

АКАДЕМИЯ НАУК СССР
КАЗАНСКИЙ ФИЛИАЛ

**ИЗВЕСТИЯ
КАЗАНСКОГО ФИЛИАЛА
АКАДЕМИИ НАУК
СССР**

*СЕРИЯ ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИХ
И ТЕХНИЧЕСКИХ НАУК*

8



ТАТКНИГОИЗДАТ
КАЗАНЬ 1955

АКАДЕМИЯ НАУК СССР
КАЗАНСКИЙ ФИЛИАЛ

ИЗВЕСТИЯ
КАЗАНСКОГО ФИЛИАЛА
АКАДЕМИИ НАУК
СССР

*СЕРИЯ ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИХ
И ТЕХНИЧЕСКИХ НАУК*

Выпуск 8

НЕКОТОРЫЕ ГИДРОДИНАМИЧЕСКИЕ ЗАДАЧИ
РАЦИОНАЛЬНОЙ РАЗРАБОТКИ
НЕФТЯНЫХ МЕСТОРОЖДЕНИЙ



ТАТКНИГОИЗДАТ
КАЗАНЬ 1955

Ответственный редактор
доктор физико-математических наук,
профессор Г. С. Салехов

12505
ЦЕНТРАЛЬНАЯ НАУЧНАЯ
БИБЛИОТЕКА
А. Н. Киргизской ССР

Г. С. САЛЕХОВ

ПРИЛОЖЕНИЕ ОДНОГО МЕТОДА МИНИМАЛЬНОЙ ПОГРЕШНОСТИ К РЕШЕНИЮ ЗАДАЧ УПРАВЛЕНИЯ ДВИЖЕНИЕМ КОНТУРА НЕФТЕНОСНОСТИ

Рассматриваются методы решения задачи управления движением контура нефтеносности в случае „непрерывного“ и „дискретного“ (по точкам) задания начального контура нефтеносности. Используется метод минимальной погрешности по средне-квадратической норме в смысле интеграла Стильбеса.

§ 1. Введение

В наших работах [1], [2] была дана общая гидродинамическая постановка задач управления движением КН (контура нефтеносности) при любых режимах пласта. В работах [2], [3] изложены некоторые методы решения этих задач при водонапорном режиме пласта, когда скважины рассматриваются как точечные стоки и источники. Методы решения основывались на достижении возможно наименьшего средне-квадратического отклонения двух полей скоростей: „желаемого“ и „возможного“, путем оптимального выбора как размещения, так и характера эксплуатации скважин в данном месторождении*.

В этих работах применялся метод минимальной средне-квадратической погрешности [4] и некоторые частные положения из теории наилучшего квадратического приближения функций.

В настоящей работе на основе общей теории квадратического приближения функций [5], с использованием метода минимальной погрешности со средне-квадратической нормой в смысле интеграла Стильбеса, рассматриваются решения задач управления движением КН. Ранее рассмотренные методы являются частными случаями изложенного в настоящей работе общего метода решения. Этот метод позволяет рассмотреть с единой точки зрения следующие два основных случая задания начального положения КН:

- 1) когда уравнение первоначального положения КН Γ_0 задается аналитически непрерывной функцией;
- 2) когда положение КН Γ_0 известно лишь в некоторых его дискретных точках.

В дальнейшем изложении эти два случая соответственно мы будем коротко называть: 1) случай „непрерывных“ данных и 2) случай „дискретных“ данных**.

* Практическая важность регулирования движения водо-нефтяного контакта как за счет размещения, так и за счет режимов эксплуатации скважин была, например, подчеркнута в статье члена-корресп. АН СССР А. П. Крылова „Основные принципы разработки нефтяных залежей с применением нагнетания рабочего агента в пласт“ (Труды МНИ имени акад. И. М. Губкина, вып. 12, Гостехиздат, 1953).

** Помимо этих двух основных случаев возможен и третий: когда положение Γ_0 известно частично по непрерывным дугам и частично лишь в дискретных его точках. Этот случай в настоящей работе не рассматривается.

Изучение решения задач управления движением КН для каждого из этих случаев представляет практический интерес. Дело в том, что, пользуясь некоторыми известными точками Γ_0 , можно было бы составить приближенное аналитическое уравнение контура Γ_0 и свести 2-й случай задания к 1-му, однако, это привело бы нас, с одной стороны, к весьма сложным и громоздким вычислениям, с другой стороны, потребовались бы дополнительные обоснования, насколько выбранная нами формула интерполяции отражает истинную форму контура Γ_0 и насколько это сказывается на конечных наших результатах. Если уравнения контура Γ_0 и контура Γ_1 , к которому следует стянуть первоначальный КН Γ_0 , имеют простой вид, решение задачи сравнительно легко может быть доведено до конца. Это относится, например, к случаю концентрического стягивания окружности Γ_0 или к случаю параллельного стягивания прямолинейного контура Γ_0 . Однако, все же такие случаи могут встречаться редко. Обычно в нефтепромысловой практике положение Γ_0 более или менее достоверно известно лишь по некоторым местным отметкам, т. е. положение контура Γ_0 может быть установлено по его „дискретным“ точкам, причем эти данные сами могут быть не одинаково точными. В реальных условиях пласта четкой границы между водой и нефтью не существует, и фактически КН есть некоторая полоса, заполненная в порах пласта смесью вода-нефть с плавным переходом к зонам чистой воды и нефти. Поэтому положение КН в любой момент времени практически принимают как некоторую условно осредненную границу между водой и нефтью. Это обстоятельство позволяет признать вполне законным применение методов минимальной погрешности к решению задачи управления движением КН с соответствующей оценкой наименьшего средне-квадратического отклонения двух полей скоростей — „желаемого“ и „возможного“. Приложение метода к решению конкретных задач управления движением КН в случае „непрерывных“ данных рассмотрено также в работах В. Л. Данилова [6], В. Д. Чугунова [7], [8] и в случае „дискретных“ данных в работе Б. А. Сейфуллиной [9], опубликованных в настоящем выпуске.

§ 2. Основные предпосылки, уравнения и постановка задачи

Рассмотрим горизонтальный пласт постоянной мощности, ограниченный некоторым замкнутым контуром питания Γ_n , на котором сохраняется постоянное давление, равное первоначальному пластовому давлению p_n *. Считаем пласт неоднородным, т. е. проницаемость k есть некоторая функция от координат точки. Вязкости воды μ_w и нефти μ_n могут быть различными. В пласте разбурены гидродинамически совершенные эксплуатационные и нагнетательные скважины, которые рассматриваются как вертикальные стоки и источники**. Предположим, что жидкости при данном режиме пласта движутся по линейному закону фильтрации. Между тем следует отметить, что общая методика изучения вопроса, изложенная в настоящей работе, принципиально может быть применена к исследованию задачи управления движением КН и при других законах фильтрации.

Введем еще следующие обозначения:

Γ_0 — начальное положение КН (см. рис. 1);

Γ — положение КН в текущий момент времени;

Γ_1 — конечное положение КН к моменту времени T .

* Метод, изложенный в настоящей работе, может быть применен также для исследования случая незамкнутых контуров.

** См. по этому поводу [2].

Пусть (φ_i, ρ_i) — полярные координаты скважин; точка „О“ — полюс полярной системы координат, который находится в области, ограниченной контуром Γ_1 , q_i — текущие объемные дебиты скважин. Пусть индексы $i=1, 2, \dots, n$ соответствуют эксплуатационным и индексы $i=n+1, n+2, \dots, n+l$ — нагнетательным скважинам. При сделанных выше общих предположениях и при известном режиме пласта давление p внутри области G , ограниченной контуром Γ_n , является некоторой функцией полярных координат (θ, r) , времени t , а также $3(n+l)$ параметров (φ_i, ρ_i) и q_i ($i=1, 2, \dots, n, n+1, \dots, n+l$). При этом $0 \leq \theta \leq 2\pi$, $0 \leq t \leq T$, где T — время стягивания контура Γ_0 к Γ_1 , и функция давления p должна удовлетворять следующим краевым условиям:

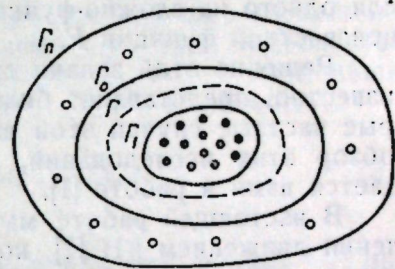


Рис. 1.

Во-первых, на контуре питания Γ_n должно выполняться условие

$$p|_{\Gamma_n} = p_n.$$

Во-вторых, если функцию давления внутри нефтяной области G^+ , ограниченной переменным контуром Γ , обозначим через p^+ , а в водной области G^- между Γ и Γ_n — через p^- , то в силу непрерывности давления и нормальных скоростей на Γ должны выполняться условия:

$$p^+ = p^-, \quad \frac{k}{\mu_n} \frac{\partial p^+}{\partial n} = \frac{k}{\mu_w} \frac{\partial p^-}{\partial n}. \quad (2.1)$$

Помимо этого, если, например, учитывать упругость жидкостей и породы, мы должны требовать и выполнения начального условия

$$p|_{t=0} = p_0(\theta, r),$$

где $p_0(\theta, r)$ — некоторая известная функция.

Предположим, что при данном режиме пласта функция p определена в зависимости от параметров φ_i, ρ_i и q_i так, что вышеприведенные краевые и начальные условия будут выполнены. Вопрос определения функции p мы здесь оставляем открытым, и он должен решаться для каждой конкретной задачи самостоятельно (см., например, работы [2], [3], [6]–[8]). Обозначим уравнение неизвестного контура Γ через

$$F(\theta, r, t) = 0, \quad (2.2)$$

где $F(\theta, r, 0) = 0$ есть известное уравнение контура Γ_0 . Беря полную производную по t от уравнения (2.2) и пользуясь законом Дарси, выраженным в полярных координатах, а также принимая во внимание (2.1), мы получим следующие два эквивалентных уравнения движения контура нефтеносности

$$\left. \begin{aligned} m \frac{\partial F}{\partial t} - \frac{k}{\mu_n} \left[\frac{1}{r^2} \frac{\partial p^+}{\partial \theta} \right]_{\Gamma} \cdot \frac{\partial F}{\partial \theta} - \frac{k}{\mu_n} \left[\frac{\partial p^+}{\partial r} \right]_{\Gamma} \cdot \frac{\partial F}{\partial r} &= 0, \\ m \frac{\partial F}{\partial t} - \frac{k}{\mu_w} \left[\frac{1}{r^2} \frac{\partial p^-}{\partial \theta} \right]_{\Gamma} \cdot \frac{\partial F}{\partial \theta} - \frac{k}{\mu_w} \left[\frac{\partial p^-}{\partial r} \right]_{\Gamma} \cdot \frac{\partial F}{\partial r} &= 0, \end{aligned} \right\} \quad (2.3)$$

где m — пористость.

Задача о прослеживании движения КН (см. работу [2]) сводится к решению задачи Коши при начальном условии

$$F|_{t=0} = F(r, \theta, 0) = 0$$

для одного из сложно-функциональных уравнений (2.3) относительно неизвестной функции F .

Решение этой задачи даже в случае водонапорного режима, как известно, представляет большие математические трудности. Некоторые частные случаи этой задачи были рассмотрены ранее. Краткий обзор этих исследований, опубликованных в печати до 1953 года, дается нами в работе [1].

В настоящей работе мы занимаемся решением задачи об управлении движением КН [2], которая состоит в следующем: определить такие оптимальные способы размещения и эксплуатации скважин в данном месторождении, которые в пределах практически возможной их вариации наилучшим образом* обеспечивали бы желаемый закон стягивания контура нефтеносности.

§ 3. О методах минимальной погрешности

Прежде, чем перейти к изложению методов решения задачи управления движением КН, мы здесь приведем некоторые основные сведения о решении краевых задач методами минимальной погрешности [4].

Пусть требуется найти решение дифференциального уравнения

$$F(x_1, x_2, \dots, x_n; u, u_1, \dots, u_n, u_{11}, \dots, u_{nn}, \dots) = 0 \quad (3.1)$$

в n -мерной области $D \supset (x_1, x_2, \dots, x_n)$ с краевыми условиями

$$K_l(x_1, x_2, \dots, x_n; u, u_1, \dots, u_n, u_{11}, \dots, u_{nn}, \dots) = 0, \quad (3.2)$$

заданными на $(n-1)$ -мерных гиперповерхностях $\Gamma_l \subset D$,

где
$$u_j = \frac{\partial u}{\partial x_j}, \quad u_{jk} = \frac{\partial^2 u}{\partial x_j \partial x_k}.$$

Вместо искомого решения u рассмотрим близкую к нему функцию

$$u = w(x_1, x_2, \dots, x_n; \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m),$$

которая при любых значениях вещественных параметров α_i ($i=1, 2, \dots, m$) либо в точности удовлетворяет дифференциальному уравнению (3.1), либо в точности удовлетворяет краевым условиям (3.2). Далее параметры α_i , входящие в функцию w , подбираем так, чтобы функция w в некотором смысле наилучшим образом удовлетворяла соответственно либо краевым условиям (3.2), либо уравнению (3.1). В этом состоит общая идея решения краевых задач методами минимальной погрешности. Рассмотрим случай, когда функция w при любом выборе параметров α_i в точности удовлетворяет краевым условиям. Подставляя функцию $u = w$ в уравнение (3.1), будем иметь

$$F(x_1, x_2, \dots, x_n; w, w_1, \dots, w_n; w_{11}, \dots, w_{nn}) = \varepsilon(x_1, x_2, \dots, x_n, \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n), \quad (3.3)$$

* В каком именно смысле „наилучшим образом“, мы дадим точное определение в следующих §§ настоящей работы.

где ε — есть некоторая известная функция погрешности, зависящая от параметров α_i . В дальнейшем сокращенно ε будем называть „невязкой“ относительно уравнения (3.1). Теперь требуется подобрать параметры α_i так, чтобы невязка ε в смысле какой-либо принятой нормы $\|\varepsilon\|$ возможно меньше уклонялась от нуля. По смыслу принятой нормы $\|\varepsilon\|$ существуют различные методы минимальной погрешности: наименьших квадратов, коллокации, ортогональных проекций, подобластей, Галеркина и другие [4]. Рассмотрим, например, метод наименьших квадратов, который состоит в следующем. Пусть в области D

$$I^2 = \|\varepsilon\|^2 = \int \dots \int_D \varepsilon^2 dx_1 dx_2 \dots dx_n. \quad (3.4)$$

Требуется определить параметры α_i так, чтобы функционал I^2 принимал наименьшее значение, т. е. чтобы среднее значение квадрата невязки (погрешности) ε было минимальным*. Тогда согласно (3.4) для определения α_i мы получим следующую систему уравнений

$$\frac{1}{2} \frac{\partial I^2}{\partial \alpha_j} = \int \dots \int_D \varepsilon \frac{\partial \varepsilon}{\partial \alpha_j} dx_1 dx_2 \dots dx_n = 0, \quad (j=1, 2, \dots, m).$$

Вышеуказанный метод в дальнейшем будем называть методом минимальной погрешности с нормой наименьшего средне-квадратического отклонения и используем его с новой точки зрения к решению обратной краевой задачи — задачи управления движением КН**.

§ 4. Приложение метода минимальной погрешности с нормой наименьшего средне-квадратического отклонения к решению задач управления движением КН

С целью извлечения максимального количества нефти и удлинения сроков безводной эксплуатации данного месторождения необходимо так расставить эксплуатационные и нагнетательные скважины и так их эксплуатировать, чтобы контур Γ_0 стянулся к наперед заданному контуру Γ_1 равномерно без образования „целиков“ и преждевременных „водяных языков“. При этом варьирование размещения и дебитов не должно выходить из практически допустимых пределов. Строгое определение равномерности стягивания контуров нами дано в работе [2], и там же указан один из возможных способов выбора реально допустимых законов равномерного стягивания контура Γ при водонапорном режиме пласта.

Пусть, с учетом вышеуказанного, желаемый закон стягивания контура Γ_0 к Γ_1 задан уравнением

$$r = f(\theta, t),$$

где $0 \leq \theta \leq 2\pi$, $0 \leq t \leq T$, T — время стягивания, причем $r = f(\theta, 0)$ есть уравнение контура Γ_0 и $r = f(\theta, T)$ — уравнение контура Γ_1 .

* Здесь не дается оценка отклонения $\eta = u - w$ приближенного решения w от точного u , а дается средняя оценка невязки ε относительно уравнения (3.1). Такой принцип оценки погрешности Мизес (см. стр. 278 работы [4]) считает более удобным и целесообразным для приложений.

** Общая математическая постановка, классификация и методы решения подобных обратных краевых задач нами были доложены в октябре 1954 г. на заседании Казанского физико-математического общества. Готовится к печати специальная статья „О краевых задачах, допускающих данное решение“.

Следует отметить, что такой выбор закона стягивания КН заранее предполагает звездообразность контуров Γ_0 и Γ_1 , а также переменного контура Γ относительно выбранного полюса „О“ во все время стягивания от 0 до T . Случай более сложных очертаний контуров Γ_0 и Γ_1 здесь мы не рассматриваем.

Подставляя функцию $F(\theta, r, t) = r - f(\theta, t) = 0$ в первое уравнение движения КН (2.3), будем иметь

$$m \frac{dr}{dt} - \frac{k}{\mu_n} \cdot \frac{1}{r^2} \cdot \frac{dr}{d\theta} \left[\frac{\partial p^+}{\partial \theta} \right]_{\Gamma} + \frac{k}{\mu_n} \left[\frac{\partial p^+}{\partial r} \right]_{\Gamma} = \varepsilon, \quad (4.1)$$

где невязка $\varepsilon = \varepsilon(\theta, t, \varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_{n+l}; \rho_1, \rho_2, \dots, \rho_{n+l}; q_1, q_2, \dots, q_{n+l})$ есть известная функция от переменных θ, t и $3(n+l)$ параметров φ_i, ρ_i и q_i ($i=1, 2, \dots, n, n+1, \dots, n+l$). Далее к решению задачи можно применить любые методы минимальной погрешности, указанные нами в § 3, путем вариации произвольных параметров φ_i, ρ_i и q_i . При этом важно отметить, что обычно методы минимальной погрешности с той или другой принятой нормой погрешности $\|\varepsilon\|$ используются для решения прямых краевых задач, когда по заданному уравнению (3.1) и краевым условиям (3.2) ищется решение u путем вариации произвольных параметров α_i , введенных нами в допустимый класс параметрического семейства функций $w(x_1, x_2, \dots, x_n; \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m)$. Задача управления движением КН в вышеуказанной постановке является обратной краевой задачей, когда по заданной функции $r=f(\theta, t)$ (желаемому решению), удовлетворяющей краевым условиям*, из параметрического семейства уравнений (2.3) ищется то уравнение, которое за счет вариации параметров φ_i, ρ_i и q_i , входящих в исходное семейство уравнений, обеспечивает минимум нормы $\|\varepsilon\|$. Поэтому применение методов минимальной погрешности к решению вышеуказанного типа обратных краевых задач приобретает качественно новую трактовку.

Ниже мы применим к решению задачи управления движением КН метод минимальной погрешности с нормой наименьшего средне-квадратического отклонения.

С целью охвата единой методикой решения задачи в случае „непрерывных“ и „дискретных“ данных (см. § 1) согласно общей теории квадратического приближения [5], рассмотрим следующий интеграл Стильтеса

$$I^2 = \|\varepsilon\|^2 = \int_0^L \varepsilon^2 d\Psi(s, t), \quad (4.2)$$

где s — дуговая абсцисса точки, L — длина дуги кривой $r=f(\theta, t)$ для любого фиксированного t и вес $\Psi(s, t)$ для любого фиксированного t из промежутка $0 \leq t \leq T$ — некоторая неубывающая функция s для $0 \leq s \leq L$, причем

$$\int_0^L d\Psi(s, t) = 1.$$

* Эти краевые условия состоят в том, что $r=f(\theta, 0)$ и $r=f(\theta, T)$ соответственно должны совпадать с уравнениями заданных контуров Γ_0 и Γ_1 .

Полагая, например,

$$\Psi(s, t) = \int_0^s \sqrt{r^2 + \left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2} d\psi(\theta), \quad (4.3)$$

где $\psi(\theta)$ — некоторая неубывающая функция θ в промежутке $0 \leq \theta \leq 2\pi$, и переходя в интеграле (4.2) к переменному θ , будем иметь

$$I^2 = \int_0^{2\pi} \varepsilon^2 \sqrt{r^2 + \left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2} d\psi(\theta). \quad (4.4)$$

В частности, если считать $\psi(\theta) = \frac{\theta}{L}$, то выражение (4.2) примет вид

$$I^2 = \frac{1}{L} \int_0^L \varepsilon^2 ds = \frac{1}{L} \int_0^{2\pi} \varepsilon^2 \sqrt{r^2 + \left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2} d\theta.$$

Из условия минимума для интеграла I^2 мы получим для определения неизвестных φ_i, ρ_i и q_i ($i=1, 2, \dots, n+l$) следующую систему $3(n+l)$ уравнений:

$$\frac{\partial I^2}{\partial \varphi_i} = 0, \quad \frac{\partial I^2}{\partial \rho_i} = 0, \quad \frac{\partial I^2}{\partial q_i} = 0, \quad (4.5)$$

где $i=1, 2, \dots, n+l$.

Если задача управления движением КН решается лишь за счет характера эксплуатации скважин при фиксированных координатах φ_i, ρ_i , то для определения неизвестных q_i ($i=1, 2, \dots, n+l$) мы будем иметь следующую систему $n+l$ уравнений:

$$\frac{\partial I^2}{\partial q_i} = 0 \quad (i=1, 2, \dots, n+l). \quad (4.6)$$

В общем случае системы уравнений (4.5) и (4.6) относительно неизвестных являются нелинейными. Для решения таких нелинейных систем можно было бы, например, применить приближенный способ решения, указанный Ш. Е. Микеладзе [10], или же один из методов, указанных в нашей совместной работе с М. А. Мертвцовою [11]. Можно показать, что в случае водонапорного режима система уравнений (4.6) относительно q_i всегда будет линейной [6].

Следует отметить, что решения системы уравнений (4.5) и (4.6) могут зависеть от времени t . В том случае, когда положения скважин с координатами (φ_i, ρ_i) фиксированы, решение системы уравнений (4.6) относительно текущих объемных дебитов q_i зависит от времени t . Однако, чтобы в общем случае полученные значения φ_i, ρ_i и q_i имели реальный практический смысл, мы должны выбирать те из них, которые удовлетворяют следующим основным требованиям: 1) φ_i, ρ_i как координаты скважин не должны зависеть от времени t ; 2) все ρ_i должны быть неотрицательными; 3) дебиты q_i ($i=1, 2, \dots, n$) эксплуатационных скважин (как стоков) должны быть неположительными, а дебиты q_i ($i=n+1, n+2, \dots, n+l$) нагнетательных скважин (как источников) должны быть неотрицательными. Это

* О выборе весовой функции см. работу [5].

требование будем кратко называть условием знакоопределенности дебитов. Если это условие невыполнимо, то мы можем получить практически непригодные решения, когда в нефть придется нагнетать воду или нефть или же выкачивать воду из водяной зоны.

Вопрос о существовании решений, удовлетворяющих указанным условиям, должен решаться особо [2], [3].

Если, например, вместо (4.2) ввести еще усреднение по времени t за период стягивания T контура Γ_0 к Γ_1 , т. е. положить

$$\|\varepsilon\| = \int_0^T \int_0^L \varepsilon^2 d\Psi(s, t) dt,$$

где

$$\int_0^T \int_0^L d\Psi(s, t) dt = 1,$$

и заранее считать, что все q_i не зависят от времени t , то первое условие будет выполняться.

Мы в дальнейшем более подробно рассмотрим случай, когда за $\|\varepsilon\|$ принято выражение (4.4).

Пусть $\varepsilon \sqrt{r^2 + \left(\frac{\partial r}{\partial \theta}\right)^2}$ как функция от переменного θ в промежутке $0 \leq \theta \leq 2\pi$ для любого фиксированного t ($0 \leq t \leq T$) приближенно или точно заменяется некоторым обобщенным полиномом

$$a_1 f_1(\theta) + a_2 f_2(\theta) + \dots + a_N f_N(\theta), \quad (4.7)$$

где $f_k(\theta)$ ($k=1, 2, \dots, N \leq 3(n+l)$) — система линейно-независимых функций в промежутке $0 \leq \theta \leq 2\pi$, a_k ($k=1, 2, \dots, N \leq 3(n+l)$) суть коэффициенты, которые в общем случае зависят от переменного t и не зависимых между собой параметров φ_i , ρ_i и q_i ($i=1, 2, \dots, N \leq 3(n+l)$)*. Принимая число коэффициентов a_k равным числу независимых параметров φ_i , ρ_i и q_i , мы можем a_k рассматривать как новые независимые параметры. Полагая в интеграле (4.4)

$$\varepsilon \sqrt{r^2 + \left(\frac{\partial r}{\partial \theta}\right)^2} \approx a_1 f_1(\theta) + a_2 f_2(\theta) + \dots + a_N f_N(\theta)$$

и обеспечивая минимум I^2 за счет вариации коэффициентов a_k , мы получим следующую систему уравнений

$$\sum_{k=1}^N a_k (f_k f_j) = 0 \quad (j=1, 2, \dots, N), \quad (4.8)$$

где сокращенно положено

$$(f_k f_j) = \int_0^{2\pi} f_k f_j d\psi(\theta). \quad (4.9)$$

Согласно общей теории квадратического приближения функций известно, что основной определитель системы (4.8) всегда положителен [5]. Поэтому система уравнений (4.8) имеет единственное решение

$$a_k = 0 \quad (k=1, 2, \dots, N). \quad (4.10)$$

* Здесь принято условие, что $N \leq 3(n+l)$, так как при решении задачи управления движением КН некоторые из параметров φ_i , ρ_i и q_i могут быть фиксированы заранее.

Уравнения (4.10) можно снова рассматривать как систему уравнений относительно неизвестных φ_i , ρ_i и q_i ($i=1, 2, \dots, N \leq 3(n+l)$). Из этой системы уравнений мы получим решение задачи управления движением КН за счет размещения и характера эксплуатации скважин в смысле минимального средне-квадратического отклонения полей скоростей — „желаемого“ и „возможного“. По найденным значениям φ_i , ρ_i и q_i средняя квадратическая ошибка для каждого фиксированного t может быть вычислена по формуле (4.4). Предположим теперь, что система линейно-независимых функций $f_k(\theta)$ ($k=1, 2, \dots, N$) с весовой функцией $\psi(\theta)$ в промежутке $0 \leq \theta \leq 2\pi$ ортогональна. Тогда, согласно общей теории квадратического приближения функций, система (4.10) примет вид

$$a_k = \int_0^{2\pi} \varepsilon \sqrt{r^2 + \left(\frac{\partial r}{\partial \theta}\right)^2} f_k d\psi(\theta) = 0. \quad (4.11)$$

($k=1, 2, \dots, N$)

Если при этом ортогональная система является полной, то средняя квадратическая ошибка будет вычисляться по формуле

$$I^2 = \sum_{k=N+1}^{\infty} a_k^2, \quad (4.12)$$

где

$$a_k = \int_0^{2\pi} \varepsilon \sqrt{r^2 + \left(\frac{\partial r}{\partial \theta}\right)^2} f_k d\psi(\theta), \quad (4.13)$$

$k=N+1, N+2, \dots$ и φ_i , ρ_i , q_i имеют значения, вычисленные из системы уравнений (4.11).

§ 5. Приложение метода к случаю „непрерывных“ данных

1. Пусть функция $\psi(\theta)$ имеет непрерывную производную $\psi'(\theta) \equiv p(\theta) \geq 0$. Тогда, согласно (4.11), имеем

$$a_k = \int_0^{2\pi} \varepsilon f_k \sqrt{r^2 + \left(\frac{\partial r}{\partial \theta}\right)^2} p d\theta = 0, \quad (5.1)$$

где $k=1, 2, \dots, N$ и

$$\int_0^{2\pi} p d\theta = 1.$$

Если, например, положить $p = \frac{1}{2\pi}$ и за систему f_k ($k=1, 2, \dots, N$) принять тригонометрическую систему функций $1, \cos \theta, \sin \theta, \cos 2\theta, \sin 2\theta, \dots$, то мы получим основную систему уравнений, которая нами была выведена в работе [2], исходя из общей теории рядов Фурье.

2. В нашей работе [3] дается другой способ решения задачи управления движением КН за счет характера эксплуатации скважин в пластах с водонапорным режимом. В этом случае за линейно-неза-

* Следует отметить, что из этих уравнений последовательно надо брать те из них, которые независимы между собой и тождественно не обращаются в нуль. Число таких уравнений должно совпадать с числом неизвестных φ_i , ρ_i и q_i (см. работу [2]).

Висимую систему функций f_k ($k=1, 2, \dots, N$) нами была принята другая, неортогональная система, которая по существу возникает из структуры функции давления для пластов с водонапорным режимом. Дело в том, что в случае водонапорного режима имеет место равенство

$$\varepsilon \sqrt{r^2 + \left(\frac{\partial r}{\partial \theta}\right)^2} = m \frac{\partial r}{\partial t} \cdot \sqrt{r^2 + \left(\frac{\partial r}{\partial \theta}\right)^2} - \sum_{i=1}^{n+l} q_i V_i(\theta, t),$$

где $V_i(\theta, t)$ ($i=1, 2, \dots, n+l$) считаются линейно-независимой системой функций от θ ($0 \leq \theta \leq 2\pi$) для любого t ($0 \leq t \leq T$). Это обстоятельство дает возможность получить линейную систему уравнений для определения q_i . Единственность решения задачи здесь непосредственно вытекает из общей теории квадратического приближения функций. В той же работе [3] нами был рассмотрен ряд примеров и проведено сравнение результатов, полученных в работах [2] и [3].

§ 6. Приложение метода к случаю „дискретных“ данных

Предположим, что первоначальное положение КН Γ_0 , согласно нефтепромысловым данным, известно нам лишь по некоторым „дискретным“ точкам $(\theta_s, r_0^{(s)})$ ($s=1, 2, \dots, M$). Тогда заранее выбранный закон стягивания КН $r=f(\theta, t)$ можно рассматривать как закон стягивания по лучам $\theta=\theta_s$, заданный уравнениями:

$$r^{(s)} = f(\theta_s, t) \quad (s=1, 2, \dots, M), \quad (6.1)$$

причем $r_0^{(s)} = f(\theta_s, 0)$ и $r_1^{(s)} = f(\theta_s, T)$ являются соответственно точками контура Γ_0 и контура Γ_1 , к которому мы желаем стянуть за время T контур Γ_0 , определенный своими „дискретными“ точками $(\theta_s, r_0^{(s)})$ ($s=1, 2, \dots, M$). Пусть далее неубывающая ступенчатая весовая функция $\psi(\theta)$ выбрана так, что она в точках θ_k ($k=1, 2, \dots, M$) ($0 \leq \theta_k \leq 2\pi$) делает скачки

$$p_k = \psi(\theta_k + 0) - \psi(\theta_k - 0), \quad (k=1, 2, \dots, M),$$

причем

$$\sum_{k=1}^M p_k = 1.$$

Тогда, снова считая систему линейно-независимых функций $f_k(\theta)$ ($k=1, 2, \dots, N$) ортогональной с весовой функцией $\psi(\theta)$, согласно (4.11) будем иметь систему уравнений

$$a_k = \sum_{j=1}^M \left[\varepsilon \sqrt{r^2 + \left(\frac{\partial r}{\partial \theta}\right)^2} \cdot f_k \right]_{\theta=\theta_j} p_j = 0 \quad (6.2)$$

$k=1, 2, \dots, N.$

Ниже мы покажем, как практически проводить вычисление выражений

$$\left[\varepsilon \sqrt{r^2 + \left(\frac{\partial r}{\partial \theta}\right)^2} f_k \right]_{\theta=\theta_j}, \quad (j=1, 2, \dots, M).$$

Рассмотрим, например, решение задачи управления движением КН за счет характера эксплуатации скважин (т. е. считая координаты (φ_i, ρ_i) фиксированными). Введем сокращенное обозначение

$$\Phi_{jk}(t, q_1, q_2, \dots, q_N) = \left[\varepsilon \sqrt{r^2 + \left(\frac{\partial r}{\partial \theta}\right)^2} \cdot f_k \right]_{\theta=\theta_j}. \quad (6.3)$$

Тогда система уравнений (6.2) примет вид

$$a_k = \sum_{j=1}^M \Phi_{jk}(t, q_1, q_2, \dots, q_N) p_j = 0, \quad (6.4)$$

$k=1, 2, \dots, N$, где q_i ($i=1, 2, \dots, N$) — неизвестные текущие объемные дебиты скважин.

Во-первых, согласно (4.1) имеем

$$\varepsilon = \varepsilon(\theta, t, q_1, q_2, \dots, q_N) = m \frac{\partial r}{\partial t} - \frac{k}{\mu_{\text{н}}} \left[\frac{1}{r^2} \cdot \frac{\partial r}{\partial \theta} \cdot \frac{\partial p^+}{\partial \theta} \right]_{\Gamma} + \frac{k}{\mu_{\text{н}}} \left[\frac{\partial p^+}{\partial r} \right]_{\Gamma}. \quad (6.5)$$

Во-вторых, предположим, что функция давления p^+ согласно заданному закону (6.1) найдена для всех значений $(\theta_s, r^{(s)})$ ($s=1, 2, \dots, M$) и для любого t ($0 \leq t \leq T$) в зависимости от произвольных параметров q_i ($i=1, 2, \dots, N$), т. е.

$$p^+ |_{\theta=\theta_s} = p^+(\theta_s, r^{(s)}, t, q_1, q_2, \dots, q_N). \quad (6.6)$$

Как мы уже указывали ранее, для каждой конкретной задачи этот вопрос должен решаться особо*. Разобьем далее время стягивания T контура Γ_0 к Γ_1 на определенное число λ интервалов

$$(0, t_1), (t_1, t_2), \dots, (t_{\lambda-1}, t_{\lambda}), \quad \text{где } t_{\lambda} = T.$$

Согласно (6.5) займемся вычислением выражения

$$\varepsilon \sqrt{r^2 + \left(\frac{\partial r}{\partial \theta}\right)^2}$$

в зависимости от неизвестных q_i ($i=1, 2, \dots, N$) для каждого фиксированного θ_j ($j=1, 2, \dots, M$) и t_i ($i=1, 2, \dots, \lambda$). Для этого, очевидно, требуется определить значение величин

$$\frac{\partial r}{\partial t}, \frac{\partial r}{\partial \theta}, \frac{\partial p^+}{\partial \theta}, \frac{\partial p^+}{\partial r}, \dots \quad (6.7)$$

при $\theta=\theta_j$ ($j=1, 2, \dots, M$) и $t=t_i$ ($i=1, 2, \dots, \lambda$). Пользуясь заданным законом стягивания (6.1), мы можем найти M точек контура Γ на лучах $\theta=\theta_j$ для каждого фиксированного момента времени $t=t_i$. Зная эти точки и каждый раз для фиксированного $t=t_i$ применяя известные численные методы дифференцирования, мы всегда можем вычислить значение производных (6.7) при $\theta=\theta_j$ ($j=1, 2, \dots, M$) и $t=t_i$ ($i=1, 2, \dots, \lambda$). Подставляя найденные величины в уравнения (6.4) по этапам для каждого фиксированного момента времени t_i и решая полученные системы уравнений, мы найдем ступенчатый закон изменения для q_i ($i=1, 2, \dots, N$). Очевидно, решение задачи вышеуказанным способом будет реализовано тем точнее, чем больше известно нам точек контура Γ_0 и чем меньше будут промежутки времени

$$(t_{i-1}, t_i) \quad (i=1, 2, \dots, \lambda), \quad \text{где } t_0=0 \text{ и } t_{\lambda}=T.$$

Как было уже указано выше, по найденному приближенному решению может быть легко определена средне-квадратическая ошибка I^2 .

Если, например, в уравнении (6.4) считать $p_j = \frac{1}{M}$ и за функции $f_k(\theta)$ принять систему тригонометрических функций $1, \cos \theta, \sin \theta$,

* Например, для случая водонапорного режима и при одножидкостной системе функция давления легко определяется независимо от заданного закона стягивания КН [2].

$\cos 2\theta, \sin 2\theta, \dots$, то для вычисления q_i ($i=1, 2, \dots, N$) можно пользоваться системой уравнений

$$\left. \begin{aligned} a_k &= \sum_{j=1}^M \left[\epsilon \sqrt{r^2 + \left(\frac{\partial r}{\partial \theta}\right)^2} \right]_{\theta=\theta_j} \cos k\theta_j = 0, \\ b_k &= \sum_{j=1}^M \left[\epsilon \sqrt{r^2 + \left(\frac{\partial r}{\partial \theta}\right)^2} \right]_{\theta=\theta_j} \sin k\theta_j = 0. \end{aligned} \right\} \quad (6.8)$$

$k = 1, 2, \dots, N.$

Пользуясь системой уравнений (6.8) и применяя вышеуказанный способ, решение конкретных задач управления движением КН (при водонапорном режиме пласта) рассмотрела Б. А. Сейфуллина [9].

Заключение

В настоящей работе были изложены теоретические основы приложения метода минимальной погрешности с нормой наименьшего средне-квадратического отклонения к решению задач управления движением КН в случаях: 1) когда уравнение первоначального положения КН Γ_0 задается аналитически непрерывной функцией и 2) когда положение Γ_0 известно лишь по некоторым его „дискретным“ точкам. При этом указывается способ оценки минимальной средне-квадратической погрешности отклонения двух полей скоростей — „желаемого“ и „допустимого“. Конечно, представляет большой интерес оценка погрешности $\delta = |r - \bar{r}|$ отклонения между желаемым законом $r = f(\theta, t)$ и действительным законом $\bar{r} = \bar{f}(\theta, t)$ продвижения КН. Однако, эта оценка равносильна решению задачи прослеживания КН [1] для значений параметров φ_i, ρ_i и q_i , полученных из решения задачи управления КН. Как известно, задача прослеживания КН представляет значительные трудности даже в случае водонапорного режима пласта и решена лишь для простейших частных случаев. Эффективный графоаналитический метод решения задачи прослеживания КН для пластов с водонапорным режимом дается в работе Н. Ф. Иванова [12]. Этот метод, например, использован в работе Б. А. Сейфуллиной [9] для оценки погрешности решения одной задачи управления движением КН. Для оценки погрешности $\delta = |r - \bar{r}|$ могут быть также использованы электроинтеграторы, при помощи которых решаются задачи прослеживания КН.

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

1. Салехов Г. С. Прямые и обратные задачи о продвижении водонефтяного контакта. Известия Казанского филиала АН СССР, серия физ.-мат. и технич. наук, вып. 5, 1954.
2. Салехов Г. С. Постановка и методы решения гидродинамических задач управления движением контура нефтеносности. Известия Казанского филиала АН СССР, серия физ.-мат. и технич. наук, вып. 6, 1955.
3. Салехов Г. С. Об одном способе решения задачи управления движением контура нефтеносности в пластах с водонапорным режимом (см. настоящий выпуск).
4. Коллатц Л. Численные методы решения дифференциальных уравнений. И. Л. Москва, 1953.
5. Гончаров В. Л. Теория интерполирования и приближения функций. ГТТИ, 1934.

6. Данилов В. Л. Управление перемещением контура нефтеносности с учетом различия вязкостей нефти и воды (см. настоящий выпуск).

7. Чугунов В. Д. К задаче управления контуром нефтеносности при упругом режиме нефтяных месторождений (см. настоящий выпуск).

8. Чугунов В. Д. Об одной задаче управления контуром нефтеносности (см. настоящий выпуск).

9. Сейфуллина Б. А. Численное решение некоторых задач по управлению движением контура нефтеносности (см. настоящий выпуск).

10. Микеладзе Ш. Е. Численные методы математического анализа. ГТТИ, 1954.

11. Салехов Г. С., Мертвцова М. А. О сходимости некоторых итерационных процессов. Известия Казанского филиала АН СССР, серия физ.-мат. и технич. наук, вып. 5, 1954.

12. Иванов Н. Ф. Графоаналитический метод прослеживания контура нефтеносности (см. настоящий выпуск).

Поступило
20 декабря 1954 года.

Физико-технический ин-т
Казанского филиала АН СССР.

Г. С. САЛЕХОВ

**ОБ ОДНОМ СПОСОБЕ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ УПРАВЛЕНИЯ
 ДВИЖЕНИЕМ КОНТУРА НЕФТЕНОСНОСТИ
 В ПЛАСТАХ С ВОДОНАПОРНЫМ РЕЖИМОМ**

Дается метод решения задачи управления движением контура нефтеносности в пластах с водонапорным режимом за счет характера эксплуатации скважин. В отличие от метода, предложенного в работе [2], минимальная погрешность обеспечивается использованием другой системы линейно-независимых функций, возникающих из структурных свойств функции давления.

§ 1. Введение

В работах [1], [2] нами была дана общая постановка задач управления движением КН (контура нефтеносности) и предложены некоторые методы приближенного решения их. В настоящей статье предлагается еще один из возможных способов решения задачи управления КН за счет характера эксплуатации скважин в пластах с водонапорным режимом. Некоторые из полученных решений сравниваются с прежними результатами. Как и в работе [2] для решения задачи здесь используется метод минимальной погрешности с принятой нормой в смысле квадратического приближения функций, причем минимальность погрешности обеспечивается за счет вариации параметров q_i (дебитов эксплуатационных и нагнетательных скважин) при фиксированном положении координат скважин*. В работе [2] за систему линейно-независимых функций приближения принята система тригонометрических функций. В настоящей работе принимается другая система линейно-независимых функций, по существу возникающих из структурных свойств функции давления для пластов с водонапорным режимом. Существование и единственность решения задачи непосредственно вытекает из общей теории квадратического приближения функций.

§ 2. Основные предпосылки и уравнения

Рассмотрим однородный горизонтальный пласт, ограниченный круговым контуром питания Γ_n радиуса R , на котором сохраняется постоянное давление p_n . Пласт эксплуатируется при условиях водонапорного режима, мощность пласта h постоянна, вязкости воды μ_n и нефти μ_n в пластовых условиях считаются равными μ . Скважины приняты за вертикальные линейные стоки и источники.

* Выбор координат скважин при необходимости будет производиться лишь из условия знакоопределенности дебитов эксплуатационных и нагнетательных скважин.

Предположим, что Γ_0 (см. рис. 1) — первоначальное положение КН, Γ — положение КН в текущий момент времени, Γ_1 — конечное положение КН. Область между Γ_n и Γ занимает вода, и область внутри Γ — нефть.

Движение жидкостей подчиняется линейному закону фильтрации. Обозначим через (φ_i, ρ_i) полярные координаты скважин, принимая за полюс „О“ точку внутри Γ_1 , q_i — текущие объемные дебиты скважин, где индекс $i=1, 2, \dots, n, n+1 \dots n+l$, причем $i=1, 2, \dots, n$ соответствует эксплуатационным скважинам, размещенным внутри Γ_1 , $i=n+1, n+2, \dots, n+l$ — нагнетательным скважинам в зоне между Γ_0 и Γ_n . При сделанных предположениях и обозначениях функция давления имеет вид (см. [2]):

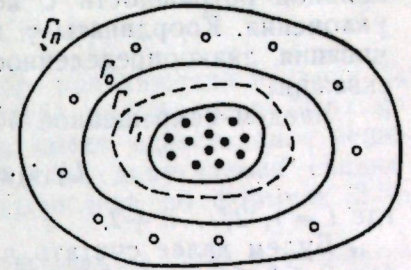


Рис. 1.

$$p = p_n + \frac{\mu}{2\pi kh} \sum_{i=1}^{n+l} q_i \ln \sqrt{\frac{R^2 - 2r\rho_i \cos(\theta - \varphi_i) + \frac{\rho_i^2}{R^2} r^2}{r^2 - 2r\rho_i \cos(\theta - \varphi_i) + \rho_i^2}}, \quad (2.1)$$

где (θ, r) — текущие полярные координаты, k — проницаемость пласта, которую полагаем постоянной. Далее, пользуясь законом Дарси, уравнение движения КН можно записать в виде

$$m \frac{\partial F}{\partial t} - \frac{k}{\mu} \cdot \frac{1}{r^2} \cdot \frac{\partial p}{\partial \theta} \cdot \frac{\partial F}{\partial \theta} - \frac{k}{\mu} \frac{\partial p}{\partial r} \frac{\partial F}{\partial r} = 0, \quad (2.2)$$

где m — пористость, $F(\theta, r, t) = 0$ — уравнение контура Γ и $F(\theta, r, 0) = 0$ совпадает с уравнением Γ_0 .

§ 3. Решение задачи

Предположим теперь, что мы желаем контур Γ_0 стянуть к известному контуру Γ_1 по наперед заданному закону

$$r = f(\theta, t), \quad (3.1)$$

где $f(\theta, t)$ — заданная функция для $0 \leq \theta \leq 2\pi$ и $0 \leq t \leq T$ (T — время стягивания Γ_0 к Γ_1). Тогда, на основании (2.1) и (2.2), полагая $F(\theta, r, t) = r - f(\theta, t) = 0$, имеем

$$\varepsilon = m \frac{\partial r}{\partial t} - \frac{1}{2\pi h} \sum_{i=1}^{n+l} q_i U(\theta, t, \varphi_i, \rho_i), \quad (3.2)$$

где

$$U(\theta, t, \varphi_i, \rho_i) = \frac{1}{r^2} \cdot \frac{\partial r}{\partial \theta} \cdot \frac{\partial}{\partial \theta} \left\{ \ln \sqrt{\frac{R^2 - 2r\rho_i \cos(\theta - \varphi_i) + \frac{\rho_i^2}{R^2} r^2}{r^2 - 2r\rho_i \cos(\theta - \varphi_i) + \rho_i^2}} \right\} - \frac{\partial}{\partial r} \left\{ \ln \sqrt{\frac{R^2 - 2r\rho_i \cos(\theta - \varphi_i) + \frac{\rho_i^2}{R^2} r^2}{r^2 - 2r\rho_i \cos(\theta - \varphi_i) + \rho_i^2}} \right\}.$$

ε — есть та „невязка“, которая получилась за счет наперед заданного, навязанного нами закона стягивания КН (3.1). ε — является известной

функцией переменных θ , t и параметров q_i . Для того, чтобы обеспечить закон стягивания КН, возможно наиболее близкий к заданному (3.1), необходимо добиться наименьшего уклонения невязки ε путем вариации параметров q_i . Для этого будем применять метод минимальной погрешности с нормой в смысле средне-квадратического уклонения. Координаты φ_i и ρ_i будут выбираться лишь для обеспечения знакоопределенности эксплуатационных и нагнетательных скважин.

Введем сокращенное обозначение

$$U_i(\theta) = \frac{1}{2\pi h} U(\theta, t, \varphi_i, \rho_i), \quad (3.3)$$

где $i = 1, 2, \dots, n+l$.

Будем далее считать, что все $U_i(\theta)$ линейно независимы для любых $0 \leq \theta \leq 2\pi$ и $0 \leq t \leq T$.

Если предположить, что функция $U_{n+l}(\theta)$ линейно зависит от остальных $n+l-1$ функций, то будем иметь

$$U_{n+l}(\theta) = \sum_{i=1}^{n+l-1} c_i U_i(\theta), \quad (3.4)$$

где коэффициенты c_i (которые могут быть функциями параметра t) одновременно не равны нулю.

Подставляя (3.4) в (3.2), получим

$$\varepsilon = m \frac{\partial r}{\partial t} - \frac{1}{2\pi h} \sum_{i=1}^{n+l-1} (q_i + q_{n+l} c_i) U_i(\theta).$$

Таким образом, предположение (3.4) приводит к тому, что вместо $n+l$ самостоятельно работающих скважин, фактически мы имеем $n+l-1$ скважин с дебитами $\tilde{q}_i = q_i + c_i q_{n+l}$. Такие случаи, сводимые к меньшему числу скважин, а также особые случаи неединственного решения мы далее рассматривать не будем.

Рассмотрим средне-квадратическое уклонение невязки ε по дуге кривой $r=f(\theta, t)$ для каждого фиксированного t ($0 \leq t \leq T$).

Имеем

$$I^2 = \frac{1}{L} \int_0^L \left\{ m \frac{\partial r}{\partial t} - \sum_{i=1}^{n+l} q_i U_i(\theta) \right\}^2 ds = \frac{1}{L} \int_0^{2\pi} \left\{ m \frac{\partial r}{\partial t} - \sum_{i=1}^{n+l} q_i U_i(\theta) \right\}^2 \sqrt{r^2 + \left(\frac{\partial r}{\partial \theta}\right)^2} d\theta, \quad (3.5)$$

где L длина дуги кривой $r=f(\theta, t)$ для $0 \leq \theta \leq 2\pi$ и каждого фиксированного t ($0 \leq t \leq T$), s — дуговая абсцисса точки.

Теперь независимыми параметрами q_i будем варьировать так, чтобы средне-квадратическое уклонение (3.5) наименее уклонялось от нуля.

Согласно (3.5), для определения q_i найдем линейную систему уравнений

$$\frac{\partial I^2}{\partial q_j} = \frac{1}{L} \int_0^{2\pi} \left\{ m \frac{\partial r}{\partial t} \sqrt{r^2 + \left(\frac{\partial r}{\partial \theta}\right)^2} - \sum_{i=1}^{n+l} q_i V_i(\theta) \right\} V_j(\theta) d\theta = 0, \quad j = 1, 2, \dots, n+l,$$

где

$$V_i(\theta) = U_i(\theta) \sqrt{r^2 + \left(\frac{\partial r}{\partial \theta}\right)^2}$$

также являются линейно-независимыми функциями.

Отсюда

$$\sum_{i=1}^{n+l} q_i \int_0^{2\pi} V_i(\theta) V_j(\theta) d\theta = m \int_0^{2\pi} \frac{\partial r}{\partial t} V_j(\theta) \sqrt{r^2 + \left(\frac{\partial r}{\partial \theta}\right)^2} d\theta. \quad (3.6)$$

Как известно из теории квадратического приближения функции [3], основной определитель этой системы всегда положителен. Поэтому система уравнений (3.6) относительно q_i имеет единственное решение. После того, как все q_i будут найдены, допускаемая средне-квадратическая ошибка I^2 может быть вычислена по формуле (3.5).

Примечание. Конечно, можно было бы варьировать также и координаты (φ_i, ρ_i) и рассмотреть общую задачу управления движением КН как за счет размещения, так и за счет характера эксплуатации скважин, однако, в силу того, что параметры (φ_i, ρ_i) в функцию $V_i(\theta)$ входят нелинейно, мы получили бы тогда нелинейную систему с $3(n+l)$ неизвестными. Поэтому в целях простоты выкладок мы здесь рассматриваем лишь задачу об управлении КН за счет характера эксплуатации скважин, причем в полученных решениях для q_i координаты скважин (φ_i, ρ_i) нужно будет выбрать так, чтобы дебиты q_i ($i=1, 2, \dots, n$) эксплуатационных скважин были положительными, и дебиты q_i ($i=n+1, n+2, \dots, n+l$) нагнетательных скважин — неотрицательными.

Перейдем к рассмотрению некоторых конкретных случаев.

§ 4. Случай, когда Γ_0 и Γ_1 являются концентрическими окружностями

Пусть Γ_0 и Γ_1 являются концентрическими окружностями с радиусами r_0 и r_1 ($r_0 > r_1$).

В этом случае, как показано в работе [2],

$$V_i(\theta) = rU(\theta, t, \varphi_i, \rho_i) = \frac{1}{2\pi h} \left[\frac{1 - x_i \cos(\theta - \varphi_i)}{1 - 2x_i \cos(\theta - \varphi_i) + x_i^2} - \frac{z_i^2 - z_i \cos(\theta - \varphi_i)}{1 - 2z_i \cos(\theta - \varphi_i) + z_i^2} \right],$$

если $i = 1, 2, \dots, n$, и

$$V_i(\theta) = rU(\theta, t, \varphi_i, \rho_i) = \frac{1}{2\pi h} \left[\frac{y_i^2 - y_i \cos(\theta - \varphi_i)}{1 - 2y_i \cos(\theta - \varphi_i) + y_i^2} - \frac{z_i^2 - z_i \cos(\theta - \varphi_i)}{1 - 2z_i \cos(\theta - \varphi_i) + z_i^2} \right],$$

если $i = n+1, n+2, \dots, n+l$, где сокращенно положено

$$0 < x_i = \frac{\rho_i}{r} < 1, \quad \text{когда } i = 1, 2, \dots, n;$$

$$0 < y_i = \frac{r}{\rho_i} < 1, \quad \text{когда } i = n+1, n+2, \dots, n+l$$

и

$$0 < z_i = \frac{r}{R} \cdot \frac{\rho_i}{R} < 1, \quad \text{когда } i = 1, 2, \dots, n, n+1, \dots, n+l.$$

Для определенности выкладок примем следующий закон равномерного стягивания контура Γ_0 к Γ_1 *

$$r^2 = r_0^2 - \frac{t}{T} [r_0^2 - r_1^2], \quad (4.2)$$

где $0 \leq t \leq T$.

Тогда, в силу независимости r_0 и r_1 от θ , система уравнений (3.6) примет следующий вид

$$\sum_{i=1}^{n+1} q_i \int_0^{2\pi} V_i(\theta) V_j(\theta) d\theta = -\frac{(r_0^2 - r_1^2) m}{2T} \int_0^{2\pi} V_i(\theta) d\theta, \quad (4.3)$$

$$j = 1, 2, 3, \dots, n+1.$$

Для простоты счета примем $\frac{r_1}{R^2} \approx 0$, т. е. контур питания будем считать достаточно удаленным. В случае, когда $\frac{r_1}{R^2} \neq 0$, счет несколько длиннее, но остается аналогичным приведенному ниже.

Введем обозначения

$$I_{ij} = \int_0^{2\pi} V_i(\theta) V_j(\theta) d\theta \quad \text{и} \quad I_j = \int_0^{2\pi} V_j(\theta) d\theta$$

и систему уравнений (4.3) перепишем в виде

$$\left. \begin{aligned} \sum_{i=1}^n q_i I_{ij} + \sum_{i=n+1}^{n+1} q_i I_{ij} &= -\frac{[r_0^2 - r_1^2] m}{2T} J_j, \\ &(j = 1, 2, \dots, n) \\ \sum_{i=1}^n q_i I_{ij} + \sum_{i=n+1}^{n+1} q_i I_{ij} &= -\frac{[r_0^2 - r_1^2] m}{2T} I_j, \\ &(j = n+1, n+2, \dots, n+l). \end{aligned} \right\} \quad (4.4)$$

При сделанном предположении $\frac{r_1}{R^2} \approx 0$, согласно (4.1) имеем

$$V_i(\theta) = \frac{1}{2 \cdot h} \left[\frac{1 - x_i \cos(\theta - \varphi_i)}{1 - 2x_i \cos(\theta - \varphi_i) + x_i^2} \right] = -\frac{1}{2\pi h} \sum_{s=0}^{\infty} x_i^s \cos s(\theta - \varphi_i),$$

если $i = 1, 2, \dots, n$;

$$V_i(\theta) = \frac{1}{2\pi h} \left[\frac{y_i^2 - y_i \cos(\theta - \varphi_i)}{1 - 2y_i \cos(\theta - \varphi_i) + y_i^2} \right] = -\frac{1}{2\pi h} \sum_{s=0}^{\infty} y_i^s \cos s(\theta - \varphi_i),$$

если $i = n+1, n+2, \dots, n+l$,

где бесконечные ряды, стоящие в правых частях, в силу того, что x_i и $y_i < 1$, в промежутке $0 \leq \theta \leq 2\pi$ сходятся равномерно. Учитывая это, займемся теперь вычислением интегралов I_j и I_{ij} для следующих возможных случаев:

- 1) $i = 1, 2, \dots, n, j = 1, 2, \dots, n$;
- 2) $i = 1, 2, \dots, n, j = n+1, n+2, \dots, n+l$;
- 3) $i = n+1, n+2, \dots, n+l, j = 1, 2, \dots, n$;
- 4) $i = n+1, n+2, \dots, n+l, j = n+1, n+2, \dots, n+l$.

* О выборе законов стягивания контуров см. работу [2].

Предварительно заметим следующие известные соотношения: если $n \neq 0$, то

$$\left. \begin{aligned} \int_0^{2\pi} \cos n\theta d\theta = \int_0^{2\pi} \sin n\theta d\theta = 0 \quad \text{и} \quad \int_0^{2\pi} \cos^2 n\theta d\theta = \int_0^{2\pi} \sin^2 n\theta d\theta = \pi, \\ \text{если } n \neq m, \text{ то} \\ \int_0^{2\pi} \cos n\theta \cos m\theta d\theta = \int_0^{2\pi} \sin n\theta \sin m\theta d\theta = 0 \\ \text{и для любых целых } n \text{ и } m \\ \int_0^{2\pi} \sin n\theta \cos m\theta d\theta = 0. \end{aligned} \right\} \quad (4.6)$$

Вычислим сначала интегралы I_j ($j = 1, 2, \dots, n, n+1, \dots, n+l$). Согласно (4.5), при $j = 1, 2, \dots, n$ имеем

$$I_j = \int_0^{2\pi} V_j(\theta) d\theta = \frac{1}{2\pi h} \int_0^{2\pi} \sum_{s=0}^{\infty} x_j^s \cos s(\theta - \varphi_j) d\theta = \frac{1}{2\pi h} \sum_{s=0}^{\infty} x_j^s \int_0^{2\pi} \cos s(\theta - \varphi_j) d\theta,$$

Пользуясь равенствами из (4.6), получим

$$I_j = \frac{1}{h} \quad (j = 1, 2, \dots, n). \quad (4.7)$$

Согласно (4.5), при $j = n+1, n+2, \dots, n+l$ имеем

$$I_j = -\frac{1}{2\pi h} \sum_{s=1}^{\infty} y_j^s \int_0^{2\pi} \cos s(\theta - \varphi_j) d\theta.$$

Снова пользуясь соотношениями из (4.6), получим

$$I_j = 0 \quad (j = n+1, n+2, \dots, n+l). \quad (4.8)$$

Вычислим теперь интегралы I_{ij} для вышеуказанных возможных 4 случаев.

1) Пусть $i = 1, 2, \dots, n, j = 1, 2, \dots, n$, тогда

$$\begin{aligned} I_{ij} &= \int_0^{2\pi} V_i(\theta) V_j(\theta) d\theta = \frac{1}{4\pi^2 h^2} \int_0^{2\pi} \left[\sum_{s=0}^{\infty} x_i^s \cos s(\theta - \varphi_i) \right] \left[\sum_{s=0}^{\infty} x_j^s \cos s(\theta - \varphi_j) \right] d\theta = \\ &= \frac{1}{4\pi^2 h^2} \left\{ 1 + \sum_{s=1}^{\infty} x_i^s [\cos s\theta \cos s\varphi_i + \sin s\theta \sin s\varphi_i] \right\} \cdot \left\{ 1 + \right. \\ &\quad \left. + \sum_{s=1}^{\infty} x_j^s [\cos s\theta \cos s\varphi_j + \sin s\theta \sin s\varphi_j] \right\} d\theta. \end{aligned}$$

Далее, пользуясь равенствами (4.6), будем иметь

$$I_{ij} = \frac{1}{4\pi^2 h^2} \left\{ 2\pi + \pi \sum_{s=1}^{\infty} (x_i x_j)^s [\cos s\varphi_i \cos s\varphi_j + \sin s\varphi_i \sin s\varphi_j] \right\} =$$

$$= \frac{1}{4\pi h^2} \left\{ 1 + \sum_{s=0}^{\infty} (x_i x_j)^s \cos s(\varphi_i - \varphi_j) \right\} =$$

$$= \frac{1}{4\pi h^2} \left\{ 1 + \frac{1 - x_i x_j \cos(\varphi_i - \varphi_j)}{1 - 2x_i x_j \cos(\varphi_i - \varphi_j) + (x_i x_j)^2} \right\}.$$

Итак, если $i = 1, 2, \dots, n, j = 1, 2, \dots, n$, то

$$I_{ij} = \frac{1}{4\pi h^2} \left\{ 1 + \frac{1 - x_i x_j \cos(\varphi_i - \varphi_j)}{1 - 2x_i x_j \cos(\varphi_i - \varphi_j) + (x_i x_j)^2} \right\}. \quad (4.9)$$

2) Пусть $i = 1, 2, \dots, n, j = n+1, n+2, \dots, n+l$, тогда

$$I_{ij} = \int_0^{2\pi} V_i(\theta) V_j(\theta) d\theta = -\frac{1}{4\pi^2 h^2} \int_0^{2\pi} \left[\sum_{s=1}^{\infty} x_i^s \cos s(\theta - \varphi_i) \right] \left[\sum_{s=1}^{\infty} y_j^s \cos s(\theta - \varphi_j) \right] d\theta.$$

Рассуждая далее так же, как и в случае 1), будем иметь

$$I_{ij} = -\frac{1}{4\pi h^2} \cdot \frac{(x_i y_j)^2 - (x_i y_j) \cos(\varphi_i - \varphi_j)}{1 - 2x_i y_j \cos(\varphi_i - \varphi_j) + (x_i y_j)^2}. \quad (4.10)$$

3) Если $i = n+1, n+2, \dots, n+l, j = 1, 2, \dots, n$, аналогичными выкладками получим

$$I_{ij} = \frac{1}{4\pi h^2} \cdot \frac{(x_j y_i)^2 - (x_j y_i) \cos(\varphi_i - \varphi_j)}{1 - 2x_j y_i \cos(\varphi_i - \varphi_j) + (x_j y_i)^2}. \quad (4.11)$$

4) Если $i = n+1, n+2, \dots, n+l, j = n+1, n+2, \dots, n+l$, то

$$I_{ij} = -\frac{1}{4\pi h^2} \cdot \frac{(y_i y_j)^2 - (y_i y_j) \cos(\varphi_i - \varphi_j)}{1 - 2y_i y_j \cos(\varphi_i - \varphi_j) + (y_i y_j)^2}. \quad (4.12)$$

Подставляя вычисленные интегралы (4.7) — (4.12) в систему (4.4) для определения q_i , получим следующую систему уравнений:

$$\sum_{i=1}^n q_i \left[1 + \frac{x_i x_j \cos(\varphi_i - \varphi_j)}{1 - 2x_i x_j \cos(\varphi_i - \varphi_j) + (x_i x_j)^2} \right] +$$

$$+ \sum_{i=n+1}^{n+l} q_i \left[\frac{(x_j y_i)^2 - (x_j y_i) \cos(\varphi_i - \varphi_j)}{1 - 2x_j y_i \cos(\varphi_i - \varphi_j) + (x_j y_i)^2} \right] = -\frac{2\pi h m}{T} [r_0^2 - r_1^2],$$

если $j = 1, 2, \dots, n$, и

$$\sum_{i=1}^n q_i \left[\frac{(x_i y_j)^2 - (x_i y_j) \cos(\varphi_i - \varphi_j)}{1 - 2x_i y_j \cos(\varphi_i - \varphi_j) + (x_i y_j)^2} \right] -$$

$$- \sum_{i=n+1}^{n+l} q_i \left[\frac{(y_i y_j)^2 - (y_i y_j) \cos(\varphi_i - \varphi_j)}{1 - 2y_i y_j \cos(\varphi_i - \varphi_j) + (y_i y_j)^2} \right] = 0,$$

если $j = n+1, n+2, \dots, n+l$.

