

скамер

АКАДЕМИЯ НАУК СССР
КАЗАНСКИЙ ФИЛИАЛ

ИЗВЕСТИЯ
КАЗАНСКОГО ФИЛИАЛА
АКАДЕМИИ НАУК СССР

*СЕРИЯ ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИХ
И ТЕХНИЧЕСКИХ НАУК*

5



1954

АКАДЕМИЯ НАУК СССР
КАЗАНСКИЙ ФИЛИАЛ

ИЗВЕСТИЯ
КАЗАНСКОГО ФИЛИАЛА
АКАДЕМИИ НАУК СССР

*СЕРИЯ ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИХ
И ТЕХНИЧЕСКИХ НАУК*

Выпуск 5



ИЗДАТЕЛЬСТВО АКАДЕМИИ НАУК СССР

МОСКВА

1954

ЛЕНИНГРАД

Г. С. САЛЕХОВ

ПРЯМЫЕ И ОБРАТНЫЕ ЗАДАЧИ О ПРОДВИЖЕНИИ ВОДОНЕФТЯНОГО КОНТАКТА

В статье наряду с кратким обзором работ, посвященных решению задач о прослеживании продвижения водонефтяного контакта (прямые задачи), дается постановка новых задач об управлении продвижением водонефтяного контакта (обратные задачи). В работе дано также решение простейших прямых и обратных задач для случаев прямолинейного и радиально-кругового продвижения водонефтяного контакта в пластах с переменными мощностью и проницаемостью.

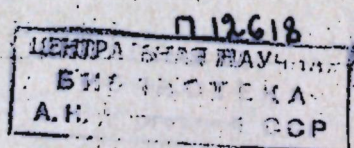
§ 1. Введение

При эксплуатации нефтяных месторождений большое значение имеет знание законов перемещения водонефтяного контакта (ВНК). Изучение этих законов приводит к решению весьма сложных краевых задач математической физики с подвижными границами и переменными граничными условиями. Решение этих краевых задач с той или иной степенью точности может характеризовать перемещение ВНК в данном нефтяном месторождении. В настоящее время все краевые задачи о продвижении ВНК как с точки зрения самого физического явления, так и с точки зрения методов подхода к их решению могут быть условно разбиты на две основные группы, а именно на локальные и нелокальные. К локальным можно отнести все задачи, связанные с изучением перемещения ВНК вблизи одной эксплуатационной скважины или галереи. Эти задачи связаны с исследованиями процесса образования водяных конусов и по существу являются пространственными. Так как мощность нефтяного пласта по сравнению с размерами всего месторождения весьма мала, а также в предположении, что в наклоне нефтяного пласта резкие изменения не наблюдаются, с учетом тех или иных режимов эксплуатации данного нефтяного месторождения решение этой задачи сводят к решению плоской задачи. Даже при такой схематизации постановка и решение конкретных нелокальных задач о ВНК являются весьма сложными проблемами подземной гидравлики. В настоящей работе мы сосредоточили внимание на постановке и решении лишь некоторых нелокальных задач о ВНК. Решением упомянутых задач в той или иной постановке занимались Л. С. Лейбензон, В. Н. Щелкачев, И. А. Чарный, П. Я. Полубаринова-Кочина, Н. С. Пискунов, Л. А. Галин, М. Н. Тихов, В. Ф. Дудин, П. П. Куфарев, М. Маскет и другие

§ 2. Постановка прямых задач о продвижении ВНК

Мы здесь рассмотрим гидродинамическую постановку одной общей краевой задачи о продвижении ВНК. Решению ее и задач, непосред-

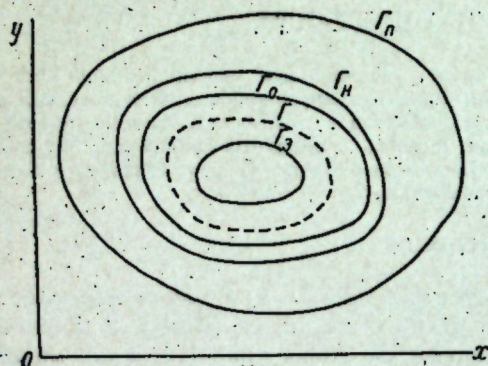
Главный редактор академик А. Е. Арбузов
Ответственный редактор профессор Г. С. Салехов



ственно примыкающих к ней, при различных частных предположениях посвящены работы вышеуказанных авторов. В этих работах излагаются различные гидродинамические методы прослеживания продвижения контура нефтеносности при заданных условиях эксплуатации. Принципиально другие постановки задачи о продвижении ВНК, которые мы кратко называем обратными задачами о продвижении ВНК, будут подробно рассмотрены в следующем параграфе настоящей работы.

Для удобства дальнейшего изложения введем следующие сокращенные обозначения (фиг. 1):

- Γ_0 — эксплуатационная галерея;
- Γ_0 — начальное положение водонефтяного контакта;
- Γ — текущее положение водонефтяного контакта;
- Γ_{II} — нагнетательная галерея;
- Γ_{II} — контур питания.



Фиг. 1.

q_0 — текущий объемный дебит эксплуатационной галереи, отнесенный к единице длины контура Γ_0 .

В первоначальном положении, когда ни одна из галерей не пущена в эксплуатацию, мы считаем, что зону между Γ_{II} и Γ_0 занимает вода с вязкостью μ_n и зону между Γ_0 и Γ_0 занимает нефть с вязкостью μ_0 .

Поставим следующую прямую задачу, т. е. задачу о прослеживании продвижения ВНК:

Пусть заданы уравнения контуров Γ_{II} , Γ_{II} , Γ_0 , Γ_0 как функции координат и давления P_0 , P_{II} как функции координат и времени. Требуется определить закон продвижения ВНК, т. е. Γ , в любой момент времени. (Вместо P_0 и P_{II} можно считать заданными q_0 и q_{II} ; q_0 и P_0 , либо P_0 и q_{II}).

При этом следует отметить, что совершенно аналогичной постановка задачи остается также в случае, если вместо эксплуатационных и нагнетательных галерей рассматривать эксплуатационные и нагнетательные батареи скважин, давления на которых заданы как функции времени.¹ Кроме того заметим, что подобную же задачу можно было бы поставить при условии, когда считаются известными текущие дебиты эксплуатационных и нагнетательных скважин. Эта задача может быть поставлена для пластов с различными режимами (водонапорным, упругим и др.).

Пусть далее:

P_0 — давление, которое поддерживается на эксплуатационной галереи;

P_{II} — давление, которое поддерживается на нагнетательной галереи;

P_0 — пластовое давление, которое сохраняется постоянным на контуре питания;

q_{II} — текущий объемный дебит нагнетательной галереи, отнесенный к единице длины контура Γ_{II} ;

q_0 — текущий объемный дебит эксплуатационной галереи, отнесенный к единице длины контура Γ_0 .

¹ Такая постановка задачи является более близкой к реальным условиям промысловой практики, чем это имеет место в случае принятой выше схемы эксплуатационных и нагнетательных галерей, широко применяемой в ряде исследований.

Например, для случая водонапорного режима при решении выше формулированной задачи можно использовать следующие соотношения.

Как известно [1], давление в пластах с непостоянной мощностью и проницаемостью удовлетворяет уравнению

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(hk \frac{\partial P}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(hk \frac{\partial P}{\partial y} \right) = 0, \quad (2, 1)$$

где h — мощность пласта и k — проницаемость являются некоторыми функциями от x и y .

Если давление в области между Γ_0 и Γ обозначим через $P_1(x, y, t)$ и между Γ и Γ_{II} — через $P_2(x, y, t)$, то, во-первых, каждая из этих функций должна удовлетворять уравнению (2, 1), во-вторых, в силу непрерывности давления и нормальных скоростей, на Γ должны выполняться условия

$$P_1(x, y, t) = P_2(x, y, t); \quad (2, 2)$$

$$\frac{k}{\mu_n} \cdot \frac{\partial P_1}{\partial n} = \frac{k}{\mu_n} \cdot \frac{\partial P_2}{\partial n}. \quad (2, 3)$$

Кроме того, на основании закона Дарси имеем уравнения

$$V_x = -\frac{k}{\mu_n} \cdot \frac{\partial P_1}{\partial x}, \quad V_y = -\frac{k}{\mu_n} \cdot \frac{\partial P_1}{\partial y}; \quad (2, 4)$$

$$V_x = -\frac{k}{\mu_n} \cdot \frac{\partial P_2}{\partial x}, \quad V_y = -\frac{k}{\mu_n} \cdot \frac{\partial P_2}{\partial y}, \quad (2, 5)$$

где $\frac{dx}{dt} = \frac{V_x}{m}$, $\frac{dy}{dt} = \frac{V_y}{m}$, m — пористость пласта.

Если предположить далее, что уравнение неизвестного контура Γ в любой момент времени имеет вид $F(x, y, t) = 0$ [причем $F(x, y, 0) = 0$ дает первоначальное положение водонефтяного контакта], то, беря полную производную из обеих частей его по переменному t и пользуясь соотношениями (2, 4) или (2, 5), будем иметь

$$\frac{\partial F}{\partial t} - \frac{k_1}{\mu_n m} \left(\frac{\partial F}{\partial x} \cdot \frac{\partial P_1}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial y} \cdot \frac{\partial P_1}{\partial y} \right) = 0 \quad (2, 6)$$

или

$$\frac{\partial F}{\partial t} - \frac{k_2}{\mu_n m} \left(\frac{\partial F}{\partial x} \cdot \frac{\partial P_2}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial y} \cdot \frac{\partial P_2}{\partial y} \right) = 0. \quad (2, 7)$$

Дифференциальными уравнениями (2, 6) или (2, 7) можно пользоваться для нахождения уравнения $F(x, y, t) = 0$ неизвестного контура Γ .

Решение прямой задачи о продвижении ВНК представляет большие математические трудности. Мы уже не говорим о том, что до сих пор не доказаны теоремы существования и единственности решения этой задачи в более или менее широких предположениях, хотя из физических соображений существование решения вполне очевидно.

Все работы, относящиеся к исследованию вопроса о продвижении ВНК, как было отмечено нами ранее, посвящены решению некоторых частных случаев прямых задач о прослеживании движения контура нефтеносности.

Мы здесь позволим себе лишь очень кратко остановиться на некоторых из этих результатов.

Акад. Л. С. Лейбензон [2] в 1934 г. рассмотрел решение задачи о продвижении ВНК для случая радиально-кругового движения, считая

вязкость воды исчезающе малой сравнительно с вязкостью нефти. Для случая линзы некруглой формы при тех же предположениях о вязкостях воды и нефти Л. С. Лейбензон^[3] дал приближенный графический метод решения задачи о продвижении ВНК.

В 1948—1950 гг. И. А. Чарным было опубликовано несколько интересных работ по изучению продвижения ВНК в пористой среде^[4, 5]. Эти исследования И. А. Чарного исходят из струйной теории, основное содержание которой изложено в монографии^[4]. В другой работе И. А. Чарного^[6] излагается приближенный метод расчета перемещения первоначально плоской границы раздела между водой и нефтью в наклонном нефтяном пласте, вскрытом рядом скважин. Обе жидкости предполагаются несжимаемыми, а движение — подчиняющимся закону Дарси. Предлагаемое решение является обобщением и некоторым видоизменением ранее предложенного способа В. Н. Щелкачева^[7], по которому плотности считаются одинаковыми и учитывается только различие вязкостей обеих жидкостей.

М. Маскет^[8] рассмотрел решение задачи о продвижении ВНК с учетом различия вязкостей воды и нефти для частных случаев, когда движение жидкостей предполагается поступательно-прямолинейным и радиально-круговым. Впоследствии эти результаты были уточнены В. Н. Щелкачевым^[7]. В той же работе М. Маскет предлагает приближенный метод аналитического решения задачи о продвижении „разноцветных“ жидкостей (без учета различия вязкостей воды и нефти) для залежей произвольной формы. Далее, также при учете различия вязкостей воды и нефти, В. Н. Щелкачев^[9] дал формулы подсчета времени безводной эксплуатации круговой батареи при концентрическом расположении батареи нагнетательных скважин и из этих формул получил ряд интересных практических выводов.

Б. Э. Казарновской^[10] получены уравнения продвижения ВНК и время безводной эксплуатации без учета различия вязкостей нефти и воды для полосообразной нефтяной залежи большой протяженности с рядами скважин, расположенными вдоль полосы параллельно ее контуру питания.

М. Н. Тиховым^[11] выведено уравнение движения контура нефтеносности в параметрической форме в случае, когда контур питания и контур нефтеносности в начальный момент являются эксцентрическими окружностями. При этом имеется одна эксплуатационная скважина, центр которой совпадает с центром контура питания. Вязкости воды и нефти считаются различными и не равными нулю.

П. Я. Полубаринова-Кочина^[12] применила методы теории функций комплексного переменного для решения задачи о продвижении контура нефтеносности в постановке Л. С. Лейбензона^[2], т. е. когда вязкость воды считается пренебрежимо малой по сравнению с вязкостью нефти. Различным обобщением и решению подобных задач методом конформных отображений посвящен ряд работ Л. А. Галина^[13], П. П. Куфарова и Ю. П. Виноградова^[14, 15, 16, 17].

Кроме указанных работ, относящихся к исследованию продвижения ВНК в случае водонапорного режима пласта, следует отметить также работу Н. С. Пискунова^[18], в которой, в предположении, что имеется пласт бесконечной протяженности и режим пласта упругий, изучается движение контура нефтеносности, причем различие вязкостей воды и нефти учитывается весьма приближенно введением некоторого коэффициента, как это рекомендует В. Н. Щелкачев^[10].

Мы здесь не рассматривали некоторых работ, связанных с изучением продвижения ВНК при помощи электроинтеграторов на основании электрогидродинамической аналогии (ЭГДА). Хотя при таком методе

может быть дано решение каждой конкретной задачи, однако, учет различия вязкостей воды и нефти приводит к значительным трудностям, и нет возможности установить общие законы продвижения ВНК. Все вышеперечисленные исследования относятся в основном к решению, по принятой нами терминологии, так называемых прямых задач о продвижении ВНК в той постановке, как она была сформулирована выше для случая водонапорного режима. Точно так же она может быть сформулирована для других режимов пласта. Причем, как уже было отмечено, основная цель решения этих прямых задач заключается в том, чтобы при заданных краевых и начальных условиях найти закон продвижения ВНК, следить за этим продвижением.

§ 3. Постановка обратных задач о продвижении ВНК

Наряду с разработкой рациональных методов прослеживания продвижения ВНК, имеющих большое значение для нефтепромысловой практики, мы здесь намерены поставить новые задачи, в некотором смысле обратные задачам, которые рассматривались до сих пор (в § 2). В дальнейшем эти задачи условно будем называть обратными задачами о продвижении ВНК.

Основной целью решения подобных задач является разработка таких методов гидродинамического расчета эксплуатации данного нефтяного месторождения в целом, которые давали бы возможность не следить, а управлять продвижением ВНК. Реальный смысл и возможность постановки таких задач становятся вполне очевидными особенно теперь, когда в нефтепромысловую практику широко внедряется законтурное заводнение.

Решение обратных задач о ВНК при данном режиме пласта, помимо вышеуказанной разработки гидродинамических методов управления движением ВНК, должно также дать возможность не только рационально эксплуатировать имеющиеся месторождения, но и планировать разработку месторождения в целом с введением процесса законтурного заводнения с самого начала эксплуатации. Заранее следует отметить, что математический подход к решению таких задач в общем случае становится более простым, чем это имело место при старой постановке задачи продвижения ВНК. Дело в том, что при постановке прямой задачи, когда учитываются различные вязкости воды и нефти, приходится удовлетворять определенным краевым условиям непрерывности давления и равенства нормальных скоростей на контуре нефтеносности, закон стягивания которого не известен [см. § 2, условия (2, 2) и (2, 3)].

При постановке обратной задачи мы задаемся заранее определенным законом стягивания контура нефтеносности, положение которого, следовательно, в каждый момент известно. То обстоятельство, что краевые условия выполняются на известном контуре, значительно упрощает подход к решению этих задач. Однако полное гидродинамическое решение обратных задач, пригодное для использования в промысловой практике, имеет свои математические трудности.

После этих предварительных замечаний перейдем к общим математическим формулировкам обратных задач о продвижении ВНК.¹ При этом будем сохранять все основные обозначения, которые приняты в § 1. Главное отличие от прямой задачи состоит в том, что здесь мы

¹ Общая постановка и классификация обратных задач, которые излагаются в § 3, впервые нами была сообщена в ноябре 1952 г. на заседании объединенного семинара сектора математики КФАН СССР и кафедры механики КГУ по подземной гидравлике.

будем заранее предполагать заданным закон стягивания контура нефтеносности. Для промысловой практики, например, весьма целесообразно дать такой закон продвижения ВНК, чтобы первоначальный контур Γ_0 равномерно стянулся к контуру эксплуатационной галереи или же к заранее определенному контуру вблизи этой галереи. Желаемый закон стягивания ВНК, очевидно, может быть осуществлен за счет определенных режимов работы как эксплуатационной, так и нагнетательной галерей.

Решение обратной задачи заключается в определении таких режимов работы галерей, которые при допустимых давлениях и текущих дебитах обеспечивают данный закон стягивания контура нефтеносности.

Для точности постановки задачи следует разъяснить введенное понятие „равномерного стягивания“ одного контура к другому. Пусть $r = F(0)$ есть уравнение первоначального положения ВНК — Γ_0 в полярных координатах, а $r = f(0)$ — уравнение того контура Γ_s , к которому мы хотим стянуть Γ_0 за некоторое данное время T . Пусть далее закон стягивания задается уравнением $r = F(0, t)$ ($0 \leq t \leq T$), причём $F(0) = F(0, 0)$ и $f(0) = F(0, T)$. Мы будем говорить, что контур Γ_0 равномерно стягивается к контуру Γ_s в течение времени T , если для любых двух моментов времени t_1 и t_2 таких, что $t_2 > t_1$, всегда имеет место неравенство

$$F(0) > F(0, t_1) \geq F(0, t_2) > f(0). \quad (3, 1)$$

Закон равномерного стягивания контуров можно выбрать бесчисленным множеством способов. Например, положим

$$r = F(0, t) = \lambda(t) [F(0) - f(0)] + f(0), \quad (3, 2)$$

где $\lambda(t)$ — некоторая монотонно убывающая в промежутке $0 \leq t \leq T$ функция, причём $\lambda(0) = 1, \lambda(T) = 0$.

Следует заметить, что при выборе закона стягивания $r = F(0, t)$ мы руководствуемся лишь одним основным требованием, чтобы первоначальный контур Γ_0 за некоторое время T равномерно стянулся к заранее заданному контуру Γ_s , а во всем остальном выбор этого закона стягивания остается произвольным, и эту свободу можно использовать для получения практически пригодных решений.

Когда закон продвижения ВНК задан, в постановке каждой обратной задачи о продвижении ВНК участвуют следующие восемь основных факторов: 1) геометрические факторы: $\Gamma_n, \Gamma_0, \Gamma_s$ (Γ_n — контур питания, на котором $P = P_{пл.}$); 2) физические (или производственные) факторы: P_s, q_s, P_n, q_n , которые являются функциями времени и координат точек соответствующих контуров.

Далее, например для водонапорного режима, пользуясь уравнениями (2, 1) — (2, 7), можно предложить основные четыре варианта постановки обратных задач о продвижении ВНК, указанные в таблице.

Номера задач	Задается	Определяется
1	$\Gamma_n, \Gamma_0, \Gamma, \Gamma_s, P_{пл.}, P_s$	P_n, q_n, q_s
2	$\Gamma_n, \Gamma_0, \Gamma, \Gamma_s, P_{пл.}, P_n$	q_n, P_s, q_s
3	$\Gamma_n, \Gamma_0, \Gamma, \Gamma_s, P_{пл.}, q_s$	P_n, q_n, P_s
4	$\Gamma_n, \Gamma_0, \Gamma, \Gamma_s, P_{пл.}, q_n$	P_n, P_s, q_s

Кроме указанных в таблице основных четырех задач, как частный случай задач 2 и 4 вытекает задача об управлении движением контура нефтеносности, при отсутствии нагнетательной галереи, только за счет работы эксплуатационной галереи. А именно, задаются $\Gamma_n, \Gamma_0, \Gamma, \Gamma_s, P_{пл.}$ и определяются P_s и q_s .

Очевидно, вышеприведенные постановки обратных задач могут быть также сформулированы для случая, когда, например, вместо эксплуатационной и нагнетательной галерей соответственно будут рассматриваться батареи эксплуатационных и нагнетательных скважин как система точечных стоков и источников или же как система скважин с конечными радиусами. При этом по физическому смыслу поставленных задач следует особо отметить, что математически точное решение той или другой из них возможно лишь в следующих случаях.

1) При условии, когда задачи сформулированы в постановке, указанной выше, т. е. когда мы рассматриваем систему эксплуатационных и нагнетательных галерей с непрерывным распределением интенсивности по ним.

2) Когда задана нагнетательная галерея вдоль некоторого непрерывного контура Γ_n и задана батарея эксплуатационных скважин как система точечных стоков или источников с конечными радиусами.

3) Когда задана батарея нагнетательных скважин и задана эксплуатационная галерея в виде некоторого непрерывного замкнутого контура Γ_s .

Точное решение задачи в указанных случаях, очевидно, может быть обеспечено за счет того, что, распределяя интенсивность текущих дебитов или давлений по непрерывным эксплуатационным или нагнетательным галереям, мы сумеем обеспечить также непрерывное стягивание Γ к наперед заданному непрерывному контуру Γ_s с полным совпадением их во всех точках. При этом на закон стягивания приходится налагать некоторые ограничения.

4) При одновременном рассмотрении эксплуатационных и нагнетательных батарей, состоящих из системы отдельных скважин в общем случае, точное решение поставленной обратной задачи невозможно. Однако с точки зрения реальных условий промысловой практики, очевидно, является более целесообразным именно рассмотрение обратных задач с дискретным расположением эксплуатационных и нагнетательных скважин. Возможность решения простейших задач в вышеуказанном первом случае нами дается в следующем параграфе (§ 4) настоящей работы.¹

Помимо ранее приведенных основных соотношений (2, 1) — (2, 7), которые будут привлекаться к решению как прямых, так и обратных задач при водонапорном режиме, следует еще ввести одно важное условие, обеспечивающее разрешимость поставленной задачи. Это условие легко выводится из простых геометрических соображений. А именно, добыча $V(t)$ эксплуатационной галереи за время t должна, очевидно, равняться разработанному объему кольцевого цилиндра высотой h , равной мощности пласта и ограниченного поверхностями $r = F(0, 0)$ и $r = F(0, t)$ ($t > 0$). Аналитически это условие запишется следующим равенством:

$$V(t) = \int_0^t \oint_{\Gamma_s} q_s ds dt = \frac{hm\alpha}{2} \int_0^{2\pi} [F^2(0, 0) - F^2(0, t)] d\theta, \quad (3, 3)$$

¹ Задачам об управлении продвижением ВНК при наличии дискретных стоков и источников для случаев водонапорного и упругого режима пласта посвящаем другую статью.

