

АКАДЕМИЯ НАУК СССР  
КАЗАНСКИЙ ФИЛИАЛ

---

**ИЗВЕСТИЯ**  
**КАЗАНСКОГО ФИЛИАЛА**  
**АКАДЕМИИ НАУК СССР**

*СЕРИЯ ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИХ  
И ТЕХНИЧЕСКИХ НАУК*

9



---

**ТАТКНИГОИЗДАТ**  
**КАЗАНЬ** 1956

АКАДЕМИЯ НАУК СССР  
КАЗАНСКИЙ ФИЛИАЛ

---

ИЗВЕСТИЯ  
КАЗАНСКОГО ФИЛИАЛА  
АКАДЕМИИ НАУК  
СССР

*СЕРИЯ ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИХ  
И ТЕХНИЧЕСКИХ НАУК*

Выпуск 9

НЕКОТОРЫЕ ГИДРОДИНАМИЧЕСКИЕ ЗАДАЧИ  
РАЦИОНАЛЬНОЙ РАЗРАБОТКИ  
НЕФТЯНЫХ МЕСТОРОЖДЕНИЙ

08/11/56



ТАТКНИГОИЗДАТ

Редакция научно-технической литературы  
КАЗАНЬ 1956

Г. С. Салехов

О КРАЕВЫХ ЗАДАЧАХ, ДОПУСКАЮЩИХ ДАННОЕ РЕШЕНИЕ\*

В статье дается постановка некоторых новых краевых задач, которые названы краевыми задачами, допускающими данное решение. Если придать этим задачам физическое содержание, то они могут рассматриваться как задачи управления процессами, описанными соответствующими уравнениями и краевыми условиями. Дано определение корректно поставленных краевых задач, допускающих данное решение.

Показано, что для решения таких задач могут быть использованы общие методы минимальной погрешности за счет вариации параметров, входящих в основные уравнения и краевые условия.

Одной из краевых задач, допускающих данное решение, является задача управления движением контура нефтеносности, изученная ранее автором и другими [1] — [14].

1. Общая постановка краевых задач, допускающих данное решение и возможные методы их решения

Пусть в  $n$ -мерной области  $G \supset (x_1, x_2, \dots, x_n)$  задано уравнение в частных производных 2-го порядка\*\*, зависящее от конечного числа параметров  $\{a_k\}$  ( $k = 1, 2, \dots, M$ ):

$$L(x_1, x_2, \dots, x_n; u, u_1, u_2, \dots, u_n; u_{11}, u_{12}, \dots, u_{nn}; a_1, a_2, \dots, a_M) = 0, \quad (1, 1)$$

где  $u$  — неизвестная функция и  $u_j = \frac{\partial u}{\partial x_j}$ ,  $u_{jk} = \frac{\partial^2 u}{\partial x_j \partial x_k}$ .

Предположим, что уравнение (1, 1) определено для параметров  $\{a_k\}$ , изменяющихся в области  $G_a \supset (a_1, a_2, \dots, a_M)$ . Пусть далее в областях  $G_i \subset G$ , имеющих не более чем  $n - 1$  измерений, функция  $u$  удовлетворяет краевым условиям:

$$K_i(x_1, x_2, \dots, x_n; u, u_1, u_2, \dots, u_n; u_{11}, u_{12}, \dots, u_{nn}; \beta_1^{(i)}, \beta_2^{(i)}, \dots, \beta_{N_i}^{(i)}) = 0, \quad (1, 2)$$

где  $i = 1, 2, \dots, m$  и  $\{\beta_{s_i}^{(i)}\}$  ( $s_i = 1, 2, \dots, N_i$ ) — конечное число параметров, изменяющихся в областях  $G_i^{(i)}$  ( $i = 1, 2, \dots, m$ ). Области  $G_a$  и  $G_i^{(i)}$  могут перекрываться частично или полностью.

Предположим, что краевая задача, определенная уравнениями (1, 1) и (1, 2) в вышеуказанных областях изменения переменных  $\{x_j\}$  ( $j = 1, 2, \dots, n$ ) и параметров  $\{a_k\}$  ( $k = 1, 2, \dots, M$ ),  $\{\beta_{s_i}^{(i)}\}$  ( $s_i = 1, 2, \dots, N_i$ ), поставлена корректно, т. е.:

1) обеспечено существование и единственность решения, 2) решение  $u$  непрерывно зависит от краевых условий, от функций и параметров, входящих в структуру самих уравнений (1, 1) и (1, 2).

\* Краткое содержание этой статьи нами было впервые доложено на заседании Казанского физико-математического о-ва в ноябре 1954 г.

\*\* В настоящей работе для простоты изложения рассматривается постановка задач для уравнений в частных производных 2-го порядка. Между тем следует заметить, что приводимая ниже постановка может быть сформулирована для значительно более широкого класса дифференциальных и функциональных уравнений.

Ответственный редактор  
доктор физико-математических наук,  
профессор Г. С. Салехов

П 14480  
ЦЕНТРАЛЬНАЯ НАУЧНАЯ  
БИБЛИОТЕКА  
А. Н. Киргизской ССР

Требуется определить значения параметров  $\{\alpha_k\}$  и  $\{\beta_{s_i}^{(i)}\}$  соответственно в областях  $G_\alpha$  и  $G_\beta^{(i)}$  таким образом, чтобы наперед выбранная функция  $v(x_1, x_2, \dots, x_n)$  в области  $G$  в каком-то смысле наилучшим образом\* удовлетворяла уравнению (1,1) и краевым условиям (1,2). Подставляя функцию  $v$  в уравнения (1,1) и (1,2), будем иметь:

$$L(x_1, x_2, \dots, x_n; v, v_1, v_2, \dots, v_n; v_{11}, v_{12}, \dots, v_{nn}; \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_M) = \varepsilon, \quad (1,3)$$

$$K_i(x_1, x_2, \dots, x_n; v, v_1, v_2, \dots, v_n; v_{11}, v_{12}, \dots, v_{nn}; \beta_1^{(i)}, \beta_2^{(i)}, \dots, \beta_{N_i}^{(i)}) = \varepsilon_i, \quad (1,4)$$

где  $\varepsilon$  и  $\varepsilon_i$  ( $i=1, 2, \dots, m$ ) известные функции погрешности от переменных  $\{x_j\}$ , определенных соответственно в областях  $G$  и  $G_i$ , а также параметров  $\{\alpha_k\}$  и  $\{\beta_{s_i}^{(i)}\}$ , заданных в областях  $G_\alpha$  и  $G_\beta^{(i)}$ . Далее следует так определить параметры  $\{\alpha_k\}$  и  $\{\beta_{s_i}^{(i)}\}$ , чтобы функции погрешности  $\varepsilon$  и  $\varepsilon_i$  в смысле какой-либо принятой нормы  $\|\varepsilon\|$  и  $\|\varepsilon_i\|$  в соответствующих областях  $G$  и  $G_i$  наименее уклонялись бы от нуля. По характеру поставленной конкретной задачи эти нормы  $\|\varepsilon\|$  и  $\|\varepsilon_i\|$  могут быть приняты, например, в смысле приложения к решению задачи одного из известных методов минимальной погрешности: метода наименьших квадратов, ортогональных проекций, метода подобластей, коллокации и др. (см. [15], стр. 264—266) за счет вариации параметров  $\{\alpha_k\}$  и  $\{\beta_{s_i}^{(i)}\}$ , входящих в уравнения (1,1) и краевые условия (1,2). Приложение вышеуказанных методов к решению поставленной задачи приводит в конечном счете к решению систем линейных или нелинейных алгебраических или трансцендентных уравнений относительно неизвестных:

$$\{\alpha_k\} \quad (k=1, 2, \dots, M) \quad \text{и} \quad \{\beta_{s_i}^{(i)}\} \quad (s_i=1, 2, \dots, N_i, \quad i=1, 2, \dots, m).$$

В самом деле, рассмотрим, например, приложение метода наименьших квадратов. Тогда, согласно (1,3) и (1,4), следует так подобрать значения  $\{\alpha_k\}$  и  $\{\beta_{s_i}^{(i)}\}$  соответственно в областях  $G_\alpha$  и  $G_\beta^{(i)}$ , чтобы следующие интегралы обратились в минимум:

$$I = \frac{1}{\sigma} \int_G \varepsilon^2 d\sigma, \quad I_i = \frac{1}{\sigma_i} \int_{G_i} \varepsilon_i^2 d\sigma_i, \quad (i=1, 2, \dots, m), \quad (1,5)$$

где  $\sigma = \int_G d\sigma$ ,  $\sigma_i = \int_{G_i} d\sigma_i$ , причем  $d\sigma$  и  $d\sigma_i$  элементы объемов соответственно областей  $G$  и  $G_i$ . В данном случае приняты  $\|\varepsilon\| = \min I$  и  $\|\varepsilon_i\| = \min I_i$ . Поэтому для определения параметров  $\{\alpha_k\}$  и  $\{\beta_{s_i}^{(i)}\}$  будем иметь следующие системы уравнений:

$$\frac{\partial I}{\partial \alpha_k} = 0 \quad (k=1, 2, \dots, M), \quad (1,6)$$

$$\frac{\partial I_i}{\partial \beta_{s_i}^{(i)}} = 0 \quad (s=1, 2, \dots, N_i, \quad i=1, 2, \dots, m).$$

Решая системы уравнений (1,6) и подставляя найденные группы значений параметров в выражения (1,5), мы можем дать оценку допустимых минимальных средне-квадратических ошибок для функций погрешности  $\varepsilon$  и  $\varepsilon_i$  ( $i=1, 2, \dots, m$ ). Вообще говоря, представляет большой интерес, при найденных значениях параметров из уравнений (1,6), определить величину допущенной ошибки между желаемым  $v$  и возможным решением  $u$ \*\* в смысле какой-либо принятой нормы

$\|v - u\|$ . Однако оценку величин  $\|v - u\|$  практически осуществить значительно сложнее, чем оценку величин  $\|\varepsilon\|$  и  $\|\varepsilon_i\|$ , и этот вопрос в каждом конкретном случае, как и при решении обычных краевых задач, является предметом самостоятельных исследований. Приложение методов минимальной погрешности к решению краевых задач, допускающих данное решение, приобретает по существу новую качественную трактовку. В самом деле, как известно, методы минимальной погрешности применяются для отыскания решения обычной краевой задачи путем вариации введенных нами произвольных параметров в класс допустимых решений. Таким образом, из семейства возможных решений, содержащих конечное число произвольных параметров, введенных нами, выделяется то решение  $u$ , которое в каком-то смысле наилучшим образом удовлетворяет заданному уравнению и краевым условиям.

В нашей же постановке задачи методы минимальной погрешности используются для того, чтобы из параметрического семейства краевых задач, содержащих в уравнениях (1,1) и (1,2) произвольные параметры, выделить ту задачу, которая допускает данное (желаемое) решение  $v$ , причем это наперед заданное решение, как и при решении обычных краевых задач, может быть реализовано точно или приближенно. Поэтому, если краевые задачи в обычной постановке называть прямыми, то новую постановку можно назвать обратной.

Отметим также, что краевые задачи, допускающие данное решение в вышеуказанной постановке, могут быть рассмотрены и в том случае, когда основное уравнение (1,1) и краевые условия (1,2) вместо произвольных параметров будут содержать конечное число неизвестных функций  $\varphi_p(x_1, x_2, \dots, x_n)$ , обладающих заранее определенными свойствами. Очевидно, в этом случае задача сводится к определению функций  $\varphi_p(x_1, x_2, \dots, x_n)$  таким образом, чтобы заранее данная функция  $v(x_1, x_2, \dots, x_n)$  одновременно удовлетворяла бы уравнениям (1,1) и (1,2). Для решения таких задач, вместо методов минимальной погрешности, могут быть использованы и другие методы, позволяющие решать задачу точно или приближенно.

Если, например, функции  $\varphi_p(x_1, x_2, \dots, x_n)$  обладают тем свойством, что они хорошо представимы в виде некоторых обобщенных полиномов вида

$$a_{0p} + a_{1p}\psi_1 + a_{2p}\psi_2 + \dots + a_{\lambda p}\psi_\lambda,$$

где  $\psi_1, \psi_2, \dots, \psi_\lambda$  — некоторая система линейно-независимых функций и  $a_{ip}$  ( $i=1, 2, \dots, \lambda$ ) — коэффициенты (независимые от переменных  $x_1, x_2, \dots, x_n$ ), которые можно рассматривать как произвольные параметры, то, очевидно, методы минимальной погрешности могут быть использованы и в этом случае. С точки зрения приложений существенно дать понятие о корректно поставленных обратных краевых задачах.

При заданных параметрических семействах уравнений (1,1) и краевых условий (1,2), а также функции  $v(x_1, x_2, \dots, x_n)$ , обратную краевую задачу в соответствующих областях  $G, G_\alpha$  и  $G_\beta^{(i)}$  ( $k=1, 2, \dots, M$ ) изменения переменных  $(x_1, x_2, \dots, x_n)$  и параметров  $\{\alpha_k\}, \{\beta_{s_i}^{(i)}\}$  ( $s_i=1, 2, \dots, N_i, i=1, 2, \dots, m$ ) будем называть поставленной корректно:

1) если для указанных областей изменения переменных и параметров соответствующая прямая краевая задача поставлена корректно,

2) если в областях  $G_\alpha$  и  $G_\beta^{(i)}$  найдется по крайней мере одна система значений параметров  $\{\alpha_k\}$  ( $k=1,$

\* В каком именно смысле, будет уточнено в дальнейшем.

\*\* Решение  $u$  определяется из уравнения (1,1) при краевых условиях (1,2) для значений параметров, найденных из систем уравнений (1,6).

$2, \dots, M), \{\beta_{s_i}^{(i)}\} (s_i=1, 2, \dots, N_i, i=1, 2, \dots, m)$  такая, что величины  $\|\varepsilon\|$  и  $\|\varepsilon_i\|$  будут достигать, соответственно своих наименьших значений  $\delta \geq 0$  и  $\delta_i \geq 0$ . Числа  $\delta$  и  $\delta_i$  назовем погрешностями решения обратной краевой задачи по принятой норме  $\|\varepsilon\|$  и  $\|\varepsilon_i\|$ . Чем меньше окажутся числа  $\delta$  и  $\delta_i$ , тем точнее следует считать и решение обратной краевой задачи.

Если  $\delta = \delta_i = 0$ , то это будет означать точное решение задачи.

Если же по крайней мере одно из чисел  $\delta$  и  $\delta_i$  ( $i=1, 2, \dots, m$ ) окажется не равным нулю, то это будет означать приближенное решение задачи.

Следует отметить, что на практике очень часто требуется дать более или менее точную оценку величин  $d = u - v$ , которая позволяет непосредственно оценить решения обратной краевой задачи в смысле близости желаемого решения  $v$  и допустимого решения  $u$ . Очевидно, в силу корректной постановки прямой задачи между величинами  $\varepsilon$ ,  $\varepsilon_i$  и  $d$  существует определенная связь, так как малое изменение  $\varepsilon$  и  $\varepsilon_i$  должно влечь за собой и малое изменение  $d$ . Однако, в общем случае количественно установить зависимость между величинами  $\varepsilon$ ,  $\varepsilon_i$  и  $d$  весьма сложно, и этот вопрос для каждой конкретной краевой задачи необходимо исследовать самостоятельно. Как было указано выше, применяя метод минимальной погрешности, оценку величин  $\varepsilon$  и  $\varepsilon_i$  можно произвести в процессе решения самой задачи, причем гораздо проще, чем оценку величин  $d$ . В связи с этим, укажем, например, что Мизес считает (см. [15], стр. 278) оценку величин  $\varepsilon$  и  $\varepsilon_i$  с физической точки зрения более целесообразной. В этом случае идея аппроксимации решений заменяется идеей одновременной аппроксимации дифференциальных уравнений и краевых условий, коль скоро соответствующая прямая задача поставлена корректно; такой подход к вопросу с качественной стороны может быть в некоторой степени оправдан.

В общем случае следует отметить, что разрешимость обратной краевой задачи, число возможных ее решений\*\* и точность решения будут зависеть от следующих факторов:

- 1) от выбора наперед заданного (или желаемого) решения  $v$ ;
- 2) от числа и характера параметров, входящих в основное уравнение (1, 1) и краевые условия (1, 2);
- 3) от областей  $G$ ,  $G_1$ ,  $G_2$  и  $G_{\beta}^{(i)}$ ;
- 4) от структуры основного уравнения (1, 1) и краевых условий (1, 2).

Наконец, следует отметить, что параметры  $\{\alpha_k\}$  и  $\{\beta_{s_i}^{(i)}\}$  могут содержаться не во всех уравнениях (1, 1) и (1, 2), а лишь в некоторых из них. В этом случае функцию  $v$  следует заранее выбирать таким образом, чтобы уравнениям, не содержащим произвольных параметров, она удовлетворяла точно или же в пределах допустимых ошибок.

## 2. Простейшие примеры некоторых краевых задач, допускающих данное решение

В качестве иллюстрации основных положений, которые были высказаны в § 1, рассмотрим два простейших примера обратных краевых задач, поставленных корректно и некорректно.

\* Где  $\|\dots\|$  означает какую-либо заранее принятую норму, которая обладает тем свойством, что из условия  $\|\varepsilon\| = 0$  следует и  $\varepsilon = 0$ .

\*\* Под числом возможных решений мы понимаем число таких систем значений параметров  $\{\alpha_k\}$  и  $\{\beta_{s_i}^{(i)}\}$ , для которых величины  $\|\varepsilon\|$  и  $\|\varepsilon_i\|$  достигают своих наименьших значений  $\delta \geq 0$  и  $\delta_i \geq 0$ .

## 1. Пример обратной краевой задачи, поставленной корректно

Дано уравнение

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - (\alpha_1 + \alpha_2 x) \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \quad (2, 1)$$

и краевые условия:

$$\begin{aligned} u(0, y) &= \beta_1^{(1)} + \beta_2^{(1)} y, \\ \frac{\partial u}{\partial x}(0, y) &= \beta_1^{(2)} + \beta_2^{(2)} y, \end{aligned} \quad (2, 2)$$

где  $\alpha_k$  ( $k=1, 2$ ),  $\beta_{s_i}^{(i)}$  ( $s_i=1, 2, i=1, 2$ ) — некоторые произвольные вещественные параметры.

Требуется параметры  $\alpha_k$  и  $\beta_{s_i}^{(i)}$  определить так, чтобы, например, функция  $v = x^2 + y^2 + xy$  в области  $G = \{0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1\}$  представляла наилучшее приближенное или точное решение, например, в смысле метода наименьших квадратов.

В качестве функции погрешности  $\varepsilon$  относительно уравнения (2, 1) будем иметь:

$$\begin{aligned} \varepsilon(x, y, \alpha_1, \alpha_2) &= 2 - (\alpha_1 + \alpha_2 x)^2, \\ I &= \int \int_{(G)} \varepsilon^2 dx dy = \int_0^1 \int_0^1 4(1 - \alpha_1 - \alpha_2 x)^2 dx dy, \\ -\frac{1}{8} \frac{\partial I}{\partial \alpha_1} &= 1 - \alpha_1 - \frac{\alpha_2}{2} = 0; \quad -\frac{1}{8} \frac{\partial I}{\partial \alpha_2} = \frac{1}{2} - \frac{\alpha_1}{2} - \frac{\alpha_2}{3} = 0. \end{aligned}$$

Отсюда  $\alpha_1 = 1, \alpha_2 = 0$ .

В качестве функций погрешности  $\varepsilon_1$  и  $\varepsilon_2$  относительно уравнений (2, 2) будем иметь:

$$\begin{aligned} \varepsilon_1(x, y, \beta_1^{(1)}, \beta_2^{(1)}) &= y^2 - \beta_1^{(1)} - \beta_2^{(1)} y, \\ \varepsilon_2(x, y, \beta_1^{(2)}, \beta_2^{(2)}) &= y - \beta_1^{(2)} - \beta_2^{(2)} y, \\ I_1 &= \int_{G_1} \varepsilon_1^2 dy = \int_0^1 [y^2 - \beta_1^{(1)} - \beta_2^{(1)} y]^2 dy, \quad (2, 3) \\ I_2 &= \int_{G_2} \varepsilon_2^2 dy = \int_0^1 [(1 - \beta_2^{(2)}) y - \beta_1^{(2)}]^2 dy. \quad (2, 4) \end{aligned}$$

Согласно (2, 3)

$$-\frac{1}{2} \frac{\partial I_1}{\partial \beta_1^{(1)}} = \frac{1}{3} - \beta_1^{(1)} - \frac{\beta_2^{(1)}}{2} = 0; \quad -\frac{1}{2} \frac{\partial I_1}{\partial \beta_2^{(1)}} = \frac{1}{4} - \frac{\beta_1^{(1)}}{2} - \frac{\beta_2^{(1)}}{3} = 0.$$

Решая последние два уравнения совместно, найдем:

$$\beta_1^{(1)} = -\frac{1}{6} \text{ и } \beta_2^{(1)} = 1.$$

Точно так же выражение для  $I_2$  дает  $\beta_1^{(2)} = 0$  и  $\beta_2^{(2)} = 1$ . Таким образом, метод наименьших квадратов для решения поставленной обратной краевой задачи дает следующие уравнения:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} &= 0, \quad (2, 1)' \\ \left. \begin{aligned} u(0, y) &= -\frac{1}{6} + y, \\ \frac{\partial u}{\partial x}(0, y) &= y. \end{aligned} \right\} \quad (2, 2)' \end{aligned}$$

Подставляя найденные значения параметров в соответствующие выражения для  $I$ ,  $I_1$  и  $I_2$ , получим:

$$\| \varepsilon \| = \min I = 0, \quad \| \varepsilon_1 \| = \min I_1 = \frac{1}{180} \quad \text{и} \quad \| \varepsilon_2 \| = \min I_2 = 0,$$

$$\text{т. е. } \delta = \delta_2 = 0 \quad \text{и} \quad \delta_1 = \frac{1}{180}.$$

Но в силу того, что задача Коши для уравнения (2, 1) при начальных условиях в указанных областях изменения переменных  $x$ ,  $y$  и параметров  $\alpha_1$ ,  $\alpha_2$ ,  $\beta_1^{(1)}$ ,  $\beta_2^{(1)}$ ,  $\beta_1^{(2)}$ ,  $\beta_2^{(2)}$  поставлена корректно, то и поставленная обратная краевая задача является корректной, имеющей единственное решение, определяемое уравнениями (2, 1)' и (2, 2)'.

Рассмотрим оценку величины

$$\eta = \| u - v \| = \int_0^1 \int_0^1 [u - v]^2 dx dy. \quad (2, 5)$$

Точное решение уравнения (2, 1)' при начальных условиях (2, 2)' дает  $u = y - \frac{1}{6} + xy$ . Подставляя  $u$  и принятое  $v$  в выражение (2, 5), получим

$$\eta = \int_0^1 \int_0^1 \left[ x^2 + y^2 - y + \frac{1}{6} \right]^2 dx dy = \frac{37}{180},$$

при этом легко подсчитать, что

$$\max |u - v| = \max \left| x^2 + y^2 - y + \frac{1}{6} \right| = \frac{1}{12},$$

$$\begin{aligned} 0 &\leq x \leq 1, \\ 0 &\leq y \leq 1. \end{aligned}$$

## 2. Пример обратной краевой задачи, поставленной некорректно

Дано уравнение

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - (\alpha_1 + \alpha_2 x) \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0, \quad (2, 6)$$

и краевые условия:

$$\left. \begin{aligned} u(0, y) &= \beta_1^{(1)} + \beta_2^{(1)} y^2 \\ u(x, 0) &= \beta_1^{(2)} + \beta_2^{(2)} x^2 \end{aligned} \right\}, \quad (2, 7)$$

где  $\alpha_k$  ( $k = 1, 2$ ),  $\beta_{s_i}^{(i)}$  ( $s_i = 1, 2$ ,  $i = 1, 2$ ) — некоторые произвольные вещественные параметры.

Требуется параметры  $\alpha_k$ ,  $\beta_{s_i}^{(i)}$  определить так, чтобы, например, функция  $v = x^2 + y^2 + xy$  в области  $G = \{0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1\}$  представляла собой наилучшее приближенное или точное решение в смысле метода наименьших квадратов.

Аналогичные расчеты, как и в первом примере, дают:

$$\alpha_1 = 1, \quad \alpha_2 = 0, \quad \beta_1^{(1)} = \beta_2^{(2)} = 0; \quad \beta_2^{(1)} = \beta_1^{(2)} = 1.$$

Причем, как нетрудно подсчитать,  $\delta = \delta_1 = \delta_2 = 0$ .

При найденных значениях параметров, согласно (2, 6) и (2, 7), будем иметь уравнение

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0, \quad (2, 6')$$

и краевые условия:

$$\left. \begin{aligned} u(0, y) &= y^2, \\ u(x, 0) &= x^2. \end{aligned} \right\} \quad (2, 7')$$

Точное решение уравнения (2, 6)' при краевых условиях (2, 7)' дает

$$u = (x + y)^2 + \varphi(x + y) - \varphi(x - y),$$

где  $\varphi$  — любая четная дважды дифференцируемая функция. Отсюда следует, что прямая краевая задача с уравнением (2, 6) и краевыми условиями (2, 7) в рассматриваемых областях изменения переменных и параметров поставлена некорректно. Поэтому, хотя функция  $v = x^2 + y^2 + xy$  точно удовлетворяет уравнению (2, 6)' и краевым условиям (2, 7)', поставленная нами обратная краевая задача является некорректной. Этот пример показывает, насколько важно для решения обратной краевой задачи требование корректной постановки соответствующей ей прямой задачи, так как в противном случае нет смысла ставить вопрос о близости между желаемым  $v$  и допустимым решением  $u$ .

## 3. Физический смысл постановки краевых задач, допускающих данное решение

Как известно, исследование самых разнообразных процессов в физике, механике и в других областях сводится к решению различных уравнений с краевыми условиями, которые характеризуют начальные и граничные состояния данного процесса.

При этом обычно либо в основное уравнение, либо в краевые условия (или в то и другое вместе) входят независимые физические параметры или функции и в реально допустимых пределах изменения этих физических величин соответствующая краевая задача, как правило, всегда является поставленной корректно. Поэтому возможность постановки и решения обратных краевых задач для конкретных физических задач становится вполне реальной.

Для приложений часто важно выяснить, насколько точно может быть реализовано желаемое решение или, что то же самое, желаемый закон физического процесса при практически допустимых вариациях поддающихся регулированию параметров или функций. С этой точки зрения краевые задачи, допускающие данное точное или приближенное решение, можно рассматривать как задачи управления различными процессами в желательном нам направлении.