(4.13)

Для вычисления q_i систему уравнений (4.13) удобно привести к виду, содержащему лишь безразмерные величины. Для этой цели заметим, что $V_0 = mh\pi(r_0^2 - r_1^2)$ есть эффективный объем пор кольцевого цилиндра высотой h между окружностями Γ_0 и Γ_1 . Разделим каждое уравнение системы (4.13) на величину $\frac{V_0}{T}$, имеющую ту же размерность, что и объемные дебиты скважин q_i . Вводя обозначения $\tilde{q}_i = \frac{T q_i}{V_0}$ (относительные текущие дебиты скважин), будем иметь

$$\sum_{i=1}^n \tilde{q}_i \left[1 + \frac{1 - x_i x_j \cos(\varphi_i - \varphi_j)}{1 - 2x_i x_j \cos(\varphi_i - \varphi_j) + (x_i x_j)^2} \right] +$$

$$+ \sum_{i=n+1}^{n+l} \tilde{q}_i \left[\frac{(x_j y_i)^2 - (x_j y_i) \cos(\varphi_i - \varphi_j)}{1 - 2x_j y_i \cos(\varphi_i - \varphi_j) + (x_j y_i)^2} \right] = -2$$

для $j = 1, 2, \dots, n$ и

$$\sum_{i=1}^n \tilde{q}_i \left[\frac{(x_i y_j)^2 - (x_i y_j) \cos(\varphi_i - \varphi_j)}{1 - 2x_i y_j \cos(\varphi_i - \varphi_j) + (x_i y_j)^2} \right] -$$

$$- \sum_{i=n+1}^{n+l} \tilde{q}_i \left[\frac{(y_i y_j)^2 - (y_i y_j) \cos(\varphi_i - \varphi_j)}{1 - 2y_i y_j \cos(\varphi_i - \varphi_j) + (y_i y_j)^2} \right] = 0$$

для $j = n+1, n+2, \dots, n+l$.

(4.14)

для $j = 1, 2, \dots, n$ и

для $j = n+1, n+2, \dots, n+l$.

Как мы уже ранее заметили, основной определитель этой системы уравнений положителен, поэтому она относительно \tilde{q}_i имеет единственное решение.

Если нагнетательные скважины отсутствуют, то в системе уравнений (4.14) следует положить все q_i ($i = n+1, n+2, \dots, n+l$) и y_i ($i = n+1, n+2, \dots, n+l$) равными нулю, и тогда система примет следующий вид:

$$\sum_{i=1}^n \tilde{q}_i \left[1 + \frac{1 - x_i x_j \cos(\varphi_i - \varphi_j)}{1 - 2x_i x_j \cos(\varphi_i - \varphi_j) + (x_i x_j)^2} \right] = -2, \quad (4.15)$$

$j = 1, 2, \dots, n$.

§ 5. Некоторые примеры

Рассмотрим некоторые примеры на случай, когда Γ_0 и Γ_1 являются концентрическими окружностями.

Пример 1. Случай двух эксплуатационных скважин. Координаты скважин будем считать равными $(0, \rho_1)$ и (φ_2, ρ_2) . Тогда, согласно (4.15), для определения q_1 и q_2 * будем иметь систему

$$q_1 \left[1 + \frac{1}{1 - x_1^2} \right] + q_2 \left[1 + \frac{1 - x_1 x_2 \cos \varphi_2}{1 - 2x_1 x_2 \cos \varphi_2 + (x_1 x_2)^2} \right] = -2,$$

$$q_1 \left[1 + \frac{1 - x_1 x_2 \cos \varphi_2}{1 - 2x_1 x_2 \cos \varphi_2 + (x_1 x_2)^2} \right] + q_2 \left[1 + \frac{1}{1 - x_2^2} \right] = -2.$$

(5.1)

* Для простоты записи в дальнейшем значок „~“ над q_i мы будем опускать.

Введем обозначения

$$A = \frac{1}{1-x_1^2}, \quad B = \frac{1-x_1x_2 \cos \varphi_2}{1-2x_1x_2 \cos \varphi_2 + (x_1x_2)^2}, \quad C = \frac{1}{1-x_2^2}. \quad (5.2)$$

Решая систему уравнений (5.1), получим

$$q_1 = \frac{2(B-C)}{(1+A)(1+C)-(1+B)^2}, \quad q_2 = \frac{2(B-A)}{(1+A)(1+C)-(1+B)^2}. \quad (5.3)$$

Теперь выясним, при каких $\varphi_2, \rho_1, \rho_2$ скважины с координатами $(0, \rho_1)$ и (φ_2, ρ_2) будут оставаться эксплуатационными, т. е. q_1 и q_2 будут отрицательными. Как уже заметили, основной определитель системы (5.1) больше нуля, т. е. $(1+A)(1+C)-(1+B)^2 > 0$.

Поэтому q_1 и q_2 будут отрицательными, если только одновременно выполнены условия

$$B < C \text{ и } B < A,$$

$$\text{или} \left. \begin{aligned} \frac{1-x_1x_2 \cos \varphi_2}{1-2x_1x_2 \cos \varphi_2 + (x_1x_2)^2} &< \frac{1}{1-x_2^2}, \\ \frac{1-x_1x_2 \cos \varphi_2}{1-2x_1x_2 \cos \varphi_2 + (x_1x_2)^2} &< \frac{1}{1-x_1^2}. \end{aligned} \right\} \quad (5.4)$$

Зная, что $1-2x_1x_2 \cos \varphi_2 + (x_1x_2)^2 > 0$, $1-x_1^2 > 0$ и $1-x_2^2 > 0$, из неравенств (5.4) соответственно получим

$$\cos \varphi_2 < \frac{x_2}{x_1} \cdot \frac{(1+x_1^2)}{(1+x_2^2)},$$

$$\cos \varphi_2 < \frac{x_1}{x_2} \cdot \frac{(1+x_2^2)}{(1+x_1^2)},$$

или, учитывая, что

$$x_1 = \frac{\rho_1}{r} \text{ и } x_2 = \frac{\rho_2}{r},$$

будем иметь

$$\left. \begin{aligned} \cos \varphi_2 &< \frac{\rho_2}{\rho_1} \cdot \frac{[1+(\frac{\rho_1}{r})^2]}{[1+(\frac{\rho_2}{r})^2]} = \delta_1, \\ \cos \varphi_2 &< \frac{\rho_1}{\rho_2} \cdot \frac{[1+(\frac{\rho_2}{r})^2]}{[1+(\frac{\rho_1}{r})^2]} = \frac{1}{\delta}. \end{aligned} \right\} \quad (5.5)$$

где

$$r^2 = r_0^2 - \frac{t}{T}(r_0^2 - r_1^2).$$

- Неравенства (5.5) должны быть выполнены одновременно при любых $0 \leq t \leq T$.

Рассмотрим подробно, в каких случаях это возможно.

1) Если $\rho_1 = \rho_2$, то из (5.5) следует $\cos \varphi_2 < 1$, но это всегда имеет место для всех φ_2 . Таким образом, если обе скважины расположены на одинаковом расстоянии от центра круга Γ_0 , то независимо от φ_2 они всегда должны быть эксплуатационными. Причем, согласно (5.3) будем иметь

$$q_1 = q_2 = -\frac{2}{2+A+B} < 0,$$

где

$$A = \frac{1}{1-x_1^2} \text{ и } B = \frac{1-x_1^2 \cos \varphi_2}{1-2x_1^2 \cos \varphi_2 + x_1^4}.$$

2) Пусть $\rho_1 \neq \rho_2$. Тогда для любого положения КН должны выполняться одновременно условия (5.5).

$$\text{Но } r_0 > r > r_1 > 0, \quad \frac{\rho_1}{r_0} < \frac{\rho_1}{r} < \frac{\rho_1}{r_1} \text{ и } \frac{\rho_2}{r_0} < \frac{\rho_2}{r} < \frac{\rho_2}{r_1}.$$

Из этого следует, что неравенства (5.5) заведомо будут выполнены для любого

$$r = \sqrt{r_0^2 - \frac{t}{T}(r_0^2 - r_1^2)} > 0 \quad (0 \leq t \leq T),$$

если выполняются неравенства

$$\left. \begin{aligned} \cos \varphi_2 &< \frac{\rho_2}{\rho_1} \cdot \frac{[1+(\frac{\rho_1}{r_0})^2]}{[1+(\frac{\rho_2}{r_1})^2]} = \delta_1, \\ \cos \varphi_2 &< \frac{\rho_1}{\rho_2} \cdot \frac{[1+(\frac{\rho_2}{r_0})^2]}{[1+(\frac{\rho_1}{r_1})^2]} = \delta_2, \end{aligned} \right\} \quad (5.6)$$

причем $0 < \delta_1 < \delta$ и $0 < \delta_2 < \frac{1}{\delta}$ для всех $0 \leq t \leq T$. Поэтому одна из величин δ_1 или δ_2 всегда меньше единицы. Пусть, например, $\delta_2 < 1$; тогда угол φ_2 по заданным ρ_1 и ρ_2 будет определяться из условия $\cos \varphi_2 < \delta_2$. Наоборот, при заданном φ_2 мы найдем определенную связь между ρ_1 и ρ_2 , которая наилучшим образом разрешает нашу задачу. В частности, если $\frac{\pi}{2} \leq \varphi_2 \leq \frac{3\pi}{2}$, т. е. $\cos \varphi_2 \leq 0$, то неравенства (5.6) будут выполняться при любых ρ_1 и ρ_2 . Это означает, что, если первая скважина размещена на луче $\varphi_1 = 0$, и вторая — где угодно на полукруге, определяемом условием $\frac{\pi}{2} \leq \varphi_2 \leq \frac{3\pi}{2}$, то при любых ρ_1 и ρ_2 обе скважины будут эксплуатационными и относительные текущие дебиты их определяются формулами (5.3).

Если $\varphi_2 = \pi$, т. е. когда обе скважины расположены на одном диаметре, то дебиты скважин, согласно (5.3), будут выражаться формулами

$$q_1 = -\frac{2x_2(1-x_1^2)(1+x_1x_2)}{(x_1+x_2)(2-x_1^2x_2^2)},$$

$$q_2 = -\frac{2x_1(1-x_2^2)(1+x_1x_2)}{(x_1+x_2)(2-x_1^2x_2^2)},$$

где

$$x_1 = \frac{\rho_1}{r} \text{ и } x_2 = \frac{\rho_2}{r}.$$

Отсюда

$$\frac{q_1}{q_2} = \frac{\rho_2}{\rho_1} \cdot \frac{\left[1 - \left(\frac{\rho_1}{r}\right)^2\right]}{\left[1 - \left(\frac{\rho_2}{r}\right)^2\right]} \quad (5.7)$$

Если $\frac{\rho_1}{r}$ и $\frac{\rho_2}{r} \ll 1$, то, пренебрегая величинами $\left(\frac{\rho_1}{r}\right)^2$ и $\left(\frac{\rho_2}{r}\right)^2$, имеем

$$\frac{q_1}{q_2} = \frac{\rho_2}{\rho_1}$$

Последний результат нами был получен ранее другим методом (см. [2] гл. II, § 2, задача 1).

Наряду с этим следует отметить, что с физической точки зрения результат (5.4) является более сильным. Дело в том, что из (5.4) вытекает следующий естественный вывод: при равномерном стягивании контура Γ_0 к Γ по мере приближения контура нефтеносности к данной скважине дебит ее должен убывать пропорционально величине $1 - \left(\frac{\rho}{r}\right)^2$, где ρ — есть расстояние данной скважины от центра круга Γ_0 .

Пример 2. Случай двух эксплуатационных круговых батарей с равным числом скважин

Предположим, что число скважин в каждой из двух круговых батарей равно n . Скважины в каждой батарее равноудалены друг от друга по окружности. Поэтому можно ввести следующие обозначения:

если $i = 1, 2, \dots, n$, то

$$\varphi_i = \frac{2\pi(i-1)}{n}, \quad x_1 = x_i = \frac{\rho_1}{r} \quad \text{и} \quad q_i = q_1$$

если же $i = n+1, n+2, \dots, 2n$, то

$$\varphi_i = \frac{2\pi(i-1)}{n} + \alpha, \quad x_1 = x_2 = \frac{\rho_2}{r} \quad \text{и} \quad q_i = q_2,$$

причем α — угол смещения скважины второй батареи по отношению к первой. Согласно (4.15) и принятому закону стягивания Γ (4.2), для определения относительных текущих дебитов q_1 и q_2 будем иметь уравнения

$$q_1 \sum_{i=1}^n \left\{ 1 + \frac{1 - x_1 x_j \cos \left[\frac{2\pi(i-1)}{n} - \varphi_j \right]}{1 - 2x_1 x_j \cos \left[\frac{2\pi(i-1)}{n} - \varphi_j \right] + (x_1 x_j)^2} \right\} + q_2 \sum_{i=n+1}^{2n} \left\{ 1 + \frac{1 - x_2 x_j \cos \left[\frac{2\pi(i-1)}{n} + \alpha - \varphi_j \right]}{1 - 2x_2 x_j \cos \left[\frac{2\pi(i-1)}{n} + \alpha - \varphi_j \right] + (x_2 x_j)^2} \right\} = -2 \quad (5.8)$$

$j = 1, 2, \dots, 2n.$

Здесь всего имеем $2n$ уравнений, однако, как будет показано ниже, в силу симметрии расположения скважин фактически мы будем иметь только два независимых уравнения, которые соответствуют случаям

$$j = n \quad \text{и} \quad j = 2n.$$

Суммы в системе (5.8) без единиц в фигурных скобках соответственно обозначим через s_1 и s_2 . Рассмотрим каждое из этих выражений в отдельности. Имеем

$$s_1 = \sum_{i=1}^n \sum_{s=0}^{\infty} (x_1 x_j)^s \cos s \left[\frac{2\pi(i-1)}{n} - \varphi_j \right] =$$

$$= \sum_{s=0}^{\infty} (x_1 x_j)^s \sum_{i=1}^n \cos s \left[\frac{2\pi i}{n} - \frac{2\pi}{n} - \varphi_j \right] = \begin{cases} 0, & \text{если } s \neq pn \\ n \sum_{p=0}^{\infty} (x_1 x_j)^{pn} \cos pn \varphi_j, & \text{если } s = pn. \end{cases}$$

Поэтому

$$s_1 = n \sum_{p=0}^{\infty} (x_1 x_j)^{pn} \cos pn \varphi_j = \frac{n [1 - (x_1 x_j)^n \cos n \varphi_j]}{1 - 2(x_1 x_j)^n \cos n \varphi_j + (x_1 x_j)^{2n}} \quad (5.9)$$

Аналогичные выкладки приводят к выражению

$$s_2 = \frac{n [1 - (x_2 x_j)^n \cos n (\varphi_j - \alpha)]}{1 - 2(x_2 x_j)^n \cos n (\varphi_j - \alpha) + (x_2 x_j)^{2n}} \quad (5.10)$$

Подставляя найденные выражения (5.9) и (5.10) в систему (5.8), получаем

$$q_1 \left[1 + \frac{1 - (x_1 x_j)^n \cos n \varphi_j}{1 - 2(x_1 x_j)^n \cos n \varphi_j + (x_1 x_j)^{2n}} \right] + q_2 \left[1 + \frac{1 - (x_2 x_j)^n \cos n (\varphi_j - \alpha)}{1 - 2(x_2 x_j)^n \cos n (\varphi_j - \alpha) + (x_2 x_j)^{2n}} \right] = -\frac{2}{n} \quad (5.11)$$

Но зная, что при $j = 1, 2, \dots, n$

$$x_j = x_1 \quad \text{и} \quad \varphi_j = \frac{2\pi(j-1)}{n}$$

и при $j = n+1, n+2, \dots, 2n$

$$x_j = x_2 \quad \text{и} \quad \varphi_j = \frac{2\pi(j-1)}{n} + \alpha,$$

систему (5.11) можно свести к следующей линейной системе уравнений с двумя неизвестными:

$$\left. \begin{aligned} q_1 \left[1 + \frac{1}{1 - x_1^{2n}} \right] + q_2 \left[1 + \frac{1 - (x_1 x_2)^n \cos n \alpha}{1 - 2(x_1 x_2)^n \cos n \alpha + (x_1 x_2)^{2n}} \right] &= -\frac{2}{n}, \\ q_1 \left[1 + \frac{1 - (x_1 x_2)^n \cos n \alpha}{1 - 2(x_1 x_2)^n \cos n \alpha + (x_1 x_2)^{2n}} \right] + q_2 \left[1 + \frac{1}{1 - x_2^{2n}} \right] &= -\frac{2}{n}. \end{aligned} \right\} \quad (5.12)$$

Если полученную систему (5.12) сравнить с системой (5.1), то легко усмотреть, что система (5.12) из (5.1) получается путем простой замены x_1 на x_1^n , x_2 на x_2^n , φ_2 на $n\alpha$, q_1 на nq_1 и q_2 на nq_2 . Поэтому, пользуясь выводами из системы (5.1), когда $\rho_1 \neq \rho_2$ (случай $\rho_1 = \rho_2$ сводится к одной батарее), будем иметь следующий результат:
если α , ρ_1 и ρ_2 таковы, что будут выполнены одновременно неравенства

$$\left. \begin{aligned} \cos n\alpha &< \left(\frac{\rho_2}{\rho_1}\right)^n \cdot \frac{\left[1 + \left(\frac{\rho_1}{r_0}\right)^{2n}\right]}{\left[1 + \left(\frac{\rho_2}{r_1}\right)^{2n}\right]} = \delta_1 \\ \text{и} \\ \cos n\alpha &< \left(\frac{\rho_1}{\rho_2}\right)^n \cdot \frac{\left[1 + \left(\frac{\rho_2}{r_0}\right)^{2n}\right]}{\left[1 + \left(\frac{\rho_1}{r_1}\right)^{2n}\right]} = \delta_2, \end{aligned} \right\} (5.13)$$

(причем одна из величин δ_1 или δ_2 всегда меньше единицы), то все скважины 1-й и 2-й батарей будут эксплуатационными. В частности, если $\frac{\pi}{2n} \leq \alpha \leq \frac{3\pi}{2n}$, то неравенства (5.13) будут выполнены одновременно при любых ρ_1 и ρ_2 .

Таким образом, если скважины одной батареи размещены на лучах $\frac{2\pi}{n}(i-1)$ ($i=1, 2, \dots, n$) и скважины другой батареи расположены внутри секторов с углами раствора

$$\frac{\pi}{2n} + \frac{2\pi}{n}(i-1) \leq \beta \leq \frac{3\pi}{2n} + \frac{2\pi}{n}(i-1) \quad (i=1, 2, \dots, n)$$

(см. рис. 2), то скважины обеих батарей будут эксплуатационными для любых ρ_1 и ρ_2 . При этом относительные текущие дебиты скважин q_1 и q_2 будут вычисляться по формулам:

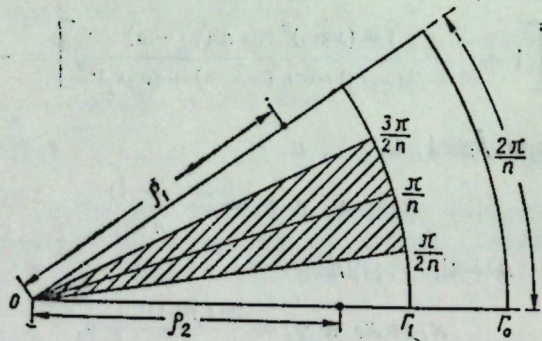


Рис. 2.

$$q_1 = \frac{2(B-C)}{(1+A)(1+C) - (1+B)^2} \quad \text{и} \quad q_2 = \frac{2(B-A)}{(1+A)(1+C) - (1+B)^2},$$

где

$$A = \frac{1}{1-x_1^{2n}}, \quad B = \frac{1-(x_1 x_2)^n}{1-2(x_1 x_2)^n \cos n\alpha + (x_1 x_2)^{2n}} \quad \text{и} \quad C = \frac{1}{1-x_2^{2n}}.$$

Если, например, $\alpha = \frac{\pi}{n}$ (шахматное размещение скважин), то будем иметь

$$q_1 = -\frac{2x_2^n(1-x_1^{2n})(1+x_1^n x_2^n)}{n(x_1^n + x_2^n)(2-x_1^{2n} x_2^{2n})},$$

$$q_2 = -\frac{2x_1^n(1-x_2^{2n})(1+x_1^n x_2^n)}{n(x_1^n + x_2^n)(2-x_1^{2n} x_2^{2n})},$$

где

$$x_1 = \frac{\rho_1}{r} < 1 \quad \text{и} \quad x_2 = \frac{\rho_2}{r} < 1,$$

откуда

$$\frac{q_1}{q_2} = \left(\frac{\rho_2}{\rho_1}\right)^n \cdot \frac{\left[1 - \left(\frac{\rho_1}{r}\right)^{2n}\right]}{\left[1 - \left(\frac{\rho_2}{r}\right)^{2n}\right]}.$$

Если величинами $\left(\frac{\rho_1}{r}\right)^{2n}$ и $\left(\frac{\rho_2}{r}\right)^{2n}$ можно пренебречь по сравнению с единицей, то будем иметь

$$\frac{q_1}{q_2} = \frac{\rho_2^n}{\rho_1^n}.$$

Последний результат нами был получен ранее другим методом (см. [2] гл. II, § 4, задача 1). Аналогично можно было бы рассмотреть и другие примеры.

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

1. Салехов Г. С. Прямые и обратные задачи о продвижении водонефтяного контакта. Известия Казанского филиала АН СССР, серия физ.-матем. и технич. наук, вып. 5, 1954.
2. Салехов Г. С. Постановка и методы решения гидродинамических задач управления движением контура нефтеносности. Известия Казанского филиала АН СССР, серия физ.-матем. и технич. наук, вып. 6, 1955.
3. Гончаров В. Л. Теория интерполирования и приближения функций. Гостехтеориздат, 1934.

Поступило
20 декабря 1954 г.

Физико-технический ин-т
Казанского филиала АН СССР.

В. Л. ДАНИЛОВ

УПРАВЛЕНИЕ ПЕРЕМЕЩЕНИЕМ КОНТУРА НЕФТЕНОСНОСТИ С УЧЕТОМ РАЗЛИЧИЯ ВЯЗКОСТЕЙ НЕФТИ И ВОДЫ

Решается задача управления перемещением контура нефтеносности при ламинарной фильтрации несжимаемых жидкостей в однородном пласте постоянной мощности. Вязкости нефти и воды считаются различными.

§ 1. Постановка задачи

В работах Г. С. Салехова [1]—[4] поставлена задача управления перемещением контура нефтеносности* путем выбора дебитов и размещения эксплуатационных и нагнетательных скважин и дано решение этой задачи для случая одинаковых вязкостей нефти и воды (т. е. для „разноцветных“ жидкостей).

В настоящей статье рассматривается задача управления перемещением КН при ламинарной фильтрации несжимаемых жидкостей в горизонтальном пласте с постоянными мощностью h и проницаемостью k , причем коэффициент текучести нефти $c_1 = \frac{k}{\mu_n}$ и коэффициент текучести воды $c_2 = \frac{k}{\mu_v}$ считаются различными. Здесь μ_n и μ_v соответственно динамические вязкости нефти и воды.

В пласте имеются скважины в нефтяной и водяной зонах с дебитами Q_i и координатами (x_i, y_i) . Значениям индекса $i = 1, 2, \dots, m$ соответствуют скважины в нефтяной зоне, значениям $i = m+1, m+2, \dots, m+l$ — скважины в водяной зоне. Давление p_1 в нефтяной зоне и давление p_2 в водяной зоне удовлетворяют уравнению Лапласа. На КН Γ (рис. 1), как известно, выполняются следующие условия [5], [6]:

1) давление при переходе через Γ изменяется непрерывно:

$$p_1 = p_2, \quad (1.1)$$

2) нормальная составляющая скорости фильтрации вследствие неразрывности течения одинакова при подходе изнутри и извне к Γ , что с учетом закона Дарси дает:

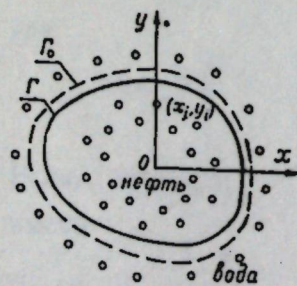


Рис. 1.

* Далее для краткости контур нефтеносности обозначен КН.

$$c_1 \frac{\partial p_1}{\partial n} = c_2 \frac{\partial p_2}{\partial n}. \quad (1.2)$$

Задаем желательный закон стягивания КН в виде

$$F(x, y, t) = 0 \quad (1.3)$$

такой, чтобы в начальный момент движения $t=0$ уравнение $F(x, y, t) = 0$ давало исходное положение КН Γ_0 . Движение будем рассматривать до обводнения первой скважины.

Нетрудно показать, что задание закона движения (1.3) означает задание на КН Γ нормальной производной давления [1], [7]:

$$\frac{\partial p_1}{\partial n} = \frac{\tilde{m}}{c_1} \frac{\partial F}{|\nabla F|}, \quad (1.4)$$

либо, в силу условия (1.2), эквивалентного соотношения

$$\frac{\partial p_2}{\partial n} = \frac{\tilde{m}}{c_2} \frac{\partial F}{|\nabla F|}. \quad (1.4a)$$

Здесь \tilde{m} — пористость пласта.

Задача управления формулируется так [2]—[4]: определить, какие дебиты Q_i и координаты (x_i, y_i) должны иметь скважины, чтобы контур нефтеносности перемещался по заданному закону (1.3)*.

Далее мы в основном будем заниматься задачей управления по характеру эксплуатации, т. е. определением дебитов Q_i при фиксированных координатах скважин (x_i, y_i) , и по мере изложения укажем, какие изменения вносит в решение управление за счет размещения скважин.

§ 2. Первый метод решения

1. Рассмотрим пласт постоянной мощности h с однофазной нефтяной областью, ограниченной КН Γ (рис. 1), и с неограниченно простирающейся краевой водой. Координаты скважин (x_i, y_i) предположим фиксированными.

Определим дебиты Q_i , обеспечивающие стягивание КН по заданному закону (1.3).

Распределение давления будем искать в следующем виде:

$$p = \frac{1}{2\pi hc_1} \sum_{i=1}^m Q_i \ln \frac{1}{V(x-x_i)^2 + (y-y_i)^2} + \frac{1}{2\pi hc_2} \sum_{i=m+1}^{m+l} Q_i \ln \frac{1}{V(x-x_i)^2 + (y-y_i)^2} + \int_{\Gamma} \rho(s, t) \ln \frac{1}{V(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2} ds. \quad (2.1)$$

Здесь ρ — плотность потенциала простого слоя, непрерывно распределенная по Γ ; s — дуговая абсцисса контура Γ ; (ξ, η) — координаты точки Γ . При таком задании условии (1.1) непрерывности давления

* Задача может и не иметь точного решения, тогда ищется приближенное решение (см. ниже).

при переходе через Γ выполняется в силу свойств потенциала простого слоя. Нормальная же производная давлений p терпит на Γ разрыв. Потребуем, чтобы этот разрыв соответствовал условию (1.2).

Предельные значения производной давления по внутренней нормали n к Γ при подходе изнутри и извне соответственно равны:

$$\begin{aligned} \frac{\partial p_1}{\partial n} &= \frac{1}{2\pi c_1 h} \sum_{i=1}^m Q_i \frac{\partial}{\partial n} \ln \frac{1}{V(x-x_i)^2 + (y-y_i)^2} + \\ &+ \frac{1}{2\pi c_2 h} \sum_{i=m+1}^{m+1} Q_i \frac{\partial}{\partial n} \ln \frac{1}{V(x-x_i)^2 + (y-y_i)^2} - \pi p + \\ &+ \int_{\Gamma} \rho \frac{\partial}{\partial n} \ln \frac{1}{V(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2} ds, \end{aligned} \quad (2.2)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial p_2}{\partial n} &= \frac{1}{2\pi c_1 h} \sum_{i=1}^m Q_i \frac{\partial}{\partial n} \ln \frac{1}{V(x-x_i)^2 + (y-y_i)^2} + \\ &+ \frac{1}{2\pi c_2 h} \sum_{i=m+1}^{m+1} Q_i \frac{\partial}{\partial n} \ln \frac{1}{V(x-x_i)^2 + (y-y_i)^2} + \pi p + \\ &+ \int_{\Gamma} \rho \frac{\partial}{\partial n} \ln \frac{1}{V(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2} ds. \end{aligned} \quad (2.3)$$

Здесь (x, y) и (ξ, η) координаты точек Γ . Умножим выражение (2.2) на c_1 , а (2.3) на c_2 и приравняем результаты. После некоторых преобразований получим:

$$\begin{aligned} \pi p + \frac{c_2 - c_1}{c_2 + c_1} \int_{\Gamma} \rho \frac{\partial}{\partial n} \ln \frac{1}{V(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2} ds = \\ = \frac{c_1 - c_2}{c_1 + c_2} \frac{1}{2\pi c_1 h} \sum_{i=1}^m Q_i \frac{\partial}{\partial n} \ln \frac{1}{V(x-x_i)^2 + (y-y_i)^2} + \\ + \frac{c_1 - c_2}{c_1 + c_2} \frac{1}{2\pi c_2 h} \sum_{i=m+1}^{m+1} Q_i \frac{\partial}{\partial n} \ln \frac{1}{V(x-x_i)^2 + (y-y_i)^2}. \end{aligned} \quad (2.4)$$

Обозначим

$$\frac{c_1 - c_2}{c_1 + c_2} = \lambda, \quad |\lambda| < 1. \quad (2.5)$$

$$\begin{aligned} \pi p - \lambda \int_{\Gamma} \rho \frac{\partial}{\partial n} \ln \frac{1}{V(x-x_i)^2 + (y-y_i)^2} = \\ = \frac{\lambda}{2\pi c_1 h} \sum_{i=1}^m Q_i \frac{\partial}{\partial n} \ln \frac{1}{V(x-x_i)^2 + (y-y_i)^2} + \\ + \frac{\lambda}{2\pi c_2 h} \sum_{i=m+1}^{m+1} Q_i \frac{\partial}{\partial n} \ln \frac{1}{V(x-x_i)^2 + (y-y_i)^2}. \end{aligned} \quad (2.6)$$

Это интегральное уравнение 2-го рода относительно функции ρ , к которому применимы теоремы Фредгольма. С их помощью можно показать существование и единственность решения.

Так, если контур Γ выпуклый, с непрерывной кривизной, а в правой части (2.6) — функция непрерывно дифференцируемая (какой она и является в рассматриваемой задаче), то собственные значения соответствующего однородного интегрального уравнения удовлетворяют неравенству [8]

$$-1 \leq \frac{1}{\lambda} \leq 1.$$

В нашем случае $|\lambda| < 1$, следовательно, λ не является собственным значением. Поэтому однородное уравнение имеет тривиальное решение, а уравнение (2.6) имеет единственное решение.

Существование единственного решения уравнения (2.6) доказывается и для невыпуклых контуров Γ , если допустить, что кривая Γ может быть представлена с помощью функций $x(\gamma)$ и $y(\gamma)$, имеющих непрерывные производные до четвертого порядка включительно (см. [8], стр. 255 — 257).

Решая уравнение (2.6), мы найдем ρ как функцию неопределенных пока параметров Q_i . Подставляя ее в формулу (2.1), получаем выражение давления через неизвестные дебиты Q_i в том случае, если бы контур Γ двигался по заданному закону. Тем самым выполнены условия (1.1) и (1.2) на контуре Γ , однако еще не выполнено уравнение движения (1.4).

Перед тем как перейти к его выполнению, докажем одну теорему, которая, в частности, показывает, что наличие в уравнении (2.6) неизвестных параметров не вносит дополнительных трудностей в его решение.

2. Теорема. Давление в системе двух несжимаемых жидкостей является линейной и однородной функцией дебитов скважин. Для доказательства вовсе не нужно считать контур Γ заданным, необходимо лишь предположить, что он существует* и удовлетворяет некоторым условиям гладкости (см. п. 2, § 2).

Формулу (2.1) для краткости перепишем так:

$$p = \sum_{i=1}^{m+1} Q_i F_i(x, y) + \int_{\Gamma} \rho(s, t) \ln \frac{1}{r} ds, \quad (2.7)$$

где

$$F_i(x, y) = \begin{cases} \frac{1}{2\pi c_1 h} \ln \frac{1}{V(x-x_i)^2 + (y-y_i)^2}, & (i=1, 2, \dots, m) \\ \frac{1}{2\pi c_2 h} \ln \frac{1}{V(x-x_i)^2 + (y-y_i)^2}, & (i=m+1, \dots, m+1) \end{cases}$$

$$r = \sqrt{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2}.$$

Обозначим дуговую абсциссу точки (x, y) на Γ через σ , а точки (ξ, η) через s . Тогда уравнение (2.6) можно представить в следующей форме:

* Существование этого контура при ограниченных Q_i очевидно из физических соображений.

$$p(\sigma, t) - \lambda \int_{\Gamma} p(s, t) K(s, \sigma; t) ds = \lambda \sum_{i=1}^{m+1} Q_i(t) f_i(\sigma, t), \quad (2.8)$$

где введены обозначения

$$K(s, \sigma; t) = \frac{1}{\pi} \frac{\partial}{\partial n} \ln \frac{1}{V(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2};$$

$$f_i(\sigma, t) = \begin{cases} \frac{1}{2\pi^2 c_1 h} \frac{\partial}{\partial n} \ln \frac{1}{V(x-x_i)^2 + (y-y_i)^2} & (i=1, 2, \dots, m), \\ \frac{1}{2\pi^2 c_2 h} \frac{\partial}{\partial n} \ln \frac{1}{V(x-x_i)^2 + (y-y_i)^2} & (i=m+1, \dots, m+l). \end{cases}$$

Время t входит в уравнение (2.8) в качестве параметра.

Запишем уравнения

$$p_i(\sigma, t) - \lambda \int_{\Gamma} p_i(s, t) K(s, \sigma; t) ds = \lambda Q_i(t) f_i(\sigma, t) \quad (2.9)$$

$$(i=1, 2, \dots, m, m+1, \dots, m+l).$$

При сделанных предположениях относительно контура решение уравнения (2.8), т. е. (2.6), существует, и оно единственно. То же можно сказать о решении каждого из уравнений (2.9). Составим сумму этих уравнений

$$\sum_{i=1}^{m+l} p_i(\sigma, t) - \lambda \int_{\Gamma} \sum_{i=1}^{m+l} p_i(s, t) K(s, \sigma; t) ds = \lambda \sum_{i=1}^{m+l} Q_i(t) f_i(\sigma, t).$$

Сравнивая это уравнение с уравнением (2.8), получаем

$$p(\sigma, t) = \sum_{i=1}^{m+l} p_i(\sigma, t). \quad (2.10)$$

Вследствие линейности уравнений (2.9) их решения имеют вид:

$$p_i(\sigma, t) = \lambda Q_i \varphi_i(\sigma, t). \quad (2.11)$$

Учитывая соотношение (2.11), находим

$$p(\sigma, t) = \lambda \sum_{i=1}^{m+l} Q_i \varphi_i(\sigma, t). \quad (2.12)$$

Таким образом, плотность простого слоя на Γ есть линейная функция дебитов Q_i . Внесем (2.12) в формулу для давления (2.7)

$$P = \sum_{i=1}^{m+l} Q_i F_i(x, y) + \int_{\Gamma} \lambda \sum_{i=1}^{m+l} Q_i \varphi_i(s, t) \ln \frac{1}{r} ds =$$

$$= \sum_{i=1}^{m+l} Q_i F_i(x, y) + \lambda \sum_{i=1}^{m+l} Q_i \int_{\Gamma} \varphi_i(s, t) \ln \frac{1}{r} ds =$$

$$= \sum_{i=1}^{m+l} Q_i [F_i(x, y) + \lambda \psi_i(x, y, t)]. \quad (2.13)$$

Здесь

$$\psi_i(x, y, t) = \int_{\Gamma} \varphi_i(s, t) \ln \frac{1}{r} ds.$$

Выражение (2.13) показывает справедливость сформулированной теоремы.

Из него же вытекает и следующий физически ясный вывод: чем ближе значения коэффициентов текучести нефти и воды друг к другу (т. е. чем ближе к нулю $\lambda = \frac{c_1 - c_2}{c_1 + c_2}$), тем меньше отличается поле давлений двухжидкостной системы от поля давлений одножидкостного течения.

3. Если подставить выражения (2.11) в уравнения (2.9), то получим линейные интегральные уравнения

$$\varphi_i(\sigma, t) - \lambda \int_{\Gamma} \varphi_i(s, t) K(s, \sigma; t) ds = f_i(\sigma, t) \quad (2.9a)$$

$$(i=1, 2, \dots, m+l).$$

Учитывая введенные выше обозначения, имеем

$$\varphi_i(x, y, t) - \frac{\lambda}{\pi} \int_{\Gamma} \varphi_i(\xi, \eta, t) \frac{\partial}{\partial n} \ln \frac{1}{V(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2} ds =$$

$$= \frac{1}{2\pi^2 c_1 h} \frac{\partial}{\partial n} \ln \frac{1}{V(x-x_i)^2 + (y-y_i)^2} \quad (i=1, 2, \dots, m)$$

$$\varphi_i(x, y, t) - \frac{\lambda}{\pi} \int_{\Gamma} \varphi_i(\xi, \eta, t) \frac{\partial}{\partial n} \ln \frac{1}{V(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2} ds =$$

$$= \frac{1}{2\pi^2 c_2 h} \frac{\partial}{\partial n} \ln \frac{1}{V(x-x_i)^2 + (y-y_i)^2} \quad (i=m+1, m+2, \dots, m+l).$$

Итак, задача определения плотности p сводится к решению $m+l$ более простых уравнений, в которые не входят неизвестные параметры Q_i .

4. Остается удовлетворить уравнению движения (1.4) на КН Γ , заданном уравнением (1.3). Воспользуемся несколько иной формой записи соотношения (1.4). Полная производная по времени от $F(x, y, t)$ в силу уравнения (1.3) равна

$$\frac{\partial F}{\partial t} + \frac{\partial F}{\partial x} \cdot \frac{dx}{dt} + \frac{\partial F}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dt} = 0. \quad (2.14)$$

Привлекая закон Дарси, имеем

$$\frac{dx}{dt} = \frac{v_x}{\tilde{m}} = -\frac{c_1}{\tilde{m}} \frac{\partial p_1}{\partial x}, \quad \frac{dy}{dt} = \frac{v_y}{\tilde{m}} = -\frac{c_1}{\tilde{m}} \frac{\partial p_1}{\partial y}.$$

Поэтому (2.14) принимает вид:

$$\tilde{m} \frac{\partial F}{\partial t} - c_1 \left(\frac{\partial F}{\partial x} \cdot \frac{\partial p_1}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial y} \cdot \frac{\partial p_1}{\partial y} \right) = 0. \quad (2.15)$$

Если подойти к контуру Γ извне, со стороны краевой воды, то получим соотношение, эквивалентное (1.4а):

$$\tilde{m} \frac{\partial F}{\partial t} - c_2 \left(\frac{\partial F}{\partial x} \cdot \frac{\partial p_2}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial y} \cdot \frac{\partial p_2}{\partial y} \right) = 0. \quad (2.16)$$

Возьмем хотя бы уравнение (2.15). Подставим в него производные от F , вычисленные из заданного закона стягивания (1.3), и производные давления — предельные значения производных изнутри на Γ . В результате подстановки получаем

$$\tilde{m} \frac{\partial F}{\partial t} - c_1 \left(\frac{\partial F}{\partial x} \frac{\partial p_1}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial y} \frac{\partial p_1}{\partial y} \right) = \varepsilon(x, y, t; Q_i). \quad (2.17)$$

Здесь ε — линейная функция неизвестных параметров Q_i , что вытекает из линейной зависимости давления от дебитов и линейности уравнения (2.15) относительно производных давления.

Теперь следует определить Q_i так, чтобы ε — невязка в уравнении (2.17) — обратилась в нуль или, если это невозможно, по крайней мере, наименее уклонялась бы от нуля.

Если можно выбрать дебиты Q_i так, что в силу этого выбора $\varepsilon = 0$ для любых $x, y \in \Gamma$ во все рассматриваемое время движения, то физически это означает, что заданный закон движения (1.3) может быть точно реализован имеющейся системой скважин. Если же невозможно выбрать дебиты Q_i так, что $\varepsilon = 0$ для любых $x, y \in \Gamma$ во всё рассматриваемое время (это гораздо более вероятно, чем первый случай), то заданный закон стягивания КН имеющейся системой скважин не может быть осуществлен точно. Можно добиться приближения к нему в различном смысле, исходя из различных методов минимальной погрешности (об этих методах см [9]).

В случае приближенного удовлетворения уравнения (2.15) действительный КН Γ_d будет при найденных значениях дебитов отклоняться от Γ , заданного уравнением (1.3). Это в свою очередь показывает, что краевые условия (1.1) и (1.2) соблюдены не на действительном контуре Γ_d , а на близком к нему Γ , поэтому и выражение для давления p также имеет приближенный характер.

Таким образом, в случае двухжидкостной системы при приближенном решении погрешность имеется как в соблюдении закона движения, так и в функции давления. В одножидкостной же системе, где плотность простого слоя на КН равна нулю ввиду отсутствия скачка нормальных производных давления, давление p не зависит от положения контура Γ , и погрешность имеется лишь в удовлетворении уравнения движения (1.4) [2] — [4].

5. Применим для определения дебитов Q_i метод наименьших квадратов. Составляем квадратичный функционал

$$I = \int_{\Gamma} \varepsilon^2 ds. \quad (2.18)$$

Наименьшему средне-квадратическому отклонению от нуля невязки ε соответствует минимум функционала I . Условия минимума I следующие:

$$\frac{1}{2} \frac{\partial I}{\partial Q_j} = \int_{\Gamma} \varepsilon \frac{\partial \varepsilon}{\partial Q_j} ds = 0 \quad (j = 1, 2, \dots, m+l). \quad (2.19)$$

Так как ε имеет вид (см. п. 4, § 2)

$$\varepsilon = \sum_{i=1}^{m+l} Q_i u_i(x, y, t) + v(x, y, t),$$

то, если функции u_i линейно-независимы между собой (что подлежит исследованию в конкретной задаче), система $m+l$ неоднородных, линейных относительно Q_i уравнений (2.19) имеет единственное решение.

Замечание. При решении задачи управления по характеру размещения скважин искомые параметры x_i, y_i в функцию давления, а следовательно, и в невязку ε входят нелинейно. По этой причине применение метода наименьших квадратов приводит к нелинейным относительно x_i, y_i уравнениям:

$$\frac{1}{2} \frac{\partial I}{\partial x_j} = \int_{\Gamma} \varepsilon \frac{\partial \varepsilon}{\partial x_j} ds = 0, \quad \frac{1}{2} \frac{\partial I}{\partial y_j} = \int_{\Gamma} \varepsilon \frac{\partial \varepsilon}{\partial y_j} ds = 0.$$

6. Можно пойти в определении Q_i несколько иным путем, использованным Г. С. Салеховым для одножидкостной системы [2]. Запишем функционал I в полярных координатах, полагая контур Γ звездным относительно выбранного полюса.

$$I = \int_0^{2\pi} \varepsilon^2(r, \theta, t; Q_i) \sqrt{r^2 + \left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2} d\theta. \quad (2.20)$$

Разложим функцию

$$\varepsilon' = \varepsilon \sqrt{r^2 + \left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2} \quad (2.21)$$

в ряд Фурье по полярному углу θ . Коэффициенты Фурье линейно зависят от Q_i . С точки зрения аппроксимации тригонометрическим полиномом ε' будет наименее уклоняться от нуля, если мы обратим в нуль выбором Q_i первые $m+l$ не обращающихся тождественно в нуль и не зависящих между собой коэффициентов. Для определения Q_i имеем систему $m+l$ линейных уравнений:

$$\left. \begin{aligned} \int_0^{2\pi} \varepsilon' \cos k\theta d\theta &= 0 \\ \int_0^{2\pi} \varepsilon' \sin k\theta d\theta &= 0 \end{aligned} \right\} (k=0, 1, \dots) \quad (2.22)$$

7. Рассмотрим пласт, ограниченный контуром питания Γ_1 , на котором во все время эксплуатации сохраняется постоянное давление p_n (рис. 2).

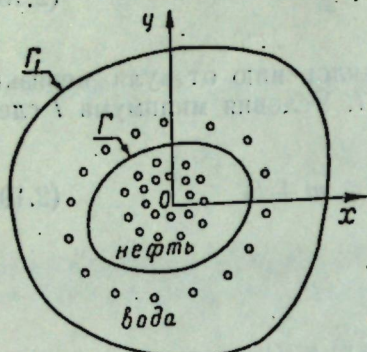


Рис. 2.

Таким образом, появляется дополнительное условие

$$p|_{\Gamma_1} = p_n = \text{const.} \quad (2.23)$$

Без уменьшения общности будем полагать далее

$$p_n = 0. \quad (2.23a)$$

Тогда, в отличие от п. 2 § 2, распределение давлений будем отыскивать в виде

$$p = \frac{1}{2\pi c_1 h} \sum_{i=1}^m Q_i \ln \frac{1}{V(x-x_i)^2 + (y-y_i)^2} + \frac{1}{2\pi c_2 h} \sum_{i=m+1}^{m+l} Q_i \ln \frac{1}{V(x-x_i)^2 + (y-y_i)^2} + \int_{\Gamma} \rho(s, t) \ln \frac{1}{V(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2} ds + \int_{\Gamma_1} \mu(s_1, t) \frac{\partial}{\partial n_1} \ln \frac{1}{V(x-\xi_1)^2 + (y-\eta_1)^2} ds_1. \quad (2.24)$$

Здесь ρ — плотность потенциала простого слоя на Γ , μ — плотность потенциала двойного слоя на Γ_1 ; (ξ, η) — координаты точки Γ ; (ξ_1, η_1) — координаты точки Γ_1 ; n_1 — внутренняя нормаль к контуру Γ_1 в точке (ξ_1, η_1) . Условие (1.1) непрерывности давления на Γ выполняется. Условие (1.2) скачка нормальных производных после выкладок, аналогичных проведенным в п. 1 § 2, приводит к интегральному уравнению

$$\pi\rho - \lambda \int_{\Gamma} \rho \frac{\partial}{\partial n} \ln \frac{1}{V(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2} ds - \lambda \int_{\Gamma_1} \mu \frac{\partial}{\partial n} \left\{ \frac{\partial}{\partial n_1} \ln \frac{1}{V(x-\xi_1)^2 + (y-\eta_1)^2} \right\} ds_1 = -\frac{\lambda}{2\pi c_1 h} \sum_{i=1}^m Q_i \frac{\partial}{\partial n} \ln \frac{1}{V(x-x_i)^2 + (y-y_i)^2} + \frac{\lambda}{2\pi c_2 h} \sum_{i=m+1}^{m+l} Q_i \frac{\partial}{\partial n} \ln \frac{1}{V(x-x_i)^2 + (y-y_i)^2}. \quad (2.25)$$

Здесь точка (x, y) лежит на Γ , n — внутренняя нормаль к контуру Γ в точке (x, y) . Условие (2.23a) с учетом (2.24) дает следующее уравнение:

$$\pi\mu + \int_{\Gamma_1} \mu \frac{\partial}{\partial n_1} \ln \frac{1}{V(x-\xi_1)^2 + (y-\eta_1)^2} ds + \int_{\Gamma} \rho \ln \frac{1}{V(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2} ds = -\frac{1}{2\pi c_1 h} \sum_{i=1}^m Q_i \ln \frac{1}{V(x-x_i)^2 + (y-y_i)^2} - \frac{1}{2\pi c_2 h} \sum_{i=m+1}^{m+l} Q_i \ln \frac{1}{V(x-x_i)^2 + (y-y_i)^2}. \quad (2.26)$$

Здесь точка (x, y) лежит на Γ_1 .

Соотношения (2.25) и (2.26) представляют собою систему двух интегральных уравнений второго рода относительно неизвестных функций $\rho(s, t)$ и $\mu(s, t)$. К этим уравнениям приложима теория Фредгольма.

Существование и единственность решения можно показать так же, как и в случае неограниченно простирающегося пласта. Из линейности уравнений (2.25) и (2.26) вытекает, что функции ρ и μ линейно зависят от дебитов Q_i :

$$\rho = \lambda \sum_{i=1}^{m+l} Q_i \varphi_i, \quad (2.27)$$

$$\mu = \sum_{i=1}^{m+l} Q_i \chi_i. \quad (2.28)$$

φ_i и χ_i находятся из системы интегральных уравнений:

При $i = 1, 2, \dots, m$

$$\pi\varphi_i - \lambda \int_{\Gamma} \varphi_i \frac{\partial}{\partial n} \ln \frac{1}{V(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2} ds -$$

$$- \int_{\Gamma_1} \chi_i \frac{\partial}{\partial n} \left\{ \frac{\partial}{\partial n_1} \ln \frac{1}{V(x-\xi_1)^2 + (y-\eta_1)^2} \right\} ds_1 =$$

$$= \frac{1}{2\pi c_1 h} \frac{\partial}{\partial n} \ln \frac{1}{V(x-x_i)^2 + (y-y_i)^2}; \quad (x, y) \in \Gamma. \quad (2.29)$$

$$\pi\chi_i + \int_{\Gamma_1} \chi_i \frac{\partial}{\partial n_1} \ln \frac{1}{V(x-\xi_1)^2 + (y-\eta_1)^2} ds_1 +$$

$$+ \lambda \int_{\Gamma} \varphi_i \ln \frac{1}{V(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2} ds =$$

$$= \frac{1}{2\pi c_2 h} \ln \frac{1}{V(x-x_i)^2 + (y-y_i)^2}; \quad (x, y) \in \Gamma_1.$$

При $i = m + 1, m + 2, \dots, m + l$

$$\left. \begin{aligned} & \pi \varphi_i - \lambda \int_{\Gamma} \varphi_i \frac{\partial}{\partial n} \ln \frac{1}{V(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2} ds - \\ & - \int_{\Gamma_1} \chi_i \frac{\partial}{\partial n} \left\{ \frac{\partial}{\partial n_1} \ln \frac{1}{V(x-\xi_1)^2 + (y-\eta_1)^2} \right\} ds_1 = \\ & = \frac{1}{2\pi c_2 h} \frac{\partial}{\partial n} \ln \frac{1}{V(x-x_i)^2 + (y-y_i)^2}; \quad (x, y) \in \Gamma. \\ & \pi \chi_i + \int_{\Gamma_1} \chi_i \frac{\partial}{\partial n_1} \ln \frac{1}{V(x-\xi_1)^2 + (y-\eta_1)^2} ds_1 + \\ & + \lambda \int_{\Gamma} \varphi_i \ln \frac{1}{V(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2} ds = \\ & = \frac{1}{2\pi c_2 h} \ln \frac{1}{V(x-x_i)^2 + (y-y_i)^2}, \quad (x, y) \in \Gamma_1. \end{aligned} \right\} \quad (2.30)$$

Подстановка выражений (2.27) и (2.28) в формулу (2.24) показывает, что и при учете контура питания давление является линейной однородной функцией дебитов Q_i , т. е. справедлива теорема, высказанная в п. 2, § 2. Что касается удовлетворения уравнения движения (1.4) на Γ , то в силе остается все, изложенное в пп. 4–6 § 2.

§ 3. Второй метод решения задачи

Может быть предложен иной метод решения задачи управления движением КН, при котором удастся избежать решения интегрального уравнения для определения p — плотности потенциала простого слоя на Γ^* .

Рассмотрим ту же задачу, что в п. 1 § 2. Условия предварительно перепишем в иной форме. Первое условие сохраним неизменным:

$$\text{на } \Gamma \quad p_1 = p_2. \quad (1.1)$$

Из условий (1.4) и (1.4а), которые в совокупности учитывают условие (1.2), получим производные соотношения на КН Γ :

$$\frac{\partial p_1}{\partial n} - \frac{\partial p_2}{\partial n} = \left(\frac{1}{c_1} - \frac{1}{c_2} \right) \tilde{m} \frac{\partial F}{|\nabla F|}; \quad (3.1)$$

$$\frac{\partial p_1}{\partial n} + \frac{\partial p_2}{\partial n} = \left(\frac{1}{c_1} + \frac{1}{c_2} \right) \tilde{m} \frac{\partial F}{|\nabla F|}. \quad (3.2)$$

Вместо условия (3.2) можно было бы взять соотношение (1.4), либо (1.4а).

1. Рассмотрим сначала бесконечный пласт (п. 1, § 2). Распределение давлений ищем в том же виде (2.1). Тогда условие (1.1) на Γ

* Мы следуем способу определения p , использованному Г. Г. Тумашевым [10].

выполнено. Перейдем к выполнению условия (3.1). Составим разность предельных значений нормальных производных $\frac{\partial p_1}{\partial n}$ и $\frac{\partial p_2}{\partial n}$ на Γ , учитывая их явные выражения (2.2) и (2.3).

$$\frac{\partial p_1}{\partial n} - \frac{\partial p_2}{\partial n} = -2\pi p. \quad (3.3)$$

Сравнивая (3.3) с (3.1), получаем плотность потенциала простого слоя на Γ^* :

$$p = - \left(\frac{1}{c_1} - \frac{1}{c_2} \right) \frac{\tilde{m}}{2\pi |\nabla F|} \frac{\partial F}{\partial t}. \quad (3.4)$$

Подставим это значение в формулу для давления (2.1).

$$\begin{aligned} p &= \frac{1}{2\pi c_1 h} \sum_{i=1}^m Q_i \ln \frac{1}{V(x-x_i)^2 + (y-y_i)^2} + \\ &+ \frac{1}{2\pi c_2 h} \sum_{i=m+1}^{m+l} Q_i \ln \frac{1}{V(x-x_i)^2 + (y-y_i)^2} - \\ &- \frac{1}{2\pi} \left(\frac{1}{c_1} - \frac{1}{c_2} \right) \int_{\Gamma} \frac{\tilde{m}}{|\nabla F|} \frac{\partial F}{\partial t} \ln \frac{1}{V(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2} ds. \end{aligned} \quad (3.5)$$

При постоянстве пористости \tilde{m} по пласту она выносится за знак интеграла.

Итак, давление находится простой квадратурой. Параметры Q_i при управлении за счет дебитов пока остаются неизвестными.

2. Перейдем к условию (3.2).

Исходя из соотношений (2.2) и (2.3), с учетом (3.2) имеем:

$$\begin{aligned} \frac{\partial p_1}{\partial n} + \frac{\partial p_2}{\partial n} &= 2 \left[\frac{1}{2\pi c_1 h} \sum_{i=1}^m Q_i \frac{\partial}{\partial n} \ln \frac{1}{V(x-x_i)^2 + (y-y_i)^2} + \right. \\ &+ \frac{1}{2\pi c_2 h} \sum_{i=m+1}^{m+l} Q_i \frac{\partial}{\partial n} \ln \frac{1}{V(x-x_i)^2 + (y-y_i)^2} + \\ &\left. + \int_{\Gamma} p \frac{\partial}{\partial n} \ln \frac{1}{V(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2} ds \right] = \\ &= \left(\frac{1}{c_1} + \frac{1}{c_2} \right) \tilde{m} \frac{\partial F}{|\nabla F|}; \quad (x, y), (\xi, \eta) \in \Gamma. \end{aligned}$$

* Полагаем, что $\frac{\partial F}{\partial t} / |\nabla F|$ непрерывная функция x, y в силу заданного закона стягивания (1.3).

Отсюда

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2\pi c_1 h} \sum_{i=1}^m Q_i \frac{\partial}{\partial n} \ln \frac{1}{V(x-x_i)^2 + (y-y_i)^2} + \\ & + \frac{1}{2\pi c_2 h} \sum_{i=m+1}^{m+1} Q_i \frac{\partial}{\partial n} \ln \frac{1}{V(x-x_i)^2 + (y-y_i)^2} + \\ & + \int_{\Gamma} \rho \frac{\partial}{\partial n} \ln \frac{1}{V(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2} ds - \left(\frac{1}{c_1} + \frac{1}{c_2} \right) \frac{\tilde{m}}{2} \cdot \frac{\partial F}{|\nabla F|} = 0, \quad (3.6) \end{aligned}$$

$(x, y); (\xi, \eta) \in \Gamma.$

Это уравнение должно удовлетворяться за счет выбора дебитов Q_i . Подставим в уравнение (3.6) значение плотности ρ из формулы (3.4).

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2\pi c_1 h} \sum_{i=1}^m Q_i \frac{\partial}{\partial n} \ln \frac{1}{V(x-x_i)^2 + (y-y_i)^2} + \\ & + \frac{1}{2\pi c_2 h} \sum_{i=m+1}^{m+1} Q_i \frac{\partial}{\partial n} \ln \frac{1}{V(x-x_i)^2 + (y-y_i)^2} - \\ & - \frac{1}{2\pi} \left(\frac{1}{c_1} - \frac{1}{c_2} \right) \int_{\Gamma} \tilde{m} \frac{\partial F}{|\nabla F|} \frac{\partial}{\partial n} \ln \frac{1}{V(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2} ds - \\ & - \left(\frac{1}{c_1} + \frac{1}{c_2} \right) \frac{\tilde{m}}{2} \cdot \frac{\partial F}{|\nabla F|} = e(x, y, t; Q_i). \quad (3.7) \end{aligned}$$

e — известная линейная функция дебитов Q_i . Она должна быть сделана равной нулю выбором Q_i при решении задачи управления за счет дебитов скважин (или вариацией (x_i, y_i) в допустимых границах при управлении с помощью размещения скважин).

В случае невозможности обращения e в нуль для любых $x, y \in \Gamma$ во все рассматриваемое время путем вариации Q_i потребуем, как и выше, минимального отклонения e от нуля в каком-либо смысле. Для этого применимы все методы минимальной погрешности [9], например, указанные в § 2.

3. Условия наименьшего средне-квадратического отклонения e от нуля (2.19) с учетом выражения (3.7) после некоторых преобразований приобретают вид ($m = \text{const}$):

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2\pi c_1 h} \sum_{i=1}^m Q_i \int_{\Gamma} \frac{\partial}{\partial n} \ln \frac{1}{V(x-x_i)^2 + (y-y_i)^2} \cdot \frac{\partial}{\partial n} \ln \frac{1}{V(x-x_j)^2 + (y-y_j)^2} ds + \\ & + \frac{1}{2\pi c_2 h} \sum_{i=m+1}^{m+1} Q_i \int_{\Gamma} \frac{\partial}{\partial n} \ln \frac{1}{V(x-x_i)^2 + (y-y_i)^2} \cdot \frac{\partial}{\partial n} \ln \frac{1}{V(x-x_j)^2 + (y-y_j)^2} ds = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & = \frac{m}{2} \left(\frac{1}{c_1} + \frac{1}{c_2} \right) \int_{\Gamma} \frac{\partial F}{|\nabla F|} \frac{\partial}{\partial n} \ln \frac{1}{V(x-x_j)^2 + (y-y_j)^2} ds + \\ & + \frac{\tilde{m}}{2\pi} \left(\frac{1}{c_1} - \frac{1}{c_2} \right) \int_{\Gamma} \left[\int_{\Gamma} \frac{\partial F}{|\nabla F|} \cdot \frac{\partial}{\partial n} \ln \frac{1}{V(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2} d\bar{s} \right] \times \\ & \times \frac{\partial}{\partial n} \ln \frac{1}{V(x-x_j)^2 + (y-y_j)^2} ds. \quad (3.8) \end{aligned}$$

Таким образом, задача сводится к решению $m+1$ линейных уравнений.

4. Обратимся теперь к пласту, ограниченному контуром питания Γ_1 (см. п. 7, § 2).

Давление будем искать в том же виде, что и ранее (формула (2.24)). Составляя разность предельных значений нормальной производной давления на Γ , приходим к выражению (3.4) для плотности потенциала простого слоя на Γ .

Условие $p|_{\Gamma_1} = 0$ дает уравнение для определения плотности μ двойного слоя на Γ_1 . С учетом соотношения (3.4) уравнение (2.26) можно записать в виде:

$$\begin{aligned} & \pi\mu + \int_{\Gamma_1} \mu \frac{\partial}{\partial n_1} \ln \frac{1}{V(x-\xi_1)^2 + (y-\eta_1)^2} ds_1 = \\ & = \frac{\tilde{m}}{2\pi} \left(\frac{1}{c_1} - \frac{1}{c_2} \right) \int_{\Gamma} \frac{\partial F}{|\nabla F|} \ln \frac{1}{V(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2} ds - \\ & - \frac{1}{2\pi c_1 h} \sum_{i=1}^m Q_i \ln \frac{1}{V(x-x_i)^2 + (y-y_i)^2} - \frac{1}{2\pi c_2 h} \sum_{i=m+1}^{m+1} Q_i \ln \frac{1}{V(x-x_i)^2 + (y-y_i)^2}. \quad (3.9) \end{aligned}$$

$$(\xi, \eta) \in \Gamma, \quad (x, y), (\xi_1, \eta_1) \in \Gamma_1.$$

Решая это интегральное уравнение второго рода, найдем $\mu(s, t)$ — линейную функцию дебитов. Это вытекает из линейности правой части уравнения (3.9) относительно Q_i .

В результате подстановки $\mu(s_1, t)$ в выражение для давления (2.24) получим давление p — также линейную функцию параметров Q_i .

Последний этап решения — определение дебитов Q_i из условия (3.2) — принципиально ничем не отличается от соответствующего этапа решения для случая бесконечного пласта (п. 2, § 3).

5. Сопоставляя первый и второй методы решения задачи, можно видеть, что они не эквивалентны в случае приближенного решения. В самом деле, при решении первым методом на заданном контуре Γ будут выполнены условия $p_1 = p_2$, $c_1 \frac{\partial p_1}{\partial n} = c_2 \frac{\partial p_2}{\partial n}$, но этот контур

отличается от реализуемой в результате управления границы раздела Γ_A . При решении вторым методом на заданном контуре Γ выполнены условия равенства давлений (1.1) и разности нормальных производных давления (3.1), в то время как этот контур отличается от реализуемого в результате управления контура Γ_A . Кроме того

при решении по первому методу давление получаем в виде линейной однородной функции дебитов Q_i , как это и имеет место в действительности, согласно теореме, доказанной в п. 2, § 2 (см. также п. 7, § 2). При решении же вторым методом давление получаем в форме (3.5), т. е. линейной, но не однородной функции дебитов Q_i .

Однако следует учитывать преимущество простоты второго метода, так как в случае бесконечного пласта не нужно решать интегральное уравнение 2-го рода, как это требуется по первому методу. В случае же ограниченного пласта применение второго метода также проще, чем первого: вместо системы двух интегральных уравнений 2-го рода имеем лишь одно интегральное уравнение 2-го рода (см. п. 7, § 2 и п. 3, § 3).

§ 4. Пример решения и некоторые выводы

1. Рассмотрим круговое стягивание контура нефтеносности в неограниченном пласте (рис. 3). Заданы полярные координаты (ρ_i, α_i) нефтяных скважин ($i=1, 2, \dots, m$) и водяных скважин ($i=m+1, \dots, m+l$). Дебиты обозначим Q_i . Мощность пласта равна единице. Коэффициент текучести нефти c_1 , воды — c_2 . Закон стягивания задан также в полярных координатах:

$$F(r, \theta, t) = R(t) - r = 0. \quad (4.1)$$

При этом стягивание рассматривается до обводнения скважин:

$$\rho_i \text{ нефт.} < R < \rho_l \text{ вод.} \quad (4.2)$$

Пористость пласта \bar{m} постоянна.

