R} - \frac{\pi^2}{32b^2} w_1^2 \right) \frac{x^2}{2} - (\mu_1 - 1) Et \frac{\nu}{1 - \nu^2} \frac{\pi^2}{32a^2} w_1^2 \frac{x^2}{2}. \quad (2.7)$$

$$u|_{x=\pm a} = \pm \mu_1 \left[-\frac{\Phi_1 a}{Et} \left(\frac{\pi}{b} \right)^2 \cos \frac{\pi y}{b} - \frac{\pi^2}{32a} w_1^2 \left(1 + \cos \frac{\pi y}{b} \right) \right],$$

$$\begin{aligned} v|_{y=\pm b} = \pm \mu_2 \left[-\frac{\Phi_1 b}{Et} \left(\frac{\pi}{a} \right)^2 \cos \frac{\pi x}{a} + \frac{2b w_1}{\pi R} \cos \frac{\pi x}{2a} - \right. \\ \left. - \frac{\pi^2}{32b} w_1^2 \left(1 + \cos \frac{\pi x}{a} \right) \right]. \end{aligned} \quad (2.8)$$

Итак, функции усилий Φ , взятой в виде (2.3), где Ψ_1 , Ψ_2 определены согласно (2.7), соответствуют смещения краев (2.8), подобные по форме смещениям краев исходной задачи.

Так как здесь и далее для интегрирования уравнений (1.1), (1.2) будет применена процедура Бубнова—Галеркина, то мы предполагаем, что усилия на контуре панели для каждого деформированного сочтения в точности совпадают с теми, какие получаются из (2.5) в результате приближенного интегрирования уравнения совместности деформаций.

Подставляя (2.4), (2.5) в (1.1), умножая результат подстановки на

$$\delta \Phi = \delta \Phi_1 \left[\left(1 + \cos \frac{\pi x}{a} \right) \left(1 + \cos \frac{\pi y}{b} \right) + (\mu_1 - 1) \cos \frac{\pi y}{b} + (\mu_2 - 1) \cos \frac{\pi x}{a} \right] \quad (2.9)$$

и интегрируя полученное выражение по площади панели, приходим к соотношению:

$$\Phi_1^* = \frac{\Phi_1}{Et^3} = M k \zeta_1 + N \zeta_1^2, \quad (2.10)$$

где

$$M = \frac{(\mu_1 + \mu_2 + \mu_1^2 + \mu_2^2) \lambda^2}{\pi^2 [(1 + \lambda^2)^2 + 2\mu_1^2 + 2\mu_2^2 \lambda^4]} \quad (2.11)$$

$$N = - \frac{0,0625 (\mu_1^2 + \mu_2^2) \lambda^2}{(1 + \lambda^2)^2 + 2\mu_1^2 + 2\mu_2^2 \lambda^4} \quad (2.12)$$

$$k = \frac{4b^2}{Rt}, \quad \zeta_1 = \frac{w_1}{t}, \quad \lambda = \frac{b}{a}$$

Подставляя (2.4), (2.5) в (1.2), умножая результат подстановки на

$$\delta w = \delta w_1 \cos \frac{\pi x}{2a} \cos \frac{\pi y}{2b}$$

и интегрируя полученное выражение по площади панели, при $\nu = 0,3$ будем иметь:

$$p^* = 5,502 (1 + \lambda^2)^2 \zeta_1 - [(\mu_1 - 1)(12,010\lambda^4 + 2,479\lambda^2) + (\mu_2 - 1)(12,010 + 2,479\lambda^2)] \zeta_1^3 + [(0,407\mu_1 + 0,814\mu_2 - 1,221)\lambda^2 + 5,30(\mu_2 - 1)] k \zeta_1^2 - 0,540 (\mu_2 - 1) k^2 \zeta_1 - 120,174 (\mu_1 + \mu_2) \Phi_1^* \lambda^2 \zeta_1 + k \Phi_1^* \lambda^2 (4,392 + 13,159\mu_2), \quad (2.13)$$

где

$$p^* = \frac{16pb^4}{Et^4} \quad (2.14)$$

Соотношения (2.11), (2.13) позволяют исследовать напряженное состояние и зависимость параметра нагрузки p^* от параметра прогиба ζ_1 для панелей с различными λ и k при всевозможных значениях μ_1 и μ_2 , характеризующих величину смещения кромок.

Полагая $k=0$, получим соответствующие зависимости для пластин.

Нами были проделаны вычисления для значений $\lambda=1; 0,5$ и $k=10; 0$ при $\mu_1 = \mu_2 = \mu = 1; 0,9; 0,75; 0,50; 0,25; 0$. Результаты вычислений приведены в таблицах 1, 2. Значения

$$u^* = \frac{ub}{t^2}, \quad v^* = \frac{vb}{t^2} \quad (2.15)$$

вычислены по формулам (2.8) соответственно при $x=a, y=0$ и $x=0, y=b$;

A, B и C — коэффициенты, входящие в выражение

$$p^* = 5,502 (1 + \lambda^2)^2 \zeta_1 + A k^2 \zeta_1 - B k \zeta_1^2 + C \zeta_1^3. \quad (2.16)$$

Таблица 1

μ	Φ_1^*	u^*	v^*	A	B	C
1,00	$0,00228k \zeta_1 - 0,015625 \zeta_1^2$	$-0,02250k \zeta_1 - 0,4629 \zeta_1^2$	$0,13669k \zeta_1 - 0,4629 \zeta_1^2$	0,0400	0,822	3,755
0,90	$0,00224k \zeta_1 - 0,01398 \zeta_1^2$	$-0,01974k \zeta_1 - 0,4303 \zeta_1^2$	$0,12337k \zeta_1 - 0,4303 \zeta_1^2$	0,0904	1,364	5,918
0,75	$0,00213k \zeta_1 - 0,01125 \zeta_1^2$	$-0,01579k \zeta_1 - 0,3790 \zeta_1^2$	$0,10363k \zeta_1 - 0,3790 \zeta_1^2$	0,1654	2,175	9,273

μ	Φ_1^*	u^*	v^*	A	B	C
0,50	$0,00177k \zeta_1 - 0,00625 \zeta_1^2$	$-0,00868k \zeta_1 - 0,2773 \zeta_1^2$	$0,07086k \zeta_1 - 0,2773 \zeta_1^2$	0,2890	3,541	15,240
0,25	$0,00114k \zeta_1 - 0,00368 \zeta_1^2$	$-0,00276k \zeta_1 - 0,1451 \zeta_1^2$	$0,03701k \zeta_1 - 0,1451 \zeta_1^2$	0,4140	4,987	21,955
0,00	$0,000285k \zeta_1$	0	0	0,5414	6,521	28,977

$\lambda=0,5$

Таблица 2

μ	Φ_1^*	u^*	v^*	A	B	C
1,00	$0,00124k \zeta_1 - 0,00848 \zeta_1^2$	$-0,04886k \zeta_1 - 0,2823 \zeta_1^2$	$0,31217k \zeta_1 - 1,1922 \zeta_1^2$	0,00543	0,112	0,509
0,90	$0,00123k \zeta_1 - 0,00771 \zeta_1^2$	$-0,04392k \zeta_1 - 0,2813 \zeta_1^2$	$0,28099k \zeta_1 - 1,0768 \zeta_1^2$	0,0588	0,656	1,805
0,75	$0,00121k \zeta_1 - 0,00637 \zeta_1^2$	$-0,03573k \zeta_1 - 0,2734 \zeta_1^2$	$0,23430k \zeta_1 - 0,90307 \zeta_1^2$	0,1393	1,479	3,787
0,50	$0,00106k \zeta_1 - 0,00373 \zeta_1^2$	$-0,02082k \zeta_1 - 0,2349 \zeta_1^2$	$0,15653k \zeta_1 - 0,6563 \zeta_1^2$	0,2729	2,845	7,112
0,25	$0,00071k \zeta_1 - 0,00118 \zeta_1^2$	$-0,00691k \zeta_1 - 0,1431 \zeta_1^2$	$0,07876k \zeta_1 - 0,3069 \zeta_1^2$	0,4063	4,217	10,518
0,00	$0,00018k \zeta_1$	0	0	0,5400	5,605	14,00

Пользуясь выражением (2.16) и таблицами 1, 2 для различных $0 \leq k \leq 10$ и указанных выше значений μ_1, μ_2 можно построить кривые зависимости параметра нагрузки p^* от параметра прогиба ζ_1 .

В качестве примера рассмотрим панель с отношением сторон $\lambda=0,5$ и $k=10$.

а) Края панели неподвижны: $\mu_1 = \mu_2 = 0$. В этом случае получаем

$$p^* = 62,60 \zeta_1 - 112,10 \zeta_1^2 + 14,00 \zeta_1^3. \quad (2.17)$$

Согласно (2.17) находим нагрузки и прогибы хлопка и выхлопа панели. Хлопок панели имеет место при

$$\zeta_{1,1} = 0,80 \text{ и } p_1^* = 21,40;$$

выхлоп при

$$\zeta_{1,2} = 1,87 \text{ и } p_2^* = 12,60.$$

Следовательно, здесь p_1^* почти в два раза превосходит p_2^* , и явление хлопка ярко выражено.

б) Края панели податливы, причем $\mu_1 = \mu_2 = 0,5$. В этом случае

$$p_1^* = 35,90 \zeta_1 - 28,45 \zeta_1^2 + 7,11 \zeta_1^3. \quad (2.18)$$

Согласно (2.18) хлопок панели имеет место при $\zeta_{1,1} = 1,02$ и $p_1^* = 14,56$, а выхлоп при $\zeta_{1,2} = 1,64$ и $p_2^* = 13,70$. Таким образом, в этом случае величина параметра нагрузки хлопка p_1^* снизилась приблизительно в 1,5 раза и разница между p_1^* и p_2^* стала незначительной. Приближенно можно считать, что при $\mu > 0,5$ явление хлопка не имеет места.

в) Смещения краев панели не стеснены: $\mu_1 = \mu_2 = 1$.

$$p^* = 9,14 \zeta_1 - 1,12 \zeta_1^2 + 0,51 \zeta_1^3. \quad (2.19)$$

Явление хлопка при этом отсутствует.

Отметим, что для предельных краевых условий, а именно в случае неподвижных и свободно опертых кромок, наше решение подтверждается известными решениями других авторов, полученными ранее иными методами.

Так, например, для квадратной пластинки с неподвижными кромками ($\mu_1 = \mu_2 = 0$) при $\nu = 0,3$ получаем

$$p^* = 22,01 \zeta_1 + 28,98 \zeta_1^2, \quad (2.20)$$

что совпадает с решением Прескотта [2].

В случае свободно опертых кромок ($\mu_1 = \mu_2 = 1$) имеем

$$p^* = 22,01 \zeta_1 + 3,76 \zeta_1^3, \quad (2.21)$$

а из решения Г. Г. Ростовцева [3] в первом приближении получаем

$$p^* = 22,01 \zeta_1 + 3,89 \zeta_1^3. \quad (2.22)$$

Заметим, что М. А. Колтунов в работе [4], по-видимому, допустил погрешность в вычислениях и для тех же граничных условий вместо (2.21) получил

$$p^* = 22,01 \zeta_1 + 7,48 \zeta_1^3. \quad (2.23)$$

Аналогичная погрешность имеется и в формуле (4.11) упомянутой работы. Используя функцию усилий вида (2.5), мы получили коэффициент при ζ_1^2 равный 0,617, вместо 1,2284.

Та же погрешность, что и в работе [4], допущена Е. Ф. Бурмистровым в работе [5].

Если вместо (2.5) для Φ взять выражение

$$\Phi = \Phi_1 \left(\cos \frac{\lambda x}{a} + \beta \operatorname{ch} \frac{\lambda x}{a} \right) \left(\cos \frac{\lambda y}{a} + \beta \operatorname{ch} \frac{\lambda y}{a} \right), \quad (2.24)$$

которое при $\lambda = 2,365$ и $\beta = 0,13286$ в каждой точке контура удовлетворяет условиям свободного опирания, то вместо (2.21) получим

$$p^* = 22,01 \zeta_1 + 3,82 \zeta_1^3, \quad (2.22)$$

что также подтверждает наши предыдущие вычисления.

3. Можно построить функцию усилий, удовлетворяющую и другим граничным условиям для перемещений.

Пусть, например, края панели смещаются, оставаясь прямолинейными. Для пластины такой случай можно исследовать, исходя из решения Прескотта [2].

Итак, потребуем, чтобы

$$u(a, y) = \bar{u}, \quad v(x, b) = \bar{v}, \quad (3.1)$$

где \bar{u} и \bar{v} в отличие от (1.12) некоторые заданные постоянные смещения. Согласно (1.16), (1.17) получаем

$$\begin{aligned} \frac{V_1}{Et} = & -\frac{\Phi_1}{Et} \cos \frac{\pi y}{b} + \frac{\pi^2}{32a^2} \omega_1^2 \left(\frac{y^2}{2} - \frac{b^2}{\pi^2} \cos \frac{\pi y}{b} \right) - \\ & - \frac{\nu}{1-\nu^2} \left(\frac{4}{\pi^2} \frac{\omega_1}{R} - \frac{\pi^2}{32b^2} \omega_1^2 \right) \frac{y^2}{2} + \frac{\nu^2}{1-\nu^2} \frac{\pi^2}{32a^2} \omega_1^2 \frac{y^2}{2} + \\ & + \frac{\nu}{ab(1-\nu^2)} (\bar{v}a + \nu \bar{u}b) \frac{y^2}{2} + \frac{\bar{u}}{a} \frac{y^2}{2}, \end{aligned} \quad (3.2)$$

$$\begin{aligned} \frac{V_2}{Et} = & -\frac{\Phi_1}{Et} \cos \frac{\pi x}{a} + \frac{8a^2}{\pi^3} \frac{\omega_1}{R} \cos \frac{\pi x}{2a} + \frac{\pi^2}{32b^2} \omega_1^2 \left(\frac{x^2}{2} - \frac{a^2}{\pi^2} \cos \frac{\pi x}{a} \right) - \\ & - \frac{\nu^2}{1-\nu^2} \left(\frac{4}{\pi^2} \frac{\omega_1}{R} - \frac{\pi^2}{32b^2} \omega_1^2 \right) \frac{x^2}{2} + \frac{\nu}{1-\nu^2} \frac{\pi^2}{32a^2} \omega_1^2 \frac{x^2}{2} + \\ & + \frac{\nu}{ab(1-\nu^2)} (\nu \bar{v}a + \bar{u}b) \frac{x^2}{2} + \frac{\bar{v}}{b} \frac{x^2}{2}. \end{aligned}$$

При этом

$$\delta\Phi = 2\Phi_1 \left[\left(1 + \cos \frac{\pi x}{a} \right) \left(1 + \cos \frac{\pi y}{b} \right) - \cos \frac{\pi x}{a} - \cos \frac{\pi y}{b} \right]. \quad (3.3)$$

Применяя далее процедуру Бубнова—Галеркина к уравнениям (1.1), (1.2), получим:

$$\Phi_1^* = \frac{\lambda^2}{9\pi^4 (1 + \lambda^2)^2} k \zeta_1, \quad (3.4)$$

$$\begin{aligned} p^* = & 5,502 (1 + \lambda^2)^2 \zeta_1 + [12,010 (1 + \lambda^4) + 4,958 \lambda^2] \zeta_1^2 - (1,221 \lambda^2 + 5,30) k \zeta_1^2 + \\ & + 0,540 k^2 \zeta_1 + 4,392 k \lambda^2 \Phi_1^* + \frac{\pi^4}{4} \left\{ \frac{\nu}{1-\nu^2} [\bar{v}^* (\nu + \lambda^2) + \bar{u}^* \lambda (1 + \nu \lambda^2)] + \right. \\ & \left. + \lambda^2 \bar{u}^* + \bar{v}^* \right\} \zeta_1 - 4k \left[\frac{\nu}{1-\nu^2} \left((\nu \bar{v}^* + \lambda \bar{u}^*) + \bar{v}^* \right) \right], \end{aligned} \quad (3.5)$$

где

$$\bar{u}^* = \frac{\bar{u}b}{l^2}, \quad \bar{v}^* = \frac{\bar{v}b}{l^2}.$$

При $\bar{u}^* = 0$, $\bar{v}^* = 0$ будем иметь случай неподвижных границ и уравнения (3.4), (3.5) совпадут с уравнениями (2.10), (2.13), если в последних положить $\mu_1 = \mu_2 = 0$.

Исходя из соотношений (3.4), (3.5), нетрудно получить картину напряженного состояния панели, а также зависимость между нагрузкой и прогибом для различных значений \bar{u}^* и \bar{v}^* . Так, например, в случае квадратной пластинки ($\lambda = 1$, $k = 0$) при

$$\bar{u}^* = \bar{v}^* = \alpha$$

будем иметь

$$p^* = 22,01 \zeta_1 + 28,98 \zeta_1^2 + \frac{1}{1-\nu} \frac{\pi^4}{2} \alpha \zeta_1. \quad (3.6)$$

Тот же результат получается из решения Прескотта.

Если в выражении (3.6) положить

$$\alpha = -\frac{\pi^2}{32} \zeta_1^2,$$

то получим решение Вольмира [6]:

$$p^* = 22,01 \zeta_1 + 7,52 \zeta_1^3. \quad (3.7)$$

Аналогично предыдущему можно построить функцию усилий для таких перемещений контура, при которых углы панели или пластины остаются неподвижными. Для этого достаточно положить

$$u(a, y) = \bar{u} \cos \frac{\pi y}{2b}, \quad v(x, b) = \bar{v} \cos \frac{\pi x}{2a}, \quad (3.8)$$

где \bar{u} и \bar{v} — постоянные величины.

ЛИТЕРАТУРА

1. М. С. Корнишин. Влияние несимметричной неправильности на деформацию пологой панели при поперечной нагрузке. Изв. Казанск. филиала АН СССР, сер. физ.-мат. и техн. наук. № 10, 1956.
2. П. Ф. Папкович. Строительная механика корабля, ч. II, Судпромиздат, 1941.
3. Г. Г. Ростовцев. Продольно-поперечный изгиб гибкой прямоугольной пластины, соединенной на контуре с ребрами. Инж. сборник, т. XIII, 1950.
4. М. А. Колтунов. Изгиб прямоугольных пластин с учетом больших прогибов. Инж. сборник, т. XIII, 1952.
5. Е. Ф. Бурмистров. Расчет пологих ортотропных оболочек с учетом конечных деформаций. Инж. сборник, т. XXII, 1955.
6. А. С. Вольмир. Устойчивость и большие деформации цилиндрических оболочек, Труды ВВИА, вып. 389, 1950.

Поступила 20.XII. 1956 г.

М. С. Корнишин

О ВЫБОРЕ ВЫРАЖЕНИЙ ДЛЯ КАСАТЕЛЬНЫХ СОСТАВЛЯЮЩИХ ПЕРЕМЕЩЕНИЯ ПРИ РЕШЕНИИ ЗАДАЧ ТЕОРИИ ОБОЛОЧЕК ВАРИАЦИОННЫМИ МЕТОДАМИ

При решении задач теории пластин и оболочек в компонентах перемещения u, v, w вариационными методами выбор приближенных выражений для перемещений существенно влияет на конечный результат и объем вычислений, необходимых для его получения.

Из указанных выше трех составляющих перемещения легче всего подобрать приближенную функцию для прогиба срединной поверхности оболочки w , вследствие его физической наглядности и доступности экспериментальному наблюдению. Что касается компонент u и v , то в некоторых случаях выбор подходящих выражений для них является затруднительным, а использование обычных тригонометрических рядов вследствие медленной сходимости процесса приводит к громоздким вычислениям.

В настоящей статье предлагается способ целесообразного выбора выражений для касательных составляющих перемещения u и v в предположении, что взятая для прогиба функция w достаточно хорошо согласуется с истиной.

Эффективность способа иллюстрируется на решении задач об устойчивости и изгибе прямоугольной в плане пологой цилиндрической панели в линейной и нелинейной постановке.

1. Основные уравнения и зависимости. Нелинейные уравнения равновесия пологой цилиндрической панели в перемещениях при действии на нее поперечной нагрузки интенсивности p имеют вид:

$$u_{xx} + v_1 u_{yy} + v_2 v_{xy} = vkw_x - w_x w_{xx} - v_1 w_x w_{yy} - v_2 w_y w_{xy}, \quad (1.1)$$

$$v_{yy} + v_1 v_{xx} + v_2 u_{xy} = kw_y - w_y w_{yy} - v_1 w_y w_{xx} - v_2 w_x w_{xy}, \quad (1.2)$$

$$D\Delta\Delta w = K \left[u_x + \frac{1}{2} w_x^2 + v(v_y - wk + \frac{1}{2} w_y^2) \right] w_{xx} + K \left[v \left(u_x + \frac{1}{2} w_x^2 \right) + v_y - wk + \frac{1}{2} w_y^2 \right] (k + w_{yy}) + 2\mu (u_y + v_x + w_x w_y) w_{xy} + p. \quad (1.3)$$

Здесь введены обозначения: u, v, w — составляющие перемещения точки срединной поверхности соответственно по направлениям образующей, касательной к дуге и внутренней нормали; $k = 1/R$, где R — радиус кривизны панели; $D = Et^3/12(1-\nu^2)$, E — модуль упругости, ν — коэффициент поперечной деформации; t — толщина панели;

$$K = Et/(1-\nu^2), \quad \mu = Et/2(1+\nu); \quad v_1 = (1-\nu)/2, \quad v_2 = (1+\nu)/2.$$

Индексы x и y снизу означают производные по соответствующей координате. Если ограничиться решением задачи в линейной постановке, то в уравнениях (1.1) — (1.3) следует опустить квадратичные члены. Естественно, наиболее целесообразным путем решения задачи в перемещениях при заданной функции прогиба w является путь, когда функции u и v , удовлетворяющие граничным условиям, найдутся из решения системы уравнений (1.1), (1.2), как это рекомен-

дуются в работе [1], после чего для решения 3-го уравнения равновесия применяется та или иная приближенная процедура.

Однако при таком способе решения иногда бывает чрезвычайно трудно удовлетворить точно граничным условиям для касательных перемещений и тогда приходится наряду с w задаваться также выражениями для u и v , с тем, чтобы затем применить тот или иной вариационный метод решения задачи.

В этом случае выражения для u и v целесообразно задавать, принимая во внимание известные соотношения для компонентов деформаций ϵ_1 и ϵ_2 :

$$\epsilon_1 = u_x + \frac{1}{2} w_x^2 \quad (1.4)$$

$$\epsilon_2 = v_y - wk + \frac{1}{2} w_y^2 \quad (1.5)$$

Исходя из (1.4) и (1.5), имеем:

$$u = \int \epsilon_1 dx - \frac{1}{2} \int w_x^2 dx + f(y), \quad (1.6)$$

$$v = \int \epsilon_2 dy + k \int w dy - \frac{1}{2} \int w_y^2 dy + \varphi(x). \quad (1.7)$$

Здесь ϵ_1 и ϵ_2 — неизвестные выражения деформаций, $f(y)$ и $\varphi(x)$ — произвольные функции, непрерывные и ограниченные вместе со своими производными соответственно в интервале

$$-a \leq x \leq a, \quad -b \leq y \leq b.$$

Положим далее

$$\int \epsilon_1 dx = \sum f_i u_i + u^*(x, y), \quad (1.8)$$

$$\int \epsilon_2 dy = \sum \varphi_k v_k + v^*(x, y), \quad (1.9)$$

где f_i, φ_k — варьируемые параметры;

u_i, v_k — линейно независимые функции, удовлетворяющие соответственно граничным условиям для u и v .

Функции $u^*(x, y)$ и $v^*(x, y)$, а также $f(y)$ и $\varphi(x)$ следует подобрать так, чтобы выражения

$$u = \sum f_i u_i - \frac{1}{2} \int w_x^2 dx + u^*(x, y) + f(y) \quad (1.10)$$

$$v = \sum \varphi_k v_k + k \int w dy - \frac{1}{2} \int w_y^2 dy + v^*(x, y) + \varphi(x) \quad (1.11)$$

удовлетворяли граничным условиям для u и v .

Построенные таким образом выражения для u и v уже содержат в себе явно те части, которые обусловлены перемещением w и поворотами w_x, w_y . Исходя из этого естественно ожидать, что в данном случае процесс определения u и v через w будет сходиться быстрее, чем если бы мы в выражениях (1.10), (1.11) сохранили только ряды, стоящие под знаком суммы.

Отметим далее, что в выражениях для u и v можно и не вводить прогиб w явно. Существенно то, чтобы в u и v содержались функции пусть и с неопределенными коэффициентами, но совпадающие по виду с функциями, стоящими вне сумм в (1.10), (1.11).

2. Устойчивость цилиндрической панели с шарнирно закрепленными краями (по линейной теории). Уравнения нейтрального равновесия запишутся в виде:

$$u_{xx} + v_1 u_{yy} + v_2 u_{xy} = vk w_x, \quad (2.1)$$

$$v_{yy} + v_1 v_{xx} + v_2 v_{xy} = kw_y, \quad (2.2)$$

$$D \Delta \Delta w = K(v u_x + v_y - kw)k - pR(w_{yy} + v w_{xx}). \quad (2.3)$$

Граничные условия имеют вид (если начало координат помещаем в центре панели):

$$u = v = w = 0, \quad w_{xx} + v w_{yy} = 0 \quad \text{при } x = \pm a, \\ u = v = w = 0, \quad w_{yy} + v w_{xx} = 0 \quad \text{при } y = \pm b. \quad (2.4)$$

Здесь $2a$ — длина панели, $2b$ — ширина панели.

Если задаться перемещениями в виде:

$$u = \sum u_{mn} \sin 2mx_1 \sin 2ny_1, \quad (2.5)$$

$$v = \sum v_{mn} \cos(2m-1)x_1 \cos 2ny_1, \quad (2.6)$$

$$w = \sum w_{mn} \cos(2m-1)x_1 \sin 2ny_1, \quad m, n = 1, 2, 3 \dots \quad (2.7)$$

где $x_1 = \pi x : 2a$, $y_1 = \pi y : 2b$, то граничные условия (2.4) удовлетворяются. Выражения (2.5) — (2.7) соответствуют потере устойчивости по антисимметричной форме.

В дальнейшем ограничимся рассмотрением панели с отношением сторон $2b : 2a = \lambda = 0,5$, для которой форма прогиба w достаточно хорошо аппроксимируется первым членом ряда (2.7), т. е. положим

$$w = w_1 \cos x_1 \sin 2y_1. \quad (2.8)$$

Будем решать задачу, применяя к каждому из уравнений системы (1.10) — (1.11) процедуру Бубнова—Галеркина, что в линейной постановке для рассматриваемых граничных условий равносильно применению энергетического метода [2].

В целях выяснения быстроты сходимости процесса вычисления проводились последовательно с нарастающим числом членов в рядах (2.5), (2.6). При этом оказалось, что наиболее существенно сказываются на результате последующие приближения для функции v . Приводим некоторые результаты вычислений. Если в выражениях (2.4), (2.5) для u и v сохранить по одному члену ряда, то параметр критической нагрузки P оказывается равным

$$P = 10,94 + 0,0251 k_*^2, \quad (2.9)$$

где $P = pRb^2 : D$, $k_* = 4b^2 : Rt$ — параметр кривизны панели. Полагая, в частности, $k_* = 100$, будем иметь $P = 261,9$. Беря в выражении для u три члена ряда, для v пять членов и производя необходимые вычисления, которые на этот раз являются уже довольно громоздкими, получаем

$$P = 10,94 + 0,0043 k_*^2. \quad (2.10)$$

Для $k_* = 100$ имеем $P = 53,9$, т. е. значение критической нагрузки уменьшилось примерно в 5 раз. Дальнейшее уточнение выражений для u и v не дает существенной поправки к полученному результату. Тот же результат можно получить значительно быстрее, если в соответствии с (1.6), (1.7) положить:

$$u = u_1 \sin 2x_1 \sin 2y_1 \quad (2.11)$$

$$v = v_1 \cos x_1 \cos y_1 - \frac{w}{R} \frac{b}{\pi} \cdot \cos x_1 (1 + \cos 2y_1), \quad (2.12)$$

где u_1, v_1 — варьируемые параметры. Применяя снова процедуру Бубнова—Галеркина с использованием функций (2.8), (2.11), (2.12), получаем

$$P = 10,94 + 0,041 k_*^2 \quad (2.13)$$

При $k_* = 100$ имеем $P = 51,45$.

Таким образом, в этом случае благодаря наличию в выражении (2.12) второго слагаемого, содержащего w , уже первое приближение дает лучший результат, чем предыдущее решение, в котором для u было взято три, а для v пять членов ряда. Дальнейшие уточнения выражений (2.11), (2.12) для u и v не вносят в результат существенной поправки. Попутно заметим, что результат (2.13) может быть получен, если для v вместо (2.12) взять выражение

$$v = v_1 \cos x_1 (1 + \cos 2y_1). \quad (2.14)$$

Причина этого заключается в том, что в (2.12) второе слагаемое является главным, а (2.14) совпадает по виду с этой главной частью.

3. *Большие прогибы пологой цилиндрической панели с податливыми краями под действием равномерной поперечной нагрузки.* Пусть условия на контуре панели имеют вид:

$$\begin{aligned} v = w = 0, \quad \varepsilon_2 = 0, \quad w_{xx} + v w_{yy} = 0 \quad \text{при } x = \pm a, \\ u = w = 0, \quad \varepsilon_1 = 0, \quad w_{yy} + v w_{xx} = 0 \quad \text{при } y = \pm b. \end{aligned} \quad (3.1)$$

Эти условия удовлетворятся, если задаться перемещениями в виде:

$$u = \sum u_{mn} \sin(2m-1)x_1 \cos(2n-1)y_1, \quad (3.2)$$

$$v = \sum v_{mn} \cos(2m-1)x_1 \sin(2n-1)y_1, \quad (3.3)$$

$$w = \sum w_{mn} \cos(2m-1)x_1 \cos(2n-1)y_1 \quad (3.4)$$

$$m, n = 1, 2, 3, \dots$$

Мы здесь ограничиваемся рассмотрением симметричной деформации, так как считаем панель весьма полой. Далее предполагаем, что прогиб такой панели достаточно хорошо аппроксимируется первым членом ряда (3.4). Последующий счет проводим для панели с отношением сторон $\lambda = 2b : 2a = 0,5$.

Для решения задачи применим энергетический метод, варьируя выражение полной энергии \mathcal{E} по параметрам u_1, v_1, w_1 . Мы имеем:

$$\begin{aligned} \mathcal{E} = \frac{K}{2} \iint \left[(\varepsilon_1 + \varepsilon_2)^2 - 2(1-\nu) \left(\varepsilon_1 \varepsilon_2 - \frac{\omega^2}{4} \right) \right] dx dy + \\ + \frac{D}{2} \iint \left[(\kappa_1 + \kappa_2)^2 - 2(1-\nu) (\kappa_1 \kappa_2 - \tau^2) \right] dx dy - \iint p w dx dy, \end{aligned} \quad (3.5)$$

где

$$\varepsilon_1 = u_x + \frac{1}{2} w_{xx}^2, \quad \varepsilon_2 = v_y - \frac{w}{R} + \frac{1}{2} w_{yy}^2, \quad \omega = u_y + v_x + w_x w_y$$

— компоненты деформации срединной поверхности;

$$\kappa_1 = w_{xx}, \quad \kappa_2 = w_{yy}, \quad \tau = w_{xy}$$

— изменения кривизны и кручения. Сохраняя в выражениях для u и v по три члена ряда и производя необходимые вычисления, получим:

$$\frac{16}{\pi^2} P = \left(0,1093 k_* + \frac{38,05}{k_*} \right) \zeta_1 - 1,746 \zeta_1^2 + \frac{c_3}{k_*} \zeta_1^3, \quad (3.6)$$

где $\zeta_1 = w_1 : t$ — относительный прогиб. При этом $c_3 = 23,61$.

Беря для u и v по 5 членов ряда, получим соотношение, в котором коэффициенты при ζ_1 и ζ_1^2 будут те же, что и в (3.6), а вместо c_3 получим $c_3 = 13,50$.

Если ту же задачу решать смешанным методом и проинтегрировать условие совместности деформаций точно, как это сделано в работе [3], то получим вместо c_3 и c_5 значение $c_7 = 6,82$. Коэффициенты при ζ_1 и ζ_1^2 будут те же.

Как видно из сравнения значений для c_3, c_5, c_7 , с уточнением выражений для u и v процесс сходится довольно медленно и для удовлетворительного приближения к точному значению c_7 для u и v потребуется взять значительно более пяти членов.

Если u и v взять согласно (1.6), (1.7) в виде

$$u = \sum u_{mn} \sin(2m-1)x_1 \cos(2n-1)y_1 - \frac{\pi^2}{16a^2} w_1^2 \left(x - \frac{a}{\pi} \sin 2x_1 \right) \cos^2 y_1, \quad (3.9)$$

$$v = \sum v_{mn} \cos(2m-1)x_1 \sin(2n-1)y_1 + \frac{w_1}{R} \frac{2b}{\pi} \cos x_1 \sin y_1 - \frac{\pi^2}{16b^2} w_1^2 \cos^2 x_1 \left(y - \frac{b}{\pi} \sin 2y_1 \right) \quad (3.10)$$

то уже в первом приближении получаем $c_1 = 8,19$.

