

АКАДЕМИЯ НАУК СССР
КАЗАНСКИЙ ФИЛИАЛ

ИЗВЕСТИЯ
КАЗАНСКОГО ФИЛИАЛА
АКАДЕМИИ НАУК СССР

*СЕРИЯ ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИХ
И ТЕХНИЧЕСКИХ НАУК*

6



1955

АКАДЕМИЯ НАУК СССР
КАЗАНСКИЙ ФИЛИАЛ

ИЗВЕСТИЯ
КАЗАНСКОГО ФИЛИАЛА
АКАДЕМИИ НАУК СССР

*СЕРИЯ ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИХ
И ТЕХНИЧЕСКИХ НАУК*

Выпуск 6



ИЗДАТЕЛЬСТВО АКАДЕМИИ НАУК СССР
МОСКВА 1955 ЛЕНИНГРАД

Г. С. САЛЕХОВ

ПОСТАНОВКА И МЕТОД РЕШЕНИЯ ГИДРОДИНАМИЧЕСКИХ ЗАДАЧ УПРАВЛЕНИЯ ДВИЖЕНИЕМ КОНТУРА НЕФТЕНОСНОСТИ

В работе дается общая гидродинамическая постановка двух следующих задач: 1) по заданному характеру размещения и эксплуатации скважин в данном месторождении определить закон стягивания контура нефтеносности; 2) определить такие оптимальные способы размещения и эксплуатации скважин, которые в пределах практически допустимой вариации их наилучшим образом обеспечивали бы желаемый закон стягивания контура нефтеносности.

Первая задача в различных предположениях решалась ранее многими авторами, вторая является новой. В настоящей работе дается метод решения этой задачи для случая, когда скважины рассматриваются как дискретные стоки и источники. Метод решения основан на достижении наименьшего отклонения двух полей скоростей „желаемого“ и „возможного“ путем оптимального выбора размещения и характера эксплуатации скважин в данном месторождении.

Глава I

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ И ТЕОРЕТИЧЕСКОЕ ОБОСНОВАНИЕ МЕТОДА РЕШЕНИЯ

§ 1. Введение

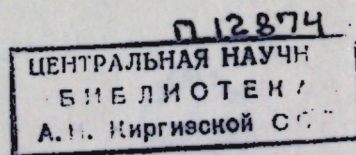
Изучение законов перемещения водо-нефтяного контакта (ВНК) при эксплуатации нефтяных месторождений имеет большое практическое значение. С гидродинамической точки зрения вопрос сводится к решению весьма сложных краевых задач математической физики с подвижными границами и переменными граничными условиями. Все подобные краевые задачи по характеру их постановки и методов подхода к решению могут быть условно разбиты на локальные и нелокальные. К локальным можно отнести все задачи, связанные с изучением перемещения ВНК вблизи скважины, например изучение вопроса образования водяных конусов при эксплуатации скважин с подошвенной водой.

Все другие задачи, связанные с изучением перемещения ВНК для целого нефтяного месторождения, можно считать нелокальными. Настоящая работа посвящена изучению некоторых нелокальных задач управления движением ВНК.

Очевидно, что характер движения ВНК в данном нефтяном месторождении, при учете всех объективных геологических и гидродинамических условий в пласте, будет зависеть от размещения и эксплуатации разбуренных скважин. С этой точки зрения все нелокальные задачи о продвижении ВНК могут быть разбиты на две основные: 1) изучить закон стягивания контура нефтеносности по заданному характеру размещения и эксплуатации скважин; 2) определить такие оптимальные

Главный редактор академик А. Е. Арбузов

Ответственный редактор профессор Г. С. Салехов



способы размещения и эксплуатации скважин в данном месторождении, которые в пределах практически возможной их вариации наилучшим образом обеспечили бы желаемый закон стягивания контура нефтеносности.

Первую из этих задач будем кратко называть задачей прослеживания продвижения ВНК или прямой задачей о продвижении ВНК. Вторую — задачей управления продвижением ВНК или обратной задачей о продвижении ВНК.

Более строгая гидродинамическая постановка этих задач нами будет рассмотрена ниже.

Задача о прослеживании движения ВНК решалась ранее многими авторами.

В нашей статье [1] приводится краткий обзор этих работ и формулировка задач об управлении движением ВНК, в основном, для случая эксплуатационных и нагнетательных галерей.

В настоящей работе дается точная гидродинамическая постановка и приближенный метод решения задачи управления движением ВНК для случая, когда скважины рассматриваются как дискретные стоки и источники. Дается общий метод решения этих задач, который основан на достижении наименьшего возможного отклонения двух полей скоростей — „желаемого“ и „возможного“ путем оптимального выбора характера размещения и эксплуатации скважин в данном месторождении.

§ 2. Основные физико-геологические предпосылки и сокращенные обозначения

Рассмотрим горизонтальный пласт всюду одинаковой мощности h , ограниченный некоторым замкнутым контуром питания Γ_n , на котором поддерживается постоянное давление, равное первоначальному пластовому давлению p_n . Считаем пласт неоднородным, т. е. проницаемость k есть некоторая функция от координат точки. Вязкости воды μ_w и нефти μ_n различны, а плотности их равны.

В пласте разбурены гидродинамически совершенные эксплуатационные и нагнетательные скважины, которые рассматриваются как вертикальные линейные стоки и источники глубиной h . Как известно [2],

несовершенную скважину с точки зрения движения жидкости вне окрестности скважины можно условно заменить совершенной скважиной с тем же дебитом и радиусом, равным удвоенной величине мощности пласта. Поэтому для решения нелокальных задач о продвижении ВНК нет необходимости проводить строгое различие между совершенными и несовершенными скважинами.

Предположим, что жидкость движется в пласте по линейному закону фильтрации в условиях водонапорного режима. Однако следует иметь в виду, что прямые и обратные задачи о движении ВНК могут быть сформулированы независимо от режима пласта, причем методы, предложенные в настоящей работе для решения задачи об управлении движением ВНК, могут быть применены также, например, для случая упругого режима и не обязательно для ограниченных контуров.

Кроме вышеуказанных, введем еще следующие сокращенные обозначения (рис. 1): Γ_0 — первоначальное положение ВНК, Γ — положение ВНК в некоторый момент времени t .

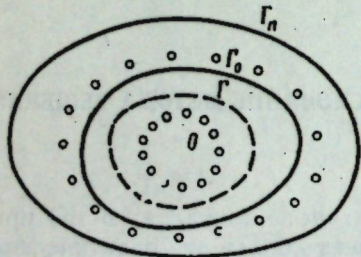


Рис. 1.

В реальных условиях пласта точная граница между водой и нефтью отсутствует, поэтому контуры Γ_0 и Γ надо понимать, как некоторые условно осредненные границы между водой и нефтью.

Все дальнейшие рассуждения и выкладки будем вести в полярных координатах (θ, r) , помещая полюс в некоторой точке внутри контура Γ_1 — конечного положения контура Γ .

Пусть (φ_i, ρ_i) — полярные координаты скважин, q_i — текущие объемные дебиты, p_i — давления, которые поддерживаются на забоях скважин. Будем считать, что индексы $i=1, 2, \dots, n$ относятся к эксплуатационным и $i=n+1, n+2, \dots, n+l$ — к нагнетательным скважинам.

Очевидно, гидродинамическое давление p при заданном режиме пласта внутри области, ограниченной контуром Γ_n , будет являться функцией переменных θ, r, t , а также параметров (φ_i, ρ_i) и q_i . Поэтому можно положить

$$p = p(\theta, r, t, \varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_{n+l}; \rho_1, \rho_2, \dots, \rho_{n+l}; q_1, q_2, \dots, q_{n+l}). \quad (2, 1)$$

§ 3. Постановка задачи о прослеживании движения ВНК

Пусть заданы уравнения контуров Γ_n и Γ_0 , полярные координаты скважин (φ_i, ρ_i) ($i=1, 2, \dots, n+l$) и их текущие объемные дебиты q_i (или p_i). Требуется определить закон продвижения ВНК, т. е. Γ в любой момент времени.

При решении этой задачи для случая водонапорного режима можно использовать следующие основные уравнения.

Как известно [3], давление в пластах с переменной проницаемостью k удовлетворяет уравнению

$$\frac{\partial}{\partial r} \left(rk \frac{\partial p}{\partial r} \right) + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(k \frac{\partial p}{\partial \theta} \right) = 0. \quad (3, 1)$$

Если давление внутри области \bar{G} , ограниченной контуром Γ , обозначим через \bar{p} , а в области \bar{G} между Γ и Γ_n через \bar{p} , то, во-первых, каждая из этих функций должна удовлетворять уравнению (3, 1), во-вторых, в силу непрерывности давления и нормальных скоростей на Γ должны выполняться условия:

$$\bar{p}^+ = \bar{p}^-, \quad (3, 2)$$

$$\frac{k}{\mu_n} \cdot \frac{\partial \bar{p}^+}{\partial n} = \frac{k}{\mu_n} \cdot \frac{\partial \bar{p}^-}{\partial n}. \quad (3, 3)$$

Соответственно областям \bar{G}^+ и \bar{G}^- уравнение (3, 1) может быть разбито на два:

$$\frac{\partial}{\partial r} \left(rk \frac{\partial \bar{p}^+}{\partial r} \right) + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(k \frac{\partial \bar{p}^+}{\partial \theta} \right) = 0, \quad (3, 4)$$

$$\frac{\partial}{\partial r} \left(rk \frac{\partial \bar{p}^-}{\partial r} \right) + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(k \frac{\partial \bar{p}^-}{\partial \theta} \right) = 0. \quad (3, 5)$$

Нам необходимо найти функции \bar{p}^+ и \bar{p}^- при выполнении краевых условий (3, 2) и (3, 3) на контуре Γ и при условии, что

$$\bar{p}^- \Big|_{\Gamma_n} = p_n = \text{const.} \quad (3, 6)$$

Далее, на основании закона Дарси в полярных координатах имеем

$$v_r = -\frac{k}{\mu_n} \cdot \frac{\partial p^+}{\partial r} \text{ и } v_\theta = -\frac{k}{\mu_n} \cdot \frac{1}{r} \frac{\partial p^+}{\partial \theta}, \quad (3,7)$$

$$v_r = -\frac{k}{\mu_n} \cdot \frac{\partial \bar{p}}{\partial r} \text{ и } v_\theta = -\frac{k}{\mu_n} \cdot \frac{1}{r} \frac{\partial \bar{p}}{\partial \theta}, \quad (3,8)$$

где $v_r = m \frac{dr}{dt}$ и $v_\theta = mr \frac{d\theta}{dt}$ (m — пористость пласта).

Требуется найти уравнение контура Γ

$$F(r, \theta, t) = 0, \quad (3,9)$$

причем функция $F(r, \theta, 0) = F_0(r, \theta) = 0$ (уравнение контура Γ_0) считается известной.

Беря полную производную по t , из уравнений (3,9) получим

$$\frac{\partial F}{\partial t} + \frac{\partial F}{\partial \theta} \cdot \frac{d\theta}{dt} + \frac{\partial F}{\partial r} \cdot \frac{dr}{dt} = 0. \quad (3,10)$$

Согласно (3,7) и (3,8) на контуре Γ имеем

$$\left. \frac{dr}{dt} \right|_\Gamma = -\frac{k}{\mu_n m} \cdot \left. \frac{\partial p^+}{\partial r} \right|_\Gamma, \quad \left. \frac{d\theta}{dt} \right|_\Gamma = -\frac{k}{m \mu_n} \cdot \left. \frac{1}{r^2} \frac{\partial p^+}{\partial \theta} \right|_\Gamma, \quad (3,11)$$

$$\left. \frac{dr}{dt} \right|_\Gamma = -\frac{k}{m \mu_n} \cdot \left. \frac{\partial \bar{p}}{\partial r} \right|_\Gamma, \quad \left. \frac{d\theta}{dt} \right|_\Gamma = -\frac{k}{m \mu_n} \cdot \left. \frac{1}{r^2} \frac{\partial \bar{p}}{\partial \theta} \right|_\Gamma. \quad (3,12)$$

Подставляя выражения (3,11) и (3,12) в уравнение (3,10) для определения функции $F(\theta, r, t)$, получим два эквивалентных, вообще говоря, функциональных уравнения:

$$m \frac{\partial F}{\partial t} - \frac{k}{\mu_n} \left[\frac{1}{r^2} \cdot \left. \frac{\partial p^+}{\partial \theta} \right|_\Gamma \cdot \frac{\partial F}{\partial \theta} + \left. \frac{\partial p^+}{\partial r} \right|_\Gamma \cdot \frac{\partial F}{\partial r} \right] = 0, \quad (3,13')$$

$$m \frac{\partial F}{\partial t} - \frac{k}{\mu_n} \left[\frac{1}{r^2} \cdot \left. \frac{\partial \bar{p}}{\partial \theta} \right|_\Gamma \cdot \frac{\partial F}{\partial \theta} + \left. \frac{\partial \bar{p}}{\partial r} \right|_\Gamma \cdot \frac{\partial F}{\partial r} \right] = 0, \quad (3,13'')$$

где $F(r, \theta, 0) = F_0$ считается функцией заданной, причем не следует забывать, что выражения

$$\left. \frac{1}{r^2} \frac{\partial p^+}{\partial \theta} \right|_\Gamma, \quad \left. \frac{1}{r^2} \frac{\partial \bar{p}}{\partial \theta} \right|_\Gamma, \quad \left. \frac{\partial p^+}{\partial r} \right|_\Gamma \text{ и } \left. \frac{\partial \bar{p}}{\partial r} \right|_\Gamma$$

сами являются некоторыми функционалами, зависящими от неизвестной функции $F(\theta, r, t)$.

Отметим, что в общем случае решение уравнений типа (3,13) с предварительным вычислением функций p^+ и \bar{p} до сих пор никем не рассмотрено. Эта задача является с математической точки зрения весьма сложной. Решение ее сводится в основном к двум этапам. Во-первых, необходимо определить функции давления p^+ и \bar{p} соответственно в областях \bar{G}^+ и \bar{G} в зависимости от движения контура Γ (ВНК), уравнение которого не известно. Во-вторых, надо решить функциональное уравнение (3,13') или (3,13''). Оба эти этапа требуют сложных аналитических исследований. В частном случае, когда заранее известно, что движе-

ние ВНК радиально-круговое или поступательно-прямолинейное, уравнение (3,13) может быть до конца проинтегрировано (см., например, [1]).

Далее, если в пластовых условиях предположить, что $\mu_n \approx \mu_n = \mu$, то условия (3,2) и (3,3) на ВНК будут выполнены сами собой и в этом случае давление p во всей области внутри контура Γ_n будет выражено одной функцией p , не зависящей от Γ , удовлетворяющей уравнению (3,1) и краевому условию $p|_{\Gamma_n} = p_n$. Тогда уравнение для определения F примет следующий вид:

$$m \frac{\partial F}{\partial t} - \frac{k}{\mu} \left[\frac{1}{r^2} \frac{\partial p}{\partial \theta} \cdot \frac{\partial F}{\partial \theta} + \frac{\partial p}{\partial r} \cdot \frac{\partial F}{\partial r} \right] = 0, \quad (3,14)$$

где $F|_{t=0} = F(r, \theta)$ — некоторая заданная функция.

Таким образом, в этом случае вопрос сводится к решению задачи Коши для уравнения в частных производных.

Определение функции F в предположении $\mu_n \approx \mu_n$ представляет также большой практический интерес. Дело в том, что: 1) различие вязкостей воды и нефти на движение ВНК начинает оказывать ощутимое влияние лишь вблизи скважины (см., например, [1], гл. VIII); 2) в случае, когда вода, замещая нефть, поступает в зону, ранее занятую нефтью, в силу задержки некоторой части нефти (остаточная нефть), в пределах затопленной зоны получается частичная закупорка пор, что можно рассматривать как уменьшение проницаемости пористой среды; однако при аналитическом решении задачи это явление можно отнестись за счет увеличения вязкости воды; во многих случаях это обстоятельство также может являться основанием для решения задачи о движении ВНК при условии, когда $\mu_n = \mu_n$ (см., например, [1], гл. VIII); 3) когда задача о движении ВНК решена для однородных жидкостей последующим введением поправочного множителя, как это предлагает В. Н. Щелкачев [5], можно приближенно учитывать различие вязкостей воды и нефти; наконец, даже в том случае, когда вышеуказанные соображения не будут приняты в расчет, пренебрегая различием вязкости нефти и воды, мы можем получить хорошую качественную характеристику рассматриваемого явления. Исходя из этих соображений, мы в дальнейшем при решении задачи об управлении продвижением ВНК в первом приближении пока будем предполагать $\mu_n \approx \mu_n$.

§ 4. Постановка и метод решения задачи управления продвижением ВНК

Наряду с разработкой рациональных методов решения задач проектирования движения ВНК, имеющих большое значение для нефтепромысловой практики, мы здесь намерены поставить новые задачи, в некотором смысле обратные рассматриваемым в предыдущем параграфе. Общая формулировка этих задач была уже дана во «Введении» настоящей работы, однако она требует некоторого уточнения.

Основной целью решения подобных задач является разработка метода эксплуатации данного нефтяного месторождения в целом, позволяющего рационально управлять продвижением ВНК за счет таких оптимальных способов размещения и характера эксплуатации скважин, которые, в пределах практически возможной вариации их, наилучшим образом обеспечивали бы желаемый закон стягивания контура нефтеносности.

Возможность постановки и решения таких задач становится вполне реальной особенно теперь, когда в нефтепромысловую практику широко

вводится законное заводнение. Решение обратных задач о продвижении ВНК при данном режиме пласта, помимо разработки гидродинамических методов управления ВНК, должно также дать возможность не только рационально эксплуатировать имеющееся месторождение, но и заранее планировать разработку месторождения в целом с введением законного заводнения. Следует отметить, что математический подход к решению таких задач в общем случае становится более простым, чем при постановке задачи прослеживания движения ВНК. Дело в том, что при постановке задачи управления продвижением ВНК приходится удовлетворять определенным краевым условиям непрерывности давления и равенства нормальных скоростей на контуре нефтеносности, закон стягивания которого заранее мы считаем заданным в отличие от прямой задачи о продвижении ВНК, когда этим условиям приходится удовлетворять на контуре, уравнение которого неизвестно [§ 3, условия (3, 2) и (3, 3)].

То обстоятельство, что краевые условия выполняются на известном контуре, уже значительно упрощает решение обратных задач сравнительно с решением прямых задач.

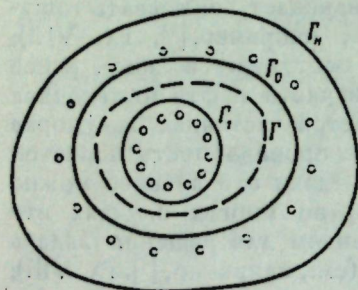


Рис. 2.

После предварительных замечаний перейдем к общей математической формулировке задачи об управлении продвижением ВНК, при этом будем сохранять все основные физико-геологические предпосылки и сокращенные обозначения, которые нами были приняты в §§ 2 и 3. С целью извлечения максимального количества нефти из данного нефтяного месторождения, насколько это реально возможно, необходимо так расставить эксплуатационные и нагнетательные скважины и так их эксплуатировать, чтобы контур Γ_0 стянулся к наперед заданному контуру Γ_1 (рис. 2) равномерно, без образования „целиков“ и „водяных языков“.

Предположим, что желаемый закон стягивания контура Γ_0 к Γ_1 задан уравнением

$$r = f(\theta, t). \quad (4, 1)$$

При этом будем говорить, что контур Γ_0 равномерно стягивается к контуру Γ_1 в течение времени T , если для любых двух моментов времени t_1 и t_2 , таких, что $T \geq t_2 > t_1 \geq 0$, и для любого $0 \leq \theta \leq 2\pi$ всегда имеет место неравенство

$$f(\theta, 0) \geq f(\theta, t_1) > f(\theta, t_2) \geq f(\theta, T). \quad (4, 2)$$

Здесь мы считаем, что $r = f(\theta, 0)$ дает уравнение контура Γ_0 и $r = f(\theta, T)$ — уравнение контура Γ_1 .

Условие (4, 2) будет всегда выполнено, если для любого $0 \leq t \leq T$ и $0 \leq \theta \leq 2\pi$ будет иметь место неравенство

$$\frac{\partial f}{\partial t} < 0. \quad (4, 3)$$

Очевидно, когда уравнения контуров Γ_0 и Γ_1 заранее заданы, законы равномерного стягивания контура Γ_0 к Γ_1 можно было бы задавать бесконечным множеством способов. В дальнейшем для определенности задачи выберем, например, следующий закон равномерного стягивания:

$$r^2 = r_0^2 - \lambda(t) [r_0^2 - r_1^2], \quad (4, 4)$$

где $r_0 = f(\theta, 0)$ — заданное уравнение контура Γ_0 и $r_1 = f(\theta, T)$ — заданное уравнение контура Γ_1 , $\lambda(t)$ — некоторая положительная возрастающая функция от t в промежутке $0 < t \leq T$, причем $\lambda(0) = 0$, $\lambda(T) = 1$ и $0 \leq \lambda(t) \leq 1$:

Легко видеть, что функция

$$r = \sqrt{r_0^2 - \lambda(t) (r_0^2 - r_1^2)} = f(\theta, t) > 0$$

условию (4, 3) удовлетворяет. В самом деле, так как $r_0 > r_1$ и $\lambda(t)$ — монотонно возрастающая положительная функция для всех $0 \leq t \leq T$ и $0 \leq \theta \leq 2\pi$, будем иметь

$$\frac{\partial r}{\partial t} = - \frac{\lambda'(t) [r_0^2 - r_1^2]}{2r} < 0.$$

Как будет ясно из дальнейших выкладок, выбор закона равномерного стягивания Γ_0 к Γ_1 в виде (4, 4) во многих отношениях является удобным. Функцию $\lambda(t)$ можно интерпретировать как степень разработки данного месторождения к моменту времени t . В самом деле, условие равенства суммарной объемной добычи $V(t)$ всех эксплуатационных скважин за время t разработанному объему кольцевого цилиндра высотой h (равной мощности пласта) и ограниченного цилиндрическими поверхностями $r_0 = f(\theta, 0)$ и $r = f(\theta, t)$ ($t > 0$) дает

$$V(t) = \int_0^t \sum_{i=1}^n q_i(t) dt = - \frac{mh}{2} \int_0^{2\pi} [r_0^2 - r^2] d\theta,$$

где m — пористость пласта.¹

Но, согласно (4, 4), из последнего равенства получаем

$$V(t) = - mhs_0 \lambda(t), \quad (4, 5)$$

где $s_0 = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} [r_0^2 - r_1^2] d\theta$ есть площадь всего кольца между Γ_0 и Γ_1 ,

т. е. площадь, предназначенная к разработке. Если ввести обозначение $V_0(t) = - mhs_0 \lambda(t)$ — эффективный объем нефти, предназначенной к разработке, то будем иметь

$$\lambda(t) = \frac{V(t)}{V_0} = \frac{s(t)}{s_0}, \quad (4, 6)$$

где $s(t)$ — площадь, разработанная к моменту времени t .

Таким образом, $\lambda(t)$ определяет степень разработки данного месторождения к моменту времени t и является величиной безразмерной, поэтому естественно назвать ее текущим коэффициентом разработки.

Очень важно отметить, что текущий коэффициент разработки $\lambda(t)$ — функция, монотонно возрастающая от 0 до 1 в промежутке $0 \leq t \leq T$, — по быстроте роста не может быть реально выбран произвольным. Дело в том, что скорость стягивания контура Γ_0 к Γ_1 будет зависеть от ряда технических и нефтепромысловых условий эксплуатации данного нефтяного месторождения. Вопрос о выборе реально допустимых текущих коэффициентов разработки данного нефтяного месторождения в связи с задачей управления продвижением ВНК нами будет рассмотрен отдельно (см. § 6). Так как мы решаем задачу управления продвижением ВНК

¹ В правой части для простоты опущен множитель — коэффициент нефтеотдачи пласта.

при тех же основных физико-геологических предпосылках и сокращенных обозначениях, которые были приняты в §§ 2 и 3, то основные дифференциальные уравнения и краевые условия для определения функции давления p будут теми же, которые указаны в § 3. Существенное отличие задачи управления продвижением ВНК от задачи прослеживания состоит в том, что здесь мы считаем уравнение (3, 9) движения контура нефтеносности Γ известным, т. е. считаем заданным уравнение

$$F(r, \theta, t) = r - f(\theta, t) = 0, \quad (4, 7)$$

где для определенности задачи полагаем

$$r^2 = r_0^2 - \lambda(t) [r_0^2 - r_1^2].$$

Тогда, соответственно уравнениям (3, 13') и (3, 13''), запишем следующие равенства:

$$m \frac{\partial r}{\partial t} - \frac{k}{\mu_n} \cdot \frac{1}{r^2} \cdot \frac{\partial r}{\partial \theta} \left[\frac{\partial p}{\partial \theta} \right]_{\Gamma} + \frac{k}{\mu_n} \left[\frac{\partial p}{\partial r} \right]_{\Gamma} = \Phi \quad (4, 8')$$

$$m \frac{\partial r}{\partial t} - \frac{k}{\mu_n} \cdot \frac{1}{r^2} \cdot \frac{\partial r}{\partial \theta} \left[\frac{\partial \bar{p}}{\partial \theta} \right]_{\Gamma} + \frac{k}{\mu_n} \cdot \left[\frac{\partial \bar{p}}{\partial r} \right]_{\Gamma} = \Psi, \quad (4, 8'')$$

где Φ и Ψ — те „невязки“, которые получились за счет произвольно выбранного нами закона стягивания ВНК: $r = f(\theta, t)$.