2. Проведем расчет первым методом. В соответствии с (2.1) будем отыскивать давление в виде:

$$p(r, \theta, t) = \frac{1}{2\pi c_1 h} \sum_{i=1}^m Q_i \ln \frac{1}{\sqrt{r^2 - 2r \rho_i \cos(\theta - \alpha_i) + \rho_i^2}} + \frac{1}{2\pi c_2 h} \sum_{i=m+1}^{m+l} Q_i \ln \frac{1}{\sqrt{r^2 - 2r \rho_i \cos(\theta - \alpha_i) + \rho_i^2}} + \int_0^{2\pi} p(\varphi, t) \ln \frac{1}{\sqrt{r^2 - 2rR \cos(\theta - \varphi) + R^2}} \cdot R d\varphi. \quad (4.3)$$

С учетом того, что при круговом контуре $\Gamma \frac{\partial}{\partial n} \Big|_{\Gamma} = - \frac{\partial}{\partial r} \Big|_{r=R}$, уравнение (2.6) преобразуется в следующее:

$$p(\theta, t) - \frac{\lambda}{2\pi} \int_0^{2\pi} p(\varphi, t) d\varphi = \frac{\lambda}{2\pi^2 c_1} \sum_{i=1}^m Q_i \frac{R - \rho_i \cos(\theta - \alpha_i)}{R^2 - 2R\rho_i \cos(\theta - \alpha_i) + \rho_i^2} +$$

$$+ \frac{\lambda}{2\pi^2 c_2} \sum_{i=m+1}^{m+l} Q_i \frac{R - \rho_i \cos(\theta - \alpha_i)}{R^2 - 2R\rho_i \cos(\theta - \alpha_i) + \rho_i^2}. \quad (4.4)$$

Полагая *a priori*, что функция p удовлетворяет условиям Дирихле, будем искать p в виде ряда Фурье:

$$p(\theta, t) = a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos k\theta + b_k \sin k\theta), \quad (4.5)$$

причем коэффициенты ряда зависят от времени. Разлагая правую часть уравнения (4.4) в ряд Фурье с учетом (4.2) и сравнивая коэффициенты обеих частей, получаем:

$$(1 - \lambda) a_0 = \frac{\lambda}{2\pi^2 c_1 R} \sum_{i=1}^m Q_i;$$

$$a_k = \frac{\lambda}{2\pi^2 R} \left[\frac{1}{c_1} \sum_{i=1}^m Q_i \left(\frac{\rho_i}{R}\right)^k \cos k\alpha_i - \frac{1}{c_2} \sum_{i=m+1}^{m+l} Q_i \left(\frac{R}{\rho_i}\right)^k \cos k\alpha_i \right];$$

$$b_k = \frac{\lambda}{2\pi^2 R} \left[\frac{1}{c_1} \sum_{i=1}^m Q_i \left(\frac{\rho_i}{R}\right)^k \sin k\alpha_i - \frac{1}{c_2} \sum_{i=m+1}^{m+l} Q_i \left(\frac{R}{\rho_i}\right)^k \sin k\alpha_i \right].$$

Отсюда

$$p(\theta, t) = \frac{\lambda}{2\pi^2 c_1 R (1 - \lambda)} \sum_{i=1}^m Q_i + \frac{\lambda}{2\pi^2 R} \sum_{k=1}^{\infty} \left\{ \frac{1}{c_1} \sum_{i=1}^m Q_i \left(\frac{\rho_i}{R}\right)^k \cos k(\theta - \alpha_i) - \frac{1}{c_2} \sum_{i=m+1}^{m+l} Q_i \left(\frac{R}{\rho_i}\right)^k \cos k(\theta - \alpha_i) \right\}. \quad (4.6)$$

Полученный ряд сходится, чем оправдано представление в форме (4.5). Этот ряд можно просуммировать, учитывая соотношение (4.2):

$$p(\theta, t) = \frac{\lambda^2}{2\pi^2 R c_1 (1 - \lambda)} + \frac{\lambda}{2\pi^2 c_1} \sum_{i=1}^m Q_i \frac{R - \rho_i \cos(\theta - \alpha_i)}{R^2 - 2R\rho_i \cos(\theta - \alpha_i) + \rho_i^2} + \frac{\lambda}{2\pi^2 c_2} \sum_{i=m+1}^{m+l} Q_i \frac{R - \rho_i \cos(\theta - \alpha_i)}{R^2 - 2R\rho_i \cos(\theta - \alpha_i) + \rho_i^2}. \quad (4.7)$$

Подставляя полученное выражение для $p(\theta, t)$ в уравнение (4.4), убеждаемся, что оно удовлетворяется. Тем самым на Γ выполнено условие (1.2) для функции давления. Внося выражение (4.7) в формулу для давления (4.3) и вычисляя интеграл для $r < R$, находим давление в нефтяной зоне:

$$p_1 = \frac{1}{2\pi c_1} \sum_{i=1}^m Q_i \left\{ \ln \frac{1}{\sqrt{r^2 - 2r\rho_i \cos(\theta - \alpha_i) + \rho_i^2}} + \right.$$

$$\begin{aligned}
& + \lambda \left[\ln \frac{1}{\sqrt{r^2 - 2r \frac{R^2}{\rho_l} \cos(\theta - \alpha_l) + \left(\frac{R^2}{\rho_l}\right)^2}} + \ln \frac{R^2}{\rho_l} - \frac{2\lambda}{1-\lambda} \ln R \right] + \\
& + \frac{1}{2\pi c_2} \sum_{l=m+1}^{m+1} Q_l \left\{ \ln \frac{1}{\sqrt{r^2 - 2r \rho_l \cos(\theta - \alpha_l) + \rho_l^2}} - \right. \\
& \left. - \lambda \left[\ln \frac{1}{\sqrt{r^2 - 2r \rho_l \cos(\theta - \alpha_l) + \rho_l^2}} + \ln \rho_l \right] \right\}. \quad (4.8)
\end{aligned}$$

Полагая $r > R$, определяем давление в водяной зоне:

$$\begin{aligned}
p_2 = & \frac{1}{2\pi c_1} \sum_{l=1}^m Q_l \left\{ \ln \frac{1}{\sqrt{r^2 - 2r \rho_l \cos(\theta - \alpha_l) + \rho_l^2}} + \right. \\
& + \lambda \left[\ln \frac{1}{\sqrt{r^2 - 2r \rho_l \cos(\theta - \alpha_l) + \rho_l^2}} + \ln r - \frac{2\lambda}{1-\lambda} \ln r \right] + \\
& + \frac{1}{2\pi c_2} \sum_{l=m+1}^{m+1} Q_l \left\{ \ln \frac{1}{\sqrt{r^2 - 2r \rho_l \cos(\theta - \alpha_l) + \rho_l^2}} - \right. \\
& \left. - \lambda \left[\ln \frac{1}{\sqrt{r^2 - 2r \frac{R^2}{\rho_l} \cos(\theta - \alpha_l) + \left(\frac{R^2}{\rho_l}\right)^2}} + \ln r \right] \right\}. \quad (4.9)
\end{aligned}$$

Соотношения (4.8) и (4.9) линейны и однородны относительно Q [сравните с (2.13)]. Положив в (4.8) и (4.9) $r=R$, видим, что на Γ :

$$p_1 = p_2,$$

т. е. выполняется условие (1.1).

Перейдем к уравнению движения, которое возьмем в форме (2.15). Переходя к полярным координатам, имеем на КН Γ , т. е. при $r=R$:

$$\ddot{m} \frac{\partial F}{\partial t} - c_1 \left(\frac{\partial F}{\partial r} \frac{\partial p_1}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial F}{\partial \theta} \cdot \frac{\partial p_1}{\partial \theta} \right) = 0. \quad (4.10)$$

Из закона (4.1) получаем

$$\frac{\partial F}{\partial t} = \frac{dR}{dt}; \quad \frac{\partial F}{\partial r} = -1; \quad \frac{\partial F}{\partial \theta} = 0. \quad (4.11)$$

Вычислим предельное значение производной $\frac{\partial p_1}{\partial r}$ на Γ .

$$\begin{aligned}
\frac{\partial p_1}{\partial r} \Big|_{\Gamma} = & - \frac{\partial p_1}{\partial n} \Big|_{\Gamma} = \frac{1}{2\pi c_1} \sum_{l=1}^m Q_l \frac{\partial}{\partial r} \ln \frac{1}{\sqrt{r^2 - 2r \rho_l \cos(\theta - \alpha_l) + \rho_l^2}} \Big|_{r=R} + \\
& + \frac{1}{2\pi c_2} \sum_{l=m+1}^{m+1} Q_l \frac{\partial}{\partial r} \ln \frac{1}{\sqrt{r^2 - 2r \rho_l \cos(\theta - \alpha_l) + \rho_l^2}} \Big|_{r=R} + \pi p(\theta, t) + \\
& + \int_0^{2\pi} p \frac{\partial}{\partial r} \ln \frac{1}{\sqrt{r^2 - 2rR \cos(\theta - \varphi) + R^2}} \Big|_{r=R} R d\varphi.
\end{aligned}$$

Используя (4.7), находим:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial p_1}{\partial r} \Big|_{\Gamma} = & - \frac{\lambda}{2\pi R c_1} \sum_{l=1}^m Q_l - \frac{1-\lambda}{2\pi c_1} \sum_{l=1}^m Q_l \frac{R - \rho_l \cos(\theta - \alpha_l)}{R^2 - 2R \rho_l \cos(\theta - \alpha_l) + \rho_l^2} - \\
& - \frac{1-\lambda}{2\pi c_2} \sum_{l=m+1}^{m+1} Q_l \frac{R - \rho_l \cos(\theta - \alpha_l)}{R^2 - 2R \rho_l \cos(\theta - \alpha_l) + \rho_l^2}. \quad (4.12)
\end{aligned}$$

Значение $\frac{\partial p_1}{\partial \theta}$ вычислять не следует, так как коэффициент при этой производной равен нулю [см. (4.11)].

Подставим далее значения производных (4.11) и (4.12) в уравнение (4.10).

$$\begin{aligned}
\varepsilon = & \ddot{m} \frac{dR}{dt} - \frac{1}{2\pi} \sum_{l=1}^m Q_l \left[\frac{\lambda}{R} + (1-\lambda) \frac{R - \rho_l \cos(\theta - \alpha_l)}{R^2 - 2R \rho_l \cos(\theta - \alpha_l) + \rho_l^2} \right] - \\
& - \frac{1-\lambda}{2\pi} \frac{c_1}{c_2} \sum_{l=m+1}^{m+1} Q_l \frac{R - \rho_l \cos(\theta - \alpha_l)}{R^2 - 2R \rho_l \cos(\theta - \alpha_l) + \rho_l^2}. \quad (4.13)
\end{aligned}$$

3. Для обеспечения наименьшего уклонения ε от нуля воспользуемся приемом, указанным в п. 6, § 2 (см. [2]). В случае кругового концентрического стягивания КН

$$\varepsilon' = \varepsilon \sqrt{r^2 + \left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2} = V\bar{R} \cdot \varepsilon.$$

Разложение ε' в ряд Фурье по θ имеет вид:

$$\begin{aligned}
\varepsilon' = & V\bar{R} \left\{ \ddot{m} \frac{dR}{dt} - \frac{1}{2\pi R} \sum_{l=1}^m Q_l - \frac{1-\lambda}{2\pi R} \sum_{k=1}^{\infty} \left[\sum_{l=1}^m Q_l \left(\frac{\rho_l}{R}\right)^k \cos k\alpha_l - \right. \right. \\
& - \frac{c_1}{c_2} \sum_{l=m+1}^{m+1} Q_l \left(\frac{R}{\rho_l}\right)^k \cos k\alpha_l \left. \right] \cos k\theta - \frac{1-\lambda}{2\pi R} \sum_{k=1}^{\infty} \left[\sum_{l=1}^m Q_l \left(\frac{\rho_l}{R}\right)^k \sin k\alpha_l - \right. \\
& \left. \left. - \frac{c_1}{c_2} \sum_{l=m+1}^{m+1} Q_l \left(\frac{R}{\rho_l}\right)^k \sin k\alpha_l \right] \sin k\theta \right\}.
\end{aligned}$$

Приравняв нулю $m+l$ первых не равных тождественно нулю и не зависимых между собою коэффициентов ряда (4.13), после некоторых преобразований получаем систему линейных относительно Q_l уравнений:

$$\sum_{i=1}^m Q_i = 2\pi m R \frac{dR}{dt}; \quad (4.14)$$

$$\sum_{i=1}^m Q_i \left(\frac{\rho_i}{R}\right)^k \cos k\alpha_i - \frac{c_1}{c_2} \sum_{i=m+1}^{m+l} Q_i \left(\frac{R}{\rho_i}\right)^k \cos k\alpha_i = 0; \quad (4.15)$$

$$\sum_{i=1}^m Q_i \left(\frac{\rho_i}{R}\right)^k \sin k\alpha_i - \frac{c_1}{c_2} \sum_{i=m+1}^{m+l} Q_i \left(\frac{R}{\rho_i}\right)^k \sin k\alpha_i = 0. \quad (4.16)$$

Уравнение (4.14) представляет собою уравнение баланса дебитов нефтяных скважин, иначе уравнение неразрывности течения применительно к нефтяной зоне пласта.

4. Если положить в уравнениях (4.15) и (4.16) коэффициенты текучести нефти и воды одинаковыми, т. е. $c_1 = c_2$, то мы придем, как и следовало ожидать, к системе уравнений (5.30) работы [2], полученной для одножидкостной системы при круговом стягивании КН в неограниченном пласте.

Введем обозначения

$$\frac{c_1}{c_2} Q_i = \tilde{Q}_i. \quad (i = m+1, \dots, m+l). \quad (4.17)$$

Тогда уравнения (4.14) — (4.16) принимают вид:

$$\sum_{i=1}^m Q_i = 2\pi \tilde{m} R \frac{dR}{dt};$$

$$\sum_{i=1}^m Q_i \left(\frac{\rho_i}{R}\right)^k \cos k\alpha_i - \sum_{i=m+1}^{m+l} \tilde{Q}_i \left(\frac{R}{\rho_i}\right)^k \cos k\alpha_i = 0;$$

$$\sum_{i=1}^m Q_i \left(\frac{\rho_i}{R}\right)^k \sin k\alpha_i - \sum_{i=m+1}^{m+l} \tilde{Q}_i \left(\frac{R}{\rho_i}\right)^k \sin k\alpha_i = 0.$$

Таким образом, внешний вид уравнений тот же, что и в задаче управления для одножидкостной системы. Следовательно, все выводы, полученные относительно величин Q_i , α_i для различных схем размещения скважин в одножидкостной системе [2], [11], переносятся полностью соответственно на величины Q_i , \tilde{Q}_i , α_i в двухжидкостной системе.

В случае отсутствия водяных скважин уравнения (4.14) — (4.16) те же, что и для одножидкостной системы [2]:

$$\sum_{i=1}^m Q_i = 2\pi \tilde{m} R \frac{dR}{dt};$$

$$\sum_{i=1}^m Q_i \left(\frac{\rho_i}{R}\right)^k \cos k\alpha_i = 0; \quad \sum_{i=1}^m Q_i \left(\frac{\rho_i}{R}\right)^k \sin k\alpha_i = 0. \quad (4.18)$$

Итак, при концентрически круговом законе стягивания КН, одинаковом для одно- и двухжидкостной систем:

1) оптимальное размещение скважин в двухжидкостной системе такое же, как и в одножидкостной;

2) дебиты нефтяных скважин Q_i одинаковы в одно- и двухжидкостной системах;

3) дебиты водяных скважин Q_i в двухжидкостной системе равны дебитам водяных скважин в одножидкостной системе, умноженным на постоянный коэффициент $\frac{c_2}{c_1}$.

5. Решим ту же частную задачу вторым методом.

С учетом соотношений (4.11) имеем:

$$\frac{\partial F}{\partial t} = \frac{dR}{dt}; \quad |\nabla F| = \sqrt{\left(\frac{\partial F}{\partial r}\right)^2 + \frac{1}{r^2} \left(\frac{\partial F}{\partial \theta}\right)^2} = 1.$$

Поэтому условия (3.1) и (3.2) принимают вид:

$$\frac{\partial p_1}{\partial n} - \frac{\partial p_2}{\partial n} = \left(\frac{1}{c_1} - \frac{1}{c_2}\right) \tilde{m} \frac{dR}{dt}; \quad (4.19)$$

$$\frac{\partial p_1}{\partial n} + \frac{\partial p_2}{\partial n} = \left(\frac{1}{c_1} + \frac{1}{c_2}\right) \tilde{m} \frac{dR}{dt}. \quad (4.20)$$

Давление ищем в той же форме (4.3).

Плотность простого слоя согласно (3.4) равна

$$\rho = -\left(\frac{1}{c_1} - \frac{1}{c_2}\right) \frac{\tilde{m}}{2\pi} \frac{dR}{dt}. \quad (4.21)$$

Подставляя (4.21) в выражение для давления (4.3) и вычисляя интеграл для $r < R$, получаем давление в нефтяной зоне:

$$p_1 = \frac{1}{2\pi c_1} \sum_{i=1}^m Q_i \ln \frac{1}{\sqrt{r^2 - 2r\rho_i \cos(\theta - \alpha_i) + \rho_i^2}} + \frac{1}{2\pi c_2} \sum_{i=m+1}^{m+l} Q_i \ln \frac{1}{\sqrt{r^2 - 2r\rho_i \cos(\theta - \alpha_i) + \rho_i^2}} + \left(\frac{1}{c_1} - \frac{1}{c_2}\right) \tilde{m} R \frac{dR}{dt} \ln R. \quad (4.22)$$

Вычисляя интеграл для $r > R$, находим давление в водяной зоне:

$$p_2 = \frac{1}{2\pi c_1} \sum_{i=1}^m Q_i \ln \frac{1}{\sqrt{r^2 - 2r\rho_i \cos(\theta - \alpha_i) + \rho_i^2}} + \frac{1}{2\pi c_2} \sum_{i=m+1}^{m+l} Q_i \ln \frac{1}{\sqrt{r^2 - 2r\rho_i \cos(\theta - \alpha_i) + \rho_i^2}} + \left(\frac{1}{c_1} - \frac{1}{c_2}\right) \tilde{m} R \frac{dR}{dt} \ln r. \quad (4.23)$$

Легко видеть, что условие (1.1) равенства давлений на Γ (т. е. при $r=R$) выполняется. Нетрудно проверить и выполнение условия (4.19). Отметим неоднородность выражений (4.22) и (4.23) относительно дебитов Q_l в отличие от (4.8) и (4.9). Остается удовлетворить условию (4.20) на Γ . Для этого составим согласно уравнению (3.7) невязку ϵ для нашей задачи. Учтем, что $\frac{\partial F}{\partial t} : |\nabla F| = \frac{dR}{dt}$.

Используем то, что в нашем случае $\frac{\partial}{\partial n} = -\frac{\partial}{\partial r} \Big|_{r=R}$

$$\epsilon = \frac{1}{2\pi c_1} \sum_{l=1}^m Q_l \frac{R - \rho_l \cos(\theta - \alpha_l)}{R^2 - 2R\rho_l \cos(\theta - \alpha_l) + \rho_l^2} +$$

$$+ \frac{1}{2\pi c_2} \sum_{l=m+1}^{m+1} Q_l \frac{R - \rho_l \cos(\theta - \alpha_l)}{R^2 - 2R\rho_l \cos(\theta - \alpha_l) + \rho_l^2}$$

$$- \frac{\tilde{m}}{2\pi} \left(\frac{1}{c_1} - \frac{1}{c_2} \right) \int_0^{2\pi} \frac{dR}{dt} \cdot \frac{1}{2R} \cdot R d\varphi - \left(\frac{1}{c_1} + \frac{1}{c_2} \right) \frac{\tilde{m}}{2} \frac{dR}{dt}$$

Отсюда

$$\epsilon = -\frac{\tilde{m}}{c_1} \frac{dR}{dt} + \frac{1}{2\pi c_1} \sum_{l=1}^m Q_l \frac{R - \rho_l \cos(\theta - \alpha_l)}{R^2 - 2R\rho_l \cos(\theta - \alpha_l) + \rho_l^2} +$$

$$+ \frac{1}{2\pi c_2} \sum_{l=m+1}^{m+1} Q_l \frac{R - \rho_l \cos(\theta - \alpha_l)}{R^2 - 2R\rho_l \cos(\theta - \alpha_l) + \rho_l^2} \quad (4.24)$$

6. Поступая далее так же, как в п. 3 § 3, разложим в ряд Фурье функцию $\epsilon' = \sqrt{R} \cdot \epsilon$.

$$\epsilon' = \sqrt{R} \left\{ -\frac{\tilde{m}}{c_1} \frac{dR}{dt} + \frac{1}{2\pi R} \sum_{k=1}^{\infty} \left[\frac{1}{c_1} \sum_{l=1}^m Q_l \left(\frac{\rho_l}{R} \right)^k \cos k\alpha_l - \right. \right.$$

$$\left. - \frac{1}{c_2} \sum_{l=m+1}^{m+1} Q_l \left(\frac{\rho_l}{R} \right)^k \cos k\alpha_l \right] \cos k\theta + \frac{1}{2\pi R} \sum_{k=1}^{\infty} \left[\frac{1}{c_1} \sum_{l=1}^m Q_l \left(\frac{\rho_l}{R} \right)^k \sin k\alpha_l - \right.$$

$$\left. - \frac{1}{c_2} \sum_{l=m+1}^{m+1} Q_l \left(\frac{\rho_l}{R} \right)^k \sin k\alpha_l \right] \sin k\theta \right\}. \quad (4.25)$$

Приравнявая нулю $m+l$ первых не равных тождественно нулю и не зависящих между собою коэффициентов ряда (4.25), приходим к системе линейных относительно Q_l уравнений:

$$\sum_{l=1}^m Q_l = 2\pi \tilde{m} R \frac{dR}{dt};$$

$$\left. \begin{aligned} \sum_{l=1}^m Q_l \left(\frac{\rho_l}{R} \right)^k \cos k\alpha_l - \frac{c_1}{c_2} \sum_{l=m+1}^{m+1} Q_l \left(\frac{\rho_l}{R} \right)^k \cos k\alpha_l &= 0; \\ \sum_{l=1}^m Q_l \left(\frac{\rho_l}{R} \right)^k \sin k\alpha_l - \frac{c_1}{c_2} \sum_{l=m+1}^{m+1} Q_l \left(\frac{\rho_l}{R} \right)^k \sin k\alpha_l &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (4.26)$$

Обращаясь к системе (4.14) — (4.16), видим, что она совпадает с системой (4.26).

7. Таким образом, для рассмотренной частной задачи первый и второй методы решения дают одинаковый результат несмотря на различный вид невязок (4.13) и (4.24), если пользоваться аппроксимацией ϵ' тригонометрическим полиномом. Это совпадение обязано лишь способу аппроксимации ϵ' . Выше было указано, что первый и второй методы, вообще говоря, не эквивалентны в случае приближенного решения (п. 4, § 3). Чтобы убедиться в этом на нашей частной задаче, применим метод наименьших квадратов при решении по первому методу (п. 5, § 2) и по второму методу (п. 3, § 3).

Возьмем выражение (4.13) для невязки ϵ , полученной по первому методу. Уравнения (2.19) имеют вид:

$$\int_0^{2\pi} \left\{ \tilde{m} \frac{dR}{dt} - \frac{1}{2\pi} \sum_{l=1}^m Q_l \left[\frac{\lambda}{R} + (1-\lambda) \frac{R - \rho_l \cos(\theta - \alpha_l)}{R^2 - 2R\rho_l \cos(\theta - \alpha_l) + \rho_l^2} \right] - \right.$$

$$\left. - \frac{1-\lambda}{2\pi} \frac{c_1}{c_2} \sum_{l=m+1}^{m+1} Q_l \frac{R - \rho_l \cos(\theta - \alpha_l)}{R^2 - 2R\rho_l \cos(\theta - \alpha_l) + \rho_l^2} \right\} \left[-\frac{1}{2\pi} \left[\frac{\lambda}{R} + \right. \right.$$

$$\left. \left. + (1-\lambda) \frac{R - \rho_j \cos(\theta - \alpha_j)}{R^2 - 2R\rho_j \cos(\theta - \alpha_j) + \rho_j^2} \right] \right] R d\theta = 0,$$

($j = 1, 2, \dots, m$);

$$\int_0^{2\pi} \left\{ \tilde{m} \frac{dR}{dt} - \frac{1}{2\pi} \sum_{l=1}^m Q_l \left[\frac{\lambda}{R} + (1-\lambda) \frac{R - \rho_l \cos(\theta - \alpha_l)}{R^2 - 2R\rho_l \cos(\theta - \alpha_l) + \rho_l^2} \right] - \right.$$

$$\left. - \frac{1-\lambda}{2\pi} \frac{c_1}{c_2} \sum_{l=m+1}^{m+1} Q_l \frac{R - \rho_l \cos(\theta - \alpha_l)}{R^2 - 2R\rho_l \cos(\theta - \alpha_l) + \rho_l^2} \right\} \times$$

$$\times \left[-\frac{1-\lambda}{2\pi} \frac{c_1}{c_2} \frac{R - \rho_j \cos(\theta - \alpha_j)}{R^2 - 2R\rho_j \cos(\theta - \alpha_j) + \rho_j^2} \right] R d\theta = 0,$$

($j = m+1, m+2, \dots, m+l$).

Вычисляя эти определенные интегралы* и производя некоторые сокращения, приходим к системе $m+l$ неоднородных линейных относительно дебитов уравнений:

$$\sum_{i=1}^m Q_i \left[1 - \frac{(1-\lambda)^2}{2} \rho_i \rho_j \frac{\rho_i \rho_j - R^2 \cos(\alpha_i - \alpha_j)}{R^4 - 2R^2 \rho_i \rho_j \cos(\alpha_i - \alpha_j) + \rho_i^2 \rho_j^2} \right] + \frac{(1-\lambda)^2}{2} \frac{c_1}{c_2} \sum_{i=m+1}^{m+l} Q_i \rho_j \frac{\rho_j - \rho_i \cos(\alpha_i - \alpha_j)}{\rho_j^2 - 2\rho_j \rho_i \cos(\alpha_i - \alpha_j) + \rho_i^2} = 2\pi \tilde{m} R \frac{dR}{dt}, \quad (j=1, 2, \dots, m); \quad (4.27)$$

$$\sum_{i=1}^m Q_i \rho_i \frac{\rho_i - \rho_j \cos(\alpha_i - \alpha_j)}{\rho_i^2 - 2\rho_i \rho_j \cos(\alpha_i - \alpha_j) + \rho_j^2} - \frac{c_1}{c_2} \sum_{i=m+1}^{m+l} Q_i R^2 \frac{R^2 - \rho_i \rho_j \cos(\alpha_i - \alpha_j)}{R^4 - 2R^2 \rho_i \rho_j \cos(\alpha_i - \alpha_j) + \rho_i^2 \rho_j^2} = 0, \quad (j=m+1, m+2, \dots, m+l). \quad (4.28)$$

Теперь возьмем выражение (4.24) для невязки ϵ , полученной по второму методу. Способ наименьших квадратов приводит к уравнениям [см. (3.8)]:

$$\int_0^{2\pi} \left\{ -\frac{\tilde{m}}{c_1} \frac{dR}{dt} + \frac{1}{2\pi c_1} \sum_{i=1}^m Q_i \frac{R - \rho_i \cos(\theta - \alpha_i)}{R^2 - 2R\rho_i \cos(\theta - \alpha_i) + \rho_i^2} + \frac{1}{2\pi c_2} \sum_{i=m+1}^{m+l} Q_i \frac{R - \rho_i \cos(\theta - \alpha_i)}{R^2 - 2R\rho_i \cos(\theta - \alpha_i) + \rho_i^2} \right\} \times \frac{1}{2\pi c_1} \frac{R - \rho_j \cos(\theta - \alpha_j)}{R^2 - 2R\rho_j \cos(\theta - \alpha_j) + \rho_j^2} \cdot R d\theta = 0, \quad (j=1, 2, \dots, m);$$

$$\int_0^{2\pi} \left\{ -\frac{\tilde{m}}{c_1} \frac{dR}{dt} + \frac{1}{2\pi c_1} \sum_{i=1}^m Q_i \frac{R - \rho_i \cos(\theta - \alpha_i)}{R^2 - 2R\rho_i \cos(\theta - \alpha_i) + \rho_i^2} + \right.$$

* Это вычисление сделано путем разложения сомножителей под интегралом в равномерно сходящиеся тригонометрические ряды:

$$\int_0^{2\pi} \left[A_0 + \sum_{k=1}^{\infty} (A_k \cos k\theta + B_k \sin k\theta) \right] \left[a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos k\theta + b_k \sin k\theta) \right] d\theta = 2\pi A_0 a_0 + \pi \sum_{k=1}^{\infty} (A_k a_k + B_k b_k).$$

Полученный ряд легко суммируется.

$$+ \frac{1}{2\pi c_2} \sum_{i=m+1}^{m+l} Q_i \frac{R - \rho_i \cos(\theta - \alpha_i)}{R^2 - 2R\rho_i \cos(\theta - \alpha_i) + \rho_i^2} \left. \right\} \times \frac{1}{2\pi c_2} \frac{R - \rho_j \cos(\theta - \alpha_j)}{R^2 - 2R\rho_j \cos(\theta - \alpha_j) + \rho_j^2} \cdot R d\theta = 0, \quad (j=m+1, m+2, \dots, m+l).$$

Отсюда получаем следующую систему уравнений:

$$\sum_{i=1}^m Q_i \left[1 - \frac{1}{2} \rho_i \rho_j \frac{\rho_i \rho_j - R^2 \cos(\alpha_i - \alpha_j)}{R^4 - 2R^2 \rho_i \rho_j \cos(\alpha_i - \alpha_j) + \rho_i^2 \rho_j^2} \right] + \frac{1}{2} \frac{c_1}{c_2} \sum_{i=m+1}^{m+l} Q_i \rho_j \frac{\rho_j - \rho_i \cos(\alpha_i - \alpha_j)}{\rho_j^2 - 2\rho_j \rho_i \cos(\alpha_i - \alpha_j) + \rho_i^2} = 2\pi \tilde{m} R \frac{dR}{dt}, \quad (j=1, 2, \dots, m); \quad (4.29)$$

$$\sum_{i=1}^m Q_i \rho_i \frac{\rho_i - \rho_j \cos(\alpha_i - \alpha_j)}{\rho_i^2 - 2\rho_i \rho_j \cos(\alpha_i - \alpha_j) + \rho_j^2} - \frac{c_1}{c_2} \sum_{i=m+1}^{m+l} Q_i R^2 \frac{R^2 - \rho_i \rho_j \cos(\alpha_i - \alpha_j)}{R^4 - 2R^2 \rho_i \rho_j \cos(\alpha_i - \alpha_j) + \rho_i^2 \rho_j^2} = 0, \quad (j=m+1, m+2, \dots, m+l). \quad (4.30)$$

Сравнивая систему уравнений (4.27) — (4.28) и систему (4.29) — (4.30), видим, что они отличаются друг от друга и совпадают лишь тогда, когда $\lambda=0$, т. е. $c_1=c_2$ [см. (2.5)], иначе говоря, для одножидкостного течения. Из сравнения систем (4.27) — (4.28) и (4.29) — (4.30) следует также, что при $\lambda \ll 1$, т. е. при малом различии коэффициентов текучести c_1 и c_2 , коэффициенты при Q_i почти одинаковы в обеих системах. Поэтому решение задачи управления за счет дебитов по первому и второму методу способом наименьших квадратов в этом случае должно давать близкие результаты.

8. Анализируя решение рассмотренной частной задачи, можно высказать следующее утверждение. В качестве первого приближения к решению задачи управления при произвольном законе стягивания в двухжидкостной системе можно взять решение задачи управления при том же законе стягивания для одножидкостной (нефтяной) системы, умножив полученные дебиты водяных скважин на коэффициент $\frac{c_2}{c_1}$. Это приближение тем точнее, чем меньше излом линий тока на КН, т. е. чем меньше различие между c_1 и c_2 , а также чем течение ближе к радиальному или одномерному в окрестности КН.

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

1. Салехов Г. С. Прямые и обратные задачи о продвижении водонефтяного контакта. Известия Казанского филиала АН СССР, серия физ.-мат. и технич. наук, вып. 5, 1954.
2. Салехов Г. С. Постановка и методы решения гидродинамических задач управления движением контура нефтеносности. Известия Казанского филиала АН СССР, серия физ.-мат. и технич. наук, вып. 6, 1955.

3. Салехов Г. С. Об одном способе решения задачи управления движением контура нефтеносности в пластах с водонапорным режимом (см. настоящий выпуск).

4. Салехов Г. С. Приложение одного метода минимальной погрешности к решению задач управления движением контура нефтеносности (см. настоящий выпуск).

5. Чарный И. А. Подземная гидромеханика. ОГИЗ, 1948.

6. Маскет М. Течение однородных жидкостей в пористой среде. Гостоптехиздат, 1949.

7. Данилов В. Л. К задаче определения поля давлений при заданном законе стягивания контура нефтеносности. Известия Казанского филиала АН СССР, серия физ.-мат. и технич. наук, вып. 6, 1955.

8. Курант Р. и Гильберт Д. Методы математической физики, т. II, Гостехиздат, 1951.

9. Коллатц Л. Численные методы решения дифференциальных уравнений, И. Л. 1953.

10. Тумашев Г. Г. К задаче о стягивании контура нефтеносности. Ученые записки Казанского госуниверситета. Сборник работ НИИММ им. Н. Г. Чеботарева, т. 113, кн. 10, 1953.

11. Чугунов В. Д. Некоторые частные случаи управления продвижением водо-нефтяного контакта. Известия Казанского филиала Академии наук СССР, серия физ.-мат. и технич. наук, вып. 6, 1955.

Поступило
20 декабря 1954 г.

Физико-технический ин-т
Казанского филиала АН СССР

В. Л. ДАНИЛОВ

К ЗАДАЧЕ УПРАВЛЕНИЯ ПЕРЕМЕЩЕНИЕМ КОНТУРА НЕФТЕНОСНОСТИ

В работе указывается метод решения задачи управления перемещением контура нефтеносности с помощью нагнетательной галереи в ограниченном пласте при учете различия вязкостей воды и нефти. Метод опирается на решение задачи восстановления давлений в неограниченном пласте.

§ 1. Постановка и метод решения задачи

1. Задача управления перемещением контура нефтеносности* впервые была поставлена Г. С. Салеховым [1]. Нами была изучена задача определения поля давлений при заданном законе перемещения КН [2]. Было показано, что при ламинарной фильтрации несжимаемых жидкостей в горизонтальном пласте с постоянными мощностью и проницаемостью определение давления для нефтяной зоны сводится к решению второй краевой задачи, а определение давления в водной зоне — к решению задачи Коши для уравнения Лапласа. В рассмотренном частном примере кругового КН в неограниченном пласте было получено решение с подвижными особенностями в водной зоне.

2. В настоящей статье, в отличие от работы [2], предполагается, что в водной зоне имеется нагнетательная галерея Γ_n , охватывающая КН Γ (рис. 1). Кроме того, пласт ограничен контуром питания Γ_n , на котором сохраняется постоянное давление p_n во все время движения. В нефтяной зоне пласта имеются l скважин с дебитами Q_i и координатами (x_i, y_i) . Скважины полагаем вертикальными линейными стоками. Таким образом, течение является плоским.

Задача управления ставится следующим образом: какую закачку воды следует поддерживать на единицу длины галереи Γ_n , чтобы КН перемещался по заданному закону

$$F(x, y, t) = 0. \quad (1.1)$$

При этом должны выполняться такие условия на КН Γ [1], [2]:

$$p_1 = p_2, \quad (1.2)$$

$$c_1 \frac{\partial p_1}{\partial n} = c_2 \frac{\partial p_2}{\partial n}. \quad (1.3)$$

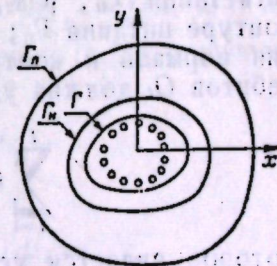


Рис. 1.

* Далее для краткости контур нефтеносности обозначен КН.

Здесь p_1 — давление в нефтяной зоне, p_2 — давление в водной зоне; c_1, c_2 — коэффициенты текучести соответственно нефти и воды ($c_1 = \frac{k}{\mu_n}, c_2 = \frac{k}{\mu_n}$, k — проницаемость, μ_n — динамическая вязкость нефти, μ_n — то же для воды), n — нормаль к контуру Γ . На контуре питания Γ_n

$$p = p_n = \text{const.} \quad (1.4)$$

Без уменьшения общности можно считать $p_n = 0$. В пласте постоянной проницаемости при фильтрации несжимаемых жидкостей давления p_1 в нефтяной зоне и p_2 в водной зоне удовлетворяют уравнению Лапласа:

$$\Delta p_1 = \Delta p_2 = 0.$$

Ранее было показано [2], что с учетом закона Дарси задание закона (1.1) означает задание на КН Γ нормальной производной

$$\frac{\partial p_1}{\partial n} = \frac{m}{c_1} \frac{\partial F}{|\nabla F|}, \quad (1.5)$$

где m — пористость пласта, которая считается постоянной.

3. В силу единственности решения второй краевой задачи и задачи Коши давление p_1 в нефтяной зоне и давление p_2 в водной зоне до особой линии Γ_n те же, что и в неограниченном пласте. Эти функции известны в результате решения задачи для неограниченного пласта [2]. Функцию давления в ограниченном пласте можно записать в следующем виде:

$$p = \frac{1}{2\pi hc_1} \sum_{i=1}^l Q_i \ln \frac{1}{V(x-x_i)^2 + (y-y_i)^2} + \int_{\Gamma} p \ln \frac{1}{V(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2} ds + \\ + \int_{\Gamma_n} p_1 \ln \frac{1}{V(x-\xi_1)^2 + (y-\eta_1)^2} ds_1 + \int_{\Gamma_n} \mu \frac{\partial}{\partial n_1} \ln \frac{1}{V(x-\xi_2)^2 + (y-\eta_2)^2} ds_2. \quad (1.6)$$

Здесь $p(s, t)$ — плотность потенциала простого слоя на границе нефти и воды Γ , $p_1(s_1, t)$ — плотность потенциала простого слоя на контуре нагнетания Γ_n , $\mu(s_2, t)$ — плотность потенциала двойного слоя на контуре питания Γ_n ; $(\xi, \eta) \in \Gamma$; $(\xi_1, \eta_1) \in \Gamma_n$; $(\xi_2, \eta_2) \in \Gamma_n$; n_1 — внутренняя нормаль к контуру Γ_n в точке (ξ_2, η_2) . Напомним, что сумма дебитов Q_i должна удовлетворять соотношению [2]

$$\sum_{i=1}^l Q_i = h \int_{\Gamma} v_n ds = hm \int_{\Gamma} \frac{\partial F}{|\nabla F|} ds, \quad (1.7)$$

которое является условием разрешимости второй краевой задачи при отыскании p_1 .

Составим разность предельных значений нормальных производных давления на Γ . Из свойств производных простого слоя имеем:

$$\frac{\partial p_1}{\partial n} - \frac{\partial p_2}{\partial n} = -2\pi p.$$

С другой стороны, соотношения (1.3) и (1.5) дают:

$$\frac{\partial p_1}{\partial n} = \frac{m}{c_1} \frac{\partial F}{|\nabla F|}, \quad \frac{\partial p_2}{\partial n} = \frac{m}{c_2} \frac{\partial F}{|\nabla F|}.$$

Отсюда

$$p = -\frac{m}{2\pi} \left(\frac{1}{c_1} - \frac{1}{c_2} \right) \frac{\partial F}{|\nabla F|}. \quad (1.8)$$

Подставим выражение (1.8) для p в формулу (1.6).

$$p = \frac{1}{2\pi hc_1} \sum_{i=1}^l Q_i \ln \frac{1}{V(x-x_i)^2 + (y-y_i)^2} - \\ - \frac{m}{2\pi} \left(\frac{1}{c_1} - \frac{1}{c_2} \right) \int_{\Gamma} \frac{\partial F}{|\nabla F|} \ln \frac{1}{V(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2} ds + \\ + \int_{\Gamma_n} p_1 \ln \frac{1}{V(x-\xi_1)^2 + (y-\eta_1)^2} ds_1 + \int_{\Gamma_n} \mu \frac{\partial}{\partial n_1} \ln \frac{1}{V(x-\xi_2)^2 + (y-\eta_2)^2} ds_2. \quad (1.9)$$

Найдем предельное значение нормальной производной $\frac{\partial p_2}{\partial n}$ на контуре Γ_n при подходе изнутри.

$$\frac{\partial p_2}{\partial n} \Big|_{\Gamma_n} = \frac{1}{2\pi hc_1} \sum_{i=1}^l Q_i \frac{\partial}{\partial n_2} \ln \frac{1}{V(x-x_i)^2 + (y-y_i)^2} - \\ - \frac{m}{2\pi} \left(\frac{1}{c_1} - \frac{1}{c_2} \right) \int_{\Gamma} \frac{\partial F}{|\nabla F|} \frac{\partial}{\partial n_2} \ln \frac{1}{V(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2} ds - \\ - \pi p_1 + \int_{\Gamma_n} p_1 \frac{\partial}{\partial n_2} \ln \frac{1}{V(x-\xi_1)^2 + (y-\eta_1)^2} ds_1 + \\ + \int_{\Gamma_n} \mu \frac{\partial}{\partial n_2} \left[\frac{\partial}{\partial n_1} \ln \frac{1}{V(x-\xi_2)^2 + (y-\eta_2)^2} \right] ds_2. \quad (1.9a)$$

n_2 — внутренняя нормаль к Γ_n в точке (x, y) . Но p_2 между Γ и Γ_n известно из решения задачи Коши [2]. Найдем $\frac{\partial p_2}{\partial n_2} \Big|_{\Gamma_n} = f(x, y, t)$ из этого выражения. Приравняв $f(x, y, t)$ выражению (1.9a), получаем первое интегральное уравнение для определения p_1 и μ :

$$\pi p_1 - \int_{\Gamma_n} p_1 \frac{\partial}{\partial n_2} \ln \frac{1}{V(x-\xi_1)^2 + (y-\eta_1)^2} ds_1 - \\ - \int_{\Gamma_n} \mu \frac{\partial}{\partial n_2} \left[\frac{\partial}{\partial n_1} \ln \frac{1}{V(x-\xi_2)^2 + (y-\eta_2)^2} \right] ds_2 = \\ = \frac{1}{2\pi hc_1} \sum_{i=1}^l Q_i \frac{\partial}{\partial n_2} \ln \frac{1}{V(x-x_i)^2 + (y-y_i)^2} - \\ - \frac{m}{2\pi} \left(\frac{1}{c_1} - \frac{1}{c_2} \right) \int_{\Gamma} \frac{\partial F}{|\nabla F|} \frac{\partial}{\partial n_2} \ln \frac{1}{V(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2} ds - f(x, y, t). \quad (1.10)$$

(1.10) $(x, y), (\xi_1, \eta_1) \in \Gamma_n; (\xi_2, \eta_2) \in \Gamma_n; (\xi, \eta) \in \Gamma.$

Остается удовлетворить условию (1.4) на контуре питания Γ_n : Из (1.9) имеем:

$$\begin{aligned}
 p_n &= \frac{1}{2\pi hc_1} \sum_{i=1}^l Q_i \ln \frac{1}{V(x-x_i)^2 + (y-y_i)^2} - \\
 &- \frac{m}{2\pi} \left(\frac{1}{c_1} - \frac{1}{c_2} \right) \int_{\Gamma} \frac{\frac{\partial F}{\partial t}}{|\nabla F|} \ln \frac{1}{V(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2} ds + \\
 &+ \int_{\Gamma_n} p_1 \ln \frac{1}{V(x-\xi_1)^2 + (y-\eta_1)^2} ds_1 + \pi\mu + \\
 &+ \int_{\Gamma_n} \mu \frac{\partial}{\partial n_1} \ln \frac{1}{V(x-\xi_2)^2 + (y-\eta_2)^2} ds_2. \\
 \text{Отсюда} \\
 &\pi\mu + \int_{\Gamma_n} \mu \frac{\partial}{\partial n_1} \ln \frac{1}{V(x-\xi_2)^2 + (y-\eta_2)^2} ds_2 + \\
 &+ \int_{\Gamma_n} p_1 \ln \frac{1}{V(x-\xi_1)^2 + (y-\eta_1)^2} ds_1 = \\
 &= p_n - \frac{1}{2\pi hc_1} \sum_{i=1}^l Q_i \ln \frac{1}{V(x-x_i)^2 + (y-y_i)^2} + \\
 &+ \frac{m}{2\pi} \left(\frac{1}{c_1} - \frac{1}{c_2} \right) \int_{\Gamma} \frac{\frac{\partial F}{\partial t}}{|\nabla F|} \ln \frac{1}{V(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2} ds. \quad (1.11) \\
 &(x, y), (\xi_2, \eta_2) \in \Gamma_n.
 \end{aligned}$$

Уравнения (1.10) и (1.11) представляют собой систему интегральных уравнений 2-го рода относительно неизвестных функций $p_1(s_1, t)$ и $\mu(s_2, t)$. К ним применимы теоремы Фредгольма. Контур Γ_n и Γ будем считать достаточно гладкими (например, в случае выпуклых контуров обладающими непрерывной кривизной).

Следует особо подчеркнуть то обстоятельство, что контур Γ_n должен располагаться в области регулярности и однозначности функции p_2 , полученной из решения задачи Коши [2]. Лишь при этом условии управление осуществимо за счет непрерывного распределения плотностей p_1 на контуре Γ_n . Таким образом, разрешимость системы интегральных уравнений (1.10) и (1.11) вытекает из решения задачи Коши.

4. Объемный расход воды, закачиваемой на единицу длины нагнетательной галереи,

$$\begin{aligned}
 q &= h(v_{n_n}^+ - v_{n_n}^-) = h \left(-c_2 \frac{\partial p_2^+}{\partial n_n} + c_2 \frac{\partial p_2^-}{\partial n_n} \right) = \\
 &= h \left(c_2 \frac{\partial p_2^+}{\partial n_2} - c_2 \frac{\partial p_2^-}{\partial n_2} \right) = -2\pi hc_2 p_1. \quad (1.12)
 \end{aligned}$$

Здесь индексы "+" и "-" означают предельные значения при подходе к контуру Γ_n соответственно изнутри и извне, n_n — внешняя нормаль к Γ_n , n_2 — внутренняя нормаль к Γ_n .

5. Если не учитывать контур питания в случае его большой удаленности от месторождения, то выражение (1.6) для p упрощается, так как отпадает последний интеграл по Γ_n . Соответственно упрощается и уравнение (1.10):

$$\begin{aligned}
 \pi p_1 - \int_{\Gamma_n} p_1 \frac{\partial}{\partial n_2} \ln \frac{1}{V(x-\xi_1)^2 + (y-\eta_1)^2} ds_1 = \\
 = -\frac{1}{2\pi hc_1} \sum_{i=1}^l Q_i \frac{\partial}{\partial n_2} \ln \frac{1}{V(x-x_i)^2 + (y-y_i)^2} - \\
 - \frac{m}{2\pi} \left(\frac{1}{c_1} - \frac{1}{c_2} \right) \int_{\Gamma} \frac{\frac{\partial F}{\partial t}}{|\nabla F|} \frac{\partial}{\partial n_2} \ln \frac{1}{V(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2} ds - f(x, y, t). \quad (1.13)
 \end{aligned}$$

Условие (1.11) отпадает. Итак, задача сводится к интегральному уравнению 2-го рода относительно функции p_1 . Разрешимость его также обеспечена, если достаточно гладкий контур Γ_n помещен в области регулярности функции $p_2(x, y, t)$, полученной из решения задачи Коши.

6. Отметим, что задача может быть перефразирована для случая эксплуатационной галереи Γ_e в нефтяной зоне и изолированных скважин в водной зоне, а также для двух галерей — нагнетательной Γ_n в водной зоне и эксплуатационной Γ_e в нефтяной зоне.

§ 2. Частная задача управления КН

1. Рассмотрим концентрически круговое стягивание КН в горизонтальном пласте с постоянными k , m и $h=1$ по закону

$$F(r, \varphi, t) = R(t) - r = 0. \quad (2.1)$$

В нефтяной зоне размещены l скважин с дебитами Q_i и полярными координатами (ρ_i, α_i) .

Для неограниченного пласта было получено в результате решения задачи Коши следующее выражение для давления в водной зоне [2]:

$$\begin{aligned}
 p_2(r, \varphi, t) &= b_0(t) - \left(\frac{1}{c_1} - \frac{1}{c_2} \right) mR \frac{dR}{dt} \ln \frac{R}{r} + \frac{1}{2\pi c_1} \sum_{i=1}^l Q_i \ln \frac{R^2}{\rho_i} + \\
 &+ \frac{1}{2\pi c_1} \sum_{i=1}^l Q_i \ln \frac{1}{\sqrt{r^2 - 2r \frac{R^2}{\rho_i} \cos(\varphi - \alpha_i) + \left(\frac{R^2}{\rho_i} \right)^2}} + \\
 &+ \frac{1}{2\pi c_1} \sum_{i=1}^l Q_i \ln \frac{1}{\sqrt{r^2 - 2r \rho_i \cos(\varphi - \alpha_i) + \rho_i^2}}. \quad (2.2)
 \end{aligned}$$

Отсюда видно, что функция p_2 имеет подвижные логарифмические особенности в точках $\left(\frac{R^2}{\rho_i}, \alpha_i \right)$. Выберем контур нагнетательной

галереи Γ_n в виде окружности с радиусом r_1 , concentрической с КН Γ . Тогда условие регулярности p_2 до Γ_n принимает вид:

$$r_1 < \frac{R^2}{\rho_{l_{\max}}} \quad (2.3)$$

Мы будем рассматривать движение лишь до того момента, пока это условие выполняется (т. е. пока подвижные особенности находятся вне круга Γ_n). Далее пусть имеется контур питания Γ_n — также окружность, concentрическая с Γ , радиуса $r_2 > r_1$ (рис. 2).

2. Из уравнения Γ (2.1) имеем

$$\frac{\partial F}{\partial t} = \frac{dR}{dt} \quad (2.4)$$

Отсюда, на основании (1.9), давление p в полярных координатах запишется так:

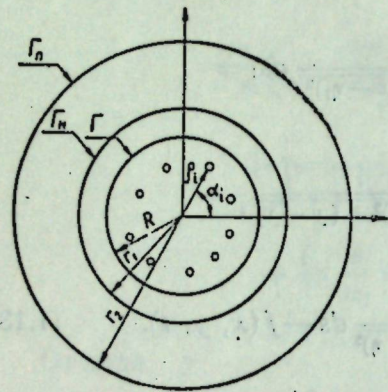


Рис. 2.

$$p = \frac{1}{2\pi c_1} \sum_{l=1}^l Q_l \ln \frac{1}{\sqrt{r^2 - 2r\rho_l \cos(\varphi - \alpha_l) + \rho_l^2}} - \frac{m}{2\pi} \left(\frac{1}{c_1} - \frac{1}{c_2} \right) \frac{dR}{dt} \int_0^{2\pi} \ln \frac{1}{\sqrt{R^2 - 2Rr \cos(\theta - \varphi) + R^2}} R d\theta + \int_0^{2\pi} \rho_1(\theta, t) \ln \frac{1}{\sqrt{r^2 - 2rr_1 \cos(\theta - \varphi) + r_1^2}} r_1 d\theta - \int_0^{2\pi} \mu(\theta, t) \frac{\partial}{\partial r_2} \ln \frac{1}{\sqrt{r^2 - 2rr_2 \cos(\theta - \varphi) + r_2^2}} r_2 d\theta. \quad (2.5)$$

Здесь учтено то, что $\frac{\partial}{\partial n_1} = -\frac{\partial}{\partial r_2}$, $ds = R d\theta$, $ds_1 = r_1 d\theta$, $ds_2 = r_2 d\theta$.

Далее мы полагаем, что удовлетворяется соотношение (1.7), принимающее для нашей частной задачи вид

$$\sum_{l=1}^l Q_l = 2\pi m R \frac{dR}{dt}. \quad (2.6)$$

Используя то, что

$$\frac{\partial}{\partial n_2} = -\frac{\partial}{\partial r} \Big|_{r=r_2},$$

уравнение (1.10) в полярных координатах можно записать в форме:

$$\pi \rho_1 + \int_0^{2\pi} \rho_1 \left[\frac{\partial}{\partial r} \ln \frac{1}{\sqrt{r^2 - 2rr_1 \cos(\theta - \varphi) + r_1^2}} \right]_{r=r_1} \cdot r_1 d\theta - \int_0^{2\pi} \mu \left\{ \frac{\partial}{\partial r} \left[\frac{\partial}{\partial r_2} \ln \frac{1}{\sqrt{r^2 - 2rr_2 \cos(\theta - \varphi) + r_2^2}} \right] \right\}_{r=r_2} r_2 d\theta =$$

$$= -\frac{1}{2\pi c_1} \sum_{l=1}^l Q_l \left[\frac{\partial}{\partial r} \ln \frac{1}{\sqrt{r^2 - 2r\rho_l \cos(\varphi - \alpha_l) + \rho_l^2}} \right]_{r=r_1} + \frac{m}{2\pi} \left(\frac{1}{c_1} - \frac{1}{c_2} \right) \frac{dR}{dt} \int_0^{2\pi} \left[\frac{\partial}{\partial r} \ln \frac{1}{\sqrt{R^2 - 2Rr \cos(\theta - \varphi) + R^2}} \right]_{r=R} R d\theta - f(r, \varphi, t). \quad (2.7)$$

Здесь $f(r, \varphi, t)$ определяется из (2.2):

$$f(r, \varphi, t) = -\frac{\partial p_2}{\partial r} \Big|_{r=r_1} = \left(\frac{1}{c_1} - \frac{1}{c_2} \right) m R \frac{dR}{dt} \left[\frac{\partial}{\partial r} \ln \frac{R}{r} \right]_{r=r_1} - \frac{1}{2\pi c_1} \sum_{l=1}^l Q_l \left[\frac{\partial}{\partial r} \ln \frac{1}{\sqrt{r^2 - 2r \frac{R^2}{\rho_l} \cos(\varphi - \alpha_l) + \left(\frac{R^2}{\rho_l} \right)^2}} \right]_{r=r_1} - \frac{1}{2\pi c_1} \sum_{l=1}^l Q_l \left[\frac{\partial}{\partial r} \ln \frac{1}{\sqrt{r^2 - 2r\rho_l \cos(\varphi - \alpha_l) + \rho_l^2}} \right]_{r=r_1}. \quad (2.8)$$

Подставляя $f(r, \varphi, t)$ из (2.8) в (2.7) и вычисляя производные, приведем уравнение (2.7) к виду:

$$\pi \rho_1 - \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \rho_1 d\theta + \frac{1}{r_1} \int_0^{2\pi} \mu \sum_{k=1}^{\infty} k \left(\frac{r_1}{r_2} \right)^k \cos k(\theta - \varphi) d\theta = \frac{1}{2\pi c_1 r_1} \sum_{l=1}^l Q_l \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{r_1 \rho_l}{R^2} \right)^k \cos k(\varphi - \alpha_l). \quad (2.9)$$

Здесь ядро во втором интеграле и правая часть уравнения разложены в равномерно сходящиеся тригонометрические ряды.

Условие (1.11) на контуре питания для нашего случая записывается в следующей форме:

$$\pi \mu - \int_0^{2\pi} \mu \left[\frac{\partial}{\partial r_2} \ln \frac{1}{\sqrt{r^2 - 2rr_2 \cos(\varphi - \theta) + r_2^2}} \right]_{r=r_2} \cdot r_2 d\theta + \int_0^{2\pi} \rho_1 \left[\ln \frac{1}{\sqrt{r^2 - 2rr_1 \cos(\varphi - \theta) + r_1^2}} \right]_{r=r_1} \cdot r_1 d\theta = p_n - \frac{1}{2\pi c_1} \sum_{l=1}^l Q_l \left[\ln \frac{1}{\sqrt{r^2 - 2r\rho_l \cos(\varphi - \alpha_l) + \rho_l^2}} \right]_{r=r_2} + \frac{m}{2\pi} \left(\frac{1}{c_1} - \frac{1}{c_2} \right) \frac{dR}{dt} \int_0^{2\pi} \left[\ln \frac{1}{\sqrt{R^2 - 2Rr \cos(\varphi - \theta) + R^2}} \right]_{r=R} R d\theta. \quad (2.10)$$

После вычисления интегралов и разложения в равномерно сходящиеся тригонометрические ряды соотношение (2.10) принимает вид:

$$\begin{aligned} \pi\mu + \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \mu d\theta + r_1 \int_0^{2\pi} \rho_1 \left[-\ln r_2 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} \left(\frac{r_1}{r_2}\right)^k \cos k(\varphi - \theta) \right] d\theta = p_n - \\ - \left(\frac{1}{c_1} - \frac{1}{c_2}\right) mR \frac{dR}{dr} \ln r_2 - \frac{1}{2\pi c_1} \sum_{i=1}^l Q_i \left[-\ln r_2 + \right. \\ \left. + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} \left(\frac{\rho_i}{r_2}\right)^k \cos k(\varphi - \alpha_i) \right]. \end{aligned} \quad (2.11)$$

3. Найдем функции $\rho_1(\varphi, t)$ и $\mu(\varphi, t)$ из системы интегральных уравнений 2-го рода (2.9) и (2.11). Предполагая ρ_1 и μ представимыми равномерно сходящимися рядами Фурье по углу φ , будем отыскивать их в виде

$$\rho_1 = a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos k\varphi + b_k \sin k\varphi); \quad (2.12)$$

$$\mu = A_0 + \sum_{k=1}^{\infty} (A_k \cos k\varphi + B_k \sin k\varphi). \quad (2.13)$$

Здесь коэффициенты — функции времени.

Подставим разложения (2.12) и (2.13) в уравнение (2.9) и проинтегрируем ряды почленно. Получим

$$\begin{aligned} \pi \sum_{k=1}^{\infty} \left\{ \left[a_k + \frac{k}{r_1} \left(\frac{r_1}{r_2}\right)^k A_k \right] \cos k\varphi + \left[b_k + \frac{k}{r_1} \left(\frac{r_1}{r_2}\right)^k B_k \right] \sin k\varphi \right\} = \\ = \frac{1}{2\pi c_1 r_1} \sum_{k=1}^{\infty} \left[\sum_{i=1}^l Q_i \left(\frac{r_1 \rho_i}{R^2}\right)^k \cos k\alpha_i \cos k\varphi + \sum_{i=1}^l Q_i \left(\frac{r_1 \rho_i}{R^2}\right)^k \sin k\alpha_i \sin k\varphi \right]. \end{aligned}$$

Приравняв коэффициенты при $\cos k\varphi$ и $\sin k\varphi$ в обеих частях, приходим к системе уравнений:

$$a_k + \frac{k}{r_1} \left(\frac{r_1}{r_2}\right)^k A_k = \frac{1}{2\pi^2 c_1 r_1} \sum_{i=1}^l Q_i \left(\frac{r_1 \rho_i}{R^2}\right)^k \cos k\alpha_i; \quad (2.14)$$

$$b_k + \frac{k}{r_1} \left(\frac{r_1}{r_2}\right)^k B_k = \frac{1}{2\pi^2 c_1 r_1} \sum_{i=1}^l Q_i \left(\frac{r_1 \rho_i}{R^2}\right)^k \sin k\alpha_i. \quad (2.15)$$

($k = 1, 2, \dots$)

Подставляя ряды (2.12) и (2.13) в уравнение (2.11) и проделывая необходимые преобразования, получаем

$$2\pi(A_0 - r_1 \ln r_2 a_0) + \pi \sum_{k=1}^{\infty} \left\{ \left[A_k + \frac{r_1}{k} \left(\frac{r_1}{r_2}\right)^k a_k \right] \cos k\varphi + \right.$$

$$\begin{aligned} \left. + \left[B_k + \frac{r_1}{k} \left(\frac{r_1}{r_2}\right)^k b_k \right] \sin k\varphi \right\} = p_n - \left(\frac{1}{c_1} - \frac{1}{c_2}\right) mR \frac{dR}{dt} \ln r_2 + \\ + \frac{1}{2\pi c_1} \ln r_2 \sum_{i=1}^l Q_i - \frac{1}{2\pi c_1} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} \left[\sum_{i=1}^l Q_i \left(\frac{\rho_i}{r_2}\right)^k \cos k\alpha_i \cos k\varphi + \right. \\ \left. + \sum_{i=1}^l Q_i \left(\frac{\rho_i}{r_2}\right)^k \sin k\alpha_i \sin k\varphi \right]. \end{aligned}$$

Используем соотношение (2.6) и приравняем соответствующие коэффициенты рядов в обеих частях. Тогда имеем

$$A_0 - r_1 \ln r_2 \cdot a_0 = \frac{p_n}{2\pi} - \frac{mR}{2\pi c_2} \frac{dR}{dt} \ln r_2; \quad (2.16)$$

$$A_k + \frac{r_1}{k} \left(\frac{r_1}{r_2}\right)^k a_k = -\frac{1}{2\pi^2 c_1 k} \sum_{i=1}^l Q_i \left(\frac{\rho_i}{r_2}\right)^k \cos k\alpha_i; \quad (2.17)$$

$$B_k + \frac{r_1}{k} \left(\frac{r_1}{r_2}\right)^k b_k = -\frac{1}{2\pi^2 c_1 k} \sum_{i=1}^l Q_i \left(\frac{\rho_i}{r_2}\right)^k \sin k\alpha_i. \quad (2.18)$$

Возьмем уравнения (2.14) и (2.17) для одного значения k . Из них определяются коэффициенты a_k и A_k :

$$a_k = \frac{1}{2\pi^2 c_1 r_1} \sum_{i=1}^l Q_i \left(\frac{r_1 \rho_i}{R^2}\right)^k \frac{1 + \left(\frac{R}{r_2}\right)^{2k}}{1 - \left(\frac{r_1}{r_2}\right)^{2k}} \cos k\alpha_i; \quad (2.19)$$

$$A_k = -\frac{1}{2\pi^2 c_1 k} \sum_{i=1}^l Q_i \left(\frac{r_1 \rho_i}{R^2 r_2}\right)^k \frac{1 + \left(\frac{R}{r_1}\right)^{2k}}{1 - \left(\frac{r_1}{r_2}\right)^{2k}} \cos k\alpha_i. \quad (2.20)$$

Из уравнений (2.15) и (2.18) определяются b_k и B_k :

$$b_k = \frac{1}{2\pi^2 c_1 r_1} \sum_{i=1}^l Q_i \left(\frac{r_1 \rho_i}{R^2}\right)^k \frac{1 + \left(\frac{R}{r_2}\right)^{2k}}{1 - \left(\frac{r_1}{r_2}\right)^{2k}} \sin k\alpha_i; \quad (2.21)$$

$$B_k = -\frac{1}{2\pi^2 c_1 k} \sum_{i=1}^l Q_i \left(\frac{r_1 \rho_i}{R^2 r_2}\right)^k \frac{1 + \left(\frac{R}{r_1}\right)^{2k}}{1 - \left(\frac{r_1}{r_2}\right)^{2k}} \sin k\alpha_i. \quad (2.22)$$

Коэффициенты a_0 и A_0 связаны лишь одним соотношением (2.16). Поэтому один из них может быть выбран произвольной функцией времени. Оставляя свободным a_0 , найдем

$$A_0 = \frac{p_n}{2\pi} - \frac{mR}{2\pi c_2} \frac{dR}{dt} \ln r_2 + r_1 \ln r_2 \cdot a_0. \quad (2.16a)$$

Подставляя полученные выражения для коэффициентов (2.19) — (2.22), (2.16а) в ряды (2.12) и (2.13) и меняя порядок суммирования, имеем:

$$p_1(\varphi, t) = a_0(t) + \frac{1}{2\pi^2 c_1 r_1} \sum_{i=1}^l Q_i \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{r_1 \rho_i}{R^2}\right)^k \frac{1 + \left(\frac{R}{r_2}\right)^{2k}}{1 - \left(\frac{r_1}{r_2}\right)^{2k}} \cos k(\varphi - \alpha_i); \quad (2.23)$$

$$\mu = r_1 \ln r_2 \cdot a_0 + \frac{\rho_n}{2\pi} - \frac{mR}{2\pi c_2} \frac{dR}{dt} \ln r_2 -$$

$$- \frac{1}{2\pi^2 c_1} \sum_{i=1}^l Q_i \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} \left(\frac{r_1^2 \rho_i}{R^2 r_2}\right)^k \frac{1 + \left(\frac{R}{r_1}\right)^{2k}}{1 - \left(\frac{r_1}{r_2}\right)^{2k}} \cos k(\varphi - \alpha_i). \quad (2.24)$$

4. Докажем равномерную сходимость рядов, входящих в формулы (2.23) и (2.24). По признаку Вейерштрасса ряд при Q_i в выражении для p_1 (2.23)

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{r_1 \rho_i}{R^2}\right)^k \frac{1 + \left(\frac{R}{r_2}\right)^{2k}}{1 - \left(\frac{r_1}{r_2}\right)^{2k}} \cos k(\varphi - \alpha_i) \quad (2.25)$$

сходится равномерно, если сходится мажорантный числовой ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} d_k = \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{r_1 \rho_i}{R^2}\right)^k \frac{1 + \left(\frac{R}{r_2}\right)^{2k}}{1 - \left(\frac{r_1}{r_2}\right)^{2k}}. \quad (2.26)$$

Применим к ряду (2.26) признак Даламбера, принимая во внимание условие (2.3).

