

АКАДЕМИЯ НАУК СССР
КАЗАНСКИЙ ФИЛИАЛ

**ИЗВЕСТИЯ
КАЗАНСКОГО ФИЛИАЛА
АКАДЕМИИ НАУК СССР**

**СЕРИЯ ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИХ
И ТЕХНИЧЕСКИХ НАУК**

7

**НЕКОТОРЫЕ ЗАДАЧИ НЕЛИНЕЙНОЙ ТЕОРИИ
УСТОЙЧИВОСТИ ОБОЛОЧЕК**



**ТАТКНИГОИЗДАТ
КАЗАНЬ 1958**

АКАДЕМИЯ НАУК СССР
КАЗАНСКИЙ ФИЛИАЛ

ИЗВЕСТИЯ
КАЗАНСКОГО ФИЛИАЛА
АКАДЕМИИ НАУК СССР

СЕРИЯ ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИХ
И ТЕХНИЧЕСКИХ НАУК

Выпуск 7

НЕКОТОРЫЕ ЗАДАЧИ НЕЛИНЕЙНОЙ ТЕОРИИ
УСТОЙЧИВОСТИ ОБОЛОЧЕК

09161.11



ТАТКНИГОИЗДАТ
КАЗАНЬ 1955

Печатается по постановлению Редакционно-издательского совета
Казанского филиала Академии наук СССР

Ответственный редактор
профессор Х. М. Муштары

13189
ЦЕНТРАЛЬНАЯ НАУЧНАЯ
БИБЛИОТЕКА
А. Н. Киргизской ССР

Редактор И. Б. Ильясов
Технический редактор И. Х. Зайнуллин
Корректор О. А. Крылова

Сдано в набор 14/III-1955 г. Подписано к печати 27/VI-1955 г. ПФ 27539. Формат бумаги
70×108^{1/8}. Печати. листов 4,75 (6,5). Кол. знаков в 1 листе 69100. Учетн. изд. листов 4,72.
Заказ № 0101. Тираж 400. Цена 12 руб.

Типография Татполиграфического Министерства культуры ТАССР.
Казань, ул. Миславского, д. № 9.

Р. Г. СУРКИН

К ТЕОРИИ УСТОЙЧИВОСТИ ВЫТЯНУТОЙ ЭЛЛИПСОИДАЛЬНОЙ ОБОЛОЧКИ ВРАЩЕНИЯ ПРИ ВНЕШНЕМ РАВНОМЕРНОМ ДАВЛЕНИИ

В статье рассматривается возможность местной потери устойчивости вытянутого эллипсоида вращения, находящегося под действием внешнего, равномерно распределенного по всей оболочке нормального давления при конечных перемещениях, т. е. возможность образования ямки хлопком.

Настоящая работа представляет собой обобщение общей теории хлопания оболочек, данной в статье [1], на случай вытянутых эллипсоидов вращения.

Как и для случая сферической оболочки, здесь энергетическим методом определяются критические давления p_{μ} и p_{κ} . При этом принимается, что давление p_{μ} соответствует равным уровням полной энергии оболочки при "нулевом" и "нелинейном" состояниях; давление p_{κ} соответствует тому случаю, когда устойчивое и неустойчивое состояния равновесия сливаются в одно состояние, в котором функционал энергии Φ имеет параболическую точку, т. е. первая и вторая вариации Φ равны нулю.

Поставленная задача решается в общем виде до конца, кроме того рассмотрены некоторые числовые примеры.

Важнейшие обозначения

t — толщина оболочки;

α и β — гауссовы координаты срединной поверхности оболочки вращения по меридиану и параллели; R_1 и R_2 их радиусы кривизны;

$$\delta = \frac{R_1}{R_2}, \quad \tau = \frac{1}{\sqrt{12}} \frac{t}{R_1} = \frac{1}{\sqrt{12}} \cdot \frac{t}{\delta R_2};$$

ϵ_1, ϵ_2 — относительные удлинения в направлениях координатных линий α и β ;

ω — угол сдвига между координатными линиями α и β ;

$\chi_1, \chi_2, \chi_{12}$ — параметры кривизны;

u, v — проекции перемещения точки срединной поверхности на линии α и β ;

w — проекция перемещения на внутреннюю нормаль к срединной поверхности;

$$u_x = \frac{\partial u}{\partial x}, \quad v_y = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad w_x = \frac{\partial w}{\partial x}, \dots,$$

— соответствующие частные производные перемещений;

T_{01}, T_{02} — усилия в срединной поверхности оболочки для безмоментного состояния (до хлопка);

T_1, T_2 — дополнительные усилия в срединной поверхности (после хлопка);

p_E — критическое давление на оболочку по линейной теории;

p_m — критическое давление на оболочку по нелинейной теории, которая является нижним пределом всех тех значений давления p , при которых энергия „нелинейного“ состояния меньше энергии „нулевого“ состояния;

p_k — давление, при котором устойчивое и неустойчивое состояния равновесия сливаются в одно состояние, т. е. в котором первая и вторая вариации функционала энергии Φ равны нулю;

W — удельная работа внешних сил;

E — модуль Юнга;

ν — коэффициент поперечного сжатия;

$K = \frac{Et}{1-\nu^2}$ — жесткость при растяжении;

$D = \frac{Et^3}{12(1-\nu^2)}$ — цилиндрическая жесткость.

1. Определение p_m

Решение задачи проводится в предположении, что центр хлопка лежит на экваторе оболочки и в плане область хлопка имеет форму эллипса. Такое предположение, очевидно, справедливо, потому что при рассмотрении местной потери устойчивости эллипсоидальной оболочки вращения совершенной формы наиболее ослабленным участком является область экватора, так как на участках, удаленных от экватора, кривизна оболочки будет больше и, соответственно, жесткость оболочки будет также больше.

Если кроме основного „нулевого“ состояния равновесия оболочки возможно при той же нагрузке устойчивое положение равновесия после хлопка, то полная энергия оболочки должна быть минимальной и в этом последнем положении. Таким образом, задача приводится к минимизации функционала:

$$\Phi = \int \int_{(s)} \left\{ \frac{K}{2} [(\epsilon_1^0 + \epsilon_1)^2 + (\epsilon_2^0 + \epsilon_2)^2 + 2\nu(\epsilon_1^0 + \epsilon_1)(\epsilon_2^0 + \epsilon_2)] + \frac{(1-\nu)}{2} \omega^2 \right\} +$$

$$+ \frac{D}{2} [x_1^2 + x_2^2 + 2\nu x_1 x_2 + 2(1-\nu)x_{12}^2] - W \} dx dy, \quad (1.1)$$

где

$$R_1 d\alpha = dx, \quad R_2 d\beta = dy;$$

$$\epsilon_1^0 = -\frac{w_0}{R_1}, \quad \epsilon_2^0 = -\frac{w_0}{R_2}$$

— удлинения срединной поверхности оболочки до хлопка в предположении, что начальное состояние оболочки до местной потери устойчивости является безмоментным; w_0 — прогиб начального, безмоментного состояния; (1.1) интегрируется по всей срединной поверхности оболочки, и считается, что нормаль к оболочке направлена внутрь.

Относительные удлинения и параметры кривизны берем в виде:

$$\epsilon_1 = u_x + \frac{1}{2} \omega_x^2 - w/R_1, \quad \epsilon_2 = v_y + \frac{1}{2} \omega_y^2 - w/R_2; \quad (1.2)$$

$$\omega = v_x + u_y + \omega_x \omega_y; \quad x_1 = \omega_{xx}, \quad x_2 = \omega_{yy}, \quad x_{12} = \omega_{xy}.$$

Учитывая условие равновесия элемента оболочки в направлении нормальном к срединной поверхности при внешнем равномерном давлении на оболочку

$$\frac{T_{01}}{R_1} + \frac{T_{02}}{R_2} = -p, \quad (1.3)$$

где

$$T_{01} = K(\epsilon_1^0 + \nu\epsilon_2^0), \quad T_{02} = K(\epsilon_2^0 + \nu\epsilon_1^0), \quad (1.4)$$

представим удельную работу внешних сил в виде:

$$W = p(w + w_0) = -\left(\frac{T_{01}}{R_1} + \frac{T_{02}}{R_2}\right)(w + w_0) =$$

$$= -K \left[\epsilon_1^0 \left(-\epsilon_1^0 + \frac{w}{R_1} + \nu \frac{w}{R_2} \right) + \epsilon_2^0 \left(-\epsilon_2^0 + \nu \frac{w}{R_1} + \frac{w}{R_2} \right) - 2\nu\epsilon_1^0\epsilon_2^0 \right], \quad (1.5)$$

причем мы включаем в функционал энергии лишь работу нормального давления на оболочку, так как на основании граничных условий во всех рассмотренных далее случаях работа реакции остальной части оболочки на границе области хлопка равна нулю.

Учитывая выражения (1.2)–(1.5), приведем функционал (1.1) к виду:

$$\Phi = \int \int_{(s)} \left\{ \frac{1}{2K(1-\nu^2)} [-(T_{01}^2 + T_{02}^2) + 2\nu T_{01} T_{02}] + u_x T_{01} + v_y T_{02} \right\} dx dy +$$

$$+ \int \int_{(s')} \left\{ \frac{K}{2} [\epsilon_1^2 + \epsilon_2^2 + 2\nu\epsilon_1\epsilon_2 + \epsilon_{13}^2 \frac{T_{01}}{K} + \epsilon_{23}^2 \frac{T_{02}}{K} + \frac{(1-\nu)}{2} \omega^2] + \right.$$

$$\left. + \frac{D}{2} [x_1^2 + x_2^2 + 2\nu x_1 x_2 + 2(1-\nu)x_{12}^2] \right\} dx dy. \quad (1.6)$$

При этом предполагается, что изменениями R_1 и R_2 в области хлопка можно пренебречь, так как размеры области хлопка малы по сравнению с размерами оболочки.

Очевидно, полная энергия в первой форме равновесия (до хлопка) равна

$$\Phi_0 = \int \int_{(s)} \frac{1}{2K(1-\nu^2)} [-(T_{01}^2 + T_{02}^2) + 2\nu T_{01} T_{02}] dx dy,$$

где интегрирование берется по всей оболочке. Следовательно, задача приводится к минимизации функционала

$$\Phi' = \Phi - \Phi_0.$$

Выражение

$$\varphi = \int \int_{(s)} (u_x T_{01} + v_y T_{02}) dx dy,$$

входящее в (1.6), в предположении, что в области хлопка T_{01} и T_{02} постоянные, равно нулю в силу граничных условий, так как полагаем

$$u = 0, \quad v = 0, \quad w_x = 0, \quad w_y = 0 \quad \text{при } \alpha = \alpha_0 \text{ и } \beta = \beta_0.$$

Итак, имеем

$$\Phi' = \frac{K}{2} \int \int_{(s')} \left\{ \epsilon_1^2 + \epsilon_2^2 + 2\nu\epsilon_1\epsilon_2 + \frac{(1-\nu)}{2} \omega^2 + \tau^2 R_1^2 [x_1^2 + x_2^2 + \right.$$

$$\left. + 2\nu x_1 x_2 + 2(1-\nu)x_{12}^2] + \omega_x^2 \frac{T_{01}}{K} + \omega_y^2 \frac{T_{02}}{K} \right\} dx dy. \quad (1.7)$$

$$A_5 = \frac{1}{\delta} \int_0^1 \int_0^1 [2\nu h_{\xi} j_{\eta} + (1-\nu) h_{\eta} j_{\xi}] d\xi d\eta, \quad A_6 = -\frac{\delta+\nu}{\delta} A_{32},$$

$$B_1 = \frac{2}{\delta^2} [B_{11} + \nu \delta B_{12} + (1-\nu) \delta B_{13}], \quad B_2 = 2 \left(B_{21} + \frac{\nu}{\delta} B_{22} + \frac{1-\nu}{\delta} B_{23} \right),$$

$$B_3 = -\frac{1}{\delta^2} \int_0^1 \int_0^1 \left[(1+\nu\delta) \sqrt{\frac{\xi}{\eta}} g g_{\xi}^2 + (\delta+\nu) \delta \sqrt{\frac{\eta}{\xi}} g g_{\eta}^2 \right] d\xi d\eta,$$

$$D_1 = \int_0^1 \int_0^1 \left[\frac{1}{\delta^2} \sqrt{\frac{\xi}{\eta}} g_{\xi}^4 + \frac{\eta^{3/2}}{\sqrt{\xi}} g_{\eta}^4 + \frac{2}{\delta} \sqrt{\xi\eta} g_{\xi}^2 g_{\eta}^2 \right] d\xi d\eta,$$

$$C = \int_0^1 \int_0^1 \left[\frac{1}{\delta} \frac{1}{\sqrt{\xi\eta}} (2\xi g_{\xi\xi} + g_{\xi}^2) + \frac{\delta}{\sqrt{\xi\eta}} (2\eta g_{\eta\eta} + g_{\eta}^2) + \frac{2\nu}{\sqrt{\xi\eta}} (2\xi g_{\xi\xi} + g_{\xi}^2) (2\eta g_{\eta\eta} + g_{\eta}^2) + 8(1-\nu) \sqrt{\xi\eta} g_{\xi\eta}^2 \right] d\xi d\eta,$$

$$A = \frac{1}{\sqrt{\delta}} \int_0^1 \int_0^1 \left[\frac{1}{2\delta-1} \sqrt{\frac{\xi}{\eta}} g_{\xi}^2 + \sqrt{\frac{\eta}{\xi}} g_{\eta}^2 \right] d\xi d\eta,$$

$$A_{11} = \int_0^1 \int_0^1 \sqrt{\frac{\xi}{\eta}} h_{\xi}^2 d\xi d\eta, \quad A_{12} = \int_0^1 \int_0^1 \sqrt{\frac{\eta}{\xi}} h_{\eta}^2 d\xi d\eta,$$

$$A_{31} = \int_0^1 \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{\eta}} g h_{\xi} d\xi d\eta, \quad B_{11} = \int_0^1 \int_0^1 \frac{\xi}{\sqrt{\eta}} h_{\xi} g_{\xi}^2 d\xi d\eta,$$

$$B_{12} = \int_0^1 \int_0^1 \sqrt{\eta} h_{\xi} g_{\eta}^2 d\xi d\eta, \quad B_{13} = \int_0^1 \int_0^1 \sqrt{\eta} h_{\eta} g_{\xi} g_{\eta} d\xi d\eta, \quad (1.19)$$

где A_{21} , A_{22} , A_{32} , B_{21} , B_{22} , B_{23} получаются соответственно из A_{11} , A_{12} , A_{31} , B_{11} , B_{12} , B_{13} путем замены h на j и ξ на η .

Пользуясь введенными обозначениями, функционал (1.7) после длинных, но, по существу, несложных вычислений можно представить в следующем виде:

$$\Phi^* = \frac{2\Phi'}{KR_1^2} = r^2 \lambda^2 [\rho_1^2 A_1 + \rho_2^2 A_2 + \rho_1 A_3 + A_4 + \rho_1 \rho_2 A_5 + \rho_2 A_6 + \lambda \rho_1 B_1 + \lambda \rho_2 B_2 + \lambda B_3 + \lambda^2 D_1] + \tau^2 \lambda^2 r C - e_0 \lambda^2 r^2 A. \quad (1.20)$$

Здесь λ , ρ_1 , ρ_2 и r неизвестные параметры, характеризующие область хлопка и e_0 .

Для минимизации функционала (1.20) по методу Ритца — Тимошенко, при определении величины p_m , которая является нижним пределом всех тех значений p , при которых энергия «нелинейного» состояния меньше энергии «нулевого» состояния, необходимо выполнение следующих условий:

$$\Phi^* = 0, \quad \Phi_{\lambda}^* = 0, \quad \Phi_{\rho_1}^* = 0, \quad \Phi_{\rho_2}^* = 0, \quad \Phi_r^* = 0. \quad (1.21)$$

Отсюда получаем уравнения для определения ρ_1 , ρ_2 , λ , r и e_{0m} :

$$\left. \begin{aligned} 2\rho_1 A_1 + \rho_2 A_5 + \lambda B_1 + A_3 &= 0, \\ \rho_1 A_5 + 2\rho_2 A_2 + \lambda B_2 + A_6 &= 0, \\ \rho_1 B_1 + \rho_2 B_2 + 2\lambda D_1 + B_3 &= 0, \end{aligned} \right\} \quad (1.22)$$

$$r^2 [A_4 - \rho_1^2 A_1 + \rho_2^2 A_2 - \rho_1 \lambda B_1 + \rho_2 A_6 - \lambda^2 D_1] = C \tau^2. \quad (1.23)$$

$$e_{0m} = \frac{2C}{r\lambda} \tau^2, \quad (1.24)$$

где

$$\tau = \frac{1}{\sqrt{12}} \frac{t}{R_1} = \frac{1}{\sqrt{12}} \frac{t}{\delta R_2}.$$

Как видим, для численного решения поставленной задачи необходимо определить значения коэффициентов функционала $A_1, A_2, \dots, B_1, \dots, A$. Последние (согласно (1.19)) зависят только от вида функций перемещений h, j, g . Правильный выбор функций перемещений, удовлетворяющих граничным условиям (1.11), очевидно, обеспечит более надежное решение задачи.

Из рассмотренных нами шести вариантов для перемещений мы остановились на том, который, в конечном счете, дал наименьшие величины давления p_m при значениях $\delta = 1, 2, 3, 4$:

$$\begin{aligned} h(\xi, \eta) &= e^{-n(\xi+\eta)} [1 - k(\xi + \eta) - k_3(\xi^2 + \eta^2)], \\ j(\xi, \eta) &= e^{-n(\xi+\eta)} [1 - k_1(\xi + \eta) - k_4(\xi^2 + \eta^2)], \\ g(\xi, \eta) &= e^{-n(\xi+\eta)} [1 - k_2(\xi + \eta)]. \end{aligned} \quad (1.25)$$

Здесь k, k_1, k_2, k_3, k_4, n — величины, подлежащие определению, причем мы будем предполагать, что за n принято такое число, при котором для $\xi + \eta = 1$, т. е. на границе области выпучивания прогиб становится пренебрегаемо малым.

Далее, пользуясь формулами (1.19), вычисляем коэффициенты $A_1, A_2, \dots, B_1, \dots, A$ функционала энергии (1.20). При этом в формулах (1.19) пределы интегрирования берем от 0 до ∞ , так как при принятой форме перемещений (1.25), перемещения и усилия затухают на границе области хлопка (при $\xi + \eta = 1$).

Опуская вычисления, запишем коэффициенты функционала энергии в окончательном виде:

$$\begin{aligned} A_{11} &= \frac{6}{64} \cdot \frac{\pi}{n} \left(1 - \frac{k}{n} + \frac{k^2}{n^2} + \frac{1}{4} \frac{k_3}{n^2} + \frac{17}{8} \frac{k k_3}{n^3} + \frac{185}{64} \frac{k_3^2}{n^4} \right), \\ A_{12} &= \frac{1}{32} \cdot \frac{\pi}{n} \left(1 - \frac{k}{n} + \frac{k^2}{n^2} - \frac{3}{4} \frac{k_3}{n^2} + \frac{21}{8} \frac{k k_3}{n^3} + \frac{225}{64} \frac{k_3^2}{n^4} \right), \\ A_{31} &= -\frac{\pi}{16n} \left(2 - 2 \frac{k}{n} + \frac{k k_2}{n^2} - \frac{9}{4} \frac{k_3}{n^2} + \frac{9}{4} \frac{k_3 k_3}{n^3} \right), \\ A_4 &= \frac{(1+2\nu\delta+\delta^2)}{16\delta^2} \cdot \frac{\pi}{n} \left(2 - 2 \frac{k_2}{n} + \frac{k_2^2}{n^2} \right), \\ A_5 &= \frac{\pi(1+\nu)}{16\delta n} \left(2 - \frac{k}{n} - \frac{k_1}{n} + 2 \frac{k k_1}{n^2} - \frac{3}{4} \frac{k_3}{n^2} - \frac{3}{4} \frac{k_4}{n^2} + \frac{21}{8} \frac{k k_3}{n^3} + \frac{21}{8} \frac{k k_4}{n^3} \right), \\ B_{11} &= \frac{\pi}{54} \left(\frac{k_2}{n} - \frac{k}{n} - \frac{k k_2}{n^2} - \frac{5}{3} \frac{k_3}{n^2} + \frac{1}{18} \frac{k_2 k_3}{n^3} - \frac{2}{9} \frac{k_2^2 k_3}{n^4} \right), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
B_{12} &= \frac{\pi}{9 \cdot 54} \left[9 - 9 \frac{k}{n} + 9 \frac{k_2}{n} - 3 \frac{kk_2}{n^2} + 3 \frac{k_2^2}{n^2} - 2 \frac{kk_2^2}{n^3} - \right. \\
&\quad \left. - \frac{5}{2} \left(3 \frac{k_3}{n^2} - \frac{k_2 k_3}{n^3} + \frac{k_2^2 k_3}{n^4} \right) \right], \\
B_{13} &= -\frac{\pi}{18 \cdot 54} \left(9 + 6 \frac{kk_2}{n^2} + 3 \frac{k_2^2}{n^2} - 2 \frac{kk_2^2}{n^3} + \frac{3}{2} \frac{k_3}{n^2} + 4 \frac{k_2 k_3}{n^3} - \frac{5}{2} \frac{k_2^2 k_3}{n^4} \right), \\
B_3 &= \frac{\pi}{162} \frac{(1 + 2\delta + \delta^2)}{\delta^2} \left(2 \frac{k_2^2}{n^3} - 3 \frac{k_2^2}{n^2} - 9 \right), \\
D_1 &= \frac{\pi n}{8192 \delta^2} (3\delta^2 + 2\delta + 3) \left(32 + 32 \frac{k_2}{n} + 48 \frac{k_2^2}{n^2} + 8 \frac{k_2^3}{n^3} + 5 \frac{k_2^4}{n^4} \right), \\
C &= \frac{\pi n}{8\delta} (3\delta^2 + 2\delta + 3) \left(1 + \frac{k_2}{n} + \frac{k_2^2}{n^2} \right), \\
A &= \frac{\pi}{8} \frac{V\delta}{2\delta - 1} \left(2 + \frac{k_2^2}{n^2} \right). \quad (1.26)
\end{aligned}$$

Причем A_{21} , A_{22} , A_{32} , B_{21} , B_{22} , B_{23} получаются из A_{11} , A_{12} , A_{31} , B_{11} , B_{12} , B_{13} заменой k и k_2 соответственно на k_1 и k_4 .

Вышеприведенные коэффициенты являются функциями δ и неизвестных параметров $\frac{k}{n}$, $\frac{k_1}{n}$, $\frac{k_2}{n}$, $\frac{k_3}{n^2}$ и $\frac{k_4}{n^2}$. Последние в нашем случае определяются путем последовательного подбора и при $\delta = 1$ оказались равными:

$$\frac{k}{n} = \frac{k_1}{n} = 0,150; \quad \frac{k_2}{n} = -0,545; \quad \frac{k_3}{n^2} = \frac{k_4}{n^2} = -0,055. \quad (1.27)$$

Для упрощения вычислений пользуемся (1.27) и при $\delta \neq 1$. Численное определение p_m проводилось следующим образом.

а) При заданном δ ($\delta = 1, 2, 3, 4$) и значениях параметров $\frac{k}{n}$, $\frac{k_1}{n}$, \dots , (1.27) по формулам (1.19) и (1.26) вычисляются коэффициенты функционала энергии A_1 , $A_2, \dots, B_1, \dots, A$.

б) По уравнениям (1.22) определяются ρ_1 , ρ_2 , λ . При этом ρ_1 и ρ_2 не зависят от степени затухания n функций перемещения, а λ зависит от n .

в) Найденные значения ρ_1 , ρ_2 и λ подставляем в уравнение (1.23) и вычисляем параметр $r = \alpha_0 \beta_0$, который зависит от n и $\frac{t}{R_2}$. Зная r и учитывая (1.15), нетрудно определить величины малых телесных углов выпучивания

$$\alpha_0 = \sqrt{\frac{r}{V\delta}}, \quad \beta_0 = \sqrt{r V\delta}. \quad (1.28)$$

г) При известном r по формуле (1.24) вычисляем e_{0m} . Затем определяются σ_{01}^M , σ_{02}^M и p_m . Учитывая (1.3), (1.17), (1.18) и полагая $r = r^{**}$ (где r^{**} — численный коэффициент), запишем их в общем виде

$$\sigma_{01}^M = -\frac{1}{V\delta(2\delta-1)} \frac{C}{r^{**}A} \frac{E}{1-\nu^2} \cdot \frac{t}{R_2}, \quad (1.29)$$

$$\sigma_{02}^M = -\frac{1}{\delta V\delta} \frac{C}{r^{**}A} \frac{E}{1-\nu^2} \cdot \frac{t}{R_2},$$

$$p_m = \frac{2}{V\delta(2\delta-1)} \frac{C}{r^{**}A} \cdot \frac{E}{1-\nu^2} \cdot \frac{t^2}{R_2^2}. \quad (1.30)$$

д) Максимальный прогиб в центре области выпучивания определяется из (1.10) и (1.25) при $\xi = \eta = 0$: $w_{\max} = \lambda \alpha_0^2 R_1$.

Так как

$$\alpha_0^2 = \frac{r}{V\delta} \text{ и } r = r^{**} n \frac{t}{V12 R_1}, \quad \lambda = \lambda^* \frac{1}{n},$$

(где r^{**} и λ^* — числовые коэффициенты), то получим

$$\frac{w_{\max}}{t} = \frac{\lambda^* r^{**}}{V12\delta}. \quad (1.31)$$

Таким образом, максимальный относительный прогиб в центре области выпучивания не зависит от относительной толщины оболочки $\frac{t}{R_2}$ и степени затухания n .

В таблице 1 даны значения критического давления p_m и размеров области выпучивания для различных δ при

$$\frac{k}{n} = \frac{k_1}{n} = 0,150, \quad \frac{k_2}{n} = -0,545, \quad \frac{k_3}{n^2} = \frac{k_4}{n^2} = -0,055 \text{ и } \nu = 0,3.$$

Таблица 1

$\delta = \frac{R_1}{R_2}$	1	2	3	4
ρ_1	1,2225	1,2243	1,2257	1,2267
ρ_2	1,2225	1,2216	1,2207	1,2208
$\lambda \cdot n$	4,2619	4,2581	4,2563	4,2558
$r \cdot \frac{1}{n\pi}$	5,9933	7,7872	10,086	11,640
$\frac{x_0}{y_0}$	1	$\sqrt{2}$	$\sqrt{3}$	2
$\frac{\alpha_0}{\beta_0}$	1	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	$\frac{1}{2}$
$\alpha_0 \sqrt{\frac{R_2}{nt}}$	1,3153	1,2971	1,2960	1,2610
$\beta_0 \sqrt{\frac{R_2}{nt}}$	1,3153	1,7830	2,2457	2,520
$e_{0m} \frac{R_2}{t}$	0,2205	0,2135	0,1878	0,1816
$ \sigma_{01}^M \frac{R_2}{Et}$	0,2423	0,1564	0,1238	0,1140
$ \sigma_{02}^M \frac{R_2}{Et}$	0,2423	0,2346	0,2064	0,1990
$\frac{p_m R_2^2}{Et^2}$	0,4446	0,3128	0,2476	0,2280
$\frac{w_{\max}}{t}$	7,37	7,25	7,15	7,14

Как видно из этой таблицы, телесные углы области выпучивания α_0 и β_0 зависят от n и t/R_2 . Полагая $\frac{t}{R_2} = \frac{1}{900}$ и допуская, что при $n=5$ (или даже при $n=4$) на границе области хлопка выпучивание очень мало, вычисляем значения малых углов α_0 и β_0 (см. табл. 2).

Таблица 2

	δ	1	2	3	4
α_0	$n=4$	5°02'	4°58'	4°57'	4°48'
	$n=5$	5°40'	6°51'	8°35'	9°55'
β_0	$n=4$	5°02'	5°33'	5°30'	5°23'
	$n=5$	5°40'	7°55'	9°36'	11°04'

2. Определение p_k

При давлении равном p_k на графике энергия—прогиб для Φ^* имеем параболическую точку, т. е. первая и вторая вариации Φ^* (1.20) равны нулю.

Поэтому p_k определяем из уравнений

$$\Phi_{\lambda}^* = 0, \quad \Phi_{p_1}^* = 0, \quad \Phi_{p_2}^* = 0, \quad \Phi_r^* = 0,$$

$$\begin{vmatrix} \Phi_{\lambda\lambda}^* & \Phi_{\lambda p_1}^* & \Phi_{\lambda p_2}^* & \Phi_{\lambda r}^* \\ \Phi_{p_1\lambda}^* & \Phi_{p_1 p_1}^* & \Phi_{p_1 p_2}^* & \Phi_{p_1 r}^* \\ \Phi_{p_2\lambda}^* & \Phi_{p_2 p_1}^* & \Phi_{p_2 p_2}^* & \Phi_{p_2 r}^* \\ \Phi_{r\lambda}^* & \Phi_{r p_1}^* & \Phi_{r p_2}^* & \Phi_{r r}^* \end{vmatrix} = 0 \quad (2.1)$$

где $\Phi_{\lambda}^*, \Phi_{p_1}^*, \dots, \Phi_r^*, \Phi_{\lambda\lambda}^*, \dots, \Phi_{r r}^*$ — соответствующие частные производные Φ^* по неизвестным параметрам λ, p_1, p_2, r . После некоторых преобразований из первых четырех уравнений (2.1) получаем:

$$\begin{aligned} 2p_1 A_1 + p_2 A_5 + \lambda B_1 + A_3 &= 0 \\ p_1 A_5 + 2p_2 A_2 + \lambda B_2 + A_6 &= 0 \end{aligned} \quad (2.2)$$

$$p_1 B_1 + p_2 B_2 + 2\lambda D_1 + B_3 + \frac{2}{3} \frac{(2\tau^2 C - e_{0kr} A)}{r^2} = 0.$$

$$r^2 [p_1^2 A_1 + p_2^2 A_2 + p_1 A_3 + A_4 + p_1 p_2 A_5 + p_2 A_6 - \lambda^2 D_1] = \tau^2 C. \quad (2.3)$$

Вычисление определителя четвертого порядка в (2.1) не представляет особых трудностей, так как в нем $\Phi_{p_1 r}^*$ и $\Phi_{p_2 r}^*$ равны нулю. Вычисление определителя четвертого порядка в (2.1) нам дает:

$$[(2\tau^2 C - e_{0kr} A)^2 + (2\tau^2 C - e_{0kr} A)(\tau^2 C - e_{0kr} A)](A_5^2 - 4A_1 A_2) -$$

$$- r^2 \lambda^2 (\tau^2 C - e_{0kr} A) [B_1 B_2 A_5 - A_1 B_2^2 - A_2 B_1^2 - D_1 (A_5^2 - 4A_1 A_2)] = 0. \quad (2.4)$$

Уравнений (2.2), (2.3) и (2.4) вполне достаточно для определения пяти неизвестных λ, p_1, p_2, r и e_{0k} . Для решения задачи произведем некоторые преобразования.