Сохраняя в (3.9), (3.10) по три члена ряда, получаем $c_3 = 7,10$, которое всего лишь на 5% отличается от точного значения c_3 . Рассмотренные примеры подтверждают эффективность предложенного в § 1 способа выбора выражений для касательных перемещений u и v как в линейной, так и в нелинейной задачах.

ЛИТЕРАТУРА

1. Х. М. Муштар и. Некоторые обобщения теории тонких оболочек с приложениями к задаче устойчивости упругого равновесия. Известия физ.-мат. общ. КГУ, 1938.
2. М. С. Корнишин. Влияние несимметричной неперпендикулярности на деформацию полой панели при поперечной нагрузке. Известия Казанского филиала АН СССР, серия физ.-мат. и техн. наук, вып. 10, 1956.
3. Х. М. Муштар, И. В. Свирский. Определение больших прогибов цилиндрической панели, опертой на гибкие нерастяжимые ребра под действием внешнего нормального давления. ПММ, т. XVII, вып. 6, 1953.

Поступила 1.X 1957 г.

А. В. Саченков

ОБ УСТОЙЧИВОСТИ КОНИЧЕСКИХ ОБОЛОЧЕК
 КРУГОВОГО СЕЧЕНИЯ
 ПОД ДЕЙСТВИЕМ РАВНОМЕРНОГО ВНЕШНЕГО ДАВЛЕНИЯ

В линейной постановке рассматривается упругая устойчивость свободно опертой по краям конической оболочки постоянной толщины под действием внешнего давления. Исходными дифференциальными уравнениями являются уравнения неполигих оболочек, выведенные в монографии [1].

Путем некоторых преобразований система уравнений сводится к двум уравнениям четвертого порядка относительно функции напряжения f и функции прогибов w . Для решения этой системы применяется вариационный метод Бубнова—Галеркина. В § 2 подробно разбирается случай замкнутой в вершине конической оболочки. Полностью также выясняется неудовлетворительность предложенных в работах [2], [3], [4] решений для замкнутых и усеченных конических оболочек.

Разбирается также случай усеченной конической оболочки под действием внешнего давления. Выводится простая расчетная формула, из которой, как частные случаи, вытекают формула для оболочки, замкнутой в вершине, и формула Мизеса для цилиндрической оболочки. Указывается правило наиболее рациональной расстановки упругих шпангоутов из условия равноустойчивости отсеков, составляющих оболочку.

В § 3 рассматривается устойчивость оболочки, подкрепленной сеткой стрингеров и шпангоутов. Для решения задачи такая оболочка заменяется условной, конструктивно анизотропной, с некоторыми приведенными и равномерно распределенными по поверхности жесткостями. Критически разбираются решения аналогичных задач, предложенных в статьях [2], [21].

В § 4 с помощью аппарата интегральных уравнений дается оценка погрешности приближенного решения для усеченных оболочек средней длины. Метод приведения дифференциальных уравнений к интегральным уравнениям Фредгольма основан на методе Коши интегрирования дифференциальных уравнений. Высказываются соображения относительно природы поправочных коэффициентов к формулам, полученным по линейной теории для усеченных и замкнутых в вершине оболочек.

Основные обозначения: G_1, G_2, H_1, H_2 — изгибающие и скручивающие моменты и T_1, T_2, S_1, S_2 — усилия, возникающие в оболочке в момент потери устойчивости; $\epsilon_1, \epsilon_2, \omega, \chi_1, \chi_2, \tau$ — деформации средней поверхности; f — функция напряжений, w — функция прогиба; E — модуль упругости обшивки; T_{10}, T_{20} — усилия до потери устойчивости; 2γ — полный угол при вершине конуса; r — расстояние от вершины конуса до точки на срединной поверхности оболочки; r_0 — расстояние до точки малого торцевого сечения, r_1 — до точки большего основания; n — число волн, образующихся по окружности при потере устойчивости; $2h$ — толщина оболочки; φ — угол между некоторой аксиальной плоскостью и плоскостью отсчета; p_0 — внешнее давление, σ — коэффициент поперечного расширения материала оболочки; F_1, f_1, C_1 — поперечное сечение стрингера и его жесткости на сдвиг и кручение; EI_1 — увеличение жесткости оболочки на изгиб, происходящее от

введения одного стрингера; l_1 — среднее расстояние между соседними стрингерами,

$$K = \frac{2Eh}{(1-\sigma^2)}, \quad D = \frac{2}{3} \cdot \frac{Eh^3}{(1-\sigma^2)},$$

$$K_1 = K + \frac{EF_1}{l_1}, \quad D_1 = D + \frac{El_1}{l_1},$$

F_2, \dots, D_2 — аналогичные величины для шпангоутов.

$$\sigma_2 = \frac{\sigma K}{K_2}, \quad \sigma_1 = \frac{\sigma K}{K_1},$$

$$K_{1,2} = \frac{K(1-\sigma)}{2} + \frac{f_1}{l_1}, \quad K_{2,1} = \frac{K(1-\sigma)}{2} + \frac{f_2}{l_2},$$

$$\sigma'_2 = \frac{D\sigma}{D_2}, \quad \sigma'_1 = \frac{D\sigma}{D_1}, \quad \delta_1 = \frac{4D_3}{D_1} + 2\sigma'_1, \quad \delta_2 = \frac{D_2}{D_1},$$

$$2D_3 = D(1-\sigma) + \frac{c_1}{l_1}, \quad 2D'_3 = D(1-\sigma) + \frac{c_2}{l_2},$$

$$\lambda_1 = K_2 \frac{(1-\sigma_1\sigma_2)}{K_{1,2}} - \sigma_2\lambda_2 - \sigma_1, \quad \lambda_2 = \frac{K_2}{K_1}.$$

Кроме того будем пользоваться обозначениями

$$\ln \frac{r}{r_1} = z, \quad \varphi_1 = \varphi \sin \gamma, \quad n_1 = \frac{h}{\sin \gamma}, \quad \ln — \text{логарифм натуральный.}$$

§ 1. Дифференциальные уравнения равновесия и их решение. Рассмотрим устойчивость упругого равновесия длинной конической оболочки под действием равномерно распределенного по боковой поверхности внешнего нормального давления p_0 . Из уравнений нейтрального равновесия работы [1] в нашем случае находим:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial r}(T_1 r) - \frac{\partial}{\partial \varphi_1}(S_2) - T_2 &= 0, \\ \frac{\partial}{\partial r}(S_1 r) + \frac{\partial}{\partial \varphi_1}(T_2) - S_2 - \frac{\text{ctg } \gamma}{r} \cdot \frac{\partial}{\partial \varphi_1}(G_2) &= 0, \\ \frac{\partial^2 G_1}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial^2(H_2 - H_1)}{\partial r \partial \varphi_1} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 G_2}{\partial \varphi_1^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial \varphi_1}(H_2 - H_1) + \\ &+ \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r}(2G_1 - G_2) + \frac{\text{ctg } \gamma}{r} T_2 + \left[T_{10} \frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \right. \\ &\left. + T_{20} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \varphi_1^2} + \frac{\text{ctg } \gamma}{r^2} \frac{\partial v}{\partial \varphi_1} \right) \right] + p_0 \varepsilon_2 = 0, \end{aligned} \quad (1.1)$$

где усилия и моменты выражаются по формулам первого приближения:

$$\begin{aligned} T_1 &= K_1(\varepsilon_1 + \sigma_1 \varepsilon_2), \quad T_2 = K_2(\varepsilon_2 + \sigma_2 \varepsilon_1), \quad S_1 = K_{1,2} \omega, \quad S_2 = -K_{2,1} \omega, \\ G_1 &= -D_1(x_1 + \sigma_1 x_2), \quad G_2 = -D_2(x_2 + \sigma_2 x_1), \\ H_1 &= 2D_3 \tau, \quad H_2 = -2D'_3 \tau, \end{aligned} \quad (1.2)$$

а деформации и искривления определяются из соотношений

$$\begin{aligned} \varepsilon_1 &= \frac{\partial u}{\partial r}, \quad \varepsilon_2 = \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial \varphi_1} + \frac{u}{r} - \frac{w}{r} \text{ctg } \gamma, \quad \omega = \frac{\partial v}{\partial r} - \frac{v}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial \varphi_1}, \\ x_1 &= \frac{\partial^2 w}{\partial r^2}, \quad x_2 = \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \varphi_1^2} + \frac{\text{ctg } \gamma}{r^2} \frac{\partial v}{\partial \varphi_1}, \\ \tau &= \frac{1}{r} \frac{\partial^2 w}{\partial r \partial \varphi_1} - \frac{1}{r^2} \frac{\partial w}{\partial \varphi_1} + \frac{\text{ctg } \gamma}{r} \frac{\partial v}{\partial r} - \frac{\text{ctg } \gamma}{r^2} v. \end{aligned} \quad (1.3)$$

При решении задачи будем предполагать, что $f_1 = f_2 = 0$ и $C_1 = C_2 = 0$, так как жесткости ребер на сдвиг и кручение не оказывают заметного влияния на величину критической нагрузки. Значит,

$$S_1 = -S_2, \quad H_1 = -H_2. \quad (1.4)$$

С целью упрощения вычислений преобразуем исходную систему уравнений (1.1). Заметим при этом, что учет перерезывающей силы во втором уравнении равновесия означает удержание в характеристическом уравнении членов порядка единицы наряду с основными, имеющими порядок n^2 и влияние ее в третьем уравнении становится значительным, когда $n=2$ [1]. Поэтому, уравнения (1.1), учитывая (1.4), с точностью, присущей теории тонких оболочек, можно заменить приближенными уравнениями

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial r}(T_1 r) + \frac{\partial S_1}{\partial \varphi_1} - T_2 &= 0 \\ \frac{\partial}{\partial r}(S_1 r) + \frac{\partial T_2}{\partial \varphi_1} + S_1 &= 0 \\ \frac{\partial^2 G_1}{\partial r^2} - \frac{2}{r} \frac{\partial^2 H_1}{\partial r \partial \varphi_1} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 G_2}{\partial \varphi_1^2} - \frac{2}{r^2} \frac{\partial H_2}{\partial \varphi_1} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r}(2G_1 - G_2) + \\ &+ \frac{\text{ctg } \gamma}{r^2} G_2 - \frac{\text{ctg } \gamma}{r} \int \left[\frac{\partial}{\partial r}(S_1 r) + S_1 \right] d\varphi_1 + \\ &+ \left[T_{10} \frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + T_{20} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \varphi_1^2} + \frac{\text{ctg } \gamma}{r^2} \frac{\partial v}{\partial \varphi_1} \right) \right] + p_0 \varepsilon_2 = 0. \end{aligned} \quad (1.5)$$

Первым двум уравнениям равновесия можно удовлетворить при помощи функции напряжений

$$\begin{aligned} \frac{T_2}{K_2(1-\sigma_1\sigma_2) \text{ctg } \gamma} &= \frac{1}{r} \frac{\partial f}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 f}{\partial \varphi_1^2}, \quad \frac{T_2}{K_2(1-\sigma_1\sigma_2) \text{ctg } \gamma} = \frac{\partial^2 f}{\partial r^2}, \\ \frac{S_1}{K_2(1-\sigma_1\sigma_2) \text{ctg } \gamma} &= -\frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial f}{\partial \varphi_1} \right). \end{aligned} \quad (1.6)$$

Исключая из (1.3) перемещения u и v , находим:

$$r \frac{\partial^2}{\partial r^2}(r\varepsilon_2) - r \frac{\partial \varepsilon_1}{\partial r} + \frac{\partial^2 \varepsilon_1}{\partial \varphi_1^2} - \frac{\partial^2}{\partial r \partial \varphi_1}(r\omega) = -r \text{ctg } \gamma \frac{\partial^2 w}{\partial r^2}, \quad (1.7)$$

но $\omega = \frac{S_1}{K_{1,2}}, \quad \varepsilon_1 = \frac{1}{(1-\sigma_1\sigma_2)} \left\{ \frac{T_1}{K_1} - \sigma_1 \frac{T_2}{K_2} \right\}, \quad \varepsilon_2 = \frac{1}{(1-\sigma_1\sigma_2)} \left\{ \frac{T_2}{K_2} - \sigma_2 \frac{T_1}{K_1} \right\}.$ Выражая в (1.7) деформации $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \omega$ через функцию напряжений (1.6), приходим к уравнению

$$r \nabla^2 \nabla^2 f + \frac{\partial^2 w}{\partial r^2} = 0, \quad (1.8)$$

где

$$\begin{aligned} \nabla^2 \nabla^2 () &= \frac{\partial^4 ()}{\partial r^4} + \frac{2}{r} \frac{\partial^3 ()}{\partial r^3} - \frac{\lambda_2}{r^2} \frac{\partial^2 ()}{\partial r^2} + \frac{\lambda_2}{r^2} \frac{\partial ()}{\partial r} + \\ &+ \frac{\lambda_1}{r^2} \frac{\partial^4 ()}{\partial r^2 \partial \varphi_1^2} - \frac{\lambda_1}{r^2} \frac{\partial^3 ()}{\partial r \partial \varphi_1^2} + \frac{\lambda_2}{r^4} \frac{\partial^4 ()}{\partial \varphi_1^4} + \frac{(2\lambda_2 + \lambda_1)}{r^4} \frac{\partial^2 ()}{\partial \varphi_1^2}. \end{aligned}$$

Выражая G_1, G_2, H_1 в третьем уравнении системы (1.5) через перемещения по формулам (1.2) и (1.3), приходим к следующему уравнению.

$$\begin{aligned} \nabla_1^2 \nabla_1^2 w + \operatorname{ctg} \gamma \left\{ \frac{(\delta_1 - \sigma_1^2)}{r^2} \frac{\partial^2 v}{\partial r^2 \partial \varphi_1} - \frac{(\delta_2 + \delta_1)}{r^3} \frac{\partial^2 v}{\partial r \partial \varphi_1} + \frac{(2\delta_2 + \delta_1)}{r^4} \cdot \frac{\partial v}{\partial \varphi_1} + \frac{\delta_2}{r^4} \frac{\partial^2 v}{\partial \varphi_1^2} \right\} + \\ + \frac{\operatorname{ctg}^2 \gamma}{r^2} \cdot \delta_2 \cdot \left(\frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \varphi_1^2} + \frac{\operatorname{ctg} \gamma}{r^2} \frac{\partial w}{\partial \varphi_1} + \sigma_2' \frac{\partial^2 w}{\partial r^2} \right) - \\ - K_2 \frac{(1 - \sigma_1 \sigma_2) \operatorname{ctg}^2 \gamma}{D_1} \cdot \frac{1}{r} \frac{\partial^2 f}{\partial r} - \frac{1}{D_1} \left\{ T_{10} \frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \right. \end{aligned} \quad (1.9)$$

$$\left. + T_{20} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \varphi_1^2} + \frac{\operatorname{ctg} \gamma}{r^2} \frac{\partial w}{\partial \varphi_1} \right) + p_0 \left(\frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial \varphi_1} + \frac{u}{r} - \frac{w}{r} \operatorname{ctg} \gamma \right) \right\} = 0,$$

где

$$\begin{aligned} \nabla_1^2 \nabla_1^2 () = \frac{\partial^4 ()}{\partial r^4} + \frac{2}{r} \frac{\partial^3 ()}{\partial r^3} - \frac{\delta_2}{r^2} \frac{\partial^2 ()}{\partial r^2} + \frac{\delta_2}{r^3} \frac{\partial ()}{\partial r} + \frac{\delta_1}{r^2} \frac{\partial^4 ()}{\partial r^2 \partial \varphi_1^2} + \\ + \frac{\delta_2}{r^4} \frac{\partial^4 ()}{\partial \varphi_1^4} - \frac{\delta_1}{r^3} \frac{\partial^3 ()}{\partial r \partial \varphi_1^2} + \frac{(\delta_1 + 2\delta_2)}{r^4} \frac{\partial^2 ()}{\partial \varphi_1^2}. \end{aligned}$$

Уравнение (1.9) можно значительно упростить, если выразить перемещение v через w , пользуясь методом последовательных приближений.

Если длина оболочки по образующей соизмерима с радиусом кривизны у большего основания, то, как показывают вычисления, в первом приближении перемещение может быть выражено через w с помощью уравнения [1]

$$\frac{\partial^4 v}{\partial \varphi_1^4} = \operatorname{ctg} \gamma \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial \varphi_1^2}, \quad v = \operatorname{ctg} \gamma \int w d\varphi_1. \quad (1.10)$$

Заменяя в неглавных членах (1.9) v через w согласно (1.10) и опуская при этом второстепенные члены, приходим к уравнению:

$$\begin{aligned} \nabla_1^2 \nabla_1^2 w + \frac{\operatorname{ctg}^2 \gamma}{r^4} \left(2\delta_2 \frac{\partial^2 w}{\partial \varphi_1^2} + \operatorname{ctg}^2 \gamma \cdot \delta_2 \cdot w \right) - \\ - \frac{K_2 (1 - \sigma_1 \sigma_2) \cdot \operatorname{ctg}^2 \gamma}{D_1} \cdot \frac{1}{r} \frac{\partial^2 f}{\partial r^2} - \\ - \frac{1}{D_1} \left\{ T_{10} \frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + T_{20} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \varphi_1^2} + \frac{\operatorname{ctg} \gamma}{r^2} \frac{\partial w}{\partial \varphi_1} \right) + \right. \\ \left. + p_0 \left(\frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial \varphi_1} + \frac{u}{r} - \frac{w}{r} \operatorname{ctg} \gamma \right) \right\} = 0. \end{aligned} \quad (1.11)$$

Максимальная погрешность, которая допускается при переходе от уравнений (1.1) к упрощенным уравнениям (1.8) и (1.11), как показывают вычисления, оказывается величиной порядка $\operatorname{ctg}^2 \gamma$ по сравнению с n^4 . Поэтому область применимости полученного ниже решения для подкрепленной оболочки в смысле углов конусности ограничивается неравенством

$$n^4 \gg \operatorname{ctg}^2 \gamma.$$

В целях упрощения последующих вычислений и доведения задачи до числовых результатов, преобразуем полученные уравнения с помощью подстановок

$$z = \ln \frac{r}{r_1}, \quad w = e^{vz} W_1 \cos n_1 \varphi_1, \quad f = e^{vz} F \cos n_1 \varphi_1, \quad v_1 = 1 + v,$$

где v — параметр, подлежащий определению из условия минимума критического напряжения. Связь между параметрами v и v_1 в данном

случае устанавливается из дифференциального уравнения совместности деформаций. Учитывая, что в случае равностороннего сжатия

$$T_{10} = -\frac{p_0 r \operatorname{tg} \gamma}{2}, \quad T_{20} = -p_0 r \operatorname{tg} \gamma, \quad (1.12)$$

приходим к уравнениям

$$\begin{aligned} e^{2vz} \{ F^{IV} + M_{\lambda_0}^{IV} F^{III} + M_{\lambda_1}^{IV} F^{II} + M_{\lambda_2}^{IV} F^I + M_{\lambda_3}^{IV} F + w_1^{II} + \\ + (2v - 1) w_1^I + (v^2 - v) w_1 \} = 0 \end{aligned} \quad (1.13)$$

$$\begin{aligned} e^{(2v-2)z} \{ W_1^{IV} + M_{\delta_0}^{IV} W_1^{III} + M_{\delta_1}^{IV} W_1^{II} + M_{\delta_2}^{IV} W_1^I + (M_{\delta_3}^{IV} + k) W_1 \} - \\ - \eta^2 e^{2vz} \{ F^{II} + (2v_1 - 1) F^I + (v_1^2 - v_1) F \} + \\ + \sigma_k e^{(2v+1)z} \left\{ \frac{1}{2} W_1^{II} + \left(v + \frac{1}{2} \right) W_1^I + \left(\frac{v^2}{2} + \frac{v}{2} - n_1^2 + \operatorname{ctg}^2 \gamma \right) W_1 \right\} = 0, \end{aligned}$$

где обозначено

$$\begin{aligned} M_{\lambda_0}^{IV} = 4v_1 - 4, \quad M_{\lambda_1}^{IV} = 4v_1^3 - 12v_1^2 + 2v_1 k_{\lambda_0} + k_{\lambda_1}, \\ M_{\lambda_2}^{IV} = 6v_1^2 - 12v_1 + k_{\lambda_0}, \quad M_{\lambda_3}^{IV} = v_1^4 - 4v_1^3 + k_{\lambda_0} v_1^2 + k_{\lambda_1} v_1 + k_{\lambda_2}, \\ k_{\lambda_0} = 5 - \lambda_2 - \lambda_1 n_1^2, \quad k_{\lambda_1} = \lambda_2 n_1^4 - (2\lambda_2 + \lambda_1) n_1^2, \\ k_{\lambda_2} = 2\lambda_2 - 2 + 2\lambda_1 n_1^2, \quad k = \delta_2 (\operatorname{ctg}^4 \gamma - 2 \operatorname{ctg}^2 \gamma \cdot n_1^2), \end{aligned} \quad (1.14)$$

$$\sigma_k = \frac{p_0 \operatorname{tg} \gamma \cdot r_1^3}{D_1}, \quad \eta^2 = \frac{K_2 (1 - \sigma_1 \sigma_2) r_1^2 \operatorname{ctg}^2 \gamma}{D_1}.$$

Выражения $M_{\delta_0}^{IV}, M_{\delta_1}^{IV}, \dots$ получаются из (1.14) путем замены букв v_1 на v и λ_1, λ_2 соответственно на δ_1, δ_2 .

Принтегрируем уравнения (1.13) по методу Бубнова—Галеркина.

Для простоты разберем задачу для свободно опертой оболочки. На краях должны выполняться условия

$$\varepsilon_2 = 0, \quad T_1 = 0, \quad G_1 = 0, \quad w = 0. \quad (1.15)$$

В качестве аппроксимирующих функций примем

$$F = A \sin m_1 z, \quad W_1 = B \sin m_1 z, \quad m_1 = \frac{\pi}{l}. \quad (1.16)$$

При заданной функции W_1 выбранная аппроксимирующая функция F , как это видно из первого уравнения (1.13), является главным членом частного решения этого уравнения [5]. Однако граничные условия (1.15) при таком выборе функций не удовлетворяются полностью. Поэтому выясним, в какой мере невыполнение части краевых условий (1.15) может оказывать влияние на величину критического напряжения.

Степень этого влияния существенным образом зависит от длины оболочки. В дальнейшем будем различать конические оболочки средней длины ($m_1^2 \sim \pi^2, m_1^2 \ll n_1^2$), короткие ($m_1^2 > \pi^2, m_1^2 \sim n_1^2$) и длинные ($m_1^2 \sim 1, m_1^2 \ll n_1^2$).

К последнему классу будем относить также полную оболочку ($m_1 = 0$), длина образующей которой соизмерима с радиусом кривизны у основания. Сравним теперь работу неуравновешенных контурных сил на перемещениях отдельных точек с энергией деформации срединной поверхности. Энергия деформации срединной поверхности равна

$$W = \frac{1}{2Eh} (T_1^2 + T_2^2 \dots) + \frac{D}{2} (x_1^2 + x_2^2 + \dots). \quad (1.17)$$

Работа неуравновешенных контурных сил определяется по формуле:

$$W_k = \oint (T_1 \cdot u + S_1 \cdot v + G_1 \gamma_1) \Big|_{r_0}^{r_1} r d\varphi_1, \quad \gamma_1 = \frac{\partial W}{\partial r}.$$

Из (1.13), (1.16) и (1.17) определяем с точностью до постоянного множителя, одинакового для всех сравниваемых ниже величин, порядок величины безразмерной энергии растяжения W_p срединной поверхности:

$$W_p \sim \frac{m_1^4}{n_1^4} W_1^2.$$

Работа контурных усилий T_1 и S_1 на перемещениях и имеет самое большее. порядок

$$T_1 u + S_1 \cdot v \sim \frac{m_1^6}{n_1^8} W_1^2.$$

Значит энергия растяжения срединной поверхности в n_1^4/m_1^2 больше работы контурных усилий. Работа неуравновешенного изгибающего момента G_1 на граничных контурах

$$G_1 \gamma_1 \sim m_1^2 W_1^2.$$

Энергия изгиба $W_{изг}$ срединной поверхности

$$W_{изг} \sim n_1^4 W_1^2, \quad W_{изг} \gg m_1^2 W_1^2.$$

Таким образом, аппроксимирующие функции (1.16) в смысле выполнения краевых условий являются вполне удовлетворительными как для длинных, так и для коротких оболочек.

Вычисления показывают, что функции (1.16) являются удовлетворительными и для замкнутой в вершине оболочки. В этом предельном случае $\nu \gg 2$.

При $\gamma = 0$ (1.16) превращаются в точный интеграл дифференциальных уравнений равновесия цилиндрической оболочки. С более общей точки зрения обоснование процедуры метода Бубнова—Галеркина для решения задач устойчивости при невыполнении части краевых условий дано в статье [16].

Подставляя (1.16) в уравнения (1.13), применим к ним процедуру метода Бубнова—Галеркина, умножая предварительно первое и второе уравнения этой системы соответственно на $F dz$ и $W_1 dz$. Характеристическое уравнение имеет вид

$$\begin{aligned} & [(m_1^4 - M_{\delta_1}^2 m_1^2 + M_{\delta_2}^2 + k) - (M_{\delta_2}^2 + M_{\delta_0}^2 m_1^2) (\nu - 1)] + \\ & + \eta_1^2 \frac{(m_1^2 + \nu^2)^2}{[m_1^4 - M_{\delta_1}^2 m_1^2 + M_{\delta_2}^2 - \nu (M_{\delta_2}^2 - M_{\delta_0}^2 m_1^2)]} = \\ & = \sigma'_k \left[(n_1^2 - \text{ctg}^2 \gamma) + \frac{m_1^2}{2} + \frac{\nu^2}{2} + \frac{\nu}{2} + \frac{1}{4} \right] + \\ & + T_0' \left[m_1^2 + \nu^2 - \nu + \frac{1}{2} \right], \end{aligned} \quad (1.18)$$

где обозначено

$$\eta_1^2 = \eta^2 \frac{(1 - e^{2\nu t})}{(1 - e^{(2\nu-2)t})} \cdot \frac{[m_1^2 + (\nu - 1)^2]}{[m_1^2 + \nu^2]} \cdot \frac{(\nu - 1)}{\nu},$$

$$\begin{aligned} T_0' &= T_0 \cdot \frac{r_0 \cdot r_1}{D_1} \cdot \frac{[1 - e^{(2\nu-1)t}]}{[1 - e^{(2\nu-2)t}]} \cdot \frac{[m_1^2 + (\nu - 1)^2]}{[m_1^2 + (\nu - \frac{1}{2})^2]} \cdot \frac{(\nu - 1)}{(\nu - \frac{1}{2})}, \\ \sigma'_k &= \sigma_k \frac{[1 - e^{(2\nu+1)t}]}{[1 - e^{(2\nu-2)t}]} \cdot \frac{[m_1^2 + (\nu - 1)^2]}{[m_1^2 + (\nu + \frac{1}{2})^2]} \cdot \frac{(\nu - 1)}{(\nu + \frac{1}{2})}. \end{aligned}$$

§ 2. Определение критических нагрузок в частных случаях.

а) Полная коническая оболочка.

В этом случае $t = -\infty$, $m_1 = 0$.

Будем предполагать подкрепления отсутствующими, т. е.

$$\lambda_1 = 2, \quad \lambda_2 = 1, \quad \delta_1 = 2, \quad \delta_2 = 1.$$

Минимум критического напряжения реализуется при $\nu = 3$. Учитывая это, а также введенные ранее обозначения (1.14), уравнение (1.18) для $\gamma \leq 75^\circ$ приводим к виду:

$$\sigma_k = \frac{5,36}{(n_1^2 - \text{ctg}^2 \gamma + 6)} \left\{ [(n_1^2 - \text{ctg}^2 \gamma)^2 + 6n_1^2 - 39] + \right. \\ \left. + \eta^2 \frac{24}{[n_1^4 + 16n_1^2 - 224]} \right\}, \quad (2.1)$$

где σ_k и η^2 определяются согласно (1.14).

Область применимости формулы (2.1) ограничивается неравенством $n_1^2 \geq 16$, характеризующим область применимости исходных уравнений (1.8), (1.9). В случае $n_1^2 \gg \text{ctg}^2 \gamma$ (2.1) принимает вид

$$\sigma_k = \frac{5,36}{(n_1^2 + 6)} \left\{ (n_1^2 + 6n_1^2 - 39) + \eta^2 \frac{24}{(n_1^4 + 16n_1^2 - 224)} \right\}. \quad (2.2)$$

Вводя обозначение

$$x^2 = n_1^2 + 6,$$

это уравнение приводим к виду

$$\sigma_k = \frac{5,36}{x^2} \left\{ (x^4 - 6x^2 - 39) + \eta^2 \frac{24}{(x^4 + 4x^2 - 284)} \right\}. \quad (2.3)$$

Из этого уравнения минимум σ_k определяется достаточно точно. путем применения следующей процедуры. Экстремальное значение $x_{кр}^2$ определяем из приближенного уравнения

$$\sigma_k = 5,36 \left\{ x^2 + \eta^2 \frac{24}{x^6} \right\}, \quad x_{кр}^2 = 72^{1/4} \cdot \eta^{1/2},$$

полученного из данного путем пренебрежения членами порядка единицы по сравнению с x^2 .

Подставляя найденное значение $x_{кр}^2$ в (2.3), находим

$$\begin{aligned} p_{0,k} &= 3,23 \cdot \frac{E \cdot 2h}{(1 - \nu^2)^{3/4} \cdot r_1} \cdot \left(\frac{2h}{r_1 \text{tg} \gamma} \right)^{3/2} \times \\ &\times \left[1 - 1,02 \cdot \left(\frac{2h}{r_1 \text{tg} \gamma} \right)^{1/2} + 1,72 \cdot \frac{2h}{r_1 \text{tg} \gamma} \right]. \end{aligned} \quad (2.4)$$

Максимальное расхождение результатов вычислений по этой формуле и формуле (2.3) составляет 2—3%.

При использовании (2.4) необходимо помнить, что при выводе этой формулы предполагалось $n_1^2 \gg 1$. Если это условие не соблю-

дается и вычисленное число волн $n < 4$, то следует обратиться к формуле (2.1), вставляя в нее в соответствии с минимумом $n_1 = \frac{3}{\sin \gamma}$ или $n_1 = \frac{2}{\sin \gamma}$.

Решению рассматриваемой в настоящем пункте задачи посвящена значительная литература [2], [3], [4], [12], [17], [18]. В статье [12] наряду с данными экспериментального исследования устойчивости конических оболочек приводится теоретическое решение этой задачи энергетическим методом. Однако, в этом решении граничные условия, по существу, не удовлетворялись, благодаря чему найденное p_k сильно занижено. Оно оказывается, например, на 25—50% меньше давления, при котором оболочка хлопает.

Это же замечание относится и к решениям, предложенным в статьях [17], [18].

В статьях [2], [3], [4] также решается аналогичная задача. При этом авторы пользуются энергетическим методом, выбирая в качестве аппроксимирующих функций перемещения u , v , w , удовлетворяющие условиям свободного опирания оболочки по краям.

Результаты этих работ оказываются приблизительно совпадающими. Для определения критического давления в статье [2], например, рекомендуется формула, которая в наших обозначениях имеет вид:

$$p_{0,k} = \frac{Eh}{(1-\sigma^2) \cdot r_1} \cdot \frac{\text{ctg}^3 \gamma}{(1,41 + 0,2 \cdot n_1^2)} \left[\frac{2h^2 \cdot \text{tg}^2 \gamma}{3 \cdot r_1^2} (n_1^4 + 12,85n_1^2 + 170) + 0,575 \frac{n_1^2 + 63,5}{(n_1^4 + 8,85n_1^2 + 46,5)} \right]. \quad (2.5)$$

Сохраняя в этом уравнении лишь главные члены, находим с значительным занижением

$$p_{0,k} = 1,55 \cdot \frac{2Eh}{r_1 \text{tg}^{11/3} \gamma} \cdot \left(\frac{2h}{r_1 \text{tg} \gamma} \right)^{4/3}.$$

Критическое давление согласно этой формуле пропорционально $\left(\frac{2h}{r_1 \text{tg} \gamma} \right)^{4/3}$ и значительно превышает давление, определяемое по формуле (2.4). Причина такого расхождения заключается в неудачном выборе аппроксимирующих функций для касательных перемещений u и v . Эти перемещения не удовлетворяют первым двум уравнениям нейтрального равновесия. Поэтому безразмерная энергия растяжения срединной поверхности оболочки, как это нетрудно видеть из (2.5), оказывается пропорциональной величине $\frac{m_1^4}{n_1^2}$, а критическая нагрузка — величине $\left(\frac{2h}{r_1 \text{tg} \gamma} \right)^{4/3}$.