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{d_{k+1}}{d_k} = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{r_1 \rho_i}{R^2} \frac{1 + \left(\frac{R}{r_2}\right)^{2(k+1)}}{1 + \left(\frac{R}{r_2}\right)^{2k}} \cdot \frac{1 - \left(\frac{r_1}{r_2}\right)^{2k}}{1 - \left(\frac{r_1}{r_2}\right)^{2(k+1)}} = \frac{r_1 \rho_i}{R^2} < 1. \quad (2.27)$$

Следовательно, ряд (2.26) сходится. Поэтому ряд (2.25) сходится равномерно, пока выполняется условие $r_1 < \frac{R^2}{\rho_i}$, то есть пока функция p_2 , полученная из решения задачи Коши, регулярна в кольце между R и r_1 . Ряд при Q_i в выражении для μ (2.24)

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} \left(\frac{r_1^2 \rho_i}{R^2 r_2}\right)^k \frac{1 + \left(\frac{R}{r_1}\right)^{2k}}{1 - \left(\frac{r_1}{r_2}\right)^{2k}} \cos k(\varphi - \alpha_i) \quad (2.28)$$

сходится равномерно, если сходится мажорантный числовой ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} e_k = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} \left(\frac{r_1^2 \rho_i}{R^2 r_2}\right)^k \frac{1 + \left(\frac{R}{r_1}\right)^{2k}}{1 - \left(\frac{r_1}{r_2}\right)^{2k}}. \quad (2.29)$$

Снова применим признак Даламбера.

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{e_{k+1}}{e_k} = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{k}{k+1} \frac{r_1^2 \rho_i}{R^2 r_2} \cdot \frac{1 + \left(\frac{R}{r_1}\right)^{2(k+1)}}{1 + \left(\frac{R}{r_1}\right)^{2k}} \cdot \frac{1 - \left(\frac{r_1}{r_2}\right)^{2k}}{1 - \left(\frac{r_1}{r_2}\right)^{2(k+1)}} = \quad (2.30)$$

$$= \frac{r_1^2 \rho_i}{R^2 r_2} = \frac{r_1}{r_2} \cdot \frac{r_1 \rho_i}{R^2} < 1.$$

Поэтому ряд (2.29) сходится, а следовательно, сходится равномерно и ряд (2.28), пока $r_1 < R \sqrt{\frac{r_2}{\rho_i}}$. Сравнивая соотношения (2.27) и (2.30), видим, что из (2.27) следует (2.30), так как $\frac{r_1}{r_2} < 1$.

Итак, p_1 и μ выражаются равномерно сходящимися рядами Фурье, если $r_1 < \frac{R^2}{\rho_i}$, и тем доказана справедливость представлений (2.12), (2.13).

5. Объемный расход воды на единицу длины галереи определим по формуле (1.12), пользуясь (2.23).

$$q(\varphi, t) = -2\pi c_2 p_1 = -2\pi c_2 a_0(t) - \quad (2.31)$$

$$- \frac{1}{\pi r_1} \frac{c_2}{c_1} \sum_{i=1}^l Q_i \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{r_1 \rho_i}{R^2}\right)^k \frac{1 + \left(\frac{R}{r_2}\right)^{2k}}{1 - \left(\frac{r_1}{r_2}\right)^{2k}} \cos k(\varphi - \alpha_i).$$

Произвольную функцию времени $a_0(t)$ целесообразно выбрать так, чтобы $q(\varphi, t)$ было неотрицательной функцией для любого φ ($0 \leq \varphi < 2\pi$) во все время движения. Тогда необходимо будет лишь нагнетать воду в пласт, но не выкачивать ее на поверхность.

6. Рассмотрим ту же задачу для неограниченного пласта.

Тогда условие на контуре питания отпадает (см. § 1 п. 6). Уравнение (1.13) для определения плотности p_1 приобретает вид:

$$\pi p_1 + \int_0^{2\pi} p_1 \left[\frac{\partial}{\partial r} \ln \frac{1}{\sqrt{r^2 - 2rr_1 \cos(\theta - \varphi) + r_1^2}} \right]_{r=r_1} \cdot r_1 d\theta =$$

$$= -\frac{1}{2\pi c_1} \sum_{i=1}^l Q_i \cdot \left[\frac{\partial}{\partial r} \ln \frac{1}{\sqrt{r^2 - 2r\rho_i \cos(\theta - \varphi) + \rho_i^2}} \right]_{r=r_1} + \quad (2.32)$$

$$+ \frac{m}{2\pi} \left(\frac{1}{c_1} - \frac{1}{c_2} \right) \frac{dR}{dt} \int_0^{2\pi} \left[\frac{\partial}{\partial r} \ln \frac{1}{\sqrt{r^2 - 2rR \cos(\theta - \varphi) + R^2}} \right]_{r=r_1} \cdot R d\theta - f(r, \varphi, t).$$

Функция $f(r, \varphi, t)$, которую берем из решения задачи Коши, остается прежней [см. формулу (2.8)]. После некоторых преобразований уравнение (2.32) можно записать в иной форме:

$$\pi p_1 - \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} p_1 d\theta = \frac{1}{2\pi c_1 r_1} \sum_{i=1}^l Q_i \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{r_1 \rho_i}{R^2}\right)^k \cos k(\varphi - \alpha_i). \quad (2.33)$$

Отыскивая функцию p_1 в виде ряда Фурье (2.12), получим из (2.33):

$$\pi \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos k\varphi + b_k \sin k\varphi) = \frac{1}{2\pi c_1 r_1} \sum_{k=1}^{\infty} \left[\sum_{i=1}^l Q_i \left(\frac{r_1 \rho_i}{R^2} \right)^k \cos k\alpha_i \cos k\varphi + \sum_{i=1}^l Q_i \left(\frac{r_1 \rho_i}{R^2} \right)^k \sin k\alpha_i \sin k\varphi \right].$$

Приравнявая коэффициенты при $\cos k\varphi$ и $\sin k\varphi$ в обеих частях, находим

$$a_k = \frac{1}{2\pi^2 c_1 r_1} \sum_{i=1}^l Q_i \left(\frac{r_1 \rho_i}{R^2} \right)^k \cos k\alpha_i, \quad (2.34)$$

$$b_k = \frac{1}{2\pi^2 c_1 r_1} \sum_{i=1}^l Q_i \left(\frac{r_1 \rho_i}{R^2} \right)^k \sin k\alpha_i. \quad (2.35)$$

Коэффициент a_0 остается неопределенным. Итак, p_1 выражается рядом Фурье:

$$p_1(\varphi, t) = a_0(t) + \frac{1}{2\pi^2 c_1 r_1} \sum_{i=1}^l Q_i \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{r_1 \rho_i}{R^2} \right)^k \cos k(\varphi - \alpha_i). \quad (2.36)$$

Выражение (2.36) легко получить из формулы (2.23), если положить в ней $r_2 \rightarrow \infty$.

Равномерную сходимость ряда (2.36) можно показать точно так же, как в предыдущем пункте. Эта сходимость имеет место, пока $r_1 < \frac{R^2}{\rho_i}$.

Отметим, что пользуясь соотношением

$$\sum_{k=1}^{\infty} h^k \cos kx = -h \frac{h - \cos x}{1 - 2h \cos x + h^2}, \quad |h| < 1,$$

бесконечные ряды в (2.36) можно просуммировать:

$$p_1 = a_0(t) - \frac{1}{2\pi^2 c_1} \sum_{i=1}^l Q_i \frac{\rho_i}{R^2} \cdot \frac{r_1 \rho_i - R^2 \cos(\varphi - \alpha_i)}{R^2 - 2r_1 \rho_i \cos(\varphi - \alpha_i) + \left(\frac{r_1 \rho_i}{R} \right)^2}. \quad (2.37)$$

Объемная закачка воды на единицу длины нагнетательной галереи Γ_{II} равна

$$q = -2\pi c_2 a_0(t) - \frac{1}{\pi r_1} \frac{c_2}{c_1} \sum_{i=1}^l Q_i \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{r_1 \rho_i}{R^2} \right)^k \cos k(\varphi - \alpha_i) = -2\pi c_2 a_0(t) + \frac{1}{\pi R^2} \frac{c_2}{c_1} \sum_{i=1}^l Q_i \rho_i \frac{r_1 \rho_i - R^2 \cos(\varphi - \alpha_i)}{R^2 - 2r_1 \rho_i \cos(\varphi - \alpha_i) + \left(\frac{r_1 \rho_i}{R} \right)^2}. \quad (2.38)$$

О выборе a_0 см. § 2 п. 5.

1. Салехов Г. С. Прямые и обратные задачи о продвижении водонефтяного контакта. Известия Казанского филиала АН СССР, серия физ.-мат. и технич. наук, вып. 5, 1954.

2. Данилов В. Л. К задаче определения поля давления при заданном законе стягивания контура нефтеносности. Известия Казанского филиала АН СССР, серия физ.-мат. и технич. наук, вып. 6, 1955.

Поступило
20 декабря 1954 г.

Физико-технический ин-т
Казанского филиала АН СССР.

В. Д. ЧУГУНОВ

ОБ ОДНОЙ ЗАДАЧЕ УПРАВЛЕНИЯ КОНТУРОМ НЕФТЕНОСНОСТИ

В статье рассмотрено приложение общего метода управления движением контура нефтеносности [1] к решению одной частной задачи.

1. В круговом однородном пласте постоянной мощности h разбурены три круговые концентрически расположенные батареи скважин, из которых первые две находятся в нефтяной, а третья — в водной зонах пласта. Число скважин в батареях равно соответственно: $n, 2n, n$. Вязкости воды и нефти равны. Первоначальное положение контура нефтеносности (КН) — окружность радиуса r_0 . Режим пласта водонапорный.

Требуется так разместить и эксплуатировать скважины, чтобы первоначальный КН Γ_0 за время T стянулся к наперед заданному контуру Γ_1 (окружность радиуса r_1) по желаемому нами закону

$$r^2 = r_0^2 - \lambda(t)(r_0^2 - r_1^2),$$

где $\lambda(t)$ — монотонно возрастающая функция, причем $\lambda(0) = 0, \lambda(T) = 1, T$ — время эксплуатации (рис. 1).

Введем следующие обозначения: ρ_1, ρ_2, ρ_3 — радиусы первой, второй и третьей батарей, при этом

$$\rho_3 > \rho_2 > \rho_1 > 0.$$

$\varphi_{1,i}, \varphi_{2,i}, \varphi_{3,i}$ — полярные углы скважин,

$$\varphi_{1,i} = \frac{2\pi}{n}(i-1) + \alpha_1, \quad (i=1, 2, \dots, n)$$

$$\varphi_{2,i} = \frac{\pi}{n}(i-1) + \alpha_2, \quad (i=1, 2, \dots, 2n)$$

$$\varphi_{3,i} = \frac{2\pi}{n}(i-1) + \alpha_3, \quad (i=1, 2, \dots, n)$$

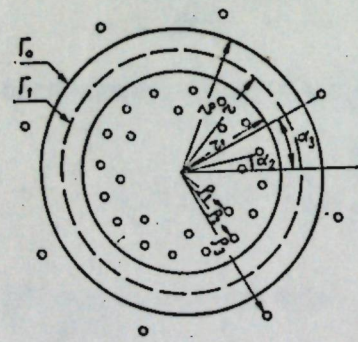


Рис. 1.

тем самым предполагая, что скважины в батареях находятся на равных расстояниях друг от друга.

$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ — начальные углы отсчета. Не ограничивая общности, можно считать $\alpha_1 = 0$.

R — радиус контура питания.

$q_{1,i}, q_{2,i}, q_{3,i}$ — объемные дебиты скважин соответственно первой, второй и третьей батареей.

2. В силу симметричности расположения скважин в батареях и принятого закона стягивания КН $r^2 = r_0^2 - \lambda(t)(r_0^2 - r_1^2)$, будем иметь

$$q_{1,1} = q_{1,2} = \dots = q_{1,n} = q_1,$$

$$q_{2,1} = q_{2,2} = \dots = q_{2,2n} = q_2,$$

$$q_{3,1} = q_{3,2} = \dots = q_{3,n} = q_3.$$

Для определения неизвестных q_1, q_2, q_3 получим следующую систему уравнений [1]:

$$q_1 + 2q_2 = -\frac{\lambda'(t)v_0}{n},$$

$$q_1 \left(\frac{\rho_1^k}{r^k} + \frac{\rho_1^k r^k}{R^{2k}} \right) \sum_{i=1}^n \cos \frac{2\pi k}{n}(i-1) + q_2 \left(\frac{\rho_2^k}{r^k} + \frac{\rho_2^k r^k}{R^{2k}} \right) \sum_{i=1}^n \left\{ \cos \left[\frac{2\pi k}{n}(i-1) + k\alpha_2 \right] + \cos \left[\frac{2\pi k}{n}(i-1) + \frac{\pi}{n} + k\alpha_2 \right] \right\} + q_3 \left(\frac{\rho_3^k r^k}{R^{2k}} - \frac{r^k}{\rho_3^k} \right) \sum_{i=1}^n \cos \left[\frac{2\pi k}{n}(i-1) + k\alpha_3 \right] = 0, \quad (1.1)$$

$$q_1 \left(\frac{\rho_1^k}{r^k} + \frac{\rho_1^k r^k}{R^{2k}} \right) \sum_{i=1}^n \sin \frac{2\pi k}{n}(i-1) +$$

$$+ q_2 \left(\frac{\rho_2^k}{r^k} + \frac{\rho_2^k r^k}{R^{2k}} \right) \sum_{i=1}^n \left\{ \sin \left[\frac{2\pi k}{n}(i-1) + k\alpha_2 \right] + \sin \left[\frac{2\pi k}{n}(i-1) + \frac{\pi}{n} + k\alpha_2 \right] \right\} +$$

$$+ q_3 \left(\frac{\rho_3^k r^k}{R^{2k}} - \frac{r^k}{\rho_3^k} \right) \sum_{i=1}^n \sin \left[\frac{2\pi k}{n}(i-1) + k\alpha_3 \right] = 0.$$

$$k = 1, 2, 3, \dots$$

Выполнив суммирование в системе (1.1), получим

$$q_1 + 2q_2 = -\frac{\lambda'(t)v_0}{n},$$

$$q_1 \left(\frac{\rho_1^n}{r^n} + \frac{\rho_1^n r^n}{R^{2n}} \right) + q_3 \left(\frac{\rho_3^n r^n}{R^{2n}} - \frac{r^n}{\rho_3^n} \right) \cos n\alpha_3 = 0,$$

$$q_3 \left(\frac{\rho_3^n r^n}{R^{2n}} - \frac{r^n}{\rho_3^n} \right) \sin n\alpha_3 = 0, \quad (1.2)$$

$$q_1 \left(\frac{\rho_1^{2n}}{r^{2n}} + \frac{\rho_1^{2n} r^{2n}}{R^{4n}} \right) + 2q_2 \left(\frac{\rho_2^{2n}}{r^{2n}} + \frac{\rho_2^{2n} r^{2n}}{R^{4n}} \right) \cos 2n\alpha_2 +$$

$$+ q_3 \left(\frac{\rho_3^{2n} r^{2n}}{R^{4n}} - \frac{r^{2n}}{\rho_3^{2n}} \right) \cos 2n\alpha_3 = 0,$$

$$2q_2 \left(\frac{\rho_2^{2n}}{r^{2n}} + \frac{\rho_2^{2n} r^{2n}}{R^{4n}} \right) \sin 2n\alpha_2 + q_3 \left(\frac{\rho_3^{2n} r^{2n}}{R^{4n}} - \frac{r^{2n}}{\rho_3^{2n}} \right) \sin 2n\alpha_3 = 0.$$

Найдем α_2 и α_3 так, чтобы удовлетворялось условие знакоопределенности дебитов, т. е. дебиты скважин в нефтяной зоне q_1, q_2 были отрицательными (стоки), а дебиты скважин в водной зоне q_3 — положительными (источники).

Из третьего уравнения системы (1.2) следует, что

$$\sin n\alpha_3 = 0, \text{ откуда } \alpha_3 = 0 \text{ или } \alpha_3 = \frac{\pi}{n}.$$

Заметим, что $\frac{\rho_3^n r^n}{R^{2n}} - \frac{r^n}{\rho_3^n} < 0$. Решение $\alpha_3 = 0$, как видно из второго уравнения, противоречит условию знакоопределенности дебитов, следовательно $\alpha_3 = \frac{\pi}{n}$, после чего из пятого уравнения системы (1.2) вытекает, что

$$\sin 2n\alpha_2 = 0,$$

т. е.

$$\alpha_2 = 0, \alpha_2 = \frac{\pi}{n}, \alpha_2 = \frac{2\pi}{n}, \alpha_2 = \frac{\pi}{2n}.$$

Однако первые три решения уравнения $\sin 2n\alpha_2 = 0$ противоречат четвертому уравнению системы (1.2).

Таким образом,

$$\alpha_2 = \frac{\pi}{2n}, \alpha_3 = \frac{\pi}{n}.$$

Окончательно систему (1.2) перепишем в виде

$$\begin{aligned} q_1 + 2q_2 &= -\frac{\lambda'(t)v_0}{n}, \\ q_1 \left(\frac{\rho_1^n}{r^n} + \frac{\rho_1^n r^n}{R^{2n}} \right) - q_3 \left(\frac{\rho_3^n r^n}{R^{2n}} - \frac{r^n}{\rho_3^n} \right) &= 0, \\ q_1 \left(\frac{\rho_1^{2n}}{r^{2n}} + \frac{\rho_1^{2n} r^{2n}}{R^{4n}} \right) - 2q_2 \left(\frac{\rho_2^{2n}}{r^{2n}} + \frac{\rho_2^{2n} r^{2n}}{R^{4n}} \right) + q_3 \left(\frac{\rho_3^{2n} r^{2n}}{R^{4n}} - \frac{r^{2n}}{\rho_3^{2n}} \right) &= 0, \end{aligned}$$

откуда определяются дебиты q_1, q_2, q_3 .
Если R достаточно велико, то

$$\begin{aligned} q_1 &= -\frac{\lambda'(t)v_0}{n} \cdot \frac{\left(\frac{\rho_2}{r}\right)^{2n}}{\left[\left(\frac{\rho_2}{r}\right)^{2n} + \left(\frac{\rho_1}{r}\right)^{2n} + \left(\frac{\rho_1}{\rho_3}\right)^n\right]}, \\ q_2 &= -\frac{\lambda'(t)v_0}{2n} \left[1 - \frac{\left(\frac{\rho_2}{r}\right)^{2n}}{\left(\frac{\rho_1}{r}\right)^{2n} + \left(\frac{\rho_2}{r}\right)^{2n} + \left(\frac{\rho_1}{\rho_3}\right)^n} \right], \\ q_3 &= \frac{\lambda'(t)v_0}{n} \cdot \frac{\left(\frac{\rho_1}{r}\right)^n \left(\frac{\rho_2}{r}\right)^{2n} \left(\frac{\rho_3}{r}\right)^n}{\left(\frac{\rho_1}{r}\right)^{2n} + \left(\frac{\rho_2}{r}\right)^{2n} + \left(\frac{\rho_1}{\rho_3}\right)^n}. \end{aligned}$$

Пример. Найти безразмерные дебиты \tilde{q}_i эксплуатационных и нагнетательных скважин в батареях, если задан закон перемещения КН

$$r^2 = r_0^2 - \frac{t}{T} (r_0^2 - r_1^2).$$

Кроме того известно, что

$$\rho_1 = 0,9\rho_2, \rho_3 = 1,4\rho_2, r_0 = 1,35\rho_2, r_1 = 1,05\rho_2, R = \infty,$$

Число скважин в первой, второй и третьей батареях соответственно равно 8, 16, 8,

$$\tilde{t} = \frac{t}{T}, \tilde{q}_i = \frac{nq_i}{\lambda'(t)v_0}, i = 1, 2, 3, v_0 = m\pi h(r_0^2 - r_1^2), n = 8.$$

Результаты вычислений сведены в таблицу.

$\tilde{t}_0 = 0,$	$\tilde{q}_1 = 0,2112,$	$\tilde{q}_2 = 0,3944,$	$\tilde{q}_3 = 0,0131,$
$\tilde{t}_1 = 0,1840,$	$\tilde{q}_1 = 0,3199,$	$\tilde{q}_2 = 0,3401,$	$\tilde{q}_3 = 0,0306,$
$\tilde{t}_2 = 0,3611,$	$\tilde{q}_1 = 0,4502,$	$\tilde{q}_2 = 0,2749,$	$\tilde{q}_3 = 0,0805,$
$\tilde{t}_3 = 0,5313,$	$\tilde{q}_1 = 0,5876,$	$\tilde{q}_2 = 0,2062,$	$\tilde{q}_3 = 0,2019,$
$\tilde{t}_4 = 0,6944,$	$\tilde{q}_1 = 0,6858,$	$\tilde{q}_2 = 0,1572,$	$\tilde{q}_3 = 0,4667,$
$\tilde{t}_5 = 0,8507,$	$\tilde{q}_1 = 0,7586,$	$\tilde{q}_2 = 0,1207,$	$\tilde{q}_3 = 1,0485,$
$\tilde{t}_6 = 1.$	$\tilde{q}_1 = 0,8006,$	$\tilde{q}_2 = 0,0997.$	$\tilde{q}_3 = 2,3306.$

Из таблицы видно, что в начальный период эксплуатации дебит q_2 больше, чем q_1 . При перемещении КН дебиты эксплуатационных скважин второй батареи уменьшаются, а первой — увеличиваются.

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

1. Салехов Г. С. Постановка и методы решения гидродинамических задач управления движением контура нефтеносности. Известия Казанского филиала АН СССР, серия физ.-мат. и техн. наук, вып. 6, 1955.

Поступило
20 декабря 1954 г.

Физико-технический ин-т
Казанского филиала АН СССР

Н. Ф. ИВАНОВ

ГРАФОАНАЛИТИЧЕСКИЙ МЕТОД ПРОСЛЕЖИВАНИЯ КОНТУРА НЕФТЕНОСНОСТИ

В работе дан графоаналитический метод построения линий тока и изобар в случае любого числа скважин, расположенных в однородном пласте при водонапорном режиме. Предлагаются два способа построения синхронных контуров, дающих решение задачи о прослеживании контура нефтеносности.

Введение

При эксплуатации нефтяного месторождения большое значение имеет знание закона перемещения контура нефтеносности (КН) в процессе разработки. Этим вопросом занимались Л. С. Лейбензон, П. Я. Полубаринова-Кочина, И. А. Чарный, В. Н. Щелкачев, Н. С. Пискунов, М. Маскет и многие другие.

В настоящей работе дается графоаналитический метод решения упомянутой задачи в случае однородного изотропного горизонтального неограниченно простирающегося пласта постоянной мощности, заполненного несжимаемыми водой и нефтью с одинаковыми вязкостями $\mu_w = \mu_n = \mu$ и удельными весами $\gamma_w = \gamma_n = \gamma$ (вода и нефть — «разноцветные» жидкости).

Течение в таком пласте полностью определяется течением в некоторой плоскости, параллельной кровле и подошве пласта: поток будет двумерным (плоским).

§ 1. Постановка задачи

Однородный изотропный горизонтальный пласт постоянной мощности h с проницаемостью k , пористостью m насыщен водой и нефтью с одинаковыми удельными весами $\gamma_w = \gamma_n = \gamma$ и вязкостями $\mu_w = \mu_n = \mu$. Принимается, что жидкости в пласте разделены цилиндрической поверхностью, перпендикулярной кровле и подошве пласта. Направляющую этой поверхности обозначим через Γ и назовем ее контуром нефтеносности (КН). Пусть пласт разбурен и эксплуатируется n скважинами с объемными дебитами Q_j , ($j = 1, 2, \dots, n$); x_j, y_j — координаты скважин (линейных вертикальных стоков или источников). Требуется определить положение КН $f(x, y, t) = 0$ в любой момент времени. Дебиты Q_j могут зависеть от времени.

Решение задачи прослеживания КН, т. е. нахождения функции $f(x, y, t) = 0$, даже при таких идеализированных условиях встречает большие математические трудности, вследствие чего до настоящего времени известно лишь несколько ее точных частных решений, а именно: случай радиального течения, течения к двум скважинам с

одинаковыми по модулю дебитами в каждый момент времени и некоторые другие.

В настоящей работе придется часто пользоваться понятием синхронного контура, введенным В. П. Яковлевым [1], который понимал под ним кривые линии, обладающие тем свойством, что частицы жидкости, находившиеся на каждой из этих кривых, одновременно подходят к скважине.

Следуя Г. С. Салехову [2], контуры Γ_0 и Γ_1 будем называть синхронными, если частицы жидкости, лежащие на контуре Γ_0 , одновременно достигают контура Γ_1 (см. рис. 1).

Иными словами, если решена задача прослеживания, т. е. найдено уравнение КН $f(x, y, t) = 0$ в любой момент времени, то тем самым найдено семейство синхронных контуров $f(x, y, t) = 0$, где t — параметр.

При таком определении синхронного контура задача о прослеживании перемещения КН сводится к нахождению контуров, синхронных КН Γ_0 .

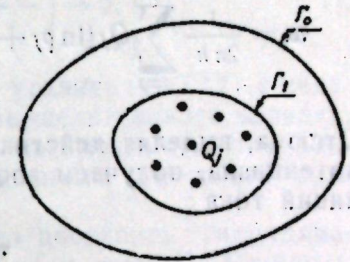


Рис. 1.

§ 2. Графоаналитический метод построения гидродинамической сетки

Для построения синхронных контуров нам понадобится спектр линий тока при условиях задачи, сформулированной в § 1, в предположении, что Q_j не зависят от времени t .

Уравнение семейства линий тока получается очень просто. Однако, то обстоятельство, что это уравнение имеет неявную форму и довольно громоздко, не позволяет непосредственно воспользоваться им для построения линий тока.

В настоящем параграфе дан графоаналитический метод построения линий тока по их уравнениям, записанным в неявном виде.

Известно, что комплексный потенциал в случае эксплуатации n скважин с дебитами Q_j (см. рис. 2) в неограниченном пласте записывается формулой

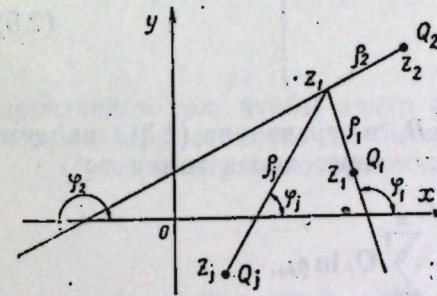


Рис. 2.

$$w = \frac{1}{2\pi h} \sum_{j=1}^n Q_j \ln(z - z_j), \quad (2.1)$$

где z_j — координата j -ой скважины, z — текущая координата точки плоскости.

Обозначим

$$\left. \begin{aligned} |z - z_j| &= \sqrt{(x - x_j)^2 + (y - y_j)^2} = \rho_j, \\ \arg(z - z_j) &= \arctg \frac{y - y_j}{x - x_j} = \varphi_j, \end{aligned} \right\} \quad (2.2)$$

где φ_j — угол между положительным направлением оси x и лучом, проведенным из точки z_j в точку z , отсчитываемый против часовой стрелки.

Имеем

$$z - z_j = \rho_j e^{i\varphi_j},$$

$$\ln(z - z_j) = \ln \rho_j + i\varphi_j.$$

Комплексный потенциал примет вид

$$w = \frac{1}{2\pi h} \sum_{j=1}^n Q_j (\ln \rho_j + i\varphi_j) = \frac{1}{2\pi h} \left[\sum_{j=1}^n Q_j \ln \rho_j + i \sum_{j=1}^n Q_j \varphi_j \right].$$

Отсюда, выделяя действительную и мнимую части комплексного потенциала, получаем соответственно уравнения семейств изобар и линий тока

$$\left. \begin{aligned} \sum_{j=1}^n Q_j \ln \rho_j &= A, \\ \sum_{j=1}^n Q_j \varphi_j &= B, \end{aligned} \right\} \quad (2.3)$$

где A и B — постоянные, которые находятся из требования, чтобы искомая изобара или линия тока проходила через заданную точку z_0 :

$$A = \sum_{j=1}^n Q_j \ln \rho_{j0}, \quad B = \sum_{j=1}^n Q_j \varphi_{j0}, \quad (2.4)$$

где

$$\left. \begin{aligned} \rho_{j0} &= \sqrt{(x_0 - x_j)^2 + (y_0 - y_j)^2}, \\ \varphi_{j0} &= \arctg \frac{y_0 - y_j}{x_0 - x_j}. \end{aligned} \right\} \quad (2.5)$$

Подставляя найденные значения A и B в уравнения (2.3), найдем уравнения изобары и линии тока, проходящих через точку z_0 :

$$\frac{1}{2\pi h} \sum_{j=1}^n Q_j \ln \rho_j = \frac{1}{2\pi h} \sum_{j=1}^n Q_j \ln \rho_{j0},$$

$$\frac{1}{2\pi h} \sum_{j=1}^n Q_j \varphi_j = \frac{1}{2\pi h} \sum_{j=1}^n Q_j \varphi_{j0}.$$

Окончательно

$$\left. \begin{aligned} \sum_{j=1}^n Q_j \ln \frac{\rho_j}{\rho_{j0}} &= 0, \\ \sum_{j=1}^n Q_j (\varphi_j - \varphi_{j0}) &= 0, \end{aligned} \right\} \quad (2.6)$$

или

$$\left. \begin{aligned} \sum_{j=1}^n Q_j \ln \frac{(x - x_j)^2 + (y - y_j)^2}{(x_0 - x_j)^2 + (y_0 - y_j)^2} &= 0, \\ \sum_{j=1}^n Q_j \left(\arctg \frac{y - y_j}{x - x_j} - \arctg \frac{y_0 - y_j}{x_0 - x_j} \right) &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (2.7)$$

Построение линий тока и изобар по их уравнениям (2.7) в неявном виде представляет большие трудности вычислительного порядка. С гораздо меньшей затратой труда можно построить гидродинамическую сетку, если воспользоваться выражениями для линий тока и изобар, представленными в форме (2.3).

Разобьем всю область, в которой нужно построить гидродинамическую сетку, на квадраты со стороной a (см. рис. 3). Разбивку

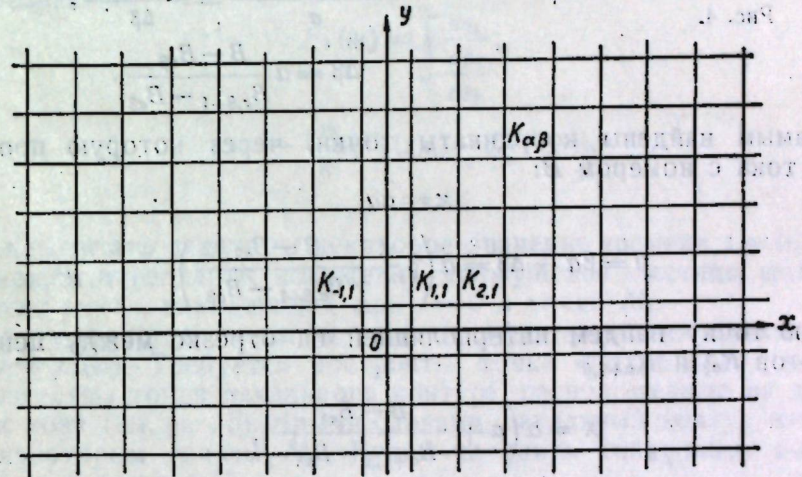


Рис. 3.

произведем так, чтобы центр одного квадрата совпадал с началом координат, а стороны его были параллельны осям ox и oy .

Пусть центр некоторого квадрата имеет координаты

$$x = \alpha a,$$

$$y = \beta a,$$

где α и β — целые числа. Обозначим этот квадрат через $K_{\alpha\beta}$.

Начало координат, очевидно, совпадает с центром квадрата K_{00} . Обозначим через $\rho_j^{(\alpha\beta)}$ расстояние от j -ой скважины до центра квадрата $K_{\alpha\beta}$, $\varphi_j^{(\alpha\beta)}$ — угол между положительным направлением оси ox и лучом, соединяющим j -ю скважину с центром $K_{\alpha\beta}$. Угол будем отсчитывать от положительного направления оси ox против часовой стрелки.

Найдем:

$$\sum_{j=1}^n Q_j \ln \rho_j^{(\alpha\beta)} = A_{\alpha\beta},$$

$$\sum_{j=1}^n Q_j \varphi_j^{(\alpha\beta)} = B_{\alpha\beta}.$$

Числа $A_{\alpha\beta}$ и $B_{\alpha\beta}$ показывают, что через центр квадрата $K_{\alpha\beta}$ проходит изобара с номером $A_{\alpha\beta}$ и линия тока с номером $B_{\alpha\beta}$. После того, как все клетки $K_{\alpha\beta}$ области заполнены числами $A_{\alpha\beta}$, $B_{\alpha\beta}$, легко построить изобары и линии тока.

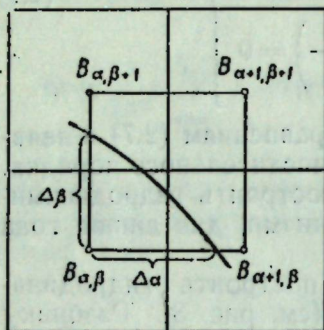


Рис. 4.

Пусть требуется построить линию тока, проходящую через заданную точку $M(x_0, y_0)$. Определяем по формулам (2.4) число B , затем выбираем среди $B_{\alpha\beta}$ числа близкие к B и линейной интерполяцией находим точку, через которую проходит искомая линия тока.

Например, пусть (см. рис. 4)

$$B_{\alpha\beta} < B < B_{\alpha, \beta+1}; \quad B_{\alpha\beta} < B < B_{\alpha+1, \beta}.$$

Составляем пропорцию

$$\frac{B_{\alpha, \beta+1} - B_{\alpha\beta}}{a} = \frac{B - B_{\alpha\beta}}{\Delta\beta},$$

$$\Delta\beta = a \frac{B - B_{\alpha\beta}}{B_{\alpha, \beta+1} - B_{\alpha\beta}}.$$

Тем самым найдены координаты точки, через которую проходит линия тока с номером B :

$$x = \alpha a,$$

$$y = \beta a + \Delta\beta = a \left(\beta + \frac{B - B_{\alpha\beta}}{B_{\alpha, \beta+1} - B_{\alpha\beta}} \right).$$

Другую точку найдем интерполяцией на отрезке между центрами квадратов $K_{\alpha\beta}$ и $K_{\alpha+1, \beta}$

$$x = a \left(\alpha + \frac{B - B_{\alpha\beta}}{B_{\alpha+1, \beta} - B_{\alpha\beta}} \right),$$

$$y = \beta a.$$

Очевидно, чем меньше сторона квадрата, тем точнее будет указанная интерполяция.

Соединив все найденные таким образом точки плавной кривой, получим линию тока, имеющую номер B и проходящую через заданную точку $M(x_0, y_0)$.

Изобары строятся точно так же. В конце статьи приведен пример построения линий тока. После того, как построены линии тока, можно построить и синхронные контуры.

§ 3. Первый способ построения синхронных контуров

Пусть в пласте, эксплуатирующемся n скважинами с постоянными дебитами Q_i , известна некоторая линия тока s_i и распределение давления на ней $p_i = p_i(s_i)$. Задана некоторая точка M_i на этой линии тока (см. рис. 5). В этом случае легко решить задачу о прослеживании перемещения частицы жидкости, лежащей в начальный момент времени в этой точке по линии тока.

Имеем

$$v_s = \frac{ds_i}{dt},$$

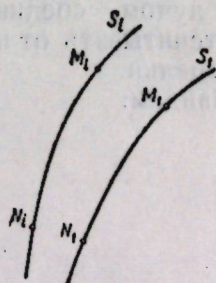


Рис. 5.

$$v_s = - \frac{k}{\mu m} \frac{dp_i}{ds_i};$$

откуда

$$dt = - \frac{\mu m}{k} \frac{ds_i}{\frac{dp_i}{ds_i}}, \quad (3.1)$$

где m — пористость.

Интегрируя уравнение (3.1), определим время, через которое частица жидкости придет из точки M_i в точку N_i :

$$\int_0^t dt = - \frac{\mu m}{k} \int_{s_{M_i}}^{s_{N_i}} \frac{ds_i}{\frac{dp_i}{ds_i}} = - \frac{\mu m}{k} F_1(s_i) \Big|_{s_{M_i}}^{s_{N_i}}, \quad (3.2)$$

где обозначено

$$F_1(s_i) = \int \frac{ds_i}{\frac{dp_i}{ds_i}};$$

$$t = - \frac{\mu m}{k} [F_1(s_{N_i}) - F_1(s_{M_i})]. \quad (3.3)$$

Если же считать заданным некоторое значение времени $t = t_1$, то из (3.3) можем определить положение движущейся частицы жидкости в момент $t = t_1$, находящейся при $t = 0$ в точке M_i .

Пусть известны n линий тока s_i и распределение давления на них $p_i = p_i(s_i)$. Требуется построить точки синхронного контура, если известны точки начального контура, расположенные на данных линиях тока (см. рис. 5). Иными словами, начальный контур известен по n некоторым точкам M_i . Будем находить синхронные контуры также по n точкам N_i .

Выберем некоторую линию тока s_i и зададимся на ней точкой N_i . Найдем на других линиях тока s_i точки N_i , синхронные точкам M_i , т. е. такие точки, которые частицы жидкости, находившиеся ранее в точках M_i , достигнут тогда, когда частица жидкости, лежавшая ранее в точке M_i , придет в точку N_i .

Уравнение (3.3) запишем так:

$$t_1 = - \frac{\mu m}{k} [F(s_{N_i}) - F(s_{M_i})].$$

Для линии тока s_i находим

$$t_1 = - \frac{k}{\mu} [F_1(s_{N_i}) - F_1(s_{M_i})].$$

Для синхронных точек $t_i = t_1$ ($i = 2, 3, \dots, n$).

Поэтому уравнения, дающие положения точек N_i , синхронных точкам M_i , запишутся в виде

$$F_1(s_{N_i}) = F_1(s_{M_i}) + F_1(s_{N_1}) - F_1(s_{M_1}) \quad (3.4)$$

$$(i = 2, 3, \dots, n).$$

Соединив точки N_i плавной кривой, будем иметь контур, синхронный контуру, полученному соединением плавной кривой точек M_i .

Нахождение уравнения линии тока и распределения давления на ней для построения синхронных контуров представляет большие трудности. Поэтому будем решать упомянутую задачу графоаналитическим методом, сущность которого заключается в графоаналитическом решении уравнения (3.4).

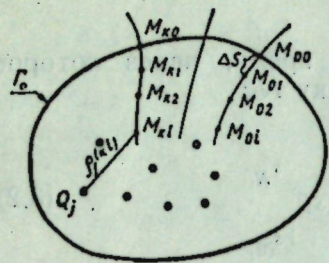


Рис. 6.

Строим методом, изложенным в предыдущем параграфе, линии тока, проходящие через точки M_i начального контура. Разбиваем каждую линию тока на дуги одинаковой длины Δs . На концах дуг будут лежать точки M_{ki} . Здесь первый индекс указывает номер линии тока, а второй — номер точки, лежащей на этой линии тока. Точка M_{k0} лежит на начальном контуре (см. рис. 6).

Для каждой точки находим число, пропорциональное давлению в этой точке, по формуле

$$A_{ki} = \sum Q_j \ln r_j^{(ki)},$$

где $r_j^{(ki)}$ — расстояние от j -й скважины до точки M_{ki} . Это расстояние берется непосредственно с чертежа.

Взяв достаточно малые дуги Δs , можно приближенно считать скорость на каждом участке Δs постоянной.

Тогда скорость на k -й линии тока между точками M_{ki} и $M_{k,i+1}$ согласно закону Дарси равна

$$v_{ki} = c_1 \frac{A_{k,i} - A_{k,i+1}}{\Delta s}, \quad (3.5)$$

где c_1 — некоторый коэффициент, одинаковый в случае однородного пласта для всех линий тока.

С другой стороны,

$$v_{ki} = \frac{\Delta s}{\Delta t_{ki}}. \quad (3.6)$$

Приравнявая (3.5) и (3.6), имеем

$$\frac{\Delta s}{\Delta t_{k,i}} = c_1 \frac{A_{k,i} - A_{k,i+1}}{\Delta s},$$

откуда

$$\Delta t_{ki} = \frac{(\Delta s)^2}{c_1 (A_{k,i} - A_{k,i+1})}.$$

Последнее выражение дает время, через которое частица жидкости придет из точки $M_{k,i}$ в $M_{k,i+1}$. Для того, чтобы определить время $T_{k,m}$, через которое частица жидкости придет из точки M_{k0} в M_{km} , необходимо взять сумму

$$T_{k,m} = \sum_{l=1}^m \Delta t_{k,l} = \sum_{l=1}^m \frac{(\Delta s)^2}{c_1 (A_{k,l-1} - A_{k,l})}. \quad (3.7)$$

Обозначим

$$\bar{T}_{k,m} = \sum_{l=1}^m \frac{1}{A_{k,l-1} - A_{k,l}}. \quad (3.8)$$

Тогда

$$\bar{T}_{k,m} = \frac{c_1}{(\Delta s)^2} T_{k,m}. \quad (3.9)$$

Определив \bar{T}_{km} для каждой точки M_{km} и соединив точки с одинаковыми \bar{T}_{km} плавной кривой, прибегая к линейной интерполяции на участках вдоль линий тока, получим контуры, синхронные начальному КН.

§ 4. Второй способ построения синхронных контуров

Изложенный в предыдущем параграфе способ построения синхронных контуров несмотря на свою простоту довольно трудоемок, так как определение чисел \bar{T}_{km} требует хотя и арифметических, но многих операций. Можно избежать этой утомительной процедуры вычисления \bar{T}_{km} , если воспользоваться одним свойством функции тока ψ . Известно, что расход q в струйке, ограниченной линиями тока, проходящими через точки K и L , равен

$$q = \psi_K - \psi_L.$$

Легко видеть, что ψ_K и ψ_L пропорциональны величинам B , подсчитанным по формуле (2.4) соответственно для точек K и L .

В силу вышесказанного можно утверждать, что расход упомянутой струйки пропорционален разности $B_K - B_L$, то-есть

$$q = c_2 (B_K - B_L),$$

где c_2 — некоторый коэффициент пропорциональности. Пусть известны n линий тока, задан начальный контур нефтеносности Γ_0 , известно также, что за время t_1 контур Γ_0 стянулся к контуру Γ_1 (см. рис. 7).

Очевидно, за время t_1 скважинами был извлечен объем жидкости, пропорциональный площади кольца, ограниченного контурами Γ_0 и Γ_1 . Точно так же для каждой струйки

$$(B_{j+1} - B_j) t = c_2 S_j, \quad (j=0, 1, 2, \dots, n-1), \quad (4.1)$$

где c_2 — некоторый коэффициент пропорциональности, S_j — площадь части струйки, ограниченной линиями тока с номерами B_j, B_{j+1} и дугами контуров Γ_0 и Γ_1 .

Из равенств (4.1) следует отношение

$$\frac{B_1 - B_0}{B_{j+1} - B_j} = \frac{S_0}{S_j} \quad (j=1, \dots, n-1). \quad (4.2)$$

Последним соотношением и воспользуемся при построении синхронных контуров.

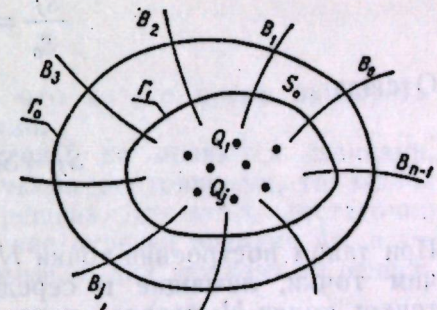


Рис. 7.

Пусть задан некоторый начальный контур Γ_0 и построены линии тока с номерами B_j , проходящие через точки M_j . Требуется построить синхронный контур, проходящий через некоторую заданную точку N , не лежащую на контуре Γ_0 (см. рис. 8).

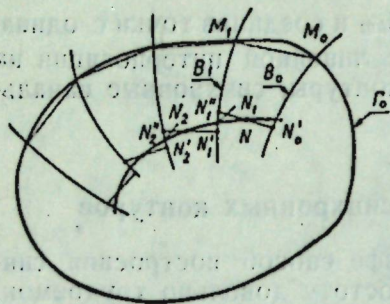


Рис. 8.

Сущность метода нахождения синхронного контура будет заключаться в подборе такого замкнутого контура Γ_1 , который отсекал бы от каждой струйки площади, удовлетворяющие отношениям (4.2).

Пусть точка N лежит в струйке, ограниченной линиями тока B_0 и B_1 . Соединим точки M_j контура Γ_0 ломаной, затем проведем через точку N прямую, параллельную хорде M_1M_0 . Эта прямая пересечет линии тока с номерами B_0, B_1 в точках N_0' и N_1' . Измерим планиметром площадь

криволинейного четырехугольника $M_0M_1N_1'N_0'$. Пусть она равна S_0 . После этого с помощью планиметра подыскиваем такие точки N_{j+1}' и N_j' , чтобы площади криволинейных четырехугольников $M_jM_{j+1}N_{j+1}'N_j'$, у которых стороны M_jM_{j+1} и $N_{j+1}'N_j'$ параллельны, удовлетворяли соотношению

$$\frac{\bar{S}_j}{\bar{S}_0} = \frac{B_{j+1} - B_j}{B_1 - B_0} \quad (4.3)$$

Отсюда

$$\bar{S}_j = \bar{S}_0 \frac{B_{j+1} - B_j}{B_1 - B_0} \quad (4.4)$$

При таком построении точки N_j' и N_{j+1}' не будут совпадать. Обозначим точки, лежащие в середине дуг $N_j'N_{j+1}'$, через N_j . Соединив теперь точки N_j плавной кривой, получим приближенно синхронный контур, проходящий через точку N . Точность такого построения синхронного контура будет тем выше, чем точнее и гуще построены линии тока и чем точнее замерены площади \bar{S}_j . Если нужно построить синхронный контур, проходящий через некоторую точку L , не лежащую на построенном ранее синхронном контуре, то повторяют описанную выше процедуру построения. За начальный контур нефтеносности в случае необходимости можно принять построенный ранее синхронный контур. Однако желательно строить все контуры синхронно контуру Γ_0 с тем, чтобы при нашем приближенном построении не накапливались ошибки.

Построив первым или вторым способом синхронные контуры, мы тем самым решили задачу прослеживания контура нефтеносности. Далее можно определить через какое именно время t_1 начальный контур Γ_0 стянется к некоторому синхронному контуру Γ_1 (см. рис. 9).

Очевидно, за время t_1 скважинами будет разработана часть мес-

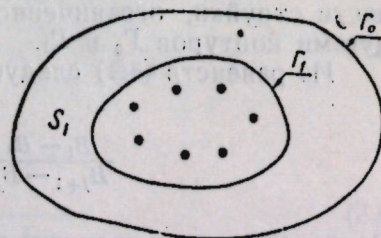


Рис. 9.

торождения, ограниченная контурами Γ_0 и Γ_1 , и из пласта будет извлечен объем нефти V , равный

$$V = S_1 h m, \quad (4.5)$$

где S_1 — площадь кольца, ограниченного контурами Γ_0 и Γ_1 , h — мощность пласта, m — пористость пласта (при необходимости введением соответствующего коэффициента можно легко учесть нефтеотдачу пласта и усадку нефти). С другой стороны, в случае, когда скважины расположены только вне кольцевой области Γ_0, Γ_1 , этот объем равен

$$V = t_1 \sum_{j=1}^l Q_j, \quad (4.6)$$

где суммирование ведется по дебитам l скважин, лежащих внутри контура Γ_1 . Приравнявая (4.5) и (4.6), получим время t_1 , за которое контур Γ_0 стянется к контуру Γ_1 :

$$t_1 = \frac{S_1 h m}{\sum_{j=1}^l Q_j} \quad (4.7)$$

С самого начала предполагалось, что во все время эксплуатации T дебиты Q_j остаются постоянными.

Очевидно, если дебиты Q_j переменны, но меняются скачками, оставаясь в промежутках между скачками постоянными, то задача о прослеживании также может быть решена. Для этого достаточно разбить все время эксплуатации на такие отрезки времени Δt_i , в которых все дебиты остаются постоянными, и для каждого Δt_i решить задачу о прослеживании.

Однако, такой способ построения синхронных контуров для случая многих скважин с часто меняющимися дебитами будет довольно трудоемок. Поэтому предлагается следующий способ построения синхронных контуров в случае эксплуатации с переменными дебитами $Q_j = Q_j(t)$.

Разбиваем рассматриваемое время эксплуатации T на n интервалов $t_0 = 0, t_1, t_2, \dots, t_{n-1} = T$ и считаем, что в каждом интервале времени t_i, t_{i+1} ($i = 0, \dots, n-1$) эксплуатация ведется с постоянными дебитами $Q_j^{(i)}$, равными

$$Q_j^{(i)} = \frac{1}{t_{i+1} - t_i} \int_{t_i}^{t_{i+1}} Q_j(t) dt.$$

После этого строим синхронные контуры соответственно для моментов времени $t = t_i$ ($i = 1, \dots, n-1$). Для каждого интервала времени нужно строить линии тока. Очевидно, построенный синхронный контур Γ_1 для времени t_1 должен быть таким, чтобы удовлетворялось соотношение (4.7).

На рис. 10 изображен пример построения линий тока и синхронных контуров $\Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_3$. За начальный КН взят эллипс, на большой оси которого размещены три эксплуатационных скважины. Дебиты крайних скважин, расположенных симметрично относительно центра эллипса, равны между собой и вдвое больше дебита средней сква-

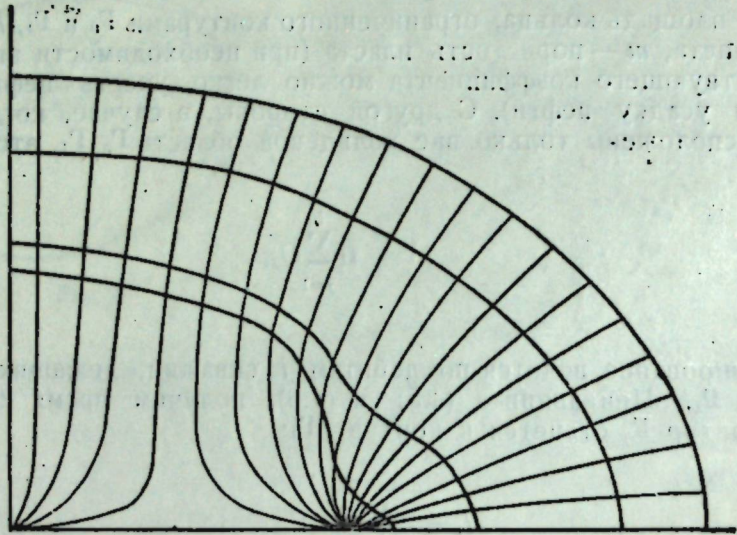


Рис. 10.

жины, помещенной в центре эллипса. Очевидно, в данном примере картина линий тока и синхронных контуров будет симметрична относительно осей эллипса, поэтому на рис. 10 приведен лишь один квадрант.

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

1. Яковлев В. П. О размещении скважин при водонапорных режимах. Нефтяное хозяйство, № 3—5, 1940.
2. Салехов Г. С. Постановка и методы решения гидродинамических задач управления движением контура нефтеносности. Известия Казанского филиала АН СССР, серия физ.-мат. и технич. наук, вып. 6, 1955.

Поступило
 20 декабря 1954 г.

Физико-технический ин-т
 Казанского филиала АН СССР

Б. А. СЕЙФУЛЛИНА

ЧИСЛЕННОЕ РЕШЕНИЕ НЕКОТОРЫХ ЗАДАЧ
 ПО УПРАВЛЕНИЮ ДВИЖЕНИЕМ КОНТУРА
 НЕФТЕНОСНОСТИ

В работе Г. С. Салехова [1] дается метод решения задачи управления перемещением контура нефтеносности при дискретном задании первоначального его положения. В данной статье рассматривается численное решение некоторых частных задач этим методом.

§ 1. Введение

Пусть однородный горизонтальный пласт мощности h разбурен скважинами с координатами (ρ_i, φ_i) ($i=1, 2, \dots, n$). Вязкости воды μ_w и нефти μ_n предполагаем одинаковыми ($\mu_w = \mu_n = \mu$).

Известно начальное положение контура нефтеносности (КН) Γ_0 и задано конечное положение Γ_1 . Требуется так эксплуатировать скважины, чтобы по истечении времени T контур Γ_0 стянулся к контуру Γ_1 по некоторому заранее выбранному закону. Задача сводится к определению дебитов q_i , наилучшим образом обеспечивающих стягивание Γ_0 к Γ_1 .

Каждый из контуров Γ_0 и Γ_1 задан соответственно своими M точками (r_{0j}, θ_j) и (r_{1j}, θ_j) $j=1, 2, \dots, M$.

Закон стягивания задаем по лучам $\theta = \theta_j$ в виде уравнений

$$r_j^2 = r_{0j}^2 - \frac{t}{T} (r_{0j}^2 - r_{1j}^2). \quad (1.1)$$

$(j=1, 2, \dots, M)$

В работе [1] эта задача решается приближенно с помощью метода минимальной погрешности и приводится к определению q_i из следующей системы уравнений:

$$\sum_{j=1}^M \left[\varepsilon(\theta, t, q_1, \dots, q_n) \sqrt{r^2 + \left(\frac{\partial r}{\partial \theta}\right)^2} \right]_{\theta=\theta_j} \cos k\theta_j = 0, \quad (1.2)$$

$$\sum_{j=1}^M \left[\varepsilon(\theta, t, q_1, \dots, q_n) \sqrt{r^2 + \left(\frac{\partial r}{\partial \theta}\right)^2} \right]_{\theta=\theta_j} \sin k\theta_j = 0$$

$(k=0, 1, \dots, N).$

ε — «невязка», которая получается в результате подстановки заданного закона стягивания в уравнения движения КН.

ε при $\theta = \theta_j$ имеет следующий вид [1]:

$$\varepsilon_j = \varepsilon(\theta_j, t, q_1, \dots, q_n) = \left\{ m \frac{\partial r}{\partial t} - \frac{k}{\mu} \left[\frac{1}{r^2} \frac{\partial r}{\partial \theta} \frac{\partial p}{\partial \theta} \right]_r + \frac{k}{\mu} \left[\frac{\partial p}{\partial r} \right]_r \right\}_{\theta=\theta_j}, \quad (1.3)$$

где p — давление.

При сделанных выше допущениях для случая водонапорного режима давление в неограниченном пласте выражается формулой

$$p = p_n + \frac{\mu}{2\pi kh} \sum_{i=1}^n q_i \ln \frac{1}{\sqrt{r^2 - 2r\rho_i \cos(\theta - \varphi_i) + \rho_i^2}}, \quad (1.4)$$

где q_i — текущие объемные дебиты скважин, k — проницаемость. Подставив (1.4) в (1.3), имеем

$$\varepsilon_j = \varepsilon(\theta_j, t, q_1 \dots q_n) = \left\{ m \frac{\partial r}{\partial t} - \frac{1}{2\pi h} \sum_{i=1}^n q_i \left[\frac{1}{r^2} \frac{\partial r}{\partial \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \ln \frac{1}{\sqrt{r^2 - 2r\rho_i \cos(\theta - \varphi_i) + \rho_i^2}} - \frac{\partial}{\partial r} \ln \frac{1}{\sqrt{r^2 - 2r\rho_i \cos(\theta - \varphi_i) + \rho_i^2}} \right] \right\}_{\theta=\theta_j}$$

Выполняя дифференцирование по r и θ , получим $\varepsilon_j = \varepsilon(\theta_j, t, q_1 \dots q_n) =$

$$\left\{ m \frac{\partial r}{\partial t} - \frac{1}{2\pi h} \sum_{i=1}^n q_i \frac{-\frac{\partial r}{\partial \theta} \rho_i \sin(\theta - \varphi_i) + r^2 - r\rho_i \cos(\theta - \varphi_i)}{r^2 - 2r\rho_i \cos(\theta - \varphi_i) + \rho_i^2} \cdot \frac{1}{r} \right\}_{\theta=\theta_j} \quad (1.5)$$

Величины r_j и $\frac{\partial r_j}{\partial t}$ для каждого $\theta = \theta_j$ найдем из закона стягивания КН (1.1), а $\left[\frac{\partial r}{\partial \theta} \right]_{\theta=\theta_j}$ вычислим по известным формулам численного дифференцирования.

Тогда, согласно (1.2), получим

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^M \sum_{i=1}^n q_i \left[\frac{-\frac{\partial r}{\partial \theta} \rho_i \sin(\theta - \varphi_i) + r^2 - r\rho_i \cos(\theta - \varphi_i)}{r^2 - 2r\rho_i \cos(\theta - \varphi_i) + \rho_i^2} \cdot \frac{\sqrt{r^2 + \left(\frac{\partial r}{\partial \theta}\right)^2}}{r} \right]_{\theta=\theta_j} &= \\ &= -\frac{\pi mh}{T} \sum_{j=1}^M \left[\frac{r_0^2 - r_1^2}{r} \sqrt{r^2 + \left(\frac{\partial r}{\partial \theta}\right)^2} \right]_{\theta=\theta_j}, \\ \sum_{j=1}^M \sum_{i=1}^n q_i \left[\frac{-\frac{\partial r}{\partial \theta} \rho_i \sin(\theta - \varphi_i) + r^2 - r\rho_i \cos(\theta - \varphi_i)}{r^2 - 2r\rho_i \cos(\theta - \varphi_i) + \rho_i^2} \cdot \frac{\sqrt{r^2 + \left(\frac{\partial r}{\partial \theta}\right)^2}}{r} \right]_{\theta=\theta_j} \cos k\theta_j &= \\ &= -\frac{\pi mh}{T} \sum_{j=1}^M \left[\frac{r_0^2 - r_1^2}{r} \sqrt{r^2 + \left(\frac{\partial r}{\partial \theta}\right)^2} \right]_{\theta=\theta_j} \cos k\theta_j, \\ \sum_{j=1}^M \sum_{i=1}^n q_i \left[\frac{-\frac{\partial r}{\partial \theta} \rho_i \sin(\theta - \varphi_i) + r^2 - r\rho_i \cos(\theta - \varphi_i)}{r^2 - 2r\rho_i \cos(\theta - \varphi_i) + \rho_i^2} \cdot \frac{\sqrt{r^2 + \left(\frac{\partial r}{\partial \theta}\right)^2}}{r} \right]_{\theta=\theta_j} \sin k\theta_j &= \\ &= -\frac{\pi mh}{T} \sum_{j=1}^M \left[\frac{r_0^2 - r_1^2}{r} \sqrt{r^2 + \left(\frac{\partial r}{\partial \theta}\right)^2} \right]_{\theta=\theta_j} \sin k\theta_j \end{aligned} \quad (1.6)$$

$(k = 1, 2, \dots, N)$

Поделим обе части каждого уравнения на $\frac{\pi mh}{T}$ и введем обозначения

$$\delta_i = q_i \frac{T}{\pi mh} \quad \text{и} \quad \tilde{\rho}_i = \frac{\rho_i}{r}$$

Система (1.6) примет следующий вид:

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^M \sum_{i=1}^n \delta_i \left[\frac{-\frac{\partial \ln r}{\partial \theta} \tilde{\rho}_i \sin(\theta - \varphi_i) + 1 - \tilde{\rho}_i \cos(\theta - \varphi_i)}{1 - 2\tilde{\rho}_i \cos(\theta - \varphi_i) + \tilde{\rho}_i^2} \cdot \frac{\sqrt{1 + \left(\frac{\partial \ln r}{\partial \theta}\right)^2}}{\sqrt{r}} \right]_{\theta=\theta_j} &= \\ &= -\sum_{j=1}^M \left[\frac{r_0^2 - r_1^2}{\sqrt{r}} \sqrt{1 + \left(\frac{\partial \ln r}{\partial \theta}\right)^2} \right]_{\theta=\theta_j}, \\ \sum_{j=1}^M \sum_{i=1}^n \delta_i \left[\frac{-\frac{\partial \ln r}{\partial \theta} \tilde{\rho}_i \sin(\theta - \varphi_i) + 1 - \tilde{\rho}_i \cos(\theta - \varphi_i)}{1 - 2\tilde{\rho}_i \cos(\theta - \varphi_i) + \tilde{\rho}_i^2} \cdot \frac{\sqrt{1 + \left(\frac{\partial \ln r}{\partial \theta}\right)^2}}{\sqrt{r}} \right]_{\theta=\theta_j} \cos k\theta_j &= \\ &= -\sum_{j=1}^M \left[\frac{r_0^2 - r_1^2}{\sqrt{r}} \sqrt{1 + \left(\frac{\partial \ln r}{\partial \theta}\right)^2} \right]_{\theta=\theta_j} \cos k\theta_j, \\ \sum_{j=1}^M \sum_{i=1}^n \delta_i \left[\frac{-\frac{\partial \ln r}{\partial \theta} \tilde{\rho}_i \sin(\theta - \varphi_i) + 1 - \tilde{\rho}_i \cos(\theta - \varphi_i)}{1 - 2\tilde{\rho}_i \cos(\theta - \varphi_i) + \tilde{\rho}_i^2} \cdot \frac{\sqrt{1 + \left(\frac{\partial \ln r}{\partial \theta}\right)^2}}{\sqrt{r}} \right]_{\theta=\theta_j} \sin k\theta_j &= \\ &= -\sum_{j=1}^M \left[\frac{r_0^2 - r_1^2}{\sqrt{r}} \sqrt{1 + \left(\frac{\partial \ln r}{\partial \theta}\right)^2} \right]_{\theta=\theta_j} \sin k\theta_j \end{aligned} \quad (1.7)$$

$(k = 1, 2, \dots, N)$

Из системы (1.7) необходимо брать последовательно столько не обращающихся тождественно в нуль и независимых уравнений, сколько следует определить неизвестных. Решая полученную систему, найдем дебиты скважин для различных моментов времени.