В третье уравнение (2.2) введем обозначение

$$\frac{2}{3} \frac{(2\tau^2 C - e_{0kr} A)}{r^2} = \varepsilon. \quad (2.5)$$

Тогда p_1, p_2 и λ определяются из уравнений (2.2) и будут линейными функциями от ε . Далее, при известных p_1, p_2 и λ из уравнения (2.3) определяем $\frac{\tau^2 C}{r^2}$, который будет являться квадратичной функцией от ε . Пользуясь обозначением (2.5), преобразуем уравнение (2.4):

$$\begin{aligned} \lambda \varepsilon^2 - \frac{1}{3} \frac{\tau^2 C}{r^2} \varepsilon + \\ + \left[\frac{2}{9} \frac{\tau^2 C}{r^2} \lambda - \frac{1}{3} \lambda^2 \varepsilon \right] \frac{[B_1 B_2 A_5 - A_1 B_2^2 - A_2 B_1^2 - D_1 (A_5^2 - 4A_1 A_2)]}{A_5^2 - 4A_1 A_2} = 0. \end{aligned} \quad (2.6)$$

Уравнение (2.6) после подстановки в него значений λ и $\frac{\tau^2 C}{r^2}$, вычисленных для частных случаев $\delta=1, 2, 3, 4$, будет кубическим уравнением относительно ε . Кубическое уравнение поддается решению общими способами, и определяются все три его корня. Вычисления показали, что пригодным для определения p_k является лишь один наименьший корень уравнения (2.6) для данного δ .

При известном ε из уравнения (2.5) легко вычисляется e_{0k} . Зная e_{0k} , по формулам (1.18), (1.17) и (1.3) находим p_k . Нами вычислены значения p_k для эллипсоидов вращения различной вытянутости, т. е. для частных случаев $\delta=1, 2, 3, 4$. Результаты вычислений сведены в таблицу 3.

Таблица 3

δ	1	2	3	4
p_1	1,2225 - 2,6834 ε	1,2243 - 4,7537 ε	1,2257 - 5,8618 ε	1,2267 - 6,5650 ε
p_2	1,2225 - 2,6834 ε	1,2216 - 4,3668 ε	1,2203 - 5,1142 ε	1,2208 - 5,5090 ε
$\lambda \cdot n$	4,2590 - 21,165 ε	4,2581 - 35,559 ε	4,2558 - 42,069 ε	4,2562 - 45,572 ε
$\frac{\tau^2 C}{r^2} \cdot \frac{n}{\pi}$	0,0215 + 4,259 ε - 10,583 ε^2	0,0129 + 4,259 ε - 17,685 ε^2	0,0111 + 4,257 ε - 21,048 ε^2	0,0102 + 4,256 ε - 22,788 ε^2
$\varepsilon \frac{1}{\pi}$	0,0040	0,0039	0,0042	0,0038
$e_{0k} \frac{R_2}{t}$	0,2002	0,1942	0,1758	0,1673
$p_k \frac{R_2^2}{Et^2}$	0,4138	0,2840	0,2220	0,2069

Здесь мы не приводим вычисления величин $\alpha_0, \beta_0, |\sigma_{01}^k|, |\sigma_{02}^k|$ и $\frac{\omega_{\max}}{t}$, которые легко определяются при известных p_1, p_2, λ, r и e_{0k} . Далее, для сравнения полученных при различных δ значений критических давлений p_m и p_k с результатами, даваемыми по линеаризован-

ной теории, строим график зависимости величины $\frac{pR_2^2}{Et^2}$ от δ (рис. 2).

При этом формула для определения величины критического внешнего давления на оболочку по линейной теории при $\delta \gg 1$ получается легко из работы [2] Х. М. Муштари. Она имеет вид:

$$p_E = \frac{2E}{\sqrt{3(1-\nu^2)}} \cdot \frac{1}{(2\delta-1)} \cdot \frac{t^2}{R_2^2}. \quad (2.7)$$

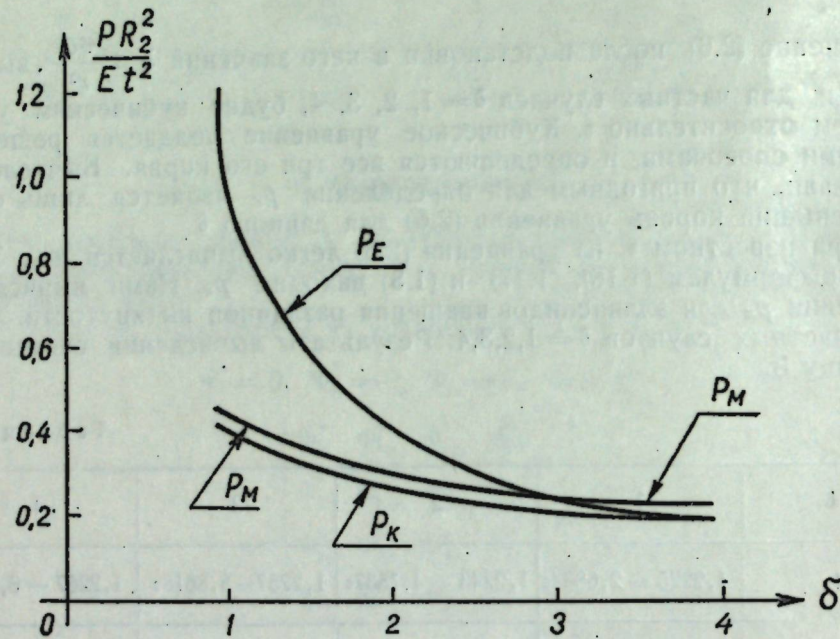


Рис. 2.

Из рассмотрения этого графика видим, что при выбранной форме перемещений решение задачи о местной потере устойчивости вытянутых эллипсоидов вращения при внешнем равномерном давлении на оболочку для $\delta = \frac{R_1}{R_2} > 3$ нельзя считать удовлетворительным, так как начиная с $\delta > 3$ величина критического давления, при котором оболочка теряет устойчивость, найденная по нелинейной теории (p_K), начинает становиться больше величины верхнего предела критического давления (p_E), получаемого по формуле (2.7).

Такое несоответствие между p_K и p_E объясняется прежде всего тем, что при выборе функций перемещений мы ограничились, ввиду сложности задачи, удовлетворением только геометрических граничных условий.

Помимо этого, на решение задачи влияет правильное определение неизвестных параметров $\frac{k}{n}$, $\frac{k_1}{n}$, $\frac{k_2}{n}$, $\frac{k_3}{n^2}$, $\frac{k_4}{n^2}$, которые в нашем случае были определены путем последовательного подбора только для случая сферы и были использованы для других частных случаев ($\delta = 2, 3, 4$). Наконец, существенное влияние на наше решение оказало, повидимому, то ограничение, которое мы наложили на область выпучивания, полагая ее эллиптической.

Необходимо отметить, что в частном случае, когда $\delta = 1$, мы получаем вполне удовлетворительное решение задачи о местной потере устойчивости сферической оболочки. Здесь мы не останавливаемся на рассмотрении этого случая, который был достаточно подробно разобран в работе [1].

Поступила в редакцию
20/XII-1954 г.

Физико-технический ин-т
Казанского филиала АН СССР

ЛИТЕРАТУРА

1. Муштари Х. М. и Суркин Р. Г. О нелинейной теории устойчивости упругого равновесия тонкой сферической оболочки под действием равномерно распределенного нормального внешнего давления. ПММ, том XIV, вып. 6, 1950.
2. Муштари Х. М. Об упругом равновесии тонкой оболочки с начальными неправильностями в форме средней поверхности. ПММ, т. XV, вып. 6, 1951.

А. В. САЧЕНКОВ

**ПРИБЛИЖЕННОЕ ОПРЕДЕЛЕНИЕ НИЖНЕЙ ГРАНИЦЫ
 КРИТИЧЕСКОЙ НАГРУЗКИ ПРИ ПРОДОЛЬНОМ СЖАТИИ
 ТОНКОЙ КОНИЧЕСКОЙ ОБОЛОЧКИ**

В работе рассматривается вопрос об определении нижней границы критического напряжения, действующего на тонкую усеченную коническую оболочку при продольном сжатии. При этом выводятся и упрощаются общие нелинейные дифференциальные уравнения равновесия для конических оболочек кругового сечения и даются приближенные формулы для определения нижней границы критической нагрузки для оболочек нулевой гауссовой кривизны при продольном сжатии.

Основные обозначения

- 2γ — угол конусности;
- r — расстояние по образующей от вершины конуса до точки срединной поверхности;
- r_0 — это же расстояние до меньшего из оснований;
- $2h$ — толщина оболочки;
- φ — угол между аксиальной плоскостью и плоскостью отсчета;
- w — нормальное перемещение точки срединной поверхности при выпучивании;
- u, v — тангенциальные перемещения точки срединной поверхности соответственно по образующей и в окружном направлениях;
- T_1, T_2, S — растягивающие (сжимающие) и сдвигающие усилия, действующие в срединной поверхности;
- f — функция напряжений;
- E — модуль упругости;
- μ — коэффициент поперечного расширения;

$$K = \frac{2Eh}{1-\mu^2}, \quad D = \frac{2Eh^3}{3(1-\mu^2)} \text{ — жесткости обшивки.}$$

$$\varphi_1 = \varphi \sin \gamma.$$

1. Дифференциальные уравнения равновесия

Деформации $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \omega$ с точностью до квадратов перемещений и их производных выражаются по формулам монографии [1]:

$$\varepsilon_1 = \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial r} \right)^2, \quad \varepsilon_2 = \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial \varphi_1} + \frac{u}{r} - \frac{w}{r} \operatorname{ctg} \gamma + \frac{1}{2r^2} \left(\frac{\partial w}{\partial \varphi_1} \right)^2$$

$$\omega = \frac{\partial v}{\partial r} - \frac{v}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial \varphi_1} + \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial r} \cdot \frac{\partial w}{\partial \varphi_1}. \quad (1.1)$$

Связь между усилиями и деформациями срединной поверхности дается равенствами

$$T_1 = K(\varepsilon_1 + \mu\varepsilon_2), \quad T_2 = K(\varepsilon_2 + \mu\varepsilon_1). \quad (1.2)$$

$$S = \frac{K(1-\mu)}{2} \omega.$$

Условия равновесия между напряжениями, действующими в срединной поверхности, могут быть приближенно выражены с помощью уравнений работы [1]

$$\frac{\partial}{\partial r} (T_1 r) + \frac{\partial S}{\partial \varphi_1} - T_2 = 0,$$

$$\frac{\partial}{\partial r} (S r) + \frac{\partial T_2}{\partial \varphi_1} + S = 0. \quad (1.3)$$

Уравнение проекций сил на нормаль к срединной поверхности имеет вид:

$$D \nabla^2 \nabla^2 w - \frac{T_2}{r \operatorname{tg} \gamma} - \left[T_1 \frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + T_2 \left(\frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \varphi_1^2} \right) + \right. \\ \left. + 2S \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial \varphi_1} \right) \right] - Z = 0, \quad (1.4)$$

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \varphi_1^2}.$$

Уравнения (1.3) могут быть удовлетворены введением функции напряжений

$$T_1 = \frac{1}{r} \frac{\partial f}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 f}{\partial \varphi_1^2}, \quad T_2 = \frac{\partial^2 f}{\partial r^2},$$

$$S = -\frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial f}{\partial \varphi_1} \right). \quad (1.5)$$

Исключая компоненты перемещения u, v из (1.1), приходим к соотношению между деформациями и радиальной компонентой перемещения w

$$r \frac{\partial^2}{\partial r^2} (r \varepsilon_2) - r \frac{\partial \varepsilon_1}{\partial r} + \frac{\partial^2 \varepsilon_1}{\partial \varphi_1^2} - \frac{\partial^2 (r w)}{\partial r \partial \varphi_1} + r \frac{\partial^2}{\partial r^2} (w \operatorname{ctg} \gamma) - \\ - \frac{1}{2} r \frac{\partial^2}{\partial r^2} \left[\frac{1}{r} \left(\frac{\partial w}{\partial \varphi_1} \right)^2 \right] + \frac{1}{2} r \frac{\partial}{\partial r} \left[\left(\frac{\partial w}{\partial r} \right)^2 \right] - \frac{\partial^2}{\partial \varphi_1^2} \left[\frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial r} \right)^2 \right] + \\ + \frac{\partial^2}{\partial r \partial \varphi_1} \left(\frac{\partial w}{\partial r} \cdot \frac{\partial w}{\partial \varphi_1} \right) = 0. \quad (1.6)$$

Пользуясь (1.2) и (1.5), уравнение (1.6) можно привести к виду

$$\nabla^2 \nabla^2 f = 2Eh \left\{ \frac{1}{r^2} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial r \partial \varphi_1} \right)^2 - \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 w}{\partial r^2} \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial \varphi_1^2} - \frac{2}{r^3} \frac{\partial w}{\partial \varphi_1} \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial r \partial \varphi_1} + \right. \\ \left. + \frac{1}{r^4} \left(\frac{\partial w}{\partial \varphi_1} \right)^2 - \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial r} \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial r^2} - \frac{\operatorname{ctg} \gamma}{r} \frac{\partial^2 w}{\partial r^2} \right\}. \quad (1.7)$$

Выражая T_1, T_2 и S через искомую функцию напряжений по формулам (1.5), будем иметь еще одно нелинейное дифференциальное уравнение

$$D \nabla^2 \nabla^2 w - \frac{\operatorname{ctg} \gamma}{r} \frac{\partial^2 f}{\partial r^2} - \left(\frac{1}{r} \frac{\partial f}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 f}{\partial \varphi_1^2} \right) \frac{\partial^2 w}{\partial r^2} - \\ - \left(\frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \varphi_1^2} \right) \cdot \frac{\partial^2 f}{\partial r^2} + 2 \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial f}{\partial \varphi_1} \right) \cdot \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial \varphi_1} \right) - Z = 0, \quad (1.8)$$

где Z — проекция внешней силы на нормаль к срединной поверхности.

Уравнение (1.7) вместе с уравнением (1.8) образуют систему двух нелинейных дифференциальных уравнений относительно искомых функций $f = f(r, \varphi_1)$ и $w = w(r, \varphi_1)$. Но представленные в этой форме (1.7) и (1.8) оказываются чрезвычайно неудобными, ибо при решении конкретных задач приближенными методами приходится вычислять интегралы типа $\int r^n \sin mr dr$, что в значительной степени осложняет и без того громоздкую вычислительную работу. Поэтому целесообразно перейти к новым переменным, после чего эти уравнения принимают более простой вид. Введем подстановки

$$z = \ln \frac{r}{r_0}$$

$$f = e^z F_1$$

$$w = r_0 \operatorname{ctg} \gamma e^z w_1.$$

При этом система уравнений (1.7), (1.8) приводится к виду:

$$\begin{aligned} \nabla_1^2 \nabla_1^2 F_1 + 2 \left(\frac{\partial^2 F_1}{\partial \varphi_1^2} - \frac{\partial^2 F_1}{\partial z^2} \right) + F_1 = 2Ehr_0^2 \operatorname{ctg}^2 \gamma e^z \left\{ \left(\frac{\partial^2 w_1}{\partial z \partial \varphi_1} \right)^2 - \right. \\ \left. - \frac{\partial^2 w_1}{\partial z^2} \cdot \frac{\partial^2 w_1}{\partial \varphi_1^2} - \left(\frac{\partial^2 w_1}{\partial z^2} + \frac{\partial w_1}{\partial z} \right) \left(\frac{\partial w_1}{\partial z} + w_1 + 1 \right) - \frac{\partial w_1}{\partial z} \cdot \frac{\partial^2 w_1}{\partial \varphi_1^2} \right\} \\ D \left\{ \nabla_1^2 \nabla_1^2 w_1 + 2 \left(\frac{\partial^2 w_1}{\partial \varphi_1^2} - \frac{\partial^2 w_1}{\partial z^2} \right) + w_1 \right\} - e^z \left\{ \frac{\partial^2 F_1}{\partial z^2} + \frac{\partial F_1}{\partial z} + \right. \\ \left. + \left(\frac{\partial F_1}{\partial z} + F_1 + \frac{\partial^2 F_1}{\partial \varphi_1^2} \right) \left(\frac{\partial^2 w_1}{\partial z^2} + \frac{\partial w_1}{\partial z} \right) + \left(\frac{\partial w_1}{\partial z} + w_1 + \frac{\partial^2 w_1}{\partial \varphi_1^2} \right) \left(\frac{\partial^2 F_1}{\partial z^2} + \frac{\partial F_1}{\partial z} \right) - \right. \\ \left. - 2 \frac{\partial^2 F_1}{\partial z \partial \varphi_1} \cdot \frac{\partial^2 w_1}{\partial z \partial \varphi_1} \right\} - \frac{r_0^3 e^{3z}}{\operatorname{ctg} \gamma} \cdot Z = 0. \quad (1.9) \\ \nabla_1^2 = \frac{\partial^2}{\partial z^2} + \frac{\partial^2}{\partial \varphi_1^2}. \end{aligned}$$

Преобразованная таким способом система уравнений (1.9) может быть в свою очередь значительно упрощена. Уравнения (1.3), которым функция напряжений удовлетворяет тождественно, являются приближенными. Они не учитывают влияния перерезывающих сил. Как было показано в работе [1], учет этих сил во втором уравнении системы (1.3) эквивалентен пренебрежению единицей по сравнению с квадратом числа волн n^2 , образующихся по окружности при потере устойчивости оболочки. Если оболочка не является длинной, то $n^2 \gg 1$ и пренебрежение единицей по сравнению с n^2 не ведет к значительным погрешностям. Математически это означает пренебрежение самой функцией по сравнению с ее второй производной по φ_1 , т. е. функции при дифференцировании по φ_1 считаются существенно возрастающими. Пренебрегая в уравнениях (1.9) функцией по сравнению с ее второй производной, приходим к следующей системе:

$$\begin{aligned} \nabla_1^2 \nabla_1^2 F_1 = 2Ehr_0^2 \operatorname{ctg}^2 \gamma e^z \left\{ \left(\frac{\partial^2 w_1}{\partial z \partial \varphi_1} \right)^2 - \frac{\partial^2 w_1}{\partial z^2} \cdot \frac{\partial^2 w_1}{\partial \varphi_1^2} - \frac{\partial^2 w_1}{\partial \varphi_1^2} \cdot \frac{\partial w_1}{\partial z} - \right. \\ \left. - \frac{\partial w_1}{\partial z} \cdot \frac{\partial^2 w_1}{\partial z^2} - \frac{\partial^2 w_1}{\partial z^2} \cdot \frac{\partial w_1}{\partial z} \right\} \quad (1.10) \\ D \nabla_1^2 \nabla_1^2 w_1 - e^z \left\{ \frac{\partial^2 F_1}{\partial z^2} + \frac{\partial F_1}{\partial z} + \frac{\partial^2 F_1}{\partial \varphi_1^2} \left(\frac{\partial^2 w_1}{\partial z^2} + \frac{\partial w_1}{\partial z} \right) + \frac{\partial^2 w_1}{\partial \varphi_1^2} \left(\frac{\partial^2 F_1}{\partial z^2} + \frac{\partial F_1}{\partial z} \right) + \right. \\ \left. + \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial F_1}{\partial z} \cdot \frac{\partial w_1}{\partial z} \right) - 2 \frac{\partial^2 F_1}{\partial z \partial \varphi_1} \cdot \frac{\partial^2 w_1}{\partial z \partial \varphi_1} \right\} - \frac{r_0^3 e^{3z}}{\operatorname{ctg} \gamma} \cdot Z = 0. \end{aligned}$$

Эти уравнения будем считать исходными для конической оболочки. Интегрирование их представляет большие трудности. Возможность значительного упрощения уравнений (1.10) для случая продольного сжатия обусловлена тем, что в данном случае функция напряжений и функция прогибов изменяются как быстро возрастающие функции. Математически строгие решения, проведенные для сферических, цилиндрических и конических оболочек, подтверждают это положение, причем отношение двух последовательных производных, как известно, является величиной порядка $\sqrt{\frac{h}{R}}$. Поэтому в случае тонких оболочек, когда $\sqrt{\frac{h}{R}}$ мала по сравнению с единицей, будем пренебрегать функциями F_1 и w_1 по сравнению с их первыми производными. Таким образом, уравнения (1.10) заменяем приближенными уравнениями:

$$\begin{aligned} \nabla_1^2 \nabla_1^2 F_1 = 2Ehr_0^2 \operatorname{ctg}^2 \gamma e^z \left\{ \left(\frac{\partial^2 w_1}{\partial z \partial \varphi_1} \right)^2 - \frac{\partial^2 w_1}{\partial z^2} \cdot \frac{\partial^2 w_1}{\partial \varphi_1^2} - \frac{\partial^2 w_1}{\partial z^2} \right\} \\ D \nabla_1^2 \nabla_1^2 w_1 - e^z \left\{ \frac{\partial^2 F_1}{\partial z^2} - e^z \left\{ \frac{\partial^2 w_1}{\partial z^2} \cdot \frac{\partial^2 F_1}{\partial \varphi_1^2} + \frac{\partial^2 w_1}{\partial \varphi_1^2} \cdot \frac{\partial^2 F_1}{\partial z^2} - \right. \right. \\ \left. \left. - 2 \frac{\partial^2 F_1}{\partial z \partial \varphi_1} \cdot \frac{\partial^2 w_1}{\partial z \partial \varphi_1} \right\} - \frac{r_0^3 e^{3z}}{\operatorname{ctg} \gamma} \cdot Z = 0. \quad (1.11) \end{aligned}$$

Так как в этих уравнениях сохраняются лишь старшие производные, а переменные коэффициенты при них, являющиеся геометрическими характеристиками оболочки, изменяются плавно, то эти последние можно рассматривать как постоянные параметры, подлежащие определению из условия минимума критической нагрузки. Это соответствует рассмотрению устойчивости бесконечно малой области z_0 оболочки, метрику которой можно считать евклидовой. Поэтому в уравнениях (1.11) считается

$$e^z = e^{z_0} = \operatorname{const}.$$

Проводя в (1.11) дополнительные преобразования

$$F_1 = \frac{f}{e^{z_0}}, \quad w_1 = \frac{w}{r_0 \operatorname{ctg} \gamma \cdot e^{z_0}}, \quad z = \frac{x}{r_0 e^{z_0}}, \quad \varphi_1 = \frac{y}{r_0 e^{z_0}}$$

(x, y — независимые переменные), приходим к уравнениям

$$\begin{aligned} \nabla_1^2 \nabla_1^2 f = 2Eh \left\{ \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right)^2 - \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - \frac{1}{r_0 \operatorname{tg} \gamma e^{z_0}} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right\} \quad (1.12) \\ D \nabla_1^2 \nabla_1^2 w - \frac{1}{r_0 \operatorname{tg} \gamma \cdot e^{z_0}} \left\{ \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \right\} \\ + 2 \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} - Z = 0. \end{aligned}$$

Эти уравнения совпадают с нелинейными уравнениями для цилиндрических оболочек с фиктивным радиусом, равным $e^{z_0} r_0 \operatorname{tg} \gamma$. Они получены путем отбрасывания членов $\sqrt{\frac{h}{R}}$ по сравнению с единицей и оказываются также совпадающими с уравнениями, выведенными В. З. Власовым [3] в предположении локальной потери устойчивости. Следовательно, эти уравнения В. З. Власова, а также линейные уравнения, предложенные Ю. Н. Работновым в статье [4], содержат погрешность порядка $\sqrt{\frac{h}{R}}$ по сравнению с единицей. Это обстоятельство не оказывает заметного влияния на результаты, даваемые линейной теорией. Отчасти это объясняется тем, что вблизи мини-

му критические напряжения мало изменяются от изменения частоты волн на поверхности. Поэтому удержание в дифференциальных уравнениях членов порядка $\sqrt{\frac{h}{R}}$ наряду с членами порядка единицы почти не отражается на результатах. При решении же нелинейных задач этого утверждать нельзя. Поэтому приводимые ниже результаты, полученные на основании уравнений (1.12), следует рассматривать как первое приближение.

2. Продольное сжатие конической оболочки

В 1941 году Карманом и Тзяном была опубликована работа „О выпучивании тонкой цилиндрической оболочки под действием осевого сжатия“ [6]. Эти авторы дали полуэмпирическую формулу для нижнего критического напряжения

$$\sigma_{кр} = 0,195 \cdot \frac{2Eh}{R} \quad (2.1)$$

Применяя последовательно процедуру Кармана — варьирование функционала полной энергии лишь по амплитудам волн при неизменных частотах — нельзя получить указанной им формулы. Это обстоятельство было отмечено Михильсеном [7] и независимо от них Х. М. Муштаром и Р. Г. Суркиным [2]. Эти авторы предложили минимизировать функционал полной энергии не только по амплитудам волн, но также по их частотам, трактуя последние как возможные перемещения. При такой процедуре минимизации критическая нагрузка, найденная Михильсеном [7], оказалась в точности совпадающей с формулой, указанной Карманом. Задаваясь формой волнообразования

$w = g_0 + g_1 \cos mx \cos ny + g_2 (\cos 2mx + \cos 2ny)$, где g_0, g_1, g_2 — произвольные параметры, Михильсен в упомянутой выше работе путем тщательных вычислений показал, что минимум критической нагрузки определяется формулой

$$\left\{ \frac{T_0 R}{4Eh^2} \right\}_{\min} = 0,195.$$

В случае конической оболочки на основании (1.12)

$$R = r_0 \operatorname{tg} \gamma e^{z_0}$$

и, следовательно,

$$\left\{ \frac{T_0 r_0 \operatorname{tg} \gamma e^{z_0}}{4Eh^2} \right\}_{\min} = 0,195,$$

где T_0 — усилие в части оболочки, где определяется z_0 . Минимальная выпучивающая сила P , действующая перпендикулярно плоскости основания оболочки, равна

$$P_{кр} = T_0 \cdot 2\pi R \cos^2 \gamma \quad \text{или} \quad P_{кр} = 4,9Eh^2 \cos^2 \gamma \quad (2.2)$$

Отсюда следует, что критическая сила, которую принимает коническая оболочка, не зависит от ее радиуса, но большое значение имеет угол конусности.

Таким же образом можно рассмотреть вопрос об определении нижней границы критической нагрузки при осевом сжатии и для других оболочек нулевой гауссовой кривизны, при выпучивании которых срединная поверхность также делится на большее число пологих частей. При этом, пользуясь понятием локальной устойчивости в исходных уравнениях (1.12), полагаем главный радиус кривизны равным его максимальному значению. В случае цилиндрической оболочки эллиптического сечения с небольшим эксцентриситетом этот радиус равен

$$R = \frac{a^2}{b},$$

где a — большая полуось эллипса, b — малая полуось. Следовательно, по формуле (2.1) критическое напряжение равно

$$\sigma_{кр} = \frac{0,195 \cdot 2Eh \cdot b}{a^2} \quad (2.3)$$

Минимальную критическую нагрузку $P_{кр}$ определим как произведение минимального напряжения (2.3) на площадь поперечного сечения оболочки. При этом для рассматриваемой оболочки с малым эксцентриситетом длину контура можно представить приближенной формулой

$$s = 2\pi a \left(1 - \frac{1}{4} k^2 \right),$$

где

$$k = \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a}$$

эксцентриситет. Следовательно

$$P_{кр} = \frac{4,9Eh^2 b}{a} \left(1 - \frac{1}{4} k^2 \right) \quad (2.4)$$

Отсюда следует, что из всех цилиндрических оболочек, имеющих одинаковую толщину и длину контура поперечного сечения, наибольшей несущей способностью обладает цилиндрическая оболочка кругового сечения.

Для конической оболочки эллиптического сечения

$$\sigma_{кр} = 0,195 \cdot \frac{2Ehb \cos \gamma}{a^2} \quad (2.5)$$

где γ — угол между высотой конуса и образующей, проходящей через вершину малой полуоси эллипса. $\sigma_{кр}$ здесь относится к сечению оболочки, где определяются параметры a и b . Эксцентриситет попрежнему считается малым.

Минимальную выпучивающую силу, действующую перпендикулярно плоскости основания, будем определять аналогично тому, как это было сделано для цилиндрической оболочки эллиптического сечения. Таким образом находим

$$P_{кр} = \frac{4,9Eh^2 b}{a^2} \left(1 - \frac{1}{4} k^2 \right) \cos^2 \gamma \quad (2.6)$$

Формулами (2.4), (2.6) определяется та критическая нагрузка, при достижении которой в зонах оболочки наименьшей кривизны начинается образование первых ямок по длине. Вследствие наличия на поверхности зон, поддерживающих ослабленные участки, критическая нагрузка, при которой начинается волнообразование по всей поверхности, будет, очевидно, превышать ту, которая определяется формулами (2.4), (2.6). Для оболочек с малым эксцентриситетом это превышение, повидимому, незначительно.