Однако следует указать, что для разрешимости задачи желаемый закон изменения какого-либо процесса, очевидно, не может быть навязан совершенно произвольно, вопреки здравому смыслу, или же, другими словами, в противоречии с общими свойствами уравнений подобного типа. При этом следует ожидать, что полученное решение будет весьма грубым и практически негодным, или же, в худшем случае, при любых реальных вариациях параметров и функций, входящих в основное уравнение и в краевые условия, обратная задача будет поставлена некорректно\*. Поэтому в каждой конкретной задаче выбор желаемого решения должен производиться сообразно с физической или с математической интуицией по отношению к ожидаемым результатам.

Вышеуказанная новая постановка обратных краевых задач исходит из следующей общей идеи П. Л. Чебышева: „Практическая дея-

\* Не будет выполнено условие 2), которое дано в определении корректно поставленной обратной задачи в § 2.

тельность человека чрезвычайно многообразна и для удовлетворения всех ее требований, разумеется, недостает науке многих и различных методов. Но из них особенную важность имеют те, которые необходимы для решения различных видоизменений одной и той же задачи, общей для всей практической деятельности человека, как располагать средствами своими для достижения по возможности большей выгоды\*.

#### 4. Об одной краевой задаче, допускающей данное решение

Одной из краевых задач, допускающих данное решение, является задача подземной гидромеханики нефтяных месторождений об управлении движением контура нефтеносности, подробно изученная нами и другими авторами [1]—[14].

Как известно, [1], [2] общая гидродинамическая постановка задачи управления движением КН (контура нефтеносности) состоит в том, чтобы выбрать режим отбора нефти из скважин и темпы закачки воды в нагнетательные скважины, а также размещение скважин на месторождении таким образом, чтобы контур нефтеносности стянулся к скважинам равномерно, без отсечения нефти водой и преждевременного прорыва воды в нефтяные скважины.

Таким образом, основной целью решения подобных задач является разработка метода эксплуатации данного нефтяного месторождения в целом, позволяющего рационально управлять продвижением КН. Это управление осуществляется за счет таких оптимальных способов размещения и характера эксплуатации скважин, которые в пределах практически возможной вариации их наилучшим образом обеспечивали бы желаемый закон стягивания КН. Практическая важность управления движением водонефтяного контакта как за счет размещения, так и режимов эксплуатации скважин была, например, подчеркнута в статье члена-корр. АН СССР А. П. Крылова [16].

В виду того, что постановка и методы решения задачи управления движением КН в вышецитированных наших работах была рассмотрена подробно, здесь мы укажем лишь вкратце общую математическую формулировку той краевой задачи, к которой сводится решение задачи управления движением КН, например, в случае, когда различие вязкостей воды и нефти не учитывается.

Рассмотрим плоскую задачу в полярных координатах  $(\theta, r)$  в некоторой области  $G$ , ограниченной контуром  $\Gamma$ . Пусть  $(r_i, \varphi_i)$  ( $i=1, 2, \dots, N$ ) — полярные координаты размещенных в области  $G$  эксплуатационных и нагнетательных скважин, которые принимаются за линейные стоки и источники. Обозначим через  $q_i$  ( $i=1, 2, \dots, N$ ) их текущие объемные дебиты.

Тогда, зная, что пластовое гидродинамическое давление, удовлетворяющее некоторым граничным и начальным условиям в области  $G$ , является функцией координат  $(\theta, r)$ , времени  $t$  и  $3N$  параметров  $(r_i, \varphi_i)$ ,  $q_i$  ( $i=1, 2, \dots, N$ ), а также учитывая линейный закон фильтрации жидкостей в пористой среде, для определения движения КН в однородном пласте будем иметь следующее дифференциальное уравнение в частных производных:

$$\frac{\partial F}{\partial t} = \lambda \left[ \frac{\partial p}{\partial r} \cdot \frac{\partial F}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \cdot \frac{\partial p}{\partial \theta} \cdot \frac{\partial F}{\partial \theta} \right], \quad (4, 1)$$

\* П. Л. Чебышев. "Черчение географических карт". Математические труды, ОГИЗ, 1946, стр. 100.

где  $p = p(\theta, r, t, \varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_N; r_1, r_2, \dots, r_N; q_1, q_2, \dots, q_N)$  является функцией давления, определенной в области  $G$ ,  $\lambda = \frac{k}{m\mu}$ ,  $k$  — проницаемость пласта,  $m$  — пористость,  $\mu$  — вязкость жидкости. При этом начальное положение КН  $\Gamma_0$ , т. е. уравнение

$$F|_{t=0} = F(r, \theta, 0) = 0, \quad (4, 2)$$

считается известным.

Если координаты скважин  $(\varphi_i, r_i)$  и их текущие дебиты считать заданными, то решение уравнения в частных производных первого порядка (4, 1) при начальном условии Коши (4, 2) будет определять закон движения КН  $F(\theta, r, t) = 0$ .

Если на функции  $p$  и  $F$  наложить физически допустимые ограничения, то задача Коши для уравнения (4, 1) в области  $G$  вне особых точек  $(\varphi_i, r_i)$  стоков и источников будет поставлена корректно. Это почти очевидно из физической постановки задачи. Строгое математическое исследование вопроса корректной постановки задачи Коши для уравнений в частных производных 1-го порядка изложено, например, в [17].

Предположим теперь, что мы желаем осуществить движение КН по заранее выбранному закону  $v(\theta, r, t) = 0^*$ , который удовлетворяет начальному условию (4, 2), т. е.

$$v(\theta, r, 0) = 0.$$

Очевидно, такое движение физически может быть реализовано лишь за счет соответствующего способа размещения и характера эксплуатации, т. е. за счет вариации не зависящих друг от друга параметров  $(\varphi_i, r_i)$  и  $q_i$ .

Подставляя функцию  $v$  вместо  $F$  в уравнение (4, 1), мы получим некоторую известную функцию погрешности:

$$\varepsilon(\theta, r, t, \varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_N; r_1, r_2, \dots, r_N; q_1, q_2, \dots, q_N).$$

Далее, для определения значений параметров  $(\varphi_i, r_i)$  и  $q_i$  ( $i=1, 2, \dots, N$ ), как было указано в § 1, применяем какой-либо метод минимальной погрешности с соответствующей оценкой погрешности  $\varepsilon$  и  $u - v$ . Как показывают многие примеры, рассмотренные в работах [2]—[14], решение задач управления движением КН вышеуказанным методом дают практически вполне пригодные результаты.

Подобно указанной выше задаче управления движением КН можно было бы привести очень много примеров других обратных краевых задач, решение которых имело бы большое практическое значение.

К такому типу задач можно отнести, например, следующие:

- 1) определить характер распределения нагрузки, приложенной к балке так, чтобы она имела данную форму прогиба;
- 2) по известному закону распределения давления в пласте определить характер изменения проницаемости и мощности пласта и др.

#### 5. О краевых задачах, допускающих данный класс решений

Наряду с постановкой краевых задач, допускающих данное точное или приближенное решение, можно было бы рассмотреть также различные краевые задачи, допускающие данный класс решений, обладающих какими-либо заранее определенными свойствами.

\* О выборе закона  $v(\theta, r, t) = 0$  см. вышецитированные работы [2] и [5].

Общую постановку таких задач можно сформулировать следующим образом:

найти, каким необходимым и достаточным условиям должны удовлетворять основные уравнения и краевые условия для того, чтобы данная краевая задача имела заранее определенный класс решений, обладающих теми или другими свойствами, и указать методы построения этих решений.

К такому типу краевых задач относится, например, задача, обратная задаче Коши — Ковалевской, ранее изученная нами и другими авторами для класса линейных уравнений в частных производных в области сколь угодно гладких функций. Краткий обзор этих исследований дается в работе [18].

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Салехов Г. С. Прямые и обратные задачи о продвижении водонефтяного контакта. Известия Казанск. филиала АН СССР (серия физико-матем. и техн. наук), вып. 5, 1954.
2. Салехов Г. С. Постановка и методы решения гидродинамических задач управления движением контура нефтеносности. Известия Казанск. филиала АН СССР (серия физико-матем. и техн. наук), вып. 6, 1955.
3. Салехов Г. С. Постановка и методы решения гидродинамических задач управления движением контура нефтеносности. ДАН, 101, № 5, 1955.
4. Салехов Г. С. и Чугунов В. Д. Некоторые задачи управления движением контура нефтеносности. ДАН, 101, № 6, 1955.
5. Чугунов В. Д. Некоторые частные случаи управления продвижением водонефтяного контакта. Известия Казанск. филиала АН СССР (серия физико-матем. и техн. наук), вып. 6, 1955.
6. Данилов В. Л. К задаче определения поля давления при заданном законе стягивания контура нефтеносности. Известия Казанск. филиала АН СССР (серия физико-матем. и техн. наук), вып. 6, 1955.
7. Салехов Г. С. Приложение одного метода минимальной погрешности к решению задач управления движением контура нефтеносности. Известия Казанск. филиала АН СССР (серия физико-матем. и техн. наук), вып. 8, 1955.
8. Салехов Г. С. Об одном способе решения задачи управления движением контура нефтеносности в пластах с водонапорным режимом. Известия Казанск. филиала АН СССР (серия физико-матем. и техн. наук), вып. 8, 1955.
9. Данилов В. Л. Управление перемещением контура нефтеносности с учетом различия вязкостей нефти и воды. Известия Казанск. филиала АН СССР (серия физико-матем. и техн. наук), вып. 8, 1955.
10. Данилов В. Л. К задаче управления перемещением контура нефтеносности. Известия Казанск. филиала АН СССР (серия физико-матем. и техн. наук), вып. 8, 1955.
11. Чугунов В. Д. Об одной задаче управления перемещением контура нефтеносности. Известия Казанск. филиала АН СССР (серия физико-матем. и техн. наук), вып. 8, 1955.
12. Сейфуллина Б. А. Численное решение некоторых задач по управлению движением контура нефтеносности. Известия Казанск. филиала АН СССР (серия физико-матем. и техн. наук), вып. 8, 1955.
13. Салехов Г. С. О методе решения задач одновременного управления движением нескольких контуров нефтеносности. Известия Казанск. филиала АН СССР (серия физико-матем. и техн. наук), вып. 8, 1955.
14. Чугунов В. Д. К задаче управления контуром нефтеносности при упругом режиме нефтяных месторождений. Известия Казанск. филиала АН СССР (серия физико-матем. и техн. наук), вып. 8, 1955.
15. Коллатц Л. Численные методы решения дифференциальных уравнений. И. Л. Москва, 1953.
16. Крылов А. П. Основные принципы разработки нефтяных залежей с применением нагнетания рабочего агента в пласт. Труды МНИ им. акад. И. М. Губкина, Гостехиздат, вып. 12, 1953.
17. Петровский И. Г. Лекции по теории обыкновенных дифференциальных уравнений. Гостехиздат, 1952.
18. Салехов Г. С. и Фридендер В. Г. К вопросу о задаче обратной задаче Коши — Ковалевской. Успехи матем. наук, т. 7, вып. 65 (31), 1952.

Физико-технический институт  
Казанского филиала АН СССР

Поступило  
24 июня 1955 г.

В. Л. Данилов

### ОБ ОДНОВРЕМЕННОМ УПРАВЛЕНИИ НЕСКОЛЬКИМИ КОНТУРАМИ НЕФТЕНОСНОСТИ С УЧЕТОМ РАЗЛИЧИЯ ВЯЗКОСТЕЙ ВОДЫ И НЕФТИ

Излагаются методы решения задачи одновременного управления перемещением нескольких контуров нефтеносности в двухжидкостной системе. Работа является обобщением исследования Г. С. Салехова о нескольких контурах в одножидкостной системе [1], с одной стороны, и исследования автора об одном контуре с учетом различия вязкостей [2], с другой. Для учета различия вязкостей применены методы теории потенциала [3] — [6]. Приведен расчет задачи управления движением двух контуров нефтеносности.

Изученная задача представляет интерес, например, при эксплуатации крупного месторождения с применением внутриконтурного заводнения.

#### § 1. Постановка задачи

1. Рассмотрим однородный изотропный горизонтальный пласт бесконечной протяженности с постоянной мощностью  $h$ . Проницаемость обозначим  $k$ . В этом пласте имеется  $M$  конечных односвязных областей  $G_i$ , насыщенных нефтью с динамической вязкостью  $\mu_i$ ; границы областей  $G_i$  соответственно обозначим через  $\Gamma_i$  (рис. 1). Остальная часть пласта  $G_0$  занята водой с вязкостью  $\mu_0$ . Жидкости и породу будем считать несжимаемыми. Пусть далее в каждой из нефтяных областей  $G_i$  имеются  $l_i$  нефтяных скважин с объемными дебитами  $Q_{ij}$  и координатами  $(x_{ij}, y_{ij})$  ( $j=1, 2, \dots, l_i$ ;  $i=1, 2, \dots, M$ ), в водонасыщенной же части пласта  $G_0$  размещено  $l_0$  водяных скважин с объемными дебитами  $Q_{0j}$  и координатами  $(x_{0j}, y_{0j})$

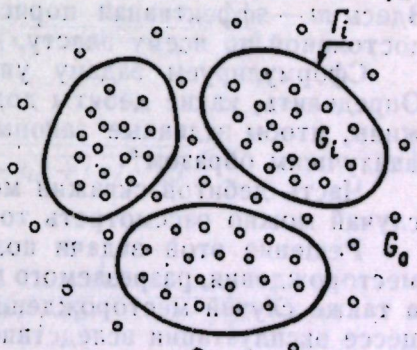


Рис. 1.

$$(j=1, 2, \dots, l_0).$$

Полагая скважины линейными вертикальными источниками и стоками, что можно сделать при рассмотрении движения на удалении от скважин (см. [7]), с учетом вышеприведенных условий приходим к плоской задаче, поэтому в дальнейшем будем рассматривать некоторое горизонтальное сечение пласта.

2. Распределение давлений  $p_0$  в водной части  $G_0$  и  $p_i$  в нефтяных областях  $G_i$  удовлетворяет уравнению Лапласа:

$$\Delta p_i = 0, \quad (i=0, 1, 2, \dots, M), \quad (1, 1)$$



На контурах нефтеносности (КН)  $\Gamma_i$  выполняются следующие соотношения: 1) условие непрерывности давления

$$p_0 = p_i, \quad (i=1, 2, \dots, N), \quad (1, 2)$$

2) условие непрерывности нормальной составляющей скорости фильтрации, которое с учетом закона Дарси дает:

$$c_0 \frac{\partial p_0}{\partial n_i} = c_1 \frac{\partial p_i}{\partial n_i}, \quad (i=1, 2, \dots, N), \quad (1, 3)$$

где

$$c_0 = \frac{k}{\mu_b}, \quad c_1 = \frac{k}{\mu_n},$$

$n_i$  — нормаль к контуру  $\Gamma_i$ , для определенности внутренняя.

Зададим желательные законы стягивания КН  $\Gamma_i$  в виде

$$F_i(x, y, t) = 0 \quad (i=1, 2, \dots, N) \quad (1, 4)$$

такие, чтобы в начальный момент движения  $t=0$  уравнения  $F_i(x, y, 0) = 0$  давали исходные положения КН  $\Gamma_{i0}$ . Движение будем рассматривать до обводнения первой нефтяной скважины.

Известно, что задание законов стягивания (1, 4) означает и задание на  $\Gamma_i$  нормальной производной давления [2], [8].

$$\frac{\partial p_i}{\partial n_i} = \frac{m}{c_i} \frac{\partial F_i}{|\nabla F_i|}, \quad (1, 5)$$

либо, в силу условия (1, 3),

$$\frac{\partial p_0}{\partial n_i} = \frac{m}{c_0} \frac{\partial F_i}{|\nabla F_i|}. \quad (1, 5a)$$

Здесь  $m$  — эффективная пористость, которую далее будем полагать постоянной по всему пласту.

Сформулируем задачу управления по характеру эксплуатации. Определить, какие дебиты должны иметь нефтяные и водяные скважины, чтобы заданные законы стягивания КН  $\Gamma_i$  были реализованы наилучшим образом\*.

Часть дебитов скважин может быть фиксирована заранее. Этот случай можно рассмотреть точно так же, как сделано ниже.

Решение этой задачи позволяет рассмотреть случай крупного месторождения, разрезаемого на части внутриконтурным заводнением, а также случай месторождения, рассеченного краевой водой в процессе эксплуатации вследствие смыкания водяных языков.

## § 2. Первый метод решения

1. Первый этап решения состоит в определении давления в пласте, как функции дебитов  $Q_{ij}$ .

Используя методы теории потенциала [3]—[5], примененные к определению давления Г. Г. Тумашевым [6], для неограниченно простирающегося пласта распределение давления будем отыскивать в следующем виде:

\* Задача в общем случае не имеет точного решения (см. [2], [8]).

$$p = \frac{1}{2\pi h c_0} \sum_{j=1}^{l_0} Q_{0j} \ln \frac{1}{V(x-x_{0j})^2 + (y-y_{0j})^2} + \frac{1}{2\pi h c_1} \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^{l_i} Q_{ij} \ln \frac{1}{V(x-x_{ij})^2 + (y-y_{ij})^2} + \sum_{i=1}^N \int_{\Gamma_i} \rho_i(s_i, t) \ln \frac{1}{V(x-\xi_i)^2 + (y-\eta_i)^2} ds_i, \quad (2, 1)$$

где  $\rho_i$  — плотность логарифмического потенциала простого слоя, непрерывно распределенная по  $\Gamma_i$ ;  $s_i$  — дуговая абсцисса точки контура  $\Gamma_i$ ;  $(\xi_i, \eta_i)$  — декартовы координаты той же точки.

При выборе  $p$  в виде (2, 1) условия (1, 2) выполняются в силу свойств непрерывности потенциала простого слоя. Функция  $p$  удовлетворяет уравнению Лапласа во всех конечных точках плоскости  $x, y$ , за исключением точек  $(x_{ij}, y_{ij})$ , где имеются особенности логарифмического типа, и контуров  $\Gamma_i$ , являющихся особыми линиями. Нормальные производные давления  $p$  терпят на  $\Gamma_i$  разрыв. Потребуем, чтобы этот разрыв соответствовал условиям (1, 3).

Предельные значения производных давления по внутренней нормали  $n_r$  к контуру  $\Gamma_r$  при подходе к нему изнутри и снаружи соответственно равны:

$$\frac{\partial p_r}{\partial n_r} = \frac{1}{2\pi h c_0} \sum_{j=1}^{l_0} Q_{0j} \frac{\partial}{\partial n_r} \ln \frac{1}{V(x_r-x_{0j})^2 + (y_r-y_{0j})^2} + \frac{1}{2\pi h c_1} \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^{l_i} Q_{ij} \frac{\partial}{\partial n_r} \ln \frac{1}{V(x_r-x_{ij})^2 + (y_r-y_{ij})^2} - \pi p_r + \sum_{i=1}^N \int_{\Gamma_i} \rho_i(s_i, t) \frac{\partial}{\partial n_r} \ln \frac{1}{V(x_r-\xi_i)^2 + (y_r-\eta_i)^2} ds_i, \quad (2, 2)$$

$$\frac{\partial p_0}{\partial n_r} = \frac{1}{2\pi h c_0} \sum_{j=1}^{l_0} Q_{0j} \frac{\partial}{\partial n_r} \ln \frac{1}{V(x_r-x_{0j})^2 + (y_r-y_{0j})^2} + \frac{1}{2\pi h c_1} \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^{l_i} Q_{ij} \frac{\partial}{\partial n_r} \ln \frac{1}{V(x_r-x_{ij})^2 + (y_r-y_{ij})^2} + \pi p_r + \sum_{i=1}^N \int_{\Gamma_i} \rho_i(s_i, t) \frac{\partial}{\partial n_r} \ln \frac{1}{V(x_r-\xi_i)^2 + (y_r-\eta_i)^2} ds_i \quad (2, 3)$$

( $r=1, 2, \dots, N$ );

$(x_r, y_r)$  — координаты точки контура  $\Gamma_r$ ,

Умножим выражение (2, 2) на  $c_1$ , а (2, 3) на  $c_0$  и приравняем результаты. После некоторых преобразований получим:

$$\begin{aligned} \pi p_r - \lambda \sum_{l=1}^N \int_{\Gamma_l} p_l(s_l, t) \frac{\partial}{\partial n_r} \ln \frac{1}{V(x_r - x_{lj})^2 + (y_r - y_{lj})^2} ds_l = \\ = \frac{\lambda}{2\pi h c_0} \sum_{j=1}^{l_0} Q_{0j} \frac{\partial}{\partial n_r} \ln \frac{1}{V(x_r - x_{0j})^2 + (y_r - y_{0j})^2} + \\ + \frac{\lambda}{2\pi h c_1} \sum_{l=1}^N \sum_{j=1}^{l_l} Q_{lj} \frac{\partial}{\partial n_r} \ln \frac{1}{V(x_r - x_{lj})^2 + (y_r - y_{lj})^2}, \end{aligned} \quad (2, 4)$$

( $r = 1, 2, \dots, N$ ).

Здесь введено обозначение

$$\frac{c_1 - c_0}{c_1 + c_0} = \lambda, \quad |\lambda| < 1. \quad (2, 5)$$

Соотношения (2, 4) представляют собою систему линейных интегральных уравнений второго рода относительно искомых функций  $p_r$ , к которой применимы теоремы Фредгольма. Существование и единственность решения этой системы можно показать, если наложить на контуры  $\Gamma_l$  некоторые условия гладкости (см. [2]). Эти условия мы будем считать выполненными как в начальный момент (для исходных контуров), так и во все последующее рассматриваемое время движения, в силу заданных законов стягивания (1, 4).

Решив систему уравнений (2, 4), находим  $p_l$  — линейные функции дебитов  $Q_{lj}$ , как это следует из линейности уравнений (2, 4) относительно  $p_l$  и линейности правых частей этих уравнений относительно параметров  $Q_{lj}$ . Метод доказательства аналогичен приведенному в работе [2]. Подставляя найденные функции  $p_l$  в выражение (2, 1) для функции давления, можно убедиться, что и в случае нескольких нефтяных зон справедлива теорема: давление в системе двух несжимаемых жидкостей является линейной однородной функцией дебитов скважин [2].

Выкладки показывают, что давление имеет вид

$$p = \sum_{l=0}^N \sum_{j=1}^{l_l} Q_{lj} [\Phi_{lj}(x, y) + \lambda \Psi_{lj}(x, y, t)], \quad (2, 6)$$

где

$$\Phi_{0j} = \frac{1}{2\pi h c_0} \ln \frac{1}{V(x - x_{0j})^2 + (y - y_{0j})^2},$$

$$\Phi_{lj} = \frac{1}{2\pi h c_1} \ln \frac{1}{V(x - x_{lj})^2 + (y - y_{lj})^2}, \quad (i = 1, 2, \dots, N),$$

а функции  $\Psi_{lj}$  — ограниченные, поскольку контуры  $\Gamma_l$  не пересекают особенностей-скважин.

При  $\lambda \rightarrow 0$ , т. е.  $c_0 \rightarrow c_1$ , из выражения (2, 6) вытекает формула для давления в одножидкостной системе.

Можно заметить, что все вышеприведенные рассуждения применимы и в том случае, когда вязкость нефти в различных областях  $G_l$  различна. Тогда условия (1, 3) принимают вид

$$c_0 \frac{\partial p_0}{\partial n_l} = c_l \frac{\partial p_l}{\partial n_l}, \quad \left( c_l = \frac{k}{\mu_{nl}}, \quad l = 1, 2, \dots, N \right).$$

Давление отыскиваем в форме (сравните с (2, 1))

$$\begin{aligned} p = \frac{1}{2\pi h} \sum_{l=0}^N \frac{1}{c_l} \sum_{j=1}^{l_l} Q_{lj} \ln \frac{1}{V(x - x_{lj})^2 + (y - y_{lj})^2} + \\ + \sum_{l=1}^N \int_{\Gamma_l} p_l(s_l, t) \ln \frac{1}{V(x - \xi_l)^2 + (y - \eta_l)^2} ds_l. \end{aligned} \quad (2, 1a)$$

Система уравнений для определения  $p_l$  записывается так:

$$\begin{aligned} \pi p_r - \lambda_r \sum_{l=1}^N \int_{\Gamma_l} p_l(s_l, t) \frac{\partial}{\partial n_r} \ln \frac{1}{V(x_r - \xi_l)^2 + (y_r - \eta_l)^2} ds_l = \\ = \frac{\lambda_r}{2\pi h} \sum_{l=0}^N \frac{1}{c_l} \sum_{j=1}^{l_l} Q_{lj} \frac{\partial}{\partial n_r} \ln \frac{1}{V(x_r - x_{lj})^2 + (y_r - y_{lj})^2}, \end{aligned} \quad (2, 3a)$$

( $r = 1, 2, \dots, N$ ).

где

$$\lambda_r = \frac{c_r - c_0}{c_r + c_0}, \quad |\lambda_r| < 1.$$

Все дальнейшие рассуждения можно было бы перенести на этот более общий случай.

2. Однако давление имело бы вид, который получается в результате подстановки решений  $p_l$  в формулу (2, 1), лишь в том случае, если бы контуры  $\Gamma_l$  перемещались по заданным законам стягивания (1, 4). Эти законы стягивания и следует обеспечить соответствующим выбором дебитов  $Q_{lj}$ .

Возьмем от соотношений (1, 4) полные производные по времени.

$$\frac{\partial F_l}{\partial t} + \frac{\partial F_l}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial F_l}{\partial y} \frac{dy}{dt} = 0, \quad (i = 1, 2, \dots, N)$$

Подставляя

$$\frac{dx}{dt} = \frac{v_x}{m} = -\frac{c_0}{m} \frac{\partial p_0}{\partial x} \Big|_{\Gamma_l}, \quad \frac{dy}{dt} = \frac{v_y}{m} = -\frac{c_0}{m} \frac{\partial p_0}{\partial y} \Big|_{\Gamma_l},$$

имеем:

$$m \frac{\partial F_l}{\partial t} - c_0 \left[ \frac{\partial F_l}{\partial x} \left( \frac{\partial p_0}{\partial x} \right)_{\Gamma_l} + \frac{\partial F_l}{\partial y} \left( \frac{\partial p_0}{\partial y} \right)_{\Gamma_l} \right] = 0, \quad (i = 1, 2, \dots, N). \quad (2, 7)$$

Здесь подставлены предельные значения производных давления на контуре  $\Gamma_l$  при подходе к нему снаружи. Если подходить к  $\Gamma_l$  изнутри, то получим эквивалентное соотношение

$$m \frac{\partial F_l}{\partial t} - c_1 \left[ \frac{\partial F_l}{\partial x} \left( \frac{\partial p_l}{\partial x} \right)_{\Gamma_l} + \frac{\partial F_l}{\partial y} \left( \frac{\partial p_l}{\partial y} \right)_{\Gamma_l} \right] = 0, \quad (2, 8)$$

( $i = 1, 2, \dots, N$ ).