§ 2. Задача 1

Сначала рассмотрим простейший пример концентрического стягивания кругового КН Γ_0 и сравним полученное приближенное решение с решением той же задачи, приведенным в работе [2] при непрерывном задании контуров Γ_0 и Γ_1 . Точки (r_{0j}, θ_j) и (r_{1j}, θ_j) контуров Γ_0 и Γ_1 расположены соответственно на окружностях с радиусами r_0 и r_1 .

Закон стягивания КН задан уравнениями (1.1), где

$$r_{0j} = r_0 \text{ и } r_{1j} = r_1.$$

Тогда система (1.7) примет вид:

$$\left. \begin{aligned} \sum_{j=1}^M \sum_{l=1}^n \tilde{q}_l \left(\frac{1 - \tilde{\rho}_l \cos(\theta - \varphi_l)}{1 - 2\tilde{\rho}_l \cos(\theta - \varphi_l) + \tilde{\rho}_l^2} \right)_{\theta=\theta_j} &= -M, \\ \sum_{j=1}^M \sum_{l=1}^n \tilde{q}_l \left(\frac{1 - \tilde{\rho}_l \cos(\theta - \varphi_l)}{1 - 2\tilde{\rho}_l \cos(\theta - \varphi_l) + \tilde{\rho}_l^2} \right)_{\theta=\theta_j} \cos k\theta_j &= 0, \\ \sum_{j=1}^M \sum_{l=1}^n \tilde{q}_l \left(\frac{1 - \tilde{\rho}_l \cos(\theta - \varphi_l)}{1 - 2\tilde{\rho}_l \cos(\theta - \varphi_l) + \tilde{\rho}_l^2} \right)_{\theta=\theta_j} \sin k\theta_j &= 0. \end{aligned} \right\} (2.1)$$

Здесь введено обозначение $\tilde{q}_l = q_l \frac{T}{v_0}$, где

$$v_0 = \pi m h (r_0^2 - r_1^2).$$

Рассмотрим решение задачи управления КН, когда в пласте имеются две concentрические круговые батареи эксплуатационных скважин. Число скважин в каждой из батарей равно n . Скважины расположены на равных расстояниях друг от друга.

Полагаем полярные координаты скважин первой батареи равными

$$\rho_1, \varphi_{1i} = \frac{2\pi}{n} i + \alpha_1, \quad i = 0, 1, \dots, n-1,$$

координаты скважин второй батареи —

$$\rho_2, \varphi_{2i} = \frac{2\pi}{n} i + \alpha_2, \quad i = 0, 1, \dots, n-1.$$

В силу симметрии размещения скважин и заданного закона стягивания КН (1.1), текущие дебиты скважин первой батареи равны между собой. Также равны между собой дебиты скважин второй батареи. Обозначим дебиты скважин первой и второй батарей соответственно через q_1 и q_2 . Учитывая, что

$$\begin{aligned} \sum_{l=0}^{n-1} \frac{1 - \tilde{\rho} \cos \left[(\theta - \alpha) - \frac{2\pi}{n} l \right]}{1 - 2\tilde{\rho} \cos \left[(\theta - \alpha) - \frac{2\pi}{n} l \right] + \tilde{\rho}^2} &= \sum_{l=0}^{n-1} \sum_{i=0}^{\infty} \tilde{\rho}^i \cos l \left[(\theta - \alpha) - \frac{2\pi}{n} l \right] = \\ &= \sum_{l=0}^{\infty} \tilde{\rho}^l \sum_{i=0}^{n-1} \cos \left[l(\theta - \alpha) - \frac{2\pi}{n} li \right] = \begin{cases} 0, \text{ если } l \neq nk, \text{ где } k \text{ — любое} \\ \text{целое число,} \\ \sum_{k=0}^{\infty} \tilde{\rho}^l n \cos nk(\theta - \alpha), \text{ если } l = kn, \end{cases} \end{aligned}$$

имеем

$$\begin{aligned} \sum_{l=0}^{n-1} \frac{1 - \tilde{\rho} \cos \left[(\theta - \alpha) - \frac{2\pi}{n} l \right]}{1 - 2\tilde{\rho} \cos \left[(\theta - \alpha) - \frac{2\pi}{n} l \right]} &= n \sum_{k=0}^{\infty} \tilde{\rho}^{kn} \cos kn(\theta - \alpha) = \\ &= n \cdot \frac{1 - \tilde{\rho}^n \cos n(\theta - \alpha)}{1 - 2\tilde{\rho}^n \cos n(\theta - \alpha) + \tilde{\rho}^{2n}}. \end{aligned}$$

Подставляя это выражение в систему (2.1), получим

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^M \tilde{q}_1 \left(\frac{1 - \tilde{\rho}_1^n \cos n(\theta - \alpha_1)}{1 - 2\tilde{\rho}_1^n \cos n(\theta - \alpha_1) + \tilde{\rho}_1^{2n}} \right)_{\theta=\theta_j} + \\ + \sum_{j=1}^M \tilde{q}_2 \left(\frac{1 - \tilde{\rho}_2^n \cos n(\theta - \alpha_2)}{1 - 2\tilde{\rho}_2^n \cos n(\theta - \alpha_2) + \tilde{\rho}_2^{2n}} \right)_{\theta=\theta_j} &= -M, \\ \sum_{j=1}^M \tilde{q}_1 \left(\frac{1 - \tilde{\rho}_1^n \cos n(\theta - \alpha_1)}{1 - 2\tilde{\rho}_1^n \cos n(\theta - \alpha_1) + \tilde{\rho}_1^{2n}} \right)_{\theta=\theta_j} \cos k\theta_j + \\ + \sum_{j=1}^M \tilde{q}_2 \left(\frac{1 - \tilde{\rho}_2^n \cos n(\theta - \alpha_2)}{1 - 2\tilde{\rho}_2^n \cos n(\theta - \alpha_2) + \tilde{\rho}_2^{2n}} \right)_{\theta=\theta_j} \cos k\theta_j &= 0, \\ \sum_{j=1}^M \tilde{q}_1 \left(\frac{1 - \tilde{\rho}_1^n \cos n(\theta - \alpha_1)}{1 - 2\tilde{\rho}_1^n \cos n(\theta - \alpha_1) + \tilde{\rho}_1^{2n}} \right)_{\theta=\theta_j} \sin k\theta_j + \\ + \sum_{j=1}^M \tilde{q}_2 \left(\frac{1 - \tilde{\rho}_2^n \cos n(\theta - \alpha_2)}{1 - 2\tilde{\rho}_2^n \cos n(\theta - \alpha_2) + \tilde{\rho}_2^{2n}} \right)_{\theta=\theta_j} \sin k\theta_j &= 0. \end{aligned} \quad (2.2)$$

В этой системе уравнения при $k \neq nl$, где l — любое целое число, тождественно обращаются в нуль и остаются уравнения только для индексов k , кратных n . В самом деле, если $k \neq nl$, то

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^M \left\{ \frac{1 - \tilde{\rho}^n \cos n(\theta - \alpha)}{1 - 2\tilde{\rho}^n \cos n(\theta - \alpha) + \tilde{\rho}^{2n}} \cos k\theta \right\}_{\theta=\theta_j} &= \\ = \sum_{j=1}^M \left\{ \cos k\theta \sum_{l=0}^{\infty} (\tilde{\rho}^n)^l \cos nl(\theta - \alpha) \right\}_{\theta=\theta_j} &= \\ = \sum_{l=0}^{\infty} (\tilde{\rho}^n)^l \left\{ \sum_{j=1}^M \cos k\theta \cos nl\theta \cos nl\alpha + \right. \\ \left. + \sum_{j=1}^M \cos k\theta \sin nl\theta \sin nl\alpha \right\}_{\theta=\theta_j} &= 0. \end{aligned}$$

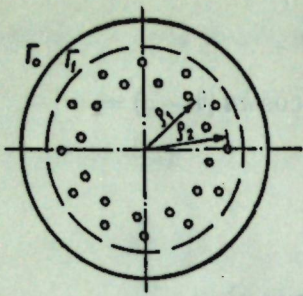


Рис. 1.

Пусть радиусы батарей ρ_1 и ρ_2 заданы. Не уменьшая общности задачи, можем положить, что $\alpha_1 = 0$, т. е. ось x проходит через скважину первой батареи (см. рис. 1). Определим угол α_2 и дебиты q_1 и q_2 из системы (2.2). Для этого используем три первых не обращающихся в нуль уравнения, а именно, первое уравнение и два уравнения n -ой гармоники.

$$\text{Положим, например, } M = 4n, \theta_j = \frac{\pi(j-1)}{2n} \\ j = 1, 2, 3, \dots, 4n$$

Учитывая, что выражения

$$\sin n\theta \frac{1 - \tilde{\rho}^n \cos n(\theta - \alpha)}{1 - 2\tilde{\rho}^n \cos n(\theta - \alpha) + \tilde{\rho}^{2n}} \text{ и } \cos n\theta \frac{1 - \tilde{\rho}^n \cos n(\theta - \alpha)}{1 - 2\tilde{\rho}^n \cos n(\theta - \alpha) + \tilde{\rho}^{2n}}$$

имеют период $\frac{2\pi}{n}$, получим следующую систему:

$$\left. \begin{aligned} \tilde{q}_1^n \left[\frac{1}{1 - \tilde{\rho}_1^n} + \frac{2}{1 + \tilde{\rho}_1^{2n}} + \frac{1}{1 - \tilde{\rho}_1^n} \right] + \tilde{q}_2^n \left[\frac{1 - \tilde{\rho}_2^n \cos n\alpha_2}{1 - 2\tilde{\rho}_2^n \cos n\alpha_2 + \tilde{\rho}_2^{2n}} + \right. \\ \left. + \frac{1 - \tilde{\rho}_2^n \sin n\alpha_2}{1 - 2\tilde{\rho}_2^n \sin n\alpha_2 + \tilde{\rho}_2^{2n}} + \frac{1 + \tilde{\rho}_2^n \cos n\alpha_2}{1 + 2\tilde{\rho}_2^n \cos n\alpha_2 + \tilde{\rho}_2^{2n}} + \right. \\ \left. + \frac{1 + \tilde{\rho}_2^n \sin n\alpha_2}{1 + 2\tilde{\rho}_2^n \sin n\alpha_2 + \tilde{\rho}_2^{2n}} \right] = -4n, \\ \tilde{q}_1 \left[\frac{1}{1 - \tilde{\rho}_1^n} - \frac{1}{1 + \tilde{\rho}_1^n} \right] + \tilde{q}_2 \left[\frac{1 - \tilde{\rho}_2^n \cos n\alpha_2}{1 - 2\tilde{\rho}_2^n \cos n\alpha_2 + \tilde{\rho}_2^{2n}} - \right. \\ \left. - \frac{1 + \tilde{\rho}_2^n \cos n\alpha_2}{1 + 2\tilde{\rho}_2^n \cos n\alpha_2 + \tilde{\rho}_2^{2n}} \right] = 0, \\ \tilde{q}_2 \left[\frac{1 - \tilde{\rho}_2^n \sin n\alpha_2}{1 - 2\tilde{\rho}_2^n \sin n\alpha_2 + \tilde{\rho}_2^{2n}} - \frac{1 + \tilde{\rho}_2^n \sin n\alpha_2}{1 + 2\tilde{\rho}_2^n \sin n\alpha_2 + \tilde{\rho}_2^{2n}} \right] = 0. \end{aligned} \right\} (2.3)$$

Если $\tilde{q}_2 \neq 0$, то последнее уравнение удовлетворяется лишь при $n\alpha_2 = 0$ или $n\alpha_2 = \pi$. Но если $n\alpha_2 = 0$, то второе уравнение примет вид:

$$\tilde{q}_1 \frac{2\tilde{\rho}_1^n}{1 - 2\tilde{\rho}_1^n} + \tilde{q}_2 \frac{2\tilde{\rho}_2^n}{1 - \tilde{\rho}_2^n} = 0,$$

что противоречит условиям

$$0 < \tilde{\rho}_1 < 1, \quad 0 < \tilde{\rho}_2 < 1, \quad q_1 < 0 \text{ и } q_2 < 0,$$

так как обе батареи должны быть эксплуатационными. Следовательно, получаем, что $\alpha_2 = \frac{\pi}{n}$, т. е. скважины в батареях должны располагаться в шахматно-круговом порядке и

$$\tilde{q}_1 = - \frac{\tilde{\rho}_2^n (1 + \tilde{\rho}_2^{2n}) (1 - \tilde{\rho}_1^{4n})}{n [\tilde{\rho}_2^n (1 + \tilde{\rho}_2^{2n}) + \tilde{\rho}_1^n (1 + \tilde{\rho}_1^{2n})]},$$

$$q_2 = - \frac{\tilde{\rho}_1^n (1 + \tilde{\rho}_2^{2n}) (1 - \tilde{\rho}_2^{4n})}{n [\tilde{\rho}_2^n (1 + \tilde{\rho}_2^{2n}) + \tilde{\rho}_1^n (1 + \tilde{\rho}_1^{2n})]}.$$

Составим отношение дебитов $\frac{\tilde{q}_1}{\tilde{q}_2} = \frac{\tilde{\rho}_2^n}{\tilde{\rho}_1^n} \cdot \frac{(1 - \tilde{\rho}_1^{4n})}{(1 - \tilde{\rho}_2^{4n})}$.

Это выражение совпадает с отношением дебитов $\frac{\tilde{q}_1}{\tilde{q}_2}$, полученным для случая круговых концентрических батарей в работе [2].

§ 3. Задача 2

Пусть контуры Γ_0 и Γ_1 симметричны относительно осей координат x и y (см. рис. 2) и заданы своими $4N$ точками (r_{0j}, θ_j) и (r_{1j}, θ_j) , причем

$$\theta_j = \frac{\pi(j-1)}{2N} \quad (j = 1, 2, \dots, 4N).$$

Размещение скважин также считаем симметричным относительно обеих осей координат, а число скважин — равным $4n$. Тогда координаты скважин в первом, втором, третьем и четвертом квадрантах соответственно равны:

$$(\rho_i, \alpha_i), (\rho_i, \pi - \alpha_i), (\rho_i, \pi + \alpha_i), (\rho_i, -\alpha_i)$$

$$(i = 1, 2, \dots, n).$$

Закон стягивания возьмем в виде

$$r_j^2 = r_{0j}^2 - \frac{t}{T} (r_{0j}^2 - r_{1j}^2) \quad (j = 1, 2, \dots, 4N).$$

Очевидно, в силу симметрии как контуров Γ_0 и Γ_1 , так и размещения скважин, и в силу заданного закона стягивания, дебиты каждой четверки симметрично размещенных относительно осей скважин будут одинаковы и равны q_1 .

Если скважина лежит на оси x или y , то будем рассматривать ее как 2 скважины с половинным дебитом, каждую половину относя к разным квадрантам. В этом случае имеем

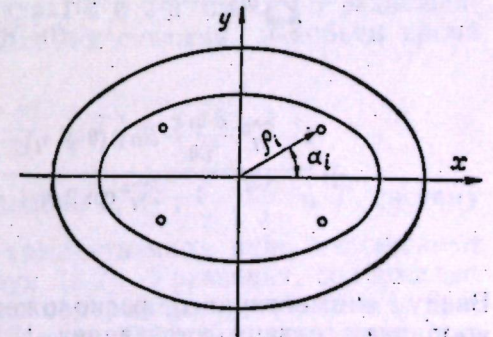


Рис. 2.

$$\sum_{i=1}^{4n} \delta_i \left[\frac{-\frac{\partial \ln r}{\partial \theta} \tilde{\rho}_i \sin(\theta - \varphi_i) + 1 - \tilde{\rho}_i \cos(\theta - \varphi_i)}{1 - 2\tilde{\rho}_i \cos(\theta - \varphi_i) + \tilde{\rho}_i^2} \right]_{\theta=\theta_j} =$$

$$= \sum_{i=1}^n \delta_i \left\{ \left[\frac{-\tilde{\rho}_i \frac{\partial \ln r}{\partial \theta} \sin(\theta - \alpha_i) + 1 - \tilde{\rho}_i \cos(\theta - \alpha_i)}{1 - 2\tilde{\rho}_i \cos(\theta - \alpha_i) + \tilde{\rho}_i^2} + \right. \right.$$

$$+ \frac{-\tilde{\rho}_i \frac{\partial \ln r}{\partial \theta} \sin(\theta + \alpha_i) + 1 - \tilde{\rho}_i \cos(\theta + \alpha_i)}{1 - 2\tilde{\rho}_i \cos(\theta + \alpha_i) + \tilde{\rho}_i^2} +$$

$$+ \frac{\tilde{\rho}_i \frac{\partial \ln r}{\partial \theta} \sin(\theta + \alpha_i) + 1 + \tilde{\rho}_i \cos(\theta + \alpha_i)}{1 + 2\tilde{\rho}_i \cos(\theta + \alpha_i) + \tilde{\rho}_i^2} +$$

$$\left. \left. + \frac{\tilde{\rho}_i \frac{\partial \ln r}{\partial \theta} \sin(\theta - \alpha_i) + 1 + \tilde{\rho}_i \cos(\theta - \alpha_i)}{1 + 2\tilde{\rho}_i \cos(\theta - \alpha_i) + \tilde{\rho}_i^2} \right] \right\}_{\theta=\theta_j}$$

$$\left(\delta_i = q_i \frac{T}{\pi m h} \right).$$

Складывая попарно 1-й и 4-й, 2-й и 3-й члены в квадратной скобке, получим

$$\sum_{i=1}^{4n} \delta_i \left[\frac{-\frac{\partial \ln r}{\partial \theta} \tilde{\rho}_i \sin(\theta - \varphi_i) + 1 - \tilde{\rho}_i \cos(\theta - \varphi_i)}{1 - 2\tilde{\rho}_i \cos(\theta - \varphi_i) + \tilde{\rho}_i^2} \right]_{\theta=\theta_j} =$$

$$= \sum_{i=1}^n \delta_i \left(\frac{1 - \tilde{\rho}_i^2 \frac{\partial \ln r}{\partial \theta} \sin 2(\theta - \alpha_i) - \tilde{\rho}_i^2 \cos 2(\theta - \alpha_i)}{1 - 2\tilde{\rho}_i^2 \cos 2(\theta - \alpha_i) + \tilde{\rho}_i^4} + \right.$$

$$\left. + \frac{1 - \tilde{\rho}_i^2 \frac{\partial \ln r}{\partial \theta} \sin 2(\theta + \alpha_i) - \tilde{\rho}_i^2 \cos 2(\theta + \alpha_i)}{1 - 2\tilde{\rho}_i^2 \cos 2(\theta + \alpha_i) + \tilde{\rho}_i^4} \right)_{\theta=\theta_j} \quad (3.2)$$

Ввиду симметричного расположения скважин относительно осей координат, задачу управления КН можно решать только в одном квадранте.

Возьмем следующий численный пример: допустим, что контуры Γ_0 и Γ_1 заданы в 1-м квадранте точками, полярные координаты которых приведены в таблице 1 (см. рис. 3).

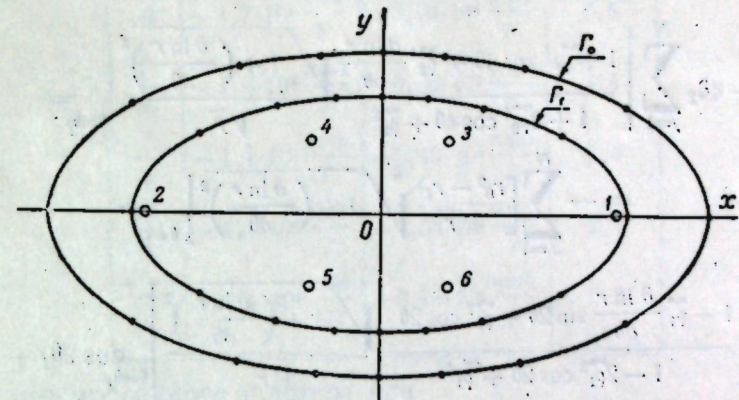


Рис. 3.

Таблица 1

θ_j	r_{0j}	r_{1j}
0	452	328
22,5°	367	266
45°	273	198
67,5°	227	165
90°	212	154

В пласте разбурены 6 скважин, имеющих следующие полярные координаты:

- 1) $\rho_1 = 325, \quad \varphi_1 = 0,$
- 2) $\rho_1 = 325, \quad \varphi_2 = 180°,$
- 3) $\rho_2 = 135, \quad \varphi_3 = 45°$
- 4) $\rho_2 = 135, \quad \varphi_4 = 135°,$
- 5) $\rho_2 = 135, \quad \varphi_5 = 225°,$
- 6) $\rho_2 = 135, \quad \varphi_6 = 315°.$

Решим задачу управления КН по характеру эксплуатации, т. е. найдем два неизвестных дебита: q_1 — для 1-й и 2-й скважин, размещенных на оси x , и q_2 — для остальных 4-х скважин. Разобьем время эксплуатации T на 4 интервала

$$\left(0, \frac{T}{4}\right), \left(\frac{T}{4}, \frac{T}{2}\right), \left(\frac{T}{2}, \frac{3}{4}T\right) \text{ и } \left(\frac{3}{4}T, T\right).$$

Составим для каждого момента времени $0, \frac{T}{4}, \frac{T}{2}, \frac{3}{4}T$ и T систему из двух первых, не обращающихся тождественно в нуль независимых уравнений системы (1.7), используя (3.2). Уравнения, содержащие $\sin k\theta_j, k=1, 2, 3, \dots$, и уравнения, содержащие $\cos k\theta_j, k=1, 3, 5, 7, \dots$, обращаются тождественно в нуль. Поэтому используем для нахождения q_1 и q_2 первое уравнение и уравнение, содержащее $\cos 2\theta_j$.

$$\begin{aligned}
& 4\delta_1 \sum_{j=1}^N \left[\frac{1 - \tilde{\rho}_1 \frac{\partial \ln r}{\partial \theta} \sin 2\theta - \tilde{\rho}_1^2 \cos 2\theta}{1 - 2\tilde{\rho}_1^2 \cos 2\theta + \tilde{\rho}_1^4} \sqrt{1 + \left(\frac{\partial \ln r}{\partial \theta}\right)^2} \right]_{\theta=0} + \\
& + 4\delta_2 \sum_{j=1}^N \left[\frac{1 + \tilde{\rho}_2^4 \cos 4\theta + \tilde{\rho}_2^4 \frac{\partial \ln r}{\partial \theta} \sin 4\theta}{1 + 2\tilde{\rho}_2^4 \cos 4\theta + \tilde{\rho}_2^8} \sqrt{1 + \left(\frac{\partial \ln r}{\partial \theta}\right)^2} \right]_{\theta=0_j} = \\
& = - \sum_{j=1}^N \left[\frac{r_0^2 - r_1^2}{\sqrt{r}} \sqrt{1 + \left(\frac{\partial \ln r}{\partial \theta}\right)^2} \right]_{\theta=0_j}, \quad (3.3) \\
& 4\delta_1 \sum_{j=1}^N \left[\frac{1 - \tilde{\rho}_1 \frac{\partial \ln r}{\partial \theta} \sin 2\theta - \tilde{\rho}_1^2 \cos 2\theta}{1 - 2\tilde{\rho}_1^2 \cos 2\theta + \tilde{\rho}_1^4} \sqrt{1 + \left(\frac{\partial \ln r}{\partial \theta}\right)^2} \right]_{\theta=0_j} \cos 2\theta_j + \\
& + 4\delta_2 \sum_{j=1}^N \left[\frac{1 + \tilde{\rho}_2^4 \cos 4\theta + \tilde{\rho}_2^4 \frac{\partial \ln r}{\partial \theta} \sin 4\theta}{1 + 2\tilde{\rho}_2^4 \cos 4\theta + \tilde{\rho}_2^8} \sqrt{1 + \left(\frac{\partial \ln r}{\partial \theta}\right)^2} \right]_{\theta=0_j} \cos 2\theta_j = \\
& = - \sum_{j=1}^M \left[\frac{r_0^2 - r_1^2}{\sqrt{r}} \sqrt{1 + \left(\frac{\partial \ln r}{\partial \theta}\right)^2} \right]_{\theta=0_j} \cos 2\theta_j.
\end{aligned}$$

r и $\tilde{\rho}_i = \frac{\rho_i}{r}$ при $\theta = \theta_j$ находятся из закона стягивания, а $\frac{\partial r}{\partial \theta}$ определяем по формуле численного дифференцирования. Для этого составим таблицу разностей.

θ_{-1}	$r(\theta_{-1})$	$r'_{-1/2}$	
θ_0	$r(\theta_0)$	r'_0	r''_0
θ_1	$r(\theta_1)$	$r'_{1/2}$	r''_1
θ_2	$r(\theta_2)$	$r'_{3/2}$	r''_2
θ_3	$r(\theta_3)$	$r'_{5/2}$	

Обозначим

$$r_0^{(1)} = \frac{r'_{1/2} + r'_{-1/2}}{2},$$

$$r_0^{(3)} = \frac{r'''_{1/2} + r'''_{-1/2}}{2},$$

Тогда имеет место формула численного дифференцирования [3]

$$\frac{\partial r}{\partial \theta} = \frac{1}{\Delta \theta} \left\{ r_0^{(1)} - \frac{1}{6} r_0^{(3)} + \frac{1}{30} r_0^{(5)} - \frac{1}{140} r_0^{(7)} + \frac{1}{630} r_0^{(9)} - \frac{1}{2772} r_0^{(11)} + \dots \right\}.$$

Дебиты, полученные из системы (3.3) для моментов времени $0, \frac{T}{4}, \frac{T}{2}, \frac{3T}{4}, T$, сведены в таблицу 2.

Таблица 2

t	q_1	q_2	q_1/q_2
0	$-1,7 \cdot 10^4 \frac{\pi mh}{T}$	$-0,30 \cdot 10^4 \frac{\pi mh}{T}$	5,6
$\frac{T}{4}$	$-1,6 \cdot 10^4 \frac{\pi mh}{T}$	$-0,36 \cdot 10^4 \frac{\pi mh}{T}$	4,4
$\frac{T}{2}$	$-1,4 \cdot 10^4 \frac{\pi mh}{T}$	$-0,43 \cdot 10^4 \frac{\pi mh}{T}$	3,4
$\frac{3T}{4}$	$-1,1 \cdot 10^4 \frac{\pi mh}{T}$	$-0,53 \cdot 10^4 \frac{\pi mh}{T}$	2,1
T	$-0,1 \cdot 10^4 \frac{\pi mh}{T}$	$-0,73 \cdot 10^4 \frac{\pi mh}{T}$	0,2

Из рассмотренного примера следует, что сначала должны более интенсивно работать скважины 1-ая и 2-ая, а в конце эксплуатации — наоборот (см. рис. 4).

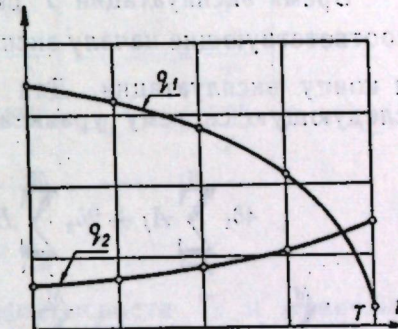


Рис. 4.

§ 4. Задача 3

Рассмотрим следующий пример. Допустим, что даны по 24 точки на каждом из контуров Γ_0 и Γ_1 , симметричных относительно осей координат. Полярные координаты точек контуров Γ_0 и Γ_1 для первого квадранта даны в таблице 3.

Таблица 3

θ_j	r_{0j}	r_{1j}
0	422	332
15°	406	316
30°	331	243
45°	273	200
60°	239	174
75°	219	161
90°	213	154

Имеем 10 скважин, расположенных следующим образом (см. рис. 5):

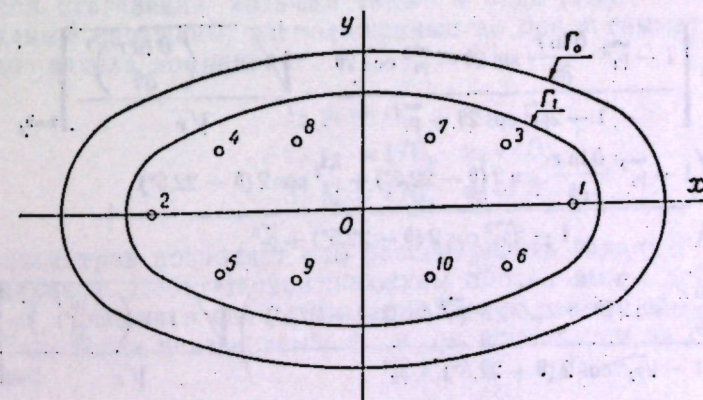


Рис. 5.

- 1) $\rho_1 = 300, \varphi_1 = 0,$
 2) $\rho_1 = 300, \varphi_2 = 180^\circ,$

обозначим дебиты этих скважин q_1 .

- 3) $\rho_2 = 218, \varphi_3 = 22,5^\circ, 5) \rho_2 = 218, \varphi_5 = 202,5^\circ,$
 4) $\rho_2 = 218, \varphi_4 = 157,5^\circ, 6) \rho_2 = 218, \varphi_6 = 337,5^\circ,$

обозначим дебиты этих скважин q_2 .

- 7) $\rho_3 = 135, \varphi_7 = 45^\circ, 9) \rho_3 = 135, \varphi_9 = 225^\circ, \varphi_8 = 135^\circ,$
 8) $\rho_3 = 135, 10) \rho_3 = 135, \varphi_{10} = 315^\circ,$

обозначим дебиты этих скважин q_3 .

Время эксплуатации T разделим на два интервала и найдем q_i , соответствующие началу эксплуатации, середине промежутка ($t = \frac{T}{2}$) и концу эксплуатации. Для определения q_i ($i=1, 2, 3$) используем следующую систему уравнений.

$$\left. \begin{aligned} 4\delta_1 \sum_{j=1}^M A_j + 2\delta_2 \sum_{j=1}^M B_j + 4\delta_3 \sum_{j=1}^M C_j &= - \sum_{j=1}^M D_j, \\ 4\delta_1 \sum_{j=1}^M A_j \cos 2\theta_j + 2\delta_2 \sum_{j=1}^M B_j \cos 2\theta_j + 4\delta_3 \sum_{j=1}^M C_j \cos 2\theta_j &= \\ &= - \sum_{j=1}^M D_j \cos 2\theta_j \\ 4\delta_1 \sum_{j=1}^M A_j \cos 4\theta_j + 2\delta_2 \sum_{j=1}^M B_j \cos 4\theta_j + 4\delta_3 \sum_{j=1}^M C_j \cos 4\theta_j &= \\ &= - \sum_{j=1}^M D_j \cos 4\theta_j \end{aligned} \right\} (4.1)$$

где $\delta_i = q_i \frac{T}{\pi m h}$,

$$A_j = \left[\frac{1 - \tilde{\rho}_1^2 \frac{\partial \ln r}{\partial \theta} \sin 2\theta - \tilde{\rho}_1^2 \cos 2\theta}{1 - 2\tilde{\rho}_1^2 \cos 2\theta + \tilde{\rho}_1^4} \cdot \frac{\sqrt{1 + \left(\frac{\partial \ln r}{\partial \theta}\right)^2}}{\sqrt{r}} \right]_{\theta=\theta_j},$$

$$B_j = \left[\frac{\left(1 - \tilde{\rho}_1^2 \frac{\partial \ln r}{\partial \theta} \sin 2(\theta - 22,5^\circ) + \tilde{\rho}_2^2 \cos 2(\theta - 22,5^\circ)\right)}{1 - 2\tilde{\rho}_2^2 \cos 2(\theta - 22,5^\circ) + \tilde{\rho}_2^4} + \right.$$

$$\left. + \frac{\left(1 - \tilde{\rho}_2^2 \frac{\partial \ln r}{\partial \theta} \sin 2(\theta + 22,5^\circ) - \tilde{\rho}_2^2 \cos 2(\theta + 22,5^\circ)\right)}{1 - 2\tilde{\rho}_2^2 \cos 2(\theta + 22,5^\circ) + \tilde{\rho}_2^4} \right] \frac{\sqrt{1 + \left(\frac{\partial \ln r}{\partial \theta}\right)^2}}{\sqrt{r}} \Big|_{\theta=\theta_j},$$

$$C_j = \left[\frac{1 + \tilde{\rho}_2^4 \cos 4\theta + \tilde{\rho}_2^4 \frac{\partial \ln r}{\partial \theta} \sin 4\theta}{1 + 2\tilde{\rho}_2^4 \cos 4\theta + \tilde{\rho}_2^8} \cdot \frac{\sqrt{1 + \left(\frac{\partial \ln r}{\partial \theta}\right)^2}}{\sqrt{r}} \right]_{\theta=\theta_j},$$

$$D_j = \left[\frac{(r_0^2 - r_1^2)}{r_0^2} \frac{\sqrt{1 + \left(\frac{\partial \ln r}{\partial \theta}\right)^2}}{\sqrt{r}} \right]_{\theta=\theta_j},$$

Дебиты, полученные из решения системы (4.1), даны в таблице 4.

Таблица 4

t	q_1	q_2	q_3
0	$-1,38 \cdot 10^4 \frac{\pi m h}{T}$	0	$-0,34 \cdot 10^4 \frac{\pi m h}{T}$
$\frac{T}{2}$	$-0,96 \cdot 10^4 \frac{\pi m h}{T}$	$-0,15 \cdot 10^4 \frac{\pi m h}{T}$	$-0,38 \cdot 10^4 \frac{\pi m h}{T}$
T	$-0,58 \cdot 10^4 \frac{\pi m h}{T}$	$-0,16 \cdot 10^4 \frac{\pi m h}{T}$	$-0,54 \cdot 10^4 \frac{\pi m h}{T}$

§ 5. Задача 4

Пусть первоначальный контур нефтеносности Γ_0 и конечный контур Γ_1 заданы каждый 24 точками, размещенными симметрично относительно осей координат. Для первого квадранта полярные координаты точек контуров Γ_0 и Γ_1 даны в таблице 5.

Таблица 5

θ_j	r_{0j}	r_{1j}
0	361	258
15°	343	245
30°	310	216
45°	277	186
60°	250	167
75°	235	158
90°	231	154

Закон стягивания возьмем также в виде (1.1).

Заданы 3 скважины, расположенные на оси x симметрично относительно начала координат:

- 1) $\rho_1 = 0,$
- 2) $\rho_2 = 176, \varphi_2 = 0,$
- 3) $\rho_2 = 176, \varphi_2 = \pi.$

Такая симметрия позволяет нам рассматривать задачу только в первом квадранте. Дебит первой скважины обозначим q_1 ; дебиты второй и третьей скважин в силу симметрии будут равны, обозначим их q_2 . Для определения неизвестных q_1 и q_2 используем из системы (1.7) уравнения

Таблица 7

Значения $\frac{\partial \ln r}{\partial \theta}$ в зависимости от угла θ_j и времени

$\theta_j \backslash t$	0	$\frac{T}{4}$	$\frac{T}{2}$	$\frac{3T}{4}$	T
0	0	0	0	0	0
15°	-0,332	-0,340	-0,345	-0,349	-0,368
30°	-0,420	-0,443	-0,469	-0,550	-0,567
45°	-0,428	-0,467	-0,449	-0,492	-0,524
60°	-0,330	-0,363	-0,324	-0,340	-0,326
75°	-0,142	-0,150	-0,157	-0,157	-0,158
90°	0	0	0	0	0

Решая систему уравнений (5.1) для каждого из моментов времени $t=0$, $t=\frac{T}{4}$, $t=\frac{T}{2}$, $t=\frac{3T}{4}$, $t=T$, получим следующие дебиты (см. табл. 8).

Таблица 8

t	q_1	q_2	q_2/q_1
0	$-1080 \frac{\pi mh}{T}$	$-21140 \frac{\pi mh}{T}$	20
$\frac{T}{4}$	$-8250 \frac{\pi mh}{T}$	$-17540 \frac{\pi mh}{T}$	2,1
$\frac{T}{2}$	$-14700 \frac{\pi mh}{T}$	$-14500 \frac{\pi mh}{T}$	1
$\frac{3T}{4}$	$-20400 \frac{\pi mh}{T}$	$-11500 \frac{\pi mh}{T}$	0,6
T	$-25100 \frac{\pi mh}{T}$	$-9100 \frac{\pi mh}{T}$	0,3

Как видно из рис. 6, в начале эксплуатации средняя скважина должна работать с малой интенсивностью, а крайние — со значительно большей интенсивностью. Затем в середине промежутка все три скважины должны иметь примерно равные дебиты, а в конце эксплуатации должна более интенсивно работать средняя скважина.

Усредним отношения дебитов $\frac{q_2}{q_1}$, приведенные на графике (рис. 6), для каждого из отдельных интервалов времени. Для этого измерим планиметром площадки S_1, S_2, S_3, S_4 и разделим их на соответствующие промежутки

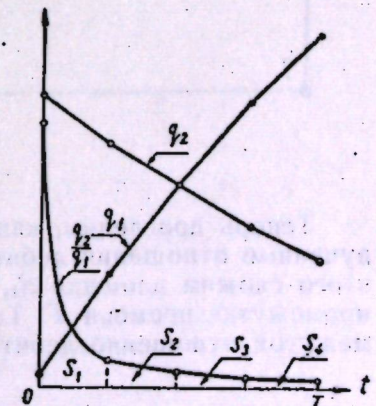


Рис. 6.

$$\begin{aligned}
 & \delta_1 \sum_{j=1}^M \left[\frac{\sqrt{1 + \left(\frac{\partial \ln r}{\partial \theta}\right)^2}}{\sqrt{r}} \right]_{\theta=\theta_j} + \\
 & + 2\delta_2 \sum_{j=1}^M \left(\frac{1 - \sqrt{\rho_2^2} \frac{\partial \ln r}{\partial \theta} \sin 2\theta - \sqrt{\rho_2^2} \cos 2\theta}{1 - 2\sqrt{\rho_2^2} \cos 2\theta + \rho_2^4} \cdot \frac{\sqrt{1 + \left(\frac{\partial \ln r}{\partial \theta}\right)^2}}{\sqrt{r}} \right)_{\theta=\theta_j} = \\
 & = - \sum_{j=1}^M \left[\frac{r_0^2 - r_1^2}{\sqrt{r}} \sqrt{1 + \left(\frac{\partial \ln r}{\partial \theta}\right)^2} \right]_{\theta=\theta_j}, \\
 & \delta_1 \sum_{j=1}^M \left[\frac{\sqrt{1 + \left(\frac{\partial \ln r}{\partial \theta}\right)^2}}{\sqrt{r}} \right]_{\theta=\theta_j} \cos 2\theta_j + \\
 & + 2\delta_2 \sum_{j=1}^M \left[\frac{1 - \sqrt{\rho_2^2} \frac{\partial \ln r}{\partial \theta} \sin 2\theta - \sqrt{\rho_2^2} \cos 2\theta}{1 - 2\sqrt{\rho_2^2} \cos 2\theta + \rho_2^4} \cdot \frac{\sqrt{1 + \left(\frac{\partial \ln r}{\partial \theta}\right)^2}}{\sqrt{r}} \right]_{\theta=\theta_j} \cos 2\theta_j = \\
 & = - \sum_{j=1}^M \left[\frac{r_0^2 - r_1^2}{\sqrt{r}} \sqrt{1 + \left(\frac{\partial \ln r}{\partial \theta}\right)^2} \right]_{\theta=\theta_j} \cos 2\theta_j.
 \end{aligned} \tag{5.1}$$

$$(\delta_i = q_i \frac{T}{\pi mh})$$

Разделим промежуток времени T на 4 интервала и найдем соответствующие каждому моменту времени значения r_j и $\left[\frac{\partial \ln r}{\partial \theta}\right]_{\theta=\theta_j}$. Эти значения приведены в таблицах 6 и 7.

Таблица 6

Значения r в зависимости от угла θ_j и времени

$\theta_j \backslash t$	0	$\frac{T}{4}$	$\frac{T}{2}$	$\frac{3T}{4}$	T
0	361	338	314	287	258
15°	343	321	298	273	245
30°	310	289	267	243	216
45°	277	257	236	212	186
60°	250	232	213	191	167
75°	235	218	200	180	158
90°	231	214	196	176	154

времени. Тогда получим следующие усредненные отношения для дебитов:

$$\left(\frac{q_2}{q_1}\right)_{\text{ср}} = 5,5; 1,5; 0,8; 0,4.$$

После того, как найдены усредненные значения для отношения дебитов $\frac{q_2}{q_1}$ во всех 4 промежутках времени, решим задачу прослеживания КН способом, указанным в статье Н. Ф. Иванова [4].

Зная точки контуров для каждого момента времени $0, \frac{T}{4}, \frac{T}{2}, \frac{3T}{4}$ и T и направление касательных к контурам в этих точках (см. табл. 6 и 7), строим контуры, в которые должен переходить контур Γ_0 в соответствующие моменты времени, если бы закон стягивания (1.1) был соблюден точно (на рис. 7 эти контуры проведены пунктиром).

Далее, пользуясь графоаналитическим методом прослеживания КН, найдем контур Γ_1' , к которому в действительности стянется контур Γ_0 при эксплуатации в первом промежутке с отношением дебитов 5,5, во втором 1,5, в третьем 0,8 и в четвертом 0,4.

Из рис. 7 видно, что отклонение контуров Γ_1 и Γ_1' незначительно.

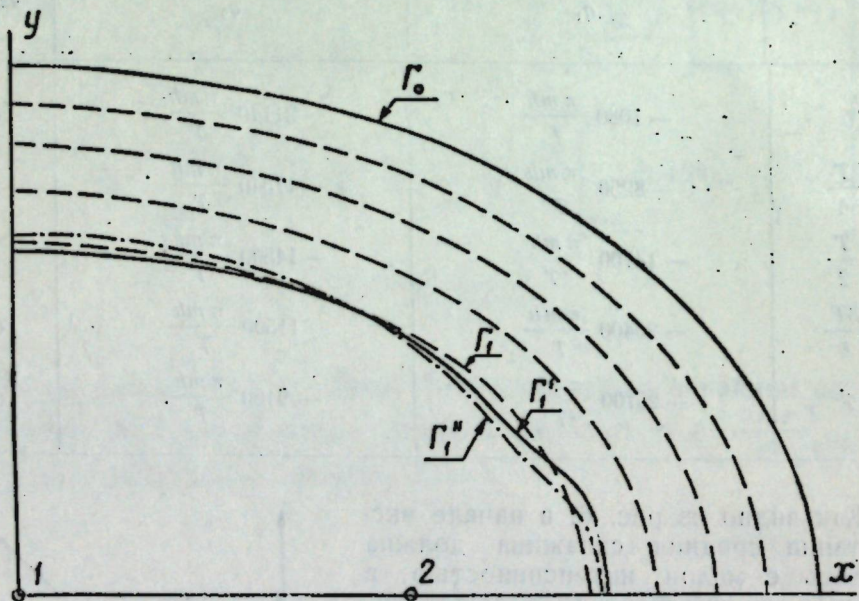


Рис. 7.

Теперь проследим, как стянется контур Γ_0 , если усреднить полученные отношения дебитов за весь промежуток времени T . Для этого сложим площади S_1, S_2, S_3, S_4 и разделим их на длину всего промежутка времени T . Тогда получим, что усредненное за весь промежуток отношение дебитов

$$\left(\frac{q_2}{q_1}\right)_{\text{ср}} = 2.$$

Проводя прослеживание КН тем же путем, что и ранее [4], но с постоянным отношением дебитов $\left(\frac{q_2}{q_1}\right)_{\text{ср}} = 2$, придем к контуру Γ_1'' .

Из сравнения контуров Γ_1' с Γ_1'' видно, что менее точное решение задачи управления КН с помощью усреднения отношения дебитов на всем промежутке времени приводит к большему отклонению конечного контура Γ_1'' от заданного контура Γ_1 .

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

1. Салехов Г. С. Приложение одного метода минимальной погрешности к решению задач управления движением контура нефтеносности (см. настоящий выпуск).
2. Салехов Г. С. Об одном способе решения задачи управления движением контура нефтеносности в пластах с водоупорным режимом (см. настоящий выпуск).
3. Зайден Г. Элементы прикладного анализа. ГТИ, 1932.
4. Иванов Н. Ф. Графоаналитический метод прослеживания контура нефтеносности (см. настоящий выпуск).

Поступило
20 декабря 1954 г.

Физико-технический ин-т
Казанского филиала АН СССР.

Г. С. САЛЕХОВ

О МЕТОДЕ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ ОДНОВРЕМЕННОГО УПРАВЛЕНИЯ ДВИЖЕНИЕМ НЕСКОЛЬКИХ КОНТУРОВ НЕФТЕНОСНОСТИ

В работе даются постановка и методы решения задач одновременного управления движением нескольких контуров нефтеносности.

§ 1. Постановка задачи

В работах [1]—[4] нами изучались постановка и решение задач управления движением одного КН (контура нефтеносности), когда закон движения КН задается некоторым уравнением в полярных координатах $r=f(\theta, t)$, где $f(\theta, t)$ есть непрерывная функция для $0 \leq \theta \leq 2\pi$ при любом t в промежутке $0 \leq t \leq T$. В работах [4] и [5] рассматривалось решение этой задачи также в случае, когда начальное положение КН задано совокупностью дискретных точек, определенных по местным отметкам на данном месторождении.

В настоящей работе показывается, что метод минимальной погрешности, использованный ранее, может быть применен к решению задач одновременного управления движением нескольких КН. Рассмотрение этих задач имеет также большое практическое значение для рациональной эксплуатации нефтяных месторождений. Покажем это на некоторых конкретных примерах. При эксплуатации

крупных нефтяных месторождений обычно приходится их эксплуатировать, предварительно разрезая на два или несколько отдельных участков. Такое разрезание производится следующим образом. Пусть имеется крупное месторождение G с общим первоначальным КН Γ_0 (см. рис. 1). По некоторой линии AB , указанной на рисунке 1 пунктиром, разбуривается батарея скважин. Эти скважины эксплуатируются таким образом, чтобы произошло разрезание водой место-

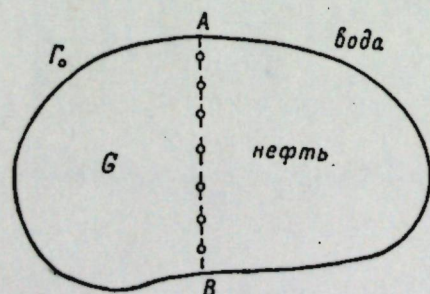


Рис. 1.

рождения G на две отдельные нефтяные зоны G_1 и G_2 (см. рис. 2) соответственно с некоторыми начальными положениями КН $\Gamma_1^{(0)}$ и $\Gamma_2^{(0)}$. При этом возникает практическая необходимость решения задач одновременного управления движением двух КН Γ_1 и Γ_2 , имеющих некоторые исходные начальные положения $\Gamma_1^{(0)}$ и $\Gamma_2^{(0)}$.

Помимо указанного, необходимость решения задач управления движением нескольких КН может возникнуть при других обстоятельствах, которые изложены нами ниже.

При рассмотрении вопросов о продвижении КН обычно предполагается, что размеры (ширина) контакта между нефтью и вытесняющей водой невелики по сравнению с размерами площади разработки. Такое допущение делается во многих работах, посвященных изучению движения КН. За основной плоский КН принимается проекция некоторых средних точек площади водо-нефтяного контакта на горизонтальную плоскость и расчетным КН считается средний контур Γ между контурами Γ_1 и Γ_2 по кровле и по подошве пласта (см. рис. 3). Некоторое обоснование законности такого допущения дается, например, в работе [6].

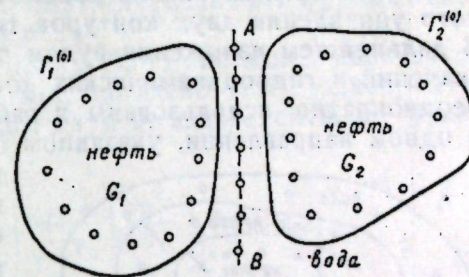


Рис. 2.

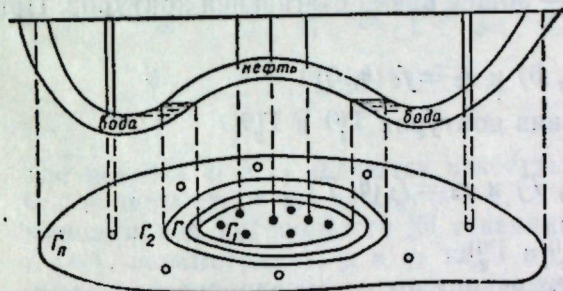


Рис. 3.

На рис. 3 через Γ_n обозначен контур питания; точки, нанесенные в области, ограниченной контуром Γ_1 , обозначают эксплуатационные скважины; маленькие кружочки, размещенные на кольце между контурами Γ_2 и Γ_n , приняты за нагнетательные скважины.

Несмотря на незначительные размеры продуктивной мощности пласта по сравнению с общими размерами месторождения, вышеуказанное осреднение КН весьма часто может быть и необоснованным.

В самом деле, пусть пласт имеет незначительный наклон α к горизонту (см. рис. 4). Тогда ширина L КН, а также площадь, заключенная между контурами Γ_1 и Γ_2 , могут достигать значительной величины. Поэтому в этих случаях вышеуказанное осреднение КН является необоснованным. Здесь уже необходимо следить одновременно за движением внешнего (по кровле) и внутреннего (по подошве) контуров самостоятельно. Для того, чтобы различать вышеуказанные КН от контуров по кровле и по подошве, для последних соответственно введем сокращенные обозначения КН (К) и КН (П). В более сложных случаях рельефа продуктивного пласта могут возникать задачи о необходимости изучения движения нескольких контуров типа КН, КН (К) и КН (П). В соответствии с этим также естественно возникает необходимость рассмотрения задач об одновременном управлении движением нескольких контуров нефтеносности вышеуказанного типа. На практическую важность изучения такого рода задач впервые нам было указано в 1953 г. начальником геологической службы объединения „Татнефть“ Н. С. Ерофеевым.

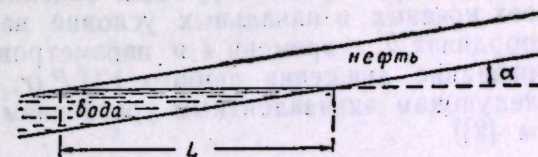


Рис. 4.

§ 2. О методе решения задач одновременного управления движением нескольких КН

Для ясности изложения рассмотрим здесь пока случай одновременного управления двух контуров типа КН(П) — Γ_1 и типа КН(К) — Γ_2 . В дальнейшем изложении будем придерживаться тех основных обозначений и гидродинамических допущений, которые нами были уже неоднократно использованы в работах [2]–[4]. Γ_1 и Γ_2 стягиваются в одном направлении, указанном стрелками на рис. 5. Первоначальное положение контуров Γ_1 и Γ_2 в момент времени $t=0$ соответственно обозначим через $\Gamma_1^{(0)}$ и $\Gamma_2^{(0)}$. Предположим, что желаемые законы стягивания контуров $\Gamma_1^{(0)}$ и $\Gamma_2^{(0)}$ соответственно к наперед заданным контурам $\Gamma_1^{(1)}$ и $\Gamma_2^{(1)}$ представлены уравнениями

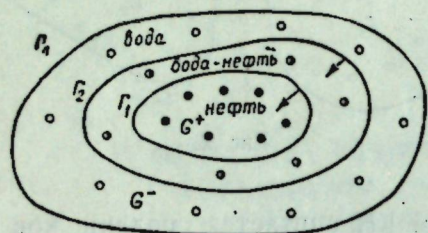


Рис. 5.

$r_1 = f_1(\theta, t)$ и $r_2 = f_2(\theta, t)$,

где $0 \leq \theta \leq 2\pi$, $0 \leq t \leq T$, T — общее время стягивания контуров. При этом считаем, что

$$r_1 = f_1(\theta, 0) \text{ и } r_2 = f_2(\theta, 0)$$

соответственно дают уравнения контуров $\Gamma_1^{(0)}$ и $\Gamma_2^{(0)}$

и

$$r_1 = f_1(\theta, T) \text{ и } r_2 = f_2(\theta, T)$$

дают уравнения контуров $\Gamma_1^{(1)}$ и $\Gamma_2^{(1)}$.

Пусть указанные законы стягивания мы хотим осуществить наилучшим образом за счет работы и размещения общего числа N эксплуатационных и нагнетательных скважин, применяя метод минимальной погрешности со среднеквадратической нормой отклонения двух полей скоростей — „желаемого“ и „допустимого“. Полярные координаты скважин обозначим через (φ_i, ρ_i) ($i=1, 2, \dots, N$) и объемные текущие дебиты их через q_i ($i=1, 2, \dots, N$). Предположим далее, что функция давления p , соответствующая заданному режиму пласта, с учетом всех краевых и начальных условий найдена как функция полярных координат θ, r времени t и параметров (φ_i, ρ_i) и q_i . Известно, что уравнение движения любого КН $F(r, \theta, t) = 0$ удовлетворяет двум следующим эквивалентным уравнениям движения КН (см. § 3 работы [2])

$$\left. \begin{aligned} m \frac{\partial F}{\partial t} - \frac{k}{\mu_n} \left[\frac{1}{r^2} \cdot \frac{\partial p^+}{\partial \theta} \right]_{\Gamma} \cdot \frac{\partial F}{\partial \theta} - \frac{k}{\mu_n} \left[\frac{\partial p^+}{\partial r} \right]_{\Gamma} \cdot \frac{\partial F}{\partial r} = 0, \\ \text{и} \\ m \frac{\partial F}{\partial t} - \frac{k}{\mu_n} \left[\frac{1}{r^2} \cdot \frac{\partial p^-}{\partial \theta} \right]_{\Gamma} \cdot \frac{\partial F}{\partial \theta} - \frac{k}{\mu_n} \left[\frac{\partial p^-}{\partial r} \right]_{\Gamma} \cdot \frac{\partial F}{\partial r} = 0, \end{aligned} \right\} \quad (2.1)$$

где m — пористость, k — проницаемость, μ_n и μ_n — соответственно вязкости нефти и воды, Γ — текущее положение КН, p^+ — функция давления, определенная внутри нефтяной зоны G^+ , ограниченной контуром Γ , и p^- — функция давления, определенная в водной зоне G^- (вне области G^+). Соответственно этому для изучения движения контуров типа КН(К) и КН(П) предположим также, что функция p

при заданных законах стягивания $r_1 = f_1(\theta, t)$ и $r_2 = f_2(\theta, t)$ с учетом необходимых краевых и начальных условий определена в чисто нефтяной зоне G^+ , ограниченной контуром Γ_1 , и в чисто водной зоне G^- , ограниченной контурами Γ_2 и Γ_n . Соответственно эти функции давления обозначим также через p^+ и p^- .

Тогда, если бы $r_1 = f_1(\theta, t)$ и $r_2 = f_2(\theta, t)$ оказались действительными уравнениями контуров, то они, согласно (2.1), одновременно должны удовлетворять следующим двум не эквивалентным * уравнениям движения

$$\left. \begin{aligned} m \frac{\partial r_1}{\partial t} - \frac{k}{\mu_n} \cdot \frac{1}{r_1^2} \cdot \frac{\partial r_1}{\partial \theta} \left[\frac{\partial p^-}{\partial \theta} \right]_{\Gamma_1} + \frac{k}{\mu_n} \left[\frac{\partial p^-}{\partial r_1} \right]_{\Gamma_1} = 0, \\ m \frac{\partial r_2}{\partial t} - \frac{k}{\mu_n} \cdot \frac{1}{r_2^2} \cdot \frac{\partial r_2}{\partial \theta} \left[\frac{\partial p^+}{\partial \theta} \right]_{\Gamma_2} + \frac{k}{\mu_n} \left[\frac{\partial p^+}{\partial r_2} \right]_{\Gamma_2} = 0. \end{aligned} \right\} \quad (2.2)$$

В силу того, что законы стягивания контуров Γ_1 и Γ_2 являются наперед заданными (навязанными), подставляя заданные r_1 и r_2 в уравнение (2.2), получим

$$\left. \begin{aligned} m \frac{\partial r_1}{\partial t} - \frac{k}{\mu_n} \cdot \frac{1}{r_1^2} \cdot \frac{\partial r_1}{\partial \theta} \left[\frac{\partial p^-}{\partial \theta} \right]_{\Gamma_1} + \frac{k}{\mu_n} \left[\frac{\partial p^-}{\partial r_1} \right]_{\Gamma_1} = \varepsilon_1, \\ m \frac{\partial r_2}{\partial t} - \frac{k}{\mu_n} \cdot \frac{1}{r_2^2} \cdot \frac{\partial r_2}{\partial \theta} \left[\frac{\partial p^+}{\partial \theta} \right]_{\Gamma_2} + \frac{k}{\mu_n} \left[\frac{\partial p^+}{\partial r_2} \right]_{\Gamma_2} = \varepsilon_2, \end{aligned} \right\} \quad (2.3)$$

где невязки ε_1 и ε_2 являются известными функциями от переменных θ, t и параметров φ_i, ρ_i и q_i ($i=1, 2, \dots, N$). Далее, применяя методы минимальной погрешности [6] с какими-либо принятыми нормами $\|\varepsilon_1\|$ и $\|\varepsilon_2\|$, параметры φ_i, ρ_i и q_i надо подобрать так, чтобы эти нормы оказались одновременно возможно наименее уклоняющимися от нуля.

Используем, например, метод минимальной погрешности с нормой средне-квадратического уклонения.

Пусть

$$I_1^2 = \|\varepsilon_1\|^2 = \frac{1}{L_1} \int_0^{L_1} \varepsilon_1^2 ds_1 \quad (2.4)$$

и

$$I_2^2 = \|\varepsilon_2\|^2 = \frac{1}{L_2} \int_0^{L_2} \varepsilon_2^2 ds_2, \quad (2.5)$$

где $ds_1 = \sqrt{r_1^2 + \left(\frac{\partial r_1}{\partial \theta}\right)^2} d\theta$ и $ds_2 = \sqrt{r_2^2 + \left(\frac{\partial r_2}{\partial \theta}\right)^2} d\theta$ суть дифференциалы дуг кривых Γ_1 и Γ_2 ; L_1 и L_2 — соответственно длины дуг этих кривых.

Вместо двух интегралов (2.4) и (2.5) можно рассмотреть минимум их суммы

$$I^2 = \frac{1}{L_1} \int_0^{L_1} \varepsilon_1^2 ds_1 + \frac{1}{L_2} \int_0^{L_2} \varepsilon_2^2 ds_2. \quad (2.6)$$

* Так как значения функций p^+ и p^- и их производных на разных контурах Γ_1 и Γ_2 будут различными.

Переходя к общей переменной θ , выражение (2.6) можно представить в виде:

$$I^2 = \int_0^{2\pi} \left[\frac{1}{L_1} \varepsilon_1^2 \sqrt{r_1^2 + \left(\frac{\partial r_1}{\partial \theta}\right)^2} + \frac{1}{L_2} \varepsilon_2^2 \sqrt{r_2^2 + \left(\frac{\partial r_2}{\partial \theta}\right)^2} \right] d\theta. \quad (2.7)$$

Для определения значений параметров φ_i , ρ_i и q_i ($i=1, 2, \dots, N$) будем иметь следующую систему $3N$ уравнений с $3N$ неизвестными:

$$\frac{\partial I^2}{\partial \varphi_i} = 0, \quad \frac{\partial I^2}{\partial \rho_i} = 0, \quad \frac{\partial I^2}{\partial q_i} = 0. \quad (2.8)$$

$(i = 1, 2, \dots, N).$

Если координаты скважин (φ_i, ρ_i) фиксированы и задача управления движением КН решается лишь за счет характера эксплуатации, то-есть за счет вариации текущих дебитов q_i ($i=1, 2, \dots, N$), то для определения q_i вместо (2.8) будем иметь систему N уравнений с N неизвестными:

$$\frac{\partial I^2}{\partial q_i} = 0 \quad (2.9)$$

$(i = 1, 2, \dots, N).$

После того, как φ_i , ρ_i и q_i вычислены, средне-квадратическая ошибка может быть подсчитана по формуле (2.7) или же по формулам (2.4) и (2.5). Очевидно, на практике следует ожидать, что контуры Γ_1 и Γ_2 будут неодинаково точно управляемы, т. е. ε_1 и ε_2 могут иметь неодинаковый порядок малости. При необходимости можно обеспечивать более точное управление того или иного контура за счет соответствующей вариации параметров φ_i , ρ_i и q_i . Для этой цели мы ниже рассмотрим еще другой способ решения задачи, основанный на тех соображениях, которые нами использованы в работе [2].

Рассмотрим следующие два интеграла:

$$I_1^2 = \frac{1}{L_1} \int_0^{2\pi} \varepsilon_1^2 \sqrt{r_1^2 + \left(\frac{\partial r_1}{\partial \theta}\right)^2} d\theta, \quad (2.10)$$

$$I_2^2 = \frac{1}{L_2} \int_0^{2\pi} \varepsilon_2^2 \sqrt{r_2^2 + \left(\frac{\partial r_2}{\partial \theta}\right)^2} d\theta, \quad (2.11)$$

из которых первый относится к контуру Γ_1 и второй — к контуру Γ_2 .

Выражения $\varepsilon_1 \sqrt{r_1^2 + \left(\frac{\partial r_1}{\partial \theta}\right)^2}$ и $\varepsilon_2 \sqrt{r_2^2 + \left(\frac{\partial r_2}{\partial \theta}\right)^2}$ в промежутке $0 \leq \theta \leq 2\pi$ разложим в ряды Фурье.

Имеем

$$\varepsilon_1 \sqrt{r_1^2 + \left(\frac{\partial r_1}{\partial \theta}\right)^2} = \frac{a_{01}}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} [a_{k1} \cos k\theta + b_{k1} \sin k\theta]$$

$$\varepsilon_2 \sqrt{r_2^2 + \left(\frac{\partial r_2}{\partial \theta}\right)^2} = \frac{a_{02}}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} [a_{k2} \cos k\theta + b_{k2} \sin k\theta].$$

Тогда, согласно (2.10) и (2.11), получим

$$I_1^2 = \frac{a_{01}^2}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} [a_{k1}^2 + b_{k1}^2] \quad (2.12)$$

$$I_2^2 = \frac{a_{02}^2}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} [a_{k2}^2 + b_{k2}^2]. \quad (2.13)$$

Здесь коэффициенты Фурье a_{ki} ($k=0, 1, 2, \dots, i=1, 2$), b_{ki} ($k=1, 2, \dots, i=1, 2$), очевидно, будут являться функциями параметров φ_i , ρ_i и q_i ($i=1, 2, \dots, N$). Далее, зная, что коэффициенты Фурье, начиная с некоторого номера $k \geq N$, убывают, и обеспечивая одновременно возможно наименьшие значения интегралов I_1^2 и I_2^2 , мы можем параметры φ_i , ρ_i и q_i выбрать так, чтобы выполнялись условия, указанные в таблице.