1. Муштарн Х. М. Некоторые обобщения теории тонких оболочек с приложениями к задаче устойчивости упругого равновесия. ПММ, т. 2, вып. IV, 1939.
2. Муштарн Х. М. и Суркин Р. Г. О нелинейной теории устойчивости упругого равновесия сферической оболочки под действием равномерно распределенного нормального внешнего давления. ПММ, т. IV, вып. 6, 1950.
3. Власов В. З. Общая теория оболочек. Гостехиздат, 1949.
4. Работнов Ю. Н. Локальная устойчивость оболочек. ДАН СССР, т. II, № 2, 1946.
5. Алумяз Н. А. К одной формуле критического напряжения безмоментного напряженного состояния тонкостенных упругих оболочек. ПММ, т. XIII, вып. 6, 1949.
6. T. Karman and Hsue-Shen Tsien. The Buckling of thin cylindrical shells under axial compression. Journal of the Aeronautical sciences. V. 8, 1941.
7. H. F. Michielsen. The Behavior of thin cylindrical shells after Buckling under axial compression. Journal of the Aeronautical sciences. V. 15, 1948.

Х. М. МУШТАРИ

ПРИБЛИЖЕННОЕ ОПРЕДЕЛЕНИЕ РЕДУКЦИОННОГО КОЭФФИЦИЕНТА ОБШИВКИ ПОДКРЕПЛЕННОЙ ПЛОСКОЙ И ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ПЛАСТИНКИ ПРИ ОСЕВОМ СЖАТИИ

В § 1 рассматривается плоская пластинка, подкрепленная ортогональной сеткой ребер жесткости, причем сначала предполагается, что обшивка прикреплена к ребрам лишь в вершинах панелей, а в остальных точках она опирается на ребра. Далее, для сравнения, дается определение редуccionного коэффициента η обшивки пластинки в виде полосы при условии прикреплении ее во всех точках стрингеров и показывается, что, по крайней мере, при больших прогибах после выпучивания обшивки η во втором случае мало отличается от η при более слабом прикреплении первого типа. Исходя из этого, в § 2 рассматривается осевое сжатие подкрепленной цилиндрической оболочки или значительной ее части в предположении, что обшивка прикреплена к ребрам лишь в узлах панелей, а в остальных точках может скользить в касательной плоскости, причем жесткости ребер на кручение считаются малыми.

Большая часть вычислений § 2 выполнена Ф. С. Исанбаевой, которой автор выражает свою благодарность.

Важнейшие обозначения

t — толщина оболочки,
 R — радиус кривизны,
 a — расстояние между соседними шпангоутами,
 b — расстояние между стрингерами,
 $\gamma = b^2/a^2$ — параметр удлиненности панелей,
 $k^* = b^2/Rt$ — безразмерный параметр кривизны,
 p_1 — модуль среднего сжимающего усилия на единицу длины обшивки,
 $p_1^* = p_1 b^2/Et^3$ — безразмерный параметр этой нагрузки,
 w — прогиб точки срединной поверхности оболочки, считаемый положительным, если он направлен к центру кривизны,
 Φ — функция усилий в срединной поверхности,
 μ — коэффициент поперечной деформации,
 E — модуль упругости при растяжении и сжатии,
 $D = Et^3/12(1-\mu^2)$ — цилиндрическая жесткость обшивки,
 η — редуccionный коэффициент обшивки,
 индексы x, y, α и β обозначают частное дифференцирование по этим переменным.

1. Сжатие плоской пластинки, подкрепленной ортогональной сеткой ребер

Пусть пластинка разделяется поперечными ребрами на $2k$ одинаковых панелей, а продольными ребрами — на $2k'$ панелей. Длина и ширина каждой панели равны соответственно a и b . Будем рассматривать форму выпучивания, при которой прогиб равен

$$w = f \sin m\alpha \sin n\beta, \quad \alpha = \frac{\pi x}{a}, \quad \beta = \frac{\pi y}{b}, \quad (1.1)$$

где x и y — координаты, измеряемые от середины пластинки, m и n — целые числа. При этом удовлетворяется условие равенства нулю прогиба обшивки вдоль ребер, предполагаемых жесткими на изгиб:

$$w = 0 \text{ при } x = \pm a, \dots, \pm ka \quad (1.2)$$

$$y = \pm b, \dots, \pm kb$$

Кроме того, выполняются условия свободного опирания на ребра:

$$w_{xx} = 0, \quad w_{yy} = 0. \quad (1.3)$$

На основании (1.2) имеем также равенства

$$w_x = 0 \text{ при } y = \pm b, \dots, \pm kb \quad (1.4)$$

$$w_y = 0 \text{ при } x = \pm a, \dots, \pm ka,$$

выражающие одно из необходимых условий прикрепления обшивки к ребрам в вершинах панелей.

Пусть Φ — функция усилий в срединной плоскости, Φ_{yy} — нормальное усилие на единицу длины в сечении $x = \text{const}$, Φ_{xx} — нормальное усилие на единицу длины в сечении $y = \text{const}$, Φ_{xy} — усилие сдвига в плоскости xy .

Как известно, функции Φ и w связаны условием совместности деформаций, которое в случае цилиндрической пластинки выражается уравнением

$$\Delta \Delta \Phi = Et \gamma (w_{\alpha\alpha}^2 - w_{\alpha\alpha} w_{\beta\beta} - \bar{k} w_{\alpha\alpha}),$$

$$\Delta(\cdot) = \gamma \frac{\partial^2}{\partial x^2}(\cdot) + \frac{\partial^2}{\partial \beta^2}(\cdot), \quad \gamma = \frac{b^2}{a^2}, \quad \bar{k} = \frac{\delta^2}{\pi^2 R}. \quad (1.5)$$

В случае плоской пластинки $\bar{k} = 0$.

Подставляя (1.1), легко находим

$$\Phi = \Phi^0 + \Phi_1, \quad (1.6)$$

где Φ^0 — частный интеграл уравнения (1.5), равный

$$\Phi^0 = \frac{Et f^2}{32} \left(\frac{1}{\delta} \cos 2m\alpha + \delta \cos 2n\beta \right) - \frac{p_1 y^2}{2} + \frac{p_2 x^2}{2},$$

$$\delta = mb/na. \quad (1.7)$$

При этом

$$\Phi_{xx}^0 = -Et\psi \cos 2m\alpha + p_2, \quad \Phi_{yy}^0 = -Et\delta^2 \psi \cos 2n\beta - p_1 \quad (1.8)$$

$$(\psi = f^2 \pi^2 n^2 / 8b^2)$$

Φ_1 — произвольная бигармоническая функция. Полагаем

$$\Phi_1 = \frac{Eta^2}{\pi^2 m^2} (D_1 \text{ch } \nu\beta + D_2 \nu\beta \text{sh } \nu\beta) \cos 2m\alpha, \quad \nu = \frac{2mb}{a}. \quad (1.9)$$

Следовательно,

$$\Phi_{xx} = -Et\psi \cos 2m\alpha + p_2 - 4Et(D_1 \text{ch } \nu\beta + D_2 \nu\beta \text{sh } \nu\beta) \cos 2m\alpha,$$

$$\Phi_{yy} = -Et\psi \delta^2 \cos 2n\beta - p_1 + 4Et[(D_1 + 2D_2) \text{ch } \nu\beta + D_2 \nu\beta \text{sh } \nu\beta] \cos 2m\alpha. \quad (1.10)$$

Осевое перемещение какой-либо точки обшивки, лежащей на шпангоуте $\alpha = \pi l$, где l — целое число между $-k$ и k , относительно соответствующей точки обшивки, лежащей на среднем шпангоуте, равно

$$\Delta_1 = \int_0^{la} \frac{\partial u}{\partial x} dx = \frac{a}{\pi} \int_0^{\pi} \left(\varepsilon_1 - \frac{1}{2} w_x^2 \right) dx,$$

где ε_1 — осевое удлинение:

$$\varepsilon_1 = \frac{\Phi_{yy} - \mu \Phi_{xx}}{Et} = -\frac{p_1 + \mu p_2}{Et} - \psi \delta^2 \cos 2n\beta + 4 \cos 2m\alpha \left\{ D_1 (1 + \mu) \text{ch } \nu\beta + D_2 [2 \text{ch } \nu\beta + (1 + \mu) \nu\beta \text{sh } \nu\beta] + \frac{\mu\psi}{4} \right\}. \quad (1.11)$$

Следовательно,

$$\Delta_1 \frac{\pi}{a} = -(p_1 + \mu p_2) \frac{\pi l}{Et} - \psi \pi l \delta^2.$$

Пусть обшивка прикреплена к стрингерам в вершинах панелей, где $\alpha = 0, \dots, \alpha = \pm k\pi$. Тогда должно выполняться условие

$$\frac{\Delta_1}{la} = -\frac{p_1 + \mu p_2}{Et} - \psi \delta^2 = \varepsilon_{1c}^m, \quad (1.12)$$

где ε_{1c}^m — среднее удлинение стрингера.

Поперечное перемещение точки обшивки, лежащей на стрингере $\beta = \pi l'$, где $-k' \leq l' \leq k'$, относительно соответствующей точки, лежащей на среднем стрингере, равно

$$\Delta_2 = \int_0^{l'b} \frac{\partial v}{\partial y} dy = \frac{b}{\pi} \int_0^{\pi l'} \left(\varepsilon_2 - \frac{1}{2} w_y^2 \right) dy =$$

$$= \frac{b}{\pi} \int_0^{\pi l'} \left\{ \frac{\Phi_{xx} - \mu \Phi_{yy}}{Et} - \psi (1 - \cos 2m\alpha) (1 + \cos 2n\beta) \right\} d\beta =$$

$$= \frac{b}{\pi} \left\{ \left(\frac{p_2 + \mu p_1}{Et} - \psi \right) l' \pi - 4 \left[D_1 (1 + \mu) \frac{\text{sh } \nu l' \pi}{\nu} + D_2 (\mu - 1) \frac{\text{sh } \nu l' \pi}{\nu} + D_2 (1 + \mu) l' \pi \text{ch } \nu l' \pi \right] \cos 2m\alpha \right\}.$$

Пусть обшивка прикреплена и к шпангоутам в вершинах панелей, причем точки обшивки, лежащие на стрингерах, остаются на них и после деформации. Тогда должны выполняться условия

$$\frac{p_2 + \mu p_1}{Et} - \psi = \varepsilon_{2ш}^m, \quad (1.13)$$

$$D_1 (1 + \mu) \text{sh } \nu \pi l' + D_2 (\mu - 1) \text{sh } \nu \pi l' + D_2 (1 + \mu) \nu \pi l' \text{ch } \nu \pi l' = 0, \quad (1.14)$$

где $\varepsilon_{2ш}^m$ — среднее удлинение шпангоута, $l' = \pm 1, \dots, \pm k'$. Последнее из этих условий выполняется, в частности, при $D_1 = D_2 = 0$. При этом, как видно из (1.2), (1.4), (1.12) и (1.13), выполняются все условия прикрепления обшивки к ребрам в вершинах панелей. Если же произвольность величин D_1 и D_2 желательно сохранить для дальнейшего, то приходится отказаться от точного выполнения условий прикрепления обшивки ко всем шпангоутам в вершинах панелей и ограничиться выполнением условия прикрепления ее к шпангоутам в точках пересечения с крайними стрингерами, для которых $l' = \pm k'$. Так как при выпучивании пластинки по длине каждой панели образуется такое число полуволи m , что во всяком случае $mb \geq a$, а значит $\nu k' \pi \geq 2\pi$, то с большой точностью $\text{ch } \nu k' \pi \approx \text{sh } \nu k' \pi$ и условие (1.14) приводится к виду

$$D_1 (1 + \mu) + D_2 [\mu - 1 + (1 + \mu) \nu k' \pi] = 0. \quad (1.14a)$$

Заметим, что при этом приближенно выполняются условия (1.14) и для вершин панелей, лежащих на стрингерах $\beta = \pm k' \pi$ ($k' \leq k' - 1$), так как $\text{sh } \nu \pi k' \ll \text{sh } \nu \pi k'$ и членами, содержащими D_1 и D_2 в выра-

жении Δ_2 , можно пренебречь. Следовательно, одна из величин D_1 и D_2 остается произвольной. Используем это обстоятельство для того, чтобы выполнить условие прикрепления обшивки к крайним стрингерам во всех их точках. Пусть удлинение крайнего стрингера в его середине, т.е. при $\alpha = 0$ равно ε_{1c}^0 , удлинение в какой-либо точке ε_{1c} , площадь поперечного сечения стрингера — F_1 , ε_{1c}^m — среднее удлинение стрингера. Тогда

$$\varepsilon_1 = \varepsilon_{1c} = \varepsilon_{1c}^0 - \int_0^x \frac{1}{EF_1} \Phi_{xy} dx =$$

$$= \varepsilon_{1c}^0 - \frac{2ta}{\pi F_1 m} (\cos 2m\alpha - 1) [D_1 \operatorname{sh} vk'\pi + D_2 (\operatorname{sh} vk'\pi + vk'\pi \operatorname{ch} vk'\pi)].$$

Следовательно, должны удовлетворяться условия

$$-\frac{p_1 + \mu p_2}{Et} - \psi \delta^2 = \varepsilon_{1c}^0 + \frac{2ta}{\pi F_1 m} [(D_1 + D_2) \operatorname{sh} vk'\pi + D_2 vk'\pi \operatorname{ch} vk'\pi] =$$

$$= \varepsilon_{1c}^m, \quad (1.15)$$

$$4 \{ D_1 (1 + \mu) \operatorname{ch} vk'\pi + D_2 [2 \operatorname{ch} vk'\pi + (1 + \mu) vk'\pi \operatorname{sh} vk'\pi] \} + \mu \psi =$$

$$= -\frac{2ta}{\pi F_1 m} [(D_1 + D_2) \operatorname{sh} vk'\pi + D_2 vk'\pi \operatorname{ch} vk'\pi]. \quad (1.16)$$

При этом ε_{1c}^m и ε_{2m}^m определяем из (1.13) и (1.15), а величины D_1 и D_2 определяем из уравнений (1.14а) и (1.16). Из этих последних находим

$$D_2 = -\frac{\psi d}{\operatorname{ch} vk'\pi}, \quad d = \mu \left[4(3 - \mu) + \frac{4ta}{\pi F_1 m} \right],$$

$$D_1 = -D_2 \left(vk'\pi - \frac{1 - \mu}{1 + \mu} \right). \quad (1.17)$$

Обычно tb/F_1 — величина порядка единицы, $mb \geq a$,

$$d \approx \mu : 4(3 - \mu) \approx 0,028 \text{ при } \mu = 0,3;$$

причем во всех случаях истинное значение $d < 0,028$.

Рассмотрим сначала определение редуцированного коэффициента обшивки панелей, находящихся далеко от крайних ребер и прикрепленных к своим ребрам лишь в вершинах. Для них, пренебрегая условиями заделки на краях пластинки, находим

$$\Phi_{xx} \approx -Et\psi \cos 2m\alpha + p_2, \quad \Phi_{yy} \approx -Et\delta^2\psi \cos 2n\beta - p_1,$$

$$-\frac{p_1 + \mu p_2}{Et} - \psi \delta^2 = \varepsilon_{1c}^m, \quad \frac{p_2 + \mu p_1}{Et} - \psi = \varepsilon_{2m}^m. \quad (1.18)$$

Пусть шпангоуты очень жесткие на растяжение. Тогда

$$\varepsilon_{2m}^m = 0, \quad p_2 = Et\psi - \mu p_1. \quad (1.19)$$

Сближение соседних шпангоутов равно

$$\left(\frac{p_1 + \mu p_2}{Et} + \psi \delta^2 \right) a.$$

Работа внешней нагрузки на этом перемещении

$$W_{\text{вн}} = p_1 ab \left(\frac{p_1 + \mu p_2}{Et} + \psi \delta^2 \right).$$

Энергия деформации срединной поверхности равна

$$\mathcal{E}_c = \frac{ab}{2Et\pi^2} \int_0^\pi \int_0^\pi \{ \Phi_{xx}^2 + \Phi_{yy}^2 - 2\mu \Phi_{xx}\Phi_{yy} + 2(1 + \mu) \Phi_{xy}^2 \} d\beta.$$

Энергия изгиба

$$\mathcal{E}_{\text{изг.}} = \frac{Dab \pi^2 n^2}{b^2} (1 + \delta^2)^2 \psi.$$

Полная энергия обшивки панели и внешних сил

$$\mathcal{E} = Et ab \left\{ -\frac{p_1^2 (1 - \mu^2)}{2E^2 t^2} - \frac{p_1}{Et} \psi (\delta^2 + \mu) + \right.$$

$$\left. + \frac{\psi^2}{4} (3 + \delta^4) + \frac{t^2}{12(1 - \mu^2)} \frac{\pi^2 n^2}{b^2} (1 + \delta^2)^2 \psi \right\}. \quad (1.20)$$

Из условия минимума энергии

$$\partial \mathcal{E} / \partial \psi = 0$$

находим

$$\frac{p_1}{Et} (\mu + \delta^2) = \psi \left[\frac{3 + \delta^4}{2} + (1 + \delta^2)^2 \Delta \right], \quad (1.21)$$

где

$$\Delta = 2t^2 : 3(1 - \mu^2) f^2.$$

По формулам (1.18) и (1.19)

$$\varepsilon_{1c}^m = -\psi (\mu + \delta^2) - \frac{p_1 (1 - \mu^2)}{Et}.$$

Пусть p_c — сжимающее усилие в обшивке, соответствующее этому удлинению при отсутствии выпучивания. Оно равно

$$p_c = -\frac{Et}{1 - \mu^2} \varepsilon_{1c}^m = Et \psi \left\{ \frac{3 + \delta^4}{2(\mu + \delta^2)} + \frac{\mu + \delta^2}{1 - \mu^2} + \frac{(1 + \delta^2)^2 \Delta}{\mu + \delta^2} \right\}. \quad (1.22)$$

Редуцированный коэффициент равен отношению среднего сжимающего усилия p_1 в обшивке после выпучивания к этой величине:

$$\eta = p_1 : p_c.$$

После появления значительных прогибов, когда $\Delta \ll 1$, имеем

$$\eta \approx (3 + \delta^4) : \left[3 + \delta^4 + \frac{2(\mu + \delta^2)^2}{1 - \mu^2} \right]. \quad (1.23)$$

При $\delta \rightarrow \infty$, $\eta \rightarrow \frac{1 - \mu^2}{3 - \mu^2} = 0,312$ ($\mu = 0,3$).

Минимальному значению η соответствует δ , определяемое из уравнения

$$\partial \eta / \partial \delta = 0.$$

Таким образом находим

$$\eta_{\text{min}} = 0,306 \text{ при } \delta^2 = 10.$$

Рассмотрим далее длинную полосу, подкрепленную ограничивающими стрингерами и равноотстоящими поперечными ребрами, при условии прикрепления обшивки во всех точках стрингеров. Для нее, полагая $k' = 1$, $\operatorname{sh} v\pi \approx \operatorname{ch} v\pi$, находим

$$\mathcal{E}_c = \frac{ab}{2Et} \left\{ p_2^2 + p_1^2 + 2\mu p_1 p_2 + \frac{E^2 t^2}{2} \psi^2 (1 + \delta^4) - \right.$$

$$\left. - 16(p_2 - p_1) \frac{Et\psi d}{v\pi} + \frac{16}{\pi} E^2 t^2 \psi^2 d \left[\frac{v\delta^2}{v^2 + 4\pi^2} + \frac{2d}{v(1 + \mu)} \right] \right\},$$

$$W_{\text{вн}} = \frac{ab}{Et} (p_1 + \mu p_2 + Et\psi \delta^2) \left[p_1 + \frac{8Et\psi d}{v\pi(1 + \mu)} \right]. \quad (1.24)$$

Пусть

$$\varepsilon_2 = 0.$$

Тогда

$$\mathcal{E} = \frac{ab}{2Et} \left\{ E^2 t^2 \psi^2 \left[\frac{3 + \delta^4}{2} - \frac{16d(1 + \delta^2 + 2\mu - 2d)}{\sqrt{\pi}(1 + \mu)} + \frac{16d\sqrt{\delta^2}}{\pi(\nu^2 + 4n^2)} \right] - p_1^2(1 - \mu^2) - 2p_1 Et \psi \left(\mu + \delta^2 - \frac{16\mu d}{\sqrt{\pi}} \right) \right\} + \mathcal{E}_{\text{пгр}},$$

где

$$\nu = 2n\delta.$$

Из уравнения $\partial \mathcal{E} / \partial \psi = 0$ находим

$$\frac{p_1}{Et} \left(\mu + \delta^2 - \frac{16\mu d}{\sqrt{\pi}} \right) = \psi \left\{ \frac{3 + \delta^4}{2} - \frac{16d}{\sqrt{\pi}(1 + \mu)} (1 + \delta^2 + 2\mu - 2d) + \frac{16d\delta^2\nu}{\pi(\nu^2 + 4n^2)} + (1 + \delta^2)^2 \Delta \right\}. \quad (1.25)$$

Аналогично предыдущему

$$\eta = p_1 : p_c = 1 : \left[1 + \frac{Et\psi}{p_1(1 - \mu^2)} (\mu + \delta^2) \right]. \quad (1.26)$$

Но мы видели, что $d < 0,028$. Учитывая это, легко показать, что вблизи минимума η (т. е. при $\delta^2 = 10$) поправка от учета членов, зависящих от краевого эффекта и содержащих d , меньше 0,1%. Поэтому при определении η условием полного прикрепления обшивки к стрингерам будем пренебрегать, полагая, что обшивка прикреплена лишь к вершинам панелей.

По формуле (1.20) составляем уравнение

$$\partial \mathcal{E} / \partial \delta = 0,$$

которое при $n = 1$ дает зависимость

$$\psi = [2p_1 - p_{1к}(1 + \delta^2)] : Et\delta^2, \quad (1.27)$$

где $p_{1к}$ — критическое усилие в полосе, равное

$$p_{1к} = E\pi^2 t^3 : [3b^2(1 - \mu^2)]. \quad (1.28)$$

Отсюда и из (1.21) следует, что

$$p_1 = p_{1к}(1 + \delta^2)(\delta^4 - \delta^2 + 6) : [4(3 - \mu\delta)], \\ \psi = p_{1к}(1 + \delta^2)(\delta^2 + 2\mu - 1) : [2Et(3 - \mu\delta^2)]. \quad (1.29)$$

При $\mu = 0,3$ имеем

$$\eta = 0,91(\delta^4 - \delta^2 + 6)(\delta^2 + 0,3) : (2,91\delta^6 - 0,23\delta^4 + 4,9\delta^2 + 1,57). \quad (1.30)$$

По этим формулам составлена следующая таблица редуцированных коэффициентов для различных нагрузок при $\mu = 0,3$.

Таблица 1

δ^2	1	2	3	4	10
$p_1/p_{1к}$	1,11	2,5	5,7	12,5	∞
η	0,773	0,501	0,392	0,346	0,306

Найденные в этом параграфе результаты близки к тем, которые были получены другими авторами при более строгом выполнении условий прикрепления обшивки к ребрам в реальных конструкциях.

Сравнение с экспериментальными данными А. С. Вольмира* показывает, что величины η , вычисленные по формуле (1.30), составляют 72—90% от средних экспериментальных величин, причем по мере увеличения нагрузки разница уменьшается. Такой результат следует признать удовлетворительным, если учесть, что наша формула была получена для случая заделки лишь в углах панелей, а А. С. Вольмир испытывал панели, заземленные по всем кромкам.

2. Сжатие подкрепленной цилиндрической оболочки

Как было показано в § 1, в случае плоской подкрепленной пластинки влияние точного выполнения условий закрепления точек обшивки на величину редуцированного коэффициента при осевом сжатии незначительно. После потери устойчивости цилиндрическая тонкостенная оболочка выпучивается по волнообразной поверхности, состоящей из большого числа пологих частей, каждая из которых является почти плоской. Поэтому можно полагать, что влияние краевого эффекта невелико и в рассматриваемом нами случае и что в первом приближении с достаточной точностью можно заменить реальную подкрепленную оболочку оболочкой с ослабленными связями, обшивка которой прикреплена к ребрам жесткости лишь в точках пересечения этих последних. Обшивка такой оболочки имеет больше возможностей воспринимать минимум нагрузки, перелagая эту последнюю на ребра жесткости, поэтому ее редуцированный коэффициент должен быть меньше редуцированного коэффициента обшивки реальной оболочки. Следовательно, мы должны получить значение η , приводящее к запасу прочности.

Для решения поставленной задачи будем применять метод Ритца — Тимошенко, задаваясь формой прогиба**:

$$w = f_1 \sin m\alpha \sin n\beta + f_2 \sin^2 m\alpha \sin^2 n\beta, \quad (2.1)$$

где, как и в § 1,

$$\alpha = \frac{\pi x}{a}, \quad \beta = \frac{\pi y}{b},$$

m, n — целые числа.

При этом выполняется условие

$$w = 0$$

на ребрах жесткости и условие защемления в вершинах панелей, т. е. при $\alpha = k\pi, \beta = l\pi$. В остальных точках ребер нет необходимости выполнять это последнее условие, так как тонкостенные ребра жесткости обычно плохо сопротивляются закручиванию и слабо препятствуют повороту обшивки.

Подставляя (2.1) в уравнение совместности деформаций (1.5), находим функцию усилий, причем, отказавшись от учета краевого эффекта, произвольную бигармоническую функцию полагаем равной

$$(-p_1 y^2 + p_2 x^2) : 2.$$

* А. С. Вольмир. Устойчивость и большие деформации цилиндрических оболочек. Труды ВВИА имени проф. Жуковского, 1950.

** Эта форма выпучивания была принята А. С. Вольмиром в указанной выше работе для цилиндрической панели. По нашему мнению, она более подходит к рассматриваемому нами случаю подкрепленной цилиндрической оболочки или значительной ее части.

Таким образом находим усилия:

$$\begin{aligned} \Phi_{xx} = & p_2 + \frac{\pi^2 E t n^2}{2b^2} \left\{ -\frac{f_1^2}{4} \cos 2m\alpha + f_2^2 \left[-\frac{\cos 2m\alpha}{4} - \frac{\delta^4 \cos 4m\alpha \cos 2n\beta}{(4\delta^2 + 1)^2} \right. \right. \\ & - \frac{\delta^4 \cos 2m\alpha \cos 4n\beta}{4(\delta^2 + 4)^2} + \frac{\cos 4m\alpha}{16} + \left. \left. \frac{\delta^4 \cos 2m\alpha \cos 2n\beta}{2(\delta^2 + 1)^2} \right] + f_1 f_2 \delta^4 \left[\frac{2 \sin m\alpha \sin n\beta}{(\delta^2 + 1)^2} \right. \right. \\ & - \frac{3 \sin m\alpha \sin 3n\beta}{(\delta^2 + 9)^2} - \left. \left. \frac{27 \sin 3m\alpha \sin n\beta}{(9\delta^2 + 1)^2} \right] + \frac{2\bar{k}}{n^2} \left[-\frac{f_1 \delta^4 \sin m\alpha \sin n\beta}{(\delta^2 + 1)^2} + \right. \right. \\ & \left. \left. + \frac{f_2}{4} \cos 2m\alpha - f_2 \delta^4 \frac{\cos 2m\alpha \cos 2n\beta}{4(\delta^2 + 1)^2} \right] \right\}, \\ \Phi_{yy} = & -p_1 + \frac{\pi^2 E t \delta^2 n^2}{2b^2} \left\{ -\frac{f_1^2 \cos 2n\beta}{4} - f_2^2 \left[\frac{\cos 2n\beta}{4} + \frac{\cos 4m\alpha \cos 2n\beta}{4(4\delta^2 + 1)^2} + \right. \right. \\ & \left. \left. + \frac{\cos 2m\alpha \cos 4n\beta}{(\delta^2 + 4)^2} - \frac{\cos 4n\beta}{16} - \frac{\cos 2m\alpha \cos 2n\beta}{2(\delta^2 + 1)^2} \right] + f_1 f_2 \left[\frac{2 \sin m\alpha \sin n\beta}{(\delta^2 + 1)^2} \right. \right. \\ & - \frac{27 \sin m\alpha \sin 3n\beta}{(\delta^2 + 9)^2} - \left. \left. \frac{3 \sin 3m\alpha \sin n\beta}{(9\delta^2 + 1)^2} \right] - \frac{2\bar{k}}{n^2} \left[\frac{f_1 \sin m\alpha \sin n\beta}{(\delta^2 + 1)^2} + \right. \right. \\ & \left. \left. + \frac{f_2 \cos 2m\alpha \cos 2n\beta}{4(\delta^2 + 1)^2} \right] \right\}, \\ \Phi_{xy} = & \frac{\pi^2 E t n^2 \delta^3}{4b^2} \left\{ f_2^2 \left[\frac{\sin 4m\alpha \sin 2n\beta}{(4\delta^2 + 1)^2} + \frac{\sin 2m\alpha \sin 4n\beta}{(\delta^2 + 4)^2} - \frac{\sin 2m\alpha \sin 2n\beta}{(\delta^2 + 1)^2} \right] + \right. \\ & \left. + f_1 f_2 \left[\frac{18 \cos m\alpha \cos 3n\beta}{(\delta^2 + 9)^2} + \frac{18 \cos 3m\alpha \cos n\beta}{(9\delta^2 + 1)^2} - \frac{4 \cos m\alpha \cos n\beta}{(\delta^2 + 1)^2} \right] + \right. \\ & \left. + \frac{\bar{k}}{n^2} \left[4f_1 \frac{\cos m\alpha \cos n\beta}{(\delta^2 + 1)^2} + f_2 \frac{\sin 2m\alpha \sin 2n\beta}{(\delta^2 + 1)^2} \right] \right\}. \end{aligned}$$

Для выполнения условия прикрепления обшивки к стрингерам в вершинах панелей необходимо, чтобы осевое сближение точек обшивки, лежащих до деформации на пересечении стрингера с двумя соседними шпангоутами, равнялось укорочению отрезка стрингера между этими шпангоутами, т. е. должно выполняться условие

$$\int_0^a \frac{\partial u}{\partial x} dx = \int_0^a \left[\left(\frac{\Phi_{yy} - \mu \Phi_{xx}}{Et} - \frac{1}{2} w_x^2 \right) dx \right] = a \varepsilon_{1c}^m \quad (2.2)$$

при $\beta = l\pi$ (l — целое число),

где ε_{1c}^m — среднее относительное удлинение стрингера между соседними шпангоутами. После несложных вычислений из этого условия находим

$$-\varepsilon_{1c}^m = \frac{p_1 + \mu p_2}{Et} + \frac{\pi^2 l}{8b^2} \left(f_1^2 + \frac{3}{4} f_2^2 \right) m^2. \quad (2.3)$$

Обшивка прикреплена также к шпангоутам. Следовательно, должно выполняться условие

$$\int_0^b \frac{\partial v}{\partial y} dy = \int_0^b \left(\frac{\Phi_{xx} - \mu \Phi_{yy}}{Et} + \frac{w}{R} - \frac{1}{2} w_y^2 \right) dy = b \varepsilon_{2m}^m,$$

где ε_{2m}^m — среднее относительное удлинение шпангоута.

