

АКАДЕМИЯ НАУК СССР
КАЗАНСКИЙ ФИЛИАЛ

**ИЗВЕСТИЯ
КАЗАНСКОГО ФИЛИАЛА
АКАДЕМИИ НАУК СССР**

*СЕРИЯ ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИХ
И ТЕХНИЧЕСКИХ НАУК*

10



ТАТКНИГОИЗДАТ
КАЗАНЬ 1956

АКАДЕМИЯ НАУК СССР
КАЗАНСКИЙ ФИЛИАЛ

ИЗВЕСТИЯ
КАЗАНСКОГО ФИЛИАЛА
АКАДЕМИИ НАУК СССР

*СЕРИЯ ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИХ
И ТЕХНИЧЕСКИХ НАУК*

Выпуск 10

НЕКОТОРЫЕ ЗАДАЧИ НЕЛИНЕЙНОЙ ТЕОРИИ
УСТОЙЧИВОСТИ ОБОЛОЧЕК



ТАТКНИГОИЗДАТ

Редакция научно-технической литературы

КАЗАНЬ 1956

Ответственный редактор
 профессор Х. М. Муштари

К. З. Галимов

К ВАРИАЦИОННЫМ МЕТОДАМ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ
 НЕЛИНЕЙНОЙ ТЕОРИИ ПЛАСТИН И ОБОЛОЧЕК

В статье дается распространение вариационной формулы Е. Рейсснера [3] на конечные деформации пластин и оболочек с привлечением симметрических тензоров усилий и моментов [1]. Указывается, в каких случаях можно применять метод Бубнова — Галеркина, в его обычной форме, к интегрированию основных уравнений нелинейной теории оболочек. В пятом параграфе с помощью вариационной формулы получены граничные условия, которым должна удовлетворять функция напряжения для пологих оболочек. В частности, рассмотрены задачи определения граничных условий для функции напряжения, когда на контуре заданы либо нормальные усилия и касательное перемещение, либо касательное усилие и перемещение по главной нормали к контуру оболочки.

1. Некоторые сведения из теории деформации поверхности
 и тензорного исчисления

Отнесем недеформированную срединную поверхность S оболочки к гауссовым координатам x^1 и x^2 и введем обозначения: \bar{r} — радиус-вектор точки (x^1, x^2) , $\bar{r}_\alpha = \partial \bar{r} / \partial x^\alpha$ — координатные векторы поверхности S ; \bar{m} — единичный вектор нормали к S в точке (x^1, x^2) ; $\bar{m}_\alpha = \partial \bar{m} / \partial x^\alpha$ — производная этой нормали; $a_{\alpha\beta}$ и $b_{\alpha\beta}$ — компоненты первого и второго метрических тензоров поверхности:

$$a_{\alpha\beta} = \bar{r}_\alpha \bar{r}_\beta, \quad b_{\alpha\beta} = -\bar{m}_\alpha \bar{r}_\beta = -\bar{m}_\beta \bar{r}_\alpha; \quad (1.1)$$

$c_{\alpha\beta}$ — компоненты дискриминантного тензора поверхности, причем для правой ориентации триэдра $\{\bar{r}_1 \bar{r}_2 \bar{m}\}$ имеют место формулы:

$$c_{\alpha\beta} = \bar{m} [\bar{r}_\alpha \bar{r}_\beta]; \quad [\bar{m}, \bar{r}_\alpha] = c_{\alpha\beta} \bar{r}_\beta; \quad c_{\alpha\alpha} = 0; \quad c_{12} = -c_{21} = \sqrt{a}, \quad (1.2)$$

где $\bar{r}^\alpha = a^{\alpha\beta} \bar{r}_\beta$ — векторы взаимного базиса, $a^{\alpha\beta} = \bar{r}^\alpha \bar{r}^\beta$; $a = \det(a_{\alpha\beta})$. Здесь и далее все индексы пробегают значения 1 и 2.

Имеют место формулы:

$$c^{\alpha\beta} c_{\pi\gamma} = \delta_\pi^\alpha \delta_\gamma^\beta - \delta_\gamma^\alpha \delta_\pi^\beta; \quad c^{\alpha\beta} c^{\pi\gamma} = a^{\alpha\pi} a^{\beta\gamma} - a^{\alpha\gamma} a^{\beta\pi}; \quad (1.3)$$

$$c_{\alpha\beta} c_{\pi\gamma} = a_{\alpha\pi} a_{\beta\gamma} - a_{\alpha\gamma} a_{\beta\pi}; \quad c^{\alpha\pi} c_{\alpha\beta} = \delta_\beta^\pi,$$

где $c^{\alpha\beta}$ — контравариантные компоненты дискриминантного тензора ($c^{\alpha\alpha} = 0$, $c^{12} = -c^{21} = a^{-1/2}$).

п 14479
 ЦЕНТРАЛЬНАЯ НАУЧНАЯ
 БИБЛИОТЕКА
 А. Н. Киргизской ССР

Обозначим контур оболочки через \bar{C} . Будем рассматривать единичный ортогональный триэдр $\{\bar{\tau}, \bar{m}, \bar{n}\}$ правосторонней ориентации

$$\bar{\tau} = [\bar{m}, \bar{n}]; \bar{m} = [\bar{n}, \bar{\tau}]; \bar{n} = [\bar{\tau}, \bar{m}], \quad (1.4)$$

с вершинами в точках контура \bar{C} . Здесь $\bar{\tau}$ — единичный вектор касательной к контуру \bar{C} ; \bar{n} — единичный вектор тангенциальной нормали к нему; \bar{m} — единичный вектор нормали к поверхности. Обозначим через τ_α и n_α ковариантные компоненты векторов $\bar{\tau}$ и \bar{n} в координатах поверхности x^α , а через τ^α и n^α — их контравариантные компоненты. Если s — дуга контура \bar{C} (лонгальный параметр), то имеют место формулы:

$$\tau^\alpha = \frac{dx^\alpha}{ds}, \quad n^\alpha = \frac{dx^\alpha}{dn}; \quad \tau_\alpha = a_{\alpha\beta} \tau^\beta; \quad n_\alpha = a_{\alpha\beta} n^\beta; \quad (1.5)$$

$$\bar{\tau} = \rho^\alpha \tau_\alpha = \rho_\alpha \tau^\alpha; \quad \bar{n} = \rho^\alpha n_\alpha = \rho_\alpha n^\alpha,$$

а также формулы:

$$\tau_\alpha = c^{\beta\gamma} a_{\alpha\gamma} n_\beta; \quad \tau^\alpha = c^{\beta\gamma} n_\beta; \quad n_\alpha = c^{\beta\gamma} \tau_\beta; \quad n^\alpha = c^{\beta\gamma} \tau_\beta; \quad \tau_\alpha = c_{\beta\alpha} n^\beta \quad (1.6)$$

и другие, вытекающие из них.

Производные по касательной и нормали кривой \bar{C} от скаляра или вектора определяются формулами:

$$\frac{df}{ds} = \frac{df}{ds} \tau^\alpha = \nabla_\alpha f \cdot \tau^\alpha; \quad \frac{df}{dn} = \nabla_\alpha f \cdot n^\alpha. \quad (1.7)$$

Здесь и далее ∇_α — знак ковариантного дифференцирования относительно $a_{\alpha\beta}$.

Градиентом скаляра f будем называть поверхностный вектор $\text{grad } f = \rho^\alpha \nabla_\alpha f$, причем

$$\bar{n} \text{ grad } f = \frac{df}{dn}; \quad \bar{\tau} \text{ grad } f = \frac{df}{ds}; \quad \bar{m} \text{ grad } f = 0. \quad (1.8)$$

Если \bar{u} — произвольный поверхностный вектор, то его полная производная по некоторому параметру t , определяющему положение точки на кривой, будет [2]:

$$\frac{d\bar{u}}{dt} = \frac{D\bar{u}}{dt} + b_{\alpha\beta} \tau^\alpha u^\beta \frac{ds}{dt} \bar{m}; \quad \frac{d\bar{u}}{ds} = \frac{D\bar{u}}{ds} + b_{\alpha\beta} \tau^\alpha u^\beta \bar{m}, \quad (1.9)$$

где $\frac{D\bar{u}}{dt}$ — абсолютная производная вектора, равная

$$\frac{D\bar{u}}{dt} = \rho^\beta \nabla_\alpha u_\beta \tau^\alpha ds; \quad \frac{D\bar{u}}{ds} = \rho^\beta \nabla_\alpha u_\beta \tau^\alpha, \quad (1.10)$$

(u^α — контравариантные компоненты вектора \bar{u} в координатах поверхности x^α , $u_\alpha = a_{\alpha\beta} u^\beta$).

Для пространственных производных единичных векторов триэдра имеют место формулы [2]:

$$\frac{d\bar{\tau}}{ds} = \tilde{\sigma} \bar{m} - \tilde{\kappa} \bar{n}; \quad \frac{d\bar{m}}{ds} = \tilde{l} \bar{n} - \tilde{\sigma} \bar{\tau}; \quad \frac{d\bar{n}}{ds} = \tilde{\kappa} \bar{\tau} - \tilde{l} \bar{m}, \quad (1.11)$$

представляющие обобщение формул Френе — Серре. Здесь $\tilde{\sigma}$ — нормальная (первая) кривизна поверхности в точках s в направлении $\bar{\tau}$:

$$\tilde{\sigma} = \frac{II}{I} = \frac{b_{\alpha\beta} dx^\alpha dx^\beta}{a_{\alpha\beta} dx^\alpha dx^\beta} = b_{\alpha\beta} \tau^\alpha \tau^\beta = -\bar{\tau} \frac{d\bar{m}}{ds} = \bar{m} \frac{d\bar{\tau}}{ds}; \quad (1.12)$$

$\tilde{l}(s)$ — геодезическое кручение кривой \bar{C} или вторая кривизна поверхности в направлении $\bar{\tau}$:

$$\tilde{l}(s) = -b_{\alpha\beta} \tau^\alpha n^\beta = \bar{n} \frac{d\bar{m}}{ds} = -\bar{m} \frac{d\bar{n}}{ds} = -\bar{m} \frac{d\bar{\tau}}{dn} = \frac{IV}{I}, \quad (1.13)$$

что характеризует отклонение кривой \bar{C} от плоской, для которой $\tilde{l} = 0$; например, для линий кривизны он обращается в нуль. κ — геодезическая кривизна кривой \bar{C} :

$$\kappa = \bar{\tau} \frac{d\bar{n}}{ds} = -\bar{n} \frac{d\bar{\tau}}{ds}. \quad (1.14)$$

κ есть кривизна проекции кривой \bar{C} на касательную плоскость ($\bar{\tau}, \bar{n}$). Она является инвариантной по отношению к изгибанию, так как не зависит от коэффициентов второй квадратичной формы [2]:

$$\kappa = -n_\alpha \Gamma^\alpha; \quad \Gamma^\alpha = \frac{d^2 x^\alpha}{ds^2} + \Gamma_{\beta\gamma}^\alpha \tau^\beta \tau^\gamma, \quad (1.15)$$

где Γ^α — контравариантные компоненты вектора кривизны кривой \bar{C} в данной точке: $\bar{\Gamma} = -\kappa \bar{n}$, а $\Gamma_{\beta\gamma}^\alpha$ — поверхностные символы Кристоффеля. κ обращается в нуль вдоль геодезических линий, а также вдоль кривых, тангенциальная нормаль которых не изменяется по направлению. Для того чтобы рассматривать кривизны в направлении, перпендикулярном к контуру, сделаем следующее замечание. Проведем через каждую точку контура \bar{C} геодезическую линию, ортогональную контуру. Совокупность этих линий образует однопараметрическое семейство и в окрестности контура порождает поля векторов \bar{n} и $\bar{\tau}$, касательных и нормальных к геодезическим линиям. Через $\frac{d\psi}{dn}$ и $\frac{d\psi}{ds}$, где ψ — некоторая скалярная или векторная функция, будем понимать величины, вычисляемые по формуле (1.7). Кривизны в направлении \bar{n} будем вычислять по формулам (1.12), (1.13) и (1.14), но с заменой $\bar{\tau}$ на \bar{n} , \bar{n} на $\bar{\tau}$ и $\frac{d}{ds}$ на $\frac{d}{dn}$. Нормальная кривизна в направлении \bar{n} равна:

$$\tilde{\sigma}_n = -\bar{n} \frac{d\bar{m}}{dn} = -\bar{n} \frac{D\bar{m}}{dn} = b_{\alpha\beta} n^\alpha n^\beta = c^{\alpha\gamma} c^{\beta\gamma} b_{\alpha\beta} \tau_\gamma \tau_\gamma = (b_\alpha^\alpha a^{\alpha\gamma} - b^{\alpha\gamma}) \tau_\alpha \tau_\gamma = b_\alpha^\alpha - \tilde{\sigma}, \quad (1.16)$$

так как

$$c^{\alpha\gamma} c^{\beta\gamma} b_{\alpha\beta} = b_\alpha^\alpha a^{\alpha\beta} - b^{\alpha\beta}; \quad a^{\alpha\gamma} \tau_\alpha \tau_\gamma = 1.$$

Здесь b_α^α — удвоенная средняя кривизна поверхности. Вторая кривизна \tilde{l}_n равна:

$$\tilde{l}_n = \bar{\tau} \frac{d\bar{m}}{dn} = -b_{\alpha\beta} n^\alpha \tau^\beta = \tilde{l}(s), \quad (1.17)$$

Геодезическая кривизна $\tilde{\kappa}$ геодезических линий, ортогональных контуру, равна нулю:

$$\tilde{\kappa} = \bar{n} \frac{d\tilde{\tau}}{dn} = -\tilde{\tau} \frac{d\bar{n}}{dn} = 0. \quad (1.18)$$

Вычислим пространственные производные единичных векторов триэдра по нормали к кривой C . Согласно (1.9)

$$\frac{d\tilde{\tau}}{dn} = \frac{D\tilde{\tau}}{dn} + b_{\alpha\beta} \tilde{\tau}^{\alpha} \tilde{\tau}^{\beta} \frac{ds}{dn} \bar{m}.$$

Но ввиду (1.18) $\frac{D\tilde{\tau}}{dn} = 0$ и, кроме того, с учетом (1.13), имеем:

$$b_{\alpha\beta} \tilde{\tau}^{\alpha} \tilde{\tau}^{\beta} \frac{ds}{dn} \bar{m} = b_{\alpha\beta} \tilde{\tau}^{\alpha} \frac{dx^{\beta}}{dn} \bar{m} = b_{\alpha\beta} \tilde{\tau}^{\alpha} n^{\beta} \bar{m} = -\tilde{t} \bar{m}.$$

Следовательно, находим формулы дифференцирования по параметру n :

$$\frac{d\tilde{\tau}}{dn} = -\tilde{t} \bar{m}; \quad \frac{d\bar{n}}{dn} = \tilde{\sigma}_n \bar{m}; \quad \frac{d\bar{m}}{dn} = \frac{D\bar{m}}{dn} = \tilde{t} \tilde{\tau} - \tilde{\sigma}_n \bar{n}, \quad (1.19)$$

где последние две найдены аналогичным образом.

На основании формул Гаусса — Вейнгартена

$$\nabla_{\alpha} \bar{\rho}_{\beta} = \bar{m} b_{\alpha\beta}; \quad \nabla_{\alpha} \bar{\rho}^{\beta} = b_{\alpha}^{\beta} \bar{m}; \quad \bar{m}_{\alpha} = -b_{\alpha}^{\beta} \bar{\rho}_{\beta}, \quad (1.20)$$

имеем:

$$\nabla_{\alpha} \bar{\rho}^{\beta} \cdot \tilde{\tau} = \nabla_{\alpha} \bar{\rho}^{\beta} \cdot \bar{n} = 0.$$

Учитывая это, а также равенства (1.11) и (1.18), для произвольного скаляра ψ получим:

$$\begin{aligned} \tilde{\tau}^{\alpha} \nabla_{\beta} \psi \cdot \nabla_{\alpha} \tilde{\tau}^{\beta} &= \tilde{\tau}^{\alpha} \nabla_{\beta} \psi \cdot \bar{\rho}^{\beta} \nabla_{\alpha} \tilde{\tau} = \text{grad } \psi \cdot \frac{D\tilde{\tau}}{ds} = -\kappa \frac{d\psi}{dn}; \\ \tilde{\tau}^{\alpha} \nabla_{\beta} \psi \cdot \nabla_{\alpha} n^{\beta} &= \text{grad } \psi \cdot \frac{D\bar{n}}{ds} = \kappa \frac{d\psi}{ds}; \end{aligned} \quad (1.21)$$

$$n^{\alpha} \nabla_{\beta} \psi \cdot \nabla_{\alpha} n^{\beta} = \text{grad } \psi \cdot \frac{D\bar{n}}{dn} = 0; \quad n^{\alpha} \nabla_{\beta} \psi \cdot \nabla_{\alpha} \tilde{\tau}^{\beta} = \text{grad } \psi \cdot \frac{D\tilde{\tau}}{dn} = 0.$$

Для дивергенций векторов \bar{n} и $\tilde{\tau}$ имеем:

$$\text{div } \bar{n} = \nabla_{\alpha} n^{\alpha} = \bar{\rho}^{\alpha} \nabla_{\alpha} \bar{n} = (n^{\alpha} \bar{n} + \tilde{\tau}^{\alpha} \tilde{\tau}) \nabla_{\alpha} \bar{n} = \tilde{\tau} \frac{D\bar{n}}{ds} = \kappa; \quad (1.22)$$

$$\text{div } \tilde{\tau} = \nabla_{\alpha} \tilde{\tau}^{\alpha} = n \frac{D\tilde{\tau}}{dn} = 0.$$

Найдем разность смешанных производных, взятых по направлениям \bar{n} и $\tilde{\tau}$. Так как $\nabla_{\alpha} \nabla_{\beta} \psi = \nabla_{\beta} \nabla_{\alpha} \psi$, то

$$\begin{aligned} \frac{d}{ds} \left(\frac{d\psi}{dn} \right) - \frac{d}{dn} \left(\frac{d\psi}{ds} \right) &= \tilde{\tau}^{\beta} \nabla_{\beta} (\nabla_{\alpha} \psi \cdot n^{\alpha}) - n^{\alpha} \nabla_{\alpha} (\nabla_{\beta} \psi \cdot \tilde{\tau}^{\beta}) = \\ &= \tilde{\tau}^{\beta} \nabla_{\alpha} \psi \cdot \nabla_{\beta} n^{\alpha} - n^{\alpha} \nabla_{\beta} \psi \cdot \nabla_{\alpha} \tilde{\tau}^{\beta}, \end{aligned}$$

откуда, с учетом (1.21), находим условие интегрируемости:

$$\frac{d}{ds} \left(\frac{d\psi}{dn} \right) - \frac{d}{dn} \left(\frac{d\psi}{ds} \right) = \kappa \frac{d\psi}{ds}. \quad (1.23)$$

Чтобы получить формулу Гаусса, заменим здесь ψ на \bar{n} и результат умножим скалярно на $\tilde{\tau}$. Имеем:

$$\tilde{\tau} \left\{ \frac{d}{ds} \left(\frac{d\bar{n}}{dn} \right) - \frac{d}{dn} \left(\frac{d\bar{n}}{ds} \right) \right\} = \tilde{\tau} \tilde{\kappa} \frac{d\bar{n}}{ds} = \kappa^2.$$

Подставляя $\frac{d\bar{n}}{ds}$ и $\frac{d\bar{n}}{dn}$ из (1.11) и (1.19) и вновь пользуясь этими формулами, найдем формулу Гаусса в форме:

$$\kappa^2 + \frac{d\kappa}{dn} = -k; \quad k = \tilde{\sigma} \tilde{\sigma}_n - \tilde{t}^2, \quad (1.24)$$

где k — гауссова кривизна поверхности. Аналогично перекрестным дифференцированием равенств (1.11) и (1.19), используя (1.23) находим условия Кодацци:

$$\frac{d\tilde{\sigma}_n}{ds} + \frac{d\tilde{t}}{dn} + 2\kappa\tilde{t} = 0; \quad \frac{d\tilde{t}}{ds} + \frac{d\tilde{\sigma}}{dn} + \kappa(\tilde{\sigma} - \tilde{\sigma}_n) = 0. \quad (1.24')$$

Пусть \bar{v} — вектор перемещения точки (x^{α}) поверхности S ; $\bar{\rho} + \bar{v} = \bar{\rho}_{*}$ — радиус-вектор точки (x^{α}) после деформации, т. е. точки (x^{α}) деформированной поверхности S_{*} . Величины, относящиеся к этой поверхности, будем отмечать звездочкой, например, $a_{\alpha\beta}^{*} = \bar{\rho}_{\alpha}^{*} \bar{\rho}_{\beta}^{*}$ и $b_{\alpha\beta}^{*} = -\bar{m}_{\alpha} \bar{\rho}_{\beta}^{*}$ — коэффициенты первой и второй квадратичных форм поверхности S_{*} . Тензоры тангенциальной деформации поверхности и изгибной деформации определяются как разности:

$$2p_{\alpha\beta} = a_{\alpha\beta}^{*} - a_{\alpha\beta}; \quad q_{\alpha\beta} = b_{\alpha\beta}^{*} - b_{\alpha\beta}.$$

Координатные векторы деформированной поверхности S_{*} и единичный вектор нормали к ней выражаются формулами [1]:

$$\bar{\rho}_{\alpha}^{*} = \bar{\rho}_{\alpha} (\delta_{\alpha}^{\beta} + e_{\alpha}^{\beta}) + \bar{m} \omega_{\alpha}; \quad \bar{m}_{\alpha}^{*} = \sqrt{\frac{a}{a_{*}}} (\bar{m} E_{\alpha} + E_{\alpha} \bar{\rho}^{\alpha}), \quad (1.25)$$

где введены обозначения:

$$e_{\alpha}^{\beta} = \nabla_{\beta} v^{\alpha} - \omega b_{\alpha}^{\beta}; \quad \omega_{\alpha} = \nabla_{\alpha} \omega + b_{\alpha}^{\beta} v_{\beta}; \quad \bar{v} = v^{\alpha} \bar{\rho}_{\alpha} + \bar{m} \omega = v^{\alpha} \bar{\rho}_{\alpha}^{*} + \bar{m} \omega; \quad (1.25')$$

$$E_{\alpha} = (1 + e_1^{\alpha})(1 + e_2^{\alpha}) - e_1^{\alpha} e_2^{\alpha}; \quad E_{\alpha} = e_{\alpha}^{\beta} \omega_{\beta} - (1 + e_{\alpha}^{\beta}) \omega_{\alpha}.$$

Обозначим через $\tilde{\tau}_{*}$ и \bar{n}_{*} единичные векторы касательной и нормали к контуру C_{*} деформированной оболочки. Компоненты этих векторов в координатах деформированной поверхности S_{*} связаны соотношением типа (1.5) и (1.6).

Используя эти соотношения, получим:

$$\tilde{\tau}_{*}^{\alpha} = \bar{\rho}_{\alpha}^{*} \tilde{\tau}^{\alpha} = \bar{\rho}_{\alpha}^{*} \tilde{\tau}^{\alpha} \frac{ds}{ds_{*}}; \quad \bar{n}_{*}^{\alpha} = \bar{\rho}_{\alpha}^{*} \bar{n}^{\alpha} = \sqrt{\frac{a}{a_{*}}} \frac{ds}{ds_{*}} \bar{\rho}_{\alpha}^{*} \bar{n}^{\alpha},$$

где s_{*} — дуга контура деформированной оболочки. В случае малых деформаций $\tilde{\tau}_{*}^{\alpha} \approx \tilde{\tau}^{\alpha}$ и $\bar{n}_{*}^{\alpha} \approx \bar{n}^{\alpha}$, так как $a_{*} \approx a$, $ds_{*} \approx ds$.

Ковариантные производные относительно $a_{\alpha\beta}$ от координатных векторов вычисляются по формуле [1]:

$$\begin{aligned} \nabla_{\alpha} \bar{\rho}_{\beta}^{*} &= A_{\alpha\beta}^{\gamma} \bar{\rho}_{\gamma}^{*} + b_{\alpha\beta}^{*} \bar{m}_{\alpha}^{*}; \quad \nabla_{\alpha} \bar{\rho}_{\alpha}^{*} = -A_{\alpha\gamma}^{\beta} \bar{\rho}_{\beta}^{*} + b_{\alpha}^{\beta} \bar{m}_{\alpha}^{*}; \\ A_{\alpha\beta}^{\gamma} &= a_{\alpha}^{\gamma} P_{\alpha\beta}, \quad P_{\alpha\beta} = \nabla_{\alpha} \bar{\rho}_{\beta} + \nabla_{\beta} \bar{\rho}_{\alpha} - \nabla_{\gamma} \bar{\rho}_{\alpha\beta}. \end{aligned} \quad (1.26)$$

Вычислим компоненты деформации поверхности в системе осей триэдра $\{\tau, \bar{m}, \bar{n}\}$. Если ϵ_n и ϵ_s — относительные удлинения в направлении нормали и касательной, а ϵ_{ns} — угол сдвига между \bar{n} и τ , то

$$\epsilon_n = \rho_{\alpha\beta} n^\alpha n^\beta; \quad \epsilon_s = \rho_{\alpha\beta} \tau^\alpha \tau^\beta; \quad \epsilon_{ns} = \rho_{\alpha\beta} \tau^\alpha n^\beta = \rho_{\alpha\beta} n^\alpha \tau^\beta; \quad (1.27)$$

$$\rho_{\alpha\beta} = \epsilon_n \cdot n_\alpha n_\beta + \epsilon_s \cdot \tau_\alpha \tau_\beta + \epsilon_{ns} (\tau_\alpha n_\beta + \tau_\beta n_\alpha),$$

или, подставляя $\rho_{\alpha\beta}$ из формул

$$2\rho_{\alpha\beta} = \bar{\rho}_\alpha \partial_\beta \bar{v} + \bar{\rho}_\beta \partial_\alpha \bar{v} + \partial_\alpha \bar{v} \cdot \partial_\beta \bar{v}, \quad (1.28)$$

найдем:

$$\epsilon_n = \bar{n} \frac{d\bar{v}}{dn} + \frac{1}{2} \left(\frac{d\bar{v}}{dn} \right)^2; \quad \epsilon_s = \bar{\tau} \frac{d\bar{v}}{ds} + \frac{1}{2} \left(\frac{d\bar{v}}{ds} \right)^2; \quad (1.29)$$

$$2\epsilon_{ns} = \bar{n} \frac{d\bar{v}}{ds} + \bar{\tau} \frac{d\bar{v}}{dn} + \frac{d\bar{v}}{ds} \cdot \frac{d\bar{v}}{dn}.$$

Компоненты изгибной деформации выражаются в виде:

$$\chi_n = q_{\alpha\beta} n^\alpha n^\beta; \quad \chi_s = q_{\alpha\beta} \tau^\alpha \tau^\beta; \quad \chi_{ns} = q_{\alpha\beta} \tau^\alpha n^\beta = q_{\alpha\beta} n^\alpha \tau^\beta, \quad (1.30)$$

или, подставляя сюда $q_{\alpha\beta} = b_{\alpha\beta}^* - b_{\alpha\beta}$, пренебрегая при этом удлинениями и сдвигом по сравнению с единицей, будем иметь:

$$\chi_n = \bar{n} \frac{d\bar{m}}{dn} - \bar{n}_* \frac{d\bar{m}_*}{dn} = \bar{\sigma}_n - \bar{\sigma}_{n_*}; \quad \chi_s = \bar{\tau} \frac{d\bar{m}}{ds} - \bar{\tau}_* \frac{d\bar{m}_*}{ds} = \bar{\sigma}_s - \bar{\sigma}_{s_*}; \quad (1.31)$$

$$\chi_{ns} = \bar{\tau} \frac{d\bar{m}}{dn} - \bar{\tau}_* \frac{d\bar{m}_*}{dn} = \bar{n} \frac{d\bar{m}}{ds} - \bar{n}_* \frac{d\bar{m}_*}{ds} = \bar{t} - \bar{t}_*.$$

Здесь при малых деформациях

$$\bar{\tau}_* = \bar{\tau} + \frac{d\bar{v}}{ds}; \quad \bar{n}_* = \bar{n} + \frac{d\bar{v}}{dn}; \quad \bar{m}_* = \bar{m} + \left[\bar{n} \frac{d\bar{v}}{ds} \right] - \left[\bar{\tau} \frac{d\bar{v}}{dn} \right] + \left[\frac{d\bar{v}}{dn}, \frac{d\bar{v}}{ds} \right]. \quad (1.32)$$

Полагая $\bar{v} = \bar{n}u + \bar{\tau}v + \bar{m}w$ и воспользовавшись формулами дифференцирования единичных векторов триэдра, находим:

$$\frac{d\bar{v}}{ds} = \bar{n}e_{sn} + \bar{\tau}e_{ss} + \bar{m}\omega_s; \quad \frac{d\bar{v}}{dn} = \bar{n}e_{nn} + \bar{\tau}e_{ns} + \bar{m}\omega_n, \quad (1.33)$$

где для краткости введены обозначения:

$$e_{sn} = \frac{du}{ds} - \chi v + \bar{t}w; \quad e_{ss} = \frac{dv}{ds} + \chi u - \bar{\sigma}w; \quad \omega_s = \frac{dw}{ds} + v\bar{\sigma} - \bar{u}t; \quad (1.34)$$

$$e_{ns} = \frac{dv}{dn} + \bar{t}w; \quad e_{nn} = \frac{du}{dn} - \bar{\sigma}_n w; \quad \omega_n = \frac{dw}{dn} - \bar{v}t + \bar{\sigma}_n u.$$

§ 2. Тензор усилий и моментов

Пусть \bar{X} и \bar{M} — векторы внешних усилий и моментов, отнесенных к единице площади недеформированной поверхности; X^α и M^α — их контравариантные компоненты в координатах деформированной поверхности, а X^α — проекция усилия на нормаль к этой поверхности:

$$\bar{X} = X^\alpha \bar{\rho}_\alpha + X^3 \bar{m}_3; \quad \bar{M} = [\bar{m}_\alpha \bar{\rho}_\alpha] M^\alpha; \quad (2.1)$$

$s^{\alpha\beta} = s^{\beta\alpha}$ и $M^{\alpha\beta} = M^{\beta\alpha}$ — контравариантные компоненты симметрических тензоров усилий и моментов в координатах деформированной поверхности, отнесенных к единице длины координатных линий до деформации; Q^α — вектор типа перерезывающих усилий; \bar{f}^α и \bar{L}^α — векторы внутренних усилий и моментов, действующих на площадку $x^\alpha = \text{const}$ [1]:

$$\bar{f}^\alpha = s^{\alpha\beta} \bar{\rho}_\beta + M^{\alpha\beta} \bar{m}_\beta + \bar{m}_\alpha Q^\alpha; \quad \bar{L}^\alpha = [\bar{m}_\alpha \bar{\rho}_\alpha] M^\alpha; \quad (2.2)$$

$\bar{\Phi}$ — вектор внешней контурной нагрузки, а \bar{G} и \bar{H} — изгибающий и крутящий моменты на контуре, отнесенные к единице длины недеформированного контура оболочки. Тогда внутри оболочки имеют место уравнения равновесия [1]:

$$\nabla_\alpha T_1^{\alpha\beta} + A_{\alpha\gamma}^{\beta\gamma} T_1^{\alpha\gamma} - b_{\alpha\beta}^* Q^\alpha + X^\beta = 0; \quad \nabla_\alpha Q^\alpha + b_{\alpha\beta}^* T_1^{\alpha\beta} + X^3 = 0; \quad (2.3)$$

$$\nabla_\alpha M^{\alpha\beta} + A_{\alpha\gamma}^{\beta\gamma} M^{\alpha\gamma} - Q^\beta + M^\beta = 0; \quad T_1^{\alpha\beta} = s^{\alpha\beta} - b_{\alpha\beta}^* M^{\alpha\beta}, \quad (2.4)$$

а на контуре — статические граничные условия:

$$\bar{\Phi} = (T_1^{\alpha\beta} \bar{\rho}_\beta + Q^\alpha \bar{m}_\alpha) n_\alpha - \frac{\partial H \bar{m}_\alpha}{ds}, \quad \bar{G} = G, \quad (2.5)$$

где обозначено:

$$G = \sqrt{\frac{a_\alpha}{a}} \frac{ds}{ds_*} M^{\alpha\beta} n_\alpha n_\beta; \quad H = - \left(\frac{ds}{ds_*} \right)^2 M^{\alpha\beta} a_{\alpha\gamma}^* n_\alpha \tau^\gamma. \quad (2.6)$$

Здесь n_α и τ^α — компоненты единичных векторов нормали и касательной к недеформированному контуру C оболочки; ($\bar{n} = \bar{\rho}^\alpha n_\alpha = \bar{\rho}_\alpha n^\alpha$; $\bar{\tau} = \bar{\rho}^\alpha \tau_\alpha = \bar{\rho}_\alpha \tau^\alpha$), ds и ds_* — элементы дуг контура оболочки до и после деформации.

Найдем выражения компонентов усилий и моментов, относя их к осям триэдра $\{\bar{r}_\alpha, \bar{m}_\alpha, \bar{n}_\alpha\}$, при малых деформациях, но произвольных изгибах.

Обозначим через $\hat{\sigma}$ — тензор тангенциальных усилий: $\hat{\sigma} = s^{\alpha\beta} \bar{\rho}_\alpha \bar{\rho}_\beta$, где $\bar{\rho}_\alpha \bar{\rho}_\beta$ — диадное произведение. Так как вектор усилия \bar{K}_n^* , действующего на площадку с нормалью \bar{n}_* , есть $\bar{K}_n^* = \hat{\sigma} \cdot \bar{n}_*$, то для этого вектора имеем формулу:

$$\bar{K}_n^* = \hat{\sigma} \cdot \bar{n}_* = s^{\alpha\beta} \bar{\rho}_\alpha \cdot \bar{\rho}_\beta \bar{n}_* = s^{\alpha\beta} \bar{\rho}_\alpha (\bar{\rho}_\beta \bar{n}_*) \approx s^{\alpha\beta} \bar{\rho}_\alpha n_\beta. \quad (2.7)$$

Аналогично вектор усилия \bar{K}_s^* , действующего на площадку с нормалью $\bar{\tau}_*$, есть вектор:

$$\bar{K}_s^* = \hat{\sigma} \cdot \bar{\tau}_* = s^{\alpha\beta} \bar{\rho}_\alpha \bar{\rho}_\beta \bar{\tau}_* \approx s^{\alpha\beta} \bar{\rho}_\alpha \tau_\beta. \quad (2.8)$$

Разлагая векторы \bar{K}_n^* и \bar{K}_s^* по направлениям \bar{n}_* и $\bar{\tau}_*$

$$\bar{K}_n^* = T \bar{\tau}_* + N \bar{n}_*; \quad \bar{K}_s^* = \bar{S} \bar{\tau}_* + T \bar{n}_*, \quad (2.9)$$

находим соотношения:

$$N = \bar{K}_n^* \cdot \bar{n}_* \approx s^{\alpha\beta} n_\alpha n_\beta; \quad T = \bar{K}_n^* \cdot \bar{\tau}_* = s^{\alpha\beta} \tau_\alpha n_\beta; \quad (2.10)$$

$$S = \bar{K}_s^* \cdot \bar{\tau}_* = s^{\alpha\beta} \tau_\alpha \tau_\beta; \quad T = \bar{K}_s^* \cdot \bar{n}_* = s^{\alpha\beta} n_\alpha \tau_\beta,$$

где N и T — нормальное и касательное усилия на контуре, S — нормальное усилие, действующее на площадку с нормалью $\bar{\tau}_*$.

Разлагая тензор σ по направлениям \bar{n}_* и $\bar{\tau}_*$

$$\sigma = \bar{K}_n \cdot \bar{n}_* + \bar{K}_s \cdot \bar{\tau}_* = N \bar{n}^* \cdot \bar{n}_* + S \bar{\tau}^* \cdot \bar{\tau}_* + T (\bar{\tau}^* \cdot \bar{n}_* + \bar{n}^* \cdot \bar{\tau}_*), \quad (2.11)$$

находим обратную зависимость:

$$S^{\alpha\beta} = N n^\alpha n^\beta + S \tau^\alpha \tau^\beta + T (\tau^\alpha n^\beta + n^\alpha \tau^\beta). \quad (2.12)$$

Перерезывающие усилия, действующие на площадки с нормальными \bar{n}_* и $\bar{\tau}_*$, будут:

$$Q_n = Q^\alpha n_\alpha; \quad Q_s = Q^\alpha \tau_\alpha; \quad Q^\alpha = Q_n n^\alpha + Q_s \tau^\alpha. \quad (2.13)$$

Тензор моментов есть $L = M^{\alpha\beta} [\bar{m}_* \bar{\rho}_*] \cdot \bar{\rho}_*$, где точка — символ двукратного умножения. Если \bar{M}_n и \bar{M}_s — векторы-моменты, действующие на площадки с нормальными \bar{n}_* и $\bar{\tau}_*$, то $L = \bar{M}_n \cdot \bar{n}_* + \bar{M}_s \cdot \bar{\tau}_*$;

$$\bar{M}_n = L \cdot \bar{n}_* = M^{\alpha\beta} [\bar{m}_* \bar{\rho}_*] n_\alpha = H \bar{n}_* + G \bar{\tau}_*; \quad (2.14)$$

$$\bar{M}_s = L \cdot \bar{\tau}_* = M^{\alpha\beta} [\bar{m}_* \bar{\rho}_*] \tau_\alpha = H_s \bar{\tau}_* - G_s \bar{n}_*,$$

откуда находим формулы:

$$G = M^{\alpha\beta} n_\alpha n_\beta; \quad H = -H_s = -M^{\alpha\beta} n_\alpha \tau_\beta; \quad G_s = M^{\alpha\beta} \tau_\alpha \tau_\beta; \quad (2.15)$$

$$M^{\alpha\beta} = (L \cdot \bar{\rho}_*) c^{\beta\gamma} \bar{\rho}_\gamma^* = G n^\alpha n^\beta + G_s \tau^\alpha \tau^\beta - H (\tau^\alpha n^\beta + n^\alpha \tau^\beta),$$

где G и H — изгибающий и крутящий моменты, действующие на площадку с нормалью \bar{n}_* , а G_s и H_s — на площадку с нормалью $\bar{\tau}_*$.

3. Вариационное уравнение, соответствующее уравнениям равновесия и соотношениям упругости

По классической теории упругости имеются два вариационных принципа: 1) принцип возможных перемещений Лагранжа, в котором истинное состояние равновесия сравнивается с геометрически возможным состоянием. Вариационное уравнение доставляет уравнения равновесия и статические граничные условия. Геометрические граничные условия в вариационной задаче являются предварительными; 2) принцип возможных изменений напряженного состояния (принцип Кастильяно), где подвергаются вариации напряжения, и класс допустимых функций ограничивается условиями равновесия внутри и на поверхности тела. Вариационная формула Кастильяно доставляет условия неразрывности деформации и естественные граничные условия для перемещений. Путем преобразования Фридрихса одна вариационная задача переходит в другую. В связи с расширением круга задач теории упругости, возникает необходимость разработки новых вариационных методов для приближенного интегрирования дифференциальных уравнений теории упругости, в частности нелинейных уравнений теории пластин и оболочек. Необходимость разработки новых методов объясняется еще и тем, что они могут обеспечить более быструю сходимость процесса последовательных приближений. Новые методы могут быть полезными и для двусторонней оценки решения. Недавно Е. Рейсснер [3] сформулировал такую вариационную задачу, функционал которой доставляет уравнения равновесия и соотношения упругости, а также естественные граничные условия для перемещений и напряжений. Ниже эта вариационная теорема обобщается на случай конечных деформаций пластин и оболочек, причем это удастся лишь благодаря пользованию симметрическими тензорами усилий и моментов [1].

Кроме принятых в предыдущих пунктах обозначений, введем еще следующие:

σ — вся площадь недеформированной срединной поверхности, ограниченной контуром C ; ds — его линейный элемент; W — работа

деформации оболочки, отнесенная к единице площади недеформированной срединной поверхности. Если W выражена в функции деформации, то имеем соотношения упругости:

$$S^{\alpha\beta} = \frac{\partial W}{\partial p_{\alpha\beta}}; \quad M^{\alpha\beta} = -\frac{\partial W}{\partial q_{\alpha\beta}}. \quad (3.1)$$

Потенциалом деформаций называется функция [1]

$$F = S^{\alpha\beta} p_{\alpha\beta} - M^{\alpha\beta} q_{\alpha\beta} - W, \quad (3.2)$$

выраженная в функции одних усилий и моментов. Из (3.2) следуют соотношения упругости:

$$p_{\alpha\beta} = \frac{\partial F}{\partial S^{\alpha\beta}}; \quad q_{\alpha\beta} = -\frac{\partial F}{\partial M^{\alpha\beta}}. \quad (3.3)$$

В дальнейшем изложении не будем предпринимать вопрос о выборе того или иного варианта соотношения упругости, а возьмем в общем виде (3.1) или (3.3). При конечных деформациях соотношения (3.1) и (3.3) имеют место лишь для симметрических тензоров усилий и моментов. В этом состоит одно из преимуществ этих тензоров.

Обозначим угол поворота на контуре через

$$\Omega = \int \bar{n}_* \delta \bar{m}_*, \quad \text{откуда} \quad \delta \Omega = \bar{n}_* \delta \bar{m}_*. \quad (3.4)$$

Пусть, далее, внешние поверхностные усилия и моменты допускают потенциал f такой, что:

$$X_0^\alpha = \frac{\partial f}{\partial v_\alpha}; \quad X_0^3 = \frac{\partial f}{\partial w}; \quad [\bar{M}, \bar{m}_*] \bar{m} = \frac{\partial f}{\partial E_0}; \quad [\bar{M}, \bar{m}_*] \bar{\rho}^\alpha = \frac{\partial f}{\partial E_\alpha}, \quad (3.5)$$

где X_0^α , X_0^3 — компоненты внешнего усилия в координатах недеформированной оболочки.

Из всевозможных граничных условий для определенности мы рассмотрим следующие: на части C_1 контура C недеформированной оболочки потребуем выполнения статических граничных условий:

$$\bar{\Phi} = \bar{\Phi}_s; \quad G = \bar{G} \quad (\text{на } C_1), \quad (3.6)$$

а на остальной части C_2 этого контура — геометрических граничных условий:

$$\bar{v} = \bar{v}_s, \quad \Omega = \Omega_s, \quad (3.7)$$

где $\bar{\Phi}_s$ и \bar{G} — вектор заданного внешнего усилия и заданный изгибающий момент; \bar{v}_s и Ω_s — соответственно вектор заданного перемещения и угол поворота. $\bar{\Phi}$ и G выражаются формулой (2.5).