где m — пористость пласта, α — произведение коэффициента нефтеотдачи на коэффициент усадки нефти.

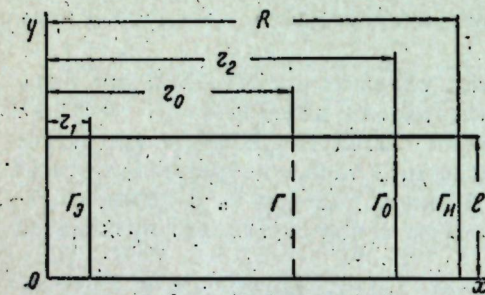
Дифференцируя обе части равенства (3, 3), будем иметь

$$Q(t) = \oint_{\Gamma_0} q_s ds = -m\alpha \int_0^{2\pi} F'_t(\theta, t) F(\theta, t) d\theta, \quad (3, 4)$$

где $Q(t)$ — текущий дебит галереи Γ_0 .

§ 4. О решении некоторых простейших прямых и обратных задач продвижения ВНК в пластах с непостоянными мощностью и проницаемостью

Задача о продвижении ВНК с учетом различия вязкостей воды и нефти в случаях линейного и радиального движения в изотропной среде для водонапорного режима, когда остается справедливым закон Дарси, была решена М. Маскетом^[8] и В. Н. Щелкачевым^[9]. В данном параграфе рассмотрено решение более общей задачи продвижения ВНК



Фиг. 2.

в пластах с непостоянными мощностью и проницаемостью в тех же случаях линейного и радиального движения. Наряду с этим, в конце параграфа, на основании полученных результатов, показывается возможность решения одной простейшей задачи об управлении движением ВНК.

1. Линейное продвижение ВНК.¹ Пусть пласт слабо изменяющейся мощности имеет полосовидную форму длиной R и шириной l (фиг. 2).

Предположим, что мощность пласта h и проницаемость k изменяются лишь вдоль полосовидной залежи как функции x . Тогда уравнение (2, 1) примет вид

$$\frac{\partial}{\partial x} \left[k(x) h(x) \frac{\partial P}{\partial x} \right] = 0,$$

откуда

$$P(x, t) = a \int_{r_1}^x \frac{dx}{k(x) h(x)} + b, \quad (4, 1)$$

где a и b — некоторые функции времени t , не зависящие от x . Введя обозначение

$$f(x) = \int_{r_1}^x \frac{dx}{k(x) h(x)}, \quad (4, 2)$$

соответственно (4, 1), в зоне между Γ_0 и Γ будем предполагать

$$P_1(x, t) = a_1 f(x) + b_1, \quad (4, 3)$$

¹ Здесь и в дальнейшем мы придерживаемся тех общих обозначений, которые были приняты в § 2.

и в зоне между Γ и Γ_n положим

$$P_2(x, t) = a_2 f(x) + b_2. \quad (4, 4)$$

Теперь, пользуясь краевыми условиями на Γ_0 и Γ_n , а также условиями (2, 2), (2, 3) на ВНК, мы можем определить a_1 , b_1 , a_2 и b_2 как функции времени. В самом деле,

$$P_1(r_1, t) = P_0(t); \quad (4, 5)$$

$$P_2(R, t) = P_n(t). \quad (4, 6)$$

Повторю равенства (4, 2), (4, 3), (4, 5) и (4, 6) дают

$$b_1 = P_0(t), \quad a_2 f(R) + b_2 = P_n(t).$$

Согласно условию (2, 2), имеем

$$a_1 f(r_0) + P_0(t) = a_2 f(r_0) + b_2. \quad (4, 7)$$

Условие (2, 3) дает

$$\frac{k(r_0)}{\mu_n} \cdot \frac{\partial P_1}{\partial x} \Big|_{x=r_0} = \frac{k(r_0)}{\mu_n} \cdot \frac{\partial P_2}{\partial x} \Big|_{x=r_0},$$

или, учитывая равенства (4, 3) и (4, 4), будем иметь

$$a_1 f'(r_0) = \epsilon a_2 f'(r_0), \quad (4, 8)$$

где $\epsilon = \frac{\mu_n}{\mu_a}$.

Но

$$f'(r_0) = \frac{1}{k(r_0) h(r_0)} \neq 0,$$

поэтому

$$a_1 = \epsilon a_2. \quad (4, 9)$$

Таким образом, для определения a_1 , a_2 , b_2 имеем систему уравнений

$$a_2 f(R) + b_2 = P_n(t);$$

$$a_1 f(r_0) + P_0(t) = a_2 f(r_0) + b_2;$$

$$a_1 = \epsilon a_2.$$

Решая ее, получим

$$a_1 = \frac{[P_n(t) - P_0(t)] \epsilon}{f(R) + (\epsilon - 1) f(r_0)};$$

$$a_2 = \frac{P_n(t) - P_0(t)}{f(R) + (\epsilon - 1) f(r_0)};$$

$$b_2 = P_n(t) - \frac{[P_n(t) - P_0(t)] f(R)}{f(R) + (\epsilon - 1) f(r_0)}.$$

Повторю, согласно (4, 3) и (4, 4), окончательно получим

$$P_1(x, t) = \frac{[P_n(t) - P_0(t)] \epsilon f(x)}{f(R) + (\epsilon - 1) f(r_0)} + P_0(t) \quad (4, 10)$$

и

$$P_2(x, t) = \frac{[P_n(t) - P_0(t)] f(x)}{f(R) + (\epsilon - 1) f(r_0)} + \frac{P_n(t) f(R) + (\epsilon - 1) P_n(t) f(r_0)}{f(R) + (\epsilon - 1) f(r_0)}. \quad (4, 11)$$

Теперь, считая красные условия (4, 5) и (4, 6) заданными, займемся определением закона продвижения ВНК, т. е. определением r_0 как функции времени.

Пользуясь законом Дарси, имеем

$$\frac{dx}{dt} \Big|_{x=r_0} = - \frac{k(r_0)}{m\mu_n} \cdot \frac{\partial P_1}{\partial x} \Big|_{x=r_0}$$

или, согласно (4, 10) и равенству $k(r_0) f'(r_0) = \frac{1}{h(r_0)}$,

$$\frac{dr_0}{dt} = - \frac{P_n(t) - P_o(t)}{m\mu_n h(r_0) [f(R) + (\epsilon - 1) f(r_0)]} \quad (4, 12)$$

Далее, зная, что $r_0|_{t=0} = r_2$, и интегрируя дифференциальное уравнение (4, 12) с разделяющимися переменными, получим

$$m\mu_n \int_{r_2}^{r_1} [f(R) + (\epsilon - 1) f(r)] h(r) dr = - \int_0^t [P_n(t) - P_o(t)] dt \quad (4, 13)$$

Эта формула дает закон продвижения ВНК $r_0(t)$. Зная $r_0(t)$, можно легко вычислить текущий дебит галереи Γ_o .

В самом деле,

$$q(t) = -lh(r_1) m \frac{dx}{dt} \Big|_{x=r_1}$$

Но

$$\frac{dx}{dt} \Big|_{x=r_1} = - \frac{k(r_1)}{m\mu_n} \cdot \frac{\partial P_1}{\partial x} \Big|_{x=r_1}$$

Поэтому, согласно (4, 10) и равенству $f'(r_1) = \frac{1}{h(r_1)k(r_1)}$, окончательно получим

$$q(t) = \frac{l\alpha}{\mu_n} \cdot \frac{[P_n(t) - P_o(t)]}{f(R) + (\epsilon - 1) f(r_0)} \quad (4, 14)$$

где m — пористость и α — произведение коэффициента нефтеотдачи на коэффициент усадки нефти.

Заметим также, что, полагая $r_0 = r$ и $t = T$ в формуле (4, 13), можно вычислить время T прорыва воды в галерею Γ_o и далее, на основании (4, 14), можно вычислить общую объемную добычу V нефти за все время эксплуатации по формуле

$$V = \int_0^T q(t) dt.$$

Примечание 1. В том случае, когда нагнетательные скважины отсутствуют и водонапорный режим осуществляется за счет давления на контуре питания, во всех предыдущих формулах следует, очевидно, положить $P_n(t) = P_0$ — давлению на контуре питания, которое обычно принимается равным первоначальному пластовому давлению.

Примечание 2. При различных частных предположениях из вышеприведенных формул следуют известные результаты В. Н. Щелкачева [7] и М. Маскета [8] для случая линейного продвижения ВНК в полоскообразной залежи как для одножидкостной, так и для двухжидкостной системы с учетом различия вязкостей воды и нефти.

2. Радиально-круговое продвижение ВНК. Сохраним те же самые обозначения, которые нами были приняты ранее. Тогда данный случай иллюстрируется фиг. 3.

Уравнение (2, 1) в полярных координатах в случае радиально-кругового движения принимает вид

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left[rk(r)h(r) \frac{\partial P}{\partial r} \right] = 0, \quad (4, 15)$$

где $k(r)$ — закон радиального изменения проницаемости и $h(r)$ — закон радиального изменения мощности.

На основании (4, 15) имеем

$$P(r, t) = aF(r) + b,$$

где a и b — некоторые функции от времени t , независимые от r , и

$$F(r) = \int_{r_1}^r \frac{dr}{rk(r)h(r)}. \quad (4, 16)$$

Далее, рассуждая совершенно аналогично тому, как это делалось в случае линейного продвижения ВНК, для давления в зоне между Γ_o и Γ будем иметь

$$P_1(r, t) = \frac{[P_n(t) - P_o(t)] \epsilon F(r)}{F(R) + (\epsilon - 1) F(r_0)} + P_o(t) \quad (4, 17)$$

и в зоне между Γ и Γ_n получим

$$P_2(r, t) = \frac{[P_n(t) - P_o(t)] F(r)}{F(R) + (\epsilon - 1) F(r_0)} + \frac{P_o(t) F(R) + (\epsilon - 1) P_n(t) F(r_0)}{F(R) + (\epsilon - 1) F(r_0)}. \quad (4, 18)$$

Для нахождения закона продвижения ВНК будем иметь следующую формулу:

$$m\mu_n \int_{r_1}^{r_0} [F(R) + (\epsilon - 1) F(r)] rh(r) dr = - \int_0^t [P_n(t) - P_o(t)] dt. \quad (4, 19)$$

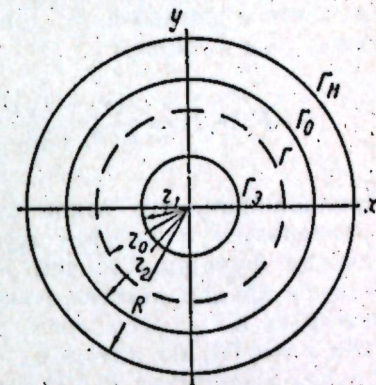
Далее, зная r_0 как функцию времени, текущий дебит $q(t)$ галереи Γ_o будем вычислять по формуле

$$q(t) = 2\pi r_1 h(r_1) \frac{k(r_1)}{\mu_n} \cdot \frac{\partial P_1}{\partial r} \Big|_{r=r_1}$$

или, пользуясь (4, 17) и (4, 16), окончательно получим

$$q(t) = \frac{2\pi\alpha [P_n(t) - P_o(t)]}{\mu_n [F(R) + (\epsilon - 1) F(r_0)]}. \quad (4, 20)$$

Примечание. Из полученных формул при различных частных предположениях следуют известные результаты В. Н. Щелкачева [7] и М. Маскета [8] для случая радиально-кругового продвижения ВНК. В частности, если считать $P_n(t) = P_0$ и $P_o(t) = P_c$ независимыми от времени, $\mu_n = \mu_o = \mu$, $h(r) = h$ и $k(r) = k$ — постоянными, то формула (4, 20) обращается в известную формулу Дюпон.



Фиг. 3.

3. О решении одной простейшей обратной задачи продвижения ВНК. Выводы, полученные в разделах 1 и 2 настоящего параграфа, относились к решению прямых задач при условии, когда геометрическая форма стягивающегося контура Γ известна, но остается неизвестным закон стягивания как функция времени.

Пользуясь уже полученными результатами, можно было бы так же решить некоторые простейшие обратные задачи. В качестве примера рассмотрим решение одной частной обратной задачи, исходя из результатов раздела 2 § 4 для радиально-кругового продвижения ВНК.

Заменяем контур Γ_n контуром питания Γ_n , на котором сохраняется постоянное давление P_n . Согласно формуле (4, 18), для давления в зоне между Γ и Γ_n имеем

$$P_2(r, t) = \frac{[P_n - P_0(t)] F(r)}{F(R) + (\epsilon - 1) F(r_0)} + \frac{P_0(t) F(R) + (\epsilon - 1) P_n F(r_0)}{F(R) + (\epsilon - 1) F(r_0)} \quad (4, 21)$$

Предположим, что закон стягивания контура Γ_0 к контуру Γ_* задан уравнением $r_0 = \lambda(t)[r_2 - r_1] + r_1$, где $\lambda(t)$ — некоторая монотонно убывающая функция, причем $\lambda(0) = 1$ и $\lambda(T) = 0$. Здесь T — время, за которое предполагается стянуть контур Γ_0 к контуру Γ_* . Теперь в зоне между Γ_n и Γ_0 рассмотрим некоторый замкнутый контур Γ_n с уравнением $r = \varphi(\theta)$, по которому размещается нагнетательная галерея. Подставляя в формулу (4, 21) $r = \varphi(\theta)$, мы найдем то распределение давления на заданном контуре Γ_n , которое следует поддерживать на нем, чтобы обеспечить радиально-круговое стягивание по заданному закону. Подбором функции $\lambda(t)$ и времени T можно обеспечить реально допустимые дебиты галереи Γ_* и распределение давления на контуре $r = \varphi(\theta)$ нагнетательной галереи.

ЛИТЕРАТУРА

1. А. П. Крылов и др. Научные основы разработки нефтяных месторождений. Гостехиздат, 1948.
2. Л. С. Лейбензон. Нефтепромысловая механика. Ч. II. 1934.
3. Л. С. Лейбензон. Движение природных жидкостей и газов в пористой среде. ОГИЗ, 1947.
4. И. А. Чарный. Подземная гидромеханика. Гостехиздат, М.—Л., 1948.
5. И. А. Чарный. О наиболее выгодной расстановке рядов скважин в нефтяных пластах с водоупорным режимом. Изв. АН СССР, ОТН, № 1—2, 1945.
6. И. А. Чарный. Приближенный метод расчета перемещений поверхности водо-нефтяного контакта в нефтяном пласте, вскрытом рядом скважин. Инженерный сборник, т. VIII, 1950.
7. В. Н. Щелкачев и Б. Б. Лапук. Подземная гидравлика. Гостехиздат, 1949.
8. М. Маскет. Течение однородных жидкостей в пористой среде. Гостехиздат, 1949.
9. В. Н. Щелкачев. Подсчеты времени стягивания контура нефтеносности в процессе законтурного заводнения. Башкирская нефть, т. I, Уфа, 1950.
10. Б. Э. Казарновская. Перемещение водо-нефтяного контакта и обводнение скважин при водоупорном режиме месторождений. ДАН СССР, т. 55, № 8, 1947.
11. М. Н. Тихов. Несколько замечаний о перемещении контура нефтеносности. Сб. работ ГрозНИИ, вып. 11, 1947.
12. П. Я. Полубаринова-Кочина. К вопросу о перемещении контура нефтеносности. ДАН СССР, т. 47, № 4, 1945.
13. Л. А. Галин. Неустановившаяся фильтрация со свободной поверхностью. ДАН СССР, т. 47, № 4, 1945.
14. П. П. Куфарев и Ю. П. Виноградов. О некоторых частных решениях задачи фильтрации. ДАН СССР, т. 57, № 4, 1947.

15. П. П. Куфарев. Решение задачи о контуре нефтеносности для полосы с щелью скважин. ДАН СССР, т. 75, № 3, 1950.
16. П. П. Куфарев. Задача о контуре нефтеносности для круга при любом числе скважин. ДАН СССР, т. 75, № 4, 1950.
17. Ю. П. Виноградов и П. П. Куфарев. Об одной задаче фильтрации. Прикл. матем. и мех., т. 12, вып. 2, 1948.
18. Н. С. Пискунов. О продвижении контура нефтеносности и падении давления в пласте при разработке крупных нефтяных месторождений. ДАН СССР, т. 84, № 5, 1952.
19. В. Н. Щелкачев. Расстановка скважин в пластах с водоупорным режимом. В сб. Научно-исследовательские работы нефтяников. Вып. III. Добыча нефти. Гостехиздат, 1944.

Физико-технический институт
Казанского филиала АН СССР

Поступило 14 марта
1953 г.

Г. С. САЛЕХОВ, В. А. ДАНИЛОВ, Н. Ф. ИВАНОВ и А. Н. ХОВАНСКИЙ

К ВОПРОСУ ОБВОДНЕНИЯ НЕФТЯНЫХ СКВАЖИН В ПЛАСТАХ С ПОДОШВЕННОЙ ВОДОЙ

Первые четыре параграфа работы посвящены определению времени безводной эксплуатации в анизотропных и изотропных пластах ограниченной и неограниченной мощности для скважин, различных по степени вскрытия. Даны расчетные формулы, которые выясняют зависимость времени безводной эксплуатации от важнейших геометрических и физических факторов. Ввиду интенсивности отбора нефти при исследовании не учитывалась разность удельных весов воды и нефти, вязкость их также предполагалась одинаковой.

Исследовано обводнение скважины в двухслойном пласте. В последнем параграфе при прежних допущениях рассмотрено обводнение галерей в наклонных пластах.

Введение

1. Как известно, эксплуатация скважин в пластах с подошвенной водой приводит к образованию водяных конусов, которые при интенсивном отборе нефти достигают забоя скважины. После прорыва воды скважина дает как нефть, так и воду. Назовем время работы скважины до прорыва воды временем безводной эксплуатации. Оно зависит от дебита скважины, физических свойств пласта и жидкостей, а также других параметров. Определение этого времени и других, связанных с ним величин, представляет существенный интерес для практики.

2. Вопрос образования водяных конусов изучался М. Д. Миллионщиковым^[1], И. А. Чарным^[2], В. Н. Щелкачевым^[3], Н. С. Пискуновым^[4], М. Маскетом^[5,6] и другими.

3. На процесс конусообразования в пласте оказывают влияние многочисленные факторы, к которым относятся: пластовый режим, геометрические и физические характеристики пласта, свойства жидкостей, степень и характер вскрытия пласта скважиной, капиллярные силы и т. д.

Очевидно, что полное гидродинамическое решение проблемы определения времени T безводной эксплуатации при различных практических условиях с учетом всех влияющих причин является почти невозможным. Поэтому поставленные задачи могут быть разрешены математическими методами лишь приближенно, при тех или иных упрощенных предположениях с учетом определенного числа основных факторов. Таким образом, по степени учета влияющих факторов можно предложить различные схемы решения поставленной задачи.

4. В данной работе производится вычисление времени T безводной эксплуатации скважин, несовершенных по степени и совершенных по характеру вскрытия. Рассматриваются идеализированные схемы, позволяющие, однако, выяснить влияние некоторых существенных параметров.

5. В 1944 г. М. Д. Миллионщиков^[1] исследовал обводнение скважин при интенсивном отборе нефти, когда влияние разностей удельных весов несущественно.

Им была рассмотрена следующая схема (фиг. 2): изотропный пласт бесконечной мощности и протяженности вскрыт на кровле скважиной — точечным стоком, пласт и жидкость не сжимаемы, различие вязкостей воды и нефти не учитывается.

Формула М. Д. Миллионщикова для времени T безводной эксплуатации имеет следующий вид:

$$T = \frac{2\pi mh^3}{3Q} \quad (I)$$

Здесь h — мощность нефтенасыщенной части пласта, Q — объемный дебит скважины, m — коэффициент пористости.

6. В 1946 г. М. Маскет^[6] получил следующую формулу для определения времени безводной эксплуатации:

$$T = \frac{\alpha mh^3}{Q} \cdot \frac{k_r}{k_z} D \quad (II)$$

Здесь α — произведение коэффициента усадки нефти (т. е. величины $\frac{\gamma - \gamma_n}{\gamma_n}$, где γ — удельный вес нефти в

пласте, γ_n — удельный вес нефти на дневной поверхности) на коэффициент нефтеотдачи пласта (т. е. величины

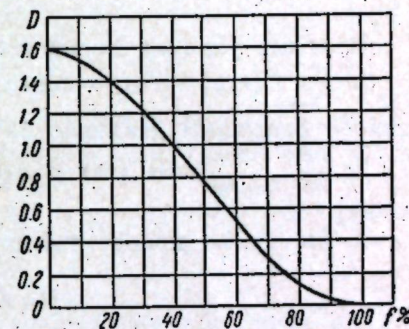
$\frac{n_0 - n}{n}$, где n_0 — начальная нефтенасыщенность, n — конечная, или остаточная, нефтенасыщенность); k_r и k_z — проницаемость соответственно в горизонтальном и вертикальном направлениях (т. е. вдоль и поперек напластования); D — поправочный коэффициент, зависящий от относительной глубины вскрытия нефтенасыщенной части

пласта $f = \frac{l}{h}$ (где l — глубина вскрытия пласта, а h — мощность нефтенасыщенной части пласта). Коэффициент D как функция f дан графиком (фиг. 1).

М. Маскет предполагал, что понижение давления в скважине считается больше $\Delta P_{кр.}$, где $\Delta P_{кр.}$ есть то критическое понижение давления на забое скважины, при котором водяной конус может достигнуть забоя [7, гл. XVI]. При этом подсчете $\Delta P_{кр.}$ учитывается влияние различия удельных весов двух жидкостей в пласте.

7. В следующих параграфах мы рассмотрим решение поставленной задачи при различных новых предположениях, причем из наших результатов как частный случай можно получить формулу М. Д. Миллионщикова (I).

Выведенные ниже формулы дают заниженное время безводной эксплуатации по сравнению с фактическим, так как в действительности время безводной эксплуатации больше из-за различия удельных весов воды и нефти (а именно $\gamma_v > \gamma_n$), которое в расчете, предполагающем



Фиг. 1.

интенсивный отбор, не учтено. В работе не учитывается также различие между вязкостями воды и нефти.

§ 1. Обводнение точечной и полуэллипсоидальной скважин в неограниченном анизотропном пласте

1. Рассмотрим неограниченный анизотропный пласт с радиальным коэффициентом проницаемости k_r и осевым коэффициентом проницаемости k_z . Начало координат поместим в точечной скважине.