Рассмотрим, например, первое из этих эквивалентных уравнений. Предположим, что функция \bar{p} найдена. Согласно (2, 1) можно считать, что

$$\bar{p} = \bar{p}(r, \theta, t, \varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_{n+l}, \rho_1, \rho_2, \dots, \rho_{n+l}, q_1, q_2, \dots, q_{n+l}), \quad (4, 9)$$

где φ_i, ρ_i, q_i ($i=1, 2, \dots, n+l$) некоторые параметры, в зависимости от которых выражена функция давления \bar{p} .

Определяя из (4, 9) выражения для $\left[\frac{\partial \bar{p}}{\partial \theta} \right]_{\Gamma}$, $\left[\frac{\partial \bar{p}}{\partial r} \right]_{\Gamma}$ и подставляя их в уравнение (4, 8'), получим

$$\begin{aligned} \Phi(\theta, t, \varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_{n+l}, \rho_1, \rho_2, \dots, \rho_{n+l}, q_1, q_2, \dots, q_{n+l}) &= \\ &= m \frac{\partial r}{\partial t} - \frac{k}{\mu_n} \cdot \frac{1}{r^2} \frac{\partial r}{\partial \theta} \left[\frac{\partial \bar{p}}{\partial \theta} \right]_{\Gamma} + \frac{k}{\mu_n} \left[\frac{\partial \bar{p}}{\partial r} \right]_{\Gamma}, \end{aligned} \quad (4, 10)$$

где Φ — некоторая функция от переменных θ, t и величин φ_i, ρ_i, q_i ($i=1, 2, \dots, n+l$).

Независимо от изменения переменных θ и t соответственно в промежутках $0 \leq \theta \leq 2\pi$ и $0 \leq t \leq T$ здесь возможны следующие два случая.

1. Можно величины $\varphi_i, \rho_i, q_i(t)$ выбрать так, что будет $\Phi \equiv 0$. Физически это означает, что при данном размещении скважин и характере их эксплуатации заранее выбранный нами закон $r = f(\theta, t)$ стягивания контура нефтеносности будет реализован точно.

Другими словами, это означало бы, что данная система скважин с соответствующими режимами их эксплуатации образовала бы „синхронные контуры“,¹ определяемые уравнениями $r = f(\theta, t)$ при различных t .

¹ Обобщая понятие, введенное В. П. Яковлевым [6], под „синхронными контурами“ мы понимаем контуры, все точки которых за данный промежуток времени t достигаются одновременно точками начального контура Γ_0 .

2. Величины $\varphi_i, \rho_i, q_i(t)$ нельзя выбрать так, чтобы $\Phi \equiv 0$. Физически это означает, что никакими размещениями данного числа скважин и никакими режимами их эксплуатации выбранный нами закон стягивания контура нефтеносности точно реализовать невозможно. Вероятность такого случая несравненно более велика, чем предыдущего. В этом случае практически задача может быть поставлена и решена лишь приближенно в смысле возможно наилучшего приближения к заданному закону стягивания.¹ Для этой цели, например, можно использовать теорию наилучшего приближения функций, основа которой была заложена акад. П. Л. Чебышевым, исходившим из чисто практических задач по созданию механизмов — „прямил“.

Здесь нами руководит та же мысль, которая руководила П. Л. Чебышевым, писавшим: „Практическая деятельность человека предоставляет чрезвычайное разнообразие, и для удовлетворения всех ее требований, разумеется, недостает науке многих и различных методов. Но из них особую важность имеют те, которые необходимы для решения различных видоизменений одной и той же задачи, общей для всей практической деятельности человека: как располагать средствами своими для достижения по возможности наибольшей выгоды“.²

Из этой основной установки вытекает следующая направленность всех работ П. Л. Чебышева в области теории наилучшего приближения функции: когда невозможно точное решение задачи, надо найти ее приближенное решение так, чтобы наибольшая возможная погрешность при этом была наименьшей.

С этой точки зрения задача в общем случае может быть сформулирована следующим образом: когда функция Φ в зависимости от переменных θ, t и величин $\varphi_i, \rho_i, q_i(t)$ найдена, мы определим норму этой функции $\|\Phi\|$ для всех $0 \leq \theta \leq 2\pi$ и $0 \leq t \leq T$ в смысле какого-либо нормированного функционального пространства. При этом величины $\varphi_i, \rho_i, q_i(t)$ для всех $0 \leq \theta \leq 2\pi$ и $0 \leq t \leq T$ определим так, чтобы $\max \|\Phi\|$ был наименьшим.

Для определенности задачи рассмотрим, например, норму Φ в пространстве функций, интегрируемых с квадратом. Тогда будем иметь

$$\|\Phi\| = \int_0^{2\pi} \Phi^2 d\theta. \text{ Очевидно, из условия } \Phi \equiv 0 \text{ следует } \|\Phi\| = 0 \text{ и, наоборот,}$$

из условия $\|\Phi\| = 0$ следует $\Phi \equiv 0$. Разложим функцию Φ в ряд Фурье в промежутке $0 \leq \theta \leq 2\pi$. Будем иметь

$$\Phi = \frac{A_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} [A_k \cos k\theta + B_k \sin k\theta],$$

где

$$\left. \begin{aligned} A_k &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \Phi \cos k\theta d\theta, \\ B_k &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \Phi \sin k\theta d\theta \end{aligned} \right\} \quad (4, 11)$$

($k=0, 1, 2, 3, \dots$).

Здесь A_k, B_k будут являться некоторыми функциями от φ_i, ρ_i, t и $q_i(t)$ ($i=1, 2, \dots, n+l$).

¹ Практическая непригодность в реальных условиях точного решения задачи управления продвижением ВНК также доказана в работе В. Л. Данилова [7].

² П. Л. Чебышев, Черчение географических карт. Избранные математические труды. Гостехиздат, 1946, стр. 100.

Из теории рядов Фурье известно, что

$$\frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \Phi^2 d\theta = \frac{A_0^2}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} [A_k^2 + B_k^2], \quad (4, 12)$$

причем ряд, стоящий в правой части этого равенства, сходится, т. е. $\lim_{k \rightarrow \infty} A_k = \lim_{k \rightarrow \infty} B_k = 0$. Сходимость ряда тем сильнее, чем больше непрерывных производных имеет функция Φ в промежутке $0 \leq \theta \leq 2\pi$.

Таким образом, для выполнения условия $\Phi = 0$ необходимо и достаточно, чтобы все коэффициенты Фурье были равны нулю. Однако в общем случае выбором лишь $3(n+1)$ параметров $\varphi_i, \rho_i, q_i(t)$ ($i = 1, 2, \dots, n+1$) добиться точного выполнения этого условия нельзя. Поэтому, решая задачу приближенно, для определения величин $\varphi_i, \rho_i, q_i(t)$ мы можем составить систему $2N+1$ уравнений

$$A_0 = 0, A_i = 0, B_i = 0 \quad (i = 1, 2, \dots, N). \quad (4, 13)$$

Как мы увидим в дальнейшем, практически возможны следующие три случая:

$$1) 2N+1 < 3(n+1), \quad 2) 2N+1 = 3(n+1) \quad \text{и} \quad 3) 2N+1 > 3(n+1).$$

В зависимости от постановки задачи и желаемой степени точности ее решения мы будем брать последовательно столько уравнений, сколько их необходимо для определения величин $\varphi_i, \rho_i, q_i(t)$. Более подробно о выборе числа этих уравнений будет сказано ниже.

Дадим оценку допускаемой ошибки. За меру погрешности отклонения Φ от 0 во всем промежутке $0 \leq \theta \leq 2\pi$ примем корень квадратный из среднеарифметического квадратов всех ошибок. Тогда будем иметь

$$I_N = \sqrt{\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \Phi^2 d\theta} = \sqrt{\frac{1}{2} \sum_{k=N+1}^{\infty} [A_k^2 + B_k^2]}, \quad (4, 14)$$

причем в равенстве (4, 14) вместо величин φ_i, ρ_i, q_i ($i = 1, 2, \dots, n+1$) подставлены их значения, подсчитанные из системы уравнений (4, 13). Заметим, что $\lim_{N \rightarrow \infty} I_N = 0$. Отсюда следует, что чем больше число скважин, тем точнее может быть решена задача.

Вышеприведенным рассуждениям можно дать следующее физическое толкование.

Как нетрудно убедиться по смыслу вывода уравнения (4, 10), равенство нулю Φ для всех $0 \leq \theta \leq 2\pi$ и $0 \leq t \leq T$ означает точное совпадение поля скоростей, создаваемого, с одной стороны, работой $n+1$ скважин с координатами φ_i, ρ_i и дебитами q_i и, с другой стороны, заданным законом стягивания $r = f(\theta, t)$ контура Γ_0 к Γ_1 в течение времени от 0 до T . В том случае, когда такое точное совпадение невозможно, наименьшее возможное среднеквадратичное отклонение поля скоростей может быть оценено по формуле (4, 14).

Таким образом, задача здесь ставится, имея в виду достижение максимальной близости двух полей скоростей — „возможного“ и „желаемого“.

Однако, как нетрудно убедиться, эта близость также влечет за собой и близость самих контуров нефтеносности в процессе движения. В самом деле, пусть согласно (4, 10) отыскивается решение нелинейного

дифференциального уравнения в частных производных 1-го порядка относительно неизвестной функции r

$$m \frac{\partial r}{\partial t} - \frac{k}{\mu_n} \cdot \frac{1}{r^2} \cdot \frac{\partial r}{\partial \theta} \cdot \frac{\partial p}{\partial \theta} + \frac{k}{\mu_n} \frac{\partial p}{\partial r} = \Phi$$

при начальном условии $r|_{t=0} = f(\theta, 0)$, где $\frac{\partial p}{\partial r}, \frac{\partial p}{\partial \theta}$ и Φ в области G между Γ_0 и Γ_1 — непрерывные функции от r, θ, t .

Из теории дифференциальных уравнений известно, что при малом изменении Φ также мало будут отличаться и соответствующие решения. Было бы, конечно, интересно оценить величину среднеквадратичного отклонения самих решений в зависимости от того, насколько Φ отличается от нуля. Однако непосредственное решение такой задачи в общем случае наталкивается на большие трудности, связанные с нахождением достаточно точного решения краевой задачи для нелинейного уравнения в частных производных.

К выводу основных уравнений (4, 13) можно было бы также подойти не только с точки зрения наилучшего среднеквадратичного приближения, но и с точки зрения наилучшего равномерного приближения „возможного“ и „желаемого“ полей скоростей.

В самом деле, известна следующая теорема С. Н. Бернштейна [8].
Из всех сумм

$$G_m(\theta) = A_0 + A_1 \cos \theta + B_1 \sin \theta + \dots + A_{m-1} \cos(m-1)\theta + B_{m-1} \sin(m-1)\theta + A_m \cos m\theta + B_m \sin m\theta$$

с заданными коэффициентами A_m и B_m в промежутке $0 \leq \theta \leq 2\pi$ наименее уклоняется от нуля сумма

$$G_m^*(\theta) = A_m \cos m\theta + B_m \sin m\theta,$$

причем искомое наименьшее уклонение равно $\sqrt{A_m^2 + B_m^2}$.

Применим эту теорему к нашим исследованиям. Рассмотрим функцию Φ , разложенную в промежутке $0 \leq \theta \leq 2\pi$ в ряд Фурье

$$\Phi = A_0 + A_1 \cos \theta + B_1 \sin \theta + A_2 \cos 2\theta + B_2 \sin 2\theta + \dots$$

Приближенно положим

$$\Phi = A_0 + A_1 \cos \theta + B_1 \sin \theta + \dots + A_N \cos N\theta + B_N \sin N\theta + A_{N+1} \cos(N+1)\theta + B_{N+1} \sin(N+1)\theta.$$

Предположим теперь $\varphi_i, \rho_i, q_i(t)$ подобранными так, что

$$A_0 = A_1 = B_1 = \dots = A_N = B_N = 0. \quad (4, 15)$$

Тогда, согласно теореме С. Н. Бернштейна, в пределах точности взятого числа $N+1$ гармоник функция Φ будет функцией, наименее отклоняющейся от нуля, т. е. $\delta = \max_{0 \leq \theta \leq 2\pi} |\Phi|$ будет наименьшим, причем

$$\delta = \sqrt{A_{N+1}^2 + B_{N+1}^2}. \quad (4, 16)$$

Таким образом, как и ранее, мы здесь будем иметь дело с той же системой уравнений (4, 15).

Весьма важно заметить, что система уравнений (4, 15) аналогична системе уравнений, используемой в методе акад. Б. Г. Галеркина (см.,

например, [0], гл. IV) для решения нелинейного уравнения в частных производных

$$m \frac{\partial r}{\partial t} - \frac{k}{\mu_n} \cdot \frac{1}{r^2} \cdot \frac{\partial r}{\partial \theta} \cdot \frac{\partial p}{\partial r} + \frac{k}{\mu_n} \cdot \frac{\partial p}{\partial r} = 0, \quad (4, 17)$$

когда за полную систему линейно независимых функций принята система тригонометрических функций $1, \cos \theta, \sin \theta, \cos 2\theta, \sin 2\theta, \dots$

Однако наша постановка задачи и использование системы уравнений (4, 15) существенно отличаются от метода Галеркина. Дело в том, что этот метод используется для нахождения решения данного дифференциального уравнения при заданных краевых и начальных условиях. Его, например, можно было бы использовать для приближенного решения прямой задачи, т. е. задачи определения решения уравнения (4, 17) при начальном условии $r|_{t=0} = f(\theta, 0)$, когда координаты и дебит скважин заданы.¹ В нашей постановке решается обратная задача, т. е. задача определения координат и дебитов скважин таким образом, чтобы эксплуатация этих скважин обеспечивала бы по возможности точнее желаемый закон стягивания контура нефтеносности. Как выше было показано, с математической стороны дело сводится к определению параметров φ_i, ρ_i и функций $q_i(t)$, входящих в уравнение так, чтобы его решение, удовлетворяющее начальному условию $r|_{t=0} = f(\theta, 0)$ для всех $0 \leq \theta \leq 2\pi$ и $0 \leq t \leq T$, по возможности точнее совпадало с наперед заданной функцией.

Теперь несколько слов о выборе числа уравнений в системе (4, 15). В дальнейшем эту систему кратко назовем системой S .

Как было показано ранее, чем больше будет последовательно взято в этой системе уравнений, тем точнее будет решаться наша задача об управлении продвижением ВНК, и разрешимость задачи, очевидно, будет зависеть от совместности системы уравнений S . В следующем разделе настоящей работы (§ 5) мы покажем, что система S относительно функций $q_i(t)$ ($i=1, 2, \dots, n+l$) будет линейной, а относительно параметров φ_i, ρ_i ($i=1, 2, \dots, n+l$) — нелинейной. Соответственно этим $3(n+l)$ неизвестным задача управления продвижением ВНК может быть поставлена в двух основных вариантах.

1. Требуется определить все $3(n+l)$ неизвестных $\varphi_i, \rho_i, q_i(t)$. Эту задачу мы будем называть общей задачей управления продвижением ВНК по характеру размещения и эксплуатации скважин.

2. Когда из $3(n+l)$ неизвестных $\varphi_i, \rho_i, q_i(t)$ какие-либо $s < 3(n+l)$ заданы, требуется определить $3(n+l) - s$ неизвестных. Эту задачу мы будем называть частной задачей управления продвижением ВНК. В частности, в эту задачу включаются и задачи управления продвижением ВНК либо только по характеру размещения скважин (за счет ρ_i, φ_i); либо только по характеру их эксплуатации [за счет $q_i(t)$].

При решении любой из вышеуказанных задач, чтобы оно имело практический смысл, необходимо исходить из следующего основного положения.

Дебиты всех эксплуатационных скважин, т. е. все $q_i(t)$ ($i=1, 2, \dots, n$), как стоков, должны быть отрицательными и все $q_i(t)$ ($i=n+1, n+2, \dots, n+l$) дебиты нагнетательных скважин, как источников, должны быть положительными. В дальнейшем кратко это положение будем называть условием знакоопределенности дебитов.

¹ Приближенное решение этой задачи методом Галеркина также представляет большой интерес.

При решении уравнений системы S в каждом конкретном случае необходимо всегда соблюдать условие знакоопределенности дебитов, смотря по тому, будут ли эти скважины размещены в водной или нефтяной зоне данного месторождения. В противном случае мы могли бы получить практически неприемлемые решения, когда в нефть придется нагнетать нефть или же выкачивать воду из водной зоны.

При решении каждой из поставленных задач число последовательно взятых уравнений в системе S не всегда может совпадать с числом неизвестных. Дело в том, что: 1) в той или другой из поставленных задач некоторые уравнения в системе S могут иногда выполняться тождественно, а некоторые из них могут быть и следствием предыдущих; 2) по степени требуемой практической точности решения иногда число уравнений в системе S может быть взято меньше числа неизвестных; при этом, хотя мы и не найдем определенных значений для неизвестных величин, однако мы установим определенную зависимость между неизвестными величинами, обеспечивающую определенную точность решения в смысле близости „желаемого“ и „возможного“ полей скоростей; исходя из этого, очевидно, уместно ставить вопрос в каждой конкретной задаче управления продвижением ВНК о разрешимости ее в пределах точности взятого числа N гармоник, причем задача может иметь и не единственное решение; 3) может случиться, что задача в пределах точности любого числа гармоник практически неразрешима, тем более это может случиться, когда условие знакоопределенности дебитов не будет выполняться. Это, например, может иметь место в случае, когда уравнение $A_0=0$ будет противоречить хотя бы одному из уравнений $A_1=0$ и $B_1=0$.

Примеры на все приведенные случаи будут рассмотрены в дальнейшем.

Помимо сказанного следует еще отметить, что система уравнений S может быть составлена с некоторой „весовой“ функцией $P(\theta, t)$, которая для всех $0 \leq \theta \leq 2\pi$ и $0 < t < T$ остается положительной.¹ Тогда система S примет следующий вид:

$$\left. \begin{aligned} A_k &= \int_0^{2\pi} P \Phi \cos k\theta d\theta = 0, \\ B_k &= \int_0^{2\pi} P \Phi \sin k\theta d\theta = 0 \end{aligned} \right\} \quad (4, 18)$$

($k=0, 1, 2, 3, \dots$).

Введение „весовой“ функции P иногда может быть весьма полезным как для упрощения вычислений, так и для уточнения решений задачи. При этом положительная функция $P(\theta, t)$ может быть выбрана с учетом характера поставленной задачи и принятого закона равномерного стягивания контура Γ .

§ 5. Решение задачи управления продвижением ВНК для одной упрощенной схемы

Основная трудность решения задачи в постановке § 4, как и в прямой задаче, состоит в нахождении функций давления p или \bar{p} , удовлет-

¹ $P(\theta, t)$ не следует смешивать с понятием весовой функции, которая обычно употребляется в теории ортогональных функций.

воряющих соответствующим краевым условиям. Однако при некотором упрощении задачи функция давления может быть легко построена, и решение задачи по указанному в § 4 методу — доведено до конца.

Предположим, что горизонтальный пласт всюду одинаковой мощности h ограничен некоторым круговым контуром питания Γ_n , радиус которого равен R . На контуре Γ_n сохраняется постоянное давление, равное пластовому давлению p_n . Пласт однородный, т. е. $k = \text{const}$. Вязкости воды μ_n и нефти μ_n будем считать приближенно равными, т. е. $\mu_n \approx \mu_n = \mu$. В остальном мы будем сохранять все условия и обозначения, которые были приняты в §§ 3 и 4. При вышеуказанных условиях функция давления записывается в следующем виде:

$$p = p_n + \frac{\mu}{2\pi kh} \sum_{i=1}^{n+1} q_i \ln \sqrt{\frac{R^2 - 2r\rho_i \cos(\theta - \varphi_i) + \frac{\rho_i^2}{R^2} r^2}{r^2 - 2r\rho_i \cos(\theta - \varphi_i) + \rho_i^2}} \quad (5, 1)$$

Эта формула легко получается путем суперпозиции функций давления, составленных для скважин, эксцентрично расположенных внутри круга радиуса R (см., например, [2]). Для определенности решения задачи закон стягивания ВНК запишем, как это было указано в § 4, в виде

$$r^2 = r_0^2 - \lambda(t)[r_0^2 - r_1^2],$$

где $r_0 = f(0, 0)$ — уравнение контура Γ_0 , $r_1 = f(0, T)$ — уравнение контура Γ_1 и $\lambda(t)$ — некоторая положительная возрастающая функция для $0 \leq t \leq T$, причем $\lambda(0) = 0$ и $\lambda(T) = 1$.

Считая $\mu_n \approx \mu_n = \mu$, согласно (4, 10), будем иметь

$$\Phi = m \frac{\partial r}{\partial t} - \frac{k}{\mu} \cdot \frac{1}{r^2} \frac{\partial r}{\partial \theta} \cdot \frac{\partial p}{\partial \theta} + \frac{k}{\mu} \frac{\partial p}{\partial r} \quad (5, 2)$$

где $r = \sqrt{r_0^2 - \lambda(t)[r_0^2 - r_1^2]}$, а функция p определяется формулой (5, 1).

Из (5, 1) имеем

$$\frac{\partial p}{\partial \theta} = \frac{\mu}{2\pi kh} \sum_{i=1}^{n+1} q_i \frac{\partial}{\partial \theta} \ln \sqrt{\frac{R^2 - 2r\rho_i \cos(\theta - \varphi_i) + \frac{\rho_i^2}{R^2} r^2}{r^2 - 2r\rho_i \cos(\theta - \varphi_i) + \rho_i^2}},$$

$$\frac{\partial p}{\partial r} = \frac{\mu}{2\pi kh} \sum_{i=1}^{n+1} q_i \frac{\partial}{\partial r} \ln \sqrt{\frac{R^2 - 2r\rho_i \cos(\theta - \varphi_i) + \frac{\rho_i^2}{R^2} r^2}{r^2 - 2r\rho_i \cos(\theta - \varphi_i) + \rho_i^2}}.$$

Подставляя эти выражения в (5, 2), получим

$$\Phi = m \frac{\partial r}{\partial t} - \frac{1}{2\pi h} \sum_{i=1}^{n+1} q_i \frac{1}{r^2} \frac{\partial r}{\partial \theta} \cdot \frac{\partial}{\partial \theta} \ln \sqrt{\frac{R^2 - 2r\rho_i \cos(\theta - \varphi_i) + \frac{\rho_i^2}{R^2} r^2}{r^2 - 2r\rho_i \cos(\theta - \varphi_i) + \rho_i^2}} - \frac{\partial}{\partial r} \ln \sqrt{\frac{R^2 - 2r\rho_i \cos(\theta - \varphi_i) + \frac{\rho_i^2}{R^2} r^2}{r^2 - 2r\rho_i \cos(\theta - \varphi_i) + \rho_i^2}}, \quad (5, 3)$$

где $r = \sqrt{r_0^2 - \lambda(t)[r_0^2 - r_1^2]}$.

Далее введем сокращенное обозначение

$$U(0, t, \varphi_i, \rho_i) = \frac{1}{r^2} \frac{\partial r}{\partial \theta} \cdot \frac{\partial}{\partial \theta} \ln \sqrt{\frac{R^2 - 2r\rho_i \cos(\theta - \varphi_i) + \frac{\rho_i^2}{R^2} r^2}{r^2 - 2r\rho_i \cos(\theta - \varphi_i) + \rho_i^2}} - \frac{\partial}{\partial r} \ln \sqrt{\frac{R^2 - 2r\rho_i \cos(\theta - \varphi_i) + \frac{\rho_i^2}{R^2} r^2}{r^2 - 2r\rho_i \cos(\theta - \varphi_i) + \rho_i^2}}, \quad (5, 4)$$

где $r^2 = r_0^2 - \lambda(t)[r_0^2 - r_1^2]$.

Тогда вместо (5, 3) будем иметь

$$\Phi = m \frac{\partial r}{\partial t} - \frac{1}{2\pi h} \sum_{i=1}^{n+1} q_i U(0, t, \varphi_i, \rho_i). \quad (5, 5)$$

Умножая функцию Φ на независящую от θ функцию $r = \sqrt{r_0^2 - \lambda(t)[r_0^2 - r_1^2]} > 0$, составим систему уравнений:

$$A_0 = m \int_0^{2\pi} r \frac{\partial r}{\partial t} d\theta - \frac{1}{2\pi h} \sum_{i=1}^{n+1} q_i \int_0^{2\pi} r U(0, t, \varphi_i, \rho_i) d\theta = 0,$$

$$A_k = m \int_0^{2\pi} r \frac{\partial r}{\partial t} \cos k\theta d\theta - \frac{1}{2\pi h} \sum_{i=1}^{n+1} q_i \int_0^{2\pi} r U(0, t, \varphi_i, \rho_i) \cos k\theta d\theta = 0, \quad (5, 6)$$

$$B_k = m \int_0^{2\pi} r \frac{\partial r}{\partial t} \sin k\theta d\theta - \frac{1}{2\pi h} \sum_{i=1}^{n+1} q_i \int_0^{2\pi} r U(0, t, \varphi_i, \rho_i) \sin k\theta d\theta = 0 \quad (k=1, 2, 3, \dots)$$

Зная, что $r \frac{dr}{dt} = -\frac{\lambda'(t)}{2}(r_0^2 - r_1^2)$, $s_0 = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} (r_0^2 - r_1^2) d\theta$ и $V_0 = -mhs_0$,

систему (5, 6) можно переписать в следующем виде:

$$A_0 = V_0 \lambda'(t) - \frac{1}{2\pi} \sum_{i=1}^{n+1} q_i \int_0^{2\pi} r U(0, t, \varphi_i, \rho_i) d\theta = 0,$$

$$A_k = -\frac{m h \lambda'(t)}{2} \int_0^{2\pi} [r_0^2 - r_1^2] \cos k\theta d\theta - \frac{1}{2\pi} \sum_{i=1}^{n+1} q_i \int_0^{2\pi} r U(0, t, \varphi_i, \rho_i) \cos k\theta d\theta = 0, \quad (5, 7)$$

$$B_k = -\frac{m h \lambda'(t)}{2} \int_0^{2\pi} [r_0^2 - r_1^2] \sin k\theta d\theta - \frac{1}{2\pi} \sum_{i=1}^{n+1} q_i \int_0^{2\pi} r U(0, t, \varphi_i, \rho_i) \sin k\theta d\theta = 0$$

($k=1, 2, 3, \dots$)

Таким образом, каждый раз при составлении системы S придется вычислять определенные интегралы следующего вида:

$$\alpha_k = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} (r_0^2 - r_1^2) \cos k\theta d\theta \quad (k=1, 2, 3, \dots), \quad (5, 8)$$

$$\beta_k = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} (r_0^2 - r_1^2) \sin k\theta d\theta \quad (k=1, 2, 3, \dots), \quad (5, 9)$$

$$a_{ik} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} rU(0, t, \varphi_i, \rho_i) \cos k\theta d\theta \quad (i=1, 2, \dots, n-t-l; k=0, 1, 2, 3, \dots), \quad (5, 10)$$

$$b_{ik} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} rU(0, t, \varphi_i, \rho_i) \sin k\theta d\theta \quad (i=1, 2, \dots, n-t-l; k=1, 2, 3, \dots), \quad (5, 11)$$

где $r^2 = r_0^2 - \lambda(t)(r_0^2 - r_1^2)$, а функция $U(0, t, \varphi_i, \rho_i)$ определяется равенством (5, 4).

