

АКАДЕМИЯ НАУК СССР
КАЗАНСКИЙ ФИЛИАЛ

**ИЗВЕСТИЯ
КАЗАНСКОГО ФИЛИАЛА
АКАДЕМИИ НАУК СССР**

*СЕРИЯ ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИХ
И ТЕХНИЧЕСКИХ НАУК*

11



КАЗАНЬ 1957

АКАДЕМИЯ НАУК СССР
КАЗАНСКИЙ ФИЛИАЛ

ИЗВЕСТИЯ
КАЗАНСКОГО ФИЛИАЛА
АКАДЕМИИ НАУК СССР

*СЕРИЯ ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИХ
И ТЕХНИЧЕСКИХ НАУК*

Выпуск 11

НЕКОТОРЫЕ ГИДРОДИНАМИЧЕСКИЕ ЗАДАЧИ РАЦИОНАЛЬНОЙ
РАЗРАБОТКИ НЕФТЯНЫХ МЕСТОРОЖДЕНИЙ



КАЗАНЬ

1957

**ПОСВЯЩАЕТСЯ Сорокалетию
ВЕЛИКОЙ ОКТЯБРСКОЙ
СОЦИАЛИСТИЧЕСКОЙ РЕВОЛЮЦИИ**

Ответственный редактор
доктор физико-математических наук
профессор *Г. С. Салехов*

—10—

п 17499

ЦЕНТРАЛЬНАЯ НАУЧНАЯ
БИБЛИОТЕКА
Алм. Киргизской ССР

В. Л. Данилов, Г. С. Салехов, Г. П. Цыбульский

**ИССЛЕДОВАНИЯ ПО ТЕОРИИ ФИЛЬТРАЦИИ ЖИДКОСТЕЙ
В НЕФТЯНЫХ ПЛАСТАХ В КАЗАНСКОМ ФИЛИАЛЕ
АКАДЕМИИ НАУК СССР в 1951—1957 гг.**

(Краткий обзор)

Введение

Проектирование разработки и анализ процесса эксплуатации нефтяных месторождений требуют проведения большого числа сложных гидродинамических расчетов. Эти расчеты основаны на многочисленных теоретических и экспериментальных исследованиях по подземной гидромеханике, проведенных в СССР и за рубежом.

В связи с бурным развитием нефтяной промышленности в Татарии сектор математики Физико-технического института Казанского филиала АН СССР с осени 1951 года начал свои исследования по теории фильтрации природных жидкостей в пористой среде.

При рациональной разработке нефтяных месторождений с использованием прогрессивных методов воздействия на пласт (законтурное и внутриконтурное заводнение, гидравлический разрыв пласта и др.) одной из важнейших проблем является изучение законов движения КН (контура нефтеносности). Поэтому основным направлением исследований в секторе математики было изучение законов движения КН с учетом главнейших физико-геологических параметров пласта и жидкостей.

I. Задача управления движением КН

1. Постановка задачи управления движением КН. Основным требованием рациональной эксплуатации нефтяного месторождения при наличии флюидинга является максимально возможное извлечение нефти из пласта путем замещения ее водой. Перемещение КН должно быть таким, чтобы не оставались отсеченные водой нефтенасыщенные участки, в которых нет эксплуатационных скважин.

В связи с этим в секторе математики в 1953 г. была поставлена следующая новая гидродинамическая задача — задача управления движением КН [1], [2], [3], [4]:

Исходя из основных законов фильтрации жидкостей в пористой среде с учетом главнейших физико-геологических параметров пласта и жидкостей, требуется определить такие оптимальные способы размещения и режимы эксплуатации скважин в пределах практически возможной их вариации на данном месторождении, которые наилучшим образом обеспечивали бы желаемый закон стягивания КН.

При этом возможны следующие частные варианты этой задачи:

1) Задача управления по характеру эксплуатации скважин, когда управление КН производится лишь за счет изменения дебитов скважин, разбуренных на месторождении.

2) Задача управления по характеру размещения скважин, когда дебиты скважин считаются заданными, и определяется размещение скважин (при проектировании разработки месторождения).

3) Задача управления КН, когда оно производится за счет размещения и эксплуатации лишь определенного числа скважин из общего фонда, введенного в эксплуатацию.

2. О краевых задачах, допускающих данное решение. С точки зрения математической постановки вышеуказанная задача управления движением КН может быть рассмотрена как частная задача следующей общей краевой задачи, поставленной в работах [5], [6].

Пусть задано параметрическое семейство дифференциальных уравнений 2-го порядка

$$L(x_1, x_2, \dots, x_n; u; u_1, u_2, \dots, u_n; u_{11}, u_{12}, \dots, u_{nn}; \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) = 0, \quad (2.1)$$

где u — неизвестная функция,

$$u_j = \frac{du}{dx_j}, \quad u_{ij} = \frac{\partial^2 u}{\partial x_j \partial x_i},$$

$$(x_1, x_2, \dots, x_n) \in G, \quad \alpha_i \in G_\alpha.$$

В области $G_i \in G$ не более $n-1$ измерений задано параметрическое семейство краевых условий:

$$K_i(x_1, x_2, \dots, x_n; u; u_1, u_2, \dots, u_n; \beta_1^{(i)}, \dots, \beta_v^{(i)}) = 0, \quad (2.2)$$

где параметры $\beta_j^{(i)}$ ($j=1, 2, \dots, v; i=1, 2, \dots, m$) определены в областях $G_i^{(i)}$.

Требуется определить значения параметров $\{\alpha\}$ и $\{\beta^{(i)}\}$ таким образом, чтобы наперед выбранная функция $v(x_1, x_2, \dots, x_n)$ в области G наилучшим образом удовлетворяла уравнению (2.1) и краевым условиям (2.2), то есть обеспечивала минимальное значение принятых норм $\|L\|$ и $\|K_i\|$.

При заданной функции v в области G вышеуказанную обратную краевую задачу для уравнений (2.1) и (2.2) будем называть поставленной корректно, если

1) в области G и для заданных областей изменения параметров G_α и $G_i^{(i)}$ прямая краевая задача для уравнений (2.1) и (2.2) поставлена корректно (по принятым нормам);

2) в областях G_α и $G_i^{(i)}$ найдется по крайней мере одна система значений параметров $\{\alpha\}$ и $\{\beta^{(i)}\}$, для которой из условий $\|L\| \leq \delta$ и $\|K_i\| \leq \delta_i$ следует $\|u-v\| \leq \eta$, где η — допускаемая погрешность, u — точное и v — заданное решение.

Практический смысл имеют лишь задачи, поставленные корректно.

В краевых задачах, допускающих данное решение, вариационные методы используются для выделения из параметрического семейства краевых задач той задачи, которая, согласно принятым нормам $\|L\|$ и $\|K_i\|$, допускает данное (желаемое) решение v .

Краевые задачи, допускающие данное решение, можно рассматривать как задачи управления различными процессами. Примерами таких задач являются задачи управления движением КН (см. п. 1), определение по заданным деформациям механической конструкции внешних сил, действующих на ее границах и внутри нее [7], задача управления движением зарядов в электрическом или магнитном поле по их траекториям [8].

3. Исследования по задаче управления движением КН. В работе [1] была показана возможность решения одной простейшей задачи управления движением КН за счет распределения интенсивности нагнетательной галереи при наличии одной центральной эксплуатационной скважины.

Более детальное исследование задач управления движением КН было проведено в последующих работах. В работе [2] метод тригонометрической аппроксимации применяется к решению задач управления, когда скважины считаются точечными стоками и источниками. Основная идея в методе тригонометрической аппроксимации состоит в следующем:

В уравнение движения КН, которое содержит в качестве параметров дебиты и координаты скважин, подставляется аналитическое выражение заданного (желаемого) закона движения. Полученное таким образом выражение („невязка“) разлагается в ряд Фурье, коэффициенты которого зависят от вышеуказанных параметров. Далее, предполагая, что в силу достаточной гладкости „невязки“, разлагаемой в ряд Фурье, коэффициенты ряда A_s, B_s ($s=0, 1, 2, \dots$) убывают быстро, первые N из них приравниваем нулю. Уравнения $A_s = B_s = 0$ ($s=0, 1, 2, \dots, N-1$) рассматриваются как система уравнений для определения неизвестных параметров (дебитов и координат скважин).

Вышеуказанным методом в работах [2], [3], [4], [9], [10], [11], [12], [13], [30] рассмотрены решения ряда частных задач управления в одножидкостной системе при водонапорном режиме. В работе [14] метод тригонометрической аппроксимации был обобщен для решения задач управления не звездами КН. В работе [15] дано приложение к задаче управления движением КН метода наименьших квадратов. Этот метод был применен в случаях: 1) когда уравнение первоначального КН задается аналитически непрерывной функцией и 2) когда положение КН известно лишь по некоторым его „дискретным“ точкам (см. ниже). Метод наименьших квадратов в работах [16], [17] был применен к решению конкретных задач управления в пластах с водонапорным режимом.

Решение задач управления КН с учетом различия вязкостей воды и нефти (двухжидкостная система) было дано в работах [18], [19], [20]. В этом случае определение функции давления и уравнение движения КН не могут быть рассмотрены изолированно друг от друга, как это имеет место для одножидкостной системы.

В работе [18] показано, что при точном решении задачи управления КН приводит к задаче Коши для уравнения Лапласа.

В работах [19], [20] при изучении движения КН в двухжидкостной системе широко используется прием нанесения на КН логарифмического потенциала простого слоя, впервые примененный в подобной задаче Г. Г. Тумашевым [21].

В работе [19] на основе свойств логарифмического потенциала дается два способа приближенного решения задач управления КН для двухжидкостной системы. Показано, например, что при концентрическом стягивании КН дебиты эксплуатационных скважин те же, что и для одножидкостной системы, а дебиты нагнетательных скважин должны быть изменены в $\frac{c_2}{c_1}$ раз (c_1 и c_2 — коэффициенты текучести соответственно в водной и в нефтяной зонах).

Методы решения задач управления движением КН без труда могут быть перенесены на общий случай управления движением не звездами КН.

При эксплуатации крупных месторождений с применением внутриконтурного и законтурного заводнения и в других случаях возникает

задача управления КН несколькими контурами в единой гидродинамической системе.

Общая постановка и метод решения таких задач были даны в работе [22]. В статьях [22], [23] было дано решение задач управления движением нескольких КН для одножидкостной и двухжидкостной систем.

В работе [24] было рассмотрено решение задачи управления при упругом режиме для одножидкостной системы.

В работе [25], опираясь на свойства теплового потенциала двойного и простого слоя, авторы разработали общий метод решения задач управления КН при упругом режиме для двухжидкостной системы.

Обычно в нефтепромысловой практике положение КН известно лишь по некоторым местным отметкам, т. е. в отдельных его точках, причем эти данные известны с различной степенью точности. С учетом этих обстоятельств в работе [26] был предложен приближенный метод решения задач управления звездными КН, заданными дискретно по фиксированным направлениям. Был применен метод наименьших квадратов с нормой, определенной через интеграл Стильеса. Случай незвездных КН подробно изучен в работе [27]. Пример решения частной задачи управления при дискретном задании КН был рассмотрен в [28].

Эксперименты показывают, что ввиду неполного вытеснения нефти водой в пласте образуется промежуточная зона замещения, в которой проницаемость ниже, чем в зонах чистой воды или чистой нефти (фазовая проницаемость). Задачи управления и прослеживания движения КН с учетом фазовой проницаемости в зоне замещения излагаются в работе [29]. Были рассмотрены случаи постоянной и переменной фазовых проницаемостей на конкретных численных примерах.

В статьях [31] и [32] были рассмотрены решения некоторых частных задач управления КН в макронеоднородных пластах. Учтено влияние сбросов на режимы эксплуатации скважин при управлении движением круговых и прямолинейных контуров нефтеносности.

Задача управления движением КН в общем случае решается лишь приближенно. В связи с этим встает вопрос об оценке точности решения задачи, то есть о том, насколько заданный КН отклоняется от действительного. Для этого могут быть использованы следующие пути:

1) Проверка точности решения задачи путем прослеживания КН при значениях параметров, полученных из решения задачи управления. При этом могут быть применены графоаналитические методы решения задачи прослеживания, или же экспериментальные способы проверки движения КН.

2) Непосредственные аналитические методы оценки допустимых погрешностей.

Для случая параметрического задания желаемого закона движения КН в статье [33] предложен метод аналитической оценки разности координат точек действительного и заданного КН, соответствующих одинаковым значениям параметра. Метод основан на замене некоторой системы нелинейных дифференциальных уравнений на линейную и сравнении последовательных приближений при решении этих систем.

В работе [34] в качестве критерия для оценки точности решения задачи управления принято сравнение перемещений заданного и действительного КН по главным и нейтральным направлениям. Определены площади целиков, остающихся к моменту обводнения внешней батареи скважин для случая круговых и прямолинейных батарей.

Оценка точности решения конкретных задач управления КН показывает эффективность применяемых методов решения.

Как явствует из решения некоторых частных примеров, методы тригонометрической аппроксимации и наименьших квадратов дают весьма точное решение задачи управления. Но учитывая, что на практике имеются значительные погрешности в задании первоначального КН, физико-геологических параметров пласта и жидкостей и других данных, точность полученных решений будет иметь реальный смысл, если она соответствует точности исходных данных решаемой задачи. В связи с этим в настоящее время в секторе математики начаты исследования по решению задач управления и прослеживания движения КН с учетом практически допустимых погрешностей в исходных данных и самих решениях.

Для месторождения с большим числом скважин можно при решении задачи управления КН расчленять ее на отдельные задачи с меньшим числом скважин, что сильно упрощает решение [14].

II. Задачи прослеживания перемещения контура нефтеносности

Задача прослеживания контура нефтеносности была впервые сформулирована и поставлена акад. Л. С. Лейбензоном, им же были даны решение задачи радиального стягивания к одной скважине и приближенный графоаналитический способ решения задачи стягивания некруговой нефтяной линзы. При этом вязкость воды принята равной нулю. Для случая различных, не равных нулю, вязкостей нефти и воды эта задача рассмотрена М. Muskat'ом, получившим аналитическое решение одномерной и радиальной задач; им исследован также случай одножидкостного течения.

В постановке Л. С. Лейбензона этой задачей занимались П. Я. Полубаринова-Кочина, Л. А. Галин, П. П. Куфарев, Ю. П. Виноградов и др.

Одножидкостной системе посвящены работы В. П. Яковлева, В. Н. Щелкачева и др.

Приближенным способом, без учета излома линий тока на контуре, различие вязкостей учтено И. А. Чарным, В. Н. Щелкачевым, Н. С. Пискуновым, В. П. Пилатовским. М. Н. Тихов получил решение одной задачи о стягивании КН в форме рядов.

Мы ограничиваемся здесь лишь задачами о перемещении КН в плане.

Несмотря на большое количество работ, нельзя считать и в настоящее время до конца решенной задачу о перемещении контура нефтеносности произвольной формы с учетом основных физико-геологических факторов (различие вязкостей, неоднородность пласта по мощности и проницаемости, пониженная проницаемость в зоне замещения нефти водой, различие удельных весов, упругость жидкостей и породы и т. д.).

Задаче прослеживания КН в работах сектора математики было уделено большое внимание. Кроме самостоятельного значения эта задача важна для контроля точности решения задачи управления перемещением КН, которое в общем случае является приближенным.

Исследования по задаче прослеживания проводились в нескольких направлениях.

Был предложен графоаналитический метод построения последовательных положений КН в однородном изотропном неограниченно простирающемся пласте постоянной мощности [35]. При этом жидкости и порода считались несжимаемыми, вязкости и удельные веса жидкостей — одинаковыми. Метод опирается на построение семейства

линий тока и на численное интегрирование уравнения движения частицы жидкости по траектории.

В работе [36] графоаналитический метод прослеживания КН распространен на пласты переменной мощности и проницаемости. Вводится функция тока ψ , связанная с давлением p в пласте соотношениями

$$-\frac{\partial \psi}{\partial y} = \frac{kh}{\mu_n} \frac{\partial p}{\partial x}, \quad \frac{\partial \psi}{\partial x} = \frac{kh}{\mu_n} \frac{\partial p}{\partial y}.$$

Здесь k — проницаемость, h — мощность пласта, являющиеся функциями x и y , μ_n — вязкость нефти.

Семейство линий тока ψ ортогонально семейству изобар. Если известна динамическая карта изобар, то, построив линии тока, можно строить последовательные положения контура, исходя из уравнения неразрывности течения и осредняя пористость, мощность на участке перемещения контура.

В статьях [37], [38] рассматривается задача прослеживания контура в однородном пласте с постоянной мощностью при различных вязкостях нефти и воды. Показано, что задача прослеживания КН сводится к задаче Коши для нелинейного интегро-дифференциального уравнения в частных производных. Получены также уравнения движения частиц жидкости, прилегающих к КН.

Предложен численный метод решения задачи прослеживания КН и графоаналитические способы построения последовательных положений контура. Дано обобщение формулы Дюпюи для дебита скважины в двухжидкостной системе.

Как частные результаты из интегро-дифференциального уравнения движения контура, получены интегралы Л. С. Лейбензона, В. Н. Щелкачева и М. Muskat'a. Рассмотрена частная задача стягивания первоначально кругового контура к эксцентричной скважине, которая показала, что в случае вязкости нефти, втрое превышающей вязкость краевой воды, время обводнения сокращается по сравнению с одножидкостной системой более, чем на 30%.

Исходя из интегро-дифференциального уравнения движения, удалось оценить границы кольца, внутри которого лежит контур нефтеносности при стягивании к круговой батарее эксплуатационных скважин [39].

К циклу работ о прослеживании в одножидкостной системе относится, по существу, исследование [33], посвященное оценке точности решения задачи управления перемещением КН.

III. Задачи эксплуатации скважин в пластах с подошвенной водой

Задачи об отборе нефти из пластов с подошвенной водой давно привлекают внимание исследователей. Практическая важность этого вопроса и значительные математические трудности объясняют большое число работ в этом направлении. Однако и этот вопрос не может считаться исчерпанным.

При интенсивной эксплуатации можно пренебречь эффектом различия удельных весов по сравнению с градиентом давления. При этих условиях определением времени обводнения скважины занимались М. Muskat, М. Д. Миллионщиков, П. Я. Полубаринова-Кочина, Н. С. Пискунов. Эти исследования были продолжены в работах сектора [40], [41]. Были получены расчетные формулы для времени обводнения точечной и полуэллипсоидальной скважин в анизотропном пласте бесконечной и конечной мощности. Исследовано обводнение точечной скважины в неограниченном двуслойном пласте и горизонтальной дрены в наклонном пласте.

Не меньший интерес, чем нестационарная задача о подъеме конуса, представляет стационарная задача о максимальном безводном дебите скважин при наличии подошвенной воды.

Этому вопросу посвящены работы М. Muskat'a, М. Д. Миллионщикова, цикл статей И. А. Чарного и исследования Д. А. Эфроса и И. Куранова.

В секторе математики выполнена работа [42] по определению максимального безводного дебита в однородном пласте. К подобному же результату пришли американские исследователи Н. J. Meyer и А. O. Garder.

В той же работе [42] была установлена аналогия между безнапорным течением к колодцу и установившимся водяным конусом, а также изучено влияние тампонажа скважин на величину максимального безводного дебита.

В работах [37], [43] метод, примененный в [38] для исследования плоских течений с учетом различия вязкостей, перенесен на пространственную задачу конусообразования в неограниченном по мощности пласте. Получено интегро-дифференциальное уравнение движения водо-нефтяного контакта, к которому применим тот же численный метод, что и в плоской задаче прослеживания КН. Выведено интегро-дифференциальное уравнение поверхности стационарного безводного конуса.

IV. Определение функции давления для неоднородных пластов

При водонапорном режиме функция давления в неоднородных пластах с плавно изменяющейся мощностью удовлетворяет уравнению

$$\frac{\partial}{\partial x} \left[\sigma(x, y) \frac{\partial p}{\partial x} \right] + \frac{\partial}{\partial y} \left[\sigma(x, y) \frac{\partial p}{\partial y} \right] = 0, \quad (4.1)$$

$$\sigma(x, y) = k(x, y) h(x, y),$$

где $k(x, y)$ — проницаемость, $h(x, y)$ — мощность.

Отдельные частные случаи течений в неоднородных пластах рассматривались М. Muskat'ом, В. Н. Щелкачевым, Н. С. Пискуновым и др.

В секторе математики в этом направлении проводятся работы по нахождению точных решений при определенных ограничениях на функцию $\sigma(x, y)$ и по приближенному решению уравнения (4.1).

Для случая $\sigma(x, y) = u^2$, где u — гармоническая функция, в работах [44], [45] найдено точное решение.

В работе [46] решение уравнения (4.1) произведено методом последовательных приближений, причем на каждом этапе решается уравнение Пуассона.

В статье [47] рассмотрено приближенное определение функции давления в круговом пласте с одной центральной скважиной по методу наименьших квадратов. Та же задача решалась методом Ритца.

Определению давления в неоднородном пласте при упругом режиме с применением операционного метода посвящена работа [48]. Рассмотрен случай эксплуатации одной центральной скважиной неограниченного пласта, причем в круговой зоне некоторого радиуса, включающей скважину, коэффициент пьезопроводности отличен от коэффициента пьезопроводности в остальной части пласта. Следует отметить, что полученное при этом решение может быть применено в других областях (теплопроводность, диффузия).

V. Некоторые другие задачи

Вопросу об оптимальном с точки зрения добычи режиме эксплуатации скважин посвящены несколько работ сектора математики. Так, в статьях [49], [50] рассмотрен случай эксплуатации при упругом режиме, когда соблюдается линейный закон фильтрации. Показано, что суммарная добыча за определенное время будет тем больше, чем быстрее давление на скважине будет доведено до практически минимально допустимого. Тот же вывод остается справедливым при более общем случае эксплуатации любого числа скважин в неоднородном пласте при упругом режиме и нелинейном законе фильтрации [51].

Предложен метод определения дебитов скважин при произвольной форме контура питания [52], [53]. Восстановлению забойного давления на забоях скважин после прекращения эксплуатации посвящена статья [54]. В работе [55] указывается на возможность иного подхода к определению коэффициента пьезопроводности.

Заключение

С целью проверки теоретических выводов и для более глубокого изучения процессов фильтрации в секторе математики поставлены эксперименты на моделирующих установках. На вертикальном щелевом лотке с параллельными стенками изучался вопрос о совместном притоке к скважине воды и нефти при различных условиях.

Исследования сектора математики проводятся в тесном контакте с отраслевыми научно-исследовательскими учреждениями. Ряд работ выполняется в содружестве с Государственным Всесоюзным исследовательским и проектным институтом „Гипровостокнефть“ (г. Куйбышев), Татарским нефтяным научно-исследовательским институтом (г. Бугульма).

Некоторые из результатов исследований сектора использованы при составлении проектов разработки месторождений Татарии и Куйбышевской области.

С 1952 г. функционирует семинар по подземной гидромеханике с участием научных работников Казанского филиала АН СССР и Казанского государственного университета им. В. И. Ульянова-Ленина, где на кафедре механики под руководством проф. Г. Г. Тумашева также проводятся исследования по теории фильтрации в нефтяных пластах.

ЛИТЕРАТУРА

1. Салехов Г. С. Прямые и обратные задачи о продвижении водонефтяного контакта. Изв. Казанск. филиала АН СССР, серия физ.-мат. и техн. наук, вып. 5, 1954.
2. Салехов Г. С. Постановка и метод решения гидродинамических задач управления движением контура нефтеносности. Изв. Казанск. филиала АН СССР, серия физ.-мат. и техн. наук, вып. 6, 1955.
3. Салехов Г. С. Постановка и методы решения гидродинамических задач управления движением контура нефтеносности. ДАН СССР, т. 101, № 5, 1955.
4. Салехов Г. С., Сидоренко В. С., Чугунов В. Д. Задача управления движением контура нефтеносности. „Нефтяное хозяйство“, № 8, 1956.
5. Салехов Г. С. О краевых задачах, допускающих данное решение. Изв. Казанск. филиала АН СССР, серия физ.-мат. и техн. наук, вып. 9, 1956.
6. Салехов Г. С. Краевые задачи, допускающие данное решение. Труды третьего Всесоюзного математического съезда, т. 1, изд. АН СССР, Москва, 1956.
7. Власов В. З. Строительная механика тонкостенных пространственных систем. Стройиздат, 1949.
8. Гринберг Г. А. Избранные вопросы математической теории электрических и магнитных явлений. Изд. АН СССР, 1948.

9. Чугунов В. Д. Некоторые частные случаи управления продвижением водонефтяного контакта. Изв. Казанск. филиала АН СССР, серия физ.-мат. и техн. наук, вып. 6, 1955.
10. Чугунов В. Д. Об одной задаче управления контуром нефтеносности. Изв. Казанск. филиала АН СССР, серия физ.-мат. и техн. наук, вып. 8, 1955.
11. Салехов Г. С. и Чугунов В. Д. Некоторые задачи управления движением контура нефтеносности. ДАН СССР, т. 101, № 6, 1955.
12. Салехов Г. С. Решение некоторых задач управления движением контура нефтеносности по характеру размещения скважин. См. наст. выпуск.
13. Сейфуллина Б. А. Решение частных задач управления движением прямолинейных контуров нефтеносности. Научный отчет сектора математики Физико-тех. ин-та Казанского филиала АН СССР за 1955 г.
14. Салехов Г. С. К решению задачи управления движением контура нефтеносности методом тригонометрической аппроксимации. См. наст. выпуск.
15. Салехов Г. С. Приложение одного метода минимальной погрешности к решению задач управления движением контура нефтеносности. Изв. Казанск. филиала АН СССР, серия физ.-мат. и техн. наук, вып. 8, 1955.
16. Салехов Г. С. Об одном способе решения задачи управления движением контура нефтеносности в пластах с водонапорным режимом. Там же.
17. Цыбульский Г. П. Решение задачи управления движением незвездных контуров нефтеносности. Изв. Казанск. филиала АН СССР, серия физ.-мат. и техн. наук, вып. 9, 1956.
18. Данилов В. Л. К задаче определения поля давления при заданном законе стягивания контура нефтеносности. Изв. Казанск. филиала АН СССР, серия физ.-мат. и техн. наук, вып. 6, 1955.
19. Данилов В. Л. Управление перемещением контура нефтеносности с учетом различия вязкостей нефти и воды. Изв. Казанск. филиала АН СССР, серия физ.-мат. и техн. наук, вып. 8, 1955.
20. Данилов В. Л. К задаче управления перемещением контура нефтеносности. Там же.
21. Тумашев Г. Г. К задаче о стягивании контура нефтеносности. Ученые записки Казанского гос. университета. Сборник работ НИИММ им. Н. Г. Чеботарева, т. 113, кн. 10, 1953.
22. Салехов Г. С. О методе решения задач одновременного управления движением нескольких контуров нефтеносности. Изв. Казанского филиала АН СССР, серия физ.-мат. и техн. наук, вып. 8, 1955.
23. Данилов В. Л. Об одновременном управлении несколькими контурами нефтеносности с учетом различия вязкостей воды и нефти. Изв. Казанск. филиала АН СССР, серия физ.-мат. и техн. наук, вып. 9, 1956.
24. Чугунов В. Д. К задаче управления контуром нефтеносности при упругом режиме нефтяных месторождений. Изв. Казанск. филиала АН СССР, серия физ.-мат. и техн. наук, вып. 8, 1955.
25. Данилов В. Л. и Чугунов В. Д. Об управлении перемещением контура нефтеносности при упругом и водонапорном режимах. См. наст. выпуск.
26. Салехов Г. С. Приложение одного метода минимальной погрешности к решению задач управления движением контура нефтеносности. Изв. Казанск. филиала АН СССР, серия физ.-мат. и техн. наук, вып. 8, 1955.
27. Цыбульский Г. П. Задача управления движением незвездного контура нефтеносности при „дискретном“ задании. См. наст. выпуск.
28. Сейфуллина Б. А. Численное решение некоторых задач по управлению перемещением контура нефтеносности. Изв. Казанск. филиала АН СССР, серия физ.-мат. и техн. наук, вып. 8, 1955.
29. Коротков С. Ф. Управление перемещением контура нефтеносности с учетом фазовой проницаемости в зоне замещения. См. наст. выпуск.
30. Мертвецова М. А. Об одном методе приближенного решения нелинейных функциональных уравнений. Изв. Казанск. филиала АН СССР, серия физ.-мат. и техн. наук, вып. 8, 1955.
31. Ким В. Ю. Управление движением контура нефтеносности с учетом влияния сбросов. См. наст. выпуск.
32. Ким В. Ю. Об одной задаче управления движением контура нефтеносности. Там же.
33. Цыбульский Г. П. Аналитический метод оценки точности решения задач управления движением контура нефтеносности. Там же.
34. Ким В. Ю. Некоторые задачи управления движением контура нефтеносности с учетом влияния сбросов. Кандидатская диссертация. Институт механики АН СССР, 1955.
35. Иванов Н. Ф. Графо-аналитический метод прослеживания контура нефтеносности. Изв. Казанск. филиала АН СССР, серия физ.-мат. и техн. наук, вып. 8, 1955.
36. Иванов Н. Ф., Чугунов В. Д. Графо-аналитический метод прослеживания контура нефтеносности в пластах с переменной мощностью и проницаемостью. Изв. Казанск. филиала АН СССР, серия физ.-мат. и техн. наук, вып. 9, 1956.

37. Данилов В. Л. Интегро-дифференциальное уравнение движения водонепроницаемого контакта в пористой среде. Труды третьего Всесоюзного математического съезда, т. I, Изд. АН СССР, Москва, 1956.

38. Данилов В. Л. Интегро-дифференциальные уравнения движения границы раздела двух жидкостей в пористой среде. См. наст. выпуск.

39. Коротков С. Ф. Об одной частной задаче прослеживания контура нефтеносности. Там же.

40. Салехов Г. С., Данилов В. Л., Иванов Н. Ф., Хованский А. Н. К вопросу обводнения нефтяных скважин в пластах с подошвенной водой. Изв. Казанск. филиала АН СССР, серия физ.-мат. и техн. наук, вып. 5, 1954.

41. Салехов Г. С., Данилов В. Л. Об эксплуатации нефтяных скважин в анизотропных пластах с подошвенной водой. ДАН СССР, т. 91, № 6, 1955.

42. Иванов Н. Ф. К вопросу эксплуатации скважин в пластах с подошвенной водой. Изв. Казанск. филиала АН СССР, серия физ.-мат. и техн. наук, вып. 8, 1955.

43. Данилов В. Л. К теории конусообразования в пластах с подошвенной водой. Научный отчет сектора математики физико-техн. ин-та Казанск. филиала АН СССР за 1956 г.

44. Салехов Г. С. К определению давления в неоднородных пластах нефтяных месторождений. ДАН СССР, т. 105, № 6, 1955.

45. Салехов Г. С. К определению давления в неоднородных пластах нефтяных месторождений. Изв. Казанск. филиала АН СССР, серия физ.-мат. и техн. наук, вып. 9, 1956.

46. Данилов В. Л. К определению давления в пластах с переменными проницаемостью и мощностью. Изв. Казанск. филиала АН СССР, серия физ.-мат. и техн. наук, вып. 8, 1955.

47. Салехов Г. С., Старшинова Л. В. К определению функции давления в неоднородных пластах. См. наст. выпуск.

48. Чугунов В. Д. К задаче определения функции давления в макроеднородном пласте при упругом режиме. Научный отчет сектора математики физико-техн. ин-та Казанск. филиала АН СССР за 1956 г.

49. Салехов Г. С. и Иванов Н. Ф. К вопросу об оптимальном режиме эксплуатации нефтяных месторождений. ДАН СССР, т. 89, № 2, 1953.

50. Иванов Н. Ф., Салехов Г. С. и Свирский И. В. Об определении оптимальных условий эксплуатации нефтяных скважин в пластах с упругим режимом. Изв. Казанск. филиала АН СССР, серия физ.-мат. и техн. наук, вып. 5, 1954.

51. Свирский И. В. К вопросу о форсированной эксплуатации нефтяных скважин. Изв. Казанск. филиала АН СССР, серия физ.-мат. и техн. наук, вып. 9, 1956.

52. Данилов В. Л. Дебит нефтяных скважин при произвольной форме контура питания. Изв. Казанск. филиала АН СССР, серия физ.-мат. и техн. наук, вып. 5, 1954.

53. Данилов В. Л. Дебит нефтяных скважин при произвольной форме контура питания. ДАН СССР, т. ХСII, № 1, 1953.

54. Хованский А. Н. К расчету восстановления забойного давления после закрытия скважины. Изв. Казанск. филиала АН СССР, серия физ.-мат. и техн. наук, вып. 5, 1954.

55. Хованский А. Н. К выводу основных уравнений фильтрации упругой жидкости в упругой пористой среде. ДАН СССР, т. 89, № 2, 1953.

Физико-технический институт
Казанского филиала АН СССР

Поступила 2 января 1957 г.

Г. С. Салехов

К РЕШЕНИЮ ЗАДАЧ УПРАВЛЕНИЯ ДВИЖЕНИЕМ КОНТУРА НЕФТЕНОСНОСТИ МЕТОДОМ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКОЙ АППРОКСИМАЦИИ

Для решения задач управления движением КН (контур нефтеносности) предлагается метод тригонометрической аппроксимации, который может быть использован в случаях задания звездных и незвездных законов стягивания КН. На основании этого метода рассмотрен вопрос о наложении решений нескольких задач управления с одинаковым законом стягивания КН.

§ 1. Введение. Будем рассматривать случай горизонтального пласта при водонапорном режиме, имеющего всюду постоянную мощность h и проницаемость k . Предполагаем пласт ограниченным некоторым круговым контуром питания Γ_n радиуса R . На контуре Γ_n функция давления p удовлетворяет условию $p|_{\Gamma} = p = \text{const}$. Различие вязкостей воды и нефти не учитывается. В указанных предположениях, если принять за полюс центр круга Γ , функция p в полярных координатах может быть записана в виде [1]:

$$p = p_n - \frac{\mu}{2\pi kh} \sum_{i=1}^{n+1} q_i \ln \sqrt{\frac{R^2 - 2r\rho_i \cos(\theta - \varphi_i) + \frac{\rho_i^2}{R^2} r^2}{r^2 - 2r\rho_i \cos(\theta - \varphi_i) + \rho_i^2}}, \quad (1.1)$$

где μ — вязкость жидкости, (φ_i, ρ_i) — полярные координаты скважин, q_i — текущие объемные дебиты скважин. Индексы $i = 1, 2, 3, \dots, n$ — соответствуют эксплуатационным и индексы $i = n+1, n+2, \dots, n+l$ — нагнетательным скважинам.

При условии фильтрации жидкости по закону Дарси, уравнение движения КН может быть записано в виде

$$m \frac{\partial F}{\partial t} - \frac{k}{\mu} \frac{\partial p}{\partial n} \cdot \frac{\partial F}{\partial n} = 0, \dots \quad (1.2)$$

где m — пористость, $F(\theta, r, t) = 0$ — неизвестное уравнение КН в любой момент времени, $\frac{\partial}{\partial n}$ — нормальная производная по отношению к контуру Γ , определяемому уравнением $F(\theta, r, t) = 0$.

Замечая, что при движении КН величина $\frac{\partial F}{\partial n} = \pm |\nabla F|$ не может обратиться в нуль, уравнение (1.2) удобно представить в виде

$$v_n - \frac{k}{\mu} \frac{\partial p}{\partial n} = 0, \dots \quad (1.3)$$

где

$$v_n = m \frac{\partial F}{\partial t} / \frac{\partial F}{\partial n} \quad (1.4)$$

Для определения неизвестной функции F уравнение (1.2) или (1.3) надо проинтегрировать при начальном условии

$$F(\theta, r, 0) = F_0(\theta, r) = 0. \quad (1.5)$$

Приступая к решению задачи управления движением КН, предположим, что

$$\bar{F}(\theta, r, t) = 0 \quad (1.6)$$

является заданным законом стягивания КН, который также удовлетворяет начальному условию (1.5).

Подставляя (1.6) в уравнение (1.3), будем иметь

$$\bar{V}_n - V_n = \varepsilon, \quad (1.7)$$

где \bar{V}_n — заданная нормальная скорость перемещения КН (1.6), V_n — действительная нормальная скорость перемещения КН (1.6),

$$\varepsilon = \varepsilon(\theta, r, t, \varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_{n+1}; \rho_1, \rho_2, \dots, \rho_{n+1}; q_1, q_2, \dots, q_{n+1}) \quad (1.8)$$

является известной функцией погрешности, зависящей от $3(n+1)$ параметров (φ_i, ρ_i) и q_i .

ε — есть так называемая „невязка“, используемая при решении задач управления движением КН.

Г. П. Цыбульский „невязку“ ε , принятую в виде (1.7), использовал для решения задач управления движением КН по характеру эксплуатации скважин по методу наименьших квадратов [2]. При этом, исходя из параметрической формы записи уравнения движения, были рассмотрены случаи звездных и незвездных контуров.

В настоящей работе показано, что на основании уравнения (1.7) также может быть предложен метод тригонометрической аппроксимации для решения задач управления движением звездных и незвездных КН. Этот метод в несколько иной форме уже неоднократно был использован для решения различных задач управления КН*, при чем он до сих пор излагался применительно лишь к случаю звездных законов стягивания КН.

Учитывая это обстоятельство, а также что:

1) метод тригонометрической аппроксимации в ряде случаев удобен для решения задач управления КН по характеру размещения скважин (см., например, [3]);

2) при этом методе могут быть хорошо использованы практические способы приближенного гармонического анализа, мы считаем, что метод тригонометрической аппроксимации в том виде, как это изложено в § 2 настоящей работы, будет удобным при решении многих задач управления движением КН. Эта методика также может быть использована при решении подобных задач для двухжидкостной системы. Между прочим, в § 2 показано, что при использовании метода тригонометрической аппроксимации, равенство нулю так называемой нулевой гармоники есть не что иное, как уравнение баланса, справедливое при любом законе стягивания КН.

В § 3, на основании метода тригонометрической аппроксимации изучается вопрос о возможных наложениях решений нескольких задач управления с одинаковым законом стягивания КН. При этом указывается способ оценки допускаемой общей погрешности. Эта методика может иметь практическое применение при решении задачи управления движением КН для крупных месторождений с большим числом скважин.

* См. выпуски 6, 8 и 9 „Известий КФАН СССР“ (серия физ.-мат. и технич. наук).

§ 2. Метод тригонометрической аппроксимации. Обозначим через s дуговую абсциссу переменного замкнутого контура Γ , определенного уравнением (1.6), для фиксированного момента времени t .

Длину контура Γ обозначим через L . Предполагая, что при заданном законе стягивания (1.6) ε является достаточно гладкой функцией от дуговой абсциссы s , разложим ее в ряд Фурье следующим образом:

$$\varepsilon = \frac{A_0}{2} + \sum_{v=1}^{\infty} \left[A_v \cos \frac{2\pi v s}{L} + B_v \sin \frac{2\pi v s}{L} \right]. \quad (2.1)$$

Согласно равенству Парсеваля имеем

$$I^2 = \frac{1}{L} \int_0^L \varepsilon^2 ds = \frac{1}{L} \left[\frac{A_0^2}{2} + \sum_{v=1}^{\infty} (A_v^2 + B_v^2) \right], \quad (2.2)$$

где

$$\left. \begin{aligned} A_0 &= \frac{1}{L} \int_0^L \varepsilon ds, & A_v &= \frac{1}{L} \int_0^L \varepsilon \cos \frac{2\pi v s}{L} ds; \\ & & B_v &= \frac{1}{L} \int_0^L \varepsilon \sin \frac{2\pi v s}{L} ds. \end{aligned} \right\} \quad (2.3)$$

Если бы параметры (φ_i, ρ_i) и q_i ($i=1, 2, \dots, n+1$), при заданном законе стягивания КН (1.6), удалось подобрать так, чтобы все коэффициенты Фурье (2.3) оказались равными нулю, то согласно (2.2) также было бы $\varepsilon=0$, и в этом случае задача управления решалась бы точно. Но конечным числом $3(n+1)$ параметров в общем случае этого выполнить нельзя. Поэтому, считая, что ε является достаточно гладкой функцией от s , или, что то же самое, коэффициенты Фурье (2.3) убывают достаточно быстро в зависимости от номера v , для определения параметров (φ_i, ρ_i) и q_i ($i=1, 2, \dots, n+1$), мы можем приравнять нулю лишь конечное число коэффициентов Фурье. Тогда для определения неизвестных (φ_i, ρ_i) и q_i будем иметь следующую конечную систему уравнений:

$$A_0 = 0, \quad A_v = 0, \quad B_v = 0, \quad (v=1, 2, \dots, M). \quad (2.4)$$

После определения значений параметров из этой системы уравнений, допускаемая средняя квадратическая ошибка отклонения скоростей V_n и \bar{V}_n согласно (2.3) будет определяться формулой

$$I^2 = \frac{1}{L} \int_0^L \varepsilon^2 ds = \sum_{v=M+1}^{\infty} (A_v^2 + B_v^2). \quad (2.5)$$

Заметим, что практически выбор числа уравнений в системе (2.4) будет зависеть, с одной стороны, от числа неизвестных параметров (φ_i, ρ_i) и q_i , некоторые из них иногда могут быть фиксированными, и, с другой стороны, от требуемой точности решения задачи при заданном законе стягивания КН (1.6).

Как было уже указано выше, равенство нулю всех коэффициентов Фурье (2.3) равносильно точному выполнению уравнения движения (1.3) или (1.2), а выполнение условий (2.4) соответствует приближенному удовлетворению этих уравнений. Поэтому равенство

нулю коэффициентов Фурье (2.3) или, то же самое, выполнение равенств

$$\int_0^L \epsilon e^{\frac{2\pi v s}{L}} ds = 0, \quad (v=0, 1, 2, 3, \dots) \quad (2.6)$$

можно использовать для контроля точности решения задачи прослеживания КН, т. е. точности решения уравнения (1.2) при заданных координатах (φ_i, ρ_i) и дебитах скважин q_i . В работе В. Л. Данилова [4] условие $A_0=0$ используется для контроля решения задачи прослеживания при двухжидкостной системе.

В тех предположениях, которые сделаны в § 1, и с учетом выражения (1.1) для функции давления p , систему уравнений (2.4) можно представить в более развернутом виде.

Зная, что

$$V_n = -\frac{k}{\mu} \frac{\partial p}{\partial n},$$

и учитывая выражение (1.1), уравнение (1.7) можно представить в виде

$$\bar{V}_n + \frac{1}{2\pi h} \sum_{i=1}^{n+1} q_i V_{in} = \epsilon, \quad (2.7)$$

где

$$V_{in} = \frac{\partial}{\partial n} \ln \sqrt{\frac{R^2 - 2r\rho_i \cos(\theta - \varphi_i) + \frac{\rho_i^2}{R^2} r^2}{r^2 - 2r\rho_i \cos(\theta - \varphi_i) + \rho_i^2}}. \quad (2.8)$$

Согласно (2.7), вместо системы уравнений (2.4), будем иметь:

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{n+1} q_i \int_0^L V_{in} ds &= -2\pi h \int_0^L \bar{V}_n ds, \\ \sum_{i=1}^{n+1} q_i \int_0^L V_{in} \cos \frac{2\pi v s}{L} ds &= -2\pi h \int_0^L \bar{V}_n \cos \frac{2\pi v s}{L} ds, \\ \sum_{i=1}^{n+1} q_i \int_0^L V_{in} \sin \frac{2\pi v s}{L} ds &= -2\pi h \int_0^L \bar{V}_n \sin \frac{2\pi v s}{L} ds. \end{aligned} \quad (2.9)$$

$v = 1, 2, \dots, M.$

Рассмотрим первое уравнение этой системы, выражающее условие равенства нулю нулевой гармоники, т. е. $A_0=0$. Легко показать, что

$$\int_0^L V_{in} ds = \begin{cases} 2\pi, & \text{если } i=1, 2, \dots, n, \\ 0, & \text{если } i=n+1, n+2, \dots, n+l. \end{cases} \quad (2.10)$$

В самом деле, как известно *

$$\int_0^L \frac{\partial}{\partial n} \ln \frac{2}{\sqrt{R^2 - 2r\rho_i \cos(\theta - \varphi_i) + \rho_i^2}} ds = \begin{cases} 2\pi, & \text{если точка } (\varphi_i, \rho_i) \text{ лежит} \\ & \text{внутри } \Gamma, \\ 0, & \text{если она лежит вне } \Gamma. \end{cases} \quad (2.11)$$

* См. [5], стр. 224.

С другой стороны, в силу того, что $\frac{R^2}{\rho_i} > R > \rho_i$ ($i=1, 2, \dots, n+l$), имеем

$$\int_0^L \frac{\partial}{\partial n} \ln \sqrt{R^2 - 2r\rho_i \cos(\theta - \varphi_i) + \rho_i^2} ds = 0. \quad (2.12)$$

Равенства (2.11) и (2.12), очевидно, доказывают справедливость равенства (2.10). Поэтому, согласно, (2.10) первое уравнение системы (2.9) можно записать в следующем виде:

$$\sum_{i=1}^n q_i = -h \int_0^L \bar{V}_n ds. \quad (2.13)$$

Это есть, так называемое, уравнение баланса, т. е. условие того, что сумма объемных дебитов всех эксплуатационных скважин, лежащих внутри Γ , должна равняться объему жидкости, вытекающей через контур Γ за единицу времени. Заметим, что, если начальный КН является кругом и задан закон концентрического стягивания КН, а также учитывая, что при этом \bar{V}_n не будет зависеть от s , из системы уравнений (2.9) легко следует система уравнений, которая нами была получена в работе [1].

Интегралы, содержащиеся в системе (2.9), при заданном законе изменения \bar{V}_n , практически могут быть вычислены графо-аналитическим методом, используя хорошо известные приближенные способы гармонического анализа. При этом считается, что начальное положение КН и закон изменения V_n на карте месторождения даются геометрическим путем.

§ 3. О наложении решений нескольких задач управления при одинаковом законе стягивания КН. Предположим, что решены N задач управления движением КН для одного и того же месторождения при различном числе, размещении и характере эксплуатации скважин, принимая во всех случаях один и тот же закон стягивания КН $F(\theta, r, t)=0$. Не исключается случай, когда координаты отдельных скважин в различных задачах могут совпадать. Задачу будем рассматривать при тех основных предположениях, которые были сделаны в § 1.

Предположим, что каждая j -ая задача управления решена при наличии n_j -их скважин с координатами $(\varphi_{ij}, \rho_{ij})$ ($i=1, 2, \dots, n_j$, $j=1, 2, \dots, N$) и дебитами q_{ij} ($i=1, 2, \dots, n_j$, $j=1, 2, \dots, N$). Согласно (2.7) на каждую решенную задачу управления можно составить следующие „невязки“:

$$\begin{aligned} \bar{V}_n + \sum_{i=1}^{n_1} q_{i1} V_{in}^{(1)} &= \epsilon_1, \\ &\dots \\ \bar{V}_n + \sum_{i=1}^{n_N} q_{iN} V_{in}^{(N)} &= \epsilon_N, \end{aligned} \quad (3.1)$$

где введено сокращенное обозначение

$$V_{in}^{(j)} = \frac{1}{2\pi h} \frac{\partial}{\partial n} \ln \sqrt{\frac{R^2 - 2r\rho_{ij} \cos(\theta - \varphi_{ij}) + \frac{\rho_{ij}^2}{R^2} r^2}{r^2 - 2r\rho_{ij} \cos(\theta - \varphi_{ij}) + \rho_{ij}^2}}. \quad (3.2)$$

Умножая каждое из уравнений (3.1) на некоторое положительное постоянное c_j (которое будем называть весом j -го уравнения) и складывая их, получим

$$\bar{V}_n + \sum_{j=1}^N \sum_{i=1}^{n_j} \tilde{q}_{ij} V_{in}^{(j)} = \varepsilon, \quad (3.3)$$

где введены следующие сокращенные обозначения:

$$\tilde{q}_{ij} = \frac{c_j q_{ij}}{\sum_{i=1}^N c_j} \quad (i=1, 2, \dots, n_j, j=1, 2, \dots, N) \quad (3.4)$$

и

$$\varepsilon = \frac{\sum_{j=1}^N c_j \varepsilon_j}{\sum_{j=1}^N c_j} \quad (3.5)$$

При необходимости постоянные c_j ($j=1, 2, \dots, N$) можно было бы заранее нормировать условием $\sum_{j=1}^N c_j = 1$, а также предполагать их, например, некоторыми положительными функциями времени t для $0 \leq t \leq T$.

Как видно, уравнение (3.3) имеет ту же самую структуру, что и каждое из уравнений (3.1).

Более того, можно показать, что при выполнении систем уравнений (2.9) для каждой отдельной задачи управления, будет также справедлива совершенно аналогичная система для уравнения (3.3) при условии (3.4). В самом деле, согласно (2.9) и с учетом (2.13), систему уравнений, соответствующую j -ому уравнению (3.1), можно представить в следующем виде:

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{n_j} q_{ij} &= -h \int_0^L \bar{V}_n ds, \\ \sum_{i=1}^{n_j} q_{ij} \int_0^L V_{in}^{(j)} \cos \frac{2\pi v s}{L} ds &= -2\pi h \int_0^L \bar{V}_n \cos \frac{2\pi v s}{L} ds, \\ \sum_{i=1}^{n_j} q_{ij} \int_0^L V_{in}^{(j)} \sin \frac{2\pi v s}{L} ds &= -2\pi h \int_0^L \bar{V}_n \sin \frac{2\pi v s}{L} ds, \end{aligned} \quad (j=1, 2, \dots, N, v=1, 2, \dots, M_j).$$

Умножая каждое уравнение этой системы на величину $\frac{c_j}{\sum_{j=1}^N c_j}$

и суммируя их отдельно от $j=1$ до $j=N$, с учетом обозначения (3.4), получим

$$\sum_{j=1}^N \sum_{i=1}^{n_j} \tilde{q}_{ij} = -h \int_0^L \bar{V}_n ds,$$

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^N \sum_{i=1}^{n_j} \tilde{q}_{ij} \int_0^L V_{in}^{(j)} \cos \frac{2\pi v s}{L} ds &= -2\pi h \int_0^L \bar{V}_n \cos \frac{2\pi v s}{L} ds, \\ \sum_{j=1}^N \sum_{i=1}^{n_j} \tilde{q}_{ij} \int_0^L V_{in}^{(j)} \sin \frac{2\pi v s}{L} ds &= -2\pi h \int_0^L \bar{V}_n \sin \frac{2\pi v s}{L} ds, \end{aligned} \quad (3.6)$$

где

$$v=1, 2, \dots, M \text{ и } M = \min \{M_1, M_2, \dots, M_N\}.$$

Нетрудно видеть, что (3.6) есть не что иное, как система уравнений, соответствующая уравнению „невязки“ (3.3), причем число уравнений M в системе (3.6) определяется из условия

$$M = \min \{M_1, M_2, \dots, M_N\}.$$

На основании вышеизложенного, уравнение (3.3) действительно можно рассматривать как „невязку“, составленную для решения задачи управления при заданном законе стягивания КН $F(0, r, t) = 0$ с учетом всех $n_1 + n_2 + \dots + n_N$ скважин. При этом размещение их на месторождении будет определяться координатами $(\varphi_{ij}, \rho_{ij})$ ($i=1, 2, \dots, n_j, j=1, 2, \dots, N$), найденными из решения отдельных самостоятельных задач управления, и дебиты будут вычислены по формулам (3.4). При вычислении дебитов по этим формулам вес c_j для каждой задачи управления может быть выбран, например, с учетом практически допустимой погрешности $\bar{V}_n - V_n = \varepsilon$, где ε определяется формулой (3.5).

В связи с этим можно показать, что величина ε всегда заключена между наибольшими и наименьшими значениями из всех „невязок“ ε_i ($i=1, 2, \dots, N$), получаемых при решении отдельных N самостоятельных задач управления при одном и том же законе стягивания КН: $F(0, r, t) = 0$.

В самом деле, если для всех θ, r , удовлетворяющих уравнению $F(0, r, t) = 0$, и $0 \leq t \leq T$ (T — время стягивания Γ), введем сокращенные обозначения

$$\min \{\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_N\} = \underline{\varepsilon} \text{ и } \max \{\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_N\} = \bar{\varepsilon},$$

тогда, согласно (3.5), будем иметь $\underline{\varepsilon} \leq \varepsilon \leq \bar{\varepsilon}$. Таким образом, следует, что если допустимая погрешность $\bar{V}_n - V_n = \varepsilon$ практически гарантирована величиной ε , заключенной в промежутке $\underline{\varepsilon} \leq \varepsilon \leq \bar{\varepsilon}$, то для решения задачи управления с учетом всех $n_1 + n_2 + \dots + n_N$ скважин, за дебиты их можно принимать величины (3.4), при любом выборе весов $c_j > 0$, а координаты скважин будут

$$(\varphi_{ij}, \rho_{ij}) \quad (i=1, 2, \dots, n_j, j=1, 2, \dots, N).$$

Аналогичное утверждение также справедливо при оценке погрешности $\bar{V}_n - V_n = \varepsilon$ по норме средне-квадратического отклонения. В самом деле, произведем оценку величины

$$I = \left[\frac{1}{L} \int_0^L \varepsilon^2 ds \right]^{1/2},$$

предполагая, что величины

$$I_j = \left[\frac{1}{L} \int_0^L \varepsilon_j^2 ds \right]^{1/2} \quad (j=1, 2, \dots, N) \quad (3.7)$$

являются известными.

Согласно неравенству Минковского, для любого $r > 1$ имеем

$$\left\{ \frac{1}{L} \int_0^L \left[\frac{\sum_{j=1}^N c_j \varepsilon_j}{\sum_{j=1}^N c_j} \right]^r ds \right\}^{1/r} < \frac{1}{\sum_{j=1}^N c_j} \sum_{j=1}^N \left[\frac{1}{L} \int_0^L (c_j \varepsilon_j)^r ds \right]^{1/r}$$

Полагая $r=2$, будем иметь

$$I = \left[\frac{1}{L} \int_0^L \varepsilon^2 ds \right]^{1/2} < \frac{\sum_{j=1}^N c_j \left[\frac{1}{L} \int_0^L \varepsilon_j^2 ds \right]^{1/2}}{\sum_{j=1}^N c_j}$$

или, согласно (3.7),

$$I < \frac{\sum_{j=1}^N c_j I_j}{\sum_{j=1}^N c_j} \quad (3.8)$$

Пусть

$$\bar{I} = \max \{ I_1, I_2, \dots, I_N \}, \quad 0 \leq t \leq T$$

Тогда из неравенства (3.8) следует, что $I < \bar{I}$.

Таким образом, если на месторождении $n_1 + n_2 + \dots + n_N$ скважин разместить по координатам $(\varphi_{ij}, \rho_{ij})$ ($i=1, 2, \dots, n_j; j=1, 2, \dots, N$) и дебиты их определять по формуле (3.4) при любых $c_j > 0$, то общая средне-квадратичная ошибка I не будет превосходить максимального значения средних квадратических ошибок I_j ($j=1, 2, \dots, N$), полученных при решении отдельных задач управления соответственно с числом скважин n_j ($j=1, 2, \dots, N$).

Вышеуказанные положения могут быть полезными, например, при решении задач управления движением КН для месторождений с большим числом скважин, путем расчленения этой задачи на решения отдельных задач управления с меньшим числом скважин.

ЛИТЕРАТУРА

1. Салехов Г. С. Постановка и метод решения гидродинамических задач управления контура нефтеносности. Изв. Казанск. филиала АН СССР, серия физ.-мат. и техн. наук, вып. 6, 1955.
2. Цыбульский Г. П. Решение задачи управления движением незвездных контуров нефтеносности. Изв. Казанского филиала АН СССР, серия физ.-мат. и техн. наук, вып. 9, 1956.
3. Салехов Г. С. Решение некоторых задач управления движением контура нефтеносности по характеру размещения скважин. См. настоящий выпуск.
4. Данилов В. Л. Интегро-дифференциальные уравнения движения границы раздела двух жидкостей в пористой среде. См. настоящий выпуск.
5. Сретенский Л. Н. Теория ньютоновского потенциала. Гостехиздат, 1946.

Физико-технический институт
Казанского филиала АН СССР

Поступила 22 декабря 1956 г.

В. Л. Данилов и В. Д. Чугунов

ОБ УПРАВЛЕНИИ ПЕРЕМЕЩЕНИЕМ КОНТУРА НЕФТЕНОСНОСТИ ПРИ УПРУГОМ И ВОДОНАПОРНОМ РЕЖИМАХ

Рассмотрена плоская задача управления перемещением контура нефтеносности (КН) с учетом различия вязкостей нефти и воды при упругом и водонапорном режимах пласта.

В случае упругого режима используются тепловые потенциалы простого и двойного слоя. Задача приводится к решению интегральных уравнений Вольтерра. Указаны два пути сведения задачи к интегральным уравнениям. Предложенные способы применимы также и при водонапорном режиме. В этом случае вместо тепловых потенциалов используются логарифмические потенциалы простого и двойного слоя. Приведен пример решения при концентрически круговом стягивании КН.

§ 1. Упругий режим. 1. Рассмотрим пласт с постоянными мощностью h и проницаемостью k . Нефтью занята односвязная область G_1 , ограниченная контуром Γ_0 . Область G_2 вне контура Γ_0 занята краевой водой, простирающейся до бесконечности. В нефтяной области G_1 размещены j нефтяных скважин с объемными дебитами Q_i и координатами x_i, y_i ($i=1, 2, \dots, j$), в водной части G_2 находятся l водяных скважин с объемными дебитами Q_i и координатами x_i, y_i ($i=j+1, j+2, \dots, j+l$).

Полагая скважины вертикальными линейными источниками и стоками, будем рассматривать плоское течение.

Давление p_1 в области G_1 удовлетворяет при упругом режиме уравнению [1]:

$$\Delta p_1 = \frac{1}{\alpha_1} \frac{\partial p_1}{\partial t}, \quad (1.1)$$

а давление в водной зоне G_2 — уравнению

$$\Delta p_2 = \frac{1}{\alpha_2} \frac{\partial p_2}{\partial t}. \quad (1.2)$$

Здесь α_1 и α_2 — так называемые коэффициенты, пьезопроводности.

$$\alpha_1 = \frac{k}{\mu_n (m \beta_n + \beta_c)}, \quad \alpha_2 = \frac{k}{\mu_v (m \beta_v + \beta_c)},$$

где m — пористость, μ_n, μ_v — динамические вязкости соответственно нефти и воды,

β_n, β_v — коэффициенты сжимаемости нефти и воды,

β_c — коэффициент сжимаемости упругой пористой среды.