Уравнения (2, 7) и (2, 8) являются не чем иным, как другой формой записи условия (1, 5) (или (1, 5а)).

Берем для определенности уравнения (2, 7). Подставим в них предельные значения частных производных давления, полученного нами в форме линейной функции параметров  $Q_{ij}$ :

$$m \frac{\partial F_i}{\partial t} - c_0 \left[ \frac{\partial F_i}{\partial x} \left( \frac{\partial p_0}{\partial x} \right)_{\Gamma_i} + \frac{\partial F_i}{\partial y} \left( \frac{\partial p_0}{\partial y} \right)_{\Gamma_i} \right] = \varepsilon_i(x, y, t; Q_{ij}), \quad (2, 9)$$

$$(x_i, y_i) \in \Gamma_i \quad (i = 1, 2, \dots, N).$$

Нам следует определить такие дебиты  $Q_{ij}$ , чтобы известные линейные их функции  $\varepsilon_i$  (они линейны в силу (2, 6)) обратились в нуль независимо от  $x, y \in \Gamma_i$  при любом  $t$  в рассматриваемом интервале времени. Задача эта, очевидно, в общем случае при произвольных наперед заданных законах стягивания контуров  $\Gamma_i$  (1, 4) не имеет точного решения (см. подробнее [1], [2], [8]).

Для приближенного удовлетворения соотношений (2, 9) применим методы минимальной погрешности, например, метод наименьших квадратов [1], [9], [11].

Составим квадратичный функционал [1]:

$$I^2 = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \frac{1}{L_i(t)} \int_{\Gamma_i} \varepsilon_i^2(x, y, t; Q_{ij}) ds_i. \quad (2, 10)$$

Здесь  $L_i(t) = \int_{\Gamma_i} ds_i(t)$  — длина контура  $\Gamma_i$  в момент времени  $t$ .

Условия минимума этого функционала следующие:

$$\frac{1}{2} \frac{\partial I^2}{\partial Q_{qr}} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \frac{1}{L_i(t)} \int_{\Gamma_i} \varepsilon_i \frac{\partial \varepsilon_i}{\partial Q_{qr}} ds_i = 0, \quad (q = 0, 1, 2, \dots, N_i) \quad (r = 1, 2, \dots, l_r) \quad (2, 11)$$

Таким образом, задача определения  $Q_{ij}$  сводится к решению системы  $\sum_{i=0}^N l_i$  линейных неоднородных уравнений с тем же числом неизвестных.

Можно ввести неотрицательные весовые функции  $P_i(s_i, t)$  и составить такой квадратичный функционал:

$$I^2 = \sum_{i=1}^N \int_{\Gamma_i} \bar{P}_i(s_i, t) \varepsilon_i^2 ds_i, \quad (2, 12)$$

где функции  $\bar{P}_i(s_i, t)$  получены из  $P_i(s_i, t)$  нормированием так, чтобы выполнялось условие

$$\sum_{i=1}^N \int_{\Gamma_i} \bar{P}_i(s_i, t) ds_i = 1. \quad (2, 13)$$

Произведем нормирование следующим образом:

$$\bar{P}_i(s_i, t) = \frac{P_i(s_i, t)}{L_i(t) \sum_{i=1}^N \frac{1}{L_i(t)} \int_{\Gamma_i} P_i(s_i, t) ds_i} \quad (2, 14)$$

Тогда условие (2, 13) выполнено, и выражение (2, 12) принимает вид

$$I^2 = \frac{1}{\sum_{i=1}^N \frac{1}{L_i(t)} \int_{\Gamma_i} P_i(s_i, t) ds_i} \sum_{i=1}^N \frac{1}{L_i(t)} \int_{\Gamma_i} P_i(s_i, t) \varepsilon_i^2 ds_i. \quad (2, 15)$$

Придавая большее значение управлению на определенных участках контуров  $\Gamma_i$  в определенные интервалы времени, следует на этих участках соответствующие функции  $P_i$  в это время выбрать большими по величине.

Частным случаем является тот, когда вес  $P_i$  не зависит от точки контура. Тогда

$$I^2 = \frac{1}{\sum_{i=1}^N P_i(t)} \sum_{i=1}^N \frac{P_i(t)}{L_i(t)} \int_{\Gamma_i} \varepsilon_i^2 ds_i. \quad (2, 12a)$$

Выбирая  $P_i(t)$  большим для некоторых  $\Gamma_i$ , мы тем самым с большей точностью управляем движением этих контуров в целом. При этом в различное время можно добиваться большей точности для разных контуров  $\Gamma_i$ . Эта вариация во времени исчезает, если положить  $P_i$  постоянными, но различными для разных контуров, и, наконец, беря  $P_1 = \dots = P_i = \dots = P_N = 1$ , придем к выражению (2, 10).

Возможен и другой подход к задаче. По этому поводу см. [1].

### § 3. Второй метод решения

1. Аналогично тому, как и в случае одного контура нефтеносности, можно предложить иной метод решения задачи, при котором для определения функций  $p_i$  не требуется решать систему интегральных уравнений (см. [6], [2]). Давление будем отыскивать в том же виде, что и ранее (см. (2, 1)).

Из формул (2, 2) и (2, 3) следует, что плотность потенциала простого слоя на контуре  $\Gamma_i$  весьма просто выражается через разность предельных значений нормальных производных давления:

$$p_i = -\frac{1}{2\pi} \left( \frac{\partial p_i}{\partial n} - \frac{\partial p_0}{\partial n_i} \right), \quad (i = 1, 2, \dots, N), \quad (3, 1)$$

или, в силу соотношений (1, 5) и (1, 5а),

$$p_i = -\left( \frac{1}{c_1} - \frac{1}{c_0} \right) \frac{m}{2\pi} \cdot \frac{\frac{\partial F}{\partial t}}{|\nabla F_i|} \quad (i = 1, 2, \dots, N). \quad (3, 2)$$

Поэтому можно сразу записать функцию давления, подставив в нее выражения (3, 2). Имеем:

$$p = \frac{1}{2\pi h c_0} \sum_{j=1}^{l_0} Q_{0j} \ln \frac{1}{V(x-x_{0j})^2 + (y-y_{0j})^2} +$$

$$+ \frac{1}{2\pi h c_1} \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^{l_i} Q_{ij} \ln \frac{1}{V(x-x_{ij})^2 + (y-y_{ij})^2} -$$

$$-\left(\frac{1}{c_1} - \frac{1}{c_0}\right) \frac{m}{2\pi} \sum_{i=1}^N \int_{\Gamma_i} \frac{\partial F_i}{|\nabla F_i|} \ln \frac{1}{V(x-\xi_i)^2 + (y-\eta_i)^2} ds_i, \quad (3, 3)$$

$(\xi_i, \eta_i) \in \Gamma_i.$

Построенная таким образом функция  $p$  отлична от давления, найденного по первому методу. Мы уже обращали на это внимание ([2], § 3). Дело в том, что функция (3, 3) не удовлетворяет условиям (1, 3). Она будет удовлетворять им, если точно выполняются законы стягивания (1, 4), а следовательно, и уравнения движения (1, 5) (или, что то же, (1, 5a)). Но уравнения движения мы соблюдаем в общем случае лишь приближенно.

2. Остается реализовать принятые нами законы перемещения  $\Gamma_i$  (1, 4), т. е. и уравнения движения, за счет соответствующего выбора дебитов  $Q_{ij}$ .

Для этого следует взять уравнения движения в одной из следующих форм записи: (1, 4), (1, 4a), (2, 7), (2, 8), либо, наконец (см. [2], § 3):

$$\frac{\partial p_i}{\partial n_i} + \frac{\partial p_0}{\partial n_0} = -\left(\frac{1}{c_1} + \frac{1}{c_0}\right) m \frac{\partial F_i}{|\nabla F_i|}, \quad (i=1, 2, \dots, N) \quad (3, 4)$$

и подставить в них производные от  $F_i$  в силу выбранных нами законов стягивания контуров  $\Gamma_i$  (1, 4) и предельные значения производных давления, вычисленные из выражения (3, 3). Полученные в результате этой подстановки и переноса всех членов в одну сторону функции  $e_i(x, y, t; Q_{ij})$  (так называемые „невязки“), очевидно, также являются линейными функциями дебитов  $Q_{ij}$ .

Выбор дебитов  $Q_{ij}$ , обеспечивающих наименьшее отклонение невязок  $e_i$  от нуля, может быть осуществлен методами минимальной погрешности, например, методом наименьших квадратов (§ 1, п. 2).

Как видно из вышеизложенного, преимущества простоты второго метода особенно ярко проявляются именно в случае одновременного управления несколькими контурами нефтеносности.

В случае различных вязкостей нефти в зонах  $G_i$  второй метод решения также оказывается применимым. Соотношения (3, 2) принимают вид:

$$p_i = -\left(\frac{1}{c_i} - \frac{1}{c_0}\right) \frac{m}{2\pi} \frac{\partial F_i}{|\nabla F_i|}. \quad (3, 2a)$$

Выражение для давления (2, 1a) записывается так:

$$p = \frac{1}{2\pi h} \sum_{i=0}^N \frac{1}{c_i} \sum_{j=1}^{I_i} Q_{ij} \ln \frac{1}{V(x-x_{ij})^2 + (y-y_{ij})^2} - \frac{m}{2\pi} \sum_{i=1}^N \left(\frac{1}{c_i} - \frac{1}{c_0}\right) \int_{\Gamma_i} \frac{\partial F_i}{|\nabla F_i|} \ln \frac{1}{V(x-\xi_i)^2 + (y-\eta_i)^2} ds_i. \quad (3, 3a)$$

Уравнения (3, 4) также преобразуются:

$$\frac{\partial p_i}{\partial n_i} + \frac{\partial p_0}{\partial n_0} = -\left(\frac{1}{c_i} + \frac{1}{c_0}\right) m \frac{\partial F_i}{|\nabla F_i|}. \quad (3, 4a)$$

В остальных операциях остаются неизменными.

3. Учет контура питания  $\Gamma_0$ , т. е. контура, на котором во все время эксплуатации сохраняется постоянное давление, может быть произведен точно так же, как это сделано для случая одного контура нефтеносности [2]. Поэтому на рассмотрении ограниченного пласта мы специально останавливаться не будем.

#### § 4. Частная задача управления перемещением двух контуров нефтеносности

1. Возьмем случай концентрически-кругового стягивания двух контуров  $\Gamma_1$  и  $\Gamma_2$  (рис. 2) по законам

$$F_1(x, y, t) = R_1 - \sqrt{(x-a)^2 + y^2} = 0, \quad (4, 1)$$

$$F_2(x, y, t) = R_2 - \sqrt{(x+b)^2 + y^2} = 0. \quad (4, 2)$$

Для сокращения счета ограничимся рассмотрением лишь нефтяных скважин. Движение будем рассматривать до обводнения скважин.

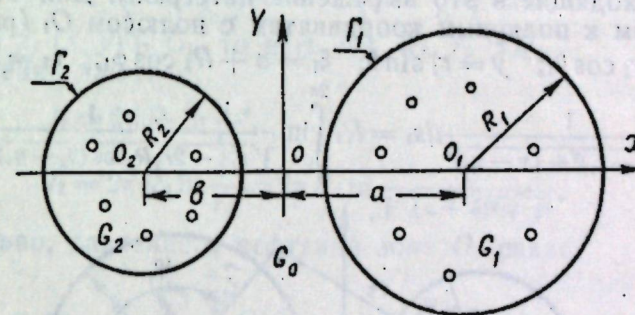


Рис. 2.

Обозначим дебиты и координаты скважин внутри КН  $\Gamma_1$  индексом „1j“, скважин внутри КН  $\Gamma_2$  — индексом „2j“. Согласно (2, 1) давление в неограниченно простирающемся пласте выражается формулой

$$p = \frac{1}{2\pi c_i h} \sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^{I_i} Q_{ij} \ln \frac{1}{V(x-x_{ij})^2 + (y-y_{ij})^2} + \sum_{i=1}^2 \int_{\Gamma_i} p_i(s_i, t) \ln \frac{1}{V(x-\xi_i)^2 + (y-\eta_i)^2} ds_i, \quad (4, 3)$$

где  $p_i$  — плотность потенциала простого слоя, непрерывно распределенная по  $\Gamma_i$ ,  $s_i$  — дуговая абсцисса точки  $\Gamma_i$ ,  $(\xi_i, \eta_i)$  — декартовы координаты той же точки.

Введем две системы полярных координат  $(r_1, \theta_1)$  и  $(r_2, \theta_2)$  с полюсами соответственно в точках  $O_1(x=a, y=0)$ ,  $O_2(x=-b, y=0)$  и полярными углами  $\theta_1$  и  $\theta_2$ , отсчитываемыми от положительного направления оси  $x$  против часовой стрелки.

Законы концентрически-кругового стягивания контуров  $\Gamma_1$  (4, 1) и  $\Gamma_2$  (4, 2) в этих координатах записываются особенно просто:

$$F_1(r_1, \theta_1, t) = R_1(t) - r_1 = 0, \quad (4, 1a)$$

$$F_2(r_2, \theta_2, t) = R_2(t) - r_2 = 0. \quad (4, 2a)$$

Определяя плотности  $\rho_1$  и  $\rho_2$  по второму методу, имеем (§ 3, формула (3, 2)):

$$\rho_1 = -\left(\frac{1}{c_1} - \frac{1}{c_0}\right) \frac{m}{2\pi} \frac{dR_1}{dt}, \quad (4, 4)$$

$$\rho_2 = -\left(\frac{1}{c_1} - \frac{1}{c_2}\right) \frac{m}{2\pi} \frac{dR_2}{dt}. \quad (4, 5)$$

Таким образом, распределение давлений имеет вид:

$$\begin{aligned} p(x, y, t) = & \frac{1}{2\pi c_1 h} \sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^{l_j} Q_{ij} \ln \frac{1}{V(x-x_{ij})^2 + (y-y_{ij})^2} - \\ & - \left(\frac{1}{c_1} - \frac{1}{c_0}\right) \frac{m}{2\pi} \frac{dR_1}{dt} \int_{\Gamma_1} \ln \frac{1}{V(x-\xi_1)^2 + (y-\eta_1)^2} ds_1 - \\ & - \left(\frac{1}{c_1} - \frac{1}{c_0}\right) \frac{m}{2\pi} \frac{dR_2}{dt} \int_{\Gamma_2} \ln \frac{1}{V(x-\xi_2)^2 + (y-\eta_2)^2} ds_2. \end{aligned} \quad (4, 6)$$

Вычислим входящие в это выражение интегралы. Для этого перейдем в первом к полярным координатам с полюсом  $O_1$  (рис. 3):

$$x = a + r_1 \cos \theta_1; \quad y = r_1 \sin \theta_1; \quad \xi_1 = a + R_1 \cos \varphi_1, \quad \eta_1 = R_1 \sin \varphi_1.$$

$$I_1 = \int_{\Gamma_1} \ln \frac{1}{V(x-\xi_1)^2 + (y-\eta_1)^2} ds_1 = R_1 \int_0^{2\pi} \ln \frac{1}{Vr_1^2 - 2r_1 R_1 \cos(\theta_1 - \varphi_1) + R_1^2} d\varphi_1.$$

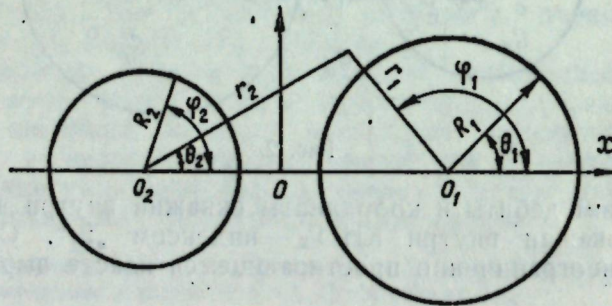


Рис. 3.

Во втором интеграле перейдем к полярным координатам с полюсом  $O_2$ :

$$x = -b + r_2 \cos \theta_2, \quad y = r_2 \sin \theta_2; \quad \xi_2 = -b + R_2 \cos \varphi_2, \quad \eta_2 = R_2 \sin \varphi_2,$$

$$I_2 = \int_{\Gamma_2} \ln \frac{1}{V(x-\xi_2)^2 + (y-\eta_2)^2} ds_2 = R_2 \int_0^{2\pi} \ln \frac{1}{Vr_2^2 - 2r_2 R_2 \cos(\theta_2 - \varphi_2) + R_2^2} d\varphi_2.$$

В зависимости от того, в какой области лежит точка, имеем три случая.

*Случай 1.*  $(x, y) \in G_0$ , то есть  $r_1 > R_1, r_2 > R_2$ . Тогда, вычисляя  $I_1$  и  $I_2$  с помощью разложения подинтегральной функции в равномерно сходящийся тригонометрический ряд и последующего почленного интегрирования, находим:

$$I_1 = 2\pi R_1 \ln \frac{1}{r_1} = 2\pi R_1 \frac{1}{V(x-a)^2 + y^2},$$

$$I_2 = 2\pi R_2 \ln \frac{1}{r_2} = 2\pi R_2 \frac{1}{V(x+b)^2 + y^2}.$$

Подставляя эти значения в формулу (4, 6) и вводя обозначения

$$Q_1 = 2\pi m h R_1 \frac{dR_1}{dt}, \quad Q_2 = 2\pi m h R_2 \frac{dR_2}{dt}, \quad (4, 7)$$

получаем давление в водной области  $G_0$  в виде:

$$\begin{aligned} p_0 = & \frac{1}{2\pi h c_1} \sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^{l_j} Q_{ij} \ln \frac{1}{V(x-x_{ij})^2 + (y-y_{ij})^2} - \\ & - \frac{1}{2\pi h c_1} \left(1 - \frac{c_1}{c_0}\right) Q_1 \ln \frac{1}{V(x-a)^2 + y^2} - \\ & - \frac{1}{2\pi h c_1} \left(1 - \frac{c_1}{c_0}\right) Q_2 \ln \frac{1}{V(x+b)^2 + y^2}. \end{aligned} \quad (4, 8)$$

Таким образом, давление в водной зоне отличается от давления в одножидкостной (нефтяной) системе двумя последними добавочными членами, которые могут быть интерпретированы как поле давлений двух фиктивных скважин в точках  $(a, 0)$  и  $(-b, 0)$  с дебитами соответственно

$$-\left(1 - \frac{c_1}{c_0}\right) Q_1 \text{ и } -\left(1 - \frac{c_1}{c_0}\right) Q_2.$$

*Случай 2.*  $(x, y) \in G_1$ , то есть  $r_1 < R_1, r_2 > R_2$ . Вычисления дают:

$$I_1 = 2\pi R_1 \ln \frac{1}{R_1},$$

$$I_2 = 2\pi R_2 \ln \frac{1}{r_2} = 2\pi R_2 \ln \frac{1}{V(x+b)^2 + y^2}.$$

Следовательно, давление в нефтяной зоне  $G_1$  равно:

$$\begin{aligned} p_1 = & \frac{1}{2\pi h c_1} \sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^{l_j} Q_{ij} \ln \frac{1}{V(x-x_{ij})^2 + (y-y_{ij})^2} - \\ & - \frac{1}{2\pi h c_1} \left(1 - \frac{c_1}{c_0}\right) Q_1 \ln \frac{1}{V(x-a)^2 + y^2} - \frac{1}{2\pi h c_1} \left(1 - \frac{c_1}{c_0}\right) Q_2 \ln \frac{1}{R_2}. \end{aligned} \quad (4, 9)$$

*Случай 3.*  $(x, y) \in G_2$ , то есть  $r_1 > R_1, r_2 < R_2$ . При этом

$$I_1 = 2\pi R_1 \ln \frac{1}{r_1} = 2\pi R_1 \ln \frac{1}{V(x-a)^2 + y^2},$$

$$I_2 = 2\pi R_2 \ln \frac{1}{R_2},$$

и давление в нефтяной зоне  $G_2$  равняется:

$$\begin{aligned} p_2 = & \frac{1}{2\pi h c_1} \sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^{l_j} Q_{ij} \ln \frac{1}{V(x-x_{ij})^2 + (y-y_{ij})^2} - \\ & - \frac{1}{2\pi h c_1} \left(1 - \frac{c_1}{c_0}\right) Q_1 \ln \frac{1}{V(x-a)^2 + y^2} - \frac{1}{2\pi h c_1} \left(1 - \frac{c_1}{c_0}\right) Q_2 \ln \frac{1}{R_2}. \end{aligned} \quad (4, 10)$$

Из выражений (4, 8), (4, 9) и (4, 10) легко видеть, что условия  $p_0 = p_1$  на  $\Gamma_1$ , то есть при  $r_1 = V(x-a)^2 + y^2 = R_1$ , и  $p_0 = p_2$  на  $\Gamma_2$ , то есть при  $r_2 = V(x+b)^2 + y^2 = R_2$ , выполнены.

2. Перейдем к составлению невязок (§ 2, п. 2). Перепишем уравнение (2, 9) для КН  $\Gamma_1$  в полярных координатах  $(r_1, \theta_1)$ :

$$\varepsilon_1 = m \frac{\partial F_1}{\partial t} - c_0 \left( \frac{\partial F_1}{\partial r_1} \cdot \frac{\partial p_0}{\partial r_1} \Big|_{\Gamma_1} + \frac{1}{r_1^2} \frac{\partial F_1}{\partial \theta_1} \cdot \frac{\partial p_0}{\partial \theta_1} \Big|_{\Gamma_1} \right) \quad (4, 11)$$

Из закона стягивания  $\Gamma_1$  (4, 1a), имеем:

$$\frac{\partial F_1}{\partial t} = \frac{dR_1}{dt}, \quad \frac{\partial F_1}{\partial r_1} = -1, \quad \frac{\partial F_1}{\partial \theta_1} = 0. \quad (4, 12)$$

Давление  $p_0$  (4, 8) в системе координат  $(r_1, \theta_1)$  принимает вид:

$$p_0 = \frac{1}{2\pi h c_1} \sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^{l_i} Q_{ij} \ln \frac{1}{\sqrt{r_1^2 - 2r_1 \rho_{ij} \cos(\theta_1 - \alpha_{ij}) + \rho_{ij}^2}} - \frac{1}{2\pi h} \left( \frac{1}{c_1} - \frac{1}{c_0} \right) Q_1 \ln \frac{1}{r_1} - \left( \frac{1}{c_1} - \frac{1}{c_0} \right) \frac{1}{2\pi h} Q_2 \ln \frac{1}{\sqrt{r_1^2 + 2r_1 L \cos \theta_1 + L^2}}. \quad (4, 13)$$

Здесь произведена замена

$$\left. \begin{aligned} x &= a + r_1 \cos \theta_1, & y &= r_1 \sin \theta_1; \\ x_{ij} &= a + \rho_{ij} \cos \alpha_{ij}, & y_{ij} &= \rho_{ij} \sin \alpha_{ij} \end{aligned} \right\} \quad (4, 14)$$

и введено обозначение

$$a + b = L. \quad (4, 15)$$

Предельное значение производной  $\frac{\partial p_0^+}{\partial r_1}$  при стремлении  $r_1$  к  $R_1$  снаружи легко получить, если обратить внимание на то, что  $r_1$  совпадает с внешней нормалью к  $\Gamma_1$  [10].

$$\left( \frac{\partial p_0}{\partial r_1} \right)_{r=R_1}^+ = -\pi p_1 + \left( \frac{\partial p_0}{\partial r_1} \right)_{r_1=R_1}.$$

Используя выражения (4, 4), (4, 7) и (4, 13), находим:

$$\begin{aligned} \left( \frac{\partial p_0}{\partial r_1} \right)_{r=R_1}^+ &= \left( \frac{1}{c_1} - \frac{1}{c_0} \right) m \frac{dR_1}{dt} - \frac{1}{2\pi h c_1} \sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^{l_i} Q_{ij} \frac{R_1 - \rho_{ij} \cos(\theta_1 - \alpha_{ij})}{R_1^2 - 2R_1 \rho_{ij} \cos(\theta_1 - \alpha_{ij}) + \rho_{ij}^2} + \\ &+ \left( \frac{1}{c_1} - \frac{1}{c_0} \right) m R_2 \frac{dR_2}{dt} \frac{R_1 - L \cos(\theta_1 - \pi)}{R_1^2 - 2R_1 L \cos(\theta_1 - \pi) + L^2}. \end{aligned} \quad (4, 16)$$

Ввиду равенства нулю  $\frac{\partial F_1}{\partial \theta_1}$  (см. (4, 12)), производную  $\frac{\partial p_0}{\partial \theta_1}$  вычислять не следует.