Согласно закону Дарси, составляющие скорости фильтрации, записанные в цилиндрической системе координат, имеют вид

$$v_r = -\frac{k_r}{\mu} \cdot \frac{\partial P}{\partial r}; \quad v_z = -\frac{k_z}{\mu} \cdot \frac{\partial P}{\partial z}. \quad (1,1)$$

Уравнение неразрывности здесь запишется следующим образом:

$$k_r \left(\frac{\partial^2 P}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial P}{\partial r} \right) + k_z \frac{\partial^2 P}{\partial z^2} = 0. \quad (1,2)$$

Краевые условия имеют следующий вид:

1) $\lim_{\rho \rightarrow \infty} P(r, z) = P_{\text{пл.}} = \text{const.}$, где $\rho = \sqrt{r^2 + z^2}$ (на бесконечном расстоянии от скважины давление постоянно).

2) $\frac{\partial P}{\partial z} \Big|_{z=0, r \neq 0} = 0$ (так как $v_z = 0$ на кровле пласта, исключая скважину).

2. Нетрудно проверить, что функция

$$P = P_{\text{пл.}} - \frac{C}{\sqrt{\frac{r^2}{k_r} + \frac{z^2}{k_z}}} \quad (1,3)$$

удовлетворяет уравнению (1,2) и краевым условиям 1) и 2). Величину постоянной C можно найти из соотношения

$$2Q = \int_{(s)} v_n ds, \quad (1,4)$$

где Q — объемный дебит скважины; (s) — некоторая замкнутая поверхность, окружающая точечную скважину; v_n — проекция скорости фильтрации на внутреннюю нормаль к поверхности (s) в каждой точке последней. Множитель 2 появляется потому, что дебит удваивается при зеркальном отражении течения жидкости относительно кровли пласта.

3. Подставляя в (1,1) значения $\frac{\partial P}{\partial r}$ и $\frac{\partial P}{\partial z}$ из (1,3), имеем

$$v_r = -\frac{Cr}{\mu \left(\frac{r^2}{k_r} + \frac{z^2}{k_z} \right)^{3/2}}; \quad v_z = -\frac{Cz}{\mu \left(\frac{r^2}{k_r} + \frac{z^2}{k_z} \right)^{3/2}}. \quad (1,5)$$

Отсюда

$$v = \sqrt{v_r^2 + v_z^2} = \frac{C\rho}{\mu \left(\frac{r^2}{k_r} + \frac{z^2}{k_z} \right)^{3/2}}. \quad (1,6)$$

4. Выберем для определения постоянной C в качестве поверхности (S) сферу с центром в скважине и радиусом ρ . Введем координаты

$$r = \rho \sin \theta, \quad z = \rho \cos \theta.$$

Тогда (1,4) при учете (1,6) примет вид

$$2Q = \frac{2\pi C}{\mu} \int_0^\pi \frac{\sin \theta d\theta}{\left(\frac{\sin^2 \theta}{k_r} + \frac{\cos^2 \theta}{k_z} \right)^{3/2}} = \frac{4\pi C k_r \sqrt{k_z}}{\mu},$$

откуда

$$C = \frac{\mu Q}{2\pi k_r \sqrt{k_z}}.$$

Следовательно, (1,3) запишется так:

$$P = P_{\text{пл.}} - \frac{\mu Q}{2\pi k_r \sqrt{k_z} \sqrt{\frac{r^2}{k_r} + \frac{z^2}{k_z}}}. \quad (1,7)$$

5. От схемы точечной скважины можно без труда перейти к схеме полуэллипсоидальной скважины, если учесть, что поверхностями равного давления служат полуэллипсоиды вращения

$$\frac{x^2 + y^2}{k_r} + \frac{z^2}{k_z} = \text{const.}$$

с общим центром в начале координат, совпадающим с центром скважины. Поэтому любой из этих полуэллипсоидов можно принять за поверхность скважины. Если дано давление на полуэллипсоидальной скважине P_c , уравнение поверхности которой есть

$$\frac{x^2 + y^2}{k_r} + \frac{z^2}{k_z} = \frac{a^2}{k_r}, \quad (1,8)$$

то формула (1,7) примет вид

$$P_c = P_{\text{пл.}} - \frac{\mu Q}{2\pi \sqrt{k_r k_z} a},$$

откуда

$$Q = 2\pi \sqrt{k_r k_z} a \frac{P_{\text{пл.}} - P_c}{\mu}.$$

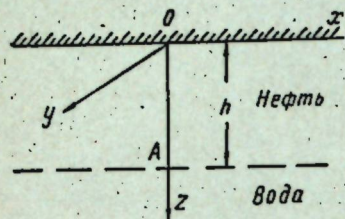
6. Уравнения (1,1) при учете коэффициента пористости m дают следующие выражения для составляющих средней скорости движения жидких частиц:

$$\frac{v_r}{m} = \frac{dr}{dt} = -\frac{k_r}{m\mu} \cdot \frac{\partial P}{\partial r}; \quad \frac{v_z}{m} = \frac{dz}{dt} = -\frac{k_z}{m\mu} \cdot \frac{\partial P}{\partial z}. \quad (1,9)$$

Подставляя сюда значения $\frac{\partial P}{\partial r}$ и $\frac{\partial P}{\partial z}$ (из 1,7), имеем

$$\frac{dr}{dt} = -\frac{Qr}{2\pi m k_r \sqrt{k_z} \left(\frac{r^2}{k_r} + \frac{z^2}{k_z} \right)^{3/2}}; \quad \frac{dz}{dt} = -\frac{Qz}{2\pi m k_r \sqrt{k_z} \left(\frac{r^2}{k_r} + \frac{z^2}{k_z} \right)^{3/2}}. \quad (1,10)$$

7. Заметим, что для определения времени T безводной эксплуатации достаточно определить время поднятия точки A на поверхности воды до скважины O (фиг. 2). Это время, вследствие осевой симметрии течения, равно времени безводной эксплуатации. Поэтому достаточно найти составляющую скорости частиц по оси z , т. е. положить в (1, 10) $r=0$. При этом следует учесть, что вследствие непрерывности скорости знаки всех членов, зависящих от r , не должны меняться при $r \rightarrow 0$. Поэтому при $r=0$ имеем



Фиг. 2.

$$\frac{dr}{dt} = 0; \quad \frac{dz}{dt} = -\frac{Qk_z}{2\pi m k_r z^2}.$$

Отсюда

$$-\frac{2\pi m}{Q} \cdot \frac{k_r}{k_z} \int_h^0 z^2 dz = \int_0^T dt.$$

Окончательно

$$T = \frac{2\pi m}{3Q} \cdot \frac{k_r}{k_z} h^3. \quad (1, 11)$$

Формула (1, 11) является обобщением формулы (1) на случай неограниченного анизотропного пласта с коэффициентами проницаемости k_r и k_z .

8. Дадим пример расчета времени обводнения точечной скважины в неограниченном анизотропном пласте.

Пусть $\mu=1$ сантипуаз, $m=0.2$, $Q=50$ м³/сутки, $\frac{k_r}{k_z}=5$, $h=10$ м. Тогда

$$T = \frac{2\pi m}{3Q} \cdot \frac{k_r}{k_z} h^3 = \frac{6.28 \cdot 0.2 \cdot 5 \cdot 10^3}{3 \cdot 50} = 0.2 \cdot 20.93 \cdot 10 \approx 42 \text{ суток.}$$

§ 2. Обводнение точечной и полуэллипсоидальной скважин в анизотропном пласте конечной мощности

1. М. Д. Миллионщиков и М. Маскет рассматривали пласт, водонасыщенная часть которого имеет бесконечную мощность. В этом параграфе мы предположим, что мощность водонасыщенной части равна $H-h$, где попрежнему h — мощность нефтенасыщенной части. Начало координат поместим в точечной скважине (фиг. 3).

2. Рассмотрим решение задачи для пласта

$$0 \leq z \leq H, \quad 0 \leq r = \sqrt{x^2 + y^2} \leq R,$$

где R — радиус цилиндрического контура питания.

Уравнения (1, 1) и (1, 2) попрежнему имеют место, но крайние условия примут следующий вид:

1) $P(R, z) = P_{\text{пл.}} = \text{const.}$ (на контуре питания — боковой поверхности цилиндра радиуса R давление постоянно);

2) $\frac{\partial P}{\partial z} \Big|_{z=0, r \neq 0} = 0$ (так как $v_z = 0$ на кровле пласта, исключая скважину);

3) $\frac{\partial P}{\partial z} \Big|_{z=H} = 0$ (так как $v_z = 0$ на подошве пласта).

3. Исходя из (1, 7), с помощью принципа отображения можно построить следующую функцию:

$$P(r, z) = P_{\text{пл.}} - \frac{Q\mu}{2\pi k_r \sqrt{k_z}} \left\{ \frac{1}{\sqrt{\frac{r^2}{k_r} + \frac{z^2}{k_z}}} - \frac{1}{\sqrt{k_r}} + \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{1}{\sqrt{\frac{r^2}{k_r} + \frac{(2nH+z)^2}{k_z}}} - \frac{1}{\sqrt{\frac{R^2}{k_r} + \frac{4n^2H^2}{k_z}}} \right] + \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{1}{\sqrt{\frac{r^2}{k_r} + \frac{(2nH-z)^2}{k_z}}} - \frac{1}{\sqrt{\frac{R^2}{k_r} + \frac{4n^2H^2}{k_z}}} \right] \right\} \equiv P_{\text{пл.}} - \frac{Q\mu}{2\pi k_r \sqrt{k_z}} F(r, z, R, H). \quad (2, 1)$$

Нетрудно проверить, что эта функция удовлетворяет уравнению (1, 2) и крайним условиям 2) и 3). Следует отметить, что этот ряд сходится, тогда как у Маскета^[5] соответствующий ряд для изотропного пласта расходится, так как он не учитывал радиуса контура питания. При $R = \infty, H = \infty$ (2, 1) переходит в (1, 7).

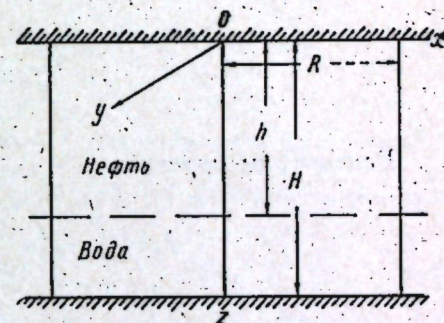
4. Если положить в (2, 1) $r=R, z=0$, то выражение в фигурных скобках исчезает, т. е. $P(R, 0) = P_{\text{пл.}}$. Но вследствие того, что на большом расстоянии от скважины течение жидкости весьма близко к плоскому, то физически очевидно, что там давление мало меняется с высотой. Поэтому условие 1), точно выполняющееся при $z=0$, приближенно выполняется также при $0 \leq z \leq H$.

5. Проверим, насколько точно выполняется крайнее условие 1). Для этого представим выражение (2, 1) в интегральной форме, пользуясь формулой Вебера—Липшица

$$\frac{1}{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}} = \int_0^{\infty} J_0(u\alpha) e^{-u\beta} du, \quad (2, 2)$$

где $J_0(u\alpha)$ — функция Бесселя нулевого порядка. Имеем

$$P(r, z) = P_{\text{пл.}} - \frac{Q\mu}{2\pi k_r \sqrt{k_z}} \left\{ \int_0^{\infty} \left[J_0\left(\frac{ur}{\sqrt{k_r}}\right) e^{-\frac{uz}{\sqrt{k_z}}} - J_0\left(\frac{uR}{\sqrt{k_r}}\right) \right] du + \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^{\infty} \left[J_0\left(\frac{ur}{\sqrt{k_r}}\right) e^{-\frac{uz}{\sqrt{k_z}}} - J_0\left(\frac{uR}{\sqrt{k_r}}\right) \right] e^{-\frac{2nH}{\sqrt{k_z}}} du + \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^{\infty} \left[J_0\left(\frac{ur}{\sqrt{k_r}}\right) e^{-\frac{uz}{\sqrt{k_z}}} - J_0\left(\frac{uR}{\sqrt{k_r}}\right) \right] e^{-\frac{2nH}{\sqrt{k_z}}} du \right\}.$$



Фиг. 3.

Отсюда

$$P(r, z) = P_{\text{пл.}} - \frac{Q\mu}{2\pi k_r \sqrt{k_s}} \int_0^\infty \left[\left(e^{-\frac{uz}{\sqrt{k_s}}} + 2 \frac{e^{-\frac{2uH}{\sqrt{k_s}}}}{1 - e^{-\frac{2uH}{\sqrt{k_s}}}} \operatorname{ch} \frac{uz}{\sqrt{k_s}} \right) J_0 \left(\frac{uz}{\sqrt{k_s}} \right) - \left(1 + 2 \frac{e^{-\frac{2uH}{\sqrt{k_s}}}}{1 - e^{-\frac{2uH}{\sqrt{k_s}}}} \right) J_0 \left(\frac{uR}{\sqrt{k_r}} \right) \right] du.$$

Полагая здесь $z=0$ и $z=H$, после некоторых преобразований получим при $r=R$

$$P(R, H) - P_{\text{пл.}} = \frac{Q\mu}{2\pi k_r \sqrt{k_s}} \left[- \int_0^\infty J_0 \left(\frac{uR}{\sqrt{k_r}} \right) \frac{1 - e^{-\frac{uH}{\sqrt{k_s}}}}{1 + e^{-\frac{uH}{\sqrt{k_s}}}} e^{-\frac{uH}{\sqrt{k_s}}} du + \left[\frac{\sqrt{k_r}}{R} - \frac{1}{\sqrt{\frac{R^2}{k_r} + \frac{H^2}{k_s}}} \right] \right]. \quad (2, 3)$$

Рассмотрим интеграл

$$I = \int_0^\infty J_0 \left(\frac{uR}{\sqrt{k_r}} \right) \frac{1 - e^{-\frac{uH}{\sqrt{k_s}}}}{1 + e^{-\frac{uH}{\sqrt{k_s}}}} e^{-\frac{uH}{\sqrt{k_s}}} du.$$

Здесь $-0.403 \leq J_0 \left(\frac{uR}{\sqrt{k_r}} \right) \leq 1$ при $0 \leq u \leq \infty$ $\frac{1 - e^{-\frac{uH}{\sqrt{k_s}}}}{1 + e^{-\frac{uH}{\sqrt{k_s}}}} e^{-\frac{uH}{\sqrt{k_s}}} > 0$ при

$0 < u < \infty$. Следовательно,

$$-0.403 \int_0^\infty \frac{1 - e^{-\frac{uH}{\sqrt{k_s}}}}{1 + e^{-\frac{uH}{\sqrt{k_s}}}} e^{-\frac{uH}{\sqrt{k_s}}} du < I < \int_0^\infty \frac{1 - e^{-\frac{uH}{\sqrt{k_s}}}}{1 + e^{-\frac{uH}{\sqrt{k_s}}}} e^{-\frac{uH}{\sqrt{k_s}}} du.$$

С помощью подстановки $e^{-\frac{uH}{\sqrt{k_s}}} = x$ находим

$$\int_0^\infty \frac{1 - e^{-\frac{uH}{\sqrt{k_s}}}}{1 + e^{-\frac{uH}{\sqrt{k_s}}}} e^{-\frac{uH}{\sqrt{k_s}}} du = \sqrt{k_s} \frac{2 \ln 2 - 1}{H} \approx \frac{0.386 \sqrt{k_s}}{H}.$$

Подставляя получившуюся оценку для I в (2, 3), получим

$$\frac{Q\mu}{2\pi k_r \sqrt{k_s}} \left(-\frac{0.386 \sqrt{k_s}}{H} + \frac{\sqrt{k_r}}{R} - \frac{1}{\sqrt{\frac{R^2}{k_r} + \frac{H^2}{k_s}}} \right) < P(R, H) - P_{\text{пл.}} < \frac{Q\mu}{2\pi k_r \sqrt{k_s}} \left(\frac{0.156 \sqrt{k_r}}{H} + \frac{\sqrt{k_r}}{R} - \frac{1}{\sqrt{\frac{R^2}{k_r} + \frac{H^2}{k_s}}} \right).$$

Пусть, например, $Q=50$ м³/сутки, $R=1000$ м, $H=10$ м, $\mu=1$ сантипуаз, $k_r=k_s=1$ дарси. Тогда

$$-0.0144 \text{ атм.} < P(R, H) - P_{\text{пл.}} < 0.0365 \text{ атм.,}$$

т. е. перепад давлений между кровлей и подошвой пласта на боковой поверхности цилиндра радиуса R не превышает по абсолютной величине 0.0365 атм.

6. От точечной скважины можно перейти к полуэллипсоидальной, пользуясь тем обстоятельством, что вблизи стока поверхности равного давления весьма близки к полуэллипсоидам. Поэтому формула (2, 1) дает распределение давления и при течении в полуэллипсоидальную скважину, уравнение поверхности которой есть (1, 8) $(a \ll H, a \sqrt{\frac{k_s}{k_r}} \ll H)$.

Если известно давление P_c на поверхности этой скважины при $z=0$, то из (2, 1) имеем

$$P_c = P_{\text{пл.}} - \frac{Q\mu}{2\pi k_r \sqrt{k_s}} F(a, 0, R, H). \quad (2, 4)$$

Таким образом, вычисление дебита сводится к определению $F(a, 0, R, H)$.

7. Чтобы оценить ряд, входящий в $F(a, 0, R, H)$, воспользуемся оценками

$$\int_1^{n+1} a(x) dx + \frac{a_1}{2} - \frac{a_{n+1}}{2} < \sum_{k=1}^n a_k < \int_1^{n+1} a(x) dx + a_1 - a_{n+1} \quad (2, 5)$$

$$(a(x) > 0, a'(x) < 0, a''(x) > 0, 1 \leq x \leq n+1)$$

и

$$\int_1^{n+1} a(x) dx < \sum_{k=1}^n a_k + \int_1^{n+1} a(x) dx + a_1 - a_{n+1} \quad (2, 6)$$

$$(a(x) > 0, a'(x) < 0, 1 \leq x \leq n+1),$$

принадлежащими Каталани [6]. Нетрудно проверить, что функция

$$a(x) = \frac{1}{\sqrt{\frac{a^2}{k_r} + \frac{4H^2 x}{k_s}}}$$

удовлетворяет условиям оценки (2, 5), а функция

$$a(x) = \frac{1}{\sqrt{\frac{R^2}{k_r} + \frac{4H^2 x}{k_s}}}$$

удовлетворяет условиям оценки (2, 6). Поэтому после некоторых преобразований получим следующую оценку для $F(a, 0, R, H)$:

$$\sqrt{k_r} \left(\frac{1}{a} - \frac{1}{R} \right) + \frac{\sqrt{k_s}}{H} \ln \frac{\frac{2H}{\sqrt{k_s}} + \sqrt{\frac{R^2}{k_r} + \frac{4H^2}{k_s}}}{\frac{2H}{\sqrt{k_s}} + \sqrt{\frac{a^2}{k_r} + \frac{4H^2}{k_s}}} + \frac{1}{\sqrt{\frac{a^2}{k_r} + \frac{4H^2}{k_s}}} - \frac{2}{\sqrt{\frac{R^2}{k_r} + \frac{4H^2}{k_s}}} <$$

$$< F(a, 0, R, H) < \sqrt{k_r} \left(\frac{1}{a} - \frac{1}{R} \right) + \frac{\sqrt{k_s}}{H} \ln \frac{\frac{2H}{\sqrt{k_s}} + \sqrt{\frac{R^2}{k_r} + \frac{4H^2}{k_s}}}{\frac{2H}{\sqrt{k_s}} + \sqrt{\frac{a^2}{k_r} + \frac{4H^2}{k_s}}} +$$

$$+ \frac{2}{\sqrt{\frac{a^2}{k_r} + \frac{4H^2}{k_s}}}$$

Отсюда, на основании (2, 4),

$$\frac{2\pi}{\sqrt{k_r} \left(\frac{1}{a} - \frac{1}{R} \right) + \frac{\sqrt{k_s}}{H} \ln \frac{\frac{2H}{\sqrt{k_s}} + \sqrt{\frac{R^2}{k_r} + \frac{4H^2}{k_s}}}{\frac{2H}{\sqrt{k_s}} + \sqrt{\frac{a^2}{k_r} + \frac{4H^2}{k_s}}} + \frac{2}{\sqrt{\frac{a^2}{k_r} + \frac{4H^2}{k_s}}}} < \frac{\mu Q}{k_r \sqrt{k_s} (P_{\text{пл.}} - P_c)} <$$

$$< \frac{2\pi}{\sqrt{k_r} \left(\frac{1}{a} - \frac{1}{R} \right) + \frac{\sqrt{k_s}}{H} \ln \frac{\frac{2H}{\sqrt{k_s}} + \sqrt{\frac{R^2}{k_r} + \frac{4H^2}{k_s}}}{\frac{2H}{\sqrt{k_s}} + \sqrt{\frac{a^2}{k_r} + \frac{4H^2}{k_s}}} + \frac{1}{\sqrt{\frac{a^2}{k_r} + \frac{4H^2}{k_s}}} - \frac{2}{\sqrt{\frac{R^2}{k_r} + \frac{4H^2}{k_s}}}} \quad (2, 7)$$

Но $a \ll H \ll R$. Поэтому полученную оценку можно упростить следующим образом:

$$\frac{2\pi}{\frac{\sqrt{k_r}}{a} + \frac{\sqrt{k_s}}{H} \ln \frac{\frac{2H}{\sqrt{k_s}} + \frac{R}{\sqrt{k_r}}}{\frac{4H}{\sqrt{k_s}} + \frac{R}{H}}} < \frac{\mu Q}{k_r \sqrt{k_s} (P_{\text{пл.}} - P_c)} <$$

$$< \frac{2\pi}{\frac{\sqrt{k_r}}{a} + \frac{\sqrt{k_s}}{H} \ln \frac{\frac{2H}{\sqrt{k_s}} + \frac{R}{\sqrt{k_r}}}{\frac{4H}{\sqrt{k_s}} + \frac{R}{2H}}} \quad (2, 8)$$

Считая пласт изотропным, пренебрегая в знаменателях членами $\frac{\sqrt{k_s}}{H}$, $\frac{\sqrt{k_s}}{2H}$ и полагая $\ln \frac{2H+R}{4H} \approx \ln \frac{R}{4H}$, получим формулу В. Н. Щелкачева [7]

$$Q = \frac{2\pi a k (P_{\text{пл.}} - P_c)}{\mu \left(1 + \frac{a}{H} \ln \frac{R}{4H} \right)} \quad (2, 9)$$

8. Положим $k_r = k_s = k$, $a = 10$ см, $H = 1000$ см, $R = 10^5$ см. Тогда (2, 8) примет вид

$$60.24 < \frac{\mu Q}{k (P_{\text{пл.}} - P_c)} < 60.53.$$

Из формулы (2, 9) имеем при тех же данных

$$\frac{\mu Q}{k (P_{\text{пл.}} - P_c)} \approx 60.88.$$

Из приведенного примера видим, что дебит, вычисленный по формуле В. Н. Щелкачева, является заведомо большим истинного, лежащего внутри интервала, определяемого неравенством (2, 8). Ошибка будет увеличиваться при возрастании отношения $\frac{a}{H}$.