Если же при решении задачи энергетическим методом или по методу Бубнова — Галеркина в качестве аппроксимирующих функций u и v при заданном прогибе w выбираются функции, удовлетворяющие первым двум уравнениям равновесия в перемещениях, то в числителе выражения энергии растяжения срединной поверхности или соответствующем ей члене $\text{ctg} \gamma \cdot T_2$ в третьем уравнении системы (1.1) должны сокращаться все главные члены, зависящие от окружной частоты n_1^2 и энергия растяжения будет при этом величиной, пропорциональной $\frac{m_1^4}{n_1^4}$. Критическая нагрузка при таком выборе функции

оказывается пропорциональной $\left(\frac{2h}{r_1 \text{tg} \gamma} \right)^{3/2}$ и значительно меньше чем в случае, когда за перемещения u и v приняты произвольные функции. Это обстоятельство следует иметь в виду, особенно, при решении задач в перемещениях, когда интегралы дифференциальных уравнений нам неизвестны. Если решение ведется с помощью функции напряжения, то вопрос о выборе аппроксимирующих функций более прост, чем при решении задачи в перемещениях. В этом случае член $\text{ctg} \gamma \cdot T_2$ в третьем уравнении системы (1.1), соответствующий энергии растяжения, выражается через вторую производную по продольной координате и в силу уравнения совместности деформации (1.8), всегда оказывается величиной, пропорциональной $\frac{m_1^4}{n_1^4}$. Введе-

ние, таким образом, функции напряжения автоматически разрешает вопрос о порядке величины энергии растяжения и исключает возможность потери точности решения даже в том случае, когда аппроксимирующая функция далека от действительной.

Пример:

$$E = 0,7 \cdot 10^6 \text{ кг/см}^2, \quad 2h = 0,12 \text{ см}, \quad r_1 = 92,7 \text{ см},$$

$$\gamma = 15^\circ.$$

$$p_{0,k} = 1,1 \text{ кг/см}^2 \text{ — по формуле (2.4),}$$

$$p_{0,k} = 1,55 \text{ кг/см}^2, \quad n_k = 5 \text{ — по формуле (2.5).}$$

Рассматриваемая здесь частная задача является весьма поучительной и из нее может быть сделан вывод более общего характера относительно выбора аппроксимирующих функций.

Задача об устойчивости замкнутой в вершине конической оболочки при жестком закреплении краевого контура в линейной постановке детально изучена в статьях [9], [10].

б) Сжатие оболочки вдоль образующей. В этом случае $\sigma_k = 0$ и из уравнения (1.18) после пренебрежений в них членами порядка единицы по сравнению с n_1^2 находим при $\nu = 3$

$$T_0 = \frac{4Eh^2}{\sqrt{3}(1-\sigma^2)} \cdot \frac{1}{r_0 \text{tg} \gamma}. \quad (2.6)$$

Эта формула совпадает с аналогичной формулой, полученной в статье [15] путем точного интегрирования дифференциальных уравнений в предположении, что происходит симметричное выпучивание оболочки. Вопрос о влиянии эффекта нелинейности в условиях настоящей задачи нами был подробно рассмотрен в статье [7].

в) Об устойчивости оболочки при изгибе. Пусть оболочка находится в условиях внецентренного сжатия. Безмоментные усилия T_{10} и T_{20} определяются по формулам

$$T_{10} = - \left(\frac{T_0 r_0}{r} + \frac{T_{01} r_0}{r} \cos \varphi \right), \quad T_{20} = 0,$$

где T_0 — равномерное сжимающее усилие при $r = r_0$, T_{01} — вызванное изгибом максимальное сжимающее усилие, действующее вдоль образующей при $r = r_0$.

Решение этой сложной задачи ничем не отличается от решения аналогичной задачи для цилиндрической оболочки. Так же, как для цилиндрической оболочки [13], для значений $\gamma \leq 30^\circ$ и $\sigma = 0,3$ находим

$$\frac{(T_0 + T_{01})_{кр}}{2h} = \frac{0,6 \cdot E \cdot 2h}{r_0 \text{tg} \gamma}. \quad (2.7)$$

Нелинейный эффект в условиях данной задачи является значительным и в первом приближении вместо коэффициента 0,6 можно реко-

мендовать коэффициент 0,18, характерный для осевого сжатия конической и цилиндрической оболочек [7], [19]. Поскольку при внецентренном сжатии наряду со сжатой зоной возникает также зона растяжения, то условия для образования хлопка оказываются в данном случае более затруднительными по сравнению со случаем равномерного сжатия. Поэтому действительный коэффициент должен быть больше 0,18.

г) Устойчивость усеченной конической оболочки при внешнем давлении. Для значений $\gamma \leq 30^\circ$ и $|t| \leq 1$ эта задача рассмотрена в статье [5]. Ниже приводится решение, свободное от этих ограничений. Характеристическое уравнение (1.18) в этом случае для пологих оболочек приводится к виду:

$$\sigma'_k = \frac{1}{\left(n_1^2 + \frac{m_1^2}{2} + \frac{v^2}{2} + \frac{v}{2} \right) - 3v^4 + 12v^3 - 16v^2 + 8v} \cdot \left\{ [(m_1^2 + n_1^2)^2 - (2v^3 - 4v)(m_1^2 - n_1^2) - (m_1^2 + v^2)^2] \right. \\ \left. + \eta_1^2 \frac{[(m_1^2 + n_1^2)^2 - 2(v^2 - 1)(m_1^2 - n_1^2) - (v^2 - 1)(3v^2 + 1)]}{(m_1^2 + v^2)^2} \right\} \quad (2.8)$$

Минимум критического напряжения, как показывают вычисления, для $m_1^2 \geq 1$ достигается при $v = 3$. Аналогично, как это было сделано в статьях [6], [5] уравнение (2.8) для значений $\frac{m_1}{\sqrt{\delta_0}} \leq \frac{1}{2}$ приводится к виду

$$\sigma'_k = \frac{4}{3} \delta_0^{1/2} \cdot (m_1^2 + 9)^{1/2} \cdot \left\{ 1 + \frac{1}{2} \cdot \frac{(m_1^2 - 11)}{(m_1^2 + 9)^{1/2} \cdot \delta_0^{1/2}} + \frac{(1,5m_1^4 - 7m_1^2 + 183)}{4(m_1^2 + 9)\delta_0} \right\}, \quad (2.9)$$

где в данном случае

$$\sigma'_k = \frac{4}{7} \cdot \frac{(1 - e^{-\eta})}{(1 - e^{\eta})} \cdot \frac{(m_1^2 + 4)}{(m_1^2 + 12,25)} \cdot \sigma_k \\ \eta_1^2 = \eta^2 \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{(1 - e^{\eta})}{(1 - e^{-\eta})} \cdot \frac{(m_1^2 + 4)}{(m_1^2 + 9)}, \quad \delta_0 = 3^{1/2} \cdot \eta_1, \quad (2.10)$$

а σ_k и η^2 определяются по формулам (1.14).

Из формулы (2.9) как частный случай вытекают соответствующая формула для цилиндрической оболочки [5] и формула (2.4) для замкнутой в вершине конической оболочки. Если $|t| \geq 1$, то

$$\sigma'_k = \frac{4}{7} \cdot \frac{(m_1^2 + 4)}{(m_1^2 + 12,25)} \sigma_k, \quad \eta_1^2 = \eta^2 \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{(m_1^2 + 4)}{(m_1^2 + 9)},$$

и формула (2.9) в этом случае значительно упрощается. Если $|t| \leq \frac{1}{4}$, то (2.9) можно представить в виде

$$\sigma'_k \approx \frac{4}{3} \delta_0^{1/2} \cdot m_1 \left\{ 1 + \frac{m_1}{2\delta_0^{1/2}} + \frac{3}{8} \frac{m_1^2}{\delta_0} \right\}, \quad (2.11)$$

где в этом случае

$$\sigma'_k \approx \frac{4}{7} \cdot \frac{(1 - e^{-\eta})}{(1 - e^{\eta})} \sigma_k, \quad \eta_1^2 = \eta^2 \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{(1 - e^{\eta})}{(1 - e^{-\eta})}.$$

Сделаем оценку снизу критического давления, определяемого формулой (2.11). При этом будем пользоваться точным решением аналогичной задачи для конической оболочки, толщина которой меняется по линейному закону ($h = h_0 r$). Величина критического давления для такой оболочки определяется по формуле [6]

$$p_k = \frac{4,85 \cdot E \cdot \frac{h}{r_1} \cdot \left(\frac{h}{r_1 \operatorname{tg} \gamma} \right)^{3/2}}{(1 - \nu^2)^{3/4} \left\{ 1 - \frac{0,9}{|t|} \sqrt{\frac{h}{r_1 \operatorname{tg} \gamma}} \right\} \cdot |t|} \quad (2.12)$$

Формула выписана для случая, когда при $r = r_1$ толщина равна $2h$. Очевидно, что критическое давление $p_{0,k}$ для оболочки постоянной толщины $2h$ будет при всех прочих равных условиях больше критического давления p_k для оболочки, толщина $2h$ у которой достигается только у большего основания, т. е. $p_k < p_{0,k}$. Для конкретных значений параметра t на основании (2.11) и (2.12) находим:

$$\frac{p_{0,k}}{p_k} = 1,27 \text{ — при } t = -0,25,$$

$$\frac{p_{0,k}}{p_k} = 1,13 \text{ — при } t = -0,1.$$

Пользуясь (2.11), можно указать простое правило наиболее рациональной расстановки упругих шпангоутов по длине оболочки из условия ее равноустойчивости.

Отбрасывая в (2.11) второстепенные члены и пользуясь обозначениями (1.14), формулу для величины критического давления можно привести к виду

$$p_{0,k} \frac{C}{r_0^{5/2} \cdot \ln \left(1 + \frac{l}{r_0} \right)} = \frac{C}{r_0^{3/2} l},$$

где C — постоянная для всех отсеков.

$$p_{1,k} = \frac{C}{r_0^{3/2} l_0} \text{ — для первого отсека, } l_0 = r_1 - r_0,$$

$$p_{2,k} = \frac{C}{r_1^{3/2} l_1} \text{ — для второго отсека, } l_1 = r_2 - r_1$$

и т. д.

Из условия $p_{1,k} = p_{2,k} = \dots$ находим

$$l_0 r_0^{3/2} = l_1 r_1^{3/2} = \dots = l_n r_n^{3/2} \quad (2.13)$$

или

$$l_1 = \frac{l_0}{\left(1 + \frac{l_0}{r_0} \right)^{3/2}}, \quad l_2 = \frac{l_1}{\left(1 + \frac{l_1}{r_1} \right)^{3/2}}, \quad \dots \quad l_n = \frac{l_{n-1}}{\left(1 + \frac{l_{n-1}}{r_{n-1}} \right)^{3/2}} \quad (2.14)$$

Если усеченную коническую оболочку длины $L = l_0 + l_1 + l_2 + \dots + l_n$ требуется разбить на $(n+1)$ отсеков, то необходимо, прежде всего, определить расстояние l_0 от малого торцевого сечения до первого упругого шпангоута. Из (2.14), однако, не удастся получить простой математической зависимости между l_0 и заданными величинами L, r_0 . Поэтому l_1, l_2, \dots, l_n следует вычислять путем проб по формулам (2.14). При этом из (2.14) устанавливается неравенство $l_0 > \frac{L}{n+1}$.

§ 3. Об устойчивости подкрепленной оболочки. Рассмотрим упругую устойчивость длинной оболочки, подкрепленной сеткой

стрингеров и шпангоутов. Такую оболочку мы рассматриваем как конструктивно анизотропную с некоторыми приведенными, равномерно распределенными по поверхности, жесткостями. Такая замена подкрепленной оболочки условной ортотропной оболочкой не приводит к заметной погрешности, если изменением энергии от деформаций между соседними ребрами пренебречь по сравнению с энергией деформации оболочки в целом.

Очевидно, что в случае конической оболочки равномерное распределение жесткостей является невыгодным с точки зрения обеспечения ее равноустойчивости. Если та же сумма жесткостей распределена более рационально по длине, то такая оболочка будет обладать повышенной устойчивостью по сравнению с рассматриваемой. Значит, наше теоретическое решение должно давать значение критического давления с некоторым запасом устойчивости. Для подкрепленной оболочки $\delta_2 \gg 1$, $\delta_1 \sim 2$, $\lambda_1 \sim 2$, $\lambda_2 \sim 1$ и характеристическое уравнение (1.18) при $T_0 = 0$ и $\nu = 3$ приводим к виду

$$\sigma'_k = \frac{1}{\left(n_1^2 - \text{ctg}^2 \gamma + \frac{m_1^2}{2} + 6,25\right)} \cdot \left\{ \delta_2 [(n_1^2 - \text{ctg}^2 \gamma)^2 - 2n_1^2 + m_1^2 + 5] + \right. \\ \left. + \delta_1 m_1^2 n_1^2 + 4\delta_1 n_1^2 + \frac{(m_1^2 + 9)^2}{[m_1^4 + \lambda_1 m_1^2 n_1^2 + \lambda_2 (n_1^4 - 2n_1^2) + 9\lambda_1 n_1^2 + 10\lambda_2 + \lambda_2 m_1^2 - 17m_1^2 - 235]} \right\}, \quad (3.1)$$

где σ'_k и η_1^2 определяются с помощью соотношений (2.10) и (1.14). Область применимости формулы (2.1), как и в случае замкнутой в вершине оболочки, ограничиваем неравенством $n_1^2 \geq 16$.

Для приближенного определения n_1^2 можно в данном случае указать простую формулу. При внешнем давлении окружная деформация является преобладающей. Поэтому для ориентировочных подсчетов n_1^2 и σ'_k можно воспользоваться уравнением

$$\sigma'_k = \delta_2 n_1^2 + \eta_1^2 \cdot \frac{(m_1^2 + 9)^2}{\lambda_2 n_1^6}. \quad (3.2)$$

Из условия минимума σ'_k находим

$$n_1^2 = 3^{1/4} \cdot (m_1^2 + 9)^{1/2} \cdot \eta_1^{1/2} \cdot (\lambda_2 \delta_2)^{-1/4} \quad (3.3)$$

и

$$\sigma'_k = 1,75 (m_1^2 + 9)^{1/2} \cdot \eta_1^{1/2} \cdot \delta_2^{3/4} \cdot \lambda_2^{-1/4}. \quad (3.4)$$

Если вычисленное согласно (3.3) число волн $n < 4$, то для определения σ'_k следует воспользоваться формулой (3.1), вставляя в нее в соответствии с минимумом $n_1 = \frac{3}{\sin \gamma}$ или $n_1 = \frac{2}{\sin \gamma}$. Если $n \geq 4$, то формула (3.4) определяет σ'_k с погрешностью порядка $\eta_1^{-1/2}$ по сравнению с единицей. При $\gamma = 0$ (3.1) и (3.4) переходят в соответствующие формулы для цилиндрической оболочки.

Решение рассматриваемой в настоящем пункте задачи приводится также в цитированной выше статье [2]. Помимо отмеченных недостатков данная авторами формула для подкрепленной оболочки является неудовлетворительной и в других отношениях. Во-первых, эта формула является непригодной, если $n = 2$ или $n = 3$, поскольку эффект перерезывающих сил в первых двух уравнениях равновесия и влияние касательных перемещений в выражениях для кривизин и

кручения не учитываются этой формулой. Во-вторых, предлагаемое искусственное обобщение решения для гладкой оболочки на подкрепленную оболочку путем замены в формуле жесткостей D и K соответствующими $\frac{EI_1}{l_2}$ и K_2 не является обоснованным. Такое решение

для подкрепленной оболочки приводит к тому, что вся энергия изгиба срединной поверхности оказывается пропорциональной $\frac{EI_2}{l_2}$. Однако, это неверно. Не вся изгибная энергия, а лишь часть ее, соответствующая действию поперечного момента G_2 , фактически пропорциональна $\frac{EI_2}{l_2}$. Ошибка другого рода допущена в статье [21].

Эффект продольного силового набора в ней сводится лишь к увеличению толщины. Однако, при изгибе фактическую роль играет приведенная жесткость $\left(D + \frac{EI_1}{l_1}\right)$.

§ 4. Оценка погрешности приближенного решения. Данная выше оценка снизу для величины $p_{0,k}$ оказывается довольно грубой даже для коротких оболочек. Поэтому необходимым является установление более узкой „вилки“ для истинного значения $p_{0,k}$. Речь идет в данном случае лишь об определении границы снизу, поскольку граница сверху устанавливается приближенным решением по методу Бубнова — Галеркина. Эта задача в общем случае уравнений (1.8) и (1.9) является очень сложной. Поэтому ограничимся рассмотрением усеченных оболочек средней длины ($m_1^2 \sim \pi^2$). Минимум критического напряжения с погрешностью порядка $\eta_1^{-1/2}$ по сравнению с единицей получается из решения следующей системы уравнений [8], [20]

$$n_1^4 f = -r^2 \frac{d^2 w}{dr^2}, \quad n_1^4 \cdot \frac{w}{r^4} - \frac{\eta_0^2}{r_0^2} \cdot \frac{1}{r} \frac{\partial^2 f}{\partial r^2} - \frac{\sigma_0 \cdot n_1^2}{r_0^3} \cdot \frac{w}{r} = 0 \\ \eta_0^2 = \frac{K(1 - \sigma^2) r_0^2 \text{ctg}^2 \gamma}{D}, \quad \sigma_0 = \frac{p_{0,k} \cdot \text{tg} \gamma \cdot r_0^3}{D}. \quad (4.1)$$

Эти уравнения получены из (1.8) и (1.9) путем пренебрежения членами порядка единицы по сравнению с n_1^2 . Решение их сводится к решению одного уравнения, которое после преобразования (4.1) с помощью подстановки $x = \ln \frac{r}{r_0}$ приводим к виду

$$\frac{d^4 w}{dx^4} - \frac{d^2 w}{dx^2} + \eta_0^{-2} (n_1^8 e^{-2x} - \sigma_0 n_1^6 e^x) w = 0. \quad (4.2)$$

С рассматриваемой степенью точности условия (1.15) выполняются, если на граничных контурах имеют место соотношения

$$w = 0, \quad \frac{d^2 w}{dx^2} - \frac{dw}{dx} = 0 \quad \text{при} \quad x = 0 \quad \text{и} \quad x = t = \ln \frac{r_1}{r_0}. \quad (4.3)$$

Таким образом, рассматриваемая задача сводится к решению уравнения (4.2) при граничных условиях (4.3).

Выясним возможность дальнейшего упрощения (4.2) и (4.3). Уравнение (4.2) является уравнением Эйлера функционала

$$\mathcal{E} = \int_0^t [w_{xx}^2 + w_x^2 + \eta_0^{-2} (n_1^8 e^{-2x} - \sigma_0 n_1^6 e^x) w^2] dx.$$

Отсюда следует

$$\sigma_0 = 1,75 \cdot \eta_0^{1/2} \left(\int_0^1 e^x w^2 dx \right)^{-1} \cdot \left(\int_0^1 e^{-2x} w^2 dx \right)^{3/4} \cdot \left(\int_0^1 (w_{xx}^2 + w_x^2) dx \right)^{1/4}$$

Разберем случай $t=1$. Согласно принятой терминологии такие оболочки являются оболочками средней длины. Обозначим через w_0 среднее (в интегральном смысле) значение прогиба в рассматриваемом интервале изменения x . Как показывает приближенное решение, $w_x \approx \pi w_0$, $w_{xx} \approx \pi^2 w_0$ и значение σ_0 с погрешностью 2–2,5% в сторону снижения определяется из уравнения

$$\sigma_0 = 1,75 \cdot \eta_0^{1/2} \left(\int_0^1 e^x w^2 dx \right)^{-1} \cdot \left(\int_0^1 e^{-2x} w^2 dx \right)^{3/4} \cdot \left(\int_0^1 w_{xx}^2 dx \right)^{1/4}$$

Следовательно, в рассматриваемом случае, т. е. при $t=1$, критическая нагрузка достаточно определяется из уравнения

$$\frac{d^4 w}{dx^4} + \eta_0^{-2} (n_1^8 e^{-2x} - \sigma_0 n_1^6 e^x) w = 0, \quad 0 \leq x \leq 1. \quad (4.4)$$

С целью упрощения граничных условий (4.3) вычислим работу контурного усилия T_1 на перемещении u .

Из первого уравнения системы (4.1) находим

$$T_1 \sim \left(\frac{d^2 w}{dx^2} - \frac{dw}{dx} \right) \cdot \frac{1}{n_1^2}$$

С принятой точностью перемещение u будет

$$u \sim \frac{1}{n_1^2} \left(\frac{dw}{dx} - w \right)$$

Предполагая условие $w=0$ выполненным на границах области, находим

$$T_1 \cdot u \sim \frac{1}{n_1^4} \left(\frac{d^2 w}{dx^2} - \frac{dw}{dx} \right) \cdot \frac{dw}{dx}$$

Переход от уравнения (4.2) к уравнению (4.4) эквивалентен пренебрежению в выражении энергии деформации срединной поверхности членов порядка w_x^2 по сравнению с членами порядка w_{xx}^2 . Поэтому, допуская на границах области неуровновешенность, одинаковую с удельным весом отброшенных в энергии деформации членов, находим

$$T_1 u \sim \frac{1}{n_1^4} \frac{d^2 w}{dx^2} \cdot \frac{dw}{dx}$$

Значит, условие $T_1=0$ при $x=0$ и $x=1$ сводится к выполнению условия

$$\frac{d^2 w}{dx^2} = 0.$$

Задача, таким образом, заключается в решении уравнения (4.4) при краевых условиях

$$w = \frac{d^2 w}{dx^2} = 0 \quad \text{при } x=0 \text{ и } x=1. \quad (4.5)$$

Если оболочка жестко заделана по краям, то граничные условия

$$u = v = w = \frac{\partial w}{\partial r} = 0 \quad \text{при } r=r_0 \text{ и } r=r_1$$

для системы уравнений (1.8) и (1.9) при сделанных упрощениях выражаются в условия

$$w = \frac{dw}{dx} = 0 \quad \text{при } x=0 \text{ и } x=1. \quad (4.6)$$

Возможны также варианты смешанного закрепления оболочки. Например,

$$a) \quad w = \frac{dw}{dx} = 0 \quad \text{при } x=0, \quad w = \frac{d^2 w}{dx^2} = 0 \quad \text{при } x=1;$$

$$b) \quad w = \frac{d^2 w}{dx^2} = 0 \quad \text{при } x=0, \quad w = \frac{dw}{dx} = 0 \quad \text{при } x=1.$$

Рассматриваемые задачи можно разрешить с помощью аппарата интегральных уравнений. При этом в силу применяемого метода наименьшие собственные значения определяются снизу и это позволяет в рассматриваемом случае дать оценку погрешности приближенного решения.

Метод интегральных уравнений до сих пор не нашел еще широкого применения в изучении вопросов устойчивости тонких оболочек. Между тем определение собственных или критических чисел является одной из прямых задач теории этих уравнений.

Приведение дифференциальных уравнений к интегральным может быть выполнено с помощью обычной функции Грина или функции Грина в обобщенном смысле [14].

Однако более универсальным и быстро приводящим к цели является метод Коши интегрирования дифференциальных уравнений. Суть его, как известно, состоит в следующем.

Пусть дано, например, уравнение четвертого порядка с постоянными коэффициентами

$$\frac{d^4 w}{dx^4} + a_1 \frac{d^3 w}{dx^3} + a_2 \frac{d^2 w}{dx^2} + a_3 \frac{dw}{dx} + a_4 w = q(x), \quad 0 \leq x \leq 1, \quad (4.7)$$

где $q(x)$ — заданная функция. Пусть w_1, w_2, w_3, w_4 — частные решения однородного уравнения. Способ Коши заключается в способе построения частного решения неоднородного уравнения. Среди решений w_1, w_2, \dots или их комбинаций отыскивается такое решение Y , которое удовлетворяет условиям

$$Y(0) = Y'(0) = Y''(0) = 0, \quad Y'''(0) = 1.$$

Далее составляется форма от разности аргументов $Y(x-t)$. Согласно теореме Коши частное решение неоднородного уравнения (4.7) будет

$$\int_0^x Y(x-t) q(t) dt.$$

Таким образом, общее решение (4.7) запишется в виде

$$w = c_1 w_1 + c_2 w_2 + c_3 w_3 + c_4 w_4 + \int_0^x Y(x-t) q(t) dt. \quad (4.8)$$

Если $q(x) = \lambda w(x)$, то приходим к следующему интегральному уравнению

$$w = c_1 w_1 + c_2 w_2 + c_3 w_3 + c_4 w_4 + \lambda \int_0^x Y(x-t) w(t) dt. \quad (4.9)$$

Определение произвольных постоянных c_1, c_2, c_3, c_4 из однородных граничных условий, налагаемых на w , приводит к однородному интегральному уравнению Фредгольма.

В случае уравнения (4.4)

$$q(x) = \eta_0^{-2} \varphi(x) w(x), \quad \varphi(x) = \sigma_0 n_1^6 e^x - n_1^8 e^{-2x}, \quad (4.10)$$

$$w_1 = \frac{x^3}{6}, \quad w_2 = \frac{x^2}{2}, \quad w_3 = x, \quad w_4 = 1, \quad Y(x-t) = \frac{(x-t)^3}{6}$$

и уравнение (4.9) принимает вид

$$w = c_1 \frac{x^3}{6} + c_2 \frac{x^2}{2} + c_3 x + c_4 + \eta_0^{-2} \cdot \frac{1}{6} \int_0^x (x-t)^3 \varphi(t) w(t) dt. \quad (4.11)$$

При граничных условиях (4.5) постоянные c_1, c_2, \dots будут

$$c_2 = c_4 = 0$$

$$c_1 = - \int_0^1 (1-t) \varphi(t) w(t) dt,$$

$$c_3 = \frac{1}{6} \left\{ \int_0^1 (1-t) \varphi(t) w(t) dt - \int_0^1 (1-t)^2 \varphi(t) w(t) dt \right\}$$

и уравнение (4.11) запишется в форме

$$w(x) = \eta_0^{-2} \cdot \frac{1}{6} \left\{ \int_0^x t(x-1)(t^2 - 2x + x^2) \varphi(t) w(t) dt + \int_x^1 x(t-1)(x^2 - 2t + t^2) \varphi(t) w(t) dt \right\}$$

или, иначе

$$w(x) = \eta_0^{-2} \int_0^1 G(xt) \varphi(t) w(t) dt, \quad (4.12)$$

где

$$G(xt) = \begin{cases} \frac{1}{6} x(t-1)(x^2 - 2t + t^2), & x \leq t \\ \frac{1}{6} t(x-1)(t^2 - 2x + x^2), & x > t. \end{cases} \quad (4.13)$$

Аналогично для краевых условий (4.6) находим

$$G(xt) = \frac{x^3(t-1)}{6} (2xt + x - 3t), \quad x \leq t.$$

Ядро уравнения (4.12) несимметрично, однако, оно относится к классу симметризуемых. Умножая (4.12) на $V\varphi(x)$ и вводя обозначение

$$\psi(x) = w(x) V\varphi(x),$$

приходим к уравнению вида

$$\psi(x) = \eta_0^{-2} \cdot \int_0^1 G(xt) V\varphi(x) \cdot \varphi(t) \psi(t) dt. \quad (4.14)$$

Решение этого уравнения эквивалентно решению дифференциального уравнения (4.4), причем, существование, по крайней мере, одного действительного собственного значения обеспечивается основной теоремой уравнений с симметрическим ядром. Если в общем случае дано уравнение

$$w(x) = \mu \int_0^1 K(xt) w(t) dt,$$

то наименьшее собственное значение μ_1 , с недостатком [14] определяется через следы ядра по формуле

$$\frac{1}{\mu_1^2} = \lim_m \sqrt{\frac{1}{A_{2m}}}. \quad (4.15)$$

Числа A_{2m} определяются из следующих соотношений

$$A_2 = \int_0^1 \int_0^1 K^2(xt) dx dt,$$

$$A_4 = \int_0^1 \int_0^1 K_2^2(xt) dx dt$$

$$\dots \dots \dots$$

$$A_{2m} = \int_0^1 \int_0^1 K_m^2(xt) dx dt,$$

где K_2, K_3, \dots, K_m — итеративные ядра.

Применяя (4.15) к рассматриваемому случаю свободно опертой по краям конической оболочки, будем иметь уравнение

$$\eta_0^4 = \int_0^1 \int_0^1 G^2(xt) \varphi(x) \varphi(t) dx dt = 2 \int_0^1 \varphi(x) dx \cdot \int_0^x G^2(xt) \cdot \varphi(t) dt.$$

Подставляя сюда (4.10) и (4.13) и произведя все необходимые вычисления, получим следующее квадратное уравнение

$$t_k^2 - 2bt_k \eta_0^{-2} n_1^2 + c \eta_0^{-4} \cdot n_1^4 - \frac{18}{\Delta \cdot n_1^{12}} = 0, \quad t_k = \sigma_0 / \eta_0^2, \quad (4.16)$$

где обозначено

$$\Delta = 815e^2 - 3844e + 4427 = 0,00537293.$$

$$b = \frac{1}{8e^2 \Delta} \cdot (851e^3 - 2069e^2 - 977e + 851) = 0,23147071,$$

$$c = \frac{1}{512 \cdot e^4 \cdot \Delta} (145e^4 - 1664e^2 + 4387) = \frac{1}{512e^4 \Delta} \cdot 8,34241015,$$

$$b^2 - c = - \frac{1}{512 \cdot e^4 \Delta^2} \cdot 0,00158550, \quad e = 2,71828183.$$

Преобразуя (4.16) с помощью подстановки

$$n_1^2 = \eta_0^{1/2} \cdot y,$$

получим

$$\sigma_0 = \eta_0^{1/2} \left(0,231 + \sqrt{\frac{3352}{y^6} - 0,00184y^2} \right).$$

Минимум σ_0 достигается при $y = 6,067$

$$\sigma_0 = 1,401 \gamma_0^{1/2} \text{ или } p_{0,k} = 15,06 \frac{Eh}{(1-\sigma^2)^{3/4} \cdot r_1} \left(\frac{h}{r_1 \operatorname{tg} \gamma} \right)^{3/2} \quad (4.17)$$

Критическое давление с избытком определяется согласно (2.9). Сохраняя в этой формуле лишь главные члены, для значения $t = -1$ находим

$$p_{0,k} = 18,2 \cdot \frac{Eh}{(1-\sigma^2)^{3/4} \cdot r_1} \cdot \left(\frac{h}{r_1 \operatorname{tg} \gamma} \right)^{3/2} \quad (4.18)$$

Формулами (4.17) и (4.18) устанавливается „вилка“, внутри которой лежит истинная величина $p_{0,k}$.

При $|t| < 1$ или $t \rightarrow 0$ указанная вилка сужается, поскольку оболочка, становясь короткой, приближается по своим очертаниям к цилиндрической, для которой наше решение является точным. Если $|t| > 1$, то для исследования вопроса, связанного с оценкой погрешности приближенного решения, необходимо обратиться к более точному уравнению (4.2).

Пользуясь методом интегральных уравнений Фредгольма, задача может быть разрешена с последующей оценкой точности и при граничных условиях (4.6).

При смешанных краевых условиях этот метод может приводить к довольно громоздким вычислениям, поскольку приходится пользоваться вторым итеративным ядром и вычислять определенный интеграл от его квадрата.

В заключении этого параграфа вкратце остановимся на сравнении теоретических и экспериментальных данных. Такое сравнение позволяет судить о природе поправочных коэффициентов к формулам, полученным по линейной теории. Опубликованные в статье [12] данные, относящиеся к устойчивости замкнутой в вершине конической оболочки, дают материал для проверки выведенной выше формулы (2.4). Автором указанной статьи было испытано 23 серии оболочек из общего их количества 50. Оболочки были изготовлены с углами γ , равными 15, 30, 45, 60, 75° и с толщинами $2h = 0,8; 1; 1,2; 1,5$ мм с таким расчетом, чтобы потеря устойчивости происходила в пределах упругости. Как показали сравнения, экспериментальное значение давления „хлопка“ оказывается в 2—3 раза меньше критического давления, вычисленного по формуле (2.4). Этот результат нельзя считать неожиданным. Задача об устойчивости замкнутой в вершине конической оболочки при внешнем давлении является по существу нелинейной задачей, как, скажем, сфера или оболочка нулевой гауссовой кривизны при продольном сжатии и теоретически может быть разрешена лишь с учетом больших перемещений ее срединной поверхности. Очевидно, в случае замкнутой в вершине конической оболочки эффект нелинейности является наиболее значительным. Для усеченных конусов этот эффект должен быть меньшим, поскольку условия для образования „хлопка“ стеснены наличием двух концевых шпангоутов. Таким образом, становится понятной природа поправочных коэффициентов к формулам, полученным по линейной теории и для усеченных оболочек. Значение этого коэффициента должно заключаться в интервале между значением поправочного коэффициента для цилиндрической оболочки и значением этого коэффициента для замкнутой в вершине конической оболочки.

ЛИТЕРАТУРА

1. Муштарн Х. М. Некоторые обобщения теории тонких оболочек с приложениями к задаче устойчивости упругого равновесия. Изв. Казанского физ.-мат. об-ва, т. XI, сер. 3, 1938.