Будем предполагать, что жесткость шпангоута на растяжение и сжатие велика так, что можно принять $\varepsilon_{2m}^m \approx 0$. Тогда из указанного условия следует, что

$$p_2 = \frac{\pi^2 n^2 E t}{8b^2} \left(f_1^2 + \frac{3}{4} f_2^2 - \frac{2\bar{k}}{n^2} f_2 \right) - p_1 \mu. \quad (2.4)$$

Следует заметить, что при рассматриваемой форме выпучивания сближение точек обшивки, лежащих на соседних шпангоутах на одной образующей, является функцией от β . Это объясняется тем, что данная деформация имеет период, равный удвоенной длине и удвоенной ширине панели (если не учитывать влияния жестких днщ). Ввиду этого мы должны выделить из оболочки часть длиной $2a$ и шириной $2b$. При этом относительное осевое перемещение края $x=2a$ по отношению к краю $x=0$ равно

$$\Delta_1 = 2a \varepsilon_{1c}^m.$$

Поэтому работа осевой нагрузки, приложенной к этим краям, равна

$$W_1 = \frac{b}{\pi} \int_0^{2\pi} \Phi_{yy} \Delta_1 d\beta = \frac{4ab}{Et} (p_1^2 + \mu p_1 p_2) + \frac{\pi^2 ab}{2b^2} p_1 \left(f_1^2 + \frac{3}{4} f_2^2 \right) n^2 \delta^2. \quad (2.5)$$

Энергия изгиба равна

$$\mathcal{E}_{изг} = \frac{D \pi^4 a b n^4}{2b^4} \{ f_1^2 (1 + \delta^2)^2 + f_2^2 (3\delta^4 + 2\delta^2 + 3) \}. \quad (2.6)$$

Энергия, соответствующая мембранным усилиям, определяется по формуле

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_{cp} = & \frac{1}{2Et} \int_{-a}^a \int_{-b}^b \{ (\Delta \Phi)^2 + 2(1 + \mu) (\Phi_{xy}^2 - \Phi_{xx} \Phi_{yy}) \} dx dy = \\ = & \frac{2ab}{Et} (p_2^2 + 2\mu p_1 p_2 + p_1^2) + \frac{\pi^4 a E t \delta^4 n^4}{64b^3} \left\{ \frac{1}{\delta^4} \left(f_1^2 + f_2^2 - \frac{2\bar{k}}{n^2} f_2 \right)^2 + \right. \\ & \left. + (f_1^2 + f_2^2)^2 + \frac{f_2^4}{16} \left[\frac{8}{(\delta^2 + 4)^2} + \frac{8}{(4\delta^2 + 1)^2} + 1 + \frac{1}{\delta^4} \right] + \right. \\ & \left. + \frac{2}{(\delta^2 + 1)^2} \left(f_2^2 - \frac{\bar{k}}{n^2} f_2 \right)^2 + \frac{32}{(\delta^2 + 1)^2} \left(f_1 f_2 - \frac{\bar{k}}{n^2} f_1 \right)^2 + \right. \\ & \left. + 72 f_1^2 f_2^2 \left[\frac{1}{(1 + 9\delta^2)^2} + \frac{1}{(\delta^2 + 9)^2} \right] \right\}. \quad (2.7) \end{aligned}$$

Полная энергия равна

$$\mathcal{E} = \mathcal{E}_{cp} + \mathcal{E}_{изг} - W_1.$$

Подставляя выражения (2.5) — (2.7) и вводя обозначения

$$\begin{aligned} p_1^* = \frac{p_1 b^2}{Et^3}, \quad k^* = \frac{b^2}{Rt}, \quad \lambda = \frac{k^*}{\pi^2 n^2}, \\ \frac{f_1}{t} = \xi_1 \lambda, \quad \frac{f_2}{t} = \xi_2 \lambda, \quad q_1^* = \frac{32 p_1^*}{k^* \lambda}, \quad (2.8) \end{aligned}$$

а также исключая p_2 с помощью формулы (2.4), находим

$$\begin{aligned} \bar{\mathcal{E}} = & \frac{32 \delta b^3}{a \pi^4 n^4 E t^3 \lambda^4} = \frac{\psi_1 \xi_1^4}{4} + \frac{\chi_1 \xi_2^4}{4} + \xi_2^2 \left[\chi_2 - \frac{3}{8} (\mu + \delta^2) q_1^* \right] + \\ & + \frac{\psi_2}{2} \xi_1^2 \xi_2^2 + \psi_3 \xi_1^2 \xi_2 + \chi_3 \xi_2^3 + \xi_1^2 \left[\psi_4 - \frac{q_1^*}{2} (\mu + \delta^2) \right] + \\ & + \mu q_1^* \xi_2 - \frac{64 p_1^* (1 - \mu^2) \delta^4}{\pi^4 n^4 E t^3 \lambda^4}, \quad (2.9) \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} \psi_1 = 6 + 2\delta^4, \quad \psi_2 = 6 - 32\delta^4 : (\delta^2 + 1)^2, \\ \psi_3 = 5 + \delta^4 \left[2 + \frac{32}{(\delta^2 + 1)^2} + \frac{72}{(9\delta^2 + 1)^2} + \frac{72}{(\delta^2 + 9)^2} \right], \\ \psi_4 = \psi_{4,0} + \frac{1}{\lambda^2} \psi_{4,1}; \quad \psi_{4,0} = \frac{16\delta^4}{(\delta^2 + 1)^2}; \quad \psi_{4,1} = \frac{4(\delta^2 + 1)^2}{3(1 - \mu^2)}. \end{aligned}$$

$$\gamma_1 = \frac{35}{8} + \frac{17}{8}\delta^4 + \frac{\delta^4}{(\delta^2+4)^2} + \frac{\delta^4}{(4\delta^2+1)^2} + \frac{4\delta^4}{(\delta^2+1)^2}; \quad \gamma_3 = -5 - \frac{2\delta^4}{(\delta^2+1)^2};$$

$$\gamma_2 = \gamma_{2,0} + \frac{1}{\lambda^2}\gamma_{2,1}; \quad \gamma_{2,0} = 6 + \frac{\delta^4}{(\delta^2+1)^2}; \quad \gamma_{2,1} = \frac{4(3\delta^4 + 2\delta^2 + 3)}{3(1-\mu^2)}. \quad (2.10)$$

Условие экстремальности полной энергии дает уравнения

$$\partial \bar{\mathcal{E}} / \partial \xi_1 = 0, \quad \partial \bar{\mathcal{E}} / \partial \xi_2 = 0,$$

или

$$\psi_1 \xi_1^2 + \psi_2 \xi_2^2 + 2\psi_3 \xi_2 + 2\psi_4 - q_1^* (\mu + \delta^2) = 0, \quad (2.11)$$

$$\gamma_1 \xi_2^3 + \left[2\gamma_2 - \frac{3}{4}(\mu + \delta^2) q_1^* \right] \xi_2 + \psi_2 \xi_1^2 \xi_2 + \psi_3 \xi_1^2 + 3\gamma_3 \xi_2^2 + \mu q_1^* = 0. \quad (2.12)$$

Кроме того, на границе устойчивости должно удовлетворяться уравнение

$$\frac{\partial^2 \bar{\mathcal{E}}}{\partial \xi_1^2} \frac{\partial^2 \bar{\mathcal{E}}}{\partial \xi_2^2} - \left(\frac{\partial^2 \bar{\mathcal{E}}}{\partial \xi_1 \partial \xi_2} \right)^2 = 0,$$

которое с учетом (2.11) может быть записано в виде

$$3(\gamma_1 \psi_1 - \psi_2^2) \xi_2^2 + 6(\gamma_3 \psi_1 - \psi_2 \psi_3) \xi_2 + 2(\gamma_{2,0} \psi_1 - \psi_2 \psi_{4,0} - \psi_3^2) + 2(\gamma_{2,1} \psi_1 - \psi_2 \psi_{4,1}) \frac{1}{\lambda^2} - q_1^* \left[\frac{3}{4} \psi_1 (\mu + \delta^2) - \psi_2 (\mu + \delta^2) \right] = 0. \quad (2.13)$$

При составлении этих уравнений приходится определять по формулам (2.10) величины $\psi_1, \dots, \gamma_1, \dots$. Некоторые значения их даны в таблице 2.

Таблица 2

δ	ψ_1	ψ_2	ψ_3	$\psi_{4,0}$	$\psi_{4,1}$	γ_1	$\gamma_{2,0}$	$\gamma_{2,1}$	γ_3
0,25	6,008	5,237	-6,110	0,0554	1,654	4,40	6,003	4,596	-5,007
0,5	6,125	6,884	-7,28	0,64	2,29	4,687	6,04	5,403	-5,08
0,75	6,633	10,65	-10,15	2,074	3,577	5,61	6,13	7,435	-5,26
1	8	16,44	-14	4	5,86	7,58	6,25	11,72	-5,5
1,2	10,14	22,41	-17,14	5,57	8,71	10,28	6,35	17,66	-5,70
1,25	10,9	24,10	-17,9	5,95	9,62	11,2	6,37	19,68	-5,73
1,5	16,12	34,1	-21,34	7,67	15,48	17,22	6,48	33,2	-5,96
2	38	65,12	-26,46	10,24	36,65	41,55	6,64	86,4	-6,28

Исключая из (2.11), (2.12) и (2.13) величины ξ_1 и q_1^* , приходим к кубическому уравнению относительно ξ_2 , которое может иметь один или три действительных корня. Из них следует выбрать тот корень, для которого значение q_1^* минимально и ξ_1^2 , определяемое по формуле (2.11), удовлетворяет условию

$$\xi_1^2 \geq 0. \quad (2.14)$$

При этом приходится повторять счет, варьируя целые числа m и n , и искать ту форму выпучивания, при которой p_1^* имеет наименьшее значение. Благодаря этому, необходимые вычисления становятся весьма громоздкими. Поэтому проведем их для частного случая, когда

$$a = 2b. \quad (2.15)$$

Обычно употребляются продолговатые панели, для которых

$$1,5b < a < 3b. \quad (2.16)$$

Мы полагаем, что выводы, полученные для среднего случая (2.15), будут применимы и во всем интервале (2.16). Для упрощения вычис-

лений вместо совместного решения уравнений (2.12) и (2.13) относительно ξ_2 и q_1^* мы предлагаем задаваться различными положительными значениями ξ_2 и определять соответствующие им значения q_1^* и $1/\lambda^2$ из указанных уравнений, линейных относительно этих величин. Повторяя вычисления при различных m и n , находим наименьшее из величин p_1^*/k_1^* . Результаты этих простых, но довольно громоздких вычислений даны в таблице 3.

Таблица 3

k^*	19,4	27,3	41,2	49	65,7	87	109	165	196	262
$\frac{p_{1n}^*}{k^*}$	0,36	0,32	0,31	0,28	0,24	0,25	0,32	0,31	0,28	0,24
m	2	2	2	1	1	1	4	4	2	2
n	1	1	1	1	1	1	2	2	2	2
ξ_2	0,4	0,45	0,48	0,41	0,43	0,44	0,45	0,48	0,41	0,43
ξ_1^2	0,62	0,57	0,50	0,70	0,75	0,82	0,57	0,50	0,70	0,75

Из таблицы мы видим, что при $k^* < 49$ нижнему критическому усилию соответствует выпучивание с образованием квадратных волн; причем по ширине панели появляется одна полуволна. Далее, при $49 < k^* < 87$ при нижнем критическом усилии каждая полуволна занимает всю ширину и всю длину панели. При $k^* \geq 109$ ширина панели начинает делиться на две полуволны, причем до $k^* \leq 196$ образуются квадратные волны, а затем появляются продолговатые ямки, выпучины и т. д. Величина нижнего критического усилия также повторяется при увеличении k^* в 4 раза.

Среднее осевое удлинение обшивки равно среднему удлинению стрингера ε_{1c}^m , определяемому по формуле (2.3). В нашем случае среднее удлинение шпангоута равно нулю так же, как и среднее удлинение обшивки у шпангоута, поэтому имеет место формула (2.4). Для того, чтобы обшивка получила эти удлинения без выпучивания, необходимо осевое усилие

$$T_1 = Et \varepsilon_{1c}^m / (1 - \mu^2),$$

которое с учетом формул (2.3) и (2.4) равно

$$T_1 = -p_1 + \frac{\mu Et f_2}{4R(1-\mu^2)} - \frac{Et \pi^2 n^2}{8b^2(1-\mu^2)} \left(f_1^2 + \frac{3}{4} f_2^2 \right) (\mu + \delta^2).$$

Между тем, среднее усилие в обшивке при ее выпучивании равно p_1 . Поэтому редуцированный коэффициент обшивки при осевом сжатии равен

$$\eta = \frac{p^*}{k^*} \left\{ \frac{p_1^*}{k^*} + \frac{\lambda(\mu + \delta^2)}{8(1-\mu^2)} \left(\xi_1^2 + \frac{3}{4} \xi_2^2 - 2\mu \xi_2 \right) \right\}. \quad (2.17)$$

Нашей задачей является определение наименьшего значения этой величины при данном значении параметра кривизны и параметра нагрузки. Как известно, при верхнем критическом усилии $p_1^*/k^* = 0,6$. При нижнем критическом усилии, как было найдено выше, $p_1^*/k^* \geq 0,24$. Поэтому мы будем определять η при различных нагрузках, начиная с таких, для которых $p_1^*/k^* \geq 0,24$. Соответствующие значения ξ_1 и ξ_2 мы должны определять по формулам (2.11) и (2.12). Но последнее из этих уравнений кубическое относительно ξ_2 . Поэтому будем искать решение задачи, задавая λ и ξ_2 и определяя соответствующее q_1^* , а значит и p_1^*/k^* по формуле (2.12).

Таким путем нами составлена следующая таблица значений η при

$$k^* = 61,6; \quad a = 2b, \quad (2.18)$$

причем, как оказалось, наименьшие значения η получаются при $n = 1$.

Таблица 4

m	δ	p_1^*/k^*	η	m	δ	p_1^*/k^*	η
1	$1/2$	0,247	0,586	3	$3/2$	1,085	0,452
		0,373	0,577			1,420	0,407
		0,568	0,616			2,092	0,383
2	1	0,38	0,43	4	2	0,952	0,51
		0,45	0,37			1,22	0,42
		0,66	0,37			1,69	0,38
		1,02	0,40			2,40	0,36
		1,88	0,44				

Однако для практического применения более удобным является выражение η в функции от среднего удлинения стрингера. Поэтому данные таблицы представлены в виде графика, на котором за абсциссы приняты величины $\varepsilon_{1c}^m R/l$. Необходимый для этого пересчет сделан, учитывая зависимость

$$\varepsilon_{1c}^m R/l = (1 - \mu^2) p_1^*/k^* \eta.$$

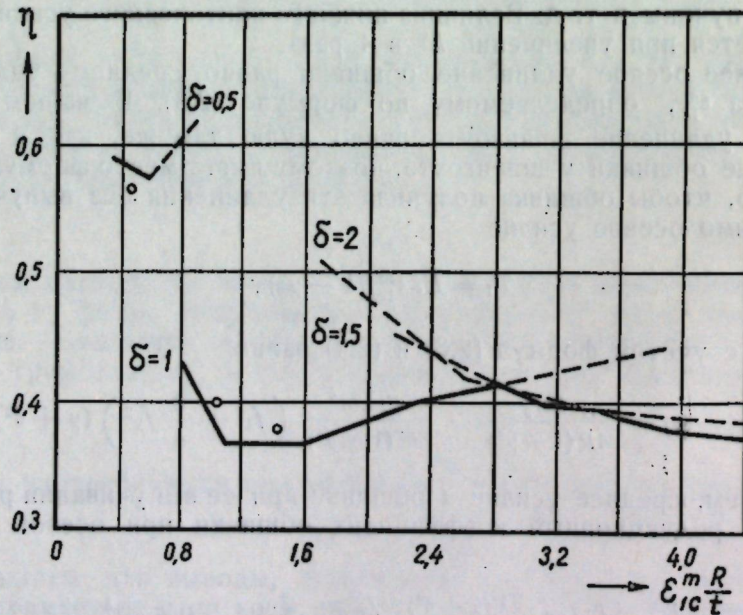


Рис. 1.

Как видно из таблицы 4 и соответствующего графика, при возрастании параметра осевого усилия, начиная с его нижней границы, сначала минимум редуцированного коэффициента имеет место при $\delta = 1/2$, т. е. при форме выпучивания с образованием квадратных ямок. Затем при $p_1^*/k^* = 0,38$ происходит скачкообразный переход к форме, для которой $\delta = 1$, причем редуцированный коэффициент скачкообразно падает от 0,57 до значения 0,43, а затем до 0,37. Далее при возрастании нагрузки он медленно возрастает до 0,41. При $p_1^*/k^* = 1,32$ меньшему значению η начинает соответствовать форма выпучивания при $\delta = 3/2$, а затем при $\delta = 2$. Отсюда мы видим, что после хлопка несущая способность обшивки медленно повышается при быстром увеличении нагрузки стрингеров, редуцированный коэффициент падает сначала быстро, а затем медленнее.

Соответствующие экспериментальные точки А. С. Вольмира отмечены на графике рис. 1. Они близки к точкам, найденным путем вычисления.

В заключение отметим, что первоначально нами была рассмотрена более общая форма выпучивания, чем (2.1), а именно, мы полагали

$$w = f_1 \sin m_1 \alpha \sin n \beta + f_2 \sin^2 m_2 \alpha \sin^2 n \beta.$$

Результатов этих вычислений мы здесь не приводим, так как оказалось, что как минимуму нижней границы нагрузки, так и минимуму η соответствует случай $m_1 = m_2$.

Поступила в редакцию
20/XII-1954 г.

Физико-технический ин-т
Казанского филиала АН СССР

**УСТОЙЧИВОСТЬ БЕСКОНЕЧНО ДЛИННОЙ ПОЛОГОЙ
ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ПАНЕЛИ ПОД ДЕЙСТВИЕМ НОРМАЛЬНОГО
РАВНОМЕРНОГО ДАВЛЕНИЯ**

М. С. КОРНИШИН, Х. М. МУШТАРИ

В пределах допущений теории пологих оболочек в работе дается точное решение задачи об устойчивости и больших прогибах бесконечно длинной цилиндрической панели кругового сечения под действием равномерного нормального давления. Задача решается для случаев шарнирной и жесткой заделки кромок. Кроме того, в работе рассматривается влияние на несущую способность панели различных отклонений от указанных выше граничных условий, а также влияние начальных неправильностей в форме срединной поверхности.

Полученные результаты при замене выражений для жесткостей полностью применимы к пологим аркам.

1. Основные уравнения

Решение задачи о больших прогибах такой панели под действием нормального давления p и при отсутствии массовых сил приводится к интегрированию системы уравнений:

$$\dot{T} - \rho N = 0 \quad \dot{N} + \rho T + b p = 0 \quad \dot{G} - b N = 0. \quad (1.1)$$

Здесь точкой обозначена производная по безразмерной координате $\xi = \frac{s}{b}$, где $2b$ — ширина панели; T — мембранное усилие на дуге;

N — перерезывающее усилие; G — изгибающий момент; $\rho = \frac{b}{R}$ — безразмерная кривизна деформированной панели;

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{R_0} + \alpha, \quad \text{где } R_0 \text{ — начальный радиус кривизны;}$$

$$\alpha = \frac{1}{b^2} \dot{W} + \frac{k_0}{b} \dot{V} \text{ — изменение кривизны, где } k_0 = \frac{1}{R_0}; \quad (1.2)$$

W и V — проекции перемещения точки срединной поверхности соответственно на нормаль и касательную к дуге.

Учитывая, что $G = -D\alpha$, где $D = \frac{Et^3}{12(1-\nu^2)}$, t — толщина оболочки, из третьего уравнения системы (1.1) получаем:

$$bN = \dot{G} = -D\dot{\alpha}. \quad (1.3)$$

Подставляя (1.3) в первые два уравнения системы (1.1), получим:

$$\dot{T} + D(k_0 + \alpha)\dot{\alpha} = 0 \quad -D\dot{\alpha} + b^2 T(k_0 + \alpha) + b^2 p = 0. \quad (1.4)$$

Первое уравнение системы (1.4) дает интеграл

$$T = -Dk_0\alpha - \frac{1}{2} D\alpha^2 - c_1. \quad (1.5)$$

Из (1.5) видно, что усилие T состоит из постоянной части $-c_1$ и переменной части, представленной членами, содержащими α .

Подставляя (1.5) во второе уравнение системы (1.4), получим:

$$\ddot{\alpha} + b^2 \left(k_0^2 \alpha + \frac{3}{2} k_0 \alpha^2 + \frac{1}{3} \alpha^3 \right) + \mu^2 (k_0 + \alpha) - \frac{pb^2}{D} = 0, \quad (1.6)$$

где $\mu^2 = \frac{c_1}{D} b^2$ — безразмерный параметр постоянной части усилия T .

Постоянная интегрирования c_1 , входящая в (1.5) и в μ^2 , подлежит определению из граничного условия на краю панели для перемещения V .

Используя соотношение

$$\varepsilon = \frac{T}{K} = \frac{1}{b} \dot{V} - k_0 W + \frac{1}{2b^2} \dot{W}^2, \quad (1.7)$$

где ε — деформация по дуге, $K = Et : (1 - \nu^2)$ — жесткость на сжатие, на основании (1.5) получим

$$-\frac{t^2}{12} \left(k_0^2 \alpha + \frac{1}{2} \alpha^2 \right) - \frac{c_1}{K} = \frac{1}{b} \dot{V} - k_0 W + \frac{1}{2b^2} \dot{W}^2. \quad (1.8)$$

Таким образом, решение задачи приводится к интегрированию системы нелинейных дифференциальных уравнений (1.6), (1.8) при соответствующих граничных условиях для перемещений W и V . Точное решение этой системы не представляется возможным.

Однако, как уже было показано рядом авторов, в случае пологих оболочек в первых двух уравнениях равновесия с большой точностью можно пренебречь членами, содержащими перерезывающие силы. При рассмотрении пологой бесконечно длинной панели оценка указанного пренебрежения для критических состояний получается особенно наглядной.

В самом деле, как известно, линейная теория в этом случае дает критическое сжимающее усилие $T_k = 4\pi^2 D : (2b)^2$ при потере устойчивости по двум полуволнам. Законно предположить, что поправка, даваемая нелинейной теорией, не изменяет порядка этой величины. Пусть $T_k \sim \pi^2 D : (2b)^2$. С другой стороны, для пологой панели $\alpha_k \sim k_0$, следовательно, в выражении (1.5)

$$-Dk_0^2 \alpha - \frac{1}{2} D\alpha^2 \sim -\frac{3}{2} Dk_0^2,$$

$$\text{и } \frac{-Dk_0^2 \alpha - \frac{1}{2} D\alpha^2}{T_k} \sim -\frac{3}{2} k_0^2 \frac{4b^2}{\pi^2} \approx \frac{3}{5} \left(\frac{b}{R_0} \right)^2.$$

Таким образом, для панелей с отношением $\frac{b}{R_0} \leq \frac{1}{6}$ погрешность пренебрежения переменной частью T составит менее 20% и с указанной точностью мы можем положить $T = c_1$. Кроме того, с той же

погрешностью в уравнении (1.6) можно пренебречь подчеркнутыми членами по сравнению с \ddot{w} , а вместо (1.2) принять

$$x = \frac{1}{b^2} \ddot{W}. \quad (1.9)$$

Делая указанные упрощения и переходя к безразмерным величинам, вместо уравнений (1.6), (1.8) получим уравнения:

$$\ddot{\ddot{w}} + \mu^2 (1 + \ddot{w}) - q = 0, \quad (1.10)$$

$$-\frac{4}{3} \left(\frac{1}{k}\right)^2 \mu^2 = \dot{v} - w + \frac{1}{2} \dot{w}^2, \quad (1.11)$$

где введены обозначения

$$q = \frac{pR_0 b^2}{D}, \quad \mu = b \sqrt{\frac{c_1}{D}}, \quad w = \frac{WR_0}{b^2}, \quad v = \frac{R_0^2}{b^3} V, \quad k = \frac{4b^2}{Rl}.$$

Сохранение квадратичного члена \dot{w}^2 в выражении (1.11) позволит нам в дальнейшем рассматривать и немалые перемещения.

2. Случай шарнирного закрепления кромок

В этом случае должны выполняться условия:

$$w = 0, \quad \ddot{w} = 0, \quad v = 0 \text{ при } \xi = \pm 1. \quad (2.1)$$

Общее решение уравнения (1.10) имеет вид:

$$w = -\frac{c_2}{\mu^2} \cos \mu \xi - \frac{c_3}{\mu^2} \sin \mu \xi + c_4 \xi + c_5 + \left(\frac{q}{\mu^2} - 1\right) \frac{\xi^2}{2}. \quad (2.2)$$

Определяя c_2, c_3, c_4, c_5 из граничных условий (2.1), получим:

$$w = Q \left(\frac{\cos \mu \xi}{\mu^2 \cos \mu} + \frac{\xi^2}{2} - \frac{1}{\mu^2} - \frac{1}{2} \right), \quad Q = \frac{q}{\mu^2} - 1. \quad (2.3)$$

Из (1.11) находим

$$\dot{v} = -\frac{1}{2} \dot{w}^2 + w - \frac{4}{3} \left(\frac{1}{k}\right)^2 \mu^2. \quad (2.4)$$

Подставляя в (2.4) w и \dot{w} согласно (2.3), интегрируя и используя граничные условия для v , получим зависимость между безразмерным параметром внешней нагрузки q и безразмерным параметром сжимающего усилия μ в виде:

$$\frac{1}{2} A_1 Q^2 - B_1 Q + \frac{4}{3} \left(\frac{1}{k}\right)^2 \mu^2 = 0. \quad (2.5)$$

Здесь

$$A_1 = \frac{1}{3} - \frac{2,5}{\mu^2} \operatorname{tg} \mu + 0,5 \frac{\operatorname{tg}^2 \mu}{\mu^2} + 2,5 \frac{1}{\mu^2}, \quad (2.6)$$

$$B_1 = \frac{1}{\mu^3} \operatorname{tg} \mu - \frac{1}{\mu^2} - \frac{1}{3}. \quad (2.7)$$

Параметр прогиба в вершине панели получим, положив в правой части (2.3) $\xi = 0$:

$$w = Q \left(\frac{1 - \cos \mu}{\mu^2 \cos \mu} - \frac{1}{2} \right). \quad (2.8)$$

Зависимости (2.5), (2.8) позволяют исследовать поведение пологой бесконечно длинной панели при условии шарнирного закрепления прямолинейных кромок. Для любого заданного значения параметра кривизны k из (2.5) найдем критические значения параметра внешней нагрузки q_1 и q_2 (давлений хлопка и выхлопа), а затем из (2.8) найдем соответствующие им значения параметра прогиба w_1, w_2 в вершине панели. В случае, когда параметр кривизны k достаточно велик, пренебрегая в уравнении (2.5) членом $\frac{4}{3} \left(\frac{1}{k}\right)^2 \mu^2$, получим

$$\frac{1}{2} A_1 Q^2 - B_1 Q = 0. \quad (2.9)$$

Следовательно, зависимость между q и μ в этом случае распадается на две, а именно:

$$Q = 0 \text{ или } q = \mu^2, \quad (2.10)$$

$$\frac{1}{2} A_1 Q - B_1 = 0. \quad (2.11)$$

Зависимость (2.10) соответствует безмоментному состоянию панели до хлопка. В самом деле, согласно (2.10), на основании (1.12) имеем

$$\frac{pR_0 b^2}{D} = b^2 \frac{c_1}{D}. \quad (2.12)$$

Следовательно, $c_1 = pR_0$, с другой стороны, согласно (2.3) $w = 0$.

Зависимость (2.11) описывает поведение панели после хлопка. Как показывают вычисления, уже при $k > 70$ вместо (2.5) можно пользоваться равенствами (2.10) и (2.11), не зависящими от k .

Для дальнейшего исследования уравнение (2.5) представим в виде

$$Q_{1,2} = \left[B_1 \pm \sqrt{B_1^2 - \frac{8}{3} A_1 \left(\frac{1}{k}\right)^2 \mu^2} \right] : A_1. \quad (2.13)$$

Из (2.13), (2.6), (2.7) видно, что при $\mu = \frac{\pi}{2}, \frac{3}{2}\pi, \frac{5}{2}\pi \dots$ для величины Q получаем кратные корни, равные нулю, так как при этом правая часть (2.13) обращается в нуль. Соответствующие значения параметра давления будут:

$$q = \frac{\pi^2}{4}, \frac{9}{4} \pi^2, \frac{25}{4} \pi^2 \dots$$

Однако для данного k реальный смысл имеют лишь те значения параметра μ , при которых выражение под корнем не становится < 0 .