Таблица

1-я группа уравнений	2-я группа уравнений
$a_{01} = 0,$	$a_{02} = 0,$
$a_{11} = 0, \quad b_{11} = 0$	$a_{12} = 0, \quad b_{12} = 0$
$a_{21} = 0, \quad b_{21} = 0$	$a_{22} = 0, \quad b_{22} = 0$
\dots	\dots
$a_{\lambda 1} = 0, \quad b_{\lambda 1} = 0$	$a_{\lambda 2} = 0, \quad b_{\lambda 2} = 0$

При выборе числа уравнений в 1-й и во 2-й группе следует иметь в виду, что 1) в каждой группе необходимо брать последовательно только те уравнения, которые между собой не зависимы и не обращаются тождественно в нуль, 2) общее число этих уравнений должно соответствовать числу определяемых неизвестных φ_i , ρ_i и q_i . Очевидно, выбор числа уравнений в каждой группе зависит от нас, и чем больше число уравнений, взятое в данной группе, тем следует ожидать более точного решения задачи управления КН для соответствующего контура Γ_1 или Γ_2 . Таким образом, задача управления КН для каждого контура Γ_1 и Γ_2 может решаться с точностью до определенного числа полных или неполных гармоник. В следующем параграфе мы покажем приложение вышеуказанного метода к решению одной частной задачи одновременного управления движением двух контуров.

§ 3. Решение одной задачи управления движением двух контуров

Рассмотрим решение одной частной задачи управления движением двух контуров в предположении, что $\mu_a = \mu_n$. Пусть контуры $\Gamma_1^{(0)}$, $\Gamma_2^{(0)}$ и $\Gamma_1^{(1)}$, $\Gamma_2^{(1)}$ являются концентрическими окружностями соответственно радиусов r_{01} , r_{02} и r_{11} , r_{12} . Законы стягивания Γ_1 и Γ_2 зададим уравнениями

$$r_1^2 = r_{01}^2 - \frac{t}{T} (r_{01}^2 - r_{11}^2) \quad \text{и} \quad r_2^2 = r_{02}^2 - \frac{t}{T} (r_{02}^2 - r_{12}^2), \quad (3.1)$$

где T — общее время стягивания $\Gamma_1^{(0)}$ к $\Gamma_1^{(1)}$ и $\Gamma_2^{(0)}$ к $\Gamma_2^{(1)}$. Предположим, что внутри круга Γ_1 размещены n_1 скважин, на кольце между окружностями Γ_1 и Γ_2 размещены n_2 скважин и вне круга Γ_2 — n_3 скважин (см. рис. 6).

Полярные координаты скважин обозначим через (φ_i, ρ_i) , причем будем считать, что индексы $i = 1, 2, \dots, n$ соответствуют скважинам, размещенным внутри круга Γ_1 , индексы $i = n_1 + 1, n_1 + 2, \dots, n_1 + n_2$ — скважинам, размещенным внутри кольца между Γ_1 и Γ_2 , индексы $i = n_1 + n_2 + 1, n_1 + n_2 + 2, \dots, n_1 + n_2 + n_3$ — скважинам, размещенным вне круга Γ_2 .

Для решения задачи одновременного управления контурами Γ_1 и Γ_2 по заданным законам (3.1) применим, например, 2-й способ, указанный в § 2.

Как известно [2], в случае $\mu_n = \mu_{11}$ функция давления p легко определяется в зависимости от параметров φ_i, ρ_i и q_i . Поэтому также без труда найдутся в явном виде уравнения, приведенные нами

в таблице § 2. Для простоты эти системы уравнений мы запишем без учета контура питания [2].

Введем следующие сокращенные обозначения:

$$\left. \begin{aligned} x_i &= \frac{\rho_i}{r_1}, \text{ если } i = 1, 2, \dots, n_1, \\ y_i &= \frac{r_1}{\rho_i}, \text{ если } i = n_1 + 1, n_1 + 2, \dots, n_1 + n_2, \\ & \quad n_1 + n_2 + 1, \dots, n_1 + n_2 + n_3, \\ z_i &= \frac{\rho_i}{r_2}, \text{ если } i = 1, 2, \dots, n_1, n_1 + 1, \dots, n_1 + n_2, \\ u_i &= \frac{r_2}{\rho_i}, \text{ если } i = n_1 + n_2 + 1, n_1 + n_2 + 2, \dots, n_1 + n_2 + n_3. \end{aligned} \right\} \quad (3.2)$$

Очевидно, каждая из величин x_i, y_i, z_i и u_i всегда больше нуля и меньше единицы.

Кроме того, положим

$$V_1^{(0)} = -2\pi hm (r_{01}^2 - r_{11}^2) \quad (3.3)$$

$$\text{и} \quad V_2^{(0)} = -2\pi hm (r_{02}^2 - r_{12}^2), \quad (3.4)$$

где m — пористость и h — мощность пласта. Тогда 1-я группа уравнений для контура Γ_1 после некоторых упрощений примет следующий вид:

$$\sum_{i=1}^{n_1} q_i = \frac{V_1^{(0)}}{T},$$

$$\sum_{i=1}^{n_1} q_i x_i^k \cos k \varphi_i - \sum_{i=n_1+1}^{n_1+n_2+n_3} q_i y_i^k \cos k \varphi_i = 0,$$

$$\sum_{i=1}^{n_1} q_i x_i^k \sin k \varphi_i - \sum_{i=n_1+1}^{n_1+n_2+n_3} q_i y_i^k \sin k \varphi_i = 0,$$

где $k = 1, 2, 3, \dots$

2-я группа уравнений для контура Γ_2 принимает вид:

$$\sum_{i=1}^{n_1+n_2} q_i = \frac{V_2^{(0)}}{T},$$

$$\sum_{i=1}^{n_1+n_2} q_i z_i^k \cos k \varphi_i - \sum_{i=n_1+n_2+1}^{n_1+n_2+n_3} q_i u_i^k \cos k \varphi_i = 0,$$

$$\sum_{i=1}^{n_1+n_2} q_i z_i^k \sin k \varphi_i - \sum_{i=n_1+n_2+1}^{n_1+n_2+n_3} q_i u_i^k \sin k \varphi_i = 0,$$

где $k = 1, 2, 3, \dots$

Запишем все вышеприведенные уравнения в безразмерных величинах.

Для этого каждое уравнение разделим на величину $\frac{V_1^{(0)} + V_2^{(0)}}{T}$ и введем сокращенные обозначения

$$\delta_1 = - \frac{V_1^{(0)}}{V_1^{(0)} + V_2^{(0)}}, \quad (3.5)$$

$$\delta_2 = - \frac{V_2^{(0)}}{V_1^{(0)} + V_2^{(0)}}. \quad (3.6)$$

Положим

$$\tilde{q}_i = - \frac{T q_i}{V_1^{(0)} + V_2^{(0)}}$$

и для простоты записи в дальнейшем знак "tilde" над q_i опустим. Тогда, понимая под q_i безразмерные относительные текущие объемные дебиты скважин, систему уравнений окончательно можно представить в следующем виде:

для 1-й группы

$$\sum_{i=1}^{n_1} q_i = \delta_1,$$

$$\sum_{i=1}^{n_1} q_i x_i^k \cos k\varphi_i - \sum_{i=n_1+1}^{n_1+n_2+n_3} q_i y_i^k \cos k\varphi_i = 0,$$

$$\sum_{i=1}^{n_1} q_i x_i^k \sin k\varphi_i - \sum_{i=n_1+1}^{n_1+n_2+n_3} q_i y_i^k \sin k\varphi_i = 0;$$
(3.7)

для 2-й группы

$$\sum_{i=1}^{n_1+n_2} q_i = \delta_2,$$

$$\sum_{i=1}^{n_1+n_2} q_i z_i^k \cos k\varphi_i - \sum_{i=n_1+n_2+1}^{n_1+n_2+n_3} q_i u_i^k \cos k\varphi_i = 0,$$

$$\sum_{i=1}^{n_1+n_2} q_i z_i^k \sin k\varphi_i - \sum_{i=n_1+n_2+1}^{n_1+n_2+n_3} q_i u_i^k \sin k\varphi_i = 0.$$

$k = 1, 2, 3, \dots$

(3.8)

Легко видеть, что первые уравнения в группах 1 и 2, т. е. уравнения

$$\sum_{i=1}^{n_1} q_i = \delta_1 \quad \text{и} \quad \sum_{i=1}^{n_1+n_2} q_i = \delta_2,$$

являются уравнениями баланса, имеющими очевидный физический смысл:

1. Разработанный объем $V_1^{(0)}$ кольцевого цилиндра высотой h должен равняться суммарной добыче $T \sum_{i=1}^{n_1} q_i$ всех скважин, размещенных внутри круга Γ_1 .

2. Разработанный объем $V_2^{(0)}$ кольцевого цилиндра высотой h должен равняться суммарной добыче $T \sum_{i=1}^{n_1+n_2} q_i$ всех скважин, размещенных внутри круга Γ_2 .

Для совместного решения систем уравнений (3.7) и (3.8) мы должны руководствоваться теми основными положениями, которые нами были указаны в конце § 2.

Рассмотрим один пример.

Возьмем случай трех круговых батарей, каждая из которых размещена соответственно внутри круга Γ_1 , в кольце между Γ_1 и Γ_2 и

вне круга Γ_2 . Число скважин в каждой батарее одинаково и равно n . Расстояния между скважинами в каждой батарее равны. Радиусы батарей соответственно обозначим через ρ_1 , ρ_2 и ρ_3 , причем $0 < \rho_1 < \rho_2 < \rho_3$.

Соответственно для полярных углов введем обозначения:

$$\left. \begin{aligned} \varphi_{1i} &= \frac{2\pi(i-1)}{n} + \alpha_1, \\ \varphi_{2i} &= \frac{2\pi(i-1)}{n} + \alpha_2, \\ \varphi_{3i} &= \frac{2\pi(i-1)}{n} + \alpha_3, \end{aligned} \right\} \quad (3.9)$$

$i = 1, 2, \dots, n,$

где α_1 , α_2 и α_3 — начальные углы отсчета. Если q_{1i} ($i = 1, 2, \dots, n$) обозначают относительные текущие дебиты скважин 1-й батареи, q_{2i} ($i = 1, 2, \dots, n$) — 2-й батареи и q_{3i} ($i = 1, 2, \dots, n$) — 3-й батареи, то из симметричности расположения скважин и закона стягивания КН следует, что

$$\left. \begin{aligned} q_{11} &= q_{12} = \dots = q_{1n} = q_1, \\ q_{21} &= q_{22} = \dots = q_{2n} = q_2, \\ q_{31} &= q_{32} = \dots = q_{3n} = q_3. \end{aligned} \right\} \quad (3.10)$$

Согласно принятым обозначениям (3.2), будем иметь

$$\left. \begin{aligned} x_i &= x = \frac{\rho_1}{r_1}, \quad \text{если } i = 1, 2, \dots, n, \\ y_i &= y_1 = \frac{r_1}{\rho_2}, \quad \text{если } i = n+1, n+2, \dots, 2n, \\ y_i &= y_2 = \frac{r_1}{\rho_3}, \quad \text{если } i = 2n+1, 2n+2, \dots, 3n, \\ z_i &= z_1 = \frac{\rho_1}{r_2}, \quad \text{если } i = 1, 2, \dots, n, \\ z_i &= z_2 = \frac{r_2}{\rho_2}, \quad \text{если } i = n+1; n+2, \dots, 2n, \\ u_i &= u = \frac{r_2}{\rho_3}, \quad \text{если } i = 2n+1, 2n+2, \dots, 3n. \end{aligned} \right\} \quad (3.11)$$

Учитывая (3.9), (3.10) и (3.11), уравнения (3.7) для 1-й группы можно представить в виде:

$$\left. \begin{aligned} nq_1 &= \delta_1, \\ q_1 x^k \sum_{i=1}^n \cos k\varphi_{1i} - q_2 y_1^k \sum_{i=1}^n \cos k\varphi_{2i} - q_3 y_2^k \sum_{i=1}^n \cos k\varphi_{3i} &= 0, \\ q_1 x^k \sum_{i=1}^n \sin k\varphi_{1i} - q_2 y_2^k \sum_{i=1}^n \sin k\varphi_{2i} - q_3 y_2^k \sum_{i=1}^n \sin k\varphi_{3i} &= 0, \end{aligned} \right\} \quad (3.12)$$

$k = 1, 2, 3, \dots$

Аналогично для 2-й группы будем иметь

$$\left. \begin{aligned} n(q_1 + q_2) &= \delta_2, \\ q_1 z_1^k \sum_{i=1}^n \cos k\varphi_{1i} + q_2 z_2^k \sum_{i=1}^n \cos k\varphi_{2i} - q_3 u^k \sum_{i=1}^n \cos k\varphi_{3i} &= 0, \\ q_1 z_1^k \sum_{i=1}^n \sin k\varphi_{1i} + q_2 z_2^k \sum_{i=1}^n \sin k\varphi_{2i} - q_3 u^k \sum_{i=1}^n \sin k\varphi_{3i} &= 0. \end{aligned} \right\} (3.13)$$

Далее, пользуясь известными формулами

$$\left. \begin{aligned} \sum_{i=1}^n \cos k\left(\alpha + \frac{2\pi i}{n}\right) &= \begin{cases} 0, & \text{если } k \neq np, \text{ где } p - \text{целое число,} \\ np \cos np\alpha, & \text{если } k = np, \end{cases} \\ \sum_{i=1}^n \sin k\left(\alpha + \frac{2\pi i}{n}\right) &= \begin{cases} 0, & \text{если } k \neq np, \\ np \sin np\alpha, & \text{если } k = np, \end{cases} \end{aligned} \right\} (3.14)$$

и (не ограничивая общности выводов) при $\alpha_1 = 0$ система уравнений (3.12) легко приводится к виду

$$\left. \begin{aligned} nq_1 &= \delta_1, \\ q_1 x^{np} - q_2 y_1^{np} \cos np\alpha_2 - q_3 y_2^{np} \cos np\alpha_3 &= 0, \\ -q_2 y_1^{np} \sin np\alpha_2 - q_3 y_2^{np} \sin np\alpha_3 &= 0, \end{aligned} \right\} (3.12)'$$

где $p = 1, 2, 3, \dots$

Аналогично система (3.13) приводится к виду

$$\left. \begin{aligned} n(q_1 + q_2) &= \delta_2, \\ q_1 z_1^{np} + q_2 z_2^{np} \cos np\alpha_2 - q_3 u^{np} \cos np\alpha_3 &= 0, \\ q_2 z_2^{np} \sin np\alpha_2 - q_3 u^{np} \sin np\alpha_3 &= 0, \end{aligned} \right\} (3.13)'$$

где $p = 1, 2, 3, \dots$

При получении систем уравнений (3.12)' и (3.13)' соответственно из систем (3.12) и (3.13) следует иметь в виду, что благодаря соотношениям (3.14) в системах (3.12) и (3.13) уравнения для индексов k , не кратных n , обращаются тождественно в нуль. Таким образом, если, например, в (3.12)' и (3.13)' положить $p = 1$, то мы получим системы уравнений, позволяющих решать задачу управления движением каждого из контуров Γ_1 и Γ_2 с учетом n полных гармоник. Для одновременного управления движением двух контуров Γ_1 и Γ_2 , как было уже указано выше, следует решать системы (3.12)' и (3.13)' совместно. Полагая, например, $p = 1$, согласно (3.12)' и (3.13)', мы можем рассмотреть систему из следующих шести уравнений

$$\left. \begin{aligned} q_1 &= \frac{\delta_1}{n}, & q_1 + q_2 &= \frac{\delta_2}{n}, \\ q_1 x^n - q_2 y_1^n \cos n\alpha_2 - q_3 y_2^n \cos n\alpha_3 &= 0, & q_1 z_1^n + q_2 z_2^n \cos n\alpha_2 - q_3 u^n \cos n\alpha_3 &= 0, \\ -q_2 y_1^n \sin n\alpha_2 - q_3 y_2^n \sin n\alpha_3 &= 0, & q_2 z_2^n \sin n\alpha_2 - q_3 u^n \sin n\alpha_3 &= 0. \end{aligned} \right\} (3.15)$$

Рассмотрим случай, когда положение круговых батарей фиксировано, т. е. радиусы r_1, r_2 и r_3 заданы. Требуется определить неизвестные $\alpha_2, \alpha_3, q_1, q_2, q_3$. Незвестных 5, поэтому все 6 уравнений выше-

указанной системы одновременно не могут быть использованы. Из этих 6 уравнений мы можем использовать всего 5 уравнений. При этом нам необходимо получить такие решения, чтобы α_2 и α_3 не зависели от времени t . Для этой цели мы можем рассмотреть следующие две системы, каждая из которых состоит из 5 уравнений с 5 неизвестными $\alpha_2, \alpha_3, q_1, q_2, q_3$. Первая система:

$$\left. \begin{aligned} q_1 &= \frac{\delta_1}{n}, & q_1 + q_2 &= \frac{\delta_2}{n}, \\ q_1 x^n - q_2 y_1^n \cos n\alpha_2 - q_3 y_2^n \cos n\alpha_3 &= 0, \\ -q_2 y_1^n \sin n\alpha_2 - q_3 y_2^n \sin n\alpha_3 &= 0, \\ q_2 z_2^n \sin n\alpha_2 - q_3 u^n \sin n\alpha_3 &= 0. \end{aligned} \right\} (3.16)$$

Вторая система:

$$\left. \begin{aligned} q_1 &= \frac{\delta_1}{n}, & q_1 + q_2 &= \frac{\delta_2}{n}, \\ q_1 z_1^n + q_2 z_2^n \cos n\alpha_2 - q_3 u^n \cos n\alpha_3 &= 0, \\ -q_2 y_1^n \sin n\alpha_2 - q_3 y_2^n \sin n\alpha_3 &= 0, \\ q_2 z_2^n \sin n\alpha_2 - q_3 u^n \sin n\alpha_3 &= 0. \end{aligned} \right\} (3.17)$$

В системе (3.16) учитываются 3 уравнения 1-й группы и 2 уравнения 2-й группы. В системе (3.17), наоборот, учитываются 2 уравнения 1-й группы и 3 уравнения 2-й группы. Поэтому при решении системы (3.16) мы получим, вообще говоря, более точное управление контуром Γ_1 и при решении системы (3.17) — более точное управление контуром Γ_2 .

Далее, рассмотрим решение систем уравнений (3.16) и (3.17). Из последних двух уравнений этих систем легко можно определить возможные α_2 и α_3 . В самом деле, основной определитель системы двух уравнений

$$\begin{aligned} q_2 y_1^n \sin n\alpha_2 + q_3 y_2^n \sin n\alpha_3 &= 0, \\ q_2 z_2^n \sin n\alpha_2 - q_3 u^n \sin n\alpha_3 &= 0 \end{aligned}$$

будет

$$\Delta = -q_2 q_3 [(y_1 u)^n + (y_2 z_2)^n] \neq 0,$$

поэтому $\sin n\alpha_2 = 0$ и $\sin n\alpha_3 = 0$. Отсюда возможными случаями решения являются значения $\alpha_2 = 0, \alpha_2 = \frac{\pi}{n}, \alpha_3 = 0, \alpha_3 = \frac{\pi}{n}$.

Попарная комбинация этих углов дает следующие 4 случая:

$$1. \alpha_2 = 0, \alpha_3 = 0.$$

В этом случае скважины всех трех круговых батарей лежат на одних и тех же лучах (см. рис. 7а).

$$2. \alpha_2 = 0, \alpha_3 = \frac{\pi}{n}.$$

Скважины первых двух батарей лежат на одних лучах, а скважины третьей батареи по отношению к первым двум размещены в шахматном порядке (см. рис. 7б).

$$3. \alpha_2 = \frac{\pi}{n}, \alpha_3 = 0.$$

Скважины первой и третьей батарей лежат на одних лучах, а скважины второй батареи по отношению к первой и второй размещены в шахматном порядке (см. рис. 7в).

$$4. \alpha_2 = \frac{\pi}{n}, \quad \alpha_3 = \frac{\pi}{n}.$$

Скважины второй и третьей батарей лежат на одних лучах, а скважины первой батареи по отношению ко второй и третьей размещены в шахматном порядке (см. рис. 7г).

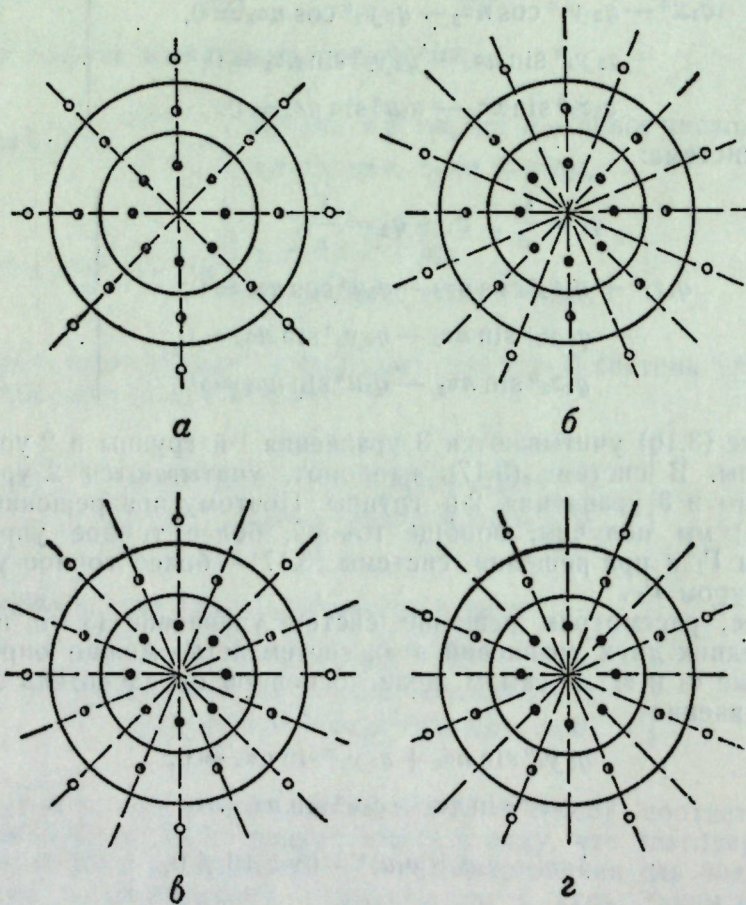


Рис. 7.

Таким образом, четвертое и пятое уравнения систем (3.16) и (3.17) использованы, и они определяют полностью характер размещения скважины во всех трех батареях. Теперь для того, чтобы определить дебиты скважины q_1, q_2, q_3 , воспользуемся первыми тремя уравнениями системы (3.16) и (3.17).

1. Если $\alpha_1 = 0$ и $\alpha_2 = 0$, то система (3.16) дает

$$\begin{aligned} q_1 &= \frac{\delta_1}{n}, \\ q_2 &= \frac{\delta_2 - \delta_1}{n}, \\ q_3 &= \frac{\delta_1}{n} \left(\frac{r_1 r_3}{r_2^2} \right)^n - \frac{(\delta_2 - \delta_1)}{n} \left(\frac{r_3}{r_2} \right)^n. \end{aligned}$$

Эта система значений дебитов, очевидно, решает задачу одновременного управления контурами Γ_1 и Γ_2 точнее относительно контура Γ_1 , чем относительно Γ_2 , если скважины имеют размещение, указанное на рис. 7а. Аналогичная система (3.17) дает

$$\begin{aligned} q_1 &= \frac{\delta_1}{n}, \\ q_2 &= \frac{\delta_2 - \delta_1}{n}, \\ q_3 &= \frac{\delta_1}{n} \left(\frac{r_1 r_3}{r_2^2} \right)^n + \frac{\delta_2 - \delta_1}{n} \left(\frac{r_3}{r_2} \right)^n. \end{aligned}$$

Эта система значений дебитов, очевидно, решает задачу одновременного управления контурами Γ_1 и Γ_2 точнее относительно Γ_2 , чем относительно Γ_1 , при том же размещении скважин.

2. Если $\alpha_2 = 0$ и $\alpha_3 = \frac{\pi}{n}$, то система (3.16) дает

$$\begin{aligned} q_1 &= \frac{\delta_1}{n}, \\ q_2 &= \frac{\delta_2 - \delta_1}{n}, \\ q_3 &= -\frac{\delta_1}{n} \left(\frac{r_1 r_3}{r_2^2} \right)^n + \frac{\delta_2 - \delta_1}{n} \left(\frac{r_3}{r_2} \right)^n. \end{aligned}$$

Эта система значений дебитов решает задачу точнее относительно Γ_1 , чем относительно Γ_2 , при размещении скважин, указанном на рис. 7б.

Система (3.17) дает

$$\begin{aligned} q_1 &= \frac{\delta_1}{n}, \\ q_2 &= \frac{\delta_2 - \delta_1}{n}, \\ q_3 &= -\frac{\delta_1}{n} \left(\frac{r_1 r_3}{r_2^2} \right)^n - \frac{\delta_2 - \delta_1}{n} \left(\frac{r_3}{r_2} \right)^n. \end{aligned}$$

При том же размещении скважин, эти значения дебитов решают задачу точнее относительно Γ_2 , чем относительно Γ_1 . Аналогично для остальных случаев будем иметь следующие решения.

3. Если $\alpha_2 = \frac{\pi}{n}$ и $\alpha_3 = 0$ (рис. 7в), то

$$\left. \begin{aligned} q_1 &= \frac{\delta_1}{n}, \\ q_2 &= \frac{\delta_2 - \delta_1}{n}, \\ q_3 &= \frac{\delta_1}{n} \left(\frac{r_1 r_3}{r_2^2} \right)^n + \frac{\delta_2 - \delta_1}{n} \left(\frac{r_3}{r_2} \right)^n, \end{aligned} \right\}$$

и

$$\left. \begin{aligned} q_1 &= \frac{\delta_1}{n}, \\ q_2 &= \frac{\delta_2 - \delta_1}{n}, \\ q_3 &= \frac{\delta_1}{n} \left(\frac{r_1 r_3}{r_2^2} \right)^n - \frac{\delta_2 - \delta_1}{n} \left(\frac{r_3}{r_2} \right)^n. \end{aligned} \right\}$$

4. Если $\alpha_2 = \frac{\pi}{n}$ и $\alpha_3 = \frac{\pi}{n}$ (рис. 7д), то

$$\left. \begin{aligned} q_1 &= \frac{\delta_1}{n}, \\ q_2 &= \frac{\delta_2 - \delta_1}{n}, \\ q_3 &= -\frac{\delta_1}{n} \left(\frac{r_1 r_3}{r_1^2} \right)^n - \frac{\delta_2 - \delta_1}{n} \left(\frac{r_3}{r_2} \right)^n, \end{aligned} \right\}$$

$$\left. \begin{aligned} q_1 &= \frac{\delta_1}{n}, \\ q_2 &= \frac{\delta_2 - \delta_1}{n}, \\ q_3 &= \frac{\delta_1}{n} \left(\frac{r_1 r_3}{r_2^2} \right)^n - \frac{\delta_2 - \delta_1}{n} \left(\frac{r_2 r_3}{r_2^2} \right)^n. \end{aligned} \right\}$$

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

1. Салехов Г. С. Прямые и обратные задачи о продвижении водонефтяного контакта. Известия Казанского филиала АН СССР, серия физ.-мат. и технич. наук, вып. 5, 1954.
2. Салехов Г. С. Постановка и методы решения гидродинамических задач управления движением контура нефтеносности. Известия Казанского филиала АН СССР, серия физ.-мат. и технич. наук, вып. 6, 1955.
3. Салехов Г. С. Приложение одного метода минимальной погрешности к решению задач управления движением контура нефтеносности (см. настоящий выпуск).
4. Салехов Г. С. Об одном способе решения задачи управления движением контура нефтеносности в пластах с водонапорным режимом (см. настоящий выпуск).
5. Сейфуллина Б. А. Численное решение некоторых задач по управлению движением контура нефтеносности (см. настоящий выпуск).
6. Крылов А. П. и др. Научные основы разработки нефтяных месторождений. Гостехиздат, 1948.

Поступило
20 декабря 1954 г.

Физико-технический институт
Казанского филиала АН СССР.

В. Д. ЧУГУНОВ

К ЗАДАЧЕ УПРАВЛЕНИЯ КОНТУРОМ НЕФТЕНОСНОСТИ ПРИ УПРУГОМ РЕЖИМЕ НЕФТЯНЫХ МЕСТОРОЖДЕНИЙ

В работах Г. С. Салехова [1], [2] была поставлена задача управления контуром нефтеносности в общем виде и даны методы решения для пластов с водонапорным режимом. В данной статье аналогичный метод применяется к решению некоторых задач управления контуром нефтеносности для пластов с упругим режимом.

§ 1. Постановка задачи и ее решение

В однородном горизонтальном пласте постоянной мощности h известно первоначальное положение контура нефтеносности КН — Γ_0 . В нефтяной зоне пласта в точках с координатами α_i, ρ_i ($i = 1, 2, \dots, n$) разбурены n скважин, которые назовем нефтяными; в зоне краевой воды, простирающейся до бесконечности, разбурены l водяных скважин, с координатами α_i, ρ_i ($i = n+1, n+2, \dots, n+l$). Вязкости воды и нефти равны.

Требуется так разместить и эксплуатировать скважины, чтобы первоначальный КН — Γ_0 за время T стянулся к наперед заданному контуру Γ_1 по желаемому нами закону $r = f(\theta, t)$, где $r = f(\theta, 0)$ — уравнение Γ_0 , $r = f(\theta, T)$ — уравнение Γ_1 , Γ — текущее положение КН, T — время эксплуатации (рис. 1).

Как известно, при учете упругости жидкости и среды давление в пласте удовлетворяет уравнению типа теплопроводности [3]

$$a^2 \left(\frac{\partial^2 p}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial p}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 p}{\partial \theta^2} \right) = \frac{\partial p}{\partial t}, \quad (1.1)$$

где $a^2 = \frac{k}{\mu(m\beta_j + \beta_c)}$ — коэффициент пьезопроводности (k — проницаемость, μ — вязкость, m — пористость, β_j, β_c — коэффициенты сжимаемости жидкости и среды).

Поставленную выше задачу математически можно сформулировать следующим образом.

Необходимо найти такое решение уравнения (1.1), которое удовлетворяло бы начальному и граничному условиям

$$p|_{t=0} = F(r, \theta), \quad p|_{r=\infty} = p_0, \quad (1.2)$$

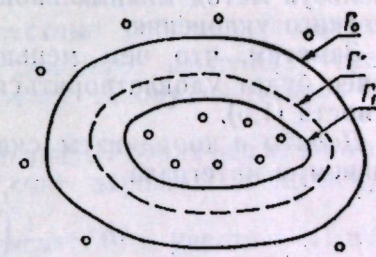


Рис. 1.

а также уравнению движения КН [1]

$$mr \frac{\partial r}{\partial t} - \frac{k}{\mu} \frac{1}{r} \frac{\partial p}{\partial \theta} \Big|_r \cdot \frac{\partial r}{\partial \theta} + r \frac{k}{\mu} \frac{\partial p}{\partial r} \Big|_r = 0, \quad (1.3)$$

при заданной функции $r = f(\theta, t)$ за счет вариации параметров q_i , ρ_i и α_i , где q_i текущие объемные дебиты скважин.

Допустим, что первоначальное положение КН — окружность радиуса r_0 , а конечное его положение — концентрическая окружность радиуса r_1 . Зададим закон стягивания в виде

$$r^2 = r_0^2 - \lambda(t)(r_0^2 - r_1^2), \quad (1.4)$$

где $\lambda(t)$ положительная монотонно возрастающая функция, причем $\lambda(0) = 0$, $\lambda(T) = 1$; дополнительные ограничения, которым должна удовлетворять функция $\lambda(t)$, будут установлены ниже.

В силу заданного закона стягивания (1.4), уравнение движения КН (1.3) должно иметь вид:

$$\Phi = mr \frac{\partial r}{\partial t} + r \frac{k}{\mu} \frac{\partial p}{\partial r} = 0. \quad (1.5)$$

Разобьем время эксплуатации T на n' частей $(0, t_1), (t_1, t_2), \dots, (t_{n'-1}, T)$, считая в каждом из указанных промежутков (t_{k-1}, t_k) ($k = 1, 2, \dots, n'$) дебиты $q_i^{(k)}$ постоянными. Кроме того, будем удовлетворять осредненному по времени уравнению движения КН

$$\varepsilon_k = \frac{1}{t_k - t_{k-1}} \int_{t_{k-1}}^{t_k} r \left(m \frac{\partial r}{\partial t} + \frac{k}{\mu} \frac{\partial p}{\partial r} \right) dt = 0,$$

используя метод минимальной погрешности с нормой средне-квадратического отклонения.

Заметим, что чем меньше промежуток времени (t_{k-1}, t_k) , тем точнее будет удовлетворяться уравнение движения контура нефтеносности (1.5).

Дебиты и координаты скважин найдутся из условий обращения в минимум интеграла

$$I_k^2 = \frac{1}{L} \int_0^L \varepsilon_k^2 ds = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \varepsilon_k^2 d\theta.$$

Решим прежде всего задачу управления КН в промежутке времени $(0, t_1)$.

Если заменить скважины вертикальными линейными стоками и источниками с интенсивностью, постоянной по длине, то распределение давления в пласте выразится формулой [4]

$$p = p_0 + \frac{\mu}{4\pi kh} \sum_{i=1}^{n+1} q_i^{(1)} \int_0^t \frac{1}{t-\tau} \exp \left[-\frac{r^2 - 2r\rho_i \cos(\theta - \alpha_i) + \rho_i^2}{4a^2(t-\tau)} \right] d\tau, \quad (1.6)$$

которая удовлетворяет уравнению (1.1), начальному и граничному условиям в промежутке времени $(0, t_1)$

$$p|_{t=0} = p_0, \quad p|_{r=\infty} = p_0.$$

Найдем $q_i^{(1)}$, ρ_i , α_i из условий обращения в минимум интеграла

$$I_1^2 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \varepsilon_1^2 d\theta,$$

где ε_1 — осредненная по времени невязка

$$\varepsilon_1 = \frac{1}{t_1} \int_0^{t_1} r \left(m \frac{\partial r}{\partial t} + \frac{k}{\mu} \frac{\partial p}{\partial r} \right) dt. \quad (1.7)$$

При заданном законе стягивания КН ε_1 будет известной функцией параметров

$$\varepsilon_1 = \varepsilon(\theta, t_1, q_i^{(1)}, \rho_i, \alpha_i). \quad (i = 1, 2, \dots, n+1).$$

Представим ε_1 приближенно в виде тригонометрической суммы, т. е.

$$\varepsilon_1 = a_0 + \sum_{j=1}^p a_j \cos j\theta + \sum_{j=1}^p b_j \sin j\theta,$$

где a_j , b_j известные функции параметров $q_i^{(1)}$, ρ_i , α_i .

Чтобы интеграл I_1^2 принимал наименьшее значение, необходимо выполнение следующих соотношений:

$$\begin{aligned} \frac{\partial I_1^2}{\partial a_0} &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \varepsilon_1 d\theta = 0, \\ \frac{\partial I_1^2}{\partial a_j} &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \varepsilon_1 \cos j\theta d\theta = 0, \\ \frac{\partial I_1^2}{\partial b_j} &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \varepsilon_1 \sin j\theta d\theta = 0, \quad j = 1, 2, 3 \dots \end{aligned} \quad (1.8)$$

из которых сможем определить неизвестные дебиты скважин $q_i^{(1)}$, а также их размещение ρ_i , α_i , обеспечивающие наилучшее средне-квадратическое приближение к желаемому закону стягивания КН в данном промежутке времени $(0, t_1)$.

В настоящей работе задача управления КН будет решаться только по характеру эксплуатации, т. е. за счет вариации дебитов q_i при фиксированных α_i , ρ_i .

Если воспользоваться соотношением (1.6) и учесть (1.4) и (1.7), то система уравнений (1.8) примет вид:

$$\begin{aligned} m \int_0^{t_1} \int_0^{2\pi} r \frac{\partial r}{\partial t} d\theta dt - \frac{1}{4\pi h} \sum_{i=1}^{n+1} q_i^{(1)} \int_0^{t_1} \int_0^{2\pi} \int_0^t \frac{r}{2a^2(t-\tau)^2} [r - \rho_i \cos(\theta - \alpha_i)] \times \\ \times \exp \left[-\frac{r^2 - 2r\rho_i \cos(\theta - \alpha_i) + \rho_i^2}{4a^2(t-\tau)} \right] d\tau d\theta dt = 0, \\ m \int_0^{t_1} \int_0^{2\pi} r \frac{\partial r}{\partial t} \cos j\theta d\theta dt - \frac{1}{4\pi h} \sum_{i=1}^{n+1} q_i^{(1)} \int_0^{t_1} \int_0^{2\pi} \int_0^t \frac{r}{2a^2(t-\tau)^2} [r - \rho_i \cos(\theta - \alpha_i)] \times \\ \times \exp \left[-\frac{r^2 - 2r\rho_i \cos(\theta - \alpha_i) + \rho_i^2}{4a^2(t-\tau)} \right] \cos j\theta d\tau d\theta dt = 0, \\ m \int_0^{t_1} \int_0^{2\pi} r \frac{\partial r}{\partial t} \sin j\theta d\theta dt - \frac{1}{4\pi h} \sum_{i=1}^{n+1} q_i^{(1)} \int_0^{t_1} \int_0^{2\pi} \int_0^t \frac{r}{2a^2(t-\tau)^2} [r - \rho_i \cos(\theta - \alpha_i)] \times \\ \times \exp \left[-\frac{r^2 - 2r\rho_i \cos(\theta - \alpha_i) + \rho_i^2}{4a^2(t-\tau)} \right] \sin j\theta d\tau d\theta dt = 0. \end{aligned}$$

Интегрируя по τ , получим

$$\sum_{i=1}^{n+1} q_i^{(1)} \int_0^{t_1} \int_0^{2\pi} \frac{r^2 - r\rho_i \cos(\theta - \alpha_i)}{r^2 - 2r\rho_i \cos(\theta - \alpha_i) + \rho_i^2} \exp\left[-\frac{r^2 - 2r\rho_i \cos(\theta - \alpha_i) + \rho_i^2}{4a^2 t}\right] d\theta dt =$$

$$= -2\pi m h \lambda(t_1) (r_0^2 - r_1^2),$$

$$\sum_{i=1}^{n+1} q_i^{(1)} \int_0^{t_1} \int_0^{2\pi} \frac{r^2 - r\rho_i \cos(\theta - \alpha_i)}{r^2 - 2r\rho_i \cos(\theta - \alpha_i) + \rho_i^2} \exp\left[-\frac{r^2 - 2r\rho_i \cos(\theta - \alpha_i) + \rho_i^2}{4a^2 t}\right] \times$$

$$\times \cos j\theta d\theta dt = 0,$$

$$\sum_{i=1}^{n+1} q_i^{(1)} \int_0^{t_1} \int_0^{2\pi} \frac{r^2 - r\rho_i \cos(\theta - \alpha_i)}{r^2 - 2r\rho_i \cos(\theta - \alpha_i) + \rho_i^2} \exp\left[-\frac{r^2 - 2r\rho_i \cos(\theta - \alpha_i) + \rho_i^2}{4a^2 t}\right] \times$$

$$\times \sin j\theta d\theta dt = 0.$$

Для дальнейших вычислений воспользуемся следующими разложениями [5], [6]:

$$\frac{1 - \xi_1 \cos \varphi}{1 - 2\xi_1 \cos \varphi + \xi_1^2} = \sum_{s=0}^{\infty} \xi_1^s \cos s\varphi, \quad |\xi_1| < 1, \quad (1.9)$$

$$\frac{\xi_2^2 - \xi_2 \cos \varphi}{1 - 2\xi_2 \cos \varphi + \xi_2^2} = -\sum_{s=1}^{\infty} \xi_2^s \cos s\varphi, \quad |\xi_2| < 1,$$

$$\exp\left[-\frac{r^2 - 2r\rho_i \cos \varphi + \rho_i^2}{4a^2 t}\right] = u_0(\beta_i) + 2 \sum_{p=1}^{\infty} u_p(\beta_i) \cos p\varphi,$$

где

$$u_p(\beta_i) = \exp\left[-\frac{r^2 + \rho_i^2}{4a^2 t}\right] I_p\left(\frac{r\rho_i}{2a^2 t}\right),$$

I_p функция Бесселя от мнимого аргумента порядка p .

Вычислим интеграл

$$2\pi A_{ii}^{(1)} = \int_0^{2\pi} \frac{r^2 - r\rho_i \cos(\theta - \alpha_i)}{r^2 - 2r\rho_i \cos(\theta - \alpha_i) + \rho_i^2} \exp\left[-\frac{r^2 - 2r\rho_i \cos(\theta - \alpha_i) + \rho_i^2}{4a^2 t}\right] d\theta$$

$$(i = 1, 2, \dots, n).$$

Так как в силу заданного закона стягивания КН r не зависит от θ и, кроме того, $\rho_i < r$ ($i = 1, 2, 3, \dots, n$) для всех $0 \leq \theta \leq 2\pi$, $0 \leq t \leq t_1 < T$, то

$$2\pi A_{ii}^{(1)} = \int_0^{2\pi} \sum_{s=0}^{\infty} \xi_i^s \cos s(\theta - \alpha_i) \cdot \left[u_0(\beta_i^{(1)}) + 2 \sum_{p=1}^{\infty} u_p(\beta_i^{(1)}) \cos p(\theta - \alpha_i) \right] d\theta,$$

где

$$\xi_i = \frac{\rho_i}{r} < 1, \quad \beta_i^{(1)} = \frac{r\rho_i}{2a^2 t},$$

$$u_p(\beta_i^{(1)}) = \exp\left(-\frac{r^2 + \rho_i^2}{4a^2 t}\right) \cdot I_p\left(\frac{r\rho_i}{2a^2 t}\right),$$

откуда

$$A_{ii}^{(1)} = \sum_{p=0}^{\infty} u_p(\beta_i^{(1)}) \xi_i^p. \quad (i = 1, 2, \dots, n).$$

Аналогично вычисляются интегралы

$$2\pi A_{2l}^{(1)} = \int_0^{2\pi} \frac{r^2 - r\rho_l \cos(\theta - \alpha_l)}{r^2 - 2r\rho_l \cos(\theta - \alpha_l) + \rho_l^2} \exp\left[-\frac{r^2 - 2r\rho_l \cos(\theta - \alpha_l) + \rho_l^2}{4a^2 t}\right] d\theta =$$

$$= -2\pi \sum_{p=1}^{\infty} u_p(\beta_l^{(1)}) \xi_l^p, \quad (i = n+1, n+2, \dots, n+l)$$

$$\xi_l = \frac{r}{\rho_l} < 1.$$

$$\int_0^{2\pi} \frac{r^2 - r\rho_l \cos(\theta - \alpha_l)}{r^2 - 2r\rho_l \cos(\theta - \alpha_l) + \rho_l^2} \exp\left[-\frac{r^2 - 2r\rho_l \cos(\theta - \alpha_l) + \rho_l^2}{4a^2 t}\right] \cos j\theta d\theta =$$

$$= \begin{cases} \pi \frac{\cos j\alpha_l}{\sin j\alpha_l} \left[\sum_{p=1}^{\infty} u_{p+j}(\beta_l^{(1)}) \xi_l^p + u_p(\beta_l^{(1)}) \xi_l^{p+j} + \sum_{p=0}^j u_p(\beta_l^{(1)}) \xi_l^{j-p} \right], \\ (i = 1, 2, 3, \dots, n), \\ -\pi \frac{\cos j\alpha_l}{\sin j\alpha_l} \left[\sum_{p=1}^{\infty} u_{p+j}(\beta_l^{(1)}) \xi_l^p + u_p(\beta_l^{(1)}) \xi_l^{p+j} + \sum_{p=0}^{j-1} u_p(\beta_l^{(1)}) \xi_l^{j-p} \right], \\ (i = n+1, n+2, \dots, n+l), \end{cases}$$

где

$$u_{p+j} = \exp\left(-\frac{r^2 + \rho_l^2}{4a^2 t}\right) I_{p+j}\left(\frac{r\rho_l}{2a^2 t}\right),$$

$$\xi_l = \frac{\rho_l}{r} \quad \text{при } i = 1, 2, \dots, n,$$

$$\xi_l = \frac{r}{\rho_l} \quad \text{" } i = n+1, n+2, \dots, n+l.$$

Обозначим через $B_{1i}^{(k)}$ и $B_{2i}^{(k)}$ следующие выражения:

$$B_{1i}^{(k)}(\beta_i^{(k)}) = \sum_{p=1}^{\infty} u_{p+j}(\beta_i^{(k)}) \xi_i^p + u_p(\beta_i^{(k)}) \xi_i^{p+j} + \sum_{p=0}^j u_p(\beta_i^{(k)}) \xi_i^{j-p},$$

$$i = 1, 2, 3, \dots, n.$$

$$B_{2i}^{(k)}(\beta_i^{(k)}) = \sum_{p=1}^{\infty} u_{p+j}(\beta_i^{(k)}) \xi_i^p + u_p(\beta_i^{(k)}) \xi_i^{p+j} + \sum_{p=0}^{j-1} u_p(\beta_i^{(k)}) \xi_i^{j-p}.$$

$$i = n+1, n+2, \dots, n+l.$$

Окончательно система (1.8) примет вид

$$\sum_{i=1}^n q_i^{(1)} \int_0^{t_1} A_{ii}^{(1)} dt + \sum_{i=n+1}^{n+l} q_i^{(1)} \int_0^{t_1} A_{2i}^{(1)} dt = -\pi m \lambda(t_1) (r_0^2 - r_1^2) h,$$

$$\sum_{i=1}^n q_i^{(1)} \cos j\alpha_i \int_0^{t_1} B_{1i}^{(1)} dt - \sum_{i=n+1}^{n+l} q_i^{(1)} \cos j\alpha_i \int_0^{t_1} B_{2i}^{(1)} dt = 0, \quad (1.10)$$

$$\sum_{i=1}^n q_i^{(1)} \sin j\alpha_i \int_0^{t_1} B_{1i}^{(1)} dt - \sum_{i=n+1}^{n+l} q_i^{(1)} \sin j\alpha_i \int_0^{t_1} B_{2i}^{(1)} dt = 0.$$

Первое уравнение системы (1.10) является уравнением баланса. Следует отметить, что в отличие от водонапорного режима при упругом режиме в уравнение баланса входят и дебиты нагнетательных скважин.

Если в системе уравнений (1.10) сделать предельный переход, устремляя a^2 к бесконечности*, то получим систему уравнений для определения дебитов $q_i^{(1)}$, постоянных в первом промежутке времени $(0, t_1)$ для водонапорного режима [2].

Действительно, при $a^2 \rightarrow \infty$

$$\lim_{a^2 \rightarrow \infty} \exp\left(-\frac{r^2 + \rho_i^2}{4a^2 t}\right) = 1,$$

$$\lim_{a^2 \rightarrow \infty} I_p(\beta_i^{(1)}) = \begin{cases} 0, & \text{если } p \neq 0, \\ 1, & \text{" } p = 0, \end{cases}$$

и система (1.10) преобразуется в следующую:

$$\left. \begin{aligned} \sum_{i=1}^n q_i^{(1)} &= -\frac{\pi m h \lambda(t_1)(r_0^2 - r_1^2)}{t_1}, \\ \sum_{i=1}^n q_i^{(1)} \cos j \alpha_i \int_0^{t_1} \xi_i^j dt - \sum_{i=n+1}^{n+1} q_i^{(1)} \cos j \alpha_i \int_0^{t_1} \xi_i^j dt &= 0, \\ \sum_{i=1}^n q_i^{(1)} \sin j \alpha_i \int_0^{t_1} \xi_i^j dt - \sum_{i=n+1}^{n+1} q_i^{(1)} \sin j \alpha_i \int_0^{t_1} \xi_i^j dt &= 0, \\ j &= 1, 2, 3, \dots \end{aligned} \right\}$$

Перейдем ко второму промежутку времени (t_1, t_2) .

Найдем дебиты $q_i^{(2)}$, оставляя размещение скважин неизменным.

Для определения $q_i^{(2)}$ получим следующую систему уравнений

$$\left. \begin{aligned} \int_0^{2\pi} \varepsilon_2 d\theta &= 0, \\ \int_0^{2\pi} \varepsilon_2 \cos j\theta d\theta &= 0, \\ \int_0^{2\pi} \varepsilon_2 \sin j\theta d\theta &= 0, \quad j = 1, 2, 3, \dots \end{aligned} \right\} \quad (1.11)$$

где

$$\varepsilon_2 = \frac{1}{t_2 - t_1} \int_{t_1}^{t_2} r \left(m \frac{\partial r}{\partial t} + \frac{k}{\mu} \frac{\partial p}{\partial r} \right) dt,$$

$$\left. \begin{aligned} p &= p_0 + \frac{\mu}{4\pi k h} \left\{ \sum_{i=1}^{n+1} q_i^{(1)} \int_0^t \frac{1}{t-\tau} \exp\left[-\frac{r^2 - 2r\rho_i \cos(\theta - \alpha_i) + \rho_i^2}{4a^2(t-\tau)}\right] d\tau + \right. \\ &+ \left. \sum_{i=1}^{n+1} (q_i^{(2)} - q_i^{(1)}) \int_{t_1}^t \frac{1}{t-\tau} \exp\left[-\frac{r^2 - 2r\rho_i \cos(\theta - \alpha_i) + \rho_i^2}{4a^2(t-\tau)}\right] d\tau \right\} \quad (1.12) \\ &(t_1 \leq t \leq t_2). \end{aligned}$$

* Так как при водонапорном режиме $\beta_{ж}$ и β_c равны нулю.

Соотношение (1.12) удовлетворяет уравнению (1.1), начальному и граничному условиям:

$$p|_{t=t_1} = p_0 + \frac{\mu}{4\pi k h} \sum_{i=1}^{n+1} q_i^{(1)} \cdot \left[-Ei\left(-\frac{r^2 - 2r\rho_i \cos(\theta - \alpha_i) + \rho_i^2}{4a^2 t_1}\right) \right],$$

$$p|_{r=\infty} = p_0.$$

Упростим первое из уравнений системы (1.11). Для этого найдем частную производную $\frac{\partial p}{\partial r}$ из (1.12) и подставим в первое уравнение системы (1.11). Проинтегрировав его по τ , получим

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi h} \sum_{i=1}^{n+1} \left\{ q_i^{(1)} \int_{t_1}^{t_2} \int_0^{2\pi} \frac{r^2 - r\rho_i \cos(\theta - \alpha_i)}{r^2 - 2r\rho_i \cos(\theta - \alpha_i) + \rho_i^2} \cdot \exp\left[-\frac{r^2 - 2r\rho_i \cos(\theta - \alpha_i) + \rho_i^2}{4a^2 t}\right] d\theta dt + \right. \\ \left. + (q_i^{(2)} - q_i^{(1)}) \int_{t_1}^{t_2} \int_0^{2\pi} \frac{r^2 - r\rho_i \cos(\theta - \alpha_i)}{r^2 - 2r\rho_i \cos(\theta - \alpha_i) + \rho_i^2} \times \right. \\ \left. \times \exp\left[-\frac{r^2 - 2r\rho_i \cos(\theta - \alpha_i) + \rho_i^2}{4a^2(t-t_1)}\right] d\theta dt \right\} = \int_{t_1}^{t_2} \int_0^{2\pi} m r \frac{\partial r}{\partial t} d\theta dt. \end{aligned}$$

Проведем интегрирование по θ , воспользовавшись разложениями (1.9). В результате получим

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n \left[q_i^{(1)} \int_{t_1}^{t_2} A_{1i}^{(1)}(\beta_i^{(1)}) dt + (q_i^{(2)} - q_i^{(1)}) \int_{t_1}^{t_2} A_{1i}^{(2)}(\beta_i^{(2)}) dt \right] + \\ + \sum_{i=n+1}^{n+1} \left[q_i^{(1)} \int_{t_1}^{t_2} A_{2i}^{(1)}(\beta_i^{(1)}) dt + (q_i^{(2)} - q_i^{(1)}) \int_{t_1}^{t_2} A_{2i}^{(2)}(\beta_i^{(2)}) dt \right] = \\ = -[\lambda(t_2) - \lambda(t_1)] \pi h m (r_0^2 - r_1^2), \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} A_{1i}^{(2)} &= \sum_{p=0}^{\infty} u_p(\beta_i^{(2)}) \xi_i^p, \quad \xi_i = \frac{\rho_i}{r}, \quad i = 1, 2, \dots, n. \\ A_{2i}^{(2)} &= -\sum_{p=1}^{\infty} u_p(\beta_i^{(2)}) \xi_i^p, \quad \xi_i = \frac{r}{\rho_i}, \quad i = n+1, n+2, \dots, n+l. \\ u_p(\beta_i^{(2)}) &= \exp\left[-\frac{r^2 + \rho_i^2}{4a^2(t-t_1)}\right] \cdot I_p(\beta_i^{(2)}), \quad \beta_i^{(2)} = \frac{r\rho_i}{2a^2(t-t_1)}. \end{aligned}$$

Точно так же можно упростить и последующие уравнения системы (1.11). Не приводя вычислений, запишем окончательный вид системы (1.11).

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n \left\{ q_i^{(1)} \int_{t_1}^{t_2} A_{1i}^{(1)}(\beta_i^{(1)}) dt + (q_i^{(2)} - q_i^{(1)}) \int_{t_1}^{t_2} A_{1i}^{(2)}(\beta_i^{(2)}) dt \right\} + \\ + \sum_{i=n+1}^{n+1} \left\{ q_i^{(1)} \int_{t_1}^{t_2} A_{2i}^{(1)}(\beta_i^{(1)}) dt + (q_i^{(2)} - q_i^{(1)}) \int_{t_1}^{t_2} A_{2i}^{(2)}(\beta_i^{(2)}) dt \right\} = -[\lambda(t_2) - \lambda(t_1)] v_0, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \sum_{i=1}^n \cos j\alpha_i \left\{ q_i^{(1)} \int_{t_1}^{t_2} B_{1i}^{(1)}(\beta_i^{(1)}) dt + (q_i^{(2)} - q_i^{(1)}) \int_{t_1}^{t_2} B_{1i}^{(2)}(\beta_i^{(2)}) dt \right\} - \\ & - \sum_{i=n+1}^{n+l} \cos j\alpha_i \left\{ q_i^{(1)} \int_{t_1}^{t_2} B_{2i}^{(1)}(\beta_i^{(1)}) dt + (q_i^{(2)} - q_i^{(1)}) \int_{t_1}^{t_2} B_{2i}^{(2)}(\beta_i^{(2)}) dt \right\} = 0, \quad (1.13) \\ & \sum_{i=1}^n \sin j\alpha_i \left\{ q_i^{(1)} \int_{t_1}^{t_2} B_{1i}^{(1)}(\beta_i^{(1)}) dt + (q_i^{(2)} - q_i^{(1)}) \int_{t_1}^{t_2} B_{1i}^{(2)}(\beta_i^{(2)}) dt \right\} - \\ & - \sum_{i=n+1}^{n+l} \sin j\alpha_i \left\{ q_i^{(1)} \int_{t_1}^{t_2} B_{2i}^{(1)}(\beta_i^{(1)}) dt + (q_i^{(2)} - q_i^{(1)}) \int_{t_1}^{t_2} B_{2i}^{(2)}(\beta_i^{(2)}) dt \right\} = 0, \end{aligned}$$

где

$$v_0 = \pi h m (r_0^2 - r_1^2),$$

$$\beta_i^{(1)} = \frac{r \rho_i}{2a^2 t}, \quad \beta_i^{(2)} = \frac{r \rho_i}{2a^2 (t - t_1)}.$$

Аналогично может быть получена система для любого промежутка времени (t_k, t_{k+1}) после решения системы для промежутка (t_{k-1}, t_k) . Для последнего n' -го промежутка система уравнений примет вид:

$$\begin{aligned} & \sum_{i=1}^n \left\{ q_i^{(1)} \int_{t_{n'-1}}^T A_{1i}^{(1)}(\beta_i^{(1)}) dt + (q_i^{(2)} - q_i^{(1)}) \int_{t_{n'-1}}^T A_{1i}^{(2)}(\beta_i^{(2)}) dt + \dots + \right. \\ & + (q_i^{(n')} - q_i^{(n'-1)}) \int_{t_{n'-1}}^T A_{1i}^{(n')}(\beta_i^{(n')}) dt \left. \right\} + \sum_{i=n+1}^{n+l} \left\{ q_i^{(1)} \int_{t_{n'-1}}^T A_{2i}^{(1)}(\beta_i^{(1)}) dt + \dots + \right. \\ & + (q_i^{(n')} - q_i^{(n'-1)}) \int_{t_{n'-1}}^T A_{2i}^{(n')}(\beta_i^{(n')}) dt \left. \right\} = -|1 - \lambda(t_{n'-1})| v_0, \\ & \sum_{i=1}^n \cos j\alpha_i \left\{ q_i^{(1)} \int_{t_{n'-1}}^T B_{1i}^{(1)}(\beta_i^{(1)}) dt + (q_i^{(2)} - q_i^{(1)}) \int_{t_{n'-1}}^T B_{1i}^{(2)}(\beta_i^{(2)}) dt + \dots + \right. \\ & + (q_i^{(n')} - q_i^{(n'-1)}) \int_{t_{n'-1}}^T B_{1i}^{(n')}(\beta_i^{(n')}) dt \left. \right\} - \sum_{i=n+1}^{n+l} \cos j\alpha_i \left\{ q_i^{(1)} \int_{t_{n'-1}}^T B_{2i}^{(1)}(\beta_i^{(1)}) dt + \dots + \right. \\ & + (q_i^{(n')} - q_i^{(n'-1)}) \int_{t_{n'-1}}^T B_{2i}^{(n')}(\beta_i^{(n')}) dt \left. \right\} = 0, \quad (1.14) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \sum_{i=1}^n \sin j\alpha_i \left\{ q_i^{(1)} \int_{t_{n'-1}}^T B_{1i}^{(1)}(\beta_i^{(1)}) dt + \dots + (q_i^{(n')} - q_i^{(n'-1)}) \int_{t_{n'-1}}^T B_{1i}^{(n')}(\beta_i^{(n')}) dt \right\} - \\ & - \sum_{i=n+1}^{n+l} \sin j\alpha_i \left\{ q_i^{(1)} \int_{t_{n'-1}}^T B_{2i}^{(1)}(\beta_i^{(1)}) dt + \dots + \right. \\ & + (q_i^{(n')} - q_i^{(n'-1)}) \int_{t_{n'-1}}^T B_{2i}^{(n')}(\beta_i^{(n')}) dt \left. \right\} = 0, \end{aligned}$$

где

$$\beta_i^{(n')} = \frac{r \rho_i}{2a^2 (t - t_{n'-1})}.$$

Из системы (1.14) найдутся неизвестные дебиты $q_i^{(n')}$, так как все другие дебиты $q_i^{(k)}$ ($k=1, 2, 3, \dots, n'-1$), входящие в указанную систему (1.14), были найдены ранее. Существование интегралов, входящих в систему (1.14), за исключением

$$\int_{t_{n'-1}}^T A_{1i}^{(n')}(\beta_i^{(n')}) dt, \quad \int_{t_{n'-1}}^T A_{2i}^{(n')}(\beta_i^{(n')}) dt, \quad \int_{t_{n'-1}}^T B_{1i}^{(n')}(\beta_i^{(n')}) dt, \quad \int_{t_{n'-1}}^T B_{2i}^{(n')}(\beta_i^{(n')}) dt,$$

не вызывает сомнений. Покажем, что интегралы, записанные выше,

также существуют. Рассмотрим, например, интеграл $\int_{t_{n'-1}}^T A_{1i}^{(n')}(\beta_i^{(n')}) dt$:

$$\begin{aligned} & \int_{t_{n'-1}}^T A_{1i}^{(n')}(\beta_i^{(n')}) dt = \\ & = \int_{t_{n'-1}}^T \sum_{p=0}^{\infty} \exp \left[-\frac{r^2 + \rho_i^2}{4a^2 (t - t_{n'-1})} \right] \cdot I_p \left(\frac{r \rho_i}{2a^2 (t - t_{n'-1})} \right) \cdot t_i^p dt. \end{aligned}$$

Ряд, стоящий под интегралом, сходится если $t \neq t_{n'-1}$, ибо имеет своей мажорантой сходящийся ряд

$$\exp \left[-\frac{r^2 + \rho_i^2}{4a^2 (t - t_{n'-1})} \right] \cdot I_0 \left(\frac{r \rho_i}{2a^2 (t - t_{n'-1})} \right) \sum_{p=0}^{\infty} t_i^p.$$

Рассмотрим поведение подинтегральной функции $A_{1i}^{(n')}(\beta_i^{(n')})$ при достаточно больших значениях $\beta_i^{(n')}$, т. е. когда $t \rightarrow t_{n'-1}$. Известно, что для больших значений аргумента x справедливо следующее асимптотическое представление функции $I_p(x)$ [5]

$$I_p(x) \approx \frac{e^x}{\sqrt{2\pi x}}.$$

В нашем случае

$$x = \beta_i^{(n')} = \frac{r \rho_i}{2a^2(t - t_{n'-1})},$$

поэтому

$$I_p(\beta_i^{(n')}) \approx \frac{\sqrt{t - t_{n'-1}} \exp\left[-\frac{r \rho_i}{2a^2(t - t_{n'-1})}\right]}{\sqrt{\frac{\pi r \rho_i}{a^2}}}.$$

Следовательно

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow t_{n'-1}} A_{ii}^{(n')}(\beta_i^{(n')}) &= \\ &= \lim_{t \rightarrow t_{n'-1}} \frac{\sqrt{t - t_{n'-1}} \exp\left[-\frac{(r - \rho_i)^2}{4a^2(t - t_{n'-1})}\right]}{\sqrt{\frac{\pi r \rho_i}{a^2}}} \cdot \frac{1}{1 - \xi_i} = 0. \end{aligned} \quad (1.15)$$

Отсюда и вытекает существование интеграла

$$\int_{t_{n'-1}}^T A_{ii}^{(n')}(\beta_i^{(n')}) dt.$$

Существование остальных интегралов доказывается точно так же. Интегралы, входящие в системы (1.10), (1.13), (1.14), могут быть вычислены одним из методов численного интегрирования.

Поведение подинтегральных функций при достаточно больших значениях $\beta_i^{(k)}$ характеризует и поведение функции $\lambda'(t)$ в момент включения водяных и нефтяных скважин, а также в моменты изменения дебитов. Действительно, из первого уравнения системы (1.10) следует, что функция $\lambda'(t)$ должна стремиться к нулю, как

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{\lambda'(t)}{A_0 \sqrt{t} e^{-\frac{B_0}{t}}} = \text{const} \neq 0.$$

Если рассмотреть первое уравнение системы (1.13) и предположить, что $t \rightarrow t_1$, то

$$\lim_{t \rightarrow t_1} \frac{\lambda'(t) - \lambda'(t_1)}{A_1 \sqrt{t - t_1} e^{-\frac{B_1}{t - t_1}}} = \text{const} \neq 0.$$

Для k -го промежутка времени

$$\lim_{t \rightarrow t_k} \frac{\lambda'(t) - \lambda'(t_k)}{A_k \sqrt{t - t_k} e^{-\frac{B_k}{t - t_k}}} = \text{const} \neq 0,$$

где A_k, B_k ($k=0, 1, 2, \dots$) постоянные.