Подставляя соотношения (4, 12) и (4, 16) в (4, 11), имеем:

$$\begin{aligned} \varepsilon_1 &= \frac{c_0}{c_1} m \frac{dR}{dt} - \frac{c_0}{c_1} \frac{1}{2\pi h} \sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^{l_i} Q_{ij} \frac{R_1 - \rho_{ij} \cos(\theta_1 - \alpha_{ij})}{R_1^2 - 2R_1 \rho_{ij} \cos(\theta_1 - \alpha_{ij}) + \rho_{ij}^2} + \\ &+ \left( \frac{c_0}{c_1} - 1 \right) m R_2 \frac{dR_2}{dt} \frac{R_1 - L \cos(\theta_1 - \pi)}{R_1^2 - 2R_1 L \cos(\theta_1 - \pi) + L^2}. \end{aligned} \quad (4, 17)$$

Составим невязку по уравнению движения КН  $\Gamma_2$ , которая в полярных координатах  $(r_2, \theta_2)$  согласно (2, 9) записывается в форме:

$$\varepsilon_2 = m \frac{\partial F_2}{\partial t} - c_0 \left( \frac{\partial F_2}{\partial r_2} \cdot \frac{\partial p_0}{\partial r_2} \Big|_{r_2} + \frac{1}{r_2^2} \cdot \frac{\partial F_2}{\partial \theta_2} \cdot \frac{\partial p_0}{\partial \theta_2} \Big|_{r_2} \right). \quad (4, 18)$$

Из закона стягивания КН  $\Gamma_2$  (4, 2a) находим:

$$\frac{\partial F_2}{\partial t} = \frac{dR_2}{dt}, \quad \frac{\partial F_2}{\partial r_2} = -1, \quad \frac{\partial F_2}{\partial \theta_2} = 0. \quad (4, 19)$$

Запишем давление  $p_0$  (4, 8) в функции координат  $(r_2, \theta_2)$ :

$$p_0 = \frac{1}{2\pi h c_1} \sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^{l_i} Q_{ij} \ln \frac{1}{\sqrt{r_2^2 - 2r_2 \delta_{ij} \cos(\theta_2 - \beta_{ij}) + \delta_{ij}^2}} - \frac{1}{2\pi h} \left( \frac{1}{c_1} - \frac{1}{c_0} \right) Q_2 \ln \frac{1}{r_2} - \frac{1}{2\pi h} \left( \frac{1}{c_1} - \frac{1}{c_0} \right) Q_1 \ln \frac{1}{\sqrt{r_2^2 - 2r_2 L \cos \theta_2 + L^2}}. \quad (4, 20)$$

Здесь применены формулы перехода

$$\left. \begin{aligned} x &= -b + r_2 \cos \theta_2, & y &= r_2 \sin \theta_2, \\ x_{ij} &= -b + \delta_{ij} \cos \beta_{ij}, & y &= \delta_{ij} \sin \beta_{ij}. \end{aligned} \right\} \quad (4, 21)$$

Поскольку  $r_2$  совпадает с внешней нормалью к контуру  $\Gamma_2$ , предельное значение производной  $\frac{\partial p_0^+}{\partial r_2}$  при стремлении  $r_2$  к  $R_2$  снаружи равно:

$$\left( \frac{\partial p_0}{\partial r_2} \right)_{r_2=R_2}^+ = -\pi p_2 + \left( \frac{\partial p_0}{\partial r_2} \right)_{r_2=R_2}.$$

Используя выражения (4, 5), (4, 7) и (4, 20), получаем:

$$\begin{aligned} \left( \frac{\partial p_0}{\partial r_2} \right)_{r_2=R}^+ &= \left( \frac{1}{c_1} - \frac{1}{c_0} \right) m \frac{dR_2}{dt} - \frac{1}{2\pi h c_1} \sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^{l_i} Q_{ij} \frac{R_2 - \delta_{ij} \cos(\theta_2 - \beta_{ij})}{R_2^2 - 2R_2 \delta_{ij} \cos(\theta_2 - \beta_{ij}) + \delta_{ij}^2} + \\ &+ \left( \frac{1}{c_1} - \frac{1}{c_0} \right) m R_1 \frac{dR_1}{dt} \frac{R_2 - L \cos \theta_2}{R_2^2 - 2R_2 L \cos \theta_2 + L^2}. \end{aligned} \quad (4, 22)$$

И здесь нет необходимости вычислять  $\frac{\partial p_0}{\partial \theta_2}$ , так как  $\frac{\partial F_2}{\partial \theta_2}$  равно нулю (см. (4, 19)).

Подставим полученные выражения (4, 19) и (4, 22) в формулу (4, 18).

$$\begin{aligned} \varepsilon_2 &= \frac{c_0}{c_1} m \frac{dR_2}{dt} - \frac{c_0}{c_1} \frac{1}{2\pi h} \sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^{l_i} Q_{ij} \frac{R_2 - \delta_{ij} \cos(\theta_2 - \beta_{ij})}{R_2^2 - 2R_2 \delta_{ij} \cos(\theta_2 - \beta_{ij}) + \delta_{ij}^2} + \\ &+ \left( \frac{c_0}{c_1} - 1 \right) m R_1 \frac{dR_1}{dt} \frac{R_2 - L \cos \theta_2}{R_2^2 - 2R_2 L \cos \theta_2 + L^2}. \end{aligned} \quad (4, 23)$$

3. Имея невязки  $\varepsilon_1$  и  $\varepsilon_2$ , составим квадратичный функционал (2, 10), который для нашей конкретной задачи принимает вид:

$$I^2 = \frac{1}{2} \left( \frac{1}{2\pi R_1} \int_0^{2\pi} \varepsilon_1^2 R_1 d\theta_1 + \frac{1}{2\pi R_2} \int_0^{2\pi} \varepsilon_2^2 R_2 d\theta_2 \right) = \frac{1}{4\pi} \left( \int_0^{2\pi} \varepsilon_1^2 d\theta_1 + \int_0^{2\pi} \varepsilon_2^2 d\theta_2 \right).$$

Уравнения для определения дебитов таковы (см. (2, 11)):

$$2\pi \frac{\partial I^2}{\partial Q_{qr}} = \int_0^{2\pi} \varepsilon_1 \frac{\partial \varepsilon_1}{\partial Q_{qr}} d\theta_1 + \int_0^{2\pi} \varepsilon_2 \frac{\partial \varepsilon_2}{\partial Q_{qr}} d\theta_2 = 0 \quad (4, 24)$$

$$\left( \begin{aligned} q &= 1, 2; \\ r &= 1, 2, \dots, l_q. \end{aligned} \right)$$

Интегралы в уравнениях (4, 24) вычисляются путем разложения сомножителей под интегралами в равномерно сходящиеся тригонометрические ряды:

$$\int_0^{2\pi} \left[ A_0 + \sum_{k=1}^{\infty} (A_k \cos k\theta + B_k \sin k\theta) \right] \cdot \left[ a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos k\theta + b_k \sin k\theta) \right] d\theta =$$

$$= 2\pi A_0 a_0 + \pi \sum_{k=1}^{\infty} (A_k a_k + B_k b_k).$$

При этом следует воспользоваться соотношениями:

$$\rho_{1j}, \rho_{1r} < R_1; \quad \rho_{2j}, \rho_{2r} > R_1, \quad L > R_1,$$

$$\delta_{1j}, \delta_{1r} < R_2; \quad \delta_{2j}, \delta_{2r} > R_2, \quad L > R_2.$$

Полученные таким образом ряды легко суммируются.

Подставляя значения интегралов в соотношения (4, 24) и производя элементарные преобразования, приходим к следующей системе  $l_1 + l_2$  линейных неоднородных относительно дебитов  $Q_{1r}$  и  $Q_{2r}$  уравнений:

$$\sum_{j=1}^{l_1} Q_{1j} \left[ 1 - \frac{1}{2} \rho_{1j} \rho_{1r} \frac{\rho_{1j} \rho_{1r} - R_1^2 \cos(\alpha_{1j} - \alpha_{1r})}{R_1^4 - 2R_1^2 \rho_{1j} \rho_{1r} \cos(\alpha_{1j} - \alpha_{1r}) + \rho_{1j}^2 \rho_{1r}^2} - \frac{1}{2} R_1^2 \frac{R_2^2 - \delta_{1j} \delta_{1r} \cos(\beta_{1j} - \beta_{1r})}{R_2^4 - 2R_2^2 \delta_{1j} \delta_{1r} \cos(\beta_{1j} - \beta_{1r}) + \delta_{1j}^2 \delta_{1r}^2} \right] +$$

$$+ \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{l_2} Q_{2j} \left[ \rho_{1r} \frac{\rho_{1r} - \rho_{2j} \cos(\alpha_{2j} - \alpha_{1r})}{\rho_{2j}^2 - 2\rho_{2j} \rho_{1r} \cos(\alpha_{2j} - \alpha_{1r}) + \rho_{1r}^2} + \left( \frac{R_1}{R_2} \right)^2 \delta_{2j} \frac{\delta_{2j} - \delta_{1r} \cos(\beta_{2j} - \beta_{1r})}{\delta_{2j}^2 - 2\delta_{2j} \delta_{1r} \cos(\beta_{2j} - \beta_{1r}) + \delta_{1r}^2} \right] = 2\pi m h R_1 \frac{dR_1}{dt} +$$

$$+ \left( 1 - \frac{c_1}{c_0} \right) \pi m h R_2 \frac{dR_2}{dt} \rho_{1r} \frac{\rho_{1r} - L \cos(\pi - \alpha_{1r})}{L^2 - 2L \rho_{1r} \cos(\pi - \alpha_{1r}) + \rho_{1r}^2} -$$

$$- \left( 1 - \frac{c_1}{c_0} \right) \pi m h R_1 \frac{dR_1}{dt} R_1^2 \frac{R_2^2 - L \delta_{1r} \cos \beta_{1r}}{R_2^4 - 2R_2^2 L \delta_{1r} \cos \beta_{1r} + L^2 \delta_{1r}^2}, \quad (4, 25)$$

$$(r = 1, 2, \dots, l_1);$$

$$\frac{1}{2} \sum_{j=1}^{l_1} Q_{1j} \left[ \delta_{2r} \frac{\delta_{2r} - \delta_{1j} \cos(\beta_{1j} - \beta_{2r})}{\delta_{1j}^2 - 2\delta_{1j} \delta_{2r} \cos(\beta_{1j} - \beta_{2r}) + \delta_{1j}^2 \delta_{2r}^2} + \left( \frac{R_1}{R_2} \right)^2 \rho_{1j} \frac{\rho_{1j} - \rho_{2r} \cos(\alpha_{1j} - \alpha_{2r})}{\rho_{1j}^2 - 2\rho_{1j} \rho_{2r} \cos(\alpha_{1j} - \alpha_{2r}) + \rho_{2r}^2} \right] +$$

$$+ \sum_{j=1}^{l_2} Q_{2j} \left[ 1 - \frac{1}{2} \delta_{2j} \delta_{2r} \frac{\delta_{2j} \delta_{2r} - R_2^2 \cos(\beta_{2j} - \beta_{2r})}{R_2^4 - 2R_2^2 \delta_{2j} \delta_{2r} \cos(\beta_{2j} - \beta_{2r}) + \delta_{2j}^2 \delta_{2r}^2} - \frac{1}{2} R_2^2 \frac{R_1^2 - \rho_{2j} \rho_{2r} \cos(\alpha_{2j} - \alpha_{2r})}{R_1^4 - 2R_1^2 \rho_{2j} \rho_{2r} \cos(\alpha_{2j} - \alpha_{2r}) + \rho_{2j}^2 \rho_{2r}^2} \right] =$$

$$= 2\pi m h R_2 \frac{dR_2}{dt} + \left( 1 - \frac{c_1}{c_0} \right) \pi m h R_1 \frac{dR_1}{dt} \delta_{2r} \frac{\delta_{2r} - L \cos \beta_{2r}}{L^2 - 2L \delta_{2r} \cos \beta_{2r} + \delta_{2r}^2} -$$

$$- \left( 1 - \frac{c_1}{c_0} \right) \pi m h R_2 \frac{dR_2}{dt} R_2^2 \frac{R_1^2 - L \rho_{2r} \cos(\pi - \alpha_{2r})}{R_1^4 - 2R_2^2 L \rho_{2r} \cos(\pi - \alpha_{2r}) + L^2 \rho_{2r}^2}. \quad (4, 26)$$

$$(r = 1, 2, \dots, l_2).$$

В этих уравнениях остались две системы полярных координат  $(r_1, \theta_1)$  и  $(r_2, \theta_2)$ . Формулы перехода к декартовой системе приведены выше (см. (4, 14) и (4, 21)). Из системы (4, 25) — (4, 26) видно, что при прочих равных условиях дебиты зависят лишь от отношения  $\frac{c_1}{c_0} = \frac{\mu_b}{\mu_n}$ , а не от абсолютных значений вязкостей.

4. Рассмотрим более частный случай стягивания двух симметричных относительно оси  $y$  круговых контуров  $R_1(t) = R_2(t) = R(t)$ ,  $a = b = \frac{L}{2}$ . При этом пусть скважины расположены также симметрично относительно оси  $y$ , т. е. (см. рис. 4)  $\rho_{1j,r} = \delta_{2j,r}$ ;  $\alpha_{1j,r} = \pi - \beta_{2j,r}$ ;  $\rho_{2j,r} = \delta_{1j,r}$ ,  $\alpha_{2j,r} = \pi - \beta_{1j,r}$ .

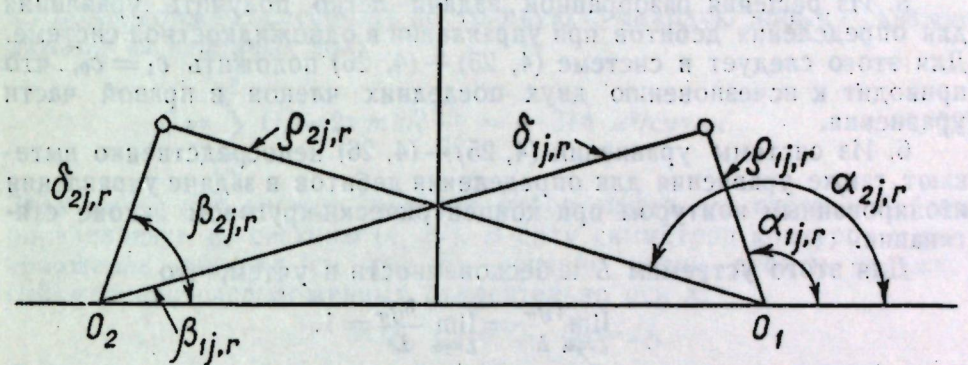


Рис. 4.

Тогда система уравнений (4, 25) — (4, 26) принимает вид:

$$\sum_{j=1}^{l_1} (a_{jr} Q_{1j} + b_{jr} Q_{2j}) = c_r,$$

$$(r = 1, 2, \dots, l_1)$$

$$\sum_{j=1}^{l_2} (b_{jr} Q_{1j} + a_{jr} Q_{2j}) = c_r,$$

откуда  $\sum_{j=1}^{l_1} (a_{jr} - b_{jr})(Q_{1j} - Q_{2j}) = 0$ . Если  $\det(a_{jr} - b_{jr}) \neq 0$ , то  $Q_{1j} = Q_{2j}$  и система  $2l_1$  уравнений сводится к системе  $l_1$  уравнений:

$$\sum_{j=1}^{l_1} Q_{1j} \left[ 1 - \frac{1}{2} \rho_{1j} \rho_{1r} \frac{\rho_{1j} \rho_{1r} - R^2 \cos(\alpha_{1j} - \alpha_{1r})}{R^4 - 2R^2 \rho_{1j} \rho_{1r} \cos(\alpha_{1j} - \alpha_{1r}) + \rho_{1j}^2 \rho_{1r}^2} - \frac{1}{2} R^2 \frac{R^2 - \rho_{2j} \rho_{2r} \cos(\alpha_{2j} - \alpha_{2r})}{R^4 - 2R^2 \rho_{2j} \rho_{2r} \cos(\alpha_{2j} - \alpha_{2r}) + \rho_{2j}^2 \rho_{2r}^2} + \frac{1}{2} \rho_{1r} \frac{\rho_{1r} - \rho_{2j} \cos(\alpha_{2j} - \alpha_{1r})}{\rho_{2j}^2 - 2\rho_{2j} \rho_{1r} \cos(\alpha_{2j} - \alpha_{1r}) + \rho_{1r}^2} + \frac{1}{2} \rho_{1j} \frac{\rho_{1j} - \rho_{2r} \cos(\alpha_{1j} - \alpha_{2r})}{\rho_{1j}^2 - 2\rho_{1j} \rho_{2r} \cos(\alpha_{1j} - \alpha_{2r}) + \rho_{2r}^2} \right] =$$

$$= 2\pi m h R \frac{dR}{dt} + \left( 1 - \frac{c_1}{c_0} \right) \pi m h \frac{dR}{dt} R \left[ \rho_{1r} \frac{\rho_{1r} - L \cos(\pi - \alpha_{1r})}{L^2 - 2L \rho_{1r} \cos(\pi - \alpha_{1r}) + \rho_{1r}^2} - R^2 \frac{R^2 - L \rho_{2r} \cos(\pi - \alpha_{2r})}{R^4 - 2R^2 L \rho_{2r} \cos(\pi - \alpha_{2r}) + L^2 \rho_{2r}^2} \right]. \quad (4, 27)$$

$$(r = 1, 2, \dots, l_1).$$

Здесь величины  $\rho_{1j,r}$ ,  $\alpha_{1j,r}$  и  $\rho_{2j,r}$ ,  $\alpha_{2j,r}$  взаимосвязаны вследствие симметричного расположения скважин относительно оси  $y$ :

$$\rho_{2j,r} = \rho_{1j,r} - 2\rho_{1j,r}L \cos(\pi - \alpha_{1j,r}) + L^2,$$

$$\alpha_{2j,r} = \pi - \gamma_{j,r}, \text{ где } \sin \gamma_{j,r} = \frac{\rho_{1j,r}}{\rho_{2j,r}} \sin \alpha_{1j,r}.$$

Кстати отметим, что так как ось  $y$  является, в силу симметрии, линией тока, то систему уравнений (4, 27) можно рассматривать как систему для определения дебитов в задаче управления перемещением одного кругового контура  $\Gamma_1$  (или  $\Gamma_2$ ) при наличии прямолинейного сброса на расстоянии  $\frac{L}{2}$  от центра контура  $\Gamma_1$ .

5. Из решения разобранной задачи легко получить уравнения для определения дебитов при управлении в одножидкостной системе. Для этого следует в системе (4, 25) — (4, 26) положить  $c_1 = c_0$ , что приводит к исчезновению двух последних членов в правой части уравнения.

6. Из системы уравнений (4, 25) — (4, 26) непосредственно вытекают также уравнения для определения дебитов в задаче управления изолированным контуром при концентрически-круговом законе стягивания.

Для этого устремим  $L$  к бесконечности и учтем, что

$$\lim_{L \rightarrow \infty} \frac{\rho_{2j,r}}{L} = \lim_{L \rightarrow \infty} \frac{\delta_{1j,r}}{L} = 1.$$

Все остальные величины ограничены.

Тогда из уравнений (4, 25) получаем:

$$\sum_{j=1}^{l_1} Q_{1j} \left[ 1 - \frac{1}{2} \rho_{1j} \rho_{1r} \frac{\rho_{1j} \rho_{1r} - R_1^2 \cos(\alpha_{1j} - \alpha_{1r})}{R_1^4 - 2R_1^2 \rho_{1j} \rho_{1r} \cos(\alpha_{1j} - \alpha_{1r}) + \rho_{1j}^2 \rho_{1r}^2} \right] = 2\pi mhR_1 \frac{dR_1}{dt}, \quad (4, 28)$$

$$(r = 1, 2, \dots, l_1).$$

Система уравнений (4, 28) дает решение задачи управления КН  $\Gamma_1$  в бесконечном пласте. Аналогичная система для контура  $\Gamma_2$  получается предельным переходом из уравнений (4, 26). Ту же систему мы получаем из уравнений (4, 29) работы [2], если положим в них  $Q_j = 0$  при  $j = m+1, \dots, m+l$ , т. е. при отсутствии нагнетательных скважин (уравнения (4, 30) работы [2] при этом отпадают).

7. Для оценки взаимного влияния контуров на распределение дебитов при одновременном управлении перемещением этих контуров были проведены численные расчеты\*. Исходные параметры

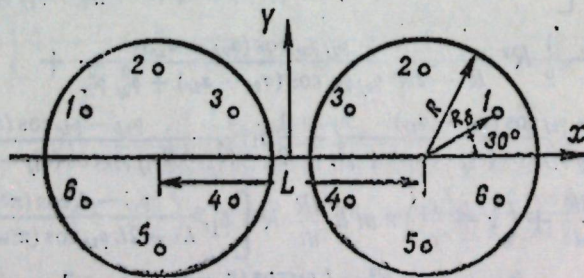


Рис. 5.

\* Вычисления выполнены В. В. Скворцовым.

пласта и жидкостей:  $h = 5$  м,  $m = 0,2$ ,  $k = 1$  дарси,  $\mu_n = 2$  сп (сантиспуаз),  $\rho_n = 1$  сп.

Внутри каждого из 2 контуров нефтеносности размещена батарея из 6 скважин, равноотстоящих друг от друга по окружности радиуса  $R_0 = 750$  м (рис. 5). Расстояние между центрами контуров  $L = 2300$  м. Начальный радиус контуров  $R_n = 1000$  м, конечный  $R_k = 855$  м. На время эксплуатации  $T = 2700$  суток  $\approx 7,4$  года принят следующий закон стягивания, одинаковый для обоих контуров:

$$R = \sqrt{R_n^2 - \frac{t}{2700}(R_n^2 - R_k^2)} \quad (\text{м})$$

( $t$  — время в сутках),

который должен обеспечить постоянную суммарную добычу скважин каждой из нефтяных зон:

$$Q = \sum_{j=1}^6 Q_j = 2\pi mhR \frac{dR}{dt} = -314 \text{ м}^3/\text{сутки}. \quad (4, 29)$$

Знак минус при дебите означает отбор нефти из пласта. Дебиты определялись из системы (4, 27). В силу симметрии контуров и расположения скважин (см. рис. 5), попарно равны дебиты скважин, симметрично расположенных относительно оси  $x$ :

$$Q_1 = Q_6, Q_2 = Q_5, Q_3 = Q_4.$$

Поэтому система 6 уравнений свелась к 3 уравнениям с 3 неизвестными.

Кроме того, выполнены расчеты при тех же данных, но при большем расстоянии между контурами  $\Gamma_1$  и  $\Gamma_2$ :  $L = 4000$  м. Полученные значения дебитов сведены в таблицу 1.

Таблица 1

	$t$ суток	0	900	1800	2700
$L = 2300$ м	$Q_1 = Q_6$ м <sup>3</sup> /сут.	-32,7	-36,3	-38,5	-39,2
	$Q_2 = Q_5$ .	-40,0	-41,3	-42,7	-42,0
	$Q_3 = Q_4$ .	-77,9	-72,8	-66,5	-54,8
	$Q = \sum_{j=1}^6 Q_j$ .	-301,2	-300,8	-295,4	-272,0
$L = 4000$ м	$Q_1 = Q_6$ .	-40,1	-41,0	-41,9	-42,4
	$Q_2 = Q_5$ .	-47,8	-46,8	-46,8	-43,3
	$Q_3 = Q_4$ .	-64,6	-62,8	-58,6	-52,1
	$Q = \sum_{j=1}^6 Q_j$ .	-305,0	-301,2	-294,0	-275,6



Графики изменения дебитов со временем, построенные по данным таблицы 1, приведены на рис. 6 и 7 (сплошные линии соответствуют двухжидкостной системе).

Штрихпунктиром изображена линия, соответствующая управлению изолированным контуром ( $L = \infty$ ) при остальных неизменных данных (см. табл. 2). В этом случае, в силу симметрии  $Q_1 = Q_2 = \dots = Q_6$ , и система уравнений (4, 27) сводится к одному уравнению.

Таблица 2

$t$ суток	0	900	1800	2700
$Q_1 = \dots = Q_6$ м <sup>3</sup> /сут.	-51,5	-50,9	-48,7	-45,4
$Q = \sum_{i=1}^6 Q_i$ м <sup>3</sup> /сут.	-309,0	-305,4	-292,2	-272,4

Из сравнения кривых на рис. 6 и 7 видно, что взаимодействие контуров весьма ощутительно при расстоянии между контурами такого же порядка, как размеры нефтяных зон. Значения дебитов при  $t=0$  и  $L=2300$  отличаются между собой в 2,4 раза. При  $L=4000$  м отношение величин дебитов  $Q_3$  и  $Q_1$  для  $t=0$  равно 1,6. Это расхождение уменьшается по мере стягивания контуров.

С целью оценки влияния различия вязкостей нефти и воды были сделаны расчеты дебитов при  $\mu_n = \mu_w$  (§ 4, п. 5). Остальные исходные данные, включая закон стягивания, оставлены прежними. Результаты для случаев  $L=2300$  м и  $L=4000$  м даны в таблице 3. Дебиты при управлении изолированным контуром те же, что и в двухжидкостной системе (табл. 2). См. по этому поводу [2].

Таблица 3

$t$ суток		0	300	1800	2700
$L=2300$ м	$Q_1 = Q_6$ м <sup>3</sup> /сут	-16,7	-21,0	-25,3	-29,6
	$Q_2 = Q_5$ .	-24,8	-30,4	-35,0	-37,5
	$Q_3 = Q_4$ .	-105,9	-95,9	-82,3	-66,0
	$Q = \sum_{i=1}^6 Q_i$ .	-294,8	-294,6	-285,2	-266,3
$L=4000$ м	$Q_1 = Q_6$ .	-28,7	-31,6	-34,3	-36,5
	$Q_2 = Q_5$ .	-42,6	-44,3	-44,8	-41,7
	$Q_3 = Q_4$ .	-81,5	-74,6	-68,9	-59,0
	$Q = \sum_{i=1}^6 Q_i$ .	-305,6	-301,0	-296,0	-274,4

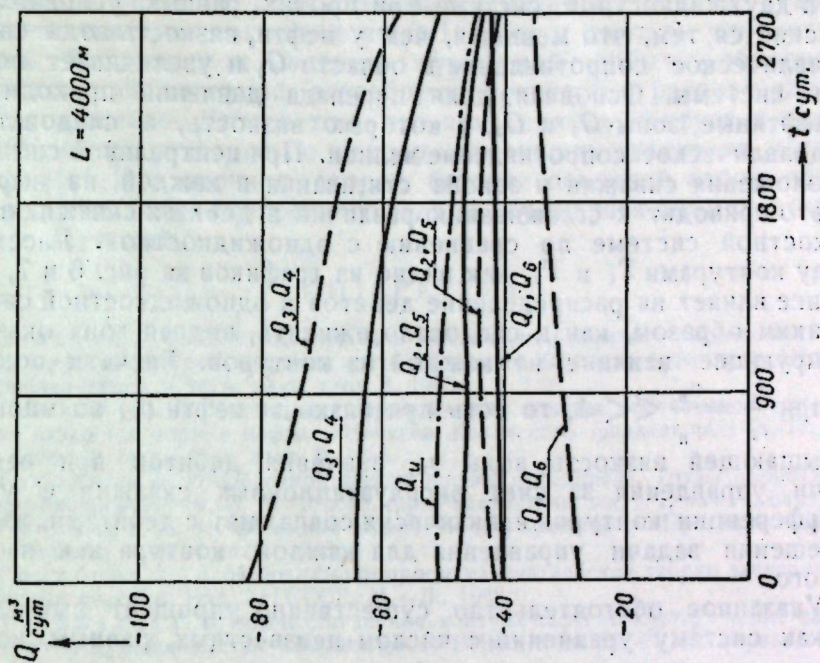


Рис. 7.