Введем в рассмотрение функционал:

$$P = A - \int \int (S^{\alpha\beta} p_{\alpha\beta} - M^{\alpha\beta} q_{\alpha\beta} - F) ds, \quad (3.8)$$

где F — потенциал деформации (3.2), выраженный через усилия и моменты; A есть интеграл

$$A = \int \int f d\sigma + \int_{C_1} (\bar{\Phi}_s \bar{v} + \bar{G} \Omega) ds + \int_{C_2} \{ (\bar{v} - v_s) \bar{\Phi} + (\Omega - \Omega_s) G \} ds. \quad (3.9)$$

Предполагая, что контурные усилия не содержат сосредоточенных сил, докажем следующую вариационную теорему. Перемещения,

усилия и моменты, которые внутри оболочки удовлетворяют дифференциальным уравнениям равновесия (2.3), (2.4) и соотношениям упругости (3.3), а на контуре оболочки удовлетворяют статическим и геометрическим граничным условиям (3.6) и (3.7), сообщают функционалу P стационарное значение: $\delta P = 0$, причем предполагается, что усилия и моменты и перемещения варьируются независимо друг от друга. Варьируя (3.8) по всем функциональным аргументам, имеем:

$$\delta P = \delta A - \int \int \left\{ \left(p_{\alpha\beta} - \frac{\partial F}{\partial s^{\alpha\beta}} \right) \delta s^{\alpha\beta} - \left(q_{\alpha\beta} + \frac{\partial F}{\partial M^{\alpha\beta}} \right) \delta M^{\alpha\beta} + s^{\alpha\beta} \delta p_{\alpha\beta} - M^{\alpha\beta} \delta q_{\alpha\beta} \right\} d\sigma, \quad (3.10)$$

где

$$\delta A = \int \int \left\{ (\bar{X} \delta \bar{v} + [\bar{M}, \bar{m}_*] \delta \bar{m}_*) d\sigma + \int_{C_1} (\bar{\Phi}_s \delta \bar{v} + \bar{G} \bar{n}_* \delta \bar{m}_*) ds + \int \int_{C_2} \left\{ \bar{\Phi} \delta \bar{v} + G \bar{n}_* \delta \bar{m}_* + (\bar{v} - \bar{v}_s) \delta \bar{\Phi} + (\Omega - \Omega_s) \delta G \right\} ds \right\}, \quad (3.11)$$

так как $\delta f = X_0^\alpha \delta v_\alpha + X_0^\beta \delta w + [\bar{M}, \bar{m}_*] \delta \bar{m}_*$; $\delta \Omega = \bar{n}_* \delta \bar{m}_*$.

Рассмотрим интеграл

$$I = \int \int (S^{\alpha\beta} \delta p_{\alpha\beta} - M^{\alpha\beta} \delta q_{\alpha\beta}) d\sigma.$$

Его можно представить в виде:

$$I = \int \int \left\{ (S^{\alpha\beta} - b_r^{\alpha\beta} M^{r\alpha}) \bar{\rho}_\beta^* \delta \bar{\rho}_\alpha^* + M^{\alpha\beta} \bar{\rho}_\beta^* \delta \bar{m}_\alpha^* \right\} d\sigma = \int \int (T_1^{\alpha\beta} \bar{\rho}_\beta^* \nabla_\alpha \delta \bar{v} + M^{\alpha\beta} \bar{\rho}_\beta^* \nabla_\alpha \delta \bar{m}_\alpha^*) d\sigma.$$

Откуда, пользуясь формулой преобразования поверхностного интеграла в контурный

$$\int \int \nabla_\alpha B^\alpha d\sigma = \int B^\alpha n_\alpha ds, \quad (3.12)$$

с учетом (1.26), получим:

$$I = \int_C (T_1^{\alpha\beta} \bar{\rho}_\beta^* \delta \bar{v} + M^{\alpha\beta} \bar{\rho}_\beta^* \delta \bar{m}_\alpha^*) n_\alpha ds - \int \int \left\{ (\nabla_\alpha T_1^{\alpha\beta} + A_{\alpha\gamma}^\beta T_1^{\alpha\gamma}) \bar{\rho}_\beta^* \delta \bar{v} + b_{\alpha\beta}^* T_1^{\alpha\beta} \bar{m}_* \delta \bar{v} + (\nabla_\alpha M^{\alpha\beta} + A_{\alpha\gamma}^\beta M^{\alpha\gamma}) \bar{\rho}_\beta^* \delta \bar{m}_\alpha^* \right\} d\sigma.$$

Если ввести сюда перерезывающие усилия Q^α из уравнений моментов (2.4), то будем иметь:

$$I = \int_C (T_1^{\alpha\beta} \bar{\rho}_\beta^* \delta \bar{v} + M^{\alpha\beta} \bar{\rho}_\beta^* \delta \bar{m}_\alpha^*) n_\alpha ds - \int \int \left\{ (\nabla_\alpha T_1^{\alpha\beta} + A_{\alpha\gamma}^\beta T_1^{\alpha\gamma}) \bar{\rho}_\beta^* \delta \bar{v} + b_{\alpha\beta}^* T_1^{\alpha\beta} \bar{m}_* \delta \bar{v} + Q^\alpha \bar{\rho}_\alpha^* \delta \bar{m}_* - M^{\alpha\beta} \bar{\rho}_\alpha^* \delta \bar{m}_\beta^* \right\} d\sigma, \quad (*)$$

так как $Q^\alpha \bar{\rho}_\alpha^* \delta \bar{m}_* = -Q^\alpha \bar{m}_* \delta \bar{\rho}_\alpha^* = -Q^\alpha \bar{m}_* \nabla_\alpha \delta \bar{v}$,

то вновь пользуясь (3.12) имеем:

$$I = \int_C \left\{ (T_1^{\alpha\beta} \bar{\rho}_\beta^* + Q^\alpha \bar{m}_*) \delta \bar{v} + M^{\alpha\beta} \bar{\rho}_\beta^* \delta \bar{m}_\alpha^* \right\} n_\alpha ds - \int \int \left\{ (\nabla_\alpha T_1^{\alpha\beta} + A_{\alpha\gamma}^\beta T_1^{\alpha\gamma} - b_{\alpha\beta}^* Q^\alpha) \bar{\rho}_\beta^* \delta \bar{v} + (\nabla_\alpha Q^\alpha + b_{\alpha\beta}^* T_1^{\alpha\beta}) \bar{m}_* \delta \bar{v} - [\bar{M}, \bar{m}_*] \delta \bar{m}_* \right\} d\sigma.$$

Здесь учтено, что $M^\alpha \bar{\rho}_\alpha^* \delta \bar{m}_* = [\bar{M}, \bar{m}_*] \delta \bar{m}_*$.

Преобразуем члены, содержащиеся в контурном интеграле. Из (2.14) имеем:

$$M^{\alpha\beta} [\bar{m}_* \bar{\rho}_\beta^*] n_\alpha = H^* \bar{n}_* + G \bar{\tau}_*,$$

где H^* — крутящий момент на единицу длины деформированного контура: $H^* = H \frac{ds_*}{ds}$, H — на единицу длины недеформированного контура. Умножая предыдущее равенство на $\bar{\rho}_\alpha^*$ и пользуясь формулами (1.3) и (1.6), имеем:

$$M^{\alpha\beta} n_\alpha = G \bar{n}_* - \bar{\tau}_* H \frac{ds_*}{ds}; \quad M^{\alpha\beta} \bar{\rho}_\beta^* n_\alpha = G \bar{n}_* - \bar{\tau}_* H \frac{ds_*}{ds}.$$

Таким образом, контурный интеграл от моментов после интегрирования по частям преобразуется к виду:

$$\begin{aligned} \int_C M^{\alpha\beta} \bar{\rho}_\beta^* n_\alpha \delta \bar{m}_* ds &= \int_C G \bar{n}_* \delta \bar{m}_* ds - \int_C \bar{\tau}_* \delta \bar{m}_* H ds_* = \\ &= \int_C G \bar{n}_* \delta \bar{m}_* ds + \int_C \bar{m}_* H d(\delta \bar{v}) = \int_C \left(G \bar{n}_* \delta \bar{m}_* - \frac{d\bar{m}_* H}{ds} \delta \bar{v} \right) ds + \\ &\quad + H \bar{m}_* \delta \bar{v} \Big|_C. \end{aligned}$$

Принимая во внимание это соотношение, а также выражение (2.5) для $\bar{\Phi}$, контурный интеграл в равенстве (*) приводится к виду:

$$I_C = \int_C (\bar{\Phi} \delta \bar{v} + G \bar{n}_* \delta \bar{m}_*) ds = \int_{C_1} (\bar{\Phi} \delta \bar{v} + G \bar{n}_* \delta \bar{m}_*) ds + \int_{C_2} (\bar{\Phi} \delta \bar{v} + G \bar{n}_* \delta \bar{m}_*) ds, \quad (3.13)$$

причем ввиду отсутствия сосредоточенных сил на контуре, внешнеинтегральный член исчезает.

Следовательно, интеграл (*) преобразуется к виду:

$$I = I_C - \int \int \left\{ (\nabla_\alpha T_1^{\alpha\beta} + A_{\alpha\gamma}^\beta T_1^{\alpha\gamma} - b_{\alpha\beta}^* Q^\alpha) \bar{\rho}_\beta^* \delta \bar{v} + (\nabla_\alpha Q^\alpha + b_{\alpha\beta}^* T_1^{\alpha\beta}) \bar{m}_* \delta \bar{v} - [\bar{M}, \bar{m}_*] \delta \bar{m}_* \right\} d\sigma. \quad (3.14)$$

Подставляя этот интеграл в (3.10), для вариации функционала P находим выражение:

$$\begin{aligned} \delta P = & \int_{C_1} \{(\bar{\Phi}_s - \bar{\Phi}) \delta \bar{v} + (\bar{G} - G) \bar{n}_* \delta \bar{m}_*\} ds + \int_{C_2} \{(\bar{v} - v_s) \delta \bar{\Phi} + \\ & + (\Omega - \Omega_s) \delta G\} ds + \int \int \{(\nabla_\alpha T_1^{\alpha\beta} + A_{\alpha\gamma}^{\beta} T_1^{\alpha\gamma} - \bar{b}_\alpha^{\beta} Q^\alpha + X^\beta) \bar{\rho}_\beta^* \delta \bar{v} + \\ & + (\nabla_\alpha Q^\alpha + \bar{b}_{\alpha\beta}^* T_1^{\alpha\beta} + X^\beta) \bar{m}_* \delta \bar{v} - (p_{\alpha\beta} - \frac{\partial F}{\partial S^{\alpha\beta}}) \delta S^{\alpha\beta} + \\ & + (q_{\alpha\beta} + \frac{\partial F}{\partial M^{\alpha\beta}}) \delta M^{\alpha\beta}\} d\sigma; \end{aligned} \quad (3.15)$$

отсюда следует, что при выполнении условий равновесия и соотношений упругости внутри оболочки и краевых условий (3.6) и (3.7), функционал P имеет стационарное значение: $\delta P = 0$.

В рассматриваемой вариационной задаче вариации перемещений и напряжений являются свободными. Поэтому из условия стационарности $\delta P = 0$, обратно, следуют уравнения равновесия (2.3) и (2.4), соотношения упругости (3.3) и в качестве естественных граничных условий — условия (3.6) и (3.7). В этом состоит одна из особенностей вариационной теоремы.

Заметим, что в этой теореме вариации перемещений не должны обязательно удовлетворять геометрическим граничным условиям. Таким свойством могут обладать, например, вариации перемещений по частотам волнообразований. Следовательно, функционал P можно варьировать не только по амплитудам, но и по частотам. В случае энергетического функционала эти вариации могут быть несовместными с геометрическими связями. Функционал P позволяет приближенно удовлетворять геометрическим граничным условиям с сохранением контурных интегралов в выражении A . В отличие от вариационных формул Кастильяно при решении задач по функционалу P заранее не требуется удовлетворить условиям равновесия внутри оболочки и на ее контуре.

Условие $\delta P = 0$ является вариационной формулировкой уравнений равновесия и условий неразрывности деформации. Это будет показано на примере пологих оболочек. Следует отметить, что величина A , входящая в функционал P , выбирается в зависимости от краевых условий. Вариация угла поворота $\bar{n}_* \delta \bar{m}_*$ при произвольных изгибах и деформациях не является полной вариацией. Следовательно, в общем случае нельзя найти Ω . Величина A может быть найдена лишь при условии, если часть контура шарнирно оперта, а другая часть жестко закреплена ($G = 0$ или $\bar{n}_* \delta \bar{m}_* = 0$).

Если пренебречь параметрами $c_{\alpha\beta}$ и квадратами ω_α по сравнению с единицей, то $\bar{n}_* \delta \bar{m}_*$ является полной вариацией. Иными словами, эта величина есть полная вариация в линейной и в квадратичной теории оболочки. При малых деформациях имеем:

$$\bar{n}_* \delta \bar{m}_* = -\bar{m}_* \delta \bar{n}_* = -\bar{m}_* n^{\alpha\beta} \delta \bar{\rho}_\alpha^*,$$

или, внося $\bar{\rho}_\alpha^*$ и \bar{m}_* из (1.25), найдем:

$$\bar{n}_* \delta \bar{m}_* = -(E_0 \delta \omega_\alpha + E_1 \delta e_\alpha^i) n^\alpha. \quad (3.16)$$

Для квадратичной теории это выражение допускает дальнейшее упрощение. Выразим E_0 через ω_α . Так как $|m_*| = 1$, то из (1.25) имеем: $E_0^2 + E_\alpha E^\alpha = 1$. Но учитывая, что

$$\begin{aligned} E_\alpha E^\alpha &= c^{\alpha\beta} c_{\alpha\beta} \omega_\lambda (\delta_\alpha^\beta + e_\alpha^\beta) a^{\alpha\gamma} c^{\gamma\mu} c_{\gamma\mu} \omega_\nu (\delta_\gamma^\mu + e_\gamma^\mu) = \\ &= c^{\alpha\beta} c^{\alpha\gamma} \omega_\lambda \omega_\nu (a_{\alpha\gamma} + 2p_{\alpha\gamma}) \end{aligned}$$

и пренебрегая удлинениями по сравнению с единицей, получим $E_\alpha E^\alpha \approx \omega_\alpha \omega^\alpha$. Следовательно, при малых деформациях

$$E_0 \approx (1 - \omega_\alpha \omega^\alpha)^{1/2}, \quad (3.17)$$

а по квадратичной теории $E_0 \approx 1 - 1/2 \omega_\alpha \omega^\alpha$. Так как по этой теории $E_0 \delta e_\alpha^i \approx -\omega_\alpha \delta e_\alpha^i$, то членами $G \omega_\alpha \delta e_\alpha^i$ можно пренебречь по сравнению с $\bar{\Phi} \delta \bar{v}$. Следовательно, по квадратичной теории

$$\bar{n}_* \delta \bar{m}_* \approx -n_\alpha \delta \omega^\alpha; \quad \Omega = -\omega^\alpha n_\alpha. \quad (3.18)$$

Как будет показано в § 4, это же значение Ω можно принять и при рассмотрении произвольных изгибов оболочки, при условии, что внешние силы разлагаются по направлениям координат деформированной оболочки.

4. Вариационные уравнения метода Бубнова — Галеркина

Предположим, что вариации перемещений удовлетворяют геометрическим граничным условиям. Тогда вариация работы внешних сил δu равна:

$$\begin{aligned} \delta u = & \int \int (\bar{X} \delta \bar{v} + [\bar{M}, \bar{m}_*] \delta \bar{m}_*) d\sigma + \\ & + \int_C (\bar{\Phi}_s \delta \bar{v} + \bar{G} \bar{n}_* \delta \bar{m}_*) ds + \bar{H} \bar{m}_* \delta \bar{v} \Big|_C, \end{aligned} \quad (4.1)$$

где внеинтегральный член исчезает, если на контуре нет сосредоточенных сил.

Совершенно так же, как и в предыдущем параграфе, можно показать, что при независимых вариациях перемещений, усилий и моментов вариационное уравнение

$$\delta \bar{u} = \delta \int \int (S^{\alpha\beta} p_{\alpha\beta} - M^{\alpha\beta} q_{\alpha\beta} - F) d\sigma \quad (4.2)$$

содержит в себе уравнения равновесия (2.3) и статические граничные условия (2.5), а также соотношения упругости (3.3). Повторяя вычисления предыдущего параграфа, имеем:

$$\begin{aligned} & \int_C \{(\bar{\Phi}_s - \bar{\Phi}) \delta \bar{v} + (\bar{G} - G) \bar{n}_* \delta \bar{m}_*\} ds + (\bar{H} - H) \bar{m}_* \delta \bar{v} \Big|_C + \\ & + \int \int \{(\nabla_\alpha T_1^{\alpha\beta} + A_{\alpha\gamma}^{\beta} T_1^{\alpha\gamma} - \bar{b}_\alpha^{\beta} Q^\alpha + X^\beta) \bar{\rho}_\beta^* \delta \bar{v} + (\nabla_\alpha Q^\alpha + \bar{b}_{\alpha\beta}^* T_1^{\alpha\beta} + X^\beta) \bar{m}_* \delta \bar{v} - \\ & - (p_{\alpha\beta} - \frac{\partial F}{\partial S^{\alpha\beta}}) \delta S^{\alpha\beta} + (q_{\alpha\beta} + \frac{\partial F}{\partial M^{\alpha\beta}}) \delta M^{\alpha\beta}\} d\sigma = 0, \end{aligned} \quad (4.3)$$

где $\bar{\Phi}$ выражается формулой (2.5), а G и H — формулой (2.6). В этом вариационном уравнении вектор $\delta \bar{v}$ разлагается по направлениям

координатных векторов деформационной оболочки. Для того чтобы получить из (4.3) уравнение с компонентами $\delta\bar{v}$ на первоначальные направления, надо из него вычесть равенство [1]:

$$\int_C \{ (\bar{\Phi}_s - \Phi) (\bar{p}_s^* f'_s + \bar{m}_s f'_s) - (\bar{G} - G) n_s^* \Omega_s \} ds + (\bar{H} - H) f'_s \Big|_C + \int \int \{ (\nabla_\alpha T_1^{23} + A_{\alpha\gamma}^B T_1^{2\gamma} - b_{\alpha}^{*3} Q^x + X^3) f'_s + (\nabla_\alpha Q^x + b_{\alpha\beta}^* T_1^{23} + X^3) f'_s \} d\sigma = 0, \quad (4.4)$$

где $\bar{f}' = \bar{p}_s^* f'_s + \bar{m}_s f'_s$; $f'_s = \nabla_s \bar{v} \delta \bar{v}$; $f'_s = (\bar{m}_s - \bar{m}) \delta \bar{v}$; $\Omega_s = \bar{m}_s \nabla_s \bar{f}'$.

В результате будем иметь:

$$\int_C \{ (\bar{\Phi}_s - \Phi) (\bar{p}_s^* \delta v_\alpha + \bar{m}_s \delta w) + (\bar{G} - G) n_s^* \delta \omega_s \} ds + (\bar{H} - H) \delta w \Big|_C + \int \int \{ (\nabla_\alpha T_1^{23} + A_{\alpha\gamma}^B T_1^{2\gamma} - b_{\alpha}^{*3} Q^x + X^3) \delta v_\beta + (\nabla_\alpha Q^x + b_{\alpha\beta}^* T_1^{23} + X^3) \delta w + (q_{\alpha\beta} + \frac{\partial F}{\partial M^{\alpha\beta}}) \delta M^{\alpha\beta} - (p_{\alpha\beta} - \frac{\partial F}{\partial S^{\alpha\beta}}) \delta S^{\alpha\beta} \} d\sigma = 0, \quad (4.5)$$

где вариация угла поворота $\delta \omega_s$ равна:

$$\delta \omega_s = -(\bar{n}_s \delta \bar{m}_s + \bar{n}_s^* \Omega_s) = \delta \omega_s + (b_{\alpha}^{*3} - b_{\alpha}^3) \delta v_\beta. \quad (4.6)$$

Рассмотрим случай малых деформаций. Если X_0^x и X_0^z — компоненты вектора нагрузки в системе координат начального состояния, то

$$X^x = X_0^x (\delta_3^x + e_3^x) + X_0^z \omega^z; \quad X^z = E_0 X_0^x + E_x X_0^z; \quad (4.7)$$

$$\Phi^x = \Phi_0^x (\delta_3^x + e_3^x) + \Phi_0^z \omega^z; \quad \Phi^z = E_0 \Phi_0^x + E_x \Phi_0^z,$$

где Φ_0^x и Φ_0^z — компоненты вектора контурной нагрузки в исходной системе координат, а в случае гидростатического давления $X^x = 0$, $X^z = -p$. Если h — толщина тонкой оболочки, то $h_q \sim \epsilon_p$, где ϵ_p — максимальное относительное удлинение в пределах пропорциональности. Тогда $G n_s^* \delta \omega_s = G n_s^* \delta \omega_s + G n_s^* q_\alpha^3 \delta v_\beta$, так как $n_s^* \approx n^x$ при малых деформациях. Кроме того, $G n_s^* q_\alpha^3 \sim E h^3 q^2 \sim E h \epsilon_p^2 p$. Следовательно, $G n_s^* q_\alpha^3 \delta v_\beta \sim E h \epsilon_p^2 \delta v_\beta$, что пренебрежимо мало по сравнению с $\bar{\Phi} \delta \bar{v} \sim E h \epsilon_p \delta v_\beta$. Поэтому в уравнении (4.5) можно положить $(\bar{G} - G) n_s^* \delta \omega_s \approx (\bar{G} - G) n_s^* \delta \omega_s$, а внешние силы определять по формулам (4.7).

Если в вариационном уравнении (4.5) контурный интеграл

$$I_C = \int_C \{ (\bar{\Phi}_s - \Phi) (\bar{p}_s^* \delta v_\alpha + \bar{m}_s \delta w) + (\bar{G} - G) n_s^* \delta \omega_s \} ds + (\bar{H} - H) \delta w \Big|_C \quad (4.8)$$

исчезает, то (4.5) при независимых вариациях $\delta \bar{v}$, $\delta S^{\alpha\beta}$, $\delta M^{\alpha\beta}$ превращаются в уравнения метода Бубнова — Галеркина:

$$\int \int (\nabla_\alpha T_1^{23} + A_{\alpha\gamma}^B T_1^{2\gamma} - b_{\alpha}^{*3} Q^x + X^3) \delta v_\beta d\sigma = 0;$$

$$\int \int (\nabla_\alpha Q^x + b_{\alpha\beta}^* T_1^{23} + X^3) \delta w d\sigma = 0; \quad (4.9)$$

$$\int \int (p_{\alpha\beta} - \frac{\partial F}{\partial S^{\alpha\beta}}) \delta S^{\alpha\beta} d\sigma = 0; \quad \int \int (q_{\alpha\beta} + \frac{\partial F}{\partial M^{\alpha\beta}}) \delta M^{\alpha\beta} d\sigma = 0. \quad (4.10)$$

I_C исчезает, например, в следующих случаях:

- 1) при выполнении статических граничных условий на всем контуре;
- 2) если контур жестко заделан ($\bar{v} = \delta \omega_s n_s^* = 0$);
- 3) при шарнирном опирании контура ($v = \bar{G} = 0$);
- 4) если контур свободно оперт ($w = \bar{\Phi}^x = \bar{G} = 0$),

а также при смешанных граничных условиях, состоящих из перечисленных.

При решении задач по методу Бубнова — Галеркина по уравнениям (4.9) и (4.10) в качестве функций, аппроксимирующих решения, можно принять:

$$S^{\alpha\beta} = \sum_{i=1}^n A_i S_i^{\alpha\beta}; \quad M^{\alpha\beta} = \sum_{i=1}^n B_i M_i^{\alpha\beta}; \quad v_\alpha = \sum_{i=1}^n C_i v_{i\alpha}; \quad w = \sum_{i=1}^n D_i w_i, \quad (4.11)$$

где A_i , B_i , C_i , D_i — искомые постоянные, $S_i^{\alpha\beta}$, $M_i^{\alpha\beta}$, v_i , w_i — подходящим образом выбранные функции, причем легче выбрать функции v_i и w_i , чем $S_i^{\alpha\beta}$ и $M_i^{\alpha\beta}$.

Подставляя (4.11) в (4.9) и (4.10), получим необходимое число уравнений для искомых постоянных. Таким путем соотношения упругости будут удовлетворены в процессе решения с такой же степенью точности, с какой удовлетворяются уравнения равновесия. В этом состоит особенность рассматриваемого вариационного метода. Приведение вариационного уравнения (4.5) к виду (4.9) и (4.10), вообще говоря, необязательно, так как при неточном удовлетворении статических граничных условий следует сохранить контурный интеграл и тем самым учесть работу неуравновешенных сил.

В процессе решения задач аппроксимирующие функции (4.11) можно подчинить предварительным условиям, а именно можно потребовать частичного удовлетворения соотношений упругости и уравнений равновесия. Это вместе с граничными условиями даст возможность фиксировать аппроксимирующие функции на контуре. Такое применение вариационной формулы дано ниже.

В заключение этого параграфа укажем, что проведенное выше упрощение вариационного уравнения (4.5) можно использовать для составления A в выражении функционала P , при условии, что внешние силы и моменты допускают потенциал вида:

$$X^x = \frac{\partial f}{\partial v_\alpha}; \quad X^z = \frac{\partial f}{\partial w}; \quad M^x = \frac{\partial f}{\partial \omega_s} \quad (M^x \delta \omega_s = M^x \delta \omega_s),$$

Тогда из структуры вариационного уравнения (4.5) заключаем, что при малых деформациях, но произвольных изгибах можно принять:

$$A = \int \int f d\sigma + \int_{C_1} (\Phi_s^x v_\alpha + \Phi_s^z w + \bar{G} \Omega) ds + \int_{C_2} \{ (v_\alpha - v_{s\alpha}) \Phi^x + (\omega - \omega_s) \Phi^z + (\Omega - \Omega_s) G \} ds,$$

где Φ^x , Φ^z — компоненты внешних сил в системе координат деформированной оболочки; $\Omega = n_s^* \omega_s$ — угол поворота в смысле линейной теории.

В следующем параграфе будет показано, что с помощью рассматриваемой вариационной формулы можно найти те условия, при выполнении которых возможно раздельное приближенное интегрирование уравнений равновесия и совместности по методу Бубнова — Галеркина с одинаковой степенью приближения.

5. Вариационная формула, соответствующая основным уравнениям теории пологих оболочек.

Пусть тонкая полая оболочка находится в равновесии под действием внешнего нормального давления $X^3 = -p$ и контурных нагрузок, не содержащих сосредоточенных сил. Для пологих оболочек допустимо пренебрежение параметрами $e_{\alpha\beta}$ по сравнению с единицей и величинами $b_{\alpha\beta}v^{\beta}$ по сравнению с $\nabla_{\alpha}w$. Тогда из (1.28) для компонентов деформации полой оболочки имеем:

$$2p_{\alpha\beta} = e_{\alpha\beta} + e_{\beta\alpha} + \nabla_{\alpha}w\nabla_{\beta}w; q_{\alpha\beta} = \nabla_{\alpha}\nabla_{\beta}w; e_{\alpha\beta} = \nabla_{\alpha}v_{\beta} - b_{\alpha\beta}w, \quad (5.1)$$

а в осях триэдра $\{\bar{\tau}, \bar{m}, \bar{n}\}$ из (1.29) и (1.31) получим:

$$\epsilon_n = \frac{du}{dn} - \tilde{\sigma}_n w + \frac{1}{2} \left(\frac{dw}{dn}\right)^2; \epsilon_s = \frac{dv}{ds} + \chi u - \tilde{\sigma} w + \frac{1}{2} \left(\frac{dw}{ds}\right)^2; \quad (5.2)$$

$$2\epsilon_{ns} = \frac{du}{ds} + \frac{dv}{ds} - \chi v + 2\tilde{t} w + \frac{dw}{ds} \frac{dw}{dn};$$

$$\chi_n = \frac{d^2w}{dn^2}; \chi_s = \frac{d^2w}{ds^2} + \chi \frac{dw}{dn}; \chi_{ns} = \frac{d}{dn} \left(\frac{dw}{ds}\right) = \frac{d}{ds} \left(\frac{dw}{dn}\right) - \chi \frac{dw}{ds}. \quad (5.3)$$

В теории пологих оболочек допустимо пренебрежение перерезывающими усилиями в первых двух уравнениях равновесия. Если оболочки находятся в равновесии под действием гидростатических давлений, то уравнения равновесия имеют вид:

$$1) \nabla_{\alpha}S^{\alpha\beta} = 0; 2) \nabla_{\alpha}Q^{\alpha} + (b_{\alpha\beta} + q_{\alpha\beta})S^{\alpha\beta} - p = 0; 3) Q^{\alpha} = \nabla_{\beta}M^{\alpha\beta}. \quad (5.4)$$

В случае малых деформаций физические соотношения (3.1) и (3.3) принимают вид:

$$S^{\alpha\beta} = BE^{\alpha\beta\pi\tau}p_{\pi\tau}; M^{\alpha\beta} = DE^{\alpha\beta\pi\tau}q_{\pi\tau}; \quad (5.5)$$

$$p_{\alpha\beta} = B'P_{\alpha\beta\pi\tau}S^{\pi\tau}; q_{\alpha\beta} = D'P_{\alpha\beta\pi\tau}M^{\pi\tau}, \quad (5.6)$$

где введены обозначения:

$$B = Eh/(1 - \nu^2); D = Eh^3/12(1 - \nu^2); B' = 1/Eh; D' = 12/Eh^3; \quad (5.7)$$

$$E^{\alpha\beta\pi\tau} = a^{\alpha\pi}a^{\beta\tau} + \nu c^{\alpha\pi}c^{\beta\tau}; P_{\alpha\beta\pi\tau} = a_{\alpha\pi}a_{\beta\tau} - \nu c_{\alpha\pi}c_{\beta\tau};$$

E — модуль Юнга, ν — коэффициент Пуассона, h — толщина оболочки. Первые два уравнения равновесия удовлетворяются функцией напряжения ψ :

$$S^{\alpha\beta} = c^{\alpha\pi}c^{\beta\tau}\nabla_{\pi}\nabla_{\tau}\psi \quad (5.8)$$

для поверхности нулевой гауссовой кривизны. В других случаях уравнения равновесия удовлетворяются приближенно, с погрешностью, присущей теории пологих оболочек: $\nabla_{\alpha}S^{\alpha\beta} = Ka^{\alpha\beta}\nabla_{\alpha}\psi$, где K — гауссова кривизна. Оболочки будем называть пологими, если $(L/R)^2 \ll 1$, где R — наименьший радиус кривизны срединной поверхности, L — характерный размер (например, ширина рассматриваемой части оболочки). Для таких оболочек соотношения (5.1)... (5.4) достаточно точны. Они справедливы и для непологих оболочек, которые при деформации делятся на многие пологие панели. Теория пологих оболочек произвольного очертания развита в работах Х. М. Муштари, В. З. Власова, Н. А. Алумяэ и других советских авторов. Выразим тангенциальные усилия N, T, S в осях триэдра через функцию напряжения ψ . Имеем:

$$N = s^{\alpha\beta}n_{\alpha}n_{\beta} = c^{\alpha\pi}c^{\beta\tau}\nabla_{\pi}\nabla_{\tau}\psi \cdot n_{\alpha}n_{\beta} = c^{\alpha\pi}c^{\beta\tau}\nabla_{\alpha}\nabla_{\beta}\psi,$$

откуда, воспользуясь формулами (1.21), находим:

$$N = \frac{d^2\psi}{ds^2} + \chi \frac{d\psi}{dn}; S = \frac{d^2\psi}{dn^2}; T = -\frac{d}{dn} \left(\frac{dw}{dn}\right) = -\frac{d}{ds} \left(\frac{d\psi}{dn}\right) + \chi \frac{d\psi}{ds}. \quad (5.9)$$

Для изгибающего и крутящего момента получим:

$$G = M^{\alpha\beta}n_{\alpha}n_{\beta} = D \left(\frac{d^2w}{dn^2} + \nu \frac{d^2w}{ds^2} + \nu\chi \frac{dw}{dn}\right); \quad (5.10)$$

$$H = -D(1 - \nu) \frac{d}{dn} \left(\frac{dw}{ds}\right).$$

Предположим, что: 1) перемещения v_{α} и w удовлетворяют геометрическим граничным условиям; 2) первые два уравнения равновесия удовлетворяются; 3) моменты удовлетворяют соотношениям упругости:

$$q_{\alpha\beta} = -\frac{\partial F}{\partial M^{\alpha\beta}} \text{ или } M^{\alpha\beta} = D(a^{\alpha\pi}a^{\beta\tau} + \nu c^{\alpha\pi}c^{\beta\tau})\nabla_{\pi}\nabla_{\tau}w \quad (5.11)$$

при малых деформациях. При этих предварительных условиях вариационное уравнение (4.5) значительно упрощается и принимает вид:

$$\int_C \left\{ (\bar{\Phi}_s - \bar{\Phi}) \delta \bar{v} + (\bar{\sigma} - G) \frac{d\bar{w}}{ds} \right\} ds + \quad (5.12)$$

$$+ \int_C \int \left\{ (\nabla_{\alpha}Q^{\alpha} + b_{\alpha\beta}^* S^{\alpha\beta} - p) \delta w - A_{\alpha\beta} \delta S^{\alpha\beta} \right\} d\sigma = 0,$$

где

$$Q^{\alpha} = \nabla_{\beta}M^{\alpha\beta}; b_{\alpha\beta}^* = b_{\alpha\beta} + \nabla_{\alpha}\nabla_{\beta}w; A_{\alpha\beta} = p_{\alpha\beta} - \frac{\partial F}{\partial S^{\alpha\beta}}. \quad (5.13)$$

Преобразуем здесь двойной интеграл. Подставляя $S^{\alpha\beta}$ из (5.8) и интегрируя по частям по формуле (3.12), будем иметь:

$$I = \int_C \int A_{\alpha\beta} \delta S^{\alpha\beta} d\sigma = \int_C c^{\alpha\pi}c^{\beta\tau} (\delta\psi \cdot \nabla_{\tau} A_{\alpha\beta} - A_{\alpha\beta} \nabla_{\tau} \delta\psi) ds + \quad (*)$$

$$+ \int_C \int c^{\alpha\pi}c^{\beta\tau} \nabla_{\tau} \nabla_{\pi} A_{\alpha\beta} \delta\psi d\sigma.$$

Двойной интеграл, стоящий в правой части этого равенства после подстановки $p_{\alpha\beta}$ из (5.1), запишется в виде:

$$I_1 = \int_C \int c^{\alpha\pi}c^{\beta\tau} \nabla_{\tau} \nabla_{\pi} A_{\alpha\beta} \delta\psi d\sigma =$$

$$= \int_C \int c^{\alpha\pi}c^{\beta\tau} \nabla_{\tau} \nabla_{\pi} \left(e_{\alpha\beta} + \frac{1}{2} \nabla_{\alpha}w \cdot \nabla_{\beta}w - \frac{\partial F}{\partial S^{\alpha\beta}} \right) d\sigma,$$

так как

$$c^{\alpha\pi}c^{\beta\tau} \nabla_{\tau} \nabla_{\pi} (e_{\alpha\beta} + e_{\beta\alpha}) = 2c^{\alpha\pi}c^{\beta\tau} \nabla_{\tau} \nabla_{\pi} e_{\alpha\beta}.$$

Если учесть, что

$$c^{\alpha\pi} \nabla_{\pi} e_{\alpha\beta} = c^{\alpha\pi} \nabla_{\pi} (\nabla_{\alpha}v_{\beta} - b_{\alpha\beta}w) = -c^{\alpha\pi} b_{\alpha\beta} \nabla_{\pi} w,$$

то I_1 преобразуется к виду:

$$I_1 = \int_C \int c^{\alpha\pi}c^{\beta\tau} \left(b_{\alpha\beta} \nabla_{\tau} \nabla_{\pi} w + \frac{1}{2} \nabla_{\tau} \nabla_{\alpha} w \cdot \nabla_{\pi} \nabla_{\beta} w - \nabla_{\tau} \nabla_{\pi} \frac{\partial F}{\partial S^{\alpha\beta}} \right) \delta\psi d\sigma;$$

при этом использованы условия Кодацци для недеформированной поверхности $c^{\beta\tau} \nabla_{\tau} b_{\alpha\beta} = 0$ и учтено, что на поверхности полой оболочки без существенных погрешностей можно менять порядок ковариантного дифференцирования.

Теперь рассмотрим контурный интеграл:

$$I_2 = \int_C c^{\beta\gamma\tau\alpha} (\delta\psi \cdot \nabla_\tau A_{\alpha\beta} - A_{\alpha\beta} \nabla_\tau \delta\psi) ds,$$

входящий в равенство (*). По формулам преобразования типа (2.12) имеем:

$$A_{\alpha\beta} = A_n \cdot n_\alpha n_\beta + A_s \cdot \tau_\alpha \tau_\beta + A_{ns} (\tau_\alpha n_\beta + \tau_\beta n_\alpha), \quad (5.14)$$

где A_n , A_s и A_{ns} — компоненты тензора $A_{\alpha\beta}$ в системе осей триэдра $\{\bar{\tau}, \bar{m}, \bar{n}\}$. Учитывая эти формулы, имеем:

$$c^{\beta\gamma\tau\alpha} A_{\alpha\beta} = A_n \cdot n_\alpha \tau^\alpha - A_s \cdot \tau_\alpha n^\alpha + A_{ns} (\tau_\alpha \tau^\alpha - n_\alpha n^\alpha); \quad c^{\beta\gamma\tau\alpha} A_{\alpha\beta} = A_{ns} \tau^\alpha - A_s n^\alpha;$$

$$c^{\beta\gamma\tau\alpha} \nabla_\tau A_{\alpha\beta} = \chi A_n - \frac{dA_s}{dn} - \chi A_s + \frac{dA_{ns}}{ds}.$$

Следовательно, контурный интеграл приводится к виду:

$$I_2 = \int_C \left[\left(\chi A_n - \frac{dA_s}{dn} - \chi A_s + 2 \frac{dA_{ns}}{ds} \right) \delta\psi + A_s \frac{d\delta\psi}{dn} \right] ds - \delta\psi \cdot A_{ns} \Big|_C. \quad (5.15)$$

Здесь обозначено:

$$A_n = A_{\alpha\beta} n^\alpha n^\beta = \epsilon_n - F_n; \quad A_s = A_{\alpha\beta} \tau^\alpha \tau^\beta = \epsilon_s - F_s; \quad A_{ns} = \epsilon_{ns} - F_{ns}; \quad (5.16)$$

$$F_n = n^\alpha n^\beta \frac{\partial F}{\partial s^{\alpha\beta}}; \quad F_s = \tau^\alpha \tau^\beta \frac{\partial F}{\partial s^{\alpha\beta}}; \quad F_{ns} = \tau^\alpha n^\beta \frac{\partial F}{\partial s^{\alpha\beta}},$$

где F_n , F_s и F_{ns} в случае нелинейной упругости зависят от тангенциальных усилий N , S , T и моментов G , H , Q_s и являются известными функциями от них. В случае малых деформаций (5.16) имеют вид:

$$A_n = \epsilon_n - B'(N - \nu S); \quad A_s = \epsilon_s - B'(S - \nu N); \\ A_{ns} = \epsilon_{ns} - B'(1 + \nu) T. \quad (5.16')$$

Внося эти последние в (5.15) и пользуясь уравнениями равновесия для пологих оболочек¹

$$\frac{dN}{dn} + \frac{dT}{ds} + (N - S)\chi = 0 \quad (5.17)$$

для I_2 при малых деформациях, находим выражение:

$$I_2 = \int_C \left[\left[\chi (\epsilon_n - B'N) - \frac{d}{dn} (\epsilon_s - B'S) - (\epsilon_s - B'S)\chi + \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{d}{ds} (2\epsilon_{ns} - 2B'T - B'\nu T) \right] \delta\psi + \right. \\ \left. + [\epsilon_n - B'(S - \nu N)] \frac{d\delta\psi}{dn} \right] ds - A_{ns} \delta\psi \Big|_C. \quad (5.18)$$

Таким образом, вместо (5.12) получим:

$$\int_C \left[(\bar{\Phi}_s - \bar{\Phi}) \delta \bar{v} + (\bar{G} - G) \frac{d\delta w}{dn} \right] ds - I_2 + \int_C \int (L_1 \delta w + L_2 \delta \psi) d\sigma = 0, \quad (5.19)$$

¹ Чтобы получить (5.17), умножим уравнения равновесия $\nabla_\alpha S^{\alpha\beta} = 0$ на n_β и подставим вместо $S^{\alpha\beta}$ их выражения по формулам (2.12). Пользуясь ортогональностью векторов \bar{n} и $\bar{\tau}$, а также формулами (1.21), получим (5.17).

где выведены дифференциальные операторы:

$$L_1 = \nabla_\alpha Q^\alpha + b_{\alpha\beta}^* S^{\alpha\beta} - p;$$

$$L_2 = c^{\alpha\tau} c^{\beta\gamma} \left(\nabla_\tau \nabla_\alpha \frac{\partial F}{\partial s^{\alpha\beta}} - b_{\alpha\beta} \nabla_\tau \nabla_\alpha w - \frac{1}{2} \nabla_\tau \nabla_\alpha w \cdot \nabla_\tau \nabla_\beta w \right). \quad (5.20)$$

В случае малых деформаций

$$c^{\alpha\tau} c^{\beta\gamma} \nabla_\tau \nabla_\alpha \frac{\partial F}{\partial s^{\alpha\beta}} = B' \nabla^\alpha \nabla^\beta \nabla_\alpha \nabla_\beta \psi = B' \nabla^4 \psi; \quad \nabla_\alpha Q^\alpha = D \nabla^4 w, \quad (5.21)$$

где ∇^4 — бигармонический оператор в произвольной системе координат.

В силу произвольности вариации δw и $\delta \psi$, из (5.19) следует уравнение равновесия и условие совместности

$$L_1 = 0, \quad L_2 = 0 \quad (5.22)$$

теории пологих оболочек. Следовательно, условие $\delta P = 0$ является вариационной формулировкой условий равновесия и совместности.

Если в вариационном уравнении (5.19) контурные интегралы исчезают, то из него следуют уравнения метода Бубнова — Галеркина:

$$\int_C \int L_1 \delta w d\sigma = 0; \quad \int_C \int L_2 \delta \psi d\sigma = 0. \quad (5.23)$$

На возможность и целесообразность применения метода Бубнова — Галеркина к обоим уравнениям теории пологих оболочек указал В. З. Власов [4]. В качестве функций, аппроксимирующих решение, им предложены балочные фундаментальные функции. Ряд применений метода В. З. Власова к частным задачам дал М. А. Колтунов [5]. Применение метода Бубнова — Галеркина к более сложным случаям краевых условий обосновал при помощи новой вариационной теоремы Н. А. Алумяз [6]. Обоснование метода Бубнова — Галеркина в связи с классическими вариационными принципами теории упругости дано в статье Т. В. Невской [7]. Применению метода Бубнова — Галеркина к задачам устойчивости цилиндрических панелей посвящена монография А. С. Вольмира [8], где изучается также качественная сторона явления „хлопка“ панелей, находящихся под действием внешнего нормального давления и контурных сил. Раздельное интегрирование уравнений пологих оболочек методом Бубнова — Галеркина имеет то достоинство, что оба уравнения пологих оболочек (5.22) удовлетворяются с одинаковой степенью точности.

Если ввести нормальное и касательное усилия и нормальное и касательное составляющие перемещений на контуре u , v , полагая $\bar{v} = u\bar{n} + v\bar{\tau} + w\bar{m}$, то контурные интегралы в (5.19) можно объединить и записать в виде:

$$I_3 = \int_C \left\{ (\tilde{N} - N) \delta u + (\tilde{T} - T) \delta v + (\tilde{\Phi}_s - Q) \delta w + (\tilde{G} - G) \frac{d\delta w}{dn} \right\} ds - I_2. \quad (5.24)$$

Здесь \tilde{N} и \tilde{T} — проекции внешней контурной нагрузки на нормаль и касательную к контуру недеформированной оболочки, $\tilde{\Phi}_s$ — проекция этой нагрузки на нормаль \bar{m} срединной поверхности, N и T выражаются формулами (5.9), G — формулой (5.10), Q — перерезывающее усилие в направлении \bar{m} . Оно равно

$$Q = \bar{\Phi} \bar{m} = (T_1^{\alpha\beta} \bar{r}_\beta + Q^* \bar{m}_*) n_\alpha \bar{m} - \bar{m} \frac{dH\bar{m}}{ds},$$

где $\bar{\Phi}$ взят из (2.5). Упрощая это соотношение, для пологих оболочек находим:

$$Q = Q^{\alpha} n_{\alpha} - \frac{dH}{ds} + S^{\alpha\beta} \nabla_{\alpha} w \cdot \nabla_{\beta} w = Q^{\alpha} n_{\alpha} - \frac{dH}{ds} + N \frac{dw}{dn} + T \frac{dw}{ds} \quad (5.5)$$

$$(Q^{\alpha} = \nabla_{\beta} M^{\alpha\beta}).$$

Интегрирование уравнений пологих оболочек (5.20) по методу Бубнова — Галеркина возможно, если контурный интеграл (5.24) обращается в нуль. Предполагая, что

$$\int_C \left\{ (\bar{\Phi}_s - Q) \delta w + (\bar{G} - G) \frac{d\delta w}{dn} \right\} ds = 0, \quad (5.26)$$

выясним, при каких условиях исчезает контурный интеграл (5.24). Условие (5.26) справедливо, если, например: 1) выполняются статические граничные условия относительно перерезывающего усилия и изгибающего момента на контуре ($\bar{\Phi}_s = Q$, $\bar{G} = G$); 2) на контуре заданы w и G ; 3) на контуре заданы w и $\frac{d\delta w}{dn}$.