Аналогично V_0 введем еще некоторые фиктивные объемы

$$V_{1k} = -mh\alpha_k, \quad V_{2k} = -mh\beta_k. \quad (5, 12)$$

Тогда система (5, 12) примет следующий вид:

$$\left. \begin{aligned} A_0 &= V_0 \lambda'(t) - \sum_{i=1}^{n-t} a_{i0} q_i = 0, \\ A_k &= V_{1k} \lambda'(t) - \sum_{i=1}^{n-t} a_{ik} q_i = 0, \\ B_k &= V_{2k} \lambda'(t) - \sum_{i=1}^{n-t} b_{ik} q_i = 0. \end{aligned} \right\} \quad (5, 13)$$

Далее, учитывая, что все a_{ik} и b_{ik} являются величинами безразмерными и поделив все уравнения на положительную величину $\frac{V_0}{T}$, имеющую смысл среднего суммарного дебита за время T , получим следующую систему с безразмерными коэффициентами и функциями, удобную для практических расчетов:

$$\left. \begin{aligned} -\frac{A_0 T}{V_0} &= -T \lambda'(t) - \sum_{i=1}^{n-t} a_{i0} \tilde{q}_i = 0, \\ -\frac{A_k T}{V_0} &= -T \lambda'(t) \frac{V_{1k}}{V_0} - \sum_{i=1}^{n-t} a_{ik} \tilde{q}_i = 0, \\ -\frac{B_k T}{V_0} &= -T \lambda'(t) \frac{V_{2k}}{V_0} - \sum_{i=1}^{n-t} b_{ik} \tilde{q}_i = 0, \end{aligned} \right\} \quad (5, 14)$$

где

$$\tilde{q}_i = \frac{T q_i}{V_0}. \quad (5, 15)$$

В дальнейшем величины \tilde{q}_i сокращенно будем называть относительными текущими дебитами скважины.

Заметим, что все α_k, β_k и a_{ik}, b_{ik} являются коэффициентами Фурье соответственно функций $r_0^2 - r_1^2$ и $rU(0, t, \varphi_i, \rho_i)$. Поэтому для вычисления их могут быть, например, использованы хорошо разработанные методы гармонического анализа, вплоть до применения машин — гармонических анализаторов.

Мы здесь рассмотрим один из важных частных случаев, когда закон стягивания принят в виде концентрических окружностей, т. е. когда r_0 и r_1 — постоянные, не зависящие от угла θ , и $r_0 > r_1$. В этом случае $r = \sqrt{r_0^2 - \lambda(t)(r_0^2 - r_1^2)}$ также от θ не зависит, поэтому согласно (5, 4) будем иметь

$$U(0, t, \varphi_i, \rho_i) = -\frac{\partial}{\partial r} \ln \sqrt{\frac{R^2 - 2r\rho_i \cos(\theta - \varphi_i) + \frac{\rho_i^2}{R^2} r^2}{r^2 - 2r\rho_i \cos(\theta - \varphi_i) + \rho_i^2}}$$

Далее, в силу (5, 8) — (5, 11), очевидно, будем иметь

$$\alpha_k = 0, \quad \beta_k = 0,$$

$$a_{ik} = -\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} r \frac{\partial}{\partial r} \ln \sqrt{\frac{R^2 - 2r\rho_i \cos(\theta - \varphi_i) + \frac{\rho_i^2}{R^2} r^2}{r^2 - 2r\rho_i \cos(\theta - \varphi_i) + \rho_i^2}} \cos k\theta d\theta \quad (5, 16)$$

$$(i=1, 2, \dots, n-t-l; k=0, 1, 2, 3, \dots),$$

$$b_{ik} = -\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} r \frac{\partial}{\partial r} \ln \sqrt{\frac{R^2 - 2r\rho_i \cos(\theta - \varphi_i) + \frac{\rho_i^2}{R^2} r^2}{r^2 - 2r\rho_i \cos(\theta - \varphi_i) + \rho_i^2}} \sin k\theta d\theta. \quad (5, 17)$$

Таким образом, в данном случае система (5, 14) примет следующий вид:

$$\left. \begin{aligned} \frac{A_0 T}{V_0} &= \sum_{i=1}^{n-t} a_{i0} \tilde{q}_i - T \lambda'(t) = 0, \\ \frac{A_k T}{V_0} &= \sum_{i=1}^{n-t} a_{ik} \tilde{q}_i = 0, \\ \frac{B_k T}{V_0} &= \sum_{i=1}^{n-t} b_{ik} \tilde{q}_i = 0 \end{aligned} \right\} \quad (5, 18)$$

$$(k=1, 2, 3, \dots).$$

Теперь займемся вычислением интегралов (5, 16) и (5, 17). Для удобства счета здесь можно ввести следующие величины:

$$\left. \begin{aligned} 0 < x_i &= \frac{\rho_i}{r} < 1, & \text{когда } i=1, 2, \dots, n, \\ 0 < y_i &= \frac{r}{\rho_i} < 1, & \text{когда } i=n-t-1, n-t-2, \dots, n-t-l, \\ 0 < z_i &= \frac{r}{R} \cdot \frac{\rho_i}{R} < 1, & \text{когда } i=1, 2, \dots, n, n-t-1, \dots, n-t-l. \end{aligned} \right\} \quad (5, 19)$$

Сначала рассмотрим интеграл (5,16). Имеем

$$a_{ik} = -\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left[\frac{-r\rho_i \cos(\theta - \varphi_i) + \frac{\rho_i^2}{R^2} r^2}{R^2 - 2r\rho_i \cos(\theta - \varphi_i) + \frac{\rho_i^2}{R^2} r^2} \frac{r^2 - r\rho_i \cos(\theta - \varphi_i)}{r^2 - 2r\rho_i \cos(\theta - \varphi_i) + \rho_i^2} \right] \cos k\theta d\theta.$$

Пусть индекс i принимает значения $1, 2, 3, \dots, n$. Тогда, пользуясь обозначениями (5,19), последнее выражение можно представить в виде

$$a_{ik} = -\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left[\frac{\left(\frac{r\rho_i}{R^2}\right)^2 - \left(\frac{r\rho_i}{R^2}\right) \cos(\theta - \varphi_i)}{1 - 2\frac{r\rho_i}{R^2} \cos(\theta - \varphi_i) + \left(\frac{r\rho_i}{R^2}\right)^2} \frac{1 - \frac{\rho_i}{r} \cos(\theta - \varphi_i)}{1 - 2\frac{\rho_i}{r} \cos(\theta - \varphi_i) + \left(\frac{\rho_i}{r}\right)^2} \right] \cos k\theta d\theta =$$

$$= -\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left[\frac{z_i^2 - z_i \cos(\theta - \varphi_i)}{1 - 2z_i \cos(\theta - \varphi_i) + z_i^2} \frac{1 - x_i \cos(\theta - \varphi_i)}{1 - 2x_i \cos(\theta - \varphi_i) + x_i^2} \right] \cos k\theta d\theta. \quad (5, 20)$$

Если же $i = n+1, n+2, \dots, n+l$, то

$$a_{ik} = -\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left[\frac{z_i^2 - z_i \cos(\theta - \varphi_i)}{1 - 2z_i \cos(\theta - \varphi_i) + z_i^2} \frac{y_i^2 - y_i \cos(\theta - \varphi_i)}{1 - 2y_i \cos(\theta - \varphi_i) + y_i^2} \right] \cos k\theta d\theta. \quad (5, 21)$$

Аналогично получаем для интеграла (5,17) следующие выражения: если $i = 1, 2, 3, \dots, n$, то

$$b_{ik} = -\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left[\frac{z_i^2 - z_i \cos(\theta - \varphi_i)}{1 - 2z_i \cos(\theta - \varphi_i) + z_i^2} \frac{1 - x_i \cos(\theta - \varphi_i)}{1 - 2x_i \cos(\theta - \varphi_i) + x_i^2} \right] \sin k\theta d\theta; \quad (5, 22)$$

если $i = n+1, n+2, \dots, n+l$, то

$$b_{ik} = -\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left[\frac{z_i^2 - z_i \cos(\theta - \varphi_i)}{1 - 2z_i \cos(\theta - \varphi_i) + z_i^2} \frac{y_i^2 - y_i \cos(\theta - \varphi_i)}{1 - 2y_i \cos(\theta - \varphi_i) + y_i^2} \right] \sin k\theta d\theta. \quad (5, 23)$$

Далее, зная что, при $|\xi| < 1$

$$-\sum_{s=1}^{\infty} \xi^s \cos s\varphi = \frac{\xi^2 - \xi \cos \varphi}{1 - 2\xi \cos \varphi + \xi^2}$$

и

$$\sum_{s=1}^{\infty} \xi^s \cos s\varphi = \frac{1 - \xi \cos \varphi}{1 - 2\xi \cos \varphi + \xi^2},$$

будем иметь

$$\frac{z_i^2 - z_i \cos(\theta - \varphi_i)}{1 - 2z_i \cos(\theta - \varphi_i) + z_i^2} \frac{1 - x_i \cos(\theta - \varphi_i)}{1 - 2x_i \cos(\theta - \varphi_i) + x_i^2} = - \left[\sum_{s=1}^{\infty} z_i^s \cos s(\theta - \varphi_i) + \sum_{s=0}^{\infty} x_i^s \cos s(\theta - \varphi_i) \right] =$$

$$= - \left[1 + \sum_{s=1}^{\infty} (z_i^s + x_i^s) \cos s(\theta - \varphi_i) \right]. \quad (5, 24)$$

Аналогично получим

$$\frac{z_i^2 - z_i \cos(\theta - \varphi_i)}{1 - 2z_i \cos(\theta - \varphi_i) + z_i^2} \frac{y_i^2 - y_i \cos(\theta - \varphi_i)}{1 - 2y_i \cos(\theta - \varphi_i) + y_i^2} =$$

$$= - \sum_{s=1}^{\infty} (z_i^s - y_i^s) \cos s(\theta - \varphi_i). \quad (5, 25)$$

Подставляя выражения (5,24) и (5,25) в подынтегральные выражения (5,20)–(5,23), находим при $i = 1, 2, \dots, n$

$$a_{ik} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left[1 + \sum_{s=1}^{\infty} (z_i^s + x_i^s) \cos s(\theta - \varphi_i) \right] \cos k\theta d\theta,$$

и при $i = n+1, n+2, \dots, n+l$

$$a_{ik} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left[\sum_{s=1}^{\infty} (z_i^s - y_i^s) \cos s(\theta - \varphi_i) \right] \cos k\theta d\theta.$$

Точно так же при $i = 1, 2, \dots, n$

$$b_{ik} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left[1 + \sum_{s=1}^{\infty} (z_i^s + x_i^s) \cos s(\theta - \varphi_i) \right] \sin k\theta d\theta,$$

а при $i = n+1, n+2, \dots, n+l$

$$b_{ik} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left[\sum_{s=1}^{\infty} (z_i^s - y_i^s) \cos s(\theta - \varphi_i) \right] \sin k\theta d\theta.$$

Далее, зная, что $\cos s(\theta - \varphi_i) = \cos s\theta \cos s\varphi_i + \sin s\theta \sin s\varphi_i$ и учитывая равномерную сходимость бесконечных рядов, стоящих под интегралами, а также ортогональность системы тригонометрических функций $1, \cos x, \sin x, \cos 2x, \sin 2x, \dots$ в промежутке от 0 до 2π , будем иметь

$$\left. \begin{aligned} a_{i0} &= 1, \text{ если } i = 1, 2, 3, \dots, n, \\ a_{i0} &= 0, \text{ если } i = n+1, n+2, \dots, n+l, \\ a_{ik} &= \frac{1}{2} (z_i^k + x_i^k) \cos k\varphi_i, \text{ если } i = 1, 2, 3, \dots, n, k = 1, 2, 3, \dots, \\ a_{ik} &= \frac{1}{2} (z_i^k - y_i^k) \cos k\varphi_i, \text{ если } i = n+1, \dots, n+l, k = 1, 2, 3, \dots, \\ b_{ik} &= -\frac{1}{2} (z_i^k + x_i^k) \sin k\varphi_i, \text{ если } i = 1, 2, \dots, n, k = 1, 2, 3, \dots, \\ b_{ik} &= -\frac{1}{2} (z_i^k - y_i^k) \sin k\varphi_i, \text{ если } i = n+1, \dots, n+l, k = 1, 2, 3, \dots \end{aligned} \right\} (5, 26)$$

Переписывая систему уравнений (5,18) в виде

$$\sum_{i=1}^n a_{i0} \bar{q}_i + \sum_{i=n+1}^{n+l} a_{i0} \bar{q}_i + T\lambda'(t) = 0,$$

$$\sum_{i=1}^n a_{ik} \bar{q}_i + \sum_{i=n+1}^{n+l} a_{ik} \bar{q}_i = 0,$$

$$\sum_{i=1}^n b_{ik} \bar{q}_i + \sum_{i=n+1}^{n+l} b_{ik} \bar{q}_i = 0,$$

$$(k = 1, 2, 3, \dots),$$

и учитывая соотношения (5,26), получим следующую систему уравнений:

$$\left. \begin{aligned} \frac{A_0 T}{V_0} &= \sum_{i=1}^n \bar{q}_i + T \lambda'(t) = 0, \\ \frac{2A_k T}{V_0} &= \sum_{i=1}^n \bar{q}_i (z_i^k + x_i^k) \cos k\varphi_i + \sum_{i=n+1}^{n+l} \bar{q}_i (z_i^k - y_i^k) \cos k\varphi_i = 0, \\ \frac{2B_k T}{V_0} &= \sum_{i=1}^n \bar{q}_i (z_i^k + x_i^k) \sin k\varphi_i + \sum_{i=n+1}^{n+l} \bar{q}_i (z_i^k - y_i^k) \sin k\varphi_i = 0 \end{aligned} \right\} (5,27)$$

(k=1, 2, 3, ...).

Предположим, что какая-либо конкретная задача управления продвижением ВНК решается с учетом N гармоник, т. е. $k=1, 2, 3, \dots, N$. Тогда, согласно (4, 14), допускаемая среднеквадратичная ошибка I_N отклонения „возможного“ и „желаемого“ полей скоростей будет оцениваться по формуле

$$I_N^2 = \frac{1}{2} \sum_{k=N+1}^{\infty} [A_k^2 + B_k^2], \quad (5,28)$$

где A_k и B_k , как следует из (5,27), должны быть подсчитаны по формулам

$$\left. \begin{aligned} A_k &= +\frac{V_0}{2T} \left[\sum_{i=1}^n \bar{q}_i (z_i^k + x_i^k) \cos k\varphi_i + \sum_{i=n+1}^{n+l} \bar{q}_i (z_i^k - y_i^k) \cos k\varphi_i \right], \\ B_k &= -\frac{V_0}{2T} \left[\sum_{i=1}^n \bar{q}_i (z_i^k + x_i^k) \sin k\varphi_i + \sum_{i=n+1}^{n+l} \bar{q}_i (z_i^k - y_i^k) \sin k\varphi_i \right], \end{aligned} \right\} (5,29)$$

(k=N+1, N+2, ...).

Если принять во внимание, что в действительности $r \ll R$ и $\rho_i \ll R$, то можно положить $z_i = \frac{r\rho_i}{R^2} \approx 0$. Тогда система (5,27) будет иметь вид

$$\left. \begin{aligned} \sum_{i=1}^n \bar{q}_i &= -T \lambda'(t), \\ \sum_{i=1}^n \bar{q}_i x_i^k \cos k\varphi_i - \sum_{i=n+1}^{n+l} \bar{q}_i y_i^k \cos k\varphi_i &= 0, \\ \sum_{i=1}^n \bar{q}_i x_i^k \sin k\varphi_i - \sum_{i=n+1}^{n+l} \bar{q}_i y_i^k \sin k\varphi_i &= 0. \end{aligned} \right\} (5,30)$$

Причем из формул (5,29), когда $k=N+1, N+2, \dots$, получим

$$\left. \begin{aligned} A_k &= \frac{V_0}{2T} \left[\sum_{i=1}^n \bar{q}_i x_i^k \cos k\varphi_i - \sum_{i=n+1}^{n+l} \bar{q}_i y_i^k \cos k\varphi_i \right], \\ B_k &= -\frac{V_0}{2T} \left[\sum_{i=1}^n \bar{q}_i x_i^k \sin k\varphi_i - \sum_{i=n+1}^{n+l} \bar{q}_i y_i^k \sin k\varphi_i \right], \end{aligned} \right\} (5,31)$$

где величины $\varphi_i, \rho_i, \bar{q}_i$ определяются из решения системы (5,30).

Из формул (5,28) и (5,31), в силу того, что $\lim_{N \rightarrow \infty} I_N = 0, x_i = \frac{\rho_i}{r}$ и $y_k = \frac{r}{\rho_i}$, можно сделать следующие практические выводы.

При заданных величинах V_0 и T задача управления продвижением ВНК в принятой нами постановке может быть решена тем точнее, а) чем больше берется общее число $n+l$ скважин, б) чем дальше находится контур нефтеносности как от эксплуатационных, так и нагнетательных скважин. Это следует из того, что A_k и B_k ($k \geq N+1$) будут тем меньше, чем меньше величины x_i ($i=1, 2, \dots, n$) и y_i ($i=n+1, n+2, \dots, n+l$).

С другой стороны, при решении вопроса о рациональной расстановке скважин нужно учитывать следующие известные положения:

а) сетку скважин в данном месторождении сверх определенного числа увеличивать невыгодно (см., например, [3], стр. 27, 28);

б) нагнетательные скважины нельзя разбуривать слишком далеко от эксплуатационных скважин, иначе очень незначительно было бы их воздействие на дебиты эксплуатационных скважин.

На основании вышеуказанного задачу об управлении ВНК для конкретного месторождения необходимо решать в пределах реально допустимого числа скважин и расстояний между рядами нагнетательных и эксплуатационных скважин.

При решении системы уравнений (5,30) необходимо исходить из условия знакоопределенности дебитов, т. е. нас должны интересовать всегда такие решения, когда $\bar{q}_i < 0$, если $i=1, 2, \dots, n$; $\bar{q}_i > 0$, если $i=n+1, n+2, \dots, n+l$, и, кроме того, когда $\rho_i > 0, 0 \leq \varphi_i \leq 2\pi$, причем ρ_i, φ_i не должны зависеть от t . Общие исследования, связанные с выяснением разрешимости системы (5,30) при сделанных предположениях могут быть проведены с точки зрения теории моментов и, как нами в дальнейшем будет показано на примерах, такие решения системы (5,30) в ряде случаев легко найти. Было бы весьма интересно провести общие исследования по изучению разрешимости системы (5,30) с учетом условия знакоопределенности дебитов.

Первые пять уравнений системы (5,30) могут быть интерпретированы с физической точки зрения.

В самом деле, зная, что $\bar{q} = -\frac{Tq_i}{V_0}$, первое уравнение системы (5,30) можно записать в виде

$$\sum_{i=1}^n q_i = \lambda'(t) V_0.$$

Интегрируя обе части уравнения от 0 до t и учитывая, что $\lambda(0) = 0$, получим

$$V(t) = \sum_{i=1}^n \int_0^t q_i dt = \lambda(t) V_0.$$

Это не что иное, как уравнение (4,5), выражающее условие равенства суммарной объемной добычи $V(t)$ всех эксплуатационных скважин за время t разработанному объему кольцевого цилиндра высотой h и ограниченного поверхностями $r_0 = \text{const.}$ и $r_1 = \text{const.}$

Предположим, что нагнетательных скважин нет, т. е. все $\bar{q}_i = 0$ ($i=n+1, n+2, \dots, n+l$). Тогда следующая пара уравнений в системе (5,30) примет вид

$$\sum_{i=1}^n q_i \rho_i \cos \varphi_i = 0 \text{ и } \sum_{i=1}^n q_i \rho_i \sin \varphi_i = 0.$$

Эти два уравнения выражают тот факт, что при выбранном законе стягивания ВНК в виде концентрических окружностей центр круга (полюс) должен совпадать с «центром тяжести» системы скважин с координатами φ_i, ρ_i и дебитами q_i (статические моменты инерции относительно двух взаимно перпендикулярных осей равны нулю).

Наконец, если взять вторую пару уравнений системы (5, 30) при $k=2$, будем иметь

$$\sum_{i=1}^n q_i [(\rho_i \cos \varphi_i)^2 - (\rho_i \sin \varphi_i)^2] = 0 \text{ и } \sum_{i=1}^n q_i (\rho_i \cos \varphi_i) (\rho_i \sin \varphi_i) = 0.$$

Первое из этих уравнений выражает равенство экваториальных моментов инерции относительно двух перпендикулярных осей. Второе уравнение выражает равенство нулю центробежного момента инерции всех скважин с дебитами q_i относительно начала координат.

Наконец, следует отметить, что в системе уравнений (5, 30) в силу условий x_i и $y_i < 1$ выражения $x_i^2 \cos k\varphi_i$, $y_i^2 \cos k\varphi_i$, $x_i^2 \sin k\varphi_i$ и $y_i^2 \sin k\varphi_i$ при возрастании k быстро стремятся к нулю. Поэтому, когда число скважин $n+l$ весьма большое, для приближенного решения задачи с достаточной степенью точности практически придется учитывать лишь несколько гармоник $N < n+l$. Это обстоятельство нас избавит от трудоемких вычислений, связанных с решением большого количества уравнений со многими неизвестными.

§ 6. Об одном способе выбора реально допустимого текущего коэффициента разработки $\lambda(t)$

Как было уже отмечено ранее, закон равномерного стягивания контура Γ_0 к желаемому контуру Γ_1 $r=f(\theta, t)$ можно было задавать весьма различными способами. При этом должны лишь выполняться следующие условия:

1) для всех $0 \leq \theta \leq 2\pi$ и $0 \leq t \leq T$ должно быть $\frac{\partial r}{\partial t} < 0$;

2) $r=f(\theta, 0)$ должно совпадать с уравнением контура Γ_0 и $r=f(\theta, T)$ должно совпадать с уравнением контура Γ_1 , где T есть время стягивания контура Γ_0 к Γ_1 .

Однако не следует забывать, что хотя форму равномерного стягивания контура Γ_0 к Γ_1 в пределах вышеуказанных условий можно выбирать произвольно, но скорость стягивания контура Γ_0 и соответственно T практически нельзя задать любыми.

В самом деле, из уравнения

$$\sum_{i=1}^n q_i = \lambda'(t) V_0 \quad (6, 1)$$

можно сделать следующие выводы: чем больше суммарный текущий дебит эксплуатационных скважин, тем больше будет $\lambda'(t)$, т. е. тем быстрее может расти текущий коэффициент разработки.

Но, с другой стороны, известно, что увеличение суммарного текущего дебита эксплуатационных скважин за счет увеличения их числа сверх определенного N нерационально. Далее, увеличение суммарного текущего дебита эксплуатационных скважин возможно за счет введения нагнетательных скважин, но все же их число и объем закачиваемой в пласт воды остаются не выше определенных практически допустимых величин. Наконец, при учете условий фонтанирования в каждой

эксплуатационной скважине забойное давление не может быть установлено ниже определенной критической величины $p_{кр}$. Все это вместе взятое накладывает ограничение сверху на быстроту роста текущего коэффициента разработки $\lambda'(t)$.

Учитывая это, реально допустимый текущий коэффициент разработки можно заранее выбрать, исходя, например, из следующих простых соображений.

Предположим, что данное нефтяное месторождение со средней мощностью h и пористостью m за какой-то промежуток времени от 0 до T_0 мы желаем эксплуатировать при помощи n_0 эксплуатационных и l_0 нагнетательных скважин при среднем текущем дебите q_0 каждой эксплуатационной скважины. Допустим, что при этом мы желаем первоначальный ВНК Γ_0 стянуть к контуру Γ_1 . Кольцевую площадь, лежащую между Γ_0 и Γ_1 , обозначим через s_0 . В самом простейшем случае за $\lambda_0(t)$ можно принять линейную функцию $\lambda_0(t) = \frac{t}{T_0}$, которая при изменении t от 0 до T_0 монотонно растет от 0 до 1. Тогда на основании равенства (6, 1) будем иметь

$$T_0 = \frac{V_0}{n_0 q_0},$$

где $V_0 = -mhs_0$.