Согласно (2.13), каждому данному μ соответствуют два значения Q , а следовательно, два значения q . Одно из этих значений q соответствует состоянию до выпучивания, второе — состоянию после выпучивания. В зависимости от величины параметра кривизны k могут представиться два случая:

1. Подкоренное выражение обращается в нуль при $\mu < \frac{\pi}{2}$. Тогда

имеется лишь один кратный корень, соответствующий значению μ , найденному из условия $B_1^2 - \frac{8}{3} A_1 \left(\frac{1}{k}\right)^2 \mu^2 = 0$. В этом случае явление хлопка отсутствует, и кривые зависимостей (2.5), (2.8), которые для краткости обозначим через $F(q, \mu) = 0, \Phi(q, w) = 0$, будут иметь вид, изображенный на рис. 1, 2.

2. $B_1^2 - \frac{8}{3} A_1 \left(\frac{1}{k}\right)^2 \mu^2 = 0$ при $\mu > \frac{\pi}{2}$. В этом случае имеется два

кратных корней, один из которых соответствует значению $\mu = \frac{\pi}{2}$, а второй — значению, найденному из условия $B_1^2 - \frac{8}{3} A_1 \left(\frac{1}{k}\right)^2 \mu^2 = 0$.

Кривые зависимостей $F(q, \mu) = 0$, $\Phi(q, w) = 0$ имеют вид, изображенный на рис. 3, 4, 5, 6. В этом случае панель теряет устойчивость хлопком.

Наибольшее значение параметра сжимающего усилия μ , которое возможно в панелях с шарнирно закрепленными краями, будет то, при котором

$$B_1^2 - \frac{8}{3} \left(\frac{1}{k}\right)^2 A_1 \mu^2 \geq 0, \quad (2.14)$$

когда $k \rightarrow \infty$. Так как всегда $A > 0$, то значение μ , найденное из уравнения

$$B_1 = \frac{1}{\mu^3} \left[g \mu - \frac{1}{\mu^2} - \frac{1}{3} \right] = 0, \quad (2.15)$$

и будет наибольшим. Оно равно $\mu \approx 4,685$.

Наименьшее значение k , при котором появляется хлопок, определяется условием

$$B_1^2 - \frac{8}{3} \left(\frac{1}{k}\right)^2 A_1 \mu^2 > 0 \text{ при } \mu \rightarrow \frac{\pi}{2}. \quad (2.16)$$

Откуда $k > 4,45$. Можно показать далее, что давление выхлопа $p_2 > 0$, если $4,45 < k < 9,05$.

Из рассмотрения рис. 1—6 видно, что хлопок возможен только тогда, когда параметр сжатия μ становится больше, чем $\frac{\pi}{2}$. Значение $\mu = \frac{\pi}{2}$ соответствует эйлеровой сжимающей силе для полоски длиной $2b$ с шарнирно закрепленными концами. В самом деле, согласно (1.12)

$$\mu^2 = b^2 \frac{c_1}{D} = \frac{\pi^2}{4},$$

отсюда

$$c_1 = \frac{\pi^2 D}{(2b)^2} = T_2.$$

Отыскание критических значений величин q_1, q_2 из (2.13) равносильно отысканию точек максимума и минимума кривой $F(q, \mu) = 0$. Ввиду громоздкости выражения q через μ , величины q_1 и q_2 для различных значений k мы находим, строя кривые $F(q, \mu) = 0$ по точкам. Найденные таким образом величины давления хлопка p_1 и выхлопа p_2 можно представить в виде

$$p_1 = \alpha_1(k) \frac{D}{R_0 b^1}, \quad p_2 = \alpha_2(k) \frac{D}{R_0 b^2}. \quad (2.17)$$

Значения коэффициентов α_1, α_2 для некоторых значений k даны в таблице 1.

Таблица 1

k	4,45	10	20	30	50	70	100	∞
α_1	2,47	5,81	14,82	18,13	20,17	20,70	20,92	21,94
α_2	2,47	-0,75	-6,49	-7,81	-8,49	-8,67	-8,77	-8,85

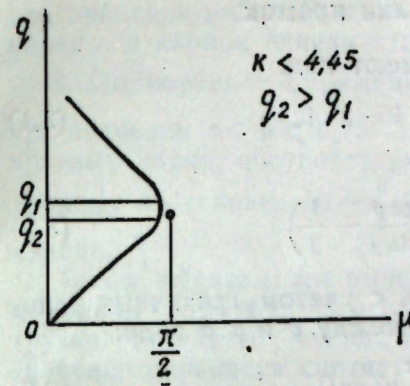


Рис. 1.

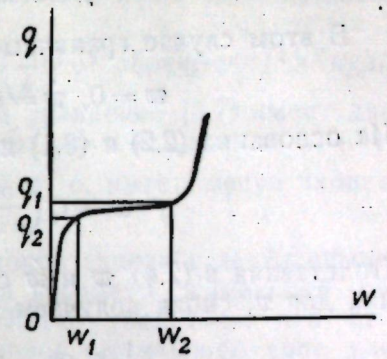


Рис. 2.

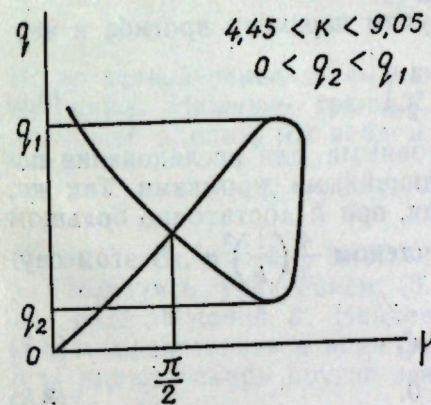


Рис. 3.

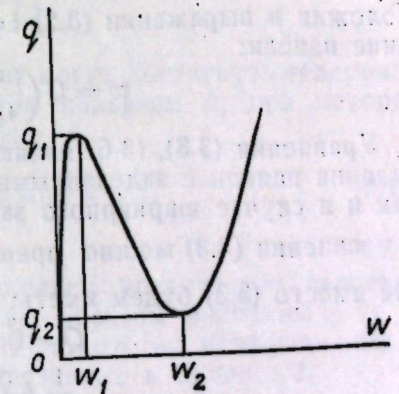


Рис. 4.

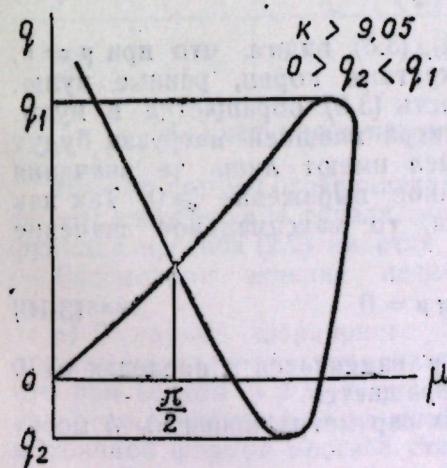


Рис. 5.

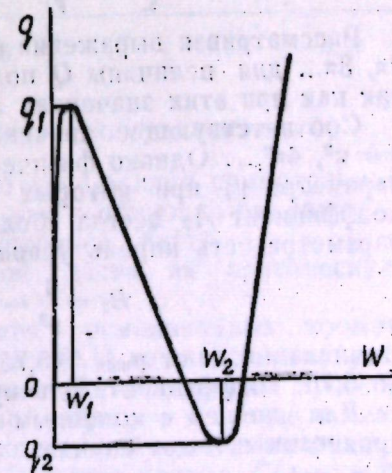


Рис. 6.

3. Случай жесткой заделки кромок

В этом случае граничные условия имеют вид:

$$w = 0, \dot{w} = 0, v = 0 \text{ при } \xi = \pm 1. \quad (3.1)$$

На основании (2.2) и (3.1) получим:

$$w = Q \left(\frac{\cos \mu \xi}{\mu \sin \mu} + \frac{\xi^2}{2} - \frac{\cos \mu}{\mu \sin \mu} - \frac{1}{2} \right) \quad (3.2)$$

Подставляя в (2.4) w и \dot{w} согласно (3.2), с учетом граничных условий для v , снова получаем зависимость между q и μ в виде:

$$\frac{1}{2} A_2 Q^2 - B_2 Q + \frac{4}{3} \left(\frac{1}{k} \right)^2 \mu^3 = 0. \quad (3.3)$$

Здесь

$$A_2 = \frac{1}{2 \sin^2 \mu} + \frac{3}{2} \frac{\operatorname{ctg} \mu}{\mu} - \frac{2}{\mu^2} + \frac{1}{3}, \quad (3.4)$$

$$B_2 = \frac{1}{\mu^2} - \frac{1}{3} - \frac{1}{\mu} \operatorname{ctg} \mu. \quad (3.5)$$

Положив в выражении (3.2) $\xi = 0$, получим параметр прогиба в вершине панели:

$$w = Q \left(\frac{1 - \cos \mu}{\mu \sin \mu} - \frac{1}{2} \right). \quad (3.6)$$

Уравнения (3.3), (3.6) являются основными для исследования поведения панели с заделанными прямолинейными кромками. Так же, как и в случае шарнирного закрепления, при k достаточно большом в уравнении (3.3) можно пренебречь членом $\frac{4}{3} \left(\frac{1}{k} \right)^2 \mu^3$. В этом случае вместо (3.3) будем иметь:

$$Q = 0 \text{ или } q = \mu^2, \quad (3.7)$$

$$\frac{1}{2} A_2 Q - B_2 = 0. \quad (3.8)$$

Все сказанное относительно уравнений (2.10) и (2.11) в предыдущем параграфе справедливо и в отношении уравнений (3.7) и (3.8).

Из (3.3) имеем

$$Q_{1,2} = \left[B_2 \pm \sqrt{B_2^2 - \frac{8}{3} A_2 \left(\frac{1}{k} \right)^2 \mu^2} \right] : A_2. \quad (3.9)$$

Рассматривая выражения (3.9), (3.4), (3.5), видим, что при $\mu = \pi, 2\pi, 3\pi, \dots$ для величины Q получаем кратные корни, равные нулю, так как при этих значениях правая часть (3.9) обращается в нуль.

Соответствующие значения параметра внешней нагрузки будут $q = \pi^2, 4\pi^2, \dots$. Однако физический смысл имеют лишь те значения параметра μ , при которых подкоренное выражение ≥ 0 . Так как коэффициент A_2 всегда больше нуля, то максимальное значение параметра есть корень уравнения

$$B_2 = \frac{1}{\mu^2} - \frac{1}{3} - \frac{1}{\mu} \operatorname{ctg} \mu = 0. \quad (3.10)$$

Вычисления дают $\mu_{\max} \approx 5,75$. Когда μ изменяется в пределах от 0 до 5,75, коэффициент B_2 в нуль не обращается.

Для панелей с конечным значением параметра кривизны k могут представиться два случая:

1. Подкоренное выражение $B_2 - \frac{8}{3} A_2 \left(\frac{1}{k} \right)^2 \mu^2$ обращается в нуль

при значении $\mu < \pi$. В этом случае будем иметь лишь один кратный корень, и хлопок панели отсутствует.

2. Подкоренное выражение $B_2 - \frac{8}{3} A_2 \left(\frac{1}{k} \right)^2 \mu^2$ обращается в нуль при значении $\pi < \mu < 5,75$. В этом случае уравнение (3.7) имеет два кратных корня, соответствующих значению $\mu = \pi$ и значению μ , найденному из условия $B_2 - \frac{8}{3} A_2 \left(\frac{1}{k} \right)^2 \mu^2 = 0$, т. е. имеет место хлопок панели.

Таким образом, мы выяснили, что хлопок панели с заделанными кромками возможен только тогда, когда параметр сжимающей нагрузки становится больше величины π . Легко убедиться, что это значение параметра соответствует эйлеровой сжимающей силе для полосы длиной $2b$ с заделанными концами.

В самом деле

$$\mu^2 = b^2 \frac{c_1}{D} = \pi^2,$$

отсюда

$$c_1 = \frac{4\pi^2 D}{(2b)^2} = T_2.$$

Не во всякой панели сжимающие усилия могут достигнуть эйлеровой величины. Нижнюю границу параметра кривизны k , при которой возможен хлопок, мы найдем из условия

$$B_2 - \frac{8}{3} A_2 \left(\frac{1}{k} \right)^2 \mu^2 > 0 \text{ при } \mu \rightarrow \pi. \quad (3.11)$$

Оказывается, что $k > 10,27$.

Пользуясь уравнением (3.3), определяем критические давления для ряда значений k . Найденные таким образом величины p_1 и p_2 можно представить в виде формул (2.17), в которых коэффициенты α_1 и α_2 имеют теперь другие значения, указанные в таблице 2.

Таблица 2

k	10,27	20	40	60	80	100	∞
α_1	9,86	14,26	22,66	26	27,76	28,99	33,1
α_2	9,86	7,1	4,88	4,35	4,17	4,13	3,95

4. Учет несимметричной формы выпучивания

До сих пор мы ограничивались рассмотрением лишь симметричной формы выпучивания панели, между тем как в общем выражении для функции прогиба (2.2) имеется и несимметричная часть.

Рассмотрим влияние несимметричной части на критическую нагрузку.

а) В случае шарнирного закрепления прямолинейных кромок должны удовлетворяться граничные условия (2.1), из которых следует, что при всяком $\mu \neq \pi, c_2 = c_4 = 0$, и симметричная форма прогиба является единственной возможной формой. При $\mu = \pi$ наряду с симметричной формой прогиба становится возможной и несимметричная форма. Это свидетельствует о том, что участки кривых $F(q, \mu) = 0, \Phi(q, w) = 0$ при значениях $\mu > \pi$ соответствуют неустойчивым состоя-

ниям равновесия и при определении несущей способности панелей должны быть отброшены.

Несимметричное выпучивание появляется лишь в панелях, параметр кривизны которых удовлетворяет условию

$$B_1^2 - \frac{8}{3} A_1 \left(\frac{1}{k}\right)^2 \mu^2 > 0$$

при $\mu = \pi$. Вычисления дают значение $k > 9,04$.

Таким образом, процесс выпучивания панели с немалым параметром кривизны описывается полученным решением следующим образом. Вначале, с ростом нагрузки, прогибы панели симметричны, затем, когда параметр сжимающего усилия μ достигает значения π , происходит несимметричное выпучивание (скачком) в равновесное состояние при больших прогибах, которое снова будет симметричным.

Учитывая несимметричную форму выпучивания, вместо таблицы 1 будем иметь таблицу 3.

Таблица 3

k	4,45	10	20	30	50	70	∞
α_1	2,41	5,81	9,08	9,55	9,74	9,80	9,87
α_2	2,47	-0,75	-3,97	-4,45	-4,62	-4,69	-4,75

Сравнивая между собой значения α_1 , α_2 , приведенные в таблицах 1, 3, видим, что учет несимметричной формы выпучивания снижает критическую нагрузку хлопка более, чем в два раза, и уменьшает по модулю нагрузку выхлопа.

б) В случае жесткой заделки кромок из решения (2.2) и граничных условий (3.1) получаем четыре уравнения для определения c_2 , c_3 , c_4 и c_5 , из которых следует, что при всяком μ , не являющемся корнем уравнения $\operatorname{tg} \mu = \mu$, прогиб является симметричным. Это последнее уравнение удовлетворяется при $\mu \approx 4,5$. Следовательно, несимметричное выпучивание панели возникает, когда параметр сжимающего усилия достигает значения $\mu \approx 4,5$.

Аналогично предыдущему, параметр кривизны панели, при котором появляется несимметричное выпучивание, найдем из неравенства

$$B_2^2 - \frac{8}{3} A_2 \left(\frac{1}{k}\right)^2 \mu^2 > 0$$

при $\mu = 4,5$. Вычисления дают значение $k > 20,17$.

Для панелей с параметром $k > 20,17$ участки кривых $F(q, \mu) = 0$, $\Phi(q, w) = 0$, соответствующие значениям $\mu > 4,5$, относятся к неустойчивым состояниям.

Учитывая несимметричную форму выпучивания, вместо таблицы 2 будем иметь таблицу 4.

Таблица 4

k	10,27	20	40	60	80	100	∞
α_1	9,87	14,26	19,16	19,79	19,98	20,08	20,25
α_2	9,87	7,1	4,88	4,35	4,17	4,13	3,95

Значения α_1 таблицы 4 для $k \geq 60$ намного меньше соответствующих значений α_1 таблицы 2. Что касается значений α_2 , то они остались без изменения, так как им соответствуют значения $\mu < 4,5$.

5. Несущая способность панели при других граничных условиях

Рассмотрим далее влияние на несущую способность панели различных отклонений от граничных условий шарнирной и жесткой заделки.

а) Пусть граничные условия задачи имеют вид:

$$w_{(s=\pm 1)} = \frac{\delta}{2} Q, \quad \dot{w}_{(s=\pm 1)} = \pm \gamma Q, \quad v_{(s=\pm 1)} = \pm \beta \frac{4}{3} \left(\frac{1}{k}\right)^2 \mu^2. \quad (5.1)$$

Коэффициенты δ , γ и β характеризуют податливость опор, а именно: коэффициент δ характеризует податливость опор по нормали; коэффициент γ характеризует податливость опор в отношении поворота; коэффициент β характеризует податливость опор в касательной плоскости.

Пользуясь граничными условиями (5.1) из (2.2) и (2.4), находим:

$$\dot{w} = Q \left[\frac{(1+\gamma) \cos \mu}{\mu \sin \mu} + \frac{\gamma^2}{2} - \frac{(1+\gamma) \cos \mu}{\mu \sin \mu} - \frac{1}{2} (1+\delta) \right] \quad (5.2)$$

$$\frac{1}{2} A Q^2 - B Q + C = 0, \quad (5.3)$$

где

$$A = \frac{1}{3} + \frac{(1+\gamma)^2}{2 \sin^2 \mu} + \frac{(1+\gamma)(3-\gamma)}{2} \frac{\cos \mu}{\mu \sin \mu} - \frac{2 \cdot (1+\gamma)}{\mu^2} \quad (5.4)$$

$$B = \frac{1+\gamma}{\mu^2} - \frac{2+3\beta}{6} - \frac{1+\gamma}{\mu} \operatorname{ctg} \mu$$

$$C = \frac{4}{3} \left(\frac{1}{k}\right)^2 \mu^2 (1+\beta).$$

Выражения (5.1) включают в себя все возможные виды граничных условий задачи, а полученные на основании их зависимости (5.2) — (5.4) позволяют рассмотреть влияние на несущую способность панели различных отклонений от условий жесткой и шарнирной заделки кромок. Для иллюстрации проследим это на панели с параметром кривизны $k = 40$. Пусть опоры податливы в направлении нормали. В этом случае $\beta = \gamma = 0$, $\delta \neq 0$.

Найдем, при каком наименьшем по модулю значении δ будет отсутствовать хлопок такой панели. Это значение δ с достаточной точностью может быть определено из условия

$$B^2 - 2AC \leq 0, \quad (5.5)$$

если положить $\mu = 3,2$. Оно равно $\delta \approx -7,91$. При этом, если $t = 1$ мм, то $w_{(s=\pm 1)} = -0,415$ мм, а параметр нагрузки выпучивания падает от значения $q_{1,\delta=0} = 19,14$ до значения $q_{1,\delta=-7,91} \approx \pi^2$.

Отсюда видно, что несущая способность панели снижается, когда при нагружении опоры получают дополнительное перемещение от центра кривизны.

Легко убедиться, что дополнительное перемещение опор, направленное к центру кривизны, наоборот, увеличивает несущую способность панели. Например, при $\delta = +7,91$, $q_1 = 20,25$, т. е. имеет место увеличение несущей способности на 5,7%.

б) Пусть опоры податливы в касательной плоскости. В этом случае $\delta = \gamma = 0, \beta \neq 0$.

Коэффициент β может принимать различные значения в зависимости от степени податливости опор. Найдем, при каком значении β панель с параметром кривизны $k = 40$ перестает хлопать. Это значение β получим с достаточной точностью из уравнения (5.5) при значении $\mu = 3,2$. Оно равно $\beta = 10,77$.

Следовательно, при $\beta \approx 11$ выпучивающая нагрузка становится равной $q_1 \approx \pi^2$ вместо 19,14. Так как в пологих панелях и арках уже при небольшом внешнем давлении распор получается значительный, то благодаря податливости опор в касательной плоскости нагрузка выпучивания может оказаться в два и более раз меньшей, чем при наличии жесткой заделки.

Таким образом, податливость опор в касательной плоскости всегда следует учитывать при расчетах.

в) Пусть опоры податливы в отношении поворота. В этом случае $\delta = \beta = 0, \gamma \neq 0$.

Вычисления показывают, что при значении $\gamma = -1,05359$ хлопок панели отсутствует и несущая способность снижается с величины $q_1 = 19,14$ до $q_1 \approx \pi^2$.

Невозможность осуществления идеальных граничных условий шарнирной или жесткой заделки в эксперименте и в реальных конструкциях, наряду с начальными неправильностями формы, может явиться одной из причин того, что наблюдаемые при эксперименте критические нагрузки оказываются иногда много ниже теоретических.

6. Влияние начальных неправильностей в форме срединной поверхности

Учет влияния начальных неправильностей на поведение панелей представляет большой практический интерес, так как в действительности неправильности всегда имеют место.

Здесь мы рассмотрим влияние начального отклонения от круговой формы, исходя из анализа точного решения уравнения равновесия, причем ограничимся случаем жесткой заделки кромок. В случае шарнирного закрепления кромок качественные результаты, очевидно, будут аналогичными.

Пусть начальное отклонение от круговой формы задано в виде

$$W_0 = at\varphi(\xi), \quad (6.1)$$

где $\varphi(\xi)$ — некоторая непрерывная в интервале $-1 \leq \xi \leq +1$ функция, имеющая непрерывные первую и вторую производные, a — безразмерная постоянная. Кроме того, будем предполагать, что модуль W_0 ограничен условием пологости панели.

Основные дифференциальные уравнения для панели, имеющей отклонение от круговой формы, получим из уравнений (1.6) и (1.8), заменив постоянную кривизну k_0 переменной кривизной $k_0 + \frac{1}{b^2} W_0$.

Измененные уравнения запишутся в виде:

$$\ddot{w} + \mu^2(1 + \ddot{w}_0 + \dot{w}) - q = 0, \quad (6.2)$$

$$-\frac{1}{3} \left(\frac{1}{k}\right)^2 \mu^2 = \dot{v} - w(1 + \ddot{w}_0) + \frac{1}{2} \dot{w}^2, \quad (6.3)$$

где

$$w_0 = \frac{W_0 R}{h^2}$$

а) Пусть панель имеет симметричную неправильность вида

$$W_0 = at \cos \frac{\pi}{2} \xi, \quad (6.4)$$

где $a > 0$, если начальный прогиб направлен к центру кривизны.

Решая уравнения (6.2), (6.3), получим выражение для функции прогиба

$$w = Q \left(\frac{\cos \mu \xi}{\mu \sin \mu} + \frac{\xi^2}{2} - \frac{\cos \mu}{\mu \sin \mu} - \frac{1}{2} \right) + \frac{a}{k} \frac{8\pi\mu^2}{\pi^2 - 4\mu^2} \left(\frac{2}{\pi} \cos \frac{\pi}{2} \xi - \frac{\cos \mu \xi}{\mu \sin \mu} + \frac{\cos \mu}{\mu \sin \mu} \right) \quad (6.5)$$

и зависимость $F(q, \mu) = 0$, которую ввиду ее громоздкости здесь не приводим.

При $\mu = \frac{\pi}{2}$ решение (6.5) имеет особенность, так как знаменатель второго слагаемого обращается в нуль. Но эта особенность может быть устранена, если взять частное решение уравнения (6.2) в виде

$$w = B\xi \sin \frac{\pi}{2} \xi + c.$$

Так как потеря устойчивости происходит при значениях $\mu > \pi$, то значение $\mu = \frac{\pi}{2}$ и близкие к нему нас не интересуют.

Нами вычислены параметры давления хлопка q_1 при несимметричной форме выпучивания для некоторых значений k при $a = \pm 1$, обозначенные соответственно через $q_{1,+1}$ и $q_{1,-1}$.

Результаты вычислений приведены в таблице 5, где для сравнения также даны значения $q_{1,0}$, соответствующие панели идеальной формы.

Таблица 5

k	40	60	80	100
$q_{1,0}$	19,16	19,78	19,98	20,08
$q_{1,+1}$	14,48	16,23	17,79	18,32
$q_{1,-1}$	21,95	22,00	21,78	21,55

Из приведенной таблицы видно, что рассмотренная неправильность порядка толщины существенно влияет на критическую нагрузку, причем это влияние увеличивается с уменьшением параметра кривизны. Неправильность (6.4) является наиболее простой из возможных, так как она при всех $-1 < \xi < +1$ соответственно уменьшает или увеличивает кривизну панели в зависимости от знака a . Поэтому и характер влияния неправильности (6.4) на q_1 и q_2 таков, как если бы мы уменьшили или увеличили постоянную кривизну панели.

б) Симметричная неправильность вида

$$W_0 = at(1 + \cos \pi \xi). \quad (6.6)$$

Решая уравнения (6.2), (6.3), получим

$$w = Q \left(\frac{\cos \mu \xi}{\mu \sin \mu} + \frac{\xi^2}{2} - \frac{\cos \mu}{\mu \sin \mu} - \frac{1}{2} \right) + 4 \frac{a}{k} \frac{\mu^2}{\mu^2 - \pi^2} (1 + \cos \pi \xi), \quad (6.7)$$

$$\frac{1}{2} A_2 Q^2 - Q \left[B_2 - \frac{\alpha}{k} \frac{4\mu^4}{(\pi^2 - \mu^2)^2} - \frac{\alpha}{k} \frac{4(\pi^2 - \mu\pi^2 + \mu^3)}{\mu(\pi^2 - \mu^2)} \right] +$$

$$+ \frac{4}{3} \left(\frac{1}{k} \right)^2 \mu^2 - \frac{\alpha}{k} \frac{4\mu^2}{\pi^2 - \mu^2} + 8 \left(\frac{\alpha}{k} \right)^2 \frac{\mu^2}{\pi^2 - \mu^2} + 4 \left(\frac{\alpha}{k} \right)^2 \frac{\pi^2 \mu^4}{(\pi^2 - \mu^2)^2} = 0. \quad (6.8)$$

Зависимости (6.7), (6.8) позволяют исследовать большие прогибы панели, имеющей начальное отклонение от круговой формы, заданное функцией (6.6). Нами вычислены параметры давления хлопка q_1 и выхлопа q_2 для $k = 100$, когда $\alpha = \pm 1$. При этом оказалось:

$$q_{1,+1} = 13,34, \quad q_{2,+1} = 5,22,$$

$$q_{1,-1} = 24,10, \quad q_{2,-1} = 4,37.$$

Соответствующие величины для панели идеальной формы равны (см. таблицу 4)

$$q_{1,0} = 20,08, \quad q_{2,0} = 4,13.$$

Следовательно, наличие начальной неправильности порядка толщины вида (6.4) сильно сказывается на величине давления хлопка и несколько слабее на величине давления выхлопа.

Неправильность (6.6) имеет более сложный характер, так как в интервале $-1 \leq \xi \leq +1$ вторая произвольная \dot{W}_0 меняет знак.

в) В случае антисимметричной неправильности вида

$$W_0 = \alpha t \sin \frac{\pi}{2} \xi, \quad (6.9)$$

решая уравнения (6.2) и (6.3), получим:

$$w = Q \left(\frac{\cos \mu \xi}{\mu \sin \mu} + \frac{\xi^2}{2} - \frac{\cos \mu}{\mu \sin \mu} - \frac{1}{2} \right) + \frac{\alpha}{k} \frac{16\mu^2}{\pi^2 - 4\mu^2} \sin \frac{\pi}{2} \xi -$$

$$- \frac{\alpha}{k} \frac{16\mu^2 (\sin \mu \xi - \mu \xi \cos \mu)}{(\pi^2 - 4\mu^2) (\sin \mu - \mu \cos \mu)}. \quad (6.10)$$

$$\frac{1}{2} A_2 Q^2 - B_2 Q + \frac{4}{3} \left(\frac{1}{k} \right)^2 \mu^2 + 4 \left(\frac{\alpha}{k} \right)^2 \left\{ \frac{4\pi^2 \mu^4}{(\pi^2 - 4\mu^2)^2} + 2 \frac{\pi^2 \mu^2}{\pi^2 - 4\mu^2} -$$

$$\frac{32\mu^2 \cos \mu}{(\pi^2 - 4\mu^2)^2 (\sin \mu - \mu \cos \mu)} - \frac{128\mu^2 \cos \mu}{(\pi^2 - 4\mu^2)^2 (\sin \mu - \mu \cos \mu)} \right\} +$$

$$+ \frac{32\mu^6}{(\pi^2 - 4\mu^2)^2 (\sin \mu - \mu \cos \mu)^2} \left(\frac{1}{2} - \frac{3}{4} \frac{\sin^2 \mu}{\mu} + \cos^2 \mu \right) = 0. \quad (6.11)$$

В таблице 6 приведены результаты вычислений давления хлопка q_1 для некоторых значений параметра кривизны k при $\alpha = 0$ и $\alpha = 1$.

Таблица 6

k	40	60	80	100
$q_{1,0}$	19,16	19,78	19,98	20,08
$q_{1,1}$	14,86	16,24	16,91	17,38

Из этой таблицы видно, что антисимметричная неправильность порядка толщины панели существенно уменьшает ее несущую способность, причем так же, как и в предыдущем случае, ее влияние увеличивается с уменьшением параметра кривизны k .