Все вышеуказанные параметры пласта и жидкостей считаются постоянными.

На контуре нефтеносности должны выполняться следующие соотношения:

$$p_1 = p_2; \quad (1.3)$$

$$c_1 \frac{\partial p_1}{\partial n} = c_2 \frac{\partial p_2}{\partial n}, \quad (1.4)$$

где $c_1 = \frac{k}{\mu_n}$, $c_2 = \frac{k}{\mu_b}$, n — внутренняя нормаль к контуру Γ .

Решим задачу управления КН [2], если закон перемещения Γ задан в виде

$$f(x, y, t) = 0. \quad (1.5)$$

Задание закона стягивания КН (1.5), как было показано ранее [5, 6], в силу закона Дарси эквивалентно заданию на Γ величины нормальной производной

$$\frac{\partial p_1}{\partial n} = \frac{m}{c_1} \left(\frac{\partial f}{\partial t} / \frac{\partial f}{\partial n} \right)^*, \quad (1.6)$$

либо, что вследствие (1.4) одно и то же, величины,

$$\frac{\partial p_2}{\partial n} = \frac{m}{c_2} \left(\frac{\partial f}{\partial t} / \frac{\partial f}{\partial n} \right). \quad (1.7)$$

При $t=0$ должны быть заданы начальные условия

$$p_1(x, y, 0) = f_1(x, y), \quad (x, y) \in G_1, \quad (1.8)$$

$$p_2(x, y, 0) = f_2(x, y), \quad (x, y) \in G_2, \quad (1.9)$$

удовлетворяющие соотношениям (1.3), (1.4) и (1.6)

2. Рассмотрим сначала задачу при нулевых начальных условиях

$$p_1(x, y, 0) = p_2(x, y, 0) = 0. \quad (1.10)$$

Очевидно, при этом условия (1.3) и (1.4) при $t=0$ выполняются. Будем также считать, что закон стягивания КН (1.5) задан таким, что при $t=0$ $\frac{\partial f}{\partial t} = 0$.

Давление в нефтяной зоне G_1 ищем в виде:

$$p_1(x, y, t) = \frac{1}{4\pi c_1 h} \sum_{i=1}^j \int_0^t \frac{Q_i(\tau)}{t-\tau} \exp\left[-\frac{(x-x_i)^2 + (y-y_i)^2}{4z_1(t-\tau)}\right] d\tau + \frac{1}{2\pi} \int_0^t d\tau \int_{\Gamma} \frac{\mu(\sigma, \tau)}{t-\tau} \frac{\partial}{\partial n_1} \exp\left[-\frac{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2}{4z_1(t-\tau)}\right] d\sigma. \quad (1.11)$$

Здесь $(x, y) \in G_1$, $(\xi, \eta) \in \Gamma$; n_1 — внутренняя нормаль к контуру Γ в точке (ξ, η) ; $\mu(\sigma, \tau)$ — плотность теплового потенциала двойного слоя, непрерывно распределенного по контуру Γ изнутри.

Давление p_2 в водной зоне G_2 ищем в виде:

$$p_2(x, y, t) = \frac{1}{4\pi c_2 h} \sum_{i=j+1}^{j+1} \int_0^t \frac{Q_i(\tau)}{t-\tau} \exp\left[-\frac{(x-x_i)^2 + (y-y_i)^2}{4z_2(t-\tau)}\right] d\tau + \frac{1}{2\pi} \int_0^t d\tau \int_{\Gamma} \frac{\rho(\sigma, \tau)}{t-\tau} \exp\left[-\frac{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2}{4z_2(t-\tau)}\right] d\sigma. \quad (1.12)$$

* Мы здесь и далее пишем $\frac{\partial f}{\partial n}$, а не $|\nabla f|$, как в [5]. По этому поводу см. [9].

Здесь $(x, y) \in G_2$, $(\xi, \eta) \in \Gamma$; $\rho(\sigma, \tau)$ — плотность теплового потенциала простого слоя, непрерывно распределенного по контуру Γ извне.

Выражение (1.11) удовлетворяет уравнению (1.1) и начальному условию (1.10), выражение (1.12) удовлетворяет уравнению (1.2) и начальному условию (1.10). При $r \rightarrow \infty$ $p_2 \rightarrow 0$ для любого t .

Удовлетворим условиям (1.4), (1.6) и (1.7).

В силу свойств предельных значений тепловых потенциалов простого и двойного слоя [7], получим:

$$\begin{aligned} \mu(s, t) + \frac{1}{2\pi} \int_0^t d\tau \int_{\Gamma} \frac{\mu(\sigma, \tau)}{t-\tau} \frac{\partial}{\partial n_1} \exp\left[-\frac{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2}{4z_1(t-\tau)}\right] d\sigma = \\ = \frac{1}{2\pi} \int_0^t d\tau \int_{\Gamma} \frac{\rho(\sigma, \tau)}{t-\tau} \exp\left[-\frac{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2}{4z_2(t-\tau)}\right] d\sigma - \\ - \frac{1}{4\pi c_1 h} \sum_{i=1}^j \int_0^t \frac{Q_i(\tau)}{t-\tau} \exp\left[-\frac{(x-x_i)^2 + (y-y_i)^2}{4z_1(t-\tau)}\right] d\tau + \\ + \frac{1}{4\pi c_2 h} \sum_{i=j+1}^{j+1} \int_0^t \frac{Q_i(\tau)}{t-\tau} \exp\left[-\frac{(x-x_i)^2 + (y-y_i)^2}{4z_2(t-\tau)}\right] d\tau, \quad (1.13) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi} \int_0^t d\tau \int_{\Gamma} \frac{\mu(\sigma, \tau)}{t-\tau} \frac{\partial}{\partial n} \left\{ \frac{\partial}{\partial n_1} \exp\left[-\frac{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2}{4z_1(t-\tau)}\right] \right\} d\sigma + \\ + \frac{1}{4\pi c_1 h} \sum_{i=1}^j \int_0^t \frac{Q_i(\tau)}{t-\tau} \frac{\partial}{\partial n} \exp\left[-\frac{(x-x_i)^2 + (y-y_i)^2}{4z_1(t-\tau)}\right] d\tau = \frac{m}{c_1} \left(\frac{\partial f}{\partial t} / \frac{\partial f}{\partial n} \right), \quad (1.14) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} p(s, t) + \frac{1}{2\pi} \int_0^t d\tau \int_{\Gamma} \frac{\rho(\sigma, \tau)}{t-\tau} \frac{\partial}{\partial n} \exp\left[-\frac{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2}{4z_2(t-\tau)}\right] d\sigma = \frac{m}{c_2} \left(\frac{\partial f}{\partial t} / \frac{\partial f}{\partial n} \right) - \\ - \frac{1}{4\pi c_2 h} \sum_{i=j+1}^{j+1} \int_0^t \frac{Q_i(\tau)}{t-\tau} \exp\left[-\frac{(x-x_i)^2 + (y-y_i)^2}{4z_2(t-\tau)}\right] d\tau. \quad (1.15) \end{aligned}$$

Здесь (x, y) , $(\xi, \eta) \in \Gamma$; σ — дуговая абсцисса точки (ξ, η) , s — дуговая абсцисса точки (x, y) , n — внутренняя нормаль к контуру Γ в точке (x, y) .

Следует иметь в виду, что выполнение соотношений (1.13), (1.14) и (1.15) означает выполнение соотношений (1.3), (1.4) и уравнения движения (1.6) (или, что то же, (1.7)).

В первую очередь обратимся к выражению (1.15). Это линейное интегральное уравнение Вольтерра второго рода, правая часть — известная функция точек контура.

Существование и единственность решения его показаны Г. Мюнтцем [7] для контуров с непрерывно изменяющимися касательными и кривизнами и С. Г. Михлиным [8] для выпуклых, но не обязательно гладких контуров.

Мы полагаем, что выбранный закон стягивания КН (включая начальное положение) удовлетворяет вышеуказанным необходимым условиям.

Из уравнения (1.15) получаем ρ как известную функцию:

$$\rho(x, y, t; Q_{j+1}, Q_{j+2}, \dots, Q_{j+i}).$$

Подставим найденное значение ρ в соотношение (1.13). Очевидно, что мы вновь приходим к линейному интегральному уравнению Вольтерра относительно плотности теплового потенциала двойного слоя μ .

Существование и единственность решения обеспечены наложением на контур Γ необходимых ограничений (см. выше). Решая уравнение (1.13), находим

$$\mu(x, y, t; Q_1, \dots, Q_{j+i}).$$

Итак, функции μ и ρ определены из соотношений (1.15) и (1.13). Остается выполнить соотношение (1.14). Его мы будем выполнять приближенно, путем вариации дебитов Q_i , после подстановки в (1.14) найденного ранее выражения $\mu(x, y, t; Q_1, \dots, Q_{j+i})$.

Составим выражение

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2\pi} \int_0^t d\tau \int_{\Gamma} \frac{\mu(\sigma, \tau, Q_i)}{t-\tau} \frac{\partial}{\partial n} \left[\frac{\partial}{\partial n_1} \exp \left[-\frac{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2}{4\kappa_1(t-\tau)} \right] d\sigma + \right. \\ & + \frac{1}{4\pi c_2 h} \sum_{i=1}^j \int_0^t \frac{Q_i(\tau)}{t-\tau} \frac{\partial}{\partial n} \exp \left[-\frac{(x-x_i)^2 + (y-y_i)^2}{4\kappa_2(t-\tau)} \right] d\tau - \\ & \left. - \frac{m}{c_1} \left(\frac{\partial f}{\partial t} / \frac{\partial f}{\partial n} \right) = \varepsilon(x, y, t; Q_i). \end{aligned} \quad (1.16)$$

Здесь ε — известная функция дебитов. Она по условию (1.14) должна равняться нулю.

Для приближенного удовлетворения данного соотношения могут быть применены методы минимальной погрешности [3]—[5]. Можно предложить следующие пути решения:

1. Полагая дебиты постоянными на небольшом промежутке времени и вводя интегральную невязку

$$E = \frac{1}{t_1} \int_0^{t_1} \varepsilon dt,$$

сведем задачу к последовательному решению систем линейных уравнений (см. [4]).

2. Задавая дебиты линейными функциями постоянных параметров, например $Q_i(t) = a_i + b_i t + c_i t^2$, можно найти коэффициенты a_i, b_i, c_i из системы линейных уравнений, выполняя условие наименьшего отклонения от нуля интегральной невязки E за счет вариации параметров a_i, b_i, c_i .

3. Можно указать и иной путь решения поставленной выше задачи при нулевых начальных условиях. Удовлетворяя краевым условиям (1.3) и (1.4), получаем систему интегральных уравнений Вольтерра второго рода:

$$\begin{aligned} & \mu(s, t) + \frac{1}{2\pi} \int_0^t d\tau \int_{\Gamma} \frac{\mu(\sigma, \tau)}{t-\tau} \frac{\partial}{\partial n_1} \exp \left[-\frac{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2}{4\kappa_1(t-\tau)} \right] d\sigma - \\ & - \frac{1}{2\pi} \int_0^t d\tau \int_{\Gamma} \frac{\rho(\sigma, \tau)}{t-\tau} \exp \left[-\frac{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2}{4\kappa_2(t-\tau)} \right] d\sigma = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & = -\frac{1}{4\pi c_2 h} \sum_{i=1}^j \int_0^t \frac{Q_i(\tau)}{t-\tau} \exp \left[-\frac{(x-x_i)^2 + (y-y_i)^2}{4\kappa_2(t-\tau)} \right] d\tau + \\ & + \frac{1}{4\pi c_2 h} \sum_{i=j+1}^{j+i} \int_0^t \frac{Q_i(\tau)}{t-\tau} \exp \left[-\frac{(x-x_i)^2 + (y-y_i)^2}{4\kappa_2(t-\tau)} \right] d\tau, \end{aligned} \quad (1.17)$$

$$\begin{aligned} \rho(s, t) &= \frac{c_1}{c_2} \frac{1}{2\pi} \int_0^t d\tau \int_{\Gamma} \frac{\mu(\sigma, \tau)}{t-\tau} \frac{\partial}{\partial n} \left\{ \frac{\partial}{\partial n_1} \exp \left[-\frac{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2}{4\kappa_1(t-\tau)} \right] \right\} d\sigma + \\ & + \frac{1}{2\pi} \int_0^t d\tau \int_{\Gamma} \frac{\rho(\sigma, \tau)}{t-\tau} \frac{\partial}{\partial n} \exp \left[-\frac{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2}{4\kappa_2(t-\tau)} \right] d\sigma = \\ & = \frac{1}{4\pi c_2 h} \sum_{i=1}^j \int_0^t \frac{Q_i(\tau)}{t-\tau} \exp \left[-\frac{(x-x_i)^2 + (y-y_i)^2}{4\kappa_2(t-\tau)} \right] d\tau - \\ & - \frac{1}{4\pi c_2 h} \sum_{i=j+1}^{j+i} \int_0^t \frac{Q_i(\tau)}{t-\tau} \frac{\partial}{\partial n} \exp \left[-\frac{(x-x_i)^2 + (y-y_i)^2}{4\kappa_2(t-\tau)} \right] d\sigma, \end{aligned} \quad (1.18)$$

$(x, y), (\xi, \eta) \in \Gamma,$

из которой определяем неизвестные функции ρ и μ .

Определив ρ и μ как функции параметров Q_i — неизвестных пока дебитов и подставляя μ в формулу (1.11) и ρ — в формулу (1.12), получаем p_1 и p_2 , как функции неопределенных параметров Q_i , стоящих под знаком интеграла.

Остается удовлетворить уравнению движения (1.6) (либо (1.8)), которые иначе можно записать в виде [5]:

$$m \frac{\partial f}{\partial t} - c_1 \left(\frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial p_1}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{\partial p_1}{\partial y} \right) = 0.$$

Подставляя в это уравнение частные производные из заданного закона стягивания (1.5) и предельные значения частных производных p_1 на контуре Γ , получаем известную функцию дебитов $\varepsilon(x, y, t, Q_i)$. Далее остается определить дебиты $Q_i(t)$ из условия наименьшего отклонения функции ε от нуля. С этой целью можно применить способы, указанные выше для удовлетворения соотношения (1.16) в первом методе решения задачи.

4. Случай ненулевых начальных условий можно легко свести к нулевым начальным условиям [7], при этом уравнения (1.13), (1.14) и (1.15), (1.17), (1.18) будут содержать дополнительные известные свободные члены.

§ 2. Водонапорный режим. 1. Следует отметить, что методы, изложенные в § 1 для случая упругого режима, полностью распространяются на случай водонапорного режима. Оставим в силе все прежние предположения относительно физических свойств пласта и жидкостей, т. е. будем полагать их несжимаемыми. Тогда, как известно, давление p_1 в нефтяной зоне G_1 и давление p_2 в водной зоне G_2 удовлетворяют уравнению Лапласа

$$\Delta p_2 = \Delta p_1 = 0. \quad (2.1)$$

Краевые условия (1.3) и (1.4) остаются неизменными. Если задать закон движения КН в прежней форме (1.5), то сохраняют свою силу

соотношения (1.6) и (1.7). Задание начальных условий (1.9) и (1.10) отпадает. Теперь, вместо тепловых потенциалов простого и двойного слоев, удовлетворяющих уравнению теплопроводности (1.1) и (1.2), будем пользоваться логарифмическими потенциалами простого и двойного слоев, удовлетворяющими, как известно, уравнению Лапласа (2.1).

2. Давление p_1 в области G_1 отыскиваем в виде

$$p_1(x, y, t) = \frac{1}{2\pi c_1 h} \sum_{i=1}^j Q_i(t) \ln \frac{1}{V(x-x_i)^2 + (y-y_i)^2} + \int_{\Gamma} \mu(\sigma, t) \frac{\partial}{\partial n_1} \ln \frac{1}{V(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2} d\sigma,$$

а давление p_2 в области G_2 — в виде

$$p_2(x, y, t) = \frac{1}{2\pi c_2 h} \sum_{i=j+1}^{j+1} Q_i(t) \ln \frac{1}{V(x-x_i)^2 + (y-y_i)^2} + \int_{\Gamma} \rho(\sigma, t) \ln \frac{1}{V(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2} d\sigma. \quad (2.3)$$

Здесь $(\xi, \eta) \in \Gamma$; μ — плотность логарифмического потенциала двойного слоя на Γ , ρ — плотность логарифмического потенциала простого слоя. Выбранные, таким образом, функции p_1 и p_2 удовлетворяют уравнениям (2.1). Удовлетворим теперь соотношениям (1.3), (1.6) и (1.7). Учитывая известные свойства потенциала простого и двойного слоев, получаем

$$\begin{aligned} \pi p(s, t) + \int_{\Gamma} \mu(\sigma, t) \frac{\partial}{\partial n_1} \ln \frac{1}{V(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2} d\sigma &= \\ &= \int_{\Gamma} \rho(\sigma, t) \ln \frac{1}{V(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2} d\sigma - \\ &- \frac{1}{2\pi c_1 h} \sum_{i=1}^j Q_i(t) \ln \frac{1}{V(x-x_i)^2 + (y-y_i)^2} + \\ &+ \frac{1}{2\pi c_2 h} \sum_{i=j+1}^{j+1} Q_i(t) \ln \frac{1}{V(x-x_i)^2 + (y-y_i)^2}; \quad (2.4) \\ \frac{1}{2\pi c_1 h} \sum_{i=1}^j Q_i(t) \frac{\partial}{\partial n} \ln \frac{1}{V(x-x_i)^2 + (y-y_i)^2} + \\ &+ \int_{\Gamma} \mu(\sigma, t) \frac{\partial}{\partial n} \left[\frac{\partial}{\partial n_1} \ln \frac{1}{V(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2} \right] d\sigma = \\ &= \frac{m}{c_1} \left(\frac{\partial f}{\partial t} / \frac{\partial f}{\partial n} \right); \quad (2.5) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \pi p(s, t) + \int_{\Gamma} \rho(\sigma, t) \frac{\partial}{\partial n} \ln \frac{1}{V(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2} d\sigma &= \frac{m}{c_2} \left(\frac{\partial f}{\partial t} / \frac{\partial f}{\partial n} \right) - \\ &- \frac{1}{2\pi c_2 h} \sum_{i=j+1}^{j+1} Q_i(t) \frac{\partial}{\partial n} \ln \frac{1}{V(x-x_i)^2 + (y-y_i)^2}. \quad (2.6) \end{aligned}$$

Выполнение соотношений (2.4), (2.5) и (2.6) эквивалентно удовлетворению условий (1.3), (1.4) и уравнения движения КН (1.6) (яли, что то же самое, (1.7)).

Рассмотрим в первую очередь выражение (2.6). Это линейное интегральное уравнение типа Фредгольма второго рода, решив которое мы получим $\rho(x, y, t; Q_{j+1}, Q_{j+2}, \dots, Q_{j+1})$.

О существовании и единственности решения см. [5]. Подставив найденное значение ρ в соотношение (2.4), мы вновь приходим к линейному интегральному уравнению типа Фредгольма второго рода относительно плотности потенциала двойного слоя μ .

Решая уравнение (2.4), найдем $\mu(x, y, t; Q_1, Q_2, \dots, Q_{j+1})$. Соотношение (2.5) удовлетворим, в общем случае, приближенно путем вариации дебитов Q_i . После подстановки в него μ , как функции x, y, t, Q_i , левая часть его является линейной функцией пока еще неопределенных параметров Q_i [3], [5].

Путь решения, предлагаемый выше, вполне аналогичен тому, который изложен в § 1 для упругого режима.

3. Второй путь решения задачи (см. § 1, п. 4) приводит к решению системы интегральных уравнений типа Фредгольма 2-го рода относительно искомым функций ρ и μ .

4. Следует отметить, что при упругом режиме в выражениях (1.11) и (1.12) для функций p_1 и p_2 можно сменить местами потенциалы простого и двойного слоев, т. е. в p_1 вместо двойного слоя поместить на Γ простой слой, а в p_2 вместо простого слоя поместить двойной. В том и другом случае $p_2 \rightarrow 0$ при $r \rightarrow \infty$, т. е. в бесконечно удаленной точке плоскости, принадлежащей области G_2 , функция p_2 является регулярной.

Иное дело при водонапорном режиме. Следует иметь в виду то обстоятельство, что возможен приток жидкости из бесконечно удаленной точки (либо сток в бесконечно удаленную точку). Поэтому, вообще говоря, функция p_2 имеет при $r \rightarrow \infty$ логарифмическую особенность. При выборе p_2 в форме (2.3) это обеспечено даже в случае $\sum_{i=j+1}^{j+1} Q_i(t) = 0$ за счет потенциала простого слоя, имеющего на бесконечности особенность такого типа при $\int_{\Gamma} \rho d\sigma \neq 0$.

Если же сменить местами в выражениях (2.2) и (2.3) потенциалы простого и двойного слоев, т. е. принять p_2 в виде

$$p_2(x, y, t) = \frac{1}{2\pi c_2 h} \sum_{i=j+1}^{j+1} Q_i(t) \ln \frac{1}{V(x-x_i)^2 + (y-y_i)^2} + \int_{\Gamma} \mu(\sigma, t) \frac{\partial}{\partial n_1} \ln \frac{1}{V(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2} d\sigma,$$

то при $\sum_{i=j+1}^{j+1} Q_i(t) = 0$ $p_2 \rightarrow 0$, когда $r \rightarrow \infty$, т. е. в бесконечно уда-

ленной точке p_2 — регулярная функция, чего не может быть при $\sum_{i=1}^j Q_i(t) \neq 0$.

Поэтому, меняя местами потенциалы простого и двойного слоев, функции p_1 и p_2 следует искать в форме

$$p_1 = \frac{1}{2\pi c_1 h} \sum_{i=1}^j Q_i(t) \ln \frac{1}{V(x-x_i)^2 + (y-y_i)^2} + \int_{\Gamma} \rho(\sigma, t) \ln \frac{1}{V(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2} d\sigma.$$

$$(x, y) \in G_1, (\xi, \eta) \in \Gamma;$$

$$p_2 = \frac{1}{2\pi c_2 h} \sum_{i=j+1}^{j+1} Q_i(t) \ln \frac{1}{V(x-x_i)^2 + (y-y_i)^2} +$$

$$+ \int_{\Gamma} \mu(\sigma, t) \frac{\partial}{\partial n_i} \ln \frac{1}{V(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2} d\sigma +$$

$$+ \frac{Q_0}{2\pi c_2 h} \ln \frac{1}{V(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2},$$

$$(x, y) \in G_2, (\xi, \eta) \in \Gamma, (x_0, y_0) \in G_1.$$

5. Рассмотрим частную задачу управления перемещением КН: концентрически круговое стягивание КН в неограниченном пласте. Заданы полярные координаты ρ_i, α_i нефтяных скважин ($i=1, 2, \dots, j$) и водяных скважин ($i=j+1, j+2, \dots, j+1$). Коэффициенты текучести нефти — c_1 , воды — c_2 . Закон стягивания КН запишем в полярных координатах:

$$f(r, \theta, t) = R(t) - r = 0.$$

При этом стягивание рассматривается до обводнения первой из нефтяных скважин.

В соответствии с п. 1 § 2 будем отыскивать давление p_1 в виде

$$p_1(r, \theta, t) = \frac{1}{2\pi c_1 h} \sum_{i=1}^j Q_i(t) \ln \frac{1}{V(r^2 - 2r\rho_i \cos(\theta - \alpha_i) + \rho_i^2)} + \int_0^{2\pi} \mu(\varphi, t) \left[-\frac{\partial}{\partial R} \ln \frac{1}{V(r^2 - 2rR \cos(\theta - \varphi) + R^2)} \right] R d\varphi. \quad (2.7)$$

Здесь и далее учтено, что $\frac{\partial}{\partial n_1} = -\frac{\partial}{\partial R}$, $\frac{\partial}{\partial n} = -\frac{\partial}{\partial r} \Big|_{r=R}$.

Давление p_2 отыскиваем в виде

$$p_2(r, \theta, t) = \frac{1}{2\pi c_2 h} \sum_{i=j+1}^{j+1} Q_i(t) \ln \frac{1}{V(r^2 - 2r\rho_i \cos(\theta - \alpha_i) + \rho_i^2)} + \int_0^{2\pi} \rho(\varphi, t) \ln \frac{1}{V(r^2 - 2rR \cos(\theta - \varphi) + R^2)} R d\varphi. \quad (2.8)$$

Для этой частной задачи управления перемещением КН соотношения (2.4) и (2.6) принимают вид:

$$\begin{aligned} \pi \mu(\theta, t) + \int_0^{2\pi} \mu(\varphi, t) \left[-\frac{\partial}{\partial R} \ln \frac{1}{V(r^2 - 2rR \cos(\theta - \varphi) + R^2)} \right]_{r=R} R d\varphi = \\ = \int_0^{2\pi} \rho(\varphi, t) \left[\ln \frac{1}{V(r^2 - 2rR \cos(\theta - \varphi) + R^2)} \right]_{r=R} R d\varphi - \\ - \frac{1}{2\pi c_1 h} \sum_{i=1}^j Q_i(t) \ln \frac{1}{V(R^2 - 2R\rho_i \cos(\theta - \alpha_i) + \rho_i^2)} + \\ + \frac{1}{2\pi c_2 h} \sum_{i=j+1}^{j+1} Q_i(t) \ln \frac{1}{V(R^2 - 2R\rho_i \cos(\theta - \alpha_i) + \rho_i^2)}. \quad (2.9) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \pi p(\theta, t) + \int_0^{2\pi} \rho(\varphi, t) \left[-\frac{\partial}{\partial r} \ln \frac{1}{V(r^2 - 2rR \cos(\theta - \varphi) + R^2)} \right]_{r=R} R d\varphi = \\ = \frac{m}{c_2} \frac{dR}{dt} - \\ - \frac{1}{2\pi c_2 h} \sum_{i=j+1}^{j+1} Q_i(t) \left[-\frac{\partial}{\partial r} \ln \frac{1}{V(r^2 - 2r\rho_i \cos(\theta - \alpha_i) + \rho_i^2)} \right]_{r=R}. \quad (2.10) \end{aligned}$$

Решением уравнения (2.10) является функция

$$\begin{aligned} p(\theta, t) = \frac{m}{2\pi c_2} \frac{dR}{dt} + \\ + \frac{1}{2\pi^2 c_2 h R} \sum_{i=j+1}^{j+1} Q_i(t) \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{R}{\rho_i} \right)^k \cos k(\theta - \alpha_i). \quad (2.11) \end{aligned}$$

После нахождения плотности потенциала простого слоя, решим интегральное уравнение (2.7). Проведя несложные вычисления, получаем

$$\begin{aligned} \mu(\theta, t) = -\frac{m}{2\pi c_2} R \ln R \cdot \frac{dR}{dt} + \frac{1}{4\pi^2 c_1 h} \ln R \sum_{i=1}^j Q_i(t) - \\ - \frac{1}{4\pi^2 c_2 h} \sum_{i=j+1}^{j+1} Q_i(t) \ln \rho_i - \frac{1}{2\pi^2 c_1 h} \sum_{i=1}^j Q_i(t) \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} \left(\frac{\rho_i}{R} \right)^k \cos k(\theta - \alpha_i) + \\ + \frac{1}{2\pi^2 c_2 h} \sum_{i=j+1}^{j+1} Q_i(t) \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} \left(\frac{R}{\rho_i} \right)^k \cos k(\theta - \alpha_i). \quad (2.12) \end{aligned}$$

Подставляя найденные выражения (2.11) и (2.12) в соотношения (2.7) и (2.8), будем иметь

$$p_1(r, \theta, t) = \frac{1}{2\pi c_1 h} \sum_{i=1}^j Q_i(t) \ln \sqrt{\frac{R^2 - 2r \rho_i \cos(\theta - \alpha_i) + \left(\frac{r \rho_i}{R}\right)^2}{r^2 - 2r \rho_i \cos(\theta - \alpha_i) + \rho_i^2}} +$$

$$+ \frac{1}{\pi c_2 h} \sum_{i=j+1}^{j+1} Q_i(t) \ln \frac{1}{\sqrt{r^2 - 2r \rho_i \cos(\theta - \alpha_i) + \rho_i^2}} +$$

$$+ \frac{1}{2\pi c_2 h} \sum_{i=j+1}^{j+1} Q_i(t) \ln \rho_i - \frac{mR \ln R}{c_2} \frac{dR}{dt}, \quad (2.13)$$

$$p_2(r, \theta, t) = \frac{1}{2\pi c_2 h} \sum_{i=j+1}^{j+1} Q_i(t) \left[\ln \frac{1}{\sqrt{r^2 - 2r \rho_i \cos(\theta - \alpha_i) + \rho_i^2}} + \right.$$

$$\left. + \ln \frac{1}{\sqrt{\rho_i^2 - 2\rho_i \frac{R^2}{r} \cos(\theta - \alpha_i) + \left(\frac{R^2}{r}\right)^2}} \right] + \frac{1}{2\pi c_2 h} \sum_{i=j+1}^{j+1} Q_i(t) \ln \rho_i -$$

$$- \frac{mR \ln r}{c_2} \frac{dR}{dt}. \quad (2.14)$$

Удовлетворим приближенно, варьируя дебитами Q_i , соотношению (2.5), которое эквивалентно условию

$$\frac{\partial p_1}{\partial n} \Big|_r = \frac{m}{c_1} \left(\frac{\partial f}{\partial t} / \frac{\partial f}{\partial n} \right) = \frac{m}{c_1} \frac{dR}{dt}.$$

Подставляя предельное значение $\frac{\partial p_1}{\partial n}$, получим

$$\frac{m}{c_1} \frac{dR}{dt} + \frac{\partial p_1}{\partial r} \Big|_{r=R} = \varepsilon(R, \theta, t; Q_i),$$

$\varepsilon(R, \theta, t; Q_i)$ — известная функция дебитов Q_i :

$$\varepsilon = \frac{m}{c_1} \frac{dR}{dt} + \frac{1}{\pi c_2 h R} \sum_{i=j+1}^{j+1} Q_i(t) \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{R}{\rho_i}\right)^k \cos k(\theta - \alpha_i) -$$

$$- \frac{1}{\pi c_1 h R} \sum_{i=1}^j Q_i(t) \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{\rho_i}{R}\right)^k \cos k(\theta - \alpha_i) - \frac{1}{2\pi c_1 h R} \sum_{i=1}^j Q_i(t) \quad (2.15)$$

Найдем дебиты Q_i так, чтобы ε наименее уклонялось от нуля.

Аппроксимируя ε тригонометрическим полиномом (см. [3], [5]), получаем систему уравнений, линейных относительно Q_i :

$$\sum_{i=1}^j Q_i(t) = 2\pi m h R \frac{dR}{dt},$$

$$\sum_{i=1}^j Q_i(t) \left(\frac{\rho_i}{R}\right)^k \cos k \alpha_i - \frac{c_1}{c_2} \sum_{i=j+1}^{j+1} Q_i(t) \left(\frac{R}{\rho_i}\right)^k \cos k \alpha_i = 0, \quad (2.16)$$

$$\sum_{i=1}^j Q_i(t) \left(\frac{\rho_i}{R}\right)^k \sin k \alpha_i - \frac{c_1}{c_2} \sum_{i=j+1}^{j+1} Q_i(t) \left(\frac{R}{\rho_i}\right)^k \sin k \alpha_i = 0.$$

6. Решим ту же задачу вторым методом, указанным в п. 3 § 2. Удовлетворим соотношениям (1.3) и (1.4), учитывая при этом (2.7) и (2.8), получаем систему интегральных уравнений:

$$\pi p(\theta, t) + \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} p(\varphi, t) d\varphi + \frac{c_1}{c_2} \frac{1}{R} \int_0^{2\pi} \mu(\varphi, t) \sum_{k=1}^{\infty} k \cos k(\theta - \varphi) d\varphi =$$

$$= \frac{1}{2\pi c_2 h R} \sum_{i=1}^j Q_i(t) \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{\rho_i}{R}\right)^k \cos k(\theta - \alpha_i) +$$

$$+ \frac{1}{2\pi c_2 h R} \sum_{i=j+1}^{j+1} Q_i(t) \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{R}{\rho_i}\right)^k \cos k(\theta - \alpha_i); \quad (2.17)$$

$$\pi \mu(\theta, t) + \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \mu(\varphi, t) d\varphi -$$

$$- R \int_0^{2\pi} p(\varphi, t) \left[-\ln R + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} \cos k(\theta - \varphi) \right] d\varphi =$$

$$= -\frac{1}{2\pi c_1 h} \sum_{i=1}^j Q_i(t) \left[-\ln R + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} \left(\frac{\rho_i}{R}\right)^k \cos k(\theta - \alpha_i) \right] +$$

$$+ \frac{1}{2\pi c_2 h} \sum_{i=j+1}^{j+1} Q_i(t) \left[-\ln \rho_i + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} \left(\frac{R}{\rho_i}\right)^k \cos k(\theta - \alpha_i) \right].$$

Полагая $p(\theta, t)$ и $\mu(\theta, t)$ удовлетворяющими условиям Дирихле, будем искать их в виде рядов Фурье по θ . Подставляя эти ряды в систему интегральных уравнений (2.17), после почленного интегрирования (законность которого должна быть исследована в дальнейшем) получаем

$$p(\theta, t) = \frac{1}{4\pi^2 c_2 h R} \sum_{i=1}^j Q_i(t) +$$

$$+ \frac{1}{c_1 + c_2} \cdot \frac{1}{\pi^2 h R} \sum_{i=1}^j Q_i(t) \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{\rho_i}{R}\right)^k \cos k(\theta - \alpha_i) -$$

$$- \frac{c_1 - c_2}{c_1 + c_2} \cdot \frac{1}{2\pi^2 c_2 h R} \sum_{i=j+1}^{j+1} Q_i(t) \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{R}{\rho_i}\right)^k \cos k(\theta - \alpha_i), \quad (2.18)$$

$$\mu(\theta, t) = \frac{\ln R}{4\pi^2 h} \left(\frac{1}{c_1} - \frac{1}{c_2} \right) \sum_{i=1}^j Q_i(t) - \frac{1}{4\pi^2 c_2 h} \sum_{i=j+1}^{j+1} Q_i(t) \ln \rho_i +$$

$$+ \frac{c_2 - c_1}{c_1 + c_2} \cdot \frac{1}{2\pi^2 c_1 h} \sum_{i=1}^j Q_i(t) \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} \left(\frac{\rho_i}{R}\right)^k \cos k(\theta - \alpha_i) +$$

$$+ \frac{1}{c_1 + c_2} \cdot \frac{1}{\pi^2 h} \sum_{i=j+1}^{j+1} Q_i(t) \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} \left(\frac{R}{\rho_i}\right)^k \cos k(\theta - \alpha_i). \quad (2.19)$$

Можно показать без труда, что эти ряды сходятся равномерно. Равномерно сходятся и ряды, полученные в результате перемножения рядов под знаком интеграла в системе интегральных уравнений (2.17), что доказывает законность проделанных операций.

Подставим выражение для $\mu(\theta, t)$ в формулу (2.7), а выражение для $\rho(\theta, t)$ в формулу (2.8). Тогда, производя суммирование рядов, получим давление p_1 в нефтяной зоне G_1 и давление p_2 в водной зоне G_2 в виде:

$$p_1(r, \theta, t) = \frac{h}{2\pi c_1 h} \sum_{i=1}^j Q_i(t) \left\{ \ln \frac{1}{\sqrt{r^2 - 2r \rho_i \cos(\theta - \alpha_i) + \rho_i^2}} + \right. \\ \left. + \lambda \left[\ln \frac{1}{\sqrt{r^2 - 2r \frac{R^2}{\rho_i} \cos(\theta - \alpha_i) + \left(\frac{R^2}{\rho_i}\right)^2}} + \ln \frac{R^2}{\rho_i} - \frac{2\lambda \ln R}{1 - \lambda} \right] \right\} + \\ + \frac{1}{2\pi c_2 h} \sum_{i=j+1}^{j+1} Q_i(t) \left\{ \ln \frac{1}{\sqrt{r^2 - 2r \rho_i \cos(\theta - \alpha_i) + \rho_i^2}} - \right. \\ \left. - \lambda \left[\ln \frac{1}{\sqrt{r^2 - 2r \rho_i \cos(\theta - \alpha_i) + \rho_i^2}} + \ln \rho_i \right] \right\}; \quad (2.20)$$

$$p_2(r, \theta, t) = \frac{1}{2\pi c_1 h} \sum_{i=1}^j Q_i(t) \left\{ \ln \frac{1}{\sqrt{r^2 - 2r \rho_i \cos(\theta - \alpha_i) + \rho_i^2}} + \right. \\ \left. + \lambda \left[\ln \frac{1}{\sqrt{r^2 - 2r \rho_i \cos(\theta - \alpha_i) + \rho_i^2}} + \ln r - \frac{2\lambda \ln r}{1 - \lambda} \right] \right\}, \quad (2.21)$$

где $\lambda = \frac{c_1 - c_2}{c_1 + c_2}$.

При $h=1$ выражения (2.20) и (2.21) совпадают соответственно с формулами (4.8) и (4.9) работы [5], полученными при решении той же задачи иным путем с соблюдением тех же граничных условий (1.3) и (1.4). Это показывает правильность решения.

Подставляя значение

$$\left. \frac{\partial p_1}{\partial n} \right|_{\Gamma} = \frac{m}{c_1} \frac{dR}{dt}$$

в уравнение движения, получаем ϵ в виде

$$\epsilon = \frac{m}{c_1} \frac{dR}{dt} - \frac{1}{2\pi c_1 h} \sum_{i=1}^j Q_i(t) \left[\frac{\lambda}{R} + (1 - \lambda) \frac{R - \rho_i \cos(\theta - \alpha_i)}{R^2 - 2R \rho_i \cos(\theta - \alpha_i) + \rho_i^2} - \right. \\ \left. - \frac{1 - \lambda}{2\pi c_2 h} \sum_{i=j+1}^{j+1} Q_i(t) \frac{R - \rho_i \cos(\theta - \alpha_i)}{R^2 - 2R \rho_i \cos(\theta - \alpha_i) + \rho_i^2} \right]. \quad (2.22)$$

При $h=1$ это выражение совпадает с точностью до постоянного множителя с формулой (4.13) работы [5]. Если применить аппроксимацию ϵ тригонометрическим полиномом, то из условия наименьшего отклонения ϵ от нуля придем снова к системе линейных уравнений (2.16) для определения дебитов Q_i .

7. Выше были рассмотрены случаи, когда режим является упругим или водонапорным, как в нефтяной, так и в водной зонах. Заметим, что изложенные методы решения распространяются и на случай смешанного режима — водонапорного в нефтяной зоне и упругого в водной зоне.

ЛИТЕРАТУРА

1. Щелкачев В. Н. Упругий режим пластовых водонапорных систем. Гостехиздат, 1948.
2. Салехов Г. С. Прямые и обратные задачи о продвижении водонефтяного контакта. Изв. Казанск. филиала АН СССР, серия физ.-мат. и техн. наук, вып. 5, 1954.
3. Салехов Г. С. Постановка и методы решения гидродинамических задач управления движением контура нефтеносности. Изв. Казанск. филиала АН СССР, серия физ.-мат. и техн. наук, вып. 6, 1955.
4. Чугуинов В. Д. К задаче управления контуром нефтеносности при упругом режиме нефтяных месторождений. Изв. Казанск. филиала АН СССР, серия физ.-мат. и техн. наук, вып. 8, 1955.
5. Данилов В. Л. Управление перемещением контура нефтеносности с учетом различия вязкостей нефти и воды. Изв. Казанск. филиала АН СССР, серия физ.-мат. и техн. наук, вып. 8, 1955.
6. Данилов В. Л. К задаче определения поля давления при заданном законе стягивания контура нефтеносности. Изв. Казанск. филиала АН СССР, серия физ.-мат. и техн. наук, вып. 6, 1955.
7. Мюнц Г. Интегральные уравнения. Гостехтеориздат, 1934.
8. Михлин С. Г. Интегральные уравнения. Гостехиздат, 1949.
9. Насыров Р. М. Замечание к формуле для скорости перемещения поверхностей. Уч. записки Казанск. гос. университета, т. 116, кн. 1, 1956.

Физико-технический институт
Казанского филиала АН СССР

Поступила 22 декабря 1956 г.

Г. П. Цыбульский

ЗАДАЧА УПРАВЛЕНИЯ ДВИЖЕНИЕМ НЕЗВЕЗДНОГО КОНТУРА НЕФТЕНОСНОСТИ ПРИ „ДИСКРЕТНОМ“ ЗАДАНИИ

В статье рассмотрена задача управления движением незвездного контура нефтеносности, начальное положение которого задано конечным числом точек, т. е. „дискретно“.

Введение. В реальных условиях контур нефтеносности (КН) бывает известен с большей или меньшей достоверностью лишь по отдельным отметкам. Непрерывная линия КН при этом неизвестна. Аналитическое же построение ее по интерполяционным формулам может быть очень неточным и весьма громоздким.

Следуя Г. С. Салехову [1], будем говорить, что КН задан „дискретно“, если его положение в начальный момент дано конечным числом точек, в отличие от „непрерывного“ задания, когда КН известен во всех своих точках в виде непрерывной линии.

Контур, заданный дискретно, будем называть звездным (незвездным), если звездным (незвездным) будет фиктивный контур, образованный последовательным соединением известных точек действительного контура отрезками прямых. Последовательность соединения при этом должна однозначно задаваться на основании геолого-разведочных данных о форме контура.

Задача управления движением КН при дискретном задании ранее рассматривалась Г. С. Салеховым [1] для случая звездных контуров. Им предложен метод решения этой задачи, учитывающий перемещение КН вдоль фиксированных лучей, проведенных из начала координат через заданные точки КН. Начало координат выбирается при этом так, чтобы во все время движения заданный КН относительно него был звездным.

В работе Б. А. Сейфуллиной [2] указанный метод применен к расчету конкретных примеров.

В настоящей работе задача управления движением КН при „дискретном“ задании рассматривается для случая незвездных контуров.

Все рассуждения проводятся при следующих предположениях: пласт горизонтальный однородный изотропный постоянной мощности; система одножидкостная; режим пласта водонапорный; справедлив линейный закон фильтрации.

§ 1. Постановка задачи управления движениями точек контура нефтеносности. Поскольку при „дискретном“ задании положение КН в начальный момент известно по отдельным точкам, а форма КН в целом неизвестна, то естественно судить о перемещении КН по перемещению его известных точек.

При этом под перемещением некоторой точки КН мы понимаем перемещение частицы жидкости, которая находится на КН и в начальный момент соответствует этой точке.

Перемещение точек КН определяется их траекториями и положением на этих траекториях в любой момент времени, т. е. *движениями* [3].

Таким образом, в случае дискретного задания мы приходим к задаче управления *движениями* точек КН, которую можно сформулировать следующим образом:

Определить дебиты $Q_i(t)$ и координаты (ξ_i, η_i) ($i=1, 2, \dots, N$) скважин так, чтобы l точек КН имели заданные *движения*

$$\left. \begin{aligned} x_k &= \bar{x}_k(t) \\ y_k &= \bar{y}_k(t) \end{aligned} \right\}, \quad (0 \leq t \leq T) \quad (1.1)$$

$(k=1, 2, \dots, l)$

где t — время,

$\bar{x}_k(t), \bar{y}_k(t)$ — непрерывно дифференцируемые функции.

При этом

$\bar{x}_k(0) = x_{0k}, \bar{y}_k(0) = y_{0k}$ — начальные координаты k -й точки,

$\bar{x}_k(T) = x_{1k}, \bar{y}_k(T) = y_{1k}$ — конечные координаты k -й точки.

Аналогично задачам управления движением КН при „непрерывном“ задании задачи управления *движениями* точек КН можно разделить на общие и частные [4]. В число последних входят задачи управления *движениями* точек КН по характеру эксплуатации, которые и рассматриваются в настоящей работе.

§ 2. Основные уравнения. При сделанных во введении предположениях относительно пласта и режима эксплуатации и, считая, кроме того, что скважины действуют как линейные источники — стоки с равномерно распределенной плотностью, функцию давления в неограниченном пласте можно представить в виде

$$p = \frac{\mu}{2\pi kh} \sum_{i=1}^N Q_i(t) \ln \frac{1}{V(x-\xi_i)^2 + (y-\eta_i)^2} + c(t) \quad (2.1)$$

где μ — динамическая вязкость жидкости,

h — мощность пласта,

k — проницаемость.

Составляющие действительной скорости движения частиц жидкости при линейном законе фильтрации будут иметь вид

$$\left. \begin{aligned} v_x &= -\frac{k}{\mu m} \frac{\partial p}{\partial x} = \frac{1}{2\pi hm} \sum_{i=1}^N Q_i(t) \frac{x-\xi_i}{(x-\xi_i)^2 + (y-\eta_i)^2} \\ v_y &= -\frac{k}{\mu m} \frac{\partial p}{\partial y} = \frac{1}{2\pi hm} \sum_{i=1}^N Q_i(t) \frac{y-\eta_i}{(x-\xi_i)^2 + (y-\eta_i)^2} \end{aligned} \right\}, \quad (2.2)$$

где m — пористость пласта, которую далее считаем постоянной.

§ 3. О существовании точного решения задачи управления *движениями* точек контура нефтеносности по характеру эксплуатации. Задавая закон перемещения точек КН или их *движения* по формулам (1.1), мы фактически задаем и составляющие скоростей этих точек

$$\left. \begin{aligned} \bar{v}_{xk} &= \frac{d\bar{x}_k(t)}{dt}, \quad \bar{v}_{yk} = \frac{d\bar{y}_k(t)}{dt}, \\ &(k=1, 2, \dots, l). \end{aligned} \right\} \quad (3.1)$$

Считая координаты скважин (ξ_i, η_i) ($i=1, 2, \dots, N$) заданными, будем определять их дебиты $Q_i(t)$ из условия, чтобы заданные скорости точек КН (3.1) во все время движения были равны действительным скоростям v_{xk} и v_{yk} . Последние определяются из уравнений движения (2.2), в которые вместо x и y нужно подставить \bar{x}_k и \bar{y}_k из (1.1). Выполнив эти подстановки, получим

$$\left. \begin{aligned} v_{xk} &= \frac{1}{2\pi hm} \sum_{i=1}^N Q_i(t) \frac{\bar{x}_k(t) - \xi_i}{[\bar{x}_k(t) - \xi_i]^2 + [\bar{y}_k(t) - \eta_i]^2} \\ v_{yk} &= \frac{1}{2\pi hm} \sum_{i=1}^N Q_i(t) \frac{\bar{y}_k(t) - \eta_i}{[\bar{x}_k(t) - \xi_i]^2 + [\bar{y}_k(t) - \eta_i]^2} \end{aligned} \right\}, \quad (3.2)$$

Приравняв правые части выражений (3.1) и (3.2), получим алгебраическую систему уравнений для определения величин дебитов $Q_i(t)$

$$\left. \begin{aligned} \frac{d\bar{x}_k(t)}{dt} &= \frac{1}{2\pi hm} \sum_{i=1}^N Q_i(t) \frac{\bar{x}_k(t) - \xi_i}{[\bar{x}_k(t) - \xi_i]^2 + [\bar{y}_k(t) - \eta_i]^2} \\ \frac{d\bar{y}_k(t)}{dt} &= \frac{1}{2\pi hm} \sum_{i=1}^N Q_i(t) \frac{\bar{y}_k(t) - \eta_i}{[\bar{x}_k(t) - \xi_i]^2 + [\bar{y}_k(t) - \eta_i]^2} \end{aligned} \right\}, \quad (3.3)$$

Система (3.3) имеет единственное решение при выполнении двух условий:

1) Число скважин равно удвоенному количеству рассматриваемых точек $N=2l$,

2) Определитель системы (3.3) отличен от нуля

$$\Delta = \begin{vmatrix} \varphi_{11} & \varphi_{12} & \dots & \varphi_{1(2l)} \\ \psi_{11} & \psi_{12} & \dots & \psi_{1(2l)} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \varphi_{l1} & \varphi_{l2} & \dots & \varphi_{l(2l)} \\ \psi_{l1} & \psi_{l2} & \dots & \psi_{l(2l)} \end{vmatrix} \neq 0,$$

где

$$\varphi_{ik} = \frac{\bar{x}_k(t) - \xi_i}{[\bar{x}_k(t) - \xi_i]^2 + [\bar{y}_k(t) - \eta_i]^2}, \quad \psi_{ik} = \frac{\bar{y}_k(t) - \eta_i}{[\bar{x}_k(t) - \xi_i]^2 + [\bar{y}_k(t) - \eta_i]^2}.$$

Если $\Delta=0$, но основная и расширенная матрицы системы (3.3) имеют один и тот же ранг $r < 2l$, то система (3.3) имеет бесконечное число решений, зависящих от $2l-r$ параметров.

В качестве этих параметров могут быть дебиты $2l-r$ скважин. При решении конкретных задач дебиты этих скважин следует задавать так, чтобы общий суммарный дебит всех скважин был наибольшим, но дебиты отдельных скважин не превосходили практически допустимой величины.

Если $N < 2l$, то при произвольных *движениях* (1.1) система (3.3) точного решения не имеет. В этом случае задачу следует решать приближенно. При $N > 2l$ система (3.3) имеет бесконечное число решений, если при этом ранги ее основной и расширенной матриц совпадают. Решения будут зависеть от $N-r$ параметров (r — ранг матриц), которыми будут дебиты $N-r$ скважин.

Поскольку точное решение задачи управления движениями точек КН существует не всегда, возникает вопрос о приближенных решениях.

Далее рассматриваются два метода решения этой задачи, основанные на приближенном выполнении уравнений движения для заданного числа точек.

§ 4. Первый приближенный метод. Первый метод основан на приближенном выполнении дифференциальных уравнений движения (2.2) в l заданных точках КН. Подставив в эти уравнения \bar{x}_k и \bar{y}_k из заданного закона (1.1), получим известные функции t , т. н. „невязки“

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_{1k}(t) &= \frac{d\bar{x}_k(t)}{dt} - \frac{1}{2\pi hm} \sum_{i=1}^N Q_i(t) \varphi_{ik} \\ \varepsilon_{2k}(t) &= \frac{d\bar{y}_k(t)}{dt} - \frac{1}{2\pi hm} \sum_{i=1}^N Q_i(t) \psi_{ik} \end{aligned} \right\} \quad (4.1)$$

$(k=1, 2, \dots, l).$

Эти невязки выражают отклонение заданных скоростей точек (3.1) от действительных (3.2):

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_{1k}(t) &= \bar{v}_{xk} - v_{xkd} \\ \varepsilon_{2k}(t) &= \bar{v}_{yk} - v_{ykd} \end{aligned} \right\} \quad (k=1, 2, \dots, l)$$

Определим дебиты $Q_i(t)$ ($i=1, 2, \dots, N$) скважин так, чтобы было наименьшим средне-квадратическое отклонение невязок $\varepsilon_{1k}(t)$ и $\varepsilon_{2k}(t)$ ($k=1, 2, \dots, l$) от нуля.

При этом, в силу корректности задачи, чем менее заданные скорости точек КН отличаются от действительных, тем менее отклоняются их заданные и действительные движения.

Составим функционал

$$\begin{aligned} I^2 &= \sum_{k=1}^l (\varepsilon_{1k}^2 + \varepsilon_{2k}^2) = \\ &= \sum_{k=1}^l \left\{ \left[\frac{d\bar{x}_k(t)}{dt} - \frac{1}{2\pi hm} \sum_{i=1}^N Q_i(t) \varphi_{ik} \right]^2 + \right. \\ &\quad \left. + \left[\frac{d\bar{y}_k(t)}{dt} - \frac{1}{2\pi hm} \sum_{i=1}^N Q_i(t) \psi_{ik} \right]^2 \right\} \end{aligned}$$

Условия минимума этого функционала по $Q_j(t)$

$$\frac{\partial I^2}{\partial Q_j} = 0 \quad (j=1, 2, \dots, N)$$

приводят к системе уравнений, линейных относительно искомым дебитов:

$$Q_1(t) \sum_{k=1}^l (\varphi_{1k}\varphi_{1k} + \psi_{1k}\psi_{1k}) + Q_2(t) \sum_{k=1}^l (\varphi_{2k}\varphi_{2k} + \psi_{2k}\psi_{2k}) + \dots +$$

$$+ Q_N(t) \sum_{k=1}^l (\varphi_{Nk}\varphi_{Nk} + \psi_{Nk}\psi_{Nk}) = 2\pi hm \sum_{k=1}^l \left[\frac{d\bar{x}_k(t)}{dt} \varphi_{jk} + \frac{d\bar{y}_k(t)}{dt} \psi_{jk} \right] \quad (j=1, 2, \dots, N). \quad (4.2)$$

Определитель этой системы имеет вид

$$\Delta = \left| \sum_{k=1}^l (\varphi_{jk}\varphi_{ik} + \psi_{jk}\psi_{ik}) \right| \quad (i, j=1, 2, \dots, N). \quad (4.3)$$

Обозначим через G_s определитель вида

$$G_s = \left| \sum_{\alpha=1}^s \sum_{k=1}^l \varphi_{jk}^{(\alpha)} \varphi_{ik}^{(\alpha)} \right| \quad (i, j=1, 2, \dots, N)$$

для s систем векторов

$$\left\{ \begin{aligned} &\Phi_i^{(1)} (\varphi_{i1}^{(1)}, \varphi_{i2}^{(1)}, \dots, \varphi_{il}^{(1)}) \\ &\Phi_i^{(2)} (\varphi_{i1}^{(2)}, \varphi_{i2}^{(2)}, \dots, \varphi_{il}^{(2)}) \\ &\dots \dots \dots \\ &\Phi_i^{(s)} (\varphi_{i1}^{(s)}, \varphi_{i2}^{(s)}, \dots, \varphi_{il}^{(s)}) \end{aligned} \right\} \quad (i=1, 2, \dots, N) \quad (4.4)$$

Его матрица

$$\left\| \sum_{\alpha=1}^s \sum_{k=1}^l \varphi_{jk}^{(\alpha)} \varphi_{ik}^{(\alpha)} \right\| \quad (i, j=1, 2, \dots, N)$$

есть сумма матриц

$$\left\| \sum_{k=1}^l \varphi_{jk}^{(\alpha)} \varphi_{ik}^{(\alpha)} \right\| \quad (i, j=1, 2, \dots, N; \alpha=1, 2, \dots, s)$$

определителей Грама для каждой из систем векторов

$$\{ \Phi_i \} \quad (i=1, 2, \dots, N; \alpha=1, 2, \dots, s).$$

В соответствии с этим определитель Грама для одной системы векторов будем обозначать через

$$G_1 = \left| \sum_{k=1}^l \varphi_{jk}\varphi_{ik} \right| \quad (i, j=1, 2, \dots, N).$$

Определитель (4.3) будет, таким образом, определителем Грама вида G_2 для систем векторов

$$\{ \Phi_i (\varphi_{i1}, \varphi_{i2}, \dots, \varphi_{il}) \} \text{ и } \{ \Psi_i (\psi_{i1}, \psi_{i2}, \dots, \psi_{il}) \} \quad (i=1, 2, \dots, N).$$

Известно, что квадратичная форма, соответствующая определителю Грама вида G_1 , всегда неотрицательна, а для системы линейно независимых векторов она определенно положительна.

Квадратичная форма, соответствующая определителю Грама вида G_s , есть сумма s квадратичных форм, соответствующих каждому из определителей Грама вида G_1 . Поэтому она также неотрицательна.

Напомним, что системы векторов (4.4) будут линейно независимы в интервале $(0, T)$, если не существует таких постоянных коэффициентов c_i ($i=1, 2, \dots, N$), не равных одновременно нулю, при которых выполнялись бы соотношения

$$\left. \begin{aligned} c_1 \Phi_1^{(1)} + c_2 \Phi_2^{(1)} + \dots + c_N \Phi_N^{(1)} &= 0 \\ c_1 \Phi_1^{(2)} + c_2 \Phi_2^{(2)} + \dots + c_N \Phi_N^{(2)} &= 0 \\ \dots & \\ c_1 \Phi_1^{(s)} + c_2 \Phi_2^{(s)} + \dots + c_N \Phi_N^{(s)} &= 0 \end{aligned} \right\}$$

В этом случае квадратичные формы, соответствующие определителям Грама вида G_1 для каждой системы в отдельности, не все одновременно равны нулю, а сумма их всегда определенно положительна, а значит положителен и определитель Грама вида G_1 [5].

Возвращаясь к системе (4.2), получим, что, если системы векторов $\{\Phi_i\}$ и $\{\Psi_i\}$ ($i=1, 2, \dots, N$) линейно независимы, то определитель (4.3) положителен, и система (4.2) имеет единственное решение.

Если системы векторов $\{\Phi_i\}$ и $\{\Psi_i\}$ линейно зависимы, то $G_2 = 0$. Можно показать [6], что и в этом случае система (4.2) имеет решение, но оно не будет единственным.

§ 5. Второй приближенный метод. Второй приближенный метод решения задачи управления движениями точек КН основан на приближенном выполнении уравнений движения в интегральной форме

$$\left. \begin{aligned} x &= x_0 + \frac{1}{2\pi hm} \sum_{i=1}^N \int_0^t Q_i(\tau) \frac{x - \xi_i}{(x - \xi_i)^2 + (y - \eta_i)^2} d\tau \\ y &= y_0 + \frac{1}{2\pi hm} \sum_{i=1}^N \int_0^t Q_i(\tau) \frac{y - \eta_i}{(x - \xi_i)^2 + (y - \eta_i)^2} d\tau \end{aligned} \right\} \quad (5.1)$$

которые соответствуют дифференциальным уравнениям движения (2.2) с начальными условиями

$$x|_{t=0} = x_0; \quad y|_{t=0} = y_0.$$

Подставив в уравнения (5.1) x и y из заданных движений (1.1), получим известные функции t — интегральные невязки

$$\left. \begin{aligned} E_{1k}(t) &= \bar{x}_k(t) - x_{0k} - \frac{1}{2\pi hm} \sum_{i=1}^N \int_0^t Q_i(\tau) \varphi_{ik} d\tau \\ E_{2k}(t) &= \bar{y}_k(t) - y_{0k} - \frac{1}{2\pi hm} \sum_{i=1}^N \int_0^t Q_i(\tau) \psi_{ik} d\tau \end{aligned} \right\} \quad (5.2)$$

$k = 1, 2, \dots, l.$

Эти невязки определяют отклонение заданного движения k -й точки от того движения, которое получилось бы, если бы эта точка двигалась со скоростью (3.2).