2. Бунич Л. М., Палий О. М., Писковитина И. А. Устойчивость усеченной конической оболочки, находящейся под действием равномерного внешнего давления. Инж. сборник, т. XXIII, 1956.
3. Григолюк Э. Н. Упругая устойчивость ортотропных и слоистых конических и цилиндрических оболочек. Сб. „Расчет пространственных конструкций“, вып. III, 1955.
4. Григолюк Э. И. Об устойчивости замкнутой двухслойной конической оболочки под действием равномерного нормального давления. Инж. сб. т. XIX, 1954.
5. Муштарн Х. М., Саченков А. В. Об устойчивости цилиндрических и конических оболочек кругового сечения при совместном действии осевого сжатия и внешнего нормального давления, ПММ, в. VI, 1954.
6. Саченков А. В. Об устойчивости оболочек за пределом упругости. Изв. Казанского филиала АН СССР, сер. физ.-мат. и техн. наук, № 10, 1956.
7. Саченков А. В. Приближенное определение нижней границы критической нагрузки при продольном сжатии тонкой конической оболочки. Изв. Казанского филиала АН СССР, сер. физ.-мат. и техн. наук, № 7, 1955.
8. Алумяэ Н. А. Об определении состояния равновесия круговой цилиндрической оболочки при осесимметричной нагрузке. ПММ, т. XVII, вып. 5, 1953.
9. Рямет Р. К. Критическая нагрузка конической оболочки, находящейся под действием равномерно распределенного внешнего давления. Тр. Таллинского политехнического ин-та, 1955.
10. Алумяэ Н. А. К определению критической нагрузки замкнутой в вершине конической оболочки вращения, находящейся под действием внешнего давления. Тр. Таллинского политехн. ин-та, 1955.
11. Исабаева Ф. С. Определение нижней критической нагрузки цилиндрической оболочки при всестороннем сжатии. Изв. Казанского филиала АН СССР, сер. физ.-мат. и техн. наук, вып. 7, 1955.
12. Родителей К. А. Экспериментально-теоретическое исследование устойчивости гладких конических оболочек под действием внешнего давления. Гос. Союзный научно-исследовательский ин-т. Технический отчет, вып. 3, № 00026, 1956.
13. Тимошенко С. П. Устойчивость упругих систем, ОГИЗ, Гостехиздат, 1946.
14. Михлин С. Г. Интегральные уравнения, Гостехиздат, 1947.
15. Штаерман И. Я. Устойчивость оболочек. Сборник трудов Киевского авиационного ин-та, 1, 1936.
16. Свирский И. В. К вопросу о построении вариационных формул задач устойчивости. Изв. Казанского филиала АН СССР, сер. физ.-мат. и техн. наук, вып. № 10, 1956.
17. A. Pflüger. Stabilität dünner Kegelschalen. Ing. Arch, 1937, Bd VIII, 3H.
18. A. Pflüger. Zur Stabilität der dünnen Kegelschale. Ing. Arch, Bd XIII, 2H, 1942.
19. J. Kempner. Postbuckling behaviour of axially compressed circular cylindrical shells, Journal of the Aeronautical. Sci. 21, № 5, 1954.
20. Власов В. З. Общая теория оболочек. Гостехиздат, 1949.
21. Григолюк Э. И. К теории круговой цилиндрической оболочки с жестким продольным набором. Изв. АН СССР, отд. техн. наук, № 11, 1954.

Поступила
20.XII 1956 г.

А. В. Саченков

**ОБ УСТОЙЧИВОСТИ ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ОБОЛОЧКИ ПРИ
 ПРОИЗВОЛЬНЫХ КРАЕВЫХ УСЛОВИЯХ ПОД ДЕЙСТВИЕМ
 РАВНОМЕРНОГО ПОПЕРЕЧНОГО ДАВЛЕНИЯ**

В статье рассматривается устойчивость цилиндрической оболочки кругового сечения при различных краевых закреплениях под действием равномерного поперечного давления. Исходными дифференциальными уравнениями являются уравнения, выведенные в работе [1] для длинной цилиндрической оболочки. Путем пренебрежения в этих уравнениях, записанных в перемещениях, квадратом частоты волны, образующейся в продольном направлении, по сравнению с квадратом частоты волны, появляющейся в окружном направлении, система уравнений сводится к одному уравнению четвертого порядка. Разбираются шесть случаев краевых закреплений оболочки.

§ 1. Дифференциальные уравнения и их решение. Решение задачи устойчивости длинной цилиндрической оболочки сводится к решению системы уравнений, выведенных в монографии [1]. Выпишем эту систему применительно к задаче устойчивости оболочки под действием внешнего поперечного давления

$$\begin{aligned} \frac{\partial T_1}{\partial x} + \frac{\partial S}{\partial s} &= 0, \\ \frac{\partial S}{\partial x} + \frac{\partial T_2}{\partial s} - \frac{1}{R} \frac{\partial G_2}{\partial s} &= 0, \end{aligned} \quad (1.1)$$

$$\frac{\partial^2 G_2}{\partial s^2} + \frac{T_2}{R} + T_{20} \kappa_2 + p \varepsilon_2 = 0, \quad T_{20} = -pR,$$

где T_1 , T_2 , S — тангенциальные усилия, G_2 — поперечный изгибающий момент, T_{20} — усилие, определяемое по безмоментной теории, p — внешнее давление, R — радиус оболочки, x , s — координаты точки срединной поверхности оболочки соответственно в продольном и окружном направлениях.

Деформации ε_1 , ε_2 , ω , κ_1 , κ_2 выражаются по формулам

$$\begin{aligned} \varepsilon_1 &= \frac{\partial u}{\partial x}, \quad \varepsilon_2 = \frac{\partial v}{\partial s} - \frac{w}{R}, \quad \omega = \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial s}, \\ \kappa_1 &= \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}, \quad \kappa_2 = \frac{\partial^2 w}{\partial s^2} + \frac{1}{R} \frac{\partial v}{\partial s}, \end{aligned} \quad (1.2)$$

где u , v — тангенциальные перемещения, w — прогиб. Для выражений усилий через деформации срединной поверхности будем пользоваться формулами первого приближения:

$$\begin{aligned} T_1 &= K(\varepsilon_1 + \sigma \varepsilon_2), \quad T_2 = K(\varepsilon_2 + \sigma \varepsilon_1), \quad S = \frac{K(1-\sigma)}{2} \omega, \\ G_2 &= -D(\kappa_2 + \sigma \kappa_1). \end{aligned} \quad (1.3)$$

где

$$K = \frac{2Eh}{1-\sigma^2}, \quad D = \frac{2}{3} \frac{Eh^3}{1-\sigma^2} \quad (1.4)$$

E — модуль упругости, σ — коэффициент поперечного расширения материала, $2h$ — толщина оболочки.

Выражая в (1.1) усилия, моменты и деформации через перемещения согласно формул (1.2) и (1.3), приходим к уравнениям:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + \frac{(1+\sigma)}{2} \frac{\partial^2 v}{\partial z \partial y} + \frac{(1-\sigma)}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - \sigma \frac{\partial w}{\partial z} &= 0, \\ \frac{(1+\sigma)}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial z \partial y} + \frac{(1-\sigma)}{2} \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} - \frac{\partial w}{\partial y} + D_1 \left(\frac{\partial^3 w}{\partial y^3} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \sigma \frac{\partial^3 w}{\partial z^2 \partial y} \right) &= 0, \\ \left(\frac{\partial^4 w}{\partial y^4} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \sigma \frac{\partial^4 w}{\partial z^2 \partial y^2} \right) - \frac{1}{D_1} \left(\frac{\partial v}{\partial y} - w + \sigma \frac{\partial u}{\partial z} \right) + \frac{pR^2}{D} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + w \right) &= 0, \\ D_1 &= \frac{D}{KR^2}, \end{aligned} \quad (1.5)$$

где

$$y = \frac{s}{R}, \quad z = \frac{x}{R}, \quad 0 \leq z \leq \frac{l}{R}, \quad l - \text{длина оболочки.}$$

При изучении вопросов устойчивости обычно разделяют оболочки на короткие, средней длины и длинные. Такое разделение необходимо для облегчения исследования уравнений и доведения решений конкретных задач до числовых результатов. Возможность дальнейшего упрощения системы (1.5) обусловлена тем, что в данном случае функции u , v , w , характеризующие деформированное состояние, как было показано в работе [1], являются существенно возрастающими при дифференцировании по дуговой координате и убывающими при дифференцировании по другой. Это свойство интегралов уравнений устойчивости позволяет для длинных оболочек, а также оболочек средней длины пренебречь в исходных уравнениях (1.5) второй производной по z по сравнению со второй производной функции по координате y . Область применимости полученных таким путем уравнений может быть легко установлена исходя из решений конкретных задач.

Выразим из первых двух уравнений (1.5) перемещения u , v через w , пользуясь методом последовательных приближений.

В первом приближении, не учитывая перерезывающие силы, для u , v через w найдем уравнения

$$\begin{aligned} \Delta \Delta u &= - \frac{\partial^3 w}{\partial z \partial y^2} + \sigma \frac{\partial^3 w}{\partial z^3}, \\ \Delta \Delta v &= \frac{\partial^3 w}{\partial y^3} + (2 + \sigma) \frac{\partial^3 w}{\partial z^2 \partial y}, \\ \Delta(\quad) &= \frac{\partial^2(\quad)}{\partial z^2} + \frac{\partial^2(\quad)}{\partial y^2}. \end{aligned} \quad (1.6)$$

Заметим, что в общем случае во втором из уравнений (1.5) член $\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}$ в скобке с множителем D_1 в n^2 раз меньше члена $\frac{\partial^3 w}{\partial y^3}$, если число образующихся при выпучивании волн равно n . Учет перерезывающих сил в первых двух уравнениях равновесия означает удержание в характеристическом уравнении членов порядка n^2 наряду с основными, имеющими порядок n^4 [1]. Удержание при этом члена $D_1 \frac{\partial^2 v}{\partial y^2}$ будет добавлять в характеристическом уравнении к основным членам порядка n^4 члены порядка единицы. Поэтому, даже в самом

неблагоприятном случае $n=2$, с точностью, присущей теории тонких оболочек, член $\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}$ в скобке с множителем D_1 во втором уравнении (1.5), можно, согласно (1.6), представить в виде

$$\frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \approx \frac{\partial^2}{\partial y^2} \left(\int w dy \right), \quad v \approx \int w dy.$$

Учитывая это соотношение, из первых двух уравнений (1.5) находим u , v через w

$$\begin{aligned} \Delta \Delta u &= - \frac{\partial^3 w}{\partial z \partial y^2} + \sigma \frac{\partial^3 w}{\partial z^3} + \frac{(1+\sigma)}{(1-\sigma)} \frac{\partial^2 f(w)}{\partial z \partial y}, \\ \Delta \Delta v &= \frac{\partial^3 w}{\partial y^3} + (2 + \sigma) \frac{\partial^3 w}{\partial z^2 \partial y} - \frac{\partial^2 f(w)}{\partial y^2} - \frac{2}{(1-\sigma)} \frac{\partial^2 f(w)}{\partial z^2}, \\ f(w) &= D_1 \left[\frac{\partial^3 w}{\partial y^3} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \left(\int w dy \right) + \sigma \frac{\partial^3 w}{\partial z^2 \partial y} \right]. \end{aligned} \quad (1.7)$$

Исключая перемещения u , v из третьего уравнения системы (1.5) с помощью (1.7) и пренебрегая при этом членами вида $\frac{\partial^2 w}{\partial z^2}$ по сравнению с $\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}$, приходим к уравнению:

$$\frac{\partial^4 w}{\partial z^4} + \frac{D_1}{1-\sigma^2} \left[\frac{\partial^3 w}{\partial y^3} + 2 \frac{\partial^3 w}{\partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} \right] + \frac{pR}{K(1-\sigma^2)} \left(\frac{\partial^3 w}{\partial y^3} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} \right) = 0.$$

Задаваясь формой волнообразования

$$w = W \cos ny,$$

это уравнение приводим к виду

$$\frac{d^4 W}{dz^4} - p_0^4 W = 0, \quad 0 \leq z \leq \frac{l}{R}, \quad (1.8)$$

где

$$p_0^4 = \frac{pR}{K(1-\sigma^2)} n^4 (n^2 - 1) - \frac{D_1}{1-\sigma^2} n^4 (n^2 - 1)^2, \quad p_0^4 \geq 0. \quad (1.9)$$

Дифференциальное уравнение (1.8) совпадает с уравнением свободных поперечных колебаний балки и может быть проинтегрировано при любых краевых условиях. Его общий интеграл можно представить в форме

$$W = C_1 \sin p_0 z + C_2 \cos p_0 z + C_3 \operatorname{sh} p_0 z + C_4 \operatorname{ch} p_0 z. \quad (1.10)$$

Здесь C_1, C_2, C_3, C_4 — произвольные постоянные. Рассмотрим частные случаи возможных краевых закреплений оболочки.

1. Шарнирное закрепление.

На граничных контурах должны выполняться условия

$$W = W'' = 0 \quad \text{при} \quad z=0, \quad z = \frac{l}{R}.$$

Этим требованиям удовлетворяет функция

$$W = C_1 \sin p_0 z$$

и, следовательно,

$$p_0 = \frac{\pi R}{l}. \quad (1.11)$$

Для оболочки средней длины

$$n^2 \gg 1,$$

и выражение (1.9) после пренебрежений в нем второстепенными членами можно представить в виде

$$p_0^4 = \frac{pR}{K(1-\sigma^2)} n^6 - \frac{D_1}{1-\sigma^2} n^8.$$

Учитывая (1.11), приходим к формуле для критического давления

$$p_{кр} = \frac{1,54 \lambda Eh}{(1-\sigma^2)^{3/4} l} \left(\frac{h}{R}\right)^{3/2}, \quad \lambda = 3,14. \quad (1.12)$$

Эта формула впервые была получена Папковичем [2]. Пределы применимости ее легко могут быть установлены, исходя из более строгого решения, выполненного в статье [3] на основе уравнений пологих оболочек. Применительно к рассматриваемому здесь случаю более точная формула [3] имеет вид

$$p_{кр} = \frac{4,85 Eh}{(1-\sigma^2)^{3/4} l} \left(\frac{h}{R}\right)^{3/2} \cdot \left[1 - \frac{0,9 \sqrt{hR}}{l}\right].$$

Следовательно, формула Папковича может считаться вполне удовлетворительной, если $\frac{\sqrt{hR}}{l} \ll 1$. Этим неравенством устанавливается также область применимости уравнений (1.1) и уравнения (1.8).

2. Жесткое закрепление.

На граничных контурах должны выполняться условия

$$W = W^I = 0 \text{ при } z = 0, z = \frac{l}{R}.$$

Характеристическое уравнение будет

$$\cos p_0 \frac{l}{R} \cdot \operatorname{ch} p_0 \frac{l}{R} = 1, \quad p_0 = 4,73 \frac{R}{l}, \quad \lambda = 4,73. \quad (1.13)$$

Критическое давление определяется по формуле (1.12). Соответствующая фундаментальная функция имеет вид

$$W = \sin p_0 z - \operatorname{sh} p_0 z - \alpha (\cos p_0 z - \operatorname{ch} p_0 z),$$

$$\alpha = \frac{\sin p_0 \frac{l}{R} - \operatorname{sh} p_0 \frac{l}{R}}{\cos p_0 \frac{l}{R} - \operatorname{ch} p_0 \frac{l}{R}}.$$

3. Один край шарнирно закреплен, другой жестко заделан. На границах должны выполняться условия

$$W = W^{II} = 0 \text{ при } z = 0,$$

$$W = W^I = 0 \text{ при } z = \frac{l}{R}.$$

Характеристическое уравнение будет

$$\operatorname{tg} p_0 \frac{l}{R} = \operatorname{th} p_0 \frac{l}{R}, \quad p_0 = 3,93 \frac{R}{l}, \quad \lambda = 3,93. \quad (1.14)$$

Соответствующая фундаментальная функция в этом случае имеет вид

$$W = \sin p_0 z - \alpha \operatorname{sh} p_0 z, \quad \alpha = \frac{\sin p_0 \frac{l}{R}}{\operatorname{sh} p_0 \frac{l}{R}}.$$

4. Один край жестко заделан, другой не имеет никаких закреплений:

$$\text{при } z=0 \quad W = W^I = 0,$$

$$\text{при } z = \frac{l}{R} \quad W^{II} = W^{III} = 0.$$

Характеристическое уравнение в этом случае будет

$$\cos p_0 \frac{l}{R} \operatorname{ch} p_0 \frac{l}{R} = -1, \quad p_0 = 1,875 \frac{R}{l}. \quad (1.15)$$

Фундаментальная функция, соответствующая наименьшему корню (1.15), принимает вид:

$$W = \sin p_0 z - \operatorname{sh} p_0 z - \alpha (\cos p_0 z - \operatorname{ch} p_0 z),$$

$$\alpha = \frac{\operatorname{sh} p_0 \frac{l}{R} + \sin p_0 \frac{l}{R}}{\operatorname{ch} p_0 \frac{l}{R} + \cos p_0 \frac{l}{R}}. \quad (1.16)$$

При данном закреплении оболочки число образующихся при выпучивании волн $n=2$. Поэтому область применимости полученного решения ограничивается неравенством

$$\frac{\partial^2 W}{\partial z^2} \ll n^2 W$$

или, учитывая (1.15) и (1.16)

$$\left(\frac{R}{l}\right)^2 \ll 1.$$

5. Оболочка со свободными краями. Граничные условия:

$$\text{при } z=0, z = \frac{l}{R} \quad W^{II} = W^{III} = 0.$$

Характеристическое уравнение в этом случае

$$\cos p_0 \frac{l}{R} \operatorname{ch} p_0 \frac{l}{R} = 1$$

доставляет наименьший корень

$$p_0 = 0, \quad p_{кр} = \frac{3D}{R^3}.$$

Отсюда следует, что оболочка в процессе деформации ведет себя как кольцо. Аналогично обстоит дело, если один край закреплен шарнирно, а другой не имеет никаких закреплений. В заключение отметим, что рассмотренные задачи для оболочек $\frac{\sqrt{hR}}{l} \ll 1$ являются

по существу линейными, поскольку, как было показано в статье [4], нелинейная теория в этом случае не дает существенной поправки и, следовательно, потеря устойчивости оболочки в „малом“ является в то же время потерей ее несущей способности.

1. Муштары Х. М. Некоторые обобщения теории тонких оболочек с приложениями к задаче устойчивости упругого равновесия. Известия физико-математического общества КГУ, т. XI, сер. 3, 1938.
2. Папкович П. Ф. Расчетные формулы для проверки устойчивости цилиндрической оболочки прочного корпуса подлодок. Бюллетень научно-технического комитета УВМС РККА, вып. 2, 1929.
3. Муштары Х. М. и Саченков А. В. Об устойчивости цилиндрических и конических оболочек кругового сечения при совместном действии осевого сжатия и внешнего нормального давления. ПММ, вып. VI, 1954.
4. Исабаева Ф. С. Определение нижней критической нагрузки цилиндрической оболочки при всестороннем сжатии. Известия Казанского филиала АН СССР, сер. физ.-мат. наук, вып. 7, 1955.

Поступила
27.III 1956 г.

Н. И. Кривошеев

ОБ УСТОЙЧИВОСТИ ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ОБОЛОЧКИ ПОД ДЕЙСТВИЕМ СДВИГА

Используя дифференциальные уравнения динамики упругой оболочки, в § 1 статьи определяем критическую нагрузку для полной цилиндрической оболочки методом малых колебаний.

В § 2 этим же методом рассматривается вопрос об устойчивости при сдвиге цилиндрической панели, шарнирно опертой по всем четырем кромкам.

1. Об устойчивости полной цилиндрической оболочки при кручении. Пусть шарнирно опертая оболочка длины L , толщины h и радиуса R нагружена сдвигающим напряжением τ и совершает упругие поперечные колебания под действием инерционных сил. Уравнения движения оболочки после введения функции напряжений $\bar{\Phi}$ и прогиба \bar{w} примут вид:

$$\frac{D}{h} \Delta^2 \bar{w} + 2\tau \frac{\partial^2 \bar{w}}{\partial x \partial y} - \frac{1}{R} \cdot \frac{\partial^2 \bar{\Phi}}{\partial x^2} + \rho \frac{\partial^2 \bar{w}}{\partial t^2} = 0, \quad (1.1)$$

$$\Delta^2 \bar{\Phi} + \frac{E}{R} \cdot \frac{\partial^2 \bar{w}}{\partial x^2} = 0. \quad (1.2)$$

Здесь за x, y приняты ортогональные координаты соответственно по образующей цилиндра и по касательной к окружности; E — модуль упругости, ν — коэффициент поперечной деформации;

$D = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}$; ρ — плотность материала; t — время;

$$\Delta^2 = (\partial^2/\partial x^2 + \partial^2/\partial y^2)^2.$$

Для удобства вычислений заменим систему (1.1) — (1.2) одним уравнением. Это уравнение легко получим, применяя оператор Δ^2 к уравнению (1.1).

С помощью уравнения (1.2) находим:

$$\frac{D}{h} \Delta^2 \Delta^2 \bar{w} + 2\tau \Delta^2 \left(\frac{\partial^2 \bar{w}}{\partial x \partial y} \right) + \frac{E}{R^2} \cdot \frac{\partial^4 \bar{w}}{\partial x^4} + \rho \Delta^2 \left(\frac{\partial^2 \bar{w}}{\partial t^2} \right) = 0. \quad (1.3)$$

Вводя безразмерные координаты ξ, η и t^* , связанные с x, y и t соотношениями:

$$\xi = \frac{\pi x}{L}, \quad \eta = \frac{y}{R}, \quad t^* = \frac{t}{\sqrt{\rho h/D}} \frac{\pi^2}{L^2}, \quad (1.4)$$

последнему уравнению можно придать вид:

$$\Delta_1^2 \Delta_1^2 \bar{w} + \theta \frac{\partial^4 \bar{w}}{\partial \xi^4} + 24(1-\nu^2) \frac{L^2}{\pi^2 R h^2} + \frac{\tau}{E} \Delta_1^2 \left(\frac{\partial^2 \bar{w}}{\partial \xi \partial \eta} \right) + \Delta_1^2 \left(\frac{\partial^2 \bar{w}}{\partial t^{*2}} \right) = 0, \quad (1.5)$$

где

$$0 = \frac{12}{\pi^4} (1 - \nu^2) \frac{L^4}{R^2 h^2}, \Delta_1^2 = \frac{\partial^4}{\partial \xi^4} + 2\gamma \frac{\partial^4}{\partial \xi^2 \partial \eta^2} + \gamma^2 \frac{\partial^4}{\partial \eta^4}, \gamma = \left(\frac{L}{\pi R}\right)^2. \quad (1.6)$$

Для однозначной характеристики процесса, описываемого уравнением (1.5), решение этого уравнения необходимо подчинить начальным и граничным условиям.

Начальные условия обычно принимаются в форме:

$$\bar{w}(\xi, \eta, t_0) = \varphi(\xi, \eta); \quad \frac{\partial \bar{w}}{\partial t^*} = \psi(\xi, \eta),$$

т. е. в начальный момент времени заданы форма и скорость движения возмущенной поверхности. Граничные условия для шарнирно опертой оболочки будут:

$$M_x = - \left(\frac{\pi}{L}\right)^2 D \left\{ \frac{\partial^2 \bar{w}}{\partial \xi^2} + \nu \gamma \frac{\partial^2 \bar{w}}{\partial \eta^2} \right\} = 0, \quad \bar{w} = 0; \quad (1.7)$$

$$\sigma_x = \frac{1}{R^2} \cdot \frac{\partial^2 \bar{\Phi}}{\partial \eta^2} = 0, \quad \nu = 0 \quad \text{при } \xi = 0, \pi,$$

где ν — перемещение по окружности.

Будем разыскивать решение уравнения (1.5) методом Фурье, т. е. в виде произведения двух функций. Для этого положим:

$$\bar{w} = \sum w_s(\xi, \eta) T_s(t^*). \quad (1.8)$$

Здесь $w_s(\xi, \eta)$ и $T_s(t^*)$ — непрерывные и дифференцируемые необходимое число раз функции.

Подставив (1.8) в (1.5), известным путем получим:

$$\frac{d^2 T_s(t^*)}{dt^{*2}} + \lambda_s^2 T_s(t^*) = 0, \quad (1.9)$$

$$\Delta_1^2 \Delta_1^2 w_s + 0 \frac{\partial^4 w_s}{\partial \xi^4} + 24(1 - \nu^2) \frac{L^2}{\pi^2 R^2 h^2} \cdot \frac{\tau}{E} \Delta_1^2 \left(\frac{\partial^2 w_s}{\partial \xi \partial \eta} \right) - \lambda_s^2 \Delta_1^2 w_s = 0, \quad (1.10)$$

причем λ_s^2 — реальная и положительная величина.

Интегрируя уравнение (1.9), находим:

$$T_s(t^*) = A_s \sin \lambda_s t^* + B_s \cos \lambda_s t^*, \quad (\lambda_s - \text{частота колебаний}).$$

Постоянные A_s и B_s определяются из начальных условий. Уравнение (1.10) совместно с граничными условиями (1.7) при заданном τ описывает задачу об определении собственных значений λ_s и соответствующих им собственных функций w_s . Полагая в случае полной оболочки:

$$w_s = u_s(\xi) e^{in\eta}, \quad (1.11)$$

где n — целое вещественное число, $i = \sqrt{-1}$, уравнение (1.10) приводим к обыкновенному дифференциальному уравнению относительно $u_s(\xi)$:

$$L_1 L_1 u_s(\xi) + 0 \frac{d^4 u_s(\xi)}{d\xi^4} + i\beta \tau^* L_1 \frac{du_s(\xi)}{d\xi} - \lambda_s^2 L_1 u_s(\xi) = 0. \quad (1.12)$$

Здесь введены новые обозначения:

$$n^2 \gamma = \beta, \quad \frac{24}{\pi^2} (1 - \nu^2) \frac{L^2}{h^2} \cdot \frac{\tau}{E} = \tau^*, \quad L_1 = \frac{d^4}{d\xi^4} - 2\beta \frac{d^2}{d\xi^2} + \beta^2. \quad (1.13)$$

Для решения уравнения (1.12) воспользуемся известным методом „возмущений“ по параметру τ^* , полагая

$$\lambda_s^2 = \sum_{p=0}^{\infty} \lambda_{sp} (i\tau^*)^p, \quad u_s(\xi) = \sum_{p=0}^{\infty} u_{sp}(\xi) (i\tau^*)^p. \quad (1.14)$$

В этих разложениях λ_{sp} — постоянные величины, а u_{sp} — функции от ξ . При этом каждая из функций u_{sp} должна удовлетворять всем граничным условиям (1.7). Подставляя выражения (1.14) в уравнение (1.12) и приравнявая коэффициенты при одинаковых степенях τ^* нулю, получим бесконечную систему дифференциальных уравнений для определения постоянных λ_{sp} ($p=0, 1, \dots$) и функций u_{sp} ($p=0, 1, \dots$), в которых для простоты индекс „s“ опущен:

$$L(u_0) = 0;$$

$$L(u_1) - \lambda_1 L_1(u_0) = -\sqrt{\beta} L_1 \left(\frac{du_0}{d\xi} \right); \quad (1.15)$$

$$L(u_n) - \lambda_n L_1(u_0) = \sum_{k=1}^{n-1} \lambda_k L_1(u_{n-k}) - \sqrt{\beta} L_1 \left(\frac{du_{n-1}}{d\xi} \right), \quad n \geq 2.$$

Здесь для сокращения письма обозначено:

$$L(u) = L_1 L_1(u) - \lambda_0 L_1(u) + 0 \frac{d^4 u}{d\xi^4}. \quad (1.16)$$

Первое уравнение этой системы приводит к известной задаче об отыскании собственных значений λ_0 и собственных функций u_0 ненагруженной оболочки. Решение этой задачи при граничных условиях (1.7) легко находится. Следующие уравнения являются неоднородными. Правые части их содержат известные функции, а в левой части, например, 2-го уравнения имеется неизвестная функция $u_1(\xi)$ и неизвестная постоянная λ_1 .

Пусть известно u_0 , которое удовлетворяет граничным условиям. Тогда u_1 определяется в виде ряда по собственным функциям, каждый член которого должен удовлетворять граничным условиям. Функции, входящие в левые части уравнений (1.15), удовлетворяют условиям (1.7), а в правых частях функции вида $\frac{du_0}{d\xi}$ не удовлетворяют им, поэтому эти последние будем разлагать по собственным функциям u_0 . Собственные функции u_0 , удовлетворяющие условиям (1.7), суть:

$$u_0 = \sin m\xi \quad (m = 1, 2, \dots). \quad (1.17)$$

При этом собственное значение λ_0 будет:

$$\lambda_0 = b_m + \frac{\theta m^4}{b_m}. \quad (1.18)$$

где

$$b_m = (m^2 + \beta)^2. \quad (1.19)$$

Наименьшее λ_0 получаем при $m=1$:

$$\lambda_0 = b_1 + \frac{\theta}{b_1}. \quad (1.20)$$

Соответствующая собственная функция будет:

$$u_0 = \sin \xi. \quad (1.21)$$

Второе уравнение при использовании (1.19) — (1.21) принимает вид

$$L(u_1) - \lambda_1 b_1 \sin \xi = -\sqrt{\beta} b_1 \cos \xi. \quad (1.22)$$

В интервале $0 < \xi < \pi \cos p\xi$ можно разложить в ряд Фурье по $\sin p\xi$:

$$\cos p\xi = \frac{4}{\pi} \sum_{\mu} \frac{\mu}{\mu^2 - p^2} \sin \mu\xi, \quad \mu = 2, 4, 6, \dots, \text{ если } p - \text{нечетное} \quad (1.23)$$

$\mu = 1, 3, 5, \dots$, если p — четное.

Заменяя $\cos \xi$ в уравнении (1.22) разложением (1.23), имеем

$$L(u_1) - \lambda_1 b_1 \sin \xi = -V\beta \frac{4}{\pi} \sum_{\mu} \frac{\mu}{\mu^2 - 1} \sin \mu\xi \quad (\mu = 2, 4, 6, \dots). \quad (1.24)$$

Так как $\sin \xi$ тождественно удовлетворяет уравнению $L(\sin \xi) \equiv 0$, а в правой части уравнения (1.24) не содержится $\sin \xi$, то это уравнение имеет решение лишь при

$$\lambda_1 = 0. \quad (1.25)$$

Полагая $\lambda_1 = 0$, находим решение уравнения (1.24):

$$u_1 = c \sin \xi + \sum_{\mu} a_{\mu} \sin \mu\xi = cu_0 + u_1' \quad (\mu = 2, 4, 6, \dots), \quad (1.26)$$

где c — произвольная постоянная, u_1' — частное решение;

$$a_{\mu} = -\frac{b_1}{c_{\mu}} V\beta \frac{4}{\pi} \cdot \frac{\mu}{\mu^2 - 1}, \quad c_{\mu} = b_{\mu} D_{\mu} = b_{\mu} \left(b_{\mu} + \frac{0\mu^4}{b_{\mu}} - \lambda_0 \right). \quad (1.27)$$

Учитывая (1.25) и (1.26), третье уравнение системы (1.15) приводим к виду:

$$L(u_2) - \lambda_2 b_1 \sin \xi = -V\beta L_1 \cdot \frac{d}{d\xi} (cu_0 + u_1'). \quad (1.28)$$

Функция u_2 , удовлетворяющая этому уравнению и граничным условиям, будет слагаться из решения однородного уравнения $L(u_2) = 0$, из решения уравнения $L(u_2) = -V\beta c L_1 \frac{du_0}{d\xi}$ и частного решения, соответствующего правой части уравнения. Следовательно, имеем:

$$u_2 = Bu_0 + cu_1 + u_2', \quad (1.29)$$

где u_2' является частным решением уравнения:

$$L(u_2) - \lambda_2 b_1 \sin \xi = -V\beta L_1 \frac{du_1'}{d\xi}. \quad (1.30)$$

Подставив вместо u_1' его значение из (1.26) и используя разложение (1.23), получим:

$$L(u_2) - \lambda_2 b_1 \sin \xi = -\frac{4}{\pi} V\beta \sum_{\mu} \mu b_{\mu} a_{\mu} \left(\sum_{\rho} \frac{\rho}{\rho^2 - \mu^2} \sin \rho\xi \right), \quad (\mu = 2, 4, 6, \dots); \quad (\rho = 1, 3, 5, \dots). \quad (1.31)$$

Меняя порядок суммирования, находим:

$$\lambda_2 = \frac{4}{\pi} \cdot \frac{V\beta}{b_1} \sum_{\mu} \mu b_{\mu} \frac{a_{\mu}}{1 - \mu^2}. \quad (1.32)$$

и

$$u_2' = \sum_{\rho} a_{\rho} \sin \rho\xi, \quad a_{\rho} = -\frac{4}{\pi} V\beta \sum_{\mu} \frac{\mu b_{\mu} a_{\mu} \cdot \rho}{c_{\rho} (\rho^2 - \mu^2)} \quad (1.33)$$

где ' над знаком суммы означает, что член с $\rho = 1$ в сумме не содержится. Аналогичным образом отыскиваются решения следующих уравнений из системы (1.15). Легко убедиться, что в этом случае $\lambda_m = 0$ при $m = 1, 3, 5, \dots$. Следовательно, в степенном ряду для λ^2 (1.14) имеются только четные степени τ^* .

В результате вычислений указанным путем получим:

$$\lambda_0 = b_1 + \frac{0}{b_1}, \quad {}_0a_1 = 1, \quad {}_0a_{\rho} = 0 (\rho > 1),$$

$$\lambda_1 = 0, \quad {}_1a_{2m+1} = 0, \quad {}_1a_{2m} = -ab_1 \frac{2m}{c_{2m} (4m^2 - 1)},$$

и, вообще,

$$\lambda_{2m+1} = 0, \quad \lambda_{2m} = -\frac{\alpha}{b_1} \sum_{j=1}^{2m} \frac{(2j+1) b_{(2j+1)}^{(2m-1)} a_{(2j+1)}}{(2j+1)^2 - 1}, \quad (1.34)$$

$${}_s a_r = \frac{1}{c_r} \left\{ \sum_{k=1}^{s-1} \lambda_k b_r^{(s-1)} a_r - \alpha \sum_l \frac{r l b_l^{(s-1)} a_l}{r^2 - l^2} \right\}, \quad l \neq r$$

где

$$\alpha = \frac{4}{\pi} V\beta. \quad (1.35)$$

Ряды сходятся как $\frac{1}{m^0}$ при $m \rightarrow \infty$, поэтому численные вычисления легко могут быть проведены.