г) В случае антисимметричной неправильности вида

$$W_0 = \alpha t \sin n \xi \quad (6.12)$$

вычисления, аналогичные предыдущим, дают:

$$w = Q \left(\frac{\cos \mu \xi}{\mu \sin \mu} + \frac{\xi^2}{2} - \frac{\cos \mu}{\mu \sin \mu} - \frac{1}{2} \right) +$$

$$+ 4 \frac{\alpha}{k} \frac{\mu^2 n \pi \cos n \pi (\sin \mu \xi - \mu \xi \cos \mu)}{[(n\pi)^2 - \mu^2] (\sin \mu - \mu \cos \mu)} + 4 \frac{\alpha}{k} \frac{\mu^2}{(n\pi)^2 - \mu^2} (\sin n \pi \xi - n \pi \xi \cos n \pi). \quad (6.13)$$

$$\frac{1}{2} A_2 Q^2 - B_2 Q + \frac{4}{3} \left(\frac{1}{k} \right)^2 \mu^2 + 24 \left(\frac{\alpha}{k} \right)^2 \frac{\mu^2 (n\pi)^2}{(n\pi)^2 - \mu^2} + 12 \left(\frac{\alpha}{k} \right)^2 \frac{\mu^4 (n\pi)^2}{[(n\pi)^2 - \mu^2]^2} +$$

$$+ 16 \left(\frac{\alpha}{k} \right)^2 \frac{\mu^2 (n\pi)^2 \cos n \pi}{[(n\pi)^2 - \mu^2] (\sin \mu - \mu \cos \mu)} L + 8 \left(\frac{\alpha}{k} \right)^2 \frac{\mu^6 (n\pi)^2}{[(n\pi)^2 - \mu^2] (\sin \mu - \mu \cos \mu)^2} M +$$

$$+ 16 \left(\frac{\alpha}{k} \right)^2 \frac{\mu^5 (n\pi)^2 \cos n \pi}{[(n\pi)^2 - \mu^2] (\sin \mu - \mu \cos \mu)} N = 0, \quad (6.14)$$

где

$$L = \frac{(n\pi + \mu) \sin(n\pi - \mu) - (n\pi - \mu) \sin(n\pi + \mu)}{2[(n\pi)^2 - \mu^2]} + \mu \cos \mu \frac{\cos n \pi}{n \pi},$$

$$M = \frac{1}{2} - \frac{3}{4} \frac{\sin 2\mu}{\mu} + \cos^2 \mu, \quad (6.15)$$

$$N = \frac{(n\pi + \mu) \sin(n\pi - \mu) + (n\pi - \mu) \sin(n\pi + \mu)}{2[(n\pi)^2 - \mu^2]} -$$

$$- \cos n \pi \frac{\sin \mu}{\mu} + \cos n \pi \cos \mu.$$

Нами проведены вычисления для некоторых значений k при $n = 1$, $n = 2$ и $\alpha = 1$.

В таблице 7 приведены результаты вычислений параметра давления хлопка $q_{1,1}$. В этой же таблице для сравнения даны значения $q_{1,0}$.

Таблица 7

k	40	60	80	100
$q_{1,0}$	19,16	19,78	19,88	20,08
$q_{1,1, n=1}$	10,33	19,18	12,68	13,80
$\frac{q_{1,1, n=1}}{q_{1,0}}$	0,54	0,615	0,635	0,69
$q_{1,1, n=2}$	9,5	11,07	12,27	13,07
$\frac{q_{1,1, n=2}}{q_{1,0}}$	0,49	0,59	0,61	0,65

Из таблицы 7 видно, что неправильность (6.12) при $n = 1$ значительно сильнее уменьшает несущую способность панели, чем рассмотренная ранее неправильность (6.4). При $n = 2$ имеется дальнейшее уменьшение q_1 , т. е. $q_{1,1, n=2} < q_{1,1, n=1}$, однако вычисления показы-

вают, что при $n > 2$, т. е. при $n = 3; 4$; q_1 начинает быстро возрастать, приближаясь к $q_{1,0}$. Указанный факт говорит о том, что антисимметричная неправильность с большой частотой ($n = 3; 4; 5$) менее опасна, чем с малой частотой ($n = 1; 2$).

Вопрос о влиянии антисимметричной начальной неправильности на величину нижнего критического давления p_2 , насколько нам известно, в литературе еще никем не освещался. Поэтому мы провели вычисления q_2 для некоторых значений k в случае неправильности (6.12) при $n = 1$ и $\alpha = 1$. Результаты вычислений приведены в таблице 8.

Таблица 8

k	40	60	80	100
$q_{2,0}$	4,88	4,35	4,17	4,13
$q_{2,1}$	9,66	8,25	7,42	7,02
$\frac{q_{2,1}}{q_{2,0}}$	1,98	1,90	1,78	1,7

Из таблицы 8 видно, что антисимметричная неправильность увеличивает нижнюю критическую нагрузку, причем ее влияние на q_2 сказывается столь же сильно, как и на q_1 (см. таблицу 7). Поэтому утверждение Кармана о слабом влиянии начальных несовершенств формы на величину нижней критической нагрузки, высказанное им в работе [5], является ошибочным. Антисимметричная неправильность, снижая верхнюю критическую нагрузку и увеличивая нижнюю, при некоторой амплитуде может ликвидировать возможность хлопка.

Неправильности, имеющие место в реальных панелях, более разнообразны по форме, чем рассмотренные нами частные случаи. Они обычно не бывают идеально симметричными или антисимметричными, а представляют собой сочетание ряда форм. Различные невыгодные сочетания этих форм могут еще сильнее уменьшить несущую способность панели, чем в рассмотренных нами случаях.

Поступила в редакцию
20/XII-1954 г.

Физико-технический ин-т
Казанского филиала АН СССР

ЛИТЕРАТУРА

1. Муштари Х. М. Некоторые обобщения теории тонких оболочек с приложениями к задаче устойчивости упругого равновесия. Известия физико-математич. о-ва КГУ, 1938.
2. Корнишин М. С. Об устойчивости и больших прогибах пологой цилиндрической панели под действием равномерного внешнего нормального давления. Физико-технический институт Казанского филиала АН СССР, кандидатская диссертация, 1954.
3. Григолюк Э. И. К расчету устойчивости пологих арок. Инженерный сборник, т. IX, 1951.
4. Муштари Х. М. Об упругом равновесии тонкой оболочки с начальными неправильностями в форме срединной поверхности. ПММ, т. 15, 1951.
5. Th. Karman, Louis G. Dunn and Hsue-Shen Tsien., The Influence of curvature on the Buckling characteristics of structures. Journal of the Aeronautical sciences, May, 1940.

Ф. С. ИСАНБАЕВА

ОПРЕДЕЛЕНИЕ НИЖНЕЙ КРИТИЧЕСКОЙ НАГРУЗКИ ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ОБОЛОЧКИ ПРИ ВСЕСТОРОННЕМ СЖАТИИ

В статье излагается теоретическое решение задачи об определении нижней границы критической нагрузки цилиндрической оболочки, подкрепленной рядом шпангоутов и подверженной действию всестороннего нормального внешнего давления.

Предполагается, что шпангоуты не изгибаются в своей плоскости, жестки на растяжение, так что их удлинение $\epsilon_{ш} = 0$; мало сопротивляются закручиванию и тем самым слабо препятствуют повороту обшивки. Обшивка считается прикрепленной к шпангоутам в отдельных точках.

Ввиду того, что рассматривается устойчивость отсеков оболочки, находящихся достаточно далеко от дна, влияние жесткости последних не учитывается.

Основные обозначения

t — толщина оболочки;
 R — радиус оболочки;
 a — расстояние между соседними шпангоутами;
 $b = \pi R$;
 n — число волн, образующихся по окружности при выпучивании оболочки;

$$\bar{k} = \frac{b^2}{\pi^2 R}, \quad \gamma = \frac{b^2}{a^2}, \quad \delta = \frac{1}{n} \frac{b}{a};$$

w — нормальное перемещение точки срединной поверхности оболочки при выпучивании;

P_1 — среднее сжимающее усилие на единицу длины;

$q_1 = \frac{32P_1 t}{Et}$ — безразмерный параметр этого усилия;

P_2 — среднее кольцевое усилие на единицу длины;

P_2 — внешнее нормальное давление, действующее на боковую поверхность и на основания оболочки;

Φ — функция усилий в срединной поверхности;

μ — коэффициент поперечной деформации;

E — модуль упругости при растяжении и сжатии;

$D = \frac{Et^3}{12(1-\mu^2)}$ — цилиндрическая жесткость обшивки.

1. Получение основных зависимостей

Задача решается методом Ритца — Тимошенко. Форма прогиба задается в виде:

$$w = f_1 \sin \alpha \cdot \sin n\beta + f_2 \sin^2 \alpha, \quad (1)$$

где $\alpha = \frac{\pi x}{a}$, $\beta = \frac{\pi y}{b}$, n — целое число, x — координата по образующей, измеряемая от шпангоута, y — координата по окружности. При этом удовлетворяется условие равенства нулю прогиба обшивки на шпангоутах

$w = 0$ при $x = 0, \pm ka$, где k — целое число, и условие $w_x = 0$ при $x = 0, \pm ka$

$$y = 0, \frac{b}{n}, \dots, (2n-1) \frac{b}{n}$$

в точках прикрепления обшивки к шпангоутам.

Подставляя выражение (1) в уравнение совместности деформаций

$$\Delta \Delta \Phi = Et \left[w_{xy}^2 - w_{xx} w_{yy} - \frac{w_{xx}}{R} \right], \quad (2)$$

определяем функцию усилий Φ в срединной поверхности:

$$\frac{\Phi}{Et\gamma} = n^2 \left\{ \frac{f_1^2}{2} \left(\frac{\cos 2\alpha}{16\gamma^2} + \frac{\cos 2n\beta}{16n^4} \right) + f_1 f_2 \left(-\frac{\sin \alpha \sin n\beta}{(\gamma + n^2)^2} + \frac{\sin 3\alpha \sin n\beta}{(9\gamma + n^2)^2} \right) \right\} + \\ + \bar{k} \left(\frac{f_1 \sin \alpha \sin n\beta}{(\gamma + n^2)^2} - 2f_2 \frac{\cos 2\alpha}{16\gamma^2} \right) - \frac{P_1 y^2}{2Et\gamma} + \frac{P_2 x^2}{2Et\gamma}. \quad (3)$$

При этом нормальное усилие на единицу длины в сечении $y = \text{const}$:

$$\Phi_{xx} = P_2 + \frac{\pi^2 Et}{b^2} \left\{ \frac{n^2}{8} \left(\frac{4f_2 \bar{k}}{n^2} - f_1^2 \right) \cos 2\alpha + \right. \\ \left. + f_1 n^2 \delta^4 \left(f_2 - \frac{\bar{k}}{n^2} \right) \frac{\sin \alpha \sin n\beta}{(\delta^2 + 1)^2} - 9n^2 \delta^4 f_1 f_2 \frac{\sin 3\alpha \sin n\beta}{(9\delta^2 + 1)^2} \right\}, \quad (4)$$

нормальное усилие на единицу длины в сечении $x = \text{const}$:

$$\Phi_{yy} = -P_1 + \frac{\pi^2 Et}{b^2} \left\{ -\frac{f_1^2 n^2 \delta^2}{8} \cos 2n\beta + \right. \\ \left. + f_1 \delta^2 n^2 \left(f_2 - \frac{\bar{k}}{n^2} \right) \frac{\sin \alpha \sin n\beta}{(\delta^2 + 1)^2} - f_1 f_2 \delta^2 n^2 \frac{\sin 3\alpha \sin n\beta}{(9\delta^2 + 1)^2} \right\}, \quad (5)$$

усилие сдвига в плоскости xoy :

$$\Phi_{xy} = \frac{\pi^2 Et}{b^2} \left\{ -f_1 n^2 \delta^3 \left(f_2 - \frac{\bar{k}}{n^2} \right) \frac{\cos \alpha \cos n\beta}{(\delta^2 + 1)^2} + \right. \\ \left. + f_1 f_2 n^2 \delta^3 \frac{3 \cos 3\alpha \cos n\beta}{(9\delta^2 + 1)^2} \right\}, \quad \text{где } \delta = \frac{1}{n} \frac{b}{a}. \quad (6)$$

Осевое перемещение точек обшивки, лежащих на шпангоуте $\alpha = \pi$ относительно соответствующих точек, лежащих на шпангоуте $\alpha = -\pi$, равно

$$\Delta = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\partial u}{\partial x} dx = \frac{a}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left(\frac{\Phi_{yy} - \mu \Phi_{xx}}{Et} - \frac{1}{2} w_x^2 \right) d\alpha = \\ = -2a \left[\frac{P_1 + \mu P_2}{Et} + \frac{\pi^2}{4a^2} (f_1^2 + f_2^2) \right]. \quad (7)$$

Кроме того, должно выполняться условие:

$$\int_0^{2b} \frac{\partial v}{\partial y} dy = \frac{b}{\pi} \int_0^{2\pi} \left(\frac{\Phi_{xx} - \mu \Phi_{yy}}{Et} + \frac{w}{R} - \frac{1}{2} w_y^2 \right) d\beta = 2b\epsilon_m,$$

где ϵ_m — среднее относительное удлинение шпангоута. Из него следует, что

$$\epsilon_m = \left\{ \frac{P_2 + \mu P_1}{Et} - \frac{\pi^2 n^2}{8b^2} \left(f_1^2 - \frac{4\bar{k}}{n^2} f_2 \right) \right\}. \quad (8)$$

По предположению жесткость шпангоутов на растяжение велика, поэтому можно принять $\epsilon_m = 0$. При этом в обшивке возникают кольцевые усилия, средняя величина которых P_2 не равна нулю и определяется из соотношения (8):

$$P_2 = \frac{\pi^2 n^2 Et}{8b^2} \left(f_1^2 - \frac{4\bar{k}}{n^2} f_2 \right) - \mu P_1. \quad (9)$$

Работа осевой нагрузки, приложенной к краям рассматриваемых двух отсеков, равна

$$W_1 = \frac{b}{\pi} \int_0^{2\pi} \Phi_{yy} \Delta d\beta = \\ = \frac{4ab}{Et} (P_1^2 + \mu P_1 P_2) + \frac{\pi^2 b P_1}{a} \left(\frac{f_1^2}{2} + f_2^2 \right). \quad (10)$$

Работа внешнего давления при нормальном перемещении обшивки будет

$$W_2 = P_2 \frac{ab}{\pi^2} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} w d\alpha d\beta = 2P_2 ab f_2. \quad (11)$$

Энергия деформации изгиба оболочки равна

$$\mathcal{E}_{изг} = \frac{D}{2} \frac{ab}{\pi^2} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} (\nabla^2 w)^2 d\alpha d\beta = \frac{D}{2} \frac{\pi^4 a^4}{b^3} [f_1^2 (1 + \delta^2)^2 + 8f_2^2 \delta^4]. \quad (12)$$

Энергия деформации оболочки, обусловленная растяжением ее срединной поверхности, определяется выражением:

$$\mathcal{E}_m = \frac{1}{2Et} \int_{-a}^a \int_{-b}^b \{ (\Delta \Phi)^2 + 2(1 + \mu) (\Phi_{xy}^2 - \Phi_{xx} \Phi_{yy}) \} dx dy = \\ = \frac{2ab}{Et} (P_2^2 + 2\mu P_1 P_2 + P_1^2) + \frac{\pi^4 Etb}{64a^3} \left\{ \frac{1}{\delta^4} \left(f_1^2 - \frac{4f_2 \bar{k}}{n^2} \right)^2 + \right. \\ \left. + f_1^4 + \frac{32}{(\delta^2 + 1)^2} \left(f_1 f_2 - f_1 \frac{\bar{k}}{n^2} \right)^2 + \frac{32f_1^2 f_2^2}{(9\delta^2 + 1)^2} \right\}. \quad (13)$$

Полная энергия системы равна сумме энергии деформации оболочки и потенциальной энергии действующих на нее внешних нагрузок:

$$\mathcal{E} = \mathcal{E}_m + \mathcal{E}_{изг} - W_1 - W_2. \quad (14)$$

Подставляем в (14) выражения (13), (12), (10), (11) и вводим обозначения:

$$\zeta_1 = f_1 \frac{n}{t} \delta \lambda, \quad \zeta_2 = f_2 \frac{n}{t} \delta \lambda, \quad \lambda = \frac{\pi t}{a}, \\ \bar{\theta} = \lambda^2 \gamma, \quad q_1 = \frac{32P_1 \gamma}{Et}. \quad (15)$$

Далее, пользуясь соотношением (9), исключаем величину P_2 и заменяем P_2 через P_1 , приняв во внимание, что оболочка находится под действием всестороннего внешнего давления, равного

$$P_2 = \frac{2P_1}{R}. \quad (16)$$

В результате всех этих преобразований полная энергия представится в виде:

$$\begin{aligned} \bar{\mathcal{E}} = \frac{32\gamma^2 \mathcal{E}}{E t a b} = & \frac{\psi_1}{4} \zeta_1^4 + \zeta_1^2 \left[\psi_2 - \frac{1}{2} q_1 \left(1 + \frac{\mu}{\delta^2} \right) \right] + \\ & + \zeta_2^2 (\psi_3 - q_1) + \psi_4 \zeta_1^2 \zeta_2^2 + 2\psi_5 \zeta_1^2 \zeta_2 + 2\zeta_2 q_1 (\mu - 2) - \\ & - \frac{64\gamma^2}{E t^2} P_1^2 (1 - \mu^2), \end{aligned} \quad (17)$$

где

$$\begin{aligned} \psi_1 = \frac{6}{\delta^4} + 2, \quad \psi_2 = \frac{16\delta^4}{(\delta^2 + 1)^2} + \frac{4\bar{\theta} (1 + \delta^2)^2}{3(1 - \mu^2)\delta^4}, \\ \psi_3 = 24 + \frac{32\bar{\theta}}{3(1 - \mu^2)}, \quad \psi_4 = \frac{16}{(\delta^2 + 1)^2} + \frac{16}{(9\delta^2 + 1)^2}, \\ \psi_5 = -\frac{6}{\delta^2} - \frac{16\delta^2}{(\delta^2 + 1)^2}. \end{aligned} \quad (18)$$

Запишем условия экстремума полной энергии:

$$\frac{\partial \bar{\mathcal{E}}}{\partial \zeta_1} = 0, \quad \frac{\partial \bar{\mathcal{E}}}{\partial \zeta_2} = 0, \quad \frac{\partial \bar{\mathcal{E}}}{\partial \delta} = 0.$$

Согласно этим условиям из (17) имеем:

$$\begin{aligned} \psi_1 \zeta_1^3 + 2 \left[\psi_2 - \frac{1}{2} q_1 \left(1 + \frac{\mu}{\delta^2} \right) \right] + 2\psi_4 \zeta_2^2 + 4\psi_5 \zeta_2 = 0 \\ (\psi_3 - q_1) \zeta_2 + \psi_4 \zeta_1^2 \zeta_2 + \psi_5 \zeta_1^2 + q_1 (\mu - 2) = 0 \\ \frac{\psi_{1\delta}}{4} \zeta_1^3 + \psi_{2\delta} + \frac{\mu}{\delta^3} q_1 + \psi_{4\delta} \zeta_2^2 + 2\psi_{5\delta} \zeta_2 = 0. \end{aligned} \quad (19)$$

В 3 уравнении $\psi_{1\delta}$, $\psi_{2\delta}$, $\psi_{4\delta}$, $\psi_{5\delta}$ производные от соответствующих ψ по δ . Таким образом, задача сводится к исследованию зависимости между параметрами q_1 , ζ_1 , ζ_2 и δ , которая дается системой трех нелинейных уравнений (19).

2. Определение критической нагрузки

Задаваясь параметром $\bar{\theta}$, из системы уравнений (19) можно найти наименьшее значение q_1 , которое и будет являться нижней границей параметра критического давления для этого $\bar{\theta}$. Однако этот путь решения задачи связан с весьма большими вычислениями, поэтому мы определяем нижнюю критическую нагрузку менее громоздким обратным методом, не задаваясь первоначально параметром $\bar{\theta}$. Сущность этого метода заключается в следующем:

1. Из первого уравнения системы (19) определяем величину ζ_1^2 и, исключая ее из остальных уравнений, получаем два линейных уравнения относительно q_1 и $\bar{\theta}$; коэффициенты которых являются известными функциями от ζ_2 и δ .

2. Задаваясь некоторыми значениями δ , по формулам (18) вычисляем ψ_1 , ψ_2 , ..., $\psi_{5\delta}$.

3. Задаваясь рядом значений ζ_2 при данном δ , находим те значения q_1 и $\bar{\theta}$, при которых отношение P_2 к критическому давлению P_0 , определенному по линейной теории, наименьшее. Найденное из этого отношения P_2 принимаем за нижнюю границу критического давления для указанного $\bar{\theta}$. При этом должно соблюдаться условие $\zeta_1^2 \geq 0$.

Величина P_0 определяется по формуле, данной в работе [1]:

$$P_0 = \frac{8E}{[9(1 - \mu^2)]^{3/4}} \frac{\pi R}{a} \left(\frac{t}{2R} \right)^{3/2} : [1 - 0,9\theta], \quad (20)$$

где

$$\theta = \frac{V t R}{V_2 a} = \frac{\sqrt[4]{\bar{\theta}}}{\pi V_2}, \quad (21)$$

а отношение P_2/P_0 находим на основании соотношений (16), (20) и обозначений (15) и (21):

$$\frac{P_2}{P_0} = q_1 \frac{[9(1 - \mu^2)]^{3/4}}{64 \cdot \pi^2 \cdot 0^3} \cdot (1 - 0,9\theta). \quad (22)$$

4. Повторяя счет при других значениях δ , находим критические давления для ряда $\bar{\theta}$. Результаты вычислений приведены в таблице 1 и представлены графиком (рис. 1).

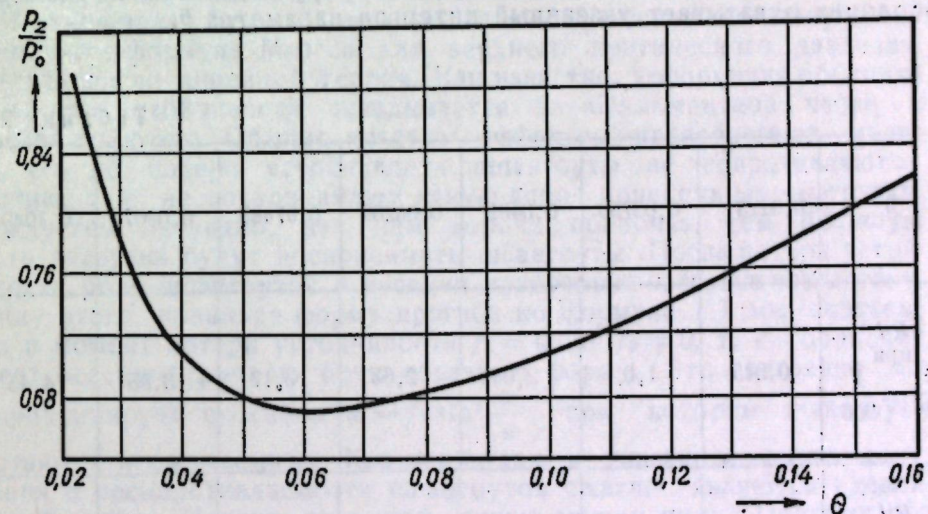


Рис. 1.

Таблица 1

δ	ζ_2	ζ_1^2	$\bar{\theta}$	θ	P_2/P_0
0,75	0,35	0,4682	0,3342	0,1712	0,8292
0,7	0,33	0,4547	0,2045	0,1516	0,8066
0,65	0,27	0,3336	0,1379	0,1372	0,7725
0,6	0,23	0,2605	0,08302	0,1209	0,7409
0,55	0,19	0,1774	0,04706	0,1049	0,7144
0,5	0,15	0,1297	0,0262	0,0907	0,6977
0,45	0,12	0,0881	0,0122	0,07485	0,6814
0,4	0,09	0,0535	0,005787	0,06209	0,6784
0,35	0,07	0,0350	0,00209	0,0481	0,6813
0,3	0,045	0,0157	0,000776	0,03758	0,7202
0,2	0,01	0,00155	0,0000963	0,0223	0,8864

На основании таблицы 1 и графика заключаем, что наименьшее из отношений $\frac{P_z}{P_0}$ равно 0,6784 и соответствует $\theta = 0,06209$, характеризующему класс коротких цилиндрических оболочек. С увеличением длины оболочки θ уменьшается, а отношение $\frac{P_z}{P_0}$ растет, приближаясь к единице. Если $\frac{P_z}{P_0}$ достаточно близко к единице, то для определения критической нагрузки следует применять формулу (20), найденную по линейной теории в работе [1].

С уменьшением длины оболочки, т. е. при $\theta > 0,06209$ отношение P_z/P_0 также возрастает. Казалось бы, что при этом влияние нелинейного фактора должно расти, но приведенные в таблице 1 результаты показывают обратное. Возможно, это объясняется тем, что выбранная форма прогиба для очень коротких оболочек не вполне соответствует действительной.

Из таблицы 1 и графика видно, что с увеличением θ от 0,0481 до 0,1049 отношение P_z/P_0 изменяется незначительно, поэтому за нижнюю границу критического давления для параметра θ в интервале $0,0481 < \theta \leq 0,1049$ можно принять

$$P_z = 0,68P_0,$$

а при меньших значениях θ пользоваться таблицей 1.

Ниже приводится таблица 2, иллюстрирующая какие размеры оболочек охватывает указанный интервал параметра θ .

Таблица 2

θ	0,0223	0,03758	0,0481	0,06209	0,07485	0,0907	0,1049
$\frac{R/l}{R} \text{ при } \frac{l}{R} = \frac{1}{900}$	0,945	1,6	2,04	2,63	3,17	3,85	4,45
$\frac{R/l}{R} \text{ при } \frac{l}{R} = \frac{1}{400}$	0,63	1,06	1,36	1,75	2,2	2,57	2,97

Для проверки приемлемости примененного нами обратного метода были проведены вычисления прямым методом для двух значений θ , взятых из таблицы 1. Результаты вычислений сведены в таблицу 3, из которой видно, что величины q_1 и $\frac{P_z}{P_0}$, найденные прямым методом для одного и того же θ при близких значениях δ , больше, чем вычисленные обратным методом. Отсюда заключаем, что обратный метод действительно дает минимальные значения q_1 и $\frac{P_z}{P_0}$ при данном θ .

Таблица 3

θ	δ	q_1	P_z/P_0	Примечания
0,03758	0,29	0,01726	0,7654	прямым методом
	0,3	0,01624	0,7202	из таблицы 1
0,1049	0,31	0,01632	0,7237	прямым методом
	0,54	0,3753	0,7188	прямым методом
	0,55	0,3730	0,7144	из таблицы 1
	0,56	0,3783	0,7246	прямым методом

Первоначально нами была рассмотрена форма волнообразования вида:

$$w = f_1 \sin \alpha \cdot \sin n \beta + f_2 \sin^2 \alpha \sin^2 n \beta.$$

Вычисления для этой формы прогиба здесь не приводятся, так как они дали для отношений P_z/P_0 значительно большие величины.

В заключение отметим, что из нашего решения не получается в точности формула Мизеса для верхнего критического давления, выведенная по линейной теории. Как известно, деформация оболочки до потери устойчивости складывается из безмоментной части и краевого эффекта. Обычно краевым эффектом пренебрегают, полагая, что до потери устойчивости шпангоуты не сопротивляются сжатию, т. е. не воспринимают какую-либо поперечную нагрузку. Между тем, очевидно, что чем короче оболочка, тем большую часть нагрузки будут воспринимать шпангоуты. После потери устойчивости роль шпангоутов в несении поперечной нагрузки возрастает. Ввиду этого, принимая форму прогиба по формуле (1), мы считаем, что в момент потери устойчивости $f_1 = 0$, но $f_2 \neq 0$, т. е. оболочка имеет осесимметричную бочкообразную форму. Это состояние мы аппроксимируем прогибом $w = f_2 \sin^2 \frac{\pi x}{a}$, при котором шпангоуты считаются несжимаемыми. Как наше, так и указанное выше допущение о несопротивляемости шпангоутов сжатию являются идеализацией задачи. Истина, очевидно, лежит между ними. Поэтому оба подхода к задаче являются допустимыми и полезными.

Для определения значения f_2 в начале появления неосесимметричного выпучивания во втором из уравнений (19) полагаем $\zeta_1^2 = 0$. Учитывая, что по формуле (15) $\bar{b} = \left(\frac{\pi \sqrt{tR}}{a} \right)^4$ (где обычно $\frac{\pi \sqrt{tR}}{a} < 1$),

в первом приближении находим по формуле (18) $\psi_2 - q_1 \approx 24$.

Следовательно,

$$\zeta_2 \approx \frac{(2-\nu)q_1}{24} \text{ или } f_2 \approx \frac{4(2-\nu)}{3} \frac{P_1 b}{\pi E t}.$$

Подставляя f_2 в формулу (9), при $f_1 = 0$ находим

$$P_2 \approx \left(-\frac{4}{3} - \frac{1}{3} \nu \right) P_1 \text{ или } P_2 \approx -1,43 P_1 \text{ (при } \nu = 0,3),$$

где при наших обозначениях P_1 — модуль сжимающего усилия.

По безмоментной теории, как известно, $P_2 = -2P_1$. Таким образом, среднее кольцевое усилие в обшивке в момент потери устойчивости в нашем случае оказывается на 30% меньше, чем в случае легко сжимаемого шпангоута. Дальнейший изгиб, как видно из формулы (9), существенно влияет на среднее кольцевое усилие, что и следовало ожидать. Между тем, принимая неизменное отношение $|P_2|:|P_1|=2$, мы совершенно не учитывали бы влияния шпангоутов даже при больших прогибах.

Переходим к определению верхней критической нагрузки.