9. Б. И. Сегал [9] получил для определения дебита круговой батареи из n скважин в неограниченном пласте ($H = \infty$) формулу, которая при $n = 1$ принимает вид

$$U = \frac{q}{4\pi \sqrt{r^2 + z^2}} - \frac{q}{2\pi^2 \sqrt{z^2 + (1+r)^2}} K(\theta).$$

Здесь U — потенциал, $K(\theta)$ — полный эллиптический интеграл, а θ определяется из равенства

$$\sin^2 \theta = \frac{4r}{z^2 + (1+r)^2}.$$

При этом Б. И. Сегал полагает радиус контура питания R равным единице. Кроме того, $q = 2Q$.

Б. И. Сегал считает, что на поверхности скважины $U = 1$. Это равносильно предположению, что $\frac{\mu}{k(P_{\text{пл.}} - P_c)} = 1$. На полусферической скважине, поверхность которой определяется уравнением $r^2 + z^2 = a^2$, можно считать $\sin^2 \theta = 0$, $z^2 + (1+r)^2 = 1$, так как $z \ll 1$, $r \ll 1$. Поэтому $1 = \frac{q}{4\pi} \left(\frac{1}{a} - 1 \right)$. Отсюда, так как $q = 2Q$,

$$Q = \frac{2\pi}{\frac{1}{a} - 1} \quad (2, 10)$$

Нетрудно видеть, что формула Б. И. Сегала (2, 10) получается из (2, 7) при $k_r = k_s = k$, $\frac{\mu}{k(P_{\text{пл.}} - P_c)} = 1$, $H = \infty$, $R = 1$ без дополнительных предположений $z \ll 1$, $r \ll 1$, сделанных Б. И. Сегалом.

10. На основании тех же соображений, что и в § 1, время T безводной эксплуатации находим из соотношения

$$\frac{dz}{dt} = - \frac{k_s}{m\mu} \cdot \frac{\partial P}{\partial z} \Big|_{r=0} \quad (2, 11)$$

которое, на основании (2, 1), примет вид

$$\frac{dz}{dt} = - \frac{Q}{2\pi m} \cdot \frac{k_s}{k_r} \left\{ \frac{1}{z^2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{1}{(2nH+z)^2} - \frac{1}{(2nH-z)^2} \right] \right\} \equiv$$

$$\equiv - \frac{Q}{2\pi m} \cdot \frac{k_s}{k_r} f(z, H).$$

Разделяя переменные и интегрируя по t от 0 до T , а по z от h до 0, приходим к следующей формуле для времени безводной эксплуатации скважины:

$$T = \frac{2\pi m}{Q} \cdot \frac{k_r}{k_s} \int_0^h \frac{dz}{f(z, H)} \quad (2, 12)$$

$f(z, H)$ можно представить в виде

$$f(z, H) = 4H(H-z) \left[\frac{1}{z^2(2H-z)^2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n+1}{(2nH+z)^2 [2(n+1)H-z]^2} \right].$$

Оценивая сумму, входящую в это выражение, получим следующую оценку для T :

$$\frac{\pi m H^3}{2Q \left[1 + \frac{h^2}{4H^2} \left(1 - \frac{h}{2H} \right)^2 \right]} \left[-\frac{h}{H} - \frac{h^2}{2H^2} + \frac{h^3}{H^3} - \frac{h^4}{4H^4} - \ln \left(1 - \frac{h}{H} \right) \right] \frac{k_r}{k_s} <$$

$$< T < \frac{\pi m H^3}{2Q} \left[-\frac{h}{H} - \frac{h^2}{2H^2} + \frac{h^3}{H^3} - \ln \left(1 - \frac{h}{H} \right) \right] \frac{k_r}{k_s}.$$

Введя обозначения $\frac{h}{H} = \theta$, $T_1 = \frac{2\pi m h^3}{3Q} \cdot \frac{k_r}{k_s}$, представим полученную оценку в безразмерной форме

$$\frac{3}{4\theta^3} \cdot \frac{-\ln(1-\theta) - \theta - \frac{\theta^2}{2} + \theta^3 - \frac{\theta^4}{4}}{1 + \frac{\theta^2}{4} \left(1 - \frac{\theta}{2} \right)^2} <$$

$$< \frac{T}{T_1} < \frac{3}{4\theta^3} \left[-\ln(1-\theta) - \theta - \frac{\theta^2}{2} + \theta^3 - \frac{\theta^4}{4} \right]. \quad (2, 13)$$

Обозначая крайние члены оценки (2, 13) через d и D , получим

θ	d	D
0.1	0.999	1.002
0.2	0.999	1.007
0.3	1.006	1.018
0.4	1.010	1.036
0.5	1.029	1.065
0.6	1.063	1.110
0.7	1.127	1.186
0.8	1.245	1.317
0.9	1.516	1.608
0.95	1.852	1.967

При $\theta \leq 0.3$ вычисления удобнее производить по формуле

$$D \approx 1 + \frac{3}{20} \theta^2 + \frac{1}{8} \theta^3 + \frac{3}{28} \theta^4,$$

полученной путем разложения $-\ln(1-\theta)$ в степенный ряд.

Приведенные результаты показывают, что при данной мощности нефтенасыщенной части пласта с увеличением мощности водонасыщенной части время безводной эксплуатации уменьшается. Причем,

$$\lim_{H \rightarrow \infty} T = T_1.$$

Заметим далее, что вследствие пренебрежения разностью удельных весов жидкостей, полученное нами время безводной эксплуатации несколько меньше такового, полученного при учете этой разности.

11. Дадим пример расчета времени безводной эксплуатации точечной скважины в анизотропном пласте конечной мощности.

Пусть $\theta = 0.5$, $H = 10$ м, $\frac{k_r}{k_s} = 5$, $Q = 50$ м³/сутки, $m = 0.2$. Тогда $d = 1.029$, $D = 1.065$ и

$$43.0 \text{ суток} < T < 44.7 \text{ суток}.$$

§ 3. Обводнение полуэллипсоидальной скважины в анизотропном неограниченном пласте

1. Пусть пласт удовлетворяет условиям § 1, а скважина имеет форму полуэллипсоида, радиус наибольшего кругового сечения которого равен a , а наибольшая полуось (т. е. углубление скважины в нефтенасыщенную часть пласта) равна l (фиг. 4). Такой выбор формы скважины заимствован нами на основании электрогидродинамической аналогии из теории электроразведки, где заземлитель уподобляется половине вытянутого эллипсоида вращения.

Сначала рассмотрим изотропный пласт. Краевые условия имеют следующий вид:

1) $\lim_{\rho \rightarrow \infty} P(r, z) = P_{\text{пл.}} = \text{const.}$, где $\rho = \sqrt{r^2 + z^2}$ (на бесконечном расстоянии от скважины давление постоянно).

$$2) \left. \frac{\partial P}{\partial z} \right|_{z=0, r > a} = 0.$$

3) Давление на поверхности скважины равно $P_c = \text{const.}$

Изменяя соответствующим образом формулу, имеющуюся у А. И. Заборовского [10], получаем следующее соотношение для давления:

$$P = P_{\text{пл.}} - \frac{Q\mu}{4\pi k \sqrt{l^2 - a^2}} \cdot \ln \frac{\sqrt{l^2 + k\lambda} + \sqrt{l^2 - a^2}}{\sqrt{l^2 + k\lambda} - \sqrt{l^2 - a^2}}. \quad (3, 1)$$

Здесь λ — положительный корень уравнения

$$\frac{r^2}{a^2 + k\lambda} + \frac{z^2}{l^2 + k\lambda} = 1. \quad (3, 2)$$

При $\lambda = 0$ (3, 2) переходит в уравнение поверхности скважины.

2. Нетрудно проверить, что (3, 1) удовлетворяет уравнению (1, 2), в котором положено $k_r = k_s$, и краевым условиям 1) и 2).

Условию 3) удовлетворяем, положив

$$Q = \frac{\sqrt{l^2 - a^2}}{\ln \frac{a}{l + \sqrt{l^2 - a^2}}} \cdot \frac{2\pi k (P_{\text{пл.}} - P_c)}{\mu}. \quad (3, 3)$$

На практике $l \gg a$, и поэтому из (3, 3) вытекает приближенная формула для дебита

$$Q \approx \frac{l}{\ln \frac{2l}{a}} \cdot \frac{2\pi k (P_{\text{пл.}} - P_c)}{\mu}. \quad (3, 4)$$

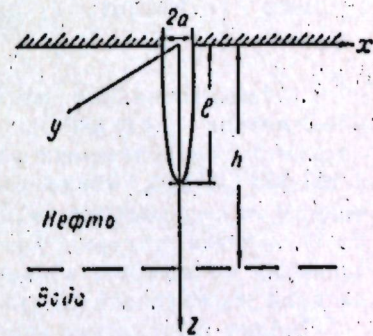
Формула, аналогичная (3, 4), имеется у П. Я. Полубариновой-Кочной [11].

3. Подставляя (3, 3) в (3, 1), получаем окончательную формулу для давления

$$P = P_{\text{пл.}} - \frac{P_{\text{пл.}} - P_c}{2 \ln \frac{a}{l + \sqrt{l^2 - a^2}}} \ln \frac{\sqrt{l^2 + k\lambda} + \sqrt{l^2 - a^2}}{\sqrt{l^2 + k\lambda} - \sqrt{l^2 - a^2}}. \quad (3, 5)$$

4. Сравним (3, 3) и (3, 4) с соответствующими формулами, полученными Б. И. Согалом [9] для скважины в цилиндрическом пласте бесконечной глубины. Следуя Согалу, введем потенциал скоростей

$$\Phi = -\frac{k}{\mu} (P - P_{\text{пл.}})$$



Фиг. 4.

и определим дебит, положив на поверхности скважины $\Phi=1$. Тогда вместо формул (3, 3) и (3, 4) получим соответственно

$$Q = \frac{2\pi \sqrt{l^2 - a^2}}{\ln \frac{l + \sqrt{l^2 - a^2}}{a}} \quad (3, 6)$$

и

$$Q \approx \frac{2\pi l}{\ln 2l} \quad (3, 7)$$

При выводе формулы (3, 7) опущен $\ln a$, так как обычно $\ln a \ll \ln 2l$.

5. Сегал рассматривал цилиндрическую скважину с полусферическим дном. Если обозначить глубину цилиндрической части через c , а радиус скважины через a , то за глубину соответствующей полуэллипсоидальной скважины естественно принять $l = c + a$.

6. При радиусе контура питания, равном единице, и при $a = 0.000025$ получим следующую таблицу.¹

c	$l = c + a$	по Сегала	по формуле (3, 6)	по формуле (3, 7)
0.001	0.001025	0.00153	0.00146	0.00146
0.002	0.002025	0.00267	0.00250	0.00250
0.003	0.003025	0.00367	0.00347	0.00346

7. Незначительное расхождение соответствующих значений дебита объясняется следующими обстоятельствами: 1) разницей в форме поверхности сравниваемых скважин; 2) ограниченностью радиуса пласта в схеме Сегала, тогда как мы рассматриваем скважину в неограниченном пространстве; 3) приближенным удовлетворением по методу Б. И. Сегала условия $\Phi(x, y, z) = 1$ на скважине — лишь в четырех сечениях по высоте, в нашем же случае условие это выполнено точно на всей поверхности полуэллипсоидальной скважины.

Именно выполнение последнего важного краевого условия позволяет считать изложенный метод физически более обоснованным. Учитывая сложность выкладок по методу Сегала, можно полагать предложенные формулы для дебита более удобными для практических расчетов при $k \gg a$.

8. Перейдем к определению времени T безводной эксплуатации. Как и в предыдущих параграфах, мы будем исходить из соотношения

$$\frac{dz}{dt} = -\frac{k}{m\mu} \cdot \frac{\partial P}{\partial z} \Big|_{z=0} \quad (3, 8)$$

Имеем

$$\frac{\partial P}{\partial z} = \frac{dP}{d\lambda} \cdot \frac{\partial \lambda}{\partial z} = \frac{Q\mu z}{2\pi \sqrt{l^2 - k\lambda} \left[\frac{l^2 - k\lambda}{a^2 - k\lambda} r^2 + \frac{a^2 - k\lambda}{l^2 - k\lambda} z^2 \right]}$$

следовательно, (3, 8) примет вид (так как при $r=0$ имеет место равенство $\lambda = \frac{z^2 - l^2}{k}$)

$$\frac{dz}{dt} = \frac{-Q}{2\pi m [z^2 - (l^2 - a^2)]}$$

¹ Вычисления выполнены Б. А. Сейфуллиной, старшим лаборантом сектора математики Физико-технического института КФАН СССР.

Интегрируя, получим

$$T = \frac{2\pi m h^3}{3Q} \left(1 - \frac{l}{h}\right) \left(1 + \frac{l}{h} - 2 \frac{l^2}{h^2} + 3 \frac{a^2}{h^2}\right) \quad (3, 9)$$

Но так как на практике всегда $a \ll h$, то формулу (3, 9) можно приближенно записать в следующем виде:

$$T \approx \frac{2\pi m h^3}{3Q} \left(1 - \frac{l}{h}\right)^2 \left(1 + \frac{2l}{h}\right) \quad (3, 10)$$

Заметим, что формулу (3, 10) можно получить также, исходя из представления скважины в виде линейного стока длины l и считая дебит равномерно распределенным вдоль этого линейного стока.

9. Рассмотрим теперь анизотропный пласт с радиальным коэффициентом проницаемости k_r и осевым коэффициентом проницаемости k_z . В этом случае (3, 1) примет вид

$$P = P_{\text{пл}} - \frac{C}{\sqrt{\frac{l^2}{k_z} - \frac{a^2}{k_r}}} \ln \frac{\sqrt{\frac{l^2}{k_z} + \lambda} + \sqrt{\frac{l^2}{k_z} - \frac{a^2}{k_r}}}{\sqrt{\frac{l^2}{k_z} + \lambda} - \sqrt{\frac{l^2}{k_z} - \frac{a^2}{k_r}}} \quad (3, 1')$$

Здесь λ — положительный корень уравнения

$$\frac{r^2}{a^2 + k_r \lambda} + \frac{z^2}{l^2 + k_z \lambda} = 1, \quad (3, 2')$$

а C — постоянная, значение которой будет определено ниже. При этом предполагается, что $\frac{l^2}{k_z} > \frac{a^2}{k_r}$ (это физически оправдывается, так как $l > a$, $k_z \leq k_r$).

10. Решая (3, 2'), имеем

$$\lambda = \frac{1}{2} \left[\frac{r^2}{k_r} + \frac{z^2}{k_z} - \frac{a^2}{k_r} - \frac{l^2}{k_z} - \sqrt{\left(\frac{r^2}{k_r} + \frac{z^2}{k_z} - \frac{a^2}{k_r} - \frac{l^2}{k_z} \right)^2 + \frac{4}{k_z k_r} (l^2 r^2 + a^2 z^2 - a^2 l^2)} \right] \quad (3, 10')$$

Постоянная C в формуле (3, 1') определяется из соотношения (1, 4), где в качестве поверхности (s) выбирается сфера радиуса $\rho = \sqrt{r^2 + z^2}$. Составляющие скорости фильтрации имеют вид

$$v_r = -\frac{k_r}{\mu} \cdot \frac{dP}{d\lambda} \cdot \frac{\partial \lambda}{\partial r}; \quad v_z = -\frac{k_z}{\mu} \cdot \frac{dP}{d\lambda} \cdot \frac{\partial \lambda}{\partial z}, \quad (3, 11)$$

где, на основании (3, 1'),

$$\frac{dP}{d\lambda} = \frac{C}{\left(\frac{a^2}{k_r} + \lambda\right) \sqrt{\frac{l^2}{k_z} + \lambda}} \quad (3, 12)$$

Дифференцируя (3, 2') по r и z , находим выражения для $\frac{\partial \lambda}{\partial r}$ и $\frac{\partial \lambda}{\partial z}$. Подставляя эти выражения в (3, 12) и (3, 11), имеем

$$\left. \begin{aligned} v_r &= \frac{2C}{\mu} \frac{\lambda + \frac{l^2}{k_r}}{\left(\frac{a^2}{k_r} + \lambda\right) \sqrt{\frac{l^2}{k_r} + \lambda} \left[2\lambda - \left(\frac{r^2}{k_r} + \frac{a^2}{k_r} - \frac{a^2}{k_r} - \frac{l^2}{k_r}\right)\right]} r \\ v_z &= \frac{2C}{\mu} \frac{\lambda + \frac{a^2}{k_r}}{\left(\frac{a^2}{k_r} + \lambda\right) \sqrt{\frac{l^2}{k_r} + \lambda} \left[2\lambda - \left(\frac{r^2}{k_r} + \frac{a^2}{k_r} - \frac{a^2}{k_r} - \frac{l^2}{k_r}\right)\right]} z \end{aligned} \right\} (3, 13)$$

откуда

$$v_n = \sqrt{v_r^2 + v_z^2} = \frac{2C}{\mu} \frac{\lambda \rho^2 + \frac{l^2}{k_r} r^2 + \frac{a^2}{k_r} z^2}{\left(\frac{a^2}{k_r} + \lambda\right) \sqrt{\frac{l^2}{k_r} + \lambda} \left[2\lambda - \left(\frac{r^2}{k_r} + \frac{a^2}{k_r} - \frac{a^2}{k_r} - \frac{l^2}{k_r}\right)\right]} \rho \quad (3, 14)$$

Введи сферические координаты

$$x = \rho \sin \theta \cos \psi; \quad y = \rho \sin \theta \sin \psi; \quad z = \rho \cos \theta,$$

подставляя (3, 14) в (1, 4) и произведя некоторые преобразования, получим

$$Q = \frac{2\pi C}{\mu} \int_0^\pi \frac{\lambda + \frac{l^2}{k_r} \sin^2 \theta + \frac{a^2}{k_r} \cos^2 \theta}{\left(\frac{a^2}{k_r} + \lambda\right) \sqrt{\frac{l^2}{k_r} + \lambda} \left[2\lambda - \left(\frac{\rho^2 \sin^2 \theta}{k_r} + \frac{\rho^2 \cos^2 \theta}{k_r} - \frac{a^2}{k_r} - \frac{l^2}{k_r}\right)\right]} \sin \theta d\theta, \quad (3, 15)$$

где λ , после перехода в (3, 10') к сферическим координатам, имеет вид

$$\lambda = \frac{1}{2} \left[\rho^2 \frac{\sin^2 \theta}{k_r} + \rho^2 \frac{\cos^2 \theta}{k_r} - \frac{a^2}{k_r} - \frac{l^2}{k_r} + \sqrt{\left(\rho^2 \frac{\sin^2 \theta}{k_r} + \rho^2 \frac{\cos^2 \theta}{k_r} - \frac{a^2}{k_r} - \frac{l^2}{k_r}\right)^2 + 4 \left(\frac{l^2}{k_r} \rho^2 \sin^2 \theta + \frac{a^2}{k_r} \rho^2 \cos^2 \theta - a^2 l^2\right)} \right]. \quad (3, 16)$$

11. Вычисление интеграла (3, 15) является весьма затруднительным в случае конечного ρ . Однако можно воспользоваться тем обстоятельством, что выбор ρ произволен, лишь бы сфера целиком включала в себя скважину. Поэтому устремим ρ к бесконечности. Тогда из (3, 16) получим

$$\lim_{\rho \rightarrow \infty} \lambda = \frac{\sin^2 \theta}{k_r} + \frac{\cos^2 \theta}{k_r}. \quad (3, 17)$$

Кроме того, $\lim_{\rho \rightarrow \infty} \frac{l^2}{k_r} = \lim_{\rho \rightarrow \infty} \frac{a^2}{k_r} = 0$. Поэтому (3, 15) примет вид

$$Q = \frac{2\pi C}{\mu} \int_0^\pi \frac{\sin \theta d\theta}{\left(\frac{\sin^2 \theta}{k_r} + \frac{\cos^2 \theta}{k_r}\right)^{3/2}} = \frac{4\pi C k_r \sqrt{k_r}}{\mu}$$

откуда

$$C = \frac{Q \mu}{4\pi k_r \sqrt{k_r}} \quad (3, 18)$$

12. Отметим попутно, что из (3, 17) вытекает, что при $\rho \rightarrow \infty$

$$\lambda \approx \rho^2 \left(\frac{\sin^2 \theta}{k_r} + \frac{\cos^2 \theta}{k_r} \right) = \frac{r^2}{k_r} + \frac{z^2}{k_r}. \quad (3, 19)$$

Но на основании (3, 1') поверхность $\lambda = \text{const.}$ является поверхностью равного давления. Отсюда ясно, что такими поверхностями на весьма большом расстоянии от скважины являются эллипсоиды вращения с полуосями $\sqrt{k_r \lambda}$ и $\sqrt{k_z \lambda}$. Аналогичный результат был получен в § 2.