Таким образом будут определены как время разработки кольцевой площади s_0 , так и текущий коэффициент разработки $\lambda_0(t) = \frac{t}{T_0}$.

Далее предположим, что за следующий какой-то промежуток времени от T_0 до T_1 мы желаем эксплуатировать данное месторождение при работе n_1 эксплуатационных и l_1 нагнетательных скважин при среднем текущем дебите q_1 каждой эксплуатационной скважины. Допустим, что при этом мы желаем контур Γ_1 стянуть к контуру Γ_2 . Кольцевую площадь, лежащую между Γ_1 и Γ_2 , обозначим через s_1 . Тогда, полагая $\lambda_1(t) = \frac{t-T_0}{T_1-T_0}$, аналогично вышеприведенным соображениям, найдем

$$T_1 - T_0 = \frac{V_1}{n_1 q_1},$$

где $V_1 = -mhs_1$ и т. д.

Если эксплуатация данного месторождения будет закончена после ν таких этапов, то общее время T эксплуатации всего месторождения будет определяться формулой

$$T = \sum_{i=0}^{\nu-1} \frac{V_i}{n_i q_i} = -mh \sum_{i=0}^{\nu-1} \frac{s_i}{n_i q_i}. \quad (6, 2)$$

Глава II

ПРИЛОЖЕНИЕ МЕТОДА К РЕШЕНИЮ КОНКРЕТНЫХ ЗАДАЧ

§ 1. Введение

В этой главе мы рассмотрим решение ряда конкретных задач управления продвижением ВНК, когда при наличии данного числа эксплуатационных и нагнетательных скважин обеспечивается по возможности наилучшим образом равномерное стягивание первоначального кругового контура нефтеносности Γ_0 по закону концентрических окружностей. Решение этих задач будем рассматривать по той схеме, которая была

изложена нами в I гл., § 5. Закон равномерного стягивания ВНК принимаем в виде

$$r^2 = r_0^2 - \lambda(t) [r_0^2 - r_1^2],$$

где r_0 и r_1 — радиусы окружностей Γ_0 и Γ_1 ($r_0 > r_1$), $\lambda(t) = \frac{t}{T}$ и T — время стягивания контура Γ_0 к Γ_1 ; время T определяется заранее на основании тех соображений, которые были указаны в I гл., § 6.

Будем пользоваться системой уравнений (5, 30), приведенной в гл. I. В данном случае эта система примет следующий вид:

$$\left. \begin{aligned} \sum_{i=1}^n \dot{q}_i &= -1, \\ \sum_{i=1}^n \dot{q}_i x_i^k \cos k\varphi_i - \sum_{i=n+1}^{n+l} \dot{q}_i y_i^k \cos k\varphi_i &= 0, \\ \sum_{i=1}^n \dot{q}_i x_i^k \sin k\varphi_i - \sum_{i=n+1}^{n+l} \dot{q}_i y_i^k \sin k\varphi_i &= 0. \end{aligned} \right\} (1, 1)$$

Отметим, что если бы мы рассматривали задачу управления движением ВНК по характеру размещения, когда все параметры ρ_i ($i=1, 2, \dots, n+l$) не фиксированы заранее, то независимо от величин q_i и φ_i ($i=1, 2, \dots, n+l$) мы получили бы тривиальное решение $\rho_i = 0$, если $i=1, 2, \dots, n$, и $\rho_i = \infty$, если $i=n+1, \dots, n+l$. Иначе говоря, в этом случае нагнетательные скважины будут отсутствовать, а в центре круга Γ_1 будет расположена одна эксплуатационная скважина с дебитом, равным $\sum_{i=1}^n q_i = \frac{V_0}{T}$. Это тривиальное решение физически вполне очевидно.

Поэтому из дальнейшего рассмотрения этот тривиальный случай мы заранее исключаем. Между тем следует также отметить, что к решению любой задачи управления ВНК при вышеуказанной постановке, очевидно, всегда можно добавить решение для одной центральной скважины с любым дебитом q_1 . При этом изменится лишь первое уравнение системы (1, 1), поэтому характер размещения скважин остается прежним и изменится в некоторой пропорции лишь дебиты скважин.

Весьма важно указать на то обстоятельство, что при решении системы уравнений (1, 1) в каждом конкретном случае с практической точки зрения нас должны интересовать лишь такие решения, когда

1) имеет место условие знакоопределенности дебитов, т. е. все q_i ($i=1, 2, \dots, n$) должны быть отрицательными и все q_i ($i=n+1, \dots, n+l$) — положительными;

2) величины φ_i, ρ_i ($i=1, 2, 3, \dots, n+l$) — координаты скважин — не должны зависеть от времени t ;

3) все ρ_i должны быть положительными.

Из характера системы (1, 1) следует, что второе условие будет выполнено, если, например, отсутствуют нагнетательные скважины. В самом деле, тогда система (1, 1) примет следующий вид:

$$\left. \begin{aligned} \sum_{i=1}^n \dot{q}_i &= -1, \\ \sum_{i=1}^n \dot{q}_i \rho_i^k \cos k\varphi_i &= 0, \end{aligned} \right\}$$

$$\sum_{i=1}^n \dot{q}_i \rho_i^k \sin k\varphi_i = 0,$$

$$k=1, 2, 3, \dots$$

и ни одно из уравнений не содержит величину r , зависящую от времени t .

Кроме того, в этой же главе мы будем рассматривать решение задач управления движением ВНК, когда прямолинейный контур Γ_0 , возможно наилучшим образом сохраняя свою прямолинейность, будет равномерно стягиваться к некоторой прямой линии Γ_1 . Решение этих задач мы получим как предельный случай решения задач управления ВНК, когда Γ_0 есть круг. Изучение других, более сложных, законов стягивания является предметом особых исследований, и этому вопросу будет посвящена специальная работа. В решении некоторых примеров, изложенных в этой главе, принимали участие В. А. Сеффулина и М. А. Мертвцова.

§ 2. Случай двух скважин

Рассмотрим лишь две возможности: 1) обе скважины эксплуатационные или 2) одна эксплуатационная, другая нагнетательная. Соответственно этому рассмотрим следующие две задачи.

Задача 1. Обе скважины эксплуатационные и расположены внутри круга Γ_1 .

Рассмотрим связи между параметрами q_i, ρ_i, φ_i . Учитывая 1-ю гармонику, согласно (1, 1) имеем

$$\left. \begin{aligned} q_1 + q_2 &= -1, \\ q_1 \rho_1 \cos \varphi_1 + q_2 \rho_2 \cos \varphi_2 &= 0, \\ q_1 \rho_1 \sin \varphi_1 + q_2 \rho_2 \sin \varphi_2 &= 0. \end{aligned} \right\} (2, 1)$$

Но умалая общности наших рассуждений, здесь и в дальнейшем при решении всех задач будем принимать $\varphi_1 = 0$. Тогда система (2, 1) примет вид

$$\left. \begin{aligned} q_1 + q_2 &= -1, \\ q_1 \rho_1 + q_2 \rho_2 \cos \varphi_2 &= 0, \\ q_2 \rho_2 \sin \varphi_2 &= 0. \end{aligned} \right\}$$

Считая q_2 и $\rho_2 \neq 0$, из последнего уравнения получим $\varphi_2 = 0$ или $\varphi_2 = \pi$.

Если $\varphi_2 = 0$, то второе уравнение дает

$$q_1 \rho_1 + q_2 \rho_2 = 0.$$

Но в силу условия знакоопределенности дебитов $q_1 \leq 0$ и $q_2 \leq 0$, поэтому последнее равенство невозможно. Если $\varphi_2 = \pi$, то $q_1 \rho_1 = q_2 \rho_2 = 0$, и решая это уравнение совместно с уравнением $q_1 + q_2 = -1$, получим следующие относительные текущие дебиты

$$q_1 = -\frac{\rho_2}{\rho_1 + \rho_2} \quad \text{и} \quad q_2 = -\frac{\rho_1}{\rho_1 + \rho_2}.$$

Это означает, что обе эксплуатационные скважины должны быть расположены на диаметре круга Γ_1 по равным сторонам от центра

¹ Для простоты зрения в дальнейшем знак « \approx » над q опускается.

так, чтобы выполнялась пропорция $\frac{q_1}{q_2} = \frac{r_2}{r_1}$. Заметим, что при условии $\varphi_1 = 0$ и $\varphi_2 = \pi$ вторые уравнения 1-й и 2-й гармоник выполняются тождественно. Поэтому, если бы мы хотели эту задачу решать более точно, учитывая и 2-ю гармонику, то пришлось бы рассмотреть решение следующей системы уравнений:

$$\begin{aligned} q_1 + q_2 &= -1, \\ q_1 r_1 - q_2 r_2 &= 0, \\ q_1 r_1^2 - q_2 r_2^2 &= 0. \end{aligned}$$

Из последних двух уравнений мы получили бы $q_1 r_1 (r_2 + r_1) = 0$. Это возможно лишь при условии $r_1 = r_2 = 0$, т. е. когда в центре круга расположена одна скважина с относительным текущим дебитом $q_1 + q_2 = -1$.

Задача 2. Одна скважина эксплуатационная — внутри круга Γ_1 — и другая нагнетательная — вне круга Γ_0 .

Учитывая 1-ю гармонику, согласно (1,1) имеем

$$\begin{aligned} q_1 &= -1, \\ q_1 x_1 \cos \varphi_1 - q_2 y_2 \cos \varphi_2 &= 0, \\ q_1 x_1 \sin \varphi_1 - q_2 y_2 \sin \varphi_2 &= 0, \end{aligned}$$

где

$$x_1 = \frac{r_1}{r} \quad \text{и} \quad y_2 = \frac{r}{r_2}.$$

Полагая $\varphi_1 = 0$, будем иметь

$$\begin{aligned} -r_1 - q_2 \frac{r^2}{r_2} \cos \varphi_2 &= 0, \\ -q_2 \frac{r^2}{r_2} \sin \varphi_2 &= 0. \end{aligned}$$

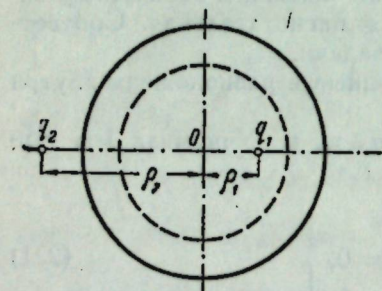


Рис. 3.

Из последнего уравнения следует, что может быть $\varphi_2 = 0$ или $\varphi_2 = \pi$. Но так как $q_2 > 0$, то остается возможным лишь случай $\varphi_2 = \pi$. Тогда

$$q_2 = \frac{r_1 r_2}{r^2}. \quad (2,2)$$

Таким образом, обе скважины должны быть расположены на одной прямой, проходящей через центр круга по различным сторонам центра так, чтобы эксплуатационная скважина лежала внутри круга Γ_1 и нагнетательная вне круга Γ_0 (рис. 3). Причем если относительный текущий дебит эксплуатационной скважины $q_1 = -1$, то относительный текущий дебит нагнетательной скважины должен определяться по формуле (2,2). Эта формула показывает, что с течением времени текущий дебит нагнетательной скважины должен расти обратно пропорционально квадрату расстояния от центра круга до контура нефтеносности.

Легко показать, что задача в пределах точности двух гармоник имеет лишь тривиальное решение. В самом деле, при $\varphi_1 = 0$ и $\varphi_2 = \pi$ вторые уравнения 1-й и 2-й гармоник выполняются тождественно. Первое уравнение 2-й гармоник дает

$$q_1 x_1^2 \cos 2\varphi_1 - q_2 y_2^2 \cos 2\varphi_2 = 0 \quad \text{или} \quad -x_1^2 - q_2 y_2^2 = 0,$$

но при условии $q_2 > 0$ последнее уравнение возможно лишь для тривиального случая, когда $r_2 = \infty$, $r_1 = 0$.

§ 3. Случай трех скважин

Здесь мы рассмотрим следующие три возможных случая:

- 1) все три скважины эксплуатационные;
- 2) две скважины эксплуатационные и одна нагнетательная;
- 3) одна скважина эксплуатационная и две нагнетательные.

Задача 1. Все три скважины эксплуатационные.

Согласно (1,1), учитывая 1-ю гармонику и полагая $\varphi_1 = 0$, будем иметь

$$\left. \begin{aligned} q_1 + q_2 + q_3 &= -1, \\ q_1 r_1 + q_2 r_2 \cos \varphi_2 + q_3 r_3 \cos \varphi_3 &= 0, \\ q_2 r_2 \sin \varphi_2 + q_3 r_3 \sin \varphi_3 &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (3,1)$$

Решая эту систему уравнения, будем иметь далее

$$q_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta}, \quad q_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta} \quad \text{и} \quad q_3 = \frac{\Delta_3}{\Delta}, \quad (3,2)$$

где $\Delta_1 = -r_2 r_3 \sin(\varphi_3 - \varphi_2)$, $\Delta_2 = r_1 r_3 \sin \varphi_3$, $\Delta_3 = -r_1 r_2 \sin \varphi_2$ и $\Delta = r_2 r_3 \sin(\varphi_3 - \varphi_2) - r_1 (r_3 \sin \varphi_3 - r_2 \sin \varphi_2)$.

На основании условия знакоопределенности дебитов возможны лишь следующие три случая:

- I. 1) $\Delta_1 < 0$, 2) $\Delta_2 < 0$, 3) $\Delta_3 < 0$, 4) $\Delta > 0$;
- II. 1) $\Delta_1 > 0$, 2) $\Delta_2 > 0$, 3) $\Delta_3 > 0$, 4) $\Delta < 0$;
- III. 1) $\Delta_1 = 0$, 2) $\Delta_2 = 0$, 3) $\Delta_3 = 0$, 4) $\Delta = 0$.

Исследуем каждую из этих групп условий в отдельности.

I. В силу того, что r_1, r_2, r_3 положительные, будем иметь:

- 1) $\sin(\varphi_3 - \varphi_2) > 0$, 2) $\sin \varphi_3 < 0$, 3) $\sin \varphi_2 > 0$
- и 4) $r_2 r_3 \sin(\varphi_3 - \varphi_2) - r_1 (r_3 \sin \varphi_3 - r_2 \sin \varphi_2) > 0$.

Как нетрудно видеть, здесь 4-е неравенство является следствием первых трех. Поэтому одновременно должны выполняться лишь следующие три условия:

$$\sin(\varphi_3 - \varphi_2) > 0, \quad \sin \varphi_3 < 0, \quad \sin \varphi_2 > 0. \quad (3,3)$$

При выполнении этих условий все скважины будут эксплуатационными и при любых r_i ($i=1, 2, 3$) дебиты их будут вычисляться по формулам (3,2).

II. Аналогичными рассуждениями, как и в случае I, мы получим

$$\sin(\varphi_3 - \varphi_2) < 0, \quad \sin \varphi_3 > 0, \quad \sin \varphi_2 < 0. \quad (3,4)$$

Дебиты будут снова вычисляться по формулам (3,2). Вышеуказанные решения нами получены при учете лишь 1-й гармоники. Однако эти решения можно было бы уточнять и дальше, учитывая следующие гармоники. Как было уже отмечено во "Введении" этой главы, если бы мы дали свободу параметрам r_i ($i=1, 2, 3$), то независимо от величин q_i и φ_i мы получили бы тривиальное решение $r_1 = r_2 = r_3 = 0$. Поэтому надо предполагать по крайней мере две из величин r_i, q_i ($i=1, 2, 3$) с одинаковыми i заданными и не равными нулю. Лишь в этом предположении мы вправе ожидать нетривиальных решений. После учета трех уравнений системы (3,1) в нашем распоряжении остается еще пять параметров r_1, r_2, r_3, φ_2 и φ_3 , причем для углов φ_2 и

φ_3 должны выполняться условия (3,3) или (3,4). Далее рассмотрим, например, следующий случай: пусть φ_2 и φ_3 выбраны так, что условия (3,3) или (3,4) для них выполнены. Кроме того, предположим, что величина ρ_1 также фиксирована. Учитывая следующую 2-ю гармонику, займемся вычислением величин ρ_2 и ρ_3 . 2-я гармоника нам дает

$$q_1 \rho_1^2 + q_2 \rho_2^2 \cos 2\varphi_2 + q_3 \rho_3^2 \cos 2\varphi_3 = 0,$$

$$q_2 \rho_2^2 \sin 2\varphi_2 + q_3 \rho_3^2 \sin 2\varphi_3 = 0.$$

Подставляя в эти уравнения выражения (3,2) для q_1, q_2, q_3 и учитывая, что Δ не может равняться ∞ , будем иметь следующую систему уравнений:

$$\rho_1 \sin(\varphi_3 - \varphi_2) - \rho_2 \sin \varphi_3 \cos 2\varphi_2 + \rho_3 \sin \varphi_2 \cos 2\varphi_3 = 0,$$

$$\rho_2 \cos \varphi_2 = \rho_3 \cos \varphi_3,$$

откуда

$$\rho_2 = \frac{\rho_1 \cos \varphi_3}{\cos(\varphi_3 - \varphi_2)},$$

$$\rho_3 = \frac{\rho_1 \cos \varphi_2}{\cos(\varphi_3 - \varphi_2)}.$$

Очевидно, нас могут интересовать лишь такие решения, когда ρ_2 и $\rho_3 > 0$. Насколько реальны, при выполнении условий (3,3) или (3,4), такие решения, можно проверить специально. На других возможных вариантах этой задачи о трех скважинах здесь останавливаться не будем.

III. В этом случае будем иметь:

$$1) \sin(\varphi_3 - \varphi_2) = 0, \quad 2) \sin \varphi_3 = 0, \quad 3) \sin \varphi_2 = 0,$$

$$4) \rho_2 \rho_3 \sin(\varphi_3 - \varphi_2) - \rho_1 (\rho_3 \sin \varphi_3 - \rho_2 \sin \varphi_2) = 0.$$

Нетрудно видеть, что условия 1 и 4 являются следствиями условий 2 и 3. Таким образом, должно быть $\sin \varphi_2 = \sin \varphi_3 = 0$. Последнее равенство возможно лишь при следующих вариантах:

$$a) \varphi_2 = \varphi_3 = 0, \quad б) \varphi_2 = \varphi_3 = \pi, \quad в) \varphi_2 = 0, \varphi_3 = \pi \text{ или } г) \varphi_2 = \pi, \varphi_3 = 0.$$

Займемся вычислением дебитов. Очевидно, в этом случае формулами (3,2) пользоваться нельзя. Обратимся непосредственно к системе (3,1). Здесь 3-е уравнение системы выполняется тождественно. Поэтому в пределах точности 1-й гармоники будем иметь:

а) если $\varphi_2 = \varphi_3 = 0$, то должна выполняться следующая система уравнений:

$$q_1 + q_2 + q_3 = -1,$$

$$q_1 \rho_1 + q_2 \rho_2 + q_3 \rho_3 = 0;$$

при условии $\rho_i > 0$, очевидно, последнее уравнение не может быть выполнено; таким образом, этот случай невозможен;

б) если $\varphi_2 = \varphi_3 = \pi$, то

$$q_1 + q_2 + q_3 = -1,$$

$$q_1 \rho_1 - q_2 \rho_2 - q_3 \rho_3 = 0;$$

из этой системы уравнений устанавливаем определенную зависимость между величинами q_i, ρ_i ($i=1, 2, 3$), при которой наша задача разрешается с точностью 1-й гармоники;

в) если $\varphi_2 = 0, \varphi_3 = \pi$, то должны иметь место условия

$$q_1 + q_2 + q_3 = -1,$$

$$q_1 \rho_1 + q_2 \rho_2 - q_3 \rho_3 = 0;$$

г) если $\varphi_2 = \pi, \varphi_3 = 0$, то

$$q_1 + q_2 + q_3 = -1,$$

$$q_1 \rho_1 - q_2 \rho_2 + q_3 \rho_3 = 0.$$

Далее легко можно показать, что при учете 2-й гармоники, кроме тривиального решения $\rho_1 = \rho_2 = \rho_3 = 0$ мы ничего нового не получим.

Задача 2. Две эксплуатационные скважины и одна нагнетательная. Согласно (1,1), учитывая 1-ю гармонику и полагая $\varphi_1 = 0$, будем иметь

$$\left. \begin{aligned} q_1 + q_2 &= -1, \\ q_1 \rho_1 + q_2 \rho_2 \cos \varphi_2 - q_3 \frac{r^2}{\rho_3} \cos \varphi_3 &= 0, \\ q_2 \rho_2 \sin \varphi_2 - q_3 \frac{r^2}{\rho_3} \sin \varphi_3 &= 0, \end{aligned} \right\} \quad (3,5)$$

откуда

$$q_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta}, \quad q_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta}, \quad q_3 = \frac{\Delta_3}{\Delta}, \quad (3,6)$$

$$\text{где } \Delta_1 = -\rho_2 \sin(\varphi_2 - \varphi_3), \quad \Delta_2 = -\rho_1 \sin \varphi_3, \quad \Delta_3 = -\frac{\rho_1 \rho_2 \rho_3 \sin \varphi_2}{r^2},$$

$$\Delta = \rho_2 \sin(\varphi_2 - \varphi_3) + \rho_1 \sin \varphi_3.$$

Но $q_1 < 0, q_2 < 0$, и $q_3 > 0$, поэтому возможны лишь следующие три случая:

$$\text{I. } 1) \Delta_1 < 0, \quad 2) \Delta_2 < 0, \quad 3) \Delta_3 > 0, \quad 4) \Delta > 0;$$

$$\text{II. } 1) \Delta_1 > 0, \quad 2) \Delta_2 > 0, \quad 3) \Delta_3 < 0, \quad 4) \Delta < 0;$$

$$\text{III. } 1) \Delta_1 = 0, \quad 2) \Delta_2 = 0, \quad 3) \Delta_3 = 0, \quad 4) \Delta = 0.$$

Рассмотрим каждый из этих случаев в отдельности.

I. Будем иметь:

1) $\sin(\varphi_2 - \varphi_3) > 0, 2) \sin \varphi_3 > 0, 3) \sin \varphi_2 < 0$; условие 4 является следствием условий 1 и 2, поэтому его не учитываем.

II. В этом случае получим:

$$1) \sin(\varphi_2 - \varphi_3) < 0, \quad 2) \sin \varphi_3 < 0, \quad 3) \sin \varphi_2 > 0.$$

Как и в предыдущей задаче 1 здесь можно было бы попытаться решить задачу с учетом двух гармоник. Однако нетрудно показать, что точнее 1-й гармоники решить задачу с постоянными ρ_i ($i=1, 2, 3$) и φ_i ($i=2, 3$) (не зависящими от t) невозможно.

III. Этот случай аналогично третьему случаю в задаче 1 сводится к рассмотрению четырех условий:

$$a) \varphi_2 = \varphi_3 = 0; \quad б) \varphi_2 = \varphi_3 = \pi; \quad в) \varphi_2 = 0, \varphi_3 = \pi; \quad г) \varphi_2 = \pi, \varphi_3 = 0.$$

Соответственно этим условиям будем иметь следующие системы уравнений:

$$a) \quad \begin{aligned} q_1 + q_2 &= -1, \\ q_1 \rho_1 + q_2 \rho_2 - q_3 \frac{r^2}{\rho_3} &= 0; \end{aligned}$$

$$б) \quad \begin{aligned} q_1 + q_2 &= -1, \\ q_1 \rho_1 - q_2 \rho_2 + q_3 \frac{r^2}{\rho_3} &= 0; \end{aligned}$$

$$в) \quad \begin{aligned} q_1 + q_2 &= -1, \\ q_1 \rho_1 + q_2 \rho_2 + q_3 \frac{r^2}{\rho_3} &= 0. \end{aligned}$$

Очевидно, этот случай возможен лишь при $\rho_1 = \rho_2 = 0$ и $\rho_3 = \infty$, т. е. когда работает одна центральная эксплуатационная скважина с относительным текущим дебитом $q = -1$.

$$\begin{aligned} \text{г) } q_1 + q_2 &= -1, \\ q_1 \rho_1 - q_2 \rho_2 - q_3 \frac{r^2}{\rho_3} &= 0. \end{aligned}$$

В силу того, что вторые уравнения 1-й и 2-й гармоник во всех вышеуказанных случаях „а“, „б“, „в“ и „г“ выполняются тождественно, дальше мы можем решить задачу с учетом двух гармоник. Очевидно, нужно рассмотреть лишь случаи „а“, „б“ и „г“. Соответственно будем иметь следующие системы уравнений:

$$\begin{aligned} \text{а) } q_1 + q_2 &= -1, \\ q_1 \rho_1 - q_2 \rho_2 - q_3 \frac{r^2}{\rho_3} &= 0, \\ q_1 \rho_1^2 + q_2 \rho_2^2 - q_3 \frac{r^2}{\rho_3^2} &= 0; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{б) } q_1 + q_2 &= -1, \\ q_1 \rho_1 - q_2 \rho_2 + q_3 \frac{r^2}{\rho_3} &= 0, \\ q_1 \rho_1^2 + q_2 \rho_2^2 - q_3 \frac{r^4}{\rho_3^2} &= 0; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{г) } q_1 + q_2 &= -1, \\ q_1 \rho_1 - q_2 \rho_2 - q_3 \frac{r^2}{\rho_3} &= 0, \\ q_1 \rho_1^2 + q_2 \rho_2^2 - q_3 \frac{r^4}{\rho_3^2} &= 0. \end{aligned}$$

Путем исследования каждой вышеуказанной системы уравнений с учетом условия знакоопределенности дебитов нетрудно показать, что возможно лишь тривиальное решение

$$\rho_1 = \rho_2 = 0 \text{ и } \rho_3 = \infty.$$

Задача 3. Одна эксплуатационная скважина и две нагнетательные. Учитывая 1-ю гармонику, из системы (1, 1) при $\varphi_1 = 0$ будем иметь

$$\begin{aligned} q_1 &= -1, \\ q_1 \rho_1 - q_2 \frac{r^2}{\rho_2} \cos \varphi_2 - q_3 \frac{r^2}{\rho_3} \cos \varphi_3 &= 0, \\ -q_2 \frac{r^2}{\rho_2} \sin \varphi_2 - q_3 \frac{r^2}{\rho_3} \sin \varphi_3 &= 0 \end{aligned}$$

или

$$\begin{aligned} q_2 \frac{r^2}{\rho_2} \cos \varphi_2 + q_3 \frac{r^2}{\rho_3} \cos \varphi_3 &= -\rho_1, \\ q_2 \frac{\sin \varphi_2}{\rho_2} + q_3 \frac{\sin \varphi_3}{\rho_3} &= 0, \end{aligned}$$

откуда

$$q_2 = \frac{-\rho_1 \rho_2 \sin \varphi_3}{r^2 \sin(\varphi_3 - \varphi_2)}$$

и

$$q_3 = \frac{\rho_1 \rho_3 \sin \varphi_2}{r^2 \sin(\varphi_3 - \varphi_2)}$$

Зная, что $q_2 > 0$ и $q_3 > 0$, будем иметь следующие случаи:

- I. 1) $\sin \varphi_3 < 0$, 2) $\sin(\varphi_3 - \varphi_2) > 0$, 3) $\sin \varphi_2 > 0$;
II. 1) $\sin \varphi_3 > 0$, 2) $\sin(\varphi_3 - \varphi_2) < 0$, 3) $\sin \varphi_2 < 0$;

здесь также может быть специально исследован вопрос о разрешимости задачи с учетом 2-й гармоники;

III. 1) $\sin \varphi_3 = 0$, 2) $\sin \varphi_2 = 0$, а это возможно лишь в предположениях:

- а) $\varphi_2 = \varphi_3 = 0$, б) $\varphi_2 = \varphi_3 = \pi$, в) $\varphi_2 = 0$, $\varphi_3 = \pi$; г) $\varphi_2 = \pi$, $\varphi_3 = 0$.