Для величины λ^2 получаем знакопередающийся ряд

$$\lambda^2 = \lambda_0 - \lambda_2 \tau^{*2} + \lambda_4 \tau^{*4} - \lambda_6 \tau^{*6} + \dots \quad (1.36)$$

Критическое значение τ^* определяется, как известно [1], из условия $\lambda = 0$ при $u \neq 0$.

Полагая $\lambda^2 = 0$, получим уравнение для определения критического значения параметра сдвигающего напряжения

$$\lambda_0 = \lambda_2 \tau_k^{*2} - \lambda_4 \tau_k^{*4} + \lambda_6 \tau_k^{*6} + \dots \quad (1.37)$$

Причем значение параметра β , характеризующего частоту волнообразования в окружном направлении, находится для каждого θ из условия минимальности τ_k^* .

Результаты вычислений, проведенных для нескольких значений θ , сведены в таблицу 1, в которой индексы I, II, III указывают порядок приближения для τ_k^* .

Таблица 1

θ	β	λ_0	λ_2	λ_4	λ_6	τ_k^{*I}	τ_k^{*II}	τ_k^{*III}
0	0,7	2,89	+ 266 · 10 ⁻⁴	13 · 10 ⁻⁶	—	10,4	10,73	—
100	3,6	25,89	+ 4465 · 10 ⁻⁵	2982 · 10 ⁻⁹ + 23 · 10 ⁻¹⁰	—	24,08	24,57	24,34
308	5	44,55	+ 382 · 10 ⁻⁴	6721 · 10 ⁻¹⁰	—	34,15	34,5	—
1070	8	94,21	+ 3533 · 10 ⁻⁵	4823 · 10 ⁻¹⁰	—	51,64	52,6	—

Из приведенной таблицы видно, что степенной ряд для λ^2 при $\tau^* \leq \tau_k^*$ сходится достаточно быстро. Так, например, второе приближение вносит поправку в величину критической нагрузки всего лишь порядка 1—2%. Поэтому, допуская погрешность до 1—2%, критическое значение величины τ^* можно определять из уравнения

$$\tau_k^* = \frac{\lambda_0}{\lambda_2} = \frac{\pi^2 [(1 + \beta)^4 + \theta]}{16\beta (1 + \beta)^2 \sum_{\mu=2,4,\dots} \frac{\mu^2}{(\mu^2 - 1)^2 \left[(\mu^2 + \beta)^2 + \frac{\theta \mu^4}{(\mu^2 + \beta)^2} - (1 + \beta)^2 - \frac{\theta}{(1 + \beta)^2} \right]}} \quad (1.38)$$

При этом заметим, что так как ряд, стоящий в правой части равенства (1.37), является знакоперевающимся с убывающими членами, то сумма этого ряда по абсолютной величине меньше первого члена и больше суммы двух первых членов. Поэтому, пользуясь формулой (1.38), мы определяем критическое значение величины τ^* с недостатком. Обрывая же этот ряд на втором члене, мы находим τ_k^* с избытком.

Таким образом, первое и второе приближения дают вилку, внутри которой лежит искомое значение критической нагрузки. Для сравнения приведем критические значения величины τ^* , вычисленные по формулам работ [2], [3], [4], [5] и по формуле (1.37), удерживая в ряду один и два члена.

Таблица 2

θ	[2]	[3]	[4]	[5]	По формуле (1.37)	
					τ_k^{*I}	τ_k^{*II}
0	—	10,7	11,312	10,7	10,4	10,73
100	21,6	29,2	25,32	—	24,078	24,57
308	32,9	41,36	35,27	—	34,153	34,5
1070	52,35	60,8	54,5	—	51,642	52,6

Из рассмотрения результатов этой таблицы видим, что:

1) решение, данное в работе [3], нельзя считать надежным в случае коротких оболочек, так как величины критических нагрузок для этого класса оболочек отклоняются от более точных их значений почти на 20%, причем эта погрешность направлена в сторону завышения величины критической нагрузки. На это обстоятельство впервые было указано Х. М. Муштари в работе [2];

2) формула, полученная в работе [2], дает удовлетворительные по точности значения критических нагрузок, если параметр $\theta \geq 300$. Формулы же работы [3], как видно из таблицы, имеют более ограниченную область применимости;

3) энергетический метод, использованный для приближенного определения запаса устойчивости в работе [4], уже в первом приближении приводит к удовлетворительным результатам во всей области изменения θ . Учитывая все сказанное, мы предлагаем производить расчет на устойчивость по формуле (1.38) или по формуле

работы [4], если параметр оболочки $\theta \leq 300$; и пользоваться более простой формулой работы [2], если

$$\theta \geq 300.$$

В заключение параграфа отметим, что в предельном случае, когда $\theta = 0$, точное значение параметра критической нагрузки, полученное для этого случая Саутвеллом [5], как и следовало ожидать, лежит внутри вилки, определяемой первым и вторым приближением по формуле (1.37).

§ 2. Устойчивость цилиндрической панели. Решение задачи об устойчивости при сдвиге панели ширины b , толщины h и радиуса кривизны R , шарнирно опертой по всем четырем кромкам, можно провести по методу использованному в предыдущем параграфе.

Полагая в этом случае

$$\pi R = b, \quad \gamma = \frac{1}{\delta}, \quad L = a,$$

где $\delta = \left(\frac{b}{a}\right)^2$, уравнение (1.10) приводим к виду:

$$\Delta^2 \Delta^2 w + k^* \frac{\partial^4 w}{\partial \xi^4} + \alpha \Delta^2 \frac{\partial^2 w}{\partial \xi \partial \eta} - \lambda^2 \Delta^2 w = 0. \quad (2.1)$$

Здесь $k^* = \frac{12(1-\nu^2)}{\pi^4} \cdot \frac{b^2}{h^2 R^2}$ — параметр кривизны панели,

$$\alpha = \frac{24(1-\nu^2)}{\pi^2} \cdot \frac{b^3}{ah^2} \cdot \frac{\tau}{E} \quad \text{— параметр нагрузки} \quad (2.2)$$

$$\Delta^2 = \delta^2 \frac{\partial^4}{\partial \xi^4} + 2\delta \frac{\partial^4}{\partial \xi^2 \partial \eta^2} + \frac{\partial^4}{\partial \eta^4}.$$

Решение уравнения (2.1) будем искать в форме степенного ряда по α :

$$w = \sum_{s=0}^{\infty} w_s \alpha^s, \quad \lambda^2 = \sum_{s=0}^{\infty} \lambda_s \alpha^s \quad (2.3)$$

Подставляя (2.3) в уравнение (2.1), получим:

$$H(w_0) = 0 \quad (2.4)$$

$$H(w_i) - \lambda_i \Delta^2 w_0 = -\Delta^2 \frac{\partial^2 w_i}{\partial \xi \partial \eta},$$

$$H(w_i) - \lambda_i \Delta^2 w_0 = \sum_{k=1}^{i-1} \lambda_{i-k} \Delta^2 w_k - \Delta^2 \frac{\partial^2 w_{i-1}}{\partial \xi \partial \eta}, \quad i \geq 2,$$

где

$$H(w) = (\Delta^2 \Delta^2 + k^* \partial^4 / \partial \xi^4 - \lambda_0 \Delta^2) w. \quad (2.5)$$

Каждая из функций $w_i(\xi, \eta)$ должна удовлетворять граничным условиям на всех четырех кромках.

На кромках $\xi = 0, \pi$

$$w_i = 0, \quad \frac{\partial^2 w_i}{\partial \xi^2}, \quad \sigma_{\xi} = 0, \quad \nu = 0, \quad (2.6)$$

на кромках $\eta = 0, \eta = \pi$

$$w_i = 0, \quad \frac{\partial^2 w_i}{\partial \eta^2} = 0, \quad \sigma_{\eta} = 0, \quad \mu = 0, \quad (2.7)$$

где μ и ν — перемещения соответственно по образующей и по дуге окружности.

Собственные функции ненагруженной панели ($\alpha=0$) суть:

$$w_0 = \sin m\xi \sin n\eta \quad (m, n = 1, 2, 3, \dots) \quad (2.8)$$

При этом:

$$\lambda_{0, mn} = b_{mn} + \frac{k^* m^4}{b_{mn}}, \quad b_{mn} = (\delta m^2 + n^2)^2 \quad (2.9)$$

Наименьшее собственное значение будет при $m=1, n=n_0$. Число n_0 зависит от величины параметра кривизны панели k^* и параметра удлиненности δ :

$$n_0^2 = \sqrt[4]{k^*} - \delta, \quad (2.10)$$

причем для данных k^* и δ за n_0 принимается ближайшее целое число.

Собственной функцией, соответствующей наименьшему собственному значению:

$$\lambda_0 = b_{1n_0} + \frac{k^*}{b_{1n_0}} \quad (2.11)$$

является

$$w_0 = \sin \xi \sin n_0 \eta. \quad (2.12)$$

Второе уравнение с учетом (1.23), (2.11) — (2.12) принимает вид:

$$H(w_1) - \lambda_1 b_{1n_0} \sin \xi \sin n_0 \eta = -\frac{16}{\pi^2} n_0 b_{1n_0} \sum_{\mu} \sum_{q} \frac{\mu q}{(\mu^2 - 1)(q^2 - n_0^2)} \sin \mu \xi \sin q \eta. \quad (2.13)$$

Здесь $\mu=2, 4, 6, \dots$, а q — четное число, если n_0 — нечетное, и нечетное, если n_0 — четное. Справа под знаком суммы не содержится член с $\sin \xi \sin n_0 \eta$, поэтому

$$\lambda_1 = 0. \quad (2.14)$$

Решение уравнения (2.13) при $\lambda_1=0$ с точностью до произвольного решения однородного уравнения имеет вид:

$$w_1 = \sum_{\mu} \sum_{q} a_{\mu q} \sin \mu \xi \sin q \eta, \quad a_{\mu q} = -\frac{n_0 b_{1n_0}}{C_{\mu q}} \cdot \frac{16}{\pi^2} \cdot \frac{\mu q}{(\mu^2 - 1)(q^2 - n_0^2)}, \quad (2.15)$$

где

$$C_{\mu q} = b_{\mu q} D_{\mu q} = b_{\mu q} \left(b_{\mu q} + \frac{k^* \mu^4}{b_{\mu q}} - \lambda_0 \right). \quad (2.16)$$

Полученный ряд для w_1 сходится очень быстро; при $q = \text{const}$ коэффициенты $a_{\mu q}$ стремятся к нулю как $\frac{1}{\mu^2}$ при $\mu \rightarrow \infty$.

Третье уравнение системы (2.4), учитывая (1.23), (2.14), (2.15) приводим к виду:

$$H(w_2) - \lambda_2 b_{1n_0} \sin \xi \sin n_0 \eta = -\frac{16}{\pi^2} \sum_{\rho} \sum_{\sigma} \left[\sum_{\mu} \sum_{q} \frac{\mu q b_{\mu q} a_{\mu q} \rho \sigma}{(\rho^2 - \mu^2)(\sigma^2 - q^2)} \right] \sin \rho \xi \sin \sigma \eta, \quad (2.17)$$

где $\rho=1, 3, 5, \dots$, а σ пробегает четные числа, если n_0 — четное и нечетные, если n_0 — нечетное. Так как в двойной сумме по ρ и σ имеется член $\sin \xi \sin n_0 \eta$, то:

$$\begin{aligned} \lambda_2 &= \frac{16}{\pi^2} \cdot \frac{n_0}{b_{1n_0}} \sum_{\mu} \sum_{q} \frac{\mu q b_{\mu q} a_{\mu q}}{(1 - \mu^2)(n_0^2 - q^2)} = \\ &= -\left(\frac{16}{\pi^2}\right)^2 n_0^2 \sum_{\mu} \sum_{q} \frac{\mu^2 q^2}{D_{\mu q} (\mu^2 - 1)^2 (q^2 - n_0^2)^2} = \\ &= -\left(\frac{16}{\pi^2}\right)^2 n_0^2 \sum_{\mu} \sum_{q} \frac{\tilde{a}_{\mu q}}{(\mu^2 - 1)(q^2 - n_0^2)} \quad \mu = 2, 4, 6, \dots; q \neq n_0. \end{aligned} \quad (2.18)$$

Для w_2 получаем выражение:

$$w_2 = \sum_{\rho} \sum_{\sigma} a_{\rho \sigma} \sin \rho \xi \sin \sigma \eta, \quad a_{\rho \sigma} = \left(\frac{16}{\pi^2}\right)^2 \frac{\sigma \rho}{C_{\rho \sigma}} \sum_{\mu} \sum_{q} \frac{n_0 b_{1n_0} \tilde{a}_{\mu q}}{(\rho^2 - \mu^2)(\sigma^2 - q^2)}. \quad (2.19)$$

Штрих над знаками сумм означает, что из сумм выпускается член с $\rho=1, \sigma=n_0$.

Таким же образом определяется λ_4

$$\lambda_4 = -\lambda_2 \left(\frac{16}{\pi^2}\right)^2 n_0^2 \sum_{\mu} \sum_{q} \frac{\tilde{a}_{\mu q}}{D_{\mu q} (\mu^2 - 1)(q^2 - n_0^2)} + \left(\frac{16}{\pi^2}\right)^4 n_0^2 \sum_{\mu} \sum_{q} \tilde{a}_{\mu q} f_{\mu q}, \quad (2.20)$$

где

$$f_{\mu q} = \sum_{\rho} \sum_{\sigma} \frac{\rho^2 \sigma^2 g_{\rho \sigma}}{(\mu^2 - \rho^2)(q^2 - \sigma^2) D_{\rho \sigma}}, \quad g_{\rho \sigma} = -\sum_{\mu} \sum_{q} \frac{\tilde{a}_{\mu q}}{(\rho^2 - \mu^2)(\sigma^2 - q^2)} \quad (2.21)$$

$$\mu = 2, 4, 6, \dots \quad \rho = 1, 3, 5, 7, \dots, \quad q \neq n_0.$$

Для определения критического значения параметра α при $k^*=100$, $\delta=1$ получаем уравнение:

$$4 + \frac{k^*}{4} - 9,1377 \cdot 10^{-2} \alpha_k^2 - 5,1916 \cdot 10^{-6} \alpha_k^4 - 3,5 \cdot 10^{-9} \alpha_k^6 - \dots = 0. \quad (2.22)$$

Отсюда $\alpha_k = 36,5$. Уравнением (2.22) можно пользоваться для определения запаса устойчивости панелей, параметр которых удовлетворяет условию $k^* \leq 100$. Это следует из того, что для $k^* \leq 100$ $n_0=1$ и числовые коэффициенты почти не изменяются. Так, например, для $k^*=0$ вместо (2.22) имеем:

$$4 - 9,146 \cdot 10^{-2} \alpha_k^2 - 5,28 \cdot 10^{-6} \alpha_k^4 - 3,57 \cdot 10^{-9} \alpha_k^6 - \dots = 0. \quad (2.23)$$

А. С. Вольмир в работе [6] рассматривал устойчивость такой же панели под действием касательных напряжений и, пользуясь для приближенного интегрирования уравнения нейтрального равновесия методом Бубнова-Галеркина, при форме выпущенной поверхности

$$w = \sum_{m, n} c_{mn} \sin m\xi \sin n\eta \quad (m+n = \text{четное})$$

получил, ограничиваясь пятью членами ряда для w , значение

$$\alpha_k = \frac{\alpha_1}{\alpha_2}, \quad \alpha_1 = \frac{9\pi^2}{4} \sqrt{\left(1 + \frac{k^*}{16}\right) \left(1 + \frac{k^*}{256}\right)}, \quad (2.24)$$

$$\alpha_2 = \sqrt{1 + \frac{81}{25} \left[1 + \frac{\omega}{1704} \right] \left[\frac{1}{25 + \frac{\omega}{37200}} + \frac{1}{25 + \frac{\omega}{456}} + \frac{1}{25 + \frac{\omega}{55200}} \right]},$$

где

$$\omega = \frac{\pi^2 k^*}{1 - \nu^2}$$

Сравним критические значения величины α для некоторых k^* , вычисленные по формулам (2.22) и (2.24)

k^*	По формуле (2.22)	По формуле (2.24)
0	18,72	18,82
60	32,2	33,2
100	36,5	38,6

В заключение заметим, что при заданной нагрузке по формуле (1.36) можно легко определить собственную частоту колебаний нагруженной оболочки или панели.

ЛИТЕРАТУРА

1. Папкович П. Ф. Строительная механика корабля, т. II. Судпромгиз, 1947.
2. Муштаер Х. М. Об устойчивости цилиндрической оболочки при кручении концевыми парами. Сборник № 2 трудов КАИ, 1934. Казань.
3. Donnell L. H. Stability of thin-walled tubes under torsion. NASA. Rep. № 479, 1933.
4. Кривошеев Н. И. Влияние начальных неправильностей в форме средней поверхности на устойчивость круговой цилиндрической оболочки при кручении. Изв. КФАН СССР, вып. 10, 1956.
5. Тимошенко С. П. Устойчивость упругих систем, стр. 369, 1955.
6. Вольмир А. С. Устойчивость и большие прогибы цилиндрических оболочек. Тр. ВВИА, вып. 389, 1950.

Поступила
14.XII 1956 г.

Н. И. Кривошеев

ОБ УСТОЙЧИВОСТИ ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ОБОЛОЧКИ ПРИ СОВМЕСТНОМ ДЕЙСТВИИ КРУЧЕНИЯ И РАВНОМЕРНОГО ПОПЕРЕЧНОГО ДАВЛЕНИЯ

В статье рассматривается вопрос об устойчивости цилиндрической оболочки кругового сечения при одновременном действии кручения и поперечного давления. Используя метод Ритца — Папковича, построены границы областей устойчивых значений параметров сдвигающего напряжения и поперечного давления для коротких и средней длины оболочек.

Результаты представлены в виде графиков и формул.

Важнейшие обозначения. L, R, t — соответственно длина, радиус и толщина оболочки; n — число волн в окружном направлении, φ — угол наклона волн к образующей цилиндра; $l = \frac{L}{\cos \varphi}$, $\alpha = \sin^2 \varphi$,

$\beta = \left(\frac{\pi R \cos \varphi}{Ln} \right)^2$, $n_1 = \frac{n}{R}$; τ — модуль внешнего сдвигающего напряжения, P — модуль поперечного давления, $A = (1 - \nu^2) \frac{L^2}{t^2} \cdot \frac{\tau}{E}$ — без-

размерный параметр сдвигающего напряжения, $B = (1 - \nu^2) \frac{L^2}{2t^2} \cdot \frac{PR}{Et}$ —

безразмерный параметр поперечного давления, $H = \sqrt{1 - \nu^2} \frac{L^2}{2tR}$ — пара-

метр оболочки, E — модуль упругости; ν — коэффициент поперечной деформации; $D = Et^3/12(1 - \nu^2)$; Φ — функция напряжений в срединной поверхности, w — прогиб оболочки; x, y — ортогональные координаты точки срединной поверхности, соответственно, по образующей цилиндра и по касательной к окружности; x_1, y_1 — косоугольные координаты той же точки, соответственно, по направлению волн и по касательной к окружности.

$$\Delta_k = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + 2 \sin \varphi \frac{\partial^2}{\partial x_1 \partial y_1} + \frac{\partial^2}{\partial y_1^2}$$

1. Основные соотношения. Пусть шарнирно опертая по торцам оболочка подвергается одновременному действию сдвигающего напряжения τ и равномерного поперечного давления P . Будем предполагать, что равновесие оболочки до потери устойчивости является безмоментным. Для приближенного определения критического значения совместной нагрузки воспользуемся методом Ритца — Папковича, аппроксимируя форму выпученной поверхности функцией

$$w = fl \sin mx_1 \sin ny_1, \quad (1)$$

где $m = \pi/l$, $n_1 = n/R$, f — относительная амплитуда прогиба. Эта функция представляет приближенно форму выпучивания при беско-

нечно малых прогибах в случае потери устойчивости от кручения, в случае же действия только внешнего нормального давления она является точным интегралом уравнения нейтрального равновесия. При форме прогиба (1) выполняется условие

$$w = 0 \text{ при } x_1 = 0, x_1 = l. \quad (2)$$

Равенство момента нулю при $x_1 = 0, l$ выполняется только в среднем, т. е.:

$$\frac{D}{\cos^2 \varphi} \int_0^{2\pi R} \left\{ \frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2} + 2 \sin \varphi \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial x_1 \partial y_1} + (\sin^2 \varphi + \nu \cos^2 \varphi) \frac{\partial^2 w}{\partial y_1^2} \right\} dy_1 = 0. \quad (3)$$

Из уравнения совместности деформации

$$\frac{1}{\cos^2 \varphi} \Delta_k \Delta_k \Phi = -\frac{E}{R} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2} + 2 \sin \varphi \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial x_1 \partial y_1} + \sin^2 \varphi \frac{\partial^2 w}{\partial y_1^2} \right) \quad (4)$$

после подстановки вместо w его выражения из равенства (1) находим функцию напряжений Φ :

$$\Phi = \frac{1-\alpha}{R} E t f \{ b_1 \sin m x_1 \sin n_1 y_1 + b_2 \cos m x_1 \cos n_1 y_1 \} + \tau (x_1 y_1 - \sin \varphi \cdot x_1^2) \cos \varphi - \frac{x_1^2}{2} \cdot \frac{P R}{t} \cos^2 \varphi, \quad (5)$$

где

$$b_1 = \frac{(\alpha + \beta) [(1 + \beta)^2 + 4\alpha\beta] - 8\alpha\beta(1 + \beta)}{n_1^2 [(1 + \beta)^2 - 4\alpha\beta]},$$

$$b_2 = 2\sqrt{\alpha\beta} \cdot \frac{2(1 + \beta)(\alpha + \beta) - (1 + \beta)^2 - 4\alpha\beta}{n_1^2 [(1 + \beta)^2 - 4\alpha\beta]}. \quad (6)$$

При этом граничные условия для тангенциального напряжения σ_x и перемещения v по окружности выполняются в среднем:

$$\int_0^{2\pi R} \sigma_x dy = \int_0^{2\pi R} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y_1^2} dy_1 = 0; \quad \int_0^{2\pi R} v dy_1 = 0. \quad (7)$$

Заметим, что в работе [3] нами была использована форма прогиба (1) для решения задачи об устойчивости цилиндрической оболочки при кручении. При этом оказалось, что величины критических нагрузок вполне удовлетворительно совпадают с более точными их значениями, полученными в работе автора, помещенной в данном сборнике, при выполнении всех граничных условий шарнирного опирания в каждой точке контура.

Полная энергия деформации оболочки и внешних сил

$$\mathcal{E}_1 = \frac{128R^5}{\pi L^3 E} \mathcal{E} = f^2 \left\{ 32 \frac{[(\alpha + \beta)^2 + 4\alpha\beta] [(1 + \beta)^2 + 4\alpha\beta] - 16\alpha\beta(1 + \beta)(\alpha + \beta)}{[(1 + \beta)^2 - 4\alpha\beta]^2} + \right.$$

$$\left. + \frac{2\pi^4}{3H^2 \beta^2} [(1 + \beta)^2 + 4\alpha\beta] - \frac{V\alpha(1-\alpha)}{\beta} \cdot \frac{16\pi^2}{H^2} A - \frac{1-\alpha}{\beta} \cdot \frac{16\pi^2}{H^2} B \right\}. \quad (8)$$

Из условия минимума энергии

$$\frac{\partial \mathcal{E}_1}{\partial f} = 0$$

находим

$$= \beta \left\{ \frac{2}{\pi^2} H^2 \frac{[(\alpha + \beta)^2 + 4\alpha\beta] [(1 + \beta)^2 + 4\alpha\beta] - 16\alpha\beta(\alpha + \beta)(1 + \beta)}{[(1 + \beta)^2 - 4\alpha\beta]^2} + \right.$$

$$\left. + \frac{\pi^2}{24\beta^2} [(1 + \beta)^2 + 4\alpha\beta] \right\}. \quad (9)$$

Этим соотношением и будем пользоваться для определения границы области устойчивых значений A и B .

2. Определение границы устойчивости. Если для конкретного значения геометрического параметра оболочки H приняты некоторые значения параметров α и β , характеризующих форму волнообразования при потере устойчивости, то равенство (9) дает линейную зависимость между величинами A и B . Следовательно, уравнение (9) при фиксированных значениях H , α и β определяет прямую линию, если за прямоугольные координаты принять A и B . В общем же случае при заданном H уравнением (9) определяется двухпараметрическое семейство прямых. Огибающая некоторых прямых этого семейства и будет границей области устойчивых значений A и B . Ввиду сложной зависимости правой части уравнения (9) от α и β аналитическое определение огибающей наталкивается на непреодолимые алгебраические трудности. Поэтому в дальнейшем для определения границы устойчивости мы применим графический метод.

а) *Короткие оболочки.* Для таких оболочек значения параметров α и β , реализующих минимум критической нагрузки, не малы по сравнению с единицей и поэтому в уравнении (9) никаких упрощений сделать не удастся. Полагая $\alpha = \alpha_0 = \text{const}$, мы получаем семейство параллельных прямых. Из этого семейства прямых надо выбрать ту прямую, которая ближе расположена к началу координат. Следовательно, при $\alpha = \alpha_0 = \text{const}$ задача сводится к отысканию минимума правой части уравнения (9), относительно β .

Угол наклона волн к образующей цилиндра изменяется от $\varphi = \varphi_k$, где φ_k — критическое значение угла при чистом сдвиге. С увеличением внешнего давления φ быстро уменьшается и при $B = B_k$ значение φ становится равным нулю, т. е. $0 \leq \varphi \leq \varphi_k$. При этом параметр β изменяется в пределах $\beta_{2k} \leq \beta \leq \beta_{1k}$, где β_{1k} — критическое значение β при чистом сдвиге, β_{2k} — при внешнем давлении. В случае же внутреннего давления угол наклона волн увеличивается с увеличением давления, а параметр β будет $\leq \beta_{1k}$. Разбивая интервал изменения φ на несколько частей, подбираем значения β для точек деления из условия минимума правой части уравнения (9). Путем таких вычислений составлена таблица 1, в которой через M обозначено минимальное значение правой части равенства (9).

Таблица 1

H=25			H=46,6			H=95,4			H=400		
α	β	M	α	β	M	α	β	M	α	β	M
0,5	0,11	9,019	0,3	0,08	10,97	0,3	0,04	19,69	0,2	0,014	52,26
0,35	0,13	7,456	0,25	0,08	10,03	0,22	0,05	16,35	0,15	0,018	42,50
0,28	0,14	6,789	0,21	0,085	9,294	0,18	0,05	14,75	0,1	0,022	33,36
0,25	0,14	6,487	0,19	0,09	8,928	0,14	0,06	13,2	0,07	0,024	27,99
0,20	0,14	6,002	0,15	0,1	8,202	0,12	0,06	11,6	0,05	0,028	24,33
0,15	0,15	5,499									
			0,1	0,1	7,223	0,06	0,07	9,86	0,03	0,032	20,40
			0,05	0,12	6,102	0,04	0,08	8,88	0,016	0,036	17,29
0,14	0,15	5,395	0,02	0,14	5,337	0,02	0,08	7,83	0,008	0,04	15,16
0,06	0,18	4,479									
0	0,21	3,600	0	0,14	4,746	0	0,1	6,500	0	0,045	12,68

По данным этой таблицы легко определяются области устойчивых значений A и B , границы которых изображены на рис. 1. В заключение отметим, что при потере устойчивости от действия внешнего давления неудовлетворение всем граничным условиям в случае коротких оболочек могло бы привести к неточному значению критической нагрузки, так как по длине оболочки при этом образуется

одна полуволна. В нашем случае потери точности не происходят благодаря тому, что с увеличением влияния внешнего давления угол наклона волн уменьшается и, следовательно, точнее удовлетворяются граничные условия. Причем при $B=B_k$ граничные условия шарнирного опирания выполняются в каждой точке контура.

б) Оболочки средней длины ($H \geq 800$). В этом случае вычисления могут быть значительно упрощены путем следующих пренебрежений. Так как для этого класса оболочек величина β может быть самое большее равно 0,03, а значение $\alpha \sim 0,05$, то пренебрегая β и $4\alpha\beta$ по сравнению с единицей, мы допускаем незначительную погрешность при определении критических значений α и β . При определении же величин A и B мы не будем делать таких пренебрежений, поэтому погрешность в их критических значениях будет еще меньше, так как A и B как функции α и β медленно изменяются вблизи своего минимума.

Допуская такую погрешность, имеем:

$$\begin{aligned} & [(1 + \beta)^2 - 4\alpha\beta]^2 \approx 1; \quad (1 + \beta)^2 + 4\alpha\beta \approx 1; \\ & \frac{2}{\pi^2} H^2 \frac{[(\alpha + \beta)^2 + 4\alpha\beta][(1 + \beta)^2 + 4\alpha\beta] - 16\alpha\beta(\alpha + \beta)(1 + \beta)}{[(1 + \beta)^2 - 4\alpha\beta]^2} + \\ & + \frac{\pi^2}{24\beta^2} [(1 + \beta)^2 + 4\alpha\beta] \approx \frac{2}{\pi^2} H^2 \{[(\alpha + \beta)^2 + 4\alpha\beta] - 16\alpha\beta(\alpha + \beta)\} + \frac{\pi^2}{24\beta^2}. \end{aligned} \quad (10)$$

Учитывая это, после дифференцирования равенства (9) по β получим:

$$\alpha^2(1 - 32\beta) + 12\alpha\beta(1 - 4\beta) + 3\beta^2 - \frac{\pi^4}{48H^2} \cdot \frac{1}{\beta^2} = 0. \quad (11)$$

Отсюда, в частности при $\alpha=0$, имеем:

$$\beta_k^2 = \pi^2/12H.$$

Это значение β_k совпадает с критическим значением параметра, полученным другими авторами для оболочек средней длины в случае действия только внешнего давления. При $\alpha \neq 0$ вычисления можно провести следующим образом. Задаем значение параметра β и из уравнения (11) определяем соответствующую этому значению β величину α . После подстановки α и β в уравнение (9) мы можем построить прямую в системе координат A и B . Повторяя этот процесс для других значений β , мы построим семейство прямых, огибающая которых и будет границей области устойчивых значений A и B . Кривые, ограничивающие области, изображены на рисунке:

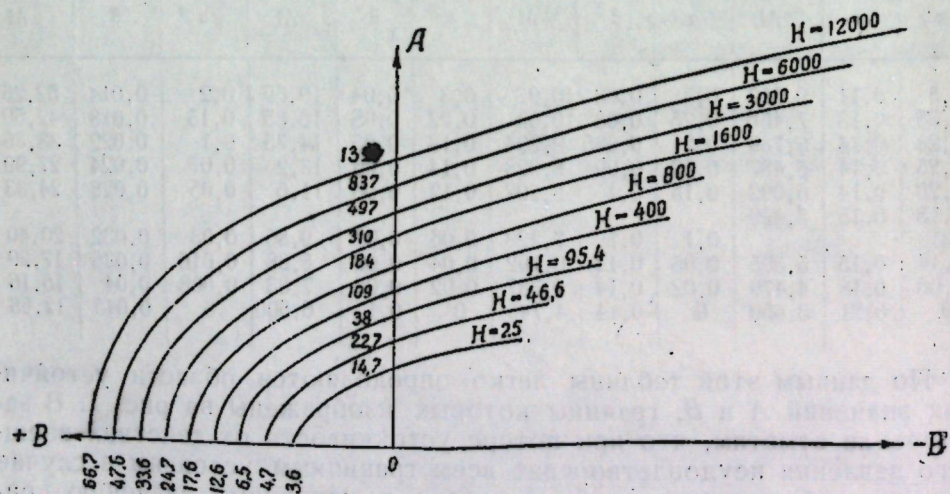


Рис. 1.

Каждая кривая этого рисунка вычерчена в своем масштабе. Полагая $A=0$ и беря точки пересечения этих линий с осью абсцисс, получим критические значения параметра внешнего давления B . Точки пересечения этих же линий с осью ординат ($B=0$) определяют критические значения параметра сдвигающего напряжения A . Если задано отношение $A:B$, то для определения критических значений A и B при совместном действии нагрузок проводим прямую через начало координат с тангенсом угла наклона, равным $A:B$. Точки пересечения этой прямой с кривыми линиями и определяют соответствующие критические величины A и B . Как видно из рисунка, с увеличением внешнего давления критическое значение сдвигающего напряжения резко падает и, наоборот, с возрастанием величины сдвигающего напряжения критическое давление быстро уменьшается.

Внутреннее же давление значительно повышает устойчивость оболочки при кручении.