1°. При выполнении условия (5.26) контурный интеграл (5.24) исчезает при заданных тангенциальных усилиях N и T на контуре, так как в этом случае

$$\delta \bar{N} = \frac{d^2 \delta \psi}{ds^2} + \kappa \frac{d\delta \psi}{dn} = 0, \quad \delta \bar{T} = -\frac{d}{ds} \left(\frac{d\delta \psi}{dn} \right) + \kappa \frac{d\delta \psi}{ds} = 0,$$

которые удовлетворяются при

$$\delta \psi = \frac{d\delta \psi}{dn} = 0.$$

2°. Пусть на контуре заданы тангенциальные перемещения u , v , а $\delta \psi$ и $\frac{d\delta \psi}{dn}$ — произвольные. Тогда, так как $\delta u = \delta v = 0$, интеграл (5.24) исчезает, если $I_2 = 0$. Этому последнему условию можно удовлетворить, полагая

$$\kappa A_n - \frac{dA_s}{dn} + 2 \frac{dA_{ns}}{ds} = 0, \quad A_s = 0 \quad (\text{на } C);$$

или с учетом (5.16):

$$\kappa \epsilon_n - \frac{d\epsilon_s}{dn} + 2 \frac{d\epsilon_{ns}}{ds} = \kappa F_n - \frac{dF_s}{dn} + 2 \frac{dF_{ns}}{ds}; \quad \epsilon_s = F_s.$$

Внося сюда ϵ_n , ϵ_s и ϵ_{ns} из (5.2) и пользуясь формулами (1.23) и (1.24), найдем граничные условия для ψ :

$$\begin{aligned} \frac{d^2 u}{ds^2} - u \frac{dx}{dn} - v \frac{dx}{ds} + \frac{d^2 w}{ds^2} \cdot \frac{dw}{dn} + \kappa \left[-\tilde{\sigma} w + \frac{1}{2} \left(\frac{dw}{dn} \right)^2 + \left(\frac{dw}{ds} \right)^2 \right] + \\ + w \frac{d\tilde{t}}{ds} + 2\tilde{t} \frac{dw}{ds} + \tilde{\sigma} \frac{dw}{dn} = \kappa F_n - \frac{dF_s}{dn} + 2 \frac{dF_{ns}}{ds} = f; \quad (5.27) \\ \frac{dv}{ds} + \kappa u - \tilde{\sigma} w + \frac{1}{2} \left(\frac{dw}{ds} \right)^2 = F_s. \end{aligned}$$

Здесь u , v — заданные функции, а их неизвестные смешанные производные исключены, ввиду формулы (1.23). Следовательно, (1.27) содержат непосредственно заданные величины и искомую величину ψ на контуре оболочки. При малых деформациях правые части (1.27) выражаются в виде:

$$f = B' \left[N\kappa(1-\nu) - \frac{ds}{dn} + (2+\nu) \frac{dT}{ds} \right]; \quad F_s = B' (S - \nu N), \quad (5.28)$$

т. е. содержат лишь производные функции ψ . Итак, интегрирование основных уравнений теории пологих оболочек при заданных тангенциальных перемещениях на контуре по методу Бубнова — Галеркина возможно, если функция напряжения ψ удовлетворяет граничным условиям (5.27) при физической нелинейности. Этот вопрос для физически линейных задач теории пластин рассмотрен в статье Н. А. Алумяя [6], в связи с другой вариационной формулой. При частных видах граничных условий относительно w (1.27) упрощаются. Если, например, края оболочки жестко заделаны, то при нелинейной упругости:

$$\kappa F_n - \frac{dF_s}{dn} + 2 \frac{dF_{ns}}{ds} = 0, \quad F_s = 0, \quad (5.29)$$

а при линейной упругости:

$$N\kappa(1-\nu) - \frac{ds}{dn} + (2+\nu) \frac{dT}{ds} = 0, \quad S = \nu N.$$

При шарнирном опирании краев оболочки условия (5.27) будут соответственно:

$$\frac{\kappa}{2} \left(\frac{dw}{dn} \right)^2 + \tilde{\sigma} \frac{dw}{dn} = \kappa F_n - \frac{dF_s}{dn} + 2 \frac{dF_{ns}}{ds}; \quad F_s = 0; \quad (5.30)$$

$$\frac{\kappa}{2} \left(\frac{dw}{dn} \right)^2 + \tilde{\sigma} \frac{dw}{dn} = B' \left[N\kappa(1-\nu) - \frac{ds}{dn} + (2+\nu) \frac{dT}{ds} \right]; \quad S = \nu N.$$

Граничные условия (5.27) несколько упрощаются также при $\kappa = 0$ на контуре. Это имеет место на прямолинейном участке контура, а также на участке контура, где нормальное сечение срединной поверхности есть плоская кривая (например, криволинейные кромки прямоугольной цилиндрической панели). Если контур является линией кривизны, то на нем $\tilde{t} = 0$. Следовательно, в рассматриваемом случае условие (5.27) принимает вид:

$$\frac{d^2 u}{ds^2} + \frac{d^2 w}{ds^2} \frac{dw}{dn} + \tilde{\sigma} \frac{dw}{dn} = 2 \frac{dF_{ns}}{ds} - \frac{dF_s}{dn}; \quad \frac{dv}{ds} - \tilde{\sigma} w + \frac{1}{2} \left(\frac{dw}{ds} \right)^2 = F_s. \quad (5.31)$$

Теперь рассмотрим другую задачу.

3°. На контуре оболочки заданы нормальная нагрузка \bar{N} и касательное перемещение \bar{v} . В этом случае аппроксимирующие функции ψ можно разыскивать среди функций, удовлетворяющих условиям на контуре:

$$\begin{aligned} \bar{N} = \frac{d^2 \psi}{ds^2} + \kappa \frac{d\psi}{dn} \quad \text{и} \quad v = \bar{v} \quad \text{или} \\ \kappa \frac{d\delta \psi}{dn} = -\frac{d^2 \delta \psi}{ds^2}; \quad \delta \bar{v} = 0, \end{aligned} \quad (5.32)$$

так чтобы было выполнено условие $I_2 = 0$. Это последнее условие, если подставить $\frac{d\delta \psi}{dn}$ из (5.32) в (5.15), выражается в виде равенства:

$$\int_C \left[\left(\kappa A_n - \frac{dA_s}{dn} - \kappa A_s + 2 \frac{dA_{ns}}{ds} \right) \delta \psi - \frac{A_s}{\kappa} \frac{d^2 \delta \psi}{ds^2} \right] ds = 0,$$

или, если интегрировать по частям последний член, то

$$\int_C \left[\kappa A_n - \frac{dA_s}{dn} - \kappa A_s + 2 \frac{dA_{ns}}{ds} - \frac{d^2}{ds^2} \left(\frac{A_s}{\kappa} \right) \right] \delta \psi = \left[\frac{A_s}{\kappa} \frac{d\delta \psi}{ds} - \delta \psi \frac{d}{ds} \left(\frac{A_s}{\kappa} \right) \right] \Big|_C.$$

Откуда, ввиду произвольности $\delta\psi$, находим:

$$(A_n - A_s)x - \frac{dA_s}{dn} + 2\frac{dA_{ns}}{ds} - \frac{d^2}{ds^2}\left(\frac{A_s}{x}\right) = 0, \quad \frac{A_s}{x} \cdot \frac{d\delta\psi}{ds} - \delta\psi \frac{d}{ds} \frac{A_s}{x} \Big|_c = 0$$

или, подставляя A_n , A_s и A_{ns} из (5.16), будем иметь:

$$\begin{aligned} (\epsilon_n - \epsilon_s)x - \frac{d\epsilon_s}{dn} + 2\frac{d\epsilon_{ns}}{ds} - \frac{d^2}{ds^2}\left(\frac{\epsilon_s}{x}\right) &= (F_n - F_s)x - \\ - \frac{dF_s}{dn} + 2\frac{dF_{ns}}{ds} - \frac{d}{ds^2}\left(\frac{F_s}{x}\right) &= f, \\ f_1 = \frac{A_s}{x} \frac{d\delta\psi}{ds} - \delta\psi \frac{d}{ds} \left(\frac{A_s}{x}\right) \Big|_c &= 0. \end{aligned} \quad (5.33)$$

Здесь правую часть для краткости обозначим через f . Внося сюда выражения ϵ_n , ϵ_s и ϵ_{ns} из (5.2), получим:

$$\begin{aligned} \frac{x}{2} \left[\left(\frac{\partial w}{\partial n}\right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial s}\right)^2 \right] + \frac{\partial^2 w}{\partial s^2} \cdot \frac{\partial w}{\partial n} + \tilde{\sigma} \frac{dw}{dn} + 2\tilde{t} \frac{dw}{ds} + w \frac{d\tilde{t}}{ds} - \frac{dxw}{ds} - \\ - \frac{d^2}{ds^2} \left[\frac{1}{x} \frac{dw}{ds} - \frac{\tilde{\sigma}}{x} w + \frac{1}{2x} \left(\frac{dw}{ds}\right)^2 \right] = f; \quad f_1 = 0. \end{aligned} \quad (5.34)$$

При вычислении использованы формула (1.23) и условия Гаусса — Кодацци (1.24). Член с неизвестным нормальным перемещением $u \left(\frac{dx}{dn} + x^2\right) = -Ku$ отброшен как величина пренебрежимо малая в силу пологости оболочек.

Итак, для интегрирования основных уравнений теории пологих оболочек для физически нелинейных задач по методу Бубнова — Галеркина наряду с данными условиями (5.32) нужно еще выполнение граничного условия (5.34). Последнее является вторым условием, определяющим контурное значение ψ в рассматриваемой задаче. Следует отметить, что в него входят лишь касательные производные от заданной функции \tilde{v} , а не неизвестные нормальные производные. В частных случаях граничные условия для ψ упрощаются. При жесткой заделке краев оболочки имеют место граничные условия:

$$x \frac{d\delta\psi}{dn} = -\frac{d^2\delta\psi}{ds^2}; \quad f_1 = 0, \quad f = 0, \quad (5.35)$$

а при шарнирном опирании — условия:

$$x \frac{d\delta\psi}{dn} = -\frac{d^2\delta\psi}{ds^2}; \quad \frac{x}{2} \left(\frac{dw}{dn}\right)^2 + \tilde{\sigma} \frac{dw}{dn} = f; \quad f_1 = 0. \quad (5.36)$$

Граничные условия значительно упрощаются для контуров, для которых $x=0$. В этом случае из (5.32) имеем $\frac{d^2\delta\psi}{ds^2} = 0$. Следовательно, можно положить $\delta\psi=0$ на контуре. Тогда условие $I_2=0$ сводится к равенству:

$$\int_c A_s \frac{d\delta\psi}{dn} ds = 0.$$

Но так как контурное усилие T не задано, то $\frac{d\delta\psi}{dn}$ отлична от нуля. В силу этого $A_s=0$ на контуре. Таким образом, для ψ находим граничные условия:

$$\delta\psi = 0; \quad \frac{dw}{ds} - \tilde{\sigma}w + \frac{1}{2} \left(\frac{dw}{ds}\right)^2 = F_s. \quad (5.37)$$

Отсюда, при шарнирном опирании контура оболочки или жесткой заделке, найдем одинаковые контурные условия для ψ :

$$\delta\psi = 0; \quad F_s = 0. \quad (5.38)$$

Эти же условия могут быть получены из (5.36) предельным переходом $x \rightarrow 0$.

В заключение рассмотрим задачу.

4°. На контуре оболочки заданы касательное составляющее контурной нагрузки \tilde{T} и перемещение по тангенциальной нормали \tilde{u} :

$$\tilde{T} = -\frac{d}{ds} \left(\frac{d\psi}{dn}\right) + x \frac{d\psi}{ds}; \quad u = \tilde{u} \quad (\text{на } C); \quad (5.39)$$

найдем такое граничное условие для ψ , при выполнении которого становится возможным интегрирование уравнений пологих оболочек для дважды нелинейных задач по методу Бубнова — Галеркина. Для этого контурный интеграл (5.15) должен исчезнуть:

$$\int_c \left[\left(x A_n - x A_s - \frac{dA_s}{dn} + 2\frac{dA_{ns}}{ds} \right) \delta\psi + A_s \frac{d\delta\psi}{dn} \right] ds = \delta\psi A_{ns} \Big|_c \quad (5.40)$$

Здесь последний член интегрированием по частям представится в форме:

$$\int_c A_s \frac{d\delta\psi}{dn} ds = \frac{d\delta\psi}{dn} \int_c A_s ds \Big|_c - \int_c \left[\frac{d}{ds} \left(\frac{d\delta\psi}{dn}\right) \cdot \int_c A_s ds \right] ds.$$

Так как, согласно (5.39),

$$\frac{d}{ds} \left(\frac{d\delta\psi}{dn}\right) = x \frac{d\delta\psi}{ds},$$

то

$$\int_c A_s \frac{d\delta\psi}{dn} ds = - \int_c \left[x \frac{d\delta\psi}{ds} \int_c A_s ds \right] ds + \frac{d\delta\psi}{dn} \int_c A_s ds \Big|_c;$$

или, вновь интегрируя по частям, находим:

$$\int_c A_s \frac{d\delta\psi}{dn} ds = \int_c \frac{d}{ds} \left(x \int_c A_s ds \right) \delta\psi ds + \left[\left(\frac{d\delta\psi}{dn} - x\delta\psi\right) \int_c A_s ds \right] \Big|_c.$$

Подставляя это последнее в (5.40), в силу произвольности $\delta\psi$ получим:

$$\begin{aligned} x A_n - \frac{dA_s}{dn} + 2\frac{dA_{ns}}{ds} + \frac{dx}{ds} \int_c A_s ds = 0; \\ \left[\left(\frac{d\delta\psi}{dn} - x\delta\psi\right) \int_c A_s ds - \delta\psi A_{ns} \right] \Big|_c = 0. \end{aligned} \quad (5.41)$$

Подставляя сюда A_n , A_s и A_{ns} из (5.16), условие запишется в виде:

$$\begin{aligned} x\epsilon_n - \frac{d\epsilon_s}{dn} + 2\frac{d\epsilon_{ns}}{ds} + \frac{dx}{ds} \int_c \epsilon_s ds = xF_n - \frac{dF_s}{dn} + 2\frac{dF_{ns}}{ds} + \frac{dx}{ds} \int_c F_s ds = f_2; \\ f_2 = \left[\left(\frac{d\delta\psi}{dn} - x\delta\psi\right) \int_c A_s ds - \delta\psi \cdot A_{ns} \right] \Big|_c = 0, \end{aligned} \quad (5.42)$$

где f_2, f_3 означают правые части соответствующих равенств. Теперь подставим сюда выражения $\varepsilon_n, \varepsilon_s$ и ε_{ns} . Имеем:

$$\frac{d^2 u}{ds^2} - u \frac{dx}{dn} + x \left[\frac{1}{2} \left(\frac{dw}{dn} \right)^2 + \left(\frac{dw}{ds} \right)^2 - \tilde{\sigma} w \right] + w \frac{d\tilde{t}}{ds} + 2\tilde{t} \frac{dw}{ds} + \frac{d^2 w}{ds^2} \frac{dw}{dn} + \tilde{\sigma} \frac{dw}{dn} + \frac{dx}{dn} \int^s \left[xu - \tilde{\sigma} w + \frac{1}{2} \left(\frac{dw}{ds} \right)^2 \right] ds = f_2; f_3 = 0. \quad (5.43)$$

Здесь использованы формула (1.23) и соотношения Кодацци (1.24). В правой части содержатся лишь заданное тангенциальное перемещение и его производные по касательной. Граничное условие при $x=0$ можно получить отсюда непосредственно. В рассмотренных задачах условие $I_2=0$ можно выполнить так же интегрально. Полученные граничные условия для ψ могут быть использованы при решении задач и другими методами.

ЛИТЕРАТУРА

1. Галимов К. З. К общей теории пластин и оболочек при конечных деформациях и перемещениях. ПММ, том XV, вып. 6, 1951.
2. Каган В. Ф. Основы теории поверхностей. Гостехиздат, М.—Л., 1947.
3. Reissner E., On a variational theorem for finite elastic deformations. Journ. Math. and Phys., 1953, 32, № 2—3 (см. РЖМат, 1954, № 8, № 4432).
4. Власов В. З. Общая теория оболочек. Гостехиздат, М.—Л., 1949.
5. Колтунов М. А. Приближенное решение задачи о деформации гибкой оболочки методом независимого выбора аппроксимирующих функций. Научно-техническая конференция 1952 г. по расчету пластинок и оболочек. Издание ВВИА им. проф. Н. Е. Жуковского, 1952.
6. Алузян Н. А. Вариационная формула исследования гибких пластинок и оболочек. Там же.
7. Невская Т. В. Приложение вариационных методов к выводу и решению системы нелинейных уравнений гибкой цилиндрической оболочки. Там же.
8. Вольмир А. С. Устойчивость и большие деформации цилиндрических оболочек. Труды ВВИА им. проф. Н. Е. Жуковского, № 389, 1950.

Физико-технический институт
Казанского филиала АН СССР

Поступило
27 ноября 1955 г.

Х. М. Муштари, М. С. Корнишин О СХОДИМОСТИ МЕТОДА ГАЛЕРКИНА ПРИ ОПРЕДЕЛЕНИИ ВЕРХНЕЙ И НИЖНЕЙ КРИТИЧЕСКИХ НАГРУЗОК В ОДНОЙ НЕЛИНЕЙНОЙ ЗАДАЧЕ

Ввиду того, что точное решение нелинейных задач теории пластин и оболочек возможно лишь в очень редких случаях, представляет большой интерес выяснение эффективности применения к решению таких задач приближенных методов. Это важно еще и потому, что до настоящего времени отсутствует ясное представление о погрешности приближенных методов при определении нижней критической нагрузки.

В данной заметке методом Галеркина определяются величины верхней и нижней критических нагрузок для пологой цилиндрической панели бесконечной длины, находящейся под действием равномерного внешнего нормального давления. В качестве аппроксимирующих функций для прогиба берутся тригонометрические ряды.

Результаты вычислений в первом и высших приближениях сравниваются с полученным ранее точным решением (см. работы [1], [2]).

1. Основные уравнения

Задача об устойчивости и больших прогибах бесконечно длинной пологой цилиндрической панели под действием равномерной поперечной нагрузки приводится к интегрированию уравнений равновесия совместно с уравнениями нейтрального равновесия. Равновесие панели описывается уравнениями:

$$w^{IV} + \lambda^2 (w^{II} + k_0) - \frac{p}{D} = 0, \quad (1.1)$$

$$\frac{c_1}{K} = v^I - wk_0 + \frac{1}{2} w^{I2}, \quad (1.2)$$

при соответствующих граничных условиях для v и w , где введены обозначения: v и w — проекции перемещения точки срединной поверхности соответственно на касательную и нормаль, которая считается направленной к центру кривизны; $\lambda^2 = -c_1 : D$ (1.3); c_1 — сжимающее усилие по дуге, которое считается постоянным; $D = Et^3 : 12(1 - \nu^2)$; $K = Et : (1 - \nu^2)$; $k_0 = 1 : R_0$, R_0 — постоянный радиус кривизны.

Уравнения нейтрального равновесия получаем из (1.1) и (1.2), применяя метод возмущений:

$$w_n^{IV} + \lambda^2 w_n^{II} + \delta \lambda^2 (k_0 + w_n^{II}) = 0, \quad (1.4)$$

$$\frac{\delta c_1}{K} = v_n^I - k_0 w_n + w^I w_n^I, \quad (1.5)$$

где $v_n, w_n, \delta c_1$ — бесконечно малые приращения перемещения и сжимающего усилия. Граничные условия для v_n, w_n будут те же, что и для перемещений v, w .

2. Панель с шарнирно закрепленными краями

Беря начало координат в вершине панели и обозначая длину дуги панели через $2b$, граничные условия запишем в виде:

$$w = w'' = v = 0 \text{ при } y = \pm b. \quad (2.1)$$

Пусть

$$w = \sum_{m=1}^{\infty} f_m \cos \frac{m\pi y}{2b}, \quad (2.2)$$

где $m = 1, 3, 5, 7, \dots$, а f_1, f_3, \dots — произвольные параметры, подлежащие определению. Очевидно, граничные условия для w (2.1) при этом удовлетворяются.

Подставляя (2.2) в (1.2), находим v и, полагая $v = 0$ при $y = \pm b$, получим соотношение:

$$\mu^2 = \frac{6k}{\pi} \sum_{m=1}^{\infty} (-1)^l \frac{\zeta_m}{m} - \frac{3}{4} \pi^2 \sum_{m=1}^{\infty} (m\zeta_m)^2, \quad (2.3)$$

где $m = 1, 3, 5, 7, \dots$, $l = 2$ для $m = 1, 5, 9, \dots$, $l = 1$ для $m = 3, 7, 11, \dots$; $\mu^2 = \lambda^2 b^2$ — безразмерный параметр сжимающего усилия, $k = \frac{4b^2}{R_0 t}$ — параметр кривизны, $\zeta_m = \frac{f_m}{t}$.

Подставляя (2.2) в уравнение (1.1) и интегрируя последнее по методу Галеркина, получим бесконечную систему уравнений:

$$\frac{4\zeta_m}{k} \left(\frac{m\pi}{2}\right)^4 + \mu^2 \left[(-1)^l \frac{4}{m\pi} - \frac{4}{k} \left(\frac{m\pi}{2}\right)^2 \zeta_m \right] = (-1)^l \frac{4}{m\pi} P, \quad (2.4)$$

где m и l принимают те же значения, что и в (2.3), $P = \frac{pR_0 b^2}{D}$ — параметр нагрузки.

Соотношения (2.3), (2.4) позволяют определить с любой точностью симметричную деформацию панели.

Как известно, для не очень пологих панелей наименьшее значение критической нагрузки соответствует потере устойчивости по несимметричной форме с образованием двух полуволн. Поэтому в дальнейшем ограничимся исследованием этой формы потери устойчивости. Итак, пусть

$$w_n = f_n \sin \frac{\pi y}{b}. \quad (2.5)$$

Подставляя (2.5) в (1.5), находим v_n и, полагая $v_n = 0$ при $y = \pm b$, получим: $\delta c_1 = 0$. Тогда уравнение нейтрального равновесия (1.4) запишется в виде:

$$w_n^{IV} + \lambda^2 w_n'' = 0. \quad (2.6)$$

Подставляя в (2.6) выражение (2.5), получим: $\lambda^2 b^2 = \mu^2 = \pi^2$, т. е. несимметричная форма выпучивания появляется, когда μ становится равным π . Точное решение дает для μ то же значение.

Подставляя $\mu = \pi$ в уравнения (2.3), (2.4), получим:

$$\pi^2 = \frac{6k}{\pi} \sum_{m=1}^{\infty} (-1)^l \frac{\zeta_m}{m} - \frac{3}{4} \pi^2 \sum_{m=1}^{\infty} (m\zeta_m)^2, \quad (2.7)$$

$$\frac{4\zeta_m}{k} \left(\frac{m\pi}{2}\right)^4 + \pi^2 \left[(-1)^l \frac{4}{m\pi} - \frac{4}{k} \left(\frac{m\pi}{2}\right)^2 \zeta_m \right] = (-1)^l \frac{4}{m\pi} P, \quad (2.8)$$

$m = 1, 3, 5, \dots; \quad l = 2 \text{ для } m = 1, 5, 9, \dots;$
 $l = 1 \text{ для } m = 3, 7, 11, \dots$

Из уравнений (2.7), (2.8) можно определить критические значения параметра прогиба $\zeta_{m,1}, \zeta_{m,2}$ и соответствующие им критические значения параметра нагрузки P_1, P_2 для различных k .

Для $k = 20$ вычисления дают:

в первом приближении: $w = f_1 \cos \frac{\pi y}{2b}$;

$$P_1 = 9,085; \quad P_2 = -4,15;$$

во втором приближении: $w = f_1 \cos \frac{\pi y}{2b} + f_3 \cos 3 \frac{\pi y}{2b}$;

$$P_1 = 9,08; \quad P_2 = -3,97.$$

Точное решение: $P_1 = 9,08; \quad P_2 = -3,97$.

Таким образом, в пределах точности вычислений второе приближение по методу Галеркина для $k = 20$ совпадает с точным решением, причем первое приближение дает завышенное против точного значение P_1 и заниженное значение P_2 .

Для $k = 70$ вычисления дают:

в первом приближении: $P_1 = 9,810; \quad P_2 = -4,873$;

во втором приближении: $P_1 = 9,806; \quad P_2 = -4,698$.

Точное решение: $P_1 = 9,800; \quad P_2 = -4,690$.

Следовательно, и в этом случае второе приближение почти совпадает с точным решением, и характер сходимости не изменился.

3. Панель с жестко заделанными краями

Граничные условия будут:

$$w = w' = v = 0 \text{ при } y = \pm b. \quad (3.1)$$

Возьмем прогиб панели в виде ряда:

$$w = \sum_{n=1}^{\infty} f_n \left[1 + (-1)^{n-1} \cos \frac{n\pi y}{b} \right], \quad n = 1, 2, 3, 4, \dots \quad (3.2)$$

Поступая аналогично предыдущему, получим:

$$\mu^2 = 3k \sum_{n=1}^{\infty} \zeta_n - 3\pi^2 \sum_{n=1}^{\infty} n^2 \zeta_n^2, \quad (3.3)$$

$$P = \mu^2 - \frac{2}{k} (n\pi)^2 [\mu^2 - (n\pi)^2] \zeta_n, \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (3.4)$$

Найдем, при каком значении параметра сжимающего усилия μ появляется несимметричная форма потери устойчивости. Пусть

$$w_n = f_n \sin \frac{\pi y}{b} \cos \frac{\pi y}{2b}. \quad (3.5)$$

Согласно (1.5) снова получаем $\delta c_1 = 0$, и уравнение нейтрального равновесия принимает вид (2.6).

Подставляя (3.5) в (2.6) и интегрируя последнее по методу Галеркина, получим: $\mu^2 \approx 20,23$. Точное решение дает значение $\mu^2 \approx 20,25$.

Подставляя $\mu^2 = 20,23$ в уравнения (3.3), (3.4), получим соотношения для определения критических значений параметров прогиба $\zeta_{n,1}$, $\zeta_{n,2}$ и соответствующих им значений параметра нагрузки P_1 , P_2 .

Вычисления для $k = 100$ дают:

1-е приближение: $P_1 = 20,09$, $P_2 = -0,38$;

2-е " " $P_1 = 20,08$, $P_2 = 3,67$;

3-е " " $P_1 = 20,08$, $P_2 = 4,04$;

4-е " " $P_1 = 20,08$, $P_2 = 4,13$.

Точное решение: $P_1 = 20,08$, $P_2 = 4,22$.

Таким образом, и в случае заделки кромок второе приближение в пределах точности вычислений совпадает с точным решением для P_1 , а четвертое приближение дает близкое к точному значению для P_2 . В этом случае особенно наглядно иллюстрируется процесс приближения к точному значению P_2 снизу.

Приведенные вычисления показывают, что применение процедуры Галеркина дает возможность находить с достаточной точностью как верхнюю критическую нагрузку, так и нижнюю, причем для определения нижней критической нагрузки требуется решение в высших приближениях.

В отношении характера сходимости процедуры Галеркина при определении нижней критической нагрузки настоящая заметка подтверждает выводы, сделанные в статье [3].

ЛИТЕРАТУРА

1. М. С. Корнишин. Об устойчивости и больших прогибах пологой цилиндрической панели под действием равномерного внешнего нормального давления. Кандидатская диссертация, Казань, 1954.

2. М. С. Корнишин, Х. М. Муштаров. Устойчивость бесконечно длинной пологой цилиндрической панели под действием нормального равномерного давления. Известия Казанского филиала АН СССР, вып. 7, 1955.

3. Х. М. Муштаров, И. В. Свирский. Определение больших прогибов цилиндрической панели, опертой на гибкие нерастяжимые ребра под действием внешнего нормального давления. ПММ, т. XVII, вып. 6, 1953.

Физико-технический институт
Казанского филиала АН СССР

Поступило
6 июля 1955 г.

И. В. Свирский

О ПОСТРОЕНИИ ВАРИАЦИОННЫХ ФОРМУЛ ДЛЯ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ

1. При применении метода Релея к определению частот колебаний упругих тел частота колебаний определяется как стационарное значение некоторого функционала. Ввиду того, что функционал вблизи своего стационарного значения меняется медленно, ошибка результата вычислений мало зависит от погрешностей, применяемых при вычислениях аппроксимирующей функции, характеризующей интуитивно ожидаемую форму колебаний тела.

В статье рассматривается способ построения вариационных формул для приближенного решения задач теории упругости, обладающих так же, как и формула Релея, свойством малой зависимости результатов вычислений, полученных с их помощью, от погрешностей аппроксимирующих функций.

Приводятся примеры применения полученной вариационной формулы. Рассматривается в качестве примера вопрос о рациональном способе выполнения условий заделки в задаче о прогибе консольной балки, нагруженной на ее свободном конце. Решается задача об определении больших прогибов круглой пластины, находящейся под действием равномерной нагрузки. Указывается на некоторые специфические особенности применения вариационного метода при решении задачи о больших прогибах сферической оболочки, находящейся под действием внешнего давления.

Для частного случая решения линейных задач теории упругости нижеизложенные результаты имеются в работах [7], [8], где им дано наглядное физическое толкование¹.

2. Построение вариационной формулы для приближенного определения больших перемещений упругих тел

Пусть формула

$$\bar{X}(\bar{u}) + \bar{X}_b = 0 \quad \text{в объеме } v \quad (2.1)$$

символизирует нелинейное дифференциальное уравнение, характеризующее условие равновесия векторов плотности объемных сил \bar{X}_b , приложенных к телу, и противодействия $\bar{X}(\bar{u})$ упругих реакций тела, отнесенных к единице недеформированного объема, и пусть формула

$$\bar{X}_\Gamma(\bar{u}) + \bar{X}_{\Gamma b} = 0 \quad \text{на } \Gamma_1 \quad (2.2)$$

характеризует условия равновесия внешних поверхностных сил $\bar{X}_{\Gamma b}$, приложенных к части Γ_1 границы тела, и реакций $\bar{X}_\Gamma(\bar{u})$ тела, рассчитанных на единицу недеформированной поверхности Γ_1 . Будем

¹ Более подробное изложение общих приемов построения вариационных формул приведено в статье автора в журнале ПММ, том 19, вып. 4, стр. 453, 1955 г.

предполагать, что на остальной части Γ_2 границы тела имеются жесткие опоры, вследствие чего перемещения \bar{u} на этой части границы равны нулю:

$$\text{на } \Gamma_2 \quad \bar{u} = 0. \quad (2.3)$$

Поставим задачу о построении вариационной формулы для определения компоненты перемещения данной точки a тела вдоль заданного направления, характеризуемого данным единичным вектором s . Искомую величину компоненты перемещения мы будем обозначать через $\Phi(\bar{u})$; радиус-вектор точки a обозначим через \bar{a} . Тогда с достаточной точностью

$$\Phi(\bar{u}) = \int_V \bar{s} \bar{u} \delta(\bar{r} - \bar{a}) dv. \quad (2.4)$$

Здесь $\delta(\bar{r} - \bar{a})$ — функция, характеризующая действие единичной нагрузки, распределенной по достаточно малой окрестности точки a , т. е. неотрицательная функция, отличная от нуля лишь в достаточно малой окрестности точки a , интеграл которой равен единице.

Нашей целью будет построение такой вариационной формулы, при применении которой погрешности аппроксимирующей функции мало сказывались бы на погрешности приближенного определения величины $\Phi(\bar{u})$. Для простоты рассмотрим случай построения вариационной формулы с одной аппроксимирующей функцией, полагая

$$\bar{u} = c \bar{\varphi}_0. \quad (2.5)$$

Здесь $\bar{\varphi}_0$ — некоторая аппроксимирующая функция, а c — числовой коэффициент. При этом мы не будем требовать, чтобы аппроксимирующая функция точно удовлетворяла условию закрепления тела (2.3).

Для определения коэффициента c подставим (2.5) в уравнения (2.1), (2.2) и (2.3), помножим эти уравнения скалярно на некоторые векторные функции $\bar{\psi}_1$, $\bar{\psi}_2$ и $\bar{\psi}_3$ и, проинтегрировав эти уравнения соответственно по объему V тела и по частям его границы Γ_1 и Γ_2 , будем определять коэффициент c из условия равенства нулю суммы интегралов:

$$I(c \bar{\varphi}_0) = \int_V \bar{\psi}_1 [\bar{X}(c \bar{\varphi}_0) + \bar{X}_b] dv + \int_{\Gamma_1} \bar{\psi}_2 [\bar{X}_\Gamma(c \bar{\varphi}_0) + \bar{X}_{\Gamma_b}] ds + \int_{\Gamma_2} \bar{\psi}_3 c \bar{\varphi}_0 ds = 0. \quad (2.6)$$

Для того чтобы отклонение φ_0 от точного решения уравнений (2.1) и (2.2) мало сказывалось на окончательном результате вычисления $\Phi(c \bar{\varphi}_0)$, постараемся подобрать функции $\bar{\psi}_1$, $\bar{\psi}_2$, $\bar{\psi}_3$ так, чтобы при отклонениях φ_0 и при соответствующих этим отклонениям изменениях величины c , определенных с помощью уравнения (2.6), первая вариация величины $\Phi(c \bar{\varphi}_0)$ обращалась в нуль. Иными словами, постараемся подобрать $\bar{\psi}_1$, $\bar{\psi}_2$ и $\bar{\psi}_3$ так, чтобы осуществлялся условный экстремум $\Phi(c \bar{\varphi}_0)$ при вариациях $c \bar{\varphi}_0$, не нарушающих уравнения (2.6)

$$I(c \bar{\varphi}_0) = 0.$$

Согласно правилу множителей Лагранжа достаточным условием для

этого является наличие такого числа λ , при котором вариация функционала $\Phi(c \bar{\varphi}_0) + \lambda I(c \bar{\varphi}_0)$ по $c \bar{\varphi}_0$ обращается в нуль:

$$\delta[\Phi(c \bar{\varphi}_0) + \lambda I(c \bar{\varphi}_0)] = \int_V \bar{s} \delta(\bar{r} - \bar{a}) \delta(c \bar{\varphi}_0) dv + \lambda \left[\int_V \bar{\psi}_1 \{ \bar{X}'(\bar{u}) \delta(c \bar{\varphi}_0) \} ds + \int_{\Gamma_1} \bar{\psi}_2 \{ \bar{X}'_\Gamma(\bar{u}) \delta(c \bar{\varphi}_0) \} ds + \int_{\Gamma_2} \bar{\psi}_3 \delta(c \bar{\varphi}_0) ds \right] = 0. \quad (2.7)$$

В этой формуле через $\{ \bar{X}'(\bar{u}) \delta(c \bar{\varphi}_0) \}$ и $\{ \bar{X}'_\Gamma(\bar{u}) \delta(c \bar{\varphi}_0) \}$ обозначены малые изменения объемных и поверхностных реакций тела при бесконечно малых отклонениях тела $-\delta(c \bar{\varphi}_0)$ от равновесного состояния, характеризуемого перемещениями \bar{u} .

Так как рассматриваемое нами тело упруго и, следовательно, представляет собой консервативную систему, то для бесконечно малых вариаций перемещений тела имеет место соотношение взаимности работ Максвелла — Бетти:

$$\int_V \bar{\psi}_1 \{ \bar{X}'(\bar{u}) \delta(c \bar{\varphi}_0) \} dv + \int_{\Gamma_1} \bar{\psi}_1 \{ \bar{X}'_\Gamma(\bar{u}) \delta(c \bar{\varphi}_0) \} ds + \int_{\Gamma_2} \bar{\psi}_1 \{ \bar{X}'_\Gamma(\bar{u}) \delta(c \bar{\varphi}_0) \} ds = \int_V \delta(c \bar{\varphi}_0) \{ \bar{X}'(\bar{u}) \bar{\psi}_1 \} dv + \int_{\Gamma_1} \delta(c \bar{\varphi}_0) \{ \bar{X}'_\Gamma(\bar{u}) \bar{\psi}_1 \} ds + \int_{\Gamma_2} \delta(c \bar{\varphi}_0) \{ \bar{X}'_\Gamma(\bar{u}) \bar{\psi}_1 \} ds. \quad (2.8)$$

Эти соотношения характеризуют тот факт, что работа объемных и поверхностных сил $\{ \bar{X}'(\bar{u}) \delta(c \bar{\varphi}_0) \}$ и $\{ \bar{X}'_\Gamma(\bar{u}) \delta(c \bar{\varphi}_0) \}$, вызвавших перемещения $\delta(c \bar{\varphi}_0)$ на перемещениях $\bar{\psi}_1$, равна работе на перемещениях $\delta(c \bar{\varphi}_0)$ тех объемных и поверхностных нагрузок $\{ \bar{X}'(\bar{u}) \bar{\psi}_1 \}$ и $\{ \bar{X}'_\Gamma(\bar{u}) \bar{\psi}_1 \}$, которые надо было бы приложить к телу, чтобы вызвать отклонения, равные $\bar{\psi}_1$. (При этом условно перемещения $\bar{\psi}_1$ рассматриваются как бесконечно малые.)

Из формулы (2.8) определяем величину $\int_V \bar{\psi}_1 \{ \bar{X}'(\bar{u}) \delta(c \bar{\varphi}_0) \} dv$:

$$\int_V \bar{\psi}_1 \{ \bar{X}'(\bar{u}) \delta(c \bar{\varphi}_0) \} dv = \int_V \delta(c \bar{\varphi}_0) \{ \bar{X}'(\bar{u}) \bar{\psi}_1 \} dv + \int_{\Gamma_1} [\delta(c \bar{\varphi}_0) \{ \bar{X}'_\Gamma(\bar{u}) \bar{\psi}_1 \} - \bar{\psi}_1 \{ \bar{X}'_\Gamma(\bar{u}) \delta(c \bar{\varphi}_0) \}] ds + \int_{\Gamma_2} [\delta(c \bar{\varphi}_0) \{ \bar{X}'_\Gamma(\bar{u}) \bar{\psi}_1 \} - \bar{\psi}_1 \{ \bar{X}'_\Gamma(\bar{u}) \delta(c \bar{\varphi}_0) \}] ds.$$

Подставляя это выражение в формулу (2.7), получим:

$$\int_V [\delta(\bar{r} - \bar{a}) \bar{s} + \lambda \{ \bar{X}'(\bar{u}) \bar{\psi}_1 \}] \delta(c \bar{\varphi}_0) dv + \lambda \int_{\Gamma_1} [\{ \bar{X}'_\Gamma(\bar{u}) \bar{\psi}_1 \} \delta(c \bar{\varphi}_0) + (\bar{\psi}_2 - \bar{\psi}_1) \{ \bar{X}'_\Gamma(\bar{u}) \delta(c \bar{\varphi}_0) \}] ds + \lambda \int_{\Gamma_2} [\{ \bar{X}'_\Gamma(\bar{u}) \bar{\psi}_1 \} \delta(c \bar{\varphi}_0) - \bar{\psi}_1 \{ \bar{X}'_\Gamma(\bar{u}) \delta(c \bar{\varphi}_0) \}] ds = 0.$$

Для того, чтобы выполнялось это соотношение, желательно, ввиду произвольности $\delta(c\bar{\varphi}_0)$ и $\{\bar{X}'_\Gamma(\bar{u})\delta(c\bar{\varphi}_0)\}$, выполнение следующих равенств:

$$\text{внутри } v: \quad \{\bar{X}'(\bar{u})\bar{\psi}_1\} + \frac{1}{\lambda}\delta(\bar{r}-\bar{a})\bar{s} = 0; \quad (2.9)$$

$$\text{на } \Gamma_1: \quad \{\bar{X}'_\Gamma(\bar{u})\bar{\psi}_1\} = 0; \text{ на } \Gamma_2: \quad \bar{\psi}_1 = 0; \quad (2.10)$$

$$\text{на } \Gamma_1: \quad \bar{\psi}_2 - \bar{\psi}_1 = 0; \text{ на } \Gamma_2: \quad \bar{\psi}_3 + \{\bar{X}'_\Gamma(\bar{u})\bar{\psi}_1\} = 0. \quad (2.11)$$

Рассматривая уравнения (2.9) и (2.10), нетрудно заметить, что этим уравнениям удовлетворяет вектор того дополнительного отклонения тела, который возник бы при действии добавочной к основной нагрузке сосредоточенной силы величины $1/\lambda$, направленной параллельно вектору \bar{s} . Добавочная нагрузка условно считается бесконечно малой. Определяя из уравнения (2.10) $\bar{\psi}_2$ и $\bar{\psi}_3$,

$$\bar{\psi}_2 = \bar{\psi}_1, \quad \bar{\psi}_3 = -\{\bar{X}'_\Gamma(\bar{u})\}\bar{\psi}_1 \approx -\{\bar{X}'_\Gamma(c\bar{\varphi}_0)\}\bar{\psi}_1,$$

и подставляя эти выражения в формулу (2.11), мы получаем вариационную формулу:

$$\int_v \bar{\psi}_1 [\bar{X}(c\bar{\varphi}_0) + \bar{X}_b] dv + \int_{\Gamma_1} \bar{\psi}_1 [\bar{X}_\Gamma(c\bar{\varphi}_0) + \bar{X}_{\Gamma b}] ds - \int_{\Gamma_2} \{\bar{X}'_\Gamma(c\bar{\varphi}_0)\bar{\psi}_1\} c\bar{\varphi}_0 ds = 0. \quad (2.12)$$

При этом, если $\bar{\psi}_1$ приближенно удовлетворяет уравнениям (2.9) и (2.10), то погрешности аппроксимирующей функции будут мало сказываться на результате определения компоненты перемещения точки a .

Если аппроксимирующая функция $\bar{\varphi}_0$ удовлетворяет геометрическим граничным условиям (2.3), то предыдущая формула принимает следующий вид:

$$\int_v \bar{\psi}_1 [\bar{X}(c\bar{\varphi}_0) + \bar{X}_b] dv + \int_{\Gamma_1} \bar{\psi}_1 [\bar{X}_\Gamma(c\bar{\varphi}_0) + \bar{X}_{\Gamma b}] ds = 0. \quad (2.13)$$

Если в этой формуле положить $\bar{\psi}_1 = \bar{\varphi}_0$, то мы получим обычную формулу метода Галеркина с дополнительным интегралом по свободной границе тела:

$$\int_v \bar{\varphi}_0 [\bar{X}(c\bar{\varphi}_0) + \bar{X}_b] dv + \int_{\Gamma_1} \bar{\varphi}_0 [\bar{X}_\Gamma(c\bar{\varphi}_0) + \bar{X}_{\Gamma b}] ds = 0. \quad (2.14)$$

Предыдущие рассуждения можно обобщить на тот случай, когда ставится задача об определении, например, среднего поворота некоторой окрестности точки тела или ее средней деформации вдоль некоторого направления. В этом случае предыдущие рассуждения остаются в силе, если распределенную нагрузку $s\delta(\bar{r}-\bar{a})$ заменить другой так, чтобы искомая величина оказалась обобщенным перемещением, соответствующим этой последней нагрузке.