Так как величины q_2 и q_3 положительные, то случай „а“ невозможен. В остальных случаях соответственно будем иметь уравнения:

$$\text{б) } \frac{q_2}{\rho_2} + \frac{q_3}{\rho_3} = \frac{\rho_1}{r^2}, \quad \text{в) } \frac{q_2}{\rho_2} - \frac{q_3}{\rho_3} = \frac{-\rho_1}{r^2}, \quad \text{г) } \frac{q_2}{\rho_2} - \frac{q_3}{\rho_3} = \frac{-\rho_1}{r^2}.$$

Если далее решать задачу с точностью двух гармоник, то следующее уравнение имело бы вид, одинаковый для всех случаев

$$-\rho_1^2 - q_2 \frac{r^4}{\rho_2^2} - q_3 \frac{r^4}{\rho_3^2} = 0.$$

Это уравнение возможно лишь при условии $\rho_1 = 0$, $\rho_2 = \rho_3 = \infty$, т. е. когда в центре находится одна эксплуатационная скважина.

§ 4. Случай двух круговых и прямолинейных батарей

Задача 1. Работают две круговые батареи, с одинаковым числом эксплуатационных скважин, расположенных концентрически внутри круга Γ_1 (рис. 4). Радиус этих батарей обозначим через ρ_1 и ρ_2 ($\rho_1 < \rho_2$). Относительные текущие дебиты скважин первой батареи обозначим через q_{1i} и второй — через q_{2i} ($i = 1, 2, 3, \dots, n$). Соответственно для полярных углов введем обозначения φ_{1i} и φ_{2i} . Тогда, согласно (1, 1), будем иметь следующую систему уравнений:

$$\left. \begin{aligned} \sum_{i=1}^n (q_{1i} + q_{2i}) &= -1, \\ \rho_1^k \sum_{i=1}^n q_{1i} \cos k\varphi_{1i} + \rho_2^k \sum_{i=1}^n q_{2i} \cos k\varphi_{2i} &= 0, \\ \rho_1^k \sum_{i=1}^n q_{1i} \sin k\varphi_{1i} + \rho_2^k \sum_{i=1}^n q_{2i} \sin k\varphi_{2i} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (4, 1)$$

($k = 1, 2, 3, \dots$).

Пусть

$$\begin{aligned} \varphi_{1i} &= \alpha_1 + \frac{2\pi}{n} i, \\ \varphi_{2i} &= \alpha_2 + \frac{2\pi}{n} i \end{aligned} \quad (i = 1, 2, 3, \dots, n),$$

где α_1 и α_2 — некоторые начальные углы отсчета.

В силу симметричности расположения скважин и заданного закона стягивания ВНК, можно утверждать, что

$$\begin{aligned} q_{11} = q_{12} = \dots = q_{1n} &= q_1, \\ q_{21} = q_{22} = \dots = q_{2n} &= q_2. \end{aligned}$$

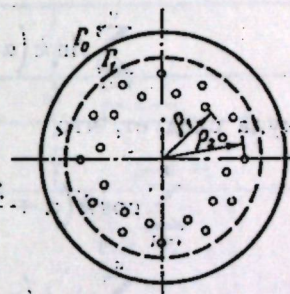


Рис. 4.

Поэтому систему (4,1) перепишем так:

$$\left. \begin{aligned} nq_1 + nq_2 &= -1, \\ q_1 \rho_1^k \sum_{i=1}^n \cos k \left(\alpha_1 + \frac{2\pi i}{n} \right) + q_2 \rho_2^k \sum_{i=1}^n \cos k \left(\alpha_2 + \frac{2\pi i}{n} \right) &= 0, \\ q_1 \rho_1^k \sum_{i=1}^n \sin k \left(\alpha_1 + \frac{2\pi i}{n} \right) + q_2 \rho_2^k \sum_{i=1}^n \sin k \left(\alpha_2 + \frac{2\pi i}{n} \right) &= 0. \end{aligned} \right\} (4,2)$$

($k=1, 2, 3, \dots$).

Далее воспользуемся следующими соотношениями ([10], стр. 273):

$$\sum_{i=1}^n \cos k \left(\alpha + \frac{2\pi i}{n} \right) = \frac{\cos k \left[\alpha + \frac{(n+1)}{n} \pi \right] \sin \pi k}{\sin \frac{2\pi k}{n}}$$

и

$$\sum_{i=1}^n \sin k \left(\alpha + \frac{2\pi i}{n} \right) = \frac{\sin k \left[\alpha + \frac{(n+1)}{n} \pi \right] \sin \pi k}{\sin \frac{2\pi k}{n}},$$

откуда следует, что

$$\sum_{i=1}^n \cos k \left(\alpha + \frac{2\pi i}{n} \right) = \begin{cases} 0, & \text{если } k \neq np, \text{ где } p \text{ — любое} \\ & \text{целое число;} \\ np \cos n\alpha, & \text{если } k = np; \end{cases}$$

$$\sum_{i=1}^n \sin k \left(\alpha + \frac{2\pi i}{n} \right) = \begin{cases} 0, & \text{если } k \neq np; \\ np \sin n\alpha, & \text{если } k = np. \end{cases}$$

Учитывая эти соотношения, систему (4,2) можно переписать в следующем виде:

$$\left. \begin{aligned} q_1 + q_2 &= -\frac{1}{n}, \\ q_1 \rho_1^k \cos k\alpha_1 + q_2 \rho_2^k \cos k\alpha_2 &= 0, \\ q_1 \rho_1^k \sin k\alpha_1 + q_2 \rho_2^k \sin k\alpha_2 &= 0, \end{aligned} \right\} (4,3)$$

где $k=n, 2n, 3n, \dots$; так как уравнения для гармоник с номерами, не кратными n , выполняются тождественно, то следует рассмотреть лишь уравнения гармоник с номерами, кратными n .

Таким образом, с учетом n первых гармоник будем иметь систему уравнений:

$$\left. \begin{aligned} q_1 + q_2 &= -\frac{1}{n}, \\ q_1 \rho_1^n \cos n\alpha_1 + q_2 \rho_2^n \cos n\alpha_2 &= 0, \\ q_1 \rho_1^n \sin n\alpha_1 + q_2 \rho_2^n \sin n\alpha_2 &= 0. \end{aligned} \right\} (4,4)$$

Отсюда следует, что при учете $n-1$ гармоник решением задачи является условие $q_1 + q_2 = -\frac{1}{n}$, т. е. сумма текущих дебитов двух скважин, одна из которых расположена в первой, а другая — во второй батарее, должна быть равна $-\frac{1}{n}$. При достаточно большом n это физически вполне очевидно. Переходя к решению задачи с учетом n первых гармоник, в системе (4,4) положим $\alpha_1 = 0$. Тогда

$$\left. \begin{aligned} q_1 + q_2 &= -\frac{1}{n}, \\ q_1 \rho_1^n + q_2 \rho_2^n \cos n\alpha_2 &= 0, \\ + q_2 \rho_2^n \sin n\alpha_2 &= 0. \end{aligned} \right\} (4,5)$$

При условиях q_2 и $\rho_2 \neq 0$ из последнего уравнения следует, что $\sin n\alpha_2 = 0$. Это возможно лишь в следующих двух случаях:

а) $\alpha_2 = 0$, т. е. когда скважины в первой и во второй батареях лежат на одних и тех же лучах, проведенных из центра круга;

б) $\alpha_2 = \frac{\pi}{n}$, т. е. когда скважины во второй батарее расположены на биссектрисах углов, образованных между лучами, на которых расположены скважины первой батареи.

При условии y_1 и $q_2 < 0$ случай „а“ возможен лишь, когда $\rho_1 = \rho_2 = 0$. Рассмотрим этот случай. Тогда будем иметь следующую систему:

$$\left. \begin{aligned} q_1 + q_2 &= -\frac{1}{n}, \\ q_1 \rho_1^n - q_2 \rho_2^n &= 0, \end{aligned} \right\} (4,6)$$

откуда

$$q_1 = -\frac{\rho_2^n}{n(\rho_2^n + \rho_1^n)} < 0$$

и

$$q_2 = \frac{-\rho_1^n}{n(\rho_2^n + \rho_1^n)} < 0.$$

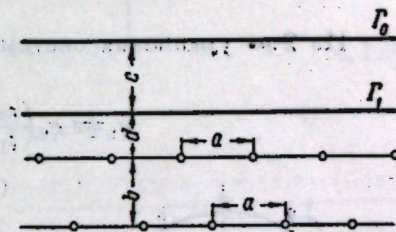


Рис. 5.

Вышеуказанный результат фактически есть решение задачи также с учетом $2n-1$ гармоник, так как уравнения гармоник с номерами $n+1, n+2, \dots, 2n-1$ выполняются тождественно. Если бы мы захотели решить задачу с учетом $2n$ гармоник, то снова получили бы тривиальный результат $\rho_1 = \rho_2 = 0$, т. е. все скважины обеих батарей оказались бы сосредоточенными в центре круга.

Задача 2. Предположим, что в бесконечной полосообразной залежи первоначальное положение ВНК есть некоторая прямая линия Γ_0 (рис. 5). Контур Γ_0 требуется равномерно стянуть к прямолинейному контуру Γ_1 , возможно наилучшим образом сохраняя прямолинейность Γ .

Каковы должны быть при этом размещение и дебиты скважин, расположенных в двух рядах параллельных Γ_0 батарей?

Решение этой задачи можно легко получить из решения предыдущей задачи 1 путем предельного перехода, когда $\rho_1 \rightarrow \infty$, сохраняя при этом остальные размеры без изменения. Откуда следует, что скважины в первой и второй батареях должны быть размещены симметрично в шахматном порядке. Далее введем обозначения: пусть a есть расстояние между скважинами в каждой батарее, b — расстояние между батареями, c — расстояние между контурами Γ_0 и Γ_1 , d — расстояние от второй батареи до контура Γ_1 (рис. 5).

Тогда, очевидно, будем иметь

$$\rho_2 = \rho_1 + b, \quad n = \frac{2\pi(\rho_1 + b)}{a} \quad (4,7)$$

Система уравнений (4,6), записанная в размерных величинах текущего дебита, будет иметь следующий вид:

¹ На возможность такого предельного перехода нам указал Н. Ф. Иванов.

$$\left. \begin{aligned} q_1 + q_2 &= \frac{V_0}{T_n}, \\ q_1 \rho_1^n - q_2 \rho_2^n &= 0, \end{aligned} \right\} \quad (4, 8)$$

где

$$V_0 = -\pi m h (r_0^2 - r_1^2) = -\pi m h [(b+c+d+\rho_1)^2 - (b+d+\rho_1)^2] = -\pi m h (2b+c+2d+2\rho_1)c.$$

Из 1-го уравнения системы (4, 8), согласно (4, 7), будем иметь

$$q_1 + q_2 = -\frac{\pi m h (2b+c+2d+2\rho_1)ac}{2\pi(\rho_1+b)T}$$

При $\rho_1 \rightarrow \infty$ получим

$$q_1 + q_2 = -\frac{mach}{T}. \quad (4, 9)$$

Из 2-го уравнения системы (4, 8) будем иметь

$$q_1 = q_2 \left(\frac{\rho_2}{\rho_1}\right)^n = q_2 \left(1 + \frac{b}{\rho_1}\right)^{2n(\rho_1+b)/a}$$

Отсюда при $\rho_1 \rightarrow \infty$ получим

$$q_1 = q_2 e^{\frac{2\pi b}{a}}. \quad (4, 10)$$

Решая уравнения (4, 9) и (4, 10) совместно, окончательно будем иметь

$$q_1 = -\frac{mache^{\frac{2\pi b}{a}}}{T(1+e^{\frac{2\pi b}{a}})} \quad \text{и} \quad q_2 = \frac{-mach}{T(1+e^{\frac{2\pi b}{a}})}$$

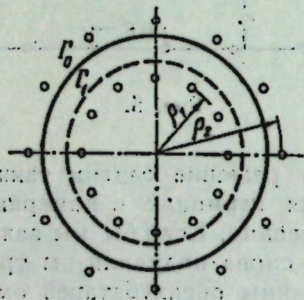


Рис. 6.

Задача 3. Работают две круговые батареи с одинаковым числом скважин, на которых одна, эксплуатационная, расположена concentрически внутри круга Γ_1 и другая, нагнетательная, расположена concentрически вне круга Γ_0 (рис. 6).

Как и в задаче 1, введем обозначения: ρ_1 — радиус эксплуатационной батареи, ρ_2 — радиус нагнетательной батареи, q_{1i} ($i=1, 2, 3, \dots, n$) — относительные текущие дебиты скважин эксплуатационной батареи, q_{2i} ($i=1, 2, 3, \dots, n$) — относительные текущие дебиты скважин нагнетательной батареи. Соответственно для полярных углов введем обозначения: φ_{1i} и φ_{2i} . Тогда, согласно (1, 1), будем иметь следующую систему уравнений:

$$\left. \begin{aligned} \sum_{i=1}^n q_{1i} &= -1, \\ \rho_1^k \sum_{i=1}^n q_{1i} \cos k\varphi_{1i} - \frac{r_2^{2k}}{\rho_2^k} \sum_{i=1}^n q_{2i} \cos k\varphi_{2i} &= 0, \\ \rho_1^k \sum_{i=1}^n q_{1i} \sin k\varphi_{1i} - \frac{r_2^{2k}}{\rho_2^k} \sum_{i=1}^n q_{2i} \sin k\varphi_{2i} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (4, 11)$$

$(k=1, 2, 3, \dots)$

Пусть

$$\left. \begin{aligned} \varphi_{1i} &= \alpha_1 + \frac{2\pi}{n} i \\ \varphi_{2i} &= \alpha_2 + \frac{2\pi}{n} i \end{aligned} \right\} \quad (i=1, 2, 3, \dots, n),$$

где α_1 и α_2 — некоторые начальные углы отсчета.

В силу симметричности расположения скважин и заданного закона стягивания ВНК также можно утверждать, что

$$\left. \begin{aligned} q_{11} &= q_{12} = \dots = q_{1n} = q_1, \\ q_{21} &= q_{22} = \dots = q_{2n} = q_2. \end{aligned} \right\}$$

Далее, проводя выкладки, совершенно аналогичные выкладкам в задаче 1, систему (4, 11) можно представить в виде:

$$\left. \begin{aligned} q_1 &= -\frac{1}{n}, \\ q_1 \rho_1^k \cos k\alpha_1 - q_2 \frac{r_2^{2k}}{\rho_2^k} \cos k\alpha_2 &= 0, \\ q_1 \rho_1^k \sin k\alpha_1 - q_2 \frac{r_2^{2k}}{\rho_2^k} \sin k\alpha_2 &= 0, \end{aligned} \right\} \quad (4, 12)$$

где $k=n, 2n, 3n, \dots$

Полагая $\alpha_1=0$, при учете n гармоник будем иметь

$$\left. \begin{aligned} \frac{1}{n} \rho_1^n + q_2 \frac{r_2^{2n}}{\rho_2^{2n}} \cos n\alpha_2 &= 0, \\ q_2 \frac{r_2^{2n}}{\rho_2^{2n}} \sin n\alpha_2 &= 0. \end{aligned} \right\}$$



Рис. 7.

Зная, что $q_2 > 0$, из последних двух уравнений получим лишь один реально возможный случай $\alpha_2 = \frac{\pi}{n}$, т. е. скважины нагнетательной батареи должны лежать на биссектрисах углов, образованных между лучами, где расположены скважины эксплуатационной батареи, причем относительные текущие дебиты нагнетательных скважин будут определяться по формуле

$$q_2 = \frac{1}{n} \left(\frac{\rho_1 \rho_2}{r_2^2}\right)^n, \quad (4, 13)$$

при этом

$$q_1 = -\frac{1}{n}. \quad (4, 14)$$

Задача 4. Рассмотрим предельный случай задачи 3, когда $\rho_1 \rightarrow \infty$ (рис. 7).

Как и в задаче 2, запишем сначала соотношения (4, 13) и (4, 14) в размерных величинах текущего дебита. Будем иметь

$$\left. \begin{aligned} q_2 &= \frac{-V_0}{T_n} \left(\frac{\rho_1 \rho_2}{r_2^2}\right)^n, \\ q_1 &= \frac{V_0}{T_n}, \end{aligned} \right\} \quad (4, 15)$$

где $V_0 = -\pi m h (r_0^2 - r_1^2) = -\pi m h [(r_1 + b + c)^2 - (r_1 + b)^2] = -\pi m h (2r_1 + 2b + c)c$, $\rho_2 = r_1 + b + c + d$, $n = \frac{2\pi(r_1 + b + c + d)}{a}$, $r^2 = r_0^2 - \lambda(t)[r_0^2 - r_1^2]$, где $\lambda(t) = \frac{t}{T}$, $r_0 = r_1 + b + c$, $r_1 = r_1 + b$, или $r^2 = (r_1 + b + c)^2 - \lambda(t)(2r_1 + 2b + c)c$.

Подставляя найденные соотношения в формулы (4, 15), будем иметь

$$q_1 = -\frac{mh(2r_1 + 2b + c)ac}{2T(r_1 + b + c + d)}$$

$$q_2 = +\frac{mh(2r_1 + 2b + c)ac}{2(r_1 + b + c + d)T} \left[\frac{\rho_1(r_1 + b + c + d)}{(r_1 + b + c)^2 - \lambda(t)(2r_1 + 2b + c)c} \right]^{\frac{2\pi(r_1 + b + c + d)}{a}}$$

Переходя к пределу при $\rho_1 \rightarrow \infty$, получим

$$q_1 = -\frac{mach}{T}$$

$$q_2 = \frac{mach}{T} e^{\frac{2\pi}{a}[2\lambda(t)c + d - b - c]}$$

где $\lambda(t) = \frac{t}{T}$.

Аналогично решению вышеприведенных задач 1, 2, 3 и 4 можно решать задачи в случае трех круговых и прямолинейных батарей [11].

ЛИТЕРАТУРА

1. Г. С. Салехов. Прямые и обратные задачи о продвижении водо-нефтяного контакта. Изв. Казанск. филиала АН СССР, сер. физ.-математ., вып. 5, 1954.
2. И. А. Чарный. Подземная гидромеханика. Гостехиздат, М.—Л., 1948.
3. А. П. Крылов и др. Научные основы разработки нефтяных месторождений. Гостехиздат, М.—Л., 1948.
4. М. Маскет. Течение однородных жидкостей в пористой среде. Гостехиздат, М.—Л., 1949.
5. В. Н. Щелкачев. Расстановка скважин в пластах с водонапорным режимом. В сб. "Научно-исследовательские работы нефтяников", вып. III. Добыча нефти. Гостехиздат, М.—Л., 1944.
6. В. П. Яковлев. О размещении скважин при водонапорных режимах. Нефтяное хозяйство, № 3—5, 1940.
7. В. А. Данилов. К задаче определения поля давления при заданном законе стягивания контура нефтеносности. См. настоящий выпуск, стр. 53.
8. С. Н. Бернштейн. Экстремальные свойства полиномов. ОГИЗ, М.—Л., 1937.
9. Л. В. Канторович и В. И. Крылов. Приближенные методы высшего анализа. Гостехиздат, М.—Л., 1950.
10. И. М. Рыжик. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. ОГИЗ, М.—Л., 1948.
11. В. Д. Чугунов. Некоторые частные случаи управления продвижением водо-нефтяного контакта. См. настоящий выпуск, стр. 39.

Физико-технический институт
Казанского филиала АН СССР

Поступило 19 апреля
1954 г.

В. Д. ЧУГУНОВ

НЕКОТОРЫЕ ЧАСТНЫЕ СЛУЧАИ УПРАВЛЕНИЯ ПРОДВИЖЕНИЕМ ВОДО-НЕФТЯНОГО КОНТАКТА

Задача об управлении продвижением водо-нефтяного контакта была поставлена и решена в общем виде в статье Г. С. Салехова.¹

В данной работе рассматриваются частные случаи управления продвижением ВНК (водо-нефтяной контакт), когда имеются три круговые или три прямолинейные батареи, скважины в которых расположены на одинаковых расстояниях друг от друга. Решение дается при тех же предположениях, которые были сделаны в работе Г. С. Салехова (гл. I, § 5).

§ 1. Случай трех круговых батарей

Рассмотрим три круговые концентрические батареи с одинаковым числом скважин n , расположенных на равных расстояниях друг от друга.

Будем искать такое решение, чтобы две внутренние батареи были эксплуатационными, а внешняя — нагнетательной (рис. 1).

Введем следующие обозначения:

ρ_1 — радиус первой эксплуатационной батареи;

ρ_2 — радиус второй эксплуатационной батареи;

ρ_3 — радиус нагнетательной батареи (предполагаем при этом, что $0 < \rho_1 < \rho_2 < \rho_3$);

q_{1i} ($i = 0, 1, \dots, n-1$) — относительные текущие дебиты скважин первой батареи;

q_{2i} ($i = 0, 1, \dots, n-1$) — относительные текущие дебиты скважин второй батареи;

q_{3i} ($i = 0, 1, \dots, n-1$) — относительные текущие дебиты скважин нагнетательной батареи.

Соответственно, для полярных углов введем обозначения:

$$\varphi_{1i} = \frac{2\pi}{n} i + \alpha_1,$$

$$\varphi_{2i} = \frac{2\pi}{n} i + \alpha_2 \quad (i = 0, 1, 2, \dots, n-1),$$

$$\varphi_{3i} = \frac{2\pi}{n} i + \alpha_3,$$

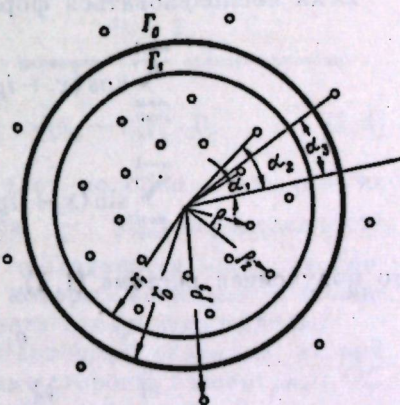


Рис. 1.

¹ См. настоящий выпуск, стр. 3. Упомянутые далее главы и параграфы также относятся к статье Г. С. Салехова, напечатанной в настоящем выпуске.