Будем искать дебиты $Q_i(t)$ ($i=1, 2, \dots, N$) в виде полиномов l -й степени с постоянными коэффициентами

$$Q_i(t) = A_{0i} + A_{1i}t + A_{2i}t^2 + \dots + A_{li}t^l. \quad (5.3)$$

Коэффициенты A_{pi} ($p=0, 1, 2, \dots, n; i=1, 2, \dots, N$) определим так, чтобы было наименьшим средне-квадратическое отклонение от нуля невязок $E_{1k}(T)$ и $E_{2k}(T)$ ($k=1, 2, \dots, l$).

При этом, очевидно, чем меньше „невязки“ E_{1k} и E_{2k} уклоняются от нуля, тем менее действительные движения отклоняются от заданных.

Составим функционал

$$\begin{aligned} I^2 &= \sum_{k=1}^l [E_{1k}^2(T) + E_{2k}^2(T)] = \\ &= \sum_{k=1}^l \left\{ \left[(x_{1k} - x_{0k}) - \frac{1}{2\pi hm} \sum_{i=1}^N \int_0^T \sum_{p=0}^n A_{pit} t^p \varphi_{ik} dt \right]^2 + \right. \\ &\quad \left. + \left[(y_{1k} - y_{0k}) - \frac{1}{2\pi hm} \sum_{i=1}^N \int_0^T \sum_{p=0}^n A_{pit} t^p \psi_{ik} dt \right]^2 \right\}. \end{aligned}$$

Условия минимума этого функционала

$$\frac{\partial I^2}{\partial A_{pi}} = 0 \quad (p=0, 1, 2, \dots, n; j=1, 2, \dots, N)$$

приводят к системе уравнений, линейных относительно A_{pi} :

$$\begin{aligned} &\sum_{i=1}^N \left\{ A_{0i} \sum_{k=1}^l \left[\int_0^T \varphi_{ki} dt \cdot \int_0^T t^p \varphi_{kj} dt + \int_0^T \psi_{ki} dt \cdot \int_0^T t^p \psi_{kj} dt \right] + \right. \\ &+ A_{1i} \sum_{k=1}^l \left(\int_0^T t \varphi_{ki} dt \cdot \int_0^T t^p \varphi_{kj} dt + \int_0^T t \psi_{ki} dt \cdot \int_0^T t^p \psi_{kj} dt \right) + \\ &+ \dots + \\ &\left. + A_{li} \sum_{k=1}^l \left(\int_0^T t^l \varphi_{ki} dt \cdot \int_0^T t^p \varphi_{kj} dt + \int_0^T t^l \psi_{ki} dt \cdot \int_0^T t^p \psi_{kj} dt \right) \right\} = \\ &= 2\pi hm \sum_{k=1}^l \left[(x_{1k} - x_{0k}) \cdot \int_0^T t^p \varphi_{kj} dt + (y_{1k} - y_{0k}) \int_0^T t^p \psi_{kj} dt \right]; \\ &\quad (p=0, 1, \dots, n; j=1, 2, \dots, N). \end{aligned} \quad (5.4)$$

Определитель этой системы имеет вид

$$\Delta = \left| \sum_{k=1}^l \left(\int_0^T t^p \varphi_{ki} dt \cdot \int_0^T t^p \varphi_{kj} dt + \int_0^T t^p \psi_{ki} dt \cdot \int_0^T t^p \psi_{kj} dt \right) \right| \quad (5.5)$$

$(p, \beta = 0, 1, 2, \dots, n)$
 $(i, j = 1, 2, \dots, N)$.

Это определитель Грама вида G_2 для систем векторов

$$\left\{ \Phi_{ip} \left(\int_0^T t^p \varphi_{i1} dt, \int_0^T t^p \varphi_{i2} dt, \dots, \int_0^T t^p \varphi_{in} dt \right) \right\}$$

$$\left\{ \Psi_{ip} \left(\int_0^T t^p \psi_{i1} dt, \int_0^T t^p \psi_{i2} dt, \dots, \int_0^T t^p \psi_{in} dt \right) \right\}$$

$$\left(\begin{array}{l} p=0, 1, 2, \dots, n \\ i=1, 2, \dots, N \end{array} \right).$$

Если эти системы векторов линейно независимы, то определитель (5.5) положителен, и система (5.4) имеет единственное решение.

Если системы $\{\Phi_{ip}\}$ и $\{\Psi_{ip}\}$ линейно зависимы, то система (5.4) будет иметь неединственное решение [6].

ЛИТЕРАТУРА

1. Салехов Г. С. Приложение одного метода минимальной погрешности к решению задач управления движением контура нефтеносности. Изв. Казанск. филиала АН СССР, серия физ.-мат. и техн. наук, вып. 8, 1955.
2. Сейфуллина Б. А. Численное решение некоторых задач по управлению движением контура нефтеносности. Изв. Казанск. филиала АН СССР, серия физ.-мат. и техн. наук, вып. 8, 1955.
3. Матвеев Н. М. Методы интегрирования обыкновенных дифференциальных уравнений. Изд-во ЛГУ, 1955.
4. Салехов Г. С. Постановка и методы решения гидродинамических задач управления движением контура нефтеносности. Изв. Казанск. филиала АН СССР, серия физ.-мат. и техн. наук, вып. 6, 1955.
5. Гантмахер Ф. Ф. Теория матриц. Гостехиздат, 1953.
6. Цыбульский Г. П. Решение задачи управления движением незвездных контуров нефтеносности. Изв. Казанск. филиала АН СССР, серия физ.-мат. и техн. наук, вып. 9, 1956.

Физико-технический институт
Казанского филиала АН СССР

Поступила 22 декабря 1956 г.

В. Ю. Ким

УПРАВЛЕНИЕ ДВИЖЕНИЕМ КОНТУРА НЕФТЕНОСНОСТИ С УЧЕТОМ ВЛИЯНИЯ СБРОСОВ

В статье рассмотрены некоторые задачи управления движением контура нефтеносности при наличии сбросов (непроницаемых стенок) без учета и с учетом различия вязкостей воды и нефти.

§ 1. Полосообразная залежь с одной непроницаемой стенкой. Рассматривается плоское движение несжимаемой жидкости в горизонтальном пласте постоянной мощности $h=1$. Пласт считается однородным по проницаемости k , а движение — подчиняющимся линейному закону фильтрации.

Различием в вязкостях воды и нефти пренебрегаем. Пусть полосообразная залежь, один край которой непроницаем, эксплуатируется батареями эксплуатационных и нагнетательных скважин. Объемные дебиты эксплуатационных и нагнетательных скважин соответственно обозначим через Q_i ($i=1, 2, \dots, n$) и $Q_i(n+1, \dots, n+l)$. Число скважин в батареях считаем бесконечным. Функция давления, при указанных предположениях, имеет вид [5]:

$$p = -\frac{\mu}{4\pi k} \sum_{i=1}^{n+l} Q_i \left\{ \ln \left[\operatorname{ch} \frac{\pi}{\sigma_i} (y + H_i) - \cos \frac{\pi}{\sigma_i} (x - x_i) \right] + \right.$$

$$\left. + \ln \left[\operatorname{ch} \frac{\pi}{\sigma_i} (y - H_i) - \cos \frac{\pi}{\sigma_i} (x - x_i) \right] \right\} + \text{const}, \quad (1.1)$$

где μ — вязкость жидкости. Остальные обозначения указаны на рис. 1.

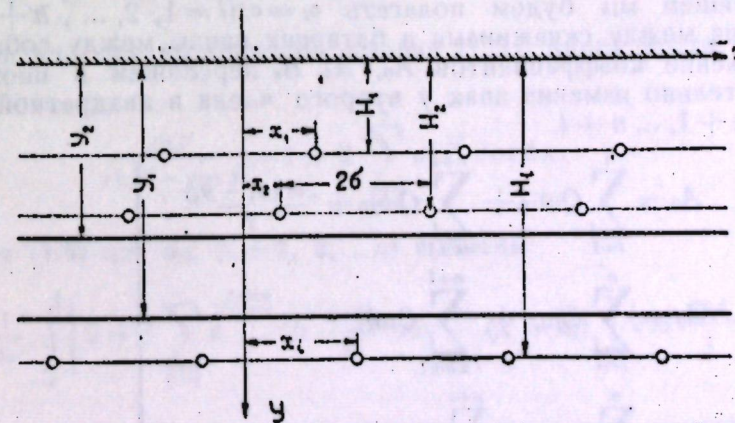


Рис. 1.

Предположим, что первоначально прямолинейный КН Γ_0 мы хотим стянуть к Γ_1 по закону

$$y = y_1 - \frac{t}{T}(y_1 - y_2), \quad (1.2)$$

где y_1 и y_2 — расстояния от оси ox до КН в моменты $t=0$ и $t=T$.

Уравнение движения контура с учетом закона Дарси запишем в виде:

$$m \frac{dy}{dt} - \frac{k}{\mu} \frac{\partial y}{\partial x} \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{k}{\mu} \frac{\partial p}{\partial y} = 0, \quad (1.3)$$

где m — пористость пласта.

На основании формулы (1.1) и (1.2), учитывая, что $\frac{\partial y}{\partial x} = 0$ из (1.3) имеем:

$$\frac{m(y_1 - y_2)}{T} + \frac{1}{4\pi} \sum_{i=1}^{n+l} \frac{Q_i}{\sigma_i} \left\{ \frac{\sin \frac{\pi}{\sigma_i}(x - x_i)}{\operatorname{ch} \frac{\pi}{\sigma_i}(y + H_i) - \cos \frac{\pi}{\sigma_i}(x - x_i)} - \frac{\sin \frac{\pi}{\sigma_i}(x - x_i)}{\operatorname{ch} \frac{\pi}{\sigma_i}(y - H_i) - \cos \frac{\pi}{\sigma_i}(x - x_i)} \right\} = \varepsilon, \quad (1.4)$$

где ε — известная функция погрешности, которая получилась в силу заданного нами закона стягивания КН.

Теперь будем варьировать произвольными параметрами Q_i и x_i таким образом, чтобы ε наименее уклонялась от нуля.

Для этого, следуя методу, предложенному в работе [2], разложим функцию ε в ряд Фурье относительно x в интервале $(-\sigma, \sigma)$

$$\varepsilon = \frac{A_0}{2} + \sum_{s=1}^{\infty} \left(A_s \cos \frac{s\pi x}{\sigma} + B_s \sin \frac{s\pi x}{\sigma} \right), \quad (1.5)$$

$$\text{где } A_0 = \frac{1}{\sigma} \int_{-\sigma}^{\sigma} \varepsilon dx, \quad A_s = \frac{1}{\sigma} \int_{-\sigma}^{\sigma} \varepsilon \cos \frac{s\pi x}{\sigma} dx, \quad B_s = \frac{1}{\sigma} \int_{-\sigma}^{\sigma} \varepsilon \sin \frac{s\pi x}{\sigma} dx.$$

Приравняв нулю $(2M+1)$ первых коэффициентов Фурье, получаем систему уравнений

$$A_0 = 0, \quad A_s = 0, \quad B_s = 0 \quad (S = 1, 2, \dots, M) \quad (1.6)$$

В дальнейшем мы будем полагать $\sigma_i = \sigma$ ($i = 1, 2, \dots, n+l$), т. е. расстояния между скважинами в батареях равны между собой.

Выражение коэффициентов A_0, A_s, B_s перепишем в ином виде, предварительно изменив знак у второго члена в квадратной скобке при $i = n+1, \dots, n+l$.

$$\left. \begin{aligned} A_0 &= \sum_{i=1}^n Q_i a_{i0} + \sum_{i=n+1}^{n+l} Q_i b_{i0} + \frac{2m(y_1 - y_2)}{T}, \\ A_s &= \sum_{i=1}^n Q_i a_{is} + \sum_{i=n+1}^{n+l} Q_i a_{is}, \\ B_s &= \sum_{i=1}^n Q_i b_{is} + \sum_{i=n+1}^{n+l} Q_i b_{is} \end{aligned} \right\} \quad (1.7)$$

где

$$\begin{aligned} a_{is} &= \frac{1}{4\sigma} \int_{-\sigma}^{\sigma} \left[\frac{\operatorname{sh} \frac{\pi}{\sigma}(y + H_i)}{\operatorname{ch} \frac{\pi}{\sigma}(y + H_i) - \cos \frac{\pi}{\sigma}(x - x_i)} + \frac{\operatorname{sh} \frac{\pi}{\sigma}(y - H_i)}{\operatorname{ch} \frac{\pi}{\sigma}(y - H_i) - \cos \frac{\pi}{\sigma}(x - x_i)} \right] \cos \frac{s\pi x}{\sigma} \text{ при } i = 1, 2, \dots, n \\ a_{is} &= \frac{1}{4\sigma} \int_{-\sigma}^{\sigma} \left[\frac{\operatorname{sh} \frac{\pi}{\sigma}(y + H_i)}{\operatorname{ch} \frac{\pi}{\sigma}(y + H_i) - \cos \frac{\pi}{\sigma}(x - x_i)} - \frac{\operatorname{sh} \frac{\pi}{\sigma}(y - H_i)}{\operatorname{ch} \frac{\pi}{\sigma}(y - H_i) - \cos \frac{\pi}{\sigma}(x - x_i)} \right] \cos \frac{s\pi x}{\sigma} \text{ при } i = n+1, \dots, n+l, \\ b_{is} &= \frac{1}{4\sigma} \int_{-\sigma}^{\sigma} \left[\frac{\operatorname{sh} \frac{\pi}{\sigma}(y + H_i)}{\operatorname{ch} \frac{\pi}{\sigma}(y + H_i) - \cos \frac{\pi}{\sigma}(x - x_i)} + \frac{\operatorname{sh} \frac{\pi}{\sigma}(y - H_i)}{\operatorname{ch} \frac{\pi}{\sigma}(y - H_i) - \cos \frac{\pi}{\sigma}(x - x_i)} \right] \sin \frac{s\pi x}{\sigma} \text{ при } i = 1, 2, \dots, n, \\ b_{is} &= \frac{1}{4\sigma} \int_{-\sigma}^{\sigma} \left[\frac{\operatorname{sh} \frac{\pi}{\sigma}(y + H_i)}{\operatorname{ch} \frac{\pi}{\sigma}(y + H_i) - \cos \frac{\pi}{\sigma}(x - x_i)} - \frac{\operatorname{sh} \frac{\pi}{\sigma}(y - H_i)}{\operatorname{ch} \frac{\pi}{\sigma}(y - H_i) - \cos \frac{\pi}{\sigma}(x - x_i)} \right] \sin \frac{s\pi x}{\sigma} \text{ при } i = n+1, \dots \end{aligned}$$

Известно, что при выполнении условия $t' > 0$ имеет место разложение [6]:

$$\frac{\operatorname{sh} t'}{\operatorname{ch} t' - \cos x} = 1 + 2 \sum_{k=1}^{\infty} e^{-kt'} \cos kx. \quad (1.8)$$

Учитывая (1.8) для a_{is} ($i = 1, 2, \dots, n$) получим:

$$a_{is} = \frac{1}{4\sigma} \int_{-\sigma}^{\sigma} \left[2 + 4 \sum_{k=1}^{\infty} e^{-\frac{ky}{\sigma}} \operatorname{ch} \frac{k\pi H_i}{\sigma} \cos \frac{k\pi}{\sigma}(x - x_i) \right] \cos \frac{s\pi x}{\sigma} dx. \quad (1.9)$$

В силу свойства ортогональности системы тригонометрических функций будет отличен от нуля только член при $k = s$.

Отсюда

$$a_{is} = \frac{\text{ch} \frac{\pi H_i}{\sigma}}{e^{\frac{\pi y}{\sigma}}} \cos \frac{\pi x_i}{\sigma} \text{ при } i = 1, 2, \dots, n. \quad (1.10)$$

Аналогично вычисляются коэффициенты при Q_i

$$a_{is} = -\frac{\text{sh} \frac{\pi y}{\sigma}}{e^{\frac{\pi y}{\sigma}}} \cos \frac{\pi x_i}{\sigma} \text{ при } i = n+1, \dots, n+l,$$

$$b_{is} = \frac{\text{ch} \frac{\pi H_i}{\sigma}}{e^{\frac{\pi y}{\sigma}}} \sin \frac{\pi x_i}{\sigma} \text{ при } i = 1, 2, \dots, n, \quad (1.11)$$

$$b_{is} = -\frac{\text{sh} \frac{\pi y}{\sigma}}{e^{\frac{\pi y}{\sigma}}} \sin \frac{\pi x_i}{\sigma} \text{ при } i = n+1, \dots, n+l.$$

Таким образом, условие равенства нулю первых $(2M+1)$ коэффициентов ряда Фурье дает систему уравнений:

$$\sum_{i=1}^n Q_i = -\frac{2\sigma m (y_1 - y_2)}{T},$$

$$\sum_{i=1}^n Q_i \frac{\text{ch} \frac{\pi H_i}{\sigma}}{e^{\frac{\pi y}{\sigma}}} \cos \frac{\pi x_i}{\sigma} - \sum_{i=n+1}^{n+l} \frac{\text{sh} \frac{\pi y}{\sigma}}{e^{\frac{\pi H_i}{\sigma}}} \cos \frac{\pi x_i}{\sigma} = 0, \quad (1.12)$$

$$\sum_{i=1}^n Q_i \frac{\text{ch} \frac{\pi H_i}{\sigma}}{e^{\frac{\pi y}{\sigma}}} \sin \frac{\pi x_i}{\sigma} - \sum_{i=n+1}^{n+l} \frac{\text{sh} \frac{\pi y}{\sigma}}{e^{\frac{\pi H_i}{\sigma}}} \sin \frac{\pi x_i}{\sigma} = 0.$$

Первое уравнение в системе (1.12) представляет собой уравнение баланса, выражающее, что суммарный дебит всех эксплуатационных скважин равен вытесненному объему нефти.

В дальнейшем при решении конкретных задач мы будем брать последовательно столько уравнений в системе (1.12), сколько необходимо для определения дебитов.

Рассмотрим решение одной задачи уравнения движением КН по характеру эксплуатации [2].

Пусть месторождение полосообразной формы с одной непроницаемой стенкой эксплуатируется двумя эксплуатационными батареями, размещенными параллельно этой стенке. Расстояния от непроницаемой стенки до первой и второй батарей соответственно обозначим через H_1 и H_2 . Расстояния между окнами в батареях равно 2σ .

С учетом первой гармоники из системы (1.12) имеем

$$Q_1 + Q_2 = -\frac{2\sigma m (y_1 - y_2)}{T},$$

$$Q_1 \text{ch} \frac{\pi H_1}{\sigma} \cos \frac{\pi x_1}{\sigma} + Q_2 \text{ch} \frac{\pi H_2}{\sigma} \cos \frac{\pi x_2}{\sigma} = 0, \quad (1.13)$$

$$Q_1 \text{ch} \frac{\pi H_1}{\sigma} \sin \frac{\pi x_1}{\sigma} + Q_2 \text{ch} \frac{\pi H_2}{\sigma} \sin \frac{\pi x_2}{\sigma} = 0.$$

Не нарушая общности дальнейших выводов, в системе уравнений (1.13) можно считать $x_1 = 0$. Тогда из третьего уравнения системы (1.13) имеем $\sin \frac{\pi x_2}{\sigma} = 0$ или $x_2 = 0, x_2 = \sigma$. Случай $x_2 = 0$ не удовлетворяет условию знакоопределенности дебитов [2], что следует из второго уравнения системы (1.13). Значит $x_2 = \sigma$ (шахматное размещение). Решая совместно первое и второе уравнение системы (1.13), получаем

$$Q_1 = -\frac{2\sigma m (y_1 - y_2)}{T} \cdot \frac{\text{ch} \frac{\pi H_1}{\sigma}}{\text{ch} \frac{\pi H_1}{\sigma} + \text{ch} \frac{\pi H_2}{\sigma}},$$

$$Q_2 = -\frac{2\sigma m (y_1 - y_2)}{T} \cdot \frac{\text{ch} \frac{\pi H_2}{\sigma}}{\text{ch} \frac{\pi H_1}{\sigma} + \text{ch} \frac{\pi H_2}{\sigma}}, \quad (1.14)$$

или

$$\frac{Q_1}{Q_2} = \frac{\text{ch} \frac{\pi H_2}{\sigma}}{\text{ch} \frac{\pi H_1}{\sigma}}.$$

§ 2. Построение функции давления для двухжидкостной системы при наличии сброса. Рассмотрим задачу управления движением КН с учетом различия вязкостей воды μ_w и нефти μ_n при наличии сброса. Здесь мы принимаем основные предположения, указанные в первом параграфе. Пусть нефтеносная область в начальный момент времени ограничена контуром Γ_0 . Внутри этой области имеется непроницаемая зона с контуром Γ_n (см. рис. 2). Текущее положение КН обозначено через Γ, Γ_n — контур питания.

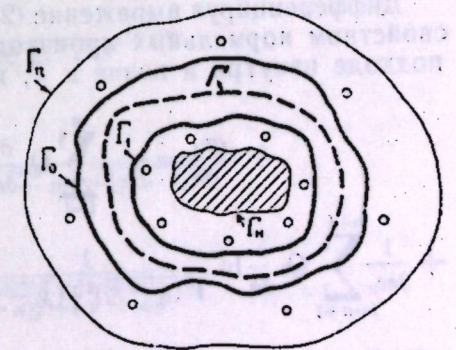


Рис. 2.

Как известно, давление удовлетворяет уравнению Лапласа в зонах воды и нефти. Причем на Γ должны выполняться условия:

$$p_1 = p_2, \quad (2.1)$$

$$c_1 \frac{\partial p_1}{\partial n} = c_2 \frac{\partial p_2}{\partial n}, \quad (2.2)$$

где

$$c_1 = \frac{k}{\mu_w}, \quad c_2 = \frac{k}{\mu_n}.$$

Закон стягивания КН задаем в виде

$$F(x, y, t) = 0. \quad (2.3)$$

Согласно уравнению движения КН имеем

$$\frac{\partial p_1}{\partial n} = \frac{m}{c_1} \frac{\partial F}{\partial t} / \frac{\partial F}{\partial n} \quad (2.4)$$

$$\frac{\partial p_2}{\partial n} = \frac{m}{c_2} \frac{\partial F}{\partial t} / \frac{\partial F}{\partial n} \quad (2.5)$$

Из равенств (2.4) и (2.5) находим

$$\frac{\partial p_1}{\partial n} + \frac{\partial p_2}{\partial n} = m \left(\frac{1}{c_1} + \frac{1}{c_2} \right) \frac{\partial F}{\partial t} / \frac{\partial F}{\partial n} \quad (2.6)$$

$$\frac{\partial p_1}{\partial n} - \frac{\partial p_2}{\partial n} = m \left(\frac{1}{c_1} - \frac{1}{c_2} \right) \frac{\partial F}{\partial t} / \frac{\partial F}{\partial n} \quad (2.7)$$

Следуя способу, примененному в работах [3] и [4], давление будем искать в виде

$$p = \frac{1}{2\pi c_1} \sum_{l=1}^n Q_l \ln \frac{1}{V(x-x_l)^2 + (y-y_l)^2} + \frac{1}{2\pi c_2} \sum_{l=n+1}^{n+1} Q_l \ln \frac{1}{V(x-x_l)^2 + (y-y_l)^2} + \int_{\Gamma} \rho(s, t) \ln \frac{1}{V(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2} ds + \int_{\Gamma_n} \mu(s') \ln \frac{1}{V(x-\xi')^2 + (y-\eta')^2} ds'. \quad (2.8)$$

Здесь $\rho(s, t)$ — плотность потенциала простого слоя на Γ ,
 $\mu(s')$ — плотность потенциала простого слоя на Γ_n ,
 s, s' — дуговые абсциссы точек контуров Γ и Γ_n .
 $(\xi, \eta), (\xi', \eta')$ — точки контуров Γ и Γ_n .

Тогда, в силу известного свойства непрерывности потенциала простого слоя при переходе через границы области, первое условие (2.1) выполняется.

Удовлетворим второму условию (2.1).

Дифференцируя выражение (2.8) по нормали к контуру Γ и пользуясь свойством нормальных производных потенциалов простого слоя при подходе изнутри и извне к Γ , имеем:

$$\begin{aligned} \frac{\partial p_1}{\partial n} &= \frac{1}{2\pi c_1} \sum_{l=1}^n Q_l \frac{\partial}{\partial n} \ln \frac{1}{V(x-x_l)^2 + (y-y_l)^2} + \\ &+ \frac{1}{2\pi c_2} \sum_{l=n+1}^{n+1} Q_l \frac{\partial}{\partial n} \ln \frac{1}{V(x-x_l)^2 + (y-y_l)^2} - \pi\rho + \int_{\Gamma} \rho \frac{\partial}{\partial n} \ln \frac{1}{V(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2} ds + \\ &+ \int_{\Gamma_n} \mu \frac{\partial}{\partial n} \ln \frac{1}{V(x-\xi')^2 + (y-\eta')^2} ds', \end{aligned} \quad (2.9)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial p_2}{\partial n} &= \frac{1}{2\pi c_1} \sum_{l=1}^n Q_l \frac{\partial}{\partial n} \ln \frac{1}{V(x-x_l)^2 + (y-y_l)^2} + \sum_{l=n+1}^{n+1} Q_l \frac{\partial}{\partial n} \ln \frac{1}{V(x-x_l)^2 + (y-y_l)^2} + \\ &+ \pi\rho + \int_{\Gamma} \rho \frac{\partial}{\partial n} \ln \frac{1}{V(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2} ds + \int_{\Gamma_n} \mu \frac{\partial}{\partial n} \ln \frac{1}{V(x-\xi')^2 + (y-\eta')^2} ds'. \end{aligned} \quad (2.10)$$

Из соотношений (2.9) и (2.10) следует:

$$\frac{\partial p_1}{\partial n} - \frac{\partial p_2}{\partial n} = -2\pi\rho. \quad (2.11)$$

Сравнивая правые части формул (2.7) и (2.11), находим

$$\rho = -\frac{m}{2\pi} \left(\frac{1}{c_1} - \frac{1}{c_2} \right) \frac{\partial F}{\partial t} / \frac{\partial F}{\partial n} \quad (2.12)$$

Подставим выражение для ρ из (2.12) в (2.8)

$$\begin{aligned} p &= \frac{1}{2\pi c_1} \sum_{l=1}^n Q_l \ln \frac{1}{V(x-x_l)^2 + (y-y_l)^2} + \frac{1}{2\pi c_2} \sum_{l=n+1}^{n+1} Q_l \ln \frac{1}{V(x-x_l)^2 + (y-y_l)^2} - \\ &- \frac{m}{2\pi} \left(\frac{1}{c_1} - \frac{1}{c_2} \right) \int_{\Gamma} \left(\frac{\partial F}{\partial t} / \frac{\partial F}{\partial n} \right) \ln \frac{1}{V(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2} ds + \\ &+ \int_{\Gamma_n} \mu(s') \ln \frac{1}{V(x-\xi')^2 + (y-\eta')^2} ds'. \end{aligned} \quad (2.13)$$

Неизвестную плотность простого слоя на Γ_n $\mu(s')$ мы найдем из условия

$$\frac{\partial p}{\partial n} \Big|_{\Gamma_n} = 0. \quad (2.14)$$

Беря производную по направлению внешней нормали к Γ_n и приравняв нулю $\frac{\partial p}{\partial n}$, получаем интегральное уравнение относительно μ

$$\begin{aligned} \pi\mu + \int_{\Gamma_n} \mu \frac{\partial}{\partial n} \ln \frac{1}{V(x-\xi')^2 + (y-\eta')^2} ds' = \\ = \frac{m}{2\pi} \left(\frac{1}{c_1} - \frac{1}{c_2} \right) \int_{\Gamma} \left(\frac{\partial F}{\partial t} / \frac{\partial F}{\partial n} \right) \frac{\partial}{\partial n} \ln \frac{1}{V(x-x_l)^2 + (y-y_l)^2} ds + \\ + \frac{1}{2\pi c_1} \sum_{l=1}^n Q_l \frac{\partial}{\partial n} \ln \frac{1}{V(x-x_l)^2 + (y-y_l)^2} + \\ + \frac{1}{2\pi c_2} \sum_{l=n+1}^{n+1} Q_l \frac{\partial}{\partial n} \ln \frac{1}{V(x-x_l)^2 + (y-y_l)^2}. \end{aligned} \quad (2.15)$$

Здесь точка $(x, y) \in \Gamma_n$.

Уравнение (2.15) есть интегральное уравнение Фредгольма второго рода. На основании теоремы Фредгольма можно показать существование и единственность решения уравнения (2.15) при некоторых предположениях относительно контуров и функции, стоящей в правой части [3].

Подставляя выражения для $\frac{\partial p_1}{\partial n}$ и $\frac{\partial p_2}{\partial n}$, найденные из (2.13), в уравнение (2.6), получаем „невязку“

$$2 \left[\frac{1}{2\pi c_1} \sum_{i=1}^n Q_i \frac{\partial}{\partial n} \ln \frac{1}{\sqrt{(x-x_i)^2 + (y-y_i)^2}} + \frac{1}{2\pi c_2} \sum_{i=n+1}^{n+l} Q_i \frac{\partial}{\partial n} \ln \frac{1}{\sqrt{(x-x_i)^2 + (y-y_i)^2}} - \frac{m}{2\pi} \left(\frac{1}{c_1} - \frac{1}{c_2} \right) \int_{\Gamma} \frac{(\partial F / \partial t) \partial F}{\partial n} \frac{\partial}{\partial n} \ln \frac{1}{\sqrt{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2}} ds + \int_{\Gamma_n} \mu(s') \frac{\partial}{\partial n} \ln \frac{1}{\sqrt{(x-\xi')^2 + (y-\eta')^2}} ds' - m \left(\frac{1}{c_1} - \frac{1}{c_2} \right) \frac{\partial F}{\partial t} / \frac{\partial F}{\partial n} = \varepsilon, \quad (2.16)$$

где (x, y) , (ξ, η) — координаты точек Γ .

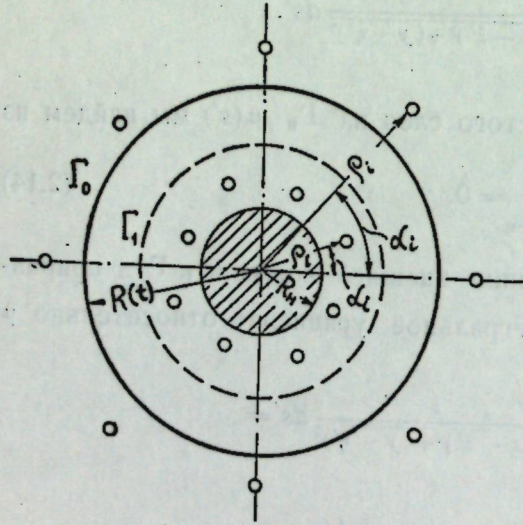


Рис. 3.

В формуле (2.16) вместо плотности простого слоя $\mu(s')$ должно быть поставлено ее значение, найденное из решения уравнения (2.15). Теперь нужно так варьировать дебитами скважин Q_i и их координатами (x_i, y_i) , чтобы ε наименее уклонялась от нуля. Для этого, например, можно применить метод, указанный в § 1.

§ 3. Случай кругового закона стягивания КН с непроницаемым ядром. Допустим, что первоначальный КН есть окружность радиуса r_0 , внутри которого имеется непроницаемая зона в виде круга радиуса R_n . Полярные координаты эксплуатационных и на-

гнетательных скважин соответственно обозначим (ρ_i, α_i) ($i=1, \dots, n$) и (ρ_i, α_i) ($i=n+1, n+l$) (см. рис. 3).

Желаемый закон стягивания КН в полярных координатах задаем в виде

$$F(r, \theta, t) = R(t) - r = 0. \quad (3.1)$$

Согласно изложенному в § 2, давление представим в форме:

$$p = \frac{1}{2\pi c_1} \sum_{i=1}^n Q_i \ln \frac{1}{\sqrt{r^2 - 2r\rho_i \cos(\theta - \alpha_i) + \rho_i^2}} + \frac{1}{2\pi c_2} \sum_{i=n+1}^{n+l} Q_i \ln \frac{1}{\sqrt{r^2 - 2r\rho_i \cos(\theta - \alpha_i) + \rho_i^2}} +$$

$$+ \int_0^{2\pi} \rho(\varphi, t) \ln \frac{1}{\sqrt{r^2 - 2Rr \cos(\theta - \varphi) + R^2}} R d\varphi + \int_0^{2\pi} \mu(\varphi') \ln \frac{1}{\sqrt{r^2 - 2rR_n \cos(\theta - \varphi') + R_n^2}} R_n d\varphi'. \quad (3.2)$$

Учитывая, что при заданном законе стягивания КН $\frac{\partial}{\partial n} \Big|_{\Gamma} = - \frac{\partial}{\partial r} \Big|_{\Gamma}$

и
$$\frac{\partial F}{\partial t} = \frac{dR}{dt}, \quad \frac{\partial F}{\partial n} = 1, \quad (3.3)$$

для плотности потенциала простого слоя получаем

$$\rho = - \frac{m}{2\pi} \left(\frac{1}{c_1} - \frac{1}{c_2} \right) \frac{dR}{dt}. \quad (3.4)$$

Подставим значение ρ в формулу (3.2)

$$p = \frac{1}{2\pi c_1} \sum_{i=1}^n Q_i \ln \frac{1}{\sqrt{r^2 - 2r\rho_i \cos(\theta - \alpha_i) + \rho_i^2}} + \frac{1}{2\pi c_2} \sum_{i=n+1}^{n+l} Q_i \ln \frac{1}{\sqrt{r^2 - 2r\rho_i \cos(\theta - \alpha_i) + \rho_i^2}} - \frac{m}{2\pi} \left(\frac{1}{c_1} - \frac{1}{c_2} \right) \frac{dR}{dt} \int_0^{2\pi} \ln \frac{1}{\sqrt{r^2 - 2rR \cos(\theta - \varphi) + R^2}} R d\varphi + \int_0^{2\pi} \mu(\varphi') \ln \frac{1}{\sqrt{r^2 - 2rR_n \cos(\theta - \varphi') + R_n^2}} R d\varphi'. \quad (3.5)$$

Дифференцируя равенство (3.5) по r , полагая $r=R_n$ и учитывая условие разрыва нормальной производной потенциала простого слоя при подходе к Γ_n , получим:

$$\mu(0) - \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \mu(\varphi') \frac{\partial}{\partial r} \ln \frac{1}{\sqrt{r^2 - 2rR_n \cos(\theta - \varphi') + R_n^2}} R_n d\varphi' \Big|_{r=R_n} = \frac{m}{2\pi} \left(\frac{1}{c_1} - \frac{1}{c_2} \right) \frac{dR}{dt} \int_0^{2\pi} \frac{\partial}{\partial r} \ln \frac{1}{\sqrt{r^2 - 2rR_n \cos(\theta - \varphi) + R_n^2}} R d\varphi \Big|_{r=R_n} - \frac{1}{2\pi^2 c_1} \sum_{i=1}^n Q_i \frac{R_n - \rho_i \cos(\theta - \alpha_i)}{R_n^2 - 2R_n \rho_i \cos(\theta - \alpha_i) + \rho_i^2} - \frac{1}{2\pi^2 c_2} \sum_{i=n+1}^{n+l} Q_i \frac{R_n - \rho_i \cos(\theta - \alpha_i)}{R_n^2 - 2R_n \rho_i \cos(\theta - \alpha_i) + \rho_i^2}. \quad (3.6)$$

После некоторых преобразований, граничное условие на контуре Γ_n принимает вид:

$$\mu(\theta) + \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \mu(\varphi') d\varphi' = \frac{1}{2\pi^2 c_1 R_n} \sum_{l=1}^n Q_l \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{R_n}{\rho_l}\right)^k \cos k(\theta - \alpha_l) + \frac{1}{2\pi^2 c_2 R_n} \sum_{l=n+1}^{n+1} Q_l \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{R_n}{\rho_l}\right)^k \cos k(\theta - \alpha_l). \quad (3.7)$$

Предполагая, что функция $\mu(\theta)$ удовлетворяет условиям Дирихле и представляя решение уравнения (3.7) в виде ряда Фурье, находим:

$$\mu(\theta) = \frac{1}{2\pi^2 c_1 R_n} \sum_{l=1}^n Q_l \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{R_n}{\rho_l}\right)^k \cos k(\theta - \alpha_l) + \frac{1}{2\pi^2 c_2 R_n} \sum_{l=n+1}^{n+1} Q_l \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{R_n}{\rho_l}\right)^k \cos k(\theta - \alpha_l). \quad (3.8)$$

Условие (2.7) удовлетворено определением ρ по формуле (2.12). Удовлетворим условию (2.6).

Беря производные по нормали из (3.2) при подходе изнутри и извне к Γ , и складывая по частям, получим:

$$\frac{\partial p_1}{\partial n} + \frac{\partial p_2}{\partial n} = 2 \left[\frac{1}{2\pi c_1} \sum_{l=1}^n Q_l \frac{\partial}{\partial r} \frac{1}{\sqrt{r^2 - 2r\rho_l \cos(\theta - \alpha_l) + \rho_l^2}} \Big|_{r=R} + \frac{1}{2\pi c_2} \sum_{l=n+1}^{n+1} Q_l \frac{\partial}{\partial r} \ln \frac{1}{\sqrt{r^2 - 2r\rho_l \cos(\theta - \alpha_l) + \rho_l^2}} \Big|_{r=R} + \int_0^{2\pi} \rho \frac{\partial}{\partial r} \ln \frac{1}{\sqrt{r^2 - 2rR \cos(\theta - \varphi) + R^2}} \Big|_{r=R} R d\varphi + \int_0^{2\pi} \mu(\varphi') \frac{\partial}{\partial n} \ln \frac{1}{\sqrt{r^2 - 2rR_n \cos(\theta - \varphi') + R_n^2}} \Big|_{r=R} R_n d\varphi' = m \left(\frac{1}{c_1} + \frac{1}{c_2} \right) \frac{dR}{dt}. \quad (3.9)$$

Согласно формуле (2.16) составим „невязку“ ε . Для этого в формулу (3.9) подставим значение ρ из (3.4).

Тогда

$$2 \left[\frac{1}{2\pi c_1} \sum_{l=1}^n Q_l \frac{\partial}{\partial r} \ln \frac{1}{\sqrt{r^2 - 2r\rho_l \cos(\theta - \alpha_l) + \rho_l^2}} \Big|_{r=R} + \frac{1}{2\pi c_2} \sum_{l=n+1}^{n+1} Q_l \frac{\partial}{\partial r} \ln \frac{1}{\sqrt{r^2 - 2r\rho_l \cos(\theta - \alpha_l) + \rho_l^2}} \Big|_{r=R} - \frac{m}{2\pi} \left(\frac{1}{c_1} - \frac{1}{c_2} \right) \frac{dR}{dt} \int_0^{2\pi} \frac{\partial}{\partial r} \ln \frac{1}{\sqrt{R^2 - 2rR \cos(\theta - \varphi) + R^2}} \Big|_{r=R} R d\varphi + \int_0^{2\pi} \mu(\varphi') \frac{\partial}{\partial r} \ln \frac{1}{\sqrt{r^2 - 2rR_n \cos(\theta - \varphi') + R_n^2}} \Big|_{r=R} R_n d\varphi' - m \left(\frac{1}{c_1} + \frac{1}{c_2} \right) \frac{dR}{dt} = \varepsilon. \quad (3.10)$$

Приравнявая нулю $(2M+1)$ первых коэффициентов Фурье функций ε , получаем систему уравнений:

$$\sum_{l=1}^n Q_l = 2\pi m R \frac{dR}{dt}, \quad \sum_{l=1}^n Q_l \left[\left(\frac{\rho_l}{R}\right)^k + \left(\frac{R_n^2}{R\rho_l}\right)^k \right] \cos k\alpha_l - \frac{c_1}{c_2} \sum_{l=n+1}^{n+1} Q_l \left[\left(\frac{R}{\rho_l}\right)^k - \left(\frac{R_n^2}{R\rho_l}\right)^k \right] \cos k\alpha_l = 0, \quad (3.11)$$

$$\sum_{l=1}^n Q_l \left[\left(\frac{\rho_l}{R}\right)^k + \left(\frac{R_n^2}{R\rho_l}\right)^k \right] \sin k\alpha_l - \frac{c_1}{c_2} \sum_{l=n+1}^{n+1} Q_l \left[\left(\frac{R}{\rho_l}\right)^k - \left(\frac{R_n^2}{R\rho_l}\right)^k \right] \sin k\alpha_l = 0.$$

Отметим, что при $R_n = 0$ (3.11) обращается в систему уравнений, полученную в работе [3].

Предельным переходом $R_n \rightarrow \infty$ можно получить решение соответствующей задачи для полосообразной залежи.

Рассмотрим пример.

Пусть кольцевая нефтеносная область, ограниченная извне КН и изнутри контуром непроницаемой зоны, разрабатывается двумя эксплуатационными батареями из n равнодебитных скважин в каждой. Координаты центра ближайшей к оси скважин первой и второй батарей обозначим через (ρ_1, φ_1) и (ρ_2, φ_2) . Тогда

$$\alpha_{1i} = \varphi_1 + \frac{2\pi}{n} i, \quad \alpha_{2i} = \varphi_2 + \frac{2\pi}{n} i \quad (i = 0, 1, \dots, n-1).$$

Примем следующий закон стягивания контура Γ :

$$R^2 = r_0^2 - \frac{t}{T} (r_0^2 - r_1^2). \quad (3.12)$$

Согласно (3.11) будем иметь систему уравнений:

$$Q_1 + Q_2 = -\frac{m\pi}{nT} (r_0^2 - r_1^2),$$

$$Q_1 \left[\rho_1^k + \frac{R_n^{2k}}{\rho_1^k} \right] \sum_{i=0}^{n-1} \cos k \left(\varphi_1 + \frac{2\pi}{n} i \right) + Q_2 \left[\rho_2^k + \frac{R_n^{2k}}{\rho_2^k} \right] \sum_{i=0}^{n-1} \cos k \left(\varphi_2 + \frac{2\pi}{n} i \right) = 0, \quad (3.13)$$

$$Q_1 \left[\rho_1^k + \frac{R_n^{2k}}{\rho_1^k} \right] \sum_{i=0}^{n-1} \sin k \left(\varphi_1 + \frac{2\pi}{n} i \right) + Q_2 \left[\rho_2^k + \frac{R_n^{2k}}{\rho_2^k} \right] \sum_{i=0}^{n-1} \sin k \left(\varphi_2 + \frac{2\pi}{n} i \right) = 0.$$

Если учесть, что

$$\sum_{k=0}^{n-1} \sin(x + ky) = \frac{\sin\left(x + \frac{n-1}{2}y\right) \sin \frac{\pi y}{2}}{\sin \frac{y}{2}},$$

$$\sum_{k=0}^{n-1} \cos(x+ky) = \frac{\cos\left(x - \frac{n-1}{2}y\right) \sin \frac{\pi y}{2}}{\sin \frac{y}{2}}, \quad (3.14)$$

то (3.13) примет вид

$$Q_1 + Q_2 = -\frac{m\pi}{nT}(r_0^2 - r_1^2),$$

$$Q_1 \left(\rho_1^n + \frac{R_n^{2n}}{\rho_1^n} \right) \cos n\varphi_1 + Q_2 \left(\rho_2^n + \frac{R_n^{2n}}{\rho_2^n} \right) \cos n\varphi_2 = 0, \quad (3.15)$$

$$Q_1 \left(\rho_1^n + \frac{R_n^{2n}}{\rho_1^n} \right) \sin n\varphi_1 + Q_2 \left(\rho_2^n + \frac{R_n^{2n}}{\rho_2^n} \right) \sin n\varphi_2 = 0.$$

Пусть в (3.15) $\varphi_1 = 0$. Тогда из третьего уравнения системы (3.15), с учетом условия знакоопределенности дебитов, следует $\varphi_2 = \frac{\pi}{n}$, т. е. скважины должны быть размещены в шахматном порядке.

Решая совместно первое и второе уравнения системы (3.15), получаем:

$$Q_1 = -\frac{\frac{m\pi}{nT}(r_0^2 - r_1^2) \left(\rho_2^n + \frac{R_n^{2n}}{\rho_2^n} \right)}{\rho_1^n + \rho_2^n + \frac{R_n^{2n}}{\rho_1^n} + \frac{R_n^{2n}}{\rho_2^n}}, \quad Q_2 = -\frac{\frac{m\pi}{nT}(r_0^2 - r_1^2) \left(\rho_1^n + \frac{R_n^{2n}}{\rho_1^n} \right)}{\rho_1^n + \rho_2^n + \frac{R_n^{2n}}{\rho_1^n} + \frac{R_n^{2n}}{\rho_2^n}}$$

или

$$\frac{Q_1}{Q_2} = \frac{\rho_2^n \left[1 + \left(\frac{R_n}{\rho_2} \right)^{2n} \right]}{\rho_1^n \left[1 + \left(\frac{R_n}{\rho_1} \right)^{2n} \right]}. \quad (3.16)$$

Полагая в (3.16) $R_n = 0$, приходим к решению, полученному в [2]. Таким же образом можно рассмотреть и другие случаи.

ЛИТЕРАТУРА

1. Салехов Г. С. Прямые и обратные задачи о продвижении водонефтяного контакта. Изв. Казанск. филиала АН СССР, серия физ.-мат. и техн. наук, № 5, 1955.
2. Салехов Г. С. Постановка и метод решения гидродинамических задач управления движением контура нефтеносности. Изв. Казанск. филиала АН СССР, серия физ.-мат. и техн. наук, № 6, 1955.
3. Данилов В. Л. Управление перемещением контура нефтеносности с учетом различия вязкостей нефти и воды. Изв. Казанск. филиала АН СССР, серия физ.-мат. и техн. наук, № 8, 1955.
4. Тумашев Г. Г. К задаче о стягивании контура нефтеносности. Ученые записки КГУ, т. 113, кн. 10, 1953.
5. Чарный И. А. Подземная гидромеханика, Гостехиздат, 1948.
6. Рыжик И. М. и Градштейн И. С. Таблицы интегралов сумм, рядов и произведений. Гостехиздат, 1951.
7. Ким В. Ю. Некоторые задачи управления движением контура нефтеносности с учетом влияния сбросов. Диссертация. Институт механики АН СССР, 1955.

Физико-технический институт
Казанского филиала АН СССР

Поступила 22 декабря 1956 г.

В. Ю. Ким

ОБ ОДНОЙ ЗАДАЧЕ УПРАВЛЕНИЯ ДВИЖЕНИЕМ КОНТУРА НЕФТЕНОСНОСТИ

В статье решается задача управления движением контура нефтеносности (КН) в пласте, ограниченном непроницаемыми стенками с трех сторон.

Для случая, когда начальный КН не параллелен линии размещения скважин, приводится график изменения дебитов с течением времени и найдено условие разрешимости задачи.

§ 1. Рассмотрим решение задачи управления движением КН [1] для однородного горизонтального пласта постоянной мощности $h=1$ и проницаемости k . Движение жидкости предполагается подчиняющимся линейному закону фильтрации, а режим — водонапорным. Различие в вязкостях воды и нефти не учитывается. Пусть месторождение, ограниченное сбросами с трех сторон, разрабатывается одной батареей скважин с дебитами Q_i ($i=1, 2, \dots, n$).

Для простоты будем полагать, что линия скважин совпадает с осью Ox , являющейся сбросом. Скважины размещаются симметрично относительно продольных стенок (см. рис. 1).

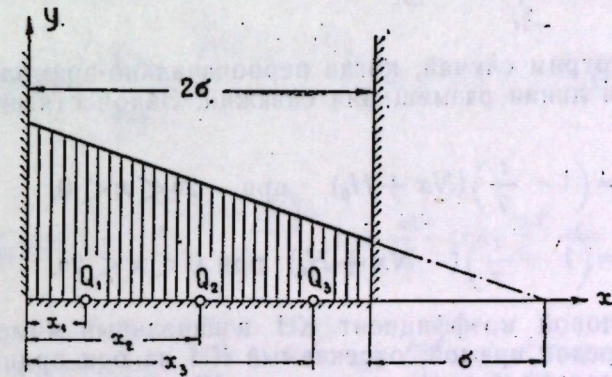


Рис. 1.

При этих условиях функция давления легко строится методом суперпозиции и имеет вид:

$$p = -\frac{\mu}{4\pi k} \sum_{i=1}^n Q_i \left\{ \ln \left[\operatorname{ch} \frac{\pi y}{2\sigma} - \cos \frac{\pi(x+x_i)}{2\sigma} \right] + \right.$$

$$\left. + \ln \left[\operatorname{ch} \frac{\pi y}{2\sigma} - \cos \frac{\pi(x-x_i)}{2\sigma} \right] \right\} + \text{const}, \quad (1.1)$$

где μ — вязкость жидкости; x_i — абсцисса i -й скважины в батарее, 2σ — ширина полуполосы. Нетрудно показать, что выражение давле-

ния (1.1) удовлетворяет условию непроницаемости стенок (сбросов).
Далее, пользуясь законом Дарси, запишем уравнение движения КН.

$$m \frac{\partial F}{\partial t} - \frac{k}{\mu} \frac{\partial F}{\partial x} \frac{\partial p}{\partial x} - \frac{k}{\mu} \frac{\partial F}{\partial y} \frac{\partial p}{\partial y} = 0. \quad (1.2)$$

Задаем закон стягивания КН в виде уравнения

$$F(x, y, t) = \bar{y} - y(x, t) = 0. \quad (1.3)$$

Подставим значения производных из (1.1) и заданного закона стягивания (1.3) в (1.2).

Тогда

$$2\sigma m \frac{\partial y}{\partial t} - \sum_{i=1}^n Q_i - \sum_{i=1}^n Q_i U_i = \epsilon, \quad (1.4)$$

$$U_i = 2 \sum_{k=1}^{\infty} e^{-\frac{k\pi y}{2\sigma}} \cos \frac{k\pi x}{2\sigma} \cos \frac{k\pi x_i}{2\sigma} - 2 \frac{\partial y}{\partial x} \sum_{k=1}^{\infty} e^{-\frac{k\pi y}{2\sigma}} \sin \frac{k\pi x}{2\sigma} \cos \frac{k\pi x_i}{2\sigma},$$

где ϵ — известная функция погрешности.

Пользуясь известным методом [1], разложим функцию ϵ в ряд Фурье и приравняем нулю $(2M+1)$ первых коэффициентов.

Для определения неизвестных Q_i получаем систему уравнений:

$$A_0 = \int_{-2\sigma}^{2\sigma} \epsilon dx = 0, \quad A_s = \int_{-2\sigma}^{2\sigma} \epsilon \cos \frac{s\pi x}{2\sigma} dx, \\ B_s = \int_{-2\sigma}^{2\sigma} \epsilon \sin \frac{s\pi x}{2\sigma} dx = 0, \quad (s = 1, 2, \dots, M). \quad (1.5)$$

§ 2. Рассмотрим случай, когда первоначально-прямолинейный КН не параллелен линии размещения скважин. Закон стягивания КН задаем в виде:

$$y_1 = \left(1 - \frac{t}{T}\right)(Nx + H_0) \quad \text{при } -2\sigma < x < 0, \quad (2.1)$$

$$y_2 = \left(1 - \frac{t}{T}\right)(-Nx + H_0) \quad \text{при } 0 < x < 2\sigma.$$

Здесь N — угловой коэффициент КН в начальный момент времени, H_0 — отрезок прямой, отсекаемый КН на оси ординат.

Принимая заданный закон стягивания КН (2.1), систему уравнений (1.5) перепишем в виде:

$$A_0 = H_{10} - \sum_{i=1}^n Q_i \int_{-2\sigma}^0 U_i dx - \sum_{i=1}^n Q_i \int_0^{2\sigma} U_i dx = 0, \\ A_s = H_{1s} - \sum_{i=1}^n Q_i \int_{-2\sigma}^0 U_i \cos \frac{s\pi x}{2\sigma} dx - \sum_{i=1}^n Q_i \int_0^{2\sigma} U_i \cos \frac{s\pi x}{2\sigma} dx = 0, \\ B_s = H_{2s} - \sum_{i=1}^n Q_i \int_{-2\sigma}^0 U_i \sin \frac{s\pi x}{2\sigma} dx - \sum_{i=1}^n Q_i \int_0^{2\sigma} U_i \sin \frac{s\pi x}{2\sigma} dx = 0, \quad (2.2)$$

где

$$H_{10} = \int_{-2\sigma}^0 \left(2\sigma m \frac{\partial y_1}{\partial t} - \sum_{i=1}^n Q_i\right) dx + \int_0^{2\sigma} \left(2\sigma m \frac{\partial y_2}{\partial t} - \sum_{i=1}^n Q_i\right) dx,$$

$$H_{1s} = \int_{-2\sigma}^0 \left(2\sigma m \frac{\partial y_1}{\partial t} - \sum_{i=1}^n Q_i\right) \cos \frac{s\pi x}{2\sigma} dx + \int_0^{2\sigma} \left(2\sigma m \frac{\partial y_2}{\partial t} - \sum_{i=1}^n Q_i\right) \cos \frac{s\pi x}{2\sigma} dx,$$

$$H_{2s} = \int_{-2\sigma}^0 \left(2\sigma m \frac{\partial y_1}{\partial t} - \sum_{i=1}^n Q_i\right) \sin \frac{s\pi x}{2\sigma} dx + \int_0^{2\sigma} \left(2\sigma m \frac{\partial y_2}{\partial t} - \sum_{i=1}^n Q_i\right) \sin \frac{s\pi x}{2\sigma} dx.$$

Коэффициент при Q_i в интервале $-2\sigma < x < 0$ перепишем в виде:

$$\int_{-2\sigma}^0 U_i \cos \frac{s\pi x}{2\sigma} dx = \sum_{k=1}^{\infty} e^{-\frac{k\pi H_0}{2\sigma} \left(1 - \frac{t}{T}\right)} \left[\alpha_{sk} - N \left(1 - \frac{t}{T}\right) \beta_{sk} \right] \cos \frac{s\pi x_i}{2\sigma}, \quad (2.3)$$

где

$$\alpha_{sk} = 2 \int_{-2\sigma}^0 e^{-\frac{k\pi N}{2\sigma} \left(1 - \frac{t}{T}\right) x} \cos \frac{k\pi x}{2\sigma} \cos \frac{s\pi x}{2\sigma} dx,$$

$$\beta_{sk} = 2 \int_{-2\sigma}^0 e^{-\frac{k\pi N}{2\sigma} \left(1 - \frac{t}{T}\right) x} \sin \frac{k\pi x}{2\sigma} \cos \frac{s\pi x}{2\sigma} dx.$$

Аналогично можно записать коэффициент при Q_i в интервале $0 < x < 2\sigma$:

$$\int_0^{2\sigma} U_0 \cos \frac{s\pi x}{2\sigma} dx = \sum_{i=1}^n e^{-\frac{k\pi H_0}{2\sigma} \left(1 - \frac{t}{T}\right)} \left[\alpha_{sk}^* + N \left(1 - \frac{t}{T}\right) \beta_{sk}^* \right] \cos \frac{k\pi x_i}{2\sigma}, \quad (2.4)$$

где

$$\alpha_{sk}^* = 2 \int_0^{2\sigma} e^{-\frac{k\pi N}{2\sigma} \left(1 - \frac{t}{T}\right) x} \cos \frac{k\pi x}{2\sigma} \cos \frac{s\pi x}{2\sigma} dx;$$

$$\beta_{sk}^* = 2 \int_0^{2\sigma} e^{-\frac{k\pi N}{2\sigma} \left(1 - \frac{t}{T}\right) x} \sin \frac{k\pi x}{2\sigma} \cos \frac{s\pi x}{2\sigma} dx.$$

Окончательно выражение для A_s имеет вид:

$$A_s = H_{1s} - \sum_{i=1}^n e^{-\frac{k\pi H_0}{2\sigma} \left(1 - \frac{t}{T}\right)} \left[\alpha_{sk} - N \left(1 - \frac{t}{T}\right) \beta_{sk} \right] \cos \frac{k\pi x_i}{2\sigma} - \\ - \sum_{k=1}^{\infty} e^{-\frac{k\pi H_0}{2\sigma} \left(1 - \frac{t}{T}\right)} \left[\alpha_{sk}^* - N \left(1 - \frac{t}{T}\right) \beta_{sk}^* \right] \cos \frac{k\pi x_i}{2\sigma} = 0. \quad (2.5)$$

Как показывают вычисления, коэффициент B_s тождественно обращается в нуль.

Для свободных членов H_{10} , H_{1s} после интегрирования имеем:

$$\left. \begin{aligned} H_{10} &= \sum_{i=1}^n Q_i + \frac{2\sigma H_0 - 2\sigma^2 N}{T} m, \\ H_{1s} &= -\frac{4\sigma m N [1 - (-1)^s]}{T \cdot \left[\frac{s\pi}{2\sigma}\right]^4}. \end{aligned} \right\} \quad (2.6)$$

На основании (2.5) и (2.6) получаем:

$$\sum_{i=1}^n Q_i = -\frac{2\sigma H_0 - 2\sigma^2 N}{T} m, \quad (2.7)$$

$$\sum_{i=1}^n Q_i \sum_{k=1}^{\infty} \left[\frac{(-1)^{k-s} e^{k\pi a \left(N - \frac{H_0}{2\sigma}\right)} - e^{-k\pi a \frac{H_0}{2\sigma}}}{k^2 N^2 a^2 + (k-s)^2} - \frac{(-1)^{k+s} e^{k\pi a \left(N - \frac{H_0}{2\sigma}\right)} - e^{-k\pi a \frac{H_0}{2\sigma}}}{k^2 N^2 a^2 + (k+s)^2} \right] \cos \frac{k\pi x_i}{2\sigma} = -\frac{4\sigma^2 m [1 - (-1)^s]}{s^2 \pi a T},$$

где $a = 1 - \frac{t}{T}$, ($s = 1, 2, \dots, M$).