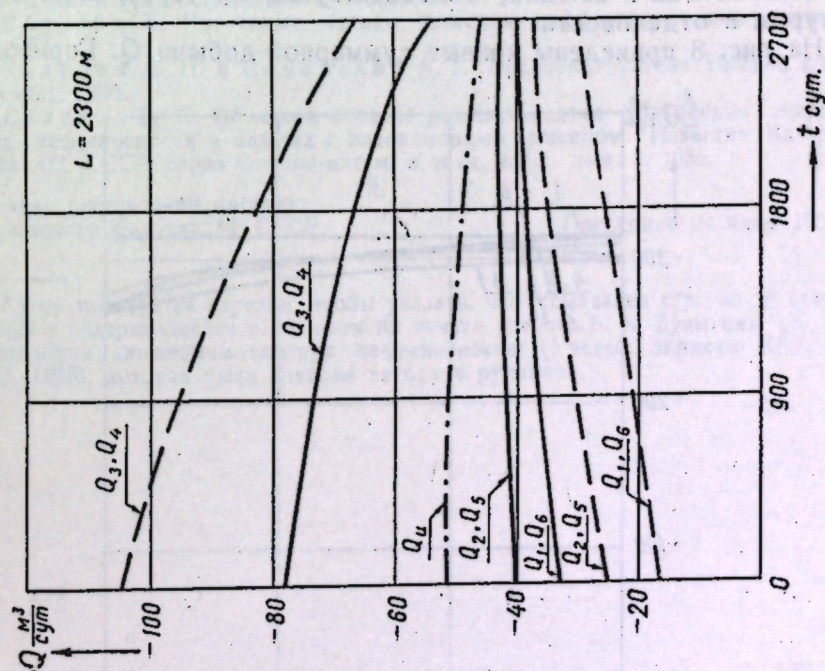


Рис. 6.

На рис. 6 и 7 показано изменение дебитов со временем по данным таблицы 3 (штриховые линии соответствуют одножидкостной системе). Сопоставляя графики на рис. 6 и 7, можно заключить, что взаимное влияние контуров в одножидкостной системе гораздо сильнее, чем в двухжидкостной системе при прочих равных условиях. Это объясняется тем, что меньшая, чем у нефти, вязкость воды снижает гидравлическое сопротивление в области  $G_0$  и увеличивает подвижность системы. Основная доля перепада давлений приходится на нефтяные зоны  $G_1$  и  $G_2$ , в которых вязкость, а следовательно и гидравлическое сопротивление велики. При центральной симметрии расположения скважин и закона стягивания в каждой из нефтяных зон это приводит к сглаживанию различия в дебитах скважин в двухжидкостной системе по сравнению с одножидкостной. Расстояние между контурами  $\Gamma_1$  и  $\Gamma_2$ , как видно из графиков на рис. 6 и 7, также сильнее влияет на распределение дебитов в одножидкостной системе.

Таким образом, как и следовало ожидать, водная зона оказывает изолирующее влияние на каждый из контуров. Расчеты показали,

что при  $\frac{c_1}{c_2} = \frac{\mu_n}{\mu_w} \ll 1$ , то есть при вязкости нефти  $\mu_n$ , во много раз превышающей вязкость воды  $\mu_w$ , значения дебитов при решении задачи управления за счет эксплуатационных скважин с учетом интерференции контуров практически совпадают с дебитами, взятыми из решения задачи управления для каждого контура как изолированного.

Указанное обстоятельство существенно упрощает вычисления, так как систему уравнений с числом неизвестных, равным количеству варьируемых дебитов, при  $\frac{c_2}{c_1} \ll 1$  с достаточной точностью можно заменить несколькими системами уравнений с меньшим числом неизвестных в каждой, соответствующими управлению каждым контуром в отдельности.

На рис. 8 приведены кривые суммарной добычи  $Q$ . Горизонталь-

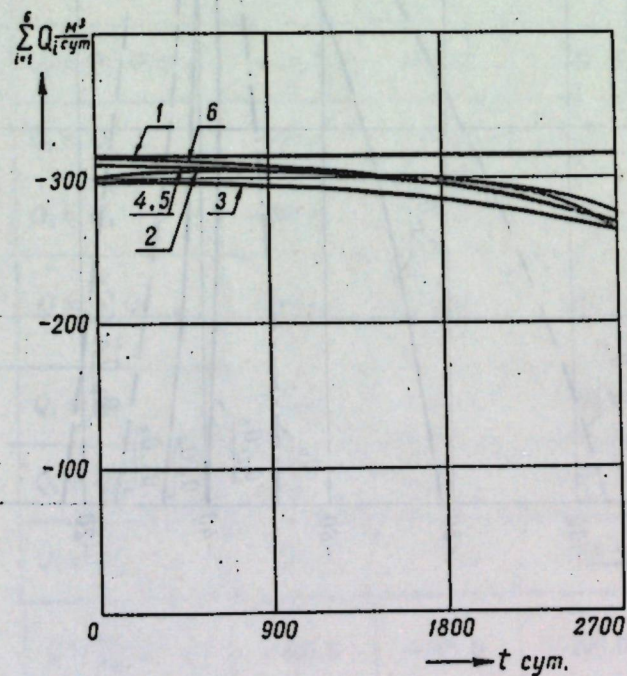


Рис. 8.

ная прямая 1 соответствует  $Q$ , вычисленному из заданного закона стягивания (см. (4, 29)), кривые 2 и 3 — двухжидкостной системе соответственно при  $L=2300$  м и  $L=4000$  м (табл. 1), кривые 4 и 5 — одножидкостной системе соответственно при  $L=2300$  м и  $L=4000$  м (табл. 3), кривая 6 — изолированному контуру (табл. 2).

Совпадение кривых с заданной 1 следует считать удовлетворительным. Тенденция к падению суммарной добычи объясняется однобатарейной системой разработки, принятой в расчете для простоты вычислений. Дело в том, что при подходе контура к скважинам дебиты при решении по методу наименьших квадратов затухают до нуля [11]. При наличии второй батареи основной отбор переносится на скважины внутреннего ряда, и суммарная добыча остается ближе к заданной.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Салехов Г. С. О методе решения задач одновременного управления движением нескольких контуров нефтеносности. Известия Казанского филиала АН СССР, серия физико-матем. и техн. наук, вып. 8, 1955.
2. Данилов В. Л. Управление перемещением контура нефтеносности с учетом различия вязкостей воды и нефти. Известия Казанского филиала АН СССР, серия физико-матем. и техн. наук, вып. 8, 1955.
3. Гусейнов А. И. Об одной задаче теории потенциала. Труды Азербайджанского государственного университета им. С. М. Кирова, серия математическая, т. 1, вып. 1, Баку, 1942.
4. Гусейнов А. И. Об одной задаче теории потенциала. Прикладная математика и механика, т. 12, вып. 1, 1948.
5. Гринберг Г. А. Избранные вопросы математической теории электрических и магнитных явлений. Изд. АН СССР, М.—Л., 1948.
6. Тумашев Г. Г. К задаче стягивания контура нефтеносности. Ученые записки Казанского государственного университета. Сборник работ НИИММ им. Н. Г. Чеботарева, т. 113, кн. 10, 1953.
7. Чарный И. А. Подземная гидромеханика. Гостехиздат, 1948.
8. Данилов В. Л. К задаче определения поля давления при заданном законе стягивания контура нефтеносности. Известия Казанского филиала АН СССР, серия физико-матем. и техн. наук, вып. 6, 1955\*.
9. Коллатц Л. Численные методы решения дифференциальных уравнений. И. Л., 1953.
10. Тихонов А. Н. и Самарский А. А. Уравнения математической физики. Гостехиздат, 1953.
11. Салехов Г. С. Об одном способе решения задачи управления движением контура нефтеносности в пластах с водонапорным режимом. Известия Казанского филиала АН СССР, серия физико-матем. и техн. наук, вып. 8, 1955.

Физико-технический институт  
Казанского филиала АН СССР.

Поступило 24 июня 1955 г.

\* Автор пользуется случаем, чтобы указать, что ссылка на стр. 55 в статье [8] относится к задержавшейся с выходом из печати работе В. Я. Булыгина "К задаче об управлении движением контура нефтеносности" (Ученые записки КГУ, т. 115, вып. 12, 1955), которая была знакома автору в рукописи.

Г. П. Цыбульский

### РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ УПРАВЛЕНИЯ ДВИЖЕНИЕМ НЕЗВЕЗДНЫХ КОНТУРОВ НЕФТЕНОСНОСТИ

В статье рассмотрено решение задачи управления движением контура нефтеносности, когда закон стягивания задается в параметрической форме. Это позволяет охватить случаи как звездных, так и незвездных контуров. Приводится пример решения.

В работах Г. С. Салехова [1], [2], [3] была поставлена задача управления движением контура нефтеносности (КН), которая формулируется следующим образом:

«Определить такие оптимальные способы размещения и эксплуатации скважин на данном месторождении, которые в пределах практически возможной вариации их наилучшим образом обеспечили бы желаемый закон стягивания контура нефтеносности» [2].

В [2]—[9] дан метод решения этой задачи для звездных контуров и рассмотрены конкретные примеры.

В настоящей работе указанный метод обобщается на случай параметрического задания закона движения КН, что позволяет охватить случаи как звездных, так и незвездных контуров. Напомним, что плоский контур называется незвездным, если в его плоскости нет такой точки, чтобы все лучи, исходящие из нее, пересекались с контуром не более одного раза.

В дальнейшем мы будем рассматривать решение задачи управления движением КН по характеру эксплуатации, т. е. только за счет вариации дебитов.

Все рассуждения проводятся при следующих предположениях: пласт горизонтальный, однородный, изотропный, постоянной мощностью; система одножидкостная; режим пласта водонапорный; справедлив линейный закон фильтрации.

#### § 1. О законах движения КН, заданных в параметрической форме

В практике очень часто можно встретить случаи, когда КН является незвездным. В этих случаях метод решения задачи управления движением КН в той его форме, как он применен при задании закона стягивания в виде  $r = f(\varphi, t)$  [2]—[4] ( $r$  — радиус-вектор точек контура,  $\varphi$  — полярный угол,  $t$  — время), непосредственно не может быть использован. Если задавать закон стягивания КН в параметрической форме

$$\left. \begin{aligned} x &= \bar{x}(\theta, t) \\ y &= \bar{y}(\theta, t) \end{aligned} \right\} \begin{aligned} &(\theta_0 \leq \theta \leq \theta_1) \\ &(t_0 \leq t \leq T), \end{aligned} \quad (1, 1)$$

где  $\theta$  — параметр,  $t$  — время, функции  $\bar{x}$  и  $\bar{y}$  непрерывно дифференцируемы по  $\theta$  и  $t$ , то метод, изложенный в работах [2]—[4], может быть обобщен и на случай незвездных контуров.

Будем считать, что во все время движения  $t$  ( $t_0 \leq t \leq T$ ) параметр  $\theta$  изменяется непрерывно в одних и тех же пределах:  $0 \leq \theta < 2\pi$ . Отнесем каждой частице жидкости, расположенной на начальном КН, определенное значение параметра  $\theta$  и сохраним это соответствие во все время движения. Тогда закон стягивания КН в виде (1, 1) будет определять не только положение КН в любой момент времени, но и траектории всех его точек.

Действительно, рассмотрим решение системы уравнений движения жидкости в пористой среде, которые имеют вид

$$\left. \begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= f_1(x, y, t) \\ \frac{dy}{dt} &= f_2(x, y, t) \end{aligned} \right\} \quad (1, 2)$$

с начальными условиями:

$$\left. \begin{aligned} x|_{t=t_0} &= x_0, \\ y|_{t=t_0} &= y_0. \end{aligned} \right\}$$

Функции  $f_1$  и  $f_2$  непрерывны и удовлетворяют условию Липшица

$$|f_i(t, \bar{x}, \bar{y}) - f_i(t, x, y)| \leq M(|\bar{x} - x| + |\bar{y} - y|)$$

в некоторой области  $G(x, y, t)$ .

Решения системы (1, 2)

$$\left. \begin{aligned} x &= x(x_0, y_0; t) \\ y &= y(x_0, y_0; t) \end{aligned} \right\} \quad (1, 3)$$

непрерывно зависят от начальных условий  $x_0$  и  $y_0$  и определяют траекторию точки, имевшей в начальный момент  $t = t_0$  координаты  $(x_0, y_0)$ . Допустим, что  $x_0$  и  $y_0$  непрерывно зависят от параметра  $\theta$  и при непрерывном изменении последнего в некотором интервале  $(\theta - 2\pi)$  описывают контур  $\Gamma_0$ . Тогда и решения системы (1, 2)

$$\left. \begin{aligned} x &= x[x_0(\theta), y_0(\theta), t] = \bar{x}(\theta, t) \\ y &= y[x_0(\theta), y_0(\theta), t] = \bar{y}(\theta, t) \end{aligned} \right\} \quad (1, 3a)$$

будут непрерывно зависеть от  $\theta$  и определять совокупность траекторий точек, составляющих при  $t = t_0$  контур  $\Gamma_0$ . Каждому фиксированному значению параметра  $\theta = \theta_s$ , очевидно, соответствует некоторая траектория  $L_s$ , определяемая уравнениями

$$\left. \begin{aligned} x &= \bar{x}(\theta_s, t) = \bar{x}_s(t) \\ y &= \bar{y}(\theta_s, t) = \bar{y}_s(t) \end{aligned} \right\} (t_0 \leq t \leq T).$$

В силу непрерывной зависимости от  $\theta$  при каждом фиксированном  $t = t_s$  уравнения (1, 3a) определяют некоторый контур  $\Gamma(t_s)$ :

$$\left. \begin{aligned} x &= \bar{x}(\theta, t_s) = x_s(\theta) \\ y &= \bar{y}(\theta, t_s) = y_s(\theta) \end{aligned} \right\} (0 \leq \theta < 2\pi).$$

Так при  $t = t_0$  получим уравнения начального КН  $\Gamma_0$ :

$$\left. \begin{aligned} x &= \bar{x}(\theta, 0) = x_0(\theta) \\ y &= \bar{y}(\theta, 0) = y_0(\theta) \end{aligned} \right\} (0 \leq \theta < 2\pi);$$

при  $t = T$  — уравнения конечного контура  $\Gamma_1$ :

$$\left. \begin{aligned} x &= \bar{x}(\theta, T) = x_1(\theta) \\ y &= \bar{y}(\theta, T) = y_1(\theta) \end{aligned} \right\} (0 \leq \theta < 2\pi).$$

Отметим, что один и тот же по форме контур можно получить при различных законах вида (1, 1).

Например, семейство законов движения КН

$$\left. \begin{aligned} x &= a(t) \cos(\theta + \alpha t) \\ y &= a(t) \sin(\theta + \alpha t) \end{aligned} \right\} \begin{aligned} &(0 \leq \theta < 2\pi) \\ &(0 \leq t \leq T), \end{aligned}$$

где  $\alpha \geq 0$ ,  $a(t) = A \left(1 - \frac{t}{T}\right)$ , при

любом  $\alpha$  определяет КН в форме концентрических окружностей радиуса  $r = a(t)$ , а траектории точек контура будут при этом различные: при  $\alpha = 0$  — лучи, сходящиеся в начале координат, при  $\alpha = \alpha_1$  — спирали Архимеда (см. рис. 1).

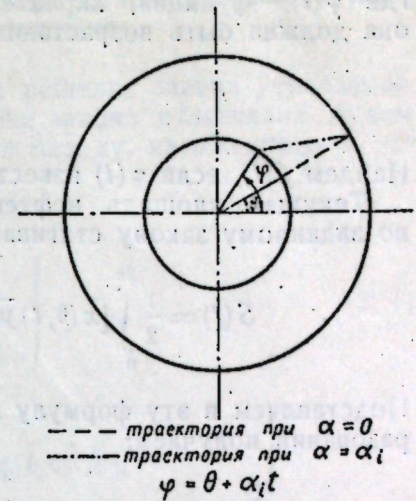


Рис. 1.

## § 2. Замечания о выборе закона движения КН

Если известен начальный КН  $\Gamma_0$  и задан некоторый конечный КН  $\Gamma_1$ , то закон движения КН, обеспечивающий стягивание  $\Gamma_0$  к  $\Gamma_1$ , может выбираться не единственным образом. В практике на этот закон накладываются определенные ограничения: равномерность и плавность стягивания без образования целиков и языков обводнения, выполнение заданного темпа отбора нефти и др. [2].

Покажем, как можно выбрать закон движения КН в параметрической форме при известных начальном и конечном положениях его по заданному темпу отбора нефти при условии равномерности стягивания всего контура.

Если  $\Gamma_0$  задан уравнениями

$$\left. \begin{aligned} x &= x_0(\theta) \\ y &= y_0(\theta) \end{aligned} \right\} (0 \leq \theta < 2\pi),$$

а  $\Gamma_1$  — уравнениями

$$\left. \begin{aligned} x &= x_1(\theta) \\ y &= y_1(\theta) \end{aligned} \right\} (0 \leq \theta < 2\pi),$$

то закон движения КН можно выбрать, например, в виде

$$\left. \begin{aligned} \bar{x}(\theta, t) &= x_0(\theta) - [x_0(\theta) - x_1(\theta)]f(t) \\ \bar{y}(\theta, t) &= y_0(\theta) - [y_0(\theta) - y_1(\theta)]f(t) \end{aligned} \right\} \begin{aligned} &(0 \leq \theta < 2\pi) \\ &(0 \leq t \leq T). \end{aligned} \quad (2, 1)$$

$f(t)$  — возрастающая функция, которая должна удовлетворять условиям

$$f(0) = 0, \quad f(T) = 1.$$

Она определяется в соответствии с заданным темпом разработки пласта. Обозначим через  $S_0$  начальную площадь нефтенасыщенной части пласта,  $S_1$  — его конечную площадь. Тогда  $(S_0 - S_1)$  — площадь пласта, подлежащая разработке. Выработанная к моменту времени  $t$  площадь будет равняться

$$S^*(t) = (S_0 - S_1) \varphi(t), \quad (2, 2)$$

где  $\varphi(t)$  — функция, характеризующая заданный темп разработки; она должна быть возрастающей и удовлетворять условиям

$$\begin{aligned}\varphi(0) &= 0, \\ \varphi(T) &= 1.\end{aligned}$$

Найдем  $f(t)$ , если  $\varphi(t)$  известна.

Текущая площадь нефтенасыщенной части пласта определяется по заданному закону стягивания КН известной формулой:

$$S(t) = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} [\bar{x}(\theta, t) \bar{y}'_0(\theta, t) - \bar{y}(\theta, t) \bar{x}'_0(\theta, t)] d\theta.$$

Подставляем в эту формулу  $\bar{x}(\theta, t)$  и  $\bar{y}(\theta, t)$  из (2, 1). После преобразований получаем:

$$\begin{aligned}S(t) &= \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} (x_0 y_0' - x_0' y_0) d\theta - f(t) \cdot \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} [x_0 (y_0 - y_1)' + y_0' (x_0 - x_1) - \\ &- y_0 (x_0 - x_1)' - x_0' (y_0 - y_1)] dt + f^2(t) \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} [(x_0 - x_1)(y_0 - y_1)' - \\ &- (y_0 - y_1)(x_0 - x_1)'] d\theta.\end{aligned}$$

Введем обозначение

$$\frac{1}{2} \int_0^{2\pi} [(x_0 - x_1)(y_0 - y_1)' - (y_0 - y_1)(x_0 - x_1)'] d\theta = S_1^*.$$

Тогда

$$S(t) = S_0 - f(t)(S_0 - S_1 + S_1^*) + f^2(t) S_1^*.$$

Разработанная площадь отсюда равна:

$$S^*(t) = (S_0 - S_1 + S_1^*) f(t) - S_1^* f^2(t). \quad (2, 3)$$

Приравниваем выражения (2, 2) и (2, 3)

$$(S_0 - S_1 + S_1^*) f(t) - S_1^* f^2(t) = (S_0 - S_1) \varphi(t)$$

и получаем квадратное уравнение для определения  $f(t)$

$$S_1^* f^2(t) - (S_0 - S_1 + S_1^*) f(t) + (S_0 - S_1) \varphi(t) = 0,$$

откуда

$$f_{1,2}(t) = \frac{(S_0 - S_1 + S_1^*)}{2S_1^*} \pm \frac{1}{2} \sqrt{\frac{(S_0 - S_1 + S_1^*)^2}{S_1^{*2}} - 4 \frac{S_0 - S_1}{S_1^*} \varphi(t)}. \quad (2, 4)$$

Нетрудно видеть, что подкоренное выражение положительно. Так как функция  $f(t)$  возрастающая, выбираем знак „+“.

Легко проверить, что

$$\text{при } t=0, \varphi(0)=0 \text{ и } f(0)=0;$$

$$\text{при } t=T, \varphi(T)=1 \text{ и } f(T)=1.$$

### § 3. Приближенное решение задачи управления движением КН по характеру эксплуатации

В связи с невозможностью точного решения задачи управления движением КН при произвольном задании закона стягивания будем решать эту задачу приближенно, следуя методу, изложенному в работах [2], [3].

Уравнения движения КН имеют вид:

$$\left. \begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= -\frac{k}{\mu m} \frac{\partial p}{\partial x} \\ \frac{dy}{dt} &= -\frac{k}{\mu m} \frac{\partial p}{\partial y} \end{aligned} \right\} \quad (3, 1)$$

при начальных условиях

$$\begin{aligned}x|_{t=0} &= x_0(\theta), \quad (0 \leq \theta < 2\pi), \\ y|_{t=0} &= y_0(\theta),\end{aligned}$$

где  $\mu$  — вязкость жидкости,  $k$  — проницаемость,  $m$  — пористость, полагаемые далее постоянными, а  $p$  — функция давления, которая для неограниченного по простиранию пласта равна:

$$p = \frac{\mu}{2\pi kh} \sum_{i=1}^N q_i(t) \ln \frac{1}{\sqrt{(x-a_i)^2 + (y-b_i)^2}}, \quad (3, 2)$$

где  $h$  — постоянная мощность пласта;  $N$  — число скважин;  $(a_i, b_i)$  — координаты  $i$ -й скважины.

В соответствии с (3, 2) уравнения (3, 1) принимают вид:

$$\left. \begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= \frac{1}{2\pi hm} \sum_{i=1}^N q_i(t) \frac{x-a_i}{(x-a_i)^2 + (y-b_i)^2}, \\ \frac{dy}{dt} &= \frac{1}{2\pi hm} \sum_{i=1}^N q_i(t) \frac{y-b_i}{(x-a_i)^2 + (y-b_i)^2}. \end{aligned} \right\} \quad (3, 3)$$

В уравнения движения точек контура (3, 3) подставляем координаты  $x$  и  $y$  из заданного закона (1, 1). В результате этого получаем известные функции  $\theta$  и  $\dot{t}$ , так называемые „невязки“:

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_1(\theta, t) &= \frac{d\bar{x}}{dt} - \frac{1}{2\pi mh} \sum_{i=1}^N q_i(t) \frac{\bar{x}-a_i}{(\bar{x}-a_i)^2 + (\bar{y}-b_i)^2}, \\ \varepsilon_2(\theta, t) &= \frac{d\bar{y}}{dt} - \frac{1}{2\pi mh} \sum_{i=1}^N q_i(t) \frac{\bar{y}-b_i}{(\bar{x}-a_i)^2 + (\bar{y}-b_i)^2} \end{aligned} \right\}.$$

Но изменение формы движущегося контура полностью характеризуется его нормальной скоростью. Поэтому мы будем определять дебиты  $q_i(t)$  ( $i=1, 2, \dots, N$ ) не из условия выполнения двух уравнений движения (3, 1), а из одного условия наилучшего выполнения закона заданных нормальных скоростей точек контура, т. е. из условия наименьшего в каком-либо смысле отклонения от нуля величины

$$\varepsilon_n(\theta, t) = \varepsilon_1(\theta, t) \cos(n, x) + \varepsilon_2(\theta, t) \cos(n, y).$$

В развернутом виде  $\epsilon_n(\theta, t)$  записывается так:

$$\epsilon_n(\theta, t) = \frac{d\bar{x}}{dt} \cos(n, x) + \frac{d\bar{y}}{dt} \cos(n, y) - \frac{1}{2\pi hm} \sum_{i=1}^N q_i(t) v_{ni},$$

где

$$v_{ni} = \varphi_i(\bar{x}, \bar{y}) \cos(n, x) + \psi_i(\bar{x}, \bar{y}) \cos(n, y),$$

$$\varphi_i(\bar{x}, \bar{y}) = \frac{\bar{x} - a_i}{(\bar{x} - a_i)^2 + (\bar{y} - b_i)^2},$$

$$\psi_i(\bar{x}, \bar{y}) = \frac{\bar{y} - b_i}{(\bar{x} - a_i)^2 + (\bar{y} - b_i)^2}.$$

Применим далее метод наименьших квадратов.  
Составим функционал

$$I = \frac{1}{L(t)} \int_0^L \epsilon_n^2 ds = \frac{1}{L(t)} \int_0^L \left\{ \left[ \frac{d\bar{x}}{dt} \cos(n, x) + \frac{d\bar{y}}{dt} \cos(n, y) \right] - \frac{1}{2\pi hm} \sum_{i=1}^N q_i(t) v_{ni} \right\}^2 ds,$$

где  $L(t) = \int_0^L ds$  — длина контура,  $ds = \sqrt{x_0'^2 + y_0'^2} d\theta$ .