Прежде всего заметим, что по (18) $\frac{4\psi_2}{2\psi_1}$ больше 5, даже при $\delta = 1$,

а

$$\zeta_2 < \frac{2q_1}{24} < \frac{1}{12}.$$

Таким образом, в первом из уравнений (19) можно пренебречь $2\psi_1\zeta_2^2$ по сравнению с $4\psi_2\zeta_2$, после чего из него находим

$$2\psi_2 - q_1 \left(1 + \frac{\mu}{\delta^2}\right) + 4\psi_1\zeta_2 = 0.$$

Отсюда

$$\psi_2 = q_1 \left\{ \frac{1}{2} + \frac{1}{\delta^2} \left[1 + \frac{4(2-\mu)\delta^4}{3(1+\delta^2)^2} \right] \right\}.$$

Подставляя выражение ψ_2 из (18), имеем

$$P_2 = \frac{Et}{R} \frac{a^2}{\pi^2 R^2} \left\{ \frac{\delta^6}{(1+\delta^2)^4} + \frac{\bar{0}(1+\delta^2)^2}{12(1-\mu^2)\delta^2} \right\} : \left\{ 1 + \frac{\delta^2}{2} + \frac{4(2-\mu)\delta^4}{3(1+\delta^2)^2} \right\}.$$

В случае оболочки средней длины, когда $\delta^4 \ll 1$, эта формула переходит в формулу Мизеса. Проведенные выше упрощения допустимы для первого приближения при $\delta^2 \leq 0,5$. На границе этой области, т. е. при $\delta^2 = 0,5$ наша формула дает значение верхнего критического давления примерно на 20% меньше формулы Мизеса. Этот результат не следует считать неожиданным, если учесть, что с самого начала мы имеем прогибы, направленные внутрь, благодаря чему в случае короткой оболочки осевое сжатие должно существенно уменьшать устойчивость оболочки от поперечного давления.

Этот анализ мы провели только для того, чтобы показать, что для верхнего критического давления наша формула дает приемлемые результаты. Но если бы даже она определила верхнее критическое давление неудовлетворительно, это не могло бы служить основанием для сомнения в удовлетворительности ее для определения нижнего критического давления в указанном нами интервале θ , так как по результатам ряда исследований мы знаем, что форма выпучивания, пригодная для нижней критической нагрузки, может оказаться неудачной для верхней критической нагрузки, и наоборот.

Поступила в редакцию
20/XII-1954 г.

Физико-технический ин-т
Казанского филиала АН СССР

ЛИТЕРАТУРА

1. Муштари Х. М. и Саченков А. В. Об устойчивости цилиндрических и конических оболочек кругового сечения при совместном действии осевого сжатия и внешнего нормального давления. ПММ, вып. VI, 1954.

Н. С. ГАНИЕВ

ОПРЕДЕЛЕНИЕ КРИТИЧЕСКОЙ НАГРУЗКИ ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ОБОЛОЧКИ ЗА ПРЕДЕЛОМ УПРУГОСТИ ПРИ ОСЕВОМ СЖАТИИ И ВНЕШНЕМ НОРМАЛЬНОМ ДАВЛЕНИИ

В статье рассматривается устойчивость цилиндрической оболочки кругового сечения под действием осевого сжатия и внешнего нормального давления. Предполагается, что до потери устойчивости напряженное состояние оболочки безмоментное и интенсивность напряжений выше предела пропорциональности материала, а перемещения малы. Работа представляет из себя краткое изложение кандидатской диссертации автора, выполненной под руководством профессора Х. М. Муштари и защищенной в ноябре 1953 г. при Казанском университете.

Основные обозначения

- X_x — нормальное напряжение по образующей оболочки;
- Y_y — кольцевое напряжение;
- X_y — касательное напряжение;
- $\sigma_1 = \sqrt{X_x^2 - X_x Y_y + Y_y^2 + 3X_y^2}$ — интенсивность напряжений;
- $\epsilon_1 = \frac{2}{\sqrt{3}} \sqrt{e_{xx}^2 + e_{xx}e_{yy} + e_{yy}^2 + \frac{1}{4}e_{xy}^2}$ — интенсивность деформаций;
- e_{xx}, e_{yy}, e_{xy} — составляющие деформаций;
- $\delta T_1, \delta T_2, \delta S$ — вариации составляющих усилий;
- $\delta M_1, \delta M_2, \delta H$ — вариации составляющих моментов;
- $\epsilon_1, \epsilon_2, 2\epsilon_3$ — вариации деформаций срединной поверхности;
- $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ — вариации кривизны и кручения срединной поверхности;
- u, v, w — вариации составляющих перемещения;
- E — модуль упругости;
- ν — коэффициент поперечного сжатия;
- $T_{1,0}, T_{2,0}, S_{1,0}, S_{2,0}$ — усилия до потери устойчивости;
- a — радиус оболочки;
- L — длина оболочки;
- t — толщина оболочки;
- x — координата по образующей;
- θ — угловая координата;

$$\omega = 1 - \frac{1}{E} \frac{\sigma_1}{\epsilon_1}, \quad \lambda = 1 - \frac{1}{E} \frac{d\sigma_1}{d\epsilon_1}, \quad \bar{X}_x = \frac{X_x}{\sigma_1}, \quad \bar{Y}_y = \frac{Y_y}{\sigma_1}, \quad \bar{X}_y = \frac{X_y}{\sigma_1},$$

$$\bar{\alpha}_0 = \frac{\bar{X}_x \alpha_1 + \bar{Y}_y \alpha_2 + 2\bar{X}_y \alpha_3}{\bar{X}_x \alpha_1 + \bar{Y}_y \alpha_2 + 2\bar{X}_y \alpha_3}, \quad \bar{\alpha}_1 = \frac{t}{2} \alpha_1, \quad \bar{\alpha}_2 = \frac{t}{2} \alpha_2, \quad \bar{\alpha}_3 = \frac{t}{2} \alpha_3,$$

$$\bar{S}_x = \bar{X}_x - \frac{1}{2} \bar{Y}_y, \quad \bar{S}_y = \bar{Y}_y - \frac{1}{2} \bar{X}_x, \quad \zeta = \frac{1 - \bar{z}_0}{2} = \frac{t_{ul}}{t},$$

$$\bar{u} = \frac{u}{t}, \quad \bar{v} = \frac{v}{t}, \quad \bar{w} = \frac{w}{t}, \quad \bar{x} = \frac{x}{a}, \quad \beta = \frac{t}{a}, \quad D = \frac{Et^3}{9};$$

n — число волн по окружности оболочки;
 m — число полуволн по образующей;

$$\alpha = \frac{m\pi a}{L}, \quad \psi = \sqrt{e^2 - e + 1};$$

e — отношение осевого напряжения к кольцевому напряжению;
 p_0 — интенсивность нормального давления;

$$q_0 = \frac{p_0 a}{Et}.$$

1. Основные зависимости

Исследование устойчивости оболочек сводится к решению уравнений нейтрального равновесия [1], которые в случае цилиндрической оболочки кругового сечения, находящейся под действием осевого сжатия и внешнего равномерного давления, имеют вид:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \delta T_1}{\partial x} + \frac{\partial \delta S}{\partial \theta} - T_{2,0} \beta \left(\frac{\partial^2 \bar{v}}{\partial x \partial \theta} - \frac{\partial \bar{w}}{\partial x} \right) &= 0, \\ \frac{\partial \delta S}{\partial x} + \frac{\partial \delta T_2}{\partial \theta} + T_{1,0} \beta \frac{\partial^2 \bar{v}}{\partial x^2} - \frac{1}{a} \left(\frac{\partial \delta M_2}{\partial \theta} - \frac{\partial \delta H}{\partial x} \right) &= 0, \\ \frac{\partial^2 \delta M_1}{\partial x^2} - 2 \frac{\partial^2 \delta H}{\partial x \partial \theta} + \frac{\partial^2 \delta M_2}{\partial \theta^2} + a \delta T_2 + T_{1,0} a \beta \frac{\partial^2 \bar{w}}{\partial x^2} + \\ + T_{2,0} a \beta \left(\frac{\partial \bar{v}}{\partial \theta} + \frac{\partial^2 \bar{w}}{\partial \theta^2} \right) + p_0 a^2 \beta \left(\frac{\partial \bar{v}}{\partial \theta} - \bar{w} \right) &= 0. \end{aligned} \quad (1.1)$$

При потере устойчивости пластически деформированной оболочки в различных областях могут встретиться упругая, упруго-пластическая и чисто пластическая зоны. В каждой из этих зон выражения для вариаций усилий и моментов будут различными [2].

Предположение, что материал оболочки несжимаемый, т. е. $\nu = \frac{1}{2}$, и пластические деформации малы по сравнению с упругими, дает для вариаций усилий и моментов в рассматриваемом случае следующие зависимости:

а) в упруго-пластической зоне

$$\begin{aligned} \frac{3}{4Et} \delta T_1 &= \beta \left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial x} + \frac{1}{2} \frac{\partial \bar{v}}{\partial \theta} - \frac{1}{2} \bar{w} \right) + \frac{3\lambda e}{8\psi^2} \zeta^2 \beta^2 \left(e \frac{\partial^2 \bar{w}}{\partial x^2} + \frac{\partial \bar{v}}{\partial \theta} + \frac{\partial^2 \bar{w}}{\partial \theta^2} \right), \\ \frac{3}{4Et} \delta T_2 &= \beta \left(\frac{\partial \bar{v}}{\partial \theta} - \bar{w} + \frac{1}{2} \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} \right) + \frac{3\lambda}{8\psi^2} \zeta^2 \beta^2 \left(e \frac{\partial^2 \bar{w}}{\partial x^2} + \frac{\partial \bar{v}}{\partial \theta} + \frac{\partial^2 \bar{w}}{\partial \theta^2} \right), \\ \frac{1}{Et} \delta S &= \frac{\beta}{3} \left(\frac{\partial \bar{v}}{\partial x} + \frac{\partial \bar{u}}{\partial \theta} \right), \quad \frac{4}{3D} \delta H = \frac{2t}{3a^2} \left(\frac{\partial \bar{v}}{\partial x} + \frac{\partial^2 \bar{w}}{\partial x \partial \theta} \right), \\ \frac{1}{D} \delta M_1 &= -\frac{t}{a^2} \left(\frac{\partial^2 \bar{w}}{\partial x^2} + \frac{1}{2} \frac{\partial \bar{v}}{\partial \theta} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \bar{w}}{\partial \theta^2} \right) + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} + \frac{3e\lambda}{4\psi^2} \zeta^2 (3 - 2\zeta) \frac{t}{a^2} \left(e \frac{\partial^2 \bar{w}}{\partial x^2} + \frac{\partial \bar{v}}{\partial \theta} + \frac{\partial^2 \bar{w}}{\partial \theta^2} \right), \\ \frac{1}{D} \delta M_2 &= -\frac{t}{a^2} \left(\frac{\partial \bar{v}}{\partial \theta} + \frac{\partial^2 \bar{w}}{\partial \theta^2} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \bar{w}}{\partial x^2} \right) + \\ + \frac{3\lambda}{4\psi^2} \zeta^2 (3 - 2\zeta) \frac{t}{a^2} \left(e \frac{\partial^2 \bar{w}}{\partial x^2} + \frac{\partial \bar{v}}{\partial \theta} + \frac{\partial^2 \bar{w}}{\partial \theta^2} \right) \end{aligned} \quad (1.2)$$

б) в пластической зоне

$$\begin{aligned} \frac{\delta T_1}{Et} &= \frac{4}{3} \beta (1 - \omega) \left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial x} + \frac{1}{2} \frac{\partial \bar{v}}{\partial \theta} - \frac{1}{2} \bar{w} \right) - \\ - \frac{\beta}{\psi^2} (\lambda - \omega) \left(e \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} + \frac{\partial \bar{v}}{\partial \theta} - \bar{w} \right) e, \\ \frac{\delta T_2}{Et} &= \frac{4}{3} \beta (1 - \omega) \left(\frac{\partial \bar{v}}{\partial \theta} - \bar{w} + \frac{1}{2} \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} \right) - \\ - \frac{\beta}{\psi^2} (\lambda - \omega) \left(e \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} + \frac{\partial \bar{v}}{\partial \theta} - \bar{w} \right), \\ \frac{\delta S}{Et} &= \frac{\beta}{3} (1 - \omega) \left(\frac{\partial \bar{v}}{\partial x} + \frac{\partial \bar{u}}{\partial \theta} \right); \quad \frac{\delta H}{D} = \frac{t}{2a^2} (1 - \omega) \left(\frac{\partial \bar{v}}{\partial x} + \frac{\partial^2 \bar{w}}{\partial x \partial \theta} \right), \\ \frac{\delta M_1}{D} &= -\frac{t}{a^2} (1 - \omega) \left[\frac{\partial^2 \bar{w}}{\partial x^2} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \bar{v}}{\partial \theta} + \frac{\partial^2 \bar{w}}{\partial \theta^2} \right) \right] + \\ + \frac{3t}{4a^2 \psi^2} (\lambda - \omega) \left(e \frac{\partial^2 \bar{w}}{\partial x^2} + \frac{\partial \bar{v}}{\partial \theta} + \frac{\partial^2 \bar{w}}{\partial \theta^2} \right) e, \\ \frac{\delta M_2}{D} &= -\frac{t}{a^2} (1 - \omega) \left[\frac{\partial \bar{v}}{\partial \theta} + \frac{\partial^2 \bar{w}}{\partial \theta^2} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \bar{w}}{\partial x^2} \right] + \\ + \frac{3t}{4a^2 \psi^2} (\lambda - \omega) \left(e \frac{\partial^2 \bar{w}}{\partial x^2} + \frac{\partial \bar{v}}{\partial \theta} + \frac{\partial^2 \bar{w}}{\partial \theta^2} \right). \end{aligned} \quad (1.3)$$

В случае свободного опирания концов оболочки, уравнения равновесия (1.1) удовлетворяются решениями вида:

$$\bar{u} = A \sin n\theta \cos \alpha x, \quad \bar{v} = B_1 \cos n\theta \sin \alpha x, \quad \bar{w} = C \sin n\theta \sin \alpha x. \quad (1.4)$$

Подстановка их в уравнения равновесия в случае упруго-пластической задачи дает систему трех линейных уравнений относительно коэффициентов A , B и C :

$$\begin{aligned} \alpha_1 A + \alpha_2 B + \alpha_3 C &= 0 \\ \beta_1 A + \beta_2 B + \beta_3 C &= 0 \\ \gamma_1 A + \gamma_2 B + \gamma_3 C &= 0, \end{aligned} \quad (1.5)$$

где

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= \alpha^2 + \frac{1}{4} n^2, \quad \alpha_2 = \frac{3}{4} + \frac{3\lambda e \beta^2}{8\psi^2} + \frac{3}{4} q_0, \\ \alpha_3 &= \left(\frac{1}{2} + \frac{3}{4} q_0 \right) \alpha + \frac{3\lambda e \beta}{8\psi^2} \zeta^2 (e \alpha^2 + \alpha n^2), \end{aligned}$$

$$\beta_1 = \frac{3}{4} \alpha n, \quad \beta_2 = \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{24} \beta^2 - \frac{3}{4} e q_0 \right) \alpha^2 +$$

$$+ \left(1 + \frac{3\lambda\beta\zeta^2}{8\psi^2} + \frac{1}{12} \beta^2 - \frac{\lambda\zeta^2(3-2\zeta)\beta^2}{16\psi^2} \right) n^2,$$

$$\beta_3 = n + \left(\frac{3\lambda\beta\zeta^2 e}{8\psi^2} + \frac{\beta^2}{12} - \frac{\lambda\zeta^2(3-2\zeta)\beta^2 e}{16\psi^2} \right) \alpha^2 n +$$

$$+ \left(\frac{3\lambda\beta\zeta^2}{8\psi^2} + \frac{\beta^2}{12} - \frac{\lambda\zeta^2(3-2\zeta)\beta^2}{16\psi^2} \right) n^3,$$

$$\gamma_1 = 6\alpha, \quad \frac{\gamma_2}{\beta^2 n} = \left[\frac{3}{2} - \frac{3e\lambda\zeta^2(3-2\zeta)}{4\psi^2} \right] \alpha^2 +$$

$$+ \left[1 - \frac{3\lambda\zeta^2(3-2\zeta)}{4\psi^2} \right] n^2 + \frac{12}{\beta^2} + \frac{9\lambda\zeta^2}{2\psi^2\beta},$$

$$\frac{\gamma_3}{\beta^2} = \left[1 - \frac{3e\lambda\zeta^2(3-2\zeta)}{4\psi^2} \right] \alpha^4 + \left[2 - \frac{3e\lambda\zeta^2(3-2\zeta)}{2\psi^2} \right] \alpha^2 n^2 +$$

$$+ \left[1 - \frac{3\lambda\zeta^2(3-2\zeta)}{4\psi^2} \right] n^4 + \left(\frac{9\lambda e\zeta^2}{2\psi^2\beta} - \frac{9e q_0}{\beta^2} \right) \alpha^2 + \frac{12}{\beta^2} + \frac{9}{\beta^2} q_0 + \left(\frac{9\lambda\zeta^2}{2\psi^2\beta} - \frac{9q_0}{\beta^2} \right) n^2,$$

$$\zeta = \frac{1}{2} - \frac{\bar{z}_0}{2}, \quad \bar{z}_0 = \frac{1}{\beta} \frac{e x \frac{A}{C} + \frac{B}{C} n + 1}{e x^2 + \frac{B}{C} n + n^2}.$$

2. Устойчивость длинной цилиндрической оболочки при осевом сжатии

В этом случае напряженное состояние оболочки до потери устойчивости характеризуется величинами:

$$X_x = -\sigma_1, \quad Y_y = 0, \quad X_y = 0, \quad \bar{X}_x = -1, \quad \bar{Y}_y = \bar{X}_y = 0,$$

$$T_{1,0} = t X_x = -t \sigma_1, \quad T_{2,0} = S_{1,0} = S_{2,0} = 0.$$

Решая первые два из уравнений (1.5) относительно $\frac{A}{C}$ и $\frac{B}{C}$, находим

$$\frac{A}{C} = \frac{\alpha_2 \beta_3 - \alpha_3 \beta_2}{\alpha_1 \beta_2 - \beta_1 \alpha_2}, \quad \frac{B}{C} = \frac{\alpha_1 \beta_3 - \beta_1 \alpha_3}{\alpha_2 \beta_1 - \alpha_1 \beta_2}.$$

Ордината границы между пластической и упругой зонами определяется из соотношения

$$z_0 = \frac{\sigma_1}{\sigma_2} = \frac{a}{\alpha} \frac{A}{C}.$$

При потере устойчивости длинных упругих оболочек α мала по сравнению с n , и α^2 можно пренебречь по сравнению с n^2 . Такое же пренебрежение допускается и в данной задаче. Допустимость этого подтверждается полученным решением. При этом

$$\frac{A}{C} \approx \frac{a}{n^2}.$$

Поэтому

$$z_0 \approx \frac{a}{n^2}.$$

Величина $\bar{z}_0 = \frac{2}{t} z_0$ изменяется в пределах от 0 до 1. Поэтому должно выполняться условие

$$0 < \frac{2}{\beta n^2} < 1.$$

А это возможно лишь при

$$\beta > \frac{2}{n^2}.$$

Но обычно для длинных оболочек $n=2$ или $n=3$, поэтому должно быть $\beta > \frac{2}{9}$, однако в случае тонких оболочек это условие не выполняется. Следовательно, оболочка по толщине не может находиться в упруго-пластическом состоянии: состояние ее или чисто упругое или чисто пластическое. Вариация интенсивности деформации δe_1 на срединной поверхности равна

$$\delta e_1 = -\varepsilon_1 = A \alpha \sin n \theta \sin \alpha \bar{x}.$$

В этой задаче, как и в случае потери устойчивости в пределах упругости

$$\alpha = \frac{\pi a}{L}, \quad n = 2.$$

Поэтому

$$\delta e_1 = A \frac{\pi a}{L} \sin 2\theta \sin \frac{\pi a}{L} \bar{x}.$$

При

$$0 < \theta < \frac{\pi}{2} \quad \text{и} \quad \pi < \theta < \frac{3\pi}{2} \quad \delta e_1 > 0,$$

при

$$\frac{\pi}{2} < \theta < \pi \quad \text{и} \quad \frac{3\pi}{2} < \theta < 2\pi \quad \delta e_1 < 0.$$

Значит, при потере устойчивости оболочка делится по окружности на четыре части: на две упругих и две пластических панели. Точное решение задачи при таком делении оказывается невозможным. Можно ожидать, что оболочка потеряет устойчивость по слабым участкам — пластическим панелям, т. е. произойдет местная потеря устойчивости оболочки. Поэтому найдем критическую нагрузку в предположении чисто пластической деформации по всей оболочке и после потери устойчивости. При этом не будем делать ограничения о малости пластических деформаций по сравнению с упругими и о несжимаемости материала. Постановка задачи остается прежней. Характеристическим уравнением в этом случае будет определитель системы трех линейных уравнений относительно A , B и C , которые получим после подстановки (1.4) в (1.1). При раскрытии его будем пренебрегать величинами $\left(\frac{T_{1,0}}{Gt}\right)^2$, β^4 , произведениями β^2 на α выше второй степени и α^2 по сравнению с n^2 . После многих громоздких преобразований уравнение для определения $T_{1,0}$ приводится к виду:

$$\frac{T_{1,0}}{Gt} = \frac{\{\psi_1 \varphi_2 - \psi_2 [\varphi_1 - (1 - \omega)]\} \alpha^4 + \frac{\beta^2 n^4}{12} (n^2 - 1)^2 \varphi_2^2}{\varphi_2 (1 + n^2) \alpha^2 n^2}, \quad (2.1)$$

где

$$\psi_1 = 2(1-\omega) + 2(1-\omega)N + 3(\lambda-\omega)R(1-\Phi),$$

$$\psi_2 = 2(1-\omega)N + 3(\lambda-\omega)M(1-\Phi) + (1-\omega),$$

$$\psi_3 = 2(1-\omega)N + 3(\lambda-\omega)M(1-\Phi),$$

$$\varphi_1 = (1-\omega) + 2(1-\omega)N - 3(\lambda-\omega)\Phi R,$$

$$\varphi_2 = 2(1-\omega) + 2(1-\omega)N - 3(\lambda-\omega)\Phi M,$$

$$R = \frac{-2(2-\nu) + 2\omega(1-2\nu)}{6(1-\nu) - (1-2\nu)(\lambda+3\omega)}, \quad M = \frac{2(1-\omega)(1-2\nu)}{6(1-\nu) - (1-2\nu)(\lambda+3\omega)},$$

$$N = \frac{3\nu + \omega - 2\omega\nu}{3 - 3\nu - 2\omega + 4\omega\nu}, \quad \Phi = \frac{(1-\omega)(1-2\nu)}{3(1-\nu) - 2\omega(1-2\nu)},$$

G — модуль сдвига.

Из условия $\frac{\partial T_{1,0}}{\partial \alpha} = 0$ находим, что

$$\alpha^2 = \frac{\beta n^2 (n^2 - 1) \varphi_2}{2 \sqrt{3}} \sqrt{\frac{1}{\psi_1 \varphi_2 - \psi_3 [\varphi_1 - (1-\omega)]}}. \quad (2.2)$$

Подстановка (2.2) в (2.1) дает

$$\frac{T_{1,0}}{Gt} = \sqrt{\frac{\beta}{3}} \frac{n^2 - 1}{n^2 + 1} \sqrt{\psi_1 \varphi_2 - \psi_3 [\varphi_1 - (1-\omega)]}. \quad (2.3)$$

Минимальное его значение будет при $n=2$, т. е.

$$(T_{1,0})_{кр} = \frac{\sqrt{3}}{5} Gt\beta \sqrt{\psi_1 \varphi_2 - \psi_3 [\varphi_1 - (1-\omega)]}. \quad (2.4)$$

или

$$(T_{1,0})_{кр} = \frac{6\sqrt{3}}{5} Gt\beta \sqrt{(1-\omega)(1-\lambda) \frac{1+\nu}{6(1-\nu) - (1-2\nu)(\lambda+3\omega)}}. \quad (2.5)$$

Эта формула дает значение критической нагрузки, которая является несколько заниженной по сравнению с действительной, ибо упругие панели были заменены пластическими. Для очень длинных трубок $n=1$. Тогда оболочка теряет устойчивость как стойка. Вычисления показывают, что для обычных материалов эта форма выпучивания появляется, если $\frac{a}{L}$ больше, чем 0,04–0,06.

3. Устойчивость недлинной цилиндрической оболочки при осевом сжатии

Потеря устойчивости недлинной цилиндрической оболочки при упругих деформациях происходит с частым волнообразованием по всей поверхности оболочки. Эту форму потери устойчивости примем и при пластических деформациях.

Сначала рассмотрим чисто пластическую задачу без ограничений о малости пластических деформаций по сравнению с упругими и о несжимаемости материала.

Предположение о частом волнообразовании дает возможность пренебречь единицей по сравнению с α^2 и n^2 . Поэтому характеристическое уравнение для определения критической нагрузки значительно упрощается и приводится к виду:

$$\frac{T_{1,0}}{Gt} = \frac{\{\psi_1 \varphi_2 - \psi_3 [\varphi_1 - (1-\omega)]\} \alpha^2}{\left\{ \psi_1 \alpha^4 + \frac{1}{1-\omega} [\psi_1 \varphi_2 - \psi_3 \varphi_1 + (1-\omega)^2] \alpha^2 n^2 + \varphi_2 n^4 \right\}} + \frac{\beta^2}{12\alpha^2} \left\{ \psi_1 \alpha^4 + [\psi_3 + 12\varphi_3 + 2(1-\omega)] \alpha^2 n^2 + \varphi_2 n^4 \right\}. \quad (3.1)$$

В этом выражении

$$\frac{1}{1-\omega} [\psi_1 \varphi_2 - \psi_3 \varphi_1 + (1-\omega)^2] < \psi_3 + 12\varphi_3 + 2(1-\omega).$$

Следовательно, если

$$\frac{1}{1-\omega} [\psi_1 \varphi_2 - \psi_3 \varphi_1 + (1-\omega)^2]$$

заменим через

$$\psi_3 + 12\varphi_3 + 2(1-\omega),$$

то тем самым заранее занижаем значение критической нагрузки. Эта подстановка дает возможность найти минимум $T_{1,0}$, который достигается при

$$\begin{aligned} \frac{1}{\alpha^2} \left\{ \psi_1 \alpha^4 + [\psi_3 + 12\varphi_3 + 2(1-\omega)] \alpha^2 n^2 + \varphi_2 n^4 \right\} = \\ = \frac{2}{\beta} \sqrt{3} \sqrt{\psi_1 \varphi_2 - \psi_3 [\varphi_1 - (1-\omega)]}. \end{aligned}$$

Он равен

$$\frac{T_{1,0}}{Gt} = \sqrt{\frac{\beta}{3}} \sqrt{\psi_1 \varphi_2 - \psi_3 [\varphi_1 - (1-\omega)]}. \quad (3.2)$$

Эта формула при $\omega=0$, т. е. при малых пластических деформациях по сравнению с упругими, совпадает с формулой (2.20) работы Л. А. Толоконникова [3], которая выражает значение критической нагрузки при симметричной форме потери устойчивости цилиндрической оболочки. А так как значение $T_{1,0}$ по формуле (3.2) меньше, чем значение по (3.1), то следует, что при потере устойчивости недлинной цилиндрической оболочки с учетом только чисто пластической деформации значение критической нагрузки для несимметричной формы потери устойчивости больше, чем значение критической нагрузки для симметричной формы потери устойчивости. Поэтому недлинная цилиндрическая оболочка при чисто пластических деформациях может терять устойчивость только по симметричной форме. $T_{1,0}$, найденная по (2.4), меньше, чем $T_{1,0}$, найденная по (3.2). Следовательно, для длинных цилиндрических оболочек возможна несимметричная форма потери устойчивости. Вместе с тем оправдывается предположение о малости α^2 по сравнению с n^2 для длинных цилиндрических оболочек. Рассмотрим далее упруго-пластическую задачу. Допуская те же пренебрежения, что и выше, получим из системы уравнений (1.5) характеристическое уравнение в виде:

$$\frac{T_{1,0}}{Et} = \frac{\alpha^2}{(\alpha^2 + n^2)^2} + \beta^2 \frac{(\alpha^2 + n^2)^2}{9\alpha^2} - \frac{\lambda}{2} \frac{\alpha^2}{(\alpha^2 + n^2)^2}. \quad (3.3)$$

Минимальное значение $T_{1,0}$ достигается при

$$\frac{\alpha^2}{(\alpha^2 + n^2)^2} = \frac{\beta}{3 \sqrt{1 - \frac{\lambda}{2}}}$$

Отсюда

$$\sigma_{кр} = \frac{T_{1,0}}{t} = \frac{2Et}{3a} \sqrt{1 - \frac{\lambda}{2}} \quad (3.4)$$

Этой формулой определяется значение критического напряжения, при котором оболочка может потерять устойчивость по несимметричной форме с частыми волнами и по образующей и по окружности.

В работе Л. А. Толоконникова [3] приведен график для определения значения критической нагрузки при осесимметричной форме потери устойчивости цилиндрической оболочки. Сравнение показывает, что напряжения, найденные по формуле (3.4), имеют несколько большее значение, чем напряжения, найденные по формуле (2.14) работы Л. А. Толоконникова [3].

Таким образом, критическая нагрузка, найденная в предположении несимметричной формы потери устойчивости, оказывается больше критической нагрузки, найденной в предположении симметричной формы потери устойчивости и в случае чисто пластической деформации и в случае упруго-пластической деформации. Отсюда можно сделать вывод, что цилиндрическая оболочка конечной длины под действием осевого сжатия теряет устойчивость по симметричной форме.