Заметим, что для получения более точных результатов аппроксимирующую функцию можно принять зависящей не от одного параметра, а от нескольких и разыскивать эти параметры из уравнений типа (2.12) для нескольких векторных функций $\bar{\psi}_i$ ($i=1 \dots n$). Возможность замены функции $\bar{\psi}_1$, характеризующей перемещения тела, которые произошли бы под влиянием сосредоточенной нагрузки, функцией $\bar{\varphi}_0$, характеризующей перемещения тела при действии нагру-

зок \bar{X}_b и $\bar{X}_{\Gamma b}$, можно попытаться обосновать следующим образом. При решении линейных задач теории упругости о прогибе пластин и оболочек часто приходится иметь дело с уравнениями, в которых главную роль играют члены с производными высших порядков. Поэтому собственные значения операторов таких дифференциальных уравнений быстро возрастают с увеличением их номера.

Если бы мы стали решать задачу путем разложения функций нагрузки и функций перемещения в ряды Фурье по собственным значениям, то ввиду быстрого возрастания собственных значений при увеличении их номера мы получили бы для перемещений очень быстро сходящиеся ряды — такие, что первые их члены достаточно точно представляют перемещения. Поэтому обе функции $\bar{\psi}$ и $\bar{\varphi}_0$ могут быть приближенно представлены в виде:

$$\bar{\psi}_1 \approx a_1 \bar{\chi}_1, \quad \bar{\varphi}_0 \approx b_1 \bar{\chi}_1, \quad (2.15)$$

где $\bar{\chi}_1$ — первая собственная функция, а a_1 и b_1 соответствующие первые коэффициенты разложений функций $\bar{\varphi}_0$ и $\bar{\psi}$. Из предыдущих уравнений вытекает приближенное равенство

$$\bar{\psi}_1 = \frac{a_1}{b_1} \bar{\varphi}_0. \quad (2.16)$$

Если мы подставим это выражение для $\bar{\psi}_1$ в уравнение (2.13) и сократим на постоянную $\frac{a_1}{b_1}$, то получим уравнение (2.14).

Заметим теперь, что далеко не во всех задачах теории упругости приближенные соотношения (2.15) выполняются достаточно точно, то есть не всегда первые члены ряда Фурье достаточно точно представляют перемещения тела. Это бывает, например, тогда, когда решается задача об определении поворотов окрестности некоторой точки a тела. В этом случае функция $\bar{\psi}_1$ будет представлять приближенное значение перемещения тела под действием моментов, распределенных по малой окрестности точки a . Разложение функции, соответствующей этой нагрузке, будет представлять собою медленно сходящийся ряд, и можно ожидать, что разложение функции $\bar{\psi}_1$ по собственным функциям тоже не будет сходиться достаточно быстро.

Предыдущие заключения имеют еще большую силу, когда рассматривается задача об определении величин, зависящих от производных перемещений более высоких порядков, как, например, при определении изгибающих моментов или перерезывающих усилий в пластине, зависящих от вторых и третьих производных ее прогиба.

Еще большую осторожность следует соблюдать при замене функции $\bar{\psi}$ функцией $\bar{\varphi}_0$ при решении нелинейных задач о больших прогибах оболочек, ибо в этом случае, если бы даже нагрузки, вызвавшие перемещения $c\bar{\varphi}_0$ и $\bar{\psi}$, совпадали, то сами перемещения оказались бы различными и между собой непропорциональными, так как $c\bar{\varphi}_0$ есть перемещение конечной величины из исходного напряженного состояния оболочки, а $\bar{\psi}$ есть „дополнительное перемещение“, вызванное малым изменением нагрузки, которое мы, как это было указано ранее, рассматриваем условно как бесконечно малое, т. е. перемещение, определяемое уравнениями для бесконечно малых перемещений, наложенных на конечные.

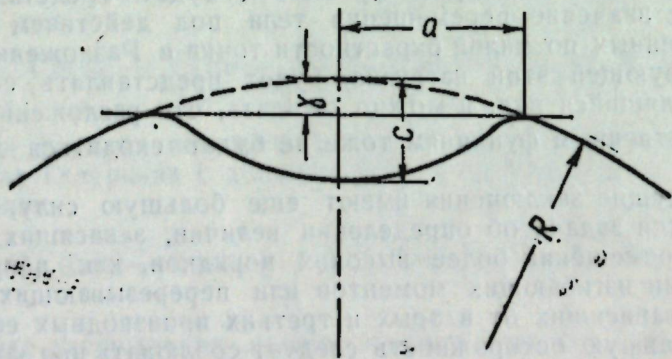
В качестве примера рассмотрим задачу об определении прогибов сферической оболочки. Эту задачу решали Х. М. Муштари и Р. Г. Суркин [1], а также В. И. Феодосьев [2].

Рассмотрим тонкую сферическую оболочку, находящуюся под действием внешнего давления. Когда давление превзойдет некоторую критическую величину, произойдет потеря устойчивости оболочки, и появится вмятина. При этом, очевидно, радиус вмятины будет существенно зависеть от величины давления на оболочку.

Если мы поставим вопрос об определении среднего перемещения точек оболочки, то роль функции $\bar{\psi}$ будет играть тот малый добавочный прогиб, который возникает при добавочном бесконечно малом изменении давления.

Иными словами, функция $\bar{\psi}$ пропорциональна скорости перемещений точек оболочки. Так как в рассматриваемом нами примере большую роль играет изменение размеров вмятины, то можно ожидать, что здесь функции $\bar{\varphi}$ и $\bar{\psi}$ нельзя будет даже приближенно считать пропорциональными. Чтобы более отчетливо показать это, рассмотрим, какая бы получилась картина, если бы изменялся лишь радиус вмятины, а ее глубина не менялась. В этом случае скорости перемещений центральных частей вмятины, где сам прогиб велик, оказались бы малыми; значительную величину имели бы скорости точек, находящихся ближе к краю вмятины. Это показывает, что в этом утрированном случае функции $\bar{\varphi}$ и $\bar{\psi}$ уже никак нельзя было бы даже приближенно считать пропорциональными. В действительности, когда происходит не только изменение радиуса вмятины, но и изменение ее глубины, разница между формами функций $\bar{\varphi}$ и $\bar{\psi}$ несколько сглаживается, но все же она, по видимому, может оказаться такой большой, что пренебрежение ею может привести к значительным ошибкам.

Примечание. Для того, чтобы выяснить характер зависимости среднего радиуса ширины вмятины a от ее глубины C , рассмотрим схематический чертеж сечения оболочки.



Естественно предположить, что глубина вмятины C имеет порядок стрелы подъема γ шарового сегмента с радиусом основания a и радиусом кривизны R . Как известно, для пологих сегментов

$$\gamma = a^2/2R$$

и, следовательно,

$$C \sim \gamma = a^2/2R.$$

Поэтому можно ожидать, что будут выполняться соотношения:

$$a \sim \sqrt{2CR},$$

$$\frac{da}{dC} \sim \frac{\sqrt{R}}{\sqrt{2C}}.$$

Таким образом, при малых глубинах вмятины C , для которых применима обычная нелинейная теория „пологих оболочек“, производная от ширины вмятины по ее глубине велика. Это подтверждает необходимость при применении метода Галеркина учитывать изменение поперечных размеров вмятины.

3. Задача о прогибе консольной балки

В качестве простого примера, иллюстрирующего применение предыдущей вариационной формулы, рассмотрим задачу Сен-Венана о прогибе консольной балки под действием распределенной по площади ее свободного конца нагрузки. По условию задачи перемещения другого заделанного конца балки должны обращаться в нуль. Однако решение, полученное Сен-Венаном, лишь приближенно удовлетворяет этому условию. Расположим начало координат в центре сечения заделанного конца балки и направим оси координат так, чтобы ось Z оказалась направленной вдоль длины балки. Поставим задачу определить компоненту среднего перемещения свободного конца балки вдоль оси X . Приближенную величину перемещения балки будем разыскивать в виде векторной функции, зависящей от одного параметра ω_y :

$$\bar{u}(\omega_y) = \bar{u}_0 + \bar{i}\omega_y z - \bar{k}\omega_y x. \quad (3.1)$$

Здесь \bar{u}_0 — приближенное значение перемещения, полученное Сен-Венаном, ω_y — корректирующий это решение угол поворота балки, как твердого тела, \bar{i} и \bar{k} — единичные векторы, параллельные осям X и Z . Для определения параметра ω_y в уравнение (2.12) вместо \bar{c}_{φ_0} подставим выражение (3.1):

$$\int_V \bar{\psi}_1 [\bar{X}(\bar{u}_0(\omega_y)) + \bar{X}_0] dv + \int_{\Gamma_1} \bar{\psi}_1 [\bar{X}_\Gamma(\bar{u}_0(\omega_y)) + \bar{X}_{\Gamma_0}] ds - \int_{\Gamma_2} \{\bar{X}_\Gamma \bar{\psi}_1\} \bar{u}(\omega_y) ds = 0. \quad (3.2)$$

Ввиду того, что в данной задаче рассматриваются малые перемещения балки, величины поверхностных усилий $\bar{X}_\Gamma(\bar{u})\bar{\psi}$, возникающих на конце балки, когда ее точки испытывают малые перемещения $\bar{\psi}_1$, не будут зависеть от ее предварительного перемещения \bar{u} , и поэтому в предыдущей формуле они обозначены через $\{\bar{X}_\Gamma \bar{\psi}_1\}$.

В формулу (3.2) вместо $\bar{\psi}_1$ мы подставим приближенное значение, полученное Сен-Венаном для перемещений балки при воздействии равномерно распределенной нагрузки, приложенной к ее незакрепленному концу и направленной параллельно оси X . Такой нагрузке соответствует обобщенное перемещение, равное среднему значению компоненты перемещения точек конца балки вдоль оси X . Так как решение Сен-Венана точно удовлетворяет уравнениям равновесия внутренних элементов тела, то подинтегральное выражение первого из интегралов предыдущей формулы равно нулю. Для того чтобы более отчетливо выяснить роль, которую играет неточность удовлетворения условиям равенства нулю перемещений точек заделанного конца балки, мы предположим, что ее свободный конец нагружен именно так, как это предполагается в решении Сен-Венана; при этом второй интеграл предыдущей формулы также окажется равным нулю, и формула примет вид:

$$\int_{\Gamma_2} \{\bar{X}_\Gamma \bar{\psi}_1\} \bar{u}(\omega_y) ds = \int_{\Gamma_1} \{\bar{X}_\Gamma \bar{\psi}_1\} (\bar{u}_0 + \bar{i}\omega_y z - \bar{k}\omega_y x) ds = 0.$$

Таким образом, в качестве корректирующего угла поворота рационально принять величину:

$$\omega_y = \int_{\Gamma} \{ \bar{X}_{\Gamma} \bar{\psi}_1 \} \bar{u}_0 ds : \int_{\Gamma} \{ \bar{X}_{\Gamma} \bar{\psi}_1 \} (\bar{k}x - \bar{i}z) d.$$

Мы пришли, таким образом, к заключению, что корректирующий угол следует подобрать так, чтобы приближенная величина перемещений точек заделанного конца балки $\bar{u}(\omega_y)$ оказалась ортогональной к напряжениям $\{ \bar{X}_{\Gamma} \bar{\psi}_1 \}$ в точках заделки балки, которые возникли бы от приложенных к ее свободному концу равномерно распределенных нагрузок, действующих в направлении искомой компоненты среднего перемещения конца балки.

В качестве простого примера рассмотрим случай балки круглого поперечного сечения. Радиус и длину балки обозначим через R и l . Нагрузку, приложенную к свободному концу балки, обозначим через W . Будем определять перемещение конца балки вдоль направления действия нагрузки. Сен-Венан получил следующие формулы, определяющие компоненты перемещений точек балки [6]:

$$u = \frac{W}{EI} \left[\frac{1}{2} \nu (1 - \nu) (l - z) (x^2 - y^2) + \frac{1}{2} lz^2 - \frac{1}{6} z^3 \right] + \omega_y z;$$

$$v = \frac{W}{EI} \nu (l - z) xy;$$

$$w = -\frac{W}{EI} \left[x \left(lz - \frac{1}{2} z^2 \right) + xy^2 + X(x, y) \right] - \omega_y x.$$

Здесь i — момент инерции сечения балки, E — модуль упругости, $X(x, y)$ — функция изгиба.

Вычисление корректирующего угла поворота ω_y по вышеописанной схеме дает для величины ω_y значение:

$$\omega_y = \left[3 + 2\nu + \frac{(1 - 2\nu)\nu}{6} \right] \frac{W}{E\pi R^3}.$$

Если же определять величину ω_y из условия равенства нулю угла поворота линейного элемента балки, параллельного оси x и находящегося вблизи центра заделанного сечения, то для величины ω_y получается выражение:

$$\omega_y = [3 + 2\nu] \frac{W}{E\pi R^3}.$$

Обе формулы дают одни и те же значения при $\nu = 0$ и $\nu = 1/2$. Повидимому, при втором способе определения величины ω_y не учитывается влияние реакций заделки, зависящих от эффекта поперечного расширения элементов балки при их сжатии.

4. Определение больших прогибов круглой защемленной по краям пластины

В качестве примера применения предыдущих результатов к нелинейным задачам рассмотрим задачу об определении прогиба центра круглой защемленной по краям пластины, нагруженной равномерно распределенной нагрузкой q . При этом будут применяться следующие обозначения: t — толщина пластины, a — ее радиус, r и w — расстояние до центра пластины и ее прогиб, E — модуль упругости, ν — коэффициент Пуассона.

Как известно из работы [4], равновесное состояние пластины определяется системой двух уравнений:

$$\frac{1}{r} \left\{ r \left[\frac{1}{r} (r \Phi_{,r})_{,r} \right]_{,r} \right\} = -\frac{E}{r} \omega_{,r} \omega_{,rr}, \quad (4.1)$$

$$\frac{Et^3}{12(1-\nu^2)} \frac{1}{r} \left\{ r \left[\frac{1}{r} (r w_{,r})_{,r} \right]_{,r} \right\} - \frac{t}{r} (\Phi_{,r} w_{,r})_{,r} - q = 0. \quad (4.2)$$

Здесь Φ — функция напряжений, через которую мембранные напряжения T_r и T_θ выражаются по формулам:

$$T_r = \frac{t}{r} \Phi_{,r}, \quad T_\theta = t \Phi_{,rr}, \quad (4.3)$$

где $\Phi_{,r} = \frac{\partial \Phi}{\partial r}$, $(r \Phi_{,r})_{,r} = \frac{\partial (r \Phi_{,r} / \partial r)}{\partial r}$ и т. д.

Так как рассматривается заделанная пластина, то должны выполняться граничные условия:

$$w = \omega_{,r} = 0 \text{ при } r = a. \quad (4.4)$$

Уравнения, характеризующие отсутствие радиальных перемещений края пластины, сводятся к равенству нулю тангенциальной деформации края пластины:

$$r = a, \quad \epsilon_\theta = \frac{1}{Et} (T_\theta - \nu T_r) = \frac{1}{E} \left(\Phi_{,rr} - \frac{\nu}{r} \Phi_{,r} \right) = 0. \quad (4.5)$$

Для приближенного решения задачи прогиб разыскивается в следующем виде:

$$w = c \left(1 - \frac{r^2}{a^2} \right)^2 t. \quad (4.6)$$

Функция $\left(1 - \frac{r^2}{a^2} \right)^2$ характеризует форму прогиба пластины, определенную с помощью теории малых прогибов пластины, в которой пренебрегают мембранными усилиями.

Для определения коэффициента c мы подставим выражение (4.6) в уравнение (4.1), из которого последовательным интегрированием может быть непосредственно определена функция напряжений Φ .

Произвольные постоянные интегрирования могут быть определены из условий (4.4) и (4.5) и из условия ограниченности T_r и T_θ в центре пластины. Если мы подставим полученное значение для функции Φ в левую часть формулы (4.2), помножим ее на функцию ψ и проинтегрируем по поверхности пластины, то мы будем иметь уравнение для определения постоянной c , характеризующей прогиб пластины. Так как мы поставили задачу определения прогиба центра пластины, то, согласно предыдущему, в качестве функции ψ желательно принять дополнительный прогиб пластины, который бы возник благодаря действию весьма малой сосредоточенной силы, приложенной в центре пластины. Так как точное значение дополнительного прогиба нам неизвестно, то в качестве функции ψ мы приняли при вычислениях функцию, определяющую форму прогиба пластины, полученную по теории бесконечно малых прогибов пластин, не учитывая мембранные напряжения:

$$\psi = \frac{r^2}{a^2} \left[\lg \left(\frac{r}{a} \right) - 1/2 \right] + \frac{1}{2}. \quad (4.7)$$

Подсчет, проведенный по только что указанной схеме, дал при $\nu = 0,3$ следующую приближенную формулу для зависимости прогиба центра пластины от давления:

$$q = \frac{16Et^4}{3a^4(1-\nu^2)} [c + 0,545 c^3]. \quad (4.8)$$

Для сравнения нами был проведен еще один расчет, при котором для решения уравнения (4.2) применялась процедура Бубнова—Галеркина в ее обычной форме, когда перед интегрированием по площади уравнение умножалось на функцию $(1 - \frac{r^2}{a^2})^2$, характеризующую форму прогиба пластины при действии на нее равномерно распределенной нагрузки. При этом получилась при $\nu = 0,3$ приближенная формула

$$q = \frac{16}{3} \frac{Et^4}{a^4(1-\nu^2)} [c + 0,471 c^3]. \quad (4.9)$$

Интересно сравнить две предыдущие приближенные формулы для прогиба центра пластины с результатами работы [4]:

$$q = \frac{16}{3} \frac{Et^4}{a^4(1-\nu^2)} \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n c^n, \quad (4.10)$$

где при $\nu = 0,3$ следует положить $\alpha_1 = 1$, $\alpha_2 = 0$, $\alpha_3 = 0,544$. Сравнение этого решения с предыдущими двумя приближенными формулами показывает, что оба члена первой из приближенных формул (4.8) точно совпадают с соответствующими членами ряда (4.10), в то время как у второй приближенной формулы (4.9), полученной путем применения стандартной процедуры метода Бубнова—Галеркина, второй член значительно отличается от соответствующего члена ряда Вей Цанг-чина.

ЛИТЕРАТУРА

1. Муштари Х. М. и Суркин Р. Г. О нелинейной теории устойчивости упругого равновесия тонкой сферической оболочки под действием равномерно распределенного нормального внешнего давления. ПММ, вып. 6, 1950.
2. Феодосьев В. И. Об устойчивости сферической оболочки под действием равномерно распределенного давления. ПММ, т. XVIII, вып. 1, 1954.
3. Папкович П. Ф. Строительная механика корабля, ч. 2, стр. 699, Судпромгиз, 1941.
4. Панов Д. Ю. О больших прогибах круглой пластины. Труды ЦАГИ, вып. 450, 1939.
5. Wei Zang - Chien. Large deflection of circular clamped Plate under uniform pressure. Chinese Journal of Physics, vol 7, № 2, December, 1947.
6. Мусхелишвили Н. И. Некоторые основные задачи математической теории упругости. Издание АН СССР, М сква, 1954.
7. Свирский И. В. О методе Бубнова—Галеркина. Научно-техническая конференция по расчету гибких пластин и оболочек, 1952. Издание ВВИА им. проф. Н. Е. Жуковского.
8. Hai-chang Hu. On the Approximate Solutions of boundary value problem at a point. Science. Record, vol 5, № 1-4; sept. 1952.

И. В. Свирский

К ВОПРОСУ О ПОСТРОЕНИИ ВАРИАЦИОННЫХ ФОРМУЛ ЗАДАЧ УСТОЙЧИВОСТИ

В статье рассматривается видоизменение метода Галеркина для определения устойчивости упругих систем. Характерной особенностью предлагаемой вариационной формулы является то, что аппроксимирующие функции могут не удовлетворять геометрическим граничным условиям.

Показывается, что погрешности аппроксимирующей функции мало влияют на результаты вычислений. В качестве примера приводится простая формула для оценки влияния неполного закрепления краев оболочки на ее устойчивость.

При построении вариационной формулы используется метод, изложенный в статье [4].

1. Рассмотрим упругое тело, находящееся под действием постоянной нагрузки, величина которой характеризуется числовым параметром p .

Допустим, что кроме вышеупомянутой постоянной нагрузки на тело действуют малые возмущающие силы: объемные силы плотности \bar{f} и поверхностные силы плотности \bar{f}_r . Линейные дифференциальные уравнения равновесия тела, связывающие между собой величины возмущающих сил \bar{f} и \bar{f}_r и векторы малых перемещений \bar{u} , происшедших под воздействием возмущающих сил, мы будем символически обозначать так:

$$\begin{aligned} \text{внутри объема } v \text{ тела} \quad \bar{X}(\bar{u}, p) &= \bar{f}, \\ \text{на границе } \Gamma \text{ тела} \quad \bar{X}_r(\bar{u}, p) + \bar{K}(\bar{u}, p) &= \bar{f}_r. \end{aligned} \quad (1.1)$$

Здесь $\bar{X}(\bar{u}, p)$ и $\bar{X}_r(\bar{u}, p)$ — объемные и поверхностные плотности сил, которые необходимо приложить к телу, чтобы вызвать перемещение \bar{u} . Через $\bar{K}(\bar{u}, p)$ обозначена величина нагрузки, отнесенная к единице поверхности тела, необходимая, чтобы вызвать перемещение \bar{u} подкрепляющих наше тело элементов конструкции.

Критическое значение параметра нагрузки $p = p_k$, при котором происходит потеря устойчивости тела, характеризуется тем, что при нагрузке, соответствующей этому значению, могут самопроизвольно возникнуть отклонения \bar{u} тела без какого-либо воздействия внешних усилий ($\bar{f} = \bar{f}_r = 0$). При этом имеют место следующие уравнения:

$$\left. \begin{array}{l} \text{внутри объема } v \text{ тела} \\ \text{на его границе } \Gamma \end{array} \right\} \begin{array}{l} X(\bar{u}, \bar{p}_k) = 0 \\ \bar{X}_r(\bar{u}, \bar{p}_k) + \bar{K}(\bar{u}, \bar{p}_k) = 0 \end{array} \quad (1.2)$$

Роль искомой величины в нашей задаче будет играть величина \bar{p}_k . Приближенное решение системы уравнений (1.2), т. е. совокупность вектора \bar{u} и числа \bar{p}_k , будем разыскивать для простоты в виде, зависящем от одного параметра:

$$\bar{u} \approx \bar{\varphi}_0, \quad \bar{p} \approx c. \quad (1.3)$$

При этом мы не будем требовать, чтобы аппроксимирующая функция $\bar{\varphi}_0$ точно удовлетворяла граничным условиям. В качестве функции $\bar{\varphi}_0$ можно применять, например, решение задачи для тела, по форме близкого к данному, но более простой конфигурации, для которого точное решение задачи об устойчивости известно. Подставим выражения (1.3) в уравнения (1.2) и помножим каждое из них скалярно на некоторые функции $\bar{\psi}_1$ и $\bar{\psi}_2$; проинтегрировав затем первое уравнение по объему v , а второе по поверхности Γ , будем определять постоянную c из уравнения:

$$I(\bar{\varphi}_0, c) = \int_v \bar{\psi}_1 \bar{X}(\bar{\varphi}_0, c) dv + \int_\Gamma \bar{\psi}_2 [\bar{X}_r(\bar{\varphi}_0, c) + \bar{K}(\bar{\varphi}_0, c)] ds = 0. \quad (1.4)$$

Для того, чтобы погрешность предварительного интуитивного определения $\bar{\varphi}_0$ мало сказывалась на результате приближенного определения значения $c \approx \bar{p}_k$, мы поставим задачу так подобрать функции $\bar{\psi}_1$ и $\bar{\psi}_2$, чтобы при отклонениях функции $\bar{\varphi}_0$ для значений c , связанных с $\bar{\varphi}_0$ уравнением (1.4), первая вариация этих значений обратилась в нуль.

Таким образом, ставится задача об определении таких функций $\bar{\psi}_1$ и $\bar{\psi}_2$, при которых величина c принимает стационарное значение при отклонениях $\bar{\varphi}_0$ и c , связанных условием (1.4).

Согласно правилу множителей Лагранжа, для этого достаточно, чтобы при некотором числе λ вариация функционала $c + \lambda I(\bar{\varphi}_0, c)$ по $\bar{\varphi}_0$ и c равнялась нулю:

$$\delta c \left[1 + \lambda \frac{\partial I(\bar{\varphi}_0, c)}{\partial c} \right] + \lambda \left\{ \int_v \bar{\psi}_1 \bar{X}(\delta \bar{\varphi}_0, c) dv + \int_\Gamma \bar{\psi}_2 [\bar{X}_r(\delta \bar{\varphi}_0, c) + \bar{K}(\delta \bar{\varphi}_0, c)] ds \right\} = 0. \quad (1.5)$$

Член $\delta c \left[1 + \lambda \frac{\partial I(\bar{\varphi}_0, c)}{\partial c} \right]$ можно сразу обратить в нуль, положив

$$\lambda = - \frac{1}{\partial I(\bar{\varphi}_0, c) / \partial c}.$$

Для того, чтобы преобразовать остальную часть формулы, воспользуемся теоремой взаимности Бетти — Максвелла, согласно которой имеет место соотношение:

$$\begin{aligned} & \int_v \bar{\psi}_1 \bar{X}(\delta \bar{\varphi}_0, c) dv + \int_\Gamma \bar{\psi}_1 \bar{X}_r(\delta \bar{\varphi}_0, c) ds = \\ & = \int_v \bar{X}(\bar{\psi}_1, c) \delta \bar{\varphi}_0 dv + \int_\Gamma \bar{X}_r(\bar{\psi}_1, c) \delta \bar{\varphi}_0 ds, \end{aligned} \quad (1.6)$$

т. е. работа объемных и поверхностных сил, вызвавших перемещения $\delta \bar{\varphi}_0$ на перемещениях, равных $\bar{\psi}_1$, равняется работе на перемещениях $\delta \bar{\varphi}_0$ тех сил, которые следовало бы приложить к объему и поверхности тела, чтобы вызвать перемещение, равное $\bar{\psi}_1$. Аналогичным образом, применяя теорему взаимности к подкрепляющим наше тело частям конструкции, имеем:

$$\int_\Gamma \bar{\psi}_2 \bar{K}(\bar{\varphi}_0, c) ds = \int_\Gamma \bar{K}(\bar{\psi}_2, c) \bar{\varphi}_0 ds. \quad (1.7)$$

Если мы решим уравнение (1.6) относительно величины

$$\int_v \bar{\psi}_1 \bar{X}(\delta \bar{\varphi}_0, c) dv$$

и подставим полученное выражение в формулу (1.5), то, воспользовавшись уравнением (1.7), мы получим:

$$\begin{aligned} & \int_v \bar{X}(\bar{\psi}_1, c) \delta \bar{\varphi}_0 dv + \int_\Gamma (\bar{\psi}_2 - \bar{\psi}_1) \bar{X}_r(\delta \bar{\varphi}_0, c) ds + \\ & + \int_\Gamma [\bar{X}_r(\bar{\psi}_1, c) + \bar{K}(\bar{\psi}_2, c)] \delta \bar{\varphi}_0 ds = 0. \end{aligned}$$

Для выполнения этого уравнения желательно, чтобы функции $\bar{\psi}_1$ и $\bar{\psi}_2$ более или менее точно удовлетворяли уравнениям:

$$\text{на } v \quad \bar{X}(\bar{\psi}_1, c) = 0; \quad (1.8)$$

$$\text{на } \Gamma \quad \begin{cases} \bar{X}_r(\bar{\psi}_1, c) + \bar{K}(\bar{\psi}_2, c) = 0, \\ \bar{\psi}_2 - \bar{\psi}_1 = 0. \end{cases} \quad (1.9) \quad (1.10)$$

Из уравнений (1.9) и (1.10) следует, что желательно выполнение уравнения:

$$\text{на } \Gamma \quad \bar{X}_r(\bar{\psi}_1, c) + \bar{K}(\bar{\psi}_1, c) = 0. \quad (1.11)$$

Сравнивая уравнения (1.8) и (1.11) с (1.2), мы видим, что в качестве вектор-функции $\bar{\psi}_1$ разумно принять \bar{u} . Но так как точное значение \bar{u} нам неизвестно, то мы заменим его приближенным значением (1.3), положив

$$\bar{\psi}_1 = \bar{\varphi}_0. \quad (1.12)$$

При выбранном нами значении $\bar{\psi}_1$, согласно уравнению (1.10), положим:

$$\bar{\psi}_2 = \bar{\varphi}_0. \quad (1.13)$$

Подставляя выражения (1.12) и (1.13) в формулу (1.4), мы получаем искомую вариационную формулу для определения величины $c \approx \bar{p}_k$:

$$\int_v \bar{\varphi}_0 \bar{X}_r(\bar{\varphi}_0, c) dv + \int_\Gamma \bar{\varphi}_0 [\bar{X}_r(\bar{\varphi}_0, c) + \bar{K}(\bar{\varphi}_0, c)] ds = 0. \quad (1.14)$$

Эту вариационную формулу удобно применять тогда, когда жесткость подкрепляющих тело элементов не велика по сравнению с жесткостью тела; эта формула в сущности представляет собой

применение метода Бубнова — Галеркина при наличии добавочного интеграла по границе объема. Однако когда жесткость подкрепляющих элементов очень велика по сравнению с жесткостью тела (велика величина $\bar{K}(\varphi_0, c)$), то при применении предыдущей вариационной формулы даже малые погрешности в краевых значениях φ_0 будут вызывать большие погрешности определения величины $p_k = c$. В этом случае выгодно пользоваться другой вариационной формулой, к выводу которой мы переходим.

Если мы воспользуемся соотношением (1.7), то формуле (1.4) можно придать вид:

$$\int_v \bar{\psi}_1 \bar{X}(\bar{\varphi}_0, c) dv + \int_{\Gamma} \bar{\psi}_2 \bar{X}_r(\bar{\varphi}_0, c) ds + \int_{\Gamma'} \bar{K}(\bar{\psi}_2, c) \bar{\varphi}_0 ds = 0.$$

При этом последний интеграл этой формулы распространяется лишь на ту часть поверхности тела Γ' , которая соприкасается с подкрепляющими тело элементами. Представив второй интеграл этой формулы в виде суммы двух — по поверхности соприкосновения Γ' тела с подкреплением и по остальной поверхности тела ($\Gamma - \Gamma'$), и воспользовавшись (1.12) и (1.9), мы получим:

$$\int_v \bar{\varphi}_0 \bar{X}(\bar{\varphi}_0, c) dv + \int_{\Gamma - \Gamma'} \bar{\psi}_2 \bar{X}_r(\bar{\varphi}_0, c) ds + \int_{\Gamma'} \bar{\psi}_2 \bar{X}_r(\bar{\varphi}_0, c) ds - \int_{\Gamma'} \bar{X}_r(\bar{\varphi}_0, c) \bar{\varphi}_0 ds = 0.$$

Подставляя во второй из интегралов выражение $\bar{\psi}_2$ из уравнения (1.13), мы получим еще одну вариационную формулу:

$$\int_v \bar{\varphi}_0 \bar{X}(\bar{\varphi}_0, c) dv + \int_{\Gamma - \Gamma'} \bar{\varphi}_0 \bar{X}_r(\bar{\varphi}_0, c) ds + \int_{\Gamma'} \bar{X}_r(\bar{\varphi}_0, c) (\bar{\psi}_2 - \bar{\varphi}_0) ds = 0. \quad (1.15)$$

При этом предполагается, что в эту формулу вместо $\bar{\psi}_2$ подставляется решение уравнения (1.9), т. е. решение уравнения

$$\bar{K}(\bar{\psi}_2, c) = -X_r(\bar{\varphi}_0, c). \quad (1.16)$$

Векторную функцию $\bar{\psi}_2$ можно интерпретировать как прогибы подкрепления под влиянием усилий

$$X_n = -\bar{X}_r(\bar{\varphi}_0, c), \quad (1.17)$$

действующих со стороны тела на подкрепление. Предполагается, что подкрепление представляет собой достаточно простую, геометрически неизменяемую конструкцию, для которой прогиб легко определяется. Даже при очень жестком подкреплении при применении этой вариационной формулы погрешности краевых значений не будут вызывать очень больших погрешностей определения $c = p_k$. Можно и не ставить условия, чтобы подкрепляющие элементы представляли собой сами по себе геометрически неизменяемую конструкцию,

однако в этом случае функция $\bar{\varphi}_0$ должна быть подобрана так, чтобы уравнение (1.17) обладало решением.

Применим полученную вариационную формулу для определения влияния податливости подкрепления на устойчивость тела. Допустим, что задача определения критических напряжений нашего тела при наличии абсолютно жесткого подкрепления решена и известна функция $\bar{\varphi}_0$, характеризующая перемещения тела в момент потери устойчивости. Так как связи абсолютно жестки, то на Γ' $\bar{\varphi}_0 = 0$. Выясним, как изменится величина критической нагрузки, если связи перестают быть абсолютно жесткими¹. Для этого мы в формулу (1.15) подставим (1.17). Учтя, что на Γ' $\bar{\varphi}_0 = 0$, мы получим:

$$\int_v \bar{\varphi}_0 \bar{X}(\bar{\varphi}_0, c) dv + \int_{\Gamma} \bar{\varphi}_0 \bar{X}_r(\bar{\varphi}_0, c) ds - \int_{\Gamma'} \bar{\psi}_2 \bar{X}_n(\bar{\varphi}_0, c) ds = 0. \quad (1.18)$$

При этом во втором интеграле интегрирование по части поверхности $\Gamma - \Gamma'$ мы заменили интегралом по Γ , так как на Γ' $\bar{\varphi}_0 = 0$. Но, как известно, изменение суммы упругой энергии тела и потенциальной энергии постоянных нагрузок, на него действующих, равно работе возмущающих сил. Ввиду того, что эти силы при отклонении от равновесного состояния изменяются постепенно от нуля до их окончательного значения, то их работа равна интегралу от скалярного произведения векторов перемещений тела на средние значения возмущающих сил во время возмущения:

$$\Delta \mathcal{E}(\bar{\varphi}_0, c) = \int_v \bar{\varphi}_0 \frac{\bar{X}(\bar{\varphi}_0, c)}{2} dv + \int_{\Gamma} \bar{\varphi}_0 \frac{\bar{X}_r(\bar{\varphi}_0, c)}{2} ds.$$

Аналогичным образом изменение суммы упругой энергии подкрепляющих элементов и потенциальной энергии нагрузок, на них действующих, равно:

$$\Delta \mathcal{E}_n(\bar{\varphi}_0, c) = \frac{1}{2} \int_{\Gamma'} \bar{\varphi}_0 \bar{X}_n ds. \quad (1.19)$$

Учитывая эти соотношения, мы получаем из уравнения (1.18):

$$\Delta \mathcal{E}(\bar{\varphi}_0, c) - \Delta \mathcal{E}_n(\bar{\varphi}_0, c) = 0. \quad (1.20)$$

Это уравнение может служить для приближенного определения величины критической нагрузки $c = p_k$, вызывающей потерю устойчивости тела при неабсолютно жестком подкреплении.

Заметим, что критическое значение нагрузки для тела с абсолютно жестким подкреплением определяется уравнением:

$$\Delta \mathcal{E}(\bar{\varphi}_0, c) = 0.$$

Для получения большей точности аппроксимирующую функцию можно принять в виде линейной комбинации n функций $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n$ и определять коэффициенты этой линейной комбинации из n уравнений типа (1.15) при функциях $\bar{\varphi}_0 = \varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n$. Условие совместности получающейся при этом системы уравнений дает характеристическое уравнение для определения величины c .

¹ При этом мы сделаем допущение, что критической величине нагрузки соответствует лишь одна форма потери устойчивости тела и что в связи с этим форма потери устойчивости непрерывно изменяется при изменении податливости подкрепления.

2. Применим полученные результаты к исследованию устойчивости оболочек.

В настоящее время имеются различные решения задач об устойчивости цилиндрических и конических оболочек. В этих решениях обычно предполагается, что края оболочки прикреплены к ребрам, имеющим бесконечно большую жесткость на растяжение. На практике это условие точно не выполняется, поэтому часто бывает важно выяснить, при каких условиях неполная жесткость ребер мало сказывается на устойчивости оболочки.

Рассмотрим устойчивость цилиндрической оболочки; при этом сначала мы будем предполагать, что она жестко прикреплена по своим краям к нерастяжимым шпангоутам, которые позволяют оболочке свободно поворачиваться вокруг их направления. Будем предполагать, что оболочка находится под одновременным действием внешнего давления p и осевого сжатия величины $(-T^{0x})$ на единицу длины края оболочки. При этом в ней возникнут постоянные по поверхности оболочки осевые и кольцевые усилия T^{0x} и $T^{0y} = -\frac{p}{R} < 0$, где R — радиус оболочки. Введем на срединной поверхности оболочки систему координат (x, y) , где x — расстояние до одного из краев оболочки, а y — расстояние до некоторой фиксированной образующей срединной поверхности.

Мы будем предполагать, что длина оболочки не очень велика по сравнению с ее радиусом. Это даст нам возможность применять обычные уравнения теории пологих оболочек [1], [2]:

$$\Delta^2 \varphi = -Eh w_{,xx} / R, \quad (2.1)$$

$$D \Delta^2 w - \varphi_{,xx} / R - T^{0x} w_{,xx} - T^{0y} w_{,yy} = 0. \quad (2.2)$$

Здесь E — модуль упругости, $D = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}$, ν — коэффициент продольно-поперечного сжатия, h — толщина оболочки, w — поперечный прогиб оболочки, нижние индексы обозначают операции дифференцирования по соответствующим координатам, φ — функция напряжений, характеризующая изменение напряжений во время выпучивания оболочки:

$$T^x = T^{0x} + \varphi_{,yy}; \quad T^y = T^{0y} + \varphi_{,xx}; \quad S = -\varphi_{,xy}.$$

Граничные условия на нерастяжимых шпангоутах, где $x=0, l$, имеют вид:

$$\text{при } x=0, l \quad e^y = e^{0y} = (\varphi_{,xx} - \nu \varphi_{,yy}) = 0; \quad (2.3)$$

$$T^x - T^{0x} = \varphi_{,yy} = 0. \quad (2.4)$$

Последнее из условий характеризует податливость шпангоутов относительно их перемещений в осевом направлении оболочки.

Известно, что выпучивание оболочки происходит при синусоидальной форме прогиба, при этом:

$$w(x, y) = w_0 \sin \frac{mx}{R} \sin \frac{ny}{R},$$

где $m = \frac{\pi R}{l} m_1$, m_1 и n — целые числа, l — длина оболочки. Подставляя это выражение в уравнение (2.1), мы можем определить из него функцию φ , удовлетворяющую граничным условиям (2.3) и (2.4):

$$\varphi = \frac{REhm^2}{(m^2 + n^2)^2} w_0 \sin \frac{mx}{R} \sin \frac{ny}{R}. \quad (2.5)$$

Используя известные из теории оболочек формулы [1], можно с точностью до членов второго порядка малости вычислить изменение суммы упругой энергии оболочки и потенциальной энергии действующих на нее нагрузок, происходящее во время выпучивания:

$$\begin{aligned} \Delta \mathcal{E} = & \int_0^l \int_0^{2\pi R} \left\{ \frac{1}{2Eh} [(\varphi_{,xx} + \varphi_{,yy})^2 + 2(1+\nu)(\varphi_{,xy}^2 - \varphi_{,xx}\varphi_{,yy})] + \right. \\ & \left. + D[(\Delta w)^2 + 2(1-\nu)(w_{,xy}^2 - w_{,xx}w_{,yy})] - qw \right\} dx dy + \\ & + \int_0^l \int_0^{2\pi R} \left(T^{0x} \frac{w_x^2}{2} + T^{0y} \frac{w_y^2}{2} \right) dx dy. \end{aligned}$$

В этой формуле φ есть функция напряжений, определяемая уравнением (2.1). Последний интеграл предыдущей формулы связан с нелинейной зависимостью деформаций от перемещений. Вычисления показывают, что

$$\Delta \mathcal{E} = \frac{\pi R l w_0^2}{4R^2} \left[D(m^2 + n^2)^2 + \frac{EhR^2 m^4}{(m^2 + n^2)^2} + T^{0x} R^2 m^2 + T^{0y} R^2 n^2 \right].$$

Приравняв это выражение к нулю, можно получить известное соотношение [1] между напряжениями T^{0x} и T^{0y} , при которых происходит выпучивание оболочки, подкрепленной абсолютно жесткими на растяжение шпангоутами:

$$D(m^2 + n^2)^2 + \frac{EhR^2 m^4}{(m^2 + n^2)^2} + T^{0x} R^2 m^2 + T^{0y} R^2 n^2 = 0.$$

Для того, чтобы учесть влияние неполной жесткости растяжения шпангоутов на устойчивость оболочки, вычислим изменение энергии растяжения шпангоута под влиянием действующих на него реакций со стороны оболочки:

$$\Delta \mathcal{E}_m = \int_0^{2\pi R} \left[\frac{(P + P_0)^2}{2EF} - \frac{P_0^2}{2EF} \right] ds = \int_0^{2\pi R} \left(\frac{P^2}{2EF} + \frac{P_0 P}{EF} \right) ds. \quad (2.6)$$

Здесь P — усилие, возникающее в шпангоуте во время выпучивания; P_0 — начальное усилие в шпангоуте до потери устойчивости, F — площадь сечения шпангоута. Для простоты мы будем считать, что шпангоут и сама оболочка сделаны из одного и того же материала.

Рассматривая равновесие элемента шпангоута бесконечно малой длины, легко получить зависимость между производной сжимающего шпангоута усилия P и реакции $\pm S$ со стороны оболочки (знак выбирается в зависимости от того, какой из двух шпангоутов, подкрепляющих оболочку, рассматривается)¹:

$$P = \int (\pm S) dy = \int (\mp \varphi_{,xy}) dy = \mp \varphi_x + C. \quad (2.7)$$

Учитывая (2.5) и принимая во внимание, что на шпангоутах $x=0, l$, мы получаем:

$$P = \pm \frac{Ehm^2 w_0}{(m^2 + n^2)^2} \sin \frac{ny}{R} + C. \quad (2.8)$$

¹ При выводе этой формулы мы пренебрегали величинами проекций перерезывающих усилий на касательную к середине оси элемента шпангоута. Точность формулы примерно того же порядка, что и точность применяемой нами теории "пологих оболочек", в которой допускаются пренебрежения, аналогичные предыдущим.