На рисунке 2 даны графики зависимости $A/A_k = F(B/B_k)$ для оболочек с параметрами $H=25$ и $H=12000$. Здесь A_k и B_k — критические значения величин A и B при раздельном действии нагрузок. Кривые $A/A_k = F(B/B_k)$, соответствующие другим значениям H , не приведены на рисунке ввиду того, что они лежат между указанными двумя кривыми. Кривая, изображенная пунктиром, соответствует зависимости

$$\left(\frac{A}{A_k}\right)^2 + \frac{B}{B_k} = 1. \quad (12)$$

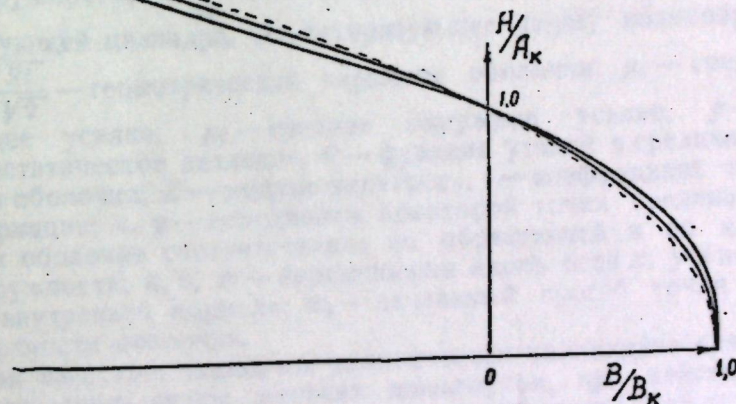


Рис. 2.

Из рисунка видно, что кривые $A/A_k = F(B/B_k)$ мало отличаются от параболы. Поэтому для определения A и B с незначительной погрешностью можно воспользоваться формулой (12). При этом A_k для случая коротких оболочек определяется из уравнения (9) при $B=0$, а B_k находится из формулы:

$$B_k = \pi \sqrt{12H} [1 + 3(1 + \pi/\sqrt{12H})^4] / 72(1 + \pi/\sqrt{12H})^2. \quad (13)$$

Для оболочек с параметром $H > 200$ величины A_k и B_k вполне удовлетворительно по точности определяются формулами

$$A_k = 1,21H^{3/4}; \quad B_k = \frac{\pi}{3\sqrt{3}} H^{1/2}. \quad (14)$$

Вторая формула получена из (13) путем пренебрежения $\frac{\pi}{\sqrt{12H}}$ по сравнению с единицей.

Подставляя (14) в (12), получим при $\nu = 0,3$

$$\left(\frac{\tau}{E}\right)^2 + 0,635 \frac{P}{E} = 0,582 \frac{t^{5/2}}{R^{3/2} L}, \frac{L^2}{tR} > 400. \quad (15)$$

В заключение отметим, что замена границы области устойчивых значений A и B прямой, проходящей через точки A_k и B_k , как иногда поступают при расчетах, основываясь на теореме П. Ф. Папковича [2] о выпуклости области, ведет почти к двукратному занижению критической сдвигающей нагрузки при некоторых значениях давления.

ЛИТЕРАТУРА

1. Муштар Х. М. Об устойчивости цилиндрической оболочки при кручении концевыми парами. Сборник № 2 грудов КАИ, 1934. Казань.
2. Папкович П. Ф. Строительная механика корабля, т. II.
3. Кривошеев Н. И. Влияние начальных неправильностей в форме срединной поверхности на устойчивость цилиндрической оболочки при кручении. Изв. КФАН СССР, серия физ.-мат. и техн. наук, вып. 10, 1956.

Поступила
14.XII 1956 г.

Ф. С. Исанбаева

К ТЕОРИИ УСТОЙЧИВОСТИ ЗАЩЕМЛЕННОЙ ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ОБОЛОЧКИ ПРИ ГИДРОСТАТИЧЕСКОМ ДАВЛЕНИИ

В заметке рассматриваются устойчивость оболочки с защемленными краями, подверженной действию внешнего гидростатического давления, а также влияние на деформацию оболочки начальных несовершенств ее формы. Настоящая заметка представляет часть работы, выполненной под руководством профессора Х. М. Муштари, которому автор выражает свою благодарность.

1. Основные обозначения и соотношения. В ходе решения использованы основные соотношения для цилиндрической оболочки, содержащиеся в работах [1] и [2], и приняты следующие обозначения: R — радиус оболочки, t — толщина, a — длина; n — число волн по окружности, $\delta = \frac{\pi R}{na}$ — отношение длин полуволи по дуге и по образующей цилиндра, характеризующее форму волнообразования; $\theta = \frac{\sqrt{Rt}}{a\sqrt{2}}$ — геометрический параметр оболочки; p_1 — среднее сжимающее усилие, p_2 — среднее окружное усилие, p — внешнее гидростатическое давление, Φ — функция усилий в срединной поверхности оболочки; E — модуль упругости, ν — коэффициент поперечной деформации; x, y — координаты некоторой точки срединной поверхности оболочки соответственно по образующей и по касательной к окружности; u, v, w — перемещения вдоль осей x, y и по направлению внутренней нормали; w_0 — начальный прогиб точки срединной поверхности оболочки.

Как известно, замкнутая тонкостенная цилиндрическая оболочка, подкрепленная рядом жестких шпангоутов, при действии на нее гидростатического давления теряет устойчивость между ребрами с образованием нескольких волн по окружности и одной полуволи по образующей. Рассмотрим отсек оболочки, имеющей начальные неправильности в форме срединной поверхности одного порядка с ее толщиной.

Пусть начальные прогибы точек срединной поверхности оболочки распределяются по закону

$$w_0 = f_0(\sin^2 \alpha \sin n\beta + f' \sin^2 \alpha), \quad (1)$$

где

$$\alpha = \frac{\pi x}{a}, \quad \beta = \frac{y}{R}.$$

Функцию прогиба от нагрузки возьмем в виде

$$w = f_1(\sin^2 \alpha \sin n\beta + f \sin^2 \alpha), \quad (2)$$

где f_1 и f — произвольные варьируемые параметры. Таким образом, мы предполагаем, что начальная неправильность подобна ожидаемому

прогибу от нагрузки, но в отличие от Доннелля [3] и Нэша [4], параметр f' в выражении (1), как независимый от нагрузки, полагаем равным f лишь после минимизации энергии по параметру f .

Решение вида (2) удовлетворяет условиям заземления: $w=0$, $w_x=0$ при $x=0$, a .

Второй член правой части выражения (2) представляет осесимметричный изгиб, направленный к центру кривизны. Так как жесткие шпангоуты не допускают равномерного радиального смещения, этот вид деформации появляется еще до потери устойчивости оболочки. Таким образом, с самого начала напряженное состояние оболочки является моментным.

Подставляя в правую часть уравнения совместности вместо w_0 и w их значения согласно (1) и (2) и интегрируя его, получим следующее выражение функции усилий:

$$\Phi = Et \delta^2 \left\{ \frac{1}{32} f_1 (f_1 + 2f_0) \left(\cos 2n\beta - \frac{\cos 4\alpha}{16\delta^4} + \frac{\cos 2\alpha}{\delta^4} - \frac{\cos 2\alpha \cos 2n\beta}{(\delta^2 + 1)^2} \right) + \right. \\ \left. + \frac{1}{2} f_1 (f_1 f + f_0 f' + f_0 f) \left(\frac{2 \cos 2\alpha \sin n\beta}{(4\delta^2 + 1)^2} - \sin n\beta - \frac{\cos 4\alpha \sin n\beta}{(16\delta^2 + 1)^2} \right) - \right. \\ \left. - \frac{2R}{n^2} f_1 \left(\frac{\cos 2\alpha \sin n\beta}{(4\delta^2 + 1)^2} + f \frac{\cos 2\alpha}{16\delta^4} \right) \right\} + \frac{p_1 y^2}{2} + \frac{p_2 x^2}{2}.$$

В бигармоническую часть функции Φ входят усилия p_1 и p_2 , причем $p_1 = -p \frac{R}{2}$, а p_2 определяется из условия жесткости шпангоутов $\epsilon_{ш} = 0$, которое в рассматриваемом случае совпадает с условием периодичности v по координате y . Перемещение v будет периодической функцией от y , если выполняется равенство

$$\int_0^{2\pi R} v_y dy = \int_0^{2\pi R} \left(\frac{\Phi_{xx} - v \Phi_{yy}}{Et} + \frac{w}{R} - \frac{1}{2} w_y^2 - w_{0y} w_y \right) dy = 0.$$

Подставляя сюда вместо w_0 , w и Φ их значения из (1) — (3), находим:

$$p_2 = \frac{3Et n^2}{32R^2} \left(f_1^2 + 2f_1 f_0 - \frac{16R}{3n^2} f_1 f \right) + v p_1. \quad (4)$$

Далее, на основании соотношений (40.2) и (40.1) монографии [2], учитывая зависимости (3) и (4) и вводя безразмерные параметры

$$\zeta_1 = \frac{f_1}{t} \cdot 2\pi^2 \theta^2, \quad \zeta_0 = \frac{f_0}{t} \cdot 2\pi^2 \theta^3, \quad q = p \frac{16R}{Et} \left(\frac{\pi R}{a} \right)^2, \quad (5)$$

получим выражение полной энергии в виде:

$$\bar{\mathcal{E}} = \frac{64\pi^3 R^3 \mathcal{E}}{Et a^5} = \zeta_1^2 \{ \varphi_1 (\zeta_1^2 + 4\zeta_1 \zeta_0 + 4\zeta_0^2) + \varphi_2 f^2 + \varphi_3 \zeta_1 f + \varphi_4 \zeta_0 f + \varphi_5 f^2 (\zeta_1^2 + 2\zeta_1 \zeta_0 + \zeta_0^2) + \varphi_6 (\zeta_0^2 f'^2 + 2\zeta_1 \zeta_0 f f' + 2\zeta_0^2 f f') - \varphi_7 \zeta_0 f' + \varphi_8 \} - \\ - q/2 \{ (\zeta_1^2 + 2\zeta_1 \zeta_0 + 2\zeta_1^2 f^2 + 4\zeta_1 \zeta_0 f f') + \varphi_9 \zeta_1 f - \frac{1}{16} q^2 (1 - v^2) \} + \frac{3}{4} \frac{v}{\delta^2} \left(\zeta_1^2 + 2\zeta_1 \zeta_0 - \frac{16\delta^2}{3} \zeta_1 f \right) \} - 4q\zeta_1 f - \frac{1}{16} q^2 (1 - v^2), \quad (6)$$

где

$$\varphi_1 = \frac{35}{32\delta^4} + \frac{1}{2} + \frac{1}{4(\delta^2 + 1)^2}, \\ \varphi_2 = \frac{64\delta^4}{(4\delta^2 + 1)^2} + \frac{4\pi^4 \theta^4}{3(1 - v^2)\delta^4} [(4\delta^2 + 1)^2 + 2], \\ \varphi_3 = 24 + \frac{128\pi^4 \theta^4}{3(1 - v^2)}, \quad (7)$$

$$\varphi_4 = \frac{16}{(4\delta^2 + 1)^2} + \frac{4}{(16\delta^2 + 1)^2} + 8, \quad \varphi_5 = -\frac{20}{\delta^2} - \frac{64\delta^2}{(4\delta^2 + 1)^2},$$

$$\varphi_6 = -\frac{10}{\delta^2} - \frac{64\delta^2}{(4\delta^2 + 1)^2}, \quad \varphi_7 = \frac{64\delta^2}{(4\delta^2 + 1)^2}.$$

2. Решение линейной задачи. Полагая $w_0 = 0$, аппроксимируем прогиб функцией

$$w = f_1 \sin^2 \alpha \sin n\beta + f_2 \sin^2 \alpha,$$

где f_1 — величина бесконечно малая, а f_2 — конечная. Выражение полной энергии для этого случая получим из (6), опуская все члены, содержащие ζ_1 в степени выше второй и полагая $\zeta_1 f = \zeta_2$

$$\bar{\mathcal{E}} = \varphi_3 \zeta_2^2 + \varphi_5 \zeta_1^2 \zeta_2 + \varphi_2 \zeta_1^2 - q \left[\frac{1}{2} (\zeta_1^2 + 2\zeta_2) + \frac{3}{8} v \left(\frac{1}{\delta^2} \zeta_1^2 - \frac{16}{3} \zeta_2 \right) + 4\zeta_2 \right] - \\ - q^2 \frac{(1 - v^2)}{16}. \quad (8)$$

Минимизируя энергию (8) по параметрам ζ_1 и ζ_2 , приходим к уравнениям:

$$2\varphi_2 + 2\varphi_5 \zeta_2 - q \left(1 + \frac{3}{4} \frac{v}{\delta^2} \right) = 0 \quad (9)$$

$$\varphi_5 \zeta_2 - q (\zeta_2 - v + 2) = 0.$$

Решая эти уравнения относительно p , имеем:

$$p = \frac{\frac{Et}{R} \frac{a^3}{\pi^2 R^2} \left\{ \frac{4\delta^6}{(4\delta^2 + 1)^2} + \frac{\pi^4 \theta^4}{12(1 - v^2)\delta^2} [(4\delta^2 + 1)^2 + 2] \right\}}{\left\{ \frac{20 - v}{24} + \frac{\delta^2}{2} + \frac{8\delta^4(2 - v)}{3(4\delta^2 + 1)^2} \right\}}. \quad (10)$$

При выводе формулы (10) в выражении коэффициента φ_3 отбрасывался член, содержащий θ , что при $\theta \leq 0,16$ дает ошибку в величине критической нагрузки менее 2%. При больших значениях θ значение p следует определять непосредственно из уравнений (9). Для того, чтобы выяснить, как влияет предположение о моментности первоначального напряженного состояния на величину верхней критической нагрузки, был рассмотрен также случай, когда до потери устойчивости равновесие оболочки является безмоментным и была получена формула

$$p = \frac{\frac{Et}{R} \frac{a^3}{\pi^2 R^2} \left\{ \frac{4\delta^6}{(4\delta^2 + 1)^2} + \frac{\pi^4 \theta^4}{12(1 - v^2)\delta^2} [(4\delta^2 + 1)^2 + 2] \right\}}{\left(\frac{1}{2} \delta^2 + \frac{3}{4} \right)}, \quad (11)$$

аналогичная формуле (7) Нэша [5]. Этот последний случай был рассмотрен также другим путем в статье [6]. Численные результаты, полученные исходя из приведенных решений, представлены в таблице 1. В столбцах 3 и 4 таблицы приведены отношения p/p_0 , в которых p определяется по формулам (10) или (11), а p_0 — критическое

Таблица 1

θ	δ	p/p_0 по формуле (10)	p/p_0 по формуле (11)
1	2	3	4
0,030	0,2	1,32	1,45
0,060	0,3	1,26	1,40
0,090	0,4	1,21	1,38
0,128	0,5	1,20	1,37
0,157	0,6	1,21	1,41
0,182	0,7	1,27	1,46
0,200	0,8	1,35	1,53

давление по формуле Мизеса для оболочки со свободно опертыми краями. Как видно из таблицы, критические нагрузки для оболочек с защемленными краями значительно выше, чем при свободном опирании. Кроме того, решение в предположении, что первоначальное напряженное состояние оболочки является моментным, дает более низкие значения критического давления. Это видно из сравнения столбцов 3 и 4 таблицы. Результаты же, приведенные в столбце 4, совпадают с известными решениями Нэша [5] и Бейлярада [6].

3. Решение нелинейной задачи без учета начальных неправильностей. Прогиб оболочки возьмем в виде (2). В этом случае в выражении полной энергии (6) сохраняем все члены, за исключением членов, содержащих ζ_0 и обозначаем, кроме того, $\zeta_1 f$ через ζ_2 . Согласно условию экстремальности энергии относительно ζ_1 , ζ_2 и δ имеем:

$$4\varphi_1 \zeta_1^2 + 2\varphi_2 + 2\varphi_4 \zeta_2^2 + 2\varphi_5 \zeta_2 - q \left(1 + \frac{3}{4} \frac{\nu}{\delta^2} \right) = 0,$$

$$\varphi_3 \zeta_2 + \varphi_4 \zeta_1^2 \zeta_2 + \frac{1}{2} \varphi_5 \zeta_1^2 - q (\zeta_2 - \nu + 2) = 0,$$

$$\varphi_{13} \zeta_1^2 + \varphi_{23} + \varphi_{43} \zeta_2^2 + \varphi_{53} \zeta_2 + \frac{3}{4} \frac{\nu}{\delta^3} q = 0,$$

где $\varphi_1, \dots, \varphi_5$ определяются из соотношений (7), а $\varphi_{13}, \dots, \varphi_{53}$ — производные от соответствующих φ по δ . Применяя процедуру решения, изложенную в статье [7], найдем значения критических нагрузок для трех параметров θ (таблица 2). Как и в таблице 1, здесь p_0 — критическое давление по Мизесу. Из сравнения таблиц 1 и 2

Таблица 2

θ	δ	p/p_0
0,059	0,3	1,26
0,090	0,4	1,20
0,126	0,5	1,20

видно, что при больших прогибах не происходит заметного снижения критической нагрузки, как это имеет место в случае шарнирного закрепления. Для иллюстрации при $\theta = 0,09$ была просчитана зависимость суммарного прогиба w от приложенной нагрузки (таблица 3).

Таблица 3

q	0,14	0,28	0,42	0,454	0,447	0,454	0,51	0,70
w/t	0,06	0,11	0,17	0,21	0,83	1,64	2,60	3,73

Как видно из таблицы 3, после достижения нагрузкой значения 0,454 происходит быстрое увеличение прогиба при одновременном незначительном уменьшении q .

Рассмотренная задача была решена также в предположении безмоментного начального напряженного состояния оболочки при прогибе, взятом в виде

$$w = f_1 \sin^2 \alpha \sin n\beta + f_2 \sin^2 \alpha + d,$$

где d — равномерное радиальное обжатие цилиндра до потери устойчивости. Как и в случае линейной задачи, такое предположение приводит к более высоким значениям критической нагрузки. Так, например, для $\theta = 0,09$ было получено $p/p_0 = 1,27$ вместо 1,2 по таблице 2.

4. Решение с учетом начальных неправильностей в форме срединной поверхности оболочки. В этом случае в выражении полной энергии (6) сохраняются все члены. Условие экстремальности полной энергии относительно параметров ζ_1 и f дает уравнения

$$\frac{\partial \bar{\mathcal{E}}}{\partial \zeta_1} = 0, \quad \frac{\partial \bar{\mathcal{E}}}{\partial f} = 0.$$

Производя необходимые вычисления и приравнявая $f' = f$, имеем:

$$2\zeta_1 \{ \varphi_1 (\zeta_1 + 2\zeta_0)^2 + \varphi_2 f^2 + \varphi_3 \zeta_1 f + \varphi_6 \zeta_0 f + \varphi_4 f^2 (\zeta_1 + 2\zeta_0)^2 -$$

$$- \varphi_7 \zeta_0 f + \varphi_2 \} + \zeta_1^2 \{ 2\varphi_1 (\zeta_1 + 2\zeta_0) + \varphi_5 f + 2\varphi_4 f^2 (\zeta_1 + 2\zeta_0) \} -$$

$$- q \left[(\zeta_1 + \zeta_0) \left(1 + 2f^2 + \frac{3}{4} \frac{\nu}{\delta^2} \right) - 2f(\nu - 2) \right] = 0$$

$$\zeta_1 \{ 2f\varphi_2 + \zeta_1 \varphi_5 + \zeta_0 \varphi_6 + 2\varphi_4 f (\zeta_1^2 + 3\zeta_1 \zeta_0 + 2\zeta_0^2) \} -$$

$$- 2q [f (\zeta_1 + \zeta_0) - (\nu - 2)] = 0.$$

Исходя из этих уравнений, для $\theta = 0,09$ были получены результаты, приведенные в таблице 4.

Таблица 4

ζ_0	q	0,2	0,3	0,35	0,4	0,454	0,5	0,55	0,6
		w/t							
θ		0,09	0,13	0,15	0,17	0,21 1,64	2,5	2,85	3,2
0,02 (~0,17t)	0,15	0,35	0,55	1,15	1,85	2,40	2,75	3,10	
0,05 (~0,5t)	0,33	0,75	1,10	1,50	2,00	2,35	2,60	2,83	
0,1 (~1,0t)	0,53	1,00	1,30	1,60	1,85	2,05	2,30	2,50	

Как видно из таблицы, наличие начальных неправильностей в форме срединной поверхности оболочки существенно влияет на ее деформацию. На первой стадии нагружения оболочка

более податлива изгибу, так что одному и тому же значению нагрузки при наличии неправильности соответствует прогиб в несколько раз больший, чем без неправильности.

ЛИТЕРАТУРА

1. Вольмир А. С. Устойчивость и большие деформации цилиндрических оболочек. Труды ВВИА им. Н. Е. Жуковского, вып. 389, 1950.
2. Мушгари Х. М., Галимов К. З. Нелинейная теория упругих оболочек, Таткингондат, 1957.
3. Donnell L. H. and Wan C. C. Effect of Imperfections on Buckling of Thin Cylinders and Columns Under Axial Compression. Journal of Applied Mechanics, vol. 17, № 1, 1950.
4. Nash W. A. Effect of Large Deflections and Initial Imperfections on the Buckling of Cylindrical Shells Subject to Hydrostatic Pressure. Journal of the Aeronautical Sciences, vol. 22, № 4, 1955.
5. Nash W. A. Buckling of Thin Cylindrical Shells Subject to Hydrostatic Pressure. Journal of the Aeronautical Sciences, vol. 21, № 5, 1954.
6. Bijlaard P. P. Buckling Stress of Thin Cylindrical Clamped Shells Subject to Hydrostatic Pressure. Journal of the Aeronautical Sciences, vol. 21, № 12, 1954.
7. Исанбаева Ф. С. Определение нижней критической нагрузки цилиндрической оболочки при всестороннем сжатии. Известия Казанского филиала АН СССР, серия физико-математических и технических наук, вып. 7, 1955.

Поступила
16.XII 1957 г.

Б. Г. Газизов

К ВОПРОСУ ОБ УСТОЙЧИВОСТИ КОЛЬЦЕВОЙ ПЛАСТИНЫ

В работе рассматривается устойчивость тонкой кольцевой пластинки, равномерно нагруженной вдоль внутреннего контура силами, направленными к центру. Задача решена для случаев, когда: 1) оба края заделаны; 2) оба края шарнирно оперты; 3) внутренний край жестко заделан при шарнирном опирании внешнего; при этом перемещения считаются малыми. Для определения критических параметров используется метод Бубнова — Галеркина. Рассмотренная задача представляет интерес, в частности, в связи с вопросами листовой штамповки.

§ 1. Принятые обозначения и соотношения

(r, θ) — полярная система координат (начало в центре пластинки),

$2h$ — толщина пластинки,

R и r_0 — внешний и внутренний радиусы, а

$r_1 = (R + r_0)/2$ — средний радиус пластинки,

ν — коэффициент поперечного сжатия, а E — модуль упругости,

$D = 2Eh^3/3(1 - \nu^2)$ — цилиндрическая жесткость, а EI — жесткость на изгиб стержня в плоскости начальной кривизны,

$I = h(R - r_0)^3/6$ — момент инерции относительно нейтральной оси,

$\rho = \frac{r}{R}$ — безразмерная координата, а $t = r_0/R$ — параметр ширины пластинки ($0 \leq t \leq 1$),

p — равномерно распределенная по контуру отверстия радиальная растягивающая нагрузка, отнесенная к единице длины, а

$p_{кр}$ — ее критическое значение;

$L = \frac{(tR)^2 p}{(1 - t^2) D}$ — характеристический коэффициент нагрузки p , а $L_{кр}$ — критическое (минимальное) значение L ,

$p_0 = L_{кр} (1 - t^2)/t^2$ — параметрический коэффициент нагрузки $p_{кр}$,

w — прогиб пластинки, а u — радиальное смещение, n — число волн, образованных вдоль координатной линии $r = \text{const}$, а $n_{кр}$ — критическое число волн,

$M_r = -D \left[\frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \nu \left(\frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial r} \right) \right]$ — изгибающие моменты,

$M_0 = -D \left[\nu \frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial r} \right]$

M_0^0 — постоянный изгибающий момент сечения $\theta = \text{const}$.

В работе исходным является уравнение Брайена [2]

$$\nabla^2 \nabla^2 w = \frac{2h}{D} \left[\sigma_r \frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \sigma_\theta \left(\frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} \right) + 2\tau_{r\theta} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial^2 w}{\partial r \partial \theta} - \frac{1}{r^2} \frac{\partial w}{\partial \theta} \right) \right], \quad (1.1)$$

где ∇^2 — оператор Лапласа в полярных координатах, σ_r , σ_θ , $\tau_{r\theta}$ — радиальное, кольцевое и касательное напряжения, которые определяются из уравнений плоской задачи в следующей форме:

$$\sigma_r = c_1^* - c^*/r^2, \quad \sigma_\theta = c_1^* + c^*/r^2, \quad \tau_{r\theta} = c_2^*/r^2, \quad (1.2)$$

причем c^* , c_1^* , c_2^* — произвольные постоянные, определяемые из граничных условий

$$\sigma_r|_{r=r_0} = p/2h, \quad \sigma_r|_{r=R} = 0, \quad \tau_{r\theta}|_{r=R} = 0. \quad (1.3)$$

Учитывая соотношения (1.2) и (1.3) уравнение (1.1) можно представить в виде:

$$\bar{\nabla}^2 (\bar{\nabla}^2 w + Lw) + \frac{L}{\rho^2} \bar{\nabla}^2 w - \frac{2L}{\rho^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \rho^2} = 0, \quad (1.4)$$

где $\bar{\nabla}^2$ — оператор Лапласа в безразмерных координатах.

§ 2. Постановка задачи

Пусть имеется кольцевая пластинка, находящаяся в условиях нагружения (1.3). Предположим, что выполняется одно из следующих условий закрепления краев пластинки:

$$w|_{\rho=1} = 0, \quad \frac{\partial w}{\partial \rho}|_{\rho=1} = 0, \quad (2.1)$$

(оба края пластинки жестко заделаны),

$$w|_{\rho=1} = 0, \quad M_r|_{\rho=1} = 0, \quad (2.2)$$

(оба края пластинки шарнирно оперты),

$$w|_{\rho=1} = 0, \quad \frac{\partial w}{\partial \rho}|_{\rho=1} = 0, \quad M_r|_{\rho=1} = 0 \quad (2.3)$$

(внутренний край — жестко заделан, внешний — шарнирно оперт).

Требуется определить критическое значение $p_{кр}$ нагрузки (1.3), при которой наступает волнообразная форма потери устойчивости.

С математической точки зрения изложенная задача сводится к краевой для уравнения (1.4) при граничных условиях (2.1), (2.2) или (2.3).

Пусть функция $w = w_0 \tilde{w}$ удовлетворяет одному из граничных условий (2.1), (2.2) или (2.3). Тогда, подставляя эту функцию в уравнение (1.4), затем производя интегрирование по всей площади недеформированной пластинки, будем иметь

$$\int_0^{2\pi} \int_0^1 w_0 \left[\bar{\nabla}^2 (\bar{\nabla}^2 \tilde{w} + L\tilde{w}) + \frac{L}{\rho^2} \bar{\nabla}^2 \tilde{w} - \frac{2L}{\rho^2} \frac{\partial^2 \tilde{w}}{\partial \rho^2} \right] \tilde{w} \rho d\rho d\theta = 0, \quad (2.4)$$

где w_0 — произвольная постоянная, характеризующая первое приближение Бубнова — Галеркина, причем $w_0 \neq 0$.

Далее, предположим, что потеря устойчивости пластинки происходит с образованием складок на поверхности пластинки с узлами вдоль радиусов. Тогда можно полагать

$$\tilde{w}(\rho, \theta) = \psi(\rho) \cos n\theta, \quad (2.5)$$

где $\psi(\rho)$ — функция, характеризующая прогибы пластинки вдоль координаты ρ , удовлетворяющая граничным условиям. При подстановке функции (2.5) в уравнение (1.2) задача сводится к одномерной:

$$\int_1^R \left[\frac{d^4 \psi}{d\rho^4} + \frac{2}{\rho} \frac{d^3 \psi}{d\rho^3} - \left(\frac{1+2n^2+L}{\rho^2} - L \right) \frac{d^2 \psi}{d\rho^2} + \left(\frac{1+2n^2+L}{\rho^2} + \frac{L}{\rho} \right) \frac{d\psi}{d\rho} + n^2 \left(\frac{n^2-4-L}{\rho^4} - \frac{L}{\rho^2} \right) \psi \right] \psi \rho d\rho = 0. \quad (2.6)$$

Отсюда, вводя замену независимой переменной

$$\zeta = \ln \rho, \quad \psi(\rho) = \Psi(\zeta), \quad (2.7)$$

имеем:

$$\int_{\ln 1}^0 e^{-2\zeta} \left[\frac{d^4 \Psi}{d\zeta^4} - 4 \frac{d^3 \Psi}{d\zeta^3} - (2n^2 - 4 + L - Le^{2\zeta}) \frac{d^2 \Psi}{d\zeta^2} + (4n^2 + 2L) \frac{d\Psi}{d\zeta} + n^2 (n^2 - 4 - L - Le^{2\zeta}) \Psi \right] \Psi d\zeta = 0. \quad (2.8)$$

Волнообразная форма потери устойчивости пластинки на упругом основании под действием радиального давления рассматривалась Геккелером [1] при следующих предположениях:

1. Закрепление внутреннего края кольцевой пластинки соответствует упругой поперечной опоре.
2. Кольцо является весьма узким (max ширины равен $1/2$ от общего радиуса).
3. Кольцевые напряжения являются постоянными и определяются по формуле

$$N_0 = 2h\sigma_0 = r_1 p.$$

4. Прогибы w не зависят от ρ и удовлетворяют дифференциальному уравнению

$$\frac{1}{r_1^4} \frac{d^4 w}{d\theta^4} + \frac{N_0}{Dr_1^2} \frac{d^2 w}{d\theta^2} + \frac{\beta^*}{D} w = 0,$$

где β^* — коэффициент сопротивления.

Наше решение существенно отличается от упомянутого, что видно из уравнений (1.2), (1.4), (2.1), (2.2) и (2.3). Конкретные решения задачи при граничных условиях (2.1), (2.2) и (2.3) приводятся ниже.

§ 3. Первая постановка задачи

Граничные условия (2.1) для функции $\Psi(\zeta)$ принимают вид:

$$\Psi(\zeta)|_{\zeta=0} = 0, \quad \frac{d\Psi}{d\zeta}|_{\zeta=0} = 0.$$

Этим граничным условиям удовлетворяет функция

$$\Psi(\zeta) = e^{k\zeta} \sin^2 m_1 \zeta, \quad (3.1)$$

где

$$m_1 = \frac{m\pi}{\ln t}, \quad (m=1) \quad (3.2)$$

k — произвольная постоянная, подбираемая из условий минимизации. После подстановки функции (3.1) в уравнение (2.8) и интегрирования находим коэффициент L в виде

$$L = \frac{3n^4 + 2n^2 B_1^* + B_2^*}{3n^2 B_3^* + B_4^*}, \quad (3.3)$$

где

$$B_1^* = k^2 - 2k - 2 + 4m_1^2,$$

$$B_2^* = 16m_1^4 + 8m_1^2(2k^2 - 4k + 3) + (3k^4 + 20k^2 + 8 - 12k^3 - 16k), \quad (3.4)$$

$$B_3^* = 1 + \beta_0, \quad B_4^* = m_1^4(4\beta_0 - 4) + k^2(\beta_0 - 1) + 2k - 4,$$

$$\beta_0 = \frac{(k-1)[(k-1)^2 + m_1^2][(k-1)^2 + 4m_1^2](1-t^{2k})}{k(k^2 + 4m_1^2)(k^2 + m_1^2)[1-t^{2(k-1)}]}. \quad (3.5)$$

Легко установить, что

$$L = L(t, n, k, m_1), \quad (3.6)$$

критическое значение $L_{кр}$ которого, соответствующее критической нагрузке, определяется с помощью системы уравнений:

$$\frac{\partial L}{\partial n} = 0, \quad \frac{\partial L}{\partial k} = 0, \quad (3.7)$$

при соблюдении условий:

$$\frac{\partial^2 L}{\partial n^2} > 0, \quad \frac{\partial^2 L}{\partial k^2} > 0. \quad (3.8)$$

Учитывая условия (3.8) и (3.5), из системы (3.7) имеем:

$$n_{кр} = \frac{1}{\sqrt{3B_3^*}} \cdot \sqrt{-B_4^* + \sqrt{(B_4^*)^2 + 3B_2^*(B_3^*)^2 - 2B_1^*B_3^*B_4^*}},$$

$$k \approx 2.$$

Подставляя эти значения в (3.3), находим критические значения L :

$$L_{кр} = \frac{16m_1^2}{3(1+\beta_0)^2} \left[1 + \frac{1-3\beta_0}{4m_1^2} + \sqrt{B_1} \sqrt{1 + \frac{B_2}{B_1 m_1^2} + \frac{B_3}{B_1 m_1^4}} \right], \quad (3.9)$$

где положено

$$B_1 = 0,5 \cdot (\beta_0^2 + 2\beta_0 + 3), \quad B_2 = 0,125(11\beta_0^2 + 10\beta_0 + 15),$$

$$B_3 = 0,125(7\beta_0^2 + \beta_0 + 3), \quad \beta_0 = 0,125 \cdot (1 + 4m_1^2)(1 + t^2)/(4 + m_1^2). \quad (3.10)$$

Учитывая обозначения § 1 и формулу (3.9), критическую нагрузку $L_{кр}$ найдем в форме

$$p_{кр} = p_0 D/R^2 \quad (3.11)$$

$$p_0 = L_{кр} \cdot (1 - t^2)/t^2. \quad (3.12)$$

Для пластины, параметры t которых удовлетворяют условию

$$0,1 \leq t \leq 1, \quad (a)$$

коэффициент $L_{кр}$ можно определить по формуле

$$L_{кр} = \frac{16m_1^2}{3(1+\beta_0)^2} \left[1 + \sqrt{B_1} + \frac{(1-3\beta_0)\sqrt{B_1+2B_2}}{4m_1^2\sqrt{B_1}} \right], \quad (3.13)$$

получаемой из (3.9), если пренебречь там членом $B_3/B_1 m_1^4$ по сравнению с единицей, т. е. при

$$(\ln t)^2 \ll \pi^2 \sqrt{B_1/B_3}$$

и ограничиться двумя членами разложения радикала по формуле бинома Ньютона.