Из системы (2.7) видно, что ряды при Q_i абсолютно и равномерно сходятся, если выполняется условие $N \leq \frac{H_0}{2\sigma}$.

Это условие можно объяснить тем, что решение задачи управления для указанной схемы только за счет определения дебитов эксплуатационных скважин возможно лишь при определенных значениях угла наклона первоначального КН.

В дальнейшем мы будем считать это условие выполняющимся и назовем его условием разрешимости задачи. Ввиду быстрой сходимости этих рядов при выполнении указанного неравенства, практически достаточно ограничиться несколькими начальными членами.

Следует отметить, что приведенное решение задачи управления можно применить к стягиванию контура клиновидного участка залежи батареей скважин. Также можно было бы усилить возможности управления в этой задаче введением нагнетательных скважин.

Рассмотрим случай трех скважин с координатами $x_i = \frac{(2i-1)\sigma}{3}$ ($i = 1, 2, 3$). Пусть $H_0 = \sigma$, $N = \frac{H_0}{3\sigma}$.

При указанных значениях условие разрешимости задачи выполняется. С учетом второй гармоники из системы (2.7) имеем:

$$Q_1 + Q_2 + Q_3 = -\frac{4\sigma^2 m N}{T},$$

$$Q_1 \sum_{k=1}^{\infty} A_{k1} \cos \frac{k\pi x_1}{2\sigma} + Q_2 \sum_{k=1}^{\infty} A_{k1} \cos \frac{k\pi x_2}{2\sigma} + Q_3 \sum_{k=1}^{\infty} A_{k1} \cos \frac{k\pi x_3}{2\sigma} = -\frac{8\sigma^2 m}{aT},$$

$$Q_1 \sum_{k=1}^{\infty} A_{k2} \cos \frac{k\pi x_1}{2\sigma} + Q_2 \sum_{k=1}^{\infty} A_{k2} \cos \frac{k\pi x_2}{2\sigma} + Q_3 \sum_{k=1}^{\infty} A_{k2} \cos \frac{k\pi x_3}{2\sigma} = 0,$$

где

$$A_{ks} = \frac{(-1)^{k-s} e^{k\pi a \left(N - \frac{H_0}{2\sigma}\right)} - e^{-k\pi a \frac{H_0}{2\sigma}}}{k^2 N^2 a^2 + (k-s)^2} - \frac{(-1)^{k+s} e^{k\pi a \left(N - \frac{H_0}{2\sigma}\right)} - e^{-k\pi a \frac{H_0}{2\sigma}}}{k^2 N^2 a^2 + (k+s)^2},$$

($s = 1, 2$).

На рис. 2 построены графики изменения дебитов скважин во времени. Из графиков видно, что дебит средней скважины в на-

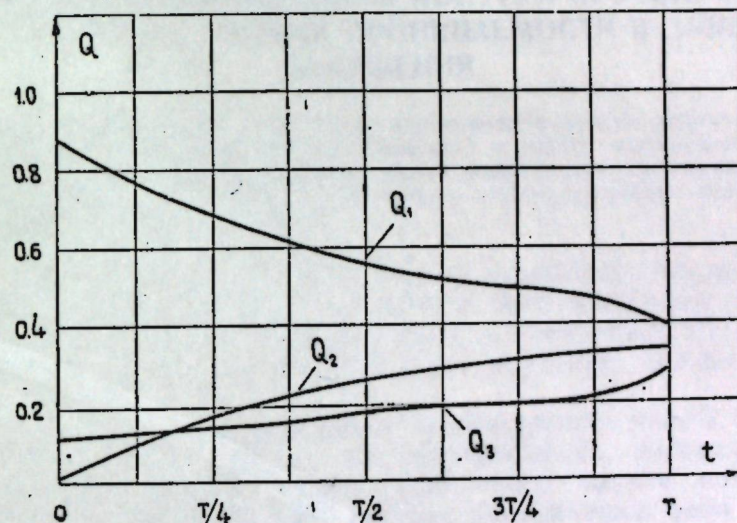


Рис. 2.

чальный момент времени ничтожно мал, а потом постепенно возрастает. В указанном примере при вычислении коэффициентов A_{ks} мы ограничились тремя начальными членами.

В заключение автор выражает глубокую благодарность члену-корреспонденту АН СССР П. Я. Кочинной за критические замечания и руководство работой.

ЛИТЕРАТУРА

1. Салехов Г. С. Постановка и метод решения гидродинамических задач управления движением контура нефтеносности. Изв. Казанск. филиала АН СССР, серия физ.-мат. и техн. наук, вып. 6, 1955.
2. Чарный И. А. Подземная гидромеханика. Гостехиздат, 1948.
3. Ким В. Ю. Некоторые задачи управления движением контура нефтеносности с учетом влияния сбросов. Диссертация, Институт механики АН СССР, 1955.

Физико-технический институт
Казанского филиала АН СССР

Поступила 22 декабря 1956 г.

С. Ф. Коротков

УПРАВЛЕНИЕ ПЕРЕМЕЩЕНИЕМ КОНТУРА НЕФТЕНОСНОСТИ С УЧЕТОМ ФАЗОВОЙ ПРОНИЦАЕМОСТИ В ЗОНЕ ЗАМЕЩЕНИЯ

В работе решается задача управления перемещением контура нефтеносности при ламинарной фильтрации несжимаемых жидкостей в пласте постоянной мощности. Учитывается факт неполного вытеснения нефти водой в зоне замещения. Приведены расчеты задачи управления для случая кругового закона стягивания контура нефтеносности (КН) и численные примеры.

Введение. Задачи о движении КН в большинстве случаев рассматриваются в предположении, что вода в зоне замещения вытесняет всю нефть. Однако экспериментальные исследования [1], [2], [3] показывают, что в действительности вода вытесняет только 70—80% нефти.

Вследствие этого, эффективная проницаемость пласта в зоне замещения становится меньше той проницаемости, которая была бы при полном вытеснении нефти. Для этого случая коэффициент проницаемости, учитывающий влияние неподвижной фазы на проницаемость для подвижной фазы, был назван коэффициентом фазовой проницаемости.

В. Т. Аванесовым [3] была рассмотрена одномерная задача прослеживания КН в предположении, что проницаемость в зоне замещения постоянна. Сделанные им выводы согласуются с экспериментальными данными лучше, чем, например, выводы работы [4], в которой не учитывалось влияние снижения проницаемости в зоне замещения.

М. М. Глоговский и М. Д. Розенберг [5], решая задачу о движении КН для случая радиального вытеснения нефти водой, также указывают, что учет зоны замещения существенно сказывается на расчетных величинах дебитов и скоростей перемещений КН.

Следующим приближением к реальным условиям является рассмотрение фазовой проницаемости для воды в зоне замещения как некоторой функции координат и времени.

Это следует из экспериментов по исследованию нефтевымывающей способности воды, проведенных в лаборатории технологии добычи нефти Института нефти АН СССР [6] и ЦНИЛ'е объединения "Татнефть" [7], которые показывают, что вода постепенно вымывает нефть из промежуточной зоны. Последний фактор приводит к уменьшению остаточной нефтенасыщенности, а следовательно, к увеличению фазовой проницаемости для воды в этой области.

Таким образом, количественные и качественные характеристики процесса движения КН, полученные с учетом факта неполного вытеснения нефти водой, отличаясь от соответствующих величин, полученных без его учета, лучше согласуются с экспериментальными

данными, и, следовательно, более полно отражают картину движения КН в реальных пластовых условиях.

Задача управления движением КН решалась как автором ее постановки Г. С. Салеховым, так и другими (подробный список работ приведен, например, в работе [8]) для одножидкостной системы. В. Л. Данилов [9] дал решение этой задачи с учетом различия вязкостей нефти и воды. В настоящей статье рассматривается решение задачи управления с учетом неполного вытеснения нефти водой из зоны замещения.

В § 1 коэффициент фазовой проницаемости для воды (k'), так же как и в работах [3] и [5], считается постоянным.

В § 2 предполагается, что коэффициент проницаемости — величина переменная. Рассматривается частный закон изменения k' , а именно: когда k' является квадратом гармонической функции. Такое задание закона изменения k' оправдывается анализом зависимостей, полученных экспериментально [7].

§ 1. Решение задачи для случая постоянной фазовой проницаемости. 1. Рассмотрим плоское течение в пласте постоянной мощности h .

Нефтью занята область G_1 , ограниченная КН Γ , вода занимает простирающуюся до бесконечности область G_3 , лежащую вне контура Γ_0 , который является первоначальной границей раздела нефти и воды (рис. 1). Между контурами Γ и Γ_0 находится область G_2 ,

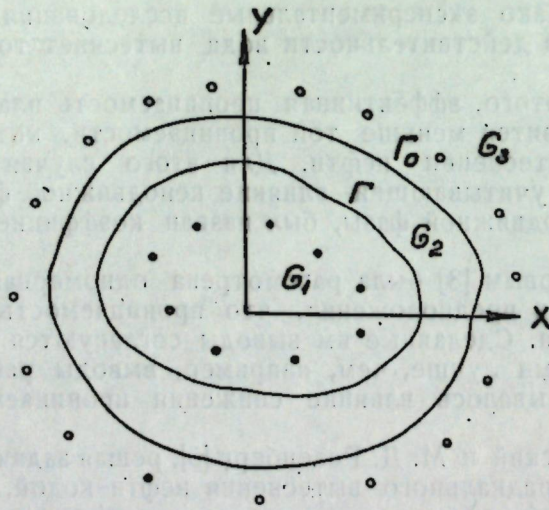


Рис. 1

в которой присутствуют как вода, так и оставшаяся в порах нефть, что приводит к уменьшению фазовой проницаемости для воды до величины $k' < k$, где k — проницаемость в зонах G_1 и G_2 . Коэффициенты вязкости нефти и воды будем обозначать соответственно μ_n и μ_w . В нефтяной области G_1 размещено v эксплуатационных скважин с объемными дебитами Q_i и координатами (x_i, y_i) ($i = 1, 2, 3, \dots, v$). В области G_3 находятся l нагнетательных скважин с объемными дебитами Q_i и координатами (x_i, y_i) ($i = v+1, v+2, \dots, v+l$).

Функции давления p_1, p_2 и p_3 соответственно в областях G_1, G_2 и G_3 являются гармоническими:

$$\Delta p_i = 0 \quad (i = 1, 2, 3). \quad (1.1)$$

На контурах Γ и Γ_0 должны быть выполнены следующие условия:

$$(p_1)_\Gamma = (p_2)_\Gamma, \quad (p_2)_{\Gamma_0} = (p_3)_{\Gamma_0}, \quad (1.2)$$

$$c_1 \left(\frac{\partial p_1}{\partial n} \right)_\Gamma = c_2 \left(\frac{\partial p_2}{\partial n} \right)_\Gamma, \quad c_2 \left(\frac{\partial p_2}{\partial n_0} \right)_{\Gamma_0} = c_3 \left(\frac{\partial p_3}{\partial n_0} \right)_{\Gamma_0}, \quad (1.3)$$

где

$$c_1 = \frac{k}{\mu_n}, \quad c_2 = \frac{k'}{\mu_n} \quad \text{и} \quad c_3 = \frac{k}{\mu_w};$$

n — внутренняя нормаль к контуру Γ ,
 n_0 — внутренняя нормаль к контуру Γ_0 .

Будем решать задачу управления КН [10], если желаемый закон его перемещения задан в виде:

$$F(x, y, t) = 0. \quad (1.4)$$

Как было показано в работах [11], [12], задание закона стягивания КН (1.4) равносильно заданию на контуре Γ нормальной производной функции давления:

$$\frac{\partial p_1}{\partial n} = \frac{m}{c_1} \frac{\partial F}{\partial t} / \frac{\partial F}{\partial n} \quad (1.5)$$

либо

$$\frac{\partial p_2}{\partial n} = \frac{m}{c_2} \frac{\partial F}{\partial t} / \frac{\partial F}{\partial n} \quad (1.6)$$

Здесь m — эффективная пористость, которую мы будем считать постоянной.

2. Первый этап решения задачи состоит в определении давления в пласте как функции дебитов Q_i ($i = 1, 2, 3, \dots, v+l$).

Используя метод определения функции давления, основанный на использовании теории потенциала и примененный впервые к задачам подземной гидромеханики Г. Г. Тумашевым [13], а затем В. Л. Даниловым [9], функцию распределения давления в пласте будем искать в следующем виде:

$$p = \frac{1}{2\pi h c_1} \sum_{i=1}^v Q_i \ln \frac{1}{\sqrt{(x-x_i)^2 + (y-y_i)^2}} + \frac{1}{2\pi h c_3} \sum_{i=v+1}^{v+l} Q_i \ln \frac{1}{\sqrt{(x-x_i)^2 + (y-y_i)^2}} + \int_\Gamma \rho(s, t) \ln \frac{1}{\sqrt{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2}} ds + \int_{\Gamma_0} \rho_0(s_0, t) \ln \frac{1}{\sqrt{(x-\xi_0)^2 + (y-\eta_0)^2}} ds_0, \quad (1.7)$$

где $\rho(s, t)$ — плотность логарифмического потенциала простого слоя, непрерывно распределенного по контуру Γ ,

$(\xi, \eta) \in \Gamma$, s — дуговая абсцисса точки контура Γ ;

$\rho_0(s_0, t)$ — плотность логарифмического потенциала простого слоя, непрерывно распределенного по контуру Γ_0 ,

$(\xi_0, \eta_0) \in \Gamma_0$, s_0 — дуговая абсцисса точки контура Γ_0 .

При выборе функции p в виде (1.7) удовлетворяется уравнение (1.1) и выполняются условия (1.2). Нормальные производные функции давления p терпят разрыв на контурах Γ и Γ_0 .

Потребовав, чтобы этот разрыв соответствовал условиям (1.3), мы получим систему двух линейных интегральных уравнений Фред-

гольма второго рода относительно искомым функций p и p_0 , к которым применимы теоремы Фредгольма:

$$\begin{aligned}
 & p - \frac{\lambda}{\pi} \int_{\Gamma} p(s, t) \frac{\partial}{\partial n} \frac{1}{V(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2} ds - \\
 & - \frac{\lambda}{\pi} \int_{\Gamma_0} p_0(s_0, t) \frac{\partial}{\partial n_0} \ln \frac{1}{V(x-\xi_0)^2 + (y-\eta_0)^2} ds_0 = \\
 & = \frac{\lambda}{2\pi^2 hc_1} \sum_{i=1}^v Q_i \frac{\partial}{\partial n} \ln \frac{1}{V(x-x_i)^2 + (y-y_i)^2} + \\
 & + \frac{\lambda}{2\pi^2 hc_2} \sum_{i=v+1}^{v+l} Q_i \frac{\partial}{\partial n} \ln \frac{1}{V(x-x_i)^2 + (y-y_i)^2} \cdot \\
 & p_0 - \frac{\lambda_0}{\pi} \int_{\Gamma_0} p_0 \frac{\partial}{\partial n_0} \ln \frac{1}{V(x-\xi_0)^2 + (y-\eta_0)^2} ds_0 - \\
 & - \frac{\lambda_0}{\pi} \int_{\Gamma} p(s, t) \frac{\partial}{\partial n_0} \ln \frac{1}{V(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2} ds = \\
 & = \frac{\lambda_0}{2\pi^2 hc_1} \sum_{i=1}^v Q_i \frac{\partial}{\partial n_0} \ln \frac{1}{V(x-x_i)^2 + (y-y_i)^2} + \\
 & + \frac{\lambda_0}{2\pi^2 hc_2} \sum_{i=v+1}^{v+l} Q_i \frac{\partial}{\partial n_0} \ln \frac{1}{V(x-x_i)^2 + (y-y_i)^2},
 \end{aligned} \tag{1.8}$$

где

$$\lambda = \frac{c_1 - c_2}{c_1 + c_2}, \quad \lambda_0 = \frac{c_2 - c_3}{c_2 + c_3},$$

причем

$$|\lambda| < 1, \quad |\lambda_0| < 1.$$

Предполагая, что Γ и Γ_0 не пересекают особых точек, существование и единственность решения этой системы можно показать, если наложить на них некоторые условия гладкости [14]; например, если считать контуры Γ и Γ_0 выпуклыми с непрерывной кривизной. Будем предполагать эти условия выполненными в силу задания закона стягивания (1.4).

Решая систему уравнений (1.8), определим p и p_0 , как функции неопределенных пока параметров Q_i .

Подставив найденные значения плотностей p и p_0 в выражение (1.7), мы получаем функцию давления p .

Найденная таким образом функция p описывала бы действительное распределение гидродинамического давления в пласте, если бы КН Γ перемещался точно по заданному закону стягивания (1.4). Добиться же, в общем случае, выполнения этого закона мы можем только приближенно, за счет соответствующего подбора дебитов Q_i .

Как известно [10], действительный закон перемещения КН $\tilde{F}(x, y, t) = 0$ должен удовлетворять уравнению:

$$m \frac{\partial \tilde{F}}{\partial t} - c_1 \left[\frac{\partial \tilde{F}}{\partial x} \left(\frac{\partial \tilde{p}_1}{\partial x} \right)_{\tilde{r}} + \frac{\partial \tilde{F}}{\partial y} \left(\frac{\partial \tilde{p}_1}{\partial y} \right)_{\tilde{r}} \right] = 0 \tag{1.9}$$

при начальном условии

$$\tilde{F}(x, y, 0) = F_0(x, y) = 0,$$

где $F_0(x, y) = 0$ — начальное положение КН. Подставив же в уравнение (1.9) заданный закон перемещения КН (1.4) и предельные значения частных производных полученной выше функции давления на Γ , мы получим уравнение для „невязки“ ε — известной функции дебитов Q_i .

$$m \frac{\partial F}{\partial t} - c_1 \left[\frac{\partial F}{\partial x} \left(\frac{\partial p_1}{\partial x} \right)_{\Gamma} + \frac{\partial F}{\partial y} \left(\frac{\partial p_1}{\partial y} \right)_{\Gamma} \right] = \varepsilon(x, y, t, Q_i). \tag{1.10}$$

Дебиты скважин Q_i ($i = 1, 2, \dots, v+l$) определяются из условия наименьшего отклонения ε от нуля (см. [10]).

3. Существует иной метод решения данной задачи, основанный на способе определения плотности потенциала простого слоя на контуре Γ , указанном в работе [13]. Этот метод позволяет, вместо решения системы уравнений (1.8), ограничиться рассмотрением только одного интегрального уравнения для плотности p_0 потенциала простого слоя, непрерывно распределенного по контуру Γ_0 , что, конечно, упрощает расчет. Плотность же p выражается непосредственно через разность предельных значений нормальных производных функций давления p на КН Γ

$$p = -\frac{1}{2\pi} \left(\frac{\partial p_1}{\partial n} - \frac{\partial p_2}{\partial n} \right), \tag{1.11}$$

что можно записать, используя (1.5) и (1.6), в виде [13], [9].

$$p = -\frac{m}{2\pi} \left(\frac{1}{c_1} - \frac{1}{c_2} \right) \frac{\partial F}{\partial t} / \frac{\partial F}{\partial n}, \tag{1.12}$$

предполагая при этом, что функция

$$\frac{\partial F}{\partial t} / \frac{\partial F}{\partial n}$$

непрерывна в силу заданного закона стягивания (1.4).

Вместо первого из условий (1.3) будем рассматривать соотношения (1.13), которые в совокупности ему эквивалентны и являются следствиями (1.5) и (1.6):

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial p_1}{\partial n} - \frac{\partial p_2}{\partial n} &= \left(\frac{1}{c_1} - \frac{1}{c_2} \right) m \frac{\partial F}{\partial t} / \frac{\partial F}{\partial n} \\
 \frac{\partial p_1}{\partial n} + \frac{\partial p_2}{\partial n} &= \left(\frac{1}{c_1} + \frac{1}{c_2} \right) m \frac{\partial F}{\partial t} / \frac{\partial F}{\partial n}
 \end{aligned} \tag{1.13}$$

Распределение давления в пласте мы ищем в том же виде (1.7), тем самым выполняя условия (1.1) и (1.2).

Подставив в (1.7) значение плотности из (1.12), мы добиваемся также выполнения первого из соотношений (1.13). Требование выполнения второго из условий (1.3) приводит к линейному интегральному уравнению Фредгольма второго рода относительно плотности p_0 :

$$\begin{aligned}
 & p_0 - \frac{\lambda_0}{\pi} \int_{\Gamma_0} p_0(s_0, t) \frac{\partial}{\partial n_0} \ln \frac{1}{V(x-\xi_0)^2 + (y-\eta_0)^2} ds_0 = \\
 & = \frac{\lambda_0}{2\pi^2 hc_1} \sum_{i=1}^v Q_i \frac{\partial}{\partial n_0} \ln \frac{1}{V(x-x_i)^2 + (y-y_i)^2} + \\
 & + \frac{\lambda_0}{2\pi^2 hc_2} \sum_{i=v+1}^{v+l} Q_i \frac{\partial}{\partial n_0} \ln \frac{1}{V(x-x_i)^2 + (y-y_i)^2} - \\
 & - \frac{\lambda_0}{2\pi^2} \left(\frac{1}{c_1} - \frac{1}{c_2} \right) m \int_{\Gamma} \left(\frac{\partial F}{\partial t} / \frac{\partial F}{\partial n} \right) \frac{\partial}{\partial n_0} \ln \frac{1}{V(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2} ds.
 \end{aligned} \tag{1.14}$$

Существование и единственность его решения можно показать при тех же предположениях относительно гладкости контуров Γ и Γ_0 , которые были введены выше.

Определив из (1.14) плотность ρ_0 , подставляем ее значение в (1.7), заменив в нем ρ его выражением из (1.12). Полученное выражение для функции давления удовлетворяет всем необходимым условиям, кроме второго из условий (1.13). Это условие мы будем выполнять за счет соответствующего выбора дебитов Q_i . Подсчитав предельные значения нормальных производных найденной выше функции давления при подходе к контуру Γ изнутри и извне и подставив их значения во второе из соотношений (1.13), получим выражение для функции „невязки“ ϵ , которое имеет вид:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2\pi hc_1} \sum_{i=1}^{\nu} Q_i \frac{\partial}{\partial n} \ln \frac{1}{V(x-x_i)^2 + (y-y_i)^2} + \\ & + \frac{1}{2\pi hc_3} \sum_{i=\nu+1}^{\nu+l} Q_i \frac{\partial}{\partial n} \ln \frac{1}{V(x-x_i)^2 + (y-y_i)^2} - \\ & - \frac{1}{2\pi} \left(\frac{1}{c_1} - \frac{1}{c_2} \right) m \int_{\Gamma} \left(\frac{\partial F}{\partial t} / \frac{\partial F}{\partial n} \right) \frac{\partial}{\partial n} \ln \frac{1}{V(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2} ds + \\ & + \int_{\Gamma_0} \rho_0(s_0, t) \frac{\partial}{\partial n} \ln \frac{1}{V(x-\xi_0)^2 + (y-\eta_0)^2} ds_0 - \\ & - \left(\frac{1}{c_1} + \frac{1}{c_2} \right) \frac{m}{2} \left(\frac{\partial F}{\partial t} / \frac{\partial F}{\partial n} \right) = \epsilon(x, y, t, Q_i). \end{aligned} \quad (1.15)$$

Как и в п. 2 дебиты скважин Q_i ($i=1, 2, 3, \dots, \nu+l$) определяются из условия минимального отклонения ϵ от нуля.

4. В качестве частной задачи рассмотрим стягивание кругового КН. Пусть (ρ_i, α_i) — полярные координаты скважин, Q_i — их объемные дебиты. Значениям индекса $i=1, 2, 3, \dots, \nu$ соответствуют нефтяные, а значениям $i=\nu+1, \nu+2, \dots, \nu+l$ — водяные скважины. Закон стягивания КН задаем в полярных координатах

$$F(r, \theta, t) = r - R(t) = 0, \quad (1.16)$$

причем

$$F(r, \theta, 0) = r - R_0 = 0.$$

Задачу управления решаем только по характеру эксплуатации.

В соответствии со сказанным в п. 1 данного параграфа распределение давления будем искать в следующем виде:

$$\begin{aligned} p &= \frac{1}{2\pi hc_1} \sum_{i=1}^{\nu} Q_i \ln \frac{1}{Vr^2 - 2r\rho_i \cos(\theta - \alpha_i) + \rho_i^2} + \\ & + \frac{1}{2\pi hc_3} \sum_{i=\nu+1}^{\nu+l} Q_i \ln \frac{1}{Vr^2 - 2r\rho_i \cos(\theta - \alpha_i) + \rho_i^2} + \\ & + \int_0^{2\pi} \rho(\varphi, t) \ln \frac{1}{Vr^2 - 2rR \cos(\theta - \varphi) + R^2} R d\varphi + \\ & + \int_0^{2\pi} \rho_0(\varphi_0, t) \ln \frac{1}{Vr^2 - 2rR_0 \cos(\theta - \varphi_0) + R_0^2} R_0 d\varphi_0. \end{aligned} \quad (1.17)$$

Для нашей частной задачи система уравнений (1.8) примет вид:

$$\begin{aligned} p &= \frac{\lambda}{2\pi} \int_0^{2\pi} \rho(\varphi, t) d\varphi - \frac{\lambda}{\pi} \int_0^{2\pi} \rho_0(\varphi_0, t) \frac{R - R_0 \cos(\theta - \varphi_0)}{R^2 - 2RR_0 \cos(\theta - \varphi_0) + R_0^2} R_0 d\varphi_0 = \\ &= \frac{\lambda}{2\pi^2 hc_1} \sum_{i=1}^{\nu} Q_i \frac{R - \rho_i \cos(\theta - \alpha_i)}{R^2 - 2R\rho_i \cos(\theta - \alpha_i) + \rho_i^2} + \\ &+ \frac{\lambda}{2\pi^2 hc_3} \sum_{i=\nu+1}^{\nu+l} Q_i \frac{R - \rho_i \cos(\theta - \alpha_i)}{R^2 - 2R\rho_i \cos(\theta - \alpha_i) + \rho_i^2}, \\ \rho_0 &= \frac{\lambda_0}{2\pi} \int_0^{2\pi} \rho_0(\varphi_0, t) d\varphi_0 - \frac{\lambda_0}{\pi} \int_0^{2\pi} \rho(\varphi, t) \frac{R_0 - R \cos(\theta - \varphi)}{R_0^2 - 2R_0R \cos(\theta - \varphi) + R^2} R d\varphi = \\ &= \frac{\lambda_0}{2\pi^2 hc_1} \sum_{i=1}^{\nu} Q_i \frac{R_0 - \rho_i \cos(\theta - \alpha_i)}{R_0^2 - 2R_0\rho_i \cos(\theta - \alpha_i) + \rho_i^2} + \\ &+ \frac{\lambda_0}{2\pi^2 hc_3} \sum_{i=\nu+1}^{\nu+l} Q_i \frac{R_0 - \rho_i \cos(\theta - \alpha_i)}{R_0^2 - 2R_0\rho_i \cos(\theta - \alpha_i) + \rho_i^2}. \end{aligned} \quad (1.18)$$

Предполагая, что функции ρ и ρ_0 удовлетворяют условиям Дирихле, будем искать их в виде рядов Фурье. Тогда решением системы (1.18) будут следующие функции:

$$\begin{aligned} \rho(\theta, t) &= \frac{\lambda}{2\pi^2 hc_1 (1-\lambda) R} \sum_{i=1}^{\nu} Q_i + \\ &+ \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{1 + \lambda \left(\frac{R}{R_0} \right)^{2k}} \left[\frac{\lambda}{2\pi^2 hc_1 R} \sum_{i=1}^{\nu} Q_i \left(\frac{\rho_i}{R} \right)^k \cos k(\theta - \alpha_i) - \right. \\ &- \frac{\lambda \lambda_0}{2\pi^2 hc_1 R} \sum_{i=1}^{\nu} Q_i \left(\frac{\rho_i R}{R_0^2} \right)^k \cos k(\theta - \alpha_i) + \\ &+ \left. \frac{\lambda (\lambda_0 - 1)}{2\pi^2 hc_3 R} \sum_{i=\nu+1}^{\nu+l} Q_i \left(\frac{R}{\rho_i} \right)^k \cos(\theta - \alpha_i) \right]; \\ \rho_0(\theta, t) &= \frac{\lambda_0 (1+\lambda)}{2\pi^2 hc_1 R_0 (1-\lambda) (1-\lambda_0)} \sum_{i=1}^{\nu} Q_i + \\ &+ \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{1 + \lambda \left(\frac{R}{R_0} \right)^{2k}} \left[\frac{\lambda_0 (1+\lambda)}{2\pi^2 hc_1 R_0} \sum_{i=1}^{\nu} Q_i \left(\frac{\rho_i}{R_0} \right)^k \cos k(\theta - \alpha_i) - \right. \\ &- \frac{\lambda_0}{2\pi^2 hc_3 R_0} \sum_{i=\nu+1}^{\nu+l} Q_i \left(\frac{R_0}{\rho_i} \right)^k \cos k(\theta - \alpha_i) - \\ &- \left. \frac{\lambda \lambda_0}{2\pi^2 hc_3 R_0} \sum_{i=\nu+1}^{\nu+l} Q_i \left(\frac{R^2}{\rho_i R_0} \right)^k \cos k(\theta - \alpha_i) \right]. \end{aligned} \quad (1.19)$$

Ряды, стоящие в правых частях (1.19), сходятся равномерно, что оправдывает высказанное выше предположение относительно функций ρ и ρ_0 .

Подставляя значения $\rho(\theta, t)$ и $\rho_0(\theta, t)$ из (1.19) в соотношение (1.17), мы получим выражение для функции давления. Уравнение (1.10) для функции „невязки“ ε для данной частной задачи имеет вид:

$$\begin{aligned} \varepsilon = m \frac{dR}{dt} - \frac{1}{2\pi hc_1 R} \sum_{i=1}^{\nu} Q_i + \\ + \frac{1-\lambda}{2\pi hc_1 R} \sum_{i=1}^{\nu} Q_i \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\lambda_0 \left(\frac{R}{R_0}\right)^{2k} - 1}{1 + \lambda_0 \left(\frac{R}{R_0}\right)^{2k}} \left(\frac{\rho_i}{R}\right)^k \cos(\theta - \alpha_i) + \\ + \frac{(1-\lambda)(1-\lambda_0)}{2\pi hc_3 R} \sum_{i=\nu+1}^{\nu+1} Q_i \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{1 + \lambda_0 \left(\frac{R}{R_0}\right)^{2k}} \left(\frac{R}{\rho_i}\right)^k \cos k(\theta - \alpha_i). \end{aligned} \quad (1.20)$$

Пользуясь методом тригонометрической аппроксимации [15], определяем дебиты Q_i так, чтобы ε наименее уклонялась от нуля. При этом получим систему уравнений линейных относительно Q_i :

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{\nu} Q_i = 2\pi h m R \frac{dR}{dt}, \\ \left[\lambda_0 \left(\frac{R}{R_0}\right)^{2k} - 1 \right] \sum_{i=1}^{\nu} Q_i \left(\frac{\rho_i}{R}\right)^k \cos k\alpha_i - \\ - \frac{c_1}{c_3} (\lambda_0 - 1) \sum_{i=\nu+1}^{\nu+1} Q_i \left(\frac{R}{\rho_i}\right)^k \cos k\alpha_i = 0, \\ \left[\lambda_0 \left(\frac{R}{R_0}\right)^{2k} - 1 \right] \sum_{i=1}^{\nu} Q_i \left(\frac{\rho_i}{R}\right)^k \sin k\alpha_i - \\ - \frac{c_1}{c_3} (\lambda_0 - 1) \sum_{i=\nu+1}^{\nu+1} Q_i \left(\frac{R}{\rho_i}\right)^k \sin k\alpha_i = 0. \end{aligned} \quad (1.21)$$

В случае $\lambda_0 = 0$, что соответствует условию полного вытеснения нефти водой, из системы (1.21) получается система уравнений (4.14), (4.15), (4.16) работы [9] для двухжидкостной системы.

В начальный момент при $R = R_0$ мы получаем ту же систему, что и следовало ожидать ввиду отсутствия зоны замещения.

Для решения этой задачи применим второй метод (см. п. 3). Из соотношения (1.12), учитывая (1.16), определим плотность $\rho(\theta, t)$ потенциала простого слоя, непрерывно распределенного по КН Γ :

$$\rho = -\frac{m}{2\pi} \left(\frac{1}{c_1} - \frac{1}{c_2} \right) \frac{dR}{dt}. \quad (1.22)$$

Подставив это значение ρ в (1.14), получим уравнение для определения плотности ρ_0 :

$$\begin{aligned} \rho_0 - \frac{\lambda_0}{2\pi} \int_0^{2\pi} \rho_0(\varphi_0, t) d\varphi_0 = \frac{\lambda_0}{2\pi^2 hc_1} \sum_{i=1}^{\nu} Q_i \frac{R_0 - \rho_i \cos(\theta - \alpha_i)}{R_0^2 - 2R_0 \rho_i \cos(\theta - \alpha_i) + \rho_i^2} + \\ + \frac{\lambda_0}{2\pi^2 hc_3} \sum_{i=\nu+1}^{\nu+1} Q_i \frac{R_0 - \rho_i \cos(\theta - \alpha_i)}{R_0^2 - 2R_0 \rho_i \cos(\theta - \alpha_i) + \rho_i^2} - \frac{m\lambda_0 R}{\pi R_0} \left(\frac{1}{c_1} - \frac{1}{c_2} \right) \frac{dR}{dt}. \end{aligned} \quad (1.23)$$

Решением уравнения (1.23) будет являться функция

$$\begin{aligned} \rho_0(\theta, t) = \frac{\lambda_0}{2\pi^2 hc_1 (1-\lambda)} R_0 \sum_{i=1}^{\nu} Q_i - \frac{\lambda_0 m R}{\pi R_0} \left(\frac{1}{c_1} - \frac{1}{c_2} \right) \frac{dR}{dt} + \\ + \frac{\lambda_0}{2\pi^2 hc_1 R_0} \sum_{i=1}^{\nu} Q_i \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{\rho_i}{R_0}\right)^k \cos k(\theta - \alpha_i) - \\ - \frac{\lambda_0}{2\pi^2 hc_3 R_0} \sum_{i=\nu+1}^{\nu+1} Q_i \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{R_0}{\rho_i}\right)^k \cos k(\theta - \alpha_i). \end{aligned} \quad (1.24)$$

Подставляя значения функции ρ из (1.22) и ρ_0 из (1.24) в (1.7), приведем его к такому виду:

$$\begin{aligned} \varepsilon(r, \theta, t; Q_i) = \frac{1}{\pi hc_1 R} \sum_{i=1}^{\nu} Q_i - \\ - \frac{1}{\pi hc_1 R} \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{i=1}^{\nu} Q_i \left(\frac{\rho_i}{R}\right)^k \cos k(\theta - \alpha_i) + \\ + \frac{1}{\pi hc_3 R} \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{i=\nu+1}^{\nu+1} Q_i \left(\frac{\rho_i}{R}\right)^k \cos k(\theta - \alpha_i) + \\ + m \left(\frac{1}{c_1} - \frac{1}{c_2} \right) \frac{dR}{dt} + \frac{\lambda_0}{\pi hc_3 R} \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{i=1}^{\nu} Q_i \left(\frac{\rho_i}{R}\right)^k \left(\frac{R}{R_0}\right)^{2k} \cos k(\theta - \alpha_i) - \\ - \frac{\lambda_0}{\pi hc_3 R} \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{i=\nu+1}^{\nu+1} Q_i \left(\frac{R}{\rho_i}\right)^k \cos k(\theta - \alpha_i) + m \left(\frac{1}{c_1} + \frac{1}{c_2} \right) \frac{dR}{dt}. \end{aligned} \quad (1.25)$$

Как и выше, пользуясь методом тригонометрической аппроксимации, получим систему уравнений для определения дебитов Q_i , которая совпадает с системой уравнений (1.21).

§ 2. Решение задачи для случая переменной фазовой проницаемости. В отличие от постановки задачи § 1 в данном параграфе принято, что проницаемость c_2 в зоне вытеснения G_2 является функцией координат и времени, которое рассматривается как параметр. Причем $k_2(x, y, t)$ является квадратом гармонической функции. На контуре нефтеносности $(k_2) = k_{(1)}$ — величина постоянная, а $(k_2)_r = k_{(2)}$ — некоторая функция времени. При этих предположениях функ-

ции давления p_1, p_2, p_3 соответственно в областях G_1, G_2 и G_3 удовлетворяют следующим уравнениям:

$$\Delta p_i = 0 \quad (i = 1, 3), \quad (2.1)$$

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(k_2 \frac{\partial p_2}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(k_2 \frac{\partial p_2}{\partial y} \right) = 0. \quad (2.2)$$

Система условий (1.2) (см. § 1) на КН Γ остается прежней. Условия же (1.3) приобретают следующий вид:

$$c_1 \left(\frac{\partial p_1}{\partial n} \right)_{\Gamma} = c_2 \left(\frac{\partial p_2}{\partial n} \right)_{\Gamma}, \quad c_2^0 \left(\frac{\partial p_2}{\partial n_0} \right)_{\Gamma_0} = c_3 \left(\frac{\partial p_3}{\partial n_0} \right)_{\Gamma_0}. \quad (2.3)$$

В работе [16] показано, что функция $p_2 = \frac{u}{V k_2}$; где u — некоторая гармоническая функция, является решением уравнения (2.2). Воспользовавшись этим, введем систему гармонических функций P_i ($i = 1, 2, 3$), которые связаны с функциями давления p_i ($i = 1, 2, 3$) следующим образом:

$$p_1 = \frac{P_1}{(V k_2)_{\Gamma}}, \quad p_2 = \frac{P_2}{V k_2}, \quad p_3 = \frac{P_3}{(V k_2)_{\Gamma_0}}. \quad (2.4)$$

Условия (1.3) и (2.3) для этих функций будут иметь вид:

$$(P_1)_{\Gamma} = (P_2)_{\Gamma}, \quad (P_2)_{\Gamma_0} = (P_3)_{\Gamma_0}. \quad (2.5)$$

$$\left. \begin{aligned} c_1 \left(\frac{\partial P_1}{\partial n} \right)_{\Gamma} &= c_2 \left(\frac{\partial P_2}{\partial n} \right)_{\Gamma} - \frac{1}{2\mu_B} \left(\frac{\partial k_2}{\partial n} \right)_{\Gamma} (P_2)_{\Gamma}, \\ c_3 \left(\frac{\partial P_3}{\partial n_0} \right)_{\Gamma_0} &= c_2^0 \left(\frac{\partial P_2}{\partial n_0} \right)_{\Gamma_0} - \frac{1}{2\mu_B} \left(\frac{\partial k_2}{\partial n} \right)_{\Gamma_0} (P_2)_{\Gamma_0}, \end{aligned} \right\} \quad (2.6)$$

где

$$c_2 = \frac{k_2^{(1)}}{\mu_B}, \quad c_2^0 = \frac{k_2^{(2)}}{\mu_B}.$$

Восстановив по условиям (2.5) и (2.6) функции P_i , мы сможем затем из соотношений (2.4) определить необходимые для решения задачи управления функции давления p_i .

Функцию P будем искать в следующем виде:

$$\begin{aligned} P &= \frac{1}{2\pi h c_1} \sum_{i=1}^{\nu} \tilde{Q}_i \ln \frac{1}{V(x-x_i)^2 + (y-y_i)^2} + \\ &+ \frac{1}{2\pi h c_3} \sum_{i=\nu+1}^{\nu+1} \tilde{Q}_i \ln \frac{1}{V(x-x_i)^2 + (y-y_i)^2} = \\ &= \int_{\Gamma} \rho(s, t) \ln \frac{1}{V(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2} ds + \\ &+ \int_{\Gamma_0} \rho_0(s_0, t) \ln \frac{1}{V(x-\xi_0)^2 + (y-\eta_0)^2} ds_0, \\ \tilde{Q}_i &= (V k_2)_{\Gamma} Q_i \quad (i = 1, 2, \dots, \nu+1). \end{aligned} \quad (2.7)$$

Такой вид функции P обеспечивает выполнение условий (2.5).

Выполняя условия (2.6), мы получим систему двух линейных интегральных уравнений Фредгольма второго рода относительно неизвестных функций ρ и ρ_0 :

$$\begin{aligned} \rho &- \frac{\lambda}{\pi} \int_{\Gamma} \rho(s, t) \left[\frac{\partial}{\partial n} \ln \frac{1}{V(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2} + \right. \\ &+ \left. \frac{d_n}{2(c_1 - c_2)\mu_B} \ln \frac{1}{V(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2} \right] ds - \\ &- \frac{\lambda}{\pi} \int_{\Gamma_0} \rho_0(s_0, t) \left[\frac{\partial}{\partial n} \ln \frac{1}{V(x-\xi_0)^2 + (y-\eta_0)^2} + \right. \\ &+ \left. \frac{d_n}{2(c_1 - c_2)\mu_B} \ln \frac{1}{V(x-\xi_0)^2 + (y-\eta_0)^2} \right] ds_0 = \\ &= \frac{\lambda}{2\pi^2 h c_1} \sum_{i=\nu+1}^{\nu+1} \tilde{Q}_i \left[\frac{\partial}{\partial n} \ln \frac{1}{V(x-x_i)^2 + (y-y_i)^2} + \right. \\ &+ \left. \frac{d_n}{2(c_1 - c_2)\mu_B} \ln \frac{1}{V(x-x_i)^2 + (y-y_i)^2} \right] + \\ &+ \frac{\lambda}{2\pi^2 h c_3} \sum_{i=\nu+1}^{\nu+1} \tilde{Q}_i \left[\frac{\partial}{\partial n} \ln \frac{1}{V(x-x_i)^2 + (y-y_i)^2} + \right. \\ &+ \left. \frac{d_n}{2(c_1 - c_2)\mu_B} \ln \frac{1}{V(x-x_i)^2 + (y-y_i)^2} \right] + \\ &- \rho_0 - \frac{\lambda_0}{\pi} \int_{\Gamma_0} \rho_0(s_0, t) \left[\frac{\partial}{\partial n_0} \ln \frac{1}{V(x-\xi_0)^2 + (y-\eta_0)^2} - \right. \\ &- \left. \frac{d_{n_0}}{2(c_2^0 - c_3)\mu_B} \ln \frac{1}{V(x-\xi_0)^2 + (y-\eta_0)^2} \right] ds_0 - \\ &- \frac{\lambda_0}{\pi} \int_{\Gamma} \rho(s, t) \left[\frac{\partial}{\partial n_0} \ln \frac{1}{V(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2} - \right. \\ &- \left. \frac{d_{n_0}}{2(c_2^0 - c_3)\mu_B} \ln \frac{1}{V(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2} \right] ds = \\ &= \frac{\lambda_0}{2\pi^2 h c_3} \sum_{i=1}^{\nu} \tilde{Q}_i \left[\frac{\partial}{\partial n_0} \ln \frac{1}{V(x-x_i)^2 + (y-y_i)^2} - \right. \\ &- \left. \frac{d_{n_0}}{2(c_2^0 - c_3)\mu_B} \ln \frac{1}{V(x-x_i)^2 + (y-y_i)^2} \right] + \\ &+ \frac{\lambda_0}{2\pi^2 h c_3} \sum_{i=\nu+1}^{\nu+1} \tilde{Q}_i \left[\frac{\partial}{\partial n_0} \ln \frac{1}{V(x-x_i)^2 + (y-y_i)^2} - \right. \\ &- \left. \frac{d_{n_0}}{2(c_2^0 - c_3)\mu_B} \ln \frac{1}{V(x-x_i)^2 + (y-y_i)^2} \right], \end{aligned} \quad (2.8)$$

где

$$\lambda = \frac{c_1 - c_2}{c_1 - c_2}; \quad \lambda_0 = \frac{c_2^0 - c_3}{c_2^0 - c_3}, \quad |\lambda| < 1, \quad |\lambda_0| < 1,$$

$$d_n = \left(\frac{\partial k_2}{\partial n} \right)_{\Gamma}, \quad d_{n_0} = \left(\frac{\partial k_2}{\partial n_0} \right)_{\Gamma_0}.$$

Решения этой системы существуют и единственны при тех же условиях гладкости, налагаемых на контуры Γ и Γ_0 , как и в § 1.

Определив из (2.8) плотности ρ и ρ_0 и следуя той же самой методике, как и в § 1, мы получим систему линейных алгебраических уравнений для определения дебитов Q_i , которые обеспечивают приближенное выполнение на КН Γ уравнения движения (1.9).

2. В качестве частной задачи рассматривалось управление перемещением КН по характеру эксплуатации скважин при круговом законе его стягивания. Проницаемость $k_2(r, t)$ в зоне G_2 определялась как квадрат гармонической функции u , являющейся решением задачи Дирихле для кольцевой области с граничными значениями

$$u|_{r=R} = \sqrt{k_{(1)}'} \text{ и } u|_{r=R_0} = \sqrt{k_{(2)}'}$$

Не приводя промежуточных вычислений, запишем систему уравнений для определения дебитов Q_i , которая получена по методу, изложенному в п. 2 § 1.

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{\nu} Q_i &= 2\pi h m R \frac{dR}{dt}, \\ \left[\left[1 + \frac{\lambda_0 d_n R_0}{2(c_2^0 - c_3) \mu_B k} \right] \left[\lambda + \frac{\lambda d_n R}{(c_1 - c_2) \mu_B k} - 1 \right] + \right. & \\ + \left[\lambda_0 - \frac{\lambda_0 d_n R_0}{2(c_2^0 - c_3) \mu_B k} \right] \left[1 - \lambda + \right. & \\ + \left. \frac{\lambda d_n R}{(c_1 - c_2) \mu_B k} \right] \left(\frac{R}{R_0} \right)^{2k} \left. \right\} \sum_{i=1}^{\nu} Q_i \left(\frac{\rho_i}{R} \right)^k \cos k a_i - & \\ - (1 - \lambda)(\lambda_0 - 1) \frac{c_1}{c_3} \sum_{i=\nu+1}^{\nu+l} Q_i \left(\frac{R}{\rho_i} \right)^k \cos k a_i = 0, & \quad (2.9) \\ \left\{ \left[1 + \frac{\lambda_0 d_n R_0}{2(c_2^0 - c_3) \mu_B k} \right] \left[\lambda + \frac{\lambda d_n R}{(c_1 - c_2) \mu_B k} - 1 \right] + \right. & \\ + \left[\lambda_0 - \frac{\lambda_0 d_n R_0}{2(c_2^0 - c_3) \mu_B k} \right] \left[1 - \lambda + \right. & \\ + \left. \frac{\lambda d_n R}{(c_1 - c_2) \mu_B k} \right] \left(\frac{R}{R_0} \right)^{2k} \left. \right\} \sum_{i=1}^{\nu} Q_i \left(\frac{\rho_i}{R} \right)^k \sin k a_i - & \\ - (1 - \lambda)(\lambda_0 - 1) \frac{c_1}{c_3} \sum_{i=\nu+1}^{\nu+l} Q_i \left(\frac{R}{\rho_i} \right)^k \sin k a_i = 0. & \end{aligned}$$

Из системы уравнений (2.9) в предположении, что k_2 постоянно, как частный случай получается система (1.21) § 1.

§ 3. Численные примеры. Рассмотрим управление перемещением КН между двумя концентрическими батареями скважин, одна из которых эксплуатационная, другая — нагнетательная, при круговом законе его стягивания. Пусть радиус эксплуатационной батареи $\rho_1 = 1200$ м, нагнетательной — $\rho_2 = 2300$ м. Начальное положение КН — окружность радиуса $R_0 = 2000$ м, конечное — окружность радиуса

$R_1 = 1300$ м. Проницаемость в чисто водяной и чисто нефтяной зонах $k = 1$ дарси; $\mu_B = 1$ сантипуаз, $\mu_H = 2,5$ сантипуаза; $m = 0,2$, $\nu = l = 12$. Заданное время разработки $T = 25$ лет.

Желаемый закон стягивания КН принимаем следующий:

$$R^2 = R_0^2 - \frac{t}{T} (R_0^2 - R_1^2). \quad (3.1)$$

Для примера при условиях, принятых в § 1, для фазовой проницаемости k' были взяты три значения: 0,25; 0,50; 0,75.

Для примера к § 2, когда k_2 — проницаемость в зоне замещения G_2 переменна и является квадратом гармонической функции u ; последняя определялась также по трем различным крайним условиям:

$$\left. \begin{aligned} k_{(1)}' &= 0,25; & k_{(2)}' &= 0,25 + 0,55 \frac{t}{T}; \\ k_{(1)}' &= 0,50; & k_{(2)}' &= 0,50 + 0,30 \frac{t}{T}; \\ k_{(1)}' &= 0,75; & k_{(2)}' &= 0,75 + 0,05 \frac{t}{T}; \end{aligned} \right\} \quad (3.2)$$

где

$$k_{(1)}' = (u|_{\Gamma})^2, \quad k_{(2)}' = (u|_{\Gamma_0})^2.$$

Из решения примера было получено:

$$Q_i = Q_1 \quad (i = 1, 2, \dots, \nu) \text{ и } Q_i = Q_2 \quad (i = \nu + 1, \nu + 2, \dots, \nu + l).$$

Так как мы предполагали эффективную пористость m для всех задач одной и той же, то дебит эксплуатационных скважин для всех вариантов получается одинаковым и равным $Q_1 = 80$ м³/сутки. Значения дебитов нагнетательных скважин для различных моментов времени приведены на рис. 2 и в таблице 1.

На рис. 2 приводится зависимость $\lg Q_2(t)$ при $k' = 0,25$ (кривая 3); при переменной фазовой проницаемости, когда она определяется по первой паре значений (3.2) (кривая 2). Для сравнения на этом рисунке приведена зависимость $\lg Q_2(t)$ для двухжидкостной системы (кривая 1). Для двух других значений k' и k_2 зависимость $\lg Q_2(t)$ представлена в таблице 1, там же для сравнения приведены соответствующие величины для двухжидкостной и одножидкостной систем.

Для анализа полученных зависимостей введем следующую систему обозначений: $Q_2^{(1)}(t)$ будем обозначать зависимость дебита скважин нагнетательной батареи от времени, полученную из решения задачи управления для одножидкостной системы, $Q_2^{(2)}(t)$ — для двухжидкостной,

$Q_2^{(3)}(t)$ — для двухжидкостной с учетом постоянной фазовой проницаемости и $Q_2^{(4)}(t)$ — для двухжидкостной с переменной фазовой проницаемостью.

Из графиков (рис. 2) и из таблицы 1 видно, что при соответствующих значениях k' и $k_{(1)}$ имеет место неравенство:

$$Q_2^{(1)}(t) < Q_2^{(3)}(t) \leq Q_2^{(2)}(t) \leq Q_2^{(4)}(t)$$

при любом t из интервала $0 \leq t \leq T$.

При общем для всех просчитанных примеров заданном законе стягивания КН (3.1) скважины эксплуатационных батарей имеют один и тот же дебит. Различие физических параметров сказывается только на дебитах скважин нагнетательной батареи, которые должны обеспечивать на КН распределение нормальных скоростей, возможно

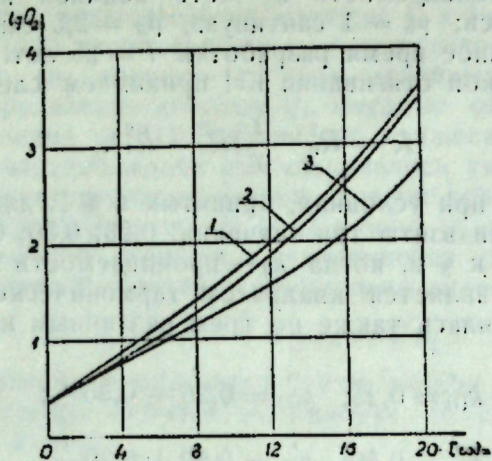


Рис. 2.

более близкое к заданному законом его движения (3.1). Сравнение поля нормальных скоростей на КН в системе одножидкостной и двухжидкостной показывает, что для их близости необходимо выполнение условия:

$$Q_2^{(2)} = \frac{c_2}{c_1} Q_2^{(1)}, \quad (3.3)$$

которое совпадает с зависимостью, найденной в работе [9] при сравнении дебитов $Q_2^{(2)}(t)$ и $Q_2^{(1)}(t)$, полученных из решения соответствующих задач управления. В (3.3)

$$c_1 = \frac{k}{\mu_n} \quad \text{и} \quad c_2 = \frac{k}{\mu_n}$$

— коэффициенты текучести соответственно в водяной и нефтяной зонах.

Условно будем считать, что изменение величин c_1 и c_2 происходит за счет различия коэффициентов проницаемости в зонах нефти и воды, а вязкости воды и нефти одни и те же. Тогда (3.3) можно записать в виде:

$$Q_2^{(2)} = \frac{k_n}{k_n} Q_2^{(1)}$$

Отсюда следует, что для наилучшего обеспечения одного и того же распределения поля нормальных скоростей на КН Г в том случае, когда вне Г находится зона с меньшей проницаемостью, требуются дебиты нагнетательных скважин меньше, чем в случае большей проницаемости в этой зоне.

Перейдем теперь к анализу зависимости $Q_2^{(3)}(t)$ (рис. 2, кривая 3). Она получена из решения задачи управления, которая отличается от задачи для двухжидкостной системы тем, что в области воды имеется зона вытеснения, в которой проницаемость для воды ниже, чем в остальной ее части. Наличие этой зоны должно соответственно уменьшить дебит нагнетательных скважин, по сравнению с дебитом, полученным из решения задачи управления для двухжидкостной системы. По мере продвижения КН к скважинам эксплуатационной батареи происходит увеличение зоны вытеснения, поэтому должно увеличиваться отклонение $Q_2^{(3)}$ от величины $Q_2^{(2)}$, что согласуется с поведением кривых на рис. 2.

Исследуем с этой точки зрения зависимость $Q_2^{(4)}(t)$. Для малых t , когда зона вытеснения мала, проницаемость в ней близка к постоянной и величина $Q_2^{(4)}(t)$ мало отличается от $Q_2^{(3)}(t)$. По мере продвижения КН проницаемость в зоне замещения улучшается, хотя и не достигает величины проницаемости в зонах чисто нефтяной и чисто водяной, поэтому дебит нагнетательных скважин должен приближаться к дебиту $Q_2^{(2)}(t)$. Два этих обстоятельства также находят свое отражение в характере зависимости $Q_2^{(4)}(t)$ (рис. 2, кривая 2).

Таблица 1

t годы	lg Q ₂					двухжидкостная
	одножидкостная	k' = 0,50	k ₍₁₎ ' = 0,50	k' = 0,75	k ₍₁₎ ' = 0,75	
0	-0,0350	0,3647	0,3647	0,3647	0,3647	0,3647
2	0,2307	0,5759	0,5789	0,5936	0,6001	0,6283
4	0,5015	0,8180	0,8425	0,8610	0,8662	0,9001
6	0,7790	1,0763	1,0965	1,1294	1,1326	1,1770
8	1,0652	1,3575	1,3798	1,4104	1,4137	1,5630
10	1,3083	1,6512	1,6743	1,7008	1,7028	1,7563
12	1,6611	1,8341	1,9804	2,0022	2,0087	2,0592
14	1,9733	2,1462	2,2971	2,3136	2,3155	2,3712
16	2,2920	2,4649	2,6208	2,6321	2,6351	2,6899
18	2,7719	2,8449	3,1058	3,1116	3,1245	3,1697
20	3,1951	3,2682	3,5417	3,5475	3,5541	3,5930

Из таблицы видно, что величина $Q_2^{(3)}(t)$ и $Q_2^{(4)}(t)$ для значений k' или $k_{(1)}$ больших 0,5k, где k — коэффициент проницаемости в чисто нефтяной и чисто водяной зонах, мало отличаются от величины $Q_2^{(2)}(t)$ (максимальное отклонение 11%).

Поэтому для этих значений k' или $k_{(1)}$ можно пренебречь влиянием факта неполного вытеснения нефти водой на решение задачи управления и рассматривать систему как двухжидкостную, что упрощает все расчеты.

ЛИТЕРАТУРА

1. Маскет М. Физические основы технологии добычи нефти. Гостоптехиздат, 1953.
2. Котяхов Ф. И. О некоторых особенностях приемистости нагнетательных скважин, расположенных в пределах контура нефтеносности. Академия нефтяной промышленности. Труды, вып. 1, Гостоптехиздат, 1954.
3. Аванесов В. Т. К задаче о вытеснении нефти водой из пористой среды. АЗНИИ по добыче нефти. Труды, вып. 1, Азнефтеиздат, 1954.
4. Щелкачев В. Н., Лапук Б. Б. Подземная гидравлика. Гостоптехиздат, 1949.
5. Глоговский М. М., Розенберг М. Д. Вытеснение газированной нефти красной водой в круговой залежи с учетом остаточной нефти и изменения фазовой проницаемости для воды в зоне вытеснения. ВНИИ. Труды, вып. IV, Гостоптехиздат, 1954.
6. Гейман М. А., Шнейерсон В. Б. и др. Отчет по теме: "Улучшение нефтывмывающей способности морской воды". Лаборатория технологии добычи нефти Института нефти АН СССР, Москва, 1952.
7. Глумов И. А., Ченцова А. К. и др. Отчет по теме № 2 "Освоение нагнетательных скважин" ЦНИЛ объединения "Татнефть", г. Бугульма, 1955.
8. Салехов Г. С. О крайних задачах, допускающих данное решение. Изв. Казанск. филиала АН СССР, серия физ.-мат. и техн. наук, вып. 9, 1956.
9. Данилов В. Л. Управление перемещением контура нефтеносности с учетом различия вязкостей нефти и воды. Изв. Казанск. филиала АН СССР, сер. физ.-мат. и техн. наук, вып. 8, 1955.
10. Салехов Г. С. Постановка и методы решения гидродинамических задач управления движением контура нефтеносности. Изв. Казанск. филиала АН СССР, сер. физ.-мат. и техн. наук, вып. 6, 1955.