Предполагая шпангоуты абсолютно жесткими на изгиб и применяя к ним теорему Кастильяно, легко показать, что постоянная c равна нулю. Подставляя выражение (2.8) в (2.6), получаем, что изменение энергии обоих шпангоутов во время выпучивания оболочки равно:

$$\Delta \mathcal{E}_n = 2\mathcal{E}_n = \frac{\pi R}{F} \cdot \frac{Eh^2 m^6}{(m^2 + n^2)^4} \omega_0^2.$$

Итак, согласно формуле (1.20), мы получаем следующее уравнение, приближенно определяющее критические усилия:

$$\Delta \mathcal{E} - \Delta \mathcal{E}_n = \frac{\pi l \omega_0^2}{4R^3} \left[D(m^2 + n^2)^2 + \frac{EhR^2 m^4}{(m^2 + n^2)^2} \left(1 - \frac{4R^2 h}{lF} \frac{m^2}{(m^2 + n^2)^2} \right) + T^0_x m^2 R^2 + T^0_y n^2 R^2 \right] = 0.$$

Коэффициент

$$\left(1 - \frac{4R^2 h}{lF} \frac{m^2}{(m^2 + n^2)^2} \right),$$

участвующий в правой части предыдущей формулы, характеризует влияние неполной жесткости растяжения шпангоутов на устойчивость оболочки. Очевидно, что это влияние будет малым, если будет мала по сравнению с единицей величина:

$$\chi = \frac{4R^2 h}{lF} \frac{m^2}{(m^2 + n^2)^2} = \frac{2\pi R h l}{2 \cdot 2\pi R F} \cdot \frac{8R^2}{l^2} \frac{m^2}{(m^2 + n^2)^2} = \frac{Q_{об.}}{Q_{шп.}} \cdot \frac{8}{\pi^2 m_1^2} \cdot \frac{1}{(1 + n^2/m^2)^2}.$$

При выводе этой формулы мы воспользовались тем, что $m = \pi R m_1 / l$. Через $Q_{об.}$ и $Q_{шп.}$ мы обозначили соответственно веса оболочки и шпангоутов. Из рассмотрения этой формулы можно заметить, что в случае, когда внешнее давление на оболочку не является слишком малым по сравнению с ее осевым сжатием и когда, как известно [3],

отношение n^2/m^2 имеет порядок $\frac{l}{R} \sqrt{\frac{R}{h}}$, неполная „жесткость растяжения“ шпангоутов будет мало влиять на устойчивость оболочки даже в том случае, когда вес шпангоутов намного меньше веса оболочки.

Так как обычно роль шпангоутов, подкрепляющих оболочку, играют днища оболочки, то естественно, что интересно вычисление их эффективной жесткости. Напряжения, возникающие в днищах, характеризуются функцией напряжения Φ , удовлетворяющей бигармоническому уравнению, имеющему в полярной системе координат следующий вид:

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} \right)^2 \Phi = 0.$$

Напряжения в днище определяются формулами:

$$T_r = \Phi_{\varphi\varphi}/r^2 + \Phi_r/r; \quad S = -\frac{\partial}{\partial r} \left[\frac{1}{r} \frac{\partial \Phi}{\partial \varphi} \right]; \quad T_\varphi = \Phi_{rr}.$$

Реакции со стороны оболочки на днища имеют синусоидальную зависимость от координаты φ ; поэтому функцию напряжения естественно разыскивать в следующем виде:

$$\Phi = A(r^n + \gamma r^{n+2}) \sin n\varphi.$$

Величину γ легко определить из условия, что на границе с днищем можно приближенно считать

$$T_r = 0.$$

Эффективную жесткость днища, которую мы будем характеризовать жесткостью шпангоута EF_s , имеющего ту же жесткость на растяжение, что и днище, будем определять формулой:

$$EF_s \epsilon_\varphi = P.$$

Отсюда

$$F_s = \frac{|P|}{E|\epsilon_\varphi|},$$

где

$$\epsilon_\varphi = \frac{1}{Eh_d} (T_\varphi - \nu T_r) = \frac{1}{Eh_d} \Phi_{rr},$$

h_d — толщина днища,

$$P = \int_{-r}^{+r} S dy = \pm r \frac{\partial}{\partial r} (\Phi/r).$$

Для того, чтобы более наглядно охарактеризовать эту величину, введем понятие о ширине присоединенного пояска днища b_n :

$$b_n = \frac{F_s}{h_d}.$$

Несложные вычисления по вышеприведенной схеме показывают, что ширина присоединенного пояска равна величине

$$b_n = \frac{R}{2n}.$$

При этом поправочный коэффициент, характеризующий влияние неполной жесткости растяжения краев днищ, подкрепляющих с двух сторон цилиндрическую оболочку, имеет величину:

$$\chi = \frac{h}{h_d} \cdot \frac{l}{R} \cdot \frac{8}{\pi^2 m_1^2} \cdot \frac{n}{(1 + n^2/m^2)^2}.$$

ЛИТЕРАТУРА

1. Муштарн Х. М. Некоторые обобщения теории тонких оболочек с приложением к задаче устойчивости упругого равновесия. Известия физико-математического общества и научно-исследовательского института математики и механики при Казанском университете, том 11, серия 3, 1938. ПММ, т. II, вып. 4, 1939.
2. Власов В. З. Основные дифференциальные уравнения общей теории упругих оболочек. ПММ, том 8, вып. 2, 1944.
3. Муштарн Х. М. и Саченков А. В. Об устойчивости цилиндрических и конических оболочек кругового сечения при совместном действии осевого сжатия и внешнего нормального давления. ПММ, т. 18, вып. 6, 1954.
4. И. В. Свирский. О построении вариационных формул для решения задач теории упругости. Известия Казанского филиала Академии наук СССР, серия физико-математических и технических наук, № 10, 1956.

Физико-технический институт
Казанского филиала АН СССР

Поступило
1 сентября 1955 г.

Р. Г. Суркин

К ВОПРОСУ О ПОТЕРЕ УСТОЙЧИВОСТИ
 СФЕРИЧЕСКОЙ ОБОЛОЧКИ
 ПРИ ВНЕШНЕМ РАВНОМЕРНО РАСПРЕДЕЛЕННОМ ДАВЛЕНИИ

Целью настоящей заметки является решение задачи об устойчивости сферической оболочки, находящейся под действием внешнего равномерно распределенного давления, когда выражение прогиба w области местной потери устойчивости оболочки взято в виде затухающей функции.

Задача решается, как и в работе [1], исходя из принципа возможных перемещений.

Сравнение полученного в настоящей заметке значения $P_{кр}$ с соответствующим значением $P_{кр}$, найденного по методу Ритца — Тимошенко [3] при одной и той же форме аппроксимирующей функции, дает удовлетворительное совпадение численных результатов.

Если за полюс оболочки принять центр области вмятины (хлопка), то тогда:

$$A = R, B = R \sin \alpha; T_{1B} = T_{2B} = -\frac{pR}{2},$$

$$\chi_{1B}^0 = \chi_{2B}^0 = 0, k_1 = k_2 = \frac{1}{R},$$

где A и B — коэффициенты Ляме, R — радиус кривизны срединной поверхности сферической оболочки; T_{1B} , T_{2B} — усилия в срединной поверхности оболочки для безмоментного состояния (до хлопка), χ_{1B}^0 , χ_{2B}^0 — параметры кривизны оболочки для безмоментного состояния; p — внешнее равномерно распределенное давление на оболочку, Центральный угол α предполагаем изменяющимся в пределах $0 \leq \alpha \leq \gamma$, где γ — половина телесного угла области вмятины (хлопка).

Уравнения равновесия сферической оболочки при внешнем равномерно распределенном давлении будут иметь вид:

$$\frac{\partial}{\partial \alpha} (T_1 \sin \alpha) - T_2 \cos \alpha = 0, \quad (1)$$

$$\frac{\partial}{\partial \alpha} (R \sin \alpha N_1) + R^2 \sin \alpha \left[\frac{T_1 + T_2}{R} + \frac{T_1}{R^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \alpha^2} + \frac{T_2 \cos \alpha}{R^2 \sin \alpha} \frac{\partial w}{\partial \alpha} \right] + R^2 \sin \alpha \cdot p = 0, \quad (2)$$

$$R \sin \alpha N_1 = \frac{\partial}{\partial \alpha} (\sin \alpha G_1) - G_2 \cos \alpha, \quad (3)$$

Обычно область вмятины настолько мала, что приближенно можно принять $\sin \alpha \approx \alpha$, $\cos \alpha \approx 1$.

Тогда имеем:

$$\frac{d}{d\alpha} (\alpha T_1) - T_2 = 0, \quad (1')$$

$$\frac{d}{d\alpha} (\alpha N_1) + \alpha (T_1 + T_2) + \frac{T_1}{R} \cdot \alpha \frac{d^2 w}{d\alpha^2} + \frac{T_2}{R} \frac{dw}{d\alpha} + \alpha p R = 0, \quad (2')$$

$$R \alpha N_1 = \frac{d}{d\alpha} (\alpha G_1) - G_2. \quad (3')$$

После некоторых преобразований их можно привести к одному нелинейному дифференциальному уравнению.

Пользуясь уравнением (1'), можем написать:

$$\alpha (T_1 + T_2) \approx \alpha T_1 + \alpha \frac{d}{d\alpha} (\alpha T_1) = \frac{d}{d\alpha} (\alpha^2 T_1), \quad (4)$$

$$T_1 \cdot \alpha \frac{d^2 w}{d\alpha^2} + T_2 \frac{dw}{d\alpha} \approx T_1 \cdot \alpha \frac{d^2 w}{d\alpha^2} + \frac{dw}{d\alpha} \cdot \frac{d}{d\alpha} (\alpha T_1) = \frac{d}{d\alpha} \left(T_1 \cdot \alpha \frac{dw}{d\alpha} \right). \quad (5)$$

Подставляя (4) и (5) в уравнение (2') и интегрируя получаем:

$$\alpha N_1 + T_1 \left(\alpha^2 + \frac{\alpha}{R} \cdot \frac{dw}{d\alpha} \right) + \frac{\alpha^2}{2} p R = C.$$

Так как это уравнение должно удовлетворяться и при $\alpha = 0$, то $C = 0$. Следовательно,

$$\alpha N_1 + T_1 \left(\alpha^2 + \frac{\alpha}{R} \frac{dw}{d\alpha} \right) + \frac{\alpha^2}{2} p R = 0. \quad (6)$$

Далее, учитывая, что параметры кривизны оболочки после потери устойчивости

$$\kappa_1 \approx \frac{1}{R^2} \frac{d^2 w}{d\alpha^2}, \quad \kappa_2 \approx \frac{1}{R^2} \frac{1}{\alpha} \frac{dw}{d\alpha},$$

вместо уравнения (3') имеем:

$$\alpha N_1 = -\frac{D}{R^3} \left(\alpha \frac{d^3 w}{d\alpha^3} + \frac{d^2 w}{d\alpha^2} - \frac{1}{\alpha} \frac{dw}{d\alpha} \right),$$

где $D = \frac{Et^3}{12(1-\mu^2)}$, t — толщина оболочки,

μ — коэффициент поперечного сжатия.

Подставляя отсюда N_1 в уравнение (6), получаем одно разрешающее уравнение:

$$-\frac{D}{R^3} \left(\alpha \frac{d^3 w}{d\alpha^3} + \frac{d^2 w}{d\alpha^2} - \frac{1}{\alpha} \frac{dw}{d\alpha} \right) + T_1 \left(\alpha^2 + \frac{\alpha}{R} \frac{dw}{d\alpha} \right) + \frac{\alpha^2}{2} p R = 0. \quad (7)$$

В дальнейшем удобно принять, что прогиб и усилия являются как бы суммой соответствующих выражений безмоментного состояния и состояния типа краевого эффекта, т. е. пусть

$$w = w_B + w_K; \quad \frac{dw_B}{d\alpha} = 0;$$

$$T_1 = T_{1B} + T_{1K}; \quad T_2 = T_{2B} + T_{2K}; \quad T_{1B} = T_{2B} = -\frac{pR}{2}. \quad (8)$$

Тогда уравнение (7) примет вид:

$$-\frac{D}{R^3} \left(\alpha \frac{d^3 w_K}{d\alpha^3} - \frac{1}{\alpha} \frac{dw_K}{d\alpha} + \frac{d^2 w_K}{d\alpha^2} \right) + T_{1K} \left(\alpha^2 + \frac{\alpha}{R} \frac{dw_K}{d\alpha} \right) + T_{1B} \frac{\alpha}{R} \frac{dw_K}{d\alpha} = 0. \quad (9)$$

Принимая во внимание уравнение (1') и беря условие совместности деформаций, как в работе [2],

$$\varepsilon_1 = \frac{d}{d\alpha} (\alpha \varepsilon_2) + f, \quad (10)$$

где

$$f = \frac{1}{R} \left(\alpha \frac{dw_K}{d\alpha} + \alpha^2 w_K \right) + \frac{1}{2} \varepsilon_{13}^2 + \frac{1}{8} \varepsilon_{13}^4, \\ \varepsilon_{13} = \frac{1}{R} \left(\frac{dw_K}{d\alpha} + \alpha w_K \right) \quad (11)$$

и учитывая условия (8) находим:

$$T_{1K} = -\frac{Et}{\alpha^2} \int_{\alpha}^1 \left[\int_{\alpha}^1 \frac{f d\alpha}{\alpha} \right] \alpha d\alpha. \quad (12)$$

Подставляя (12) в уравнение (9) и принимая во внимание

$$T_{1B} = -p \frac{R}{2},$$

имеем:

$$\frac{D}{R^3} \left(\alpha \frac{d^3 w_K}{d\alpha^3} - \frac{1}{\alpha} \frac{dw_K}{d\alpha} + \frac{d^2 w_K}{d\alpha^2} \right) + \frac{Et}{\alpha^2} \int_{\alpha}^1 \left[\int_{\alpha}^1 \frac{f d\alpha}{\alpha} \right] \alpha d\alpha \cdot \left(\alpha^2 + \frac{\alpha}{R} \frac{dw_K}{d\alpha} \right) + p \frac{\alpha}{2} \frac{dw_K}{d\alpha} = 0. \quad (13)$$

В дальнейшем всюду индекс k опускаем. Заменой переменного

$$\zeta = \frac{\alpha^2}{\gamma^2} = \frac{\alpha^2}{b}, \quad 0 \leq \zeta \leq 1,$$

уравнение (13) можно представить еще в виде:

$$\frac{8D}{bR^3} \left(2\zeta \frac{d^2 w}{d\zeta^2} + \zeta^2 \frac{d^3 w}{d\zeta^3} \right) + \frac{Et}{4\zeta} \int_{\zeta}^1 \left[\int_{\zeta}^1 \frac{f}{\zeta} d\zeta \right] d\zeta \cdot \left(b\zeta + \frac{2\zeta}{R} \frac{dw}{d\zeta} \right) + p\zeta \frac{dw}{d\zeta} = 0. \quad (14)$$

Для определения критического значения давления $p_{кр}$ прогиб области хлопка задаем, как и в работе [2], затухающей функцией вида:

$$w = aRg = aRe^{-n\zeta} (1 - b\zeta). \quad (15)$$

При этом предполагается, что на контуре области хлопка добавочные усилия $T_1 = T_2 \approx 0$ и моменты $G_1 = G_2 \approx 0$.

Выбор области хлопка в виде затухающей функции в дальнейшем позволяет вести интегрирование по всей оболочке, т. е. от 0 до ∞ , так как предполагается, что в выражении (15) за n принято такое число, при котором для $\zeta=1$ прогиб становится пренебрегаемо малым. Подставляя выражение (15) в уравнение (14) и беря f в первом приближении (т. е. пренебрегая членами, содержащими множители $ab, a^2, \frac{a^4}{b^2}$), получаем:

$$\begin{aligned} & -\frac{8naD}{bR^2} e^{-n\zeta} \left[2 \left(2 \frac{k}{n} + 1 \right) n\zeta - \left(5 \frac{k}{n} + 1 \right) n^2 \zeta^2 + \frac{k}{n} n^2 \zeta^3 \right] + \\ & + \frac{Et}{2} \left\{ a \frac{b}{n} e^{-n\zeta} \left(1 - \frac{k}{n} - \frac{k}{n} n\zeta \right) + \frac{3}{8} a^2 e^{-2n\zeta} \left(-6 + 5 \frac{k^2}{n^2} + 12 \frac{k}{n} n\zeta - \right. \right. \\ & - 6 \frac{k^3}{n^2} n^2 \zeta^2 \left. \right) - \frac{a^2 e^{-3n\zeta}}{4b/n} \left[-2 - 2 \frac{k}{n} - \frac{k^2}{n^2} - \frac{k^3}{n^3} + \left(6 + 4 \frac{k}{n} + \frac{k^2}{n^2} \right) \frac{k}{n} n\zeta - \right. \\ & \left. \left. - \left(6 + 2 \frac{k}{n} \right) \frac{k^2}{n^2} n^2 \zeta^2 + 2 \frac{k^3}{n^3} n^2 \zeta^3 \right] \right\} - paRe^{-n\zeta} \left[- \left(\frac{k}{n} + 1 \right) n\zeta + \frac{k}{n} n^2 \zeta^2 \right] = 0. \end{aligned} \quad (16)$$

Согласно процедуре, изложенной в работе [1], для приближенного интегрирования уравнения (14) необходимо умножить ее на

$$\delta\theta \cdot d\rho = \frac{1}{R\sqrt{\zeta}} \cdot \delta \left[\sqrt{\frac{\zeta}{b}} \frac{dw}{d\zeta} \right] \cdot d\zeta$$

и проинтегрировать от 0 до ∞ (где θ — угол поворота дуги меридиана сферы при выпучивании, $\rho = \frac{a}{\gamma}$).

Вычислим теперь $\delta\theta \cdot d\rho$:

$$\begin{aligned} \delta\theta \cdot d\rho &= \frac{1}{R\sqrt{\zeta}} \cdot \delta \left[\sqrt{\frac{\zeta}{b}} \cdot \frac{dw}{d\zeta} \right] d\zeta = \\ &= \frac{1}{R\sqrt{b}} \left[\frac{1}{2} \left(\frac{\delta\zeta}{\zeta} - \frac{\delta b}{b} \right) \frac{dw}{d\zeta} + \delta \frac{dw}{d\zeta} \right] d\zeta. \end{aligned}$$

Но т. к. $\zeta = \frac{a^2}{b}$ и $\frac{\delta\zeta}{\zeta} = -\frac{\delta b}{b}$, то

$$\delta\theta \cdot d\rho = \frac{1}{R\sqrt{b}} \left[\delta \frac{dw}{d\zeta} - \frac{dw}{d\zeta} \frac{\delta b}{b} \right] d\zeta. \quad (17)$$

Из условия конечности T_{1k} на полюсе сферы имеем:

$$\frac{a \cdot n}{b} = \frac{8 \left(1 - \frac{k}{n} \right)}{2 + \frac{k^2}{n^2}} \quad (18)$$

и, следовательно, $\frac{\delta b}{b} = \frac{\delta a}{a}$.

Подставляя последнее в (17), находим:

$$\delta\theta \cdot d\rho = \frac{1}{R\sqrt{b}} \left[\delta \frac{dw}{d\zeta} - \frac{dw}{d\zeta} \frac{\delta a}{a} \right] d\zeta.$$

Если сюда подставим выражение w из (15), то получим окончательно:

$$\delta\theta \cdot d\rho = \frac{ne^{-n\zeta}}{\sqrt{b}} \left[- \left(2 \frac{k}{n} + 1 \right) n\zeta + \frac{k}{n} n^2 \zeta^2 \right] \delta a \cdot d\zeta. \quad (19)$$

Далее, умножая выражение (16) на выражение (19) и интегрируя в пределах от 0 до ∞ , имеем:

$$\begin{aligned} & a \frac{b}{n} \frac{Et^3}{R^3} \cdot \frac{2}{3(1-\mu^2)} \left(\frac{k^2}{n^2} + \frac{k}{n} + 1 \right) - \frac{Et}{R} \left[\frac{1}{2} \left(-3 \frac{k^2}{n^2} - 2 \frac{k}{n} + 2 \right) a \cdot \frac{b}{n} - \right. \\ & - a^2 \frac{1}{6} \left(-4 \frac{k^3}{n^3} - 9 \frac{k^2}{n^2} + 6 \right) + \frac{a^3 \cdot n}{b} \frac{1}{256} \left(17 \frac{k^4}{n^4} + 28 \frac{k^3}{n^3} + 8 \frac{k^2}{n^2} + \right. \\ & \left. \left. + 32 \frac{k}{n} + 32 \right) \right] - pa \left(\frac{k^2}{n^2} + 2 \right) = 0. \end{aligned} \quad (20)$$

Откуда, вводя обозначения:

$$\begin{aligned} m &= \frac{b}{n}; \quad A = \frac{k^2}{n^2} + 2; \quad B = \frac{2}{3(1-\mu^2)} \left(\frac{k^2}{n^2} + \frac{k}{n} + 1 \right); \\ B &= \frac{1}{2} \left(-3 \frac{k^2}{n^2} - 2 \frac{k}{n} + 2 \right); \quad \Gamma = \frac{1}{6} \left(-4 \frac{k^3}{n^3} - 9 \frac{k^2}{n^2} + 6 \right); \\ D &= \frac{1}{256} \left(17 \frac{k^4}{n^4} + 28 \frac{k^3}{n^3} + 8 \frac{k^2}{n^2} + 32 \frac{k}{n} + 32 \right), \end{aligned} \quad (21)$$

находим формулу давления:

$$p = \frac{1}{mA} \frac{Et^2}{R^2} \left[B \frac{t}{R} - \frac{R}{t} (m^2 B - am\Gamma + a^2 D) \right]. \quad (22)$$

При определении минимального значения критического давления $p_{кр}$ должно выполняться условие (18). Для этого обозначим

$$\frac{a}{m} = \frac{8 \left(1 - \frac{k}{n} \right)}{\frac{k^2}{n^2} + 2} = \pm \beta$$

и исключим m из уравнения (22). Тогда

$$p = \frac{1}{A} \frac{Et^2}{R^2} \left[\frac{\beta}{a} B \frac{t}{R} - a \frac{R}{t} \left(\frac{B}{\beta} - \Gamma + \beta D \right) \right]. \quad (23)$$

Минимизируя p по параметру a , находим:

$$a = \frac{\beta \sqrt{B}}{\sqrt{\beta \Gamma - \beta^2 D - B}} \cdot \frac{t}{R}. \quad (24)$$

Подставляя это значение a в уравнение (23), для искомого критического давления получим формулу:

$$p_{кр} = \frac{2}{A} \sqrt{B(\beta \Gamma - \beta^2 D - B)} \cdot \frac{Et^2}{R^2}. \quad (25)$$

Как видно, здесь числовой коэффициент критического равномерно распределенного внешнего давления на сферическую оболочку зависит от отношения $\frac{k}{n}$. Путем подбора $\frac{k}{n}$ определяем минимальное значение критического давления $p_{кр}$.

Оно получается при $\frac{k}{n} = 0,6$:

$$p_{кр} = 0,335 \frac{1}{\sqrt{1-\mu^2}} \frac{Et^2}{R^2}. \quad (26)$$

Найденное здесь минимальное значение критического давления почти практически совпадает (разница $\approx 2,4\%$) со значением критического давления, полученным методом Ритца — Тимошенко в работе [3]:

$$p_{кр} = 0,327 \frac{1}{\sqrt{1-\mu^2}} \frac{Eh^3}{R^3},$$

когда за функцию прогиба была принята та же затухающая функция (15) и $\frac{k}{n} = 0,6$.

Проведенные нами предварительные опыты по исследованию устойчивости сферических сегментов при внешнем равномерном давлении на оболочку дают для критического давления числовые коэффициенты 0,26—0,32.

ЛИТЕРАТУРА

1. Х. М. Муштари. К теории устойчивости сферической оболочки под действием внешнего давления (в связи со статьей В. И. Феодосьева). ПММ, т. XIX, в. 2, 1955.
2. Х. М. Муштари и Р. Г. Суркин. О нелинейной теории устойчивости упругого равновесия тонкой сферической оболочки под действием равномерно распределенного нормального внешнего давления. ПММ, т. XIV, в. 6, 1950.
3. Р. Г. Суркин. К теории устойчивости и прочности сферических и эллипсоидальных оболочек, днищ и мембран. Диссертация, Казань, 1952.

Физико-технический институт
Казанского филиала АН СССР

Поступило
5 ноября 1955 г.

С. Г. Винокуров

ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДА ГАЛЕРКИНА К РЕШЕНИЮ ЗАДАЧИ О БОЛЬШИХ ПРОГИБАХ КРУГЛОЙ ШАРНИРНО ОПЕРТОЙ ПЛАСТИНКИ

Предположим, что пластинка, температура которой линейно изменяется по толщине, находится под действием равномерно распределенной поперечной нагрузки, а ее контур шарнирно оперт на жесткие опоры, находящиеся при неизменной температуре, которую мы считаем равной нулю.

Пусть

- h — толщина пластинки;
- z — расстояние от срединной поверхности;
- t_1 — температура верхней поверхности;
- t_2 — температура нижней поверхности;
- $t_0 = \frac{t_1 + t_2}{2}$ — температура срединной поверхности;

$\Delta t = t_2 - t_1$ — перепад температуры по толщине;

$$t = t_0 + \frac{z\Delta t}{h} \text{ — температура } z\text{-го слоя;}$$

- a — радиус пластинки;
- r — радиальная координата точки;
- u — радиальное перемещение;
- w — нормальное перемещение;
- q — интенсивность равномерно распределенной нагрузки;
- E — модуль упругости при растяжении и сжатии;
- ν — коэффициент поперечного сжатия;
- $D = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}$ — жесткость пластинки при изгибе;
- α — коэффициент линейного температурного расширения.

Радиальная и кольцевая компоненты полной деформации срединной поверхности будут определяться через перемещение обычными соотношениями:

$$\epsilon_1 = \frac{du}{dr} + \frac{1}{2} \left(\frac{dw}{dr} \right)^2, \quad \epsilon_2 = \frac{u}{r}.$$

Радиальная и кольцевая компоненты изгибной деформации слоя, находящегося на расстоянии z от срединной поверхности, будут:

$$e_1 = -z \frac{d^2w}{dr^2}, \quad e_2 = -\frac{z}{r} \frac{dw}{dr}.$$

Соответствующие компоненты упругой деформации будут:

$$\begin{aligned} \varepsilon_1^0 &= \varepsilon_1 - \alpha t_0, & \varepsilon_2^0 &= \varepsilon_2 - \alpha t_0, \\ e_1^0 &= e_1 - \frac{\alpha \Delta t}{h}, & e_2^0 &= e_2 - \frac{\alpha \Delta t}{h}. \end{aligned}$$

Этим упругим деформациям соответствуют напряжения:

$$\begin{aligned} \sigma_1' &= \frac{E}{1-\nu^2} (\varepsilon_1 + \nu \varepsilon_2) - \frac{E \alpha t_0}{1-\nu}, & \sigma_2' &= \frac{E}{1-\nu^2} (\varepsilon_2 + \nu \varepsilon_1) - \frac{E \alpha t_0}{1-\nu}; \\ \sigma_1'' &= \frac{E}{1-\nu^2} (e_1 + \nu e_2) - \frac{E \alpha \Delta t}{h(1-\nu)}, & \sigma_2'' &= \frac{E}{1-\nu^2} (e_2 + \nu e_1) - \frac{E \alpha \Delta t}{h(1-\nu)}. \end{aligned}$$

Компоненты суммарного напряжения в слое z будут:

$$\sigma_1 = \sigma_1' + \sigma_1'', \quad \sigma_2 = \sigma_2' + \sigma_2''.$$

Усилия N_1 , N_2 и моменты M_1 , M_2 определяются интегралами:

$$\begin{aligned} N_1 &= \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_1' dz = \frac{Eh}{1-\nu^2} [\varepsilon_1 + \nu \varepsilon_2 - (1+\nu) \alpha t_0]; \\ N_2 &= \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_2' dz = \frac{Eh}{1-\nu^2} [\varepsilon_2 + \nu \varepsilon_1 - (1+\nu) \alpha t_0]; \end{aligned} \quad (1)$$

$$\begin{aligned} M_1 &= \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_1'' z dz = -D \left[\frac{d^2 w}{dr^2} + \frac{\nu}{r} \frac{dw}{dr} + (1+\nu) \frac{\alpha \Delta t}{h} \right]; \\ M_2 &= \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_2'' z dz = -D \left[\frac{1}{r} \frac{dw}{dr} + \nu \frac{d^2 w}{dr^2} + (1+\nu) \frac{\alpha \Delta t}{h} \right]. \end{aligned} \quad (2)$$

Уравнения равновесия запишем в форме:

$$\frac{1}{r} \frac{dM_2}{dr} - \frac{1}{r} \frac{d^2}{dr^2} (rM_1) = \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(rN_1 \frac{dw}{dr} \right) + q, \quad (3)$$

$$\frac{d}{dr} (N_1 r) - N_2 = 0. \quad (4)$$

Исключив w из соотношений (1), получим:

$$Eh \frac{u}{r} = N_2 - \nu N_1 + E \alpha t_0. \quad (5)$$

Исключив u из тех же соотношений (1) и воспользовавшись уравнением (4), получим:

$$r \frac{d}{dr} \left[\frac{1}{r} \frac{d}{dr} (r^2 N_1) \right] + \frac{Eh}{2} \left(\frac{dw}{dr} \right)^2 = 0. \quad (6)$$

А из уравнений (2) и (3) получим:

$$D \frac{d}{dr} \left[\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{dw}{dr} \right) \right] = N_1 \frac{dw}{dr} + \frac{qr}{2}. \quad (7)$$

Итак, задача сводится к решению уравнений (4), (6) и (7) относительно трех неизвестных N_1 , N_2 и w , при граничных условиях для шарнирно опертого края:

$$w(a) = 0, \quad u(a) = 0, \quad M_1(a) = 0. \quad (8)$$

Функцию прогибов пластинки представим в виде:

$$w = w_0 \left(1 + b_1 \frac{r^2}{a^2} + b_2 \frac{r^4}{a^4} \right),$$

где w_0 — величина прогиба в центре пластинки, а b_1 и b_2 — некоторые постоянные, которые должны быть выбраны так, чтобы

$$w(a) = 0 \text{ и } M_1(a) = 0,$$

что дает для функции прогибов следующее выражение:

$$w = w_0 \left(1 + m \frac{r^2}{a^2} + n \frac{r^4}{a^4} \right) + \frac{\alpha \Delta t a^2 n}{2h} \left(\frac{r^2}{a^2} - \frac{r^4}{a^4} \right), \quad (9)$$

здесь

$$m = -(1+n), \quad n = \frac{1+\nu}{5+\nu}.$$

Для упрощения счета целесообразно уравнения (6), (7), путем введения новых безразмерных переменных, привести к виду:

$$\rho \frac{d}{d\rho} \left[\frac{1}{\rho} \frac{d}{d\rho} (\rho \psi) \right] = \frac{\varphi^2}{2}, \quad (10)$$

$$\rho \frac{d}{d\rho} \left[\frac{1}{\rho} \frac{d}{d\rho} (\rho \varphi) \right] + k \varphi \psi - d \rho^2 = 0. \quad (11)$$

Причем новые величины связаны со старыми следующими соотношениями:

$$\rho = \frac{r}{a}, \quad \varphi = \frac{dw}{dr}, \quad \psi = -\frac{rN_1}{Eha},$$

$$k = 12(1-\nu^2) \frac{a^2}{h^2}, \quad d = 6(1-\nu^2) \frac{qa^3}{Eh^2}.$$

Так что для φ будем иметь следующее выражение:

$$\varphi = c(l\rho + \rho^3) + \delta(\rho - 2\rho^3), \quad (12)$$

где

$$c = \frac{4w_0 n}{a}, \quad l = \frac{m}{2n}, \quad \delta = \frac{\alpha \Delta t \tan^2}{h}.$$

Из уравнения (10), учитывая условия

$$u(a) = 0,$$

$$N_1 - \text{конечно при } r=0,$$

переходящие в новых обозначениях в условия

$$\frac{d\psi}{d\rho} - \nu\psi - \alpha t_0 = 0 \text{ (при } \rho=1),$$

$$\frac{\psi}{\rho} - \text{ограничено (при } \rho=0),$$

находим:

$$\psi = c_1 \rho + c_2 \rho^3 + c_3 \rho^5 + c_4 \rho^7, \quad (13)$$

где

$$c_1 = \frac{1}{96} [a_0 c^2 + a_1 c \delta + a_2 \delta^2 + a_3 \alpha t_0],$$

$$c_2 = \frac{1}{96} [6l^2 c^2 + 12lc \delta + 6\delta^2],$$

$$c_3 = \frac{1}{96} [4lc^2 + 4(1-2l)c\delta - 8\delta^2],$$

$$c_4 = \frac{1}{96} [c^2 - 4c\delta + 4\delta^2],$$

$$a_0 = -\frac{275,56}{3}, \quad a_1 = -\frac{20}{3}, \quad a_2 = -\frac{22}{3}, \quad a_3 = 128.$$

При таких w , φ и ψ точно удовлетворяются все граничные условия и уравнение непрерывности (10).

Уравнение равновесия (11) удовлетворяется приближенно за счет подбора произвольной постоянной c . Для этого значения φ и ψ , взятые из (12) и (13), подставим в левую часть уравнения (11) и, умножив полученное выражение на вариацию функции φ , предполагая, что в выражении (12) меняется только c , возьмем интеграл:

$$\int_0^1 \left\{ \rho \frac{d}{d\rho} \left[\frac{1}{\rho} \frac{d}{d\rho} (\rho\varphi) \right] + k\varphi\psi - d\rho^2 \right\} (l\rho + \rho^2) d\rho = 0. \quad (14)$$

Отсюда, после интегрирования и подстановки соответствующих величин, получаем зависимость между прогибом пластинки, интенсивностью поперечной равномерно распределенной нагрузки, температурой срединной поверхности и перепадом температуры по толщине, в виде:

$$(1 - 3,679 T_0 + 0,98034 T^2) W + 1,3384 T W^2 + 1,860 W^3 + 0,1780 \Delta T^3 = 0,065625 Q + 4,2 \Delta T + 1,086 \Delta T T_0, \quad (15)$$

где

$$W = \frac{w_0}{a}, \quad T_0 = \frac{\alpha t_0 a^2}{h^2}, \quad \Delta T = \frac{1+\nu}{5+\nu} \frac{\alpha \Delta t a^2}{2h^2}, \quad Q = \frac{q a^4}{Dh}, \quad \nu = 0,25.$$

Энергетический метод решения этой задачи даёт:

$$(1 - 3,679 T_0 + 0,9947 \Delta T^2) W + 1,297 \Delta T W^2 + 1,872 W^3 + 0,2503 \Delta T^3 = 0,065625 Q + 4,2 \Delta T + 1,086 \Delta T T_0. \quad (16)$$

В частности, при $q=0$ и $\Delta t=0$ получим вместо (15) неполное кубическое уравнение:

$$(1 - 3,679 T_0) W + 1,860 W^3 = 0,$$

корни которого

$$W_1 = 0, \quad W_{2,3} = \pm \sqrt{\frac{3,679 T_0 - 1}{1,860}}.$$

Второй и третий корни становятся вещественными только при условии $t_0 \geq 0,2718 \frac{h^2}{\alpha a^2}$, т. е. с момента потери устойчивости пластинки от реактивных сжимающих усилий. Величина этих усилий совпадает с известной величиной критического сжимающего усилия для круглой шарнирно опертой пластинки.

Уравнение (15) даёт возможность по заданным t_0 , Δt и q определить величину прогиба w_0 , а по нему можно затем полностью определить распределение напряжения в пластинке.

Решение рассмотренной термоупругой задачи равносильно решению задачи об изгибе пластинки, находящейся в равномерном температурном поле при совместном действии на пластинку:

- 1) равномерно распределенной нагрузки интенсивностью q ;
- 2) сжимающих (или растягивающих) сил, приложенных к контуру, $N_1^* = -\frac{Eh \alpha t_0}{1-\nu}$;
- 3) изгибающих моментов, приложенных к контуру,

$$M_1^* = -D(1+\nu) \frac{\alpha \Delta t}{h}.$$

При отрицательном значении T_0 пластинка получит предварительное натяжение и будет обладать повышенной жесткостью. Применение таких предварительно напряженных пластинок может привести к уменьшению расхода металла и к уменьшению веса конструкции.

Путем соответствующего изменения температуры срединной поверхности и перепада температуры по толщине можно добиться более рационального распределения напряжений по толщине пластинки, заставив волокна нейтрального слоя раньше включиться в работу.

Физико-технический институт
Казанского филиала АН СССР

Поступило
20 сентября 1955 г.

М. С. Корнишин

**ВЛИЯНИЕ НЕСИММЕТРИЧНОЙ НЕПРАВИЛЬНОСТИ
НА ДЕФОРМАЦИЮ ПОЛОГОЙ ПАНЕЛИ
ПРИ ПОПЕРЕЧНОЙ НАГРУЗКЕ**

В работе рассматривается вопрос о влиянии начальной несимметричной неправильности на деформацию пологой цилиндрической панели с шарнирно закрепленными краями при равномерном внешнем нормальном давлении. Прогибы не считаются малыми, ввиду чего используется аппарат нелинейной теории пологих оболочек. Задача решается в перемещениях путем применения процедуры Галеркина к каждому из трех уравнений равновесия. Предполагается, что панель имеет нулевую кривизну вдоль образующей и переменную кривизну по дуге. Решение доводится до числа, когда длина панели в два раза больше ширины.

1. Основные обозначения

u, v, w — составляющие перемещения точки срединной поверхности соответственно по направлениям образующей, касательной к дуге и внутренней нормали; $\xi = \frac{u}{t}$, $\eta = \frac{v}{t}$, $\zeta = \frac{w}{t}$, где t — толщина панели; $2a$ — длина панели по образующей; $2b$ — ширина по дуге; $\lambda = \frac{b}{a}$; p — равномерное внешнее нормальное давление; $k = \frac{1}{R_0} + f(y)$ — кривизна панели; R_0 — постоянный радиус кривизны; $k^* = \frac{4b^2}{R_0 t}$ — параметр кривизны; $P = \frac{pR_0 b^3}{D}$ — параметр давления; $D = Et^3 : 12(1 - \nu^2)$, $K = Et : (1 - \nu^2)$, $\mu = Et : 2(1 + \nu)$, E — модуль упругости, ν — коэффициент поперечной деформации.

2. Основные уравнения и зависимости

В случае, когда действует только поперечная нагрузка p , нелинейные уравнения равновесия пологой цилиндрической оболочки в перемещениях имеют вид:

$$u_{xx} + \nu_1 u_{yy} + \nu_2 v_{xy} = \nu k w_x - w_x w_{xx} - \nu_1 w_x w_{yy} - \nu_2 w_y w_{xy}, \quad (2.1)$$

$$v_{yy} + \nu_1 v_{xx} + \nu_2 u_{xy} = k w_y + w k_y - w_y w_{yy} - \nu_1 w_y w_{xx} - \nu_2 w_x w_{xy}, \quad (2.2)$$

$$D \nabla \nabla w = K \left[u_x + \frac{1}{2} w_x^2 + \nu \left(v_y - w k + \frac{1}{2} w_y^2 \right) \right] w_{xx} + \\ + K \left[\nu \left(u_x + \frac{1}{2} w_x^2 \right) + v_y - w k + \frac{1}{2} w_y^2 \right] (k + w_{yy}) + \\ + 2\mu (u_y + v_x + w_x w_y) w_{xy} + p. \quad (2.3)$$

Здесь и далее $v_1 = (1 - \nu) : 2$, $v_2 = (1 + \nu) : 2$.

Пусть начальная кривизна панели задана в виде:

$$k = \frac{1}{R_0} - w_0 \left(\frac{\pi}{b} \right)^2 \sin \frac{\pi y}{b}. \quad (2.4)$$

В случае шарнирного закрепления кромок панели имеем граничные условия:

$$\begin{aligned} u = v = w = 0 \text{ при } x = \pm a, y = \pm b; \\ w_{xx} + \nu w_{yy} = 0 \text{ при } x = \pm a, w_{yy} + \nu w_{xx} = 0 \text{ при } y = \pm b. \end{aligned} \quad (2.5)$$

Граничные условия (2.5) удовлетворяются, если, вводя безразмерные координаты $x_1 = \pi x : 2a$, $y_1 = \pi y : 2b$, компоненты перемещения взять в виде:

$$u = \sum_{mn} u_{mn} \sin 2nx_1 \cos (2m-1)y_1 + \sum_{mn} u''_{mn} \sin 2nx_1 \sin 2my_1, \quad (2.6)$$

$$v = \sum_{mn} v_{mn} \cos (2m-1)x_1 \sin 2ny_1 + \sum_{mn} v''_{mn} \cos (2m-1)x_1 \cos 2ny_1, \quad (2.7)$$

$$\begin{aligned} w = \sum_{mn} w_{mn} \cos (2m-1)x_1 \cos (2n-1)y_1 + \\ + \sum_{mn} w''_{mn} \cos (2m-1)x_1 \sin 2ny_1, \text{ где } m, n = 1, 2, 3... \end{aligned} \quad (2.8)$$

Первые суммы в выражениях (2.6), (2.7), (2.8) соответствуют симметричной деформации панели, вторые — несимметричной деформации. Последующие вычисления проводим, беря для u, v и w ограниченное число членов, а именно:

$$\begin{aligned} u = u_1 \sin 2x_1 \cos y_1 + u_2 \sin 4x_1 \cos y_1 + u_3 \sin 2x_1 \cos 3y_1 + \\ + u''_1 \sin 2x_1 \sin 2y_1 + u''_2 \sin 4x_1 \sin 2y_1 + u''_3 \sin 2x_1 \sin 4y_1, \end{aligned} \quad (2.9)$$

$$\begin{aligned} v = v_1 \cos x_1 \sin 2y_1 + v_2 \cos 3x_1 \sin 2y_1 + v_3 \cos x_1 \sin 4y_1 + \\ + v_4 \cos 3x_1 \sin 4y_1 + v_5 \cos x_1 \sin 6y_1 + v''_1 \cos x_1 \cos y_1 + \\ + v''_2 \cos 3x_1 \cos y_1 + v''_3 \cos x_1 \cos 3y_1 + v''_4 \cos 3x_1 \cos 3y_1 + \\ + v''_5 \cos x_1 \cos 5y_1, \end{aligned} \quad (2.10)$$

$$w = w_1 \cos x_1 \cos y_1 + w''_1 \cos x_1 \sin 2y_1. \quad (2.11)$$

Подставляя (2.9), (2.10), (2.11) в уравнения (2.1), (2.2), (2.3) и применяя к каждому из них процедуру Галеркина, получим систему 18 алгебраических уравнений, связывающих 18 параметров $u_i, v_k, w_j, u''_i, v''_k, w''_j$ и нагрузку p .

В силу взаимной ортогональности функций, с помощью которых аппроксимируются составляющие перемещения u и v , система уравнений для определения произвольных параметров u_i, u''_i, v_k, v''_k через w_1 и w''_1 разделяется на две независимых системы, одна из которых содержит только параметры симметричной деформации, а вторая — несимметричной деформации, т. е. имеет вид:

$$a_i \xi_i + \sum_k b_k \eta_k = f_i(\zeta_1, \zeta''_1) \quad i = 1, 2, 3, \quad (2.12)$$

$$c_k \eta_k + \sum_i d_i \xi_i = \Phi_k(\zeta_1, \zeta''_1) \quad k = 1, 2, \dots, 5,$$

$$A_i \xi_i + \sum_k B_k \eta_k = F_i(\zeta_1, \zeta''_1) \quad i = 1, 2, 3, \quad (2.13)$$

$$C_k \eta_k + \sum_i D_i \xi_i = \Phi_k(\zeta_1, \zeta''_1) \quad k = 1, 2, \dots, 5,$$

где $a_i \dots D_i$ — постоянные коэффициенты, зависящие от λ , $f_i \dots \Phi_k$ — известные функции от параметров прогиба ζ_1, ζ''_1 . Ввиду громоздкости полученных уравнений, здесь мы их не приводим.

Из (2.12) (2.13) видно, что η_k и ξ_i непосредственно могут быть выражены соответственно через ξ_i и η_k , и наоборот.