Будем определять дебиты  $q_i$  ( $i = 1, 2, \dots, N$ ) из условий минимума  $\frac{\partial I}{\partial q_j} = 0$  ( $j = 1, 2, \dots, N$ ), которые после некоторых преобразований приводят к системе линейных относительно искомым дебитов уравнений:

$$\left. \begin{aligned} q_1(t) \int_0^{2\pi} v_{n1} v_{n1} ds + q_2(t) \int_0^{2\pi} v_{n1} v_{n2} ds + \dots + q_N(t) \int_0^{2\pi} v_{n1} v_{nN} ds = \\ = 2\pi mh \int_0^{2\pi} v_{n1} \left[ \frac{d\bar{x}}{dt} \cos(n, x) + \frac{d\bar{y}}{dt} \cos(n, y) \right] ds, \\ q_1(t) \int_0^{2\pi} v_{n2} v_{n1} ds + q_2(t) \int_0^{2\pi} v_{n2} v_{n2} ds + \dots + q_N(t) \int_0^{2\pi} v_{n2} v_{nN} ds = \\ = 2\pi mh \int_0^{2\pi} v_{n2} \left[ \frac{d\bar{x}}{dt} \cos(n, x) + \frac{d\bar{y}}{dt} \cos(n, y) \right] ds, \\ \dots \\ q_1(t) \int_0^{2\pi} v_{nN} v_{n1} ds + q_2(t) \int_0^{2\pi} v_{n2} v_{nN} ds + \dots + q_N(t) \int_0^{2\pi} v_{nN} v_{nN} ds = \\ = 2\pi mh \int_0^{2\pi} v_{nN} \left[ \frac{d\bar{x}}{dt} \cos(n, x) + \frac{d\bar{y}}{dt} \cos(n, y) \right] ds. \end{aligned} \right\} (3,4)$$

Определитель этой системы имеет вид:

$$\Delta = \begin{vmatrix} \int_0^{2\pi} v_{n1} v_{n1} ds & \int_0^{2\pi} v_{n2} v_{n1} ds & \dots & \int_0^{2\pi} v_{nN} v_{n1} ds \\ \int_0^{2\pi} v_{n2} v_{n1} ds & \int_0^{2\pi} v_{n2} v_{n2} ds & \dots & \int_0^{2\pi} v_{nN} v_{n2} ds \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \int_0^{2\pi} v_{nN} v_{n1} ds & \int_0^{2\pi} v_{nN} v_{n2} ds & \dots & \int_0^{2\pi} v_{nN} v_{nN} ds \end{vmatrix}$$

Это определитель Грама для системы функций  $\{v_{ni}\}$  ( $i = 1, 2, \dots, N$ ). Если эта система линейно-независима, то  $\Delta > 0$  и система (3, 4) имеет единственное решение. Если система  $\{v_{ni}\}$  линейно-зависима, то  $\Delta = 0$ . Покажем, что и в этом случае решение всегда существует, т. е. существует  $\min I$  при конечных значениях  $q_i(t)$  ( $i = 1, 2, \dots, N$ ). Для этого представим  $I$  в виде

$$I = A - \sum_{i=1}^N q_i a_i + \sum_{i,k=1}^N q_i q_k c_{ik} \geq 0, \quad (3, 5)$$

где

$$A = \frac{1}{L(t)} \int_0^{2\pi} \left[ \frac{d\bar{x}}{dt} \cos(n, x) + \frac{d\bar{y}}{dt} \cos(n, y) \right]^2 ds,$$

$$a_i = \frac{1}{L(t)\pi hm} \int_0^{2\pi} \left[ \frac{d\bar{x}}{dt} \cos(n, x) + \frac{d\bar{y}}{dt} \cos(n, y) \right] v_{ni} ds,$$

$$c_{ik} = \frac{\alpha}{L(t)(\pi hm)^2} \int_0^{2\pi} v_{ni} v_{nk} ds, \quad \alpha = \begin{cases} \frac{1}{4} & \text{при } i = k, \\ \frac{1}{2} & \text{при } i \neq k. \end{cases}$$

Так как среди  $N$  функций  $\{v_{ni}\}$  всегда найдется  $r$  линейно-независимых функций ( $N \geq r \geq 1$ ), то некоторым неособым линейным преобразованием

$$q_i = \sum_{i=1}^N d_{ik} q_i' \quad (3, 6)$$

выражение (3, 5) можно привести к виду:

$$I = A - \sum_{i=1}^r q_i' a_i' + \sum_{i=1}^r b_i' q_i'^2 \geq 0.$$

Условия минимума  $I$  по  $q_j'$

$$\frac{\partial I}{\partial q_j'} = 0 \quad (j = 1, 2, \dots, N)$$

приводят к системе уравнений

$$\begin{aligned} -a_j' + 2b_j q_j' &= 0, & (j=1, 2, \dots, r) \\ a_j' &= 0 & (j=r+1, \dots, N). \end{aligned} \quad (3, 7)$$

Но условия  $a_j' = 0$  ( $j=r+1, \dots, N$ ) выполняются автоматически. Действительно, если бы все коэффициенты  $a_j'$  ( $j=r+1, \dots, N$ ) не были равны нулю, то можно было бы подобрать такие  $q_j'$  ( $j=r+1, r+2, \dots, N$ ), что  $I$  оказалось бы отрицательным. В действительности же  $I \geq 0$  при любых  $q_j'$  ( $j=1, 2, \dots, N$ ).

Из первых  $r$  уравнений системы (3, 7) определяем  $q_j'$  ( $j=1, 2, \dots, r$ ), при которых  $I$  достигает минимума. Преобразованием, обратным преобразованию (3, 6), перейдем к  $q_i$  ( $i=1, 2, \dots, N$ ). При этом для определения  $N$  величин  $q_i$  получим  $r$  ( $r < N$ ) уравнений, что приводит к неединственности решений:  $r$  величин  $q_i$  ( $i=1, 2, \dots, r$ ) будут зависеть от  $N-r$  величин  $q_i$  ( $i=r+1, \dots, N$ ), которым можно придавать произвольные значения.

Таким образом, приближенное решение задачи управления движением КН по характеру эксплуатации методом наименьших квадратов всегда существует.

Следует отметить, что неединственность решений может возникнуть лишь в исключительных случаях, не представляющих практического интереса.

#### § 4. Пример расчета управления движением КН

Рассмотрим случай, когда начальный контур  $\Gamma_0$  является звездным, а конечный  $\Gamma_1$  — незвездным (см. рис. 3). Пусть они соответственно задаются уравнениями

$$\begin{aligned} x_0 &= 0,6 \cos 2\theta + 0,3 \cos \theta \\ y_0 &= \sin \theta + 0,25 \cos 2\theta - 0,0625 \sin 4\theta \end{aligned} \quad (4, 1)$$

и

$$\begin{aligned} x_1 &= 0,5125 \cos 2\theta + 0,15 \cos \theta + 0,0875 \\ y_1 &= 0,925 \sin \theta + 0,125 \sin 2\theta - 0,03125 \sin 4\theta, \end{aligned} \quad (4, 2)$$

$$0 \leq \theta \leq 2\pi.$$

Выберем функцию  $\varphi(t)$  из условия равномерного уменьшения площади нефтенасыщенной части пласта, т. е. постоянного суммарного текущего отбора. Она будет иметь вид  $\varphi(t) = \frac{t}{T}$ . Следовательно, получим (§ 2, формула (2, 4))

$$f = 5,5283 - \sqrt{5,5283^2 - 10,0566 \frac{t}{T}},$$

и закон стягивания КН (см. (2, 1)):

$$\left. \begin{aligned} \bar{x} &= (0,6 \cos 2\theta + 0,3 \cos \theta) - (0,0875 \cos 2\theta + \\ &+ 0,15 \cos \theta - 0,0875) \cdot \left( 5,5283 - \sqrt{5,5283^2 - 10,0566 \frac{t}{T}} \right) \\ \bar{y} &= (\sin \theta + 0,25 \sin 2\theta - 0,0625 \sin 4\theta) - (0,075 \sin \theta + \\ &+ 0,125 \sin 2\theta - 0,03125 \sin 4\theta) \cdot \left( 5,5283 - \sqrt{5,5283^2 - 10,0566 \frac{t}{T}} \right) \end{aligned} \right\} (4, 3)$$

Примем следующую расстановку скважин (рис. 3):

1-я скважина	$a_1 = -0,25$	$b_1 = 0,85$
2-я "	$a_2 = 0,19$	$b_2 = 0,59$
3-я "	$a_3 = 0,54$	$b_3 = 0,17$
4-я "	$a_4 = 0,54$	$b_4 = -0,17$
5-я "	$a_5 = 0,19$	$b_5 = -0,59$
6-я "	$a_6 = -0,25$	$b_6 = -0,85$
7-я "	$a_7 = -0,13$	$b_7 = 0$

Ввиду симметрии заданного закона стягивания КН и принятого расположения скважин относительно оси  $x$ , очевидно, будут иметь место равенства:

$$\begin{aligned} q_1 &= q_6 = Q_1, & q_3 &= q_4 = Q_2, \\ q_2 &= q_5 = Q_2, & q_7 &= Q_4. \end{aligned}$$

Функцию давления  $p$  можно представить в виде:

$$\begin{aligned} p &= \frac{\mu}{2\pi kh} \left[ Q_1 \ln \left( \frac{1}{\sqrt{(x+0,25)^2 + (y-0,85)^2}} + \frac{1}{\sqrt{(x+0,25)^2 + (y+0,85)^2}} \right) + \right. \\ &+ Q_2 \ln \left( \frac{1}{\sqrt{(x-0,19)^2 + (y-0,59)^2}} + \frac{1}{\sqrt{(x-0,19)^2 + (y+0,59)^2}} \right) + \\ &+ Q_3 \ln \left( \frac{1}{\sqrt{(x-0,54)^2 + (y-0,17)^2}} + \frac{1}{\sqrt{(x-0,54)^2 + (y+0,17)^2}} \right) + \\ &\left. + Q_4 \ln \left( \frac{1}{\sqrt{(x+0,13)^2 + y^2}} \right) \right]. \end{aligned}$$

Следуя методике решения, изложенной в § 3, будем иметь: а) уравнения действительного движения КН:

$$\frac{dx}{dt} = \frac{1}{2\pi hm} [Q_1 \varphi_1^*(x, y) + Q_2 \varphi_2^*(x, y) + Q_3 \varphi_3^*(x, y) + Q_4 \varphi_4^*(x, y)],$$

$$\frac{dy}{dt} = \frac{1}{2\pi hm} [Q_1 \psi_1^*(x, y) + Q_2 \psi_2^*(x, y) + Q_3 \psi_3^*(x, y) + Q_4 \psi_4^*(x, y)],$$

где введены обозначения:

$$\varphi_1^*(x, y) = \frac{x+0,25}{(x+0,25)^2 + (y-0,85)^2} + \frac{x+0,25}{(x+0,25)^2 + (y+0,85)^2},$$

$$\varphi_2^*(x, y) = \frac{x-0,19}{(x-0,19)^2 + (y-0,59)^2} + \frac{x-0,19}{(x-0,19)^2 + (y+0,59)^2},$$

$$\varphi_3^*(x, y) = \frac{x-0,54}{(x-0,54)^2 + (y-0,17)^2} + \frac{x-0,54}{(x-0,54)^2 + (y+0,17)^2},$$

$$\varphi_4^*(x, y) = \frac{x+0,13}{(x+0,13)^2 + y^2},$$

$$\psi_1^*(x, y) = \frac{y-0,85}{(x+0,25)^2 + (y-0,85)^2} + \frac{y+0,85}{(x+0,25)^2 + (y+0,85)^2},$$

$$\psi_2^*(x, y) = \frac{y-0,59}{(x-0,19)^2 + (y-0,59)^2} + \frac{y+0,59}{(x-0,19)^2 + (y+0,59)^2},$$

$$\psi_3^*(x, y) = \frac{y-0,17}{(x-0,54)^2 + (y-0,17)^2} + \frac{y+0,17}{(x-0,54)^2 + (y+0,17)^2},$$

$$\psi_4^*(x, y) = \frac{y}{(x+0,13)^2 + y^2},$$

б) „невязки“

$$\varepsilon_1(\theta, t) = \frac{d\bar{x}}{dt} - \frac{1}{2\pi hm} [Q_1\varphi_1^*(\bar{x}, \bar{y}) + Q_2\varphi_2^*(\bar{x}, \bar{y}) + Q_3\varphi_3^*(\bar{x}, \bar{y}) + Q_4\varphi_4^*(\bar{x}, \bar{y})],$$

$$\varepsilon_2(\theta, t) = \frac{d\bar{y}}{dt} - \frac{1}{2\pi hm} [Q_1\psi_1^*(\bar{x}, \bar{y}) + Q_2\psi_2^*(\bar{x}, \bar{y}) + Q_3\psi_3^*(\bar{x}, \bar{y}) + Q_4\psi_4^*(\bar{x}, \bar{y})],$$

(x, y) из (4, 3).

в)

$$\begin{aligned} \varepsilon_n(\theta, t) = \varepsilon_1 \cos(n, x) + \varepsilon_2 \cos(n, y) = & \left\{ \frac{d\bar{x}}{dt} - \frac{1}{2\pi hm} [Q_1\varphi_1^*(\bar{x}, \bar{y}) + \right. \\ & \left. + Q_2\varphi_2^*(\bar{x}, \bar{y}) + Q_3\varphi_3^*(\bar{x}, \bar{y}) + Q_4\varphi_4^*(\bar{x}, \bar{y})] \right\} \frac{-\bar{y}'_0}{\sqrt{\bar{x}_0'^2 + \bar{y}_0'^2}} + \\ & + \left\{ \frac{d\bar{y}}{dt} - \frac{1}{2\pi hm} [Q_1\psi_1^*(\bar{x}, \bar{y}) + Q_2\psi_2^*(\bar{x}, \bar{y}) + Q_3\psi_3^*(\bar{x}, \bar{y}) + \right. \\ & \left. + Q_4\psi_4^*(\bar{x}, \bar{y})] \right\} \frac{\bar{x}'_0}{\sqrt{\bar{x}_0'^2 + \bar{y}_0'^2}} = \bar{v}_n - \frac{1}{2\pi hm} [Q_1v_{n1} + Q_2v_{n2} + Q_3v_{n3} + Q_4v_{n4}], \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} \bar{v}_n &= \frac{d\bar{x}}{dt} \cdot \frac{-\bar{y}'_0}{\sqrt{\bar{x}_0'^2 + \bar{y}_0'^2}} + \frac{d\bar{y}}{dt} \cdot \frac{\bar{x}'_0}{\sqrt{\bar{x}_0'^2 + \bar{y}_0'^2}}, \\ v_{ni} &= \varphi_i^*(\bar{x}, \bar{y}) \cdot \frac{-\bar{y}'_0}{\sqrt{\bar{x}_0'^2 + \bar{y}_0'^2}} + \psi_i^*(\bar{x}, \bar{y}) \cdot \frac{\bar{x}'_0}{\sqrt{\bar{x}_0'^2 + \bar{y}_0'^2}}. \end{aligned}$$

(i = 1, 2, 3, 4).

г)

$$I = \frac{1}{L(t)} \int_0^{2\pi} \varepsilon_n^2 \sqrt{\bar{x}_0'^2 + \bar{y}_0'^2} d\theta.$$

д) Условия минимума I:

$$\begin{aligned} \frac{\partial I}{\partial Q_j} = \frac{2}{L(t)} \int_0^{2\pi} \varepsilon_n \frac{\partial \varepsilon_n}{\partial Q_j} \sqrt{\bar{x}_0'^2 + \bar{y}_0'^2} d\theta = \frac{2}{L(t)} \int_0^{2\pi} \left[ \bar{v}_n - \frac{1}{2\pi hm} (Q_1v_{n1} + Q_2v_{n2} + \right. \\ \left. + Q_3v_{n3} + Q_4v_{n4}) \right] \frac{-1}{2\pi hm} v_{nj} \sqrt{\bar{x}_0'^2 + \bar{y}_0'^2} d\theta = 0, \end{aligned}$$

(j = 1, 2, 3, 4),

что приводит к системе:

е)

$$\begin{aligned} Q_1 \int_0^{2\pi} v_{n1} v_{n1} \gamma d\theta + Q_2 \int_0^{2\pi} v_{n1} v_{n2} \gamma d\theta + Q_3 \int_0^{2\pi} v_{n1} v_{n3} \gamma d\theta + \\ + Q_4 \int_0^{2\pi} v_{n1} v_{n4} \gamma d\theta = 2\pi hm \int_0^{2\pi} \bar{v}_n v_{n1} \gamma d\theta \\ \gamma = \sqrt{\bar{x}_0'^2 + \bar{y}_0'^2} \quad (j = 1, 2, 3, 4). \end{aligned}$$

Определитель этой системы отличен от нуля. Значения дебитов, полученные в предположении, что нами был принят масштаб 1 ед. = 1500 м, T = 3000 суток, hm = 1 м, приведены на рис. 2. Интегралы вычисляли по формуле Симпсона, разделяя интервал интегрирования на 24 участка. На рис. 3 штриховой линией нанесено действительное положение КН в конечный момент времени t = T. Оно получено приближенным графоаналитическим решением задачи прослеживания при дебитах, найденных выше (рис. 2).

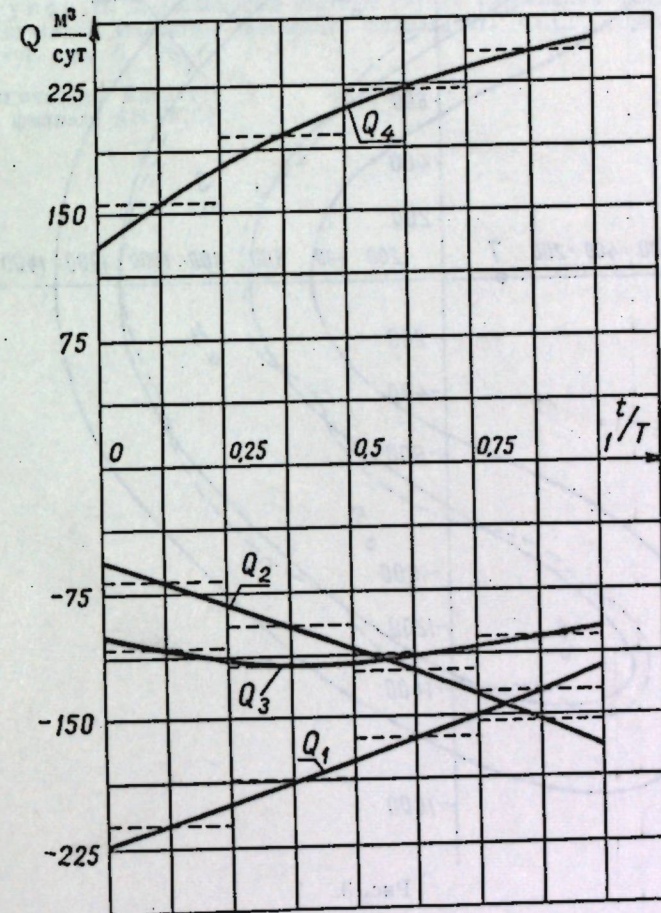


Рис. 2.

Построение контура  $\Gamma_{10}$  производилось следующим образом:  
 1) переменные дебиты скважин осреднялись для 4 промежутков времени:  $(0, \frac{T}{4})$ ,  $(\frac{T}{4}, \frac{T}{2})$ ,  $(\frac{T}{2}, \frac{3T}{4})$ ,  $(\frac{3T}{4}, T)$  (осредненные значения дебитов изображены штриховыми линиями на рис. 2);  
 2) в 34 точках контура, примерно равноотстоящих по периметру, строились векторы скоростей  $\vec{v}_k$  ( $k = 1, 2, \dots, 34$ ) от действия всех скважин;  
 3) в направлении этих векторов откладывались перемещения, равные  $v_k \cdot \frac{T}{4}$ ;



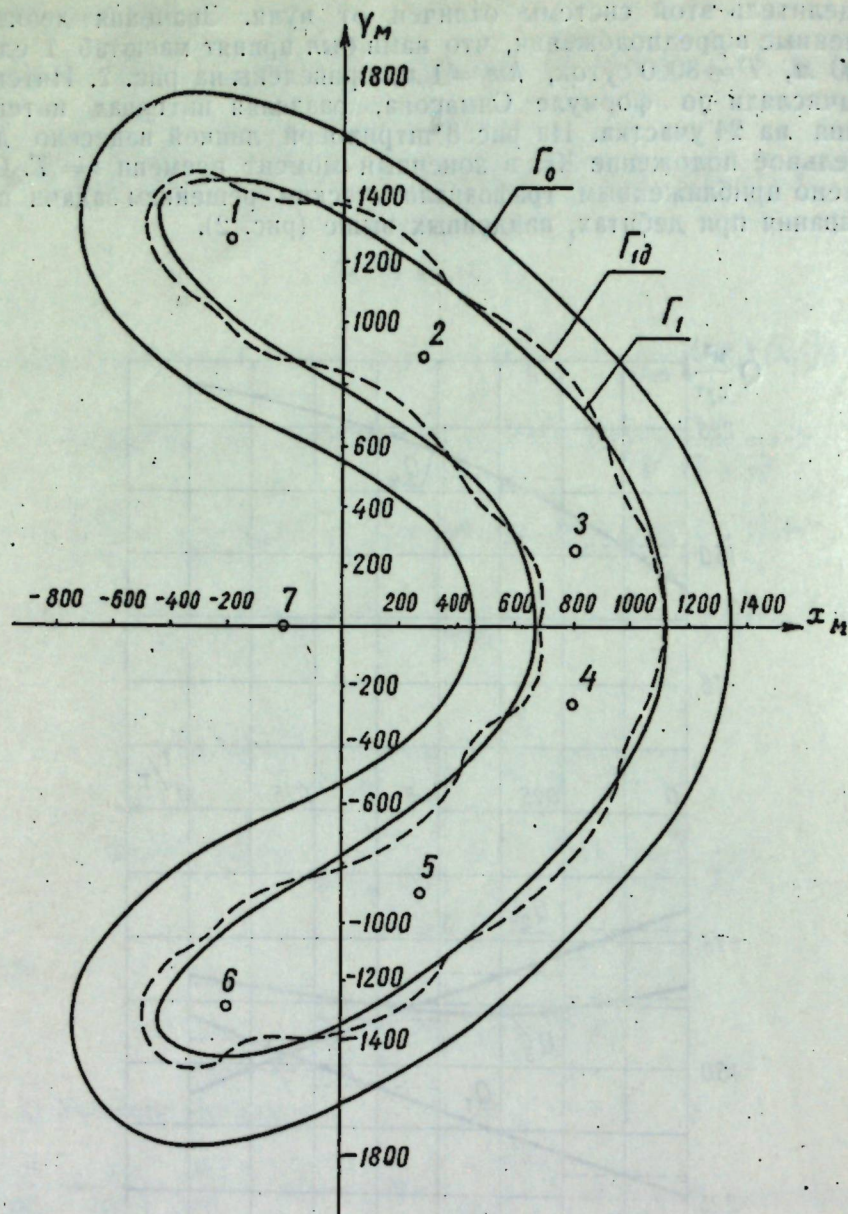


Рис. 3.

4) концы отрезков служили основой для следующей аналогичной операции;

5) 34 точки, полученные в конце четвертого этапа, соединены плавной кривой.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Салехов Г. С. Прямые и обратные задачи о продвижении водонефтяного контакта. Известия Казанского филиала АН СССР, серия физико-матем. и техн. наук, вып. 5, 1954.
2. Салехов Г. С. Постановка и методы решения гидродинамических задач управления движением контура нефтеносности. ДАН, т. 101, № 5, 1955.
3. Салехов Г. С. Постановка и методы решения гидродинамических задач управления движением контура нефтеносности. Известия Казанского филиала АН СССР, серия физико-матем. и техн. наук, вып. 6, 1955.

4. Салехов Г. С. Приложение одного метода минимальной погрешности к решению задач управления движением контура нефтеносности. Известия Казанского филиала АН СССР, серия физико-матем. и техн. наук, вып. 8, 1955.

5. Салехов Г. С. Об одном способе решения задачи управления движением контура нефтеносности в пластах с водонапорным режимом. Известия Казанского филиала АН СССР, серия физико-матем. и техн. наук, вып. 8, 1955.

6. Салехов Г. С. и Чугунов В. Д. Некоторые задачи управления движением контура нефтеносности. ДАН, т. 101, № 6, 1955.

7. Чугунов В. Д. Об одной задаче управления перемещением контура нефтеносности. Известия Казанского филиала АН СССР, серия физико-матем. и техн. наук, вып. 8, 1955.

8. Сейфуллина Б. А. Численное решение некоторых задач по управлению движением контура нефтеносности. Известия Казанского филиала АН СССР, серия физико-матем. и техн. наук, вып. 8, 1955.

9. Чугунов В. Д. Некоторые частные случаи управления продвижением водонефтяного контакта. Известия Казанского филиала АН СССР, серия физико-матем. и техн. наук, вып. 6, 1955.

Физико-технический институт  
Казанского филиала АН СССР

Поступило  
24 июня 1955 г

Г. С. Салехов

К ОПРЕДЕЛЕНИЮ ДАВЛЕНИЯ В НЕОДНОРОДНЫХ ПЛАСТАХ  
 НЕФТЯНЫХ МЕСТОРОЖДЕНИЙ

Выведена формула для определения функции давления в неоднородных пластах нефтяных месторождений, когда  $\sqrt{kh}$  ( $k$  — проницаемость и  $h$  — продуктивная мощность пласта) является функцией гармонической и эксплуатация месторождения ведется при помощи  $n$  произвольно расположенных скважин. Движение жидкости подчиняется линейному закону фильтрации, режим пласта считается водонапорным.

§ 1. Рассмотрим в некоторой двумерной области  $G \ni (x, y)$  две гармонические функции  $w(x, y)$  и  $u(x, y)$ , определенные следующим образом:

1. Функция  $w$  в области  $G$  имеет конечное число логарифмических особенностей и на контуре  $\Gamma$ , ограничивающем область  $G$ , удовлетворяет граничному условию  $w|_{\Gamma} = 0$ .

2. Функция  $u$  в области  $G$  всюду регулярна и вплоть до контура  $\Gamma$  нигде не обращается в нуль. Тогда легко проверяется справедливость следующей теоремы:

*Теорема.* Функция

$$p = p_0 + C \frac{w}{u}, \quad (1, 1)$$

где  $p_0$  и  $C$  — некоторые постоянные, является решением уравнения

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( u^2 \frac{\partial p}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( u^2 \frac{\partial p}{\partial y} \right) = 0, \quad (1, 2)$$

удовлетворяющим граничному условию

$$p|_{\Gamma} = p_0, \quad (1, 3)$$

причем функция  $p$  в области  $G$  других особенностей, кроме логарифмических, не имеет.

Очевидно, в силу свойств функций  $u$  и  $w$ , функция  $p$  удовлетворяет граничному условию (1, 3) и в области  $G$  имеет только логарифмические особенности, которые содержит функция  $w$ . Покажем, что функция  $p$  является решением уравнения (1, 2). В самом деле, согласно (1, 1),

$$u^2 \frac{\partial p}{\partial x} = C \left[ u \frac{\partial w}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial x} w \right] \quad \text{и} \quad u^2 \frac{\partial p}{\partial y} = C \left[ u \frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial u}{\partial y} w \right],$$

отсюда

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( u^2 \frac{\partial p}{\partial x} \right) = C \left[ u \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} w \right] \quad \text{и} \quad \frac{\partial}{\partial y} \left( u^2 \frac{\partial p}{\partial y} \right) = C \left[ u \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} w \right].$$

Складывая последние равенства и учитывая, что в области  $G$  функции  $u$  и  $w$  являются гармоническими, легко доказать справедливость нашего утверждения.

Нетрудно убедиться также в том, что аналогичная теорема справедлива для пространства любого числа измерений.