11. Данилов В. Л. К задаче определения поля давлений при заданном законе стягивания контура нефтеносности. Изв. Казанск. филиала АН СССР, сер. физ.-мат. и техн. наук, вып. 6, 1955.

12. Насыров Р. М. Замечание к формуле для скорости перемещения поверхностей. Ученые записки Казанского гос. университета. Общеуниверситетский сборник, т. 116, кн. 1, 1956.

13. Тумашев Г. Г. К задаче о стягивании контура нефтеносности. Ученые записки Казанск. гос. университета, т. 113, кн. 10, 1953.

14. Курайт Р. и Гильберт Д. Методы математической физики, т. II, Гостехиздат, 1951.

15. Салехов Г. С. Об одном методе минимальной погрешности. Изв. Казанск. филиала АН СССР, сер. физ.-мат. и техн. наук, в. 8, 1955.

16. Салехов Г. С. К определению функции давления в неоднородных пластах нефтяных месторождений. ДАН СССР, т. 105, № 6, 1955.

Физико-технический институт
Казанского филиала АН СССР

Поступила 22 декабря 1956 г.

Г. С. Салехов

РЕШЕНИЕ НЕКОТОРЫХ ЗАДАЧ УПРАВЛЕНИЯ ДВИЖЕНИЕМ КОНТУРА НЕФТЕНОСНОСТИ ПО ХАРАКТЕРУ РАЗМЕЩЕНИЯ СКВАЖИН

Рассмотрены решения некоторых задач управления движением КН (контур нефтеносности) по характеру размещения скважин [1]. Эта задача решается в условиях водонапорного режима пласта и при соблюдении линейного закона фильтрации для случаев круговых и бесконечных прямолинейных батарей.

§ 1. Введение. В работе [1] нами была дана постановка и метод решения общих гидродинамических задач управления движением КН. В гл. II той же работы были рассмотрены решения конкретных задач управления движением КН главным образом по характеру эксплуатации скважин. В целях дополнения этих исследований, мы здесь рассмотрели решение некоторых задач управления движением КН по характеру размещения скважин для случаев круговых и прямолинейных батарей скважин.

В дальнейшем предполагается, что бесконечный горизонтальный однородный пласт при водонапорном режиме имеет всюду одинаковую мощность h . Скважины считаются линейными стоками или источниками глубиной h . Движение жидкости подчиняется линейному закону фильтрации.

§ 2. Случай круговых эксплуатационных батарей. Предположим, что в полярных координатах закон равномерного стягивания КН (см. [1]) принят в виде

$$r^2 = r_0^2 - \frac{t}{T}(r_0^2 - r_1^2), \quad (2.1)$$

где r_0 и r_1 радиусы концентрически размещенных окружностей Γ_0 (начальное положение КН) и Γ_1 (конечное положение КН), T — время стягивания КН. Полюс взят в центре окружностей Γ_0 и Γ_1 . При указанных предположениях, как известно (см. [1], стр. 26), решение задачи управления движением КН сводится к решению следующей системы уравнений:

$$\left. \begin{aligned} \sum_{i=1}^N q_i &= -1, \\ \sum_{i=1}^N q_i r_i^k \cos k\varphi_i &= 0, \\ \sum_{i=1}^N q_i r_i^k \sin k\varphi_i &= 0, \end{aligned} \right\} \quad (2.2)$$

$(k = 1, 2, 3 \dots)$

где (φ_i, ρ_i) ($i=1, 2, \dots, N$) — полярные координаты N скважин, лежащих внутри круга Γ_1 , q_i ($i=1, 2, \dots, N$) — безразмерные дебиты скважин, которые через объемные их дебиты \tilde{q}_i выражаются соотношением

$$q_i = \frac{T\tilde{q}_i}{\pi(r_0^2 - r_1^2)hm},$$

(m — пористость, h — мощность пласта).

Предположим, что в пласте разбуриваются три concentрически размещенных круговых батареи с радиусами ρ_1 , ρ_2 и ρ_3 . Число скважин в каждой батарее будем считать одинаковым и равным n ($3n=N$). Легко показать, что в силу симметричного закона стягивания КН (2.1), скважины в каждой батарее должны быть расположены на равном расстоянии друг от друга и дебиты скважин в каждой батарее должны быть одинаковыми. Соответственно каждой батарее эти дебиты обозначим через q_1 , q_2 и q_3 .

Тогда система (2.2) примет вид (см. [1], стр. 34)

$$\left. \begin{aligned} q_1 + q_2 + q_3 &= -\frac{1}{n}, \\ q_1 \rho_1^{kn} \cos kn\varphi_1 + q_2 \rho_2^{kn} \cos kn\varphi_2 + q_3 \rho_3^{kn} \cos kn\varphi_3 &= 0, \\ q_1 \rho_1^{kn} \sin kn\varphi_1 + q_2 \rho_2^{kn} \sin kn\varphi_2 + q_3 \rho_3^{kn} \sin kn\varphi_3 &= 0, \end{aligned} \right\} \quad (2.3)$$

($k=1, 2, 3, \dots$)

где φ_1 , φ_2 и φ_3 — углы смещения скважин соответственно в 1-й, 2-й и 3-й батареях.

Пользуясь системой уравнений (2.3), рассмотрим далее некоторые задачи управления КН по характеру размещения скважин.

Задача 1. Заданы n , q_1 , q_2 и q_3 . Требуется определить (φ_i, ρ_i) ($i=1, 2, 3$).

В этом случае, согласно системе (2.3), первое уравнение баланса $q_1 + q_2 + q_3 = -\frac{1}{n}$, которое выражает условие равенства суммарной добычи разработанному эффективному объему продуктивной части пласта, должно выполняться за счет заданных дебитов q_1 , q_2 и q_3 .

Для определения же неизвестных (φ_i, ρ_i) ($i=1, 2, 3$) будем иметь следующую систему из шести уравнений:

$$\left. \begin{aligned} q_1 \rho_1^{kn} \cos kn\varphi_1 + q_2 \rho_2^{kn} \cos kn\varphi_2 + q_3 \rho_3^{kn} \cos kn\varphi_3 &= 0, \\ q_1 \rho_1^{kn} \sin kn\varphi_1 + q_2 \rho_2^{kn} \sin kn\varphi_2 + q_3 \rho_3^{kn} \sin kn\varphi_3 &= 0, \end{aligned} \right\} \quad (2.4)$$

($k=1, 2, 3$).

Вводя новые неизвестные $z_s = \rho_s^n (\cos n\varphi_s + i \sin n\varphi_s)$ ($s=1, 2, 3$), решение системы уравнений (2.4) приводим к следующей системе трех уравнений с тремя неизвестными z_1 , z_2 и z_3 :

$$\left. \begin{aligned} q_1 z_1 + q_2 z_2 + q_3 z_3 &= 0, \\ q_1 z_1^2 + q_2 z_2^2 + q_3 z_3^2 &= 0, \\ q_1 z_1^3 + q_2 z_2^3 + q_3 z_3^3 &= 0. \end{aligned} \right\}$$

Если q_1, q_2 и $q_3 \neq 0$, то легко показать, что эта система имеет единственное решение $z_1 = z_2 = z_3 = 0$; откуда следует, что $\rho_1 = \rho_2 = \rho_3 = 0$.

Таким образом, когда не фиксированы ни один из радиусов ρ_i ($i=1, 2, 3$), вся система скважин в трех круговых батареях вырождается в одну скважину, расположенную в центре окружности Γ_1 и имеющую дебит $n(q_1 + q_2 + q_3) = -1$, что физически вполне очевидно.

Задача 2. Заданы n , q_1 , q_2 , q_3 и ρ_1 . Требуется определить φ_1 , (φ_2, ρ_2) и (φ_3, ρ_3) .

Во-первых, заметим, что не умаляя общности наших рассуждений, один из углов смещения, например φ_1 , заранее можно считать равным нулю.

Тогда, согласно (2.3), для определения четырех неизвестных (φ_2, ρ_2) и (φ_3, ρ_3) можно составить следующую систему уравнений:

$$\left. \begin{aligned} q_1 \rho_1^n + q_2 \rho_2^n \cos n\varphi_2 + q_3 \rho_3^n \cos n\varphi_3 &= 0, \\ q_2 \rho_2^n \sin n\varphi_2 + q_3 \rho_3^n \sin n\varphi_3 &= 0, \\ q_1 \rho_1^{2n} + q_2 \rho_2^{2n} \cos 2n\varphi_2 + q_3 \rho_3^{2n} \cos 2n\varphi_3 &= 0, \\ q_2 \rho_2^{2n} \sin 2n\varphi_2 + q_3 \rho_3^{2n} \sin 2n\varphi_3 &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (2.5)$$

Снова вводя неизвестные $z_s = \rho_s^n (\cos n\varphi_s + i \sin n\varphi_s)$ ($s=2, 3$) для определения двух неизвестных z_s ($s=2, 3$) согласно (2.5), получим следующую систему:

$$\left. \begin{aligned} q_2 z_2 + q_3 z_3 &= -q_1 \rho_1^n, \\ q_2 z_2^2 + q_3 z_3^2 &= -q_1 \rho_1^{2n}. \end{aligned} \right\}$$

Решая ее с учетом условий $q_1 + q_2 + q_3 = -\frac{1}{n}$ и $q_1, q_2, q_3 < 0$, будем иметь

$$\left. \begin{aligned} z_2 &= \rho_1^n \frac{-q_1 q_2 \pm i \sqrt{-\frac{q_1 q_2 q_3}{n}}}{q_2 (q_1 + q_2)}, \\ z_3 &= \rho_1^n \frac{-q_1 q_3 \pm i \sqrt{-\frac{q_1 q_2 q_3}{n}}}{q_3 (q_1 + q_2)}. \end{aligned} \right\}$$

откуда

$$\left. \begin{aligned} \rho_2 &= \rho_1 \sqrt[2n]{\frac{q_1 (q_1 q_2 - \frac{1}{n} q_3)}{q_2 (q_2 + q_3)^2}} \text{ и } \operatorname{tg} n\varphi_2 = \pm \sqrt{-\frac{q_3}{n q_1 q_2}}, \\ \rho_3 &= \rho_1 \sqrt[2n]{\frac{q_1 (q_1 q_3 - \frac{1}{n} q_2)}{q_3 (q_2 + q_3)^2}} \text{ и } \operatorname{tg} n\varphi_3 = \pm \sqrt{-\frac{q_2}{n q_1 q_3}}. \end{aligned} \right\} \quad (2.6)$$

Знаки перед корнями следует выбирать так, чтобы выполнялось условие $q_2 \rho_2^n \sin n\varphi_2 = -q_3 \rho_3^n \sin n\varphi_3$, т. е. $\sin n\varphi_2$ и $\sin n\varphi_3$ должны быть противоположного знака. Как показывают формулы (2.6), задача 2 всегда разрешима.

Рассмотрим два частных примера:

Пример 1. $q_1 = q_2 = q_3 = -\frac{1}{3n}$. Тогда формулы (2.6) и вышеуказанные соображения о выборе углов φ_2 и φ_3 дают:

$$\rho_1 = \rho_2 = \rho_3, \varphi_2 = \frac{2\pi}{3n} \text{ и } \varphi_3 = \frac{4\pi}{3n}.$$

Таким образом, при условии $q_1 = q_2 = q_3$ все три батареи вырождаются в одну батарею с радиусом ρ_1 , и $3n$ скважин в ней должны располагаться на вершинах правильного $3n$ -угольника, что физически является вполне очевидным.

Пример 2. $n=1$ (случай трех скважин), $q_1 = -0,2$, $q_2 = -0,3$, $q_3 = -0,5$ и $\rho_1 = 2$.

Тогда формулы (2.6) дают $\rho_2 = 1,527$, $\rho_3 = 1$, $\varphi_2 = 109,1^\circ$ и $\varphi_3 = 240^\circ$.

Применяя приближенный метод решения общих нелинейных функциональных уравнений к системе (2.5) при сделанных частных предположениях М. А. Мертвецова [2] получила следующие значения: $\rho_2 = 1,5486$, $\rho_3 = 0,9956$, $\varphi_2 = 109,5^\circ$ и $\varphi_3 = 239,9^\circ$.

Задача 3. Заданы n , q_1 , q_2 , q_3 , ρ_1 , ρ_2 и ρ_3 . Требуется определить φ_2 и φ_3 .

Полагая $\varphi_1 = 0$ в системе (2.3), для определения φ_2 и φ_3 получаем следующую систему двух уравнений:

$$\left. \begin{aligned} q_2 \rho_2^n \cos n\varphi_2 + q_3 \rho_3^n \cos n\varphi_3 &= -q_1 \rho_1^n, \\ q_2 \rho_2^n \sin n\varphi_2 + q_3 \rho_3^n \sin n\varphi_3 &= 0, \end{aligned} \right\} \quad (2.7)$$

откуда

$$\left. \begin{aligned} \cos n\varphi_2 &= \frac{q_3^2 \rho_3^{2n} - q_1^2 \rho_1^{2n} - q_2^2 \rho_2^{2n}}{2q_1 q_2 \rho_1^n \rho_2^n}, \\ \cos n\varphi_3 &= \frac{q_2^2 \rho_2^{2n} - q_1^2 \rho_1^{2n} - q_3^2 \rho_3^{2n}}{2q_1 q_3 \rho_1^n \rho_3^n}. \end{aligned} \right\} \quad (2.8)$$

Очевидно, формулы (2.8) имеют смысл лишь при следующих условиях:

$$\left. \begin{aligned} -1 &\leq \frac{q_3^2 \rho_3^{2n} - q_1^2 \rho_1^{2n} - q_2^2 \rho_2^{2n}}{2q_1 q_2 \rho_1^n \rho_2^n} \leq 1, \\ -1 &\leq \frac{q_2^2 \rho_2^{2n} - q_1^2 \rho_1^{2n} - q_3^2 \rho_3^{2n}}{2q_1 q_3 \rho_1^n \rho_3^n} \leq 1. \end{aligned} \right\}$$

Но зная, что $q_1 q_2$ и $q_3 q_1$ положительны, эти условия можно представить в виде

$$\left. \begin{aligned} |q_1 \rho_1^n - q_2 \rho_2^n| &\leq |q_2 \rho_2^n| \leq |q_1 \rho_1^n + q_2 \rho_2^n|, \\ |q_1 \rho_1^n - q_3 \rho_3^n| &\leq |q_3 \rho_3^n| \leq |q_1 \rho_1^n + q_3 \rho_3^n|, \end{aligned} \right\} \quad (2.9)$$

Эти два условия являются условиями разрешимости задачи 3.

Пример. $q_1 = q_2 = q_3$, $\rho_2 = \rho_3$, $\rho_1 = 1000$ м и $\rho_2 = 2000$ м. Считая расстояние между скважинами равным, примерно, 500 м, получим $n = \frac{2\pi \cdot 1000}{2a \cdot 500} \approx 12$, т. е. в батарее с радиусом 1000 м имеется всего

12 скважин и в батарее с радиусом 2000 м — 24 скважины.

Применяя формулы (2.8), получим

$$\begin{aligned} \cos 12\varphi_2 &\approx -0,001, \\ \cos 12\varphi_3 &\approx -0,001 \end{aligned}$$

или, учитывая противоположность знаков $\sin 12\varphi_2$ и $\sin 12\varphi_3$, окончательно будем иметь $\varphi_2 \approx 7,5^\circ$ и $\varphi_3 \approx 22,5^\circ$. Таким образом, в секторе с углом раствора $\frac{360^\circ}{12} = 30^\circ$ скважины должны располагаться симметрично, как это указано на рис. 1.

§ 3. Случай прямолинейных эксплуатационных батарей. При тех же основных предположениях, которые были указаны в § 1, здесь мы рассмотрим решение задачи управления движением КН для случая трех прямолинейных батарей эксплуатационных скважин. Будем считать, что прямолинейные батареи размещены параллельно друг к другу так, как это указано на рис. 2.

Счет будем вести в декартовой системе координат. Расстояния между скважинами в каждой батарее считаются одинаковыми и равными $2a$.

Через b_i ($i=1, 2, 3$) обозначим смещение первой скважины в соответствующей батарее от оси y , а через d_i ($i=1, 2, 3$) — расстояния соответствующей батареи от оси x .

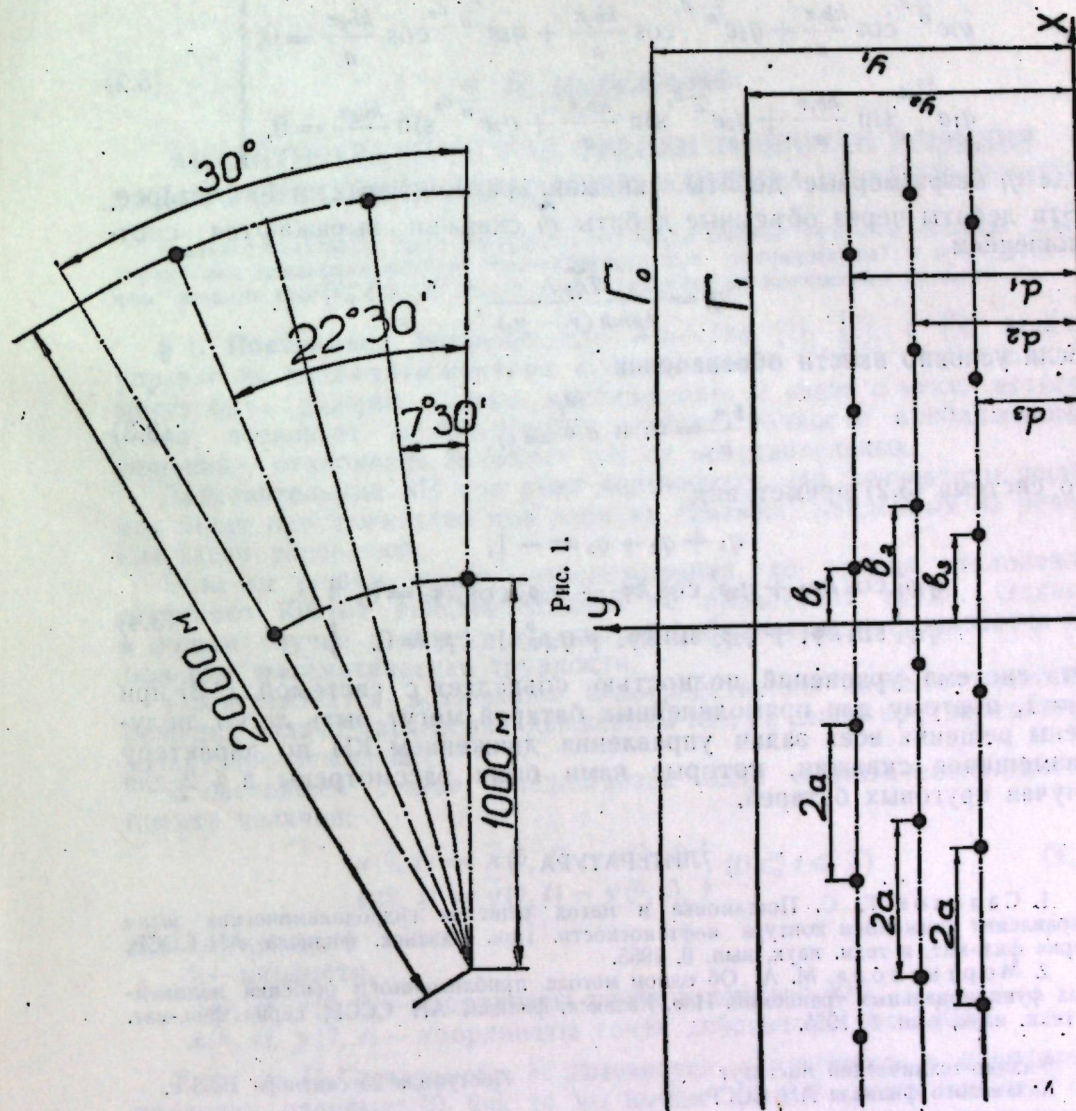


Рис. 1.

Рис. 2.

G_0 и G_1 указывают начальное и конечное положение КН, причем G_0 и G_1 параллельны оси x и отстоят от нее соответственно на расстояниях y_1 и y_2 .

Закон равномерного стягивания КН примем в следующем виде:

$$y = y_1 - \frac{t}{T} (y_1 - y_2), \quad (3.1)$$

где T — время стягивания КН.

При указанных предположениях для решения задачи управления КН, аналогично (2.2), имеет место следующая система уравнений:

$$\left. \begin{aligned} q_1 + q_2 + q_3 &= -1, \\ q_1 e^{\frac{k\pi}{a} d_1} \cos \frac{kb_1\pi}{a} + q_2 e^{\frac{k\pi}{a} d_2} \cos \frac{kb_2\pi}{a} + q_3 e^{\frac{k\pi}{a} d_3} \cos \frac{kb_3\pi}{a} &= 0, \\ q_1 e^{\frac{k\pi}{a} d_1} \sin \frac{kb_1\pi}{a} + q_2 e^{\frac{k\pi}{a} d_2} \sin \frac{kb_2\pi}{a} + q_3 e^{\frac{k\pi}{a} d_3} \sin \frac{kb_3\pi}{a} &= 0, \end{aligned} \right\} \quad (3.2)$$

где q_i безразмерные дебиты скважин, размещенных в i -й батарее. Эти дебиты через объемные дебиты \tilde{q}_i скважин выражаются соотношением

$$q_i = \frac{T \tilde{q}_i}{4amh(y_1 - y_2)},$$

Если условно ввести обозначения

$$\frac{b_i\pi}{a} = \varphi_i \text{ и } e^{\frac{\pi d_i}{a}} = \rho_i, \quad (3.3)$$

то система (3.2) примет вид

$$\left. \begin{aligned} q_1 + q_2 + q_3 &= -1, \\ q_1 \rho_1^k \cos k\varphi_1 + q_2 \rho_2^k \cos k\varphi_2 + q_3 \rho_3^k \cos k\varphi_3 &= 0, \\ q_1 \rho_1^k \sin k\varphi_1 + q_2 \rho_2^k \sin k\varphi_2 + q_3 \rho_3^k \sin k\varphi_3 &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (3.4)$$

Эта система уравнений полностью совпадает с системой (2.3) при $n=1$, поэтому для прямолинейных батарей могут быть легко получены решения всех задач управления движением КН по характеру размещения скважин, которые нами были рассмотрены в § 2 для случая круговых батарей.

ЛИТЕРАТУРА

1. Салехов Г. С. Постановка и метод решения гидродинамических задач управления движением контура нефтеносности. Изв. Казанск. филиала АН СССР, серия физ.-мат. и техн. наук, вып. 6, 1955.
2. Мертвцова М. А. Об одном методе приближенного решения нелинейных функциональных уравнений. Изв. Казанск. филиала АН СССР, серия физ.-мат. и техн. наук, вып. 8, 1955.

Физико-технический институт
Казанского филиала АН СССР

Поступила 25 сентября 1956 г.

* Методом, изложенным в работе [1], эта система была получена Б. А. Сейфуллиной.

Г. П. Цыбульский

АНАЛИТИЧЕСКИЙ МЕТОД ОЦЕНКИ ТОЧНОСТИ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ УПРАВЛЕНИЯ ДВИЖЕНИЕМ КОНТУРА НЕФТЕНОСНОСТИ

В статье излагается один аналитический метод оценки точности решения задач управления движением контура нефтеносности при „непрерывном“ и при „дискретном“ задании его [1], [2], [3]. Метод иллюстрируется на конкретном примере.

§ 1. Постановка вопроса. Как известно [1], [2], и [3], задачи управления движением контура нефтеносности (КН) в общем случае могут быть решены только приближенно. В связи с этим, естественно, возникает необходимость оценки точности приближенных решений — отклонения заданных КН от действительных.

Действительные КН при этом понимаются, как результаты решения задач прослеживания при дебитах скважин, найденных из решения задач управления.

Если мы решим задачу прослеживания, то оценка отклонения заданного КН от действительного не представит труда. Однако в общем случае решение задачи прослеживания наталкивается на большие математические трудности.

Представляется возможным непосредственно оценить точность решения задачи управления движением КН, не решая предварительно задачу прослеживания.

В настоящей статье предлагается один аналитический метод оценки величин:

$$\left. \begin{aligned} u(\theta, t) &= \bar{x}(\theta, t) - x(\theta, t) \\ v(\theta, t) &= \bar{y}(\theta, t) - y(\theta, t) \end{aligned} \right\} \quad (0 \leq t \leq T) \quad (1.1)$$

где t — время,

θ — параметр,

$\bar{x}(\theta, t)$, $\bar{y}(\theta, t)$ — координаты точек заданного КН,

$x(\theta, t)$, $y(\theta, t)$ — координаты точек действительного КН.

Если в (1.1) параметр θ изменяется непрерывно в некоторых пределах, например $[0, 2\pi]$, то мы имеем случай „непрерывного“ задания [1], [2]. Малость величин $u(\theta, t)$ и $v(\theta, t)$ является достаточным условием близости заданного и действительного КН в целом.

Если же в (1.1) параметр θ принимает l отдельных значений θ_k ($k=1, 2, \dots, l$), то мы имеем случай „дискретного“ задания [1], [3]. При этом $u(\theta_k, t) = u_k(t)$ и $v(\theta_k, t) = v_k(t)$ будут определять отклонения движений [4] l точек КН [3].

Предлагаемый метод заключается в следующем.

Рассмотрим две системы обыкновенных нелинейных дифференциальных уравнений первого порядка:

$$\frac{dx}{dt} = f_1(x, y, t), \quad \frac{dy}{dt} = f_2(x, y, t); \quad (1.2)$$

$$\frac{d\bar{x}}{dt} = f_1(\bar{x}, \bar{y}, t) + \varepsilon_1(\theta, t), \quad \frac{d\bar{y}}{dt} = f_2(\bar{x}, \bar{y}, t) + \varepsilon_2(\theta, t) \quad (1.3)$$

с одинаковыми начальными условиями

$$x|_{t=0} = \bar{x}|_{t=0} = x_0(\theta), \quad y|_{t=0} = \bar{y}|_{t=0} = y_0(\theta).$$

Параметр θ может изменяться или непрерывно в промежутке $[0, 2\pi]$, или принимать отдельные значения θ_k ($k = 1, 2, \dots, l$).

Функции f_1 и f_2 вместе со своими частными производными первого порядка по x и y в некоторой области $G(x, y, t)$ должны быть непрерывны, ограничены по модулю и удовлетворять условиям Липшица.

Функции $\varepsilon_1(\theta, t)$ и $\varepsilon_2(\theta, t)$ в той же области должны быть непрерывны и ограничены по модулю.

При выполнении этих условий системы (1.2) и (1.3) имеют в G единственные и непрерывные решения. Пусть решение системы (1.3) известно, а решение системы (1.2) неизвестно. Поставим себе целью, не находя решения системы (1.2), определить разность решений систем (1.2) и (1.3)

$$u(\theta, t) = \bar{x}(\theta, t) - x(\theta, t), \quad v(\theta, t) = \bar{y}(\theta, t) - y(\theta, t).$$

Для этого составим разности соответствующих уравнений этих систем:

$$\left. \begin{aligned} \frac{d(\bar{x} - x)}{dt} &= [f_1(\bar{x}, \bar{y}, t) - f_1(x, y, t)] + \varepsilon_1(\theta, t), \\ \frac{d(\bar{y} - y)}{dt} &= [f_2(\bar{x}, \bar{y}, t) - f_2(x, y, t)] + \varepsilon_2(\theta, t). \end{aligned} \right\} \quad (1.4)$$

Воспользуемся теоремой о конечных приращениях для разностей, стоящих в квадратных скобках, и перепишем систему (1.4) в виде

$$\left. \begin{aligned} \frac{du}{dt} &= g_{11}(u, v, \theta, t)u + g_{12}(u, v, \theta, t)v + \varepsilon_1(\theta, t), \\ \frac{dv}{dt} &= g_{21}(u, v, \theta, t)u + g_{22}(u, v, \theta, t)v + \varepsilon_2(\theta, t), \end{aligned} \right\} \quad (1.4a)$$

где

$$g_{11}(u, v, \theta, t) = \frac{\partial f_1(\bar{x} - \theta_{11}u, \bar{y} - \theta_{12}v; t)}{\partial x},$$

$$g_{12}(u, v, \theta, t) = \frac{\partial f_1(\bar{x} - \theta_{11}u, \bar{y} - \theta_{12}v; t)}{\partial y},$$

$$g_{21}(u, v, \theta, t) = \frac{\partial f_2(\bar{x} - \theta_{21}u, \bar{y} - \theta_{22}v; t)}{\partial x},$$

$$g_{22}(u, v, \theta, t) = \frac{\partial f_2(\bar{x} - \theta_{21}u, \bar{y} - \theta_{22}v; t)}{\partial y},$$

$$0 \leq \{\theta_{is}\} \leq 1, \quad (i, s = 1, 2).$$

Начальные условия для системы (1.4a): $u|_{t=0} = 0, v|_{t=0} = 0$.

В общем случае дать точное решение системы (1.4a) не представляется возможным.

Применим следующий прием нахождения приближенного решения или оценок решений системы (1.4a).

Составим систему линейных дифференциальных уравнений:

$$\left. \begin{aligned} \frac{d\bar{u}}{dt} &= \bar{g}_{11}(\bar{x}, \bar{y}, t)\bar{u} + \bar{g}_{12}(\bar{x}, \bar{y}, t)\bar{v} + \varepsilon_1(\theta, t), \\ \frac{d\bar{v}}{dt} &= \bar{g}_{21}(\bar{x}, \bar{y}, t)\bar{u} + \bar{g}_{22}(\bar{x}, \bar{y}, t)\bar{v} + \varepsilon_2(\theta, t) \end{aligned} \right\} \quad (1.5)$$

с начальными условиями $\bar{u}|_{t=0} = 0; \bar{v}|_{t=0} = 0$.

Переменные коэффициенты в этой системе не зависят от \bar{u} и \bar{v} . Можно выбрать коэффициенты \bar{g}_{ij} в системе (1.5) так, что ее решения $\bar{u}(\theta, t)$ и $\bar{v}(\theta, t)$ будут решениями „сверху“ (решениями „снизу“), либо оценками по модулю для решений системы (1.4a). Правила для выбора коэффициентов вытекают из схемы решения системы (1.4a) методом последовательных приближений.

§ 2. О решении системы дифференциальных уравнений заданного вида методом последовательных приближений. Рассмотрим решение системы (1.4a) методом последовательных приближений по схеме

$$\left. \begin{aligned} u_n &= \int_0^t g_{11}(u_{n-1}, v_{n-1}, \theta, \tau) u_{n-1} d\tau + \int_0^t g_{12}(u_{n-1}, v_{n-1}, \theta, \tau) v_{n-1} d\tau + \\ &\quad + \int_0^t \varepsilon_1(\theta, \tau) d\tau, \\ v_n &= \int_0^t g_{21}(u_{n-1}, v_{n-1}, \theta, \tau) u_{n-1} d\tau + \int_0^t g_{22}(u_{n-1}, v_{n-1}, \theta, \tau) v_{n-1} d\tau + \\ &\quad + \int_0^t \varepsilon_2(\theta, \tau) d\tau. \end{aligned} \right\} \quad (2.1)$$

За нулевые приближения выбраны

$$u_0 = 0, v_0 = 0.$$

При ограничениях, наложенных на функции f_1, f_2, ε_1 и ε_2 в § 1, правые части уравнений системы (1.4a) будут в некоторой области $G^*(u, v, t)$ функциями непрерывными, ограниченными по модулю, удовлетворяющими условию Липшица. Известно, что при этом последовательные приближения (2.1) сходятся равномерно к предельным функциям u и v , которые будут единственными решениями системы (1.4a).

Рассмотрим далее две системы дифференциальных уравнений:

$$\left. \begin{aligned} \frac{d\bar{u}}{dt} &= \bar{g}_{11}(\theta, t)\bar{u} + \bar{g}_{12}(\theta, t)\bar{v} + \varepsilon_1(\theta, t), \\ \frac{d\bar{v}}{dt} &= \bar{g}_{21}(\theta, t)\bar{u} + \bar{g}_{22}(\theta, t)\bar{v} + \varepsilon_2(\theta, t), \end{aligned} \right\} \quad (1.5_1)$$

$$\left. \begin{aligned} \frac{du}{dt} &= \underline{g}_{11}(\theta, t) \underline{u} + \underline{g}_{12}(\theta, t) \underline{v} + \varepsilon_1(\theta, t), \\ \frac{dv}{dt} &= \underline{g}_{21}(\theta, t) \underline{u} + \underline{g}_{22}(\theta, t) \underline{v} + \varepsilon_2(\theta, t), \end{aligned} \right\} \quad (1.5_2)$$

с начальными условиями

$$\underline{u}|_{t=0} = \underline{u}|_{t=0} = 0, \quad \underline{v}|_{t=0} = \underline{v}|_{t=0} = 0.$$

Будем считать, что правые части уравнений в системах (1.5₁) и (1.5₂) удовлетворяют в области G^* тем же условиям, что и правые части уравнений системы (1.4а). В этой области существуют единственные решения систем (1.5₁) и (1.5₂), соответственно $\underline{u}, \underline{v}$ и \bar{u}, \bar{v} , которые можно получить методом последовательных приближений по той же схеме ($\underline{u}_0 = \bar{u}_0 = 0; \underline{v}_0 = \bar{v}_0 = 0$).

Исследуем влияние коэффициентов $g_{ij}(i, j=1, 2)$ на величины решений u, v в различных случаях.

1-й случай:

$$g_{ij}(u, v, \theta, t) \geq 0; \int_0^t \varepsilon_i(\theta, \tau) d\tau \geq 0; (i, j=1, 2) \quad (2.2)$$

При этом последовательные приближения u_n и v_n (2.1) ($n=0, 1, \dots$) будут неотрицательными, а следовательно, неотрицательными будут и решения u и v . Выберем функции $\bar{g}_{ij}(\theta, t)$ ($i, j=1, 2$) такими, чтобы при любых u и v в области G^* выполнялись неравенства

$$g_{ij}(u, v, \theta, t) \leq \bar{g}_{ij}(\theta, t) (i, j=1, 2).$$

Тогда последовательные приближения \bar{u}_n и \bar{v}_n системы (1.5₁) будут не меньше соответствующих приближений u_n и v_n системы (1.4а). Действительно,

$$\begin{aligned} 1) \quad & \bar{u}_0 - u_0 = 0, \quad \bar{v}_0 - v_0 = 0; \\ 2) \quad & \bar{u}_1 - u_1 = 0, \quad \bar{v}_1 - v_1 = 0; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 3) \quad \bar{u}_2 - u_2 &= \int_0^t [\bar{g}_{11}(\theta, \tau) - g_{11}(u_1, v_1, \theta, \tau)] u_1 d\tau + \\ &+ \int_0^t [\bar{g}_{12}(\theta, \tau) - g_{12}(u_1, v_1, \theta, \tau)] v_1 d\tau \geq 0, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \bar{v}_2 - v_2 &= \int_0^t [\bar{g}_{21}(\theta, \tau) - g_{21}(u_1, v_1, \theta, \tau)] u_1 d\tau + \\ &+ \int_0^t [\bar{g}_{22}(\theta, \tau) - g_{22}(u_1, v_1, \theta, \tau)] v_1 d\tau \geq 0. \end{aligned}$$

Покажем, что при

$$\begin{aligned} \bar{u}_{n-1} \geq u_{n-1} \quad (\bar{u}_{n-1} = u_{n-1} + \alpha_{n-1}; \alpha_{n-1} \geq 0), \\ \bar{v}_{n-1} \geq v_{n-1} \quad (\bar{v}_{n-1} = v_{n-1} + \beta_{n-1}; \beta_{n-1} \geq 0), \end{aligned}$$

имеют место соотношения

$$\bar{u}_n \geq u_n, \quad \bar{v}_n \geq v_n. \quad (2.3)$$

В самом деле

$$\begin{aligned} \bar{u}_n - u_n &= \int_0^t [\bar{g}_{11}(\theta, \tau) - g_{11}(u_{n-1}, v_{n-1}, \theta, \tau)] u_{n-1} d\tau + \\ &+ \int_0^t \bar{g}_{11}(\theta, \tau) \alpha_{n-1} d\tau + \int_0^t [\bar{g}_{12}(\theta, \tau) - g_{12}(u_{n-1}, v_{n-1}, \theta, \tau)] v_{n-1} d\tau + \\ &+ \int_0^t \bar{g}_{12}(\theta, \tau) \beta_{n-1} d\tau \geq 0, \\ \bar{v}_n - v_n &= \int_0^t [\bar{g}_{21}(\theta, \tau) - g_{21}(u_{n-1}, v_{n-1}, \theta, \tau)] u_{n-1} d\tau + \\ &+ \int_0^t \bar{g}_{21}(\theta, \tau) \alpha_{n-1} d\tau + \int_0^t [\bar{g}_{22}(\theta, \tau) - g_{22}(u_{n-1}, v_{n-1}, \theta, \tau)] v_{n-1} d\tau + \\ &+ \int_0^t \bar{g}_{22}(\theta, \tau) \beta_{n-1} d\tau \geq 0. \end{aligned}$$

В силу этого неравенства (2.3) справедливы для любого n , так как для $n=0, 1, 2$ это показано непосредственно.

Поскольку последовательности u_n, v_n и \bar{u}_n, \bar{v}_n равномерно сходятся к предельным функциям u, v и \bar{u}, \bar{v} , то, очевидно, и для последних имеют место соответствующие неравенства

$$\bar{u} \geq u, \quad \bar{v} \geq v.$$

Аналогично этому, если выбрать функции $\underline{g}_{ij}(\theta, t)$ ($i, j=1, 2$) такими, чтобы при любых u и v в области G^* выполнялись неравенства

$$g_{ij}(u, v, \theta, t) \geq \underline{g}_{ij}(\theta, t),$$

то

$$\underline{u} \leq u, \quad \underline{v} \leq v.$$

2-й случай:

$$g_{ij}(u, v, \theta, t) \geq 0, \quad \int_0^t \varepsilon_i(\theta, \tau) d\tau \leq 0, (i, j=1, 2). \quad (2.4)$$

Все последовательные приближения u_n и v_n неположительны. Такими же будут и решения u и v .

Выберем функции $\bar{g}_{ij}(\theta, t)$ и $\underline{g}_{ij}(\theta, t)$ ($i, j=1, 2$) так, чтобы в области G^* выполнялись неравенства

$$\bar{g}_{ij}(\theta, t) \geq g_{ij}(u, v, \theta, t) \geq \underline{g}_{ij}(\theta, t).$$

Рассуждая аналогично 1-му случаю, получим

$$\bar{u} \leq u \leq \underline{u}, \quad \bar{v} \leq v \leq \underline{v}.$$

3-й случай:

$$g_{ij}(u, v, \theta, t) \begin{cases} \geq 0, & \text{если } i=j, \\ \leq 0, & \text{" } i \neq j. \end{cases} \quad (2.5)$$

(i, j = 1, 2).

$$\int_0^t \varepsilon_1(\theta, \tau) d\tau \geq 0; \quad \int_0^t \varepsilon_2(\theta, \tau) d\tau \leq 0.$$

Все приближения u_n ($n=0, 1, \dots$) и предельная функция u неотрицательны; наоборот, v_n ($n=0, 1, \dots$) и v неположительны.

Выберем функции $\bar{g}_{ij}(\theta, t)$ и $\underline{g}_{ij}(\theta, t)$ ($i, j=1, 2$) такими, чтобы в области G^* соблюдались неравенства

$$\begin{aligned} \bar{g}_{ii}(\theta, t) &\geq g_{ii}(u, v, \theta, t) \geq \underline{g}_{ii}(\theta, t), \\ \bar{g}_{ij}(\theta, t) &\leq g_{ij}(u, v, \theta, t) \leq \underline{g}_{ij}(\theta, t), \\ &(i \neq j; i, j=1, 2). \end{aligned}$$

Снова, действуя так же, как и в случае 1, получим

$$\bar{u} \geq u \geq \underline{u}, \quad \bar{v} \leq v \leq \underline{v}.$$

4-й случай:

$$g_{ij}(u, v, \theta, t) \begin{cases} \geq 0, & \text{если } i=j, \\ \leq 0, & \text{" } i \neq j. \end{cases} \quad (2.6)$$

(i, j = 1, 2).

$$\int_0^t \varepsilon_1(\theta, \tau) d\tau \leq 0, \quad \int_0^t \varepsilon_2(\theta, \tau) d\tau \geq 0.$$

Все приближения u_n ($n=0, 1, 2, \dots$) и предельная функция u неположительны; v_n ($n=0, 1, 2, \dots$) и v , наоборот, неотрицательны.

Выберем функции $\bar{g}_{ij}(\theta, t)$ и $\underline{g}_{ij}(\theta, t)$ ($i, j=1, 2$) такими, чтобы в области G^*

$$\begin{aligned} \bar{g}_{ii}(\theta, t) &\geq g_{ii}(u, v, \theta, t) \geq \underline{g}_{ii}(\theta, t), \\ \bar{g}_{ij}(\theta, t) &\leq g_{ij}(u, v, \theta, t) \leq \underline{g}_{ij}(\theta, t), \\ &(i \neq j; i, j=1, 2). \end{aligned}$$

Аналогично случаю 1 получим

$$\bar{u} \leq u \leq \underline{u}, \quad \bar{v} \geq v \geq \underline{v}.$$

Общий случай: Знаки у функций

$$g_{ij}(u, v, \theta, t) \text{ и } \int_0^t \varepsilon_i(\theta, \tau) d\tau \quad (i, j=1, 2)$$

произвольны.

При этом знаки приближений u_n и v_n ($n=0, 1, \dots$) и предельных функций u и v могут быть любыми.

Выберем функции $\bar{g}_{ij}(\theta, t)$ ($i, j=1, 2$) положительными и такими, чтобы в области G^* соблюдались неравенства

$$|g_{ij}(u, v, \theta, t)| \leq \bar{g}_{ij}(\theta, t).$$

Функции $\varepsilon_1(\theta, t)$ и $\varepsilon_2(\theta, t)$ заменим их модулями.

Тогда, очевидно,

$$|u| \leq \bar{u}, \quad |v| \leq \bar{v}.$$

§ 3. Способы построения оценки решений рассматриваемой системы уравнений. На основании результатов § 2 можно указать несколько способов построения приближенных решений или оценок решения системы (1.4а).

1-й способ. Заменяем систему (1.4а) системой линейных дифференциальных уравнений:

$$\left. \begin{aligned} \frac{d\bar{u}}{dt} &= M(\theta)\bar{u} + M(\theta)\bar{v} + N(\theta) \\ \frac{d\bar{v}}{dt} &= M(\theta)\bar{u} + M(\theta)\bar{v} + N(\theta) \end{aligned} \right\} \quad (3.1)$$

с начальными условиями

$$\bar{u}|_{t=0} = \bar{v}|_{t=0} = 0 \quad (3.2)$$

Здесь

$$\begin{aligned} M(\theta) &\geq |g_{ij}(u, v, \theta, t)|, \\ N(\theta) &\geq |\varepsilon_i(\theta, t)|, \quad (i, j=1, 2). \end{aligned}$$

На основании § 2 (общий случай) решения этой системы

$$\bar{u} = \bar{v} = \frac{N(\theta)}{2M(\theta)} [e^{2M(\theta)t} - 1] \quad (3.3)$$

являются оценками сверху для модулей решений системы (1.4а). Оценка вида (3.3) является известной — [5].

2-й способ. Заменяем систему (1.4а) системой линейных дифференциальных уравнений

$$\left. \begin{aligned} \frac{d\bar{u}}{dt} &= M_{11}(\theta)\bar{u} + M_{12}(\theta)\bar{v} + N_1(\theta) \\ \frac{d\bar{v}}{dt} &= M_{21}(\theta)\bar{u} + M_{22}(\theta)\bar{v} + N_2(\theta) \end{aligned} \right\} \quad (3.4)$$

с начальными условиями (3.2).

Здесь

$$\begin{aligned} M_{ij}(\theta) &\geq |g_{ij}(u, v, \theta, t)|, \\ M_i(\theta) &\geq |\varepsilon_i(\theta, t)|, \quad (i, j=1, 2). \end{aligned}$$

Как и при 1-м способе, решения этой системы будут оценками сверху для модулей решений системы (1.4а).

Поскольку во 2-м способе коэффициенты $M_{ij}(\theta)$ ($i, j=1, 2$) выбираются индивидуально, оценки при этом получаются более точными.

3-й способ. Заменяем систему (1.4а) системой линейных дифференциальных уравнений, в которой коэффициенты и свободные члены неотрицательны,

$$\left. \begin{aligned} \frac{d\bar{u}}{dt} &= \bar{g}_{11}(\theta, t)\bar{u} + \bar{g}_{12}(\theta, t)\bar{v} + |\varepsilon_1(\theta, t)| \\ \frac{d\bar{v}}{dt} &= \bar{g}_{21}(\theta, t)\bar{u} + \bar{g}_{22}(\theta, t)\bar{v} + |\varepsilon_2(\theta, t)| \end{aligned} \right\} \quad (3.5)$$

с начальными условиями (3.2).

Решения ее будут также оценками сверху для модулей решений системы (1.4а), но более точными, чем предыдущие.

Указанные 3 способа применимы при любых знаках функций

$$g_{ij}(u, v, \theta, t) \text{ и } \varepsilon_i(\theta, t) \quad (i, j=1, 2),$$

и все они дают оценки сверху для модулей решений системы (1.4а).

4-й способ дает возможность получить для системы (1.4а) решения сверху и снизу, если функции

$$g_{ij}(u, v, \theta, t) \text{ и } \varepsilon_i(\theta, t) \quad (i, j=1, 2)$$

удовлетворяют условиям (2.2), (2.4), (2.5) и (2.6).

Правила для выбора коэффициентов

$$\bar{g}_{ij}(\theta, t) \text{ и } \underline{g}_{ij}(\theta, t) \quad (i, j=1, 2)$$

описаны в § 2, где рассматривалось влияние коэффициентов

$$g_{ij}(u, v, \theta, t) \quad (i, j=1, 2)$$

на величины решений системы (1.4а).

При практическом построении оценок и приближенных решений по 3-му и 4-му способам, коэффициенты

$$\bar{g}_{ij}(\theta, t) \text{ и } \underline{g}_{ij}(\theta, t) \quad (i, j=1, 2)$$

следует выбирать так, чтобы системы (1.5₁) и (1.5₂) решались в квадратурах.

На основании изложенного рекомендуется следующий порядок построения оценок или приближенных решений.

1) Задается отрезок времени (0, T), в течение которого исследуется движение.

2) Определяются знаки интегралов

$$\int_0^T \varepsilon_1(\theta, \tau) d\tau, \int_0^T \varepsilon_2(\theta, \tau) d\tau.$$

3) Выбираются предположительные границы изменений u и v .

4) Определяются знаки функций

$$g_{ij}(u, v, \theta, t) \quad (i, j=1, 2)$$

при изменении u , v и t согласно пп. 1, 3.

5) Соответственно результатам пп. 2 и 4 выбирается способ вычисления оценок или приближенных решений и составляются соответствующие уравнения.

6) Решаются составленные уравнения.

7) Если полученные величины u и v не выходят за пределы границ, выбранных в п. 3, то на этом вычисления можно закончить.

8) Если полученные оценки или решения выйдут за принятые в п. 3 границы, то последние следует расширить и повторить все вычисления.

9) Более точные оценки и решения можно получить, если величины u и v , полученные в п. 7, принять за новые границы в п. 3 и повторить вычисления.

§ 4. Пример. Рассмотрим случай концентричного стягивания кругового КН двумя концентрическими батареями по 4 скважины, расположенных шахматно.

Скважины имеют следующие координаты:

№ скв.	x	y	№ скв.	x	y
1	ρ_1	0	5	$\rho_2 \frac{\sqrt{2}}{2}$	$\rho_2 \frac{\sqrt{2}}{2}$
2	0	ρ_1	6	$-\rho_2 \frac{\sqrt{2}}{2}$	$\rho_2 \frac{\sqrt{2}}{2}$
3	$-\rho_1$	0	7	$-\rho_2 \frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\rho_2 \frac{\sqrt{2}}{2}$
4	0	$-\rho_1$	8	$\rho_2 \frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\rho_2 \frac{\sqrt{2}}{2}$

Для простоты будем считать пласт бесконечным горизонтальным однородным изотропным постоянной мощности, скважины — линейными источниками — стоками с равномерно распределенной интенсивностью, систему — одножидкостной, фильтрацию — ламинарной, режим пласта — водонапорным.

Выражения функции давления и уравнений движения для этого случая приведены в [2].

Примем следующие размеры:

радиус начального КН Γ_0	$r_0 = 600 \text{ м,}$
радиус конечного КН Γ_1	$r_1 = 450 \text{ м,}$
радиус 1-й батареи скважин	$\rho_1 = 400 \text{ м,}$
радиус 2-й батареи скважин	$\rho_2 = 300 \text{ м,}$
произведение мощности на пористость	$h m = 1 \text{ м.}$

Зададим закон стягивания КН в виде

$$\left. \begin{aligned} x = \bar{x}(\theta, t) &= r \cos \theta \\ y = \bar{y}(\theta, t) &= r \sin \theta \end{aligned} \right\} \quad (0 \leq \theta < 2\pi), \quad (4.1)$$

где

$$r = \sqrt{r_0^2 - \frac{t}{T}(r_0^2 - r_1^2)},$$

T — время стягивания.

Ввиду симметрии заданного закона стягивания КН и принятого расположения скважин дебиты их в каждой батарее будут одинаковыми и равными Q_1 (1-я батарея) и Q_2 (2-я батарея).

Задача управления для рассматриваемого случая решена в [6], откуда мы и возьмем выражение для дебитов скважин:

$$\bar{Q}_1 = -\frac{\rho_2^4}{4(\rho_1^4 + \rho_2^4)}, \quad \bar{Q}_2 = -\frac{\rho_1^4}{4(\rho_1^4 + \rho_2^4)}, \quad (1)$$

где

$$\bar{Q}_i = \frac{Q_i T}{\pi h m (r_0^2 - r_1^2)} \quad (i=1, 2).$$

Соответствующие уравнения для нашего примера будут иметь вид [2]:

1. Уравнения действительного движения КН

$$\left. \begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= \frac{1}{2\pi} \left[Q_1 \sum_{i=1}^4 \frac{x-x_i}{(x-x_i)^2 + (y-y_i)^2} + Q_2 \sum_{i=5}^8 \frac{x-x_i}{(x-x_i)^2 + (y-y_i)^2} \right], \\ \frac{dy}{dt} &= \frac{1}{2\pi} \left[Q_1 \sum_{i=1}^4 \frac{y-y_i}{(x-x_i)^2 + (y-y_i)^2} + Q_2 \sum_{i=5}^8 \frac{y-y_i}{(x-x_i)^2 + (y-y_i)^2} \right]; \end{aligned} \right\} (4.2)$$

начальные условия

$$\left. \begin{aligned} x|_{t=0} &= r_0 \cos \theta \\ y|_{t=0} &= r_0 \sin \theta \end{aligned} \right\} (0 \leq \theta < 2\pi).$$

2. Подставляя в (4.2) вместо x и y их значения из заданного закона стягивания КН (4.1), имеем

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_1(\theta, t) &= \frac{1}{2} \frac{r_1^2 - r_0^2}{r} \frac{\cos \theta}{T} - \frac{Q_1}{2\pi} \sum_{i=1}^4 \frac{r \cos \theta - x_i}{(r \cos \theta - x_i)^2 + (r \sin \theta - y_i)^2} - \\ &\quad - \frac{Q_2}{2\pi} \sum_{i=5}^8 \frac{r \cos \theta - x_i}{(r \cos \theta - x_i)^2 + (r \sin \theta - y_i)^2}, \\ \varepsilon_2(\theta, t) &= \frac{1}{2} \frac{r_1^2 - r_0^2}{r} \frac{\sin \theta}{T} - \frac{Q_1}{2\pi} \sum_{i=1}^4 \frac{r \sin \theta - y_i}{(r \cos \theta - x_i)^2 + (r \sin \theta - y_i)^2} - \\ &\quad - \frac{Q_2}{2\pi} \sum_{i=5}^8 \frac{r \sin \theta - y_i}{(r \cos \theta - x_i)^2 + (r \sin \theta - y_i)^2}. \end{aligned} \right\} (4.3)$$

Правые части уравнений в системе (4.2) и $\varepsilon_1(\theta, t)$, $\varepsilon_2(\theta, t)$ в любой конечной части плоскости за вычетом достаточно малых окрестностей точек (x_i, y_i) ($i=1, 2, \dots, 8$) удовлетворяют условиям, наложенным на функции $f_1, f_2, \varepsilon_1, \varepsilon_2$ в системах (1.2), (1.3). Поэтому для нашего примера можно применить выводы §§ 2, 3.

3) Уравнения для определения u и v (см. (1.4a))

$$\begin{aligned} \frac{du}{dt} &= \frac{1}{2\pi} \left\{ Q_1 \sum_{i=1}^4 \frac{(r \sin \theta - \partial_{i2}v - y_i)^2 - (r \cos \theta - \partial_{i1}u - x_i)^2}{[(r \cos \theta - \partial_{i1}u - x_i)^2 + (r \sin \theta - \partial_{i2}v - y_i)^2]^2} + \right. \\ &\quad + Q_2 \sum_{i=5}^8 \frac{(r \sin \theta - \partial_{i2}v - y_i)^2 - (r \cos \theta - \partial_{i1}u - x_i)^2}{[(r \cos \theta - \partial_{i1}u - x_i)^2 + (r \sin \theta - \partial_{i2}v - y_i)^2]^2} \left. \right\} u - \\ &\quad - \frac{1}{2\pi} \left\{ Q_1 \sum_{i=1}^4 \frac{2(r \cos \theta - \partial_{i1}u - x_i)(r \sin \theta - \partial_{i2}v - y_i)}{[(r \cos \theta - \partial_{i1}u - x_i)^2 + (r \sin \theta - \partial_{i2}v - y_i)^2]^2} + \right. \\ &\quad \left. + Q_2 \sum_{i=5}^8 \frac{2(r \cos \theta - \partial_{i1}u - x_i)(r \sin \theta - \partial_{i2}v - y_i)}{[(r \cos \theta - \partial_{i1}u - x_i)^2 + (r \sin \theta - \partial_{i2}v - y_i)^2]^2} \right\} v + \varepsilon_1(\theta, t), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{dv}{dt} &= \frac{-1}{2\pi} \left\{ Q_1 \sum_{i=1}^4 \frac{2(r \cos \theta - \partial_{i3}u - x_i)(r \sin \theta - \partial_{i4}v - y_i)}{[(r \cos \theta - \partial_{i3}u - x_i)^2 + (r \sin \theta - \partial_{i4}v - y_i)^2]^2} + \right. \\ &\quad + Q_2 \sum_{i=5}^8 \frac{2(r \cos \theta - \partial_{i3}u - x_i)(r \sin \theta - \partial_{i4}v - y_i)}{[(r \cos \theta - \partial_{i3}u - x_i)^2 + (r \sin \theta - \partial_{i4}v - y_i)^2]^2} \left. \right\} u + \\ &\quad + \frac{1}{2\pi} \left\{ Q_1 \sum_{i=1}^4 \frac{(r \cos \theta - \partial_{i3}u - x_i)^2 - (r \sin \theta - \partial_{i4}v - y_i)^2}{[(r \cos \theta - \partial_{i3}u - x_i)^2 + (r \sin \theta - \partial_{i4}v - y_i)^2]^2} + \right. \\ &\quad \left. + Q_2 \sum_{i=5}^8 \frac{[(r \cos \theta - \partial_{i3}u - x_i)^2 - (r \sin \theta - \partial_{i4}v - y_i)^2]}{[(r \cos \theta - \partial_{i3}u - x_i)^2 + (r \sin \theta - \partial_{i4}v - y_i)^2]^2} \right\} v + \varepsilon_2(\theta, t), \end{aligned}$$

где

$$0 \leq \partial_{is} \leq 1 \quad (i=1, 2, \dots, 8; s=1, 2, 3, 4).$$

Проведем численные расчеты для $\theta=0$, что соответствует направлению прорыва воды. Тогда последние уравнения принимают вид:

$$\begin{aligned} \frac{du}{dt} &= \frac{1}{2\pi} \left(Q_1 \left\{ \frac{-1}{(r - \partial_{11}u - \rho_1)^2} + \frac{\rho_1^2 - (r - \partial_{21}u)^2}{[\rho_1^2 + (r - \partial_{21}u)^2]^2} + \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \frac{-1}{(r - \partial_{31}u + \rho_1)^2} + \frac{\rho_1^2 - (r - \partial_{41}u)^2}{[\rho_1^2 + (r - \partial_{41}u)^2]^2} \right\} + \right. \\ &\quad + Q_2 \left\{ \frac{\frac{\rho_2^2}{2} - \left(r - \partial_{51}u - \rho_2 \frac{\sqrt{2}}{2} \right)^2}{\left[\frac{\rho_2^2}{2} + \left(r - \partial_{51}u - \rho_2 \frac{\sqrt{2}}{2} \right)^2 \right]^2} + \frac{\frac{\rho_2^2}{2} - \left(r - \partial_{61}u + \rho_2 \frac{\sqrt{2}}{2} \right)^2}{\left[\frac{\rho_2^2}{2} + \left(r - \partial_{61}u + \rho_2 \frac{\sqrt{2}}{2} \right)^2 \right]^2} + \right. \\ &\quad \left. + \frac{\frac{\rho_2^2}{2} - \left(r - \partial_{71}u + \rho_2 \frac{\sqrt{2}}{2} \right)^2}{\left[\frac{\rho_2^2}{2} + \left(r - \partial_{71}u + \rho_2 \frac{\sqrt{2}}{2} \right)^2 \right]^2} + \frac{\frac{\rho_2^2}{2} - \left(r - \partial_{81}u - \rho_2 \frac{\sqrt{2}}{2} \right)^2}{\left[\frac{\rho_2^2}{2} + \left(r - \partial_{81}u - \rho_2 \frac{\sqrt{2}}{2} \right)^2 \right]^2} \right\} u + \\ &\quad \left. + \varepsilon_1(0, t), \right. \\ \frac{dv}{dt} &= 0, \end{aligned} \quad (4.4)$$

где

$$\begin{aligned} \varepsilon_1(0, t) &= \frac{1}{2} \frac{r_1^2 - r_0^2}{r} \frac{1}{T} - \frac{Q_1}{2\pi} \left[\frac{1}{r - \rho_1} + \frac{2r}{r^2 + \rho_1^2} + \frac{1}{r + \rho_1} \right] - \\ &\quad - \frac{Q_2}{2\pi} \left[\frac{2 \left(r - \rho_2 \frac{\sqrt{2}}{2} \right)}{\left(r - \rho_2 \frac{\sqrt{2}}{2} \right)^2 + \frac{\rho_2^2}{2}} + \frac{2 \left(r + \rho_2 \frac{\sqrt{2}}{2} \right)}{\left(r + \rho_2 \frac{\sqrt{2}}{2} \right)^2 + \frac{\rho_2^2}{2}} \right]. \end{aligned}$$

Применим порядок расчета, рекомендованный в конце § 3.
1. Будем исследовать движение на отрезке времени $[0, T]$.