Это существенно облегчает последующие вычисления, хотя они остаются еще достаточно громоздкими. Принятая нами процедура интегрирования по методу Галеркина каждого из 3 уравнений равновесия для рассматриваемой задачи в линейной постановке эквивалентна применению энергетического метода, или, что то же самое, применению вариационного уравнения, данного в работе [2], которое мы здесь приводим с небольшими изменениями, главным образом, в форме записи и в обозначениях:

$$\begin{aligned} - \left\{ \int_{-b}^{+b} [(p_1 + T_1) \delta u + (q + S) \delta v] dy \right\} - \left\{ \int_{-a}^{+a} [(q + S) \delta u + \right. \\ \left. + (p_2 + T_2) \delta v] dx \right\} + \left[\int_{-b}^{+b} M_1 \delta w_x dy \right] + \left[\int_{-a}^{+a} M_2 \delta w_y dx \right] + \\ + \int_{(F)} \int (T_{1x} + S_y) \delta u dx dy + \int_{(F)} \int (T_{2y} + S_x) \delta v dx dy + \\ + \int_{(F)} \int [p + T_1 w_{xx} + T_2 (k + w_{yy}) + 2S w_{xy} - D \nabla \nabla w + (T_{1x} + S_y) w_x + \\ + (T_{2y} + S_x) w_y] \delta w dx dy = 0, \end{aligned} \quad (2.14)$$

где p_1, p_2, q — заданные нормальные и касательные усилия на контуре; p — поперечная нагрузка; T_1, T_2, S — нормальные и касательные усилия в срединной поверхности; M_1, M_2 — изгибающие моменты; x и y снизу означают производную по соответствующей координате.

В нашем случае, в силу граничных условий, все контурные интегралы обращаются в нуль, и остаются лишь три последних интеграла по площади.

В линейной постановке подчеркнутые члены в последнем интеграле отсутствуют и, следовательно, вариационное уравнение приводится к принятой нами процедуре. В нелинейной постановке эта процедура даст иной результат, ввиду пренебрежения подчеркнутыми членами, интеграл от которых, взятый по площади, представляет собой обусловленную поворотом элементарную работу неуравновешенных касательных усилий на возможном перемещении δw . Однако, как показали проделанные нами вычисления, учет этих членов не оказывает заметного влияния на конечные результаты, по крайней мере в том случае, когда для u и v берется несколько членов.

3. Результат вычислений для панели с отношением сторон $\lambda = 0,5$

Проводя вычисления для случая, когда $\lambda = 0,5$, получим следующие основные соотношения:

$$\frac{16}{\pi^2} P = \left(2,428k^* + \frac{38,050}{k^*}\right) \zeta_1 - 25,086 \zeta_1^2 + \frac{62,520}{k^*} \zeta_1^3 + \frac{258,880}{k^*} \zeta_1 \zeta_1'' + \frac{596,820}{k^*} \zeta_0 \zeta_1 \zeta_1'' + \frac{87,530}{k^*} \zeta_0^2 \zeta_1 - 33,890 \zeta_1'' - 78,580 \zeta_0 \zeta_1''; \quad (3.1)$$

$$\frac{5,439}{k^*} \zeta_1^2 \zeta_1'' + \frac{5,998}{k^*} \zeta_1^2 \zeta_0 - 1,410 \zeta_1 \zeta_1'' - 1,633 \zeta_1 \zeta_0 + \frac{62,081}{k^*} \zeta_0 \zeta_1'' + \frac{18,402}{k^*} \zeta_1''^2 + 0,00361k^* \zeta_1'' + \frac{48,403}{k^*} \zeta_0^2 \zeta_1'' + \frac{9,164}{k^*} \zeta_1'' = 0. \quad (3.2)$$

Если воспользоваться вариационным уравнением (2.14), то к правой части уравнения (3.1) добавится сумма

$$A = -0,0149 \zeta_1^2 + \frac{0,174}{k^*} \zeta_1^3 + \frac{0,420}{k^*} \zeta_1 \zeta_1'' + \frac{0,545}{k^*} \zeta_0 \zeta_1 \zeta_1'' + 0,042 \zeta_1''^2, \quad (3.3)$$

а к левой части (3.2) сумма

$$B = \frac{0,023}{k^*} \zeta_1^2 \zeta_1'' + \frac{0,096}{k^*} \zeta_1^2 \zeta_0 - 0,008 \zeta_1 \zeta_1'' + \frac{0,105}{k^*} \zeta_1 \zeta_1'' + \frac{0,092}{k^*} \zeta_1''^2. \quad (3.4)$$

Сравнение порядка коэффициентов при одинаковых членах соответствующих выражений показывает, что добавочные члены действительно не окажут существенного влияния на результаты вычислений.

При заданной амплитуде ζ_0 отклонения панели от круговой формы соотношение (3.1) дает зависимость параметра нагрузки P от параметров симметричного и несимметричного прогибов ζ_1 , ζ_1'' , а соотношение (3.2) дает зависимость между последними в процессе деформации.

При $\zeta_0 = 0$ получаем решение для панели кругового сечения с учетом появления несимметричной формы потери устойчивости.

Найдем, при каком значении параметра кривизны k^* имеет место несимметричная форма потери устойчивости, т. е. появляется отличный от нуля несимметричный прогиб ζ_1'' . Полагая в (3.2) $\zeta_0 = 0$, получим:

$$\frac{5,44}{k_0} \zeta_1^2 \zeta_1'' - 1,410 \zeta_1 \zeta_1'' + \frac{18,40}{k_0} \zeta_1''^2 + 0,00361k_0 \zeta_1'' + \frac{9,164}{k_0} \zeta_1'' = 0. \quad (3.5)$$

Отсюда

$$\frac{18,40}{k^*} \zeta_1'' = -\frac{5,44}{k^*} \zeta_1^2 + 1,410 \zeta_1 - 0,00361k^* - \frac{9,16}{k^*} > 0. \quad (3.6)$$

Неравенство (3.6) дает $k^* > 10,22$.

Решая неравенство (3.6) для различных заданных k^* , найдем состояния, при которых соответственно возникает или исчезает несимметричная составляющая прогиба ζ_1'' , а из уравнения (3.1), в котором следует положить $\zeta_0 = \zeta_1'' = 0$, получим соответствующие критические значения параметра нагрузки. Для иллюстрации рассмотрим панели с параметрами кривизны $k^* = 20$ и $k^* = 100$.

4. Панель с параметром кривизны $k^* = 20$

а) Симметричная деформация

Полагая в (3.1) $\zeta_0 = \zeta_1'' = 0$, $k^* = 20$, получим:

$$\frac{16}{\pi^2} P = 50,460 \zeta_1 - 25,086 \zeta_1^2 + 3,126 \zeta_1^3. \quad (4.1)$$

Критические значения параметра прогиба $\zeta_{1,1}$, $\zeta_{1,2}$, соответствующие давлению хлопка и выхлопа, найдем из условия $\frac{dP}{d\zeta_1} = 0$ (4.2).

При этом оказывается $\zeta_{1,1} = 1,343$; $\zeta_{1,2} = 4,007$.

Пользуясь (4.1) получаем: $P_{1,1} = 18,56$; $P_{1,2} = 0,323$. Кривая зависимости P от ζ_1 представлена сплошной линией на рис. 2.

б) Появление несимметричной составляющей деформации

Решая неравенство (3.6)

при $k^* = 20$, находим, что оно имеет место, когда $0,408 < \zeta_1 < 4,776$ (4.3). Неравенство (4.3) определяет область существования несимметричной составляющей деформации.

Критические значения параметра давления, при которых соответственно возникает и исчезает несимметричная деформация, найдем из (4.1), полагая $\zeta_{1,1} = 0,408$, $\zeta_{1,2} = 4,776$. Вычисления дают $P_1 = 10,26$; $P_2 = 5,68$. Кривая зависимости P от ζ_1 для этого случая при $\zeta_1 < 0,408$ и $\zeta_1 > 4,776$ совпадает с предыдущей, а в промежутке $0,408 < \zeta_1 < 4,776$ изображена пунктирной линией.

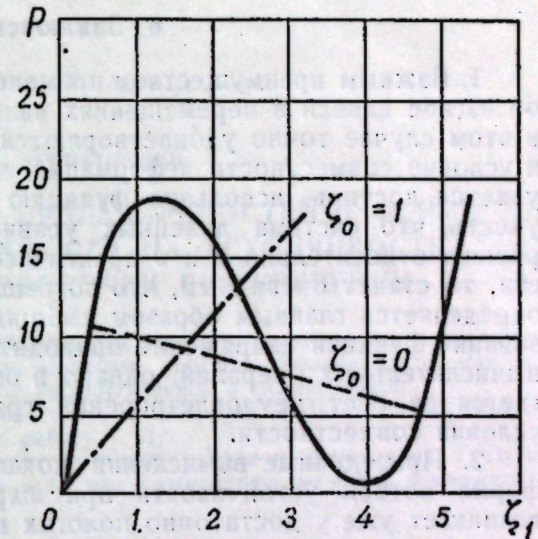


Рис. 1.

в) Деформация панели с кривизной, заданной выражением (2.4) при $\zeta_0 = \omega_0 : t = 1$

В этом случае приходится пользоваться зависимостями (3.1) и (3.2), сохраняя в них все члены. Задаваясь различными значениями ζ_1'' , из (3.2) найдем соответствующие им значения ζ_1 , после чего, согласно (3.1), определим величины параметра давления P . Полученная таким образом кривая зависимости P от ζ_1 представлена штрих-пунктирной линией на рис. 1.

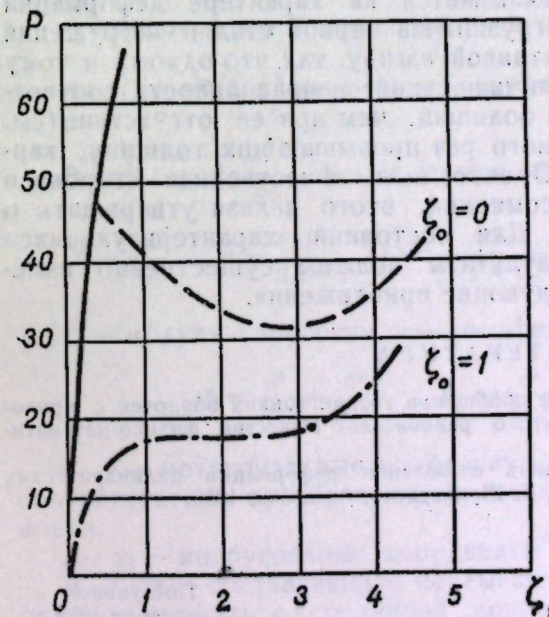


Рис. 2.

5. Панель с параметром кривизны $k^* = 100$

Проводя вычисления, аналогичные предыдущим, получаем для этого случая:

а) симметричная деформация

$\zeta_{1,1} = 6,358$, $\zeta_{1,2} = 20,392$;
 $P_{1,1} = 427,38$; $P_{1,2} = -105,74$.

Кривая зависимости P от ζ_1 представлена сплошной линией на рис. 2.

б) Появление несимметричной составляющей деформации

$$\zeta_{1,1} = 0,329, \quad \zeta_{1,2} = 25,587,$$

$$P_1 = 47,68; \quad P_2 = 167,5.$$

Изгиб панели в промежутке между этими критическими состояниями изображается пунктирной кривой на рис. 2.

с) Деформация панели при $\zeta_0 = 1$. Производя вычисления согласно (3.1) и (3.2), получим штрих-пунктирную кривую на рис. 2.

6. Заключение

1. Важным преимуществом примененного метода решения задачи об изгибе панели в перемещениях является то обстоятельство, что в этом случае точно удовлетворяются как граничные условия, так и условие совместности деформаций, чего, к сожалению, не всегда удается достичь, используя функцию напряжений. Если при этом учесть, что система линейных уравнений (2.1), (2.2) может быть решена относительно u и v практически с любой степенью точности, то станет очевидным, что погрешность приближенного решения определяется главным образом выбором функции прогиба w . Использование функции напряжений приводит к некоторому уменьшению вычислительных операций, однако в большинстве случаев это достигается за счет неудовлетворения граничных условий задачи или условия совместности.

2. Приведенные вычисления показывают, что несимметричная форма потери устойчивости при шарнирном закреплении кромок возникает уже у достаточно пологих панелей ($k^* > 10,22$). Поэтому, когда параметр кривизны $k^* > 10,22$, определение критической нагрузки для симметричной формы потери устойчивости по одной полуwave лишено практического интереса. Это необходимо иметь в виду тем более, что начальная форма панели в действительности не является идеально симметричной, и деформация панели происходит как одновременное развитие симметричной и несимметричной составляющих.

3. Наличие начальной несимметрии в форме срединной поверхности панели существенно сказывается на характере деформации под действием поперечной нагрузки. На первой стадии нагружения панель становится более податливой изгибу, так что одному и тому же значению нагрузки при наличии такой неправильности соответствует прогиб в несколько раз больший, чем при ее отсутствии (см. рис. 2, 3). При прогибах, во много раз превышающих толщину, картина меняется на обратную. Однако, если качественная сторона и в этом случае не вызывает сомнений, этого нельзя утверждать о количественных результатах. Для состояний, характеризующихся большими прогибами, эти результаты должны существенно измениться, если для w взять следующие приближения.

ЛИТЕРАТУРА

1. Х. М. Муштар. Некоторые обобщения теории тонких оболочек с приложениями к задаче устойчивости упругого равновесия. Известия физико-математического общества КГУ, 1938.

2. А. С. Вольмир. Устойчивость и большие деформации цилиндрических оболочек. Труды ВВИА им. проф. Н. Е. Жуковского, вып. 389, 1950.

Н. И. Кривошеев

ВЛИЯНИЕ НАЧАЛЬНЫХ НЕПРАВИЛЬНОСТЕЙ В ФОРМЕ СРЕДИННОЙ ПОВЕРХНОСТИ НА УСТОЙЧИВОСТЬ ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ОБОЛОЧКИ ПРИ КРУЧЕНИИ

В работе рассматривается устойчивость при кручении цилиндрической оболочки, срединная поверхность которой имеет начальные прогибы. Решение проведено для двух форм начальной неправильности: несимметричной и симметричной.

В момент завершения данной работы была обнаружена в статье В. Наги [6] ссылка на аналогичную по названию работу Т. Лу.

Ввиду того, что ни в одном из известных нам журналов диссертация Т. Лу не опубликована и даже не прореферирована, мы, к сожалению, не имели возможности ознакомиться с ее содержанием.

1. Обозначения и основные соотношения

L, t, R — длина, толщина и радиус кривизны оболочки. $l = L/\cos \varphi$,
 $k = \sin \varphi$, $k^2 = \alpha$, φ — угол наклона воли к образующей цилиндра.
 $m = \frac{\pi}{l}$, $\bar{n} = \frac{n}{R}$, n — число волн по окружности, $\sigma = \pi R/nl$, $\beta = \sigma^2$.

τ — внешнее сдвигающее напряжение.

$A = (1 - \nu^2) \frac{L^2}{t^2} \cdot \frac{\tau}{E}$ — безразмерный параметр нагрузки.

$H = \sqrt{1 - \nu^2} \frac{L^2}{2tR}$ — безразмерный геометрический параметр.

$$\tau^* = \frac{120}{\pi^2} A, \quad \theta = \frac{4\pi^4}{3H^2}, \quad D = \frac{Et^3}{12(1 - \nu^2)}$$

E — модуль упругости, ν — коэффициент поперечной деформации.

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}, \quad \Delta_k = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + 2k \frac{\partial^2}{\partial x_1 \partial y_1} + \frac{\partial^2}{\partial y_1^2}$$

x, y — ортогональные координаты точки срединной поверхности, соответственно по образующей цилиндра и по касательной к окружности.

x_1, y_1 — косоугольные координаты той же точки.

u, v, w — составляющие перемещения точки на оси x, y и на внутреннюю нормаль к срединной поверхности, w^0 — начальная неправильность в форме срединной поверхности,

Компоненты деформации, согласно формулам работы [2], будут:

$$\begin{aligned} \epsilon_x &= \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 + \frac{\partial w}{\partial x} \cdot \frac{\partial w_0}{\partial x}, \quad \epsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 + \frac{\partial w}{\partial y} \cdot \frac{\partial w_0}{\partial y} - \frac{w}{R}, \\ \epsilon_{xy} &= \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial x} \left(\frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial w_0}{\partial y} \right) + \frac{\partial w}{\partial y} \cdot \frac{\partial w_0}{\partial x}. \end{aligned} \quad (1.1)$$

Связь между напряжениями в срединной поверхности и деформациями выражается равенствами:

$$\sigma_x = \frac{E}{1-\nu^2} (\epsilon_x + \nu \epsilon_y), \quad \sigma_y = \frac{E}{1-\nu^2} (\epsilon_y + \nu \epsilon_x), \quad \tau_{xy} = \frac{E}{2(1+\nu)} \epsilon_{xy}. \quad (1.2)$$

Исключая u и v из соотношений (1.1) и вводя функцию напряжений Φ по формулам:

$$\sigma_x = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2}, \quad \sigma_y = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2}, \quad \tau_{xy} = -\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial y}, \quad (1.3)$$

получим условие совместности деформаций:

$$\begin{aligned} \Delta^2 \Phi = E \left\{ \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right)^2 - \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} \right) + 2 \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \cdot \frac{\partial^2 w_0}{\partial x \partial y} - \right. \\ \left. - \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \cdot \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} - \frac{1}{R} \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right\}. \end{aligned} \quad (1.4)$$

Выражение энергии деформации срединной поверхности оболочки через Φ и w имеет вид:

$$\mathcal{E}_{cp} = \frac{t}{2E} \int_0^L \int_0^{2\pi R} \left\{ (\Delta \Phi)^2 + 2(1+\nu) \left[\left(\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial y} \right)^2 - \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} \cdot \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} \right] \right\} dx dy \quad (1.5)$$

Изгибная энергия равна:

$$W = \frac{D}{2} \int_0^L \int_0^{2\pi R} \left\{ (\Delta w)^2 + 2(1-\nu) \left[\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right)^2 - \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right] \right\} dx dy \quad (1.6)$$

Угол поворота сечения в плоскости XOY

$$\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} = \epsilon_{xy} - \frac{\partial w}{\partial x} \left(\frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial w_0}{\partial y} \right) - \frac{\partial w}{\partial y} \cdot \frac{\partial w_0}{\partial x},$$

при этом длина дуги, на которую повернется точка торца оболочки $x=L$ относительно торца $x=0$, приближенно будет равна:

$$\int_0^L \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) dx = - \int_0^L \left\{ \frac{2(1+\nu)}{E} \cdot \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial y} + \frac{\partial w}{\partial x} \left(\frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial w_0}{\partial y} \right) + \frac{\partial w}{\partial y} \cdot \frac{\partial w_0}{\partial x} \right\} dx.$$

Работа приложенной нагрузки вычисляется по формуле¹:

$$V = t \cdot \tau \int_0^L \int_0^{2\pi R} \left\{ \frac{2(1+\nu)}{E} \cdot \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial y} + \frac{\partial w}{\partial x} \left(\frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial w_0}{\partial y} \right) + \frac{\partial w}{\partial y} \cdot \frac{\partial w_0}{\partial x} \right\} dx dy. \quad (1.7)$$

Полная энергия оболочки \mathcal{E} дается как сумма энергии деформации срединной поверхности, изгибной энергии и потенциальной энергии внешних сил:

$$\mathcal{E} = \mathcal{E}_{cp} + W - V.$$

¹ Эта формула эквивалентна формуле $V = t \cdot \tau \int_0^L v \Big|_{x=L} dy$.

При решении некоторых задач, например, при рассмотрении скошенных (в форме параллелограмма) пластин и в задаче об устойчивости круговой цилиндрической оболочки под действием кручения, срединную поверхность удобнее относить к декартовым косоугольным координатам x_1, y_1 .

Введем косоугольную систему координат при помощи формул:

$$x_1 = \frac{1}{\cos \varphi} x, \quad y_1 = y + \operatorname{tg} \varphi \cdot x. \quad (1.8)$$

Здесь предполагается, что угол между осями x_1 и y_1 равен $\pi/2 + \varphi$ и что ось x повернута относительно оси x_1 на угол φ .

Производные по x, y выражаются через производные по x_1 и y_1 формулами:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} &= \frac{1}{\cos \varphi} \left(\frac{\partial}{\partial x_1} + k \frac{\partial}{\partial y_1} \right), \quad \frac{\partial}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y_1}, \\ \frac{\partial^2}{\partial x^2} &= \frac{1}{\cos^2 \varphi} \left(\frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + 2k \frac{\partial^2}{\partial x_1 \partial y_1} + k^2 \frac{\partial^2}{\partial y_1^2} \right), \\ \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} &= \frac{1}{\cos \varphi} \left(\frac{\partial^2}{\partial x_1 \partial y_1} + k \frac{\partial^2}{\partial y_1^2} \right). \end{aligned} \quad (1.9)$$

Выполняя указанные преобразования в уравнении (1.4) и в соотношениях (1.5) — (1.7), имеем:

$$\begin{aligned} \frac{1}{1-k^2} \Delta_k^2 \Phi = E \left\{ \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x_1 \partial y_1} \right)^2 - \frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y_1^2} + \frac{\partial^2 w_0}{\partial y_1^2} \right) - \frac{\partial^2 w}{\partial y_1^2} \cdot \frac{\partial^2 w_0}{\partial x_1^2} + \right. \\ \left. + 2 \frac{\partial^2 w}{\partial x_1 \partial y_1} \cdot \frac{\partial^2 w_0}{\partial x_1 \partial y_1} - \frac{1}{R} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2} + 2k \frac{\partial^2 w}{\partial x_1 \partial y_1} + k^2 \frac{\partial^2 w}{\partial y_1^2} \right) \right\}. \end{aligned} \quad (1.10)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_{cp} = \frac{t}{2E \cos \varphi} \int_0^L \int_0^{2\pi R} \left\{ \frac{1}{1-k^2} (\Delta_k \Phi)^2 + 2(1+\nu) \left[\left(\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x_1 \partial y_1} \right)^2 - \right. \right. \\ \left. \left. - \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x_1^2} \cdot \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y_1^2} \right] \right\} dx_1 dy_1. \end{aligned} \quad (1.11)$$

$$\begin{aligned} W = \frac{D}{2 \cos \varphi} \int_0^L \int_0^{2\pi R} \left\{ \frac{1}{1-k^2} (\Delta_k w)^2 + 2(1-\nu) \left[\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x_1 \partial y_1} \right)^2 - \right. \right. \\ \left. \left. - \frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2} \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial y_1^2} \right] \right\} dx_1 dy_1. \end{aligned} \quad (1.12)$$

$$\begin{aligned} V = t \cdot \tau \int_0^L \int_0^{2\pi R} \left\{ \frac{2(1+\nu)}{E} \left(\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x_1 \partial y_1} + k \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y_1^2} \right) + \left(\frac{\partial w}{\partial x_1} + k \frac{\partial w}{\partial y_1} \right) \left(\frac{\partial w}{\partial y_1} + \frac{\partial w_0}{\partial y_1} \right) + \right. \\ \left. + \frac{\partial w}{\partial y_1} \left(\frac{\partial w_0}{\partial x_1} + k \frac{\partial w_0}{\partial y_1} \right) \right\} dx_1 dy_1. \end{aligned} \quad (1.13)$$

Граничные условия при $x_1=0$, l примем в форме: для шарнирного опирания:

$$w = 0, \quad \frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2} + 2k \frac{\partial^2 w}{\partial x_1 \partial y_1} + [k^2(1-\nu) + \nu] \frac{\partial^2 w}{\partial y_1^2} = 0, \quad (1.14)$$

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial y_1^2} = 0, \quad \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x_1 \partial y_1} + k \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y_1^2} = -\tau \cos \varphi; \quad (1.15)$$

для случая защемления, вместо условия равенства момента нулю, будет:

$$\frac{\partial w}{\partial x_1} + k \frac{\partial w}{\partial y_1} = 0. \quad (1.16)$$

2. Определение критической нагрузки по линейной теории

Из экспериментальных и теоретических исследований известно, что при кручении тонкой круговой цилиндрической оболочки на ее поверхности при потере устойчивости образуются волны, наклоненные под некоторым углом φ к образующей цилиндра. Угол наклона волн изменяется от 45° для очень коротких оболочек и с увеличением длины оболочки быстро уменьшается. В направлении волн оболочка предпочитает выпучиваться по одной полуволне. Учитывая это, примем форму прогиба в виде:

$$w = ft \sin mx_1 \sin \bar{n}y_1 \text{ — для шарнирного опирания,} \quad (2.1)$$

$$w = ft \sin^2 mx_1 \sin \bar{n}y_1 \text{ — для защемления.} \quad (2.2)$$

Полагая $w_0 = 0$ и отбрасывая нелинейные члены в уравнении (1.10), подставляем вместо w в правую часть этого уравнения его значения из (2.1) и (2.2). В результате интегрирования находим: для шарнирного опирания:

$$\Phi = \frac{1-\alpha}{R} E t f \{ b_1 \sin mx_1 \sin \bar{n}y_1 + b_2 \cos mx_1 \cos \bar{n}y_1 \} - \cos \varphi \tau (x_1 y_1 - k x_1^2), \quad (2.3)$$

для защемления:

$$\Phi = -\frac{1-\alpha}{R} E t f \{ b_3 \cos 2mx_1 \sin \bar{n}y_1 + b_4 \sin 2mx_1 \cos \bar{n}y_1 + b_5 \sin \bar{n}y_1 \} - \tau (x_1 y_1 - k x_1^2) \cos \varphi, \quad (2.4)$$

где

$$\begin{aligned} b_1 &= \frac{(\alpha + \beta) [(1 + \beta)^2 + 4\alpha\beta] - 8\alpha\beta(1 + \beta)}{\bar{n}^2 [(1 + \beta)^2 - 4\alpha\beta]}, \\ b_2 &= 2\sqrt{\alpha\beta} \cdot \frac{2(1 + \beta)(\alpha + \beta) - (1 + \beta)^2 - 4\alpha\beta}{\bar{n}^2 [(1 + \beta)^2 - 4\alpha\beta]}, \\ b_3 &= \frac{1}{2} \cdot \frac{(\alpha + 4\beta) [(1 + 4\beta)^2 + 16\alpha\beta] - 32\alpha\beta(1 + 4\beta)}{\bar{n}^2 [(1 + \beta)^2 - 16\alpha\beta]}, \\ b_4 &= 2\sqrt{\alpha\beta} \cdot \frac{[(1 + 4\beta)^2 + 16\alpha\beta] - 2(\alpha + 4\beta)(1 + 4\beta)}{\bar{n}^2 [(1 + 4\beta)^2 - 16\alpha\beta]}, \quad b_5 = -\frac{\alpha}{2\bar{n}^2}. \end{aligned} \quad (2.5)$$

Из (2.3) и (2.4) видно, что статические граничные условия (1.15) удовлетворяются только в среднем, т. е.:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\cos \varphi} \int_0^{2\pi R} \left(\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x_1 \partial y_1} + k \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y_1^2} \right) \Big|_{x_1=0,l} dy_1 &= -2\pi R \tau, \\ \int_0^{2\pi R} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y_1^2} \Big|_{x_1=0,l} dy_1 &= 0. \end{aligned} \quad (2.6)$$

В результате подстановки в соотношения (1.11) — (1.13) вместо w его значений из (2.1), (2.2) и вместо Φ — (2.3) и (2.4) и интегрирования находим:

для шарнирного опирания:

$$\begin{aligned} \mathfrak{E} = \frac{\pi^2 t^3 R E}{2(1-\nu^2) L^3} f^2 \left\{ \frac{2}{\pi^2} H^2 \cdot \frac{[(1 + \beta)^2 + 4\alpha\beta] [(\alpha + \beta)^2 + 4\alpha\beta] - 16\alpha\beta(\alpha + \beta)(1 + \beta)}{[(1 + \beta)^2 - 4\alpha\beta]^2} + \right. \\ \left. + 2\alpha^2 \right\} + \frac{\pi^2}{18\beta^2} \left(\frac{3}{4} + 2\beta + 4\beta^2 + 4\alpha\beta \right) - \frac{\sqrt{\alpha(1-\alpha)}}{\beta} A \Big\}, \end{aligned} \quad (2.7)$$

для защемления:

$$\begin{aligned} \mathfrak{E} = \frac{3\pi^2 t^3 R E}{8(1-\nu^2) L^3} f^2 \left\{ \frac{2}{3\pi^2} H^2 \left[\frac{[(1 + 4\beta)^2 + 16\alpha\beta] [(\alpha + 4\beta)^2 + 16\alpha\beta] - 64\alpha\beta(\alpha + 4\beta)(1 + 4\beta)}{[(1 + 4\beta)^2 - 16\alpha\beta]^2} + \right. \right. \\ \left. \left. + 2\alpha^2 \right] + \frac{\pi^2}{18\beta^2} \left(\frac{3}{4} + 2\beta + 4\beta^2 + 4\alpha\beta \right) - \frac{\sqrt{\alpha(1-\alpha)}}{\beta} A \right\}. \end{aligned} \quad (2.8)$$

Из (2.7) и (2.8) следуют уравнения $\partial \mathfrak{E} / \partial f = 0$: для шарнирного опирания:

$$\begin{aligned} \frac{\sqrt{\alpha(1-\alpha)}}{\beta} A = \frac{2}{\pi^2} H^2 \frac{[(1 + \beta)^2 + 4\alpha\beta] [(\alpha + \beta)^2 + 4\alpha\beta] - 16\alpha\beta(\alpha + \beta)(1 + \beta)}{[(1 + \beta)^2 - 4\alpha\beta]^2} + \\ + \frac{\pi^2}{24\beta^2} [(1 + \beta)^2 + 4\alpha\beta], \end{aligned} \quad (2.9)$$

для защемления:

$$\begin{aligned} \frac{\sqrt{\alpha(1-\alpha)}}{\beta} A = \frac{2}{3\pi^2} H^2 \left\{ \frac{[(1 + 4\beta)^2 + 16\alpha\beta] [(\alpha + 4\beta)^2 + 16\alpha\beta] - 64\alpha\beta(1 + 4\beta)(\alpha + 4\beta)}{[(1 + 4\beta)^2 - 16\alpha\beta]^2} + \right. \\ \left. + 2\alpha^2 \right\} + \frac{\pi^2}{72\beta^2} [2 + (1 + 4\beta)^2 + 16\alpha\beta]. \end{aligned} \quad (2.10)$$

Сравним критические значения величин A , вычисленные по формулам (2.9), (2.10) и по формулам работ [1], [4] и [5], для $H = 95,4$.

Таблица 1

[1]	[4]	[5]	(2.9), (2.10)
для шарнирного опирания			
36,9	40	36,73	37
для защемления			
—	45	39,82	39,7

Из приведенной таблицы видно, что предложенное решение дает вполне удовлетворительные критические значения величины A . Отметим, что решение, полученное в работе [4], в случае защемления дает значения критической нагрузки для $H = 95,4$ на 12% выше, чем по формулам (2.10) и [5]. Для более коротких оболочек это завышение возрастает до 18%.

3. Влияние начальных неправильностей в форме срединной поверхности на устойчивость цилиндрической оболочки при кручении

При сравнении экспериментальных и теоретических результатов, полученных на основании классической теории, можно заметить, что все экспериментальные значения критической нагрузки ниже теоретических. Экспериментальные значения в среднем на 25% меньше теоретических, а максимальная разница составляет 40%. Это расхождение объясняется, вероятно, теми дефектами, которые практически всегда вносятся в экспериментальный образец при его изготовлении и монтаже. В первую очередь к ним относятся начальные неправильности в форме срединной поверхности оболочки и начальные

напряжения. Также большое влияние оказывает на величину критической нагрузки и неидеальная упругость материала, из которого изготовлен образец.

В этом параграфе показывается, насколько уменьшается значение критической нагрузки в зависимости от начальных неправильностей.

В реальных образцах имеют место самые различные по форме неправильности. Исследовать влияние каждой формы неправильности на устойчивость оболочки не представляется возможным. Мы ограничимся рассмотрением симметричной и несимметричной форм начальной неправильности. При этом будем предполагать, что неправильность может быть самое большое порядка толщины оболочки.

а) Несимметричная неправильность

Пусть цилиндрическая оболочка разделена на ряд отсеков шпангоутами жесткими на изгиб в своей плоскости. Будем также предполагать, что шпангоуты обладают большой жесткостью на растяжение, так что приближенно можно принять

$$\varepsilon_{\text{шп}} = 0.$$

Начальную неправильность возьмем в виде:

$$w_0 = f_0 t \left(\sin m x_1 \sin \bar{n} y_1 + f \sin^2 m x_1 \sin^2 \frac{\bar{n} y_1}{2} \right). \quad (3.1)$$

Для приближенного решения поставленной задачи будем применять метод Ритца — Папковича, задаваясь формой прогиба:

$$w = f_1 t \left(\sin m x_1 \sin \bar{n} y_1 + f \sin^2 m x_1 \sin^2 \frac{\bar{n} y_1}{2} \right). \quad (3.2)$$

Таким образом, мы предполагаем, что под действием сдвигающей нагрузки начальная неправильность будет развиваться, сохраняя свою форму. Подставляя в правую часть уравнения (1.10) вместо w_0 и w их значения из (3.1) и (3.2) и интегрируя, получим Φ , выражение которого мы здесь не приводим, ввиду его громоздкости. Укажем лишь, что бигармоническая часть Φ нами принята в виде:

$$(1 - k^2) \left[\frac{P x_1^2}{2} + \frac{\tau}{\cos \varphi} (x_1 y_1 - k x_1^2) \right].$$

Постоянная P определяется из условия $\varepsilon_{\text{шп}} = 0$. Это условие будем выполнять только в среднем, т. е.

$$\int_0^{2\pi R} \left\{ \frac{1}{(1 - k^2) E} \cdot \left(\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x_1^2} + 2k \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x_1 \partial y_1} + k^2 \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y_1^2} \right) - \frac{\nu}{E} \cdot \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y_1^2} - \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial y_1} \right)^2 - \frac{\partial w}{\partial y_1} \cdot \frac{\partial w_0}{\partial y_1} + \frac{w}{R} \right\} dy_1 = 0.$$

Подставляя Φ и w , w_0 , находим:

$$\frac{P}{E} R^2 = \frac{1}{4\pi^2} (\gamma - 2\xi_0) \left\{ \frac{1}{2} \gamma \left(1 + \frac{3}{16} f^2 \right) - f \right\}, \quad (3.3)$$

где

$$\gamma = \xi + 2\xi_0, \quad \xi = f_1 t R \bar{n}^2, \quad \xi_0 = f_0 t R \bar{n}^2. \quad (3.4)$$

Статические граничные условия (1.15) удовлетворяются также в среднем. Учитывая найденное выражение Φ и соотношения (1.11) — (1.13), (3.1) — (3.3) и вводя обозначения:

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= (1 + \beta)^2 + 4\alpha\beta, & \lambda_2 &= (1 + 4\beta)^2 + 16\alpha\beta, & \lambda_3 &= (1 + 16\beta)^2 + 64\alpha\beta, \\ \lambda_4 &= (4 + \beta)^2 + 16\alpha\beta, & \lambda_5 &= (1 + 9\beta)^2 + 36\alpha\beta, & \lambda_6 &= (4 + 9\beta)^2 + 144\alpha\beta, \\ a_1 &= \{(1 + \beta)^2 - 4\alpha\beta\}^2, & a_2 &= \{(1 + 4\beta)^2 - 16\alpha\beta\}^2, & a_3 &= \{(1 + 16\beta)^2 - 64\alpha\beta\}^2, \\ a_4 &= \{(4 + \beta)^2 - 16\alpha\beta\}^2, & a_5 &= \{(1 + 9\beta)^2 - 36\alpha\beta\}^2, & a_6 &= \{(4 + 9\beta)^2 - 144\alpha\beta\}^2, \end{aligned} \quad (3.5)$$

имеем:

$$\begin{aligned} \bar{\mathcal{E}} &= \frac{128R^4 \bar{n}^4}{t\pi R L E} \mathcal{E} = (\gamma - 2\xi_0)^2 \{ \gamma^2 f^4 \varphi_1 + \gamma^2 f^2 \varphi_2 + \gamma^2 \varphi_3 + \gamma f^3 \varphi_4 + \\ &+ \gamma f \varphi_5 + f^2 \varphi_6 + \varphi_7 \} - \gamma (\gamma - 2\xi_0) \left(1 + \frac{3}{16} f^2 \right) \frac{V_{\alpha(1-\alpha)}}{\beta} \tau^*. \end{aligned} \quad (3.6)$$

Здесь коэффициенты $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_7$ зависят только от α и β .

$$\begin{aligned} \varphi_1 &= \frac{35}{256} + \beta^2 \left[\frac{1}{32} \cdot \frac{\lambda_1}{a_1} + 2 \frac{\lambda_2}{a_2} + \frac{1}{2} \frac{\lambda_3}{a_3} + \frac{17}{16} \right], \\ \varphi_2 &= \frac{5}{4} + \frac{1}{8} \beta^2 \left[64 \frac{\lambda_1}{a_1} + 121 \frac{\lambda_4}{a_4} + 64 \frac{\lambda_5}{a_5} + \frac{\lambda_6}{a_6} - 4 \right], & \varphi_3 &= 3 + \beta^2, \\ \varphi_4 &= -\frac{5}{2} - 4\alpha\beta - \frac{4\beta}{a_2} [(\alpha + 4\beta)\lambda_2 - 32\alpha\beta(1 + 4\beta)], \\ \varphi_5 &= -12 - \frac{32\beta}{a_1} [(\alpha + \beta)\lambda_1 - 8\alpha\beta(1 + \beta)], \\ \varphi_6 &= 12 + 4\alpha^2 + \frac{2}{a_2} \{ (\alpha + 4\beta)^2 + 16\alpha\beta \} \lambda_2 - 64\alpha\beta(1 + 4\beta)(\alpha + 4\beta) + \\ &+ \frac{0}{2\beta^2} \left(\frac{3}{16} + \alpha\beta + \frac{1}{2} \beta + 3\beta^2 \right), \\ \varphi_7 &= \frac{32}{a_1} \{ (\alpha + \beta)^2 + 4\alpha\beta \} \lambda_1 - 16\alpha\beta(1 + \beta)(\alpha + \beta) + \frac{0}{2\beta^2} \lambda_1. \end{aligned} \quad (3.7)$$

Так как форма начальной неправильности задана, то значения параметров α и β фиксированы. Поэтому выражение полной энергии (3.6) содержит только два произвольных параметра γ и f . Условие экстремальности полной энергии относительно указанных произвольных параметров дает:

$$\frac{\partial \bar{\mathcal{E}}}{\partial \gamma} = 0, \quad \frac{\partial \bar{\mathcal{E}}}{\partial f} = 0.$$

Развертывая эти уравнения и исключая τ^* из второго из них, имеем:

$$\frac{V_{\alpha(1-\alpha)}}{\beta} \tau^* = \frac{8}{3} (\gamma - 2\xi_0) \left\{ 4\varphi_1 \gamma f^2 + 2\varphi_2 \gamma + 3\varphi_4 f + \varphi_5 \frac{1}{f} + 2\varphi_6 \frac{1}{\gamma} \right\}, \quad (3.8)$$

$$\begin{aligned} &(3\varphi_2 - 32\varphi_1) \gamma^2 f^3 + 3(\varphi_5 - 8\varphi_4) \gamma^2 f^2 + 2(3\varphi_3 - 8\varphi_2) \gamma^2 f + \\ &+ (3\varphi_7 - 16\varphi_6) \gamma f - 8\varphi_5 \gamma^2 - \xi_0 \left\{ (3\varphi_2 - 32\varphi_1) \gamma^2 f^3 + \left(\frac{3}{2} \varphi_5 - 24\varphi_4 \right) \gamma f^2 + \right. \\ &\left. + 2(3\varphi_3 - 8\varphi_2) \gamma^2 f - \frac{3}{2} \varphi_4 \gamma f^4 - (16f + 3f^3) \varphi_6 - 8\varphi_5 \gamma \right\} = 0. \end{aligned} \quad (3.9)$$

Значения параметров α и β будем определять подбором из условия минимальности нагрузки, т. е. будем определять нагрузку для самой невыгодной формы начальной неправильности. В такой постановке решение системы (3.8), (3.9) можно найти следующим образом. Для конкретного значения ξ_0 задаемся значениями параметров α и β .

По формулам (3.7) вычисляем коэффициенты $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_7$. После подстановки значений $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_7$ в уравнения (3.8) и (3.9) получим τ^* как функцию γ, f и θ и связь между последними величинами. Затем для ряда значений θ строим кривые $\tau^*(\gamma)$. Далее, оставляя α фиксированным, выполняем аналогичные вычисления при других значениях параметра β . В результате этих вычислений получим для одного значения α семейство кривых $\tau^*(\gamma)$, характеризуемое параметрами θ и β . Из этого семейства кривых выбираем ту кривую, которая определяет наименьшую из величин $\frac{\tau^*}{\tau_l} = \frac{A}{A_l}$. Для облегчения этих вычислений

значения α и β , соответствующие данному θ , можно найти по линейной теории. Наши вычисления показывают, что погрешность этого первого приближения незначительна. Кривые $\tau^*(\gamma)$ имеют вид, подобный изображенному на рис. 1 для случая $H=400$:

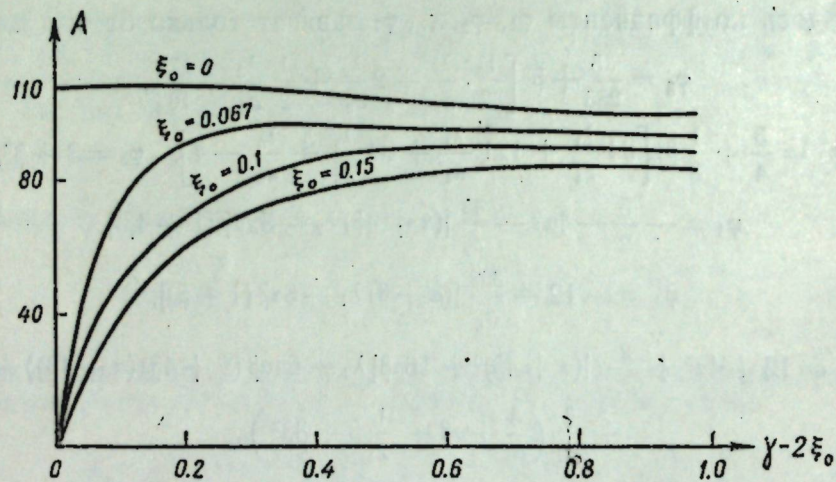


Рис. 1.

Из графика видно, что сначала прогиб развивается медленно. Затем при некотором значении A прогиб начинает быстро возрастать без увеличения нагрузки. За критическое значение нагрузки будем принимать то значение, при котором происходит резкое возрастание прогиба.

Значения w_{max}^0/t и $|w_{min}^0/t|$, соответствующие критическим точкам таких кривых для некоторых значений H , даны в таблице 2.

Таблица 2

ξ_0	$H=46,6$		ξ_0	$H=95,4$		ξ_0	$H=400$		ξ_0	$H=2080$	
	w_{max}^0/t	$ w_{min}^0/t $		w_{max}^0/t	$ w_{min}^0/t $		w_{max}^0/t	$ w_{min}^0/t $		w_{max}^0/t	$ w_{min}^0/t $
0,07	0,115	0,074	0,05	0,085	0,056	0,067	0,17	0,131	0,015	0,074	0,065
0,14	0,244	0,14	0,1	0,191	0,099	0,1	0,267	0,186	0,03	0,147	0,13
0,2	0,38	0,19	0,2	0,384	0,198	0,15	0,435	0,257	0,06	0,306	0,25
—	—	—	—	—	—	—	—	—	0,08	0,41	0,3

Вычисления показывают, что максимальная величина амплитуды начальной неупругости, при которой может еще произойти потеря устойчивости, не больше $0,4t$. Сопоставление определенных таким образом критических значений величины A при $w_{max}^0 = 0,4t$ с результатами линейной теории и эксперимента дано на рис. 2.