13. Подставив (3, 18) в (3, 1'), получим окончательную формулу для давления

$$P = P_{на} - \frac{Q \mu}{4\pi k_r \sqrt{k_r}} \frac{1}{\sqrt{\frac{l^2}{k_r} + \lambda} \sqrt{\frac{l^2}{k_r} - \frac{a^2}{k_r}}} \ln \frac{\sqrt{\frac{l^2}{k_r} + \lambda} \sqrt{\frac{l^2}{k_r} - \frac{a^2}{k_r}}}{\sqrt{\frac{l^2}{k_r} + \lambda} \sqrt{\frac{l^2}{k_r} - \frac{a^2}{k_r}}} \quad (3, 20)$$

Отсюда, так как давление на скважине равно P_c

$$Q = \frac{2\pi k_r \sqrt{k_r} (P_{на} - P_c)}{\mu} \frac{\sqrt{\frac{l^2}{k_r} - \frac{a^2}{k_r}}}{\ln \frac{\sqrt{\frac{l^2}{k_r} + \lambda} \sqrt{\frac{l^2}{k_r} - \frac{a^2}{k_r}}}{\frac{l}{\sqrt{k_r}} \sqrt{\frac{l^2}{k_r} - \frac{a^2}{k_r}}}} \quad (3, 21)$$

Так как обычно $a \ll l$ и $k_r \gg k_z$, то формулу (3, 21) можно представить в следующем виде:

$$Q \approx \frac{2\pi k_r (P_{на} - P_c)}{\mu} \frac{l}{\ln \sqrt{k_r} \cdot \frac{2l}{a}} \quad (3, 22)$$

14. Перейдем к вычислению времени T безводной эксплуатации. Формула (2, 11) здесь примет вид, на основании (3, 13),

$$\frac{dz}{dt} = \frac{Q k_z}{2\pi m k_r \left[z^2 - \left(l^2 - \frac{k_z}{k_r} a^2 \right) \right]}$$

Разделяя переменные и интегрируя, получим

$$T = \frac{2\pi m}{Q} \cdot \frac{k_r}{k_z} \left[\frac{h^2 - l^2}{2} - \left(l^2 - \frac{k_z}{k_r} a^2 \right) (l - h) \right]. \quad (3, 23)$$

При $l = a \sqrt{\frac{k_r}{k_z}}$ (3, 23) переходит в (1, 12). При $a \ll h$ и $k_z \ll k_r$ (3, 23) можно записать в виде

$$T \approx \frac{2\pi m h^3}{3Q} \cdot \frac{k_r}{k_z} \left(1 - \frac{l}{h} \right) \left(1 + \frac{2l}{h} \right). \quad (3, 24)$$

15. Зависимость времени безводной эксплуатации от степени вскрытия $\frac{l}{h}$ изображена на фиг. 5 для различных значений отношения $\frac{k_r}{k_z}$.

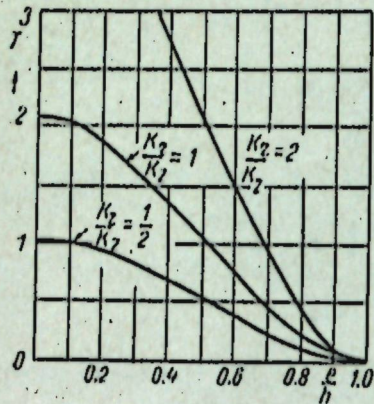
Множитель $\frac{mh^3}{Q}$ принят равным единице. Та же зависимость с точностью до постоянного множителя определяет количество нефти, которое можно взять из скважины до прорыва подошвенной воды.

16. Дадим пример расчета дебита и времени безводной эксплуатации полуэллипсоидальной скважины. Пусть $a = 10$ см, $l = 500$ см, $h = 10^3$ см,

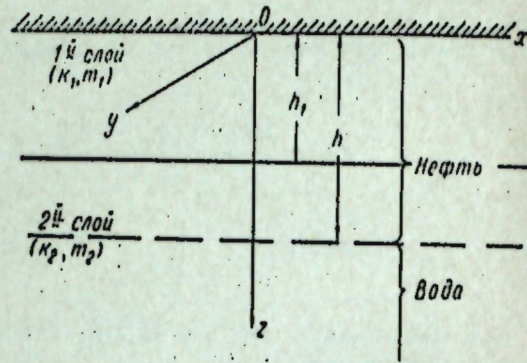
$m=0.2$, $k_r=1$ дарси, $\frac{k_r}{k_z}=5$, $\mu=1$ сантипуаз, $P_{\text{пл.}} - P_c = 1$ атм. Тогда

$$Q \approx \frac{2\pi k_r (P_{\text{пл.}} - P_c)}{\mu} \cdot \frac{l}{\ln \sqrt{\frac{k_r}{k_z} \cdot \frac{2l}{a}}} \approx 50.3 \text{ м}^3/\text{сутки};$$

$$T \approx \frac{2\pi m h^3}{3Q} \cdot \frac{k_r}{k_z} \left(1 - \frac{l}{h}\right)^2 \left(1 + \frac{2l}{h}\right) \approx 20.8 \text{ суток.}$$



Фиг. 5.



Фиг. 6.

§ 4. Обводнение точечной скважины в неограниченном двухслойном изотропном пласте

1. Рассмотрим неограниченный изотропный пласт, состоящий из двух слоев с проницаемостями k_1 и k_2 и пористостями m_1 и m_2 . Мощность водонасыщенной части считаем неограниченной. Начало координат поместим в точечной скважине. Предположим, что линия раздела двух слоев лежит при $t=0$ в нефтенасыщенной части пласта (фиг. 6).

2. Из закона Дарси следует, что

$$\frac{dz}{dt} = -\frac{k_1}{m_1 \mu_1} \cdot \frac{\partial P_1}{\partial z} \quad (\leq z \leq h_1); \quad (4,1)$$

$$\frac{dz}{dt} = -\frac{k_2}{m_2 \mu_2} \cdot \frac{\partial P_2}{\partial z} \quad (h_1 \leq z \leq \infty), \quad (4,2)$$

где P_1 и P_2 — давления соответственно в первом и втором слоях.

3. Эти давления в случае несжимаемой жидкости удовлетворяют уравнению Лапласа, которое при осесимметричном течении имеет вид

$$\frac{\partial^2 P_1}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial P_1}{\partial r} - \frac{\partial^2 P_1}{\partial z^2} = 0;$$

$$\frac{\partial^2 P_2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial P_2}{\partial r} - \frac{\partial^2 P_2}{\partial z^2} = 0.$$

Имеем следующие краевые условия:

1) $P_1(\infty, z) = P_2(\infty, z) = P_{\text{пл.}} = \text{const.}$ (на бесконечном радиальном расстоянии от скважины давление постоянно);

2) $P_2(r, \infty) = P_{\text{пл.}} = \text{const.}$ (на бесконечно большой глубине давление постоянно);

$$3) \left. \frac{\partial P_1}{\partial z} \right|_{z=0, r \neq 0} = 0;$$

4) $P_1(r, h_1) = P_2(r, h_2)$ (на линии раздела слоев давление изменяется непрерывно);

5) $k_1 \left. \frac{\partial P_1}{\partial z} \right|_{z=h_1} = k_2 \left. \frac{\partial P_2}{\partial z} \right|_{z=h_1}$ (на линии раздела слоев нормальная составляющая скорости фильтрации изменяется непрерывно).

4. На основании электрогидродинамической аналогии решение поставленной краевой задачи можно получить из формулы для потенциала электрического поля в двухслойном пласте. Изменяя соответствующим образом формулы, приводимые в курсах электроразведки [10, 12], получим следующие соотношения:

$$P_1(r, z) = P_{\text{пл.}} - \frac{\mu Q}{2\pi k_1} \int_0^\infty \left[e^{-uz} + k_{12} e^{-2uh_1} \frac{e^{uz} + e^{-uz}}{1 - k_{12} e^{-2uh_1}} \right] J_0(ur) du, \quad (4,3)$$

$$P_2(r, z) = P_{\text{пл.}} - \frac{\mu Q}{2\pi k_1} (1 - k_{12}) \int_0^\infty \frac{e^{-kz}}{1 - k_{12} e^{-2uh_1}} J_0(ur) du, \quad (4,4)$$

где

$$k_{12} = \frac{k_1 - k_2}{k_1 + k_2}.$$

Отсюда

$$\left. \frac{\partial P_1}{\partial z} \right|_{z=0} = \frac{\mu Q}{2\pi k_1} f_1(z); \quad \left. \frac{\partial P_2}{\partial z} \right|_{z=0} = \frac{\mu Q}{2\pi k_2} f_2(z), \quad (4,5)$$

где

$$f_1(z) = \frac{1}{z^2} - 8h_1 z \sum_{k=1}^\infty \frac{nk_{12}^k}{(4n^2 h_1^2 - z^2)^2}; \quad (4,6)$$

$$f_2(z) = (1 - k_{12}) \sum_{n=0}^\infty \frac{k_{12}^n}{(2nh_1 + z)^2}. \quad (4,7)$$

Подставляя равенства (4,5), (4,1) и (4,2) в (3,23) и интегрируя в надлежащих пределах, получим следующую формулу для времени T безводной эксплуатации:

$$T = \frac{2\pi k_1}{Q} \left[\frac{m_1}{k_1} \int_0^h \frac{dz}{f_1(z)} + \frac{m_2}{k_2} \int_{h_1}^h \frac{dz}{f_2(z)} \right]. \quad (4,8)$$

5. При $-1 \leq k_{12} \leq 0$ ряды (4,6) и (4,7) являются знакопеременными и члены их монотонно убывают по абсолютной величине. Поэтому, применяя теорему Лейбница об оценке суммы знакопеременного ряда, получим

$$\frac{2\pi m_1 h_1^3}{3Q} \left[-\frac{9}{8k_{12}} \ln \left(1 - \frac{8k_{12}}{9} \right) + \frac{m_2}{2m_1} \left(1 + \frac{k_1}{k_2} \right) \left(\frac{h^3}{h_1^3} - 1 \right) \right] < T < \frac{2\pi m_1 h_1^3}{3Q} \left[1 + \frac{m_2}{2m_1} \left(1 + \frac{k_1}{k_2} \right) \frac{\frac{h^3}{h_1^3} - 1}{1 + \frac{k_{12} h^3}{9h_1^3}} \right]. \quad (4,9)$$

6. Дадим пример расчета по этой формуле. Пусть $m_1=0.2$, $m_2=0.4$, $k_1=0.5$ дарси, $k_2=1$ дарси, $h_1=5$ м, $h=10$ м, $Q=50$ м³/сутки. Тогда из оценки (4,9) получим

$$11.8 \text{ суток} < T < 14.0 \text{ суток.}$$

7. При $0 \leq k_{12} \leq 1$ ряды (4,6) и (4,7) сходятся по признаку Даламбера. Г. С. Салехов [13] получил следующую оценку для суммы ряда

$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, сходящегося по признаку Даламбера:

$$\begin{aligned} & \frac{a_m}{1 - \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} + \sup_{k \geq m} \left| \frac{a_{k+1}}{a_k} - \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} \right|} \leq \\ & \leq R_m \leq \frac{a_m}{1 - \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} - \sup_{k \geq m} \left| \frac{a_{k+1}}{a_k} - \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} \right|} \end{aligned} \quad (4,10)$$

Здесь $R_m = \sum_{n=m}^{\infty} a_n$.

Применяя оценку (4,10) к рядам (4,6) и (4,7), получим следующее неравенство для определения T :

$$\begin{aligned} & \frac{2\pi m_1 h_1^3}{3Q} \left[-\frac{16}{k_{12}(8+k_{12})} \ln \left(1 - \frac{k_{12}(8+k_{12})}{16} \right) + \right. \\ & \left. + \frac{m_2}{2m_1} \left(1 + \frac{k_1}{k_2} \right) \frac{\frac{h^3}{h_1^3} - 1}{1 + \frac{k_{12}h^2}{9h_1^2} + \frac{k_{12}^2 h^2}{25(1-k_{12})h_1^2}} \right] < \\ & < T < \frac{2\pi m_1 h_1^3}{3Q} \left[\frac{225(1-k_{12})}{8k_{12}(25-9k_{12})} \ln \left(1 - \frac{8k_{12}(25-9k_{12})}{225(1-k_{12})} \right) + \right. \\ & \left. + \frac{m_2}{2m_1} \left(1 + \frac{k_1}{k_2} \right) \frac{\frac{h^3}{h_1^3} - 1}{1 + \frac{k_{12}}{\left(2 + \frac{h}{h_1}\right)^2} + \frac{k_{12}^2}{\left(4 + \frac{h}{h_1}\right)^2}} \right] \end{aligned} \quad (4,11)$$

8. Дадим пример расчета по этой формуле. Пусть $m_2=0.2$, $m_1=0.4$, $k_1=1$ дарси, $k_2=0.5$ дарси, $h_1=5$ м, $h=10$ м, $Q=50$ м³/сутки. Тогда из оценки (4,11) получим

$$11.4 \text{ суток} < T < 13.4 \text{ суток.}$$

§ 5. Обводнение галерей подошвенной водой в наклонных пластах

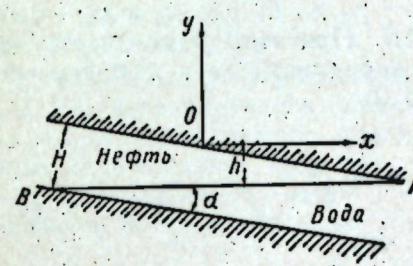
1. Точное решение задачи вычисления времени безводной эксплуатации нефтяных скважин в наклонных пластах с подошвенной водой, как уже указывалось во Введении, требует учета многочисленных факторов и приводит к большим математическим трудностям [14].

Качественный характер явления позволяет исследовать более простую схему, которая может служить первым приближением к действительности.

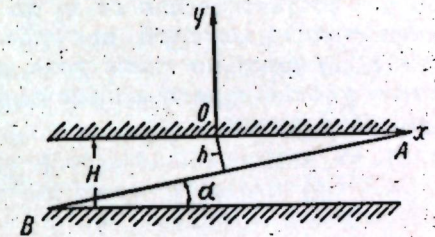
Рассмотрим наклонный однородный пласт мощности H , вскрытый галереей на поверхности (фиг. 7). При этом поток является плоским. Как и в предыдущих параграфах, пренебрежем различием в удельных весах и вязкостях нефти и воды. Будем полагать движение установившимся, а дебит галереи на единицу ее длины равным q . Пусть расстояние от линейного стока до уровня подошвенной воды в начальный момент равнялось h .

Поставим задачей определить время, через которое вода поступит в галерею.

Далее мы будем рассматривать лишь плоскость xOy , причем для удобства вычислений повернем оси координат так, чтобы ось x совпала с кровлей пласта (фиг. 8). Так как при указанных выше допущениях задача сводится к построению течения несжимаемой жидкости в бесконечной полосе ширины H со стоком $-q$ на границе полосы, то естественно воспользоваться понятием комплексного потенциала течения.



Фиг. 7.



Фиг. 8.

2. Для удовлетворения краевых условий на границах пласта необходимо, чтобы прямые $y=0$, $y=H$ были линиями тока. Пользуясь методом зеркальных отражений, поместим в точках $-2iH$, 0 , $2iH$, $4iH$, ... мнимой оси стоки с расходом $-2q$. Тогда получим следующее выражение для комплексного потенциала:

$$W = -\frac{q}{\pi} \ln \operatorname{sh} \frac{\pi z}{2H}. \quad (5,1)$$

3. Отсюда уравнение семейства линий тока запишется в виде

$$\operatorname{tg} \frac{\pi y}{2H} = C \operatorname{th} \frac{\pi x}{2H}, \quad (5,2)$$

а комплексная скорость течения запишется следующей формулой

$$\frac{dW}{dz} = v_x - i v_y = -\frac{q}{2H} \cdot \frac{\operatorname{sh} \frac{\pi x}{2H} \operatorname{ch} \frac{\pi x}{2H}}{\operatorname{sh}^2 \frac{\pi x}{2H} + \operatorname{sn}^2 \frac{\pi y}{2H}} + i \frac{q}{2H} \frac{\sin \frac{\pi y}{2H} \cos \frac{\pi y}{2H}}{-\operatorname{sh}^2 \frac{\pi x}{2H} + \operatorname{sn}^2 \frac{\pi y}{2H}}. \quad (5,3)$$

Отсюда проекции скорости движения жидкой частицы на оси координат равны соответственно

$$\frac{dx}{dt} = \frac{v_x}{m} = -\frac{q}{2mH} \frac{\operatorname{sh} \frac{\pi x}{2H} \operatorname{ch} \frac{\pi x}{2H}}{\operatorname{sh}^2 \frac{\pi x}{2H} + \operatorname{sn}^2 \frac{\pi y}{2H}};$$

$$\frac{dy}{dt} = \frac{v_y}{m} = -\frac{q}{2mH} \frac{\sin \frac{\pi y}{2H} \cos \frac{\pi y}{2H}}{\operatorname{sh}^2 \frac{\pi x}{2H} + \sin^2 \frac{\pi y}{2H}}$$

Следовательно,

$$dt = -\frac{2mH}{q} \cdot \frac{\operatorname{sh}^2 \frac{\pi x}{2H} + \sin^2 \frac{\pi y}{2H}}{\operatorname{sh} \frac{\pi x}{2H} \operatorname{ch} \frac{\pi x}{2H}} dx \quad (5, 4)$$

или

$$dt = -\frac{2mH}{q} \cdot \frac{\operatorname{sh}^2 \frac{\pi x}{2H} + \sin^2 \frac{\pi y}{2H}}{\sin \frac{\pi y}{2H} \cos \frac{\pi y}{2H}} dy. \quad (5, 5)$$

4. Для вычисления времени T движения частицы воды от уровня AB (фиг. 7 и 8) следует проинтегрировать эти уравнения от 0 до T , а по x либо y — соответственно от x_0 до 0 и от y_0 до 0, где x_0 и y_0 — координаты точки, лежащей на уровне AB . При этом надо учесть, что частица движется по линии тока, т. е. координаты ее в любой момент времени удовлетворяют соотношению (5, 2).

Повторю имеем

$$T = -\frac{2mH}{q} \int_{x_0}^0 \frac{\operatorname{sh}^2 \frac{\pi x}{2H} + \sin^2 \frac{\pi y}{2H}}{\operatorname{sh} \frac{\pi x}{2H} \operatorname{ch} \frac{\pi x}{2H}} dx \quad (5, 6)$$

и

$$T = -\frac{2mH}{q} \int_{y_0}^0 \frac{\operatorname{sh}^2 \frac{\pi x}{2H} + \sin^2 \frac{\pi y}{2H}}{\sin \frac{\pi y}{2H} \cos \frac{\pi y}{2H}} dy. \quad (5, 7)$$

5. Установим связь между x_0 и y_0 на уровне AB , являющемся границей раздела нефти и воды в начальный момент $t=0$. На основании фиг. 8 имеем

$$y_0 = x_0 \operatorname{tg} \alpha - \frac{h}{\cos \alpha} \quad (5, 8)$$

и

$$x_0 = y_0 \operatorname{ctg} \alpha + \frac{h}{\sin \alpha}. \quad (5, 9)$$

6. Формулы (5, 6) и (5, 7) для вычисления времени T равноценны. Возьмем, например, формулу (5, 7). С помощью (5, 2) преобразуем ее в следующую:

$$T = \frac{4mH^2}{\pi q} \ln \frac{y_0 \operatorname{ctg} \alpha + \frac{h}{\sin \alpha}}{\cos \frac{\pi y_0}{2H}} \operatorname{ch} \frac{\pi}{2H}. \quad (5, 10)$$

Эта формула дает время продвижения частицы с уровня AB до галереи, если ордината частицы в начальный момент равна y_0 . Нам требуется определить кратчайшее время, через которое частица воды с уровня AB достигает галереи. Для этого найдем минимум T по y_0 .

Легко видеть, что задача определения этого минимума сводится к решению уравнения

$$\frac{\operatorname{tg} \frac{\pi y_0}{2H}}{\operatorname{th} \frac{\pi}{2H} \left(y_0 \operatorname{ctg} \alpha + \frac{h}{\sin \alpha} \right)} = -\operatorname{ctg} \alpha = C^*, \quad (5, 11)$$

которым определяется выбор линии тока. Любопытно отметить, что выбор линии тока, по которой частица доходит до галереи в кратчайшее время, зависит лишь от угла α наклона пласта к горизонту и не зависит от h . Нетрудно убедиться, что корень y_0^* уравнения (5, 11) действительно дает минимум T . Подставляя этот корень в (5, 10), имеем

$$T = \frac{4mH^2}{\pi q} \cdot \ln \frac{y_0^* \operatorname{ctg} \alpha + \frac{h}{\cos \alpha}}{\cos \frac{\pi y_0^*}{2H}} \operatorname{ch} \frac{\pi}{2H}. \quad (5, 12)$$

Легко видеть, что $-H < y_0^* < 0$. То же результаты можно получить, производя интегрирование по x , исходя из формулы (5, 6).

7. Из рассмотренного случая можно получить формулу для времени безводной эксплуатации галереи при горизонтальном пласте мощности H , в котором вода находилась в начальный момент на уровне $y_0 = -h$. Для этого достаточно устремить в формуле (5, 10) α к 0, учитывая, что одновременно $y_0^* \rightarrow -h$. Тогда придем к формуле

$$T = \frac{4mH^2}{\pi q} \ln \frac{1}{\cos \frac{\pi h}{2H}}. \quad (5, 13)$$

Тот же результат возможно получить и независимо от формулы (5, 10).

8. Исследуем, в частности, случай, когда $H \rightarrow -\infty$, а пласт остается горизонтальным. Это означает, что подошвенная вода простирается от $-h$ вниз до бесконечности. Переходя к пределу в (5, 13), получим

$$T = \frac{\pi}{2} \cdot \frac{mH^2}{q}. \quad (5, 14)$$

Это выражение можно получить непосредственно из простых рассуждений.