4. Устойчивость бесконечно длинной цилиндрической оболочки под действием равномерного внешнего давления

Напряженное состояние до потери устойчивости характеризуется следующими данными:

$$Y_y = -p_0 \frac{a}{t}, \quad X_x = X_y = 0, \quad \bar{Y}_y = -1, \quad \bar{X}_x = \bar{X}_y = 0,$$

$$T_{1,0} = S_{1,0} = 0, \quad T_{2,0} = -ap_0.$$

Если рассматривать бесконечно длинную трубу, то можно предположить, что потеря устойчивости произойдет без деформации срединной поверхности оболочки. Это условие записывается в виде:

$$\frac{\bar{d}v}{d\theta} - \bar{w} = 0. \quad (4.1)$$

При этом

$$z_0 = \frac{\epsilon_2}{z_2} = a \frac{\frac{\partial \bar{v}}{\partial \theta} - \bar{w}}{\frac{\partial \bar{v}}{\partial \theta} + \frac{\partial^2 \bar{w}}{\partial \theta^2}} = 0.$$

Это значит, что при потере устойчивости срединная поверхность оболочки будет разделять зоны разгрузки и нагружения.

Уравнение нейтрального равновесия бесконечно длинной трубы можно записать в виде [1]:

$$\frac{\partial \delta M_2}{\partial \theta} + \frac{\partial^3 \delta M_2}{\partial \theta^3} - a^3 p_0 \left(\frac{\partial^2 \bar{v}}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^3 \bar{w}}{\partial \theta^3} \right) = 0, \quad (4.2)$$

где δM_2 при $z_0 = 0$ равен

$$\delta M_2 = -\frac{Et^3}{72} (8 - 3\lambda - \omega) z_2. \quad (4.3)$$

Подстановка (4.3) в (4.2) дает

$$\frac{Et^3}{72} (8 - 3\lambda - \omega) \left(\frac{d^5 \bar{w}}{d\theta^5} + 2 \frac{d^3 \bar{w}}{d\theta^3} + \frac{d\bar{w}}{d\theta} \right) + a^3 p_0 \left(\frac{d\bar{w}}{d\theta} + \frac{d^3 \bar{w}}{d\theta^3} \right) = 0.$$

Этому уравнению можно удовлетворить выбором \bar{w} в виде

$$\bar{w} = C \sin n\theta.$$

Поэтому

$$p_0 = \frac{Et^3}{72a^3} (n^2 - 1) (8 - 3\lambda - \omega).$$

Минимум этой величины достигается при $n = 2$

$$(p_0)_{кр} = \frac{3Et^3}{72a^3} (8 - 3\lambda - \omega). \quad (4.4)$$

При этом значении равномерного внешнего давления бесконечно длинная труба сминается.

5. Устойчивость недлинной цилиндрической оболочки под действием осевого сжатия и равномерного внешнего давления

Напряженное состояние до потери устойчивости характеризуется величинами:

$$X_x = -\frac{Q}{2\pi a t}, \quad Y_y = -p_0 \frac{a}{t}, \quad X_y = 0,$$

где Q — осевая сила, p_0 — внешнее давление.

Для того, чтобы осуществлялась простая нагрузка, необходима пропорциональность X_x и Y_y , т. е. должно быть $X_x = e Y_y$, где e — коэффициент пропорциональности. Отсюда

$$\frac{Q}{2\pi a t} = e p_0 \frac{a}{t}, \quad p_0 = \frac{Q}{2\pi a^2 e}.$$

Интенсивность напряжений равна

$$\sigma_1 = \frac{\psi Q}{2\pi a t e}, \quad \text{где } \psi = \sqrt{e^2 - e + 1}.$$

Следовательно,

$$\bar{X}_x = -\frac{e}{\psi}, \quad \bar{Y}_y = -\frac{1}{\psi}, \quad T_{1,0} = -\frac{t\sigma_1 e}{\psi}, \quad T_{2,0} = -\frac{t\sigma_1}{\psi}, \quad S_{1,0} = 0.$$

Характеристическое уравнение для определения критической нагрузки получается из условия совместности системы (1.5):

$$q_0 = \frac{\alpha^4}{(n^2 + e\alpha^2)(\alpha^2 + n^2)^2} + \frac{(\alpha^2 + n^2)^2}{9(n^2 + e\alpha^2)} \beta^2 - \frac{\lambda \beta^2 \alpha^2 (n^2 + e\alpha^2)}{4(\alpha^2 + n^2)\psi^2} - \frac{\beta^2 \lambda}{12\psi^2} \zeta^2 (3 - 2\zeta) (n^2 + e\alpha^2). \quad (5.1)$$

Оно получено в предположении, что n^2 велико и $\alpha^2 \gg 1$ как и в случае упругой задачи. Поэтому в нем оставлены лишь члены со старшими степенями α и n .

Входящая в (5.1) величина ζ определяется из громоздкого уравнения, и в общей постановке нахождение минимума q_0 практически невозможно. Поэтому рассмотрим один из наиболее интересных случаев, когда

$$n^2 \gg 1, \quad 0 < e \leq 1, \quad \alpha \sim 1.$$

Это соответствует случаю оболочки средней длины, причем осевое напряжение меньше или одного порядка с кольцевым напряжением. При этих условиях в уравнении (5.1) и в уравнении для определения ζ можно пренебречь $e\alpha^2$ по сравнению с n^2 . Поэтому

$$q_0 = \frac{\alpha^4}{n^6} + \frac{\beta^2}{9} n^2 - \frac{\lambda \beta^2 \zeta^2}{4 \psi^2} \frac{\alpha^2}{n^2} - \frac{\beta^2 \lambda}{12 \psi^2} \zeta^2 (3 - 2\zeta) n^2, \quad (5.2)$$

$$\zeta = \frac{1}{2} - \frac{1}{\beta} \frac{-\frac{1}{8} \alpha^2 + \frac{1}{4} e \alpha^2 - \frac{3}{32} \frac{\lambda \beta \zeta^2}{\psi^2} n^4}{\frac{1}{4} n^4}. \quad (5.3)$$

Из (5.3) находим

$$n^4 = \frac{\alpha^2 \left(e - \frac{1}{2} \right)}{\beta \left(\frac{1}{2} - \zeta + \frac{3}{8} \frac{\lambda \zeta^2}{\psi^2} \right)}.$$

Подставляя n^2 , n^4 , n^6 в (5.2), имеем:

$$q_0 = \frac{\alpha^2 \beta^4}{\left(e - \frac{1}{2} \right)^3 \left(\frac{1}{2} - \zeta + \frac{3\lambda \zeta^2}{8\psi^2} \right)^3} \left(\frac{5}{18} - \zeta + \zeta^2 + \frac{3\lambda \zeta^4}{16\psi^4} + \frac{3\lambda \zeta^2}{8\psi^2} - \frac{5\lambda \zeta^3}{6\psi^2} - \frac{e^2 \lambda \zeta^2}{4\psi^2} + \frac{e^2 \lambda \zeta^3}{6\psi^2} + \frac{\lambda \zeta^2 e}{8\psi^2} + \frac{\lambda \zeta^3 e}{12\psi^2} - \frac{e}{9} + \frac{e^2}{9} - \frac{3\lambda^2 \zeta^4 e}{32\psi^4} \right). \quad (5.4)$$

Минимальное значение q_0 достигается при значениях ζ , определяемых из уравнения

$$\begin{aligned} & -\frac{13}{18} + 3\zeta - 3\zeta^2 + \frac{27\lambda^3 \zeta^3}{64\psi^6} - \frac{41\lambda^2 \zeta^4}{16\psi^4} + \frac{33\lambda^2 \zeta^3}{32\psi^4} + \frac{59\lambda \zeta^3}{12\psi^2} - \\ & - \frac{29\lambda \zeta^2}{\psi^2} + \frac{13\lambda \zeta}{24\psi^2} - \frac{e}{9} + \frac{e^2}{9} - \frac{7e^2 \lambda \zeta}{12\psi^2} + \frac{e \lambda \zeta}{3\psi^2} + \frac{5e^2 \lambda \zeta^2}{4\psi^2} - \frac{e \lambda \zeta^2}{8\psi^2} - \\ & - \frac{5e^2 \lambda \zeta^3}{6\psi^2} - \frac{5e \lambda \zeta^3}{12\psi^2} - \frac{9e \lambda^2 \zeta^3}{32\psi^4} - \frac{3e^2 \lambda^2 \zeta^3}{16\psi^4} + \frac{25e \lambda^2 \zeta^4}{32\psi^4} + \frac{e^2 \lambda^2 \zeta^4}{4\psi^4} - \frac{27e \lambda^2 \zeta^3}{128\psi^6} = 0. \end{aligned} \quad (5.5)$$

Рассмотрим частные случаи.

а) $e = 0$, т. е. отсутствует осевая сжимающая сила. При этом $\psi = 1$ и (5.5) превращается в уравнение:

$$-243 \lambda^3 \zeta^6 + 1476 \lambda^2 \zeta^4 - 594 \lambda \zeta^3 - 2832 \lambda \zeta^3 + 2088 \lambda \zeta^2 + 1728 \zeta^2 - 312 \lambda \zeta - 1728 \zeta + 416 = 0.$$

Можно показать, что это уравнение имеет лишь один действительный корень, зависящий от λ . Ниже приводится для этого случая таблица изменения ζ , q_0 , n в зависимости от λ :

λ	0	0,2	0,4	0,6	0,8	1
ζ	0,5962	0,62	0,66	0,71	0,8	1
$q_0/\alpha\beta^{3/2}$	0,338	0,3033	0,2628	0,2142	0,151	0,056
$n^4 \beta/\alpha^2$	5,19	5,484	5,28	5,18	4,63	4

Сделаем оценку тех пренебрежений, которые мы допустили при выводе формулы (5.4).

Из таблицы видно, что $n^4 \approx 5 \frac{\alpha^2}{\beta}$. Следовательно, пренебрегая α^2 по сравнению с n^2 , мы пренебрегаем $\frac{n^2 \beta}{5}$ по сравнению с 1.

В случае оболочки средней длины из мягкой стали

$$\sigma_s = 2000 \text{ кг/см}^2, \quad \frac{\pi a}{L} = 1, \quad E = 2 \cdot 10^6 \text{ кг/см}^2, \quad \nu = \frac{1}{2}.$$

По формуле для упругой потери устойчивости

$$\sigma_{кр} = \frac{P_0 a}{t} = 0,273 \frac{\pi a}{L} \frac{Et^{3/2}}{a^{3/2} (1 - \nu^2)^{1/4}}$$

получаем, что пластические деформации начинаются при $\frac{t}{a} \approx \frac{1}{50}$.

А при $\frac{\pi a}{L} = 1$ и $\frac{t}{a} = \frac{1}{50}$ получаем, что $n^2 \approx 16$. Значит, пренебрегая α^2 по сравнению с n^2 , мы пренебрегаем единицей по сравнению с 16, что допустимо при решении задачи в первом приближении.

б) $e = \frac{1}{2}$ — случай всестороннего равномерного внешнего давления. При этом (5.3) принимает вид

$$\zeta = \frac{1 - \sqrt{1 - \lambda}}{\lambda},$$

а число волн, образующихся по окружности при потере устойчивости, будет определяться из уравнения $\frac{\partial q_0}{\partial n} = 0$:

$$n^4 = \frac{3\alpha^2}{2\beta [1 - \lambda \zeta^2 (3 - 2\zeta)]} \left\{ -\lambda \zeta^2 + \sqrt{\lambda^2 \zeta^4 + 12 [1 - \lambda \zeta^2 (3 - 2\zeta)]} \right\},$$

где ζ от n не зависит, как это видно из предыдущей формулы. Определив при различных λ из этих выражений ζ и n , подставляем их в уравнение (5.2) и находим соответствующие минимальные значения q_0 .

В этом § так же, как и в § 1, мы рассматриваем такое выпучивание оболочки, при котором она делится на ряд панелей с различными ζ . В одних панелях $\zeta = \frac{1 - \bar{z}_0}{2}$, а в других $\zeta = \frac{1 + \bar{z}_0}{2}$. Поэтому

точное решение задачи оказывается невозможным. Наши результаты, полученные в этих параграфах, можно рассматривать как правильные лишь в предположении местной потери устойчивости оболочек. А в случае общей потери устойчивости оболочек они дают заниженные значения критических нагрузок, ибо расчет велся по слабым участкам, где $\zeta > \frac{1}{2}$ и участки с $\zeta < \frac{1}{2}$

были заменены также участками с $\zeta > \frac{1}{2}$. Эти результаты будут правильными в случае цилиндрических панелей, когда их ширина не превышает длины полуволны, появляющейся во время потери устойчивости полной оболочки по окружности, и стороны панели нерастяжимы и могут свободно раздвигаться.

6. Приближенное решение в предположении чисто пластического выпучивания

При рассмотрении потери устойчивости цилиндрической оболочки под действием осевого сжимающего усилия были приведены результаты работы [3], полученные в предположении упруго-пластических деформаций, и результаты, полученные в предположении чисто пластических деформаций. Из них при $\lambda = 0,8$, $\nu = \frac{1}{2}$ находим, что

а) по формуле для чисто пластических деформаций

$$\frac{\sigma_{кр} a}{Et} = 0,30,$$

б) по формуле для упруго-пластических деформаций

$$\frac{\sigma_{кр} a}{Et} = 0,31.$$

Разница в этом случае составляет 3,23%, а при $\lambda < 0,8$ эта разница будет еще меньше. В случае внешнего равномерного давления для тех же данных получим:

а) по формуле для чисто пластических деформаций

$$q_0 = 0,1429 \alpha \beta^{3/2},$$

б) по формуле для упруго-пластических деформаций

$$q_0 = 0,15149 \alpha \beta^{3/2}.$$

Здесь разница составляет 5,67%. Таким образом, при осевом сжатии и при внешнем давлении величины критических нагрузок, найденные по формулам чисто пластической задачи, мало отличаются от величин критических нагрузок, найденных по формулам упруго-пластической задачи. Исходя из этого, приходим к заключению, что можно пользоваться в первом приближении решениями задачи потери устойчивости в чисто пластической области. А решение упруго-пластической задачи является как бы вторым приближением.

Следует отметить, что, пользуясь формулами чисто пластической задачи, получаем заниженное значение критической нагрузки, т. е. делаем ошибку в сторону увеличения запаса устойчивости. На этом основании в дальнейшем мы предполагаем, что при потере устойчивости по толщине оболочки зона разгрузки не появляется — оболочка по всей толщине продолжает деформироваться пластически. При этом постановка и метод решения задачи остаются такими же, как и в предыдущих параграфах, поэтому промежуточные вычисления приводить не будем.

а) Случай равномерного внешнего давления

Характеристическое уравнение для определения p_0 при пренебрежениях, сделанных в § 5, принимает вид:

$$\frac{p_0 a}{Gt} = \frac{\Omega - 3(1-\omega)^2}{n^2 \psi_1} \alpha^4 + \frac{\psi_1}{12} n^2 \beta^2, \quad (6.1)$$

где

$$\Omega = \varphi_2 \psi_1 - \varphi_1 \psi_2 + \varphi_1 (1-\omega) + \psi_2 (1-\omega) + 2(1-\omega)^2,$$

а остальные обозначения приведены в § 2.

Минимальное значение $\frac{p_0 a}{Gt}$ достигается при

$$n^2 = \alpha \sqrt{\frac{36[\Omega - 3(1-\omega)^2]}{\psi_1^2 \beta^2}}. \quad (6.2)$$

Таким образом, имеем

$$\frac{p_0 a}{Gt} = \frac{4\alpha \beta^{3/2}}{6\sqrt{6}} [\Omega - 3(1-\omega)^2]^{1/2} \sqrt{\psi_1}. \quad (6.3)$$

Если в этом выражении положить $\lambda = \omega = 0$, то

$$p_0 a = 0,273 \frac{\pi a}{L} \frac{Et^{1/2}}{a^{3/2} (1-\nu^2)^{1/2}}, \quad (6.4)$$

$$n^2 = \alpha \sqrt{\frac{6}{\beta} \sqrt{1-\nu^2}}. \quad (6.5)$$

Эти формулы для определения критической нагрузки и числа волн по окружности при потере устойчивости цилиндрической оболочки под действием равномерного внешнего давления в случае упругих деформаций были получены Х. М. Муштарни.

Для более точного определения значения критического давления будем пренебрегать не α^2 по сравнению с n^2 , а α^4 по сравнению с n^4 . В этом случае характеристическое уравнение для определения q_0 принимает вид:

$$q_0 (n^2 - 1) = \frac{12(1-\omega)(1-\lambda)\alpha^4}{n^2 \{ (4-3\lambda-\omega)n^2 + [4(4-3\lambda-\omega) - 8(1-\omega)]\alpha^2 \}} + \frac{\beta^2 (4-3\lambda-\omega)n^4 \left(\alpha^2 + \frac{1}{4}n^2 - \frac{1}{2} + \frac{1}{4n^2} \right)}{3 \{ (4-3\lambda-\omega)n^2 + [4(4-3\lambda-\omega) - 8(1-\omega)]\alpha^2 \}}. \quad (6.6)$$

Если окажется по (6.5), что $n_{кр}^2 < 4$ или $n_{кр}^2 \approx 4$, то следует положить $n_{кр} = 2$.

При уменьшении значения $\beta = \frac{t}{a}$ оболочка будет терять устойчивость не по двум волнам по окружности, а по трем волнам. Значение β , при котором для одной и той же критической нагрузки возможно выпучивание оболочки с образованием по окружности либо двух, либо трех волн, определяется из уравнения

$$\beta^2 = \frac{30\alpha^4(1-\omega)(1-\lambda)}{(4-3\lambda-\omega)^2} \left\{ 5(4-3\lambda-\omega) + 2[(4-3\lambda-\omega) - 2(1-\omega)\alpha^2] \right\} : \left\{ 115[(4-3\lambda-\omega) - 2(1-\omega)]\alpha^4 - 45(4-3\lambda-\omega)\alpha^2 + \frac{1445}{4}[(4-3\lambda-\omega) - 2(1-\omega)]\alpha^2 + \frac{1125}{4}(4-3\lambda-\omega) \right\}, \quad (6.7)$$

где $\alpha = \frac{\pi a}{L}$.

При $n \geq 3$ для приближенного определения тех значений α , для которых совершается переход от формы выпучивания с образованием n волн к выпучиванию с $n+1$ волнами, можно пользоваться при-

ближенным выражением q_0 , полученным из (6.6) путем пренебрежения α^2 по сравнению с n^2 :

$$q_0 = \frac{12(1-\omega)(1-\lambda)}{4-3\lambda-\omega} \frac{\alpha^4}{n^4(n^2-1)} + \frac{4-3\lambda-\omega}{12} (n^2-1) \beta^2. \quad (6.8)$$

Если в этом уравнении вместо n подставить соответственно n и $n+1$ и исключить из полученных двух уравнений β , то получим следующую зависимость:

$$\alpha^4 = \frac{4-3\lambda-\omega}{12(1-\omega)(1-\lambda)} \frac{n^3(n+1)^3(n^2+n-2)}{4(n^2+n+1)} q_0. \quad (6.9)$$

Заменяя здесь n на $n-1$, найдем то значение α , при котором совершается переход от формы выпучивания с $n-1$ волнами к выпучиванию с образованием n волн. Следовательно, выпучивание происходит с образованием n волн, если

$$\frac{(n-1)^3 n^3 (n^2 - n - 2)}{4(n^2 - n + 1)} \leq \frac{12(1-\omega)(1-\lambda)}{4-3\lambda-\omega} \frac{\alpha^4}{q_0} \leq \frac{n^3(n+1)^3(n^2+n-2)}{4(n^2+n+1)}.$$

Можно составить следующую таблицу:

$n_{кр}$	3	4	5
$\frac{\alpha^4}{q_0} \frac{12(1-\omega)(1-\lambda)}{4-3\lambda-\omega}$	от 31 до 331	от 331 до 1710	от 1710 до 6075

При заданном $\alpha = \frac{\pi a}{L}$ по этой таблице определяем $n_{кр}$, вычисляя $\frac{p_0 a}{E t}$ по (6.3). Затем уточненное значение q_0 находим по формуле (6.6). При $\lambda = \omega = 0$ эти значения совпадают с результатами, полученными Х. М. Муштари для случая упругих деформаций.

б) Совместное действие равномерного внешнего давления и осевого сжимающего усилия

Характеристическое уравнение для определения q_0 приводится в этом случае при тех же пренебрежениях, что и в § 5, к виду

$$q_0 = \mu f_1(\gamma) + \frac{1}{\mu} f_2(\gamma);$$

где

$$\mu = \alpha^2, \quad \gamma = \frac{n^2}{\alpha^2},$$

$$f_1(\gamma) = \frac{\beta^2}{36(e+\gamma)} \left\{ \left[4(1-\omega) - \frac{3(\lambda-\omega)}{\psi^2} e^2 \right] + \left[8(1-\omega) - \frac{6(\lambda-\omega)}{\psi^2} e \right] \gamma + \left[4(1-\omega) - \frac{3(\lambda-\omega)}{\psi^2} \right] \gamma^2 \right\},$$

$$f_2(\gamma) = \frac{\beta^2(1-\omega)(1-\lambda)}{9(e+\gamma)^2 f_1(\gamma)}.$$

Отсюда

$$\frac{\partial q_0}{\partial \gamma} = \mu f_1'(\gamma) + \frac{1}{\mu} f_2'(\gamma), \quad \frac{\partial q_0}{\partial \mu} = f_1(\gamma) - \frac{1}{\mu^2} f_2(\gamma) + \frac{\partial q_0}{\partial \gamma} \frac{\partial \gamma}{\partial \mu}.$$

$$\text{Из } \frac{\partial q_0}{\partial \gamma} = 0 \text{ находим } \mu: \mu^2 = -\frac{f_2'(\gamma)}{f_1'(\gamma)}.$$

Тогда

$$\frac{\partial q_0}{\partial \mu} = \frac{2\beta^2}{36(e+\gamma)} \left\{ \left[4(1-\omega) - \frac{3(\lambda-\omega)}{\psi^2} e^2 \right] + \left[8(1-\omega) - \frac{6(\lambda-\omega)}{\psi^2} e \right] \gamma + \left[4(1-\omega) - \frac{3(\lambda-\omega)}{\psi^2} \right] \gamma^2 \right\} : \left\{ \left[4(1-\omega) + 8(1-\omega)e - \frac{9(\lambda-\omega)}{\psi^2} e^2 \right] + 2 \left[8(1-\omega) + 4(1-\omega)e - \frac{9(\lambda-\omega)}{\psi^2} e \right] \gamma + 3 \left[4(1-\omega) - \frac{3(\lambda-\omega)}{\psi^2} \right] \gamma^2 \right\}.$$

Отсюда видим, что $\frac{\partial q_0}{\partial \mu} > 0$ независимо от e и γ .

Рассмотрим частные случаи.

а) $e=0$ — отсутствует осевая сжимающая сила. Тогда $\frac{\partial q_0}{\partial \gamma} < 0$ при достаточно малых значениях γ . Например, при

$$\left[4(1-\omega) - \frac{3(\lambda-\omega)}{\psi^2} \right] \gamma^2 - 4(1-\omega) < 0,$$

и при $\gamma = \infty$ $\frac{\partial q_0}{\partial \gamma} > 0$, так как $4(1-\omega) - \frac{3(\lambda-\omega)}{\psi^2} > 0$.

Следовательно, в интервале $0 < \gamma < \infty$ имеется по крайней мере один корень уравнения $\frac{\partial q_0}{\partial \gamma} = 0$, причем $\frac{\partial q_0}{\partial \mu} > 0$, и поэтому выпучивание происходит с образованием одной полуволны по длине оболочки.

б) $e=1$ — напряжение от осевого сжатия равно кольцевому напряжению. Тогда q_0 принимает вид:

$$q_0 = \frac{4(1-\omega)(1-\lambda)}{(4-3\lambda-\omega)\alpha^2} \delta^3 + \frac{(4-\omega-3\lambda)\beta^2}{36} \frac{\alpha^2}{\delta},$$

где

$$\delta = \frac{\alpha^2}{\alpha^2 + n^2}.$$

Отсюда

$$\frac{\partial q_0}{\partial \delta} = \frac{12(1-\omega)(1-\lambda)}{(4-3\lambda-\omega)\alpha^2} \delta^2 - \frac{(4-\omega-3\lambda)\beta^2}{36} \frac{\alpha^2}{\delta^2} = 0,$$

$$\delta = \alpha \sqrt{\frac{(4-\omega-3\lambda)\beta}{12}} \sqrt[4]{\frac{1}{3(1-\omega)(1-\lambda)}}.$$

Подставляя это значение δ в выражение q_0 , имеем

$$q_0 = 0,1708 \alpha \beta^{3/2} (1-\omega)^{1/4} (1-\lambda)^{1/4} \sqrt{4-\omega-3\lambda}.$$

При $\lambda = \omega = 0$ из этой формулы получаем упругое решение в виде формул (6.4), (6.5). Значит, при $e=1$ потеря устойчивости происходит с образованием одной полуволны по длине образующей оболочки.

в) $e = \frac{1}{2}$ — случай всестороннего равномерного внешнего давления. Здесь получаем те же результаты, что и в случае б).

г) Положим $e = s\gamma$, $s \sim 1$, $\alpha^2 \leq \frac{1}{2}$. Так как $\gamma = \frac{n^2}{\alpha^2}$, $n \geq 2$, то $\gamma \geq 8$,

$\gamma^2 \geq 64$. Поэтому в выражениях $f_1(\gamma)$ и $f_2(\gamma)$ можем оставить лишь члены с γ^2 . Тогда

$$f_1(\gamma) = \frac{\beta^2}{36(1+s)} \left[4(1-\omega) - \frac{3(\lambda-\omega)}{\beta^2} \right] \gamma,$$

$$f_2(\gamma) = \frac{4(1-\omega)(1-\lambda)}{(1+s)[4(1-\omega) - 3(\lambda-\omega)/\beta^2]} \gamma^3,$$

$$f_1'(\gamma) = \frac{\beta^2 [4(1-\omega) - 3(\lambda-\omega)/\beta^2] (2s+1)}{36(1+s)^2},$$

$$f_2'(\gamma) = - \frac{4(1-\omega)(1-\lambda)(2s+3)}{(1+s)^2 [4(1-\omega) - 3(\lambda-\omega)/\beta^2]} \gamma^4,$$

$$\mu^2 = \alpha^4 = \frac{9(1-\lambda)(2s+3)}{(1-\omega)\gamma^4\beta^2(2s+1)}.$$

Отсюда

$$\gamma = \frac{1}{\alpha} \left\{ \frac{9(2s+3)(1-\lambda)}{\beta^2(1-\omega)(2s+1)} \right\}^{1/4}, \quad e = \frac{s}{\alpha} \left\{ \frac{9(2s+3)(1-\lambda)}{\beta^2(1-\omega)(2s+1)} \right\}^{1/4}.$$

Подстановка этих значений в выражение для q_0 дает

$$q_0 = \frac{4\alpha\beta^{3/2}(1-\omega)^{3/4}(1-\lambda)^{1/4}}{9^{3/4}(2s+3)^{3/4}(2s+1)^{1/4}}.$$

При действии лишь равномерного внешнего давления имеем

$$q_{0,m} = \frac{4\alpha\beta^{3/2}(1-\omega)^{3/4}(1-\lambda)^{1/4}}{9 \cdot 3^{3/4}}.$$

Поэтому

$$\frac{p_0}{p_{0,m}} = 1 : \left[(1+2s)^{1/4} \left(1 + \frac{2s}{3} \right)^{3/4} \right].$$

При действии лишь осевого усилия имеем

$$T_{0,m} = \frac{2}{3} Et\beta \sqrt{(1-\lambda)(1-\omega)}.$$

Из выражения $X_x = eY_y$ находим

$$T_0 = ep_0a = \frac{4Et\beta(1-\omega)^{1/2}(1-\lambda)^{1/2}s}{9^{1/2}\sqrt{(2s+3)(2s+1)}}.$$

Поэтому

$$\frac{T_0}{T_{0,m}} = \frac{2s}{\sqrt{(2s+3)(2s+1)}}.$$

На основе этого составляем таблицу для $\frac{p_0}{p_{0,m}}$ и $\frac{T_0}{T_{0,m}}$ в зависимости от s .

rs	0	0,5	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	∞
$\frac{T_0}{T_{0,m}}$	0	0,36	0,52	0,68	0,7	0,8	0,84	0,86	0,88	0,89	0,9	0,91	1
$\frac{p_0}{p_{0,m}}$	1	0,68	0,52	0,36	0,27	0,22	0,18	0,16	0,14	0,12	0,11	0,1	0

Отсюда видно, что приближенно можно принять

$$\frac{T_0}{T_{0,m}} + \frac{p_0}{p_{0,m}} = 1.$$

В каждом частном случае $T_{0,m}$ и $p_{0,m}$ мы можем найти. Поэтому для заданного значения e мы можем найти и критические величины T_0 и p_0 .

Поступила в редакцию
20/XII-1954 г.

Физико-технический ин-т
Казанского филиала АН СССР

ЛИТЕРАТУРА

- Муштарн Х. М. Некоторые обобщения теории тонких оболочек. Известия физико-математического о-ва при Казанском университете, т. II, серия 8, 1938.
- Ильющин А. А. Пластичность, Гостехиздат, 1948.
- Толоконников Л. А. Вестник МГУ, № 6, 1949.

СОДЕРЖАНИЕ

Р. Г. Суркин. К теории устойчивости вытянутой эллипсоидальной оболочки вращения при внешнем равномерном давлении	3
А. В. Саченков. Приближенное определение нижней границы критической нагрузки при продольном сжатии тонкой конической оболочки	16
Х. М. Муштари. Приближенное определение редуцированного коэффициента обшивки подкрепленной плоской и цилиндрической пластинки при осевом сжатии	23
М. С. Корнишин, Х. М. Муштари. Устойчивость бесконечно длинной пологой цилиндрической панели под действием нормального равномерного давления	36
Ф. С. Исабаева. Определение нижней критической нагрузки цилиндрической оболочки при всестороннем сжатии	51
Н. С. Ганиев. Определение критической нагрузки цилиндрической оболочки за пределом упругости при осевом сжатии и внешнем нормальном давлении	59