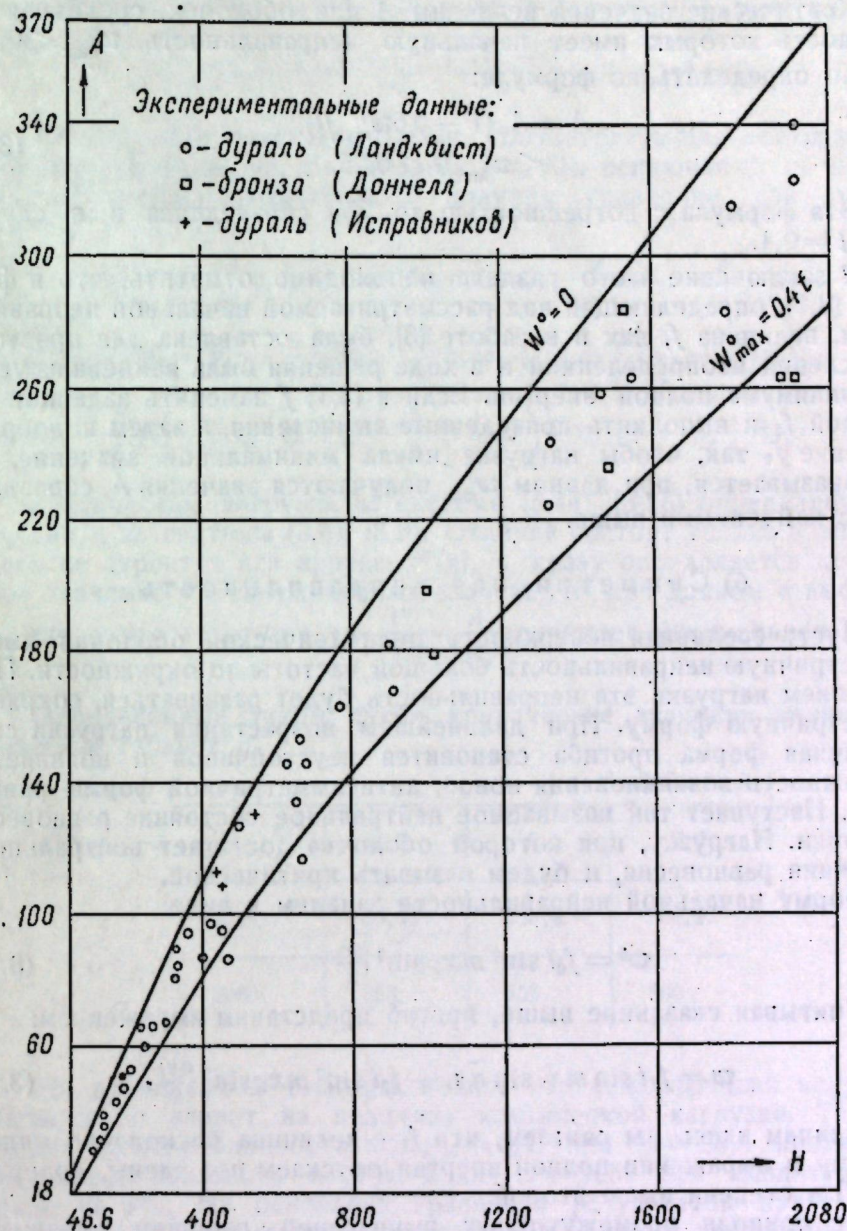


Рис. 2.

Как видно из рис. 2, почти все экспериментальные точки лежат между кривыми $w^0 = 0$ и $w_{max}^0 = 0,4t$. Критические нагрузки для 4 образцов оказались ниже кривой $w_{max}^0 = 0,4t$. Это отклонение, вероятно, объясняется тем, что указанные образцы имели начальные неупругости больше чем $w_{max}^0 = 0,4t$, и в результате нагружения появились значительные изгибные напряжения, благодаря которым

возникла пластическая деформация, вследствие чего наступила потеря устойчивости при нагрузке меньше критической.

Начальные неправильности в образцах Л. Р. Исправникова [7] были невелики, так как образцы были точечные и поэтому экспериментальные значения A для этих образцов лежат близко к кривой $w^0 = 0$.

Критические значения величины A для оболочек, срединная поверхность которых имеет начальную неправильность $w_{\max}^0 \leq 0,25t$, можно определить по формуле:

$$A = A_1 (1 - 0,6w_{\max}^0/t), \quad (3.10)$$

$$0 \leq w_{\max}^0/t \leq 0,25.$$

Эта формула с погрешностью до 2% справедлива и в случае $w_{\max}^0/t = 0,4$.

В заключение этого раздела необходимо отметить, что в формуле (3.1), определяющей вид рассматриваемой начальной неправильности, величина f , как и в работе [3], была оставлена для простоты вычислений неопределенной и в ходе решения была найдена из условия минимума полной энергии. Если в (3.1) f заменить заданной величиной f_2 и выполнить приведенные вычисления, а затем подобрать значение f_2 так, чтобы нагрузка имела минимальное значение, то, как оказывается, при данном w_{\max}^0 получаются значения A , совпадающие с найденными выше.

б) Симметричная неправильность

Пусть срединная поверхность цилиндрической оболочки имеет симметричную неправильность большой частоты по окружности. Под действием нагрузки эта неправильность будет развиваться, сохраняя симметричную форму. При дальнейшем возрастании нагрузки симметричная форма прогиба становится неустойчивой и появляется возможность возникновения новой, антисимметричной формы равновесия. Наступает так называемое нейтральное состояние равновесия оболочки. Нагрузку, при которой оболочка достигает нейтрального состояния равновесия, и будем называть критической.

Форму начальную неправильность зададим в виде:

$$w^0 = f_0 t \sin^2 m x_1 \sin^2 \frac{n y_1}{2}. \quad (3.11)$$

Учитывая сказанное выше, прогиб представим выражением:

$$w = f_1 t \sin m x_1 \sin n y_1 + f_2 t \sin^2 m x_1 \sin^2 \frac{n y_1}{2}. \quad (3.12)$$

Причем здесь мы считаем, что f_1 — величина бесконечно малая, поэтому в выражении полной энергии опускаем все члены, содержащие f_1 в степени выше второй.

Не приводя промежуточных вычислений, запишем выражение полной энергии:

$$\bar{\mathcal{E}} = \varphi_1 \eta^4 + (4\eta_0 \varphi_1 + \varphi_4) \eta^3 + (4\eta_0^2 \varphi_1 + 2\eta_0 \varphi_4 + \varphi_6) \eta^2 + \varphi_2 \eta^2 \omega + (2\eta_0 \varphi_2 + \varphi_5) \eta \omega + \left\{ \eta_0^2 \left(\varphi_2 - \frac{5}{4} + \frac{1}{2} \beta^2 \right) + \eta_0 (\varphi_3 + 12) + \varphi_7 \right\} \omega - \frac{V \alpha (1 - \alpha)}{\beta} \left\{ \omega + \frac{3}{16} (\eta^2 + 2\eta_0 \eta) \right\} \tau^*,$$

где

$$\eta = f_2 t R \bar{n}^2, \quad \omega = (f_1 t R \bar{n}^2)^2, \quad \eta_0 = f_0 t R \bar{n}^2. \quad (3.13)$$

Условие минимума энергии относительно η и ω даёт:

$$\frac{V \alpha (1 - \alpha)}{\beta} \tau^* = \varphi_2 \eta^2 + \eta (2\eta_0 \varphi_2 + \varphi_5) + \eta_0^2 \left(\varphi_2 - \frac{5}{4} + \frac{1}{2} \beta^2 \right) + \eta_0 (\varphi_3 + 12) + \varphi_7, \quad (3.14)$$

$$4\varphi_1 \eta^3 + 3\eta^2 (4\eta_0 \varphi_1 + \varphi_4) + 2\eta (4\eta_0^2 \varphi_1 + 2\eta_0 \varphi_4 + \varphi_6) + 2\eta \omega \varphi_2 + \omega (2\eta_0 \varphi_2 + \varphi_5) - \frac{3}{8} \cdot \frac{V \alpha (1 - \alpha)}{\beta} (\eta + \eta_0) \tau^* = 0.$$

Так как определяется нагрузка, соответствующая нейтральному состоянию равновесия, то, полагая $\omega = 0$ и исключая τ^* из последнего уравнения, окончательно получим уравнение для определения η :

$$\eta^2 \left(4\varphi_1 - \frac{3}{8} \varphi_2 \right) + \eta^2 \left\{ 3(4\eta_0 \varphi_1 + \varphi_4) - \frac{9}{8} \eta_0 \varphi_2 - \frac{3}{8} \varphi_5 \right\} + \eta \left\{ 4\eta_0 (2\eta_0 \varphi_1 + \varphi_4) - \frac{9}{8} \eta_0^2 \varphi_2 - \frac{3}{4} \eta_0 (\varphi_3 + 6) + \frac{3}{16} \left(\frac{5}{2} - \beta^2 \right) \eta_0^2 + 2\varphi_6 - \frac{3}{8} \varphi_7 \right\} - \frac{3}{8} \eta_0 \left\{ \eta_0^2 \left(\varphi_2 - \frac{5}{4} + \frac{1}{2} \beta^2 \right) + \eta_0 (\varphi_3 + 12) + \varphi_7 \right\} = 0. \quad (3.15)$$

Критическая нагрузка из системы (3.14), (3.15) определяется так же, как и из системы (3.8), (3.9). Отличие состоит только в том, что здесь не строится вся кривая $\tau^*(\eta)$, а сразу определяется критическое значение τ^* . Из найденных значений τ^* при данном α выбираем то, для которого отношение $\frac{\tau^*}{\tau_1} = \frac{A}{A_1}$ принимает минимальное значение.

Определенные таким путем критические значения величины A даются в таблице 3.

Таблица 3

$H \backslash \eta_0$	0,2	0,4	0,8
95,4	35,45	33,8	30,2
2080	353	335	300

Из приведенной таблицы видно, что симметричная неправильность слабо влияет на величину критической нагрузки. Так, при амплитуде неправильности $0,5t$ ($\eta_0 = 0,4$) для $H = 95,4$ критическое значение A снизилось на 9%, а для $H = 2080$ при амплитуде $\approx 2t$ также на 9%. На основании сравнения результатов приведенного решения с экспериментальными данными можно в заключение отметить, что метод исследования цилиндрической оболочки с учетом конечных прогибов и начальных неправильностей в форме срединной поверхности в основном позволяет объяснить расхождение между классической теорией и экспериментом.

Для более полного исследования желательно было бы рассмотреть и другие формы неправильностей, кроме рассмотренных нами. Вероятно, среди разнообразных форм неправильностей, имеющих место в реальных оболочках, найдутся и такие, которые больше могут понизить несущую способность оболочки.

Автор выражает благодарность научному руководителю Х. М. Муштари за ценные советы и указания при выполнении данной работы.

ЛИТЕРАТУРА

1. Муштари Х. М. Некоторые обобщения теории тонких оболочек с приложениями к задаче устойчивости упругого равновесия. Известия физико-математического об-ва КГУ, 1938.
2. Муштари Х. М. Об упругом равновесии тонкой оболочки с начальными неправильностями в форме срединной поверхности. ПММ, т. 15, 1951.
3. Donnell L. H., Wan C. Effect of Imperfections on Buckling on Thin Cylinders and Columns under Axial Compression. Journal of Applied Mechanics, vol. 17, № 1, 73—83, 1950.
4. Donnell L. H. Stability of thin-walled tubes under torsion. NASA Report № 479, 1933.
5. Batdorf S. B., Stein M. Critical combinations of torsion and direct axial stress for thin-walled Cylinders. NASA, Tech. Note, № 1345, 1947.
6. Nash W. Effect of large deflections and initial imperfections on the buckling of cylindrical shells Subject to hydrostatic pressure. Journal of the Aeronautical Sciences vol. 22, № 4, 1955.
7. Исправников Л. Р. Экспериментальное исследование устойчивости цилиндрической оболочки при осевом сжатии, кручении и поперечном давлении. Труды ВВИА им. профессора Н. Е. Жуковского, вып. 535, 1955.

Физико-технический институт
Казанского филиала АН СССР

Поступило
29 октября 1955 г.

А. В. Саченков

ОБ УСТОЙЧИВОСТИ ОБОЛОЧЕК ЗА ПРЕДЕЛОМ УПРУГОСТИ

В работе рассматривается устойчивость конических, цилиндрических и сферических оболочек за пределом упругости. Для указанных типов оболочек расчетные формулы выводятся в предположении чисто пластических, а также упруго-пластических деформаций. Перемещения считаются малыми, а начальное напряженное состояние оболочки — безмоментным.

Основные обозначения

X_x, Y_y — осевое и кольцевое напряжения; X_y — касательное напряжение; $\sigma_1 = \sqrt{X_x^2 - X_x Y_y + Y_y^2 + 3X_y^2}$, e_1 — интенсивность деформаций; $\delta T_1, \delta T_2, \delta S, \delta M_1, \delta M_2, \delta H$ — вариации усилий и моментов; $\epsilon_1, \epsilon_2, 2\epsilon_3$ и $\kappa_1, \kappa_2, \kappa_3$ — вариации деформаций срединной поверхности; f — функция напряжений; w — функция прогиба; E — модуль упругости; T_{10}, T_{20}, S_{10} — усилия до потери устойчивости; 2γ — угол конусности; r — расстояние от вершины конуса до точки на срединной поверхности оболочки; r_0 — расстояние до точки малого торцевого сечения; r_1 — до точки большего основания; $2h$ — толщина оболочки; φ — угол между некоторой аксиальной плоскостью и плоскостью отсчета; T_0 — сжимающее усилие на единицу длины, приложенное к краю $r=r_0$; n — число волн, образующихся по окружности при потере устойчивости оболочки.

Кроме того, будем пользоваться обозначениями:

$$\ln \frac{r}{r_0} = z, \quad \varphi_1 = \varphi \sin \gamma, \quad n_1 = \frac{n}{\sin \gamma}, \quad D = \frac{8Eh^3}{9},$$

$$\omega = 1 - \frac{1}{E} \frac{\sigma_1}{e_1}, \quad \lambda = 1 - \frac{1}{E} \frac{d\sigma_1}{de_1}, \quad \bar{X}_x = \frac{X_x}{\sigma_1}, \quad \bar{S}_x = \bar{X}_x - \frac{1}{2} \bar{Y}_y,$$

$$\epsilon = \bar{X}_x \epsilon_1 + \bar{Y}_y \epsilon_2 + 2\bar{X}_y \epsilon_3, \quad \kappa = \bar{X}_x \kappa_1 + \bar{Y}_y \kappa_2 + 2\bar{X}_y \kappa_3,$$

$$\bar{\kappa} = 2h \kappa, \quad \begin{matrix} \rightarrow \\ 1, 2 \\ \rightarrow \end{matrix}$$

здесь и далее символ $\begin{matrix} \rightarrow \\ 1, 2 \\ \rightarrow \end{matrix}$ обозначает, что остальные формулы получаются из приведенных путем замены индексов 1 на 2, букв x на y и обратно.

ζ — отношение толщины пластического слоя к толщине оболочки.

1. Соотношения между усилиями и моментами и деформациями срединной поверхности

Потеря устойчивости оболочек и пластин за пределом упругости сопровождается образованием по толщине трех зон — упругой, упруго-пластической и зоны чисто пластических деформаций. В случае неоднородного напряженного состояния, кроме зон по толщине, образуются аналогичные зоны по длине и в окружном направлении. В области нагружения и разгрузки уравнения будут различными, вследствие различия для каждого из них выражений вариаций усилий и моментов.

Большинство авторов при рассмотрении вопросов, связанных с изучением устойчивости оболочек и пластин, ограничивается лишь случаем однородного напряженного состояния.

Поэтому до сих пор из всех типов оболочек наиболее детально изученной является круговая цилиндрическая оболочка под действием нагрузок простейшего вида. Исследование устойчивости пластин под действием неравномерных нагрузок за пределом упругости в общем случае упирается в большие трудности чисто вычислительного характера, и получение обозримых результатов затруднительно, так как параметры λ и ω оказываются зависящими от координат точек тела или от начальной нагрузки. В случае развитых пластических и упруго-пластических деформаций, выражения усилий и моментов через $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_3$ оказываются сложными, и упрощение их весьма затруднительно. В зоне, где пластическая деформация до потери устойчивости оболочки остается пластической и после потери устойчивости, т. е. область разгрузки отсутствует, эти выражения имеют вид [1]:

$$\delta T_1 - \frac{1}{2} \delta T_2 = 2Eh [(1 - \omega) \varepsilon_1 - (\lambda - \omega) \bar{S}_x \varepsilon], \quad \overrightarrow{1, 2}$$

$$\delta S = 2Eh \left[\frac{2}{3} (1 - \omega) \varepsilon_3 - (\lambda - \omega) \bar{X}_y \varepsilon \right], \quad (1.1)$$

$$\delta M_1 - \frac{1}{2} \delta M_2 = \frac{3D}{4} [-(1 - \omega) z_1 + (\lambda - \omega) \bar{S}_x z], \quad \overrightarrow{1, 2}$$

$$\delta H = \frac{3D}{4} \left[-\frac{2}{3} (1 - \omega) z_3 + (\lambda - \omega) \bar{X}_y z \right].$$

В зоне упруго-пластических деформаций выражения для вариаций сил и моментов [1]:

$$\delta T_1 - \frac{1}{2} \delta T_2 = \frac{Eh}{2} [2(2 - \omega + \omega \bar{z}_0) \varepsilon_1 + \omega(1 - \bar{z}_0^2) z_1 + (\lambda - \omega) \bar{S}_x (1 - \bar{z}_0^2) z], \quad \overrightarrow{1, 2}$$

$$\delta S = \frac{Eh}{6} [4(2 - \omega + \omega \bar{z}_0) \varepsilon_3 + 2\omega(1 - \bar{z}_0^2) z_3 + 3(\lambda - \omega) \bar{X}_y (1 - \bar{z}_0^2) z],$$

$$\delta M_1 - \frac{1}{2} \delta M_2 = \frac{3D}{16} \left[-2(2 - \omega + \omega \bar{z}_0^3) z_1 + (\lambda - \omega) (1 - \bar{z}_0^2) (2 + \bar{z}_0) \bar{S}_x z - \frac{3\omega}{h} (1 - \bar{z}_0^2) \varepsilon_1 \right], \quad \overrightarrow{1, 2}$$

$$\delta H = \frac{D}{16} \left[-4(2 - \omega + \omega \bar{z}_0^3) z_3 + 3(\lambda - \omega) (1 - \bar{z}_0^2) (2 + \bar{z}_0) \bar{X}_y z - \frac{6\omega}{h} (1 - \bar{z}_0^2) \varepsilon_3 \right], \quad (1.2)$$

где

$$\bar{z}_0 = (1 - 2\zeta). \quad (1.3)$$

Выражения (1.1) и (1.2) упрощаются, если до потери устойчивости пластическая деформация мала сравнительно с упругой. Пренебрегая в этих выражениях ω по сравнению с единицей и пользуясь (1.3), А. А. Ильюшин приходит к следующим соотношениям:

а) для области упруго-пластических деформаций:

$$\delta T_1 - \frac{1}{2} \delta T_2 = 2Eh [\varepsilon_1 + \lambda h \bar{S}_x \zeta^2], \quad \overrightarrow{1, 2}$$

$$\delta S = 2Eh \left[\frac{2}{3} \varepsilon_3 + \lambda h \bar{X}_y \zeta^2 \right], \quad (1.4)$$

$$\delta M_1 - \frac{1}{2} \delta M_2 = \frac{3D}{4} [-z_1 + \lambda \bar{S}_x \zeta^2 (3 - 2\zeta) z], \quad \overrightarrow{1, 2}$$

$$\delta H = \frac{3D}{4} \left[-\frac{2}{3} z_3 + \lambda \bar{X}_y \zeta^2 (3 - 2\zeta) z \right].$$

где

$$\zeta = \frac{1 - \sqrt{(1 - \lambda)(1 + \varphi)}}{\lambda}, \quad \varphi = \frac{\lambda}{1 - \lambda} \cdot \frac{\bar{S}_x \delta T_1 + \bar{S}_y \delta T_2 + 3 \bar{X}_y \delta S}{2Eh z}; \quad (1.5)$$

б) для области чисто пластических деформаций:

$$\delta T_1 - \frac{1}{2} \delta T_2 = 2Eh [\varepsilon_1 - \lambda \bar{S}_x \varepsilon], \quad \overrightarrow{1, 2}$$

$$\delta S = 2Eh \left[\frac{2}{3} \varepsilon_3 - \lambda \bar{X}_y \varepsilon \right], \quad (1.6)$$

$$\delta M_1 - \frac{1}{2} \delta M_2 = \frac{3D}{4} [-z_1 + \lambda \bar{S}_x z]. \quad \overrightarrow{1, 2}$$

Соотношения (1.1) или (1.6) в случае однородного напряженного состояния не сложнее соответствующих соотношений для упругой области, так как λ и ω — постоянные. Выражения (1.2) или (1.4) являются нелинейными. Значительное упрощение их происходит, когда ζ является заранее известной функцией или когда принимается (например, для плоских пластин) гипотеза $\delta T_1 = \delta T_2 = \delta S = 0$. Если при этом λ и ω постоянные, то решение задачи не вызывает никаких принципиальных затруднений. Если λ и ω являются функциями координат, то использование соотношений (1.1), (1.2) или (1.4), (1.6) вызывает большие трудности вычислительного характера.

Выясним возможность значительного упрощения соотношений (1.1) и (1.2) при первоначальном неоднородном напряженном состоянии. Ограничимся при этом для простоты рассуждений случаем чисто пластических деформаций (1.1).

Характеристику материала зададим в форме:

$$\sigma_i = \sigma' \varepsilon_i^\delta. \quad (1.7)$$

Здесь σ' — постоянная величина. Значение δ меняется в пределах $0 \leq \delta \leq 1$. Для заданного материала δ — постоянная. Выразив λ и ω через интенсивность напряжений и деформаций и пользуясь при этом (1.7), находим:

$$\frac{\lambda - \omega}{1 - \omega} = \text{const.},$$

т. е. это отношение не зависит от характера напряженного состояния. Рассмотрим изменение величин

$$\psi_0 = \frac{1}{1-\omega}, \quad \psi_1 = 1 - \omega$$

при переходе из фиксированной точки срединной поверхности оболочки к некоторой другой, бесконечно близкой к ней. При этом ограничимся рассмотрением двух возможных случаев, когда

$$1) \sigma_l = \frac{A}{r}; \quad 2) \sigma_l = Ar.$$

Первый случай имеет место при сжатии конической оболочки кругового сечения вдоль образующей, второй — при действии на коническую оболочку равномерного внешнего давления. Пользуясь (1.7) и выражением ω через интенсивность напряжений и деформаций, для отношений

$$\frac{1}{\psi_0} \frac{\partial \psi_0}{\partial r}, \quad \frac{1}{\psi_0} \frac{\partial^2 \psi_0}{\partial r^2}, \quad \frac{1}{\psi_1} \frac{\partial \psi_1}{\partial r}, \quad \frac{1}{\psi_1} \frac{\partial^2 \psi_1}{\partial r^2}$$

находим следующие выражения:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\psi_0} \frac{\partial \psi_0}{\partial r} &= \left(\frac{1}{\delta} - 1\right) \frac{1}{\sigma_l} \frac{\partial \sigma_l}{\partial r}, \\ \frac{1}{\psi_0} \frac{\partial^2 \psi_0}{\partial r^2} &= \left(\frac{1}{\delta} - 1\right) \left[\left(\frac{1}{\delta} - 2\right) \left(\frac{1}{\sigma_l} \frac{\partial \sigma_l}{\partial r}\right)^2 + \frac{1}{\sigma_l} \frac{\partial^2 \sigma_l}{\partial r^2} \right], \\ \frac{1}{\psi_1} \frac{\partial \psi_1}{\partial r} &= \left(1 - \frac{1}{\delta}\right) \cdot \frac{1}{\sigma_l} \frac{\partial \sigma_l}{\partial r}, \\ \frac{1}{\psi_1} \frac{\partial^2 \psi_1}{\partial r^2} &= \left(1 - \frac{1}{\delta}\right) \left[\frac{1}{\sigma_l} \frac{\partial^2 \sigma_l}{\partial r^2} - \frac{1}{\delta} \left(\frac{1}{\sigma_l} \frac{\partial \sigma_l}{\partial r}\right)^2 \right]. \end{aligned}$$

Если интенсивность напряжений

$$\sigma_l = \frac{A}{r},$$

то

$$\begin{aligned} \frac{1}{\psi_0} \frac{\partial \psi_0}{\partial r} &= \frac{\left(1 - \frac{1}{\delta}\right)}{r}, \quad \frac{1}{\psi_0} \frac{\partial^2 \psi_0}{\partial r^2} = \frac{\left(\frac{1}{\delta^2} - \frac{1}{\delta}\right)}{r^2}, \\ \frac{1}{\psi_1} \frac{\partial \psi_1}{\partial r} &= \frac{\left(\frac{1}{\delta} - 1\right)}{r}, \quad \frac{1}{\psi_1} \frac{\partial^2 \psi_1}{\partial r^2} = \frac{\frac{1}{\delta^2} - \frac{3}{\delta} + 2}{r^2}. \end{aligned} \quad (1.8)$$

Если $\sigma_l = Ar$, то

$$\begin{aligned} \frac{1}{\psi_0} \frac{\partial \psi_0}{\partial r} &= \frac{\left(\frac{1}{\delta} - 1\right)}{r}, \quad \frac{1}{\psi_0} \frac{\partial^2 \psi_0}{\partial r^2} = \frac{\left(\frac{1}{\delta^2} - \frac{3}{\delta} + 2\right)}{r^2}, \\ \frac{1}{\psi_1} \frac{\partial \psi_1}{\partial r} &= \frac{\left(1 - \frac{1}{\delta}\right)}{r}, \quad \frac{1}{\psi_1} \frac{\partial^2 \psi_1}{\partial r^2} = \frac{\left(\frac{1}{\delta^2} - \frac{1}{\delta}\right)}{r^2}. \end{aligned} \quad (1.9)$$

При значениях δ , не близких к нулю, числители в правых частях (1.8) и (1.9) являются величинами порядка 1. Если напряженное состояние оболочки является состоянием типа краевого эффекта, то при составлении дифференциальных уравнений нейтрального равно-

весья можно пренебречь всеми низшими производными по сравнению со старшими, а переменные коэффициенты считать постоянными, поскольку они мало меняются в пределах одной волны [8]. При этом в уравнения вносится погрешность порядка $\sqrt{\frac{h}{R}}$ по сравнению с единицей. Значит, если первоначальное напряженное состояние оболочки не является однородным и при составлении уравнений равновесия можно не учитывать изменение коэффициентов первой и второй квадратичных форм, то в исходных соотношениях (1.1) λ и ω следует считать постоянными.

Аналогично обстоит дело, если при потере устойчивости имеет место разгрузка.

Эти рассуждения позволяют выяснить также область применимости соотношений (1.4) и (1.6). Так как эти соотношения получены путем пренебрежения ω по сравнению с λ , то уравнения равновесия не могут учитывать изменение ω в зависимости от координат и, следовательно, будут содержать в себе погрешность от пренебрежения функцией по сравнению с ее первой производной. Поэтому в соотношениях (1.4), (1.6) параметр λ следует всегда считать постоянным.

2. Дифференциальные уравнения равновесия конической оболочки

Условия равновесия между напряжениями, действующими в срединной поверхности, могут быть приближенно выражены с помощью уравнений работы [2]:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial r} (\delta T_1 \cdot r) + \frac{\partial \delta S}{\partial \varphi_1} - \delta T_2 &= 0, \\ \frac{\partial}{\partial r} (\delta S \cdot r) + \frac{\partial \delta T_2}{\partial \varphi_1} + \delta S &= 0, \end{aligned}$$

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (\delta N_1 \cdot r) + \frac{1}{r} \frac{\partial \delta N_2}{\partial \varphi_1} + \frac{\text{ctg } \gamma}{r} \delta T_2 + (\alpha_1 T_{10} + \alpha_2 T_{20} + 2\tau S_{10}) = 0,$$

$$\frac{\partial \delta M_2}{\partial \varphi_1} - \frac{\partial}{\partial r} (\delta H \cdot r) - \delta H - \delta N_2 \cdot r = 0, \quad (2.1)$$

$$\frac{\partial}{\partial r} (\delta M_1 \cdot r) + \frac{\partial \delta H}{\partial \varphi_1} - \delta M_2 - \delta N_1 \cdot r = 0.$$

Деформации и искривления выражаются формулами:

$$\epsilon_1 = \frac{\partial u}{\partial r}, \quad \epsilon_2 = \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial \varphi_1} + \frac{u}{r} - \frac{w}{r} \text{ctg } \gamma, \quad 2\epsilon_3 = \frac{\partial v}{\partial r} - \frac{v}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial \varphi_1}, \quad (2.2)$$

$$\alpha_1 = \frac{\partial^2 w}{\partial r^2}, \quad \alpha_2 = \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \varphi_1^2}, \quad \alpha_3 = \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial \varphi_1} \right). \quad (2.3)$$

Первые два уравнения (2.1) удовлетворяются при помощи функции напряжений:

$$\begin{aligned} \frac{\delta T_1}{2Eh} &= \frac{1}{r} \frac{\partial f}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 f}{\partial \varphi_1^2}, \quad \frac{\delta T_2}{2Eh} = \frac{\partial^2 f}{\partial r^2}, \\ \frac{\delta S}{2Eh} &= -\frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial f}{\partial \varphi_1} \right). \end{aligned} \quad (2.4)$$

Исключая компоненты перемещения u, v из (2.2), приходим к соотношению между деформациями и прогибом w :

$$r \frac{\partial^2}{\partial r^2} (r \varepsilon_2) - r \frac{\partial \varepsilon_1}{\partial r} + \frac{\partial^2 \varepsilon_1}{\partial \varphi_1^2} - \frac{\partial^2 (r \cdot 2\varepsilon_3)}{\partial r \partial \varphi_1} + r \frac{\partial^2}{\partial r^2} (w \operatorname{ctg} \gamma) = 0. \quad (2.5)$$

Последние три уравнения системы (2.1) сводятся к одному:

$$\frac{\partial^2 \delta M_1}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial^2 \delta H}{\partial r \partial \varphi_1} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \delta M_2}{\partial \varphi_1^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (2\delta M_1 - \delta M_2) + \frac{2}{r^2} \frac{\partial \delta H}{\partial \varphi_1} + \frac{\operatorname{ctg} \gamma}{D \cdot r} T_2 + \frac{1}{D} (\alpha_1 T_{10} + \alpha_2 T_{20} + 2\alpha_3 S_{10}) = 0. \quad (2.6)$$

Ниже будет выписана система уравнений нейтрального равновесия применительно к случаям, когда

$$1) \sigma_i = \frac{A}{r}; \quad 2) \sigma_i = Ar.$$

В обоих случаях

$$\bar{X}_y = 0, \quad \bar{S}_x = \operatorname{const}, \quad \bar{S}_y = \operatorname{const}, \quad \bar{X}_x = \operatorname{const}, \quad \bar{Y}_y = \operatorname{const}. \quad (2.7)$$

Подставляя $\varepsilon_1, \varepsilon_2, 2\varepsilon_3, \delta M_1, \delta M_2, \delta H$ из соотношений (1.1) в (2.5) и (2.6) и пользуясь при этом (2.3), (2.4) и (2.7), приходим к уравнениям:

$$r \left\{ \nabla^2 \nabla^2 f + \bar{S}_y \left(\Phi''_{rr} + \frac{2}{r} \Phi'_r \right) - \frac{\bar{S}_x}{r} \Phi'_r + \frac{\bar{S}_x}{r^2} \Phi''_{\varphi_1 \varphi_1} \right\} + \frac{1}{\psi_0} \frac{\partial \psi_0}{\partial r} \left[2 \frac{\partial^2 f}{\partial r^2} + \frac{3}{2r} \frac{\partial^2 f}{\partial r^2} - \frac{1}{r^2} \frac{\partial f}{\partial r} + \frac{2}{r^2} \frac{\partial^2 f}{\partial r \partial \varphi_1^2} - \frac{3}{r^2} \frac{\partial^2 f}{\partial \varphi_1^2} + \frac{2\bar{S}_y}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r\Phi) - \frac{\bar{S}_x}{r} \Phi \right] + \frac{1}{\psi_0} \frac{\partial^2 \psi_0}{\partial r^2} \left[\frac{\partial^2 f}{\partial r^2} - \frac{1}{2r} \frac{\partial f}{\partial r} - \frac{1}{2r^2} \frac{\partial^2 f}{\partial \varphi_1^2} + \bar{S}_y \Phi \right] + \frac{\operatorname{ctg} \gamma}{\psi_0} \frac{\partial^2 w}{\partial r^2} = 0,$$

$$\nabla^2 \nabla^2 w - \frac{3}{4} \frac{(\lambda - \omega)}{(1 - \omega)} \left[\bar{X}_x \frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \frac{\bar{Y}_y}{r^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \varphi_1^2} + \frac{(2\bar{X}_x - \bar{Y}_y)}{r} \frac{\partial w}{\partial r} \right] + \frac{1}{\psi_1} \frac{\partial \psi_1}{\partial r} \left[2 \frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \frac{5}{2r} \frac{\partial^2 w}{\partial r^2} - \frac{1}{r^2} \frac{\partial w}{\partial r} + \frac{2}{r^2} \frac{\partial^2 w}{\partial r \partial \varphi_1^2} - \frac{3}{r^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \varphi_1^2} - \frac{3}{4} \frac{(\lambda - \omega)}{(1 - \omega)} \left(2\bar{X}_x \frac{\partial w}{\partial r} + \frac{2\bar{X}_x - \bar{Y}_y}{r} w \right) \right] + \frac{1}{\psi_1} \frac{\partial^2 \psi_1}{\partial r^2} \left[\frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \frac{1}{2r} \frac{\partial w}{\partial r} + \frac{1}{2r^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \varphi_1^2} - \frac{3}{4} \frac{(\lambda - \omega)}{(1 - \omega)} \bar{X}_x w \right] - \frac{2Eh \operatorname{ctg} \gamma}{Dr \psi_1} \frac{\partial^2 f}{\partial r^2} - \frac{1}{D \psi_1} (T_{10} \alpha_1 + T_{20} \alpha_2) = 0, \quad (2.8)$$

где обозначено:

$$\Phi = \frac{(\lambda - \omega)}{(1 - \omega)} \left\{ \bar{S}_x \left(\frac{1}{r} \frac{\partial f}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 f}{\partial \varphi_1^2} \right) + \bar{S}_y \frac{\partial^2 f}{\partial r^2} \right\}. \quad (2.9)$$

Отношения $\frac{1}{\psi_0} \frac{\partial \psi_0}{\partial r}, \dots, \frac{1}{\psi_1} \frac{\partial \psi_1}{\partial r}, \dots$ определяются равенствами (1.8) и (1.9).

3. Продольное сжатие конической оболочки

В этом случае

$$T_{10} = -\frac{T_0 r_0}{r}, \quad \psi_1 = \frac{\sigma' \frac{1}{\delta}}{E} \left(\frac{T_0 r_0}{r} \right)^{1 - \frac{1}{\delta}}, \quad \psi_0 = \frac{1}{\psi_1}, \quad \bar{S}_x = \bar{X}_x = -1, \quad \bar{Y}_y = 0, \quad \bar{S}_y = \frac{1}{2}, \quad T_{20} = 0, \quad (3.1)$$

$$\Phi = \frac{(\lambda - \omega)}{(1 - \lambda)} \left\{ \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial r^2} - \frac{1}{r} \frac{\partial f}{\partial r} - \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 f}{\partial \varphi_1^2} \right\}, \quad z = -\frac{\partial^2 W}{\partial r^2}$$

и уравнения (2.8), учитывая (1.8), после упрощений с помощью подстановок

$$z = \ln \frac{r}{r_0}, \quad f = e^z f_1, \quad w = e^z w_1 \quad (3.2)$$

приводятся к виду:

$$\nabla_1^2 \nabla_1^2 f_1 + \frac{(\lambda - \omega)}{(1 - \lambda)} \left(\frac{1}{4} \frac{\partial^4 f_1}{\partial z^4} - \frac{\partial^4 f_1}{\partial z^2 \partial \varphi_1^2} + \frac{\partial^4 f_1}{\partial \varphi_1^4} \right) - \frac{5}{2} \frac{(\lambda - \omega)^2}{(1 - \lambda)^2} \frac{\partial^3 f_1}{\partial z^3} - 3 \frac{(\lambda - \omega)}{(1 - \lambda)} \frac{\partial^3 f_1}{\partial z \partial \varphi_1^2} + a_1 \frac{\partial^2 f_1}{\partial \varphi_1^2} + a_2 \frac{\partial^2 f_1}{\partial z^2} + a_3 \frac{\partial f_1}{\partial z} + a_4 f_1 + a_1 r_0 \operatorname{ctg} \gamma e^{\frac{1}{2}z} \left(\frac{\partial^2 w_1}{\partial z^2} + \frac{\partial w_1}{\partial z} \right) = 0$$

$$\nabla_1^2 \nabla_1^2 w_1 - \frac{3}{4} \frac{(\lambda - \omega)}{(1 - \omega)} \frac{\partial^4 w_1}{\partial z^4} + \frac{2(\lambda - \omega)}{(1 - \lambda)} \frac{\partial^3 w_1}{\partial z \partial \varphi_1^2} + \left[\frac{2(\lambda - \omega)}{(1 - \lambda)} - \frac{3}{2} \frac{(\lambda - \omega)^2}{(1 - \lambda)(1 - \omega)} \right] \frac{\partial^2 w_1}{\partial z^2} + b_1 \frac{\partial^2 w_1}{\partial \varphi_1^2} + b_2 \frac{\partial^2 w_1}{\partial z^2} + b_3 \frac{\partial w_1}{\partial z} + b_4 w_1 -$$

$$- \frac{2Ehr_0 \operatorname{ctg} \gamma}{D \alpha_1} e^{(2 - \frac{1}{\delta})z} \left(\frac{\partial^2 f_1}{\partial z^2} + \frac{\partial f_1}{\partial z} \right) + \frac{T_0 r_0^2}{D \alpha_1} e^{(2 - \frac{1}{\delta})z} \left(\frac{\partial^2 w_1}{\partial z^2} + \frac{\partial w_1}{\partial z} \right) = 0, \quad (3.3)$$

где

$$\alpha_1 = \frac{\sigma' \frac{1}{\delta}}{E} T_0^{(1 - \frac{1}{\delta})}, \quad \nabla_1^2 = \frac{\partial^2}{\partial z^2} + \frac{\partial^2}{\partial \varphi_1^2}.$$

$a_1, a_2, \dots, b_1, \dots$ — величины порядка единицы (если λ и ω не очень близки к единице), выражения которых мы не выписываем, так как, не выходя за пределы точности исходных соотношений пологих оболочек, подчеркнутыми членами в уравнениях (3.3) можно пренебречь как малыми по сравнению с сохранными.

В случае симметричной формы потери устойчивости полагаем в (3.3) производные по φ_1 равными нулю. Точное решение полученных таким образом уравнений представляется довольно сложным, так как они имеют переменные коэффициенты. Естественно, что в данном случае можно было бы воспользоваться одним из приближенных методов, например, методом Бубнова — Галеркина или методом Тимошенко — Ритца, применение которых не вызывает каких-либо принципиальных затруднений. Значительно более простое решение может быть получено, если подойти к задаче с точки зрения теории локальной устойчивости оболочек, сущность которой состоит в следующем. При потере устойчивости на поверхности оболочки образуется большое число волн. Эти волны могут идти или по двум взаимно перпендикулярным направлениям, или в каком-либо одном преимущественном направлении [3], [8]. При этом, вследствие наличия значительного числа волн на поверхности, функции напряжений и прогиба изменяются как быстро возрастающие функции, причем отношение двух последовательных производных оказывается величиной порядка $\sqrt{\frac{R}{h}}$. Если также геометрические характеристики (коэффициенты первой и второй квадратичных форм) меняются очень

плавно, то в исходных уравнениях можно пренебречь всеми низшими производными по сравнению со старшими, а переменные коэффициенты считать постоянными, так как они мало меняются в пределах одной волны. В общем случае степень точности в определении критической нагрузки соответствует точности исходных уравнений.

Выполняя в (3.3) указанные упрощения, приходим к уравнениям:

$$\frac{\left(1 - \frac{3\lambda}{4} - \frac{\omega}{4}\right)}{(1-\lambda)} \frac{\partial^4 f_1}{\partial z^4} + r_0 \operatorname{ctg} \gamma \alpha_1 e^{\frac{1}{8}z_0} \frac{\partial^2 w_1}{\partial z^2} = 0, \quad (3.4)$$

$$\frac{\left(1 - \frac{3\lambda}{4} - \frac{\omega}{4}\right)}{(1-\lambda)} \frac{\partial^4 w_1}{\partial z^4} - \frac{2Eh r_0 \operatorname{ctg} \gamma}{D z_1} e^{\left(2 - \frac{1}{8}\right)z_0} \frac{\partial^2 f_1}{\partial z^2} + \frac{T_0 r_0^2}{D \alpha_1} e^{\left(2 - \frac{1}{8}\right)z_0} \frac{\partial^2 w_1}{\partial z^2} = 0,$$

где z_0 — неопределенное значение аргумента z , указывающее область пластических деформаций.

Из (3.4) легко находим:

$$T_0 = \frac{3}{4} \frac{Eh}{r_0 \operatorname{tg} \gamma} \alpha_1 \sqrt{\frac{(1-\lambda)}{(1-\omega)}} e^{\left(\frac{1}{8} - 1\right)z_0}. \quad (3.5)$$

Так как $\delta < 1$, то очевидно, что минимум T_0 достигается при $z_0 = 0$. Полагая в (3.5) $z_0 = 0$, а также учитывая, что

$$\alpha_1 = 1 - \omega,$$

находим:

$$T_0 = \frac{4}{3} \frac{Eh}{r_0 \operatorname{tg} \gamma} \sqrt{(1-\lambda)(1-\omega)} \quad (3.6)$$

или

$$i = \frac{T_0}{E \sqrt{(1-\lambda)(1-\omega)}}, \quad (3.7)$$

где $i = \frac{4h}{3r_0 \operatorname{tg} \gamma}$ — критическая гибкость. (3.8)

Формула (3.5) получена в предположении, что один или несколько волновых поясов, примыкающих к $z_0 = 0$, полностью перешли в пластическое состояние. Если оболочка целиком переходит в пластическую область, то напряжение T_1 на нижнем основании r_1 связано с напряжением T_0 соотношением

$$T_0 = \frac{T_1 r_1}{r_0}. \quad (3.9)$$

Полагая в (3.5) $z_0 = \ln \frac{r_1}{r_0}$, а также пользуясь (3.9), находим T_1 :

$$T_1 = \frac{4}{3} \frac{Eh}{r_1 \operatorname{tg} \gamma} \sqrt{\frac{1-\lambda}{1-\omega}} \left(\frac{1}{E} \cdot T_1^{1-\frac{1}{8}} \right) = \frac{4}{3} \frac{Eh}{r_1 \operatorname{tg} \gamma} \sqrt{(1-\lambda)(1-\omega)}. \quad (3.10)$$

При $\gamma = 0$ (3.6) и (3.10) переходят в формулы для цилиндрической оболочки [7].