§ 2. Как известно [1], плоская задача определения функции давления в неоднородных пластах с водонапорным режимом, при переменной мощности  $h(x, y) > 0$  и проницаемости  $k(x, y) > 0$ , сводится к интегрированию уравнения

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( \sigma \frac{\partial p}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( \sigma \frac{\partial p}{\partial y} \right) = 0, \quad (\sigma = kh) \quad (2, 1)$$

с граничным условием (1, 3), где  $\Gamma$  — контур питания, на котором сохраняется постоянное первоначальное пластовое давление  $p_0$ . Эксплуатационные и нагнетательные скважины будем считать соответственно линейными стоками и источниками, которым отвечают логарифмические особенности функции  $p$ .

Согласно вышеприведенной теореме следует, что если функция  $\sqrt{\sigma}$  в области  $G$ , ограниченной контуром  $\Gamma$ , является всюду гармонической и вплоть до контура  $\Gamma$  не обращается в нуль, то функция давления  $p$  в неоднородном пласте может быть определена в виде

$$p = p_0 + \frac{Cw}{\sqrt{\sigma}}, \quad (2, 2)$$

где  $C$  — некоторая постоянная.

Очевидно, функцию  $p$  можно определить через равенство (2, 2) также для неоднородных пластов, когда функция  $\sqrt{\sigma}$  практически хорошо аппроксимируется гармонической функцией.

§ 3. Предположим, что на окружности  $\Gamma$  кругового пласта с радиусом  $R$  сохраняется постоянное давление  $p$  и пласт эксплуатируется при помощи эксплуатационных и нагнетательных скважин общим числом  $n$ .

Принимая центр окружности  $\Gamma$  за полюс и обозначая координаты скважин через  $(\varphi_i, \rho_i)$  ( $i=1, 2, \dots, n$ ), проведем дальнейший счет в полярных координатах. Рассмотрим сначала выражение для функции давления  $p_i$ , которая создается в пласте при работе лишь одной фиксированной  $i$ -й скважины. Тогда согласно (2, 2) будем иметь:

$$p_i = p_0 + \frac{C_i}{\sqrt{\sigma}} \ln \sqrt{\frac{R^2 - 2r\rho_i \cos(\theta - \varphi_i) + \frac{\rho_i^2}{R^2} r^2}{r^2 - 2r\rho_i \cos(\theta - \varphi_i) + \rho_i^2}} \quad (3, 1)$$

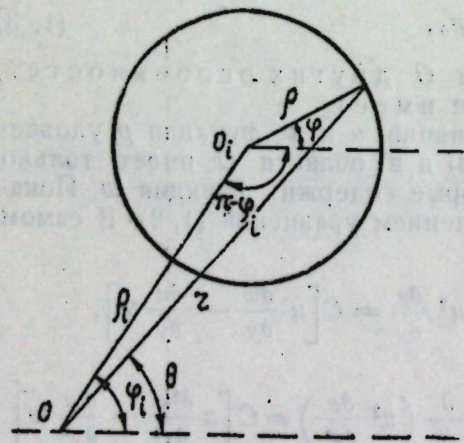


Рис. 1.

где  $C_i$  — некоторая постоянная.

Далее займемся определением величины постоянной  $C_i$  через объемный дебит  $Q_i$  скважин с координатами  $(\varphi_i, \rho_i)$ . Перенесем полюс  $O$  в точку  $O_i$  с координатами  $(\varphi_i, \rho_i)$  и запишем выражение (3, 1) в новой системе координат  $(\varphi, \rho)$  (см. рис. 1).

Очевидно,

$$\begin{aligned} \rho^2 &= r^2 - 2r\rho_i \cos(\theta - \varphi_i) + \rho_i^2, \\ r^2 &= \rho^2 + 2\rho\rho_i \cos(\varphi - \varphi_i) + \rho_i^2, \\ r \cos(\theta - \varphi_i) &= \rho_i + \rho \cos(\varphi - \varphi_i). \end{aligned}$$

Поэтому выражение (3, 1) примет следующий вид:

$$p_i = p_0 + \frac{C_i}{\sqrt{\sigma}} \ln \frac{\sqrt{\left(1 - \frac{\rho_i^2}{R^2}\right)^2 R^2 - 2\left(1 - \frac{\rho_i^2}{R^2}\right) \rho_i \rho \cos(\varphi - \varphi_i) + \frac{\rho_i^2}{R^2} \rho^2}}{\rho}, \quad (3, 2)$$

где функция  $\sigma$  считается также выраженной через текущие координаты  $\varphi$  и  $\rho$ .

Как известно,

$$Q_i = - \int_0^{2\pi} [h\rho v_p^{(i)}]_{\rho=a} d\varphi, \quad (3, 3)$$

где  $v_p^{(i)}$  — радиальная скорость течения жидкости около  $i$ -й скважины,  $a$  — радиус скважин.

Согласно закону Дарси

$$v_p^{(i)} = - \frac{k}{\mu} \frac{\partial p_i}{\partial \rho}. \quad (3, 4)$$

Вводя в выражение (3, 2) сокращенные обозначения

$$\left(1 - \frac{\rho_i^2}{R^2}\right)^2 R^2 = A; \quad \left(1 - \frac{\rho_i^2}{R^2}\right) \rho_i = B, \quad \frac{\rho_i^2}{R^2} = C$$

и учитывая (3, 4), будем иметь:

$$\begin{aligned} h v_p^{(i)} &= - \frac{C_i}{\mu} \left\{ \frac{\partial \sqrt{\sigma}}{\partial \rho} \ln \frac{\sqrt{A - 2B\rho \cos(\varphi - \varphi_i) + C\rho^2}}{\rho} + \right. \\ &\quad \left. + \sqrt{\sigma} \left[ \frac{-B \cos(\varphi - \varphi_i) + C\rho}{A - 2B\rho \cos(\varphi - \varphi_i) + C\rho^2} - \frac{1}{\rho} \right] \right\}. \end{aligned}$$

Подставляя это выражение в равенство (3, 3), имеем:

$$\begin{aligned} Q_i &= \frac{C_i}{\mu} \int_0^{2\pi} \left\{ \rho \frac{\partial \sqrt{\sigma}}{\partial \rho} \cdot \ln \frac{\sqrt{A - 2B\rho \cos(\varphi - \varphi_i) + C\rho^2}}{\rho} - \right. \\ &\quad \left. - \frac{[C\rho^2 - B\rho \cos(\varphi - \varphi_i)] \sqrt{\sigma}}{A - 2B\rho \cos(\varphi - \varphi_i) + C\rho^2} + \sqrt{\sigma} \right\}_{\rho=a} d\varphi. \end{aligned} \quad (3, 5)$$

Но зная, что  $a \ll \rho_i$  и  $a \ll R$ , можно положить

$$\frac{a}{\rho_i} = 0 \quad \text{и} \quad \frac{a}{R} = 0.$$

Поэтому при  $\rho = a$ , считая

$$\frac{B}{A} \rho = \frac{1}{\left(1 - \frac{\rho_i^2}{R^2}\right)} \cdot \frac{\rho_i}{R} \cdot \frac{\rho}{R} = 0, \quad \frac{C}{A} \rho^2 = \frac{1}{\left(1 - \frac{\rho_i^2}{R^2}\right)^2} \cdot \left(\frac{\rho_i}{R}\right)^2 \cdot \left(\frac{\rho}{R}\right)^2 = 0$$

и

$$\frac{C}{B} \rho = \frac{1}{\left(1 - \frac{\rho_i^2}{R^2}\right)} \cdot \left(\frac{\rho_i}{R}\right) \cdot \left(\frac{\rho}{\rho_i}\right) = 0,$$

выражение (3, 5) можно представить в виде

$$Q_i = - \frac{C_i}{\mu} a \ln \frac{\left[1 - \left(\frac{\rho_i}{R}\right)^2\right]}{a} R \int_0^{2\pi} \left[ \frac{\partial \sqrt{\sigma}}{\partial \rho} \right]_{\rho=a} d\varphi - \frac{C_i}{\mu} \int_0^{2\pi} [\sqrt{\sigma}]_{\rho=a} d\varphi, \quad (3, 6)$$

\* Функция  $\sigma$  считается изменяющейся плавно.  
\*\* См. работу [2].

но в силу того, что функция  $V\sigma$  является гармонической,

$$\int_0^{2\pi} \left[ \frac{\partial V\sigma}{\partial r} \right]_{r=a} d\varphi = 0 \quad \text{и} \quad \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} [V\sigma]_{r=a} d\varphi = V\sigma_i^*, \quad (3, 7)$$

где  $\sigma_i$  есть произведение проницаемости  $k_i$  на соответствующую мощность  $h_i$  у забоя  $i$ -й скважины. Пользуясь соотношением (3, 6) и равенствами (3, 7), для величин  $C_i$  получим

$$C_i = - \frac{Q_i \mu}{2\pi V\sigma_i}$$

Подставляя найденную величину  $C_i$  в выражение (3, 1), будем иметь:

$$p_i = p_0 - \frac{Q_i \mu}{2\pi V\sigma_i} \ln \sqrt{\frac{R^2 - 2r\rho_i \cos(\theta - \varphi_i) + \frac{\rho_i^2}{R^2} r^2}{r^2 - 2r\rho_i \cos(\theta - \varphi_i) + \rho_i^2}}$$

Далее, в силу линейности уравнения (2, 1), используя закон суперпозиции, для определения функции давления  $p$  при работе  $n$  скважин получим следующую формулу:

$$p = p_0 - \frac{\mu}{2\pi V\sigma} \sum_{i=1}^n \frac{Q_i}{V\sigma_i} \ln \sqrt{\frac{R^2 - 2r\rho_i \cos(\theta - \varphi_i) + \frac{\rho_i^2}{R^2} r^2}{r^2 - 2r\rho_i \cos(\theta - \varphi_i) + \rho_i^2}}$$

Если здесь положить  $n=1$  и  $\rho_i=0$ , то получим [3]:

$$p = p_0 - \frac{\mu Q}{2\pi V\sigma_0} \ln \frac{R}{r}, \quad (3, 8)$$

где  $Q$  — объемный дебит скважин,  $\sigma_0$  — произведение проницаемости  $k_0$  на соответствующую мощность  $h_0$  у забоя скважины.

Формулу (3, 8) можно рассматривать как обобщение классической формулы Дюпюи для определения функции давления в круговых однородных пластах при эксплуатации одной центральной скважины. В самом деле, формула Дюпюи из формулы (3, 8) следует при частном предположении, когда

$$\sigma = \sigma_0 = \text{const.}$$

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Крылов А. П., Глогровский М. М. и др. Научные основы разработки нефтяных месторождений. Гостехиздат, 1948.
2. Салехов Г. С. Постановка и методы решения гидродинамических задач управления движением контура нефтеносности. Известия Казанского филиала АН СССР, серия физико-матем. и техн. наук, вып. 6, 1955.
3. Салехов Г. С. К определению функции давления в неоднородных пластах. ДАН, 105, № 6, 1955.

Физико-технический институт  
Казанского филиала АН СССР

Поступило  
24 июня 1955 г.

\* Тот же результат можно было бы получить непосредственно из выражения (3, 5), устремляя  $r$  к нулю,

Н. Ф. Иванов, В. Д. Чугунов

### ГРАФОАНАЛИТИЧЕСКИЙ МЕТОД ПРОСЛЕЖИВАНИЯ КОНТУРА НЕФТЕНОСНОСТИ В ПЛАСТАХ С ПЕРЕМЕННОЙ МОЩНОСТЬЮ И ПРЕНИЦАЕМОСТЬЮ

В работе предложен приближенный метод прослеживания контура нефтеносности (КН) в пласте с переменной мощностью и проницаемостью, если известны карты изобар, проницаемости, пористости и мощности пласта [1].

При эксплуатации нефтяных месторождений важно знать положение контура нефтеносности в любой момент времени. Точное решение задачи о прослеживании движения КН при учете различия вязкостей воды и нефти сопряжено с большими математическими трудностями, ввиду чего аналитическое решение задачи получено только для простейших случаев — прямолинейного и радиального движений.

Задача особенно усложняется, если переменны мощность и проницаемость  $k$ . Поэтому при прослеживании движения КН применяются приближенные методы Л. С. Лейбензона [2], [3], В. Н. Щелкачева [4], И. А. Чарного [5] и др. Большинство из них исходит из предварительного решения задачи о стягивании КН для однофазной системы с последующим приближенным учетом различия физических констант воды и нефти.

В настоящей работе излагается графоаналитический метод прослеживания движения КН в пластах с переменными мощностью и проницаемостью при различных вязкостях воды и нефти, являющийся обобщением результатов, изложенных в работе [6]. Данная задача была рассмотрена В. Я. Булыгиным методом, отличным от предлагаемого\*.

Как известно, в случае водонапорного режима пласта при переменной мощности и проницаемости последнего, распределение давления в нефтяной зоне  $p$  удовлетворяет следующему дифференциальному уравнению [7]:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( kh \frac{\partial p}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( kh \frac{\partial p}{\partial y} \right) = 0. \quad (1)$$

Введем функцию  $\psi$ , связанную с  $p$  соотношениями

$$\frac{kh}{\rho_n} \frac{\partial p}{\partial x} = - \frac{\partial \psi}{\partial y}, \quad (2)$$

$$\frac{kh}{\rho_n} \frac{\partial p}{\partial y} = \frac{\partial \psi}{\partial x},$$

\* Сообщено на объединенном семинаре по подземной гидромеханике при КФАН СССР и КГУ 11 апреля 1955 г.

где  $\nu_n$  — вязкость нефти в пластовых условиях.  
Отсюда

$$\frac{\partial p}{\partial x} \cdot \frac{\partial \psi}{\partial x} + \frac{\partial p}{\partial y} \cdot \frac{\partial \psi}{\partial y} = 0.$$

Последнее соотношение показывает, что кривая семейства  $p = \text{const}$  пересекается под прямым углом с любой кривой семейства линий  $\psi = \text{const}$ . Назовем  $\psi$  функцией тока. Функция  $\psi$  удовлетворяет уравнению

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\nu_n}{kh} \cdot \frac{\partial \psi}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\nu_n}{kh} \cdot \frac{\partial \psi}{\partial y} \right) = 0.$$

Вычислим расход жидкости  $Q_{AB}$  между двумя соседними линиями тока, проходящими через точки  $A$  и  $B$  с номерами  $\psi_A$  и  $\psi_B$ .

$$Q_{AB} = \int_A^B h \cdot (\bar{v}, \bar{n}) ds = \int_A^B h \cdot (-v_y dx + v_x dy).$$

Но согласно закону Дарси

$$v_x = -\frac{k}{\nu_n} \frac{\partial p}{\partial x}, \quad v_y = -\frac{k}{\nu_n} \frac{\partial p}{\partial y},$$

тогда, учитывая (2), будем иметь:

$$v_x = \frac{1}{h} \cdot \frac{\partial \psi}{\partial y}, \quad v_y = -\frac{1}{h} \cdot \frac{\partial \psi}{\partial x}.$$

Следовательно,

$$Q_{AB} = \int_A^B d\psi = \psi_A - \psi_B. \quad (3)$$

После того, как установлены некоторые свойства функции тока  $\psi$ , можно перейти к решению задачи прослеживания контура нефтеносности.

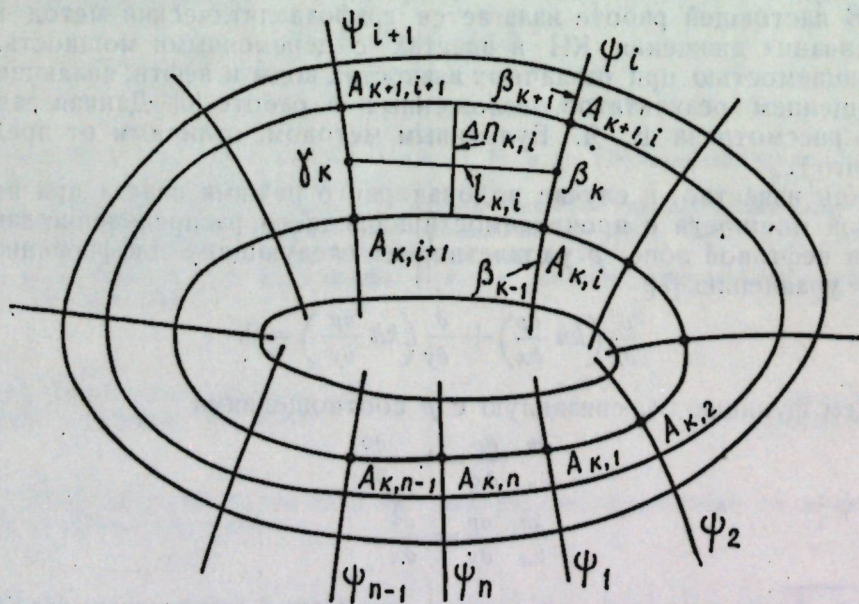


Рис. 1.

Предположим, что нам известно распределение давления в пласте (карта изобар) в некоторый момент времени  $t$  (рис. 1).

Если дебиты эксплуатационных и нагнетательных скважин остаются неизменными в течение времени  $T_1$  ( $0 \leq t \leq T_1$ ), то в случае водонапорного режима распределение давления сохраняется также неизменным за данный промежуток времени.

Точно построенная карта изобар дает распределение давления на месторождении как с учетом различия в вязкостях воды и нефти, так и с учетом неоднородности пласта и различия в его мощности.

Нанесем на одной из изобар, которая находится целиком в нефтяной зоне пласта, последовательность точек  $A_{k1}, A_{k2}, \dots, A_{kn}$  и проведем через данные точки семейство линий тока  $\psi = \text{const}$ , ортогональное к данному семейству изобар.

Можно предложить следующий способ построения линий тока. Через точку  $A_{ki}$  проводим нормаль ( $\beta_k \beta_{k-1}$ ) приблизительно до середины расстояния между соседними изобарами (точки  $\beta_k$  и  $\beta_{k-1}$ ). Затем из точки  $\beta_{k-1}$  проводим нормаль ( $\beta_{k-1} \beta_{k-2}$ ), которая пересечет соседнюю изобару в точке  $A_{k-1,i}$ . Из точки  $\beta_{k-2}$  проводим нормаль к следующей изобаре и т. д. Линия тока, проходящая через точку  $A_{ki}$ , таким образом приближенно представится ломаной  $\beta_{k+1}, \beta_k, \beta_{k-1}, \dots$

Построив линии тока  $\psi = \text{const}$ , определим их номер. На основании свойства (3), имеем:

$$\left. \begin{aligned} Q_{2,1} &= \psi_2 - \psi_1 = \alpha v_n^{(k1)} l_{k1} m_{k1} h_{k1}, \\ Q_{3,2} &= \psi_3 - \psi_2 = \alpha v_n^{(k2)} l_{k2} m_{k2} h_{k2}, \\ &\dots \dots \dots \\ Q_{1,n} &= Q + \psi_1 - \psi_n = \alpha v_n^{(kn)} l_{kn} m_{kn} h_{kn} \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

Здесь  $Q$  — суммарная добыча нефти на данном месторождении, она предполагается известной;

$Q_{i+1,i}$  — расход между двумя линиями тока с номерами  $\psi_{i+1}$  и  $\psi_i$ .

$v_n^{(ki)}$  — осредненная нормальная составляющая скорости фильтрации на криволинейном участке  $k$ -й изобары между линиями тока с номерами  $i$  и  $i+1$  (первый индекс указывает номер изобары, а второй — линии тока);

$m_{ki}$  ( $k, i = 1, 2, \dots, n$ ) — осредненная по площади эффективная пористость в криволинейном четырехугольнике  $A_{ki}, A_{k+1,i}, A_{k+1,i+1}, A_{k,i+1}$ , взятая с карты эффективных пористостей;

$h_{ki}$  ( $k, i = 1, 2, \dots, n$ ) — осредненная по площади мощность пласта в том же четырехугольнике, взятая с карты равных мощностей;

$l_{ki}, \Delta p_{ki}$  — расстояния, снимаемые непосредственно с чертежа (рис. 1) ( $l_{ki}$  — расстояние между двумя соседними линиями тока  $\psi_i$  и  $\psi_{i+1}$ , измеряемое по кривой  $\beta_k, \gamma_k$ , равноудаленной от изобар с номерами  $p_k$  и  $p_{k+1}$ ,  $\Delta p_{ki}$  — осредненное расстояние между двумя изобарами  $p_k$  и  $p_{k+1}$  на участке, заключенном между линиями тока с номерами  $\psi_i$  и  $\psi_{i+1}$ );  $\alpha$  — масштабный множитель.

Не ограничивая общности, можно положить  $\psi_1 = 0$ .  
Из соотношений (4), получаем:

$$Q_{21} + Q_{32} + \dots + Q_{1,n} = \frac{Q_{21}}{v_n^{(k1)} l_{k1} m_{k1} h_{k1}} = \dots = \frac{Q_{1,n}}{v_n^{(k,n)} l_{kn} m_{kn} h_{kn}} \quad (5)$$

$$\sum_{j=1}^n v_n^{(kj)} l_{kj} m_{kj} h_{kj}$$

Согласно закону Дарси, записанному в конечных разностях, имеем:

$$\begin{aligned} v_n^{(k1)} &= c_{11} \frac{\Delta p_k}{\Delta n_{k1}}, \\ v_n^{(k2)} &= c_{12} \frac{\Delta p_k}{\Delta n_{k2}}, \\ &\dots \\ v_n^{(kn)} &= c_{1n} \frac{\Delta p_k}{\Delta n_{kn}}, \end{aligned} \quad (6)$$

где  $\Delta p_k = p_{k+1} - p_k$ ,  $c_{1k} = \frac{k_{1k}}{\mu_n}$  в нефтяной зоне пласта,  $k_{1k}$  — осред-

ненная по площади проницаемость в криволинейном четырехугольнике  $A_{ki}, A_{k+1, i}, A_{k+1, i+1}, A_{k, i+1}$ .

Тогда, на основании соотношений (5) и (6), получаем:

$$\left. \begin{aligned} \psi_2 - \psi_1 = Q_{21} &= \frac{Q l_{k1} m_{k1} h_{k1} k_{k1}}{\Delta n_{k1} \sum_{j=1}^n \frac{l_{kj} m_{kj} h_{kj} k_{kj}}{\Delta n_{kj}}}, \\ \psi_3 - \psi_2 = Q_{32} &= \frac{Q l_{k2} m_{k2} h_{k2} k_{k2}}{\Delta n_{k2} \sum_{j=1}^n \frac{l_{kj} m_{kj} h_{kj} k_{kj}}{\Delta n_{kj}}}, \\ &\dots \\ Q + \psi_1 - \psi_n = Q_{1n} &= \frac{Q l_{kn} m_{kn} h_{kn} k_{kn}}{\Delta n_{kn} \sum_{j=1}^n \frac{l_{kj} m_{kj} h_{kj} k_{kj}}{\Delta n_{kj}}} \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

Определив разность номеров линий тока (или, что то же самое, расход жидкости между соседними линиями тока), мы сможем затем построить синхронные контуры  $\Gamma_i$  [8], соответствующие начальному КН  $\Gamma_0$  для каждого из моментов времени  $t_i$  ( $i = 1, 2, \dots$ ).

Построим синхронный контур для момента времени  $t_1$ .

Имеем:

$$\left. \begin{aligned} Q_{21} t_1 &= m_{11} l_{11} \Delta n_{11} h_{11}, \\ Q_{32} t_1 &= m_{12} l_{12} \Delta n_{12} h_{12}, \\ &\dots \\ Q_{i+1, i} t_1 &= m_{1i} l_{1i} \Delta n_{1i} h_{1i}, \\ &\dots \\ Q_{1, n} t_1 &= m_{1n} l_{1n} \Delta n_{1n} h_{1n}, \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

где  $m_{1i}$ ;  $h_{1i}$  — осредненные по площади пористость, мощность в криволинейном четырехугольнике  $M_i M_{i+1} N_{i+1} N_i$  (рис. 2),  $\Delta n_{1i}$  — осредненное расстояние между кривыми  $M_i M_{i+1}$  и  $N_i N_{i+1}$ ,  $l_{1i}$  — осредненное расстояние между линиями тока  $\psi_i$  и  $\psi_{i+1}$  на участках  $M_i N_i$  и  $M_{i+1} N_{i+1}$ .

Заметим, что  $S_{1i} = \Delta n_{1i} l_{1i}$  есть площадь, высвобожденная из-под нефти, заключенная между соседними линиями тока  $\psi_i$  и  $\psi_{i+1}$ , участком  $M_i M_{i+1}$  контура  $\Gamma_0$  и эквидистантной кривой  $N_i N_{i+1}$ .

Из системы (8) следует, что

$$\begin{aligned} S_{21} &= \frac{Q_{21} t_1}{m_{11} h_{11}}, \\ S_{32} &= \frac{Q_{32} t_1}{m_{12} h_{12}}, \\ &\dots \\ S_{1n} &= \frac{Q_{1n} t_1}{m_{1n} h_{1n}}, \end{aligned}$$

или

$$\left. \begin{aligned} S_{21} &= \frac{Q_{21} t_1}{m_{11} h_{11}}, \\ S_{32} &= S_{21} \frac{Q_{32}}{Q_{21}} \cdot \frac{h_{11}}{h_{12}} \cdot \frac{m_{11}}{m_{12}}, \\ &\dots \\ S_{1n} &= S_{21} \frac{Q_{1n}}{Q_{21}} \cdot \frac{h_{11}}{h_{1n}} \cdot \frac{m_{11}}{m_{1n}}. \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

По известным  $Q$ ,  $m_{11}$ ,  $h_{11}$  и  $t_1$  из первого уравнения системы (9) определяем  $S_{21}$ , затем последовательно найдем  $S_{32}$ ,  $S_{43}$ , ...  $S_{1n}$ .

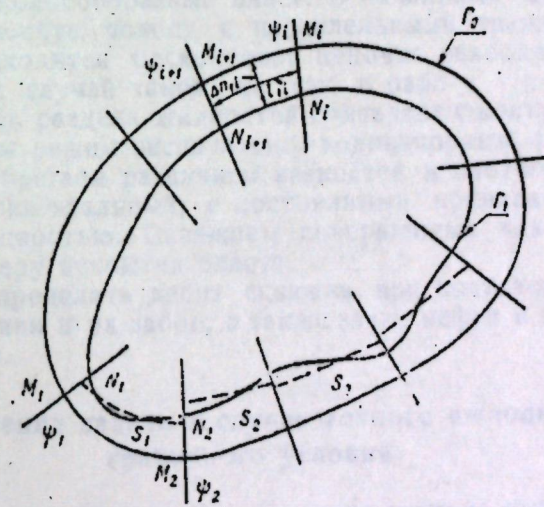


Рис. 2.