9. Приведенный метод легко позволяет проследить за перемещением границы раздела нефти и воды. Чтобы получить уравнение границы раздела, достаточно проинтегрировать уравнения (5, 4) и (5, 5) по t от 0 до t ($t < T$), по x от x_0 до x и по y от y_0 до y . Производя эти интегрирования и пользуясь соотношением (5, 2), получим параметрические уравнения линии раздела жидкостей в любой момент времени:

$$\operatorname{ch}^2 \frac{\pi x}{2H} = \frac{\operatorname{sh}^2 \frac{\pi y_0}{2H}}{\operatorname{sh}^2 \frac{\pi y}{2H}} \cdot \frac{\cos^2 \frac{\pi y_0}{2H}}{\cos^2 \frac{\pi y}{2H}} + \frac{\operatorname{sh}^2 \frac{\pi x_0}{2H}}{\operatorname{sh}^2 \frac{\pi x}{2H}} \cdot \frac{\sin^2 \frac{\pi y_0}{2H}}{\sin^2 \frac{\pi y}{2H}}; \quad (5, 15)$$

$$\cos^2 \frac{\pi y}{2H} = \frac{e^{\frac{\pi q}{2mH^2} t} \frac{\text{sh}^2 \frac{\pi x_0}{2H}}{\sin^2 \frac{\pi y_0}{2H}}}{\frac{\text{ch}^2 \frac{\pi x_0}{2H}}{\cos^2 \frac{\pi y_0}{2H}} + \frac{\text{sh}^2 \frac{\pi x_0}{2H}}{\sin^2 \frac{\pi y_0}{2H}}} \quad (5, 16)$$

10. Рассмотрим приближенное решение уравнения (5, 11) при α , близких к нулю. Так как при $\alpha \rightarrow 0$ $y_0 \rightarrow -h$, то перепишем уравнение в виде

$$\text{tg} \left[\frac{\pi h}{2H} - \frac{\pi}{2H} (y_0 + h) \right] = \text{ctg} \alpha \text{th} \frac{\pi}{2H} \left[h \frac{1 - \cos \alpha}{\sin \alpha} + (y_0 + h) \text{ctg} \alpha \right].$$

Отсюда, разлагая обе части уравнения в ряд Тэйлора и ограничиваясь первыми двумя членами, имеем

$$\frac{\pi}{2H} (y_0 + h) \approx \left(\text{tg} \frac{\pi}{2H} - \frac{\pi h}{4H} \right) \alpha^2.$$

Следовательно,

$$T \approx \frac{2mH^2}{\pi q} \ln \frac{1}{\cos^2 \frac{\pi h}{2H} \left[1 + \left(\frac{3}{2} \text{tg} \frac{\pi h}{2H} - \frac{\pi h}{2H} \right) \text{tg} \frac{\pi h}{2H} \alpha^2 \right]}.$$

11. Пусть $m=0.2$, $H=10^3$ см, $h=900$ см, $q=0.1157$ см/сек., $\alpha=5^\circ$. Тогда $T \approx 372 \cdot 10^4$ сек. ≈ 43 суткам. При $\alpha=0$ и тех же остальных данных $T \approx 408 \cdot 10^4$ сек. ≈ 47 суткам. При $\alpha=5^\circ$ точное значение y_0 , найденное подбором, есть -8.7671 . Отсюда $T \approx 387 \cdot 10^4$ сек. ≈ 45 суткам. Приближенное значение T при тех же исходных данных есть $372 \cdot 10^4$ сек. Погрешность приближенного решения равна

$$\frac{387 - 372}{372} \cdot 100 \approx 4\%.$$

ЛИТЕРАТУРА

1. М. Д. Миллионщиков. Гидромеханический анализ некоторых способов эксплуатации нефтяных скважин. Докторская диссертация. Институт механики АН СССР, 1944.
2. И. А. Чарный. Приток к скважинам в месторождениях с подошвенной водой или "газовой шапкой". Нефтяное хозяйство, № 10, 1952.
3. В. Н. Щелкачев. Основы подземной нефтяной гидравлики. Гостоптехиздат, 1945.
4. Н. С. Пискунов. О передвижении контура нефтеносности и падении давления в пласте при разработке крупных нефтяных месторождений. ДАН СССР, т. 34, № 5, 1952.
5. М. Маскет. Течение однородных жидкостей в пористой среде. Гостоптехиздат, 1949.
6. (M. Muskat) M. Muskat. The performance of bottom waterdrive reservoirs. Petroleum technology, vol. 9, № 5, Sept., 1946.
7. В. Н. Щелкачев, Б. Б. Липук. Подземная гидравлика. Гостоптехиздат, 1949.
8. É. Catalan. Traité élémentaire des séries. Paris, 1860.
9. Б. И. Согал. Некоторые пространственные задачи теории потенциала и их приложения. Изв. АН СССР, серия матем., т. X, № 4, 1946.
10. А. И. Заборовский. Электроразведка. Гостоптехиздат, 1943.

11. П. Я. Полубаринова-Кочина. Теория движения грунтовых вод. Гостехиздат, 1952.
12. В. Н. Дахиов. Электрическая разведка нефтяных и газовых месторождений. Гостоптехиздат, 1951.
13. Г. С. Салехов. К теории вычисления рядов. Успехи математических наук, т. IV, вып. 4, 1949.
14. А. М. Пирвердян. О движении подошвенной воды в слабо наклоненных пластах. Прикл. матем. и мех., т. 12, вып. 2, 1952.

Физико-технический институт
Казанского филиала АН СССР

Поступило 14 марта
1953 г.

Н. Ф. ИВАНОВ, Г. С. САЛЕХОВ и И. В. СВирский

ОБ ОПРЕДЕЛЕНИИ ОПТИМАЛЬНЫХ УСЛОВИЙ ЭКСПЛУАТАЦИИ НЕФТЯНЫХ СКВАЖИН В ПЛАСТАХ С УПРУГИМ РЕЖИМОМ

В статье доказывается, что при наличии чисто нефтяной зоны в случае упругого режима месторождения наибольшую суммарную добычу нефти можно получить, если спустить давление на забоях скважин до критического так скоро, насколько это позволяют технические условия.

Вопрос об оптимальном режиме эксплуатации нефтяных скважин для случая упругого режима и постоянного дебита был рассмотрен В. Н. Щелкачевым^[1]. В настоящей работе этот вопрос изучается с точки зрения выбора закона изменения дебита в зависимости от определенных практических условий, накладываемых на забойное давление.

Известно, что для рациональной эксплуатации нефтяных скважин давление на забоях не следует спускать ниже некоторого критического значения $P_{кр.}$ (например давления, ниже которого начинается разгазирование нефти).

Среди нефтяников-практиков широко распространено мнение, что при снижении давления до $P_{кр.}$ в начальный период эксплуатации происходит нерациональная потеря внутренней энергии в пласте, что вызывает в результате пониженную суммарную добычу нефти.

В статье показывается, что это мнение является необоснованным и что в чисто нефтяной зоне в случае упругого режима месторождения наибольшую суммарную добычу можно получить, если спустить давление на забоях скважин до критического так скоро, насколько это позволяют технические условия.

В § 1 настоящей работы излагаются оптимальные с точки зрения суммарной добычи условия эксплуатации одной изолированной скважины, причем проницаемость пласта считается постоянной. Эти результаты получены в 1951 г. Г. С. Салеховым и Н. Ф. Ивановым^[2].

В § 2 исследуются оптимальные условия эксплуатации любого числа скважин, причем проницаемость пласта считается переменной. Исследование это проведено И. В. Свирским в 1952 г.

§ 1

Пусть заранее известны значения давлений (давление фонтанирования, давление разгазирования и т. д.), ниже которых в силу технических условий эксплуатации нельзя спускать давление на забое. Наибольшее из этих давлений назовем $P_{кр.}$. Требуется определить, с каким дебитом следует эксплуатировать скважину, чтобы, не спуская давление на ее забое ниже $P_{кр.}$, получить за данное время ее эксплуата-

тации t наибольшую суммарную добычу $\int_0^t G(\tau) d\tau$, где $G(\tau)$ — текущий весовой дебит.

При решении этой задачи будем исходить из аналитической зависимости между давлением на забое скважины и дебитом последней. Эту зависимость нетрудно получить, используя некоторые соотношения, имеющиеся в книгах И. А. Чарного^[3] и М. Маскета^[4].

Из уравнения для удельного веса жидкости в случае линейного стока с весовым дебитом $G(t)$, приводимого М. Маскетом, следует

$$m\gamma - (m\gamma)_0 = -\frac{1}{4\pi x} \int_0^t \frac{G(\tau)}{t-\tau} e^{-\frac{r^2}{4x(t-\tau)}} d\tau. \quad (1, 1)$$

Здесь m — пористость, γ — удельный вес жидкости, $(m\gamma)_0$ — значения тех же величин при $\tau=0$, т. е. в момент ввода скважины в действие, x — коэффициент пьезопроводности.

Учитывая связь между давлением, удельным весом и пористостью^[3]

$$P - P_0 = \frac{m\gamma - (m\gamma)_0}{(m\gamma)_0} K$$

(K — приведенный модуль объемного сжатия, P_0 — давление в момент пуска скважины), из уравнения (1, 1) получим связь между давлением и весовым дебитом в форме

$$P(r, t) = P(r, 0) - A \int_0^t \frac{G(\tau)}{t-\tau} e^{-\frac{r^2}{4x(t-\tau)}} d\tau,$$

$$A = \frac{m_0\gamma_0}{4\pi x K} = \text{const.}$$

Тогда на скважине, т. е. при $r=a$, имеем

$$P(a, t) = P(a, 0) - A \int_0^t \frac{G(\tau)}{t-\tau} e^{-\frac{a^2}{4x(t-\tau)}} d\tau. \quad (1, 2)$$

Эта формула дает соотношение, связывающее давление на забое скважины с весовым дебитом последней.

Таким образом, при условии

$$P(a, t) \geq P_{кр.} \quad (0 \leq \tau \leq t)$$

нужно найти такой весовой дебит $Q(\tau)$, чтобы суммарная добыча

$\int_0^t G(\tau) d\tau$ оказалась бы наибольшей.

Докажем, что решением этой задачи является такой дебит $G_{кр.}(\tau)$, при котором во всё время эксплуатации давление на забое равно $P_{кр.}$. Для этого сравним эксплуатацию скважины при дебите $G(\tau)$ и, соответственно, давлении на забое $P(a, \tau)$ с эксплуатацией ее при $\bar{G}(\tau)$ и $\bar{P}(a, \tau)$. Пусть при этом удовлетворяются неравенства

$$P_{кр.} \leq \bar{P}(a, \tau) \leq P(a, \tau); \quad \bar{G}(\tau) \geq 0; \quad G(\tau) \geq 0 \quad (0 \leq \tau \leq t),$$

причем дебит связан с давлением в забое формулой (1, 2).

Докажем, что суммарная добыча будет больше при эксплуатации скважины с дебитом $\bar{G}(\tau)$. Математическая формулировка приобретает при этом следующий вид. Дано

$$\int_0^t \frac{\bar{G}(\tau)}{t-\tau} e^{-\frac{a^2}{4x(t-\tau)}} d\tau \geq \int_0^t \frac{G(\tau)}{t-\tau} e^{-\frac{a^2}{4x(t-\tau)}} d\tau, \quad (1,3)$$

где $\bar{G}(\tau) \geq 0$, $G(\tau) \geq 0$.

Доказать, что

$$\int_0^t \bar{G}(\tau) d\tau \geq \int_0^t G(\tau) d\tau. \quad (1,4)$$

Разобьем время эксплуатации t на n равных частей. Число n возьмем равным целой части дроби $\frac{2xt}{a^2}$, т. е.

$$\frac{2xt}{a^2} - 1 < n \leq \frac{2xt}{a^2}. \quad (1,5)$$

Величина $\frac{a^2}{2x}$ имеет практически порядок тысячных долей секунды.

Например, если $a=10$ см, $x=10^4$ см²/сек., то $\frac{t}{n} \approx \frac{a^2}{2x} = 0.005$ сек.

Время эксплуатации t имеет порядок нескольких лет, т. е. примерно 10^8 сек. Отсюда величина $\frac{2xt}{a^2}$ имеет порядок 10^5 , а n — порядок 10^{11} .

Так как $\frac{t}{n}$ очень мало, то практически без существенной погрешности функции $\bar{G}(\tau)$ и $G(\tau)$ можно считать ступенчатыми:

$$\begin{aligned} \bar{G}(\tau) &= \bar{G}_i, \\ G(\tau) &= G_i \end{aligned} \quad \text{при } \frac{i-1}{n}t < \tau < \frac{it}{n} \quad (i=1, 2, \dots, n).$$

Тогда соотношение (1,4) приближенно заменяется неравенством

$$\sum_{i=1}^n \bar{G}_i \frac{t}{n} \geq \sum_{i=1}^n G_i \frac{t}{n}. \quad (1,6)$$

Перепишем соотношение (1,3) в виде

$$\int_0^t \frac{G(\tau)}{t-\tau} e^{-\frac{a^2}{4x(t-\tau)}} d\tau = \frac{P(a, 0) - P(a, t)}{A}. \quad (1,7)$$

Разбив промежуток интегрирования на n частей, видим, что равенство (1,7) равносильно системе следующих равенств:

$$\int_0^{\frac{t}{n}} \frac{G(\tau)}{\frac{t}{n}-\tau} e^{-\frac{a^2}{4x(\frac{t}{n}-\tau)}} d\tau = \frac{P(a, 0) - P(a, \frac{t}{n})}{A} \equiv c_1;$$

$$\int_0^{\frac{2t}{n}} \frac{G(\tau)}{\frac{2t}{n}-\tau} e^{-\frac{a^2}{4x(\frac{2t}{n}-\tau)}} d\tau + \int_{\frac{t}{n}}^{\frac{2t}{n}} \frac{G(\tau)}{\frac{2t}{n}-\tau} e^{-\frac{a^2}{4x(\frac{2t}{n}-\tau)}} d\tau = \frac{P(a, 0) - P(a, \frac{2t}{n})}{A} \equiv c_2;$$

$$\int_0^{\frac{t}{n}} \frac{G(\tau)}{\frac{it}{n}-\tau} e^{-\frac{a^2}{4x(\frac{it}{n}-\tau)}} d\tau + \dots + \int_{\frac{(i-1)t}{n}}^t \frac{G(\tau)}{\frac{it}{n}-\tau} e^{-\frac{a^2}{4x(\frac{it}{n}-\tau)}} d\tau = \frac{P(a, 0) - P(a, \frac{it}{n})}{A} \equiv c_i;$$

$$\int_0^{\frac{t}{n}} \frac{G(\tau)}{\frac{t}{n}-\tau} e^{-\frac{a^2}{4x(\frac{t}{n}-\tau)}} d\tau + \dots + \int_{\frac{(n-1)t}{n}}^t \frac{G(\tau)}{\frac{t}{n}-\tau} e^{-\frac{a^2}{4x(\frac{t}{n}-\tau)}} d\tau = \frac{P(a, 0) - P(a, t)}{A} \equiv c_n.$$

Считая, что $G(\tau)$ — ступенчатая функция, можно придать этой системе следующий вид:

$$\sum_{k=1}^i G_k \int_{\frac{(k-1)t}{n}}^{\frac{kt}{n}} \frac{e^{-\frac{a^2}{4x(\frac{it}{n}-\tau)}}}{\frac{it}{n}-\tau} d\tau = c_i. \quad (1,8)$$

Точно также получим

$$\sum_{k=1}^i \bar{G}_k \int_{\frac{(k-1)t}{n}}^{\frac{kt}{n}} \frac{e^{-\frac{a^2}{4x(\frac{it}{n}-\tau)}}}{\frac{it}{n}-\tau} d\tau = \bar{c}_i, \quad (1,9)$$

где

$$\bar{c}_i = \frac{\bar{P}(a, 0) - \bar{P}(a, t)}{A}.$$

Согласно условию (1,3), имеем

$$0 \leq c_i \leq \bar{c}_i \quad (i=1, 2, \dots, n).$$

Введем обозначение

$$A_{ki} = \int_{\frac{(k-1)t}{n}}^{\frac{kt}{n}} \frac{e^{-\frac{a^2}{4x(\frac{it}{n}-\tau)}}}{\frac{it}{n}-\tau} d\tau$$

и положим

$$\frac{a^2}{4x\left(\frac{it}{n}-\tau\right)} = x.$$

Тогда

$$\frac{a^2 d\tau}{4x\left(\frac{it}{n}-\tau\right)^2} = dx; \quad \frac{d\tau}{\frac{it}{n}-\tau} = \frac{4x}{a^2}\left(\frac{it}{n}-\tau\right) d\tau = \frac{dx}{x}.$$

При $\tau = \frac{k-1}{n}t$

$$x = \frac{a^2}{4x\frac{i-k+1}{n}t} = \frac{a^2 n}{4x(i-k+1)t}.$$

При $\tau = \frac{k}{n} t$

$$x = \frac{a^2}{4x \frac{i-k}{n} t} = \frac{a^2 n}{4x (i-k) t}$$

Следовательно,

$$A_{ki} = \frac{\frac{a^2 n}{4x(i-k)t}}{\frac{a^2 n}{4x(i-k+1)t}} \int \frac{e^{-x}}{x} dx$$

Ясно, что A_{ki} зависит лишь от $i-k$. Поэтому

$$A_{ki} = A_{k-1, i-1} = A_{k-2, i-2} = \dots = A_{1, i-k+1}$$

Тогда система (1, 8) примет вид

$$\begin{aligned} A_{11}G_1 &= c_1, \\ A_{12}G_1 + A_{11}G_2 &= c_2, \\ A_{13}G_1 + A_{12}G_2 + A_{11}G_3 &= c_3, \\ A_{14}G_1 + A_{13}G_2 + A_{12}G_3 + A_{11}G_4 &= c_4, \\ \dots & \\ A_{1n}G_1 + A_{1, n-1}G_2 + A_{1, n-2}G_3 + \dots + A_{11}G_n &= c_n, \end{aligned}$$

т. е.

$$\sum_{k=1}^i A_{1, i-k+1} G_k = c_i \quad (i=1, 2, \dots, n).$$

Точно так же система (1, 9) примет вид

$$\sum_{k=1}^i A_{1, i-k+1} \bar{G}_k = \bar{c}_i \quad (i=1, 2, \dots, n).$$

Введя обозначение

$$A_{1, i-k+1} = a_{i-k+1} \quad (i=1, 2, \dots, n),$$

придадим этим системам вид

$$\sum_{k=1}^i a_{i-k+1} G_k = c_i \quad (1, 10)$$

и

$$\sum_{k=1}^i a_{i-k+1} \bar{G}_k = \bar{c}_i \quad (1, 11)$$

Положим $i-k+1 = m$, $\frac{a^2}{4x} = s$. Тогда

$$a_m = \int_{\frac{ns}{mt}}^{\frac{ns}{(m-1)t}} \frac{e^{-x}}{x} dx, \quad (1, 12)$$

$$\frac{da_m}{dm} = -\frac{ns}{(m-1)^2 t} \cdot \frac{e^{-\frac{ns}{(m-1)t}}}{\frac{ns}{(m-1)t}} + \frac{ns}{m^2 t} \cdot \frac{e^{-\frac{ns}{mt}}}{\frac{ns}{mt}} = \frac{e^{-\frac{ns}{mt}}}{m} - \frac{e^{-\frac{ns}{(m-1)t}}}{(m-1)}$$

Для выяснения знака $\frac{da_m}{dm}$ рассмотрим производную от функции

$$y = \frac{1}{m} e^{-\frac{ns}{mt}}. \text{ Имеем } \frac{dy}{dm} = \left(-\frac{1}{m^2} + \frac{ns}{m^3 t} \right) e^{-\frac{ns}{mt}} = \left(\frac{ns}{t} - m \right) \frac{1}{m^3} e^{-\frac{ns}{mt}}. \text{ Сле-}$$

довательно, $\frac{dy}{dm} < 0$ при $m > \frac{ns}{t}$. Но, согласно (1, 5), $\frac{t}{2s} - 1 < n < \frac{t}{2s}$, т. е.

$$\frac{1}{2} \geq \frac{ns}{t} \geq \frac{1}{2} - \frac{s}{t} \quad \left(\frac{ns}{t} \approx \frac{1}{2} \right). \quad (1, 13)$$

Следовательно, $\frac{dy}{dm} < 0$ при $m \geq 1$. Поэтому

$$\frac{e^{-\frac{ns}{mt}}}{m} < \frac{e^{-\frac{ns}{(m-1)t}}}{m-1}, \quad \frac{da_m}{dm} < 0 \quad (m=2, 3, \dots, n)$$

и

$$a_m > a_{m+1} \quad (m=2, 3, \dots, n).$$

Теперь докажем, что $a_1 > a_2$.

В самом деле, на основании (1, 12) и (1, 13) имеем

$$\begin{aligned} a_1 &= \int_{\frac{1}{2}}^{\infty} \frac{e^{-x}}{x} dx = 0.56; \quad a_2 = \int_{\frac{1}{4}}^{\frac{1}{2}} \frac{e^{-x}}{x} dx = \int_{\frac{1}{4}}^{\infty} \frac{e^{-x}}{x} dx - \int_{\frac{1}{4}}^{\infty} \frac{e^{-x}}{x} dx = \\ &= 1.04 - 0.56 = 0.48, \end{aligned}$$

т. е. $a_1 > a_2$. Таким образом, окончательно имеем $a_1 > a_2 > a_3 > \dots > a_n > 0$.