В случае несимметричной формы потери устойчивости, пренебре-

гая в уравнениях (3.3) низшими производными и приравнявая переменные коэффициенты их значению при $z_0 = 0$, имеем:

$$\nabla_1^2 \nabla_1^2 f_1 + \frac{(\lambda - \omega)}{(1-\lambda)} \left(\frac{1}{4} \frac{\partial^4 f_1}{\partial z^4} - \frac{\partial^4 f_1}{\partial z^2 \partial \varphi_1^2} + \frac{\partial^4 f_1}{\partial \varphi_1^4} \right) + r_0 \operatorname{ctg} \gamma (1 - \omega) \frac{\partial^2 w_1}{\partial z^2} = 0, \\ \nabla_1^2 \nabla_1^2 w_1 - \frac{3}{4} \frac{(\lambda - \omega)}{(1-\omega)} \frac{\partial^4 w_1}{\partial z^4} - \frac{2Eh r_0 \operatorname{ctg} \gamma}{D(1-\omega)} \frac{\partial^2 f_1}{\partial z^2} + \frac{T_0 r_0^2}{D(1-\omega)} \frac{\partial^2 w_1}{\partial z^2} = 0. \quad (3.11)$$

Эти уравнения совпадают с уравнениями для круговой цилиндрической оболочки радиуса $R = r_0 \operatorname{tg} \gamma$. Задаваясь формой волнообразования

$$f_1 = A \sin m_1 z \cos n_1 \varphi_1,$$

$$w_1 = B \sin m z \cos n_1 \varphi_1,$$

легко находим

$$i = \frac{T_0 f(\lambda, \omega)}{E \sqrt{(1-\lambda)(1-\omega)}}, \quad (3.12)$$

где i определяется по формуле (3.8),

$$f(\lambda, \omega) = \frac{\left(1 + \frac{1 - \frac{3\lambda}{2} + \frac{\omega}{2}}{\sqrt{(1-\omega)\left(1 - \frac{3\lambda}{4} - \frac{\omega}{4}\right)}} \right)^{1/2}}{\left(1 + \sqrt{(1-\omega)\left(1 - \frac{3\lambda}{4} - \frac{\omega}{4}\right)} \right)^{1/2}}.$$

Нагрузка T_0 , определяемая формулой (3.12), превышает нагрузку (3.6), полученную из условия симметричной деформации. Поэтому цилиндрические и конические оболочки кругового сечения при продольном сжатии предпочитают выпучиваться по симметричной форме.

Аналогично тому, как это было только что проделано, можно рассмотреть устойчивость и других оболочек нулевой гауссовой кривизны при осевом сжатии. При этом в уравнениях надо положить главный радиус кривизны равным его максимальному значению.

В случае цилиндрической оболочки эллиптического сечения с малым эксцентриситетом этот радиус равен

$$R = \frac{a^2}{b},$$

где a — большая полуось эллипса, b — малая полуось,

$$i = \frac{T_0 f(\lambda, \omega)}{E \sqrt{(1-\lambda)(1-\omega)}}, \quad i = \frac{4}{3} \frac{hb}{a^2}. \quad (3.13)$$

Для области упругих деформаций

$$T_0 = \frac{4}{3} \frac{Ehb}{a^2}. \quad (3.14)$$

При значениях эксцентриситета $k = \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a} < 0,6$ формула (3.14)

дает очень хорошее совпадение с аналогичной формулой, полученной Х. М. Муштарни [2] другим более точным методом.

Для конической оболочки эллиптического сечения

$$i = \frac{T_0 f(\lambda, \omega)}{E \sqrt{(1-\lambda)(1-\omega)}}, \quad i = \frac{4}{3} \frac{hb \cos \gamma}{a^2}, \quad (3.15)$$

где γ — угол между высотой конуса и образующей, проходящей через вершину малой полуоси эллипса, T_0 здесь относится к сече-

нию оболочки, где определяются параметры a и b . Эксцентриситет попрежнему считается малым.

Для области упругих деформаций

$$T_0 = \frac{4}{3} \frac{Ehb \cos \gamma}{a^2} \quad (3.16)$$

На основе проведенных решений для цилиндрических и конических оболочек можно, не обращаясь непосредственно к решению дифференциальных уравнений, указать формулу критического напряжения и для сферической оболочки при действии на нее равномерного внешнего давления. Теоретические решения, приведенные Л. С. Лейбензоном, Цолли для сферической оболочки, показывают, что на поверхности оболочки образуется большое число волн; длина которых порядка \sqrt{Rh} . Если при этом выделить в сфере узкий волновой пояс (две-три волны) и сравнить с волновым поясом, выделенным из цилиндрической оболочки кругового сечения при действии осевой сжимающей силы, то эти два пояса находятся, как это нетрудно видеть, в одинаковых условиях. Поэтому критические напряжения для сферы и цилиндра одинаковых радиусов оказываются совпадающими. Это обстоятельство было впервые отмечено И. Я. Штаерманом [5] и им же было дано только что приведенное геометрически наглядное объяснение этому совпадению.

Аналогично можно поступить и при исследовании устойчивости сферической оболочки за пределом упругости. При этом мы также приходим к выводу, что критические напряжения для сферы и цилиндра одинаковых радиусов совпадают. Поэтому

$$i = \frac{T_0}{E\sqrt{(1-\lambda)(1-\omega)}}, \quad i = \frac{4}{3} \frac{h}{R} \quad (3.17)$$

где R — радиус сферы. Вычисления, которые здесь не приводятся, показали, что формула (3.17) является точной.

Выше мы исходили из упрощенной постановки задачи, не принимая во внимание разгрузку, которая имеет место в действительности. Такой подход к решению дает значение критической нагрузки с некоторым запасом устойчивости. Однако в данном случае, пользуясь понятием локальной устойчивости, можно рассмотреть также и упруго-пластическую задачу. При этом уравнения равновесия для оболочек нулевой гауссовой кривизны после упрощений аналогичных тем, которые были проведены для случая чисто пластических деформаций, могут быть сведены к уравнениям круговой и цилиндрической оболочки с некоторым фиктивным радиусом. Поэтому выводы, сделанные в работе [7] из рассмотрения устойчивости круговой цилиндрической оболочки под действием продольного сжатия с учетом разгрузки, могут быть легко распространены и на другие рассмотренные нами типы оболочек.

Для цилиндрической оболочки кругового сечения [7]

$$i = \frac{T_0}{E\sqrt{1-\frac{\lambda}{2}}}, \quad i = \frac{4}{3} \frac{h}{R} \quad (3.18)$$

Для цилиндрической оболочки эллиптического сечения с малым эксцентриситетом

$$i = \frac{4}{3} \frac{hb}{a^2}$$

Для конической оболочки кругового сечения

$$i = \frac{4}{3} \frac{h}{r_0 \lg \gamma}$$

Для конической оболочки эллиптического сечения

$$i = \frac{4}{3} \frac{hb \cos \gamma}{a^2}$$

где эксцентриситет считается небольшим.

Для сферической оболочки критическая гибкость определяется по формулам (3.18), выведенным в предположении малости пластических деформаций сравнительно с упругими.

4. Устойчивость конической оболочки кругового сечения с толщиной, меняющейся по линейному закону при равномерном внешнем давлении

Исследование устойчивости конической оболочки с толщиной, меняющейся по линейному закону ($h = h_0 r$), при действии равномерного внешнего давления, представляет интерес с точки зрения возможности точного интегрирования дифференциальных уравнений и, кроме того, точное решение этой задачи позволяет судить об устойчивости оболочки постоянной толщины. При решении будем исходить из соотношений (1.1), предполагая, таким образом, что пластическая до потери устойчивости деформация остается также пластической и после выпучивания. Разгрузка, имеющая место в действительности, как было показано в работе [7], не оказывает серьезного влияния на величину критического напряжения. Поэтому решение чисто пластической задачи может быть принято в качестве первого приближения.

При решении будем пользоваться приближенными уравнениями (2.1), которые оказываются вполне удовлетворительными, если ожидаемое число волн n , образующихся по окружности при потере устойчивости, по крайней мере, равно трем или больше. К тому же будем рассматривать недлинную оболочку, для которой неравенство $n^2 \gg 1$ выполняется даже для средней толщины.

В случае оболочки переменной толщины

$$K = K_0 r, \quad D = D_0 r^3, \\ K_0 = \frac{8Eh_0}{3}, \quad D_0 = \frac{8}{9} E h_0^3 \quad (4.1)$$

Из уравнений первоначального безмоментного состояния имеем:

$$T_{10} = -\frac{p_0 r \lg \gamma}{2}, \quad T_{20} = -p_0 r \lg \gamma, \\ \bar{X}_x = -\frac{V\sqrt{3}}{3}, \quad \bar{Y} = -\frac{2V\sqrt{3}}{3}, \quad \bar{X}_y = 0, \quad \bar{S}_x = 0, \quad \bar{S}_y = -\frac{V\sqrt{3}}{2} \quad (4.2)$$

где p_0 — внешнее давление.

Для упрощения системы уравнений (2.1) можно, как и ранее, ввести функцию напряжений:

$$\frac{\delta T_1}{K_0(1-\omega)} = \frac{1}{r} \frac{\partial f}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 f}{\partial \varphi_1^2}, \quad \frac{\delta T_2}{K_0(1-\omega)} = \frac{\partial^2 f}{\partial r^2}, \\ \frac{\delta S}{K_0(1-\omega)} = -\frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial f}{\partial \varphi_1} \right).$$

Выражая деформации $\epsilon_1, \epsilon_2, 2\epsilon_3$ через функцию напряжений по формулам (1.1) и пользуясь при этом (4.1), (4.2), находим:

$$\begin{aligned}\varepsilon_1 &= \frac{1}{r^2} \frac{\partial f}{\partial r} + \frac{1}{r^3} \frac{\partial^2 f}{\partial \varphi_1^2} - \frac{1}{2r} \frac{\partial^2 f}{\partial r^2}, \\ \varepsilon_2 &= \frac{1}{r} \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} - \frac{1}{2r^2} \frac{\partial f}{\partial r} - \frac{1}{2r^3} \frac{\partial^2 f}{\partial \varphi^2} + \frac{3}{4} \frac{(\lambda - \omega)}{(1 - \lambda)} \frac{1}{r} \frac{\partial^2 f}{\partial r^2}, \\ 2\varepsilon_3 &= \frac{3}{r^3} \frac{\partial f}{\partial f_1} - \frac{3}{r^2} \frac{\partial^2 f}{\partial r \partial f_1}.\end{aligned}$$

Пользуясь (4.1) и (4.2), находим выражения для вариаций изгибающих и скручивающих моментов:

$$\begin{aligned}\frac{\delta M_1}{D_0(1 - \omega)} &= r^3 \left\{ -\left(x_1 + \frac{1}{2}x_2\right) + \frac{1}{2} \frac{(\lambda - \omega)}{(1 - \omega)} \left(x_2 + \frac{x_1}{2}\right) \right\}, \\ \frac{\delta M_2}{D_0(1 - \omega)} &= r^3 \left\{ -\left(x_2 + \frac{1}{2}x_1\right) + \frac{(\lambda - \omega)}{(1 - \omega)} \left(x_2 + \frac{1}{2}x_1\right) \right\}, \\ \frac{\delta H}{D_0(1 - \omega)} &= -\frac{r^2 x_3}{2}.\end{aligned}$$

Подставляя $\varepsilon_1 \dots \delta M_1 \dots$ в (2.5) и (2.6) и пользуясь при этом выражениями (2.3), приходим к уравнениям, которые после преобразования с помощью подстановок

$$z = \ln \frac{r}{r_0}, \quad f = e^{\omega z} f_1 \cos n_1 \varphi_1, \quad w = e^{-\frac{1}{2}z} w_1 \cos n_1 \varphi_1$$

можно привести к виду:

$$\begin{aligned}K_{1n} \frac{d^4 f_1}{dz^4} + K_{2n} \frac{d^2 f_1}{dz^2} + K_{3n} f_1 + \text{ctg} \gamma \left(\frac{d^2 w_1}{dz^2} - 2 \frac{dw_1}{dz} + \frac{3}{4} w_1 \right) &= 0, \\ K_{0n} \frac{d^4 w_1}{dz^4} + K_{2n} \frac{d^2 w_1}{dz^2} + K_{4n} w_1 - \frac{2Eh_0 \text{ctg} \gamma}{D_0} \left(\frac{d^2 f_1}{dz^2} + 2 \frac{df_1}{dz} + \frac{3}{4} f_1 \right) &= 0, \quad (4.3)\end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned}K_{0n} &= 1 - \frac{1}{4} \frac{(\lambda - \omega)}{(1 - \omega)}, \quad K_{1n} = 1 + \frac{3}{4} \frac{(\lambda - \omega)}{(1 - \lambda)}, \\ K_{2n} &= -2n_1^2 - 2 + \frac{p_0 \text{ctg} \gamma}{2D_0} + \frac{(\lambda - \omega)}{(1 - \omega)} n_1^2 + \frac{1}{8} \frac{(\lambda - \omega)}{(1 - \omega)}, \\ K_{3n} &= -3 - 2n_1^2 - \frac{15}{8} \frac{(\lambda - \omega)}{(1 - \lambda)}, \\ K_{4n} &= n_1^4 + 2,5n_1^2 - \frac{p_0 \text{ctg} \gamma}{D_0} \left(n_1^2 + \frac{1}{8} \right) + \frac{7}{16} - \frac{(\lambda - \omega)}{(1 - \omega)} n_1^4 - \\ &\quad - \frac{1}{4} \frac{(\lambda - \omega)}{(1 - \omega)} n_1^2 - \frac{1}{64} \frac{(\lambda - \omega)}{(1 - \omega)}, \\ K_{5n} &= n_1^4 - 1,5n_1^2 + \frac{9}{4} + \frac{27}{64} \frac{(\lambda - \omega)}{(1 - \lambda)}.\end{aligned}$$

Решение уравнений (4.3) ищем, задаваясь формой волнообразования:

$$w_1 = A_0 \sin m_1 z, \quad m_1 = \frac{m\pi}{t}; \quad (m = 1, 2, 3 \dots)$$

Определяя функцию f_1 из первого уравнения системы (4.3) и подставляя во второе уравнение w_1 и f_1 , приходим после пренебрежений второстепенными членами к характеристическому уравнению:

$$\begin{aligned}\left\{ \left(1 - \frac{\lambda}{4} - \frac{3}{4} \omega\right) m_1^4 + (2 - \omega - \lambda) m_1^2 n_1^2 + (1 - \lambda) n_1^4 \right\} - \\ - \frac{p_0 \text{ctg} \gamma}{D_0} - \left(\frac{m_1^2}{2} + n_1^2 \right) + \\ + \frac{2Eh_0 \text{ctg}^2 \gamma (1 - \lambda) (1 - \omega)}{D_0} \frac{m_1^4 + 2,5m_1^2 + \frac{9}{16}}{\left(1 - \frac{\lambda}{4} - \frac{3}{4} \omega\right) m_1^4 + 2(1 - \lambda) m_1^2 n_1^2 + (1 - \lambda) n_1^4} = 0.\end{aligned}$$

Откуда

$$\begin{aligned}p_0 = \frac{K_1}{\left(\frac{m_1^2}{2} + n_1^2\right)} \left\{ \varepsilon_1^2 \left[\frac{\left(1 - \frac{\lambda}{4} - \frac{3}{4} \omega\right)}{(1 - \lambda)} m_1^4 + \frac{(2 - \omega - \lambda)}{(1 - \lambda)} m_1^2 n_1^2 + n_1^4 \right] + \right. \\ \left. + \frac{m_1^4 + 2,5m_1^2 + \frac{9}{16}}{\left(1 - \frac{\lambda}{4} - \frac{3}{4} \omega\right) m_1^4 + 2m_1^2 n_1^2 + n_1^4} \right\}, \quad (4.4)\end{aligned}$$

где

$$K_1 = 2Eh_0 \text{ctg}^2 \gamma (1 - \omega), \quad \varepsilon_1^2 = \frac{4}{9} \frac{h_0^2 (1 - \lambda)}{\text{ctg}^2 \gamma (1 - \omega)}. \quad (4.5)$$

В области упругих деформаций $\lambda = 0$, $\omega = 0$ и (4.4) будет:

$$p_0 = \frac{K_1}{\left(\frac{m_1^2}{2} + n_1^2\right)} \left\{ \varepsilon_1^2 (m_1^2 + n_1^2)^2 + \frac{m_1^4 + 2,5m_1^2 + \frac{9}{16}}{(m_1^2 + n_1^2)^2} \right\}, \quad (4.6)$$

Производная $\frac{\partial p_0}{\partial m_1^2} > 0$ и, следовательно,

$$m = 1, \quad m_1 = \frac{\pi}{t}, \quad t \leq 1. \quad (4.7)$$

На концах оболочки, таким образом, удовлетворяются два граничных условия: $w = 0$, $\delta T_2 = 0$. Граничные условия для δT_1 и δM_1 не удовлетворяются точно. Поэтому выясним, в какой мере неудовлетворение условий для δT_1 и δM_1 на краях может оказывать влияние на величину p_0 . Для этого сравним энергию деформации срединной поверхности оболочки с работой неуравновешенных контурных сил на перемещениях отдельных точек. Как известно, энергия деформации срединной поверхности равна

$$W = \frac{1}{2Eh_0} \{ \delta T_1^2 + \delta T_2^2 + \dots \} + \frac{D_0}{2} \{ x_1^2 + x_2^2 + \dots \}. \quad (4.8)$$

Работа неуравновешенных контурных сил определяется по формуле:

$$\begin{aligned}A = \oint (\delta T_1 \cdot u + \delta S \cdot v + \delta M_1 \cdot \gamma_1) \Big|_{r_0}^{r_1} r d\varphi_1, \quad (4.9) \\ \gamma_1 = \frac{dw}{dr}\end{aligned}$$

Из (4.3) следует:

$$f_1 \sim \frac{m_1^2}{n_1^4} \omega_1, \quad \delta T_1 \sim \frac{m_1^2}{n_1^2} \omega_1.$$

На граничных контурах

$$f_1 \sim \frac{m_1}{n_1^4} \omega_1, \quad \delta T_1 \sim \frac{m_1}{n_1^2} \omega_1, \quad \delta S \sim \frac{m_1^2}{n_1^3} \omega_1.$$

Перемещения u и v , как и для оболочки постоянной толщины, будут

$$u \sim \frac{m_1}{n_1^2} \omega_1, \quad v \sim \frac{\omega_1}{n_1}.$$

На граничных контурах

$$u \sim \frac{m_1}{n_1^2} \omega_1, \quad v \sim \frac{m_1}{n_1^3} \omega_1.$$

Следовательно,

$$\delta T_1 \cdot u + \delta S \cdot v \sim \frac{m_1^2}{n_1^4} \omega_1^2.$$

Из (4.8) следует, что энергия W_p растяжения срединной поверхности

$$W_p \sim \frac{m_1^4}{n_1^4} \omega_1^2.$$

Значит энергия деформации срединной поверхности в m_1^2 раз больше работы неуравновешенных контурных сил.

Работа неуравновешенного изгибающего момента δM_1 на граничных контурах

$$\delta M_1 \cdot \gamma_1 \sim m_1^2 \omega_1^2.$$

Энергия изгиба $W_{изг}$ срединной поверхности

$$W_{изг} \sim n_1^4 \omega_1^2, \quad W_{изг} \gg \delta M_1 \cdot \gamma_1.$$

Таким образом, наибольшая погрешность в определении критической нагрузки происходит от невыполнения граничного условия для δT_1 . При этом характеристическое уравнение (4.4), как только что было выяснено, вследствие неудовлетворения краевого условия для δT_1 содержит в себе погрешность единицей по сравнению с m_1^2 . Поэтому в (4.4) членами порядка $\frac{1}{m_1^2}$, $\frac{1}{m_1^4}$ будем пренебрегать по сравнению с единицей, так как удержание их в характеристическом уравнении не может уточнить решение. Максимальная погрешность при этом допускается на границе области изменения параметра t при $t=1$, когда оболочка становится длинной и для поддержания своей устойчивости нуждается в поперечных подкреплениях.

Выполняя в (4.4) указанные упрощения, приходим к уравнению:

$$p_0 = \frac{K_1}{\left(\frac{m_1^2}{2} + n_1^2\right)} \left\{ \varepsilon_1^2 \left[\frac{\left(1 - \frac{\lambda}{4} - \frac{3}{4} \omega\right)}{(1-\lambda)} m_1^4 + \frac{(2-\omega-\lambda)}{(1-\lambda)} m_1^2 n_1^2 + n_1^4 \right] + \frac{m_1^4}{\left(1 - \frac{\lambda}{4} - \frac{3}{4} \omega\right)} \right\} + \frac{m_1^4}{(1-\lambda) m_1^4 + 2m_1^2 n_1^2 + n_1^4}. \quad (4.10)$$

В случае купола с весьма малым отверстием

$$r_0 \rightarrow 0, \quad t = \ln \tau = \ln \left(1 + \frac{l}{r_0}\right) \rightarrow \infty, \quad m_1^2 \ll 1 \quad (4.11)$$

и выполнение граничных условий, как это следует из приведенных выше рассуждений, становится необязательным.

Перейдем теперь к определению критической нагрузки. Вводя обозначение

$$\delta = \frac{m_1^2 + n_1^2}{m_1}, \quad \lambda_1 = \frac{(\lambda - \omega)}{(1 - \lambda)}. \quad (4.12)$$

уравнение (4.10) приводим к виду:

$$p_0 = \frac{K_1 m_1}{\left(1 - \frac{m_1}{2\delta}\right)} \left\{ \varepsilon_1^2 \delta \left[1 + \lambda_1 \left(\frac{m_1}{\delta} - \frac{1}{4} \frac{m_1^2}{\delta^2}\right) \right] + \frac{1}{\delta^3 \left(1 + \frac{3}{4} \lambda_1 \frac{m_1^2}{\delta^2}\right)} \right\}. \quad (4.13)$$

Полагая

$$\delta = \frac{\delta_1}{x}, \quad \delta_1 = \frac{3^{1/4}}{\sqrt{\varepsilon_1}}, \quad (4.14)$$

(4.13) примет вид:

$$p_0 = \frac{K_1 m_1 \varepsilon_1^{3/2}}{\left(1 - \frac{m_1}{2\delta_1} x\right)} \left\{ x \left[1 + \lambda_1 \left(\frac{m_1}{\delta_1} x - \frac{1}{4} \frac{m_1^2}{\delta_1^2} x^2\right) \right] + \frac{1}{3^{1/4} \left(1 + \frac{3}{4} \lambda_1 \frac{m_1^2}{\delta_1^2} x^2\right)} \right\}. \quad (4.15)$$

Из условия $\frac{\partial p_0}{\partial x} = 0$ находим:

$$\left[-1 + \frac{m_1}{\delta_1} x + \frac{\lambda_1}{4} \frac{m_1^2}{\delta_1^2} x^2 \right] \cdot \left[1 + \frac{3}{4} \lambda_1 \frac{m_1^2}{\delta_1^2} x^2 \right]^2 + x^4 - \frac{m_1}{3\delta_1} x^5 + \frac{\lambda_1}{4} \frac{m_1^2}{\delta_1^2} x^6 = 0. \quad (4.16)$$

Отсюда следует, что

$$0,9 \leq x \leq 1, \quad \text{если } \lambda_1 \geq 0 \text{ и } \frac{m_1}{\delta_1} \leq \frac{1}{2}. \quad (4.17)$$

Вблизи своего минимума значение p_0 изменяется медленно, поэтому критические значения давления, определенные на границах области (4.17) изменения x , отличаются менее чем на 1%, хотя погрешность в величине x достигает 10%. Для параметров $\lambda_1 \geq 0$ и $\frac{m_1}{\delta_1} \leq \frac{1}{2}$, допуская погрешность в сторону завышения около 1%, можно в (4.15) положить $x=1$. Таким образом, приходим к формуле:

$$p_{0,k} = \frac{K_1 m_1 \varepsilon_1^{3/2}}{\left(1 - \frac{m_1}{2\delta_1}\right)} \left\{ 3^{1/4} \left[1 + \lambda_1 \left(\frac{m_1}{\delta_1} - \frac{1}{4} \frac{m_1^2}{\delta_1^2}\right) \right] + \frac{1}{3^{1/4} \left(1 + \frac{3}{4} \lambda_1 \frac{m_1^2}{\delta_1^2}\right)} \right\}. \quad (4.18)$$

Здесь K_1 , m_1 , ε_1 , δ_1 , λ_1 определяются по формулам (4.5), (4.6), (4.12) и (4.14). При $\lambda_1 \leq 2$ формула (4.18) с погрешностью на 3% в сторону снижения p_0 может быть приведена к виду:

$$p_{0,k} = 1,76 K_1 m_1 \varepsilon_1^{3/2} \left\{ 1 + \left(\frac{1}{2} + \frac{3}{4} \lambda_1\right) \frac{m_1}{\delta_1} + \frac{1}{4} \frac{m_1^2}{\delta_1^2} \right\}. \quad (4.19)$$

В случае упругих деформаций $\lambda = \omega = \lambda_1 = 0$ и из (4.18)

$$p_{0,k} = \frac{6 E h_0 (h_0 \operatorname{ctg} \gamma)^{3/2}}{\left(1 - \frac{0,97}{\ln \tau} \sqrt{h_0 \operatorname{tg} \gamma}\right) \ln \tau}. \quad (4.20)$$

Эта формула выведена в предположении несжимаемости материала. Вычисления также были проведены и для коэффициента поперечного расширения $\sigma \neq 0,5$. В этом случае $p_{0,k}$ определяется формулой

$$p_{0,k} = \frac{4,85 E h_0 (h_0 \operatorname{ctg} \gamma)^{3/2}}{(1-\sigma^2)^{3/2} \left\{ 1 - \frac{0,91}{\ln \tau} \sqrt{h_0 \operatorname{tg} \gamma} \right\} \ln \tau} \quad (4.21)$$

Пользуясь (4.20) или (4.21), можно указать простое правило расстановки упругих шпангоутов по длине оболочки из условия ее равноустойчивости. Отбрасывая в (4.21) второстепенные члены, что физически равносильно допущению некоторой дополнительной осевой сжимающей силы, получим:

$$p_{0,k} = \frac{C}{\ln \tau} = \frac{C r_0}{l},$$

где C — постоянная для всех отсеков,

$$p_{1,k} = \frac{C r_0}{l_0} \text{ — для первого отсека,}$$

$$p_{2,k} = \frac{C r_1}{l_1} \text{ — для второго отсека,}$$

и т. д.

Из условия $p_{1k} = p_{2k} = \dots$ находим:

$$\frac{r_0}{l_0} = \frac{r_0 + l_0}{l_1} = \frac{r_0 + l_0 + l_1}{l_2} = \dots$$

или

$$l_1 = l_0 \left(1 + \frac{l_0}{r_0} \right), \quad l_2 = l_0 \left(1 + \frac{l_0}{r_0} \right)^2, \dots, \quad l_n = l_0 \left(1 + \frac{l_0}{r_0} \right)^n \quad (4.22)$$

Если из некоторых соображений оболочку длины $L = l_0 + l_1 + \dots + l_n$ требуется разбить на $(n+1)$ отсеков, то необходимо, прежде всего, определить расстояние l_0 от малого торцевого сечения до первого упругого шпангоута.

Пользуясь (4.22), имеем:

$$l_0 = r_0 \left[\left(\frac{L_1}{r_0} \right)^{\frac{1}{n+1}} - 1 \right], \quad l_1 = l_0 \left(\frac{L_1}{r_0} \right)^{\frac{2}{n+1}}, \dots, \quad l_n = l_0 \left(\frac{L_1}{r_0} \right)^{\frac{n}{n+1}},$$

где

$$L_1 = L + r_0.$$

Интересно сравнить в отношении устойчивости при действии равномерного внешнего давления круговую цилиндрическую оболочку и коническую оболочку переменной толщины. Критическая нагрузка для цилиндрической оболочки определяется по формуле (4.14), выведенной в работе [4]. Из сравнения этой формулы и формулы (4.21) видно, что они переходят одна в другую, если вставлять в каждую из них вместо отношений $\frac{h}{l}$, $\frac{h}{R}$, $\frac{Rh}{l^2}$ соответственно $\frac{h_0}{\ln \tau}$, $h_0 \operatorname{ctg} \gamma$,

$\frac{h_0 \operatorname{tg} \gamma}{(\ln \tau)^2}$ и наоборот. Учитывая это замечание, а также пользуясь результатами этого параграфа, можно, не решая дифференциальных уравнений, указать формулу критического напряжения за пределом упругости и для цилиндрической оболочки кругового сечения при действии равномерного внешнего давления. При этом следует воспользо-

зоваться формулами (4.18) или (4.19), вставляя в них указанные параметры для цилиндрической оболочки вместо соответствующих для конической.

Вводя геометрический параметр

$$i = \left(\frac{r_1}{h} \right)^{3/2} \sqrt{\operatorname{tg} \gamma \cdot \ln \tau} : \left[1 + (2 + 3\lambda_1) \frac{0,49}{\ln \tau} \cdot \sqrt{\frac{h}{r_1} \operatorname{tg} \gamma \left(\frac{1-\lambda}{1-\omega} \right)^{1/2}} + \frac{0,95}{(\ln \tau)^2} \cdot \frac{h}{r_1} \operatorname{tg} \gamma \cdot \sqrt{\frac{(1-\lambda)}{(1-\omega)}} \right], \quad (4.23)$$

формулу (4.19) приводим к виду:

$$i = \frac{3 \sqrt{3}}{2} \frac{E}{\sigma_l} (1-\lambda)^{3/2} \cdot (1-\omega)^{1/2}, \quad \sigma_l = \frac{p_0 r_1 \operatorname{tg} \gamma \cdot \sqrt{3}}{4h}, \quad (4.24)$$

где $2h$ — толщина оболочки у большего основания.

Для цилиндрической оболочки кругового сечения

$$i = \frac{l}{h} \sqrt{\frac{R}{h}} : \left[1 + (2 + 3\lambda_1) \frac{0,49}{l} \sqrt{Rh \left(\frac{1-\lambda}{1-\omega} \right)^{1/2}} + 0,95 \frac{Rh}{l^2} \sqrt{\frac{(1-\lambda)}{(1-\omega)}} \right], \quad (4.25)$$

$$i = \frac{3 \sqrt{3}}{2} \frac{E}{\sigma_l} (1-\lambda)^{3/2} (1-\omega)^{1/2} \quad \sigma_l = \frac{p_0 R \sqrt{3}}{4h}.$$

В случае купола с очень маленьким отверстием, формулу (4.4), учитывая (4.11), приводим к виду:

$$p_0 = K_1 \left(\varepsilon_1^2 n_1^2 + \frac{9 l_0^2}{n_1^6} \right)$$

или

$$p_{0,k} = 1,65 \frac{Eh}{r_1} \left(\frac{h}{r_1 \operatorname{tg} \gamma} \right)^{3/2} \cdot (1-\lambda)^{3/2} (1-\omega)^{1/2}. \quad (4.26)$$

Критическая гибкость в этом случае определяется формулой:

$$i = \frac{0,71}{\sigma_l} \cdot E \cdot (1-\lambda)^{3/2} (1-\omega)^{1/2}, \quad \sigma_l = \frac{p_0 r_1 \operatorname{tg} \gamma \sqrt{3}}{4h}, \quad (4.27)$$

где

$$i = \operatorname{ctg} \gamma \left(\frac{r_1 \operatorname{tg} \gamma}{h} \right)^{3/2}.$$

Для области упругих деформаций

$$p_{0,k} = \frac{1,33}{(1-\sigma^2)^{3/2}} \cdot \frac{Eh}{r_1} \cdot \left(\frac{h}{r_1 \operatorname{tg} \gamma} \right)^{3/2}. \quad (4.28)$$

Формулы (4.26), (4.27) и (4.28) справедливы для значений γ , удовлетворяющих условию $0 < \gamma < \frac{\pi}{2}$.

5. Об устойчивости конической оболочки постоянной толщины под действием равномерного внешнего давления

В данном случае величины T_{10} , T_{20} , \bar{X}_x ... \bar{S}_y определяются по формулам (4.2). Уравнения нейтрального равновесия (2.8), учитывая (1.9), после упрощений с помощью подстановок

$$z = \ln \frac{r}{r_0}, \quad f = e^{(1,25-\lambda)z} f_1 \cos n_1 \varphi_1, \quad w = e^{0,25z} w_1 \cos n_1 \varphi_1 \quad (5.1)$$

приводятся к виду:

$$\begin{aligned} & A_0 \frac{d^4 f_1}{dz^4} + A_1 \frac{d^3 f_1}{dz^3} + A_2 \frac{d^2 f_1}{dz^2} + A_3 \frac{df_1}{dz} + A_4 f_1 + \\ & + \frac{d^2 w_1}{dz^2} - 0,5 \frac{dw_1}{dz} - 0,1875 w_1 = 0, \\ & e^{-3,75z} \left[B_0 \frac{d^4 w_1}{dz^4} + B_1 \frac{d^3 w_1}{dz^3} + B_2 \frac{d^2 w_1}{dz^2} + B_3 \frac{dw_1}{dz} + B_4 w_1 \right] - \\ & - \frac{2Eh \operatorname{ctg}^2 \gamma r_0^2}{D} e^{-1,75z} \left[\frac{d^2 f_1}{dz^2} + (1,5 - 2\lambda_1) \frac{df_1}{dz} + (1,25 - \lambda_1)(0,25 - \lambda_1) f_1 \right] + \\ & + \sigma r_0^{(2+\frac{1}{\delta})} e^{(\frac{1}{\delta}-1,75)z} \left[\frac{1}{2} \frac{d^2 w_1}{dz^2} + 0,75 \frac{dw_1}{dz} + (0,156 - n_1^2) w_1 \right] = 0, \end{aligned} \quad (5.2)$$

где

$$\sigma = \frac{p_0 \operatorname{tg} \gamma \cdot E}{D \sigma' \frac{1}{\delta} A (1 - \frac{1}{\delta})}, \quad \sigma_l = Ar. \quad (5.3)$$

Коэффициенты $A_0 \dots A_4$, $B_0 \dots B_4$, выражения которых мы не выписываем, легко вычисляются в процессе преобразования уравнений (2.8) с помощью (5.1). В случае упругой задачи эти коэффициенты приведены в работе [4]. Если концы оболочки шарнирно закреплены, то на краях $r=r_0$ и $r=r_0+l$ должны выполняться условия:

$$\begin{aligned} w &= 0, \quad \frac{d^2 w}{dr^2} + \frac{0,5}{r} \frac{dw}{dr} = 0, \\ T_1 &= 0, \quad z_2 = 0, \end{aligned}$$

которые после преобразования (5.1) принимают вид:

$$w_1 = 0, \quad \frac{d^2 w_1}{dz^2} = 0 \quad \text{при } z=0 \text{ и } z=l; \quad (5.4)$$

$$\begin{aligned} \frac{df_1}{dz} + (1,25 - \lambda_1 - n_1^2) f_1 &= 0, \quad \frac{d^2 f_1}{dz^2} + (1,5 - 2\lambda_1) \frac{df_1}{dz} + \\ & + (1,25 - \lambda_1)(0,25 - \lambda_1) f_1 = 0. \end{aligned} \quad (5.5)$$

Решение задачи ищем, задаваясь формой волнообразования:

$$w_1 = A_0 \sin m_1 z. \quad (5.6)$$

При этом краевые условия (5.4) будут выполняться. Из первого уравнения системы (5.2) находим:

$$f_1 = A_0 (\Phi_{m_1} \sin m_1 z + \chi_{m_1} \cos m_1 z), \quad (5.7)$$

где Φ_{m_1} , χ_{m_1} — величины, зависящие от m_1 и n_1 . В процессе дальнейших вычислений будем пользоваться одним частным решением (5.7) первого уравнения системы (5.2). При этом граничные условия (5.5)

выполняются в среднем. Как было выяснено в параграфе 4, а также для случая упругой задачи в статье [4], работа неуравновешенных контурных сил, происходящих от невыполнения краевых условий (5.5), на перемещениях отдельных точек оказывается незначительной в общем балансе энергии деформации срединной поверхности оболочки. Поэтому использование лишь одного частного решения (5.7) в целях последующих вычислений не приводит к заметной погрешности в величине критической нагрузки [4]. Подставляя (5.6) и (5.7) во второе уравнение системы (5.2), интегрируем это уравнение по методу Бубнова — Галеркина, умножая его на $e^{2,25z} \sin m_1 z dz$.

Таким образом, приходим к характеристическому уравнению:

$$\begin{aligned} p_0 &= \frac{K_1}{\left(\frac{m_1^2}{2} + n_1^2\right)} \left\{ \varepsilon_1^2 \left[\frac{\left(1 - \frac{\lambda}{4} - \frac{3}{4}\omega\right)}{(1-\lambda)} m_1^4 + \frac{(2-\lambda-\omega)}{(1-\lambda)} m_1^2 n_1^2 + n_1^4 \right] + \right. \\ & \left. + \frac{m_1^4}{\left(1 - \frac{\lambda}{4} - \frac{3}{5}\omega\right)} \right\}, \quad (5.8) \end{aligned}$$

где

$$K_1 = \left(\frac{2}{\delta} + 1\right) \cdot \frac{(\tau^{0,5} - 1)}{\left(\tau \left(\frac{1}{\delta} + 0,5\right) - 1\right)} \cdot \frac{\left[m_1^2 + 0,25 \left(\frac{1}{\delta} + 0,5\right)^2\right]}{(m_1^2 + 0,0625)} \cdot \frac{2h \operatorname{ctg}^2 \gamma \cdot \sigma' \frac{1}{\delta}}{r_0 \frac{1}{\delta} \cdot A \left(\frac{1}{\delta} - 1\right)},$$

$$\begin{aligned} \varepsilon_1^2 &= \frac{(1 - \tau^{-1,5})}{3(\tau^{0,5} - 1)} \cdot \frac{(m_1^2 + 0,0625)}{(m_1^2 + 0,5625)} \cdot \frac{D(1-\lambda)}{2Ehr_0^2 \operatorname{ctg}^2 \gamma (1-\omega)}, \\ \tau &= 1 + \frac{l}{r_0}, \quad \tau \leq \pi, \quad A = \frac{\sqrt{3}}{4h} p_0 \operatorname{tg} \gamma. \end{aligned}$$

Уравнение (5.8) получено путем пренебрежения величинами порядка единицы по сравнению с m_1^2 и по своей форме оказывается точно совпадающим с исследованным в параграфе 4 уравнением (4.10). Поэтому для параметров $\lambda_1 \leq 2$ и $\frac{m_1}{\delta_1} \leq \frac{1}{2}$:

$$p_{0,k} = 1,76 K_1 m_1 \varepsilon_1^2 \left\{ 1 + \left(\frac{1}{2} + \frac{3}{4}\lambda_1\right) \frac{m_1}{\delta_1} + \frac{1}{4} \frac{m_1^2}{\delta_1^2} \right\}, \quad (5.9)$$

где

$$m_1 = \frac{\pi}{\ln \tau}, \quad \lambda_1 = \frac{\lambda - \omega}{1 - \lambda}, \quad \delta_1 = \frac{3^{1/4}}{\sqrt{\varepsilon_1}}.$$

При $\delta=1$, $\lambda=\omega=0$ формула (5.9) переходит в соответствующую формулу, выведенную в работе [4]. При этом также, как и для конической оболочки переменной толщины, пользуясь (5.9) и условием равноустойчивости, может быть разрешен вопрос о наиболее рациональной расстановке упругих шпангоутов по длине оболочки.

Выводы

1. Исследование устойчивости оболочек за пределом упругости в случае первоначального неоднородного напряженного состояния может быть значительно упрощено, если материал оболочки подчиняется степенному закону упрочнения, т. е. $\sigma_l = \sigma' e^{\lambda}$. При этом, если

отказаться от учета разгрузки, решение дифференциальных уравнений во многих случаях будет не сложнее решения уравнений для соответствующих упругих задач.

2. Если напряженное состояние оболочки является состоянием типа краевого эффекта (продольное сжатие цилиндрических и конических оболочек, сплюснутый эллипсоид под действием внутреннего давления, вытянутая эллипсоидальная оболочка под действием внешнего давления, торовая оболочка при внешнем давлении), то в исходных соотношениях А. А. Ильюшина между вариациями усилий и деформаций (1.1), (1.2) или (1.4) параметры λ и ω можно считать постоянными. Так как при составлении дифференциальных уравнений нейтрального равновесия геометрия на небольшом куске поверхности отождествляется с евклидовой геометрией на плоскости, то погрешность этого допущения будет одного порядка с погрешностью $\lambda = \text{const}$, $\omega = \text{const}$. Зависимость между σ_1 и ϵ_1 в этом случае может быть произвольной.

3. В § 5 настоящей работы рассмотрена задача устойчивости конической оболочки под действием внешнего давления. При этом были использованы результаты работы [4], в которой особенное внимание обращалось на выполнение всех краевых условий при применении метода Бубнова — Галеркина. Этим объясняется выбор в § 5 функции w в форме

$$w = A_0 e^{0,25z} \sin m_1 z \cos n_1 \varphi_1.$$

Однако в § 4 было показано, что невыполнение краевого условия для δM_1 не может оказать серьезного влияния на результат. Поэтому это решение, а также решение, проведенное в работе [4], желательно уточнить, особенно, если $t \geq 1$ и $2\gamma \geq 60^\circ$. Идя в этом направлении, следовало бы прогиб задать в форме

$$w = A_0 e^{mz} \sin m_1 z \cos n_1 \varphi_1,$$

где m подлежит определению из условия минимума критического напряжения.

ЛИТЕРАТУРА

1. Ильюшин А. А. Пластичность. ОГИЗ, Гостехиздат, 1948.
2. Муштарн Х. М. Некоторые обобщения теории тонких оболочек с приложениями к задаче устойчивости упругого равновесия. Известия Казанского физико-математического общества, том XI, серия 3, 1938.
3. Власов В. З. Общая теория оболочек. Москва, 1949.
4. Муштарн Х. М., Саченков А. В. Об устойчивости цилиндрических и конических оболочек кругового сечения при совместном действии осевого сжатия и внешнего нормального давления, ПММ, 1954, вып. VI.
5. Штаерман И. Я. Устойчивость оболочек. Сборник трудов Киевского авиационного института, 1, 1936.
6. Алюмяэ Н. А. К одной формуле критического напряжения безмоментного напряженного состояния тонкостенных упругих оболочек. ПММ, том XVI, вып. 6, 1950.
7. Ганяев Н. С. Определение критической нагрузки цилиндрической оболочки за пределом упругости при осевом сжатии и внешнем нормальном давлении. Известия Казанского филиала Академии наук СССР, серия физико-математических и технических наук, вып. 7, 1955.
8. Работнов Ю. Н. Локальная устойчивость оболочек. ДАН СССР, том 11, № 2, 1946.

Физико-технический институт
Казанского филиала АН СССР

Поступило
25 октября 1955 г.

СОДЕРЖАНИЕ

К. З. Галимов. К вариационным методам решения задач нелинейной теории пластин и оболочек	3
Х. М. Муштарн, М. С. Корнишин. О сходимости метода Галеркина при определении верхней и нижней критических нагрузок в одной нелинейной задаче	27
И. В. Свирский. О построении вариационных формул для решения задач теории упругости	31
И. В. Свирский. К вопросу о построении вариационных формул задач устойчивости	41
Р. Г. Суркин. К вопросу о потере устойчивости сферической оболочки при внешнем равномерно-распределенном давлении	51
С. Г. Винокуров. Применение метода Галеркина к решению задачи о больших прогибах круглой шарнирно опертой пластинки	57
М. С. Корнишин. Влияние несимметричной неправильности на деформацию пологой панели при поперечной нагрузке	63
Н. И. Кривошеев. Влияние начальных неправильностей в форме срединной поверхности на устойчивость цилиндрической оболочки при кручении	69
А. В. Саченков. Об устойчивости оболочек за пределом упругости	81

Редактор Г. Я. Солганик
Техн. редактор Г. И. Неделько
Корректор Г. А. Мифтахутдинова

Сдано в набор 25/11-1955 г. Подписано к печати 21/VI-1956 г. ПФ 03105. Формат бумаги 70×103^{1/2} мм.
Печати листов 6,25 (8,56). Уч.-изд. л. 6,67. Кол. знаков в 1 листе 64000.
Заказ № 031. Тираж 400. Цена 4 руб. 65 коп. ☐

Типография Татполиграфического Министерства культуры ТАССР. Казань, ул. Миславского, д. № 9.