где $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ — начальные углы отсчета. Не ограничивая общности, можно считать $\alpha_1 = 0$. Из симметричности расположения скважин заданного закона стягивания ВНК $r = r_0^2 - \frac{r}{T}(r_0^2 - r_1^2)$ следует, что

$$\begin{aligned} q_{10} &= q_{11} = \dots = q_{1, n-1} = q_1, \\ q_{20} &= q_{21} = \dots = q_{2, n-1} = q_2, \\ q_{30} &= q_{31} = \dots = q_{3, n-1} = q_3. \end{aligned}$$

Тогда система (1, 1), приведенная в гл. II, § 1, перейдет в следующую систему уравнений:

$$\left. \begin{aligned} q_1 + q_2 &= -\frac{1}{n}, \\ q_1 \frac{\rho_1^k}{r^k} \sum_{i=0}^{n-1} \cos \frac{2\pi k}{n} i + q_2 \frac{\rho_2^k}{r^k} \sum_{i=0}^{n-1} \cos k \left(\alpha_2 + \frac{2\pi i}{n} \right) - \\ &- q_3 \frac{\rho_3^k}{r^k} \sum_{i=0}^{n-1} \cos k \left(\alpha_3 + \frac{2\pi i}{n} \right) = 0, \\ q_1 \frac{\rho_1^k}{r^k} \sum_{i=0}^{n-1} \sin \frac{2\pi k}{n} i + q_2 \frac{\rho_2^k}{r^k} \sum_{i=0}^{n-1} \sin k \left(\alpha_2 + \frac{2\pi i}{n} \right) - \\ &- q_3 \frac{\rho_3^k}{r^k} \sum_{i=0}^{n-1} \sin k \left(\alpha_3 + \frac{2\pi i}{n} \right) = 0. \end{aligned} \right\} (1, 1)$$

Если воспользоваться формулами

$$\begin{aligned} \sum_{i=0}^{n-1} \cos(x + iy) &= \frac{\cos\left(x + \frac{n-1}{2}y\right) \sin \frac{ny}{2}}{\sin \frac{y}{2}}, \\ \sum_{i=0}^{n-1} \sin(x + iy) &= \frac{\sin\left(x + \frac{n-1}{2}y\right) \sin \frac{ny}{2}}{\sin \frac{y}{2}}, \end{aligned}$$

то полученная система (1, 1), с точностью до n гармоник, примет вид

$$\left. \begin{aligned} q_1 + q_2 &= -\frac{1}{n}, \\ q_1 \frac{\rho_1^n}{r^n} + q_2 \frac{\rho_2^n}{r^n} \cos n\alpha_2 - q_3 \frac{\rho_3^n}{r^n} \cos n\alpha_3 &= 0, \\ q_2 \frac{\rho_2^n}{r^n} \sin n\alpha_2 - q_3 \frac{\rho_3^n}{r^n} \sin n\alpha_3 &= 0. \end{aligned} \right\} (1, 2)$$

Отсюда

$$\left. \begin{aligned} q_1 &= -\frac{\left(\frac{\rho_2}{\rho_1}\right)^n \sin n(\alpha_2 - \alpha_3)}{n\Delta}, \\ q_2 &= -\frac{\left(\frac{\rho_1}{\rho_3}\right)^n \sin n\alpha_3}{n\Delta}, \\ q_3 &= -\frac{\left(\frac{\rho_1 \rho_2}{r^2}\right)^n \sin n\alpha_2}{n\Delta}, \end{aligned} \right\} (1, 3)$$

где

$$\Delta = \left(\frac{\rho_2}{\rho_1}\right)^n \sin n(\alpha_2 - \alpha_3) + \left(\frac{\rho_1}{\rho_3}\right)^n \sin n\alpha_3.$$

Заметим прежде всего, что, если закон стягивания ВНК выбран в виде $r^2 = r_0^2 - \frac{r}{T}(r_0^2 - r_1^2)$, то дебит эксплуатационных скважин не зависит от времени.

Принимая во внимание условие знакоопределенности дебитов, получим из (1, 3) следующие возможные случаи:

$$\begin{aligned} 1) \Delta > 0, & \quad 2) \Delta < 0, & \quad 3) \Delta = 0, \\ \sin n\alpha_2 < 0, & \quad \sin n\alpha_2 > 0, & \quad \sin n\alpha_2 = 0, \\ \sin n\alpha_3 > 0, & \quad \sin n\alpha_3 < 0, & \quad \sin n\alpha_3 = 0, \\ \sin n(\alpha_2 - \alpha_3) > 0; & \quad \sin n(\alpha_2 - \alpha_3) < 0; & \quad \sin n(\alpha_2 - \alpha_3) = 0. \end{aligned}$$

Рассмотрим отдельно каждый из них.

$$1) \Delta > 0, \quad \sin n\alpha_2 < 0, \\ \sin n\alpha_3 > 0, \quad \sin n(\alpha_2 - \alpha_3) > 0.$$

Легко видеть, что первое неравенство является следствием двух последних, поэтому необходимо удовлетворить только неравенствам

$$\begin{aligned} \sin n\alpha_2 < 0, \quad \sin n\alpha_3 > 0, \\ \sin n(\alpha_2 - \alpha_3) > 0, \end{aligned}$$

откуда

$$\frac{2\pi}{n} > \alpha_2 > \frac{\pi}{n}, \quad \frac{\pi}{n} > \alpha_3 > 0, \quad \frac{\pi}{n} > (\alpha_2 - \alpha_3) > 0. \quad (1, 4)$$

Ввиду симметрии перемещение ВНК будет подобно в каждом из секторов, центральный угол которого равен $\frac{2\pi}{n}$. Для определенности рассмотрим сектор, ограниченный лучами, проходящими через две соседние скважины первой батареи, один из которых совпадает с полярной осью. Из неравенств (1, 4) можно сделать следующие выводы:

а) нагнетательная скважина и эксплуатационная скважина второй батареи должны быть расположены по разные стороны биссектрисы OC (рис. 2);

б) центральный угол между ними не должен превышать $\frac{\pi}{n}$. На рис. 2 показаны области изменения α_2 и α_3 .

Положение сектора AOB с центральным углом $\frac{\pi}{n}$ относительно биссектрисы OC определяется при заранее выбранном α_2 (или α_3).

Случай 2 аналогичен случаю 1, если q_2 и q_3 поменять местами, т. е. если на продолжение радиуса эксплуатационной скважины второй батареи поместить нагнетательную скважину и наоборот.

Итак, с учетом n гармоник при фиксированных ρ_1, ρ_2, ρ_3 дебиты нагнетательных и эксплуатационных скважин являются функциями двух независимых параметров α_2 и α_3 . Попытаемся решить данную задачу с точностью $2n$ гармоник. Так как все уравнения системы (1, 1) для $n+1, n+2, \dots, 2n-1$ гармоник выполняются тождественно, то эта система с учетом $2n$ гармоник примет вид

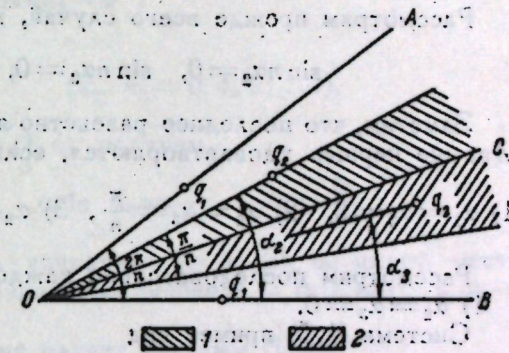


Рис. 2.

1 — область изменения α_2 ; 2 — область изменения α_3 .

$$\left. \begin{aligned} q_1 + q_2 &= -\frac{1}{n}, \\ q_1 \frac{\rho_1^n}{r^n} + q_2 \frac{\rho_2^n}{r^n} \cos n\alpha_2 - q_3 \frac{r^n}{\rho_3^n} \cos n\alpha_3 &= 0, \\ q_2 \frac{\rho_2^n}{r^n} \sin n\alpha_2 - q_3 \frac{r^n}{\rho_3^n} \sin n\alpha_3 &= 0, \\ q_1 \frac{\rho_1^{2n}}{r^{2n}} + q_2 \frac{\rho_2^{2n}}{r^{2n}} \cos 2n\alpha_2 - q_3 \frac{r^{2n}}{\rho_3^{2n}} \cos 2n\alpha_3 &= 0, \\ q_2 \frac{\rho_2^{2n}}{r^{2n}} \sin 2n\alpha_2 - q_3 \frac{r^{2n}}{\rho_3^{2n}} \sin 2n\alpha_3 &= 0. \end{aligned} \right\} (1, 5)$$

Рассмотрим прежде всего случай, когда

$$\sin n\alpha_2 = 0, \quad \sin n\alpha_3 = 0, \quad \sin n(\alpha_2 - \alpha_3) = 0.$$

Заметим, что последнее равенство является следствием двух первых. Два же первые удовлетворяются, если:

$$1) \alpha_2 = \alpha_3 = 0, \quad 2) \alpha_2 = \alpha_3 = \frac{\pi}{n}, \quad 3) \alpha_2 = 0, \alpha_3 = \frac{\pi}{n}, \quad 4) \alpha_2 = \frac{\pi}{n}, \alpha_3 = 0.$$

Рассмотрим последовательно каждое из этих решений.

$$1) \alpha_2 = \alpha_3 = 0.$$

Система (1, 5) примет вид

$$\left. \begin{aligned} q_1 + q_2 &= -\frac{1}{n}, \\ q_1 \frac{\rho_1^n}{r^n} + q_2 \frac{\rho_2^n}{r^n} - q_3 \frac{r^n}{\rho_3^n} &= 0, \\ q_1 \frac{\rho_1^{2n}}{r^{2n}} + q_2 \frac{\rho_2^{2n}}{r^{2n}} - q_3 \frac{r^{2n}}{\rho_3^{2n}} &= 0. \end{aligned} \right\} (1, 6)$$

В силу того, что q_1 и q_2 меньше нуля, как текущие дебиты эксплуатационных скважин, второе и третье уравнения данной системы не имеют места при ρ_1, ρ_2 , не равных нулю, и ρ_3 , не равном бесконечности.

$$2) \alpha_2 = \frac{\pi}{n}, \quad \alpha_3 = \frac{\pi}{n}.$$

Система (1, 5) будет иметь вид

$$\left. \begin{aligned} q_1 + q_2 &= -\frac{1}{n}, \\ q_1 \frac{\rho_1^n}{r^n} - q_2 \frac{\rho_2^n}{r^n} + q_3 \frac{r^n}{\rho_3^n} &= 0, \\ q_1 \frac{\rho_1^{2n}}{r^{2n}} - q_2 \frac{\rho_2^{2n}}{r^{2n}} + q_3 \frac{r^{2n}}{\rho_3^{2n}} &= 0. \end{aligned} \right\} (1, 7)$$

Третье уравнение системы (1, 7) при тех же условиях для $q_1, q_2, \rho_1, \rho_2, \rho_3$ также не имеет места. Аналогичные заключения можно сделать для случая 3, когда $\alpha_2 = \frac{\pi}{n}, \alpha_3 = 0$, и для случая 4, когда $\alpha_2 = 0, \alpha_3 = \frac{\pi}{n}$.

Рассмотрим случай, когда

$$\sin n\alpha_2 \neq 0, \quad \sin n\alpha_3 \neq 0, \quad \sin n(\alpha_2 - \alpha_3) \neq 0.$$

Из первых трех уравнений системы (1, 5) найдем q_1, q_2, q_3 в зависимости от α_2 и α_3 . Если подставить их в четвертое и пятое уравнения системы (1, 5), получим

$$\left. \begin{aligned} \rho_2^n \rho_3^n \cos n\alpha_2 &= r^{2n} \cos n\alpha_3, \\ \frac{\rho_1}{r^n} \sin n(\alpha_2 - \alpha_3) + \frac{\rho_2^n}{r^n} \sin n\alpha_3 \cos 2n\alpha_2 - \frac{r^n}{\rho_3^n} \sin n\alpha_2 \cos 2n\alpha_3 &= 0. \end{aligned} \right\} (1, 8)$$

Так как правая часть первого уравнения из (1, 8) является функцией времени, а левая не зависит от него, то оно справедливо лишь при

$$\left. \begin{aligned} \rho_2^n \rho_3^n \cos n\alpha_2 &= 0 \\ r^{2n} \cos n\alpha_3 &= 0. \end{aligned} \right\} (1, 9)$$

Из (1, 9) имеем

$$\alpha_2 = \frac{k_2 \pi}{2n}, \quad \alpha_3 = \frac{k_3 \pi}{2n} \quad (k_2, k_3 = 0, 1, 2, \dots).$$

Приняв во внимание условия (1, 4), получим

$$\alpha_2 = \frac{3\pi}{2n}, \quad \alpha_3 = \frac{\pi}{2n}, \quad \text{либо} \quad \alpha_2 = \frac{\pi}{2n}, \quad \alpha_3 = \frac{3\pi}{2n}.$$

При этих значениях второе уравнение из (1, 8) не имеет места. Система (1, 5) имеет только тривиальное решение $\rho_1 = \rho_2 = 0, \rho_3 = \infty$, не представляющее интереса.

Рассмотрим некоторые важные случаи системы (1, 2).

I. Пусть $\alpha_2 = \frac{\pi}{n}$, т. е. скважины второй батареи расположены на биссектрисах углов, образованных лучами, проведенными через две соседние скважины первой батареи. Тогда из третьего уравнения системы (1, 2) следует, что $q_3 = 0$ или $\sin n\alpha_3 = 0$. Последнее уравнение имеет решения $\alpha_3 = 0$ и $\alpha_3 = \frac{\pi}{n}$.

1) Если $q_3 = 0$, то

$$\left. \begin{aligned} q_1 + q_2 &= -\frac{1}{n}, \\ q_1 \frac{\rho_1^n}{r^n} &= q_2 \frac{\rho_2^n}{r^n}, \end{aligned} \right\}$$

$$\text{откуда} \quad \frac{q_2}{q_1} = \left(\frac{\rho_1}{\rho_2}\right)^n.$$

Пусть дебиты эксплуатационных скважин связаны соотношениями

$$\frac{q_2}{q_1} = \left(\frac{\rho_1}{\rho_2}\right)^n, \quad \alpha_2 = \frac{\pi}{n}, \quad (1, 10)$$

т. е. имеем случай наилучшего размещения и режима эксплуатации двух эксплуатационных батарей (гл. II, § 4). Уместно поставить вопрос, нельзя ли улучшить перемещение ВНК с помощью введения в работу нагнетательной батареи также из n скважин. Ответ получается отрицательным. Действительно, если выполнены соотношения (1, 10), то из второго уравнения следует, что

$$q_3 \cos n\alpha_3 = 0.$$

Предполагая, что $q_3 \neq 0$, имеем $\cos n\alpha_3 = 0, \alpha_3 = \frac{\pi k}{2n} \quad (k = 1, 3, \dots)$. Но при $\alpha_3 = \frac{k\pi}{2n}$ третье уравнение системы при $q_3 \neq 0$ не имеет места.

2) Если $\alpha_3 = 0$ (рис. 3), то система (1, 2) примет вид

$$q_1 + q_2 = -\frac{1}{n},$$

$$q_1 \frac{\rho_1^n}{r^n} - q_2 \frac{\rho_2^n}{r^n} = q_3 \frac{r^n}{\rho_3^n}.$$

Из второго уравнения данной системы найдем

$$q_3 = q_1 \left(\frac{\rho_1 \rho_3}{r^2} \right)^n - q_2 \left(\frac{\rho_2 \rho_3}{r^2} \right)^n. \quad (1, 11)$$

Для того чтобы q_3 был определенно положительным, необходимо выполнение неравенства

$$\frac{q_2}{q_1} > \left(\frac{\rho_1}{\rho_2} \right)^n.$$

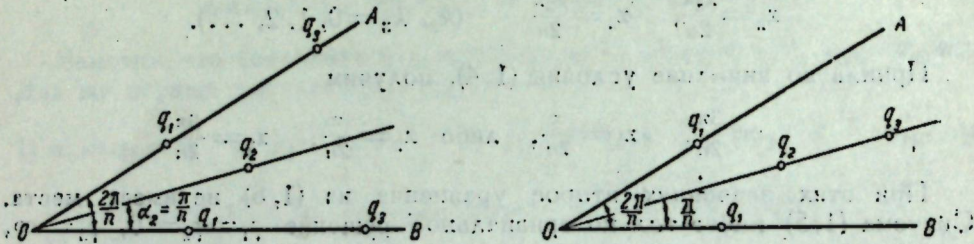


Рис. 3.

Задав текущий дебит q_1 , из первого уравнения найдем q_2 , после чего по формуле (1, 11) сможем определить текущий дебит нагнетательных скважин q_3 . Чтобы выявить некоторые свойства управления ВНК при данном расположении эксплуатационных и нагнетательных батарей, представим q_2 в виде суммы

$$q_2 = q_2^{(1)} + q_2^{(2)}$$

и выберем $q_2^{(1)}$ так, чтобы

$$\frac{q_2^{(1)}}{q_1} = \left(\frac{\rho_2}{\rho_1} \right)^n.$$

Тогда из (1, 11) вытекает

$$q_3 = -q_2^{(2)} \left(\frac{\rho_2 \rho_3}{r^2} \right)^n. \quad (1, 12)$$

Это разбиение q_2 на два слагаемых показывает, что исследуемый случай может быть представлен как результат сложения двух более простых схем управления ВНК:

а) управление ВНК двумя эксплуатационными батареями с дебитами q_1 и $q_2^{(1)}$;

б) управление ВНК одной эксплуатационной и одной нагнетательной батареями соответственно с дебитами $q_2^{(2)}$ и q_3 .

3) Если $\alpha_3 = \frac{\pi}{n}$ (рис. 4), то система (1, 2) обращается в следующую:

$$q_1 + q_2 = -\frac{1}{n},$$

$$q_1 \frac{\rho_1^n}{r^n} - q_2 \frac{\rho_2^n}{r^n} = -q_3 \frac{r^n}{\rho_3^n}.$$

Из второго уравнения имеем

$$q_3 = -q_1 \left(\frac{\rho_1 \rho_3}{r^2} \right)^n + q_2 \left(\frac{\rho_2 \rho_3}{r^2} \right)^n.$$

Для того чтобы q_3 было больше нуля, необходимо выполнение неравенства

$$\frac{q_2}{q_1} < \left(\frac{\rho_1}{\rho_2} \right)^n.$$

Представим q_1 в виде суммы $q_1 = q_1^{(1)} + q_1^{(2)}$ и выберем $q_1^{(1)}$ так, чтобы $\frac{q_2}{q_1^{(1)}} = \left(\frac{\rho_1}{\rho_2} \right)^n$. Тогда

$$q_3 = -q_1^{(2)} \left(\frac{\rho_1 \rho_3}{r^2} \right)^n.$$

II. Пусть $\alpha_2 = 0$. Скважины второй батареи расположены на тех же лучах, что и скважины первой батареи (рис. 5).

Третье уравнение системы (1, 2) удовлетворяется в следующих трех случаях:

1) $q_3 = 0$, 2) $\alpha_3 = 0$, 3) $\alpha_3 = \frac{\pi}{n}$.

Первые два решения противоречат условию знакоопределенности дебитов, поэтому рассмотрим только решение $\alpha_3 = \frac{\pi}{n}$.

Система (1, 2) принимает вид

$$q_1 + q_2 = -\frac{1}{n},$$

$$q_1 \frac{\rho_1^n}{r^n} + q_2 \frac{\rho_2^n}{r^n} = -q_3 \frac{r^n}{\rho_3^n}.$$

Из второго уравнения получаем

$$q_3 = - \left[q_1 \left(\frac{\rho_1 \rho_3}{r^2} \right)^n + q_2 \left(\frac{\rho_2 \rho_3}{r^2} \right)^n \right].$$

Представим q_3 в виде $q_3 = q_3^{(1)} + q_3^{(2)}$. Найдем $q_3^{(1)}$ так, чтобы

$$q_3^{(1)} = -q_1 \left(\frac{\rho_1 \rho_3}{r^2} \right)^n,$$

тогда

$$q_3^{(2)} = -q_2 \left(\frac{\rho_2 \rho_3}{r^2} \right)^n. \quad (1, 13)$$

Имеем также сложение двух схем управления ВНК, а именно:

а) управление ВНК одной эксплуатационной и одной нагнетательной батареями соответственно с дебитами q_1 и $q_3^{(1)}$;

б) управление ВНК одной эксплуатационной и одной нагнетательной батареями с дебитами q_2 и $q_3^{(2)}$.

Наиболее рациональными схемами размещения скважин эксплуатационных и нагнетательной батарей надо считать случаи, указанные на рис. 3 и 5. При таком размещении скважин дебиты q_1 и q_2 могут быть выбраны близкими друг к другу, ибо они связаны только уравнением баланса $q_1 + q_2 = -\frac{1}{n}$, а q_3 принимает значения, приемлемые для практики, как это показывают нижеприведенные примеры.

Пример. Требуется определить положение и дебиты двух эксплуатационных батарей по 18 скважин в каждой, а также положение и дебиты 18-скважинной нагнетательной батареи, если известно начальное и конечное положение ВНК.

Пусть $\rho_1 = 1432.4$ м, $\rho_2 = 2000$ м, $\rho_3 = 3500$ м, мощность пласта $h = 10$ м, пористость $m = 0.2$, начальное положение ВНК — окружность радиуса $r_0 = 2800$ м, конечное положение ВНК — окружность радиуса $r_1 = 2200$ м. Количество нефти, подлежащее извлечению, равно

$$V_0 = mh\pi(r_0^2 - r_1^2) = 18\,849\,600 \text{ м}^3/\text{сутки}.$$

Предположим, что в течение всего периода эксплуатации T желаем сохранить постоянным суммарный дебит скважин эксплуатационных батарей $v = 6480$ м³/сутки. Тогда $T = \frac{V_0}{v} = 2909$ суток ≈ 8 лет.

Закон стягивания ВНК, обеспечивающий постоянный суммарный дебит, можно взять в виде

$$r^2 = r_0^2 - \frac{t}{T}(r_0^2 - r_1^2).$$

Для реализации заданного закона стягивания ВНК необходимо, чтобы дебит двух скважин, одна из которых принадлежит первой батарее, а другая — второй, был равен

$$\frac{v_0}{18} = 360 \text{ м}^3/\text{сутки}.$$

Рассмотрим случай шахматно-кругового расположения скважин трех батарей, т. е. когда $\alpha_2 = \frac{\pi}{n}$, а $\alpha_3 = 0$ (рис. 3).

Пусть максимально допустимый дебит скважин эксплуатационных батарей равен 200 м³/сутки.

Будем эксплуатировать скважины первой батареи с максимально допустимым дебитом $Q_1 = 200$ м³/сутки, тогда дебит скважин второй эксплуатационной батареи должен быть равен $Q_2 = 160$ м³/сутки.

Дебит нагнетательных скважин можно было бы определить по формуле (1, 11). Однако, чтобы упростить вычисления, представим Q_2 в виде суммы $Q_2 = Q_2^{(1)} + Q_2^{(2)}$, как указано в случае 1, 2. Тогда

$$Q_3 = -Q_2^{(2)} \left(\frac{\rho_2 \rho_3}{r^2} \right)^n,$$

$$Q_1^{(1)} = Q \left(\frac{\rho_1}{\rho_2} \right)^n = 200 (0.7132)^{18} = 0.5 \text{ м}^3/\text{сутки},$$

$$Q_2^{(1)} = 159.5 \text{ м}^3/\text{сутки}.$$

Следовательно, дебиты нагнетательных скважин зависят, в основном, от дебитов второй эксплуатационной батареи, так как Q_2 и $Q_2^{(2)}$ близки между собой. Разность $Q_2 - Q_2^{(2)}$ тем меньше, чем больше n и меньше отношение $\frac{\rho_1}{\rho_2}$,

$$Q_2 - Q_2^{(2)} = Q_1 \left(\frac{\rho_1}{\rho_2} \right)^n.$$

Таким образом,

$$Q_3 = 159.5 \left[\frac{\rho_2 \rho_3}{r_0^2 - \frac{t}{2909}(r_0^2 - r_1^2)} \right]^n \text{ м}^3/\text{сутки}.$$

На рис. 6 приведен график зависимости дебита скважин нагнетательной батареи от времени, из которого видно, что в течение первого года эксплуатации дебит нагнетательных скважин растет медленно (с 25 до 50 м³/сутки), тогда как в последующие годы рост Q_3 становится интенсивнее.

Если считать предельно возможным дебитом нагнетательных скважин 1000 м³/сутки, то при данном расположении и найденном режиме эксплуатации батареи управление ВНК возможно в течение четырех лет. За это время ВНК переместится на 280 м. При дальнейшей эксплуатации необходимо разбурить дополнительно нагнетательные скважины ближе к ВНК или же уменьшить дебит скважин второй батареи. Рост Q_3 характеризует, в известной степени, скорость образования языков при отсутствии законтурного заводнения.

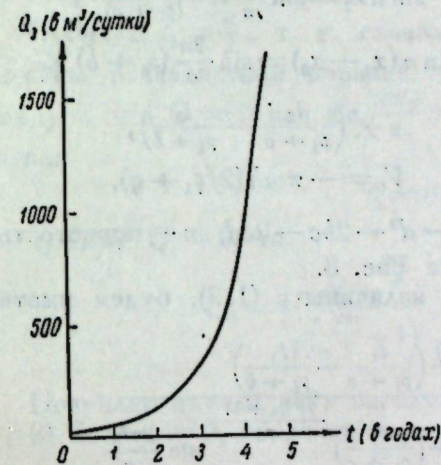


Рис. 6.

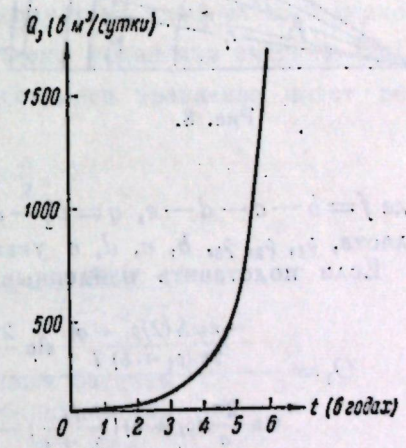


Рис. 7.

Рассмотрим теперь случай, когда нагнетательная батарея расположена ближе к ВНК.

Если ранее нагнетательная батарея была расположена на расстоянии 700 м от начального положения ВНК, то теперь это расстояние равно 400 м; $\rho_1, \rho_2, h, r_0, r_1, m$ оставим прежними.

График зависимости Q_3 от времени приведен на рис. 7. Если также считать, что предельно возможный дебит нагнетательной скважины равен 1000 м³/сутки, то при данных расположении и режиме эксплуатации управление ВНК возможно в течении 5 1/2 лет. За это время ВНК переместится приблизительно на 400 м. Необходимо при этом заметить, что ввиду малости дебита нагнетательных скважин в течение 1 1/2 лет можно не закачивать воду в пласт.

Итак, для случая круговых батарей и кругового контура нефтеносности можно сделать следующие выводы:

- 1) наилучшим способом размещения нагнетательной и эксплуатационной батарей является шахматно-круговой;
- 2) необходимо эксплуатировать скважины первой батареи с максимально допустимым дебитом; дебиты же скважин нагнетательной и второй эксплуатационной батарей определяются из условий наилучшего управления ВНК и уравнения баланса;
- 3) скважины нагнетательной батареи с целью удлинения срока управления ВНК необходимо разбуривать по возможности ближе к начальному положению ВНК.