Сделаем предельный переход в системе (1.14), устремив a^2 к бесконечности.

Получим систему уравнений для определения дебитов $q_i^{(n')}$ ($i=1, 2, \dots, n+1$) в промежутке времени $(t_{n'-1}, T)$ для водонапорного режима [2].

$$\sum_{i=1}^n q_i^{(n')} = -\frac{[1 - \lambda(t_{n'-1})] v_0}{T - t_{n'-1}},$$

$$\sum_{i=1}^n q_i^{(n')} \cos j a_i \int_{t_{n'-1}}^T \xi_i^j dt - \sum_{i=n+1}^{n+1} q_i^{(n')} \cos j a_i \int_{t_{n'-1}}^T \xi_i^j dt = 0, \quad (1.16)$$

$$\sum_{i=1}^n q_i^{(n')} \sin j a_i \int_{t_{n'-1}}^T \xi_i^j dt - \sum_{i=n+1}^{n+1} q_i^{(n')} \sin j a_i \int_{t_{n'-1}}^T \xi_i^j dt = 0.$$

§ 2. Случай двух эксплуатационных батарей

В круговой нефтяной зоне находятся $2n$ эксплуатационных скважин, из которых n расположены по окружности радиуса ρ_1 на равных расстояниях друг от друга и имеют дебиты $q_{1,i}(t)$ ($i=1, 2, 3, \dots, n$). По окружности радиуса ρ_2 , concentрической с первой, расположены n равноотстоящих скважин с дебитами $q_{1,i}(t)$ ($i=n+1, \dots, 2n$) (рис. 2).

Требуется так разместить и эксплуатировать скважины, чтобы КН при своем перемещении наименее уклонялся от желаемого закона движения $r^2 = r_0^2 - \lambda(t)$ ($r_0^2 - r_1^2$). В силу навязанного закона стягивания КН и симметричного расположения скважин в батареях следует, что

$$\begin{aligned} q_{1,1} &= q_{1,2} = \dots = q_{1,n} = q_1, \\ q_{1,n+1} &= q_{1,n+2} = \dots = q_{1,2n} = q_2. \end{aligned}$$

Кроме того,

$$\left. \begin{aligned} \rho_i &= \rho_1, \\ a_i &= \frac{2\pi}{n}(i-1). \end{aligned} \right\} i=1, 2, \dots, n, \quad \left. \begin{aligned} \rho_i &= \rho_2, \\ a_i &= \frac{2\pi}{n}(i-1) + \gamma. \end{aligned} \right\} i=n+1, \dots, 2n,$$

где γ — угол смещения батарей.

Если, как указано выше, разобьем весь период эксплуатации T на n' интервалов $(0, t_1), (t_1, t_2), \dots, (t_{n'-1}, T)$, то для определения неизвестных $q_1^{(1)}, q_2^{(1)}, \gamma$ в промежутке времени $(0, t_1)$ получим из (1.10) следующую систему уравнений:

$$\begin{aligned} nq_1^{(1)} \int_0^{t_1} A_1^{(1)} dt + nq_2^{(1)} \int_0^{t_1} A_2^{(1)} dt &= -\pi m h \lambda(t_1)(r_0^2 - r_1^2), \\ q_1^{(1)} \sum_{i=1}^n \cos j \frac{2\pi}{n}(i-1) \int_0^{t_1} B_1^{(1)} dt + q_2^{(1)} \sum_{i=n+1}^{2n} \cos j \left[\frac{2\pi}{n}(i-1) + \gamma \right] \int_0^{t_1} B_2^{(1)} dt &= 0, \quad (2.1) \\ q_1^{(1)} \sum_{i=1}^n \sin j \frac{2\pi}{n}(i-1) \int_0^{t_1} B_1^{(1)} dt + q_2^{(1)} \sum_{i=n+1}^{2n} \sin j \left[\frac{2\pi}{n}(i-1) + \gamma \right] \int_0^{t_1} B_2^{(1)} dt &= 0. \end{aligned}$$

* См. систему уравнений, полученных при водонапорном режиме в работе [2].

В системе (2.1) $2n-2$ уравнения удовлетворяются тождественно в силу соотношений [6]

$$\sum_{i=1}^n \cos j \frac{2\pi}{n} (i-1) = \begin{cases} 0, & \text{если } j \neq np, \\ n, & \text{если } j = np. \end{cases}$$

$$\sum_{i=n+1}^{2n} \cos j \left[\frac{2\pi}{n} (i-1) + \gamma \right] = \begin{cases} 0, & \text{если } j \neq np, \\ n \cos n\gamma, & \text{если } j = np. \end{cases}$$

$$\sum_{i=1}^n \sin j \frac{2\pi}{n} (i-1) = 0$$

$$\sum_{i=n+1}^{2n} \sin j \left[\frac{2\pi}{n} (i-1) + \gamma \right] = \begin{cases} 0, & \text{если } j \neq np, \\ n \sin n\gamma, & \text{если } j = np \quad (p=1, 2, 3, \dots). \end{cases}$$

Окончательно получаем систему

$$q_1^{(1)} \int_0^{t_1} A_1^{(1)} dt + q_2^{(1)} \int_0^{t_1} A_2^{(1)} dt = -\frac{\lambda(t_1) v_0}{n},$$

$$q_1^{(1)} \int_0^{t_1} B_1^{(1)} dt + q_2^{(1)} \cos n\gamma \int_0^{t_1} B_2^{(1)} dt = 0, \quad (2.2)$$

$$q_2^{(1)} \sin n\gamma \int_0^{t_1} B_2^{(1)} dt = 0,$$

из которой определим $q_1^{(1)}$, $q_2^{(1)}$ и γ . Так как интегралы

$$\int_0^{t_1} A_1^{(1)} dt, \int_0^{t_1} A_2^{(1)} dt, \int_0^{t_1} B_1^{(1)} dt, \int_0^{t_1} B_2^{(1)} dt$$

положительны и не равны нулю, то из третьего уравнения системы (2.2) следует, что

$$\sin n\gamma = 0,$$

откуда

$$\gamma = 0 \text{ или } \gamma = \frac{\pi}{n}.$$

Однако, как легко видеть, решение $\gamma = 0$ неприемлемо. В этом случае $q_1^{(1)}$ и $q_2^{(1)}$ должны быть разных знаков, чтобы удовлетворить второму уравнению системы (2.2), что противоречит условию задачи. Следовательно $\gamma = \frac{\pi}{n}$, т. е. расположение скважин должно быть шахматно-круговым, а дебиты $q_1^{(1)}$ и $q_2^{(1)}$ определяются из уравнений

$$q_1^{(1)} \int_0^{t_1} A_1^{(1)} dt + q_2^{(1)} \int_0^{t_1} A_2^{(1)} dt = -\frac{\lambda(t_1) v_0}{n},$$

$$q_1^{(1)} \int_0^{t_1} B_1^{(1)} dt - q_2^{(1)} \int_0^{t_1} B_2^{(1)} dt = 0. \quad (2.3)$$

Оставляя размещение скважин таким, какое было найдено для промежутка времени $(0, t_1)$, дебиты $q_1^{(k)}$, $q_2^{(k)}$ в k -ом промежутке определим из системы:

$$q_1^{(1)} \int_{t_{k-1}}^{t_k} A_1^{(1)} dt + (q_1^{(2)} - q_1^{(1)}) \int_{t_{k-1}}^{t_k} A_1^{(2)} dt + \dots + (q_1^{(k)} - q_1^{(k-1)}) \int_{t_{k-1}}^{t_k} A_1^{(k)} dt +$$

$$+ q_2^{(1)} \int_{t_{k-1}}^{t_k} A_2^{(1)} dt + \dots + (q_2^{(k)} - q_2^{(k-1)}) \int_{t_{k-1}}^{t_k} A_2^{(k)} dt = -\frac{[\lambda(t_k) - \lambda(t_{k-1})] v_0}{n}, \quad (2.4)$$

$$q_1^{(1)} \int_{t_{k-1}}^{t_k} B_1^{(1)} dt + (q_1^{(2)} - q_1^{(1)}) \int_{t_{k-1}}^{t_k} B_1^{(2)} dt + \dots + (q_1^{(k)} - q_1^{(k-1)}) \int_{t_{k-1}}^{t_k} B_1^{(k)} dt -$$

$$- \left[q_2^{(1)} \int_{t_{k-1}}^{t_k} B_2^{(1)} dt + \dots + (q_2^{(k)} - q_2^{(k-1)}) \int_{t_{k-1}}^{t_k} B_2^{(k)} dt \right] = 0,$$

где

$$A_1^{(i)} = \sum_{p=0}^{\infty} u_p(\beta_1^{(i)}) \xi_1^p, \quad A_2^{(i)} = \sum_{p=0}^{\infty} u_p(\beta_2^{(i)}) \xi_2^p,$$

$$B_1^{(i)} = \sum_{p=1}^{\infty} u_{p+n}(\beta_1^{(i)}) \xi_1^p + u_p(\beta_1^{(i)}) \xi_1^{p+n} + \sum_{p=0}^n u_p(\beta_1^{(i)}) \xi_1^{n-p},$$

$$B_2^{(i)} = \sum_{p=1}^{\infty} u_{p+n}(\beta_2^{(i)}) \xi_2^p + u_p(\beta_2^{(i)}) \xi_2^{p+n} + \sum_{p=0}^n u_p(\beta_2^{(i)}) \xi_2^{n-p},$$

$$u_p(\beta_1^{(i)}) = \exp \left[-\frac{r^2 + \rho_1^2}{4a^2(t-t_{i-1})} \right] \cdot J_p \left(\frac{r\rho_1}{2a^2(t-t_{i-1})} \right),$$

$$u_p(\beta_2^{(i)}) = \exp \left[-\frac{r^2 + \rho_2^2}{4a^2(t-t_{i-1})} \right] \cdot J_p \left(\frac{r\rho_2}{2a^2(t-t_{i-1})} \right),$$

$$\xi_1 = \frac{\rho_1}{r} < 1, \quad \xi_2 = \frac{\rho_2}{r} < 1.$$

Для определения $q_1^{(k)}$, $q_2^{(k)}$ необходимо знать дебиты q_1^i , q_2^i ($i=1, 2, 3, \dots, k-1$). Последние определяются из соответствующих систем для первого и последующих промежутков времени эксплуатации T .

Аналогично могут быть получены уравнения, когда число батарей больше двух. Пример. Найти дебиты эксплуатационных скважин в батареях при следующих данных:

$$\rho_1 = 1600 \text{ м}, \quad \rho_2 = 2000 \text{ м},$$

$$r_0 = 2250 \text{ м}, \quad r_1 = 2050 \text{ м},$$

$$n = 10, \quad m = 0,1, \quad h = 10 \text{ м},$$

$$T = 2 \text{ года}, \quad a^2 = 5000 \frac{\text{см}^2}{\text{сек}},$$

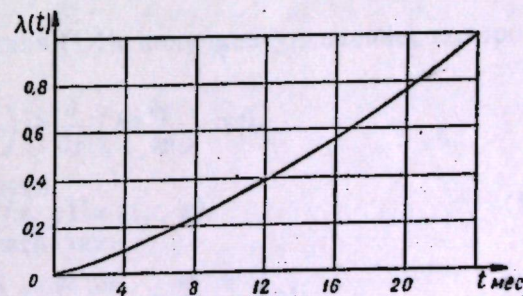


Рис. 3.

расположение скважин — шахматно-круговое, функция $\lambda(t)$ задана графиком (рис. 3).

Время эксплуатации T было разбито на два равных промежутка. Дебиты эксплуатационных скважин в первом промежутке времени равны

$$q_1^{(1)} = 353,5 \frac{\text{м}^3}{\text{сут.}},$$

$$q_2^{(1)} = 36,1 \frac{\text{м}^3}{\text{сут.}},$$

во втором промежутке времени

$$q_1^{(2)} = 379,5 \frac{\text{м}^3}{\text{сут.}},$$

$$q_2^{(2)} = 33,2 \frac{\text{м}^3}{\text{сут.}}$$

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

1. Салехов Г. С. Прямые и обратные задачи о продвижении водонефтяного контакта. Известия Казанского филиала АН СССР, серия физ.-мат. и технич. наук, вып. 5, 1954.

2. Салехов Г. С. Постановка и методы решения гидродинамических задач управления движением контура нефтеносности. Известия Казанского филиала АН СССР, серия физ.-мат. и технич. наук, вып. 6, 1955.

3. Щелкачев В. Н. Упругий режим пластовых водонапорных систем. Гостехиздат, 1948.

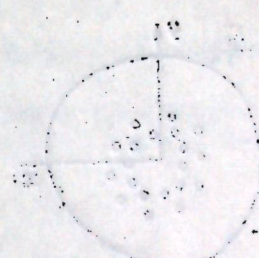
4. Маскет М. Течение однородных жидкостей в пористой среде. Гостехиздат, 1949.

5. Грей Э. и Мэтьюз Г. Б. Функции Бесселя и их приложения к физике и механике. И. Л. 1949.

6. Рыжик И. М. и Градштейн И. С. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. Гостехиздат, 1951.

Поступило
20 декабря 1954 г.

Физико-технический институт
Казанского филиала АН СССР.



В. Л. ДАНИЛОВ

К ОПРЕДЕЛЕНИЮ ДАВЛЕНИЯ В ПЛАСТАХ С ПЕРЕМЕННЫМИ ПРОНИЦАЕМОСТЬЮ И МОЩНОСТЬЮ

Рассматривается задача определения поля давлений в микрогетерогенном изотропном пласте с переменной мощностью при наличии одной скважины.

§ 1. Постановка задачи и метод ее решения

1. Нефтяные пласты имеют переменную мощность, а также проницаемость, изменяющуюся как по простиранию, так и по мощности пласта. В настоящей работе мы ограничимся учетом изменения мощности h и проницаемости k по простиранию, то есть будем полагать h и k функциями координат x, y .

Если мощность изменяется плавно, то вертикальной составляющей v_z скорости фильтрации можно пренебречь ввиду ее малости сравнительно с горизонтальными составляющими v_x и v_y . При ламинарной фильтрации согласно закону Дарси имеем [1]:

$$v_x = -\frac{k}{\mu} \frac{\partial p}{\partial x}, \quad v_y = -\frac{k}{\mu} \frac{\partial p}{\partial y}, \quad (1.1)$$

где μ — динамическая вязкость, p — давление. Уравнение неразрывности для несжимаемой жидкости при плавно изменяющейся мощности пласта имеет вид [2]:

$$\frac{\partial}{\partial x} (h v_x) + \frac{\partial}{\partial y} (h v_y) = 0. \quad (1.2)$$

Отсюда, используя соотношения (1.1), получаем уравнение, которому удовлетворяет давление:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(h k \frac{\partial p}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(h k \frac{\partial p}{\partial y} \right) = 0. \quad (1.3)$$

Обозначим далее для краткости

$$h(x, y) \cdot k(x, y) = \sigma(x, y). \quad (1.4)$$

Уравнение (1.3) можно записать так:

$$\sigma \left(\frac{\partial^2 p}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 p}{\partial y^2} \right) + \frac{\partial \sigma}{\partial x} \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial \sigma}{\partial y} \frac{\partial p}{\partial y} = 0. \quad (1.5)$$

Если пласт не выклинивается, т. е. $h > 0$, и не имеет непроницаемых участков ($k > 0$), то $\sigma(x, y)$ — положительная функция. Далее, будем полагать, что она имеет непрерывные в замкнутой области S частные производные по x, y до второго порядка включительно. Уравнение

(1.5) представим в векторной форме, удобной для перехода к различным системам координат:

$$\Delta p = -\frac{1}{\sigma} (\nabla \sigma, \nabla p). \quad (1.6)$$

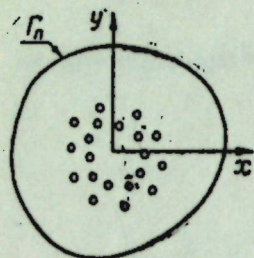


Рис. 1.

2. Рассмотрим пласт, ограниченный контуром питания Γ_n , на котором во все время эксплуатации сохраняется постоянное давление p_n (рис. 1). Известны распределение мощности $h(x, y)$ и проницаемости $k(x, y)$.

В точке (x_0, y_0) находится скважина с объемным дебитом Q . Считая жидкости и породу несжимаемыми, а вязкости нефти и воды одинаковыми, определим давление в любой точке пласта.

Будем искать давление в пласте в виде суммы двух функций:

$$p(x, y, t) = F(x, y, t) + f(x, y, t), \quad (1.7)$$

где

$$F(x, y, t) = \frac{Q(t) \cdot \mu}{2\pi \sigma_0} \ln \frac{1}{V(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2}, \quad (1.8)$$

а $f(x, y, t)$ — регулярная в области течения функция; здесь

$$\sigma_0 = h(x_0, y_0) \cdot k(x_0, y_0).$$

Подставляя выражение (1.7) в уравнение (1.6), вследствие линейности этого уравнения получаем:

$$\Delta F + \Delta f = -\frac{1}{\sigma} (\nabla \sigma, \nabla F) - \frac{1}{\sigma} (\nabla \sigma, \nabla f). \quad (1.9)$$

Функция F — гармоническая в области S , и лапласиан ее ΔF равен нулю повсюду в S , исключая точку (x_0, y_0) . Доопределив его в этой точке как непрерывную функцию, т. е. полагая $\Delta F(x_0, y_0) = 0$, приходим к уравнению

$$\Delta f = -\frac{1}{\sigma} (\nabla \sigma, \nabla F) - \frac{1}{\sigma} (\nabla \sigma, \nabla f). \quad (1.10)$$

В декартовых и полярных координатах это уравнение может быть переписано так:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = -\frac{1}{\sigma} \left(\frac{\partial \sigma}{\partial x} \frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial \sigma}{\partial y} \frac{\partial F}{\partial y} \right) - \frac{1}{\sigma} \left(\frac{\partial \sigma}{\partial x} \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial \sigma}{\partial y} \frac{\partial f}{\partial y} \right). \quad (1.10a)$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial f}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 f}{\partial \theta^2} = -\frac{1}{\sigma} \left(\frac{\partial \sigma}{\partial r} \frac{\partial F}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial \sigma}{\partial \theta} \frac{\partial F}{\partial \theta} \right) - \frac{1}{\sigma} \left(\frac{\partial \sigma}{\partial r} \frac{\partial f}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial \sigma}{\partial \theta} \frac{\partial f}{\partial \theta} \right). \quad (1.10b)$$

∇F в точке (x_0, y_0) имеет особенность типа $\frac{1}{V(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2} = \frac{1}{\delta^2}$, где δ — расстояние до точки (x_0, y_0) , то-есть полюс первого порядка.

Для того, чтобы правая часть уравнения (1.10) была ограниченной, достаточно, чтобы, во-первых, функция σ во всей области течения S обладала производными первого порядка n , во-вторых, чтобы эти производные в точке (x_0, y_0) имели нуль порядка не ниже, чем первого. Тогда регулярность функции f будет обеспечена.

Первое условие будем считать выполненным в силу задания $\sigma(x, y)$.

3. Если же производные заданной функции $\sigma(x, y)$ не удовлетворяют второму условию, то можно воспользоваться следующим

искусственным приемом. Построим функцию $\sigma^*(x, y)$, возможно менее уклоняющуюся от данной функции σ , удовлетворяющую условию обращения $|\nabla \sigma^*|$ в нуль порядка не ниже, чем первого, в точке (x_0, y_0) . В качестве такой „сглаживающей“ функции удобно, например, принять

$$\sigma^*(x, y) = \sigma(x, y) - [\sigma(x, y) - \sigma(x_0, y_0)] e^{-[(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2]^n}. \quad (1.11)$$

Показатель степени n должен быть выбран из следующих соображений.

Если $\sigma(x, y)$ обладает в S ограниченными частными производными первого порядка, то в окрестности точки (x_0, y_0) она удовлетворяет условию

$$|\sigma(x, y) - \sigma(x_0, y_0)| \leq A|x-x_0| + B|y-y_0|,$$

где положительные числа A и B не зависят от x, y .

$$\frac{\partial \sigma^*}{\partial x} = \frac{\partial \sigma}{\partial x} - \frac{\partial \sigma}{\partial x} e^{-[(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2]^n} + n[\sigma(x, y) - \sigma(x_0, y_0)] [(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2]^{n-1} \times 2(x-x_0) e^{-[(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2]^n};$$

$$\frac{\partial \sigma^*}{\partial y} = \frac{\partial \sigma}{\partial y} - \frac{\partial \sigma}{\partial y} e^{-[(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2]^n} + n[\sigma(x, y) - \sigma(x_0, y_0)] [(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2]^{n-1} \times 2(y-y_0) e^{-[(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2]^n}.$$

Устремим $\delta = \sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2}$ к нулю. При $n \neq 0$

$$\left| \frac{\partial \sigma^*}{\partial x} \right|_{\delta \rightarrow 0} \rightarrow \left| \frac{\partial \sigma}{\partial x} \right|_{\delta=0} (1 - e^{-\delta^{2n}}) + 2n[A|x-x_0| + B|y-y_0|] [(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2]^{n-1} (x-x_0) e^{-\delta^{2n}} \sim C\delta^{2n} + D\delta \cdot \delta^{2(n-1)} \cdot \delta = (C+D)\delta^{2n} = C'\delta^{2n}.$$

Таков же порядок $\left| \frac{\partial \sigma^*}{\partial y} \right|_{\delta \rightarrow 0}$.

Условие обращения $\frac{\partial \sigma^*}{\partial x}$ и $\frac{\partial \sigma^*}{\partial y}$ в нуль того же порядка, что и у δ , либо высшего, дает

$$2n \geq 1, \quad n \geq \frac{1}{2}.$$

Функция $\sigma^*(x, y)$, построенная таким образом, совпадает с $\sigma(x, y)$ в точке (x_0, y_0) [см. (1.11)], а также практически равна $\sigma(x, y)$ на некотором удалении от точки (x_0, y_0) , так как второй член становится ничтожным из-за наличия показательного множителя. Чем больше показатель n , тем меньше разность $(\sigma - \sigma^*)$. Будем далее решать задачу для „сглаживающей“ функции $\sigma^*(x, y)$, подменяя ею $\sigma(x, y)$.

Уравнение (1.10a) перепишем так:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = a(x, y) \frac{\partial f}{\partial x} + b(x, y) \frac{\partial f}{\partial y} + \varphi(x, y), \quad (1.12)$$

где

$$a(x, y) = -\frac{1}{\sigma^*} \frac{\partial \sigma^*}{\partial x}, \quad (1.13)$$

$$b(x, y) = -\frac{1}{\sigma^*} \frac{\partial \sigma^*}{\partial y}, \quad (1.14)$$

$$\varphi(x, y) = -\frac{1}{\sigma^*} \left(\frac{\partial \sigma^*}{\partial x} \cdot \frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial \sigma^*}{\partial y} \cdot \frac{\partial F}{\partial y} \right) \quad (1.15)$$

— известные непрерывные функции, ограниченные в области S .

4. Отметим, что регулярность $f(x, y)$ при $\frac{\partial \sigma}{\partial x} \rightarrow 0$, $\frac{\partial \sigma}{\partial y} \rightarrow 0$, когда $(x, y) \rightarrow (x_0, y_0)$, вытекает и из следующих очевидных гидромеханических соображений. Ведь это означает, что в окрестности точки (x_0, y_0) уравнение для давления (1.5) превращается в уравнение Лапласа, и, следовательно, скважина в точке (x_0, y_0) дает нашу особенность логарифмического типа (как это имеет место в пласте постоянной мощности и проницаемости).

Между прочим, заметим любопытный случай: при $\sigma = hk = \text{const}$. $\Delta p = 0$, т. е. давление — гармоническая функция, так как в каждой точке пласта изменение проницаемости компенсируется обратным изменением мощности.

5. Обратимся теперь к уравнению (1.12). Это линейное уравнение в частных производных второго порядка эллиптического типа. На границе Γ_n давление $p = \tilde{f} + \tilde{F} = p_n = \text{const}$. Здесь через \tilde{f} и \tilde{F} обозначены соответственно граничные значения функций f и F .

Таким образом, известны значения функции f на Γ_n :

$$\tilde{f} = p_n - \tilde{F} = p_n - \frac{Q\mu}{2\pi\sigma_0} \ln \frac{1}{\sqrt{(\tilde{x} - x_0)^2 + (\tilde{y} - y_0)^2}} \quad (1.16)$$

$(\tilde{x}, \tilde{y}) \in \Gamma_n$.

Следует найти функцию f , удовлетворяющую в области S уравнению (1.12) и принимающую на границе Γ_n значения \tilde{f} (1.16).

Поставленная краевая задача имеет единственное решение (см. [3], стр. 259—261).

Пикар предложил метод последовательных приближений, заключающийся в следующем. Решение ищется в виде [4]—[6]:

$$f = f_0 + f_1 + f_2 + \dots + f_n + \dots \quad (1.17)$$

где функции $f_0, f_1, \dots, f_n, \dots$ — правильные внутри контура Γ_n , функция f_0 принимает заданные значения на контуре Γ_n , а все остальные функции f_1, f_2, \dots обращаются на этом контуре в нуль. Функции эти удовлетворяют уравнениям:

$$\left. \begin{aligned} \Delta f_0 &= \varphi(x, y), \\ \Delta f_1 &= a \frac{\partial f_0}{\partial x} + b \frac{\partial f_0}{\partial y}, \\ &\dots \\ \Delta f_n &= a \frac{\partial f_{n-1}}{\partial x} + b \frac{\partial f_{n-1}}{\partial y}, \\ &\dots \end{aligned} \right\} \quad (1.18)$$

Отсюда видно, что функции f_n вычисляются последовательно из уравнений Пуассона:

$$f_0 = -\frac{1}{2\pi} \iint_{(s)} \varphi(\xi, \eta) G(x, y; \xi, \eta) d\xi d\eta + u(x, y) \quad (1.19)$$

Здесь φ берем из (1.15), а u — гармоническая в области S функция, принимающая на контуре Γ_n значения \tilde{f} . G — функция Грина урав-

нения Лапласа для области S . Остальные функции, начиная с f_1 , вычисляются последовательно по формуле

$$f_n = -\frac{1}{2\pi} \iint_{(s)} \left[a(\xi, \eta) \frac{\partial f_{n-1}(\xi, \eta)}{\partial \xi} + b(\xi, \eta) \frac{\partial f_{n-1}(\xi, \eta)}{\partial \eta} \right] G(x, y; \xi, \eta) d\xi d\eta \quad (1.20)$$

Коэффициенты a и b даны выражениями (1.13) и (1.14). Последовательность (1.17) сходится, если $a(x, y)$, $b(x, y)$ и $\varphi(x, y)$ непрерывны по x, y вместе с первыми частными производными, а \tilde{f} имеет производные первых 3 порядков. Контур Γ_n предполагается аналитическим [5]. Очевидно, a, b и φ удовлетворяют необходимым условиям в силу свойств функции $\sigma^*(x, y)$. Контур питания Γ_n всегда можно считать аналитическим, так как задание его в большой степени условно. Наконец, на аналитическом контуре Γ_n функция \tilde{f} имеет производные любого порядка [см. (1.16)].

6. Если задача определения давления ставится по-иному, с заданием давления на забое скважины p_c и давления на контуре питания p_n , то в двухсвязной области течения, ограниченной с одной стороны контуром забоя Γ_z , а с другой — контуром питания Γ_n , давление есть функция регулярная. Поэтому применение способа последовательных приближений сводит задачу к отысканию решений уравнений Пуассона в двухсвязной области, принимающих на границах Γ_z и Γ_n заданные значения.

§ 2. Пример определения давления в пласте

1. Рассмотрим круговой пласт со скважиной, расположенной в центре пласта и имеющей дебит Q (рис. 2). На окружности $r = 1$ давление

$$p = p_n = \text{const} \quad (2.1)$$

Произведение мощности на проницаемость задано функцией

$$\left. \begin{aligned} hk &= \sigma = \sigma_0 - \lambda r^2 \cos \theta, \\ 0 &< \frac{\lambda}{\sigma_0} < 1. \end{aligned} \right\} \quad (2.2)$$

Легко видеть, что в точке $r = 0$, где помещается скважина, $\frac{\partial \sigma}{\partial x} = \frac{\partial \sigma}{\partial y} = 0$,

причем порядок нуля соответствует условиям, указанным в пункте 2 § 1. Поэтому давление можно искать в виде

$$p = F + f, \quad (2.3)$$

где

$$F = \frac{Q\mu}{2\pi\sigma_0} \ln \frac{1}{r}, \quad (2.4)$$

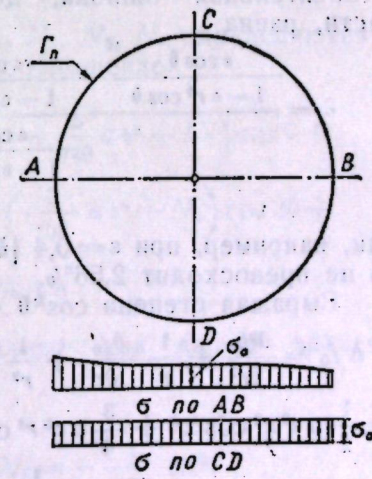


Рис. 2.

а регулярная функция f удовлетворяет уравнению (1.106), принимающему для рассматриваемой задачи вид:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial f}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 f}{\partial \theta^2} = -\frac{Q\mu}{\pi\sigma_0} \frac{\varepsilon \cos \theta}{1 - \varepsilon r^2 \cos \theta} - \frac{\varepsilon}{1 - \varepsilon r^2 \cos \theta} \left(-2r \cos \theta \frac{\partial f}{\partial r} + \sin \theta \frac{\partial f}{\partial \theta} \right), \quad (2.5)$$

где введено обозначение:

$$\frac{\lambda}{\sigma_0} = \varepsilon. \quad (2.6)$$

Функция f на границе Γ_n , т. е. при $r=1$, должна принимать значение

$$\bar{f} = p_n - F|_{r=1} = p_n. \quad (2.7)$$

2. Согласно изложенному в п. 5 § 1, ищем f в виде

$$f = f_0 + f_1 + f_2 + \dots, \quad (2.8)$$

где функция f_0 , вычислением которой мы ограничимся, удовлетворяет уравнению

$$\frac{\partial^2 f_0}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial f_0}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 f_0}{\partial \theta^2} = -\frac{Q\mu}{\pi\sigma_0} \frac{\varepsilon \cos \theta}{1 - \varepsilon r^2 \cos \theta}, \quad (2.9)$$

причем

$$f_0|_{r=1} = p_n. \quad (2.10)$$

Правую часть уравнения (2.9) можно представить в виде ряда

$$\varphi(r, \theta) = -\frac{Q\mu}{\pi\sigma_0} \varepsilon \cos \theta \left(1 + \sum_{k=1}^{\infty} \varepsilon^k r^{2k} \cos^k \theta \right).$$

Возьмем из бесконечной суммы, стоящей в скобках, первые 3 члена. Это означает, что мы опускаем в скобках величину

$$\sum_{k=4}^{\infty} \varepsilon^k r^{2k} \cos^k \theta = \frac{\varepsilon^4 r^8 \cos^4 \theta}{1 - \varepsilon r^2 \cos \theta}.$$

Относительная ошибка, допускаемая нами в величине правой части, равна

$$\delta = \frac{\frac{\varepsilon \cos \theta}{1 - \varepsilon r^2 \cos \theta} - \frac{\varepsilon \cos \theta}{1 - \varepsilon r^2 \cos \theta} (1 - \varepsilon^4 r^8 \cos^4 \theta)}{\frac{\varepsilon \cos \theta}{1 - \varepsilon r^2 \cos \theta}} = \varepsilon^4 r^8 \cos^4 \theta, \quad |\delta| \leq \varepsilon^4.$$

Так, например, при $\varepsilon=0,4$ $|\delta| \leq 0,0256$, то есть относительная ошибка не превосходит 2,56%.

Выражая степени $\cos^k \theta$ через косинусы кратных углов, получаем

$$\Delta f_0 = \frac{\partial^2 f_0}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial f_0}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 f_0}{\partial \theta^2} = \frac{1}{2} a \varepsilon^2 r^2 + \frac{3}{8} a \varepsilon^4 r^6 + a \varepsilon \cos \theta + \frac{1}{2} a \varepsilon^2 r^2 \cos 2\theta + \frac{3}{4} a \varepsilon^3 r^4 \cos \theta + \frac{1}{2} a \varepsilon^4 r^6 \cos 2\theta + \frac{1}{4} a \varepsilon^3 r^4 \cos 3\theta + \frac{1}{8} a \varepsilon^4 r^6 \cos 4\theta, \quad (2.11)$$

* Можно, разумеется, воспользоваться формулой (1.19), так как функция Грина для круга хорошо известна.

где

$$a = -\frac{Q\mu}{\pi\sigma_0}. \quad (2.12)$$

Вследствие линейности уравнения (2.11) решение его можно свести к решению уравнений вида

$$\Delta u = Ar^m, \\ \Delta v = Br^m \cos n\theta.$$

Общие интегралы этих уравнений соответственно равны

$$u = \frac{A}{(m+2)^2} r^{m+2} + C_1 \ln r + C_2,$$

$$v = \left[\frac{B}{(m+2)^2 - n^2} r^{m+2} + E_1 r^n + \frac{E_2}{r^n} \right] \cos n\theta \quad \text{при } (m+2)^2 - n^2 \neq 0,$$

$$v = \left[\frac{B}{2n} r^n \ln r + K_1 r^n + \frac{K_2}{r^n} \right] \cos n\theta \quad \text{при } (m+2)^2 - n^2 = 0.$$

Нам нужны интегралы, правильные в круге. Поэтому берем решения

$$u = \frac{A}{(m+2)^2} r^{m+2} + C_2, \quad (2.13)$$

$$v = \left[\frac{B}{(m+2)^2 - n^2} r^{m+2} + E_1 r^n \right] \cos n\theta \quad \text{при } (m+2)^2 - n^2 \neq 0, \quad (2.14)$$

$$v = \left[\frac{B}{2n} r^n \ln r + K_1 r^n \right] \cos n\theta \quad \text{при } (m+2)^2 - n^2 = 0. \quad (2.15)$$

Пользуясь формулами (2.13) и (2.14), так как в правой части уравнения (2.11) нет членов, в которых $(m+2)^2 - n^2 = 0$, получаем общий интеграл этого уравнения в виде:

$$f_0 = \frac{1}{32} a \varepsilon^2 r^4 + \frac{3}{512} a \varepsilon^4 r^8 + N_0 + \left(\frac{1}{3} a \varepsilon r^2 + \frac{3}{140} a \varepsilon^3 r^6 + N_1 r \right) \cos \theta + \left(\frac{1}{24} a \varepsilon^2 r^4 + \frac{1}{120} a \varepsilon^4 r^8 + N_2 r^2 \right) \cos 2\theta + \left(\frac{1}{108} a \varepsilon^3 r^6 + N_3 r^3 \right) \cos 3\theta + \left(\frac{1}{384} a \varepsilon^4 r^8 + N_4 r^4 \right) \cos 4\theta.$$

Произвольные функции времени N_0, N_1, N_2, N_3, N_4 определяются из краевого условия (2.7), которое дает соотношение:

$$p_n = \frac{1}{32} a \varepsilon^2 + \frac{3}{512} a \varepsilon^4 + N_0 + \left(\frac{1}{3} a \varepsilon + \frac{3}{140} a \varepsilon^3 + N_1 \right) \cos \theta + \left(\frac{1}{24} a \varepsilon^2 + \frac{1}{120} a \varepsilon^4 + N_2 \right) \cos 2\theta + \left(\frac{1}{108} a \varepsilon^3 + N_3 \right) \cos 3\theta + \left(\frac{1}{384} a \varepsilon^4 + N_4 \right) \cos 4\theta.$$

Так как это соотношение справедливо при любом значении θ ($0 \leq \theta < 2\pi$), то отсюда получаем

$$N_0 = p_n - \frac{1}{32} a \varepsilon^2 - \frac{3}{512} a \varepsilon^4;$$

$$N_3 = -\frac{1}{108} a \varepsilon^3;$$

$$N_1 = -\frac{1}{3} a \varepsilon - \frac{3}{140} a \varepsilon^3;$$

$$N_4 = -\frac{1}{384} a \varepsilon^4.$$

$$N_2 = -\frac{1}{24} a \varepsilon^2 - \frac{1}{120} a \varepsilon^4;$$

Окончательно имеем, собирая члены при различных степенях ε :

$$f_0 = p_n - a_0 \left\{ \frac{1}{3} \varepsilon r(1-r) \cos \theta + \varepsilon^2 \left[\frac{1}{32} (1-r^4) + \frac{1}{24} r^2 (1-r^2) \cos 2\theta \right] + \right. \\ \left. + \varepsilon^3 \left[\frac{3}{140} r(1-r^5) \cos \theta + \frac{1}{108} r^3 (1-r^3) \cos 3\theta \right] + \varepsilon^4 \left[\frac{3}{512} (1-r^8) + \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{1}{120} r^2 (1-r^6) \cos 2\theta + \frac{1}{384} r^4 (1-r^4) \cos 4\theta \right] \right\}. \quad (2.16)$$

3. Ограничиваясь в выражении (2.8) первым членом, полагаем $f \approx f_0$. Тогда давление в пласте в первом приближении примет вид [см. (2.31)]

$$p_{(1)} = F + f_0,$$

что с учетом выражений (2.4), (2.12) и (2.16) дает

$$p_{(1)} = p_n + \frac{Q\mu}{2\pi\sigma_0} \ln \frac{1}{r} + \frac{Q\mu}{\pi\sigma_0} \varepsilon \left\{ \frac{1}{3} r(1-r) \cos \theta + \varepsilon \left[\frac{1}{32} (1-r^4) + \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{1}{24} r^2 (1-r^2) \cos 2\theta \right] + \varepsilon^2 \left[\frac{3}{140} r(1-r^5) \cos \theta + \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{1}{108} r^3 (1-r^3) \cos 3\theta \right] + \varepsilon^3 \left[\frac{3}{512} (1-r^8) + \frac{1}{120} r^2 (1-r^6) \cos 2\theta + \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{1}{384} r^4 (1-r^4) \cos 4\theta \right] \right\}. \quad (2.17)$$

Для получения следующего приближения следует подставить производные функции f_0 в уравнение

$$\frac{\partial^2 f_1}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial f_1}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 f_1}{\partial \theta^2} = - \frac{\varepsilon}{1 - \varepsilon r^2 \cos \theta} \left(-2r \cos \theta \frac{\partial f_0}{\partial r} + \right. \\ \left. + \sin \theta \frac{\partial f_0}{\partial \theta} \right) \quad (2.18)$$

и решить это уравнение Пуассона при краевом условии

$$f_1|_{r=1} = 0.$$

Второе приближение на основании формулы (2.8) определяется так:

$$r^{(2)} = p_{(1)} + f_1.$$

Поправка имеет порядок ε^2 , а последующие — порядок ε^3 , ε^4 и т. д. Это следует из уравнения (2.18), так как первые производные f_0 имеют порядок ε . Вообще, когда $|\nabla \ln \sigma| = \frac{1}{\sigma} |\nabla \sigma| \ll 1$, достаточно взять лишь один-два первых члена ряда (2.8).

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

1. Маскет М. Течение однородных жидкостей в пористой среде. Гостоптехиздат, 1949.
2. Крылов А. П. и др. Научные основы разработки нефтяных месторождений. Гостоптехиздат, 1948.
3. Курант Р. и Гильберт Д. Методы математической физики, том II. Гостехиздат, 1951.
4. Гурса Э. Курс математического анализа, т. 3, ч. 1. Гостехиздат, 1933.
5. E. Picard. Memoire sur la theorie des equations aux derivees partielles et la methode des approximations successives. Journ. des mathematiques pures et appliquees (4-e serie), t. 6, 1890.
6. E. Picard. Sur la determination des integrales d'une equation aux derivees partielles par ses valeurs sur un contour ferme. Journ. des mathematiques pures et appliquees, t. 2, 1896.

Поступило
20 декабря 1954 г.

Физико-технический институт
Казанского филиала АН СССР.

К ВОПРОСУ ЭКСПЛУАТАЦИИ ПЛАСТОВ С ПОДОШВЕННОЙ ВОДОЙ*

Н. Ф. ИВАНОВ

В работе исследуется безводная эксплуатация пластов с подошвенной водой. Найдена простая формула для максимального безводного дебита. Исследовано влияние заглубления скважины и тампонажа на величину максимального безводного дебита. Найдена форма поверхности водяного конуса вдали от скважины. Установлена аналогия течений со свободной поверхностью и с установившимся водяным конусом.

Известно, что в месторождениях с подошвенной водой при повышении депрессии сверх некоторого предела происходит прорыв воды в скважину. Точная теория этого явления представляет собой одну из сложнейших задач гидродинамической теории фильтрации. В данной работе дается решение задачи о притоке нефти к скважине при установившемся водяном конусе. Эта задача представляет интерес для нефтепромысловой практики, и ей посвящены работы И. А. Чарного, Н. С. Пискунова, М. Д. Миллионщикова, М. Маскета и др.

Для применения теории фильтрации к изучению движения нефтей в залежи необходимо прежде всего выбрать модель нефтяного пласта, которая, с одной стороны, соответствовала бы в существенных чертах естественной нефтяной залежи, а с другой стороны, поддавалась бы простой математической обработке.

Рассмотрим горизонтальный однородный пласт с проницаемостью k и мощностью H , заполненный нефтью и водой соответственно с удельными весами γ_n , γ_b и вязкостями μ_n , μ_b . Явление капиллярности не учитывается. Вследствие различия удельных весов, жидкости в пласте разделены. Нефть „плавает“ на воде. Пусть h_n — часть мощности пласта, заполненная нефтью; h_b — водой.

R_0 — радиус контура питания скважины. Давление на кровле пласта до его разработки назовем пластовым $p_{пл}$.

Пласт вскрыт скважиной радиуса r_c с заглублением $l < h_n$. После пуска скважины в эксплуатацию с достаточно малым дебитом Q_n граница раздела жидкости АВА изменит свою форму, приподнимется и займет положение АВ'А (рис. 1). Плоскость АВА — первоначальная граница раздела жидкостей. Считаем, что на контуре питания скважины — цилиндре с радиусом R_0 — сохраняется начальное давление.

* Статья публикуется в дискуссионном порядке.

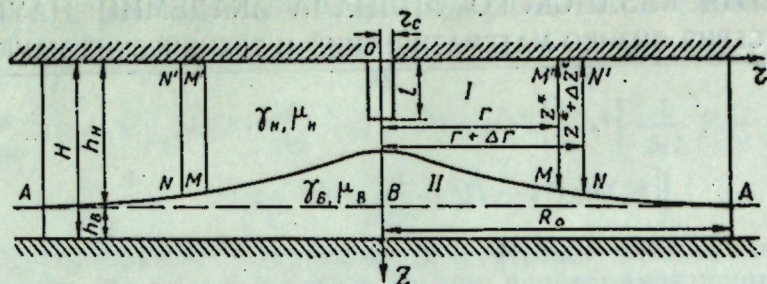


Рис. 1.

Дебит Q_n такой, что точка B' лежит ниже забоя скважины. В скважину будет поступать только нефть, лежащая выше границы раздела $AB'A$. Такая эксплуатация нефтяных пластов называется безводной.

§ 1. Допустимая депрессия при безводной эксплуатации

При безводной эксплуатации с установившимся водяным конусом давление в обводненной части пласта распределено по гидростатическому закону. Следовательно, давление на плоскости ABA будет постоянным и равным первоначальному давлению

$$p_A = p_{пл} + \gamma_n h_n. \quad (1.1)$$

С другой стороны,

$$p_A = p^* + \gamma_b (h_n - z^*), \quad (1.2)$$

где p^* — давление на поверхности конуса $z^* = f(z)$. Из уравнений (1.1) и (1.2) находим

$$p_{пл} - p^* = \delta\gamma h_n - \gamma_b z^*, \quad (1.3)$$

где $\delta\gamma = \gamma_b - \gamma_n$.

Это уравнение определяет депрессию во всех точках поверхности конуса, имеющих координату z^* . Минимальному значению z^* будет соответствовать максимальная депрессия. При эксплуатации с максимальным безводным дебитом $z_{min}^* = l$ (см. рис. 3). Очевидно, максимальная депрессия имеет место на скважине. Обозначим давление в скважине на уровне кровли пласта через p_c . Считаем, что давление в скважине распределено по гидростатическому закону. Тогда давление в нижней точке B'' скважины будет

$$p_{B''} = p_c + \gamma_n l.$$

Теперь легко найти депрессию, соответствующую максимальному дебиту. Для этого достаточно подставить значения $z_{min}^* = l$ и $p_{B''} = p_c + \gamma_n l$ в (1.3).

$$p_{пл} - p_c - \gamma_n l = \delta\gamma h_n - \gamma_b l, \quad (1.5)$$

где

$$\Delta p_{max} = p_{пл} - p_c.$$

Тем самым найдено условие безводной эксплуатации

$$\Delta p < \delta\gamma (h_n - l). \quad (1.6)$$

М. Д. Миллионщиков [1], рассматривая скважину — точечный сток на кровле пласта, нашел условие, которому должны удовлетворять депрессия на забое скважины в случае безводной эксплуатации.

Это условие записывается неравенством

$$p_{пл} - p_c = \Delta p < \delta\gamma h_n. \quad (1.7)$$

Относительно условия (1.7) сделаем несколько замечаний.

1. Оно было выведено в предположении, что в бесконечности сохраняется постоянное пластовое давление. При таком отнесении контура питания в бесконечность, в случае конечной мощности нефтенасыщенной части пласта, течение нефти в скважину невозможно. Однако, вследствие того, что условия (1.7) и (1.6) не зависят от размера и формы контура питания скважины, высказанное замечание не привело к существенной ошибке при выводе условия (1.7).

2. Очевидно, при повышении депрессии безводный дебит должен увеличиваться. Однако, если рассматривать точечный сток, то в окрестности его скорость фильтрации неограниченно растет, вследствие чего закон Дарси там несправедлив. Поэтому вместо точечного стока следовало бы рассматривать полусферу радиуса r_c , обеспечивающего справедливость положенного в основу линейной теории фильтрации закона Дарси во всей области течения нефти. Тогда условие (1.7) записалось бы в форме

$$\Delta p < \delta\gamma (h_n - r_c).$$

Последнее замечание относится и к условию (1.6). Заглубление l должно обеспечивать справедливость закона Дарси во всей области течения нефти.

Условие (1.6) имеет место и для несовершенной скважины. Под l в этом случае понимается расстояние от кровли пласта до нижней перфорации забоя. И здесь следует помнить о замечании 2.

§ 2. Максимальный безводный дебит и форма поверхности водяного конуса

Найдем теперь максимальный безводный дебит и форму водяного конуса.

Известно [4], что вдали от скважины поле скоростей выравнивается и поверхности эквипотенциалов приближаются к поверхностям концентрических круговых цилиндров, соосных скважине. Для приближенного решения поставленной задачи введем следующее допущение: в области течения жидкости $r > h_n$ эквипотенциальные поверхности представляют собой семейство концентрических круговых цилиндров, соосных скважине. Это допущение аналогично допущениям Дюпюи, принятым им при выводе формул для расхода через перемычку и для дебита скважины-колодца при фильтрации со свободной поверхностью.

Формулы Дюпюи соответственно имеют вид:

$$q = \frac{k\gamma_b (h_n^2 - r^2)}{2L\mu_b}, \quad (2.1)$$

$$Q = \frac{\pi k \gamma_B (h_B^2 - l^2)}{\mu_B \ln \frac{R_0}{r_c}}, \quad (2.2)$$

где q — дебит галереи на единицу длины,
 L — расстояние между областью питания и галереей,
 h_B — уровень воды в области питания,
 l — уровень воды в галерее или колодце (рис. 2).
 Остальные обозначения k , γ_B , μ_B , R_0 , r_c были пояснены выше

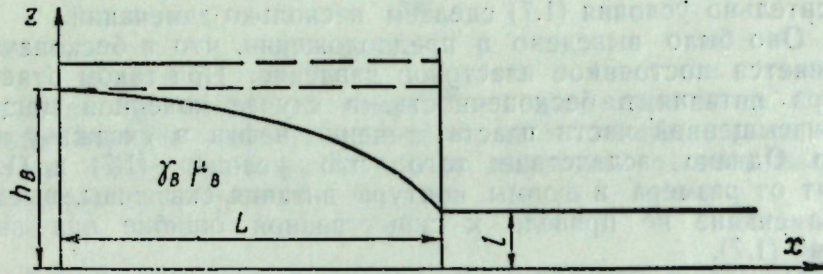


Рис. 2.

Рассмотрим течение между двумя поверхностями — эквипотенциалами с радиусами r и $r + \Delta r$ (см. рис. 1). Из сделанного допущения следует, что во всех точках каждой из упомянутых поверхностей скорости фильтрации равны и направлены горизонтально.

Расход жидкости Q через цилиндрическую поверхность MM' может быть вычислен по формуле

$$Q = 2\pi r z^* v_M. \quad (2.3)$$

Как известно, потенциал скорости Φ удовлетворяет соотношениям

$$v_r = \frac{\partial \Phi}{\partial r}, \quad v_z = \frac{\partial \Phi}{\partial z}. \quad (2.4)$$

Согласно допущению,

$$v_r = \frac{d\Phi}{dr}, \quad v_z = 0. \quad (2.5)$$

Если ось z направлена вниз, то потенциал в нефтяной части определяется уравнением

$$\Phi_{II} = -\frac{k}{\mu_{II}} (p_{II} - \gamma_{II} z).$$

Отсюда находим значение потенциала на поверхностях MM' и NN' :

$$\Phi_M = -\frac{k}{\mu_{II}} (p_M^* - \gamma_{II} z^*), \quad (2.6)$$

$$\Phi_N = -\frac{k}{\mu_{II}} [p_N^* - \gamma_{II} (z^* + \Delta z^*)]. \quad (2.7)$$

где p_M^* и p_N^* — давления в точках пересечения поверхности конуса с соответствующими эквипотенциалами MM' и NN' .

Из (2.6) и (2.7) находим

$$\Delta \Phi_M = \Phi_N - \Phi_M = -\frac{k}{\mu_{II}} [(p_N^* - p_M^*) - \gamma_{II} \Delta z^*]. \quad (2.8)$$

Найдем разность $p_N^* - p_M^*$. В области II давление распределено по гидростатическому закону. В частности, на плоскости ABA давления p_{ABA} равно

$$p_{ABA} = p_{II} + \gamma_{II} h_{II}.$$

Легко видеть, что

$$p_{ABA} = p_{II} + \gamma_{II} h_{II} = p_N^* + \gamma_{II} [h_{II} - (z^* + \Delta z^*)].$$

$$p_{ABA} = p_{II} + \gamma_{II} h_{II} = p_M^* + \gamma_{II} [h_{II} - z^*].$$

Отсюда

$$p_N^* - p_M^* = \gamma_{II} \Delta z^*. \quad (2.9)$$

Подставляя (2.9) в (2.8), получим

$$\Delta \Phi = -\frac{k}{\mu_{II}} \delta \gamma \Delta z^*.$$

Деля обе части на Δr и переходя к пределу, будем иметь

$$v_M = v_r = \frac{d\Phi}{dr} = -\frac{k}{\mu_{II}} \delta \gamma \frac{dz^*}{dr}. \quad (2.10)$$

Из формулы (2.10) видно, что скорость пропорциональна уклону поверхности водяного конуса. Из формул (2.3), (2.10) имеем

$$Q = -\frac{2\pi k \delta \gamma}{\mu_{II}} r z^* \frac{dz^*}{dr}.$$

Деля переменные, находим

$$z^* \cdot dz^* = -\frac{Q \mu_{II}}{2\pi k \delta \gamma} \cdot \frac{dr}{r}. \quad (2.11)$$

После интегрирования уравнения (2.11) получим

$$\frac{z^{*2}}{2} = -\frac{Q \mu_{II}}{2\pi k \delta \gamma} \ln r + C. \quad (2.12)$$

Из условия, что поверхность водяного конуса на радиусе $r = R_0$ совпадает с первоначальной границей раздела ABA , определяем произвольную постоянную C

$$C = \frac{h_{II}^2}{2} + \frac{Q \mu_{II}}{2\pi k \delta \gamma} \ln R_0.$$

Подставляя значение C в (2.12), получаем окончательно уравнение поверхности водяного конуса при $r > h_{II}$

$$z^{*2} = h_{II}^2 + \frac{Q \mu_{II}}{\pi k \delta \gamma} \ln \frac{R_0}{r}. \quad (2.13)$$

Из (2.13) находим дебит, соответствующий безводной эксплуатации при установившейся поверхности водяного конуса, проходящей через точку $M(r, z^*)$,

$$Q = \frac{\pi \cdot k \delta \gamma (z^{*2} - h_{II}^2)}{\mu_{II} \ln \frac{R_0}{r}}. \quad (2.14)$$

Очевидно, при эксплуатации с безводным дебитом поверхность водяного конуса всюду должна лежать ниже точки B'' (см. рис. 3), т. е. повсюду $z^* > l$. В частности, точка, отстоящая от оси скважины

на расстоянии $r = h_n$, должна также лежать ниже точки B' . Ясно, что безводный дебит удовлетворяет неравенству

$$|Q| < \frac{\pi k \delta \gamma (h_n^2 - l^2)}{\mu_n \ln \frac{R_0}{h_n}} \quad (2.15)$$

Дебит Q взят по модулю потому, что в случае эксплуатации его нужно было бы брать со знаком минус.

Пусть скважина, совершенная по характеру вскрытия, эксплуатируется с максимальным безводным дебитом. Распространим наше допущение о форме эквипотенциальных поверхностей на всю область течения, что позволяет из (2.8) получить формулу для максимального безводного дебита:

$$Q_{\max} = \frac{\pi k \delta \gamma (h_n^2 - l^2)}{\mu_n \ln \frac{R_0}{r_c}} \quad (2.16)$$

Для расчета максимального безводного дебита по формуле (2.16) нужно знать, в частности, значение R_0 — радиуса питания скважины. То обстоятельство, что значение R_0 входит в формулу (2.16) под знаком логарифма, обеспечивает малое влияние его на величину Q_{\max} . Это важно ввиду условности и приближенного задания R_0 . Можно принять, например, $R_0 = 200$ м.

Формула (2.16) справедлива и для газового конуса, который, по существу, представляет собой перевернутый водяной конус. Так как $\gamma_n \gg \gamma_{\text{газ}}$ мы можем считать $\delta \gamma = \gamma_n$, и тогда из (2.16) следует формула, полученная М. Д. Миллионщиковым [1] для газового конуса

$$Q = \frac{\pi k \gamma_n (h_n^2 - l^2)}{\mu_n \ln \frac{R_0}{r_c}} \quad (2.17)$$

и совпадающая с формулой Дюпюи (2.2) для дебита колодца при притоке жидкости со свободной поверхностью.

Формула же (2.16) отличается от формулы Дюпюи (2.2) лишь коэффициентом, учитывающим удельные веса обеих жидкостей.

Такое сходство формул легко объясняется тем, что они были выведены при одинаковых допущениях, а краевые условия задач об установившемся безнапорном притоке воды к колодцам и о течении нефти к скважинам при установившемся конусе в случае эксплуатации с безводным дебитом совпадают.

Следует заметить, что нами не учитываются капиллярные силы, а при течении со свободной поверхностью — промежуток высачивания.

Пример I. Вычислим максимальный безводный дебит при условиях

$$h_n = 20 \text{ м}; \quad l = 5 \text{ м}; \quad r_c = 10 \text{ см}; \quad \mu_n = 3 \text{ сантипуаза};$$

$$\gamma_n = 1,15 \text{ г/см}^3; \quad \gamma_n = 0,8 \text{ г/см}^3; \quad k = 1 \text{ дарси};$$

$$R_0 = 200 \text{ м}; \quad \delta \gamma = 0,35 \text{ г/см}^3 = 0,35 \cdot 10^{-3} \text{ кг/см}^3.$$

По формуле (2.16) находим

$$Q_{\max} = 182 \text{ см}^3/\text{сек} = 15,7 \text{ м}^3/\text{сутки}.$$

М. Д. Миллионщиков [1], найдя правильное значение предельно допустимой депрессии безводной эксплуатации (если не учитывать замечаний относительно условия (1.7)), при определении соответствующего

ей дебита пошел по ошибочному пути. А именно, он подставляет значение $\Delta p = \delta \gamma h_n$ в формулу

$$Q = \frac{2\pi k r_c}{\mu_n} \Delta p, \quad (2.18)$$

дающую значение дебита для сферического радиального движения в полубесконечном пласте.

Определяя дебит по формуле (2.18), М. Д. Миллионщиков тем самым находит максимальный безводный дебит для скважины — сферы радиуса r_c , отстоящей от первоначальной плоскости раздела вода-нефть на расстоянии h_n , расположенной в полубесконечной нефтенасыщенной части пласта, а не в пласте с мощностью нефтяной части равной h_n .

Для выяснения расхождения наших результатов с результатами М. Д. Миллионщикова рассмотрим следующий пример.

Пример II. Определим безводный дебит по формулам (2.18) и (2.16):

$$Q_1 = \frac{2\pi k r_c \delta \gamma h_n}{\mu_n} = 14,65 \text{ см}^3/\text{сек},$$

$$Q_2 = \frac{\pi k \delta \gamma (h_n^2 - l^2)}{\mu_n \ln \frac{R_0}{r_c}} = 192,81 \text{ см}^3/\text{сек};$$

в последней формуле положено $l = 0$. Остальные значения величин, входящих в правые части формул, взяты из рассмотренного выше примера, откуда видно, что безводный дебит, подсчитанный по формуле М. Д. Миллионщикова (2.18), в 13 раз меньше дебита, полученного из формулы (2.16).

И. А. Чарный [2]—[4], решая задачу нахождения максимального безводного дебита, исходил из вывода М. Маскета о существовании неустойчивой поверхности водяного конуса. М. Д. Миллионщиков же показал [1], что существует устойчивая поверхность водяного конуса с вершиной z^* , лежащей на оси z в пределах

$$0 < z^* \leq h_n,$$

при депрессии на скважине, удовлетворяющей неравенству

$$\Delta p < \delta \gamma h_n.$$

§ 3. Аналогия между течениями со свободной поверхностью и с установившимся водяным конусом

При эксплуатации скважины заглубления l с максимальным безводным дебитом водяной конус займет положение $AB'A$, изображенное на рис. 3.

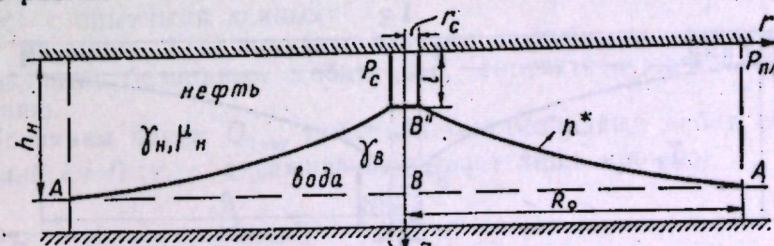


Рис. 3.

Для решения задачи о притоке жидкости с установившимся водяным конусом необходимо найти потенциал скорости Φ_{II} , удовлетворяющий следующим краевым условиям:

$$\left. \frac{\partial \Phi_{II}}{\partial z} \right|_{z=0} = 0, \quad \text{при } R_0 \geq r \geq r_c, \quad (3.1)$$

$$\Phi_{II} |_{r=R_0} = a_1 = \text{const.} \quad \text{при } h_{II} \geq z \geq 0, \quad (3.2)$$

$$\Phi_{II} |_{r=r_c} = b_1 = \text{const.} \quad \text{при } l \geq z \geq 0, \quad (3.3)$$

$$\frac{\partial \Phi_{II}}{\partial n^*} = 0, \quad (3.4)$$

где n^* — нормаль к поверхности водяного конуса. Кроме того, на поверхности водяного конуса имеет место следующее соотношение: $p_{II}^* = p_{II}^*$.

$$p_{II}^* = p_{II} + \gamma_{II} h_{II} - \gamma_{II} (h_{II} - z^*) = p_{II} - \delta\gamma h_{II} + \gamma_{II} z^*. \quad (3.5)$$

Как известно, потенциал скорости связан с давлением следующим образом

$$\Phi = - \frac{k}{\mu_{II}} (p_{II} - \gamma_{II} z).$$

Подставляя в это уравнение значение $p_{II}^* = p_{II}^*$ из (3.5), получим значение потенциала на поверхности водяного конуса

$$\Phi_{II}^* = - \frac{k}{\mu_{II}} [p_{II} - \delta\gamma (h_{II} - z^*)].$$

Следовательно, Φ_{II} удовлетворяет еще такому условию:

$$\Phi_{II}^* = \Phi_{0II} - \frac{k\delta\gamma}{\mu_{II}} z^*, \quad (3.6)$$

где

$$\Phi_{0II} = \frac{kh_{II}\delta\gamma}{\mu_{II}} - \frac{k}{\mu_{II}} p_{II} = \text{const.}$$

Таким образом, условия (3.6) и (3.4) дают нам значения потенциала и его нормальной производной на неизвестной границе — поверхности раздела, причем в условии (3.6) входит координата z^* этой неизвестной границы.

Рассмотрим теперь установившийся приток воды к колодцу (см. рис. 4).

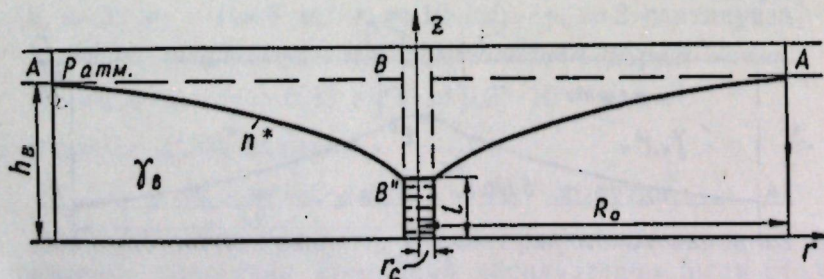


Рис. 4.

На рис. 4 AB^*A — свободная поверхность, ABA — невозмущенное зеркало воды, r_c и R_0 — радиусы скважины и ее контура питания.

Для решения задачи о притоке воды к колодцу с установившейся свободной поверхностью необходимо найти потенциал скорости Φ_B , удовлетворяющий следующим краевым условиям:

$$\left. \frac{\partial \Phi_B}{\partial z} \right|_{z=0} = 0, \quad \text{при } R_0 \geq r \geq r_c, \quad (3.7)$$

$$\Phi_B |_{r=R_0} = a_2 = \text{const.}, \quad \text{при } h_B \geq z_B \geq 0, \quad (3.8)$$

$$\Phi_B |_{r=r_c} = b_2 = \text{const.}, \quad \text{при } 0 \leq z \leq l, \quad (3.9)$$

$$\frac{\partial \Phi_B}{\partial n^*} = 0, \quad (3.10)$$

где n^* — нормаль к свободной поверхности.

Наконец, известно, что давление на свободной поверхности AB^*A равно атмосферному.

Имеем

$$\Phi_B = - \frac{k}{\mu_B} (p_B + \gamma_B z).$$

Отсюда получим условие

$$\Phi_B^* = \Phi_{0B} + \frac{k\gamma_B}{\mu_B} z^*, \quad (3.11)$$

где $\Phi_{0B} = - \frac{k}{\mu_B} p_{атм.}$, а Φ_B^* — значение потенциала на свободной поверхности.