Наконец, если параметр t удовлетворяет условию

$$0,5 \leq t \leq 1 \quad (b)$$

то $L_{кр}$ можно определить по более простой формуле

$$L_{кр} = \frac{16m_1^2(1 + \sqrt{B_1})}{3(1 + \beta_0)^2}, \quad (3.14)$$

полученной из формулы (3.13), если пренебречь в ней последним членом по сравнению с единицей, т. е. при

$$(\ln t)^2 \ll (2\pi)^2 \frac{\sqrt{B_1}}{(1-3\beta_0)\sqrt{B_1+2B_2}}.$$

Применение формулы (3.14) в более широком интервале (a) дает предельную абсолютную погрешность 5%.

Если в формуле (3.3) положить $n=0$, то имеем

$$L = B_2^*/B_4^*. \quad (3.15)$$

Исследования показывают, что для всевозможных значений t, k, m_1 коэффициент L (3.15) является отрицательной величиной. Это обстоятельство указывает на невозможность симметричной формы потери устойчивости при условиях (1.3) и (2.1).

§ 4. Вторая постановка задачи

Будем считать, что имеют место граничные условия (2.2), которые для функции $\Psi(\zeta)$ принимают вид:

$$\Psi(\zeta) \Big|_{\zeta=0}^{\zeta=\ln t} = 0, \quad \left(\frac{d^2 \Psi}{d\zeta^2} - (1-\nu) \frac{d\Psi}{d\zeta} \right) \Big|_{\zeta=0}^{\zeta=\ln t} = 0.$$

Эти условия удовлетворяются следующей функцией

$$\Psi(\zeta) = e^{k\zeta} \sin m_1 \zeta, \quad (4.1)$$

$$k = \frac{1-\nu}{2},$$

$$m_1 = \frac{m\pi}{\ln t}, \quad (m=1). \quad (4.2)$$

Подставляя функцию (4.1) в уравнение (2.8) и интегрируя, находим:

$$L = \frac{n^4 + B_1 n^2 + B_2^*}{(1 + \beta_0)(n^2 + B_3^*)}, \quad (4.3)$$

где

$$B_1^* = 2m_1^2 + 2k(k-2), \quad B_2^* = m_1^4 + 2k(2-k)m_1^2 - 3k^4 + 12k^3 - 16k^2 + 8k,$$

$$B_3^* = (m_1^2 + k^2) \cdot \frac{(\beta_0 - 1)}{(\beta_0 + 1)} + \frac{2(k-1)}{(\beta_0 + 1)}, \quad (4.4)$$

$$\beta_0 = \frac{(k-1)[(k-1)^2 + m_1^2](1-t^{2k})}{k(k^2 + m_1^2)[1-t^{2(k-1)}]}.$$

Очевидно в данном случае параметр k является известной величиной, поэтому L следует минимизировать лишь по параметру n . Из условия $\frac{\partial L}{\partial n} = 0$ имеем:

$$n_{кр} = \sqrt{-B_3^* + \sqrt{B_2^* - B_1^* B_3^* + (B_3^*)^2}} \quad (4.5)$$

Подставляя это значение $n_{кр}$ в формулу (4.3), находим

$$L_{кр} = \frac{4m_1^2}{(1 + \beta_0)^2} \left[1 + \frac{B_3}{m_1^2} + \sqrt{1 + \frac{B_1}{m_1^2} + \frac{B_2}{m_1^4}} \right], \quad (4.6)$$

где введены новые обозначения

$$\begin{aligned} B_1 &= \beta_0^2(2k - k^2) + 2\beta_0(k - k^3) + (k^2 - 2k + 2), \\ B_2 &= \beta_0^2(2k - 4k^2 + 4k^3 - k^4) + 2\beta_0(k - 3k^2 + 3k^3 - k^4) + (1 - k)^2, \\ B_3 &= (1 - k)^2 - k\beta_0. \end{aligned} \quad (4.7)$$

Критическую нагрузку, как и ранее, представим в виде:

$$p_{кр} = p_0 D/R^2 \quad (4.8)$$

$$p_0 = L_{кр} (1 - t^2)/t^2 \quad (4.9)$$

Если параметр t удовлетворяет условию $0,1 \leq t \leq 1$, то способом, изложенным в § 3, из (4.6) имеем:

$$L_{кр} = \frac{2m_1^2}{(1 + \beta_0)^2} \left(4 + \frac{B_1 + 2B_2}{m_1^2} \right), \quad (4.10)$$

откуда для более узкого интервала $0,5 \leq t \leq 1$ получаем:

$$L_{кр} = 8m_1^2 / (1 + \beta_0)^2. \quad (4.11)$$

При $n = 0$ формула (4.3) принимает вид

$$L = B_2^* / (1 + \beta_0) B_3^*. \quad (4.12)$$

Исследования показывают, что L является отрицательной величиной для всех t, m_1 .

Следовательно, при условиях (1.3), (2.2) симметричная форма потери устойчивости также невозможна.

§ 5. Третья постановка задачи

Граничные условия (2.3) для функции $\psi(\rho)$ (2.5) принимают вид

$$\psi(\rho) \Big|_{\rho=1} = 0, \quad \frac{d\psi}{d\rho} \Big|_{\rho=1} = 0, \quad \left(\frac{d^2\psi}{d\rho^2} + \frac{\nu}{\rho} \frac{d\psi}{d\rho} \right) \Big|_{\rho=1} = 0.$$

Этим условиям удовлетворяет функция

$$\psi(\rho) = \rho (l_1 + l_2\rho + l_3\rho^2 + l_4\rho^3 + \rho^4), \quad (5.1)$$

где

$$\begin{aligned} l_1 &= t^2 + 2t^2(1 - t)^2 : z, \quad l_2 = -2t(1 + t) - 2t(1 + t)(1 - t)^2 : z, \\ l_3 &= (1 + 4t + t^2) + 2(1 + 2t)(1 - t)^2 : z, \quad l_4 = -2(1 + t) - 2(1 - t)^2 : z, \\ z &= (6 + \nu) - 2(4 + \nu)t + (2 + \nu)t^2. \end{aligned} \quad (5.2)$$

Подставляя функцию (5.1) в уравнение (2.3) и выполняя интегрирование, после необходимых преобразований и минимизации L по параметру n , находим:

$$L_{кр} = \frac{1}{(B_4)^2} (B_2 B_4 - 2B_1 B_5 + 2 \sqrt{(B_1 B_5)^2 + B_1 B_3 (B_4)^2 - B_1 B_2 B_4 B_5}), \quad (5.3)$$

где обозначено

$$\begin{aligned} B_1 &= 3\nu^2(1 - t)^2(1 + t)(3 - 32t + 171t^2 - 704t^3 + 171t^4 - 32t^5 + 3t^6) + \\ &+ 12\nu(1 - t)^2(15 - 146t + 698t^2 - 2578t^3 - 856t^4 + 1454t^5 - 310t^6 + \\ &+ 46t^7 - 3t^8) + 12(1 - t)(77 - 753t + 3584t^2 - 12744t^3 + 3090t^4 + \\ &+ 6366t^5 - 3504t^6 + 584t^7 - 63t^8 + 3t^9) - T, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} B_2 &= 6\nu^2(1 - t)^2(1 + t)(5 - 16t - 51t^2 + 544t^3 - 51t^4 - 16t^5 + 5t^6) + \\ &+ 24\nu(1 - t)^2(25 - 66t - 274t^2 + 2246t^3 + 776t^4 - 1114t^5 + 62t^6 + \\ &+ 30t^7 - 5t^8) + 24(1 - t)(175 - 667t - 420t^2 + 9476t^3 - 2158t^4 - \\ &- 5098t^5 + 2084t^6 + 12t^7 - 49t^8 + 5t^9) + 2T, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} B_3 &= 3\nu^2(1 - t)^2(1 + t)(227 - 1040t + 2187t^2 - 3168t^3 + 2187t^4 - \\ &- 1040t^5 + 227t^6) + 12\nu(1 - t)^2(1135 - 4486t + 7194t^2 - 6750t^3 - \\ &- 1752t^4 + 6018t^5 - 4566t^6 + 1754t^7 - 227t^8) + \\ &+ 12(1 - t)(3353 - 14221t + 26236t^2 - 31084t^3 + 2894t^4 + \\ &+ 25658t^5 - 25708t^6 + 11980t^7 - 2695t^8 + 227t^9) - T, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} B_4 &= \nu^2(1 - t)^2(1 + t)(11 - 112t + 569t^2 - 2224t^3 + 653t^4 - 208t^5 + \\ &+ 65t^6 - 16t^7 + 2t^8) + 8\nu(1 - t)^2(28 - 259t + 1168t^2 - 4055t^3 - \\ &- 1151t^4 + 2209t^5 - 605t^6 + 193t^7 - 59t^8 - 12t^9 - t^{10}) + \\ &+ 8(1 - t)(147 - 1367t + 6133t^2 - 20401t^3 + 5768t^4 + 9332t^5 - \\ &- 5872t^6 + 1604t^7 - 487t^8 + 119t^9 - 17t^{10} + t^{11}) - T, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} B_5 &= \nu^2(1 - t)^2(1 + t)(-23 + 184t - 737t^2 + 2392t^3 - 653t^4 + 40t^5 + \\ &+ 103t^6 - 56t^7 + 10t^8) + 8\nu(1 - t)^2(-55 + 400t - 1414t^2 + 4103t^3 + \\ &+ 1529t^4 - 2671t^5 + 689t^6 + 23t^7 - 124t^8 + 45t^9 - 5t^{10}) + \\ &+ 4(1 - t)(-567 + 4243t - 15230t^2 + 42314t^3 - 8566t^4 - \\ &- 23578t^5 + 13508t^6 - 1444t^7 - 1123t^8 + 647t^9 - 134t^{10} + 10t^{11}) + T, \\ T &= 2520[\nu^2(1 - t)^2 + 8\nu(1 - t)(2 - t) + 16(2 - t)^2]t^4 \ln t. \end{aligned} \quad (5.4)$$

Для критической нагрузки получаем формулу

$$\begin{aligned} p_{кр} &= p_0 D/R^2, \\ p_0 &= L_{кр} (1 - t^2)/t^2. \end{aligned} \quad (5.5)$$

Если параметр t пластинки подчинить условию $0,5 \leq t \leq 1$, то вместо формулы (5.3) можно пользоваться следующей приближенной формулой

$$L_{кр} = \frac{1}{B_4^2} (B_2 B_4 - 2B_1 B_5 + 2 \sqrt{(B_1 B_5)^2 - B_1 B_2 B_4 B_5}).$$

§ 6. Плоская потеря устойчивости кольцевой пластинки

Предположим, что весьма узкая круглая кольцевая пластинка ($0,7 \leq t \leq 1$) равномерно нагружена вдоль внутреннего контура радиально растягивающими силами p .

Очевидно при этом сжимающее кольцевое напряжение σ_0 , как и прежде, распределено по параболическому закону:

$$\sigma_0 = -\frac{pt^2}{2h(1 - t^2)} \left(1 + \frac{1}{\rho^2} \right).$$

Однако, в пределах весьма узкого кольца этот закон может быть заменен с точностью до малых высшего порядка линейным законом распределения этих напряжений так, что в каждом сечении $\theta = \text{const}$ будем иметь постоянную сжимающую силу S и изгибающий момент M_0^0 [4], [5].

Такая же схема напряженного состояния предполагается в случае, рассмотренном Морисом Леви [3], когда по наружному контуру

круглого кольца приложены равномерно распределенные радиально сжимающие силы q . Следовательно, для определения критической нагрузки $p_{кр}$ в нашем случае может быть применен метод Мориса Леви.

Используя уравнение упругой линии криволинейного бруса малой кривизны [5]

$$\frac{d^2 u}{d\theta^2} + u \left(1 + \frac{pr_1^3}{EI} \right) = \frac{pr_1^3 u_0 - M_0^3 r_1^3}{EI} \quad (6.1)$$

и естественные граничные условия

$$\left(\frac{du}{d\theta} \right)_{\theta=0} = 0, \quad \left(\frac{du}{d\theta} \right)_{\theta=0,5\pi} = 0,$$

находим следующее значение критической нагрузки

$$p_{кр} = p_0 D / R^2, \quad (6.2)$$

$$p_0 = 6(1 - \nu^2) \left(\frac{1-t}{1+t} \right)^2 \left(\frac{R}{h} \right)^2. \quad (6.3)$$

Данное выражение (6.3) параметрического коэффициента отличается от предыдущих (см. формулы (3.9) и (3.12), (4.6) и (4.9), (5.3) и (5.5)) наличием в нем множителя $\left(\frac{R}{h} \right)^2$, появившегося по той причине, что если в уравнении Брайена (1.1) фигурировала цилиндрическая жесткость D , то в уравнении упругой линии (6.1) фигурирует EI — жесткость на изгиб стержня в плоскости начальной кривизны.

Легко видеть, что при тех же условиях нагружения (1.3) и закрепления краев круглая кольцевая пластинка будет испытывать волнообразную форму потери устойчивости, если ее параметр ширины t удовлетворяет условию $0 \leq t \leq t_1$ и будет испытывать потерю устойчивости в своей собственной плоскости, если $t_1 \leq t \leq 1$, где t_1 — то значение параметра t , при котором две формы потери устойчивости переходят друг в друга, и должно быть определено из уравнений:

$$(p_0)_{(6.3)} = (p_0)_{(3.12)} \quad (\text{для жестко закрепленных краев});$$

$$(p_0)_{(6.3)} = (p_0)_{(4.9)} \quad (\text{для шарнирно опертых краев});$$

$$(p_0)_{(6.3)} = (p_0)_{(5.5)} \quad (\text{для смешанного закрепления}),$$

которые могут быть решены графическим способом.

Решение (6.2), (6.3), полученное для весьма узкой пластинки (когда ширина $(R - r_0)$ пластинки является величиной одного порядка с ее толщиной $2h$), распространяемо на более широкие пластинки. Например, можно рассматривать значения, определяемые неравенством

$$0,3 < t \leq 1. \quad (с)$$

Наконец, для того, чтобы сопоставить решение (6.2), (6.3) с решениями предыдущих трех параграфов, предположим, что пластинка является тонкой; будем считать, что

$$\max \left(\frac{2h}{R} \right) \leq \frac{1}{20}. \quad (6.4)$$

Подставляя отсюда $\frac{R}{h}$ в формулу (6.3), будем иметь следующее выражение для минимального значения p_0 :

$$p_0 = 150(1 - \nu^2) \left(4 \frac{1-t}{1+t} \right)^2. \quad (6.5)$$

§ 7. Результаты вычислений

Параметрический коэффициент p_0 критической нагрузки $p_{кр}$ изменяется в зависимости от параметра t пластинки точно так же, как сама нагрузка $p_{кр}$. Поэтому достаточно ограничиться вычислением только этого коэффициента.

Вычисления произведены для всех постановок задачи по формулам (3.9) и (3.12), (4.6) и (4.9), (5.3) и (5.5), справедливым при всевозможных значениях параметра t ($0 \leq t \leq 1$) и по формуле (6.5), справедливой при $0,3 < t \leq 1$.

Для счета были использованы счетные машины-автоматы типа „Rheinmetall“, причем для I, II постановок задачи счет производился по системе „пяти значащих цифр“, а для III постановки задачи — по системе „восьми значащих цифр“.

Результаты вычислений параметрического коэффициента p_0 при

$$\nu = \frac{1}{3}, \quad t = 0,1, \quad t = 0,2 \dots t = 0,9$$

приведены в таблице 1, причем первая строка таблицы вычислена по формулам (3.9) и (3.12), вторая — (4.6) и (4.9), третья — (5.3) и (5.5), четвертая — (6.5).

В столбцах таблицы, соответствующих значениям $t = 0$ и $t = 1$, приведены значения параметрического коэффициента p_0 , полученные путем предельного перехода.

Таблица 1

	$t = 0$	$t = 0,1$	$t = 0,2$	$t = 0,3$	$t = 0,4$	$t = 0,5$	$t = 0,6$	$t = 0,7$	$t = 0,8$	$t = 0,9$	$t = 1$
$p_0(3.12)$	∞	1959	878,6	501,9	395,5	353,4	347,9	379,7	479,6	820,0	∞
$p_0(4.9)$	∞	1632	595,4	358,5	267,1	227,2	214,4	225,9	276,5	462,3	∞
$p_0(5.5)$	∞	1777	788,5	454,9	332,7	259,3	242,5	250,0	417,1	624,6	∞
$p_0(6.5)$	1332	671,8	316,0	133,3	46,91	10,10	1,244	0

Анализируя приведенные в таблице 1 данные, приходим к следующим выводам.

Выводы

1. Пластинки с жестко заделанными краями испытывают волнообразную форму потери устойчивости при больших значениях нагрузок p по сравнению с шарнирно опертыми.

2. „Весьма узкие“ пластинки (с большим значением параметра t) испытывают потерю устойчивости в собственной плоскости раньше, чем наступает волнообразная форма потери устойчивости. В этом отношении, в силу самой постановки задачи, когда пластинка рассматривается как стержень, теряются различия, связанные с характером закрепления краев.

3. Область волнообразной формы потери устойчивости для пластин с жестко заделанными краями уже, чем в случае шарнирного опирания.

4. С увеличением отношения $\frac{R}{2h}$ область волнообразной формы потери устойчивости увеличивается, в то время как область плоской формы потери устойчивости уменьшается. При уменьшении отношения $\frac{R}{2h}$ наблюдается обратная картина.

1. И. В. Геккелер. „Zeitschrift für Angewandte Math. und Mechanik“ Band 8, Heft 5, 1928, стр. 23.
2. С. Н. Вгуан. Proc. Math. Soc. Лондон, том 22, стр. 54, 1891.
3. М. Леви. „J. Math. pure et appl. (Liouville)“, серия 3, том 10, стр. 5, 1884.
4. С. П. Тимошенко. „Теория упругости“, Лондон, 1934.
5. С. П. Тимошенко. „Устойчивость упругих систем“. Госиздат тех.-теор. лит., Москва, 1955.

Поступила
30.IX 1957 г.

Б. М. Зуев

РАЗДЕЛЕНИЕ ГЛАВНЫХ ИЛИ КВАЗИГЛАВНЫХ НАПРЯЖЕНИЙ В ПРОЗРАЧНЫХ МОДЕЛЯХ ОПТИЧЕСКИМ МЕТОДОМ

В работе рассматривается принципиальная схема и конструкция интерферометра с двойным ходом луча. Разработанная аппаратура предназначена для замеров абсолютной разности хода лучей, прошедших нагруженную модель по отношению к лучам, проходящим мимо ненагруженную модель. Кроме того прибор позволяет наблюдать и фотографировать картину полос, пропорциональную $(\sigma_1 - \sigma_2)$ и замерять параметры изоклины с компенсацией разностей хода по точкам с помощью компенсатора.

Предложенная конструкция интерферометра была выполнена в виде работающего макета и применяется для исследования напряженного состояния как плоской, так и объемной прозрачной модели в лаборатории сектора механики Физико-технического института КФАН СССР.

1. Принципиальная схема прибора и основные зависимости для интенсивности проходящего монохроматического луча. Для определения значений главных или квазиглавных напряжений в прозрачной модели предлагается использовать величины абсолютных разностей хода, измеренных с помощью интерферометра.

В настоящее время разработано большое количество схем интерферометров для самых разнообразных целей исследования. Наиболее широкое распространение получили интерферометры Майкельсона и Маха — Зендера.

Схемы этих приборов отличаются тем, что в них интерферирующие пучки значительно удалены друг от друга, что позволяет вводить исследуемые объекты больших габаритов.

Последнее послужило решающим фактором в выборе схемы предлагаемого ниже интерферометра. Специфические требования поставленной задачи повлекли за собой существенные изменения в конструктивном оформлении аппаратуры, а также некоторую модификацию принципиальной схемы.

В общем случае напряженного состояния тела величины составляющих тензора напряжений изменяются от точки к точке как по величине, так и по направлению. Если направления квазиглавных напряжений по толщине вырезанного шлифа остаются постоянными, а величина их меняется, то абсолютная разность хода по направлению действия σ_1^0 и σ_2^0 соответственно равна

$$\begin{aligned} \delta_1 &= C_1 \int_0^t \sigma_1^0 dt + C_2 \int_0^t (\sigma_2^0 + \sigma_3^0) dt, \\ \delta_2 &= C_1 \int_0^t \sigma_2^0 dt + C_2 \int_0^t (\sigma_1^0 + \sigma_3^0) dt, \end{aligned} \quad (1.1)$$

где σ_1^0, σ_2^0 — квазиглавные или главные напряжения,

C_1, C_2 — постоянные фотоупругости,
 δ_1, δ_2 — разность хода луча,
 t — толщина модели или шлифа.

При наличии изменений в направлении напряжений по толщине шлифа разность хода (1.1) получит некоторое добавочное запаздывание за счет вращения. Явление вращения несколько затрудняет исследования в обычных условиях, так как угол поворота можно определить только путем проб [1]. Исходя из вышесказанного, при выборе схемы интерферометра наиболее удобным в исследованиях общего случая напряженного состояния следует считать интерферометр с двойным ходом луча по типу Майкельсона. Двойной ход в рабочей ветви автоматически обеспечивает возврат плоскости колебаний поляризованного луча в нормальное положение, так как световой вектор, вращаясь вместе с квазиглавым напряжением, при обратном ходе должен вернуться в исходную плоскость распространения луча. Кроме того, такая схема прибора позволяет использовать для исследований шлифы, в два раза тоньше применяемых в простом полярископе. Уменьшение толщины повышает точность эксперимента за счет усреднения результирующей на сравнительно малом расстоянии.

При исследовании пространственных задач оптическим методом, как показала практика, следует придерживаться метода компенсации по точкам. Все существующие марки оптически активных материалов имеют малое число полос на миллиметр толщины при критической нагрузке, что не обеспечивает достаточной точности при применении метода полос в изучении пространственного распределения напряжений на шлифах. Из чисто оптических методов разделения напряжений по точкам заслуживает внимания метод, предложенный Фавром [2]. Однако необходимость очень точного изготовления моделей, и обязательно из стекла, делает его непригодным для исследования сложноподвижного состояния. Также непригодна и принципиальная схема прибора Фавра, так как им использовался интерферометр Маха — Зендера в комбинации с обычным полярископом. Наряду с этим, сама методика замера абсолютной разности хода вполне приемлема для решения поставленной задачи.

Для измерения величин абсолютной разности хода, пропорциональной, в общем случае, квазиглавному напряжению, целесообразнее использовать схему интерферометра Майкельсона. На рис. 1 приведена такая схема, в рабочие ветви которой включены специальные приспособления, позволяющие с помощью поляризованного света получить нужные характеристики на одной модели из пластика с грубо обработанными поверхностями.

Пучок монохроматического света от неоновой или ртутной лампы низкого давления проходит коллиматор K , в параллельном световом потоке которого помещены фильтр Φ и поляризатор Π . Ось поляризации расположена вертикально. От коллиматора сходящийся световой пучок через диафрагму D падает на полусеребряную поверхность mn склеенных призм B_2 . Отраженная часть лучей проходит пластинку в четверть волны для $\lambda = 546,1 \text{ м}\mu$ и попадает в объектив O . Фокусное расстояние объектива равно OD_1 и подстраивается автоколлимационным методом. За объективом параллельный световой поток направляется полупрозрачным зеркалом H по двум идентичным оптическим путям. На пути лучей, идущих по первому направлению, помещается кювета C_1 с поворотной головкой для крепления модели M и отражающее плоскопараллельное зеркало Z_1 . Кювета заполняется иммерсионной жидкостью с точно подобранным коэффициентом преломления, равным коэффициенту преломления модели. Во второй ветви интерферометра монтируется блок компенсатора

BK , компенсационная кювета C_2 и отражающее зеркало Z_2 , подобное Z_1 .

Рассмотрим изменения, которые претерпевает луч при прохождении через оптическую систему установки и выведем выражение конечной энергии, воспринимаемой глазом на экране прибора.

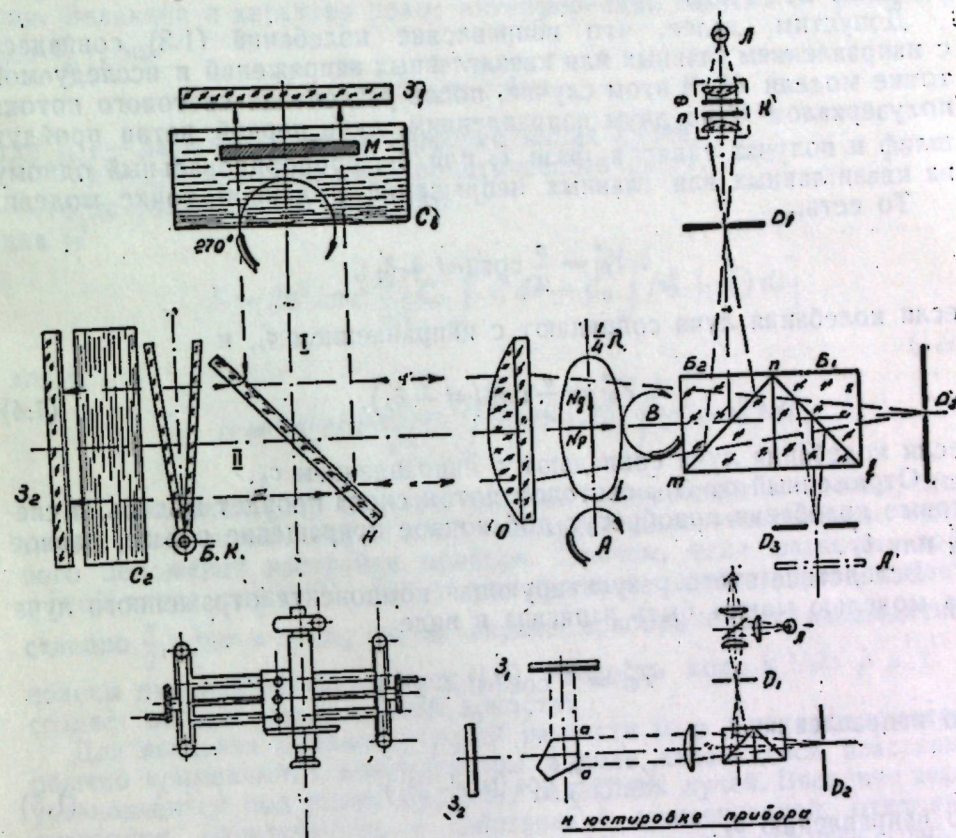


Рис. 1.

Известно, что интенсивность освещения световой волны измеряется удвоенным квадратом ее амплитуды [3], т. е.

$$I = 2a^2. \quad (1.2)$$

Величина (1.2) претерпевает ряд изменений за счет интерференции и поглощения при прохождении через отдельные элементы прибора. Потерями интенсивности при прохождении линз и оптических стекол мы пренебрежем, что не отразится на общности рассуждений.

На пути от источника L до поляризатора Π волновые колебания происходят по различным направлениям в плоскости, перпендикулярной к направлению луча. За поляризатором свет становится поляризованным, и волновые колебания имеют одно направление, которое совпадает с плоскостью поляризации. В результате поляризации колебания могут быть представлены в виде

$$\begin{aligned} x_0 &= 0 \\ y_0 &= a \cos \omega t. \end{aligned} \quad (1.3)$$

Для замеров абсолютной разности хода пластинка в четверть волны L ориентируется так, чтобы ее главные оси совпадали с направлением поляризации. В целях большей наглядности направлением поляризации считается плоскость пропускаемых поляризатором коле-

баний. Эта плоскость ниже будет называться плоскостью поляризации.

Световые колебания при прохождении пластинки в четверть волны не изменят направления колебаний и не получат изменений в фазе за счет свойств кристаллического строения, то есть форма колебаний сохранит вид (1.3).

Допустим, далее, что направление колебаний (1.3) совпадает с направлением главных или квазиглавных напряжений в исследуемой точке модели M . В этом случае, после разделения светового потока полужеркалом H по двум направлениям, лучи первой ветви пройдут шлиф и получат сдвиг в фазе δ'_1 или δ'_2 , пропорциональный одному из квазиглавных или главных напряжений в данной точке модели.

То есть,

$$Y_{01}^* = \frac{a}{2} \cos(\omega t + \delta'_1),$$

если колебания луча совпадают с направлением σ_1 , и

$$Y_{01}^* = \frac{a}{2} \cos(\omega t + \delta'_2), \quad (1.4)$$

если колебания луча совпадают с направлением σ_2 .

Отраженный от Z_1 , световой поток снова пройдет модель, и световые колебания приобретут добавочное приращение в фазе, равное δ'_1 или δ'_2 .

Вследствие этого результирующая компонента отраженного луча за моделью может быть записана в виде

$$Y_{01}^* = \frac{a}{2} \cos(\omega t + 2\delta'_1)$$

по направлению σ_1 и

$$Y_{01}^* = \frac{a}{2} \cos(\omega t + 2\delta'_2) \quad (1.5)$$

по направлению σ_2 .

Время t в выражениях (1.4) — (1.5) является переменной величиной, которая определяет нулевое положение фазы лучей второй ветви по отношению к фазе первой ветви.

При дальнейшем распространении световой поток еще раз пройдет пластинку в четверть волны L . Колебания (1.5) при входе в пластинку не меняют своего направления. За пластинкой компонента Y_{01}^* , не получая изменений в фазе, попадает на экран через диафрагму D_2 с одной стороны и через диафрагму D_3 в глаз наблюдателя — с другой.

С момента разделения способных к интерференции лучей, во второй ветви распространяются колебания, описываемые уравнением

$$Y_{011}^* = \frac{a}{2} \cos \omega t. \quad (1.6)$$

Эти колебания при нулевом положении компенсаторного блока BK не претерпевают изменений в фазе после отражения от зеркала Z_2 попадают на экран и окуляр через соответствующие диафрагмы. Компоненты (1.5) и (1.6) когерентны по природе и совпадают по направлению, что создает условие для интерференции.

Таким образом, общее результирующее колебание складывается из двух компонент, фазы которых отличаются на $\delta'_{1,2}$

$$Y_{\Sigma} = Y_{01}^* + Y_{011}^* = a \cos \delta'_{1,2} \cos(\omega t + \delta'_{1,2}). \quad (1.7)$$

Следовательно результирующая интенсивность колебаний (1.7) согласно (1.2) запишется в виде

$$I = 2a^2 \cos^2 \delta'_{1,2}. \quad (1.8)$$

Обратимся теперь к исследованию характера полос интерференции. Величина и характер полос интерференции зависят от разности фаз $\delta'_{1,2}$, но

$$\delta'_{1,2} = \frac{2\pi}{\lambda} \delta_{1,2},$$

где $\delta_{1,2}$ — разность хода интерферирующих лучей,
 λ — длина волны монохроматического света.

Тогда согласно (1.1) получим

для δ'_1

$$I_1 = 2a^2 \cos^2 \frac{2\pi}{\lambda} \left[C_1 \int_0^t \sigma_1^0 dt + C_2 \int_0^t (\sigma_2^0 + \sigma_3^0) dt \right] \quad (1.9)$$

для δ'_2

$$I_2 = 2a^2 \cos^2 \frac{2\pi}{\lambda} \left[C_1 \int_0^t \sigma_2^0 dt + C_2 \int_0^t (\sigma_1^0 + \sigma_3^0) dt \right].$$

Из уравнений (1.9) следует: наличие напряжений в исследуемой точке тела повлечет сдвиг полос интерференции относительно нулевого положения настройки прибора. Причем, если разность хода в этой точке равна $1/4\lambda$; $3/4\lambda$ и так далее, а разность фаз соответственно $\frac{\pi}{2}$; $3/2\pi$ и т. д., то на экране прибора будут наблюдаться полосы нулевой интенсивности (1.8). Разность хода в $1/2\lambda$; λ и т. д. создает полосы максимальной яркости.

Для введения компенсирующей разности хода в интерферометрах обычно применяются компенсаторы в виде качающейся пластинки, установленной под углом i к пучку падающих лучей. Введение такой пластинки, одновременно с собственной компенсацией, отклоняет световой поток на некоторое расстояние kk , зависящее от угла i (рис. 2).

Так как при нулевой настройке интерферометра имеет место начальная картина полос, то компенсатор такого типа мало пригоден для наших целей.

На рис. 2 показана иная схема компенсатора, собранного из двух наклонных плоско-параллельных пластин. Наклонные пластинки, работая синхронно, исключают возможность бокового смещения потока при изменении угла падения луча.

Теория явлений сдвоенного компенсатора мало чем отличается от обычного, рассмотренного, например, А. Н. Захарьевским [4].