2. Определим знак интеграла

$$\int_0^T \varepsilon_1(0, \tau) d\tau = \int_0^T \frac{r_1^2 - r_0^2}{2rT} d\tau - \frac{Q_1}{2\pi} \int_0^T \left\{ \frac{1}{r - \rho_1} + \frac{2r}{r^2 + \rho_1^2} + \frac{1}{r + \rho_1} \right\} d\tau -$$

$$- \frac{Q_2}{2\pi} \int_0^T \left\{ \frac{r - \rho_2 \frac{\sqrt{2}}{2}}{\left(r - \rho_2 \frac{\sqrt{2}}{2} \right)^2 + \frac{\rho_2^2}{2}} + \frac{r + \rho_2 \frac{\sqrt{2}}{2}}{\left(r + \rho_2 \frac{\sqrt{2}}{2} \right)^2 + \frac{\rho_2^2}{2}} \right\} d\tau$$

Подставляя конкретные числовые значения и беря квадратуры по приближенной формуле Симпсона с разбиением интервала интегрирования на 4 участка, получим

$$\int_0^T \varepsilon_1(0, \tau) d\tau \approx 7 > 0.$$

3) Предполагаем, что $|u| \leq 25$ м, $v = 0$.

4) Так как $Q_1 < 0$, $Q_2 < 0$, то в формуле (4.4) коэффициент при u всегда положителен.

5) Выбираем 4-й способ (1-й случай) построения приближенных решений.

В качестве уравнений вида (1.5₁) и (1.5₂) выбираем соответственно

$$\frac{d\bar{u}}{dt} = \frac{1}{2\pi} \left(Q_1 \left\{ \frac{-1}{(r-25-\rho_1)^2} + \frac{-1}{(r-25+\rho_1)^2} + \frac{2\rho_1^2}{(\rho_1^2+r^2)^2} - \frac{2r^2}{[\rho_1^2+(r-25)^2]^2} \right\} + \right.$$

$$+ Q_2 \left\{ \frac{\rho_2^2}{\left[\frac{\rho_2^2}{2} + \left(r - \rho_2 \frac{\sqrt{2}}{2} \right)^2 \right]^2} + \frac{\rho_2^2}{\left[\frac{\rho_2^2}{2} + \left(r + \rho_2 \frac{\sqrt{2}}{2} \right)^2 \right]^2} - \right.$$

$$\left. \frac{2 \left(r - \rho_2 \frac{\sqrt{2}}{2} \right)^2}{\left[\frac{\rho_2^2}{2} + \left(r - 25 - \rho_2 \frac{\sqrt{2}}{2} \right)^2 \right]^2} - \frac{2 \left(r + \rho_2 \frac{\sqrt{2}}{2} \right)^2}{\left[\frac{\rho_2^2}{2} + \left(r - 25 + \rho_2 \frac{\sqrt{2}}{2} \right)^2 \right]^2} \right\} \right) \bar{u} + \varepsilon_1(0, t), \quad (4.5)$$

$$\frac{du}{dt} = \frac{1}{2\pi} \left(Q_1 \left\{ \frac{-1}{(r-\rho_1)^2} + \frac{-1}{(r+\rho_1)^2} + \frac{2\rho_1^2}{(\rho_1^2+r^2)^2} - \frac{2(r-25)^2}{(\rho_1^2+r^2)^2} \right\} + \right.$$

$$+ Q_2 \left\{ \frac{\rho_2^2}{\left[\frac{\rho_2^2}{2} + \left(r - 25 - \rho_2 \frac{\sqrt{2}}{2} \right)^2 \right]^2} + \frac{\rho_2^2}{\left[\frac{\rho_2^2}{2} + \left(r - 25 + \rho_2 \frac{\sqrt{2}}{2} \right)^2 \right]^2} - \right.$$

$$\left. \frac{2 \left(r - 25 - \rho_2 \frac{\sqrt{2}}{2} \right)^2}{\left[\frac{\rho_2^2}{2} + \left(r - \rho_2 \frac{\sqrt{2}}{2} \right)^2 \right]^2} - \frac{2 \left(r - 25 + \rho_2 \frac{\sqrt{2}}{2} \right)^2}{\left[\frac{\rho_2^2}{2} + \left(r + \rho_2 \frac{\sqrt{2}}{2} \right)^2 \right]^2} \right\} \right) u + \varepsilon_1(0, t). \quad (4.6)$$

6) Решения уравнений (4.5) и (4.6) при нулевых начальных условиях легко находятся:

$$\bar{u}(t) = e^{\int_0^t \bar{g} d\tau} \int_0^t \varepsilon_1(0, \tau) e^{-\int_0^\tau \bar{g} d\tau_1} d\tau, \quad (4.7)$$

$$u(t) = e^{\int_0^t g d\tau} \int_0^t \varepsilon_1(0, \tau) e^{-\int_0^\tau g d\tau_1} d\tau. \quad (4.8)$$

Здесь \bar{g} и g обозначают коэффициенты при \bar{u} и u в уравнениях (4.5) и (4.6).

Подстановка численных значений в формулы (4.7) и (4.8) дает

$$\bar{u}(T) = 22 \text{ м}, \quad u(T) = 12,9 \text{ м}.$$

Определим действительное отклонение $u(0, T)$. Для этого найдем точное решение системы уравнений (4.2), принимающей для нашего случая вид

$$\frac{dx}{dt} = \frac{1}{2\pi} \left\{ Q_1 \left[\frac{1}{x-\rho_1} + \frac{2x}{x^2+\rho_1^2} + \frac{1}{x+\rho_1} \right] + \right.$$

$$+ Q_2 \left[\frac{2 \left(x - \rho_2 \frac{\sqrt{2}}{2} \right)}{\left[\frac{\rho_2^2}{2} + \left(x - \rho_2 \frac{\sqrt{2}}{2} \right)^2 \right]^2} + \frac{2 \left(x + \rho_2 \frac{\sqrt{2}}{2} \right)}{\left[\frac{\rho_2^2}{2} + \left(x + \rho_2 \frac{\sqrt{2}}{2} \right)^2 \right]^2} \right] \right\},$$

$$\frac{dy}{dt} = 0,$$

с начальным условием

$$x|_{t=0} = 600 \text{ м}, \quad y|_{t=0} = 0.$$

Решение этой системы с учетом (1) имеет вид

$$\frac{2(Q_1 + Q_2)}{\pi} t = \frac{x^2 - 600^2}{2} + \frac{\rho_1^4 \rho_2^4}{2(\rho_2^4 - \rho_1^4)} \left(\frac{1}{x^2} - \frac{1}{600^2} \right) +$$

$$+ \frac{\rho_1^4 \rho_2^4}{4(\rho_2^4 - \rho_1^4) V \rho_1^4 - \rho_2^4} \ln \frac{(x^2 - V \rho_1^4 - \rho_2^4)(600^2 + V \rho_1^4 - \rho_2^4)}{(x^2 + V \rho_1^4 - \rho_2^4)(600^2 - V \rho_1^4 - \rho_2^4)},$$

$$y = 0. \quad (4.9)$$

Вычисления формулы (4.9) дают $y = 0$, $x(T) = 435,6$ м, т. е.

$$u(0, T) = 450 - 435,6 = 14,4 \text{ м}; \quad v = 0.$$

Таким образом, решения уравнений (4.5) и (4.6) действительно являются решениями „сверху“ и „снизу“ для уравнения (4.4).

1. Салехов Г. С. Приложение одного метода минимальной погрешности к решению задач управления движением контура нефтеносности. Изв. Казанск. филиала АН СССР, серия физ.-мат. и техн. наук, вып. 8, 1955.
2. Цыбульский Г. П. Решение задачи управления движением незвездных контуров нефтеносности. Изв. Казанск. филиала АН СССР, серия физ.-мат. и техн. наук, вып. 9, 1956.
3. Цыбульский Г. П. Задача управления движением незвездного контура нефтеносности при "дискретном" задании (см. наст. выпуск).
4. Матвеев Н. М. Методы интегрирования обыкновенных дифференциальных уравнений. Изд. ЛГУ, 1955.
5. Камке Э. Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям. ИЛ, Москва, 1950.
6. Салехов Г. С. Постановка и методы решения гидродинамических задач управления движением контура нефтеносности. Изв. Казанск. филиала АН СССР, серия физ.-мат. и техн. наук, вып. 6, 1955.

Физико-технический институт
Казанского филиала АН СССР

Поступила 22 декабря 1956 г.

В. Л. Данилов

ИНТЕГРО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ ДВИЖЕНИЯ ГРАНИЦЫ РАЗДЕЛА ДВУХ ЖИДКОСТЕЙ В ПОРИСТОЙ СРЕДЕ*

Показано, что задача Лейбензона — Muskat'a о движении границы раздела двух несмешивающихся жидкостей в пористой среде сводится к задаче Коши для некоторого интегро-дифференциального уравнения.

Предложены численные методы решения задачи прослеживания контура нефтеносности и определения траекторий прилегающих к нему частиц жидкости, а также графо-аналитические способы прослеживания контура.

Задачи рассматриваются как в неограниченном пласте, так и при дополнительных краевых условиях.

Получено обобщение формулы Дюпюи для двухжидкостной системы.

Введение. Задача определения границы раздела двух несмешивающихся жидкостей при движении их в пористой среде была сформулирована в 1934 г. Л. С. Лейбензоном [1], [2]. Им были предложены приближенный графический и аналитический способы решения плоской задачи для одной скважины при вязкости краевой воды, пренебрежимо малой по сравнению с вязкостью нефти. При тех же условиях Л. С. Лейбензон дал точное решение одномерных задач линейного и радиального течения.

В постановке Л. С. Лейбензона этой задачей занимались П. Я. Полубаринова-Кочина, Л. А. Галин, П. П. Куфарев, Ю. П. Виноградов. Большое число исследований посвящено перемещению границы "разноцветных" жидкостей, без учета различия вязкостей.

При ненулевых, отличных между собой вязкостях воды и нефти задача о перемещении границы рассматривалась М. Muskat'ом [3], [4]. Им была предложена процедура перекрестных последовательных приближений, а также последовательного построения контура нефтеносности, требующая на каждом этапе определения давления в пласте.

М. Muskat дал решение задач линейного и радиального стягивания, обобщенное впоследствии В. Н. Щелкачевым [5].

Известны приближенный метод неизменяемых трубок тока И. А. Чарного [6] и исследования В. Н. Щелкачева, Н. С. Пискунова, М. Н. Тихова. Основную библиографию по этому вопросу см. в статье Г. С. Салехова [7]. В последнее время определением давления при данном положении контура занимался В. Я. Булыгин [26].

В настоящей работе выведено интегро-дифференциальное уравнение движения границы раздела с учетом различия вязкостей.

* Содержание § 1 изложено в докладе на Третьем Всесоюзном математическом съезде в июле 1956 г. Реферат см. в "Трудах Третьего Всесоюзного математического съезда", т. 1, М. 1956.

Из него, как предельные, вытекают случаи движения границы в одножидкостной системе и случай Л. С. Лейбензона.

Предложены численные и графоаналитические методы решения задачи прослеживания границы раздела.

При выводе основных уравнений широко применяются методы теории потенциала, в частности, нанесение на границу раздела жидкостей непрерывно распределенных источников. В стационарной задаче теории теплопроводности при наличии контура двух сред этот прием был использован А. И. Гусейновым [8], [9], в электростатике — Г. А. Гринбергом [10], в подземной гидромеханике для границы раздела жидкостей впервые его применил Г. Г. Тумашев [11], затем автор [12].

§ 1. Уравнение движения границы раздела двух жидкостей в неограниченном пласте. 1. Рассмотрим бесконечный однородный пласт постоянной мощности h с проницаемостью k . Нефть в начальный момент времени $t=0$ заполняет область G_1 , ограниченную сверху и снизу непроницаемыми кровлей и подошвой пласта, а по периферии — цилиндрической поверхностью Σ_0 , проекцию которой в плане Γ_0 будем называть, как это принято, начальным контуром нефтеносности (рис. 1). Уравнение этого контура:

$$\tilde{f}(x, y) = 0. \quad (1.1)$$

Область G_2 , внешняя к контуру Γ_0 , занята краевой водой. Динамические вязкости нефти μ_1 и воды μ_2 считаем различными. Разностью удельных весов нефти и воды будем пренебрегать.

Пусть далее в пласте имеются скважины (вертикальные линейные источники и стоки с постоянной обильностью по высоте), имеющие координаты в плане x_i, y_i и объемные дебиты $Q_i(t)$. Значениям индекса $i=1, 2, \dots, j$ соответствуют нефтяные (эксплуатационные) скважины, а значениям $i=j+1, j+2, \dots, j+l$ — водяные (нагнетательные) скважины.

Будем полагать жидкости и породу несжимаемыми, фильтрацию — ламинарной.

При указанных выше условиях течение является плоским, а давление $p(x, y, t)$ удовлетворяет уравнению Лапласа

$$\nabla^2 p = 0 \quad (1.2)$$

всюду, за исключением особых точек — скважин и, в общем случае, бесконечно-удаленной точки, а также особой линии — границы раздела.

На границе раздела — контуре нефтеносности Γ как в начальный момент, так и в последующее время движения, выполняются следующие условия:

1) давление p при переходе через контур нефтеносности изменяется непрерывно. Обозначая индексом „+“ предельное значение при подходе к Γ изнутри и индексом „-“ предельное значение при подходе к Γ снаружи, имеем:

$$p^+ = p^-; \quad (1.3)$$

2) нормальная составляющая скорости фильтрации вследствие неразрывности течения также непрерывна при переходе через Γ , что с учетом закона Дарси $v_{\text{фильтр}} = -c \text{grad } p$ дает:

$$c_1 \frac{\partial p^+}{\partial n} = c_2 \frac{\partial p^-}{\partial n}, \quad (1.4)$$

где $c_1 = \frac{k}{\mu_1}$ — коэффициент текучести нефти, $c_2 = \frac{k}{\mu_2}$ — коэффициент текучести воды; n — внутренняя нормаль к контуру Γ .

2. Введем уравнение неизвестной границы раздела Γ в неявной форме:

$$F(x, y, t) = 0. \quad (1.5)$$

Запишем соотношение:

$$\frac{dF}{dt} = \frac{\partial F}{\partial t} + \frac{\partial F}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial F}{\partial y} \frac{dy}{dt} = \frac{\partial F}{\partial t} + v_n \frac{\partial F}{\partial n} = 0. * \quad (1.6)$$

Здесь v_n — скорость перемещения контура Γ по нормали к нему. Зная пористость среды m и учитывая закон Дарси, получаем [12]:

$$v_n = \frac{1}{m} v_{n \text{ фильт.}} = -\frac{c_1}{m} \frac{\partial p^+}{\partial n} = -\frac{c_2}{m} \frac{\partial p^-}{\partial n}. \quad (1.7)$$

Тогда из соотношений (1.6) и (1.7) находим две эквивалентные формы уравнения движения:

$$\frac{\partial p^+}{\partial n} = \frac{m}{c_1} \frac{\partial F}{\partial t} / \frac{\partial F}{\partial n}, \quad (1.8a)$$

$$\frac{\partial p^-}{\partial n} = \frac{m}{c_2} \frac{\partial F}{\partial t} / \frac{\partial F}{\partial n}. \quad (1.8b)$$

Здесь принято во внимание, что

$$\left| \frac{\partial F}{\partial n} \right| = \sqrt{\left(\frac{\partial F}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial F}{\partial y} \right)^2} \neq 0.$$

Задача определения границы раздела жидкостей при действии заданной системы скважин с известными дебитами, или, как ее часто называют, задача прослеживания контура нефтеносности, состоит в отыскании функции (1.5), удовлетворяющей уравнению движения (1.8a) (или, что то же, (1.8b)) и начальному условию (1.1):

$$F(x, y, 0) = \tilde{f}(x, y) = 0, \quad (1.1a)$$

причем функция давления p должна удовлетворять уравнению (1.2), условиям (1.3) и (1.4) и иметь заданные особенности в точках скважин.

3. Введем потенциал внешнего поля $\varphi(x, y, t)$. Под ним мы будем понимать функцию, представляющую сумму потенциалов отдельных

* Мы пишем всюду $\frac{\partial F}{\partial n}$, а не $|\nabla F|$, как, например, в [12], во избежание возможной ошибки в знаке (см. по этому поводу [13]).

скважин, которые каждая из них создает в бесконечном пласте, заполненном одной жидкостью. В нашем случае

$$\varphi(x, y, t) = \frac{1}{2\pi hc_1} \sum_{i=1}^j Q_i(t) \ln \frac{1}{V(x-x_i)^2 + (y-y_i)^2} + \frac{1}{2\pi hc_2} \sum_{i=j+1}^{j+1} Q_i(t) \ln \frac{1}{V(x-x_i)^2 + (y-y_i)^2} \quad (1.9)$$

Распределение давлений будем отыскивать в виде:

$$p(x, y, t) = \varphi(x, y, t) + \int_{(\Gamma)} p(\xi, \eta; t) \ln \frac{1}{V(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2} d\sigma, \quad (1.10)$$

где p — плотность логарифмического потенциала простого слоя, непрерывно распределенная по искомому контуру Γ .

Функция p (1.10) удовлетворяет уравнению Лапласа (1.2) и по построению имеет заданные особенности в точках скважин.

Кроме того, выполняется граничное условие (1.3), что следует из свойств непрерывности функции φ и потенциала простого слоя при переходе через Γ .

При переходе через Γ непрерывны также производные функции φ , поэтому на основании свойств потенциала из (1.10) следует [14]:

$$\frac{\partial p^+}{\partial n} - \frac{\partial p^-}{\partial n} = -2\pi p \quad (1.11)$$

Используя уравнения (1.8а) и (1.8б), имеем [11], [12]:

$$p = - \left(\frac{1}{c_1} - \frac{1}{c_2} \right) \frac{m}{2\pi} \frac{\partial F}{\partial t} / \frac{\partial F}{\partial n} \quad (1.12)$$

Нам остается удовлетворить условию (1.4) и уравнению движения (1.8а), либо (1.8б). Вместо первого из соотношений удовлетворим следующему, вытекающему из (1.11) и (1.12):

$$\frac{\partial p^+}{\partial n} - \frac{\partial p^-}{\partial n} = \left(\frac{1}{c_1} - \frac{1}{c_2} \right) m \frac{\partial F}{\partial t} / \frac{\partial F}{\partial n} \quad (1.13)$$

Легко убедиться, что из (1.13) и (1.10) вытекает условие (1.4).

4. Предельное значение производной давления по внутренней нормали при стремлении к Γ изнутри равно:

$$\frac{\partial p^+}{\partial n} = \frac{\partial \varphi}{\partial n} - \pi p + \int_{(\Gamma)} p \frac{\partial}{\partial n} \ln \frac{1}{V(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2} d\sigma \quad (1.14)$$

Подставляя в (1.8а) значения $\frac{\partial p^+}{\partial n}$ из (1.10а), p из (1.12) и полагая $m = \text{const}^*$, приходим к уравнению:

$$\frac{1}{2} \left(1 + \frac{c_1}{c_2} \right) \left(\frac{\partial F}{\partial t} / \frac{\partial F}{\partial n} \right) + \frac{1}{2\pi} \left(1 - \frac{c_1}{c_2} \right) \times \int_{(\Gamma)} \left(\frac{\partial F}{\partial t} / \frac{\partial F}{\partial n} \right) \frac{\partial}{\partial n} \ln \frac{1}{V(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2} d\sigma = \frac{c_1}{m} \frac{\partial \varphi}{\partial n}$$

* Рассуждения сохраняют силу и при переменной пористости m , но тогда m далее остается под интегралом.

Вводя обозначение

$$\frac{c_1 - c_2}{c_1 + c_2} = \lambda, \quad |\lambda| < 1 \quad (1.15)$$

придадим этому уравнению вид:

$$\left(\frac{\partial F}{\partial t} / \frac{\partial F}{\partial n} \right) - \frac{\lambda}{\pi} \int_{(\Gamma)} \left(\frac{\partial F}{\partial t} / \frac{\partial F}{\partial n} \right) \frac{\partial}{\partial n} \ln \frac{1}{V(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2} d\sigma = \frac{2}{m} \frac{c_1 c_2}{c_1 + c_2} \frac{\partial \varphi}{\partial n}, \quad (x, y), (\xi, \eta) \in \Gamma \quad (1.16)$$

Уравнение (1.16) является нелинейным интегро-дифференциальным уравнением относительно искомой функции $F(x, y, t)$, осложненным еще тем обстоятельством, что интегрирование совершается по неизвестному контуру Γ и производная $\frac{\partial}{\partial n}$ берется по нормали к неизвестному контуру Γ ; следовательно, и ядро и правая часть уравнения зависят от искомой функции.

Таким образом, задача отыскания функции F сводится к задаче Коши для уравнения (1.16) с начальным условием (1.1а). К уравнению (1.16) можно прийти, разумеется, и беря уравнение движения в форме (1.8б).

5. Дадим вывод уравнения (1.16) несколько иным путем.

Распределение давления ищем по-прежнему в форме (1.10). Уравнение (1.2) и условие (1.3) при этом удовлетворяются.

Займемся выполнением условия (1.4). Производная $\frac{\partial p^+}{\partial n}$ записана выше (см. (1.14)). Предельное значение производной при подходе к Γ снаружи равно

$$\frac{\partial p^-}{\partial n} = \frac{\partial \varphi}{\partial n} + \pi p + \int_{(\Gamma)} p \frac{\partial}{\partial n} \ln \frac{1}{V(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2} d\sigma \quad (1.17)$$

Подставим выражения (1.14) и (1.17) в условие (1.4).

После некоторых преобразований приходим к уравнению [11]:

$$\pi p - \lambda \int_{(\Gamma)} p \frac{\partial}{\partial n} \ln \frac{1}{V(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2} d\sigma = \lambda \frac{\partial \varphi}{\partial n}, \quad (x, y), (\xi, \eta) \in \Gamma \quad (1.18)$$

Внося сюда значение p из формулы (1.12), получаем уравнение (1.16).

6. Отметим, что все вышеприведенные рассуждения распространяются и на случай движения поверхности раздела жидкостей Σ в неограниченном пространстве, заполненном пористой средой.

Отличие состоит в том, что вместо логарифмического потенциала следует применить ньютонов потенциал от плотности, непрерывно распределенной по поверхности раздела.

Трехмерным аналогом уравнения (1.16) является следующее:

$$\left(\frac{\partial F}{\partial t} / \frac{\partial F}{\partial n} \right) - \frac{\lambda}{2\pi} \int_{(\Sigma)} \left(\frac{\partial F}{\partial t} / \frac{\partial F}{\partial n} \right) \times \frac{\partial}{\partial n} \frac{1}{V(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2 + (z-\zeta)^2} d\Sigma = \frac{2}{m} \frac{c_1 c_2}{c_1 + c_2} \frac{\partial \varphi}{\partial n}, \quad (x, y, z), (\xi, \eta, \zeta) \in \Sigma \quad (1.19)$$

Требуется определить функцию $F(x, y, z, t) = 0$, удовлетворяющую уравнению (1.19) и начальному условию:

$$F(x, y, z, 0) = \tilde{f}(x, y, z) = 0.$$

7. Приведем уравнение (1.16) к иному виду:

$$\frac{\partial F}{\partial t} + \left[\frac{2}{m} \frac{c_1 c_2}{c_1 + c_2} \frac{\partial \varphi}{\partial n} - \frac{\lambda}{\pi} \int_{(\Gamma)} \left(\frac{\partial F}{\partial t} / \frac{\partial F}{\partial n} \right) \times \right. \\ \left. \times \frac{\partial}{\partial n} \ln \frac{1}{\sqrt{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2}} d\sigma \right] \frac{\partial F}{\partial n} = 0. \quad (1.20)$$

Для скалярных функций ψ и F имеет место зависимость:

$$\frac{\partial \psi}{\partial n} \frac{\partial F}{\partial n} = \left[\frac{\partial \psi}{\partial x} \cos(n, x) + \frac{\partial \psi}{\partial y} \cos(n, y) \right] \frac{\partial F}{\partial n} = \\ = \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial \psi}{\partial y} \frac{\partial F}{\partial y}.$$

Из (1.9) и (1.15) получаем:

$$\frac{2}{m} \frac{c_1 c_2}{c_1 + c_2} \frac{\partial \varphi}{\partial n} = \frac{1-\lambda}{2\pi mh} \sum_{i=1}^j Q_i(t) \frac{\partial}{\partial n} \ln \frac{1}{\sqrt{(x-x_i)^2 + (y-y_i)^2}} + \\ + \frac{1+\lambda}{2\pi mh} \sum_{i=j+1}^{j+1} Q_i(t) \frac{\partial}{\partial n} \ln \frac{1}{\sqrt{(x-x_i)^2 + (y-y_i)^2}}. \quad (1.21)$$

Теперь уравнению (1.20) легко придать следующую форму:

$$\frac{\partial F}{\partial t} + \left[\frac{1-\lambda}{2\pi mh} \sum_{i=1}^j Q_i(t) \frac{x-x_i}{(x-x_i)^2 + (y-y_i)^2} + \right. \\ \left. + \frac{1+\lambda}{2\pi mh} \sum_{i=j+1}^{j+1} Q_i(t) \frac{x-x_i}{(x-x_i)^2 + (y-y_i)^2} + \right. \\ \left. + \frac{\lambda}{\pi} \int_{(\Gamma)} \left(\frac{\partial F}{\partial t} / \frac{\partial F}{\partial n} \right) \frac{x-\xi}{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2} d\sigma \right] \frac{\partial F}{\partial x} + \\ + \left[\frac{1-\lambda}{2\pi mh} \sum_{i=1}^j Q_i(t) \frac{y-y_i}{(x-x_i)^2 + (y-y_i)^2} + \right. \\ \left. + \frac{1+\lambda}{2\pi mh} \sum_{i=j+1}^{j+1} Q_i(t) \frac{y-y_i}{(x-x_i)^2 + (y-y_i)^2} + \right. \\ \left. + \frac{\lambda}{\pi} \int_{(\Gamma)} \left(\frac{\partial F}{\partial t} / \frac{\partial F}{\partial n} \right) \frac{y-\eta}{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2} d\sigma \right] \frac{\partial F}{\partial y} = 0. \quad (1.22)$$

Входящие сюда интегралы — сингулярные.

Рассмотрим предельные случаи уравнения (1.22), представляющие интерес.

а) Одножидкостная система:

$$\mu_1 = \mu_2, \quad c_1 = c_2 = c, \quad \lambda = 0.$$

$$\frac{\partial F}{\partial t} + \frac{1}{2\pi mh} \sum_{i=1}^{j+1} Q_i(t) \frac{x-x_i}{(x-x_i)^2 + (y-y_i)^2} \frac{\partial F}{\partial x} + \\ + \frac{1}{2\pi mh} \sum_{i=1}^{j+1} Q_i(t) \frac{y-y_i}{(x-x_i)^2 + (y-y_i)^2} \frac{\partial F}{\partial y} = 0. \quad (1.22a)$$

б) Вода имеет нулевую вязкость (случай Л. С. Лейбензона):

$$\mu_2 = 0, \quad c_2 \rightarrow \infty, \quad \lambda = -1.$$

$$\frac{\partial F}{\partial t} + \left[\frac{1}{\pi mh} \sum_{i=1}^j Q_i(t) \frac{x-x_i}{(x-x_i)^2 + (y-y_i)^2} - \right. \\ \left. - \frac{1}{\pi} \int_{(\Gamma)} \left(\frac{\partial F}{\partial t} / \frac{\partial F}{\partial n} \right) \frac{x-\xi}{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2} d\sigma \right] \frac{\partial F}{\partial x} + \\ + \left[\frac{1}{\pi mh} \sum_{i=1}^j Q_i(t) \frac{y-y_i}{(x-x_i)^2 + (y-y_i)^2} - \right. \\ \left. - \frac{1}{\pi} \int_{(\Gamma)} \left(\frac{\partial F}{\partial t} / \frac{\partial F}{\partial n} \right) \frac{y-\eta}{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2} d\sigma \right] \frac{\partial F}{\partial y} = 0. \quad (1.22b)$$

Из уравнения (1.22 б) видно, что члены, обусловленные наличием нагнетательных скважин, отсутствуют, то есть нагнетательные скважины при нулевой вязкости воды не оказывают влияния на контур Γ .

Это обстоятельство подтверждается очевидными физическими соображениями.

8. Перейдем в уравнении движения контура нефтеносности (1.16) к полярным координатам (r, θ) .

Если координаты i -й скважины обозначить (ρ_i, α_i) , то правая часть уравнения (1.16) примет вид (см. (1.21)):

$$\frac{2}{m} \frac{c_1 c_2}{c_1 + c_2} \frac{\partial \varphi}{\partial n} = \frac{1-\lambda}{2\pi mh} \sum_{i=1}^j Q_i(t) \frac{\partial}{\partial n} \ln \frac{1}{\sqrt{r^2 - 2r\rho_i \cos(\theta - \alpha_i) + \rho_i^2}} + \\ + \frac{1+\lambda}{2\pi mh} \sum_{i=j+1}^{j+1} Q_i(t) \frac{\partial}{\partial n} \ln \frac{1}{\sqrt{r^2 - 2r\rho_i \cos(\theta - \alpha_i) + \rho_i^2}}. \quad (1.23)$$

Пусть начальный контур Γ_0 задан уравнением

$$r - f_0(\theta) = 0. \quad (1.24)$$

Полагая контур нефтеносности Γ звездным относительно выбранного полюса в течение всего рассматриваемого промежутка времени, будем искать его уравнение в форме:

$$F(r, \theta, t) = r - f(\theta, t) = 0. \quad (1.25)$$

Если ψ — скалярная функция переменных r и θ , то

$$\frac{\partial \psi}{\partial n} = \frac{\partial \psi}{\partial r} \cos(n, r) + \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial \theta} \cos(n, \theta).$$

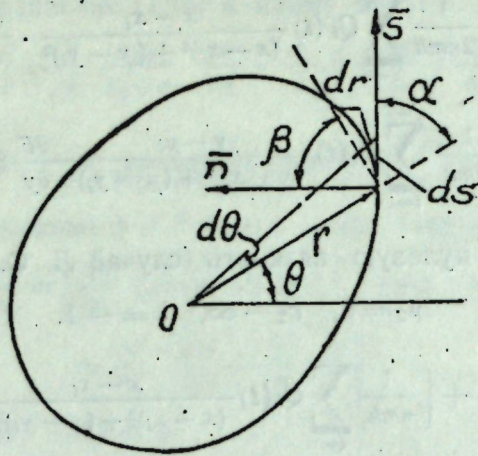


Рис. 2.

Из рис. 2 следует:

$$\cos(n, r) = \cos\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) = -\sin \alpha = -\frac{rd\theta}{ds} = -\frac{f(\theta, t)}{\sqrt{f^2(\theta, t) + f_0^2(\theta, t)}};$$

$$\cos(n, \theta) = \cos \beta = \cos \alpha = \frac{dr}{ds} = \frac{f_0(\theta, t)}{\sqrt{f^2(\theta, t) + f_0^2(\theta, t)}}.$$

Здесь и далее используются обозначения:

$$f_0(\theta, t) = \frac{\partial f(\theta, t)}{\partial \theta}, \quad f_t(\theta, t) = \frac{\partial f(\theta, t)}{\partial t} \text{ и т. п.}$$

Таким образом, имеем:

$$\frac{\partial \psi}{\partial n} \Big|_{\Gamma} = \left[-f(\theta, t) \frac{\partial \psi}{\partial r} + \frac{f_0(\theta, t)}{f(\theta, t)} \frac{\partial \psi}{\partial \theta} \right] \Big|_{r=f(\theta, t)} \frac{1}{\sqrt{f^2(\theta, t) + f_0^2(\theta, t)}}. \quad (1.26)$$

Из выражения (1.25) следует:

$$\frac{\partial F}{\partial t} = -f_t(\theta, t).$$

Применим формулу (1.26) к функции $F(r, \theta, t)$, учитывая (1.25).

$$\frac{\partial F}{\partial n} = -\frac{1}{f(\theta, t)} \sqrt{f^2(\theta, t) + f_0^2(\theta, t)}.$$

Отсюда

$$\left(\frac{\partial F}{\partial t} / \frac{\partial F}{\partial n} \right) = \frac{f(\theta, t) f_t(\theta, t)}{\sqrt{f^2(\theta, t) + f_0^2(\theta, t)}}. \quad (1.27)$$

Под интегралом, обозначая переменную интегрирования v , имеем:

$$\left(\frac{\partial F}{\partial t} / \frac{\partial F}{\partial n} \right) = \frac{f(v, t) f_t(v, t)}{\sqrt{f^2(v, t) + f_0^2(v, t)}}. \quad (1.28)$$

Применяя формулу (1.26), преобразуем ядро:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial n} \ln \frac{1}{\sqrt{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2}} &= \frac{\partial}{\partial n} \ln \frac{1}{\sqrt{r^2 - 2r\tilde{\rho} \cos(\theta - \nu) + \tilde{\rho}^2}} = \\ &= \frac{f^2(\theta, t) - f(\theta, t)f(\nu, t) \cos(\theta - \nu) - f_0(\theta, t)f(\nu, t) \sin(\theta - \nu)}{f^2(\theta, t) - 2f(\theta, t)f(\nu, t) \cos(\theta - \nu) + f^2(\nu, t)} \times \\ &\times \frac{1}{\sqrt{f^2(\theta, t) + f_0^2(\theta, t)}}. \end{aligned} \quad (1.29)$$

Элемент дуги контура интегрирования принимает вид:

$$d\sigma = \sqrt{f^2(v, t) + f_0^2(v, t)} dv; \quad (1.30)$$

пределы интегрирования по v при замкнутом контуре Γ — от 0 до 2π .
Наконец, применяя (1.26) к правой части (1.23), находим:

$$\begin{aligned} \frac{2}{m} \frac{c_1 c_2}{c_1 + c_2} \frac{\partial \varphi}{\partial n} &= \left[\frac{1-\lambda}{2\pi m h} \sum_{i=1}^j Q_i(t) \omega_i + \right. \\ &+ \left. \frac{1+\lambda}{2\pi m h} \sum_{i=j+1}^{j+l} Q_i(t) \omega_i \right] \frac{1}{\sqrt{f^2(\theta, t) + f_0^2(\theta, t)}}, \end{aligned} \quad (1.31)$$

$$\omega_i = \frac{f^2(\theta, t) - f(\theta, t) \rho_i \cos(\theta - \alpha_i) - f_0(\theta, t) \rho_i \sin(\theta - \alpha_i)}{f^2(\theta, t) - 2f(\theta, t) \rho_i \cos(\theta - \alpha_i) + \rho_i^2}.$$

Подставив полученные выражения (1.27) — (1.31) в уравнение (1.16) и сократив обе части на общий множитель

$$[f^2(\theta, t) + f_0^2(\theta, t)]^{-1/2},$$

получаем:

$$\begin{aligned} f(\theta, t) f_t(\theta, t) - \frac{\lambda}{\pi} \int_0^{2\pi} f(\nu, t) f_t(\nu, t) \times \\ \times \frac{f^2(\theta, t) - f(\theta, t)f(\nu, t) \cos(\theta - \nu) - f_0(\theta, t)f(\nu, t) \sin(\theta - \nu)}{f^2(\theta, t) - 2f(\theta, t)f(\nu, t) \cos(\theta - \nu) + f^2(\nu, t)} d\nu = \\ = \frac{1}{2\pi m h} \sum_{i=1}^{j+l} \tilde{Q}_i(t) \frac{f^2(\theta, t) - f(\theta, t) \rho_i \cos(\theta - \alpha_i) - f_0(\theta, t) \rho_i \sin(\theta - \alpha_i)}{f^2(\theta, t) - 2f(\theta, t) \rho_i \cos(\theta - \alpha_i) + \rho_i^2}, \end{aligned} \quad (1.32)$$

где

$$\tilde{Q}_i(t) = \begin{cases} (1-\lambda) Q_i(t) & \text{при } i=1, 2, \dots, j; \\ (1+\lambda) Q_i(t) & \text{при } i=j+1, j+2, \dots, j+l. \end{cases} \quad (1.33)$$

Это — нелинейное интегро-дифференциальное уравнение в частных производных. Следует найти его решение, удовлетворяющее начальному условию (см. (1.24)):

$$f(\theta, 0) = f_0(\theta), \quad (1.24a)$$

При наличии одной нефтяной скважины в начале координат уравнение (1.32) упрощается:

$$f(\theta, t) f_t(\theta, t) - \frac{\lambda}{\pi} \int_0^{2\pi} f(v, t) f_t(v, t) \times \quad (1.34)$$

$$\times \frac{f^2(\theta, t) - f(\theta, t) f(v, t) \cos(\theta - v) - f_0(\theta, t) f(v, t) \sin(\theta - v)}{f^2(\theta, t) - 2f(\theta, t) f(v, t) \cos(\theta - v) + f^2(v, t)} dv = \frac{1 - \lambda}{2\pi mh} Q(t).$$

9. Г. С. Салеховым была сформулирована задача управления перемещением контура нефтеносности и дано ее решение методами минимальной погрешности для одноподжидкостной системы [15].

Нетрудно видеть, что решение задачи управления перемещением контура нефтеносности с учетом различия вязкостей сводится к тому, что в уравнение движения (1.32) подставляется заданная функция $f(\theta, t)$, удовлетворяющая начальному условию (1.24a). Затем уравнение движения удовлетворяется приближенно вариацией дебитов $Q_i(t)$ (задача управления по характеру эксплуатации) и координат скважин (ρ_i, α_i) (задача управления по характеру размещения) [12].

10. Из уравнения (1.32) можно получить соотношение, которое оказывается полезным при численном решении задачи. Умножим уравнение (1.32) на $mh \cdot d\theta$ и проинтегрируем по θ в пределах от 0 до 2π .

$$mh \int_0^{2\pi} f(\theta, t) f_t(\theta, t) d\theta - \frac{mh\lambda}{\pi} \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{2\pi} f(v, t) f_t(v, t) \times \quad (1.35)$$

$$\times \frac{f^2(\theta, t) - f(\theta, t) f(v, t) \cos(\theta - v) - f_0(\theta, t) f(v, t) \sin(\theta - v)}{f^2(\theta, t) - 2f(\theta, t) f(v, t) \cos(\theta - v) + f^2(v, t)} dv =$$

$$= \frac{1}{2\pi} \sum_{i=1}^{j+1} \tilde{Q}_i(t) \int_0^{2\pi} \frac{f^2(\theta, t) - f(\theta, t) \rho_i \cos(\theta - \alpha_i) - f_0(\theta, t) \rho_i \sin(\theta - \alpha_i)}{f^2(\theta, t) - 2f(\theta, t) \rho_i \cos(\theta - \alpha_i) + \rho_i^2} d\theta.$$

Первый член можно преобразовать:

$$mh \int_0^{2\pi} f(\theta, t) f_t(\theta, t) d\theta = \frac{mh}{2} \int_0^{2\pi} \frac{\partial}{\partial t} f^2(\theta, t) d\theta =$$

$$= \frac{d}{dt} \left[\frac{mh}{2} \int_0^{2\pi} f^2(\theta, t) d\theta \right] = \frac{dV(t)}{dt},$$

где $V(t)$ — текущий объем нефти в пласте, откуда следует, что

$$mh \int_0^{2\pi} f(\theta, t) f_t(\theta, t) d\theta = \sum_{j=1}^j Q_i(t). \quad (1.36)$$

Интегралы в правой части (1.35) легко вычисляются. Из выражений (1.11) и (1.31) вытекает, что

$$I = \int_0^{2\pi} \frac{f^2(\theta, t) - f(\theta, t) \rho_i \cos(\theta - \alpha_i) - f_0(\theta, t) \rho_i \sin(\theta - \alpha_i)}{f^2(\theta, t) - 2f(\theta, t) \rho_i \cos(\theta - \alpha_i) + \rho_i^2} d\theta =$$

$$= \int_{(\Gamma)} \frac{\partial}{\partial n} \ln \frac{1}{V(x-x_i)^2 + (y-y_i)^2} d\sigma.$$

Пользуясь известным свойством гармонической функции, находим:

$$I = 2\pi \quad \text{при } i = 1, 2, \dots, j; \quad (1.37)$$

$$I = 0 \quad \text{при } i = j+1, j+2, \dots, j+l. \quad (1.38)$$

Используя (1.36) — (1.38), из (1.35) получаем соотношение:

$$\sum_{i=1}^j Q_i(t) = \frac{mh}{\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} f(v, t) f_t(v, t) \times \quad (1.39)$$

$$\times \frac{f^2(\theta, t) - f(\theta, t) f(v, t) \cos(\theta - v) - f_0(\theta, t) f(v, t) \sin(\theta - v)}{f^2(\theta, t) - 2f(\theta, t) f(v, t) \cos(\theta - v) + f^2(v, t)} dv d\theta.$$

§ 2. Уравнения движения частиц жидкости, прилегающих к границе раздела. 1. Распределение давления в неограниченном пласте, исходя из выражений (1.10), (1.12) и (1.15) и учитывая соотношение (1.6), можно представить в следующей форме:

$$p(x, y, t) = \varphi(x, y, t) - \frac{\lambda}{1 - \lambda} \frac{m}{\pi c_1} \int_{(\Gamma)} v_n(\xi, \eta; t) \ln \frac{1}{V(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2} d\sigma =$$

$$= \varphi(x, y, t) - \frac{\lambda}{1 + \lambda} \frac{m}{\pi c_2} \int_{(\Gamma)} v_n(\xi, \eta; t) \ln \frac{1}{V(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2} d\sigma, \quad (2.1)$$

где $v_n(\xi, \eta; t)$ — скорость движения контура по внутренней нормали к нему в точке интегрирования (ξ, η) . Снова принимая во внимание соотношение (1.6), уравнению движения (1.16) придадим вид:

$$v_n(x, y; t) = -(1 - \lambda) \frac{c_1}{m} \frac{\partial \varphi}{\partial n} + \frac{\lambda}{\pi} \int_{(\Gamma)} v_n(\xi, \eta; t) \frac{\partial}{\partial n} \ln \frac{1}{V(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2} d\sigma =$$

$$= -(1 + \lambda) \frac{c_2}{m} \frac{\partial \varphi}{\partial n} + \frac{\lambda}{\pi} \int_{(\Gamma)} v_n(\xi, \eta; t) \frac{\partial}{\partial n} \ln \frac{1}{V(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2} d\sigma. \quad (2.2)$$

Нормальная скорость контура в точке (x, y) равна нормальной скорости прилегающих частиц жидкости и одинакова как для частиц нефти, так и для частиц воды.

По-иному обстоит дело с касательной к контуру составляющей скорости жидких частиц. При подходе к Γ изнутри для нефтяных частиц по закону Дарси из (2.1) получаем:

$$v_s^+ = -\frac{c_1}{m} \frac{\partial p}{\partial s} = -\frac{c_1}{m} \frac{\partial \varphi}{\partial s} + \frac{\lambda}{1 - \lambda} \frac{1}{\pi} \int_{(\Gamma)} v_n \frac{\partial}{\partial s} \ln \frac{1}{V(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2} d\sigma. \quad (2.3)$$

Подходя же к Γ снаружи, для касательной скорости частиц воды имеем:

$$v_s^- = -\frac{c_2}{m} \frac{\partial p}{\partial s} = -\frac{c_2}{m} \frac{\partial \varphi}{\partial s} + \frac{\lambda}{1 + \lambda} \frac{1}{\pi} \int_{(\Gamma)} v_n \frac{\partial}{\partial s} \ln \frac{1}{V(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2} d\sigma. \quad (2.4)$$

Производная $\frac{\partial p}{\partial s}$ при переходе через Γ разрыва не претерпевает, поэтому из формул (2.3) и (2.4) вытекает соотношение

$$\frac{1}{c_1} v_s^+ = \frac{1}{c_2} v_s^-, \quad (2.5)$$

указывающее на разрыв касательной составляющей скорости частиц жидкости при переходе через Γ .

Проекция вектора истинной скорости частицы нефти, прилегающей к контуру Γ , на оси OX и OY равны:

$$\left. \begin{aligned} v_x^+ &= v_n \cos(n, x) + v_s^+ \cos(s, x), \\ v_y^+ &= v_n \cos(n, y) + v_s^+ \cos(s, y). \end{aligned} \right\} \quad (2.6)$$

Проекция скорости частицы воды, прилегающей к контуру Γ , на те же оси следующие:

$$\left. \begin{aligned} \bar{v}_x &= v_n \cos(n, x) + v_s \cos(s, x), \\ \bar{v}_y &= v_n \cos(n, y) + v_s \cos(s, y). \end{aligned} \right\} \quad (2.7)$$

Подставляя в соотношения (2.6) значения v_n и v_s^+ из (2.2) и (2.3) и пользуясь очевидными выражениями

$$\frac{\partial \psi}{\partial n} \cos(n, x) + \frac{\partial \psi}{\partial s} \cos(s, x) = \frac{\partial \psi}{\partial x}, \quad \frac{\partial \psi}{\partial n} \cos(n, y) + \frac{\partial \psi}{\partial s} \cos(s, y) = \frac{\partial \psi}{\partial y}, \quad (2.8)$$

в результате несложных преобразований получаем проекции скорости частиц нефти в виде:

$$\left. \begin{aligned} v_x^+ &= -(1-\lambda) \frac{c_1}{m} \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \frac{\lambda}{\pi} \int_{(\Gamma)} v_n \frac{\partial}{\partial x} \ln \frac{1}{V(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2} d\sigma + \\ &+ \lambda \cos(s, x) \left[-\frac{c_1}{m} \frac{\partial \varphi}{\partial s} + \frac{\lambda}{1-\lambda} \frac{1}{\pi} \int_{(\Gamma)} v_n \frac{\partial}{\partial s} \ln \frac{1}{V(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2} d\sigma \right], \\ v_y^+ &= -(1-\lambda) \frac{c_1}{m} \frac{\partial \varphi}{\partial y} + \frac{\lambda}{\pi} \int_{(\Gamma)} v_n \frac{\partial}{\partial y} \ln \frac{1}{V(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2} d\sigma + \\ &+ \lambda \cos(s, y) \left[-\frac{c_1}{m} \frac{\partial \varphi}{\partial s} + \frac{\lambda}{1-\lambda} \frac{1}{\pi} \int_{(\Gamma)} v_n \frac{\partial}{\partial s} \ln \frac{1}{V(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2} d\sigma \right]. \end{aligned} \right\} \quad (2.9)$$

Для получения проекций скорости частицы воды подставим в соотношение (2.7) значения v_n и v_s^- из (2.2) и (2.4). Используя (2.8), находим:

$$\left. \begin{aligned} \bar{v}_x^- &= -(1+\lambda) \frac{c_2}{m} \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \frac{\lambda}{\pi} \int_{(\Gamma)} v_n \frac{\partial}{\partial x} \ln \frac{1}{V(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2} d\sigma - \\ &- \lambda \cos(s, x) \left[-\frac{c_2}{m} \frac{\partial \varphi}{\partial s} + \frac{\lambda}{1+\lambda} \frac{1}{\pi} \int_{(\Gamma)} v_n \frac{\partial}{\partial s} \ln \frac{1}{V(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2} d\sigma \right], \\ \bar{v}_y^- &= -(1+\lambda) \frac{c_2}{m} \frac{\partial \varphi}{\partial y} + \frac{\lambda}{\pi} \int_{(\Gamma)} v_n \frac{\partial}{\partial y} \ln \frac{1}{V(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2} d\sigma - \\ &- \lambda \cos(s, y) \left[-\frac{c_2}{m} \frac{\partial \varphi}{\partial s} + \frac{\lambda}{1+\lambda} \frac{1}{\pi} \int_{(\Gamma)} v_n \frac{\partial}{\partial s} \ln \frac{1}{V(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2} d\sigma \right]. \end{aligned} \right\} \quad (2.10)$$

2. Будем далее полагать начальный контур нефтеносности заданным параметрически: при $t=0$

$$x = x_0(\alpha), \quad y = y_0(\alpha), \quad (\alpha \leq \alpha \leq b). \quad (2.11)$$

Таким образом, каждой точке начального контура соответствует свое значение параметра α . Закрепим то же значение параметра α за частицами нефти и воды, прилегающими к контуру Γ_0 , и оставим его за ними во все рассматриваемое время движения.

Тогда уравнения

$$x = x^+(\alpha, t), \quad y = y^+(\alpha, t); \quad (2.12)$$

$$x = x^-(\alpha, t), \quad y = y^-(\alpha, t); \quad (2.13)$$

представляют собою параметрические уравнения множества траекторий частиц соответственно нефти и воды, прилегающих к контуру. Каждой траектории отвечает свое, фиксированное значение α .

Преимуществом параметрического задания является то, что отпадает условие звездности контура Γ , которое необходимо при сведении задачи к уравнению (1.32) в полярных координатах.

Совершим в уравнениях (2.9) и (2.10) переход к параметрическому заданию.

$$v_x = \frac{dx(\alpha, t)}{dt} = x_t(\alpha, t), \quad v_y = \frac{dy(\alpha, t)}{dt} = y_t(\alpha, t). \quad (2.14)$$

Из выражения (1.9) находим

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} = -\frac{1}{2\pi h c_1} \sum_{i=1}^j Q_i(t) \frac{x(\alpha, t) - x_i}{[x(\alpha, t) - x_i]^2 + [y(\alpha, t) - y_i]^2} - \frac{1}{2\pi h c_2} \sum_{i=j+1}^{j+1} Q_i(t) \frac{x(\alpha, t) - x_i}{[x(\alpha, t) - x_i]^2 + [y(\alpha, t) - y_i]^2}; \quad (2.15)$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial y} = -\frac{1}{2\pi h c_1} \sum_{i=1}^j Q_i(t) \frac{y(\alpha, t) - y_i}{[x(\alpha, t) - x_i]^2 + [y(\alpha, t) - y_i]^2} - \frac{1}{2\pi h c_2} \sum_{i=j+1}^{j+1} Q_i(t) \frac{y(\alpha, t) - y_i}{[x(\alpha, t) - x_i]^2 + [y(\alpha, t) - y_i]^2}. \quad (2.16)$$

Далее

$$v_n = v_x \cos(n, x) + v_y \cos(n, y). \quad (2.17)$$

Из рис. 3 следует:

$$\cos(n, x) = \cos \delta = \cos\left(\frac{\pi}{2} + \beta\right) = -\sin \beta, \quad (2.18)$$

$$\cos(n, y) = \sin(n, x) = \sin \delta = \cos \beta. \quad (2.19)$$

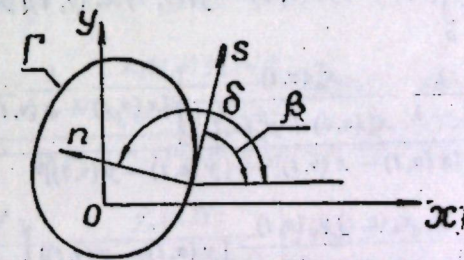


Рис. 3.

С другой стороны,

$$\cos \beta = \cos(s, x) = \frac{dx}{ds} = \frac{x_\alpha(\alpha, t)}{\sqrt{x_\alpha^2(\alpha, t) + y_\alpha^2(\alpha, t)}}; \quad (2.20)$$

$$\sin \beta = \sin(s, x) = \frac{dy}{ds} = \frac{y_\alpha(\alpha, t)}{\sqrt{x_\alpha^2(\alpha, t) + y_\alpha^2(\alpha, t)}}. \quad (2.21)$$

Поэтому получаем

$$v_n = \frac{-x_t(\alpha, t) y_\alpha(\alpha, t) + y_t(\alpha, t) x_\alpha(\alpha, t)}{\sqrt{x_\alpha^2(\alpha, t) + y_\alpha^2(\alpha, t)}}. \quad (2.22)$$

Обозначая переменную интегрирования через v , под знаками интеграла имеем:

$$v_n = \frac{-x_t(v, t)y_v(v, t) + y_t(v, t)x_v(v, t)}{\sqrt{x_v^2(v, t) + y_v^2(v, t)}};$$

$$\frac{\partial}{\partial x} \ln \frac{1}{\sqrt{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2}} = -\frac{x(a, t) - x(v, t)}{[x(a, t) - x(v, t)]^2 + [y(a, t) - y(v, t)]^2};$$

$$\frac{\partial}{\partial y} \ln \frac{1}{\sqrt{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2}} = -\frac{y(a, t) - y(v, t)}{[x(a, t) - x(v, t)]^2 + [y(a, t) - y(v, t)]^2};$$

$$d\sigma = \sqrt{x_v^2(v, t) + y_v^2(v, t)} dv;$$

Касательная производная с учетом (2.20) и (2.21) равна:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial s} = \frac{\partial \varphi}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial s} + \frac{\partial \varphi}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial s} = \frac{\varphi_x \cdot x_a(a, t) + \varphi_y \cdot y_a(a, t)}{\sqrt{x_a^2(a, t) + y_a^2(a, t)}}.$$

Аналогично получаем

$$\frac{\partial}{\partial s} \ln \frac{1}{\sqrt{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2}} = \frac{[x(a, t) - x(v, t)] x_a(a, t) + [y(a, t) - y(v, t)] y_a(a, t)}{[x(a, t) - x(v, t)]^2 + [y(a, t) - y(v, t)]^2} \cdot \frac{1}{\sqrt{x_a^2(a, t) + y_a^2(a, t)}}.$$

Пределы интегрирования — от a до b .

Внося преобразованные выражения в систему уравнений (2.9), приходим к системе нелинейных интегро-дифференциальных уравнений в частных производных, описывающих движение частиц нефти, прилегающих к контуру нефтеносности (для краткости не будем подставлять выражения (2.15) и (2.16)).

$$x_t(a, t) = -\frac{c_1}{m} \left\{ \left[1 - \lambda \frac{y_a^2(a, t)}{x_a^2(a, t) + y_a^2(a, t)} \right] \varphi_x + \lambda \frac{x_a(a, t)y_a(a, t)}{x_a^2(a, t) + y_a^2(a, t)} \varphi_y \right\} + \frac{\lambda}{\pi} \int_a^b [x_t(v, t)y_v(v, t) - y_t(v, t)x_v(v, t)] \times \left(\frac{\left[1 + \frac{\lambda}{1-\lambda} \frac{x_a^2(a, t)}{x_a^2(a, t) + y_a^2(a, t)} \right] [x(a, t) - x(v, t)]}{[x(a, t) - x(v, t)]^2 + [y(a, t) - y(v, t)]^2} + \frac{\lambda}{1-\lambda} \frac{x_a(a, t)y_a(a, t)}{x_a^2(a, t) + y_a^2(a, t)} \frac{[y(a, t) - y(v, t)]}{[x(a, t) - x(v, t)]^2 + [y(a, t) - y(v, t)]^2} \right) dv, \quad (2.23)$$

$$y_t(a, t) = -\frac{c_1}{m} \left\{ \lambda \frac{x_a(a, t)y_a(a, t)}{x_a^2(a, t) + y_a^2(a, t)} \varphi_x + \left[1 - \lambda \frac{x_a^2(a, t)}{x_a^2(a, t) + y_a^2(a, t)} \right] \varphi_y \right\} + \frac{\lambda}{\pi} \int_a^b [x_t(v, t)y_v(v, t) - y_t(v, t)x_v(v, t)] \times \left(\frac{\lambda}{1-\lambda} \frac{x_a(a, t)y_a(a, t)}{x_a^2(a, t) + y_a^2(a, t)} \frac{[x(a, t) - x(v, t)]}{[x(a, t) - x(v, t)]^2 + [y(a, t) - y(v, t)]^2} + \left[1 - \lambda \frac{x_a^2(a, t)}{x_a^2(a, t) + y_a^2(a, t)} \right] \frac{[y(a, t) - y(v, t)]}{[x(a, t) - x(v, t)]^2 + [y(a, t) - y(v, t)]^2} \right) dv.$$

$$+ \frac{\left[1 + \frac{\lambda}{1-\lambda} \frac{y_a^2(a, t)}{x_a^2(a, t) + y_a^2(a, t)} \right] [y(a, t) - y(v, t)]}{[x(a, t) - x(v, t)]^2 + [y(a, t) - y(v, t)]^2} dv.$$

Следует найти функции $x(a, t)$ и $y(a, t)$, удовлетворяющие этой системе и начальным условиям (2.11).