§ 2. Случай трех прямолинейных батарей

Три прямолинейные батареи можно получить как предельный случай задачи, рассмотренной в предыдущем параграфе, когда ρ_1 стремится к бесконечности.

Пусть расстояние между скважинами нагнетательной батареи равно a (рис. 8), тогда

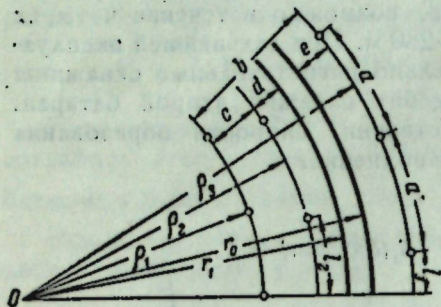


Рис. 8.

$$\begin{aligned} \rho_3 &= \rho_1 + b, & \rho_2 &= \rho_1 + c, \\ n &= \frac{2\pi}{a}(\rho_1 + b), & \alpha_3 &= \frac{l_2}{\rho_1 + b}, \\ \alpha_2 &= \frac{l_2}{\rho_1 + c}, & \sin n\alpha_3 &= \sin \frac{2\pi l_3}{a}, \\ \sin n\alpha_2 &= \sin \frac{2\pi}{a} \cdot \frac{(\rho_1 + b)l_2}{(\rho_1 + c)}, \\ \sin n(\alpha_2 - \alpha_3) &= \sin \frac{2\pi}{a}(\rho_1 + b) \times \\ & \times \left(\frac{l_2}{\rho_1 + c} - \frac{l_3}{\rho_1 + b} \right), \\ V_0 &= -\pi m h (2f\rho_1 + q), \end{aligned}$$

где $f = b - c - d - e$, $q = b^2 - e^2 - c^2 - d^2 - 2bc - 2cd$, m — пористость пласта, $\rho_1, \rho_2, \rho_3, b, c, d, e$ указаны на рис. 8.

Если подставить найденные выше величины в (1, 3), будем иметь

$$Q_1 = \frac{-\pi m h (2f\rho_1 + q) \sin \frac{2\pi(\rho_1 + b)}{a} \left(\frac{l_2}{\rho_1 + c} - \frac{l_3}{\rho_1 + b} \right)}{\sin \frac{2\pi}{a}(\rho_1 + b) \left(\frac{l_2}{\rho_1 + c} - \frac{l_3}{\rho_1 + b} \right) + \left(\frac{\rho_1}{\rho_1 + c} \right) \sin \frac{2\pi l_3}{a}}$$

Переходя к пределу при $\rho_1 \rightarrow \infty$, получим

$$Q_1 = \frac{-m h f a \left[\sin \frac{2\pi}{a}(l_2 - l_3) \right] e^{\frac{2\pi c}{a}}}{T \left[e^{\frac{2\pi c}{a}} \sin \frac{2\pi}{a}(l_2 - l_3) + \sin \frac{2\pi l_3}{a} \right]},$$

точно так же найдем

$$Q_2 = \frac{-m h f a \sin \frac{2\pi l_3}{a}}{T \left[e^{\frac{2\pi c}{a}} \sin \frac{2\pi}{a}(l_2 - l_3) + \sin \frac{2\pi l_3}{a} \right]},$$

$$Q_3 = \frac{-m h f a e^{\frac{2\pi}{a}[2\lambda(l)f - b + 2e + c]} \sin \frac{2\pi l_2}{a}}{T \left[e^{\frac{2\pi c}{a}} \sin \frac{2\pi}{a}(l_2 - l_3) + \sin \frac{2\pi l_3}{a} \right]},$$

где Q_1, Q_2 — дебиты скважин эксплуатационных батарей, Q_3 — дебит скважин нагнетательной батареи.

Можно было бы непосредственно сделать предельный переход в системе (1, 2), которая при $\rho_1 \rightarrow \infty$ принимает вид

$$\left. \begin{aligned} Q_1 + Q_2 &= -\frac{m h f}{T}, \\ Q_1 e^{-\frac{2\pi c}{a}} + Q_2 \cos \frac{2\pi l_2}{a} - Q_3 e^{-\frac{2\pi}{a}[2\lambda(l)f - b + 2e + c]} \cos \frac{2\pi l_3}{a} &= 0, \\ Q_2 \sin \frac{2\pi l_2}{a} - Q_3 e^{-\frac{2\pi}{a}[2\lambda(l)f - b + 2e + c]} \sin \frac{2\pi l_3}{a} &= 0, \end{aligned} \right\} (2, 1)$$

после чего найти Q_1, Q_2, Q_3 .

Затем, подобно тому, как это было сделано в предыдущем параграфе, учитывая условие знакоопределенности дебитов, можно провести соответствующие исследования и для трех прямолинейных батарей.

Опуская эти исследования, мы рассмотрим некоторые важные случаи системы (2, 1), аналогичные изученным для трех круговых батарей.

I. Пусть $l_2 = \frac{a}{2}$, т. е. скважины эксплуатационных батарей расположены в шахматном порядке. Из третьего уравнения системы (2, 1) следует, что $Q_3 = 0$ или $\sin \frac{2\pi l_3}{a} = 0$. Последнее уравнение имеет решения

$$l_3 = 0, \quad l_3 = \frac{a}{2}.$$

1) Если $Q_3 = 0$, то

$$Q_1 = \frac{-m h f a e^{\frac{2\pi c}{a}}}{T \left(e^{\frac{2\pi c}{a}} + 1 \right)}, \quad Q_2 = \frac{-m h f a}{T \left(e^{\frac{2\pi c}{a}} + 1 \right)}.$$

Получаем случай двух эксплуатационных батарей.

2) Если $l_3 = 0$, тогда система (2, 1) принимает вид

$$Q_1 + Q_2 = -\frac{m h f}{T}, \quad Q_1 e^{-\frac{2\pi c}{a}} - Q_2 = Q_3 e^{-\frac{2\pi}{a}[2\lambda(l)f - b + 2e + c]}$$

Из второго уравнения данной системы следует

$$Q_3 = Q_1 e^{\frac{2\pi}{a}[2\lambda(l)f - b + 2e]} - Q_2 e^{\frac{2\pi}{a}[2\lambda(l)f - b + 2e + c]} \quad (2, 2)$$

Чтобы Q_3 был положительным, необходимо выполнение неравенства $\frac{Q_2}{Q_1} > e^{-\frac{2\pi c}{a}}$.

Задав текущий дебит Q_1 , из первого уравнения найдем Q_2 , после чего по формуле (2, 2) сможем определить Q_3 . Чтобы выяснить особенности управления ВНК при данном расположении эксплуатационных и нагнетательных батарей, представим Q_3 в виде суммы

$$Q_3 = Q_3^{(1)} + Q_3^{(2)}.$$

Выберем $Q_3^{(1)}$ так, чтобы $\frac{Q_3^{(1)}}{Q_1} = e^{-\frac{2\pi c}{a}}$. Тогда

$$Q_3 = Q_3^{(2)} e^{\frac{2\pi}{a}[2\lambda(l)f - b + 2e + c]} \quad (2, 3)$$

И здесь, как ранее для круговых батарей, имеет место сложение двух схем управления ВНК. Необходимо отметить, что $Q_3^{(1)}$ мал по сравнению с Q_1 для всех практически приемлемых случаев.

Так, например, если $\frac{c}{a} = 0.71$, то $\frac{Q_2^{(1)}}{Q_1} = 0.01$. Иными словами, дебит нагнетательных скважин зависит, в основном, от дебита эксплуатационных скважин второго ряда.

3) Если $l_3 = \frac{a}{2}$, то система (2, 2) запишется в форме

$$Q_1 + Q_2 = -\frac{mahf}{T},$$

$$Q_1 e^{-\frac{2\pi c}{a}} - Q_2 = -Q_3 e^{-\frac{2\pi}{a} [2\lambda(l)f - b + 2e + c]}.$$

Из второго уравнения найдем

$$Q_3 = -Q_1 e^{\frac{2\pi}{a} [2\lambda(l)f - b + 2e]} + Q_2 e^{\frac{2\pi}{a} [2\lambda(l)f - b + 2e + c]}.$$

Для того чтобы Q_3 было больше нуля, необходимо выполнение неравенства $\frac{Q_2}{Q_1} < e^{-\frac{2\pi c}{a}}$.

Представим Q_1 в виде $Q_1 = Q_1^{(1)} + Q_2^{(2)}$ и выберем Q_1 так, чтобы $\frac{Q_2}{Q_1} = e^{-\frac{2\pi c}{a}}$, тогда

$$Q_3 = -Q_2^{(2)} e^{\frac{2\pi}{a} [2\lambda(l)f - b + 2e]}.$$

При $Q_2 = 0$ получим случай управления ВНК при наличии одной эксплуатационной и одной нагнетательной батарей.

II. Пусть $l_2 = 0$. Скважины второй батареи расположены против скважин первой батареи. Из третьего уравнения системы (2, 1) следует, что: 1) $Q_3 = 0$ или 2) $l_3 = 0$ или 3) $l_3 = \frac{a}{2}$.

Первые два решения противоречат условию знакоопределенности дебитов, поэтому рассмотрим только случай, когда $l_3 = \frac{a}{2}$.

Система (2, 1) примет вид.

$$Q_1 + Q_2 = -\frac{mahf}{T},$$

$$Q_1 e^{-\frac{2\pi c}{a}} + Q_2 = -Q_3 e^{-\frac{2\pi}{a} [2\lambda(l)f - b + 2e + c]}.$$

Из второго уравнения имеем

$$Q_3 = -Q_1 e^{\frac{2\pi}{a} [2\lambda(l)f - b + 2e]} + Q_2 e^{\frac{2\pi}{a} [2\lambda(l)f - b + 2e + c]}.$$

Представим Q_3 в виде $Q_3 = Q_3^{(1)} + Q_3^{(2)}$. Тогда

$$Q_3^{(1)} = -Q_1 e^{\frac{2\pi}{a} [2\lambda(l)f - b + 2e]},$$

$$Q_3^{(2)} = -Q_2 e^{\frac{2\pi}{a} [2\lambda(l)f - b + 2e + c]}.$$

Получаем также сложение двух схем управления ВНК (гл. II, § 4). Чтобы перейти к численному примеру, остановимся несколько на решениях системы (2, 1), представив Q_1 и Q_2 в виде

$$Q_1 = \frac{-mhfa}{T \left[1 + e^{-\frac{2\pi c}{a}} \frac{\sin \frac{2\pi l_3}{a}}{\sin \frac{2\pi}{a} (l_2 - l_3)} \right]},$$

$$Q_2 = -\frac{mhfa}{T} \left[1 - \frac{1}{1 + e^{-\frac{2\pi c}{a}} \frac{\sin \frac{2\pi l_3}{a}}{\sin \frac{2\pi}{a} (l_2 - l_3)}} \right].$$

При $c \geq a$, $e^{-\frac{2\pi c}{a}}$ — малая величина. Так, например, при $l = a$ $e^{-\frac{2\pi c}{a}} = 0.0018$, при $c = 2a$, $e^{-\frac{2\pi c}{a}} = 0.000048$.

Таким образом, при $c \geq a$, дебит Q_2 мал по сравнению с Q_1 , при этом мал будет и дебит нагнетательных скважин. Следовательно, наилучшими схемами размещения двух эксплуатационных и нагнетательной батарей надо считать I, 1 и II, т. е. когда скважины эксплуатационных и нагнетательной батарей расположены в шахматном порядке или же когда скважины нагнетательной и второй эксплуатационной батарей расположены в шахматном порядке, а скважины первой эксплуатационной батареи расположены против скважин второй батареи.

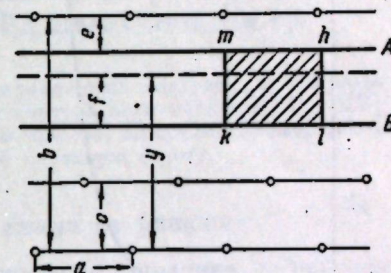


Рис. 9.

Пример. Требуется наилучшим образом стянуть прямолинейный контур из положения A в B (рис. 9) при одновременной работе трех прямолинейных батарей, из которых две эксплуатационные, а одна нагнетательная. Расстояние между скважинами в батареях равно a . $a = 400$ м, $b = 2400$ м, $c = 800$ м, $e = 600$ м, $f = 600$ м, мощность пласта $h = 10$ м, пористость $m = 0.2$. Рассмотрим случай шахматного расположения скважин; ввиду симметрии их расположения рассмотрим перемещение ВНК только в прямоугольнике $m h k l$.

Количество нефти, подлежащее вытеснению при перемещении ВНК из A в B, равно $V_0 = 480.000$ м³. Пусть суммарный дебит двух скважин, одна из которых принадлежит первой, а другая — второй батарее, равен $v = 192$ м³/сутки. Тогда $T = \frac{V_0}{v} = 2500$ суток. Закон стягивания ВНК зададим в форме

$$y = (b - e) - \frac{tf}{2500}.$$

Будем эксплуатировать скважины первой батареи с максимально допустимым дебитом $Q_1 = 100$ м³/сутки. Чтобы реализовать заданный закон стягивания ВНК, необходимо эксплуатировать скважины второй батареи (ближе расположенной к ВНК) с дебитом $Q_2 = 92$ м³/сутки. Q_3 определим по формуле (2, 3)

$$Q_3 = -Q_2^{(2)} e^{\frac{2\pi}{a} \left[\frac{2lf}{T} - b + 2e + c \right]},$$

где $Q_2^{(2)} = Q_2 - Q_2^{(1)}$, а $Q_2^{(1)} = Q_1 e^{-\frac{2\pi c}{a}} = 100 e^{-4\pi} = 0.0048$ м³/сутки.

Таким образом,

$$Q_2^{(2)} = Q_2 = 92 \text{ м}^3/\text{сутки},$$

$$Q_3 = 92e^{\frac{\pi}{200} \left(\frac{12t}{25} - 400 \right)}$$

На рис. 10 изображен график зависимости Q_3 от времени, из которого видно, что в течение первых 500 дней ввиду малости Q_3 можно не закачивать воду в пласт.

Если считать предельно допустимым дебитом нагнетательных скважин 1000 м³/сутки, то при данном расположении и найденном режиме

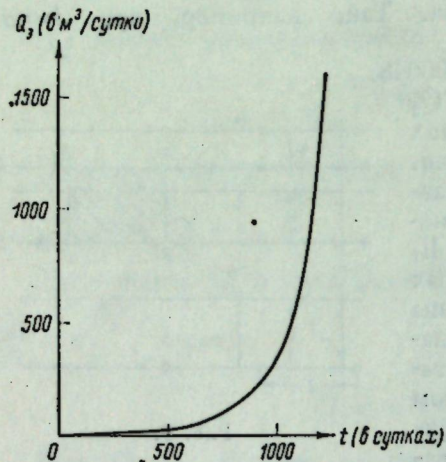


Рис. 10.

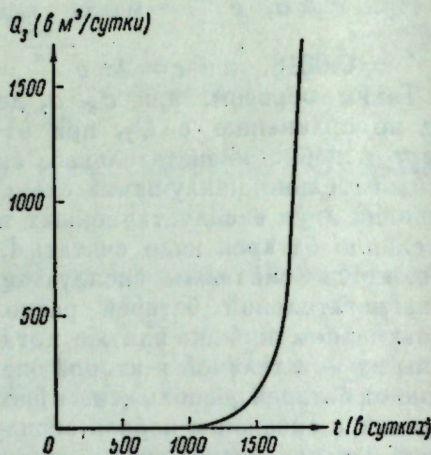


Рис. 11.

эксплуатации управление ВНК возможно в течение 1150 дней. ВНК за это время переместится приблизительно на 280 м.

Рассмотрим случай, когда нагнетательная батарея ближе расположена к ВНК.

Возьмем $e = 300$ м, оставляя все другие величины прежними. Тогда

$$Q_3 = 92e^{\frac{\pi}{200} \left(\frac{12t}{25} - 700 \right)} \text{ м}^3/\text{сутки}.$$

На рис. 11 приведен график зависимости Q_3 от времени. Если считать, что предельно допустимый дебит нагнетательных скважин равен также 1000 м³/сутки, то при данном размещении и полученном режиме эксплуатации управление ВНК возможно в течении 5 1/2 лет. За это время ВНК переместится на 413 м. В течении первых трех лет ввиду малости дебита Q_3 можно не производить закачивание воды в пласт.

Выводы, сделанные для случая трех круговых батарей, остаются в силе и для трех прямолинейных батарей.

Физико-технический институт
Казанского филиала АН СССР

Поступило 19 апреля
1954 г.

В. Л. ДАНИЛОВ

К ЗАДАЧЕ ОПРЕДЕЛЕНИЯ ПОЛЯ ДАВЛЕНИЯ ПРИ ЗАДАННОМ ЗАКОНЕ СТЫГИВАНИЯ КОНТУРА НЕФТЕНОСНОСТИ

В статье изучается задача отыскания распределения давления в нефтяной и водной зонах при заданном законе перемещения контура нефтеносности. Рассматривается плоское течение в однородном изотропном пласте. Приведен пример расчета для случая n скважин в нефтяной зоне, имеющей круговую форму.

§ 1. Постановка задачи и схема ее решения

Вопрос об определении гидродинамического давления в нефтяной и водной зонах пласта при известном законе перемещения контура нефтеносности непосредственно примыкает к задаче управления движением водо-нефтяного контакта, поставленной Г. С. Салеховым [1, 2]. Мы ограничимся рассмотрением плоской задачи.

1. Пусть в нефтяной зоне G_1 изотропного и однородного пласта постоянной мощности, которую для упрощения записи примем равной единице, размещены n скважин с координатами x_i, y_i и дебитами $Q_i(t)$ (рис. 1). Жидкости и породу полагаем несжимаемыми, а фильтрацию ламинарной. Закон стягивания контура нефтеносности Γ задан в виде

$$F(x, y, t) = 0. \quad (1,1)$$

Требуется определить распределение давлений в нефтяной и водных зонах. Скорость перемещения контура Γ по нормали к нему легко находится из (1,1) следующим образом [3]:

$$\frac{dF}{dt} = \frac{\partial F}{\partial x} \cdot \frac{dx}{dt} + \frac{\partial F}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dt} + \frac{\partial F}{\partial t} = 0.$$

Разделим все члены этого соотношения на $|\nabla F| = \sqrt{\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)^2}$

и учтем, что

$$\frac{\frac{\partial F}{\partial x}}{|\nabla F|} = \cos(n, x), \quad \frac{\frac{\partial F}{\partial y}}{|\nabla F|} = \cos(n, y).$$

Следовательно,

$$\cos(n, x) V_x + \cos(n, y) V_y + \frac{\frac{\partial F}{\partial t}}{|\nabla F|} = 0, \quad V_n = -\frac{\frac{\partial F}{\partial t}}{|\nabla F|}, \quad (1,2)$$

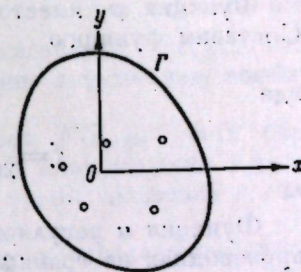


Рис. 1.

где V_n — действительная скорость перемещения жидких частиц по нормали к границе раздела Γ .

Вводя пористость среды m , перейдем к скорости фильтрации на контуре Γ по нормали к нему [4]:

$$v_n = m V_n. \quad (1,3)$$

Если через p_1 обозначить давление в нефтяной зоне, а через p_2 — давление в водной зоне, то на основании закона Дарси неразрывность течения на границе приводит к краевому условию [5]

$$v_n = -c_1 \frac{\partial p}{\partial n} \Big|_{\Gamma} = -c_2 \frac{\partial p_2}{\partial n} \Big|_{\Gamma}, \quad (1,4)$$

где $c_1 = \frac{k}{\mu_n}$, $c_2 = \frac{k}{\mu_w}$, k — коэффициент проницаемости, μ_n , μ_w — динамическая вязкость соответственно нефти и воды.

Известно далее, что $\Delta p_1 = 0$ и $\Delta p_2 = 0$. Из формул (1,2), (1,3) и (1,4) следует, что закон продвижения водо-нефтяного контакта полностью определяет нормальную производную давлений p_1 и p_2 на подвижной границе Γ

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial p_1}{\partial n} &= \frac{m}{c_1} \frac{\partial F}{|\nabla F|}, \\ \frac{\partial p_2}{\partial n} &= \frac{m}{c_2} \frac{\partial F}{|\nabla F|}. \end{aligned} \right\} \quad (1,5)$$

Функция p_1 имеет логарифмические особенности в точках скважин. Составим функцию

$$u = p_1 - f, \quad (1,6)$$

где

$$f = \frac{1}{2\pi c_1} \sum_{i=1}^n Q_i \ln \frac{1}{\sqrt{(x-x_i)^2 + (y-y_i)^2}}. \quad (1,7)$$

Функция u регулярна в области G_1 , причем известна ее нормальная производная на границе Γ

$$\frac{\partial u}{\partial n} \Big|_{\Gamma} = \frac{\partial p_1}{\partial n} \Big|_{\Gamma} - \frac{\partial f}{\partial n} \Big|_{\Gamma}. \quad (1,8)$$

Таким образом, для определения u следует решить вторую краевую задачу [6]. Как известно, функция u определяется с точностью до слагаемого, не зависящего от x и y , в нашем случае — произвольной аддитивной функции времени. Имея u , найдем p_1 из уравнения (1,6):

$$p_1 = f + u.$$

Следует отметить, что для разрешимости задачи определения p_1 во все время движения должно выполняться соотношение

$$\sum_{i=1}^n Q_i = \oint_{\Gamma} v_n dl = - \oint_{\Gamma} m \frac{\partial F}{|\nabla F|} dl, \quad (1,9)$$

которое вытекает из свойства гармонической функции p_1

$$\oint_{\Gamma} \frac{\partial p_1}{\partial n} dl = 0.$$

2. Переходим к определению функции p_2 — распределения давления в водной части. На подвижной границе Γ известны:

1) $p_2 = p_1$ в силу непрерывности поля давлений;

2) $\frac{\partial p_2}{\partial n} = \frac{c_1}{c_2} \frac{\partial p_1}{\partial n}$ — условие неразрывности течения [см. (1,4)].

Итак, на Γ известны значения функции p_2 и ее нормальной производной $\frac{\partial p_2}{\partial n}$, что, как известно, эквивалентно заданию на кривой Γ функции p_2 и ее первых производных.

Таким образом, определение p_2 сводится к решению задачи Коши для уравнения Лапласа $\Delta p_2 = 0$.

Известно, что такая задача некорректна. В случае задания p_2 , $\frac{\partial p_2}{\partial x}$ и $\frac{\partial p_2}{\partial y}$ только непрерывных и удовлетворяющих вдоль Γ условию

$$dp_2 = \frac{\partial p_2}{\partial x} dx + \frac{\partial p_2}{\partial y} dy,$$

не существует решения p_2 , непрерывного со своими производными двух первых порядков, даже в сколь угодно малой области [7].

Следует также иметь в виду, что в нашем случае, во-первых, значения p_2 и $\frac{\partial p_2}{\partial n}$ взаимосвязаны через функцию p_1 , гармоническую в области G_1 (исключая точки скважин), во-вторых, область, где ищется аналитическое решение p_2 , заранее не определена извне.

Задача эта имеет единственное аналитическое решение (с точностью до аддитивной функции времени), если исходный контур Γ_0 , заданный уравнением $F(x, y, 0) = 0$, аналитический по x и y и функция

$\frac{\partial p_2}{\partial n} = \frac{m}{c_2} \cdot \frac{\partial F}{|\nabla F|}$ является функцией аналитической по x и y во все рассматриваемое время в силу заданного закона стягивания $F(x, y, t) = 0$. (Пористость m считаем постоянной). Это решение существует, вообще говоря, лишь в окрестности контура Γ .

Можно расширить класс исходных контуров $F(x, y, 0) = 0$, беря контуры с угловыми точками. Тогда угол между касательными в угловых точках должен оставаться неизменным во время движения в силу заданного закона.

Одним из возможных методов решения задачи определения давлений p_1 и p_2 , из которого вытекает единственность решения, является метод конформных отображений, примененный В. Я. Булыгиным.

§ 2. Пример определения давлений в нефтяной и водной зонах при заданном законе стягивания контура нефтеносности

1. Рассмотрим частный пример, исходя из вышеизложенной схемы решения.

Пусть имеется n скважин с дебитами $Q_i(t)$ и полярными координатами $\rho_i, \alpha_i (i=1, 2, \dots, n)$, расположенных внутри кругового контура нефтеносности Γ (рис. 2). Течение плоское, жидкость несжимаемая. Контур Γ стягивается к началу координат, оставаясь круговым во все рассматриваемое время движения. Закон стягивания в полярных координатах

$$F(r, \varphi, t) = r - R(t) = 0, \quad (2,1)$$

где r, φ — текущие полярные координаты точек контура Γ .

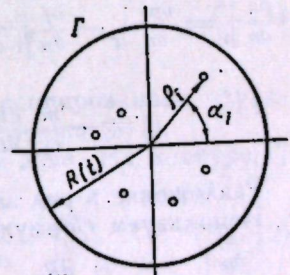


Рис. 2.

Требуется определить давления p_1 в нефтяной зоне G_1 и p_2 в водной зоне при $r > \rho_{i \max}$, т. е. до момента обводнения скважины, наиболее удаленной от начала координат.