Отсюда видно, что математические постановки задачи о притоке нефти к скважине при безводной эксплуатации и задачи о безнапорном притоке воды к колодцу — эквивалентны.

Из сопоставления краевых условий ясно, что γ_B во второй задаче соответствует $-\delta\gamma$ в первой. Отсюда следует вывод, что результаты теории безнапорного притока к колодцам переносятся на течение при установившемся водяном конусе, которое можно рассматривать как безнапорное течение фиктивной жидкости с удельным весом $-\delta\gamma$ и вязкостью μ_{II} .

Следует еще раз отметить, что явления капиллярности и высачивания при установлении этой аналогии не учтены. Учет этих факторов должен внести некоторые коррективы.

Хорошо известно, что формулы Дюпюи (2.1) и (2.2) превосходно согласуются с опытными данными и с результатами расчетов по точным гидромеханическим решениям, весьма сложным в вычислительном отношении. В силу установленной аналогии можно ожидать, что и выведенная нами формула (2.16) будет достаточно хорошо согласовываться с опытными данными.

Из формулы (2.16) получим влияние заглубления скважины l на максимальный безводный дебит Q_{max} , соответствующий этому заглублению.

Обозначим через Q_{0max} максимальный безводный дебит, соответствующий $l=0$ (т. е. скважина вскрывает лишь кровлю),

$$Q_{0max} = \frac{\pi k \delta\gamma}{\mu_{II} \ln \frac{R_0}{r_c}}. \quad (3.12)$$

Обозначим

$$\bar{Q}_{\max} = \frac{Q_{\max}}{Q_{0\max}}$$

Тогда, разделив (2.16) на (3.12), получим

$$\bar{Q}_{\max} = 1 - \frac{l^2}{h_n^2},$$

откуда получаем следующий график (рис. 4).

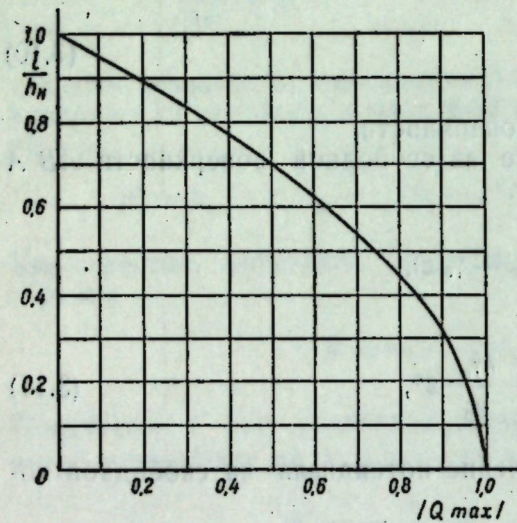


Рис. 4.

Из графика видно, что с уменьшением заглубления \bar{Q}_{\max} растет, однако при $l < 0,25 h_n$ рост \bar{Q}_{\max} замедляется, и дальнейшее уменьшение заглубления практически невыгодно. Поэтому можно считать для эксплуатации с безводным дебитом наиболее целесообразным заглубление скважины, равное $l = 0,20 \div 0,25 h_n$.

Найдем уравнение поверхности конуса при эксплуатации с Q_{\max} .

В этом случае конус касается дна скважины, поэтому, подставив значение $r = r_c$, $z^* = l$ в (2.14), получим

$$Q = \frac{\pi k \delta \gamma (l^2 - h_n^2)}{h_n \ln \frac{R_0}{r_c}}$$

Подставив теперь это значение Q в (2.13), мы найдем искомое уравнение поверхности конуса:

$$z^{*2} = h_n^2 + \frac{l^2 - h_n^2}{\ln \frac{R_0}{r_c}} \ln \frac{R_0}{r} \quad (3.13)$$

Из рассмотрения формулы (3.13) видно, что, во-первых, форма водяного конуса при эксплуатации с максимальным безводным дебитом не зависит от физических параметров пласта и жидкостей. Во-вторых, явление конусообразования не является локальным, так как поднятие зеркала воды имеет место во всей области течения, а не только вблизи скважины. Для наглядности рассмотрим следующий пример.

Пусть $h_n = 20$ м, $l = 5$ м, $R_0 = 200$ м, $r_c = 10$ см. Составим по формуле (3.13) таблицу, дающую поднятие конуса $h_n - z^*$ на расстоянии r от оси скважины.

Таблица 1

r в метрах	0,1	1	2	4	8	20	40	60	80	100	130	160	200
$h_n - z^*$ в метрах	15	8,2	6,8	5,6	4,5	3,1	2,1	1,5	1,2	0,9	0,5	0,3	0

Из приведенной таблицы видно, что поверхность конуса сливается с первоначальной границей раздела лишь на контуре питания скважины. На расстоянии от скважины, равном удвоенной мощности пласта, поднятие составляет более 10% от мощности нефтяной части пласта.

§ 4. Влияние тампонажа на максимальный безводный дебит

Выше было показано, что из пластов с подошвенной водой можно извлекать чистую нефть и не допускать прорыва воды в скважину. Для этого необходимо эксплуатировать скважину с дебитом, который может быть вычислен по формуле (2.16). Однако максимальный безводный дебит во многих случаях оказывается низким; практические темпы отбора значительно превышают допустимый, и в скважину скоро проникает вода.

С целью повышения безводного дебита на нефтяных промыслах осуществляется способ химического тампонажа скважин, сущность которого сводится к следующему.

Выше первоначальной границы раздела ABA в скважине простреливаются дыры, через которые в пласт под большим давлением нагнетается химический состав, заполняющий некоторый объем пласта. После затвердения вещества, введенного в поры, соответствующая часть пласта становится непроницаемой. Можно считать, что непроницаемая часть пласта после тампонажа представляет собой некоторое тело вращения с осью вращения OZ (см. рис. 5).

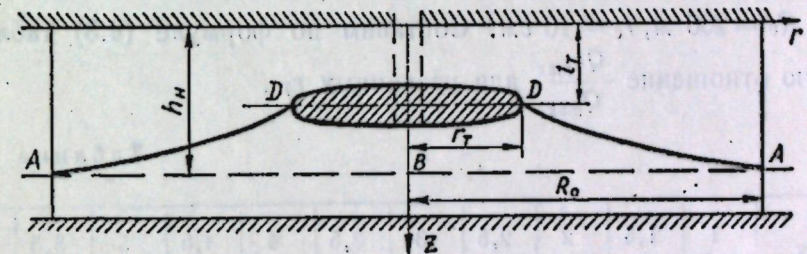


Рис. 5.

DD — кромка непроницаемой зоны, составленная из точек тела вращения, наиболее удаленных от OZ ,

r_T — радиус кромки,

l_T — расстояние кромки от кровли.

Пусть эксплуатация ведется с таким дебитом $Q_{T\max}$, что водяной конус подтянулся к кромке DD , но вода в скважину не поступает, т. е. ведется безводная эксплуатация. Требуется при этих условиях определить безводный дебит.

Предположим для простоты, что непроницаемая часть пласта имеет форму сплюснутого в направлении OZ эллипсоида вращения. Естественно положить $r_T \gg r_c$, тогда, даже в случае несовершенной по характеру вскрытия скважины, эквипотенциаль, проходящая через кромку DD , практически является круговым цилиндром радиуса r_T .

Известно, что любая эквипотенциаль может рассматриваться как поверхность фиктивной скважины. Поэтому мы можем определить $Q_{T\max}$ из условия безводной эксплуатации фиктивной скважины ра-

диуса r_T и углубления l_T . Для этого достаточно подставить r_T и l_T в формулу (2.16). Получим

$$Q_{T \max} = \frac{\pi k \delta \gamma (h_n^2 - l_T^2)}{\mu_n \ln \frac{R_0}{r_T}} \quad (4.1)$$

Теперь легко ответить на вопрос, как влияет тампонаж на повышение безводного дебита. Для этого необходимо сравнить дебиты скважины с тампонажем и при отсутствии его. Пусть Q_{\max} — максимальный безводный дебит скважины углубления l_T без тампонажа. По формуле (3.16) найдем

$$Q_{\max} = \frac{\pi k \delta \gamma (h_n^2 - l_T^2)}{\mu_n \ln \frac{R_0}{r_c}} \quad (4.2)$$

Поделив (4.1) на (4.2), найдем отношение, показывающее увеличение $Q_{T \max}$ при тампонаже

$$\frac{Q_{T \max}}{Q_{\max}} = \frac{\ln \frac{R_0}{r_c}}{\ln \frac{R_0}{r_T}} \quad (4.3)$$

Пусть $R_0 = 200$ м, $r_c = 10$ см. Составим по формуле (4.3) таблицу, дающую отношение $\frac{Q_{T \max}}{Q_{\max}}$ для различных r_T .

Таблица 2

r_T в метрах	1	1,5	2	2,5	3	3,5	4	4,5	5	5,5	6
$\frac{Q_{T \max}}{Q_{\max}}$	1,43	1,55	1,65	1,74	1,81	1,88	1,94	2,00	2,06	2,12	2,17

Из таблицы 2 видно, что при $r_T = 4,5$ м можно эксплуатировать скважину с дебитом в 2 раза большим безводного дебита такой же скважины без тампонажа. Однако дальнейшее повышение безводного дебита за счет увеличения r_T замедляется. Например, если продолжить таблицу 2, то увидим, что отношению $\frac{Q_{T \max}}{Q_{\max}} = 3$ соответствует $r_T = 15$ метров, что вряд ли может быть осуществимо на практике.

Отсюда следует вывод, что благодаря химическому тампонажу можно повысить максимальный безводный дебит приблизительно в два раза.

Действительное увеличение безводного дебита при проведении тампонажа скважины заглубления l еще больше, так как $l_T < l$.

В настоящей работе рассматривалось пространственное течение. Не представляет никакого труда рассмотреть плоскую задачу.

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

1. Миллионщиков М. Д. Гидромеханический анализ некоторых способов эксплуатации нефтяных скважин. Докторская диссертация, Москва, 1944.
2. Чарный И. А. Приток к скважинам в месторождениях с подошвенной водой или газовой шапкой. Нефтяное хозяйство, 1952, № 10.
3. Полубаринова-Кочина П. Я. Некоторые задачи плоского течения грунтовых вод, изд. АН СССР, 1942.
4. Маскет М. Течение однородных жидкостей в пористой среде. Гостоптехиздат, 1949.
5. Полубаринова-Кочина П. Я. Теория движения грунтовых вод. Гостехиздат, 1952.
6. Чарный И. А. Строгое доказательство формул Дюпюи с промежутком высачивания. ДАН, 1951, т. 79, № 6.
7. Чарный И. А. О прорыве подошвенной воды в нефтяную скважину. ДАН, 91, № 6, 1953.
8. Чарный И. А. Расчет дебита несовершенной скважины перед прорывом подошвенной воды или верхнего газа. ДАН, 92, 1953, № 1.

Поступило
20 декабря 1954 г.

Физико-технический институт
Казанского филиала АН СССР

И. В. СВирский

К ВОПРОСУ О ФОРСИРОВАННОЙ ЭКСПЛУАТАЦИИ НЕФТЯНЫХ СКВАЖИН

Из нефтепромысловой практики известно, что для рациональной эксплуатации нефтяных скважин не следует снижать давления на их забоях ниже некоторого критического, например, давления, при котором происходит разгазирование нефти, сопровождающееся бурным выделением пузырьков газа, обгоняющих движение нефти.

Распространено мнение, что при быстром спуске давления до критического уровня в первый период эксплуатации скважин происходит нерациональная потеря внутренней энергии пласта, приводящая к пониженной суммарной добыче.

Г. С. Салехов и Н. Ф. Иванов [1] изучали работу одной совершенной по вскрытию пласта скважины в однородном горизонтальном пласте и пришли к заключению, что при соблюдении линейного закона фильтрации и при линейном законе упругости нефти и грунта упомянутое выше мнение о нежелательности скорого спуска давления является необоснованным. Они показали, что для разобранного ими случая в чисто нефтяной зоне наибольшую суммарную добычу можно получить, если спустить давление на забое до критической величины так скоро, как это позволяют технические условия.

В настоящей работе рассматривается общий случай эксплуатации любого числа скважин в неоднородном, всюду изотропном пласте бесконечной толщины при нелинейных законах фильтрации и упругости нефти и грунта. В работе доказываем, что и для общего случая справедливо утверждение о том, что при эксплуатации в чисто нефтяной зоне, когда нет опасности проникновения воды, наибольшую суммарную добычу можно получить, если сразу спустить давление на забоях до критической величины так скоро, как это позволяют технические условия.

Уравнение неразрывности течения нефти в пласте можно представить в следующей форме:

$$\frac{\partial p}{\partial t} + \sum_{i=1}^3 \frac{\partial v_i}{\partial x_i} = 0. \quad (1)$$

Здесь p — вес нефти в единице объема пористой среды, а v_i ($i=1, 2, 3$) — компоненты плотности весового потока нефти, т. е. веса нефти, проходящей в секунду через единичные площадки, перпендикулярные к координатным осям. Эти компоненты мы будем считать нелинейными функциями давления, его градиента и координат:

$$v_i = v_i(p_1, p_2, p_3, p, x_1, x_2, x_3); \quad (i=1, 2, 3). \quad (2)$$

Здесь P — давление, а $P_i = \frac{\partial P}{\partial x_i}$; ($i=1, 2, 3$). Естественно предположить, что давление является возрастающей функцией количества нефти в единице объема пористой среды:

$$P = f(p, x_1, x_2, x_3); \quad (3)$$

$$\frac{\partial P}{\partial p} > 0; \quad (4)$$

из (1), (2) и (3) следует:

$$\frac{\partial p}{\partial t} + \sum_{i,k=1}^3 \frac{\partial v_i}{\partial p_k} \frac{\partial p_k}{\partial x_i} + \sum_{i=1}^3 \left[\frac{\partial v_i}{\partial x_i} \Big|_{p \text{ и } p_k = \text{const}} + \frac{\partial v_i}{\partial p} \frac{\partial p}{\partial x_i} \right] = 0; \quad (5)$$

здесь $p_k = \frac{\partial p}{\partial x_k}$, $k=1, 2, 3$.

В этой формуле в отличие от формулы (1) $\frac{\partial v_i}{\partial x_i}$ обозначают частные производные v_i по координатам при постоянных p и p_k .

Для того, чтобы не рассматривать граничных условий на кровле пласта, что усложняет рассуждения, мы применим известный прием "зеркального отражения".

Мы будем предполагать кровлю пласта плоской и непроницаемой в том смысле, что функции (2) мы будем считать стремящимися к нулю вместе со своими производными по P_i при приближении к границе пласта. Предположим, что функции (2) распространены на область пространства над пластом так, что в симметричных относительно кровли точках и при симметрических относительно кровли градиентах давления они характеризуют симметрические относительно кровли градиенты скорости.

Соответственно предыдущему мы будем предполагать симметрично продолженными также начальные и граничные условия.

Тогда можно ожидать, что решение нашего уравнения также окажется функцией симметричной относительно кровли.

Рассмотрим два режима эксплуатации скважин таких, что при втором режиме давления на забоях, начиная с момента времени $t=0$, поддерживаются ниже давления первого режима, но все же выше критического:

на поверхности скважин $p^* \leq p$.
Начальные условия будут одинаковыми для обоих режимов:

$$p(0, x_1, x_2, x_3) = p^*(0, x_1, x_2, x_3). \quad (6)$$

Докажем, что при втором режиме эксплуатации (меньшем давлении на забоях) в течение любого промежутка времени мы получим больше нефти, чем при первом режиме.

Функция p^* удовлетворяет уравнению, вполне аналогичному (5).

$$\frac{\partial p^*}{\partial t} + \sum_{i,k=1}^3 \frac{\partial v_i^*}{\partial p_k^*} \frac{\partial p_k^*}{\partial x_i} + \sum_{i=1}^3 \left[\frac{\partial v_i^*}{\partial x_i} + \frac{\partial v_i^*}{\partial p^*} \frac{\partial p^*}{\partial x_i} \right] = 0. \quad (8)$$

Вычитая из уравнения (8) уравнение (5) и производя тождественные преобразования, получим:

$$\frac{\partial(p^*-p)}{\partial t} + \sum_{i,k=1}^3 \frac{\partial v_i^*}{\partial p_k^*} \frac{\partial(p_k^*-p_k)}{\partial x_i} + \left[\sum_{i,k=1}^3 \frac{\partial v_i^*}{\partial p_k^*} \frac{\partial p_k}{\partial x_i} + \sum_{i=1}^3 \left(\frac{\partial v_i^*}{\partial x_i} + \frac{\partial v_i^*}{\partial p^*} \frac{\partial p^*}{\partial x_i} \right) \right] - \left[\sum_{i,k=1}^3 \frac{\partial v_i}{\partial p_k} \frac{\partial p_k}{\partial x_i} + \sum_{i=1}^3 \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_i} + \frac{\partial v_i}{\partial p} \frac{\partial p}{\partial x_i} \right) \right] = 0.$$

Выражение, стоящее в фигурных скобках, есть приращение величины

$$w = \sum_{i,k=1}^3 \frac{\partial v_i}{\partial p_k} \frac{\partial p_k}{\partial x_i} + \sum_{i=1}^3 \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_i} + \frac{\partial v_i}{\partial p} \frac{\partial p}{\partial x_i} \right)$$

при изменении величин p и p_k (величины $\frac{\partial p_k}{\partial x_i}$ при этом не меняются).

Из теоремы о конечных приращениях следует:

$$\frac{\partial(p^*-p)}{\partial t} + \sum_{i,k=1}^3 \frac{\partial v_i^*}{\partial p_k^*} \frac{\partial(p^*-p)}{\partial x_i} + \sum_{k=1}^3 A_k (p_k^* - p_k) + B(p^* - p) = 0.$$

Здесь A_k и B обозначают некоторые средние значения частных производных величин w по p_k и p . Мы будем предполагать, что они ограничены.

Сделаем подстановку

$$p^* - p = e^{\lambda t} u. \quad (9)$$

После подстановки и сокращения на $e^{\lambda t}$ получим:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \sum_{i,k=1}^3 \frac{\partial v_i}{\partial p_k} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_k} + \sum_{k=1}^3 A_k \frac{\partial u}{\partial x_k} + (B + \lambda) u = 0. \quad (10)$$

Число λ мы подберем так, чтобы всюду выполнялось неравенство:

$$B + \lambda > 0. \quad (11)$$

Из (3) следует:

$$P_k = \frac{\partial P}{\partial x_k} = \frac{\partial P}{\partial p} p_k + \frac{\partial P}{\partial x_k} \Big|_{p=\text{const}},$$

$$\frac{\partial P_k}{\partial p_k} = \frac{\partial P}{\partial p}; \quad \frac{\partial P_k}{\partial p_i} = 0 \text{ при } i \neq k$$

$$\frac{\partial v_i}{\partial p_k} = \sum_{l=1}^3 \frac{\partial v_i}{\partial P_l} \frac{\partial P_l}{\partial p_k} = \frac{\partial v_i}{\partial P_k} \frac{\partial P}{\partial p}.$$

Подставляя в (10), получим

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial P}{\partial p} \sum_{i,k=1}^3 \frac{\partial v_i}{\partial P_k} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_k} + \sum_{k=1}^3 A_k \frac{\partial u}{\partial x_k} + (B + \lambda) u = 0. \quad (12)$$

В качестве граничного условия мы будем предполагать, что u стремится к нулю при удалении в бесконечность. Рассмотрим те значения функции u , которые она принимает в течение промежутка времени $0 \leq t \leq T < \infty$, и докажем, что функция u не может принимать в течение этого промежутка времени положительных значений.

Для доказательства допустим противное. При этом допущении функция u в силу (6), а также в силу того, что она на бесконечности обращается в нуль, принимала бы свое максимальное положительное значение в некоторой точке M в момент времени t_0 внутри пласта.

В точке M $u > 0$ при $t = t_0$. (13)

При этом должны были бы вообще выполняться следующие необходимые условия максимальности:

$$\text{в точке } M \text{ при } t = t_0 \quad \frac{\partial u}{\partial x_i} = 0; \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2} \leq 0; \quad \frac{\partial u}{\partial t} = 0. \quad (14)$$

$(i = 1, 2, 3)$

Если максимум случится в момент времени $t_0 = T$, то последнее равенство может и не выполняться, однако во всяком случае будет выполняться неравенство $\frac{\partial u}{\partial t} \geq 0$. (15)

Для упрощения рассуждений мы будем предполагать, что оси координат расположены так, что первая из осей направлена параллельно скорости течения в точке M при $t = t_0$. Здесь

$$v_2 = 0; \quad v_3 = 0. \quad (16)$$

Ввиду изотропности среды и соображений симметрии величина v_1 должна быть четной функцией от компонент градиента давления по осям, перпендикулярным к первой оси. Учитывая, что четная функция имеет нулевые производные при нулевых значениях аргументов, в силу (16) мы получим, что в точке M в момент t_0 выполняются соотношения:

$$\frac{\partial v_1}{\partial P_2} = 0; \quad \frac{\partial v_1}{\partial P_3} = 0. \quad (17)$$

Из соображений симметрии вытекают также соотношения: в точке M при $t = t_0$

$$\frac{\partial v_2}{\partial P_2} = \frac{\partial v_2}{\partial P_3} = \frac{\partial v_2}{\partial P_1} = \frac{\partial v_3}{\partial P_1} = 0. \quad (18)$$

Естественно предположить, что плотность потока нефти антипараллельна градиенту давления и что соответствующие производные от компонент плотности потока по компонентам давления отрицательны.

В точке M при $t = t_0$

$$\frac{\partial v_1}{\partial P_1} \leq 0; \quad \frac{\partial v_2}{\partial P_2} \leq 0; \quad \frac{\partial v_3}{\partial P_3} \leq 0;$$

Учитывая эти соотношения, а также (9), (11), (13), (14), (17) и (18), мы можем получить, что все члены левой части формулы (12) в точке M при $t = t_0$ неотрицательны, а последний ее член положителен. Но тогда в сумме они не могут составить нуль, что приводит к противоречию. Тем самым доказано, что внутри пласта $u = e^{-\lambda t} (p^* - p) \leq 0$ и, следовательно, $p^* \leq p$.

Итак, при втором режиме эксплуатации скважины в пласте будет оставаться меньше нефти, чем при первом режиме. Тем самым доказано, что при втором режиме эксплуатации (при меньших давлениях на забоях скважин) будет добыто больше нефти, чем при первом режиме.

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

1. Салехов Г. С. и Иванов Н. Ф. К вопросу об оптимальном режиме эксплуатации нефтяных скважин. ДАН СССР, 89, № 2, стр. 237, 1953.

Поступило
20 декабря 1954 г.

Физико-технический институт
Казанского филиала АН СССР

М. А. МЕРТВЕЦОВА

**ОБ ОДНОМ МЕТОДЕ ПРИБЛИЖЕННОГО РЕШЕНИЯ
НЕЛИНЕЙНЫХ ФУНКЦИОНАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ**

При решении задачи управления движением контура нефтеносности по характеру размещения скважин приходим к системе нелинейных алгебраических уравнений. Возникает вопрос о приближенном решении полученной системы. В данной работе дается изложение одного метода решения общих нелинейных функциональных уравнений и конкретное применение последнего к системам нелинейных алгебраических уравнений.

§ 1. Теорема существования решения

Пусть дано нелинейное функциональное уравнение

$$P(x) = 0, \quad (1)$$

где $P(x)$ — непрерывная, трижды дифференцируемая в смысле Фреше операция, переводящая элементы нормированного пространства X в X типа Банаха в элементы другого нормированного пространства Y того же типа. Будем решать это уравнение следующим итеративным процессом:

$$x_{n+1} = x_n - \left[I + \frac{1}{2} \Gamma_n P''(x_n) \Gamma_n P(x_n) \right] \Gamma_n P(x_n), \quad (2)$$

где $\Gamma_n = |P'(x_n)|^{-1}$.

Докажем теперь теорему.

Теорема 1. Пусть для элемента x_0 — начального приближения — выполнены следующие условия:

1) существует операция

$$\Gamma_0 = |P'(x_0)|^{-1} \quad (3)$$

$$\text{и } \|\Gamma_0\| \leq B_0; \quad (4)$$

2) $\|\Gamma_0 P(x_0)\| \leq \delta_0; \quad (5)$

3) в области G_1 , определяемой неравенством

$$\|x - x_0\| \leq 3\delta_0,$$

производные $P'(x)$ и $P''(x)$ ограничены, т. е.

$$\sup_{x \in G} \|P''(x)\| \leq M; \quad \sup_{x \in G} \|P'''(x)\| \leq N;$$

$$4) h_0 = p_0 \left(1 + \frac{1}{2} p_0 \right) \leq \frac{2}{5}, \quad (6)$$

где $p_0 = B_0 M \delta_0; \quad (7)$

$$5) R_0 = \frac{(4 + 4h_0 + h_0^2) \frac{N}{M^2 B_0} + 15 + 6h_0}{1 - \frac{1}{2} (2h_0 + \frac{1}{2} h_0^2)} \leq 36. \quad (8)$$

Тогда уравнение (1) имеет решение x^* , которое находится в области G , при этом последовательные приближения (2) сходятся к x^* , и быстрота сходимости оценивается неравенством

$$\|x^* - x_n\| \leq 3 \left(\frac{3}{5} \right)^n \left(\frac{5}{2} h_0 \right)^{3n-1} \delta_0. \quad (9)$$

Доказательство

Покажем, что для элемента x_1 , определенного из (2), выполняются все условия 1) — 5).

Во-первых, на основании условий 1) — 3) и (7)

$$\begin{aligned} & \left\| \left[I + \frac{1}{2} \Gamma_0 P''(x_0) \Gamma_0 P(x_0) \right] \Gamma_0 P(x_0) \right\| \leq \\ & \leq \left(1 + \frac{1}{2} B_0 M \delta_0 \right) \delta_0 = \left(1 + \frac{1}{2} p_0 \right) \delta_0 = \eta_0. \end{aligned} \quad (10)$$

А отсюда равенство (2) при $n=0$ дает

$$\|x_1 - x_0\| \leq \eta_0. \quad (11)$$

Далее

$$\begin{aligned} & \|\Gamma_0 [P'(x_0) - P'(x_1)]\| \leq \|\Gamma_0\| \|P'(x_0) - P'(x_1)\| \leq \\ & \leq B_0 (\sup_{x=x_0+\theta(x_1-x_0)} \|P''(x)\|) \|x_1 - x_0\| \leq B_0 M \eta_0 = h_0 < 1, \end{aligned}$$

Отсюда, на основании теоремы Банаха, заключаем, что для операции

$$H = [I - \Gamma_0 (P'(x_0) - P'(x_1))],$$

где I — тождественный оператор в X , существует обратная

$$H^{-1} = [I - \Gamma_0 (P'(x_0) - P'(x_1))]^{-1}.$$

При этом, в силу той же теоремы

$$\|H^{-1}\| \leq \frac{1}{1-h_0}. \quad (12)$$

Полагая $\Gamma_1 = H^{-1} \Gamma_0$ и пользуясь очевидным для операций равенством $(AB)^{-1} = B^{-1} A^{-1}$, получим

$$\begin{aligned} \Gamma_1 &= H^{-1} \Gamma_0 = [I - \Gamma_0 (P'(x_0) - P'(x_1))]^{-1} [P'(x_0)]^{-1} = \\ &= \{P'(x_0) [I - \Gamma_0 (P'(x_0) - P'(x_1))]\}^{-1} = \\ &= [P'(x_0) - (P'(x_0) - P'(x_1))]^{-1} = [P'(x_1)]^{-1}. \end{aligned}$$

Таким образом, доказано существование этой обратной операции. На основании (12) находим оценку для ее нормы

$$\|[P'(x_1)]^{-1}\| = \|\Gamma_1\| = \|H^{-1} \Gamma_0\| \leq \frac{B_0}{1-h_0} = B_1 \leq \frac{5}{3} B_0, \quad (13)$$

т. е. условие 1) выполнимо для элемента x_1 .

Для дальнейшего доказательства введем операцию

$$\begin{aligned} f_n(x) &= \left[I + \frac{1}{2} \Gamma_n P''(x_n) \Gamma_n P(x_n) - \frac{1}{2} \Gamma_n P''(x_n) (x - x_n) - \right. \\ & \left. - \frac{1}{4} \Gamma_n P''(x_n) \Gamma_n P''(x_n) (x - x_n)^2 \right] \Gamma_n P(x), \end{aligned} \quad (14)$$

которая, в силу дифференцируемости операции $P(x)$, будет иметь производные в смысле Фреше до 3-го порядка включительно.

Найдем теперь, пользуясь равенством (14), значения $f_0(x_0)$, $f_0'(x_0)$, $f_0''(x_0)$, $f_0'''(x_0)$.

На основании этого равенства при $n=0$ и $x=x_0$, имеем:

$$f_0(x_0) = \left[I + \frac{1}{2} \Gamma_0 P''(x_0) \Gamma_0 P(x_0) \right] \Gamma_0 P(x_0). \quad (15)$$

Дифференцируя далее (14), применяя при этом правило дифференцирования произведения, получим при $n = 0$

$$f_0'(x) \Delta x = \left[I + \frac{1}{2} \Gamma_0 P''(x_0) \Gamma_0 P(x_0) - \frac{1}{2} \Gamma_0 P''(x_0) (x - x_0) - \frac{1}{4} \Gamma_0 P''(x_0) \Gamma_0 P''(x_0) (x - x_0)^2 \right] \Gamma_0 P'(x) \Delta x - \frac{1}{2} [\Gamma_0 P''(x_0) + \Gamma_0 P''(x_0) \Gamma_0 P''(x_0) (x - x_0)] \Delta x \Gamma_0 P(x). \quad (16)$$

При $x = x_0$ равенство (16), в силу симметричности операции $P''(x)$, дает

$$f_0'(x_0) \Delta x = \left[I + \frac{1}{2} \Gamma_0 P''(x_0) \Gamma_0 P(x_0) \right] \Gamma_0 P'(x_0) \Delta x - \frac{1}{2} \Gamma_0 P''(x_0) \Delta x \Gamma_0 P(x_0) = \Delta x + \frac{1}{2} \Gamma_0 P''(x_0) \Gamma_0 P(x_0) \Delta x - \frac{1}{2} \Gamma_0 P''(x_0) \Gamma_0 P(x_0) \Delta x = \Delta x, \text{ т. е. } f_0(x_0) = I. \quad (17)$$

Затем, пользуясь равенством (16), находим $f_0''(x) \Delta x \Delta_1 x$

$$f_0''(x) \Delta x \Delta_1 x = \left[I + \frac{1}{2} \Gamma_0 P''(x_0) \Gamma_0 P(x_0) - \frac{1}{2} \Gamma_0 P''(x_0) (x - x_0) - \frac{1}{4} \Gamma_0 P''(x_0) \Gamma_0 P''(x_0) (x - x_0)^2 \right] \Gamma_0 P''(x) \Delta x \Delta_1 x - \frac{1}{2} [\Gamma_0 P''(x_0) + \Gamma_0 P''(x_0) \Gamma_0 P''(x_0) (x - x_0)] \Delta x \Gamma_0 P'(x) \Delta_1 x - \frac{1}{2} [\Gamma_0 P''(x_0) + \Gamma_0 P''(x_0) \Gamma_0 P''(x_0) (x - x_0)] \Delta_1 x \Gamma_0 P'(x) \Delta x - \frac{1}{2} \Gamma_0 P''(x_0) \Gamma_0 P''(x_0) \Delta x \Delta_1 x \Gamma_0 P(x). \quad (18)$$

Снова учитывая симметричность билинейной операции, получаем из (18) при $x = x_0$

$$f_0''(x_0) \Delta x \Delta_1 x = \left[I + \frac{1}{2} \Gamma_0 P''(x_0) \Gamma_0 P(x_0) \right] \Gamma_0 P''(x_0) \Delta x \Delta_1 x - \frac{1}{2} \Gamma_0 P''(x_0) \Delta x \Delta_1 x - \frac{1}{2} \Gamma_0 P''(x_0) \Delta_1 x \Delta x - \frac{1}{2} \Gamma_0 P''(x_0) \Gamma_0 P''(x_0) \Delta x \Delta_1 x \Gamma_0 P(x_0) = \Gamma_0 P''(x_0) \Delta x \Delta_1 x + \frac{1}{2} \Gamma_0 P''(x_0) \Gamma_0 P(x_0) \Gamma_0 P''(x_0) \Delta x \Delta_1 x - \frac{1}{2} \Gamma_0 P''(x_0) \Delta x \Delta_1 x - \frac{1}{2} \Gamma_0 P''(x_0) \Delta x \Delta_1 x - \frac{1}{2} \Gamma_0 P''(x_0) \Gamma_0 P(x_0) \Gamma_0 P''(x_0) \Delta x \Delta_1 x = 0.$$

Таким образом,

$$f_0''(x_0) \Delta x \Delta_1 x = 0. \quad (19)$$

Дифференцируя далее равенство (18), имеем

$$f_0''(x) \Delta x \Delta_1 x \Delta_2 x = \left[I + \frac{1}{2} \Gamma_0 P''(x_0) \Gamma_0 P(x_0) - \frac{1}{2} \Gamma_0 P''(x_0) (x - x_0) - \frac{1}{4} \Gamma_0 P''(x_0) \Gamma_0 P''(x_0) (x - x_0)^2 \right] \Gamma_0 P''(x) \Delta x \Delta_1 x \Delta_2 x - \frac{1}{2} [\Gamma_0 P''(x_0) + \Gamma_0 P''(x_0) \Gamma_0 P''(x_0) (x - x_0)] \Delta_2 x \Gamma_0 P''(x) \Delta x \Delta_1 x -$$

$$- \frac{1}{2} [\Gamma_0 P''(x_0) + \Gamma_0 P''(x_0) \Gamma_0 P''(x_0) (x - x_0)] \Delta x \Gamma_0 P''(x) \Delta_1 x \Delta_2 x - \frac{1}{2} \Gamma_0 P''(x_0) \Gamma_0 P''(x_0) \Delta x \Delta_1 x \Gamma_0 P'(x) \Delta_2 x - \frac{1}{2} \Gamma_0 P''(x_0) \Gamma_0 P''(x_0) \Delta_1 x \Delta_2 x \Gamma_0 P'(x) \Delta x - \frac{1}{2} \Gamma_0 P''(x_0) \Gamma_0 P''(x_0) \Delta x \Delta_2 x \Gamma_0 P'(x) \Delta_1 x. \quad (20)$$

Равенство (20) при $x = \xi_0$ и $\Delta x = \Delta_1 x = \Delta_2 x$ переходит в следующее:

$$f_0'''(\xi_0) \Delta x \Delta_1 x \Delta_2 x = \left[I + \frac{1}{2} \Gamma_0 P''(x_0) \Gamma_0 P(x_0) - \frac{1}{2} \Gamma_0 P''(x_0) (\xi_0 - x_0) - \frac{1}{4} \Gamma_0 P''(x_0) \Gamma_0 P''(x_0) (\xi_0 - x_0)^2 \right] \Gamma_0 P'''(\xi_0) \Delta x \Delta_1 x \Delta_2 x - \frac{3}{2} [\Gamma_0 P''(x_0) + \Gamma_0 P''(x_0) \Gamma_0 P''(x_0) (\xi_0 - x_0)] \Delta x \Gamma_0 P''(\xi_0) \Delta x \Delta_1 x - \frac{3}{2} \Gamma_0 P''(x_0) \Gamma_0 P''(x_0) \Delta x \Delta_1 x \Gamma_0 P'(\xi_0) \Delta x. \quad (21)$$

Так как благодаря (2), (15) и (17)

$$f_0(x_0) + f_0'(x_0)(x_1 - x_0) = \left[I + \frac{1}{2} \Gamma_0 P''(x_0) \Gamma_0 P(x_0) \right] \Gamma_0 P(x_0) + (x_1 - x_0) = 0, \quad (22)$$

то имеем такое неравенство:

$$\|f_0(x_1)\| \leq \frac{1}{6} \|f_0'''(\xi_0)\| \|x_1 - x_0\|^3. \quad (23)$$

Оценим теперь по норме $\Gamma_0 P(x_1)$.

Во-первых, так как

$$h_0 = \left(1 + \frac{1}{2} p_0\right) p_0, \quad (24)$$

то отсюда следует, что

$$p_0 < h_0. \quad (24)$$

Во-вторых,

$$MB_0 \eta_0 = MB_0 \left(1 + \frac{1}{2} p_0\right) \delta_0 = p_0 \left(1 + \frac{1}{2} p_0\right) = h_0. \quad (25)$$

Далее, используя условия 1) - 4) и неравенства (11) и (24), находим

$$\frac{1}{2} \|\Gamma_0 P''(x_0)(x_1 - x_0) + \frac{1}{2} \Gamma_0 P''(x_0) \Gamma_0 P''(x_0)(x_1 - x_0)^2 - \Gamma_0 P''(x_0) \Gamma_0 P(x_0)\| \leq \frac{1}{2} (B_0 M \eta_0 + \frac{1}{2} B_0^2 M^2 \eta_0^2 + B_0 M \delta_0) \leq \frac{1}{2} \left(2h_0 + \frac{1}{2} h_0^2\right) \leq \frac{1}{2} \left(\frac{4}{5} + \frac{2}{25}\right) = \frac{11}{25} < 1.$$

Следовательно, на основании теоремы Банаха, операция

$$I - \frac{1}{2} \left[\Gamma_0 P''(x_0)(x_1 - x_0) + \frac{1}{2} \Gamma_0 P''(x_0) \Gamma_0 P''(x_0)(x_1 - x_0)^2 - \Gamma_0 P''(x_0) \Gamma_0 P(x_0) \right]$$

имеет обратную операцию Q_1 и

$$\|Q_1\| = \left\| \left\{ I - \frac{1}{2} \left[\Gamma_0 P''(x_0)(x_1 - x_0) + \frac{1}{2} \Gamma_0 P''(x_0) \Gamma_0 P''(x_0)(x_1 - x_0)^2 - \Gamma_0 P''(x_0) \Gamma_0 P(x_0) \right] \right\}^{-1} \right\| \leq \frac{1}{1 - \frac{1}{2} \left(2h_0 + \frac{1}{2} h_0^3 \right)}. \quad (26)$$

Так как

$$\xi_0 = x_0 + \theta_0(x_1 - x_0),$$

то в силу неравенства (11)

$$\|\xi_0 - x_0\| = \theta_0 \|x_1 - x_0\| \leq \eta_0 \leq \frac{6}{5} \delta_0, \quad (27)$$

$$0 \leq \theta_0 \leq 1,$$

т. е. ξ_0 лежит в области G .

Учитывая это, условия 1) — 4) и неравенство (11), имеем

$$\begin{aligned} \|\Gamma_0 P'(\xi_0)\| &= \|\Gamma_0 P'(x_0 + \theta_0(x_1 - x_0))\| = \\ &= \|\Gamma_0 P'(x_0) + \theta_0 \Gamma_0 (P'(x_1) - P'(x_0))\| \leq 1 + \theta_0 B_0 \sup \|P''(\bar{x})\| \|x_1 - x_0\| \leq \\ &\leq 1 + \theta_0 B_0 M \eta_0 = 1 + \theta_0 h_0 < \frac{3}{2}, \\ \bar{x} &= x_0 + \theta_1(x_1 - x_0) \\ 0 &\leq \theta_1 \leq 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \|f_0'''(\xi_0)(x_1 - x_0)^3\| &\leq \left(1 + \frac{1}{2} B_0 M \delta_0 + \frac{1}{2} B_0 M \eta_0 + \frac{1}{4} B_0^2 M^2 \eta_0^2 \right) B_0 N \eta_0^3 + \\ &+ \frac{3}{2} (B_0 M + B_0^2 M^2 \eta_0) B_0 M \eta_0^3 + \frac{9}{4} B_0^2 M^2 \eta_0^3 \leq \\ &\leq \left\{ \left(1 + \frac{1}{2} p_0 + \frac{1}{2} h_0 + \frac{1}{4} h_0^2 \right) \frac{N}{M^2 B_0} + \frac{3}{2} (1 + h_0) + \frac{9}{4} \right\} B_0^2 M^2 \eta_0^3 < \\ &< \frac{1}{4} \left\{ (4 + 4h_0 + h_0^2) \frac{N}{M^2 B_0} + 15 + 6h_0 \right\} h_0^2 \eta_0. \quad (28) \end{aligned}$$

Теперь, на основании (26), (28) и условия 5)

$$\|\Gamma_0 P(x_1)\| \leq \frac{1}{24} \frac{\left\{ (4 + 4h_0 + h_0^2) \frac{N}{M^2 B_0} + 15 + 6h_0 \right\} h_0^2 \eta_0}{1 - \frac{1}{2} \left(2h_0 + \frac{1}{2} h_0^3 \right)} = \frac{R_0 h_0^2 \eta_0}{24}.$$

Тогда

$$\|\Gamma_1 P(x_1)\| = \|H^{-1} \Gamma_0 P(x_1)\| \leq \frac{R_0 h_0^2 \eta_0}{24(1 - h_0)} = \delta_1. \quad (29)$$

Благодаря условиям 4) и 5) и неравенствам (10) и (29), имеем

$$\begin{aligned} \delta_1 &= \frac{R_0 h_0^2 \eta_0}{24(1 - h_0)} \leq \frac{36 \cdot 5 h_0^2 \eta_0}{24 \cdot 3} = \frac{5}{2} h_0^2 \eta_0 = \\ &= \frac{5}{2} h_0^2 \left(1 + \frac{1}{2} p_0 \right) \delta_0 \leq \frac{5}{2} h_0^2 \cdot \frac{6}{5} \delta_0 = 3 h_0^2 \delta_0 \leq \frac{12}{25} \delta_0, \quad (30) \end{aligned}$$

т. е. условие 2) также выполнено для элемента $x = x_1$. Далее, на основании условий 4) и 5) неравенства (13) и (29) дают:

$$\begin{aligned} \left\| \left[I + \frac{1}{2} \Gamma_1 P''(x_1) \Gamma_1 P(x_1) \right] \Gamma_1 P(x_1) \right\| &\leq \\ &\leq \left\| I + \frac{1}{2} \Gamma_1 P''(x_1) \Gamma_1 P(x_1) \right\| \|\Gamma_1 P(x_1)\| = \eta_1 \leq \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\leq \left[1 + \frac{1}{2} \frac{B_0 M R_0 h_0^2 \eta_0}{24(1 - h_0)} \right] \frac{R_0 h_0^2 \eta_0}{24(1 - h_0)} \leq \\ &\leq \left[1 + \frac{1}{48} \frac{R_0 h_0^3}{(1 - h_0)^2} \right] \frac{R_0 h_0^2 \eta_0}{24(1 - h_0)} \leq \\ &\leq \left(1 + \frac{36 \cdot 8 \cdot 25}{48 \cdot 125 \cdot 9} \right) \frac{36 \cdot 5}{24 \cdot 3} h_0^2 \eta_0 = \\ &= \left(1 + \frac{2}{15} \right) \frac{5}{2} h_0^2 \eta_0 < \frac{3}{2} \cdot \frac{5}{2} h_0^2 \eta_0 = \frac{15}{4} h_0^2 \eta_0 \leq \frac{15}{4} \cdot \frac{4}{25} = \frac{3}{5} \eta_0. \end{aligned}$$

Итак,

$$\eta_1 \leq \frac{15}{4} h_0^2 \eta_0. \quad (31)$$

Затем,

$$p_1 = B_1 M \delta_1 \leq \frac{5}{3} B_0 M \frac{12}{25} \delta_0 = \frac{4}{5} p_0 < p_0.$$

Далее, благодаря (13), 4), (25) и (31)

$$\begin{aligned} h_1 &= p_1 \left(1 + \frac{1}{2} p_1 \right) = B_1 M \delta_1 \left(1 + \frac{1}{2} B_1 M \delta_1 \right) = B_1 M \eta_1 \leq \\ &\leq \frac{5}{3} B_0 M \frac{15}{4} h_0^2 \eta_0 = \frac{25}{4} h_0^3 \leq h_0 \leq \frac{2}{5}. \quad (32) \end{aligned}$$

Таким образом, условие 4) также выполняется для элемента x_1 . Но так как

$$B_1 > B_0 \text{ и } h_1 \leq h_0,$$

то

$$R_1 = \frac{(4 + 4h_1 + h_1^2) \frac{N}{M^2 B_1} + 15 + 6h_1}{1 - \frac{1}{2} \left(2h_1 + \frac{1}{2} h_1^2 \right)} \leq R_0 \leq 36.$$

Следовательно, все условия 1) — 5) выполняются для элемента $x = x_1$, с заменой чисел $B_0, \delta_0, \eta_0, p_0, h_0, R_0$ на $B_1, \delta_1, \eta_1, p_1, h_1, R_1$. Это позволяет продолжить последовательное определение элементов x_n и связанных с ними чисел $B_n, \eta_n, h_n, \delta_n, p_n$ и R_n на основании следующих соотношений:

$$B_n = \frac{B_{n-1}}{1 - h_{n-1}}, \quad (33)$$

$$\delta_n < \frac{5}{2} h_{n-1}^2 \eta_{n-1}, \quad (34)$$

$$\eta_n < \frac{15}{4} h_{n-1}^2 \eta_{n-1}, \quad (35)$$

$$p_n < \frac{4}{5} p_{n-1} < h_{n-1}, \quad (36)$$

$$h_n < \frac{25}{4} h_{n-1}^3, \quad (37)$$

$$R_n = \frac{(4 + 4h_n + h_n^2) \frac{N}{M^2 B_n} + 15 + 6h_n}{1 - \frac{1}{2} \left(2h_n + \frac{1}{2} h_n^2 \right)} < 36. \quad (38)$$

Согласно (37)

$$h_2 < \frac{25}{4} h_1^3 \leq \frac{25}{4} \left(\frac{25}{4} h_0^3\right)^3 = \frac{5^3}{2^3} h_0^9 = \frac{2}{5} \left(\frac{5}{2} h_0\right)^9 \dots$$

$$h_n < \frac{2}{5} \left(\frac{5}{2} h_0\right)^{3^n} \quad (39)$$

Тогда (35) вместе с (39) дает

$$\eta_n < \left(\frac{3}{5}\right)^n \left(\frac{5}{2} h_0\right)^{3^n - 1} \eta_0 \quad (40)$$

Далее, зная, что

$$\|x_{n+1} - x_n\| \leq \eta_n$$

и

$$\|x_{n+p} - x_n\| \leq \eta_n + \eta_{n+1} + \dots + \eta_{n+p-1},$$

в силу (40) будем иметь

$$\begin{aligned} \|x_{n+p} - x_n\| &\leq \left(\frac{3}{5}\right)^n \left(\frac{5}{2} h_0\right)^{3^n - 1} \eta_0 + \left(\frac{3}{5}\right)^{n+1} \left(\frac{5}{2} h_0\right)^{3^{n+1} - 1} \eta_0 + \dots \\ &+ \dots + \left(\frac{3}{5}\right)^{n+p-1} \left(\frac{5}{2} h_0\right)^{3^{n+p-1} - 1} \eta_0 \leq \\ &\leq \left(\frac{3}{5}\right)^n \left(\frac{5}{2} h_0\right)^{3^n - 1} \eta_0 \left[1 + \frac{3}{5} + \dots + \left(\frac{3}{5}\right)^{p-1}\right] = \\ &= \frac{5}{2} \left(\frac{3}{5}\right)^n \left(\frac{5}{2} h_0\right)^{3^n - 1} \eta_0 \left[1 - \left(\frac{3}{5}\right)^p\right], \quad (41) \end{aligned}$$

т. е. последовательность x_n — фундаментальная последовательность, а так как X — пространство типа Банаха, то, следовательно, существует

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x^*.$$

Переходя к пределу при $p \rightarrow \infty$ в (41), получим

$$\|x^* - x_n\| \leq \frac{5}{2} \left(\frac{3}{5}\right)^n \left(\frac{5}{2} h_0\right)^{3^n - 1} \eta_0 \quad (42)$$

Отсюда, учитывая (10), (24) и условие 4)

$$\begin{aligned} \|x^* - x_n\| &\leq \frac{5}{2} \cdot \left(\frac{3}{5}\right)^n \left(\frac{5}{2} h_0\right)^{3^n - 1} \left(1 + \frac{1}{2} p_0\right) \delta_0 < \\ &< 3 \left(\frac{3}{5}\right)^n \left(\frac{5}{2} h_0\right)^{3^n - 1} \delta_0, \quad (43) \end{aligned}$$

а при $n = 0$

$$\|x - x_0\| \leq 3\delta_0. \quad (44)$$

Это указывает нам на существование решения и дает область, где надо вычислять величины M и N .

Докажем теперь, что x^* является решением уравнения (1). На основании (36) и (37)

$$\left\| \frac{1}{2} \Gamma_n P''(x_n) \Gamma_n P(x_n) \right\| \leq \frac{1}{2} B_n M \delta_n = \frac{1}{2} p_n \leq \frac{1}{2} h_{n-1} < 1.$$

Применяя теорему Банаха, получаем, что операция

$$I + \frac{1}{2} \Gamma_n P''(x_n) \Gamma_n P(x_n)$$

имеет обратную операцию и

$$\left\| \left[I + \frac{1}{2} \Gamma_n P''(x_n) \Gamma_n P(x_n) \right]^{-1} \right\| \leq \frac{1}{1 - \frac{1}{2} h_{n-1}}. \quad (45)$$

Умножая слева равенство (44) на оператор

$$\left[I + \frac{1}{2} \Gamma_n P''(x_n) \Gamma_n P(x_n) \right]^{-1},$$

имеем

$$\left[I + \frac{1}{2} \Gamma_n P''(x_n) \Gamma_n P(x_n) \right]^{-1} (x_{n+1} - x_n) + \Gamma_n P(x_n) = 0. \quad (46)$$

Умножение слева последнего равенства на оператор $P'(x_n)$ дает

$$P'(x_n) \left[I + \frac{1}{2} \Gamma_n P''(x_n) \Gamma_n P(x_n) \right]^{-1} (x_{n+1} - x_n) + P(x_n) = 0. \quad (47)$$

Далее равенство (46) перепишем в таком виде:

$$\begin{aligned} [P'(x_n) - P'(x_0) + P'(x_0)] \left[I + \frac{1}{2} \Gamma_n P''(x_n) \Gamma_n P(x_n) \right]^{-1} (x_{n+1} - x_n) + \\ + P(x_n) = 0. \quad (48) \end{aligned}$$

Покажем, что левая часть (48) стремится к нулю при $n \rightarrow \infty$. Имеем, применяя формулу конечных приращений и учитывая (45),

$$\begin{aligned} \left\| [P'(x_n) - P'(x_0) + P'(x_0)] \left[I + \frac{1}{2} \Gamma_n P''(x_n) \Gamma_n P(x_n) \right]^{-1} \right\| \leq \\ \leq \frac{1}{1 - \frac{1}{2} h_{n-1}} [\|P'(x_0)\| + \sup \|P''(\bar{x})\| \|x_n - x_0\|] \leq \end{aligned}$$

$$\leq \frac{5}{4} [\|P'(x_0)\| + 3M\delta_0],$$

$$\bar{x} = x_0 + \theta_0 (x_n - x_0), \\ 0 \leq \theta_0 \leq 1,$$

т. е. оператор

$$P'(x_n) \left[I + \frac{1}{2} \Gamma_n P''(x_n) \Gamma_n P(x_n) \right]^{-1}$$

ограничен по норме, а так как

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|x_{n+1} - x_n\| = 0$$

то, переходя к пределу при $n \rightarrow \infty$ в равенстве (48), получим

$$P(x^*) = 0,$$

т. е. x^* является решением уравнения (1). Осталось еще доказать, что область

$$\|x - x_n\| \leq 3\delta_n \quad (49)$$

не выходит за пределы области G . Допустим, что точка x входит в область (49). Тогда, используя (40), имеем

$$\begin{aligned} \|x - x_0\| &\leq \|x_n - x_0\| + \|x - x_n\| \leq \|x_n - x_0\| + 3\delta_n \leq \\ &\leq \eta_0 + \dots + \eta_{n-1} + 3\delta_n \leq \eta_0 + \frac{3}{5} \left(\frac{5}{2} h_0\right)^{3^n - 1} \eta_0 + \dots + \end{aligned}$$

$$+ \left(\frac{3}{5}\right)^{n-1} \left(\frac{5}{2} h_0\right)^{3^{n-1} - 1} \eta_0 + 3\delta_n \leq$$

$$\leq \eta_0 \left[1 + \frac{3}{5} + \dots + \left(\frac{3}{5}\right)^{n-1}\right] + 3\delta_n = \frac{5}{2} \eta_0 \left[1 - \left(\frac{3}{5}\right)^n\right] + 3\delta_n.$$

Но

$$\eta_0 < \frac{6}{5} \delta_0, \text{ а } \delta_n \leq \frac{2}{5} \eta_{n-1} \leq \frac{2}{5} \left(\frac{3}{5}\right)^{n-1} \eta_0 < \frac{2}{5} \cdot \frac{6}{5} \left(\frac{3}{5}\right)^{n-1} \delta_0 < \frac{4}{5} \left(\frac{3}{5}\right)^n \delta_0 < \left(\frac{3}{5}\right)^n \delta_0.$$

Поэтому

$$\|x - x_0\| \leq 3\delta_0 \left[1 - \left(\frac{3}{5}\right)^n\right] + 3\left(\frac{3}{5}\right)^n \delta_0 = 3\delta_0,$$

т. е. x входит в область G . Таким образом, теорема полностью доказана. Область же единственности определяется, как нетрудно доказать, неравенством

$$\|x - x_0\| \leq \frac{6}{5} \sqrt{\frac{5}{2}} \delta_0.$$

§ 2. Применение метода к системам алгебраических уравнений

Применим теперь процесс (2) для решения систем v алгебраических уравнений с v неизвестными

$$\eta^{(k)} = f_k(\xi^{(1)}, \dots, \xi^{(v)}), \quad (k = 1, \dots, v).$$

Последовательные приближения для корня — первое приближение $(\xi_1^{(1)}, \dots, \xi_1^{(v)})$ по нулевому $(\xi_0^{(1)}, \dots, \xi_0^{(v)})$ — определяются из системы уравнений для поправок

$$\sum_{i=1}^v \left[\left(\frac{\partial f_k}{\partial \xi_i}\right)_0 \Delta \xi_i + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^v \left(\frac{\partial^2 f_k}{\partial \xi_i \partial \xi_j}\right)_0 \sum_{\alpha=1}^v \frac{(A_{\alpha j})}{\Delta_0} (f_{\alpha})_0 \sum_{\beta=1}^v \frac{(A_{\beta i}^2)_0}{\Delta_0} (f_{\beta})_0 + (f_k)_0 = 0 \right] \quad (k = 1, \dots, v)$$

$\Delta \xi_i = \xi_i' - \xi_0^i$, а Δ_0 — определитель матрицы $\left\| \left(\frac{\partial f_i}{\partial \xi_j}\right)_0 \right\|$ и $(A_{ij})_0$ — алгебраические дополнения его элементов.

Будем рассматривать данную систему как одно уравнение

$$y = P(x),$$

где операция $P(x)$ переводит v -мерное пространство в v -мерное.

Тогда имеет место следующая

Теорема 2. Если выполнены условия

$$1) |f_i(\xi_0^{(1)}, \dots, \xi_0^{(v)})| \leq \bar{\eta}_0, \quad (i = 1, 2, \dots, v);$$

2) матрица $\left\| \left(\frac{\partial f_i}{\partial \xi_j}\right)_0 \right\|$ имеет определитель $\Delta_0 \neq 0$, и если через $(A_{ij})_0$ обозначить алгебраические дополнения его элементов, то выполнено условие

$$\max_i \frac{1}{|\Delta_0|} \sum_{j=1}^v |A_{ij}|_0 \leq B_0;$$

$$3) \max \left| \frac{\partial^2 f_k}{\partial \xi_i \partial \xi_j} \right| \leq M, \quad \max \left| \frac{\partial^2 f_k}{\partial \xi_i \partial \xi_j \partial \xi_\alpha} \right| \leq N \quad (i, j, k, \alpha = 1, \dots, v),$$

в интересующей нас области;

$$4) h_0 = B_0^2 \bar{\eta} M v^2 \left(1 + \frac{1}{2} B_0^2 \bar{\eta}_0 M v^2\right) \leq \frac{2}{5};$$

$$5) R_0 \leq 36.$$

Тогда данная алгебраическая система имеет решение, которое может быть найдено с помощью вышеуказанного процесса.

Пример. Возьмем следующую систему нелинейных уравнений (см. [1] § 3 задача 1, случай 1)

$$\begin{cases} q_1 \rho_1 + q_2 \rho_2 \cos \varphi_2 + q_3 \rho_3 \cos \varphi_3 = 0 \\ q_2 \rho_2 \sin \varphi_2 + q_3 \rho_3 \sin \varphi_3 = 0 \\ q_1 \rho_1^2 + q_2 \rho_2^2 \cos 2\varphi_2 + q_3 \rho_3^2 \cos 2\varphi_3 = 0 \\ q_2 \rho_2^2 \sin 2\varphi_2 + q_3 \rho_3^2 \sin 2\varphi_3 = 0, \end{cases}$$

где $q_1 = -0,2$; $q_2 = -0,3$; $q_3 = -0,5$ — дебиты эксплуатационных скважин, ρ и φ — полярные координаты скважин, причем $\rho_1 = 2$. Необходимо найти $\rho_2, \varphi_2, \rho_3, \varphi_3$. За начальное приближение возьмем

$$(\rho_2)_0 = \frac{4}{3}$$

$$(\rho_3)_0 = 0,8$$

$$(\varphi_2)_0 = 120^\circ$$

$$(\varphi_3)_0 = 240^\circ.$$

Для этих значений начальных данных имеем

$$h_0 = 0,2481 < \frac{2}{5},$$

$$R_0 = 22,3877 < 36.$$

Решая систему с помощью данного процесса, найдем

$$(\rho_2)_1 = 1,6038 \quad (\rho_2)_2 = 1,5486$$

$$(\rho_3)_1 = 1,0101 \quad (\rho_3)_2 = 0,9956$$

$$(\varphi_2)_1 = 109,8^\circ \quad (\varphi_2)_2 = 109,5^\circ$$

$$(\varphi_3)_1 = 236,5^\circ \quad (\varphi_3)_2 = 239,9^\circ$$

Проверка дает

$$-0,4 + 0,3 \cdot 1,5486 \cdot 0,3338 + 0,5 \cdot 0,9956 \cdot 0,5015 = 0,0047$$

$$-0,3 \cdot 1,5486 \cdot 0,9426 + 0,5 \cdot 0,9956 \cdot 0,8652 = -0,0053$$

$$-0,8 + 0,3 \cdot 2,3982 \cdot 0,7771 + 0,5 \cdot 0,9912 \cdot 0,497 = 0,0054$$

$$0,3 \cdot 2,3928 \cdot 0,6293 - 0,5 \cdot 0,9912 \cdot 0,8678 = 0,0227$$

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

1. Салехов Г. С. Постановка и методы решения гидродинамических задач управления движением контура нефтеносности. Известия Казанского филиала АН СССР, серия физ.-мат. и технич. наук, вып. 6, 1955.

Поступило
20 декабря 1954 г.

Физико-технический институт
Казанского филиала АН СССР.

СОДЕРЖАНИЕ

Стр.

1. Г. С. Салехов. Приложение одного метода минимальной погрешности к решению задач управления движением контура нефтеносности 3
2. Г. С. Салехов. Об одном способе решения задачи управления движением контура нефтеносности в пластах с водонапорным режимом 16
3. В. Л. Данилов. Управление перемещением контура нефтеносности с учетом различия вязкостей нефти и воды 30
4. В. Л. Данилов. К задаче управления перемещением контура нефтеносности 55
5. В. Д. Чугунов. Об одной задаче управления контуром нефтеносности 68
6. Н. Ф. Иванов. Графоаналитический метод прослеживания контура нефтеносности 72
7. Б. А. Сейфуллин. Численное решение некоторых задач по управлению движением контура нефтеносности 83
8. Г. С. Салехов. О методе решения задач одновременного управления движением нескольких контуров нефтеносности 100
9. В. Д. Чугунов. К задаче управления контуром нефтеносности при упругом режиме нефтяных месторождений 115
10. В. Л. Данилов. К определению давления в пластах с переменными проницаемостью и мощностью 129
11. Н. Ф. Иванов. К вопросу эксплуатации пластов с подошвенной водой 137
12. И. В. Сви́рский. К вопросу о форсированной эксплуатации нефтяных скважин 150
13. М. А. Мертвцова. Об одном методе приближенного решения нелинейных функциональных уравнений 154

ЗАМЕЧЕННЫЕ ОПЕЧАТКИ

Стр.	Строка	Формула	Напечатано	Должно быть
20	15 сверху	(4.4)	J_j	I_j
69	12 и 14 сверху	(1.1)	$+\frac{\pi}{n}+$	$+\frac{k\pi}{n}+$
94	7, 8 сверху		7) $\rho_3 = 135, \varphi_7 = 45^\circ,$ 8) $\rho_3 = 135,$ 9) $\rho_3 = 135, \varphi_9 = 225^\circ, \varphi_8 = 135^\circ$ 10) $\rho_3 = 135, \varphi_{10} = 315^\circ$	7) $\rho_3 = 135, \varphi_7 = 45^\circ,$ 8) $\rho_3 = 135, \varphi_8 = 135^\circ,$ 9) $\rho_3 = 135, \varphi_9 = 225^\circ,$ 10) $\rho_3 = 135, \varphi_{10} = 315^\circ$
98	10 сверху		времени	времени
110	12 сверху	(3.12)	$q_3 y_2^{np} \sin npx_2$	$q_3 y_2^{np} \sin npx_3$
110	5 снизу	(3.15)	$-q_3 z^2 \cos nx_3$	$-q_3 y_2^2 \cos nx_3$
116	6 снизу	(1.6)	$a^2(t-\tau)$	$4a^2(t-\tau)$
117	1 снизу		$4a(t-\tau)$	$4a^2(t-\tau)$
120	4 снизу	(1.12)	$4a(t-\tau)$	$+ \rho_i^2$
120	3 снизу	(1.12)	$+ \rho^2$	$\frac{\partial v_i^*}{\partial p_k^*}$
152	14 снизу	(10)	$\frac{\partial v_i}{\partial p_k}$	$\frac{\partial v_i^*}{\partial p_k^*}$
152	6 снизу	(12)	$\frac{\partial P}{\partial p} \sum_{i,k=1}^3 \frac{\partial v_i}{\partial p_k}$	$\frac{\partial P^*}{\partial p^*} \sum_{i,k=1}^3 \frac{\partial v_i^*}{\partial p_k^*}$
155	4 сверху	(9)	$3n-1$	3^n-1

Заказ № 0125.

Редактор И. Б. Ильясов

Техн. редактор М. Э. Шарафутдинова

Корректоры Г. В. Аквильянова и О. А. Крылова

Сдано в набор 23/III-1955 г. Подписано к печати 10/VIII-1955 г. ПФ 02574.
 Формат бумаги 70x103 $\frac{1}{4}$ мм 6 л. Печати. листов 10,25 (14,04) Уч.-изд. 10,84 л.
 Кол. знаков в 1 листе 6101) Заказ № 1123. Тираж 501 Цена 15 руб.

Типография Татполиграфического Министерства культуры ТАССР.
 Казань, Миславского, 9.