В этом случае разность хода, созданная введением блока BK , получит удвоенное значение. Действительно, в отсутствие компенсатора BK (рис. 1) луч пройдет путь oo' (рис. 2). Если блок введен, то луч обязан пройти расстояние несколько большее, чем oo' , а именно

$$n \cdot ok + kn + n \cdot oo'.$$

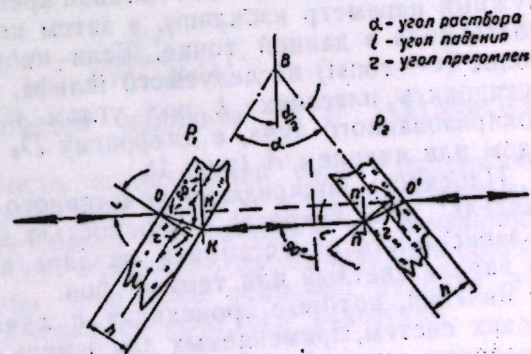


Рис. 2.

Причем, введенная разность хода равна

$$\delta = n \cdot ok + k\bar{n} + n_1 \cdot \bar{n}o' - oo'$$

или

$$\delta = n \cdot ok + n_1 \cdot \bar{n}o' - (ok' + n'o')$$

Если пластинки P_1 и P_2 имеют одинаковую толщину и равные коэффициенты преломления $n = n_1$, то

$$\delta = 2(n \cdot ok - ok'),$$

но

$$ok = \frac{h}{\cos r}; \quad \frac{\sin i}{n} = \sin r; \quad ok' = ok \cos(i - r),$$

следовательно,

$$\delta = 2h [\sqrt{n^2 - \sin^2 i} - \cos i]. \quad (1.10)$$

Допустим, что величина (1.10) учтена при нулевой настройке по ос интерференции.

В этом случае, при компенсировании экспериментатор имеет дело только с величиной добавочной разности хода, введенной поворотом блоков $БК$ (рис. 1) на угол di . Эта добавочная разность хода выразится дифференциалом от (1.10), то есть

$$d\delta = 2h \sin i \left[1 - \frac{\cos i}{\sqrt{n^2 - \sin^2 i}} \right] di. \quad (1.11)$$

Если угол поворота di выбран таким, что $d\delta = \delta_{1,2}$, то согласно формул (1.7—1.9), результирующая интенсивность I принимает значение (1.2), и введенная моделью или шлифом разность хода будет компенсирована.

Для исследования общего случая напряженного состояния объемной прозрачной модели экспериментатору кроме абсолютных разностей хода необходимо иметь данные о параметрах изоклин $\text{tg } 2\psi = \frac{2\tau_{xy}}{\sigma_x - \sigma_y}$ и разности хода, пропорциональной $(\sigma_1 - \sigma_2)$ или $(\sigma_1^0 - \sigma_2^0)$.

Аппаратура, собранная по схеме рис. 1, позволяет получить эти данные без вспомогательного оборудования.

Для замера параметра изоклин, например, достаточно перекрыть плотной ширмочкой вторую ветвь интерферометра, а в первую включить универсальный компаратор ОПП-2 с компенсатором Краснова или Солейля.

С помощью поворотной головки крепления модели M определяется нужный параметр изоклины, а затем компенсатором замеряется разность хода в данной точке. Если необходима фотография картины полос ($\tau - \text{const}$) исследуемого шлифа, то для этой цели достаточно установить пластинку L под углом 45° к направлению колебаний поляризованного луча, а диафрагму D_2 заменить окуляром с полярником или никодем A (рис. 1).

Плоскость поляризации приставного окуляра ориентируется в „параллель“ или „накрест“ с плоскостью поляризации поляризатора P . В зависимости от установки окуляра анализатора можно получить на экране светлый или темный фон.

Явления, которые происходят с лучами при прохождении оптических систем, применяемых для замера значений параметров изоклин и величин разностей хода $K(\sigma_1 - \sigma_2)$, описаны в литературе [1—8] и в данной работе не рассматриваются.

2. Анализ ошибок, вызванных неточностью в изготовлении элементов прибора. Некоторые конструктивные особенности интерферометра. Общая точность интерферометра устанавливается согласно технологическим возможностям при обработке стекла на

плоскопараллельность и качество поверхности. В технических интерферометрах эти возможности оцениваются в пределах

$$0,05 - 0,06\lambda \quad (\lambda = 546,1 \text{ м}\mu).$$

При изготовлении пластин компенсаторного блока сравнительно легко подобрать заготовки с равным коэффициентом преломления, но практически невозможно получить стекла одинаковой толщины. Для выявления влияния разницы в толщинах на результат измерений, допустим, что первоначальный угол установки компенсатора равен 5° , толщина пластинок 4 мм и коэффициент преломления $n = 1,5$. Определим чувствительность компенсаторного блока при двойном ходе луча. Из (1.11) имеем

$$d\delta = 0,4672 di.$$

Тогда при $d\delta = \frac{1}{20} \lambda$ получим

$$di = \frac{d\delta}{0,4672} = 12,05''.$$

Если диапазон измерений выбран ± 60 полос, то предельный угол отклонения пластинок компенсатора при замере ± 60 -й полосы будет равен:

$$i_{\text{пр}} = \frac{12,05 \cdot 20 \cdot 60}{3600} = \pm 4,01^\circ.$$

Ход лучей в блоке, составленном из пластин разной толщины, показан на рис. 3.

Разность хода, создаваемая таким компенсатором, может быть подсчитана из равенства

$$\delta = 2[n \cdot ok + o's'n \cdot o'\bar{n} - (ok' + n'o'')],$$

но

$$ok = \frac{h}{\cos r}; \quad \bar{n}o' = \frac{h}{\cos r} - \frac{h}{\cos r}; \quad ok' = n'o'' = \bar{n}o'' \cos(i - r),$$

тогда

$$\delta = 4h(\sqrt{n^2 - \sin^2 i} - \cos i) + 2 \left(o's' - \frac{hn^2}{\sqrt{n^2 - \sin^2 i}} \right).$$

Таким образом, от неравенства $h \neq h_1$ возникает дополнительная разность хода

$$\delta^* = 2 \left(o's' - \frac{h'n^2}{\sqrt{n^2 - \sin^2 i}} \right). \quad (2.12)$$

При настройке интерферометра величина (2.12) учитывается нулевой картиной полос.

Очевидно, что общая точность исследований будет выдержана в пределах $0,05 \lambda$, если дополнительная разность хода при компенсации ± 60 -й полосы не возрастет более чем на $0,05 \lambda$ от начальной, а смещение светового луча не превысит расстояния $\Delta l = 0,05 L$, где L — интервал между двумя соседними полосами нулевой настройки. При этих условиях должно соблюдаться равенство

$$-2 \left(o's' - \frac{h'n^2}{\sqrt{n^2 - \sin^2 i}} \right) + 2 \left(o'_1 s'_1 - \frac{h'n^2}{\sqrt{n^2 - \sin^2 i_1}} \right) = 0,05 \lambda, \quad (2.13)$$

если

$$\Delta l = 0,01 L; \quad i_1 = i + i_{\text{пр}}; \quad o's' = \frac{h' \cos(i - r)}{\cos r}; \quad l = \frac{h' \sin(i - r)}{\cos r};$$

$$o_1' s_1' = \frac{o_1'' s_1''}{\operatorname{tg}(i_1 - r_1)} = \frac{l - L \cdot 0,01}{\operatorname{tg}(i_1 - r_1)},$$

то (2.13) принимает вид

$$2 \left[\frac{h' \cos(i-r)}{\cos r} - \frac{h' n^2}{\sqrt{n^2 - \sin^2 i}} - \frac{h' \sin(i-r) - 0,01 L \cos r}{\operatorname{tg}(i_1 - r_1) \cos r} + \frac{h' n^2}{\sqrt{n^2 - \sin^2 i_1}} \right] = 0,05 \lambda. \quad (2.14)$$

Учитывая i , r , n и i_1 , из (2.14) получим

$$h' = 0,4294 L. \quad (2.15)$$

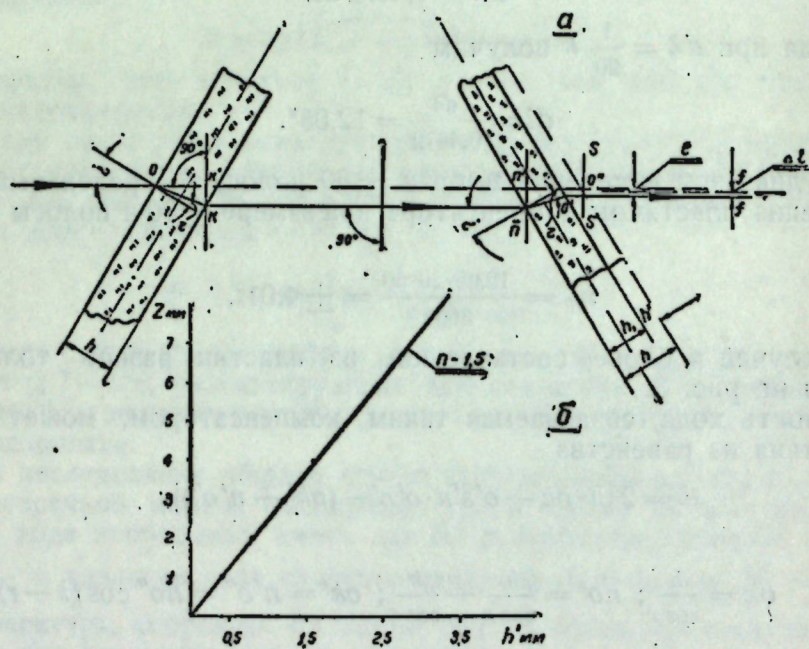


Рис. 3.

На основании формулы (2.15) построен график (рис. 3), из которого видно, что допуск на толщину второй пластинки компенсаторного блока довольно грубый и технических затруднений не вызывает.

Обратимся теперь к рассмотрению причин, вызвавших изменение принципиальной схемы интерферометра Майкельсона.

В отличие от обычной схемы этого интерферометра, на рис. 1 глаз наблюдателя и экран помещены у трубки коллиматора. Такое расположение объясняется тем, что в исследованиях используется плоскополяризованный монохроматический свет.

Плоскость поляризации направлена параллельно оси вращения наклонных зеркал. При любой другой ориентации направления колебаний луча будет иметь место деполаризация и изменение угла наклона плоскости поляризации при отражении от наклонных зеркал. Это явление наблюдалось на установке, представленной на рис. 4. Замеры угла наибольшего затухания производились с помощью полутеневого анализатора со шкалой $0,1^\circ$ [5]. Изменение интенсивности освещения регистрировалось фотоэлементом. Из кривых рис. 4 следует (схема I):

1. С изменением угла наклона плоскости поляризации, угол наибольшего затемнения на анализаторе отличается от заданного на поляризаторе.

2. Практически полное затемнение наблюдается только при вертикальной или горизонтальной ориентации плоскости поляризации поляризатора.

При распространении светового потока по второй ветви поляризованные лучи проходят наклонное полужеркало H (рис. 1). В этом случае с изменением угла наклона плоскости поляризации угол наибольшего затемнения сохраняется на анализаторе заданное значение, но степень поляризации изменяется подобно кривой I_1 . Несовпадение плоскостей поляризации лучей первой и второй ветви с изменением направления поляризации вращением поляризатора нарушает основное условие для интерференции (схема I). Если изменение направления поляризации осуществляется с помощью ротора в виде пластинки $1/2\lambda$, установленной за объективом O , то лучи, проходящие полужеркало H , частично деполаризуются (схема II). Деполаризация значительно понижает контрастность полос.

В схеме рис. 1 колебания луча ориентированы с помощью поляризатора Π вертикально, и при отражении от mn не меняют своего направления. За пластинкой L плоскость поляризации остается также вертикальной. Распространяясь по первой ветви, поток поляризованного света, не меняя заданного угла, попадает на модель.

При исследованиях общего случая напряженного состояния объемных моделей используется метод замораживания. Фиксированное напряженное состояние шлифа модели позволяет просто совмещать направление главных или квазиглавных напряжений с направлением поляризации путем поворота этого шлифа в иммерсионной кювете. Односторонний монтаж источника света и экрана для наблюдения дает возможность: во-первых, вести наблюдения как интерференционных полос абсолютных разностей хода, так и разностей хода, пропорциональных $K(\sigma_1^0 - \sigma_2^0)$; во-вторых, включить в первую ветвь универсальный компаратор $ОПП-2$ и в-третьих, исключает при исследовании напряженного состояния модели в круговом полярископе деполаризацию светового потока.

В заключение этого параграфа сделаем несколько рекомендаций, необходимых для настройки пластинки L (рис. 1) на заданную разность хода в четверть волны.

Пластинки в $1/4\lambda$ удобно получать из слюды расщеплением по плоскостям спайности. Несмотря на сравнительную легкость этой операции, получить слюдяную пластинку нужной толщины — дело кропотливое и требует некоторого навыка. Величина разности хода слюдяной пластинки при падении луча перпендикулярно к плоскости Ng , Nm равна

$$\delta = t(Ng - Nm),$$

где Ng и Nm — оси индикатрисы, совпадающие с плоскостью спайности.

При наклонном падении света на пластинку величина δ будет меняться за счет изменения ее коэффициентов преломления Ng и Nm и за счет изменения толщины. В. М. Краснов [6] показал, что слюдяная пластинка в плоском полярископе, вращаясь относительно Ng , дает разность хода

$$\delta_1 = t_1 \left[\sqrt{Ng^2 - \sin^2 i} - \sqrt{n_1^2 \varphi - \sin^2 i} \right],$$

где

$$n_1^2 \varphi = \frac{Nm^2 Np^2 - (Nm^2 - Np^2) \sin i}{Np^2},$$

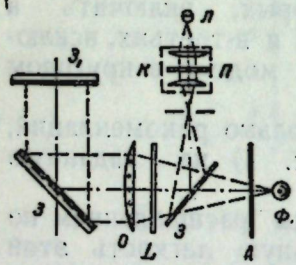
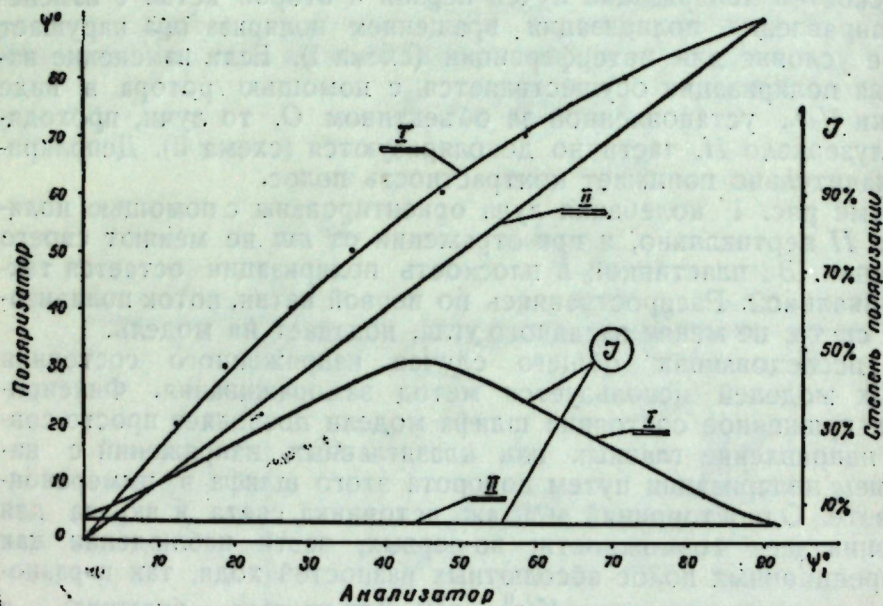
Np — третья ось индикатрисы.

Разность хода от вращения вокруг Nm равна

$$\delta_2 = t_1 \left\{ \sqrt{n_2^2 \varphi - \sin^2 i} - \sqrt{Nm^2 - \sin^2 i} \right\},$$

где

$$n_2^2 \varphi = \frac{Ng^2 Np^2 - (Ng^2 - Np^2) \sin i}{Np^2}$$



- Л - лампа
- К - коллиматор
- П - полароид
- З - полужеркало
- А - анализатор полутенебой
- Ф - объектив
- Ф - фотозлемент
- Д - диафрагма
- З - зеркало
- Л - пластинка $b \frac{1}{2} \lambda$

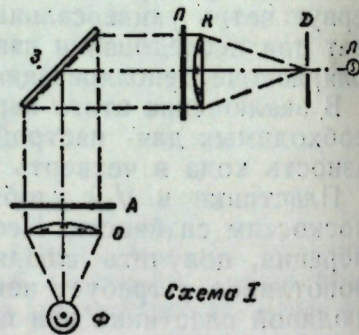


Рис. 4.

В первом случае $Ng = \text{const}$, а Nm меняется от Nm до Np . Во втором — $Nm = \text{const}$, а Ng меняется от Ng до Np . Зная Ng , Nm и Np и приняв $\delta_1 = \delta_2 = \frac{1}{4} \lambda 546,1$ найдем необходимую толщину слюдяной пластинки при изменении угла падения i . Зависимость толщины пластинки от угла поворота представлена в виде кривой рис. 5. Согласно этой диаграмме слюдяные пластинки, близкие к $\frac{1}{4} \lambda$, могут доводиться до номинала поворотом на соответствующий угол i относительно одной из осей Ng или Nm . При построении диаграммы были взяты следующие значения коэффициентов преломления для линии D

- $Ng = 1,5917,$
- $Nm = 1,5870,$
- $Np = 1,5515.$

При этих показателях преломления заготовки слюдяных пластинок можно считать подходящими для наших целей, если толщины находятся в пределах от 25 до 33 микрон.

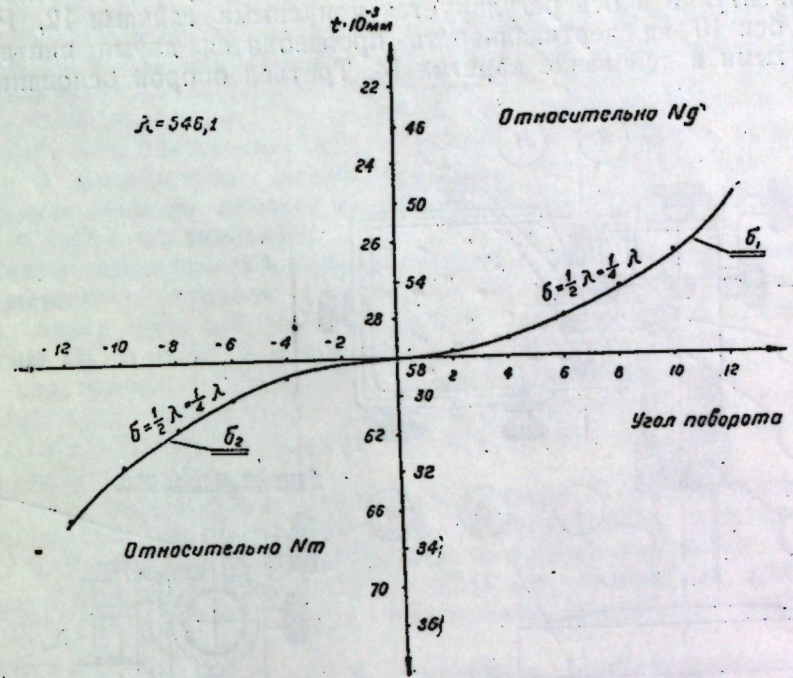


Рис. 5.

Необходимо указать, что величина показателей преломления слюды зависит от содержания в ней железа и хрома и может значительно меняться. Приведенная выше кривая дает ориентировочные величины толщин пластинок, которые должны корректироваться в соответствии с данными Ng , Np и Nm .

3. Конструктивное оформление интерферометра. Юстировка прибора. Общая компоновка интерферометра для определения абсолютной разности хода в прозрачных моделях показана на рис. 1. Выверенная инструментальная плита служит основанием для установки массивных кареток с полужеркалом H и зеркалами $З_1$ и $З_2$. Каретки снабжены регулировочными винтами, с помощью которых зеркала устанавливаются перпендикулярно к направлению распространения светового потока. Источник света смонтирован в тубусе коллиматора.

Конструкция кареток однотипна и предусматривает как грубую, так и точную настройку на вертикальность и угловые повороты (рис. 6).

Механизм угловых поворотов грубой настройки состоит из качающегося рычага $З$ и микрометричного винта 4 с резьбой $M5 \times 0,5$. Качающийся рычаг укреплен на стебле 5 , последний имеет наконечную гайку 6 , поворотом которой устанавливается нужная высота головки 7 каретки крепления зеркала.

Точная настройка угла поворота осуществляется микрометрическим винтом 8 через шарик, скользящий в клиновидном пазе с уклоном $1/25$. Микрометричный винт 8 имеет резьбу $M8 \times 0,5$. При повороте микровинта головка крепления зеркала отклоняется на требуемый угол относительно оси 9 . Ось 9 выполнена по первому классу точности и находится в контакте с плоскостью зеркала по

образующей. Прижим зеркала к оси осуществляется прижимной планкой 10 через две спиральные пружины, укрепленные в пазах щечки поворотной головки.

Средняя часть оси скользит в цапговой втулке 11. Плотность посадки втулки и оси регулируется конусными гайками 12. Регулировка оси 10 на вертикальность производится двумя винтами 13, ввернутыми в основание каретки 14. Третьей опорой основания слу-

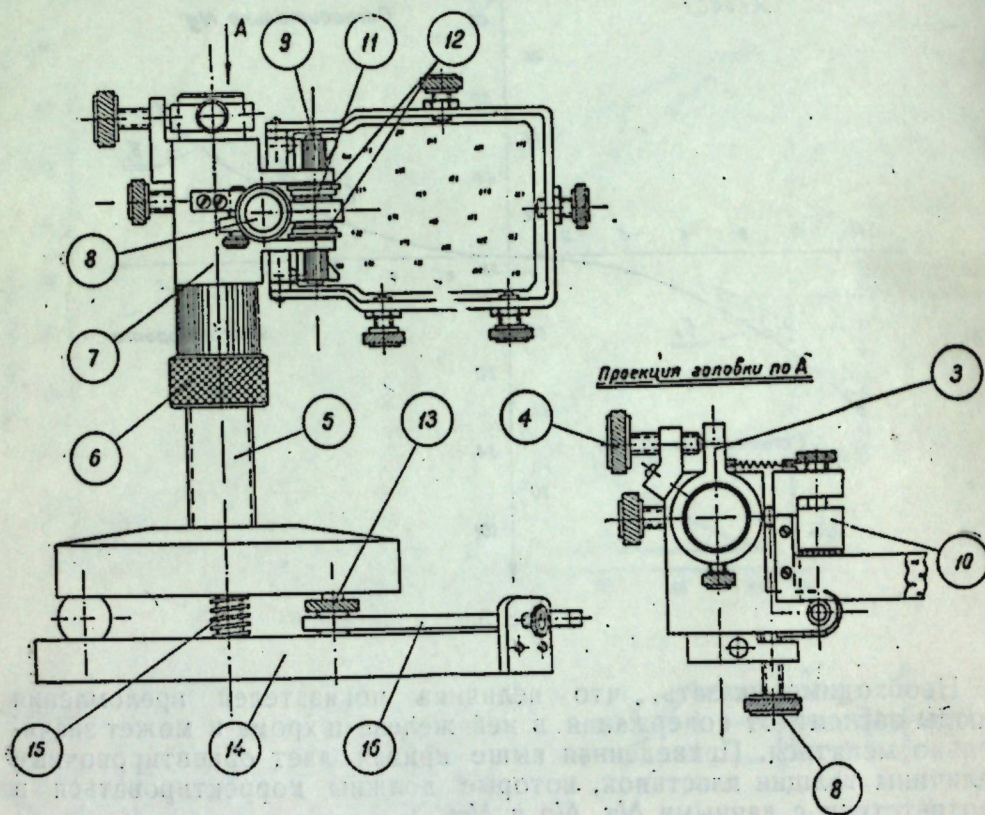


Рис. 6.

жит шаровая пята. В центре основания укреплена спиральная прижимная пружина, внутри которой проходит фиксирующий винт 15.

Для точной подстройки каретки на вертикальность предусмотрены рычаги 16 с микровинтами $M5 \times 0,5$.

Каретка регулировки мнимой плоскости укреплена на суппорте и может передвигаться по направлению луча.

Компенсационные кюветы (рис. 1) составлены из трех плоскопараллельных пластинок, притертых с глицерином на контакт. Средняя пластинка толщиной 15 мм имеет квадратный вырез, который в собранной кювете служит рабочим объемом для иммерсии. Плоскопараллельность кюветы в целом выдержана в пределах $0,05-0,08 \lambda$. Такая точность достигается соответствующей установкой боковых щечек с учетом их клиновидности. Для предотвращения сдвигания щечек, кювета охвачена металлической рамкой. Посадка на контакт с глицерином требует некоторой осторожности, так как можно поцарапать полированные поверхности. Перед притиркой стекла хорошо чистят, затем наносят каплю чистого глицерина на поверхность контакта и осторожно притирают до затрудненного передвижения пластинок. Сила сцепления достаточно велика, поэтому нет оснований опасаться отставания щечек.

При юстировке интерферометра в первую очередь следует установить коллиматор на бесконечность. Такая операция производится с помощью приставного автоколлимационного окуляра типа Гюйгенса [7].

После того, как коллиматор установлен на бесконечность, приступают к юстировке зеркала II-й ветви. Для этой цели диафрагма D_1 заменяется стеклянной пластинкой с нанесенным паутиновым перекрестием. Зеркало Z_2 поворотными приспособлениями каретки приводится в положение, при котором его плоскость перпендикулярна к направлению распространения луча. При этом следует в первую очередь поворотом винтов 13 и 4 вернуть отраженный свет в тубус коллиматора.

Затем последовательными поворотами этих винтов совместить отраженное перекрытие с видимым на окуляре Гюйгенса. Кроме того, центр отраженного перекрытия совмещается с центром диафрагмы D_2 . В этом случае удобно диафрагму D_2 заменить стеклянной пластинкой с паутиновым перекрестием, подобным первому. Первая ветвь юстируется с помощью пентапризмы. Для этого:

1. Перекрывается зеркало Z_2 ширмочкой из плотной черной бумаги.
2. В световой поток, вместо полужеркала H устанавливается пентапризма, укрепленная на каретке с регулирующим устройством.
3. С помощью механизма грубой и точной настройки плоскость призмы „aa“ устанавливается в положение совмещения изображений перекрестий. Для удобства наблюдения плоскость „aa“ слегка серебрится.
4. Включается зеркало Z_1 с условием приблизительного равенства оптических путей $f_c = f_b$. Для контроля используется обычная линейка с миллиметровыми делениями.
5. Устанавливается плоскость зеркала Z_1 перпендикулярно световому потоку второй ветви. Правильность установки контролируется по совмещению изображений перекрестий.
6. Пентапризма заменяется полужеркалом, грубо установленным под углом 45° к световому потоку. Полусеребряная поверхность обращена к коллиматору.
7. Производится точная настройка полужеркала H до совмещения изображений перекрестий.
8. Включается во вторую ветвь компенсационный блок под углом $5-6^\circ$ к оси светового потока.
9. В первую ветвь вводится иммерсионная кювета C_1 с поворотной головкой крепления модели. Для обеспечения хорошей контрастности кювете следует располагать возможно ближе к Z_1 .
10. Устанавливается нулевое число полос выбирается из удобств зеркала Z_1 или Z_2 . Нулевое число полос выбирается из удобств эксперимента. При определении абсолютной разности хода число полос нулевой настройки должно находиться в пределах 10—20 на длине 40 мм. Заданное число полос нулевой настройки устанавливается точной подстройкой микровинтом 8.
11. Перед началом работы на приборе в поляризационный блок K (рис. 1) вводится поляратор, причем плоскость поляризации ориентируется вертикально.

ЛИТЕРАТУРА

1. М. Фрохт. Фотоупругость, том II, ОГИЗ М.—Л., 1950.
2. Н. Favre. La détermination optique des tensions intérieures, Revue d'optique. 1932 г.
3. Г. С. Лайдсберг. Оптика. ОГИЗ. Гостехиздат, 1947.
4. А. Н. Захарьевский. Интерферометры. Оборонгиз, 1952.

5. С. С. Баранов. Поляроидные полярископы в исследовании напряжений. ОГИЗ М. — Л., 1946.

6. В. М. Краснов. Методика измерения разности хода слюдяным компенсатором при изучении напряжений оптическим методом. Учен. зап. ЛГУ, вып. 8, стр. 108—118.

7. П. П. Артамонов. Юстировка оптических измерительных приборов. Оборонгиз, 1939.

8. Ченцов Н. Г., Озеров Г. А. Основные положения оптического метода исследования напряжений. Труды ЦАГИ, вып. 270, 1936.

Поступила
20.I 1957 г.

Цянь Сюэ-сень, Ху Хай-чан

РЕЦЕНЗИЯ НА МОНОГРАФИЮ Х. М. МУШТАРИ
И К. З. ГАЛИМОВА
„НЕЛИНЕЙНАЯ ТЕОРИЯ УПРУГИХ ОБОЛОЧЕК“

В результате применения тонких упругих оболочек к промышленным конструкциям, особенно к конструкциям самолетов и других средств сообщения, перед учеными, работающими по теории оболочек, встал ряд новых задач, которые не могла разрешить классическая линейная теория. Пришлось обратиться к нелинейной теории. После того, как Т. Карман и Цянь Сюэ-сень в 1939 году предложили нелинейную теорию потери устойчивости сферической оболочки при действии внешнего давления, нелинейная теория упругих оболочек получила большое развитие как в отношении основных уравнений, так и в отношении расчета конкретных задач, а также в отношении экспериментальных исследований. Для дальнейшего развития этой теории и применения имеющихся результатов к практике в настоящее время возникла необходимость собрать и обобщить результаты в этой области и подвести итоги в виде монографии. Как раз в это время мы с радостью увидели монографию Х. М. Муштари и К. З. Галимова „Нелинейная теория упругих оболочек“. Выпуск в свет этой монографии означает новый этап развития нелинейной теории упругих оболочек.

В своей монографии авторы собрали и обобщили важные труды советских ученых и ученых других стран в этой области, в том числе, результаты многочисленных исследований казанских ученых под руководством авторов. Содержание монографии охватывает все стороны общей нелинейной теории упругих оболочек, а также имеющиеся решения частных задач для упругих оболочек различных форм при разных нагрузках. Прочитав эту монографию, читатель получает всестороннее и ясное представление о развитии данной теории.

Одной из особенностей монографии Х. М. Муштари и К. З. Галимова является строгое и систематическое изложение. Начиная с общей нелинейной теории упругих оболочек, в монографии выясняется область применимости основных уравнений тонких упругих оболочек. Затем при рассмотрении различных типов задач вводятся новые предположения для упрощения общих уравнений. Ввиду сложности нелинейной теории упругих оболочек, любая неясность в понятии или в формулировке может вызвать путаницу. Авторы своим точным и строгим изложением выяснили некоторые вопросы, которые были смутны раньше. В частности, надо отметить, что авторы предложили обоснованную процедуру для вычисления нижней критической нагрузки, и тем самым внесли ясность в спорные вопросы, появившиеся в начале развития этой теории. В настоящее

время решение конкретных задач нелинейной теории обычно проводится приближенными методами, основанными на вариационных принципах. Рассматриваемая монография дает систематическое изложение различных вариационных принципов, разбросанных в литературе, что помогает читателям глубже понять сущность различных вариационных принципов и при различных конкретных условиях выбрать соответствующий вариационный принцип в качестве основы приближения.

Монография обладает и многими другими особенностями, которые мы здесь перечислять не будем. В целом, она является необходимым пособием для работников по упругим оболочкам.

Важным применением нелинейной теории упругих оболочек является определение нижней критической нагрузки. Как отметил Цянь Сюэ-сень, нижняя критическая нагрузка связана с условиями нагружения упругих оболочек. Различают два предельных случая нагружения: нагружение мертвым грузом, когда приложенная нагрузка является контрольным фактором, и нагружение с помощью испытательной машины, когда контрольным фактором является перемещение. На практике условие нагружения может находиться между этими двумя предельными случаями, и оно сложнее их. В данной монографии, повидимому, рассматривается нижняя критическая нагрузка только при условиях мертвого груза. Остается неясным, в соответствии ли с этим условием были получены экспериментальные данные? Если нет, нужно ли рассматривать разницу между ними?

Конечно, действительная критическая нагрузка упругой оболочки находится в интервале между верхней и нижней критическими нагрузками и ее величина тесно связана с внешним возмущением. Мы считаем, что так как нелинейная теория упругих оболочек уже создана на прочной основе, необходимо далее подходящим образом предсказывать критические нагрузки упругих оболочек, определяя вероятность потери устойчивости упругих оболочек при данных условиях, на основе статистических свойств внешних возмущений. Эта вероятность есть функция нагрузки. Когда нагрузка меньше нижней критической нагрузки, вероятность равна нулю; когда нагрузка превышает нижнюю критическую нагрузку, вероятность перестает быть равной нулю и притом возрастает с повышением нагрузки; когда нагрузка доходит до верхней критической нагрузки (т. е. до классической критической нагрузки), вероятность равна 100%. Таким образом, проектирование тонких упругих оболочек может покоиться на более строгом принципе.

Китай, г. Пекин, институт механики АН Китая.

Поступила

1.IX 1957 г.

15