Величины p_1 и p_2 удовлетворяют уравнению Лапласа. На контуре нефтеносности Γ должны выполняться соотношения

$$p_1 = p_2, \quad c_1 \frac{\partial p_1}{\partial n} = c_2 \frac{\partial p_2}{\partial n}.$$

2. Определим краевые условия на Γ :

$$v_n = -m \frac{\frac{\partial F}{\partial t}}{|\nabla F|} = -m \frac{-\frac{dR}{dt}}{\sqrt{\left(\frac{\partial F}{\partial r}\right)^2 + \frac{1}{r^2} \left(\frac{\partial F}{\partial \varphi}\right)^2}} = m \frac{dR}{dt} = -c_1 \frac{\partial p_1}{\partial n} = -c_2 \frac{\partial p_2}{\partial n}, \quad (2, 2)$$

где n — внешняя нормаль к контуру Γ .

Условие разрешимости (1, 9) для нашей задачи принимает вид

$$\sum_{i=1}^n Q_i = \oint_{\Gamma} v_n dl = \int_0^{2\pi} m \frac{dR}{dt} R d\theta = 2\pi m R \frac{dR}{dt}, \quad (2, 3)$$

если пористость m постоянна.

3. Представим далее p_1 как сумму двух функций:

$$p_1 = u + f, \quad (2, 4)$$

где

$$f = \frac{1}{2\pi c_1} \sum_{i=1}^n Q_i \ln \frac{1}{\sqrt{r^2 - 2r\rho_i \cos(\varphi - \alpha_i) + \rho_i^2}}. \quad (2, 5)$$

Из (2, 4)

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial n} &= \frac{\partial p_1}{\partial n} - \frac{\partial f}{\partial n}, \\ \frac{\partial f}{\partial n} \Big|_{\Gamma} &= \frac{\partial f}{\partial r} \Big|_{r=R} = -\frac{1}{2\pi c_1} \sum_{i=1}^n \frac{R - \rho_i \cos(\varphi - \alpha_i)}{R^2 - 2R\rho_i \cos(\varphi - \alpha_i) + \rho_i^2}. \end{aligned} \right\} \quad (2, 6)$$

Вследствие соотношений (2, 2) и (2, 6)

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial n} \Big|_{\Gamma} &= \frac{\partial p_1}{\partial n} \Big|_{\Gamma} - \frac{\partial f}{\partial n} \Big|_{\Gamma} = -\frac{m}{c_1} \frac{dR}{dt} + \frac{1}{2\pi c_1} \sum_{i=1}^n Q_i \frac{R - \rho_i \cos(\varphi - \alpha_i)}{R^2 - 2R\rho_i \cos(\varphi - \alpha_i) + \rho_i^2} = \\ &= -\frac{m}{c_1} \frac{dR}{dt} + \frac{1}{2\pi c_1 R} \sum_{i=1}^n Q_i \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{\rho_i}{R}\right)^k \cos k(\varphi - \alpha_i). \end{aligned}$$

Разложение в ряд законно при $\rho_i < R$ [5], что и имеет место (§ 2, п. 1). Используем формулу (2, 3).

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial n} \Big|_{\Gamma} &= -\frac{m}{c_1} \frac{dR}{dt} + \frac{m}{c_1} \frac{dR}{dt} + \frac{1}{2\pi c_1 R} \sum_{i=1}^n Q_i \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{\rho_i}{R}\right)^k \cos k(\varphi - \alpha_i) = \\ &= \frac{1}{2\pi c_1 R} \sum_{k=1}^{\infty} \left\{ \left[\sum_{i=1}^n Q_i \left(\frac{\rho_i}{R}\right)^k \cos k\alpha_i \right] \cos k\varphi + \right. \\ &\quad \left. + \left[\sum_{i=1}^n Q_i \left(\frac{\rho_i}{R}\right)^k \sin k\alpha_i \right] \sin k\varphi \right\}. \end{aligned} \quad (2, 7)$$

Известно, что при задании на окружности радиуса R производной

$$\frac{\partial u}{\partial r} \Big|_{r=R} = \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos k\varphi + b_k \sin k\varphi) \quad (2, 8)$$

гармоническая внутри круга $r < R$ функция u , удовлетворяющая на границе условию (2, 8), дается рядом

$$u(r, \varphi) = b_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} \frac{r^k}{R^{k-1}} (a_k \cos k\varphi + b_k \sin k\varphi), \quad (2, 9)$$

где b_0 — произвольная вещественная величина, не зависящая от r и φ , в нашем случае — любая функция времени [9].

Сравнивая коэффициенты в (2, 7) и (2, 8), видим, что

$$a_k = \frac{1}{2\pi c_1 R} \sum_{i=1}^n Q_i \left(\frac{\rho_i}{R}\right)^k \cos k\alpha_i; \quad b_k = \frac{1}{2\pi c_1 R} \sum_{i=1}^n Q_i \left(\frac{\rho_i}{R}\right)^k \sin k\alpha_i.$$

Поэтому

$$\begin{aligned} u(r, \varphi) &= b_0 + \frac{1}{2\pi c_1} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} \left(\frac{r}{R}\right)^k \left\{ \left[\sum_{i=1}^n Q_i \left(\frac{\rho_i}{R}\right)^k \cos k\alpha_i \right] \cos k\varphi + \right. \\ &\quad \left. + \left[\sum_{i=1}^n Q_i \left(\frac{\rho_i}{R}\right)^k \sin k\alpha_i \right] \sin k\varphi \right\} = b_0 + \frac{1}{2\pi c_1} \sum_{i=1}^n Q_i \ln \frac{R^2}{\rho_i} + \\ &\quad + \frac{1}{2\pi c_1} \sum_{i=1}^n Q_i \ln \frac{1}{\sqrt{r^2 - 2r \frac{R^2}{\rho_i} \cos(\varphi - \alpha_i) + \left(\frac{R^2}{\rho_i}\right)^2}}. \end{aligned} \quad (2, 10)$$

Подставляя выражения (2, 5) и (2, 10) в (2, 4), находим формулу для распределения давления в нефтяной зоне

$$\begin{aligned} p_1 &= b_0 + \frac{1}{2\pi c_1} \sum_{i=1}^n Q_i \ln \frac{R^2}{\rho_i} + \frac{1}{2\pi c_1} \sum_{i=1}^n Q_i \ln \frac{1}{\sqrt{r^2 - 2r \frac{R^2}{\rho_i} \cos(\varphi - \alpha_i) + \left(\frac{R^2}{\rho_i}\right)^2}} + \\ &\quad + \frac{1}{2\pi c_1} \sum_{i=1}^n Q_i \ln \frac{1}{\sqrt{r^2 - 2r\rho_i \cos(\varphi - \alpha_i) + \rho_i^2}}. \end{aligned} \quad (2, 11)$$

Нетрудно убедиться непосредственно дифференцированием функции p_1 в том, что она удовлетворяет краевому условию (2, 2).

4. Перейдем к отысканию давления p_2 в водной зоне. На контуре Γ , т. е. при $r = R$,

$$1) p_1 = p_2, \quad 2) \frac{\partial p_2}{\partial r} = \frac{c_1}{c_2} \cdot \frac{\partial p_1}{\partial r} = -\frac{m}{c_2} \cdot \frac{dR}{dt}. \quad (2, 12)$$

С учетом (2, 10) и (2, 11)

$$\begin{aligned} p_2 \Big|_{R} &= b_0 + \frac{1}{2\pi c_1} \sum_{i=1}^n Q_i \ln \frac{1}{\sqrt{1 - 2 \frac{\rho_i}{R} \cos(\varphi - \alpha_i) + \left(\frac{\rho_i}{R}\right)^2}} + \\ &\quad + \frac{1}{2\pi c_1} \sum_{i=1}^n Q_i \ln \frac{1}{\sqrt{R^2 - 2R\rho_i \cos(\varphi - \alpha_i) + \rho_i^2}} = \end{aligned}$$

$$= b_0 - \frac{mR}{c_1} \cdot \frac{dR}{dt} \ln R + \frac{1}{\pi c_1} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} \left\{ \left[\sum_{i=1}^n Q_i \left(\frac{\rho_i}{R} \right)^k \cos k\alpha_i \right] \cos k\varphi + \right. \\ \left. + \left[\sum_{i=1}^n Q_i \left(\frac{\rho_i}{R} \right)^k \sin k\alpha_i \right] \sin k\varphi \right\}; \quad (2, 13)$$

здесь использовано соотношение (2, 3).

Общий вид функции p_2 , гармонической вне круга R , следующий:

$$p_2(r, \varphi) = A + B \ln r + \sum_{k=1}^{\infty} [r^k (a_k \cos k\varphi + b_k \sin k\varphi) + \\ + r^{-k} (c_k \cos k\varphi + d_k \sin k\varphi)] = A + B \ln r + \\ + \sum_{k=1}^{\infty} [(a_k r^k + c_k r^{-k}) \cos k\varphi + (b_k r^k + d_k r^{-k}) \sin k\varphi]. \quad (2, 14)$$

Производная ее по r

$$\frac{\partial p_2}{\partial r} = \frac{B}{r} + \sum_{k=1}^{\infty} k [(a_k r^{k-1} - c_k r^{-k-1}) \cos k\varphi + (b_k r^{k-1} - d_k r^{-k-1}) \sin k\varphi]. \quad (2, 15)$$

При $r=R$ из формул (2, 14) и (2, 15) следует:

$$p_2(R, \varphi) = A + B \ln R + \\ + \sum_{k=1}^{\infty} [(a_k R^k + c_k R^{-k}) \cos k\varphi + (b_k R^k + d_k R^{-k}) \sin k\varphi], \quad (2, 16)$$

$$\left. \frac{\partial p_2}{\partial r} \right|_{r=R} = \frac{B}{R} + \sum_{k=1}^{\infty} k [(a_k R^{k-1} - c_k R^{-k-1}) \cos k\varphi + \\ + (b_k R^{k-1} - d_k R^{-k-1}) \sin k\varphi]. \quad (2, 17)$$

Сравним коэффициенты рядов Фурье в (2, 13) и (2, 16), с одной стороны, и в (2, 12) и (2, 17), с другой:

$$A + B \ln R = b_0 - \frac{mR}{c_1} \cdot \frac{dR}{dt} \ln R,$$

$$a_k R^k + c_k R^{-k} = \frac{1}{\pi c_1 k} \sum_{i=1}^n Q_i \left(\frac{\rho_i}{R} \right)^k \cos k\alpha_i,$$

$$b_k R^k + d_k R^{-k} = \frac{1}{\pi c_1 k} \sum_{i=1}^n Q_i \left(\frac{\rho_i}{R} \right)^k \sin k\alpha_i,$$

$$\frac{B}{R} = -\frac{m}{c_2} \frac{dR}{dt},$$

$$a_k R^{k-1} - c_k R^{-k-1} = 0,$$

$$b_k R^{k-1} - d_k R^{-k-1} = 0.$$

Из этой системы уравнений определяются все коэффициенты:

$$A = b_0 - \left(\frac{1}{c_1} - \frac{1}{c_2} \right) mR \frac{dR}{dt} \ln R,$$

$$B = -\frac{mR}{c_2} \cdot \frac{dR}{dt},$$

$$a_k = \frac{1}{2\pi c_1 k} \sum_{i=1}^n Q_i \left(\frac{\rho_i}{R} \right)^k \cos k\alpha_i,$$

$$b_k = \frac{1}{2\pi c_1 k} \sum_{i=1}^n Q_i \left(\frac{\rho_i}{R} \right)^k \sin k\alpha_i,$$

$$c_k = \frac{1}{2\pi c_1 k} \sum_{i=1}^n Q_i \rho_i^k \cos k\alpha_i,$$

$$d_k = \frac{1}{2\pi c_1 k} \sum_{i=1}^n Q_i \rho_i^k \sin k\alpha_i.$$

Подставим найденные значения коэффициентов в выражение (2, 14) После некоторых преобразований получим

$$p_2 = b_0 - \left(\frac{1}{c_1} - \frac{1}{c_2} \right) mR \frac{dR}{dt} \ln R - \frac{mR}{c_2} \frac{dR}{dt} \ln r + \\ + \frac{1}{2\pi c_1} \sum_{i=1}^n Q_i \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} \left(\frac{r\rho_i}{R} \right)^k \cos k(\varphi - \alpha_i) + \\ + \frac{1}{2\pi c_1} \sum_{i=1}^n Q_i \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} \left(\frac{\rho_i}{r} \right)^k \cos k(\varphi - \alpha_i). \quad (2, 18)$$

При $\frac{r\rho_i}{R^2} < 1$, т. е. при $r < \frac{R^2}{\rho_i}$, бесконечные ряды в четвертом члене можно просуммировать:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} \left(\frac{r\rho_i}{R} \right)^k \cos k(\varphi - \alpha_i) = \ln \frac{1}{\sqrt{1 - 2 \frac{r\rho_i}{R^2} \cos(\varphi - \alpha_i) + \left(\frac{r\rho_i}{R^2} \right)^2}}.$$

В пятом члене ряды суммируются при $\frac{\rho_i}{r} < 1$, что имеет место повсюду вне круга радиуса R :

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} \left(\frac{\rho_i}{r} \right)^k \cos k(\varphi - \alpha_i) = \ln \frac{1}{\sqrt{1 - 2 \frac{\rho_i}{r} \cos(\varphi - \alpha_i) + \left(\frac{\rho_i}{r} \right)^2}}.$$

Учитывая это, а также соотношение (2, 3), после подстановки и преобразований выражению (2, 18) можно придать следующий вид:

$$p_2(r, \varphi) = b_0 + \frac{1}{2\pi c_1} \sum_{i=1}^n Q_i \ln \frac{R^2}{\rho_i} + \frac{1}{2\pi c_1} \sum_{i=1}^n Q_i \ln \frac{1}{\sqrt{r^2 - 2r \frac{R^2}{\rho_i} \cos(\varphi - \alpha_i) + \left(\frac{R^2}{\rho_i} \right)^2}} + \\ + \frac{1}{2\pi c_1} \sum_{i=1}^n Q_i \ln \frac{1}{\sqrt{r^2 - 2r\rho_i \cos(\varphi - \alpha_i) + \rho_i^2}} - \left(\frac{1}{c_1} - \frac{1}{c_2} \right) mR \frac{dR}{dt} \ln \frac{R}{r}. \quad (2, 19)$$

Из формул (2, 11) и (2, 19) легко усмотреть, что

$$p_2 = p_1 - \left(\frac{1}{c_1} - \frac{1}{c_2} \right) mR \frac{dR}{dt} \ln \frac{R}{r}. \quad (2, 20)$$

Проверка показывает, что найденная функция удовлетворяет крайним условиям (2, 12).

Итак, давление p_2 определяется единственным образом. Из формулы (2, 19) видно, что p_2 — функция непрерывная всюду вне круга радиуса R , кроме точек с координатами $(\frac{R^2}{\rho_i}, \alpha_i)$ и бесконечно удаленной точки, где имеются особенности логарифмического типа. Точки $(\frac{R^2}{\rho_i}, \alpha_i)$ являются сопряженными с координатами скважин (ρ_i, α_i) относительно контура нефтеносности $r=R(t)$ и перемещаются по радиусам к контуру Γ по мере приближения его к эксплуатационным скважинам.

Иначе говоря, в водной зоне имеются „плавающие“ особенности (рис. 3). Характер их нетрудно установить, учитывая, что изолированная скважина в водной части с дебитом Q_i в точке $(\frac{R^2}{\rho_i}, \alpha_i)$ дает закон распределения давления

$$p = \frac{Q_i}{2\pi c_2} \ln \frac{1}{\sqrt{r^2 - r \frac{R^2}{\rho_i} \cos(\varphi - \alpha_i) + (\frac{R^2}{\rho_i})^2}}$$

Сравнение с коэффициентами во второй сумме формулы (2, 19) показывает, что в точках $(\frac{R^2}{\rho_i}, \alpha_i)$ имеются стоки с дебитами

$$Q'_i = \frac{c_2}{c_1} Q_i \quad (2, 21')$$

Поэтому в бесконечно удаленной точке плоскости течения имеется источник обильности

$$Q'_0 = - \left(\sum_{i=1}^n Q_i + \sum_{i=1}^n Q'_i \right) = - \left(1 + \frac{c_2}{c_1} \right) \sum_{i=1}^n Q_i \quad (2, 22')$$

Формула (2, 22') дает количество воды, притекающей извне.

5. Случай жидкостей с одинаковой вязкостью, или как их иногда называют, разноцветных жидкостей, вытекает из рассмотренного, если в полученных выражениях положить всюду $c_1 = c_2$.

Из (2, 20) следует, что $p_2 = p_1$, причем p_1 дается формулой (2, 11). Давление — единая гармоническая функция во всей плоскости за исключением точек (ρ_i, α_i) , сопряженных с ними относительно круга радиуса R подвижных точек $(\frac{R^2}{\rho_i}, \alpha_i)$ и бесконечно удаленной точки. Формулы (2, 21') и (2, 22') принимают вид:

$$Q'_i = Q_i \quad (2, 21'')$$

$$Q'_0 = - 2 \sum_{i=1}^n Q_i \quad (2, 22'')$$

т. е. дебиты скважин в водной зоне равны дебитам нефтяных скважин в сопряженных точках.

6. Из рассмотренного примера следует, что для обеспечения стягивания контура нефтеносности по заданному закону необходимо иметь

в водной зоне „плавающие“ скважины с дебитами, вычисляемыми по формуле (2, 21'), перемещающиеся по радиусам к контуру нефтеносности по мере его стягивания. Когда контур Γ достигает нефтяной скважины, соответствующая водная скважина совмещается с нефтяной.

Практически, разумеется, осуществить „плавающую“ особенность нельзя. Можно теоретически представить цепочку водных скважин, разбуренных по радиусу, причем скважины включаются поочередно по мере стягивания контура Γ .

Таким путем удалось бы приближенно выполнить необходимое перемещение скважины в водной зоне. Однако, практически подобное „управление“ контуром нефтеносности нереально. Другой, кажущийся вероятным, вариант управления состоит во введении галереи в водной зоне, опоясывающей нефтяную линзу (прямые кресты на рис. 3). Нетрудно показать, что на галерее должны быть непрерывно распределенные источники и стоки, которых в пористой среде осуществить мы не можем. Если даже предположить, что такой слой осуществлен, то галерея источников и стоков эффективна лишь до тех пор, пока внутрь ее не вошла ни одна из плавающих скважин, т. е. пока $\frac{R^2}{\rho_i} > R$ галерей.

Может возникнуть вопрос: имеются ли решения задачи с неподвижными скважинами в водной зоне?

Чтобы ответить на него, будем исходить из прямой задачи. Предположим, что задана система скважин в нефтяной и водной зонах. Заданы дебиты этих скважин. Известно начальное положение контура нефтеносности. Требуется определить закон его перемещения.

Решение этой задачи, как известно, сводится к решению системы нелинейных дифференциальных уравнений в частных производных^[2,4] и представляет огромные трудности.

Допустим, что задача эта решена и получен закон перемещения контура нефтеносности $F(x, y, t) = 0$.

Если теперь считать этот закон заданным, взять нефтяные скважины с теми же дебитами, что и в прямой задаче, и поставить задачу обратную, т. е. определения давления в нефтяной и водной зонах, то в силу единственности решения задачи (см. § 1 настоящей статьи) мы придем к неподвижным скважинам в водной зоне. Однако легко видеть, что вероятность задания такого закона стягивания $F(x, y, t) = 0$ практически ничтожна, и рассчитывать на „угадывание“ наперед закона синхронных контуров не приходится.

Следует указать, что задача определения поля давления при заданном законе стягивания контура нефтеносности, поставленная Г. С. Салеховым, рассмотрена в статье Г. Г. Тумашева^[10]. Однако автор предполагал заранее функцию p_2 гармонической всюду вне контура Γ за исключением бесконечно удаленной точки, отыскивая давление p_2 в виде суммы потенциалов простого и двойного слоев, распределенных на контуре нефтеносности Γ . При таком предположении в общем случае невозможно удовлетворить условию равенства нормальных скоростей на контуре Γ (1, 4).¹

Как легко видеть из примера, приведенного в § 2 настоящей статьи, в частности случае, когда функция p_2 гармоническая всюду вне Γ , исключая бесконечно удаленную точку, является случай одной скважины в центре кругового контура нефтеносности. Этот пример и дается в статье^[10]. Отсюда становится ясным различие в результатах настоящей работы и приведенных в указанной статье.

¹ См. по этому поводу примечание к статье^[10] на стр. 134.

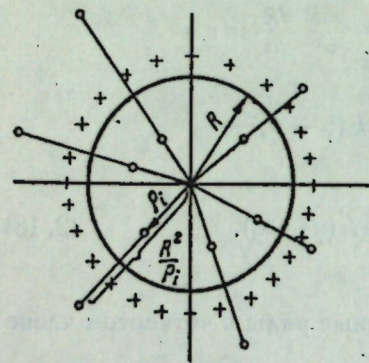


Рис. 3.

Заключение

В статье изучена задача определения поля давления в нефтяной и водной зонах пласта при заданном законе стягивания контура нефтеносности. Показано, что задача определения давления в нефтяной зоне сводится к внутренней задаче Неймана, а задача определения давления в водной зоне есть задача Коши для уравнения Лапласа и потому некорректна.

Лишь при известных условиях, налагаемых на закон стягивания $F(x, y, t) = 0$, решение этой второй задачи существует и единственно. Однако даже если закон стягивания удовлетворяет необходимым условиям, то в общем случае непрерывное поле давлений может существовать лишь в окрестности контура нефтеносности Γ . Возможно и наличие подвижных особенностей, как показывает рассмотренный частный пример.

Такие решения задачи практически непригодны, так как управление перемещением контура нефтеносности может производиться лишь за счет режимов эксплуатации неподвижных скважин в нефтяной и водной зонах, как имеющихся в наличии, так и вновь разбуриваемых.

Отсюда вытекает следующий вывод: задачу управления перемещением контура нефтеносности следует решать приближенно, исходя, в частности, из обязательного условия неподвижности скважин в водной зоне.

ЛИТЕРАТУРА

1. Г. С. Салехов. Прямые и обратные задачи о продвижении водо-нефтяного контакта. Изв. Казанск. филиала АН СССР, сер. физ.-математ. и техн. наук, вып. 5, 1954.
2. Г. С. Салехов. Постановка и метод решения гидродинамических задач управления движением контура нефтеносности. См. настоящий выпуск, стр. 3.
3. Н. Е. Кочин, И. А. Кибель и Н. В. Розе. Теоретическая гидромеханика, т. I. Гостехиздат, М.—Л., 1948.
4. И. А. Чарный. Подземная гидромеханика. Гостехиздат, М.—Л., 1948.
5. М. Маскет. Течение однородных жидкостей в пористой среде. Гостехиздат, М.—Л., 1949.
6. А. Н. Тихонов и А. А. Самарский. Уравнения математической физики. Гостехтеориздат. М.—Л., 1953.
7. Э. Гурса. Курс математического анализа, т. 3, ч. I. Гостехтеориздат, 1933.
8. И. М. Рыжик и И. С. Градштейн. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. М.—Л., 1951.
9. Л. В. Канторович и В. И. Крылов. Приближенные методы высшего анализа. Гостехиздат, М.—Л., 1950.
10. Г. Г. Тумашев. К задаче о стягивании контура нефтеносности. Уч. зап. Казанск. Гос. унив. им. В. И. Ульянова-Ленина, сб. работ НИИММ им. Н. Г. Чеботарева, т. 113, кн. 10, 1953.

Физико-технический институт
Казанского филиала АН СССР

Поступило 19 апреля
1954 г.

СОДЕРЖАНИЕ

	Стр.
Г. С. Салехов. Постановка и метод решения гидродинамических задач управления движением контура нефтеносности	3
В. Д. Чугунов. Некоторые частные случаи управления продвижением водо-нефтяного контакта	39
В. Л. Данилов. К задаче определения поля давления при заданном законе стягивания контура нефтеносности	53

Утверждено к печати
Казанским филиалом АН СССР

Редактор издательства Н. К. Зайчик
Технический редактор А. В. Смирнова
Корректор Н. А. Малевич

РИСО АН СССР № 184—19Р. М. 34400.
Подписано к печати 9/V 1955 г. Бумага
70×108/16. Бум. л. 2. Печ. л. 5.48.
Уч.-изд. л. 6.28. Тираж 1500. Зак. № 70.
Цена 4 р. 40 к.

1-я тип. Издательства АН СССР,
Ленинград, В. О., 9-я линия, дом 12.

ИСПРАВЛЕНИЯ И ОПЕЧАТКИ

Страница	Строки	Напечатано	Должно быть
6	7 сверху	контур $\frac{V_0}{T}$	контур $-\frac{V_0}{T}$
18	11 снизу	y_1	q_1
35	11 сверху	заданного	и заданного
40	2--3 "	м ³ /сутки	м ³
46	9 "	$\sin \frac{2\pi}{a} (\rho_1 - b) \left(\frac{l_2}{\rho_1 - c} \right) -$	$\sin \frac{2\pi}{a} (\rho_1 - b) \left(\frac{l_2}{\rho_1 - c} -$
48	10 снизу	$-\frac{l_2}{\rho_1 - b} -$	$-\frac{l_2}{\rho_1 - b} -$
		$\frac{Q_2}{Q_1}$	$\frac{Q_2}{Q_1}$
50	12 сверху	$v_n = -c_1 \frac{\partial p}{\partial n} \Big _{r=r_0}$	$v_n = -c_1 \frac{\partial p}{\partial n} \Big _{r=r_0}$
54	9 "	$-\frac{mR}{c^2} \frac{dR}{dt} \ln r -$	$-\frac{mR}{c^2} \frac{dR}{dt} \ln r -$
59	7 "		

Известия Казанского филиала АН СССР, сер. физ.-математ. и техн. наук, в. 6.