Отложив планиметром соответствующие площади  $S_{21}$ ,  $S_{32}$ , ...  $S_{1n}$  и проведя плавную кривую (более подробно см. [6]), найдем положение КН в момент  $t_1$  (рис. 2). Аналогичным образом можно построить синхронный контур для любого последующего момента времени  $t_i$  ( $i = 2, 3, \dots$ ), ведя отсчет площадей либо от предыдущего положения контура, либо от начального положения КН, с учетом предшествующих площадей, не строя промежуточные КН. Указанный выше метод построения синхронных контуров предполагает дебиты эксплуатационных и нагнетательных скважин постоянными. Если же последние изменяются с течением времени, то следует разбить время эксплуатации на  $n$  интервалов и в каждом из них считать дебиты постоянными.

1. Крылов А. П. Основные принципы разработки нефтяных залежей с применением нагнетания рабочего агента в пласт. Труды Московского нефтяного ин-та им. Губкина, вып. 12, 1953.
2. Лейбензон Л. С. Нефтепромысловая механика, ч. II, Горгеонефтеиздат, М., 1937.
3. Лейбензон Л. С. Движения природных жидкостей и газов в пористой среде. Гостехиздат, М., 1947.
4. Щелкачев В. Н., Лапук Б. Б. Подземная гидравлика. Гостоптехиздат, 1949.
5. Чарный И. А. Подземная гидромеханика, ОГИЗ, Гостехиздат, 1948.
6. Иванов Н. Ф. Графоаналитический метод прослеживания контура нефтеносности. Известия Казанского филиала АН СССР, серия физико-матем. и техн. наук, вып. 8, 1955.
7. Маскет М. Течение однородных жидкостей в пористой среде. Гостоптехиздат, 1949.
8. Яковлев В. П. О размещении скважин при водонапорных режимах. Нефтяное хоз-во, № 3—5, 1940.

Физико-технический институт  
Казанского филиала АН СССР

Поступило  
24 июня 1955 г.

С. Ф. Коротков

### ОБВОДНЕНИЕ ПРЯМОЛИНЕЙНОЙ ЦЕПОЧКИ СКВАЖИН В ПОЛОСООБРАЗНОЙ ЗАЛЕЖИ

В работе определяется время обводнения цепочки скважин в полосообразной залежи, а также количество нефти в целиках к моменту обводнения. Попутно определяется дебит скважин. Расчет проведен для водонапорного режима, различие вязкостей воды и нефти не учитывалось. Дано решение при точном и приближенном выполнении краевого условия на контуре питания. Приведен численный пример.

#### § 1. Постановка задачи

Рассмотрим полосообразный пласт. В начальный момент нефть заполняет бесконечную полосу с параллельными границами, посредине которой находится бесконечная цепочка равнодебитных скважин. Рассмотрим случай такой же как в работе [1], когда первоначальная граница раздела жидкостей совпадает с контуром питания.

Предполагаем режим эксплуатации водонапорным, фильтрацию — линейной. Пренебрегаем различием вязкостей и плотностей нефти и воды. Пласт горизонтальный, с постоянными проницаемостью, пористостью и мощностью. Скважины совершенные как по степени, так и по характеру вскрытия пласта.

Требуется определить дебит скважин при постоянном давлении на контуре питания и их забое, а также запас нефти в целиках в момент обводнения.

#### § 2. Решение задачи в случае точного выполнения граничного условия

При сформулированных в § 1 условиях течение является плоским и потенциальным. Рассматриваем плоскость комплексной переменной ( $z$ ). Пусть уравнения первоначальной границы раздела жидкостей, совпадающей в нашем случае с контуром питания, будут  $\text{Im}(z) = \pm h$  (см. рис. 1). На этих линиях должно выполняться условие постоянства давления  $p = p_k$ . Чтобы удовлетворить ему, воспользуемся методом зеркальных отображений и построим комплексный потенциал течения к чередующимся цепочкам симметрично расположенных стоков и источников одинаковой обильности  $\pm Q$

$$W(z) = \varphi + i\psi.$$

Начнем построение функции  $W$  с определения сопряженной скорости течения  $\bar{V} = \frac{dW}{dz}$ . Она будет функцией эллиптической; основной прямо-

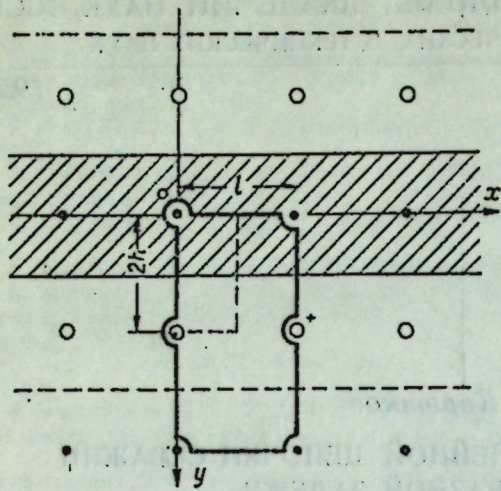


Рис. 1

угольник периодов для нее изображен на рис. 1. Обозначим ее полупериоды  $\omega = \frac{l}{2}$  и  $\omega' = 2ih$ . Согласно общей теории эллиптических функций, производная  $\frac{dW}{dz}$ , имеющая простые полюсы в точках  $(2m\omega + 2n\omega')$  и  $(2m\omega + (2n+1)\omega')$  ( $m, n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ ) может быть представлена в виде [2]:  $\frac{dW}{dz} = A_1 \zeta(z - \omega') + A_2 \zeta(z) + C$ , где  $A_1$  и  $A_2$  — вычеты функции относительно полюсов, лежащих в параллелограмме периодов,  $C$  — некоторая комплексная постоянная. Коэффициенты  $A_1$  и  $A_2$  легко определяются:

$$A_1 = \frac{Q}{2\pi}, \quad A_2 = -\frac{Q}{2\pi}.$$

Следовательно,

$$\frac{dW}{dz} = \frac{Q}{2\pi} [\zeta(z - \omega') - \zeta(z)] + C. \quad (2, 1)$$

Воспользовавшись соотношением [2]:

$$\zeta(z) = \frac{d}{dz} \ln \sigma(z), \quad (2, 2)$$

можем записать (2, 1) в следующем виде:

$$\frac{dW}{dz} = \frac{Q}{2\pi} \left[ \frac{\sigma'(z - \omega')}{\sigma(z - \omega')} - \frac{\sigma'(z)}{\sigma(z)} \right] + C. \quad (2, 3)$$

Интегрируя (2, 3) по переменной  $z$ , находим  $W(z)$ . Постоянная  $C$  определяется из условия, что функция  $W(z)$  обладает только чисто мнимым периодом  $2\omega'$ . В результате имеем:

$$W(z) = \frac{Q}{2\pi} \left[ \ln \frac{\sigma(z - \omega')}{\sigma(z)} + \zeta(\omega')z \right] + D. \quad (2, 4)$$

Найдем связь между значениями  $\zeta$ -функции от чисто мнимого аргумента и ее значениями от вещественного аргумента. Используем для этой цели формулу однородности для  $\zeta$ -функции, которая имеет вид [2]:

$$\sqrt{\lambda} \zeta(z, g_2, g_3) = \zeta\left(\frac{z}{\sqrt{\lambda}}, g_2 \lambda^2, g_3 \lambda^3\right).$$

Полагая  $\lambda = -1$  и придавая переменной  $z$  чисто мнимые значения  $y$ , получим необходимое нам соотношение:

$$\zeta(iy, g_2, g_3) = -\zeta(y, g_2, -g_3).$$

Совершенно аналогично находятся соответствующие формулы и для п-функций Вейерштрасса, которые мы будем обозначать буквой  $P$ :

$$P(iy, g_2, g_3) = -P(y, g_2, -g_3) \\ P'(iy, g_2, g_3) = iP'(y, g_2, -g_3).$$

Здесь  $g_2$  и  $g_3$  — инварианты функции  $P$ ; напомним, что они являются числовыми коэффициентами дифференциального уравнения, которому эта функция удовлетворяет [2]:

$$\left[ \frac{d}{dz} P(z) \right]^2 = 4P^3(z) - g_2 P(z) - g_3.$$

Для сокращения записи введем систему обозначений:

$$\left. \begin{aligned} P(iy) &= P(iy, g_2, g_3) = -P(y, g_2, -g_3) = -P^*(y) \\ P'(iy) &= P'(iy, g_2, g_3) = iP'(y, g_2, -g_3) = iP^{*'}(y) \\ \zeta(iy) &= \zeta(iy, g_2, g_3) = -\zeta(y, g_2, -g_3) = -\zeta^*(y) \end{aligned} \right\} \quad (2, 5)$$

После некоторых преобразований соотношение (2, 4) можно привести к такому виду:

$$W(z) = \frac{Q}{2\pi} \ln [P(z) - e_3] + D, \quad (2, 6)$$

где  $e_3 = P(\omega')$ . Так как в нашем случае параллелограмм периодов — прямоугольник, то отсюда следует, что дискриминант

$$\Delta = g_2^3 - 27g_3^2 > 0 \quad [2].$$

Следовательно,  $e_3$  вещественно. Постоянная  $D$ , вообще говоря, комплексная:

$$D = D_1 + iD_2.$$

Отделив в (2, 6) вещественную и мнимую части с учетом формулы [2]:

$$P(x + iy) = \frac{1}{4} \left[ \frac{P'(x) - P'(iy)}{P(x) - P(iy)} \right]^2 - P(x) - P(iy),$$

получим в принятых нами обозначениях (2, 5):

$$p + D_1 = -\frac{Q\mu}{8\pi k} \ln \frac{16P^4(x)[P^*(y) + e_3]^2 + O^2 P^2(x)}{16[P(x) + P^*(y)]^4}. \quad (2, 7)$$

Здесь мы сразу записали выражение для функции давления, так как  $p = -\frac{\mu}{k} \varphi$ , где  $\mu$  — коэффициент вязкости жидкости,  $k$  — коэффициент проницаемости коллектора. При этом выделены явно только члены, имеющие при  $x=0$  полюсы восьмого порядка. В силу полной симметрии, ограничимся в дальнейшем рассмотрением картины течения в четвертой части основного прямоугольника периодов производной  $\frac{dW}{dz}$  (на рис. 1 обозначен пунктиром). Уравнение семейства линий тока получается в виде:

$$\psi = \frac{2P'(x)P^{*'}(y)}{4[P(x) + e_3 - P^*(y)][P(x) + P^*(y)]^2 - P^{*'}(y) - P'^2(x)} = C.$$

При  $x=0$  и  $x=\omega$  имеем прямолинейные линии тока.

Учтем тот факт, что в окрестности стока или источника линии равного потенциала практически представляют собою окружности даже в случае нерадиального течения. Поэтому можно с высокой степенью точности считать, что на окружности малого радиуса  $r_0$ ,



(в действительном течении ему соответствует радиус скважины, причем  $r_0 \ll h$  и  $l$ ) имеем постоянное давление  $p_0$ . Сделав это замечание, потребуем, чтобы  $p(0, r_0) + D_1 = p_0$ ,  $p(0, h) + D_1 = p_k$ . Налагаемое требование и определит вещественную постоянную  $D_1$ . Беря выражение (2, 7) при значениях  $x=0, y=r_0$  и  $x=0, y=h$  и вычитая из первого соотношения второе, после элементарных преобразований, получим формулу для определения дебита скважин с единицы мощности пласта:

$$Q = \frac{4\pi k}{\mu} \cdot \frac{p_k - p_0}{\ln \frac{P^*(r_0) + e_3}{P^*(h) + e_3}} \quad (2, 8)$$

Под временем обводнения скважин будем понимать время, за которое частица жидкости, находившаяся при  $t=0$  в точке  $(0, ih)$  или  $(0, -ih)$  достигнет скважины, двигаясь по траектории  $\text{Re}(z)=0$ . Отделив в (2, 1) вещественную и мнимую части, получим в обозначениях (2, 5) при  $\text{Re}(z)=0$ :

$$V_x = 0, \quad V_y = \frac{Q}{2\pi} [\zeta^*(y-2h) - \zeta^*(y) + \zeta^*(2h)].$$

Перейдем к средней скорости действительного течения жидкости в грунте с коэффициентом пористости  $m$ , которая связана со скоростью фильтрации соотношением [3]  $\bar{V}^* = \frac{\bar{V}}{m}$ . Тогда время обводнения скважины определится следующим интегралом:

$$T = \int_h^0 \frac{dy}{V_y} = \frac{2\pi m}{Q} \int_h^0 \frac{dy}{\zeta^*(y-2h) - \zeta^*(y) + \zeta^*(2h)} \quad (2, 9)$$

Отметим, что на интервале интегрирования  $V_y^*$  в нуль нигде не обращается. Обозначив интеграл через  $I$ , произведем замену переменной интегрирования, полагая  $y-h = \tau$ . Тогда

$$I = \int_0^{-h} \frac{d\tau}{\zeta^*(\tau-h) - \zeta^*(\tau+h) + \zeta^*(2h)}$$

Воспользуемся одним из соотношений для функции  $\zeta$  [2]:

$$\zeta^*(u-v) - \zeta^*(u+v) + 2\zeta^*(v) = \frac{P^*(v)}{P^*(u) - P^*(v)} \quad (2, 10)$$

Полагая в нем  $V=h, u=\tau$  и добавляя к обеим частям члены  $\zeta^*(2h)$ , получим:

$$\begin{aligned} & \zeta^*(\tau-h) - \zeta^*(\tau+h) + \zeta^*(2h) = \\ & = \frac{[\zeta^*(2h) - 2\zeta^*(h)] P^*(\tau) + P^*(h) [\zeta^*(h) - \zeta^*(2h)] + P^*(h)}{[P^*(\tau) - P^*(h)]} \end{aligned}$$

Подставив это значение в подынтегральное выражение, находим:

$$I = \int_0^{-h} \frac{P^*(\tau) + a}{b P^*(\tau) + c} d\tau,$$

где введены сокращенные обозначения для постоянных:

$$\left. \begin{aligned} a &= -P^*(h), \\ b &= \zeta^*(2h) - 2\zeta^*(h), \\ c &= P^*(h) [\zeta^*(h) - \zeta^*(2h)] + P^*(h) \end{aligned} \right\} \quad (2, 11)$$

Представим наш интеграл в виде суммы двух интегралов:

$$\int \frac{P^*(\tau) + a}{b P^*(\tau) + c} d\tau = \frac{1}{b} I_1 + \frac{a}{b} I_2,$$

где

$$I_1 = \int \frac{P^*(\tau) d\tau}{P^*(\tau) + \frac{c}{b}}, \quad I_2 = \int \frac{d\tau}{P^*(\tau) + \frac{c}{b}}.$$

Полагаем

$$-\frac{c}{b} = P^*(\alpha), \quad (2, 12)$$

где  $\alpha$  — некоторая постоянная. Далее, как нетрудно заметить,

$$I_1 = \tau + P^*(\alpha) I_2$$

и, следовательно,  $I$  можно записать в виде ( $I$  — неопределенный интеграл)

$$I = \frac{\tau}{b} + \frac{1}{b} [P^*(\alpha) + a] I_2. \quad (2, 13)$$

Интеграл  $I_2$  вычисляется просто. Применяв формулу (2, 10), получим:

$$I_2 = \frac{1}{P^{*\prime}(\alpha)} \int [\zeta^*(\tau-\alpha) - \zeta^*(\tau+\alpha) + 2\zeta^*(\alpha)] d\tau. \quad (2, 14)$$

Для интегрирования используем (2, 2). Найдя неопределенный интеграл  $I_2$ , подставим его значение в (2, 13) и перейдем к прежним выражениям постоянных  $a, b$  и  $c$  из (2, 11). Подставляя пределы интегрирования  $0, -h$  (см. 2, 9), получим окончательно:

$$T = \frac{2\pi m}{Q [2\zeta^*(h) - \zeta^*(2h)]} \left\{ h - \frac{P^*(h)}{P^*(\alpha)} \left[ \ln \frac{\alpha^*(\alpha+h)}{\alpha^*(\alpha-h)} - 2\zeta^*(\alpha) h \right] \right\} \quad (2, 15)$$

Параметр  $\alpha$  определяется из уравнения (2, 12); заменяя в нем постоянные  $c$  и  $b$  их значениями из (2, 11), приведем его к такому виду:

$$P^*(\alpha) = P^*(h) + \frac{P^*(h)}{2\zeta^*(h) - \zeta^*(2h)}. \quad (2, 16)$$

Определив  $\alpha$  из (2, 16) и подставив его в (2, 15), вычисляем время обводнения скважин  $T$ .

После этого переходим к отысканию расстояния  $y_\omega$ , которое пройдет частица жидкости за время  $T$ , двигаясь по прямолинейной траектории  $\text{Re}(z)=\omega$ . В силу симметрии такое же расстояние пройдет и частица, двигающаяся по траектории  $\text{Re}(z)=-\omega$  (см. рис. 1). Выделим в (2, 1) вещественную и мнимую части при  $\text{Re}(z)=\omega$ . Так как  $V_x=0$ , то  $\frac{dW}{dz} = -iV_y$ . Для определения  $y_\omega$  получаем следующее уравнение:

$$T = \frac{2\pi m}{Q} \int_h^{y_\omega} \frac{dy}{\frac{P^*(y-2h)}{e_1 + P^*(y-2h)} - \frac{P^*(y)}{e_1 - P^*(y)} + \frac{P^*(y)}{P^*(y) - P^*(2h)}} = \frac{2\pi m}{Q} S. \quad (2, 17)$$

Для решения его используем следующий прием. Задавая численными значениями  $y$ , строим график подынтегральной функции. Затем подбираем такое значение  $y_\omega$ , чтобы численное значение площади ( $S$ ), ограниченной этим графиком, осью абсцисс и прямыми  $y=h, y=y_\omega$ , удовлетворяло бы уравнению (2, 17). Проведя через сток и точку

( $\omega, y_\omega$ ) дугу окружности, получим примерный вид водонефтяного контакта в момент обводнения. Далее, интегрируя, можно приближенно оценить запас нефти в целиках.

### § 3. Приближенное решение задачи

Будем решать ту же задачу, не заботясь пока о выполнении граничного условия  $p = p_k$  на линиях  $\text{Im}(z) = \pm h$  (см. рис. 1). Рассмотрим течение к бесконечной цепочке стоков в неограниченном пласте. Комплексный потенциал течения с точностью до постоянной имеет вид:

$$W(z) = -\frac{Q}{2\pi} \ln \sin \frac{\pi z}{l}. \quad (3, 1)$$

Отделив в (3, 1) вещественную и мнимую части, найдем:

$$\left. \begin{aligned} \varphi &= \frac{Q}{2\pi} \ln \sqrt{\sin^2 \frac{\pi x}{l} \text{ch}^2 \frac{\pi y}{l} + \cos^2 \frac{\pi x}{l} \text{sh}^2 \frac{\pi y}{l}} \\ \psi &= -\frac{Q}{2\pi} \text{Arc tg} \left( \text{ctg} \frac{\pi x}{l} \text{th} \frac{\pi y}{l} \right) \end{aligned} \right\} \quad (3, 2)$$

От первого из соотношений (3, 2) переходим к выражению для функции давления  $p$  (см. § 2). Исследуем, как изменяется значение функции  $p$  вдоль прямых  $\text{Im}(z) = \pm h$ . После элементарного расчета находим, что при  $h = \frac{l}{2}$

$$p(0, h)/p\left(\frac{l}{2}, h\right) = 1,0003; \quad \text{при } h = l \quad p(0, h)/p\left(\frac{l}{2}, h\right) = 1,1036$$

( $l$  — расстояние между скважинами в цепочке). Следовательно, при  $h$  соизмеримом с  $l$  линии  $\text{Im}(z) = \pm h$  только приближенно можно считать линиями равного давления. Поэтому и решение, полученное в этом случае, будет приближенным. Проведя рассуждения, аналогичные изложенным в § 2, потребуем, чтобы  $p(0, h) = p_k$ , а  $p(0, r_0) = p_0$ . Из этих двух соотношений определяем дебит скважины с единицы мощности пласта.

$$Q = \frac{2\pi k}{\mu} \cdot \frac{p_k - p_0}{\ln \frac{\text{sh} \frac{\pi h}{l}}{\text{sh} \frac{\pi r_0}{l}}}. \quad (3, 3)$$

Дифференцируя (3, 1), отделяя вещественную и мнимую части и переходя к осредненной скорости действительного течения жидкости, получим такие выражения для ее составляющих:

$$\left. \begin{aligned} V_x^* &= -\frac{Q}{2ml} \cdot \frac{\sin \frac{\pi x}{l} \cos \frac{\pi x}{l}}{\sin^2 \frac{\pi x}{l} \text{ch}^2 \frac{\pi y}{l} + \cos^2 \frac{\pi x}{l} \text{sh}^2 \frac{\pi y}{l}} \\ V_y^* &= -\frac{Q}{2ml} \cdot \frac{\text{sh} \frac{\pi y}{l} \text{ch} \frac{\pi y}{l}}{\sin^2 \frac{\pi x}{l} \text{ch}^2 \frac{\pi y}{l} + \cos^2 \frac{\pi x}{l} \text{sh}^2 \frac{\pi y}{l}} \end{aligned} \right\} \quad (3, 4)$$

Отсюда видно, что прямые  $x = kl$  и  $x = (2k + 1)\frac{l}{2}$  ( $k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ ) являются траекториями.

Время обводнения скважин определяется следующей формулой:

$$T = \int_0^h \frac{dy}{V_y^*(0, y)} = \frac{2ml^2}{\pi Q} \cdot \ln \text{ch} \frac{\pi h}{l}. \quad (3, 5)$$

Интегрирование соотношения (3, 5) по траектории общего вида  $\psi(x, y) = C$  ( $C$  — параметр траектории) приводит к такой связи между координатой  $y$ , временем  $t$  и параметром траектории  $C$ :

$$t = \frac{ml^2}{\pi Q} \ln \frac{1 + (A + 1) \text{sh}^2 \frac{\pi h}{l}}{1 + (A + 1) \text{sh}^2 \frac{\pi y}{l}}, \quad (3, 6)$$

где

$$A = \text{ctg} \frac{2\pi C}{Q}.$$

Выражение (3, 6) является первым из параметрических уравнений водонефтяного контакта. Разрешим его относительно  $y$ . Определив с помощью (3, 6)  $\text{th} \frac{\pi y}{l}$  и подставив его значение в уравнение семейства линии тока  $\psi = C$  (3, 2), находим второе параметрическое уравнение водонефтяного контакта. Разрешаем его относительно  $x$ . Проведем эти преобразования, найдем:

$$\left. \begin{aligned} x &= -\frac{l}{\pi} \text{arc tg} \left\{ \pm A \sqrt{\frac{[1 + (A + 1) \text{sh}^2 \frac{\pi h}{l}] e^{-kt} - 1}{A + [1 + (A + 1) \text{sh}^2 \frac{\pi h}{l}] e^{-kt}}} \right\} \\ y &= \frac{l}{4\pi} \ln \left\{ 1 + 2 \cdot \frac{[1 + (A + 1) \text{sh}^2 \frac{\pi h}{l}] e^{-kt}}{A + 1} \pm \sqrt{\left\{ 1 + 2 \cdot \frac{[1 + (A + 1) \text{sh}^2 \frac{\pi h}{l}] e^{-kt}}{A + 1} \right\}^2 - 1} \right\} \end{aligned} \right\}$$

где  $k = \frac{\pi Q}{ml^2}$ . Полагая  $t = T$  и придавая параметру  $C$  ряд значений, получаем любое количество точек водонефтяного контакта в момент обводнения. Интегрируя, определяем запас нефти в целиках. Отметим, что методом, который приведен у нас в § 3, проведен расчет в работе Н. Н. Барановской [4], где решается задача исследования относительного содержания нефти и воды в дебите скважины после их обводнения.

Для решения при точном и приближенном выполнении граничного условия был просчитан пример. Причем предполагалось, что в случае приближенного решения на линиях  $\text{Im}(z) = \pm h$  давление постоянное и такое же, как и в § 2.

Для параметров были взяты такие значения  $h = l = 1000$  м, перепад давления  $p_k - p_0 = 30$  атм,  $\mu = 1$  сантипуаз,  $k = 1$  дарси,  $m = 0,25$ ,  $r_0 = 0,1$  м.

Были получены следующие результаты (индексом 1 обозначены величины, полученные из решения § 2, индексом 2 — из приближенного).

Дебиты скважин с единицы мощности пласта:

$$Q_1 = 17,95 \text{ см}^3/\text{сек}, \quad Q_2 = 17,92 \text{ см}^3/\text{сек}.$$

Время обводнения:

$$T_1 = 6,72 \text{ года}, \quad T_2 = 6,99 \text{ года}.$$

Остаток нефти в целиках:

$$S_1 \approx 8\%, \quad S_2 \approx 10\%.$$

Отсюда следует вывод, что если расстояние до контура питания больше, чем расстояние между скважинами в ряду, то для определения дебитов скважин, времени обводнения и запаса нефти в целиках в момент обводнения, вместо формул, полученных методом § 2 (2, 8), (2, 15), можно с достаточной степенью точности пользоваться простыми формулами приближенного решения (3, 3), (3, 5) и изложенной в § 3 методикой определения запаса нефти в целиках.

Работа выполнена как дипломная на кафедре механики КГУ в 1953 г. под руководством кандидата физико-математических наук В. Л. Давилова.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Маскет М. Течение однородных жидкостей в пористой среде. Гостоптехиздат, 1949.
2. Сикорский Ю. С. Элементы теории эллиптических функций. ОНТИ НКТП, 1936.
3. Чарный И. А. Подземная гидромеханика, ОГИЗ, Гостехиздат, 1948.
4. Барановская Н. Н. Гидромеханическое исследование простейших случаев перемещения контура нефтеносности и обводнения скважин. МНИ им. акад. Губкина. Труды, вып. 14, Гостоптехиздат, 1955.

Физико-технический институт  
Казанского филиала АН СССР

Поступило  
10 июня 1955 г.

#### СОДЕРЖАНИЕ

Салехов Г. С. О краевых задачах, допускающих данное решение . . .	3
Данилов В. Л. Об одновременном управлении несколькими контурами нефтеносности с учетом различия вязкостей воды и нефти . . . . .	13
Цыбульский Г. П. Решение задачи управления движением незвездных контуров нефтеносности . . . . .	35
Салехов Г. С. К определению давления в неоднородных пластах нефтяных месторождений . . . . .	49
Иванов Н. Ф., Чугунов В. Д. Графоаналитический метод прослеживания контура нефтеносности в пластах с переменной мощностью и проницаемостью . . . . .	53
Коротков С. Ф. Обводнение прямолинейной цепочки скважин в полосообразной залежи . . . . .	59