Решая систему (1, 10), получим

$$G_1 = \frac{1}{a_1^n} \begin{vmatrix} c_1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ c_2 & a_1 & 0 & \dots & 0 \\ c_3 & a_2 & a_1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ c_n & a_{n-1} & a_{n-2} & \dots & a_1 \end{vmatrix};$$

$$G_2 = \frac{1}{a_1^n} \begin{vmatrix} a_1 c_1 0 & \dots & 0 \\ a_2 c_2 0 & \dots & 0 \\ a_3 c_3 a_1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots \\ a_n c_n a_{n-2} \dots a_1 \end{vmatrix} = -\frac{1}{a_1^n} \begin{vmatrix} c_2 a_1 0 & \dots & 0 \\ c_2 a_2 0 & \dots & 0 \\ c_3 a_3 a_1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots \\ c_n a_n a_{n-2} \dots a_1 \end{vmatrix};$$

$$G_n = \frac{1}{a_1^n} \begin{vmatrix} a_1 0 & 0 & \dots & c_1 \\ a_2 a_1 & 0 & \dots & c_2 \\ a_3 a_2 & a_1 & \dots & c_3 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_n a_{n-1} a_{n-2} \dots c_n \end{vmatrix} = \frac{(-1)^{n-1}}{a_1^n} \begin{vmatrix} c_1 a_1 & 0 & \dots & 0 \\ c_2 a_2 & a_1 & \dots & 0 \\ c_3 a_3 & a_2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ c_{n-1} a_{n-1} a_{n-2} \dots a_1 \\ c_n a_n a_{n-1} \dots a_2 \end{vmatrix}$$

Отсюда

$$\sum_{i=1}^n G_i = -\frac{1}{a_1^n} \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ c_1 & a_1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ c_2 & a_2 & a_1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ c_3 & a_3 & a_2 & a_1 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ c_{n-1} & a_{n-1} & a_{n-2} & a_{n-3} & \dots & a_1 & 0 \\ c_n & a_n & a_{n-1} & a_{n-2} & \dots & a_2 & a_1 \end{vmatrix}$$

Точно так же получим

$$\sum_{i=1}^n \bar{G}_i = -\frac{1}{a_1^n} \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ \bar{c}_1 & a_1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \bar{c}_2 & a_2 & a_1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \bar{c}_3 & a_3 & a_2 & a_1 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \bar{c}_{n-1} & a_{n-1} & a_{n-2} & a_{n-3} & \dots & a_1 & 0 \\ \bar{c}_n & a_n & a_{n-1} & a_{n-2} & \dots & a_2 & a_1 \end{vmatrix}$$

Следовательно,

$$\Delta_n \equiv a_1^n \left(\sum_{i=1}^n \bar{G}_i - \sum_{i=1}^n G_i \right) = - \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ \bar{c}_1 - c_1 & a_1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \bar{c}_2 - c_2 & a_2 & a_1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \bar{c}_3 - c_3 & a_3 & a_2 & a_1 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \bar{c}_{n-1} - c_{n-1} & a_{n-1} & a_{n-2} & a_{n-3} & \dots & a_1 & 0 \\ \bar{c}_n - c_n & a_n & a_{n-1} & a_{n-2} & \dots & a_2 & a_1 \end{vmatrix} =$$

$$= - \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \bar{c}_1 - c_1 & a_1 & -a_1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \bar{c}_2 - c_2 & a_2 & a_1 - a_2 & -a_1 & \dots & 0 & 0 \\ \bar{c}_3 - c_3 & a_3 & a_2 - a_3 & a_1 - a_2 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \bar{c}_{n-1} - c_{n-1} & a_{n-1} & a_{n-2} - a_{n-1} & a_{n-3} - a_{n-2} & \dots & a_1 - a_2 & -a_1 \\ \bar{c}_n - c_n & a_n & a_{n-1} - a_n & a_{n-2} - a_{n-1} & \dots & a_2 - a_3 & a_1 - a_2 \end{vmatrix}$$

Окончательно,

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} \bar{c}_1 - c_1 & -a_1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \bar{c}_2 - c_2 & a_1 - a_2 & -a_1 & 0 & \dots & 0 \\ \bar{c}_3 - c_3 & a_2 - a_1 & a_1 - a_2 & -a_1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \bar{c}_{n-1} - c_{n-1} & a_{n-2} - a_{n-1} & a_{n-3} - a_{n-2} & a_{n-4} - a_{n-3} & \dots & -a_1 \\ \bar{c}_n - c_n & a_{n-1} - a_n & a_{n-2} - a_{n-1} & a_{n-3} - a_{n-2} & \dots & a_1 - a_2 \end{vmatrix} \quad (1,14)$$

Ясно, что $\Delta_n = 0$ при $c_i = \bar{c}_i$ ($i = 1, 2, \dots, n$). Нам требуется доказать, что $\Delta_n \geq 0$ при $\bar{c}_i \geq c_i$ ($i = 1, 2, \dots, n$). Для этого докажем сначала, что если $b_{ik} \geq 0$, $b > 0$ ($i, k = 1, 2, \dots, n$), то определитель

$$\delta_n = \begin{vmatrix} b_{11} & -b & 0 & 0 & \dots & 0 \\ b_{21} & b_{22} & -b & 0 & \dots & 0 \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} & -b & \dots & 0 \\ b_{41} & b_{42} & b_{43} & b_{44} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_{n-1,1} & b_{n-1,2} & b_{n-1,3} & b_{n-1,4} & \dots & -b \\ b_{n1} & b_{n2} & b_{n3} & b_{n4} & \dots & b_{nn} \end{vmatrix}$$

не отрицателен.¹

В самом деле,

$$\delta_2 = \begin{vmatrix} b_{11} - b & 0 \\ b_{21} & b_{22} \end{vmatrix} \geq 0; \quad \delta_3 = \begin{vmatrix} b_{11} - b & 0 \\ b_{21} & b_{22} - b \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{vmatrix} \geq 0.$$

Пусть $\delta_{n-1} \geq 0$. Тогда

$$\delta_n = a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & -a & 0 & \dots & 0 \\ a_{32} & a_{33} & -a & \dots & 0 \\ a_{42} & a_{43} & a_{44} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n-1,2} & a_{n-1,3} & a_{n-1,4} & \dots & -a \\ a_{n2} & a_{n3} & a_{n4} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} + a \begin{vmatrix} a_{21} & -a & 0 & \dots & 0 \\ a_{31} & a_{33} & -a & \dots & 0 \\ a_{41} & a_{43} & a_{44} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n-1,1} & a_{n-1,3} & a_{n-1,4} & \dots & -a \\ a_n & a_{n3} & a_{n4} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} \geq 0.$$

Но из равенства (1,14) ясно, что определитель Δ_n имеет такое же строение, как и определитель δ_n . Поэтому $\Delta_n \geq 0$ при $\bar{c}_i \geq c_i$ ($i = 1, 2, \dots, n$). Отсюда

$$\sum_{i=1}^n \bar{G}_i > \sum_{i=1}^n G_i,$$

что и требовалось доказать.

Таким образом, можно считать доказанным утверждение: чем меньше будет отличаться давление на забое скважины от критического в течение всего времени эксплуатации, тем больше получим суммарную добычу за это время.

¹ Это положение доказано Т. А. Кокаревой.

Теперь перейдем к более общему случаю, когда проницаемость среды является разной в разных точках пласта и когда мы имеем дело с эксплуатацией многих скважин. При этом будем предполагать, что скорость фильтрации \bar{v} подчиняется линейному закону Дарси:

$$\bar{v} = -\frac{k}{\mu} \text{grad}(P - \gamma z),$$

где P — давление, z — высота, μ — вязкость нефти, k — проницаемость. Уравнение неразрывности мы примем в следующем виде:

$$\frac{\partial m\gamma}{\partial t} = -\text{div} \gamma \bar{v}.$$

Здесь m — пористость, а γ — удельный вес жидкости.

Далее будем предполагать, что изменение величины $m\gamma$ пропорционально изменению давления

$$m\gamma - (m\gamma)_0 = C(P - P_0),$$

где $C > 0$ — некоторый коэффициент пропорциональности, а P_0 — давление в рассматриваемой точке пласта до начала эксплуатации скважин. Введем в рассмотрение величину R , называемую напором:

$$R = P - \gamma z, \quad R_0 = P_0 - \gamma z;$$

при этом можем написать

$$m\gamma = (m\gamma)_0 - C(P - P_0) = (m\gamma)_0 - C(R - R_0).$$

Подставляя это выражение, а также выражение для скорости в уравнение неразрывности, получим

$$C \frac{\partial R}{\partial t} = \text{div} \left(\gamma \frac{k}{\mu} \text{grad} R \right).$$

Если обозначим величину $\frac{\gamma k}{\mu}$ через B , переносим все члены уравнения в левую сторону и запишем его в скалярной форме, то получим

$$C \frac{\partial R}{\partial t} - \sum_{i=1}^3 \frac{\partial}{\partial x_i} B \frac{\partial R}{\partial x_i} = 0, \quad (2, 1)$$

где коэффициенты C и B являются параметрами пласта (мы будем их считать функциями только координат, так как удельный вес γ мало меняется с изменением давления).

Рассмотрим некоторый режим эксплуатации скважин, при котором на забое m -й скважины поддерживается напор $R_m(t)$ ($m = 1, 2, \dots, n$). Мы будем предполагать, что этот напор не спускается ниже критического. Течение нефти определяется дифференциальным уравнением (2, 1) и следующими начальными и граничными условиями.

При $t = 0$

$$R = R_0(x_1, x_2, x_3), \quad (2, 2)$$

где $R_0(x_1, x_2, x_3)$ — распределение напора в начальный момент времени.

На поверхности m -й скважины после ввода ее в действие в момент T_m при $t > T_m$ удовлетворяется следующее уравнение:

$$R = R_m(t), \quad (2, 3)$$

где $R_m(t)$ — напор на забое.

На границе пласта должно выполняться уравнение, характеризующее отсутствие потока жидкости через эту границу:

$$\frac{\partial R}{\partial n} = 0. \quad (2, 4)$$

Здесь $\frac{\partial R}{\partial n}$ есть частная производная напора, взятая по нормали к границе пласта.

Рассмотрим теперь другой режим эксплуатации скважин, когда напоры на забоях скважин поддерживаются более низкими, чем при первом режиме эксплуатации. Эти напоры мы обозначим через $R_m^*(t)$. Мы также будем предполагать, что эти напоры не спускаются ниже критического, т. е.

$$R_{кр.} < R_m^*(t) \leq R_m(t). \quad (2, 5)$$

При этих условиях напор внутри пласта удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$C \frac{\partial R^*}{\partial t} - \sum_{i=1}^3 \frac{\partial}{\partial x_i} k \frac{\partial R^*}{\partial x_i} = 0 \quad (2, 6)$$

и прежним начальным условием при $t = 0$

$$R^* = R_0(x_1, x_2, x_3). \quad (2, 7)$$

На поверхности m -й скважины после ввода ее в действие выполняется условие при $t > T_m$

$$R^* = R_m^*(t). \quad (2, 8)$$

На границе пласта должно выполняться уравнение

$$\frac{\partial R^*}{\partial n} = 0. \quad (2, 9)$$

Рассмотрим теперь разность между напорами при втором и первом режимах:

$$R_1 = R^* - R. \quad (2, 10)$$

Вычитая из уравнения (2, 6) уравнение (2, 1), получим уравнение для разности

$$C \frac{\partial R_1}{\partial t} - \sum_{i=1}^3 \frac{\partial}{\partial x_i} k \frac{\partial R_1}{\partial x_i} = 0. \quad (2, 11)$$

Разность R_1 удовлетворяет условиям:

$$\text{при } t = 0 \quad R_1 = 0; \quad (2, 12)$$

на поверхности m -й скважины при $t > T_m$

$$R_1 = R^* - R \leq 0, \quad (2, 13)$$

а на границе пласта

$$\frac{\partial R_1}{\partial n} = 0. \quad (2, 14)$$

Докажем теперь, что эта разность R_1 и внутри пласта не положительна, т. е. докажем, что внутри пласта

$$R_1 \leq 0. \quad (2, 15)$$

Если воспользоваться физическими соображениями и представить себе функцию R_1 как температуру в некоторой среде, распределение которой по объему подчиняется уравнению теплопроводности (2, 11), и если, согласно (2, 13), начальная температура среды равна нулю и на внутренней поверхности скважин температура тоже поддерживается ниже нулевой, то тогда естественно ожидать, что и внутри среды температура не может подняться выше нуля.

Для математического доказательства нашего предположения допустим противное, а именно, что функция R_1 принимает внутри пласта положительные значения.

Введем в рассмотрение функцию

$$R_2 = e^{-t} R_1.$$

Отсюда имеем

$$R_1 = e^t R_2. \quad (2, 16)$$

Подставляя это выражение в формулу (2, 11), после сокращения на e^t получим

$$CR_2 + C \frac{\partial R_2}{\partial t} - k \sum_{i=1}^3 \frac{\partial^2 R_2}{\partial x_i^2} - \sum_{i=1}^3 \frac{\partial k}{\partial x_i} \cdot \frac{\partial R_2}{\partial x_i} = 0 \quad (C > 0). \quad (2, 17)$$

Согласно нашему предположению, функция R_2 тоже будет принимать внутри пласта положительные значения. Рассмотрим те значения функции R_2 , которые она принимает внутри пласта в течение некоторого промежутка времени, начиная с момента времени $t=0$ и кончая некоторым моментом $t=\tau$.

Функция R_2 , согласно предположениям, будет принимать свое максимальное положительное значение в некоторый момент времени t_1 в некоторой точке M внутри или на границе пласта.

Сначала рассмотрим, может ли существовать такая точка M внутри пласта. Если это действительно имеет место в некоторый момент времени $t_1 < \tau$, то в точке максимума в этот момент будут выполняться соотношения

$$R_2 > 0; \quad \frac{\partial R_2}{\partial x_i} = 0; \quad \frac{\partial^2 R_2}{\partial x_i^2} \leq 0; \quad \frac{\partial R_2}{\partial t} = 0 \quad (i=1, 2, 3).$$

Если же это случится в момент времени $t=\tau$, то в точке максимума последнее из предыдущих соотношений может и не выполняться, но во всяком случае будет справедливо неравенство

$$\frac{\partial R_2}{\partial t} \geq 0.$$

Из предыдущих соотношений следует, что во всяком случае в точке максимума в момент времени $t_1 \leq \tau$ будет иметь место неравенство

$$CR_2 + C \frac{\partial R_2}{\partial t} - k \sum_{i=1}^3 \frac{\partial^2 R_2}{\partial x_i^2} - \sum_{i=1}^3 \frac{\partial k}{\partial x_i} \cdot \frac{\partial R_2}{\partial x_i} > 0.$$

Но последний вывод противоречит уравнению (2, 17). Тем самым доказана абсурдность предположения, что функция R_2 принимает свое максимальное значение внутри пласта.

Рассмотрим, что получится, если предположить, что точка максимума находится на границе пласта. При этом мы будем предполагать, что граница пласта представляет собой гладкую поверхность.

Для дальнейших рассуждений предположим оси координат расположенными именно так, что третья координатная ось параллельна нормали в той точке на границе пласта, в которой функция R_2 принимает максимальное значение.

При таком расположении в силу уравнений (2, 14) и (2, 16) имеем

$$\frac{\partial R_2}{\partial x_3} = 0.$$

С другой стороны, воспользовавшись тем, что функция в нашей точке принимает максимальное значение, можно доказать, что

$$\frac{\partial R_2}{\partial x_1} = 0; \quad \frac{\partial R_2}{\partial x_2} = 0.$$

и что

$$\frac{\partial^2 R_2}{\partial x_i^2} \leq 0 \quad (i=1, 2, 3).$$

Повторяя далее предыдущие рассуждения, мы приходим таким образом к выводу, что допущение о максимуме на границе пласта также не имеет подтверждения в действительности. Как следует из предыдущего, всюду внутри пласта выполняется неравенство

$$R_1 = R^* - R \leq 0.$$

Отсюда вытекает, что $R^* \leq R$ и, следовательно, $P^* < P$.

Таким образом, при втором режиме эксплуатации, когда на забоях скважин поддерживаются более низкие давления, которые, однако, больше критического, давление внутри пласта оказывается меньше, чем при первом режиме эксплуатации. Отсюда следует, что остаток нефти в пласте при втором способе эксплуатации будет меньше, чем при первом способе. Поэтому добыча нефти из всех скважин при втором способе эксплуатации будет больше, чем при первом. Тем самым доказано, что наибольшая добыча нефти будет при том режиме, когда давления на забоях поддерживаются равными критическому давлению.

ЛИТЕРАТУРА

1. В. Н. Щелкачев. Упругий режим пластовых водонапорных систем. Гостехиздат, 1948.
2. Г. С. Салехов и Н. Ф. Иванов. К вопросу об оптимальном режиме эксплуатации нефтяных месторождений. ДАН СССР, т. 89, № 2, 1953.
3. И. А. Чарный. Подземная гидромеханика. ОГИЗ, 1948.
4. М. Маскет. Течение однородных жидкостей в пористой среде. Гостехиздат, 19.9.

Физико-технический институт
Казанского филиала АН СССР

Поступило 14 марта
1953 г.

В. А. ДАНИЛОВ

ДЕБИТ НЕФТЯНЫХ СКВАЖИН ПРИ ПРОИЗВОЛЬНОЙ ФОРМЕ КОНТУРА ПИТАНИЯ

В работе установлена эквивалентность задачи определения дебита одиночной скважины в пласте произвольной формы и задачи отыскания параметра двухсвязности в теории конформных отображений. Получена обобщенная формула Дюпюи. Задача сводится к решению нелинейного сингулярного интегрального уравнения. Выводы распространены и на случай многоскважинных систем.

Глава I

ОДИНОЧНАЯ СКВАЖИНА

§ 1. Вывод обобщенной формулы Дюпюи

1. Для подземной гидравлики представляет интерес задача определения дебитов нефтяных скважин в плоском пласте при произвольной форме контура питания, т. е. контура, на котором давление поддерживается постоянным во время эксплуатации. Для изотропного плоского пласта, вскрытого на всю глубину, проекции скорости фильтрации на основании закона Дарси выражаются следующим образом:

$$v_x = -\frac{k}{\mu} \cdot \frac{\partial P}{\partial x}, \quad v_y = -\frac{k}{\mu} \cdot \frac{\partial P}{\partial y}, \quad (I, 1)$$

где k — проницаемость пласта, μ — вязкость жидкости, P — гидродинамическое давление. Присоединяя к этим уравнениям уравнение неразрывности для плоского течения несжимаемой жидкости

$$\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} = 0, \quad (I, 2)$$

убеждаемся, что давление P — функция гармоническая. Рассмотрим сначала единичную скважину в пласте произвольной формы (фиг. 1). Известны давление P_1 на контуре питания B_1 и давление P_2 на забое скважины B_2 . Введем для удобства потенциал скоростей

$$\varphi = -\frac{k}{\mu} P, \quad (I, 3)$$

через который проекции скоростей фильтрации записываются особенно просто:

$$v_x = \frac{\partial \varphi}{\partial x}, \quad v_y = \frac{\partial \varphi}{\partial y}. \quad (I, 4)$$

Потенциал скоростей известен на границе B_1 ($\varphi_1 = -\frac{k}{\mu} P_1$) и на границе B_2 ($\varphi_2 = -\frac{k}{\mu} P_2$). Таким образом, нахождение $\varphi(x, y)$, либо $P(x, y)$ сводится к решению задачи Дирихле для двухсвязной области.

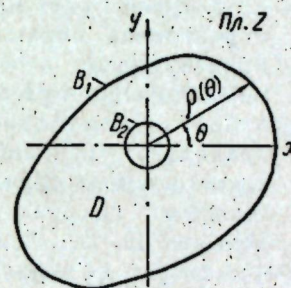
2. Введем комплексный потенциал течения в плоскости z

$$W = \varphi + i\psi. \quad (I, 5)$$

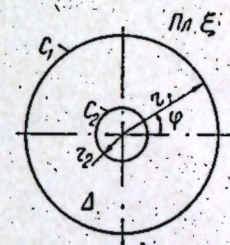
Здесь ψ — функция тока.

Заметим, что W — функция многозначная, так как при обходе в положительном направлении по контуру, охватывающему скважину B_2 , функция ψ приобретает приращение $\psi_2 - \psi_1 = -Q$, где Q — дебит скважины.

Отобразим конформно двухсвязную область течения D (фиг. 1) на круговое кольцо Δ в плоскости ξ (фиг. 2). Из теории конформных отображений известно, что функция, реализующая это отображение для двухсвязной области, границы которой не вырождены (в точки), всегда существует и определена единственным образом, если задана



Фиг. 1.



Фиг. 2.

точка границы кольца Δ , соответствующая некоторой точке границы области D (фиг. 1) [1]. Пусть при этом отображении контур питания B_1 переходит во внешнюю окружность C_1 (фиг. 2) радиуса r_1 , а скважина B_2 (фиг. 1) — во внутреннюю окружность C_2 (фиг. 2) радиуса r_2 .

Важно отметить, что отношение радиусов внутренней и внешней окружностей $q = \frac{r_2}{r_1}$ является вполне определенным для данной двухсвязной области D (фиг. 1); оно называется обычно параметром двухсвязности. Для области с невырожденными границами $0 < q < 1$.¹ Без уменьшения общности можно положить $r_1 = 1$, тогда q численно равен радиусу r_2 малой окружности. Параметр q определяет класс двухсвязной области. Лишь области одного класса, т. е. с одинаковым значением параметра двухсвязности, могут быть конформно отображены друг на друга.

Как известно, при конформном отображении сохраняется многозначность функции ψ , а следовательно, и дебит Q . К области Δ (фиг. 2) можно непосредственно применить формулу Дюпюи для дебита скважины, расположенной в центре кругового контура питания, где на

¹ Иногда пользуются величиной $M = \frac{1}{q}$, так называемым модулем двухсвязной области. Очевидно, для области с невырожденными границами $1 < M < \infty$.

окружности C_1 — давление P_1 ; на C_2 — давление P_2 . В итоге получаем следующее выражение для дебита:

$$Q = \frac{2\pi k}{\mu} \cdot \frac{P_1 - P_2}{\ln \frac{r_1}{r_2}} = \frac{2\pi k}{\mu} \cdot \frac{P_1 - P_2}{\ln \frac{1}{q}} \quad (1, 6)$$

К тому же выражению можно придти, составляя условие разрешимости задачи определения функции ψ в кольцевой области.

Основным выводом из формулы (1, 6) является то, что определение дебита скважины при контуре питания произвольной формы сводится к задаче отыскания параметра двухсвязности рассматриваемой области.

Имеющиеся исследования по этому вопросу нельзя считать правильными без оговорок (см., например, [2]), так как в них, как правило, не учитывалась двухсвязность области. При расчете дебитов укрупненных скважин это может привести к значительным погрешностям.

3. Далее будет показано, что определение параметра q при произвольном контуре питания сводится к решению нелинейного сингулярного интегрального уравнения. Можно также воспользоваться приближенным графоаналитическим методом Н. В. Мелентьева [3].

В ряде частных случаев, когда отображающая функция $\xi(z)$ находится просто, вычисление параметра q не составляет особого труда. Так, для скважины радиуса ρ , расположенной в круговом пласте радиуса R на расстоянии a от центра пласта (фиг. 3), для параметра q имеем формулу [4]

$$q = \frac{2\rho R}{R^2 + \rho^2 - a^2 + \sqrt{(R^2 - \rho^2 - a^2) - 4\rho^2 a^2}}$$

Для скважины радиуса ρ , отстоящей от прямолинейного контура питания на расстоянии δ (фиг. 4) [4],

$$q = \frac{\rho}{\delta + \sqrt{\delta^2 - \rho^2}}$$

4. В литературе по подземной гидравлике встречается понятие приведенного радиуса питания, означающего радиус такого кругового пласта, в котором скважина, расположенная в центре, имеет тот же дебит, что и скважина в рассматриваемом пласте. При этом давления на скважине и контуре питания одинаковы в обоих случаях [4]. Тогда для приведенного пласта имеем

$$Q = \frac{2\pi k}{\mu} \cdot \frac{P_1 - P_2}{\ln \frac{R_{\text{пр.}}}{r_2}}$$

¹ Мощность пласта всюду принимается равной единице.

Приравнивая это выражение дебиту, вычисленному по формуле (1, 6) получим

$$\frac{1}{q} = \frac{R_{\text{пр.}}}{r_2}, \text{ или } R_{\text{пр.}} = \frac{r_2}{q} \quad (1, 7)$$

Отсюда ясно, что задача определения приведенного радиуса питания эквивалентна задаче отыскания параметра q .

§ 2. Аналитический метод определения параметра двухсвязности

1. Рассмотрим случай конечного контура питания произвольной формы (фиг. 1).¹ Потребуем, чтобы при конформном отображении контур питания B_1 (фиг. 1) в пл. z перешел в окружность единичного радиуса C_1 в пл. ξ (фиг. 2), а контур скважины B_2 (фиг. 1) в пл. z — в окружность C_2 (фиг. 2) некоторого, подлежащего определению, радиуса q в плоскости ξ . Для единственности отображающей функции (см. § 1) потребуем, чтобы точка контура B_1 (фиг. 1), лежащая на вещественной оси, перешла в точку внешней границы C_1 . Введем полярные координаты ρ и θ в пл. z (фиг. 1), причем будем вести отсчет θ от минимального значения $\rho = r$ на контуре B_1 .

В комплексной форме уравнение контура B_1 имеет вид

$$z = \rho(\theta) \cdot e^{i\theta}$$

Представим его в виде

$$z = r e^{\mu_1(\theta)} + i\theta, \quad (1, 8)$$

где $\mu_1(\theta)$ — известная функция полярного угла θ :

$$\mu_1(\theta) = \ln \frac{\rho(\theta)}{r}, \quad r = \rho(0).$$

Контур скважины B_2 дается уравнением

$$z = r_c e^{i\theta} \text{ или } z = r \cdot e^{\mu_2 + i\theta}, \quad (1, 9)$$

где $\mu_2 = \ln \frac{r_c}{r} = \text{const.} < 0$, так как $\frac{r_c}{r} < 1$.