Система уравнений (2.10), описывающих движение частиц воды, прилегающих к контуру нефтеносности после подстановки преобразованных выражений приобретает вид:

$$x_t(a, t) = -\frac{c_2}{m} \left\{ \left[1 + \lambda \frac{y_a^2(a, t)}{x_a^2(a, t) + y_a^2(a, t)} \right] \varphi_x - \lambda \frac{x_a(a, t)y_a(a, t)}{x_a^2(a, t) + y_a^2(a, t)} \varphi_y \right\} + \frac{\lambda}{\pi} \int_a^b [x_t(v, t)y_v(v, t) - y_t(v, t)x_v(v, t)] \times \left(\frac{\left[1 - \frac{\lambda}{1+\lambda} \frac{x_a^2(a, t)}{x_a^2(a, t) + y_a^2(a, t)} \right] [x(a, t) - x(v, t)]}{[x(a, t) - x(v, t)]^2 + [y(a, t) - y(v, t)]^2} - \frac{\lambda}{1+\lambda} \frac{x_a(a, t)y_a(a, t)}{x_a^2(a, t) + y_a^2(a, t)} \frac{[y(a, t) - y(v, t)]}{[x(a, t) - x(v, t)]^2 + [y(a, t) - y(v, t)]^2} \right) dv; \quad (2.24)$$

$$y_t(a, t) = -\frac{c_2}{m} \left\{ -\lambda \frac{x_a(a, t)y_a(a, t)}{x_a^2(a, t) + y_a^2(a, t)} \varphi_x + \left[1 + \lambda \frac{x_a^2(a, t)}{x_a^2(a, t) + y_a^2(a, t)} \right] \varphi_y \right\} + \frac{\lambda}{\pi} \int_a^b [x_t(v, t)y_v(v, t) - y_t(v, t)x_v(v, t)] \times \left(-\frac{\lambda}{1+\lambda} \frac{x_a(a, t)y_a(a, t)}{x_a^2(a, t) + y_a^2(a, t)} \frac{[x(a, t) - x(v, t)]}{[x(a, t) - x(v, t)]^2 + [y(a, t) - y(v, t)]^2} + \left[1 - \frac{\lambda}{1+\lambda} \frac{y_a^2(a, t)}{x_a^2(a, t) + y_a^2(a, t)} \right] \frac{[y(a, t) - y(v, t)]}{[x(a, t) - x(v, t)]^2 + [y(a, t) - y(v, t)]^2} \right) dv.$$

Начальные условия остаются прежними (см. (2.11)). Как из системы (2.23), так и из системы (2.24) легко получить уравнения для одножидкостного случая. Положим $c_1 = c_2 = c$, $\lambda = 0$, тогда

$$\left. \begin{aligned} x_t(a, t) &= -\frac{c}{m} \varphi_x [x(a, t), y(a, t), t], \\ y_t(a, t) &= -\frac{c}{m} \varphi_y [x(a, t), y(a, t), t], \end{aligned} \right\} \quad (2.25)$$

где φ_x и φ_y даны выражениями (2.15) и (2.16), в которых $c_1 = c_2 = c$. Полагая $\lambda = -1$, получим из (2.23) систему уравнений для случая.

исчезающей вязкости воды (схема Л. С. Лейбензона). Система (2.24) при этом теряет смысл.

Отметим, что в системах уравнений (2.23) и (2.24) интегралы расходящиеся: в точке $v = \alpha$ подинтегральные функции имеют полюс первого порядка. Они существуют в смысле главного значения Коши.

3. Преобразуем также уравнение (1.16), или, что то же самое, (2.2). В этой форме оно нам понадобится в дальнейшем. Можно либо непосредственно преобразовать его так, как это сделано выше с системами (2.9) и (2.10), либо, что проще, использовать соотношение (2.22). Подставляя в (2.22) вместо $x_i(\alpha, t)$ и $y_i(\alpha, t)$ их выражения из (2.23) и сокращая все члены на общий множитель

$$[x_\alpha^2(\alpha, t) + y_\alpha^2(\alpha, t)]^{-1/2},$$

получаем

$$x_i(\alpha, t)y_\alpha(\alpha, t) - y_i(\alpha, t)x_\alpha(\alpha, t) - \frac{\lambda}{\pi} \int_a^b [x_i(v, t)y_v(v, t) - y_i(v, t)x_v(v, t)] \times \\ \times \frac{[x(\alpha, t) - x(v, t)]y_\alpha(\alpha, t) - [y(\alpha, t) - y(v, t)]x_\alpha(\alpha, t)}{[x(\alpha, t) - x(v, t)]^2 + [y(\alpha, t) - y(v, t)]^2} dv = \\ = -\frac{2}{m} \frac{c_1 c_2}{c_1 + c_2} [\varphi_x \cdot y_\alpha(\alpha, t) - \varphi_y \cdot x_\alpha(\alpha, t)]. \quad (2.26)$$

4. Умножим уравнение (2.26) на $-mh d\alpha$ и проинтегрируем его по α в пределах от a до b . Тогда в левой части имеем

$$mh \int_a^b \frac{-x_i(\alpha, t)y_\alpha(\alpha, t) + y_i(\alpha, t)x_\alpha(\alpha, t)}{\sqrt{x_\alpha^2(\alpha, t) + y_\alpha^2(\alpha, t)}} \sqrt{x_\alpha^2(\alpha, t) + y_\alpha^2(\alpha, t)} d\alpha = \\ = mh \int_{(\Gamma)} v_n d\sigma = - \sum_{i=1}^l Q_i(t). \quad (2.27)$$

так как v_n — проекция скорости на внутреннюю нормаль к Γ . Первый член правой части приводится к виду

$$-(1 - \lambda) c_1 h \int_{(\Gamma)} \frac{\partial \varphi}{\partial n} d\sigma = -(1 - \lambda) \sum_{i=1}^l Q_i(t). \quad (2.28)$$

Интеграл вычисляется точно так же, как в п. 10 § 1. Учитывая (2.28) и (2.29), после сокращений получаем:

$$\sum_{i=1}^l Q_i(t) = \frac{mh}{\pi} \int_a^b \int_a^b [x_i(v, t)y_v(v, t) - y_i(v, t)x_v(v, t)] \times \\ \times \frac{[x(\alpha, t) - x(v, t)]y_\alpha(\alpha, t) - [y(\alpha, t) - y(v, t)]x_\alpha(\alpha, t)}{[x(\alpha, t) - x(v, t)]^2 + [y(\alpha, t) - y(v, t)]^2} dv d\theta. \quad (2.29)$$

Это соотношение для случая параметрического задания контура является аналогом соотношения (1.39).

5. Если найдены решения (2.12) системы уравнений (2.23), удовлетворяющие начальным условиям (2.11), то в фиксированный момент времени t_1 они представляют собою параметрические уравнения контура Γ :

$$x = x^+(a, t_1), y = y^+(a, t_1), (a \leq \alpha < b) \quad (2.30)$$

Точно так же параметрические уравнения контура в фиксированный момент времени получаем из решений (2.13) системы (2.24).

Следует отметить, что для пространственного случая (см. уравнение движения (1.19)) при параметрическом задании начальной поверхности Σ_0 можно провести рассуждения, аналогичные вышеизложенным.

§ 3. Численный метод решения задачи прослеживания контура нефтеносности. 1. В § 1 задача прослеживания звездного контура нефтеносности была сведена к задаче Коши для уравнения (1.32).

Начальное условие, которому должна удовлетворять искомая функция, дано выражением (1.24a). Перепишем это соотношение, полагая в начальный момент $t = t_0$:

$$f(\theta, t_0) = f_0(\theta). \quad (3.1)$$

Это удобно для единообразия обозначений в дальнейшем. Положим в уравнении (1.32) $t = t_0$.

$$f(\theta, t_0)f_i(\theta, t_0) - \frac{\lambda}{\pi} \int_0^{2\pi} f(v, t_0)f_i(v, t_0) \times \\ \times \frac{f^2(\theta, t_0) - f(\theta, t_0)f(v, t_0)\cos(\theta - v) - f_0(\theta, t_0)f(v, t_0)\sin(\theta - v)}{f^2(\theta, t_0) - 2f(\theta, t_0)f(v, t_0)\cos(\theta - v) + f^2(v, t_0)} dv = \\ = \frac{1}{2\pi mh} \sum_{i=1}^{l+1} \tilde{Q}_i(t) \frac{f^2(\theta, t_0) - f(\theta, t_0)\rho_i \cos(\theta - \alpha_i) - f_0(\theta, t_0)\rho_i \sin(\theta - \alpha_i)}{f^2(\theta, t_0) - 2f(\theta, t_0)\rho_i \cos(\theta - \alpha_i) + \rho_i^2}. \quad (3.2)$$

Обращаясь к условию (3.1) и обозначая $f(\theta, t_0)f_i(\theta, t_0) = u(\theta)$, видим, что функция $u(\theta)$ удовлетворяет линейному интегральному уравнению Фредгольма второго рода:

$$u(\theta) + \lambda \int_a^b u(v)K(\theta, v)dv = L(\theta), \quad (3.2a)$$

причем в случае гладкого контура Γ_0 ядро $K(\theta, v)$ и правая часть $L(\theta)$ — непрерывные функции своих аргументов. Сопоставляя выражения (1.12) и (1.27), получаем:

$$u(\theta) = -\frac{2}{m} \frac{c_1 c_2}{c_2 - c_1} \pi \rho(\theta, t_0) \sqrt{f^2(\theta, t_0) + f_0^2(\theta, t_0)}. \quad (3.3)$$

Но функция $\rho(\theta, t_0)$ удовлетворяет уравнению (см. (1.18))

$$\pi \rho - \lambda \int_{(\Gamma_0)} \rho \frac{\partial}{\partial n} \ln \frac{1}{\sqrt{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2}} d\sigma = \lambda \frac{\partial \varphi}{\partial n} \Big|_{\Gamma_0},$$

существование и единственность решения которого были показаны в работе [12]. Вследствие этого и решение уравнения (3.2) существует и единственно. Для произвольного контура $u(\theta)$ можно найти различными приближенными методами, например, сведением к системе линейных алгебраических уравнений [16]. При простых геометрических формах контура Γ_0 удается получить точное решение уравнения (4.2), либо найти начальное распределение давлений, то из формул

Если известно начальное распределение давлений, то из формул (1.11) и (3.3) имеем:

$$u(\theta) = \frac{1}{m} \frac{c_1 c_2}{c_2 - c_1} \sqrt{f^2(\theta, t_0) + f_0^2(\theta, t_0)} \left(\frac{\partial p^+}{\partial n} - \frac{\partial p^-}{\partial n} \right).$$

Из вышесказанного следует, что функцию $u(\theta)$ можно найти. Далее мы ее считаем известной.

2. Проинтегрируем уравнение (1.32) по t в пределах $t_0 \rightarrow t$.

Замечая, что

$$f(\theta, t) f_t(\theta, t) = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} f^2(\theta, t)$$

и удовлетворяя начальному условию (3.1), находим:

$$f^2(\theta, t) = f_0^2(\theta) + \frac{1}{\pi m h} \sum_{l=1}^{j+1} \tilde{Q}_l(\tau) \times \\ \times \frac{f^2(\theta, \tau) - f(\theta, \tau) \rho_l \cos(\theta - \alpha_l) - f_0(\theta, \tau) \rho_l \sin(\theta - \alpha_l)}{f^2(\theta, \tau) - 2f(\theta, \tau) \rho_l \cos(\theta - \alpha_l) + \rho_l^2} d\tau + \\ + \frac{2\lambda}{\pi} \int_0^{2\pi} f(v, \tau) f_t(v, \tau) \times \\ \times \frac{f^2(\theta, \tau) - f(\theta, \tau) f(v, \tau) \cos(\theta - v) - f_0(\theta, \tau) f(v, \tau) \sin(\theta - v)}{f^2(\theta, \tau) - 2f(\theta, \tau) f(v, \tau) \cos(\theta - v) + f^2(v, \tau)} dv d\tau. \quad (3.5)$$

Чтобы определить функцию $f(\theta, t)$, разобьем промежуток времени $(t - t_0)$ на n малых интервалов точками $t_1, t_2, \dots, t_{k-1}, t_k, \dots, t_{n-1}$ ($t_n = t$). Введем обозначение

$$t_k - t_{k-1} = \Delta t_k \quad (k = 1, 2, \dots, n). \quad (3.6)$$

Положим в уравнении (3.5) $t = t_1$. При $Q_l(\tau)$ — непрерывных функциях времени ввиду малости интервала интегрирования мы не внесем существенной погрешности, если заменим подинтегральные выражения их значениями при нижнем пределе, то есть при $\tau = t_0$. Получаем приближенное соотношение:

$$f^2(\theta, t_1) = f_0^2(\theta) + \Delta t_1 \left[\frac{1}{\pi m h} \sum_{l=1}^{j+1} \tilde{Q}_l(t_0) \times \right. \\ \times \frac{f^2(\theta, t_0) - f(\theta, t_0) \rho_l \cos(\theta - \alpha_l) - f_0(\theta, t_0) \rho_l \sin(\theta - \alpha_l)}{f^2(\theta, t_0) - 2f(\theta, t_0) \rho_l \cos(\theta - \alpha_l) + \rho_l^2} + \\ \left. + \frac{2\lambda}{\pi} \int_0^{2\pi} f(v, t_0) f_t(v, t_0) \times \right. \\ \left. \times \frac{f^2(\theta, t_0) - f(\theta, t_0) f(v, t_0) \cos(\theta - v) - f_0(\theta, t_0) f(v, t_0) \sin(\theta - v)}{f^2(\theta, t_0) - 2f(\theta, t_0) f(v, t_0) \cos(\theta - v) + f^2(v, t_0)} dv \right]. \quad (3.7)$$

В квадратных скобках, если учесть сказанное в п. 1, все величины либо известны, либо могут быть вычислены (как, например, $f_0(\theta, t_0)$ — из выражения (3.1)). Соотношение (3.7) тем точнее, чем меньше величина Δt_1 .

Перейдем к моменту времени t_2 . При этом за исходный контур примем $f(\theta, t_1)$. Тогда, повторяя рассуждения, относящиеся к первому интервалу времени, находим

$$f^2(\theta, t_2) = f^2(\theta, t_1) + \Delta t_2 \left[\frac{1}{\pi m h} \sum_{l=1}^{j+1} \tilde{Q}_l(t_1) \times \right. \\ \times \frac{f^2(\theta, t_1) - f(\theta, t_1) \rho_l \cos(\theta - \alpha_l) - f_0(\theta, t_1) \rho_l \sin(\theta - \alpha_l)}{f^2(\theta, t_1) - 2f(\theta, t_1) \rho_l \cos(\theta - \alpha_l) + \rho_l^2} + \\ \left. + \frac{\lambda}{\pi} \int_0^{2\pi} 2f(v, t_1) f_t(v, t_1) \times \right. \\ \left. \times \frac{f^2(\theta, t_1) - f(\theta, t_1) f(v, t_1) \cos(\theta - v) - f_0(\theta, t_1) f(v, t_1) \sin(\theta - v)}{f^2(\theta, t_1) - 2f(\theta, t_1) f(v, t_1) \cos(\theta - v) + f^2(v, t_1)} dv \right]. \quad (3.8)$$

Стоящее под интегралом значение $2f(v, t_1) f_t(v, t_1)$ равно производной по t_1 от выражения (3.7):

$$2f(\theta, t_1) f_t(\theta, t_1) = \\ = \frac{1}{\pi m h} \sum_{l=1}^{j+1} \tilde{Q}_l(t_0) \frac{f^2(\theta, t_0) - f(\theta, t_0) \rho_l \cos(\theta - \alpha_l) - f_0(\theta, t_0) \rho_l \sin(\theta - \alpha_l)}{f^2(\theta, t_0) - 2f(\theta, t_0) \rho_l \cos(\theta - \alpha_l) + \rho_l^2} + \\ + \frac{\lambda}{\pi} \int_0^{2\pi} 2f(v, t_0) f_t(v, t_0) \times \\ \times \frac{f^2(\theta, t_0) - f(\theta, t_0) f(v, t_0) \cos(\theta - v) - f_0(\theta, t_0) f(v, t_0) \sin(\theta - v)}{f^2(\theta, t_0) - 2f(\theta, t_0) f(v, t_0) \cos(\theta - v) + f^2(v, t_0)} dv, \quad (3.9)$$

которая совпадает с уже вычисленным выражением, стоящим в квадратных скобках формулы (3.7).

Производная $f_0(\theta, t_1)$ находится дифференцированием $f(\theta, t_1)$ по θ . Можно дать ее аналитическое выражение, но так как практически интеграл в (3.7) при произвольном контуре Γ_0 приходится брать численным методом, то и производную $f(\theta, t_1)$ естественно определять путем численного дифференцирования. Удобно с этой целью применить формулы центральных производных [17].

Для t_1

$$f(\theta, t_1) f_t(\theta, t_1) = f(\theta, t_0) f_t(\theta, t_0).$$

Аналогичны вычисления для момента времени t_2 и т. д. Приведем формулы расчета положения контура в конце k -го интервала.

$$f^2(\theta, t_k) = f^2(\theta, t_{k-1}) + \Delta t_k \left[\frac{1}{\pi m h} \sum_{l=1}^{j+1} \tilde{Q}_l(t_{k-1}) \times \right. \\ \times \frac{f^2(\theta, t_{k-1}) - f(\theta, t_{k-1}) \rho_l \cos(\theta - \alpha_l) - f_0(\theta, t_{k-1}) \rho_l \sin(\theta - \alpha_l)}{f^2(\theta, t_{k-1}) - 2f(\theta, t_{k-1}) \rho_l \cos(\theta - \alpha_l) + \rho_l^2} + \\ \left. + \frac{\lambda}{\pi} \int_0^{2\pi} 2f(v, t_{k-1}) f_t(v, t_{k-1}) \times \right. \\ \left. \times \frac{f^2(\theta, t_{k-1}) - f(\theta, t_{k-1}) f(v, t_{k-1}) \cos(\theta - v) - f_0(\theta, t_{k-1}) f(v, t_{k-1}) \sin(\theta - v)}{f^2(\theta, t_{k-1}) - 2f(\theta, t_{k-1}) f(v, t_{k-1}) \cos(\theta - v) + f^2(v, t_{k-1})} dv \right]. \quad (3.10)$$

где

$$2f(v, t_{k-1}) f_t(v, t_{k-1}) = \frac{1}{\pi m h} \sum_{l=1}^{j+1} \tilde{Q}_l(t_{k-2}) \times \\ \times \frac{f^2(\theta, t_{k-2}) - f(\theta, t_{k-2}) \rho_l \cos(\theta - \alpha_l) - f_0(\theta, t_{k-2}) \rho_l \sin(\theta - \alpha_l)}{f^2(\theta, t_{k-2}) - 2f(\theta, t_{k-2}) \rho_l \cos(\theta - \alpha_l) + \rho_l^2} + \\ + \frac{\lambda}{\pi} \int_0^{2\pi} 2f(v, t_{k-2}) f_t(v, t_{k-2}) \times \\ \times \frac{f^2(\theta, t_{k-2}) - f(\theta, t_{k-2}) f(v, t_{k-2}) \cos(\theta - v) - f_0(\theta, t_{k-2}) f(v, t_{k-2}) \sin(\theta - v)}{f^2(\theta, t_{k-2}) - 2f(\theta, t_{k-2}) f(v, t_{k-2}) \cos(\theta - v) + f^2(v, t_{k-2})} dv. \quad (3.11)$$

Выражение (3.11) уже вычислено в расчетах $(k-1)$ -го интервала.

3. Указанный способ сходен с „методом ломаных“, применяемым для построения интегральной кривой обыкновенного дифференциального уравнения первого порядка.

Нетрудно предложить также аналоги „усовершенствованного метода ломаных“, „усовершенствованного метода Эйлера-Коши“ и других, в которых большая точность достигается за счет увеличения объема расчетов на каждом этапе [27].

Для обеспечения достаточной точности вычислений можно применить прием сравнения с решением при уменьшенном шаге по времени (и по углу θ). Например, исходя от одного и того же $f(\theta, t_{k-1})$, результат вычислений при принятом Δt_k сравнивают с результатом вычислений после двух шагов по $\frac{1}{2} \Delta t_k$ каждый. Малость разности

результатов и является показателем достаточной точности при взятом Δt_k . В случае заметного расхождения необходимо перейти на меньшую величину шага по времени. Это приходится делать при приближении контура к скважине.

Численный способ позволяет последовательно, этап за этапом, строить положения контура Γ в моменты времени $t_1, t_2, \dots, t_{n-1}, t$. При этом на каждом этапе производятся операции численного интегрирования и дифференцирования, чему не препятствует наличие на начальном контуре Γ_0 конечного числа угловых точек; только при подходе к таким точкам следует применять формулы крайних производных, так как функция $f_0(\theta, t)$ в них терпит разрыв первого рода.

П. Я. Полубаринова-Кочина, Л. А. Галин, а затем П. П. Куфарев и Ю. П. Виноградов при аналитическом решении ряда частных задач в постановке Л. С. Лейбензона ($\lambda = -1$) показали появление точек возврата на первоначально гладком контуре еще до подхода к скважине [18]—[21]. Замечание по этому поводу имеется и у М. Н. Тихова [22]. Численным методом обнаружить появление таких точек не представляется возможным. Поэтому, строго говоря, он пригоден при отсутствии этих точек или до момента их появления.

4. Контрольное соотношение (1.39) для момента времени t_k с учетом обозначения (1.33) принимает вид:

$$\sum_{i=1}^j \tilde{Q}_i(t_k) = (1 - \lambda) \frac{mh}{\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} f(v, t_k) f_i(v, t_k) \times \\ \times \frac{f^2(\theta, t_k) - f(\theta, t_k) f(v, t_k) \cos(\theta - v) - f_0(\theta, t_k) f(v, t_k) \sin(\theta - v)}{f^2(\theta, t_k) - 2f(\theta, t_k) f(v, t_k) \cos(\theta - v) + f^2(v, t_k)} dv d\theta. \quad (3.12)$$

§ 4. Численный метод определения траекторий частиц жидкости, прилегающих к границе раздела. 1. В § 2 были получены система уравнений движения частиц нефти (2.23) и система уравнений движения частиц воды (2.24), прилегающих к контуру нефтеносности. Для решения и той и другой может быть применен по существу тот же численный метод, который приведен в § 3. Покажем это на примере системы (2.23).

Во-первых, перепишем начальные условия (2.11), вводя t_0 вместо $t = 0$:

$$\begin{aligned} x(a, t_0) &= x_0(a), \\ y(a, t_0) &= y_0(a). \end{aligned} \quad (a \leq a < b) \quad (4.1)$$

Уравнение (2.26) для начального момента t_0 таково:

$$\begin{aligned} &x_t(a, t_0) y_a(a, t_0) - y_t(a, t_0) x_a(a, t_0) - \\ &- \frac{\lambda}{\pi} \int_a^b [x_t(v, t_0) y_v(v, t_0) - y_t(v, t_0) x_v(v, t_0)] \times \\ &\times \frac{[x(a, t_0) - x(v, t_0)] y_a(a, t_0) - [y(a, t_0) - y(v, t_0)] x_a(a, t_0)}{[x(a, t_0) - x(v, t_0)]^2 + [y(a, t_0) - y(v, t_0)]^2} dv = \\ &= - \frac{2}{m} \frac{c_1 c_2}{c_1 + c_2} \{ \varphi_x [x(a, t_0), y(a, t_0), t_0] y_a(a, t_0) - \\ &- \varphi_y [x(a, t_0), y(a, t_0), t_0] x_a(a, t_0) \}. \end{aligned} \quad (4.2)$$

Обозначая $x_t(a, t_0) y_a(a, t_0) - y_t(a, t_0) x_a(a, t_0) = w(a)$ и принимая во внимание условия (4.1), видим, что соотношение (4.2) сокращенно можно записать в форме:

$$w(a) + \lambda \int_a^b w(v) K_1(a, v) dv = L_1(a), \quad (4.3)$$

где $K_1(a, v)$ и $L_1(a)$ — известные функции своих аргументов. Они непрерывны для гладкого контура Γ_0 . Следовательно, функция $w(a)$ удовлетворяет уравнению Фредгольма второго рода (4.3). Она существует и единственна.

Ее можно определить с необходимой степенью точности при произвольной форме Γ_0 (см. п. 1, § 3).

Если известно начальное распределение давлений, то находим $w(a)$ из следующих соображений. Сравним выражения (1.12) и (2.22) и вспоминая, что $v_n = - \frac{\partial F}{\partial t} / \frac{\partial F}{\partial n}$, получаем:

$$w(a) = - \frac{2}{m} \frac{c_1 c_2}{c_2 - c_1} \pi p(a, t_0) \sqrt{x_a^2(a, t_0) + y_a^2(a, t_0)}.$$

С учетом (1.11) окончательно имеем:

$$w(a) = \frac{1}{m} \frac{c_1 c_2}{c_2 - c_1} \sqrt{x_a^2(a, t_0) + y_a^2(a, t_0)} \left(\frac{\partial p^+}{\partial n} - \frac{\partial p^-}{\partial n} \right).$$

Итак, $w(a)$ будем полагать известной.

2. Проинтегрируем уравнения (2.23) по t в пределах от t_0 до t , учитывая начальные данные (4.1):

$$\begin{aligned} x(a, t) &= x_0(a) - \frac{c_1}{m} \left\{ \left[1 - \lambda \frac{y_a^2(a, \tau)}{x_a^2(a, \tau) + y_a^2(a, \tau)} \right] \varphi_x + \right. \\ &+ \lambda \frac{x_a(a, \tau) y_a(a, \tau)}{x_a^2(a, \tau) + y_a^2(a, \tau)} \varphi_y + \left. \frac{\lambda}{\pi} \int_a^b [x_\tau(v, \tau) y_v(v, \tau) - y_\tau(v, \tau) x_v(v, \tau)] \times \right. \\ &\times \left(\frac{\left[1 + \frac{\lambda}{1 - \lambda} \frac{x_a^2(a, \tau)}{x_a^2(a, \tau) + y_a^2(a, \tau)} \right] [x(a, \tau) - x(v, \tau)]}{[x(a, \tau) - x(v, \tau)]^2 + [y(a, \tau) - y(v, \tau)]^2} + \right. \\ &\left. \left. + \frac{\lambda}{1 - \lambda} \frac{x_a(a, \tau) y_a(a, \tau)}{x_a^2(a, \tau) + y_a^2(a, \tau)} \frac{[y(a, \tau) - y(v, \tau)]}{[x(a, \tau) - x(v, \tau)]^2 + [y(a, \tau) - y(v, \tau)]^2} \right) dv \right\} d\tau; \end{aligned} \quad (4.4)$$

$$\begin{aligned}
y(\alpha, t) = & y_0(\alpha) - \frac{c_1}{m} \int_{t_0}^t \left\{ \lambda \frac{x_\alpha(\alpha, \tau) y_\alpha(\alpha, \tau)}{x_\alpha^2(\alpha, \tau) + y_\alpha^2(\alpha, \tau)} \varphi_x + \right. \\
& + \left[1 - \lambda \frac{x_\alpha^2(\alpha, \tau)}{x_\alpha^2(\alpha, \tau) + y_\alpha^2(\alpha, \tau)} \right] \varphi_y + \\
& + \frac{\lambda}{\pi} \int_{\alpha}^{\beta} [x_\tau(\nu, \tau) y_\nu(\nu, \tau) - y_\tau(\nu, \tau) x_\nu(\nu, \tau)] \times \\
& \times \left(\frac{\lambda}{1 - \lambda} \frac{x_\alpha(\alpha, \tau) y_\alpha(\alpha, \tau)}{x_\alpha^2(\alpha, \tau) + y_\alpha^2(\alpha, \tau)} [x(\alpha, \tau) - x(\nu, \tau)] \right. \\
& + \left. \frac{[x(\alpha, \tau) - x(\nu, \tau)]^2 + [y(\alpha, \tau) - y(\nu, \tau)]^2} \right) + \\
& + \left. \frac{\lambda}{1 - \lambda} \frac{y_\alpha^2(\alpha, \tau)}{x_\alpha^2(\alpha, \tau) + y_\alpha^2(\alpha, \tau)} [y(\alpha, \tau) - y(\nu, \tau)] \right) dv \Bigg\} d\tau.
\end{aligned} \quad (4.4)$$

Как и в § 3 разбиваем промежуток $(t - t_0)$ на n малых интервалов точками $t_1, t_2, \dots, t_{k-2}, t_{k-1}, t_k, \dots, t_{n-1}$.

Обозначим стоящие в фигурных скобках подинтегральные выражения в уравнениях (4.4) в первом через $\Phi(\alpha, \tau)$, во втором — через $\Psi(\alpha, \tau)$. Обозначение это условно, так как Φ и Ψ зависят от α и τ не только явно, но и через искомые функции $x(\alpha, \tau)$, $y(\alpha, \tau)$ и их частные производные.

Возьмем момент времени t_1 и, заменяя под интегралами значения функций Φ и Ψ их известными значениями при $t = t_0$, приближенно получим (см. обозначение (3.6)):

$$\left. \begin{aligned}
x(\alpha, t_1) &= x_0(\alpha) + \Delta t_1 \Phi(\alpha, t_0) \\
y(\alpha, t_1) &= y_0(\alpha) + \Delta t_1 \Psi(\alpha, t_0)
\end{aligned} \right\} \quad (4.5)$$

Для перехода к следующему этапу следует найти $x_t(\alpha, t_1)$, $y_t(\alpha, t_1)$, $x_\alpha(\alpha, t_1)$, $y_\alpha(\alpha, t_1)$. Производные по t_1 находятся из (4.5) без труда:

$$x_t(\alpha, t_1) = \Phi(\alpha, t_0), \quad y_t(\alpha, t_1) = \Psi(\alpha, t_0).$$

Производные по α получаем либо аналитически, либо численным дифференцированием из (4.5).

На втором этапе (момент времени t_2) исходными считаем данные конца 1-го этапа. Аналогично рассуждая, приходим к выражениям:

$$\left. \begin{aligned}
x(\alpha, t_2) &= x(\alpha, t_1) + \Delta t_2 \Phi(\alpha, t_1), \\
y(\alpha, t_2) &= y(\alpha, t_1) + \Delta t_2 \Psi(\alpha, t_1).
\end{aligned} \right\}$$

Для момента t_k имеем соотношения:

$$\left. \begin{aligned}
x(\alpha, t_k) &= x(\alpha, t_{k-1}) + \Delta t_k \Phi(\alpha, t_{k-1}), \\
y(\alpha, t_k) &= y(\alpha, t_{k-1}) + \Delta t_k \Psi(\alpha, t_{k-1}),
\end{aligned} \right\} \quad (4.6)$$

где в $\Phi(\alpha, t_{k-1})$ и $\Psi(\alpha, t_{k-1})$ подставлены значения $x(\alpha, t_{k-1})$, $y(\alpha, t_{k-1})$, $x_t(\alpha, t_{k-1}) = \Phi(\alpha, t_{k-2})$, $y_t(\alpha, t_{k-1}) = \Psi(\alpha, t_{k-2})$, $x_\alpha(\alpha, t_{k-1})$ и $y_\alpha(\alpha, t_{k-1})$;

последние два получены численным дифференцированием. Следует обратить особое внимание на вычисление интегралов по α , входящих в функции Φ и Ψ , так как эти интегралы сингулярные.

Так поэтапно, от точки к точке, можно построить множество траекторий частиц нефти, прилегающих к контуру нефтеносности.

Для контроля вычислений на каждом этапе воспользуемся соотношением (2.29). Для момента времени t_k оно записывается в виде:

$$\begin{aligned}
& \sum_{l=1}^k \tilde{Q}_l(t_k) = \\
& = (1 - \lambda) \frac{mh}{\pi} \int_{\alpha}^{\beta} \int_{\alpha}^{\beta} [x_t(\nu, t_k) y_\nu(\nu, t_k) - y_t(\nu, t_k) x_\nu(\nu, t_k)] \times \\
& \times \frac{[x(\alpha, t_k) - x(\nu, t_k)] y_\alpha(\alpha, t_k) - [y(\alpha, t_k) - y(\nu, t_k)] x_\alpha(\alpha, t_k)}{[x(\alpha, t_k) - x(\nu, t_k)]^2 + [y(\alpha, t_k) - y(\nu, t_k)]^2} dv d\alpha.
\end{aligned}$$

Та же процедура пригодна для решения системы уравнений (2.24), однако необходимо иметь в виду, что система (2.23) приводит к цели при $-1 \leq \lambda \leq 0$, а система (2.24) при $\lambda = -1$ вырождается.

3. Можно сделать одно полезное для расчетов замечание. Так как вязкость воды меньше вязкости нефти, то коэффициент текучести нефти c_1 меньше коэффициента текучести воды c_2 . Из соотношения (2.5) ясно, что касательная скорость частиц нефти v_s^+ меньше, чем касательная скорость частиц воды v_s^- . Нормальная же их скорость v_n одинакова. Поэтому за данный промежуток времени перемещение частиц воды больше, чем перемещение частиц нефти.

Если рассматриваемый промежуток времени $(t - t_0)$ разбить на n частей, то абсолютная величина ошибки при построении траекторий частиц нефти будет меньше, чем при построении траекторий частиц воды.

Отсюда вывод: при построении траекторий (в конечном счете, контура нефтеносности) по приведенному выше методу следует пользоваться системой для частиц нефти, то есть системой (2.23).

Разумеется, в задаче о распространении воды, нагнетаемой в нефтенасыщенную часть залежи, которая встречается при внутриконтурном заводнении, следует вести расчеты, исходя, наоборот, из системы (2.24), так как в этом случае именно она описывает движение частиц нефти.

§ 5. Графоаналитическое построение последовательных положений контура нефтеносности. 1. Запишем уравнение (2.2) в виде:

$$v_n(s, t) = -\frac{2}{m} \frac{c_1 c_2}{c_1 + c_2} \frac{\partial \varphi}{\partial n} + \frac{\lambda}{\pi} \int_{(r)} v_n(\alpha, t) \frac{\cos(r_{s\alpha}, n_s)}{r} d\alpha. \quad (5.1)$$

Здесь учтено, что [23]:

$$\frac{\partial}{\partial n} \ln \frac{1}{\sqrt{(\alpha - \xi)^2 + (y - \eta)^2}} = -\frac{\cos(r_{s\alpha}, n_s)}{r} = \frac{\cos(r_{s\alpha}, n_s)}{r}.$$

Обозначение $r_{s\alpha}$ указывает, что вектор r направлен от точки интегрирования $\sigma(\xi, \eta)$ к точке $s(x, y)$, $r_{s\alpha}$ — наоборот. Функция $\varphi(x, y, t)$ известна. На известном контуре нетрудно найти

$$\frac{\partial \varphi}{\partial n} = \frac{\partial \varphi}{\partial x} \cos(n, x) + \frac{\partial \varphi}{\partial y} \cos(n, y).$$

$\cos(n, x)$, $\cos(n, y)$ можно определить графически, также из чертежа определяются величины $r = \sqrt{(x - \xi)^2 + (y - \eta)^2}$ и $\cos(r_{s\alpha}, n_s)$ (рис. 4).

Таким образом, при известном контуре интегрирования уравнение (5.1) представляет собой интегральное уравнение Фредгольма второго рода относительно нормальной скорости контура v_n или совпадающей с ней проекции на внутреннюю нормаль скорости движения частиц нефти (воды), прилегающих к контуру. Существование и единственность решения его при известных условиях гладкости Γ обеспечены существованием и единственностью плотностью ρ , от которой v_n отличается лишь постоянным множителем: из (1.6) и (1.12) следует:

$$\rho(s, t) = \left(\frac{1}{c_1} - \frac{1}{c_2} \right) \frac{m}{2\pi} v_n(s, t). \quad (5.2)$$

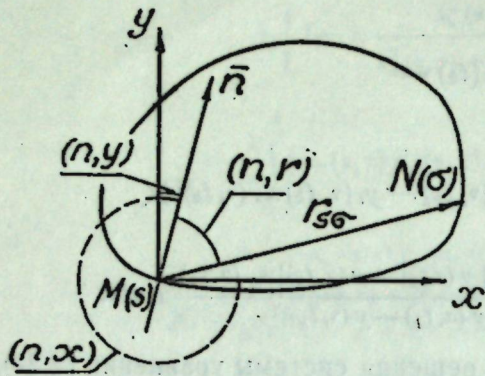


Рис. 4.

2. Исходя из вышеприведенных соображений и имея начальный контур Γ_0 , можно предложить следующие два пути графоаналитического решения задачи прослеживания.

Способ 1. Запишем уравнение (5.1) для начального момента времени $t = t_0$:

$$v_n(s, t_0) - \frac{\lambda}{\pi} \int_{(\Gamma_0)} v_n(\sigma, t_0) \frac{\cos(r_{s\sigma}, n_s)}{r} d\sigma = - \frac{2}{m} \frac{c_1 c_2}{c_1 + c_2} \frac{\partial \varphi}{\partial n}. \quad (5.3)$$

Решение этого интегрального уравнения $v_n(s, t_0)$ можно в случае произвольной формы Γ_0 найти приближенными методами, например, сведением к системе линейных алгебраических уравнений [16]. Отметим, что в точке $\sigma = s$ ядро уравнения (5.3) принимает вид $\frac{0}{0}$, однако при гладком контуре неопределенность эта, как известно из общей теории, легко устраняется:

$$\lim_{\sigma \rightarrow s} \frac{\cos(r_{s\sigma}, n_s)}{r} = \frac{1}{2R(s)},$$

где $R(s)$ — радиус кривизны контура Γ_0 в точке s .

При численных расчетах по точкам значение ядра в точке $\sigma = s$ можно найти интерполяцией, так как ядро — непрерывная функция σ .

С другой стороны, нормальная скорость контура Γ [1]

$$v_n = \frac{dn}{dt}. \quad (5.4)$$

Возьмем малый интервал времени $\Delta t_1 = t_1 - t_0$. Перепишем соотношение (6.4) в конечных разностях:

$$v_n = \frac{\Delta n}{\Delta t}$$

и, применительно к интервалу Δt_1 , по теореме Роля имеем:

$$\Delta n = v_n(s, t_0 + \delta \Delta t_1) \cdot \Delta t_1, \quad 0 \leq \delta \leq 1. \quad (5.5)$$

Допуская некоторую ошибку, которая тем меньше, чем меньше Δt_1 , можно на основании (5.5) положить

$$\Delta n_1 = v_n(s, t_0) \Delta t_1. \quad (5.6)$$

Отложим перемещение Δn_1 в каждой точке s по нормали к контуру Γ_0 . При этом положительному значению Δn_1 соответствует

перемещение по внутренней нормали, а отрицательному — по внешней. Проведем через концы векторов Δn_1 плавную кривую, которая дает положение контура Γ_1 в момент времени t_1 .

Далее все рассуждения повторяются, причем за исходный контур берется контур Γ_1 .

Таким образом, на каждом этапе требуется решить интегральное уравнение и провести графическое построение контура. На k -м этапе уравнение для определения $v_n(s, t_{k-1})$ имеет вид:

$$v_n(s, t_{k-1}) - \frac{\lambda}{\pi} \int_{(\Gamma_{k-1})} v_n(\sigma, t_{k-1}) \frac{\cos(r_{s\sigma}, n_s)}{r} d\sigma = - \frac{2}{m} \frac{c_1 c_2}{c_1 + c_2} \frac{\partial \varphi(s, t_{k-1})}{\partial n} \Big|_{\Gamma_{k-1}}. \quad (5.7)$$

Перемещение контура:

$$\Delta n_k = v_n(s, t_{k-1}) \Delta t_k. \quad (5.8)$$

Способ II. Решение интегрального уравнения производится лишь на первом этапе. Решив (5.2) и имея $v_n(s, t_0)$, вычисляем перемещение по нормали к Γ_0 за промежуток времени Δt_1

$$\Delta n_1 = v_n(s, t_0) \cdot \Delta t_1$$

и строим контур Γ_1 .

Запишем уравнение (5.1) для момента t_1 :

$$v_n(s, t_1) = - \frac{2}{m} \frac{c_1 c_2}{c_1 + c_2} \frac{\partial \varphi(s, t_1)}{\partial n} \Big|_{\Gamma_1} + \frac{\lambda}{\pi} \int_{(\Gamma_1)} v_n(\sigma, t_1) \frac{\cos(r_{s\sigma}, n_s)}{r} d\sigma.$$

В правой части под интегралом вместо $v_n(\sigma, t_1)$ подставим известную величину $v_n(\sigma, t_0)$:

$$v_n(s, t_1) = - \frac{2}{m} \frac{c_1 c_2}{c_1 + c_2} \frac{\partial \varphi(s, t_1)}{\partial n} \Big|_{\Gamma_1} + \frac{\lambda}{\pi} \int_{(\Gamma_1)} v_n(\sigma, t_0) \frac{\cos(r_{s\sigma}, n_s)}{r} d\sigma.$$

По этому приближенному значению строим Γ_2 :

$$\Delta n_2 = v_n(s, t_1) \cdot \Delta t_2.$$

Повторяя все рассуждения, для k -го этапа имеем:

$$v_n(s, t_{k-1}) = - \frac{2}{m} \frac{c_1 c_2}{c_1 + c_2} \frac{\partial \varphi(s, t_{k-1})}{\partial n} \Big|_{\Gamma_{k-1}} + \frac{\lambda}{\pi} \int_{(\Gamma_{k-1})} v_n(\sigma, t_{k-2}) \frac{\cos(r_{s\sigma}, n_s)}{r} d\sigma, \quad (5.9)$$

$$\Delta n_k = v_n(s, t_{k-1}) \cdot \Delta t_k. \quad (5.10)$$

По способу II на всех этапах, кроме первого, приходится вычислять определенный интеграл и производить графическое построение контура.

Именно второй способ по существу аналогичен численным методам, приведенным в §§ 3 и 4 с тем отличием, что в § 3 контур строится по радиальной составляющей скорости, в § 4 — по проекциям скорости частиц на оси x и y , а здесь — непосредственно по нормальной скорости. Указанные выше I и II способы применимы, как легко видеть, для звездных и незвездных контуров.

§ 6. Некоторые замечания. 1. Изложенные в §§ 3 и 4 численные методы опираются на предположение о существовании и единствен-

ности решения задачи Коши для соответствующих интегро-дифференциальных уравнений.

Существование и единственность решения как уравнения (1.32), так и систем уравнений (2.23) и (2.24) при соответствующих начальных условиях не доказаны, хотя и являются физически очевидными по крайней мере в окрестности $t = t_0$.

Вопрос этот заслуживает специального исследования.

2. Уравнение (1.32) можно представить в виде

$$f(\theta, t) f_t(\theta, t) = \frac{1}{2\pi mh} \sum_{i=1}^{j+1} Q_i(t) \omega_i +$$

$$+ \lambda \left[-\frac{1}{2\pi mh} \sum_{i=1}^j Q_i(t, \omega_i) + \frac{1}{2\pi mh} \sum_{i=j+1}^{j+1} Q_i(t) \omega_i + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(v, t) f_t(v, t) \times \right.$$

$$\left. \times \frac{f^2(\theta, t) - f(\theta, t) f(v, t) \cos(\theta - v) - f_0(\theta, t) f(v, t) \sin(\theta - v)}{f^2(\theta, t) - 2f(\theta, t) f(v, t) \cos(\theta - v) + f^2(v, t)} dv \right], \quad (6.1)$$

где

$$\omega_i = \frac{f^2(\theta, t) - f(\theta, t) \rho_i \cos(\theta - \alpha_i) - f_0(\theta, t) \rho_i \sin(\theta - \alpha_i)}{f^2(\theta, t) - 2f(\theta, t) \rho_i \cos(\theta - \alpha_i) + \rho_i^2}$$

Отметим, что члены с коэффициентом λ нетрудно выделить также в уравнениях систем (2.23) и (2.24).

Возможность записи уравнения (1.32) в форме (6.1), а также систем (2.23) и (2.24) в подобной форме открывает путь для применения теории возмущений и метода разложения по степеням малого параметра. См. по этому поводу работу М. Muskat'a [4].

§ 7. Задача о перемещении границы раздела двух жидкостей при дополнительных краевых условиях. 1. До сих пор мы полагали область течения занимающей все пространство, либо всю плоскость.

Однако часто приходится рассматривать течение жидкостей в ограниченных областях.

Условия, налагаемые на гидродинамические параметры на этих границах, могут быть различного рода.

а) Давление на границах задано. Примером является условие $p = \text{const.}$ на контуре питания, а также задание p_c на забое скважины.

б) Условие непроницаемости неподвижных стенок, то есть равенство нулю нормальной составляющей скорости фильтрации. В силу закона Дарси это означает равенство нулю производной $\frac{\partial p}{\partial n}$ на стенках. Примером служат сбросы и границы непроницаемых участков в пласте.

в) Условия на границе раздела участков с различной проницаемостью или мощностью: 1) непрерывность давления: $p_1 = p_2$; 2) равенство нормальных скоростей фильтрации при подходе к границе с обеих сторон. Привлекая закон Дарси, его можно записать в виде

$$k_1 = \frac{\partial p_1}{\partial n} = k_2 \frac{\partial p_2}{\partial n}$$

По этому поводу см., например, [24], [11].

К подобным же условиям на начальном контуре нефтеносности Γ_0 приводит задача о перемещении контура нефтеносности с учетом фазовой проницаемости в зоне вытеснения.

2. Общим приемом, широко используемым при краевых условиях типа а, является нанесение на границу потенциала двойного слоя, а при краевых условиях типа б и в — потенциала простого слоя. Это приводит к интегральному уравнению типа Фредгольма второго рода относительно плотности потенциала на границе.

Покажем это ниже на примере плоской задачи о перемещении контура нефтеносности в пласте, ограниченном контуром питания.

Для пространственных задач отличие лишь в том, что вместо логарифмического потенциала на границе следует непрерывно распределить поверхностные заряды и построить их ньютонов потенциал.

§ 8. Задача о перемещении контура нефтеносности в пласте, ограниченном контуром питания. Формула Дюпюи для двухжидкостной системы. Интегралы Л. С. Лейбензона, М. Muskat'a и В. Н. Щелкачева. 1. Рассмотрим задачу о перемещении контура нефтеносности, сформулированную в § 1, п. 1, с единственным отличием в том, что пласт ограничен контуром питания Γ_1 (рис. 5), на котором во все рассматриваемое время движения сохраняется постоянное давление:

$$p|_{\Gamma_1} = p_0. \quad (8.1)$$

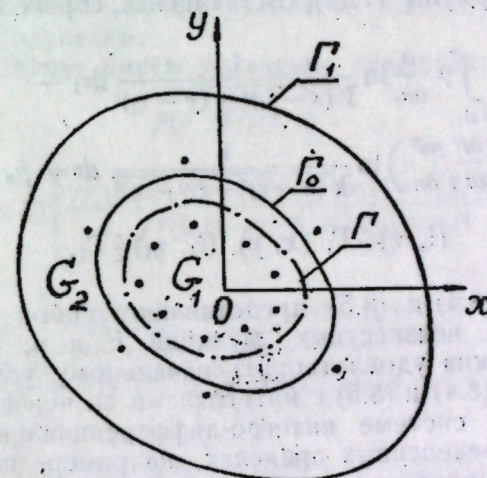


Рис. 5.

Все соотношения, приведенные в § 1, п. 1, остаются в силе.

2. Распределение давления будем отыскивать в виде

$$p(x, y, t) = \varphi(x, y, t) + \int_{(\Gamma)} \rho(\xi, \eta, t) \ln \frac{1}{\sqrt{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2}} d\sigma +$$

$$+ \int_{(\Gamma_1)} \mu(\xi_1, \eta_1, t) \frac{\partial}{\partial n_1} \ln \frac{1}{\sqrt{(x-\xi_1)^2 + (y-\eta_1)^2}} d\sigma_1. \quad (8.2)$$

Здесь $(\xi, \eta) \in \Gamma$, $(\xi_1, \eta_1) \in \Gamma_1$; ρ — плотность логарифмического потенциала простого слоя, непрерывно распределенная по искомому контуру Γ , μ — плотность потенциала двойного слоя, непрерывно распределенная по контуру питания Γ_1 , n_1 — внутренняя нормаль к Γ_1 в точке $\sigma_1(\xi_1, \eta_1)$.

Введем временно обозначение:

$$\varphi^*(x, y, t) = \varphi(x, y, t) + \int_{(\Gamma_1)} \mu(\xi_1, \eta_1, t) \frac{\partial}{\partial n_1} \ln \frac{1}{\sqrt{(x-\xi_1)^2 + (y-\eta_1)^2}} d\sigma_1. \quad (8.3)$$

Тогда путем, вполне аналогичным тому, каким было выведено уравнение (1.16), приходим к уравнению:

$$\left(\frac{\partial F}{\partial t} / \frac{\partial F}{\partial n}\right) - \frac{\lambda}{\pi} \int_{(\Gamma)} \left(\frac{\partial F}{\partial t} / \frac{\partial F}{\partial n}\right) \frac{\partial}{\partial n} \ln \frac{1}{\sqrt{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2}} d\sigma = \frac{2}{m} \frac{c_1 c_2}{c_1 + c_2} \frac{\partial \varphi^*}{\partial n}.$$

Возвращаясь к старым обозначениям, имеем:

$$\begin{aligned} & \left(\frac{\partial F}{\partial t} / \frac{\partial F}{\partial n}\right) - \frac{\lambda}{\pi} \int_{(\Gamma)} \left(\frac{\partial F}{\partial t} / \frac{\partial F}{\partial n}\right) \frac{\partial}{\partial n} \ln \frac{1}{\sqrt{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2}} d\sigma - \\ & - \frac{2}{m} \frac{c_1 c_2}{c_1 + c_2} \int_{(\Gamma)} \mu \frac{\partial}{\partial n} \left[\frac{\partial}{\partial n_1} \ln \frac{1}{\sqrt{(x-\xi_1)^2 + (y-\eta_1)^2}} \right] d\sigma_1 = \frac{2}{m} \frac{c_1 c_2}{c_1 + c_2} \frac{\partial \varphi}{\partial n}, \end{aligned} \quad (8.4)$$

$(x, y), (\xi, \eta) \in \Gamma, (\xi_1, \eta_1) \in \Gamma_1.$

Остается удовлетворить условию (8.1).

Используя выражение (8.2) и условие (8.1), после подстановки значения ρ из формулы (1.12), остающейся справедливой, получаем

$$\begin{aligned} & \pi\mu + \int_{(\Gamma)} \mu \frac{\partial}{\partial n_1} \ln \frac{1}{\sqrt{(x-\xi_1)^2 + (y-\eta_1)^2}} d\sigma_1 - \\ & - \left(\frac{1}{c_1} - \frac{1}{c_2}\right) \frac{m}{2\pi} \int_{(\Gamma)} \left(\frac{\partial F}{\partial t} / \frac{\partial F}{\partial n}\right) \ln \frac{1}{\sqrt{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2}} d\sigma = p_0 - \varphi(x, y, t), \end{aligned} \quad (8.5)$$

$(\xi, \eta) \in \Gamma, (x, y), (\xi_1, \eta_1) \in \Gamma_1.$

Соотношения (8.4) и (8.5) представляют собой систему уравнений относительно неизвестных функций F и μ , причем функция $F(x, y, t) = 0$ должна удовлетворять начальному условию (1.1a).

От уравнений (8.4) и (8.5) с интегралами по неизвестному контуру можно перейти к системе интегро-дифференциальных уравнений с интегралами в определенных пределах, например, переходом к полярной системе координат.

3. Следует отметить, что при простейших геометрических формах Γ_1 , таких как прямая и окружность в плоских задачах и плоскость и сфера — в пространственных, с успехом может быть применен метод зеркальных изображений [24], [25], что позволяет свести задачу к одному уравнению (не вводя неизвестной функции μ).

Покажем это на примере задачи, рассмотренной в п. 2. Будем полагать контур питания Γ_1 окружность радиуса $R > \rho_i$ с центром в начале полярной системы координат.

Применяя метод изображений, получаем, что давление в пласте следует отыскивать в форме*

$$\begin{aligned} p(r, \theta, t) = \varphi(r, \theta, t) + \int_0^{2\pi} p(\nu, t) \ln \sqrt{\frac{f^2(\nu, t)}{R^2} r^2 - 2rf(\nu, t) \cos(\theta - \nu) + R^2} \times \\ \times \sqrt{f^2(\nu, t) + f^2(\nu, t)} d\nu, \end{aligned} \quad (8.6)$$

* К тому же представлению p можно прийти, исходя из общего метода, основанного на применении функции Грина [28].

где

$$\begin{aligned} \varphi(r, \theta, t) = p_0 + \frac{1}{2\pi h c_1} \sum_{i=1}^j Q_i(t) \ln \sqrt{\frac{\rho_i^2 r^2 - 2r\rho_i \cos(\theta - \alpha_i) + R^2}{r^2 - 2r\rho_i \cos(\theta - \alpha_i) + \rho_i^2}} + \\ + \frac{1}{2\pi h c_2} \sum_{i=j+1}^{j+l} Q_i(t) \ln \sqrt{\frac{\rho_i^2 r^2 - 2r\rho_i \cos(\theta - \alpha_i) + R^2}{r^2 - 2r\rho_i \cos(\theta - \alpha_i) + \rho_i^2}}, \end{aligned} \quad (8.7)$$

ρ — плотность логарифмического потенциала простого слоя, непрерывно распределенная по искомому контуру $f(\theta, t)$, который мы полагаем звездным.

Функция (8.6) удовлетворяет уравнению Лапласа в областях G_1 и G_2 , непрерывна при переходе через контур Γ и на контуре питания Γ_1 (при $r=R$) принимает постоянное значение p_0 .

Остается удовлетворить условию (1.4) на Γ и уравнению движения (1.8a).

Вывод интегро-дифференциального уравнения движения контура в основном аналогичен выводу уравнения (1.32), приведенному в § 1, поэтому мы его опускаем.

Для нашего случая имеем уравнение движения:

$$\begin{aligned} & f(\theta, t) f_t(\theta, t) - \\ & - \frac{\lambda}{\pi} \int_0^{2\pi} f(\nu, t) f_t(\nu, t) \left[\frac{f^2(\theta, t) - f(\theta, t) f(\nu, t) \cos(\theta - \nu) - f_0(\theta, t) f(\nu, t) \sin(\theta - \nu)}{f^2(\theta, t) - 2f(\theta, t) f(\nu, t) \cos(\theta - \nu) + f^2(\nu, t)} - \right. \\ & \left. - \frac{\frac{f^2(\nu, t)}{R^2} f^2(\theta, t) - f(\theta, t) f(\nu, t) \cos(\theta - \nu) - f_0(\theta, t) f(\nu, t) \sin(\theta - \nu)}{\frac{f^2(\nu, t)}{R^2} f^2(\theta, t) - 2f(\theta, t) f(\nu, t) \cos(\theta - \nu) + R^2} \right] d\nu = \\ & = \frac{1}{2\pi m h} \sum_{i=1}^{j+l} \tilde{Q}_i(t) \left[\frac{f^2(\theta, t) - f(\theta, t) \rho_i \cos(\theta - \alpha_i) - f_0(\theta, t) \rho_i \sin(\theta - \alpha_i)}{f^2(\theta, t) - 2f(\theta, t) \rho_i \cos(\theta - \alpha_i) + \rho_i^2} - \right. \\ & \left. - \frac{\frac{\rho_i^2}{R^2} f^2(\theta, t) - f(\theta, t) \rho_i \cos(\theta - \alpha_i) - f_0(\theta, t) \rho_i \sin(\theta - \alpha_i)}{\frac{\rho_i^2}{R^2} f^2(\theta, t) - 2f(\theta, t) \rho_i \cos(\theta - \alpha_i) + R^2} \right], \end{aligned} \quad (8.8)$$

где

$$\tilde{Q}_i(t) = \begin{cases} (1 - \lambda) Q_i(t) & \text{при } i = 1, 2, \dots, j, \\ (1 + \lambda) Q_i(t) & \text{при } i = j+1, j+2, \dots, j+l. \end{cases}$$

Начальное условие, налагаемое на искомую функцию, имеет прежний вид (см. (1.24a)):

$$f(\theta, 0) = f_0(\theta). \quad (8.9)$$

При $R \rightarrow \infty$ из уравнения (8.8) как частный случай вытекает уравнение (1.32).

Решение уравнения (8.8) при начальном условии (8.9) может быть найдено тем же численным методом, который изложен в § 3.

Нетрудно получить и аналог контрольного соотношения (1.39) для нашей задачи.

4. Из формул (1.12) и (1.27), которые остаются в силе, следует:

$$\rho(v, t) = \frac{\lambda}{1-\lambda} \frac{m}{\pi c_1} \frac{f(v, t) f_i(v, t)}{\sqrt{f^2(v, t) + f_i^2(v, t)}} \quad (8.10)$$

Подставляя это выражение в формулу (8.6), получаем:

$$p(r, \theta, t) = \varphi(r, \theta, t) + \frac{\lambda}{1-\lambda} \frac{m}{\pi c_1} \int_0^{2\pi} f(v, t) f_i(v, t) \ln \sqrt{\frac{f^2(v, t)}{R^2} r^2 - 2rf(v, t) \cos(\theta - v) + R^2} \frac{dv}{r^2 - 2rf(v, t) \cos(\theta - v) + f^2(v, t)} \quad (8.11)$$

Если решение уравнения (8.8) найдено, то есть известна функция $f(\theta, t)$, то по формуле (8.11) можно определить давление в любой точке пласта в любой момент времени. Мы воспользуемся ею для определения давления на забоях скважин.

Известно, что в окрестности логарифмической особой точки, какой является точечный источник или сток, изобары ничтожно отклоняются от concentрических окружностей. Поэтому достаточно определить давление в какой-либо точке, отстоящей от центра скважины на расстоянии радиуса забоя r_c .

Положим в (8.11) $r = \rho_k + r_{c_k}$, $\theta = \alpha_k$. В выражении (8.7), учитывая, что

$$\frac{r_{c_k}}{\rho_k} \ll 1, \quad \frac{r_{c_k}}{\rho_i} \ll \ll 1,$$

имеем при $i = k$

$$\sqrt{\frac{\rho_k^2}{R^2} (\rho_k + r_{c_k})^2 - 2(\rho_k + r_{c_k}) \rho_k + R^2} \approx \frac{R \left[1 - \left(\frac{\rho_k}{R} \right)^2 \right]}{r_{c_k}};$$

при $i \neq k$

$$\sqrt{\frac{\rho_i^2}{R^2} (\rho_k + r_{c_k})^2 - 2(\rho_k + r_{c_k}) \rho_i \cos(\alpha_k - \alpha_i) + R^2} \approx \frac{R \left[1 - \left(\frac{\rho_k}{R} \right)^2 \right]}{r_{c_k}} \approx \frac{R \left[1 - \left(\frac{\rho_k}{R} \right)^2 \right]}{r_{c_k}}$$

$$\approx \sqrt{\frac{\rho_i^2}{R^2} \rho_k^2 - 2\rho_k \rho_i \cos(\alpha_k - \alpha_i) + R^2} \approx \frac{R \left[1 - \left(\frac{\rho_k}{R} \right)^2 \right]}{r_{c_k}}$$

Полагая дополнительно

$$\frac{r_{c_k}}{f(v, t)} \ll \ll 1,$$

аналогичное упрощение произведем и под интегралом. Тогда из выражений (8.11) и (8.7) вытекает следующая формула для давления на забое k -й скважины:

$$p_{c_k}(t) = p_0 + \frac{1}{2\pi h c_1} \tilde{Q}_k(t) \ln \frac{R \left[1 - \left(\frac{\rho_k}{R} \right)^2 \right]}{r_{c_k}} + \frac{1}{2\pi h c_1} \sum_{i=1}^{j+l} \tilde{Q}_i(t) \ln \sqrt{\frac{\rho_i^2}{R^2} \rho_k^2 - 2\rho_k \rho_i \cos(\alpha_k - \alpha_i) + R^2} \frac{dv}{\rho_k^2 - 2\rho_k \rho_i \cos(\alpha_k - \alpha_i) + \rho_i^2} + \frac{\lambda}{1-\lambda} \frac{m}{\pi c_1} \int_0^{2\pi} f(v, t) f_i(v, t) \ln \sqrt{\frac{f^2(v, t)}{R^2} \rho_k^2 - 2\rho_k f(v, t) \cos(\alpha_k - v) + R^2} \frac{dv}{\rho_k^2 - 2\rho_k f(v, t) \cos(\alpha_k - v) + f^2(v, t)} \quad (8.12)$$

Здесь \sum' означает, что в сумме нет члена с индексом $i = k$, и для краткости введено обозначение

$$\tilde{Q}_i(t) = \begin{cases} Q_i(t) & \text{при } i = 1, 2, \dots, j; \\ \frac{c_1}{c_2} Q_i(t) & \text{при } i = j+1, j+2, \dots, j+l. \end{cases}$$

При $\lambda = 0$ ($c_1 = c_2$) и $R = 1$ из соотношений (8.12) вытекают соотношения (II.21) для одножидкостной системы [29]. Из выражений (8.12) видно, что после определения уравнения контура $f(\theta, t)$ давление на забое находится простой квадратурой.

5. Теперь мы имеем все необходимое, чтобы рассмотреть задачу о стягивании контура нефтеносности к скважине, когда заданы давление на забое $p_c(t)$ и давление на контуре питания p_0 .

Для упрощения выкладок положим, что в начале координат находится одна нефтяная скважина радиуса r_c . Из (8.12) при $k=1$ и $\rho_k = 0$ имеем:

$$p_c(t) = p_0 + \frac{Q(t)}{2\pi h c_1} \ln \frac{R}{r_c} + \frac{\lambda}{1-\lambda} \frac{m}{\pi c_1} \int_0^{2\pi} f(v, t) f_i(v, t) \ln \frac{R}{f(v, t)} dv,$$

откуда

$$Q(t) = \frac{2\pi h c_1}{\ln \frac{R}{r_c}} \left[p_c - p_0 - \frac{\lambda}{1-\lambda} \frac{m}{\pi c_1} \int_0^{2\pi} f(v, t) f_i(v, t) \ln \frac{R}{f(v, t)} dv \right] \quad (8.13)$$

Это выражение представляет собою обобщение формулы Дюпюи для двухжидкостной системы.

При отсутствии различия вязкостей ($c_1 = c_2$, $\lambda = 0$) оно переходит в известную формулу Дюпюи для пласта, заполненного нефтью:

$$Q(t) = \frac{2\pi h c_1}{\ln \frac{R}{r_c}} (p_c - p_0) \quad (8.14)$$

Сравним дебиты в одножидкостной и двухжидкостной системах при одинаковых значениях давлений на забое p_c и контуре питания p_0 и параметров c_1 , h , R и r_c .

Нетрудно видеть, что добавочный член в квадратных скобках формулы отрицателен. Это следует из того, что $\lambda < 0$, $f(v, t) > 0$, $f_i(v, t) < 0$ (при стягивании к скважине), $R > f(v, t)$. Кроме того, $(p_c - p_0) < 0$. Следовательно, дебит в двухжидкостной системе по абсолютной величине больше, чем в одножидкостной (нефтяной), при одних и тех же геометрических размерах и давлениях на границах. Это ясно и из гидродинамических соображений, так как текучесть двухжидкостной системы в целом выше, чем чисто нефтяной.

Формула (8.13) эффективна лишь тогда, когда известно уравнение контура нефтеносности $f(\theta, t)$, либо функции $f(\theta, t_1)$ и $f_i(\theta, t_1)$ в данный момент t_1 .

Покажем, что $f(\theta, t)$ можно определить, решая задачу Коши для некоторого интегро-дифференциального уравнения.

Для частного случая одной центральной нефтяной скважины ($\rho_k = 0$) правая часть уравнения (8.8) принимает вид:

$$\frac{1-\lambda}{2\pi h} Q(t).$$

Заменим в ней дебит $Q(t)$ его выражением (8.13).

Тогда уравнение (8.8) переходит в следующее:

$$f(\theta, t) f_i(\theta, t) - \frac{\lambda}{\pi} \int_0^{2\pi} f(\nu, t) f_i(\nu, t) \left[B \ln \frac{f(\nu, t)}{R} + \frac{f^2(\theta, t) - f(\theta, t) f(\nu, t) \cos(\theta - \nu) - f_0(\theta, t) f(\nu, t) \sin(\theta - \nu)}{f^2(\theta, t) - 2f(\theta, t) f(\nu, t) \cos(\theta - \nu) + f^2(\nu, t)} \right. \\ \left. - \frac{f^2(\nu, t) / f^2(\nu, t) - f(\theta, t) f(\nu, t) \cos(\theta - \nu) - f_0(\theta, t) f(\nu, t) \sin(\theta - \nu)}{R^2} \right] d\nu = A(t), \quad (8.15)$$

где

$$A(t) = (1 - \lambda) \frac{c_1}{m} \frac{p_c(t) - p_0}{\ln \frac{R}{r_c}}, \quad B = \frac{1}{\ln \frac{R}{r_c}}. \quad (8.16)$$

Начальное условие, которому должна удовлетворять функция $f(\theta, t)$, остается прежним (см. (8.9)).

Численный метод решения уравнения (1.32), приведенный в § 3, можно применить и для решения уравнения (8.15).

При выводе соотношений (8.13) и (8.15) мы полагали $\frac{r_c}{f(\nu, t)} \ll 1$. Если контур приблизился к скважине, то порядок величин r_c и $f(\nu, t)$ одинаков. В этом случае в (8.13) и (8.15) вместо $\ln \frac{R}{f(\nu, t)}$ следует, подставив несколько уточненное значение (условие $p = p_c$ выполнено в точке $r = r_c$, $\theta = \beta$, β — направление наиболее близкой точки контура):

$$\ln \sqrt{\frac{R^2 - 2r_c f(\nu, t) \cos(\beta - \nu) + \frac{f^2(\nu, t)}{R^2} r_c^2}{r_c^2 - 2r_c f(\nu, t) \cos(\beta - \nu) + f^2(\nu, t)}} = \ln \frac{R}{\sqrt{r_c^2 - 2r_c f(\nu, t) \cos(\beta - \nu) + f^2(\nu, t)}}$$

В общем случае, когда имеются j эксплуатационных и l нагнетательных скважин, при известных давлениях на забоях и контуре питания величины дебитов следует выразить через эти давления и искомую функцию из системы линейных неоднородных уравнений (8.12). Затем, подставляя эти выражения в уравнение (8.8), получаем интегро-дифференциальное уравнение движения контура.

6. Если начальный контур нефтеносности является окружностью, концентрической с контуром питания, то нетрудно получить точное аналитическое решение уравнения (8.15). При

$$f(\theta, 0) = R_0 = \text{const}. \quad (8.17)$$

в силу центральной симметрии как краевых, так и начальных условий, граница раздела жидкостей остается окружностью во все время стягивания. Поэтому полагаем $f(\theta, t) \equiv f(t)$ и, следовательно, $f_i(\theta, t) = \frac{df(t)}{dt}$, $f_0(\theta, t) = 0$. Уравнение (8.15) приобретает вид:

$$f \frac{df}{dt} - \frac{\lambda}{\pi} \int_0^{2\pi} f \frac{df}{dt} \left[B \ln \frac{f}{R} + \frac{1}{2} - \frac{\frac{f^4}{R^2} - f^2 \cos(\theta - \nu)}{\frac{f^4}{R^2} - 2f^2 \cos(\theta - \nu) + R^2} \right] d\nu = A(t). \quad (8.18)$$

В данном случае краевое условие на скважине выполняется точно. Если обозначить $\frac{f^2}{R^2} = q$ ($0 < q < 1$), то последнее слагаемое в квадратных скобках под интегралом можно представить в форме:

$$-q \frac{q - \cos(\theta - \nu)}{1 - 2q \cos(\theta - \nu) + q^2} = \sum_{k=1}^{\infty} q^k \cos k(\theta - \nu),$$

откуда ясно, что после интегрирования по ν получаем

$$(1 - \lambda + 2\lambda B \ln R - 2\lambda B \ln f) f df = A(t) dt.$$

Проинтегрируем это уравнение, учитывая начальное условие (8.17):

$$\int_{R_0}^f (1 - \lambda + 2\lambda B \ln R - 2\lambda B \ln f) f df = \int_0^t A(t) dt.$$

Получаем

$$\left(\lambda + \frac{1-\lambda}{B} + 2\lambda \ln \frac{R}{f} \right) f^2 - \left(\lambda + \frac{1-\lambda}{B} + 2\lambda \ln \frac{R}{R_0} \right) R_0^2 = \frac{2}{B} \int_0^t A(t) dt. \quad (8.19)$$

Интеграл (8.19) получен В. Н. Щелкачевым [5].

При частном предположении $R_0 = R$ из (8.19) имеем:

$$\left(\lambda + \frac{1-\lambda}{B} + 2\lambda \ln \frac{R}{f} \right) f^2 - \left(\lambda + \frac{1-\lambda}{B} \right) R^2 = \frac{2}{B} \int_0^t A(t) dt. \quad (8.20)$$

Этот результат дан М. Muskat'ом [3].

Первым из результатов, полученных для радиального стягивания контура в двухжидкостной системе, был интеграл Л. С. Лейбензона [1].

Этот интеграл содержится в (8.19). Положим $c_2 \rightarrow \infty$ (то есть $\lambda = -1$), $A = \text{const}$.

$$\left(1 - \frac{2}{B} + 2 \ln \frac{R}{f} \right) f^2 - \left(1 - \frac{2}{B} + 2 \ln \frac{R}{R_0} \right) R_0^2 = -\frac{2A}{B} t. \quad (8.21)$$

Введем новую переменную:

$$z = \left(\frac{f}{r_c} \right)^2$$

и обозначим $z_0 = \left(\frac{R_0}{r_c} \right)^2$. Кроме того, следует положить $R = R_0$, $r_c = \rho$; $p_0 = p_1$, $p_c = p_2$, $c_1 = k$. Тогда

$$B = \frac{2}{\ln z_0}, \quad A = \frac{4k}{m} \frac{p_2 - p_1}{\ln z_0}.$$

Деля все члены выражения (8.21) на $r_c^2 = \rho^2$, нетрудно привести его к виду

$$z (\ln z - 1) = z_0 (\ln z_0 - 1) - \frac{4k(p_2 - p_1)t}{m\rho^2},$$

в котором оно приведено Л. С. Лейбензоном.

Наконец, при $\lambda = 0$ из (8.19) получаем случай одножидкостного течения:

$$f^2 - R_0^2 = 2 \int_0^1 A(t) dt.$$

Заключение. Изложенные выше вопросы далеко не исчерпывают задач, которые указанным путем могут быть сведены к интегродифференциальным уравнениям и решены численными и графоаналитическими методами §§ 3, 4 и 5.

Таковы, например, задачи о перемещении границы раздела с учетом пониженной фазовой проницаемости для воды в зоне вытеснения, о разрезании пласта рядом нагнетательных скважин, помещенных в нефтяной части.

Приложению данного метода к пространственной задаче о конусообразовании в пластах с подошвенной водой, где приходится учитывать и разность удельных весов, будет посвящена специальная статья.

В дальнейшем предполагается также сопоставить результаты расчета по предложенному методу с известными в литературе точными решениями ряда частных задач в условиях схемы Л. С. Лейбензона и расчетами по приближенным методам.

ЛИТЕРАТУРА

1. Лейбензон Л. С. Нефтепромысловая механика, ч. II, 1934, то же в Собрании трудов, т. II, Подземная гидрогазодинамика, изд. АН СССР, М. 1953.
2. Лейбензон Л. С. Движение природных жидкостей и газов в пористой среде. Гостехиздат, 1947.
3. Маскет М. Течение однородных жидкостей в пористой среде. Гостоптехиздат, 1949.
4. Muskat M. Journ. of Appl. Physics, vol. 8. № 6, June, 1937.
5. Щелкачев В. Н., Лапук Б. Б. Подземная гидравлика. Гостоптехиздат, 1949.
6. Чарный И. А. Подземная гидромеханика, гостехиздат, 1948.
7. Салехов Г. С. Прямые и обратные задачи о продвижении водонефтяного контакта. Изв. Казанск. филиала АН СССР, серия физ.-мат. и техн. наук, вып. 5., 1954.
8. Гусейнов А. И. Об одной задаче теории потенциала. Тр. Азерб. гос. университета, серия матем., т. 1, вып. 1, Баку, 1942.
9. Гусейнов А. И. Об одной задаче теории потенциала. Прикл. матем. и мех., т. 12, вып. 1, 1948.
10. Гринберг Г. А. Избранные вопросы математической теории электрических и магнитных явлений. Изд. АН СССР, 1948.
11. Тумашев Г. Г. К задаче стягивания контура нефтеносности. Уч. записки Казанск. гос. университета. Сборн. работ НИИММ им. Н. Г. Чеботарева, т. 113, кн. 10, 1953.
12. Данилов В. Л. Управление перемещением контура нефтеносности с учетом различия вязкостей воды и нефти. Изв. Казанск. филиала АН СССР, серия физ.-мат. и техн. наук, вып. 8, 1955.
13. Насыров Р. М. Замечание к формуле для скорости перемещения поверхностей. Уч. записки Казанск. гос. университета, т. 116, кн. 1, 1956.
14. Сретенский А. Н. Теория ньютоновского потенциала. Гостехиздат, 1946.
15. Салехов Г. С. Постановка и метод решения гидродинамических задач управления движением контура нефтеносности. Изв. Казанск. филиала АН СССР, серия физ.-мат. и техн. наук, вып. 6, 1955.
16. Канторович Л. В. и Крылов В. И. Приближенные методы высшего анализа, 1950.
17. Мили В. Э. Численный анализ. И. Л. 1951.
18. Галин Л. А. Неустановившаяся фильтрация со свободной поверхностью. Докл. АН СССР, т. 47, № 4, 1945.
19. Полубаринова-Кочина П. Я. К вопросу о перемещении контура нефтеносности. Докл. АН СССР, т. 47, № 4, 1945.
20. Куфарев П. П. Решение задачи о контуре нефтеносности для круга. Докл. АН СССР, т. 60, № 8, 1948.
21. Виноградов Ю. П., Куфарев П. П. Об одной задаче фильтрации. Прикл. матем. и мех. т. 12, № 2, 1948.

22. Тихов М. Н. Несколько замечаний о перемещении контура нефтеносности. Тр. Грозненск. нефт. научно-иссл. ин-та, сборн. работ, вып. II, 1947.
23. Привалов И. И. Интегральные уравнения, ОНТИ, 1937.
24. Полубаринова-Кочина П. Я. О притоке жидкости к скважинам в неоднородной среде. Докл. АН СССР, т. 34, № 1, 1942.
25. Томсон Дж. Дж. Начала математической теории электричества и магнетизма. Изд. Риккера. С.-П. 1901.
26. Булыгин В. Я. К задаче о вытеснении краевой водой нефти из линзы некруглого очертания. Уч. записки Казанск. гос. университета. Сборн. работ НИИММ им. Н. Г. Чеботарева, т. 113, кн. 10, 1953.
27. Коллатц Л. Численные методы решения дифференциальных уравнений, И. Л. 1953.
28. Тумашев Г. Г. Сведение некоторых задач сопряжения функций к интегральным уравнениям. Уч. записки Казанск. гос. университета, т. 116, кн. 1, 1956.
29. Данилов В. Л. Дебит нефтяных скважин при произвольной форме контура питания. Изв. Казанск. филиала АН СССР, сер. физ.-мат. и техн. наук, вып. 5, 1954.

Физико-технический институт
Казанского филиала АН СССР

Поступила 22 декабря 1956 г.

С. Ф. Коротков

ОБ ОДНОЙ ЧАСТНОЙ ЗАДАЧЕ
 ПРОСЛЕЖИВАНИЯ КОНТУРА НЕФТЕНОСНОСТИ

В работе рассматривается задача о перемещении кругового контура нефтеносности (КН) к концентричной ему круговой батарее скважин. Коэффициенты текучести в зонах воды и нефти предполагаются различными. Предлагаемая методика позволяет для ряда моментов времени указать соответствующие кольца, внутри которых заключен КН. Приводится пример расчета.

1. Рассмотрим задачу о стягивании КН в неограниченном пласте постоянной мощности h при водонапорном режиме с учетом различия коэффициентов текучести в зоне нефти $c_1 = \frac{k_1}{\mu_n}$ и зоне воды $c_2 = \frac{k_2}{\mu_w}$.

Пусть начальное положение КН Γ — окружность радиуса R_0 . Разработка месторождения ведется круговой батареей из l равнодебитных скважин с объемными дебитами Q_i и координатами $(\rho_i, \frac{2\pi}{l} i)$ ($i=0, 1, 2, \dots, l-1$) (рис. 1).

Требуется определить закон перемещения КН Γ , который предполагается звездным:

$$F(r, \theta, t) = r - R(\theta, t). \quad (1.1)$$

В работе [1] показано, что определение функции (1.1) сводится к решению задачи Коши для функционального уравнения:

$$m \frac{\partial F}{\partial t} / \frac{\partial F}{\partial n} - \frac{\lambda m}{\pi} \int_{\Gamma} \left(\frac{\partial F}{\partial t} / \frac{\partial F}{\partial n} \right) \frac{\partial}{\partial n} \ln \frac{1}{\sqrt{r^2 - 2rR(\varphi, t) \cos(\theta - \varphi) + R^2(\varphi, t)}} ds = \\ = \frac{(1-\lambda) Q_1}{2\pi h} \sum_{i=0}^{l-1} \frac{\partial}{\partial n} \ln \frac{1}{\sqrt{r^2 - 2r\rho_i \cos(\theta - \frac{2\pi}{l} i) + \rho_i^2}} \quad (1.2)$$

при начальном условии

$$F(r, \theta, 0) = r - R_0 = 0, \quad (1.3)$$

где

$$\lambda = \frac{c_1 - c_2}{c_1 + c_2}, \quad |\lambda| < 1.$$

Здесь n — нормаль к неизвестному контуру Γ , по которому ведется интегрирование. Два последних обстоятельства создают большие трудности для непосредственного решения этой задачи даже при принятых нами упрощающих условиях. Поэтому ниже предлагается метод, позволяющий установить только границы кольца, в котором заключен КН в данный момент времени.

Будем исследовать движение точек КН по главным и нейтральным линиям тока [2], на этих линиях выполняется условие:

$$\frac{\partial}{\partial n} = \pm \frac{\partial}{\partial r}. \quad (1.4)$$

Знак в соотношении (1.4) зависит от выбора направления нормали n к контуру Γ .

Пусть известны точки КН по этим направлениям для некоторого момента времени t_1 :

$$A(R_1, 0) \text{ и } B\left(R_2, \frac{\pi}{l}\right)$$

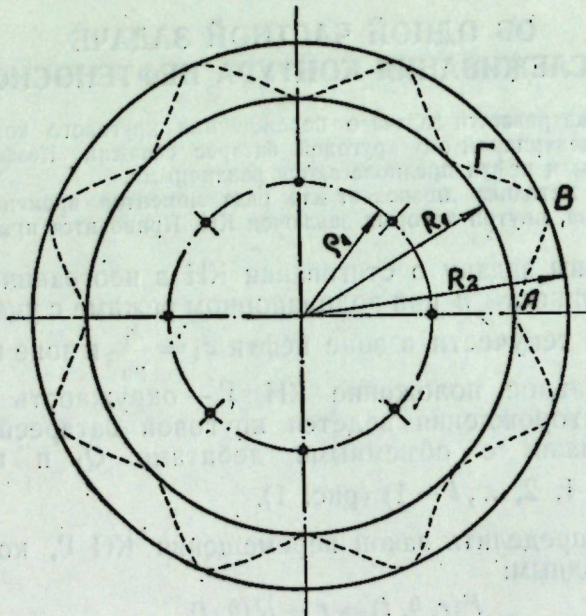


Рис. 1.

(см. рис. 1). Так как КН движется к центру наиболее быстро по главным направлениям, а наиболее медленно по нейтральным, то все остальные его точки в момент t_1 будут находиться в кольце

$$R_1 \leq R(0, t_1) \leq R_2.$$

Как известно [3], нормальная скорость перемещения КН:

$$v_n = - \frac{\partial F}{\partial t} / \frac{\partial F}{\partial n}, \quad (1.5)$$

поэтому соотношение (1.2) для точки $A(R_1, 0)$, учитывая (1.4) и считая нормаль n к Γ внутренней, можно записать в виде:

$$\frac{(1-\lambda)Q_1}{2\pi h} \sum_{i=0}^{l-1} \frac{R_1 - \rho_1 \cos \frac{2\pi}{l} i}{R_1^2 - 2\rho_1 R_1 \cos \frac{2\pi i}{l} + \rho_1^2} - \frac{\lambda}{\pi} \int_{\Gamma} v_n(s, t_1) \frac{R_1 - R(\varphi, t_1) \cos \varphi}{R_1^2 - 2R_1 R(\varphi, t_1) \cos \varphi + R^2(\varphi, t_1)} ds + (v_n)_A = 0. \quad (1.6)$$

В нашей частной задаче v_n величина определено-положительная, поэтому, применив обобщенную теорему о среднем значении интеграла, можем записать:

$$N_1 \int_{\Gamma} v_n(s, t_1) ds \leq \int_{\Gamma} v_n(s, t_1) f_1(\varphi, t_1) ds \leq M_1 \int_{\Gamma} v_n(s, t_1) ds, \quad (1.7)$$

где

$$M_1 = \max_{0 \leq \varphi \leq 2\pi} \{f_1(\varphi, t_1)\}, \quad N_1 = \min_{0 \leq \varphi \leq 2\pi} \{f_1(\varphi, t_1)\},$$

$$f_1(\varphi, t_1) = \frac{R_1 - R(\varphi, t_1) \cos \varphi}{R_1^2 - 2R_1 R(\varphi, t_1) \cos \varphi + R^2(\varphi, t_1)} \quad (1.8)$$

В условиях водонапорного режима выполняется условие:

$$mh \int_{\Gamma} v_n(s, t_1) ds = -Q_1 l. \quad (1.9)$$

Поэтому, заменив в (1.6) интегральный член сначала его верхним, а затем нижним значением из (1.7) и учитывая (1.9), мы получим два значения $(v_n)_A^{(1)}$ и $(v_n)_A^{(2)}$, между которыми заключено истинное значение $(v_n)_A$ на КН Γ .

$$(v_n)_A^{(1)} = - \frac{\lambda Q_1}{\pi h m} M_1 - \frac{(1-\lambda)Q_1}{2\pi h m} \sum_{i=0}^{l-1} \frac{R_1 - \rho_1 \cos \frac{2\pi}{l} i}{R_1^2 - 2\rho_1 R_1 \cos \frac{2\pi i}{l} + \rho_1^2}, \quad (1.10)$$

$$(v_n)_A^{(2)} = - \frac{\lambda Q_1}{\pi h m} N_1 - \frac{(1-\lambda)Q_1}{2\pi h m} \sum_{i=0}^{l-1} \frac{R_1 - \rho_1 \cos \frac{2\pi}{l} i}{R_1^2 - 2\rho_1 R_1 \cos \frac{2\pi i}{l} + \rho_1^2}. \quad (1.11)$$

Аналогичные соотношения можно получить и для нормальной скорости КН в точке $B\left(R_2, \frac{\pi}{l}\right)$:

$$(v_n)_B^{(1)} = - \frac{\lambda Q_1}{\pi h m} M_2 - \frac{(1-\lambda)Q_1}{2\pi h m} \sum_{i=0}^{l-1} \frac{R_2 - \rho_1 \cos \frac{\pi}{l} (1-2i)}{R_2^2 - 2\rho_1 R_2 \cos \frac{\pi}{l} (1-2i) + \rho_1^2}. \quad (1.12)$$

$$(v_n)_B^{(2)} = - \frac{\lambda Q_1}{\pi h m} N_2 - \frac{(1-\lambda)Q_1}{2\pi h m} \sum_{i=0}^{l-1} \frac{R_2 - \rho_1 \cos \frac{\pi}{l} (1-2i)}{R_2^2 - 2\rho_1 R_2 \cos \frac{\pi}{l} (1-2i) + \rho_1^2}, \quad (1.13)$$

где

$$M_2 = \max_{0 \leq \varphi \leq 2\pi} \{f_2(\varphi, t_1)\}, \quad N_2 = \min_{0 \leq \varphi \leq 2\pi} \{f_2(\varphi, t_1)\},$$

$$f_2(\varphi, t_1) = \frac{R_2 - R(\varphi, t_1) \cos \frac{\pi}{l} (1-2i)}{R_2^2 - 2R_2 R(\varphi, t_1) \cos \frac{\pi}{l} (1-2i) + R^2(\varphi, t_1)}. \quad (1.14)$$

Исследуем функции $f_1(\varphi, t_1)$ (1.8) и $f_2(\varphi, t_1)$ (1.14)

Относительно их известно следующее:

$$\left. \begin{aligned} f_1(\varphi, t_1) \Big|_{\varphi = \frac{2\pi}{l} i} &= \frac{1}{2R_1}, \\ f_2(\varphi, t_1) \Big|_{\varphi = \frac{\pi}{l}(1-2i)} &= \frac{1}{2R_2} \end{aligned} \right\} (i=0, 1, \dots, l-1). \quad (1.15)$$

$$R_1 \leq R(\varphi, t) \leq R_2 \quad (0 \leq \varphi \leq 2\pi).$$

Для данного момента времени $t=t_1$ фиксируем некоторое значение угла $\varphi = \varphi_1$ ($0 \leq \varphi_1 \leq \frac{\pi}{2}$). В силу условий (1.15) для этого значения имеем следующие системы неравенств:

$$R_1 - R_1 \cos \varphi_1 \geq R_1 - R(\varphi_1, t) \cos \varphi_1 \geq R_1 - R_2 \cos \varphi_1, \quad (1.16)$$

$$R_1 - 2R_1 R_1 \cos \varphi_1 + R_1^2 \leq R_1^2 - 2R_1 R(\varphi_1, t) \cos \varphi_1 + R^2(\varphi_1, t) \leq R_1^2 - 2R_1 R_2 \cos \varphi_1 + R_2^2. \quad (1.17)$$

Поделив почленно (1.16) на (1.17), мы получим более сильное неравенство:

$$\frac{1}{2R_1} \geq \frac{R_1 - R(\varphi_1, t)}{R_1^2 - 2R_1 R(\varphi_1, t) \cos \varphi_1 + R^2(\varphi_1, t)} \geq \frac{R_1 - R_2 \cos \varphi_1}{R_1^2 - 2R_1 R_2 \cos \varphi_1 + R_2^2}. \quad (1.18)$$

Пусть $\frac{\pi}{2} \leq \varphi \leq \pi$, полагая $\varphi = \frac{\pi}{2} + \alpha$, получим

$$f_1(\alpha_1, t_1) = \frac{R_1 + R(\alpha_1, t_1) \sin \alpha_1}{R_1^2 + 2R_1 R(\alpha_1, t_1) \sin \alpha_1 + R^2(\alpha_1, t_1)}, \quad (1.19)$$

где

$$0 \leq \alpha_1 \leq \frac{\pi}{2}.$$

Положим тогда $R(\alpha_1, t_1) = R_1 + \varepsilon$ ($\varepsilon > 0$),

$$f_1(\alpha_1, t_1) = \frac{R_1 + R_1 \sin \alpha_1 + \varepsilon \sin \alpha_1}{2R_1(R_1 + R_1 \sin \alpha_1 + \varepsilon \sin \alpha_1) + 2R_1 \varepsilon + \varepsilon^2}. \quad (1.20)$$

Числитель и знаменатель в выражении (1.22) положительны, поэтому, отбросив из знаменателя положительную величину $2R_1 \varepsilon + \varepsilon^2$, мы только увеличим значение $f_1(\alpha_1, t_1)$. Отсюда следует, что

$$\frac{1}{2R_1} \geq \frac{R_1 + R(\alpha_1, t_1) \sin \alpha_1}{R_1^2 + 2R_1 R(\alpha_1, t_1) \sin \alpha_1 + R^2(\alpha_1, t_1)}. \quad (1.21)$$

Из (1.18) и (1.21) находим, что

$$M_1 = \max \left\{ f_1(\varphi, t_1) \right\} = \frac{1}{2R_1}, \quad (1.22)$$

$$0 \leq \varphi \leq 2\pi$$

Аналогичными приемами можно показать, что

$$N_2 = \min \left\{ f_2(\varphi, t_1) \right\} = \frac{1}{2R_2}, \quad (1.23)$$

$$0 \leq \varphi \leq 2\pi$$

Установив эти факты, исследуем полученные выше соотношения (1.10), (1.11), (1.12) и (1.13). Вторые члены в правых частях этих

выражений положительны, знаки же первых членов определяются знаком λ . При $\lambda > 0$ имеем такие неравенства:

$$\left. \begin{aligned} (v_n)_A^{(1)} &\geq (v_n)_A \geq (v_n)_A^{(2)} \\ (v_n)_B^{(1)} &\geq (v_n)_B \geq (v_n)_B^{(2)} \end{aligned} \right\}. \quad (1.24)$$

Если же $\lambda < 0$, то

$$\left. \begin{aligned} (v_n)_A^{(2)} &\geq (v_n)_A \geq (v_n)_A^{(1)} \\ (v_n)_B^{(2)} &\geq (v_n)_B \geq (v_n)_B^{(1)} \end{aligned} \right\}. \quad (1.25)$$

Заменив в (1.10) и (1.13) величины M_1 и N_2 их значениями из (1.22) и (1.23), найдем:

$$(v_n)_A^{(1)} = -\frac{\lambda Q_1}{2\pi h R_1 m} - \frac{(1-\lambda) Q_1}{2\pi h m} \sum_{i=0}^{l-1} \frac{R_1 - \rho_1 \cos \frac{2\pi}{l} i}{R_1^2 - 2\rho_1 R_1 \cos \frac{2\pi}{l} i + \rho_1^2}. \quad (1.26)$$

$$(v_n)_B^{(2)} = -\frac{\lambda Q_1}{2\pi h m R_2} - \frac{(1-\lambda) Q_1}{2\pi h m} \sum_{i=0}^{l-1} \frac{R_2 - \rho_1 \cos \frac{\pi}{l} (1-2i)}{R_2^2 - 2\rho_1 R_2 \cos \frac{\pi}{l} (1-2i) + \rho_1^2}. \quad (1.27)$$

Полученные соотношения (1.26) и (1.27), согласно формулы (4.12) работы [4], определяют нормальные скорости в момент t_1 в точках A и B главного и нейтрального направлений в предположении, что в первом случае КН — круг радиуса R_1 , а во втором — круг радиуса R_2 .

Таким образом, в том случае, когда $\lambda > 0$, нормальная скорость действительного КН в точках главных направлений меньше, чем скорость в этих же точках, подсчитанная в предположении, что КН — круг вписанный в действительный контур. Нормальная же скорость перемещения по нейтральным направлениям в точках действительного КН больше, чем скорость в этих же точках, подсчитанная в предположении, что КН — круг, описанный около действительного контура. Если же $\lambda < 0$, то в приведенных выше выводах знаки неравенств заменяются на обратные.

2. На основании результатов, полученных в п. 1, можно предложить методику, позволяющую определять в заданные моменты времени соответствующие кольца, внутри которых заключен действительный КН. Будем считать $\lambda > 0$. Этот случай соответствует предположению об ухудшении проницаемости для воды в зоне замещения в силу неполного вытеснения нефти водой [5]. Здесь предполагается, что зона замещения велика и влияние части пласта вне начального КН, который занят только водой, на перемещение КН не существенно.

Будем проследивать КН в кольце с внутренним радиусом R_v ($R_v > \rho_1$) и внешним R_0 . Разделим весь интервал R_v, R_0 на ν равных частей и через точки деления проведем семейство концентрических окружностей. Пусть ближайшая к окружности R_0 окружность имеет радиус R_1 .

Определим нормальные скорости перемещения КН в начальный момент $t=0$ по главным и нейтральным направлениям $(v_n)_0^{(0)}$ и $(v_n)_0^{(0)}$, а также скорость $(v_n)_0^{(1)}$ на круге R_1 в предположении, что он является КН. Так как по мере приближения КН к батарее скважин с по-

стоянными дебитами нормальная скорость его на главных направлениях возрастает, то

$$(v_n)_0^{(1)} \geq (v_n)_0^{(0)}$$

Фиксируем некоторый момент времени $t = t_1$. Действительное перемещение точки КН по главному направлению за промежуток времени

$$\Delta t_1 = t_1 - t_0$$

будет

$$(\Delta R)_0^{(1)} = (v_{n \text{ ср}})_0^{(1)} \Delta t_1,$$

где $(v_{n \text{ ср}})_0^{(1)}$ — средняя скорость перемещения КН за промежуток времени Δt_1 . Согласно выводам п. 1, $(v_n)_0^{(1)}$ будет превосходить верхнюю границу нормальной скорости на действительном КН по главному направлению в момент t_1 , если определить Δt_1 следующим образом:

$$\Delta t_1 = \frac{R_0 - R_1}{(v_n)_0^{(1)}}$$

Считая, что КН по главному направлению весь промежуток времени Δt_1 двигался со скоростью $(v_n)_0^{(1)}$, мы получим перемещение $(\Delta R)_0^{(1)} = R_0 - R_1$ точки опережающего контура, считая же, что КН по нейтральному направлению за промежуток времени Δt_1 перемещался со скоростью $(v_n)_\pi^0$, получим перемещение

$$(\Delta R)_\pi^{(1)} = (v_n)_\pi^0 \frac{R_0 - R_1}{(v_n)_0^{(1)}}$$

точки отстающего контура. На основании рассуждений, приведенных в п. 1, можно утверждать, что в момент t_1 действительный КН заключен в кольцо с меньшим радиусом R_1 и большим $R_0 - (\Delta R)_\pi^{(1)}$.

Время t_2 выбираем из условия

$$\Delta t_2 = \frac{R_1 - R_2}{(v_n)_0^{(2)}}$$

Заставляя точку опережающего контура двигаться с постоянной нормальной скоростью $(v_n)_0^{(2)}$ большей, чем верхняя граница нормальной скорости действительного КН в момент t_2 , а точку отстающего контура перемещаться с постоянной нормальной скоростью $(v_n)_\pi^{(1)}$, меньшей нижней границы нормальной скорости действитель-

ного КН по нейтральной линии в тот же момент, мы снова получим кольцо, в котором заключен КН в момент t_2 .

Повторяя этот процесс до тех пор, пока точка опережающего контура, двигающаяся по главному направлению, не достигнет окружности радиуса R_n , мы получим семейство колец, заключающих в себя КН в разные моменты времени. Так как нормальная скорость точки КН, двигающейся по нейтральному направлению, начиная с некоторого времени t_1 убывает, то с этого момента $(v_n)_\pi^{(1)}$ — нор-

мальная скорость, меньшая нижней границы нормальной скорости действительного КН на нейтральном направлении в момент t_1 , заменяется величиной $(v_n)_\pi^{(1)}$, которая определяется по методу, аналогичному определению $(v_n)_0^{(1)}$ для главных направлений.

По мере продвижения КН к скважинам эксплуатационной батареи ширина кольца, в котором заключен действительный КН, все время увеличивается. Это происходит как за счет деформации самого контура, так и за счет накопления разницы в положениях действительного КН и опережающего и отстающего контуров в предыдущие моменты времени. Поэтому необходимо заранее задать ту допустимую ширину кольца, в пределах которой мы можем считать КН мало отличающимся от круга.

3. По изложенному выше методу был просчитан пример. Для параметров брались следующие значения:

$$Q_1 = 80 \text{ м}^3/\text{сутки}; \quad \rho_1 = 1200 \text{ м}, \quad R_0 = 1300 \text{ м}, \\ (v = 14), \quad R_0 = 1200 \text{ м}, \quad h = 6 \text{ м}; \quad m = 0,2; \quad l = 12.$$

При одних и тех же значениях $k_1 = 3$ дарси, $\mu_n = 2,5$ сантипуаза и $\mu_b = 1$ сантипуаз расчет проводился для трех значений величины k_2 : 1 дарси ($\lambda = 0,0909$), 0,5 дарси ($\lambda = 0,4118$) и 0,2 дарси ($\lambda = 0,7140$).

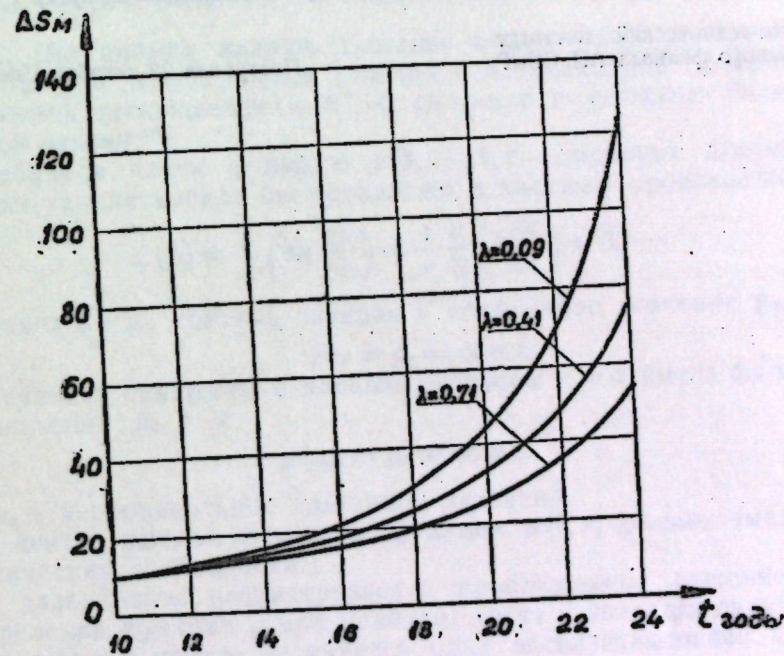


Рис. 2.

На рис. 2 приведены зависимости ширины кольца

$$\Delta S = R_{(0)} - R_{\left(\frac{\pi}{T}\right)}$$

от времени для различных значений λ . Через $R_{(0)}$ обозначен радиус круга, вписанного в опережающий контур, через $R_{\left(\frac{\pi}{T}\right)}$ радиус круга,

описанного около отстающего контура. Зависимости ΔS приведены только для $t \geq 10$ лет, так как для $t < 10$ лет разница в ширине колец при различных λ не превышает 1 м, т. е. практически они совпадают. Задав максимально допустимую ширину кольца, в пределах которой КН можно считать близким к кругу $\Delta S_{\text{max}} = 50 \text{ м}$, находим, что это условие для всех λ выполняется в течение 20 лет.

По истечении этого времени КН будет находиться на расстоянии примерно в 250 м от скважин эксплуатационной батареи. Таким образом, существенная деформация КН будет происходить лишь внутри кольца, ширина которого близка к половине расстояния между скважинами в батарее. Это показывает, что вывод, сделанный в работе [2] для одножидкостной системы ($c_1 = c_2$), сохраняет свою силу и для рассмотренного нами случая, когда $c_1 \neq c_2$ и $\lambda > 0$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Данилов В. Л. Интегро-дифференциальные уравнения движения границы раздела двух жидкостей в пористой среде (см. настоящий выпуск).
2. Щелкачев В. Н., Лапук Б. Б. Подземная гидравлика. Гостехиздат, 1949.
3. Насыров Р. М. Замечание к формуле для скорости перемещения поверхностей. Ученые записки Казанского гос. университета. Общеуниверситетский сборник, т. 116, кн. 1, 1956.
4. Данилов В. Л. Управление перемещением контура нефтеносности с учетом различия вязкостей нефти и воды. Изв. Казанского филиала АН СССР, сер. физ.-мат. и техн. наук, вып. 8, 1955.
5. Коротков С. Ф. Управление перемещением контура нефтеносности с учетом фазовой проницаемости в зоне замещения (см. настоящий выпуск).

Физико-технический институт
Казанского филиала АН СССР

Поступила 22 декабря 1956 г.

Г. С. Салехов и Л. В. Старшинова

К ОПРЕДЕЛЕНИЮ ФУНКЦИИ ДАВЛЕНИЯ В НЕОДНОРОДНЫХ ПЛАСТАХ

Для определения функции давления в круговом неоднородном пласте с одной центральной скважиной применяются метод наименьших квадратов и метод Рунца*. Сравнение точности расчетов производится на числовых примерах.

§ 1. Постановка задачи. Плоская задача определения функции давления p в неоднородных пластах с водонапорным режимом при переменной проницаемости $k > 0$ сводится к решению следующей краевой задачи**:

Требуется найти функцию $p(\theta, r)$ (θ, r — полярные координаты), которая удовлетворяла бы уравнению в частных производных

$$L(p) = \frac{\partial}{\partial r} \left(r k \frac{\partial p}{\partial r} \right) + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(k \frac{\partial p}{\partial \theta} \right) = 0, \quad (1.1)$$

сохраняла бы на контуре питания Γ постоянное значение p_0 , т. е.

$$p|_{\Gamma} = p_0 = \text{const.} \quad (1.2)$$

и на стенках скважины с данным радиусом $r = a$ имела бы постоянное значение p_c , т. е.

$$p|_{r=a} = p_c = \text{const.} \quad (1.3)$$

где p_0 — первоначальное пластовое давление.

В центре каждой скважины функция $p(\theta, r)$ должна иметь логарифмические особенности.

В дальнейшем рассматривается приближенное решение задачи определения функции p при условии, когда Γ является окружностью радиуса R и в центре ее имеется одна эксплуатационная скважина с радиусом $r = a$.

§ 2. Решение задачи методом наименьших квадратов. Выполняя условия (1.2) и (1.3) § 1, решение уравнения (1.1) будем искать в виде

$$p = p_0 + u \ln \frac{r}{R}, \quad (2.1)$$

где

$$u = u_0 + \sum_{s=1}^n u_s(r, \theta), \quad (2.2)$$

$$u_0 = \frac{p_c - p_0}{\ln \frac{a}{R}} \quad (2.3)$$

* Применение метода Рунца к решению задачи проведено Л. В. Старшиновой.
** См., например, [1].

$$u_s(r, \theta) = (r-a)^s (A_s \cos s\theta + B_s \sin s\theta). \quad (2.4)$$

Выберем постоянные A_s и B_s так, чтобы функция (2.1) являлась приближенным решением уравнения (1.1). Для этого применим метод наименьших квадратов следующим образом:

подставляя функцию (2.1) в уравнение (1.1), в силу линейности оператора $L(p)$, будем иметь

$$\begin{aligned} L(p) &= L(u_0 v) + \sum_{s=1}^n [A_s L(\varphi_s v) + B_s L(\psi_s v)] = \\ &= \varepsilon(\theta, r, A_1, A_2, \dots, A_n, B_1, B_2, \dots, B_n), \end{aligned} \quad (2.5)$$

где введены обозначения

$$\begin{aligned} v &= \ln \frac{r}{R}, \\ \varphi_s &= (r-a)^s \cos s\theta, \quad \psi_s = (r-a)^s \sin s\theta. \end{aligned}$$

Функция ε , стоящая в правой части (2.5), является некоторой известной функцией погрешности, зависящей от произвольных параметров A_s и B_s ($s=1, 2, \dots, n$).

Для кольцевой области, ограниченной окружностями радиуса $r=R$ и $r=a$, составим квадратичный функционал

$$I^2 = \frac{1}{\pi(R^2 - a^2)} \int_0^{2\pi} \int_a^R \varepsilon^2 r dr d\theta, \quad (2.6)$$

откуда, для определения $2n$ параметров A_s и B_s ($s=1, 2, \dots, n$), получаем следующую систему $2n$ уравнений:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial I^2}{\partial A_i} &= \frac{2}{\pi(R^2 - a^2)} \int_0^{2\pi} \int_a^R \left\{ L(u_0 v) + \right. \\ &+ \sum_{s=1}^n [A_s L(\varphi_s v) + B_s L(\psi_s v)] \left. \right\} L(\varphi_i v) r dr d\theta = 0, \\ \frac{\partial I^2}{\partial B_i} &= \frac{2}{\pi(R^2 - a^2)} \int_0^{2\pi} \int_a^R \left\{ L(u_0 v) + \right. \\ &+ \sum_{s=1}^n [A_s L(\varphi_s v) + B_s L(\psi_s v)] \left. \right\} L(\psi_i v) r dr d\theta = 0. \end{aligned} \right\} \quad (2.7)$$

($i=1, 2, \dots, n$)

§ 3. Пример решения задачи методом наименьших квадратов. Пусть, например,

$$k = \lambda (r \cos \theta + 2R)^2, \quad (3.1)$$

где λ некоторая положительная постоянная, обеспечивающая размерность для k^* .

Очевидно, для всех $a \ll R$ и $0 \leq \theta \leq 2\pi$ величина $k > 0$.

Согласно (2.2) рассмотрим случай $n=1$ и $n=2$.

1. Случай $n=1$. Из (2.1) имеем

$$p = p_0 + [u_0 + (r-a)(A_1 \cos \theta + B_1 \sin \theta)] \ln \frac{r}{R}. \quad (3.2)$$

* Для простоты выкладок в дальнейшем множитель λ считаем равным 1.

Система уравнений (2.7) принимает вид

$$\left. \begin{aligned} A_1 \int_0^{2\pi} \int_a^R f_1^2 r dr d\theta + B_1 \int_0^{2\pi} \int_a^R f_1 f_2 r dr d\theta &= -2u_0 \int_0^{2\pi} \int_a^R f_1 \cos \theta r dr d\theta, \\ A_1 \int_0^{2\pi} \int_a^R f_1 f_2 r dr d\theta + B_1 \int_0^{2\pi} \int_a^R f_2^2 r dr d\theta &= -2u_0 \int_0^{2\pi} \int_a^R f_2 \cos \theta r dr d\theta, \end{aligned} \right\} \quad (3.3)$$

где

$$\begin{aligned} f_1 &= 2R \left(2 + \frac{a}{r} \ln \frac{r}{R} \right) \cos \theta + \left(2r - a + \frac{3a}{2} \ln \frac{r}{R} \right) \cos 2\theta + \\ &+ \left(2r - a + \frac{4r-a}{2} \ln \frac{r}{R} \right), \\ f_2 &= 2R \left(2 + \frac{a}{r} \ln \frac{r}{R} \right) \sin \theta + \left(2r - a + \frac{3a}{2} \ln \frac{r}{R} \right) \sin 2\theta. \end{aligned}$$

Вычисление соответствующих интегралов и решение системы уравнений (3.3) при условии $a \ll R$ дают

$$A_1 \approx -0,390 \frac{u_0}{R}, \quad B_1 = 0.$$

Подставляя найденные значения A_1 и B_1 в выражение (3.2) и учитывая, что $a \ll R$, будем иметь

$$p = p_0 + \frac{p_c - p_0}{\ln \frac{a}{R}} \left[1 - 0,390 \frac{r}{R} \cos \theta \right] \ln \frac{r}{R}. \quad (3.4)$$

2. Случай $n=2$. Согласно (2.1) имеем

$$\begin{aligned} p &= p_0 + [u_0 + (r-a)(A_1 \cos \theta + B_1 \sin \theta) + \\ &+ (r-a)^2 (A_2 \cos 2\theta + B_2 \sin 2\theta)] \ln \frac{r}{R}. \end{aligned} \quad (3.5)$$

Составляя систему уравнений (2.7) и вычисляя постоянные A_1, A_2, B_1 и B_2 при условии $a \ll R$, получим

$$A_1 \approx -0,444 \frac{u_0}{R}, \quad A_2 \approx 0,073 \frac{u_0}{R^2}, \quad B_1 = B_2 = 0.$$

Подставляя найденные значения параметров в выражение (3.5), и снова учитывая, что $a \ll R$, окончательно будем иметь

$$p = p_0 + \frac{p_c - p_0}{\ln \frac{a}{R}} \left[1 - 0,444 \frac{r}{R} \cos \theta + 0,073 \left(\frac{r}{R} \right)^2 \cos 2\theta \right] \ln \frac{r}{R}. \quad (3.6)$$

§ 4. Решение задачи методом Ритца. Выполняя условия (1.1) и (1.2) § 1, решение уравнения (1.1), как в § 2, будем искать в виде

$$p = p_0 + uv, \quad (4.1)$$

где

$$\begin{aligned} u &= u_0 + \sum_{s=1}^n (A_s \varphi_s + B_s \psi_s), \quad v = \ln \frac{r}{R}, \\ \varphi_s &= (r-a)^s \cos s\theta, \quad \psi_s = (r-a)^s \sin s\theta. \end{aligned}$$

Постоянные A_s и B_s выберем так, чтобы функция (4.1) являлась приближенным решением уравнения (1.1). Как известно, решение этой задачи методом Ритца в данной кольцевой области равносильно задаче о минимуме функционала

$$I[p] = \int_0^{2\pi} \int_a^R \left\{ k \left(\frac{\partial p}{\partial r} \right)^2 + \frac{k}{r^2} \left(\frac{\partial p}{\partial \theta} \right)^2 \right\} r dr d\theta. \quad (4.2)$$

Подставляя выражение (4.1) вместо p в (4.2), получим

$$I[p] = \int_0^{2\pi} \int_a^R \left\{ k \left[u_0 \frac{\partial v}{\partial r} + \frac{\partial v}{\partial r} \sum_{s=1}^n (A_s \varphi_s + B_s \psi_s) + v \sum_{s=1}^n \left(A_s \frac{\partial \varphi_s}{\partial r} + B_s \frac{\partial \psi_s}{\partial r} \right) \right]^2 + \right. \\ \left. + \frac{k}{r^2} \left[\frac{\partial v}{\partial \theta} u_0 + \frac{\partial v}{\partial \theta} \sum_{s=1}^n (A_s \varphi_s + B_s \psi_s) + v \sum_{s=1}^n \left(A_s \frac{\partial \varphi_s}{\partial \theta} + B_s \frac{\partial \psi_s}{\partial \theta} \right) \right]^2 \right\} r dr d\theta. \quad (4.3)$$

Затем, варьируя (4.3) по A_s и B_s , получаем для определения этих $2n$ постоянных систему* $2n$ уравнений

$$\left. \begin{aligned} \frac{1}{2} \frac{\partial I}{\partial A_i} &= \int_0^{2\pi} \int_a^R \left\{ k \frac{\partial p}{\partial r} \frac{\partial (v \varphi_i)}{\partial r} + \frac{k}{r^2} \frac{\partial p}{\partial \theta} \frac{\partial (v \psi_i)}{\partial \theta} \right\} r dr d\theta = 0, \\ \frac{1}{2} \frac{\partial I}{\partial B_i} &= \int_0^{2\pi} \int_a^R \left\{ k \frac{\partial p}{\partial r} \frac{\partial (v \psi_i)}{\partial r} + \frac{k}{r^2} \frac{\partial p}{\partial \theta} \frac{\partial (v \varphi_i)}{\partial \theta} \right\} r dr d\theta = 0 \end{aligned} \right\} \quad (4.4)$$

$(i = 1, 2, \dots, n)$

§ 5. Пример решения задачи методом Ритца. Пусть, как и в § 3,

$$k = \lambda(r \cos \theta + 2R)^2. \quad (5.1)$$

Рассмотрим случай $n=1$ и $n=2$.

1. Случай $n=1$. Согласно (4.1) имеем

$$p = p_0 + [u_0 + (r-a)(A_1 \cos \theta + B_1 \sin \theta)] \ln \frac{r}{R}. \quad (5.2)$$

Подставляя выражения (5.1) и (5.2) в систему (4.4) и решая ее, при условии $a \ll R$, получаем

$$A_1 \approx -0,471 \frac{u_0}{R}, \quad B_1 = 0.$$

Найденные значения постоянных A_1 и B_1 подставляем в (4.1); учитывая, что $a \ll R$, будем иметь

$$p = p_0 + \frac{p_c - p_0}{\ln \frac{a}{R}} \left[1 - 0,471 \frac{r}{R} \cos \theta \right] \ln \frac{r}{R}. \quad (5.3)$$

2. Случай $n=2$. Согласно (4.1) имеем

$$p = p_0 + [u_0 + (r-a)(A_1 \cos \theta + B_1 \sin \theta) + \\ + (r-a)^2 (A_2 \cos 2\theta + B_2 \sin 2\theta)] \ln \frac{r}{R}. \quad (5.4)$$

Решая систему (4.4) после подстановки в нее выражений (5.1) и (5.4), получаем значения постоянных A_1, A_2, B_1 и B_2 при условии, что $a \ll R$

$$A_1 \approx -0,491 \frac{u_0}{R}, \quad A_2 \approx 0,114 \frac{u_0}{R^2}, \quad B_1 = B_2 = 0.$$

Подставляя найденные значения параметров в выражение (5.4) и, снова учитывая, что $a \ll R$, окончательно получим

$$p = p_0 + \frac{p_c - p_0}{\ln \frac{a}{R}} \left[1 - 0,491 \frac{r}{R} \cos \theta + 0,114 \left(\frac{r}{R} \right)^2 \cos 2\theta \right] \ln \frac{r}{R}. \quad (5.5)$$

§ 6. Оценка относительных погрешностей примеров § 3 и § 5. Для сравнения точности полученных формул (3.4), (3.6), (5.3) и (5.5) заметим следующее:

Как известно (см. [3]), если функция $\sqrt{k(r, \theta)}$ в рассматриваемой круговой области является всюду положительной гармонической функцией, то функция p в неоднородном пласте может быть определена точной формулой

$$p = p_0 + \frac{Q\mu}{2\pi \sqrt{k_0 k}} \ln \frac{r}{R}, \quad (6.1)$$

где Q — объемный дебит скважины, μ — вязкость жидкости, k_0 — проницаемость у забоя скважины.

Функция k , выбранная в виде (3.1), удовлетворяет всем вышеуказанным условиям, поэтому, зная точное решение нашей задачи, мы можем найти относительную погрешность, допускаемую в формулах (3.4), (3.6), (5.3) и (5.5).

Формула (6.1) через давление p_c на скважине может быть представлена в виде

$$p = p_0 + \frac{p_c - p_0}{\ln \frac{a}{R}} \sqrt{\frac{k_1}{k}} \ln \frac{r}{R}, \quad (6.2)$$

где

$$\sqrt{k_1} = a \cos \theta + 2R.$$

Введем сокращенные обозначения

$$\Delta p^{(1)} = p^{(1)} - p_0, \dots, \Delta p^{(4)} = p^{(4)} - p_0,$$

$$\Delta p = p - p_0,$$

где $p^{(1)}, p^{(2)}, p^{(3)}, p^{(4)}$ и p определяются соответственно по формулам (3.4), (3.6), (5.3), (5.5) и (6.2).

Примем $a = 10$ см, $R = 1$ км, $p_0 = 170$ атм., $p_c = 110$ атм. Вычисление значений относительных погрешностей

$$\delta_s = \frac{\Delta p^{(s)} - \Delta p}{\Delta p^{(s)}} \times 100\% \quad (s = 1, 2, 3, 4)$$

для

$$r = 0,2; 0,4; 0,5; 0,6; 0,8$$

и

$$\theta = 0; \frac{\pi}{6}; \frac{\pi}{3}; \frac{\pi}{2}; \frac{2\pi}{3}; \frac{5\pi}{3}; \pi$$

показало, что максимальное абсолютное значение δ_1 не превышает 0,388%, $\delta_2 = 0,271\%$, $\delta_3 = 0,289\%$, $\delta_4 = 0,190\%$.

* Система разрешима, см. [2].

ЛИТЕРАТУРА

1. Крылов А. П., Глоговский М. М. и др. Научные основы разработки нефтяных месторождений. М.—Л., 1948.
2. Коллатц Л. Численные методы решения дифференциальных уравнений. И. Л. 1953.
3. Салехов Г. С. К определению функции давления в неоднородных пластах нефтяных месторождений. Докл. Академии наук СССР, том 105, № 6, 1955.

Физико-технический институт
Казанского филиала АН СССР

Поступила 22 декабря 1956 г.

СОДЕРЖАНИЕ

1. В. Л. Данилов, Г. С. Салехов, Г. П. Цыбульский. Исследования по теории фильтрации жидкостей в нефтяных пластах в Казанском филиале Академии наук СССР в 1951—1957 гг.	5
2. Г. С. Салехов. К решению задач управления движением контура нефтеносности методом тригонометрической аппроксимации	15
3. В. Л. Данилов и В. Д. Чугунов. Об управлении перемещением контура нефтеносности при упругом и водонапорном режимах	23
4. Г. П. Цыбульский. Задача управления движением незвездного контура нефтеносности при "дискретном" задании	37
5. В. Ю. Ким. Управление движением контура нефтеносности с учетом влияния сбросов	45
6. В. Ю. Ким. Об одной задаче управления движением контура нефтеносности	57
7. С. -Ф. Коротков. Управление перемещением контура нефтеносности с учетом фазовой проницаемости в зоне замещения	63
8. Г. С. Салехов. Решение некоторых задач управления движением контура нефтеносности по характеру размещения скважин	79
9. Г. П. Цыбульский. Аналитический метод оценки точности решения задач управления движением контура нефтеносности	85
10. В. Л. Данилов. Интегро-дифференциальные уравнения движения границы раздела двух жидкостей в пористой среде	99
11. С. Ф. Коротков. Об одной частной задаче прослеживания контура нефтеносности	135
12. Г. С. Салехов и Л. В. Старшинова. К определению функции давления в неоднородных пластах	143