В плоскости ξ контур C_1 определен соотношением

$$\xi = e^{i\varphi}, \quad (1, 10)$$

где φ — полярный угол (фиг. 2). Контур C_2 дается формулой

$$\xi = q e^{i\varphi} = e^{-\tau + i\varphi}. \quad (1, 11)$$

Здесь $\tau = -\ln q = \text{const.} > 0$, или

$$q = e^{-\tau}. \quad (1, 12)$$

Возьмем далее функцию, конформно преобразующую область Δ в область D , в виде [5]:

$$z = r \xi e^{h(\xi)}, \quad (1, 13)$$

где $\xi = e^{\tau + i\varphi}$, причем $q \leq e^{\tau} \leq 1$, а $h(\xi)$ представляет собой ряд Лорана с комплексными коэффициентами

$$h(\xi) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \xi^n + a_{-n} \xi^{-n}). \quad (1, 14)$$

¹ Случай контура питания, уходящего в бесконечность, приводится к рассматриваемому с помощью дробно-линейного преобразования.

Представим комплексные коэффициенты в виде

$$\left. \begin{aligned} a_0 &= A_0 + iB_0 \\ a_n &= A_n + iB_n \\ a_{-n} &= A_{-n} + iB_{-n} \end{aligned} \right\} \quad (I, 15)$$

Приравнивая в уравнении (I, 13) действительные и мнимые части, для внешних контуров B_1 и C_1 найдем

$$\mu_1 = A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} [(A_n + A_{-n}) \cos n\varphi - (B_n - B_{-n}) \sin n\varphi], \quad (I, 16)$$

$$(\theta - \varphi)_1 = B_0 + \sum_{n=1}^{\infty} [(B_n + B_{-n}) \cos n\varphi + (A_n - A_{-n}) \sin n\varphi]. \quad (I, 17)$$

Для внутренних контуров получаем

$$\mu_2 + \tau = A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} [(A_n q^n + A_{-n} q^{-n}) \cos n\varphi - (B_n q^n - B_{-n} q^{-n}) \sin n\varphi], \quad (I, 18)$$

$$(\theta - \varphi)_2 = B_0 + \sum_{n=1}^{\infty} [(B_n q^n + B_{-n} q^{-n}) \cos n\varphi + (A_n q^n - A_{-n} q^{-n}) \sin n\varphi]. \quad (I, 19)$$

Определяя отсюда коэффициенты A и B как коэффициенты ряда Фурье с учетом условия $\xi = 1$ при $z = r$, имеем

$$\left. \begin{aligned} A_n &= \frac{1}{\pi(1-q^{2n})} \int_0^{2\pi} \mu_1 \cos n\varphi d\varphi; & A_{-n} &= -\frac{q^{2n}}{\pi(1-q^{2n})} \int_0^{2\pi} \mu_1 \cos n\varphi d\varphi; \\ B_n &= -\frac{1}{\pi(1-q^{2n})} \int_0^{2\pi} \mu_1 \sin n\varphi d\varphi; & B_{-n} &= -\frac{q^{2n}}{\pi(1-q^{2n})} \int_0^{2\pi} \mu_1 \sin n\varphi d\varphi; \\ A_0 &= \mu_2 + \tau = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \mu_1 d\varphi; & B_0 &= \frac{1}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1+q^{2n}}{1-q^{2n}} \int_0^{2\pi} \mu_1 \sin n\varphi d\varphi. \end{aligned} \right\} \quad (I, 20)$$

Подставляя их значения в уравнение (I, 17), после ряда преобразований получим соотношение между полярными углами θ и φ на контурах B_1 и C_1 [5, 6]:

$$\theta - \varphi = \frac{1}{2\pi^2} \int_0^{2\pi} \mu_1(\theta) \left[\frac{\vartheta_1'(\frac{\varphi'}{2\pi})}{\vartheta_1(\frac{\varphi'}{2\pi})} - \frac{\vartheta_1'(\frac{\varphi'-\varphi}{2\pi})}{\vartheta_1(\frac{\varphi'-\varphi}{2\pi})} \right] d\varphi'. \quad (I, 21)$$

Здесь $\mu_1(\theta)$ — известная функция угла θ , ϑ_1 и ϑ_1' — функция Якоби и ее производная. Имеют место разложения

$$\left. \begin{aligned} \frac{\vartheta_1'(\frac{\varphi'}{2\pi})}{\vartheta_1(\frac{\varphi'}{2\pi})} &= \pi \operatorname{ctg} \frac{\varphi'}{2} + 4\pi \sum_{n=1}^{\infty} \frac{q^{2n}}{1-q^{2n}} \sin n\varphi', \\ \frac{\vartheta_1'(\frac{\varphi'-\varphi}{2\pi})}{\vartheta_1(\frac{\varphi'-\varphi}{2\pi})} &= \pi \operatorname{ctg} \frac{\varphi'-\varphi}{2} + 4\pi \sum_{n=1}^{\infty} \frac{q^{2n}}{1-q^{2n}} \sin n(\varphi'-\varphi). \end{aligned} \right\} \quad (I, 22)$$

Отсюда ясно, что соотношение (I, 21) представляет собой нелинейное сингулярное интегральное уравнение с несимметричным ядром. Связь между параметром q и функцией $\mu_1(\theta)$ дается условием однозначности, отображающей функции — выражением для A_0 (I, 20), которое с учетом (I, 12) можно записать так:

$$\mu_2 - \ln q = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \mu_1(\theta) d\varphi \quad (I, 23)$$

или

$$q = \frac{r_c}{r} \cdot e^{-\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \mu_1(\theta) d\varphi} \quad (I, 23')$$

Решая уравнение (I, 21) совместно с (I, 23), определим $\theta(\varphi)$ и q .

2. Ядро уравнения (I, 21) зависит от φ , φ' и q , что следует из разложения (I, 22). Вводя поэтому обозначение

$$\frac{\vartheta_1'(\frac{\varphi'}{2\pi})}{\vartheta_1(\frac{\varphi'}{2\pi})} - \frac{\vartheta_1'(\frac{\varphi'-\varphi}{2\pi})}{\vartheta_1(\frac{\varphi'-\varphi}{2\pi})} = K(\varphi, \varphi'; q),$$

запишем

$$\theta(\varphi) - \frac{1}{2\pi^2} \int_0^{2\pi} K(\varphi, \varphi'; q) \mu_1[\theta(\varphi')] d\varphi' = \varphi. \quad (I, 24)$$

Если решить уравнение (I, 24), то найдем зависимость θ от φ и от параметра q :

$$\theta = \theta(\varphi, q). \quad (I, 25)$$

Подставляя полученную зависимость в $\mu_1(\theta)$, получим $\mu_1(\varphi, q)$. После этого можно вычислить интеграл

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \mu_1(\theta) d\varphi = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \mu_1(\varphi, q) d\varphi = L(q). \quad (I, 26)$$

Тогда условие (I, 23) превращается в уравнение, корнем которого и будет искомое значение параметра q :

$$\mu_2 - \ln q - L(q) = 0. \quad (I, 27)$$

Однако получить решение интегрального уравнения (I, 21) в виде явной функции аргумента φ и произвольного параметра q , как предполагалось в формуле (I, 25), практически не представляется возможным. Поэтому следует избрать иной путь.

3. Можно оценить интервал, на котором лежит искомое значение q . Минимальное значение радиуса, описывающего контур B_1 , равно r , максимальное равно R . Тогда, очевидно,

$$r \leq \rho(\theta) \leq R,$$

или

$$1 \leq \frac{\rho(\theta)}{r} \leq \frac{R}{r}.$$

Логарифмируя, получим

$$0 \leq \mu_1(0) \leq \ln \frac{R}{r}.$$

Интегрируя далее по φ в пределах от 0 до 2π , приходим к неравенству

$$0 < \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \mu_1(0) d\varphi < \ln \frac{R}{r},$$

$$0 > -\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \mu_1(0) d\varphi > -\ln \frac{R}{r}.$$

Потенцируя это неравенство и умножая все его члены на $\frac{r_c}{r}$, с учетом (I, 23') получим

$$\frac{r_c}{r} > q > \frac{r_c}{R}. \quad (I, 28)$$

4. Делим интервал $\frac{r_c}{R} \div \frac{r_c}{r}$ на k частей. Задаваясь последовательными значениями $q_1 = \frac{r_c}{R}$, $q_2, \dots, q_k, \dots, q_{k+1} = \frac{r_c}{r}$, лежащими на замкнутом интервале, решим для каждого из них уравнение (I, 21) методом последовательных приближений. Это возможно, когда контур B_1 звездный, т. е. $\rho(\theta)$ — однозначная функция. Кроме того, на $\rho(\theta)$ налагаются некоторые ограничения.¹ В качестве нулевого приближения можно положить $\theta = \varphi$, так как приращения θ и φ при обходе контуров B_1 и C_2 одинаковы и равны 2π .²

Особенно удобно для расчетов представить $\mu_1(\theta)$ в виде ряда Фурье

$$\mu_1(\theta) = \frac{\alpha_0}{2} + \sum_{m=1}^{\infty} (\alpha_m \cos m\theta + \beta_m \sin m\theta). \quad (I, 29)$$

Подставляя в него нулевое приближение для θ , находим $\mu_1^{(1)}(\varphi)$ в первом приближении. Для нахождения первого приближения $\theta^{(1)}(\varphi)$ можно либо вычислить по $\mu_1^{(1)}(\varphi)$ и q_1 интеграл в правой части уравнения (I, 21), либо вычислить коэффициенты (I, 20) и подставить их в соотношение (I, 17). Подставляя далее $\theta^{(1)}(\varphi)$ в $\mu_1(\theta)$, найдем второе приближение $\mu_1^{(2)}(\varphi)$, а по нему в том же порядке отыскивается $\theta^{(2)}(\varphi)$. Просчитанные примеры показывают, что на практике процесс последовательных приближений сходится весьма быстро, т. е. функция $\theta^{(k)}(\varphi)$ начинает совпадать с $\theta^{(k+1)}(\varphi)$ при малых значениях k (обычно достаточно одной, иногда двух степеней приближения).

Скорость сходимости зависит от того, насколько удачно взято исходное приближение. Если полагать сначала $\theta = \varphi$, то это означает, что сходимость тем лучше, чем ближе контур B_1 к окружности.

5. Так находится зависимость $\theta(\varphi)$ при определенном q , которую обозначим через $\theta_q(\varphi)$. Подобным путем отыскиваем решения для остальных выбранных значений параметра q на интервале (I, 22). Решение

¹ Сходимость процесса в самое последнее время была исследована Б. И. Гехтом [6].

² Если известна функция, осуществляющая конформное отображение односвязной области, ограниченной B_1 , на внутренность круга C_1 при условиях $\xi = 0$ при $z = 0$ и $\xi = 1$ при $z = r$, то лучше в качестве нулевого приближения принять зависимость $\theta(\varphi)$, которая дается этой функцией.

интегрального уравнения является непрерывной функцией параметра q , что непосредственно видно из выражений (I, 22), либо (I, 17). Вычислим по каждому из полученных решений функцию

$$P(q_i) = \mu_2 - \ln q_i - \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \mu_1[\theta_{q_i}(\varphi)] d\varphi. \quad (I, 30)$$

Затем отложим по оси абсцисс значения q_i , а по оси ординат — соответствующие значения $P(q_i)$. Проведем через полученные точки непрерывную кривую $P(q)$. В рассматриваемом интервале значений q кривая $P(q)$ имеет с осью абсцисс одну общую точку, которая и дает искомое значение параметра q . В самом деле, выражение (I, 23) показывает, что для искомой величины q функция $P(q) = 0$. $P(q)$ обращается в нуль на взятом интервале в силу оценки (I, 28). То, что она обращается в нуль лишь один раз, следует из теоремы о единственности отображающей функции (§ 1, п. 2).

Описанный способ нахождения q представляет, по сути дела, численное решение задачи путем, указанным в п. 2 § 2.

Способ этот предполагает существование единственного непрерывного решения уравнения (I, 21) при всех значениях q , взятых на интервале $\frac{r_c}{R} \div \frac{r_c}{r}$, причем условие (I, 23) не удовлетворяется.

Нетрудно показать, что вопрос о существовании и единственности решения эквивалентен вопросу о существовании и единственности функции, реализующей конформное отображение на круговое кольцо кольцевой области, ограниченной снаружи контуром B_1 , а изнутри окружностью радиуса, отличного от r_c , причем при $z = r$ $\xi = 1$. Положительный ответ на него дает теорема, приведенная в п. 2 § 1.

6. Можно предложить иной метод решения интегрального уравнения (I, 21) при условии (I, 23). Далее приводится алгоритм процесса последовательных приближений, в котором одновременно уточняются как зависимость θ от φ , так и значение q .

Подставив исходное приближение для $\theta(\varphi)$ (например, $\theta = \varphi$) в функцию $\mu_2(\theta)$, находим $\mu_1^{(1)}(\varphi)$. Затем по формуле (I, 23') определяем значение параметра q в первом приближении:

$$q^{(1)} = \frac{r_c}{r} e^{-\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \mu_1^{(1)}(\varphi) d\varphi}. \quad (I, 31)$$

Имея $q^{(1)}$ и $\mu_1^{(1)}(\varphi)$, по формулам (I, 20) отыскиваем коэффициенты Фурье в первом приближении. Подставляя их в выражение (I, 17), получаем зависимость $\theta^{(1)}(\varphi)$. То же можно получить, подставляя $q^{(1)}$ и $\mu_1^{(1)}(\varphi)$ в правую часть уравнения (I, 21) и вычисля определенный интеграл. По $\theta^{(1)}(\varphi)$ вычисляем следующее приближение $\mu_1^{(2)}(\varphi)$, а с его помощью по формуле (I, 23') и $q^{(1)}$. Таким же перекрестным процессом находят последующие приближения.

Сравнивая первый и второй методы, можно видеть, что второй метод требует меньшей вычислительной работы, так как по нему последовательные приближения вычисляются лишь один раз. Однако при этом предполагается обеспеченной сходимость по двум направлениям: к истинному значению q и к зависимости $\theta(\varphi)$, в то время как для применения первого метода достаточно лишь сходимости к $\theta(\varphi)$.

7. В случае, когда расстояние от скважины до любой точки контура питания весьма велико сравнительно с радиусом скважины, т. е. сква-

жина не укрупненная, вышеприведенные расчеты существенно упрощаются.

Используя то, что $\mu_1(\theta)$ — неотрицательная функция ($\mu_1(\theta) = \ln \frac{\rho(\theta)}{r} \geq 0$), и оценку (I, 28) для параметра q , можно оценить в правой части уравнения (I, 21) часть, зависящую от q . Получаем

$$\theta - \varphi = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \mu_1(\theta) \left[\operatorname{ctg} \frac{\varphi'}{2} - \operatorname{ctg} \frac{\varphi' - \varphi}{2} \right] d\varphi' + M, \quad (I, 32)$$

где

$$|M| < \frac{8q_0^2}{(1-q_0)^2(1+q_0)} \ln \frac{R}{r}.$$

(здесь $q_0 = \frac{r_c}{r}$).

Напомним, что r и R — минимальное и максимальное расстояния точек контура питания от центра скважины. Возьмем, например, неблагоприятный случай: $r_c = 0.1$ м; $r = 500$ м, $R = 5000$ м. При этих значениях

$$q_0 = 0.0002 \text{ и } |M| < 7.35 \cdot 10^{-7}.$$

Очевидно, членом M в уравнении (I, 32) можно пренебречь без ущерба для точности, необходимой в инженерных расчетах.

Итак, уравнение (I, 21) заменяется более простым, куда не входит искомый параметр q :

$$\theta - \varphi = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \mu_1(\theta) \left[\operatorname{ctg} \frac{\varphi'}{2} - \operatorname{ctg} \frac{\varphi' - \varphi}{2} \right] d\varphi'. \quad (I, 33)$$

Зависимость $\theta(\varphi)$ находится из уравнения (I, 32) итеративным процессом,¹ а затем, подставляя $\theta(\varphi)$ в соотношение (I, 23'), определяем q . Можно, разумеется, отыскивать q и как корень функции $P(q)$, строя ее по точкам

$$P(q_i) = \mu_2 - \ln q_i - \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \mu_1[\theta(\varphi)] d\varphi,$$

где q_i — точки, которые следует брать на интервале (I, 28).

Можно показать, что вычисление q по зависимости $\theta(\varphi)$, полученной из приближенного соотношения (I, 33), равносильно определению его по формуле

$$q = r_c \left| \frac{d\xi}{dz} \right|_{z=0}, \quad (I, 34)$$

вытекающей из свойств конформного отображения малых элементов. При этом следует иметь в виду, что в формуле (I, 13) $h(\xi)$ выражается не рядом Лорана, а рядом Тейлора:

$$h(\xi) = A_0 + iB_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (A_n + iB_n) \xi^n, \quad (I, 35)$$

так как при $q=0$ из формул (I, 20) вытекает, что коэффициенты при отрицательных степенях ξ обращаются в нули. Это означает, что функ-

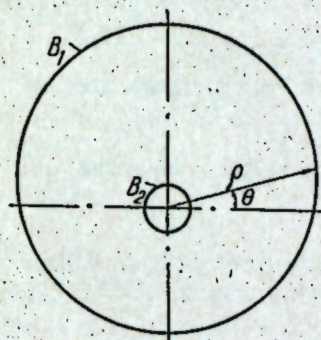
¹ О сходимости процесса см. работы [6-9], где исследуются уравнения, подобные (I, 33).

ция $z(\xi)$ осуществляет конформное отображение односвязной области, ограниченной единичным кругом C_1 , на односвязную область, ограниченную B_1 .

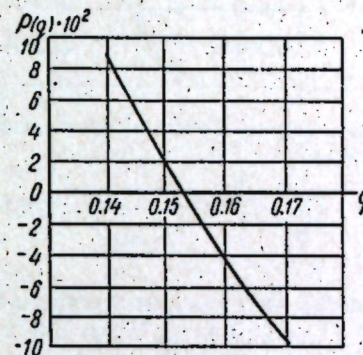
§ 3. Примеры определения дебита

1. Пусть имеется контур питания, уравнение которого $\rho = 10\,000 e^{0.2 \sin \theta}$ (в метрах) (фиг. 5), и данные следующие:

радиус укрупненной скважины $r_c = 1500$ м;
мощность пласта $h = 5$ м;
давление на контуре питания $P_1 = 160$ атм.;
давление на скважине $P_2 = 155$ атм.;
проницаемость $k = 1$ дарси;



Фиг. 5.



Фиг. 6.

вязкость жидкости $\mu = 1$ сантипуаз.
По формуле (I, 6) при мощности h

$$Q = \frac{2\pi kh}{\mu} \cdot \frac{P_1 - P_2}{\ln \frac{1}{q}} = 15\,710 \frac{1}{\ln \frac{1}{q}} \text{ см}^3/\text{сек.}$$

а. Определение q первым методом. $\mu_1(\theta) = 0.2 \sin \theta$; $R = 10\,000 e^{0.2} = 12\,220$ м; $r = 10\,000 e^{-0.2} = 8180$ м.

По (I, 28) $0.123 < q < 0.183$. Вычислим $\theta(\varphi)$ для четырех значений: $q_1 = 0.14$; $q_2 = 0.15$; $q_3 = 0.16$; $q_4 = 0.17$. Приведем сводку расчетов (табл. 1).

Наносим четыре полученных значения $P^{(1)}(q_i)$ на график (фиг. 6) и проводим через четыре точки плавную кривую. Точка пересечения ее с осью абсцисс дает значение q в первом приближении: $q^{(1)} = 0.153$. Кривая $P(q)$ в следующем приближении дает то же значение для q с точностью до 0.001.

б. Определение q вторым методом. Снова полагаем $\theta^{(0)} = \varphi$, следовательно, $\mu_1^{(1)}(\varphi) = 0.2 \sin \varphi$;

$$q^{(1)} = \frac{r_c}{\rho(0)} \cdot e^{-\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} 0.2 \sin \varphi d\varphi} = 0.15; \quad \theta^{(1)}(\varphi) = \varphi + 0.2092 - 0.2092 \cos \varphi;$$

$$\mu_1^{(2)}(\varphi) = 0.2 \sin(\varphi + 0.2092 - 0.2092 \cos \varphi); \quad q^{(2)} = \frac{r_c}{\rho(0)} \cdot e^{-\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \mu_1^{(2)}(\varphi) d\varphi} = 0.153.$$

Таблица 1

η	0.14	0.15	0.16	0.17
$\theta^{(0)}(\varphi)$	φ	φ	φ	φ
$\mu_1^{(1)}(\varphi)$	$0.2 \sin \varphi$	$0.2 \sin \varphi$	$0.2 \sin \varphi$	$0.2 \sin \varphi$
$\theta^{(1)}(\varphi)$	$\varphi + 0.2080 - 0.2080 \cos \varphi$	$\varphi + 0.2092 - 0.2092 \cos \varphi$	$\varphi + 0.2106 - 0.2106 \cos \varphi$	$\varphi + 0.2120 - 0.2120 \cos \varphi$
$\mu_1^{(2)}(\varphi)$	$0.2 \sin(\varphi + 0.2080 - 0.2080 \cos \varphi)$	$0.2 \sin(\varphi + 0.2092 - 0.2092 \cos \varphi)$	$0.2 \sin(\varphi + 0.2106 - 0.2106 \cos \varphi)$	$0.2 \sin(\varphi + 0.2120 - 0.2120 \cos \varphi)$
$P^{(1)}(q)$	0.08934	0.02034	-0.04404	-0.0991

Последующие приближения дают те же три первые цифры после точки. Итак:

$$Q = 15710 \frac{1}{\ln \frac{1}{0.153}} = 8365 \text{ см}^3/\text{сек.} = 722.7 \text{ м}^3/\text{сутки.}$$

2. Контур питания дан уравнением $\rho = 1000e^{0.5 \sin \theta}$ м (фиг. 7); $r_c = 0.1$ м; $h = 5$ м; $P_1 = 150$ атм.; $P_2 = 130$ атм.; $k = 0.5$ дарси; $\mu = 1$ сантипуаз.

$$Q = \frac{31416}{\ln \frac{1}{q}} \text{ см}^3/\text{сек.}$$

а. Определение q первым методом. $\mu_1(\theta) = 0.5 \sin \theta$; $R = 1648.7$ м; $r = 606.5$ м.

$$0.6065 \cdot 10^{-4} < q < 1.6487 \cdot 10^{-4}.$$

В табл. 2 приведена сводка расчетов.

Таблица 2

η	$0.7 \cdot 10^{-4}$	$1.0 \cdot 10^{-4}$	$1.3 \cdot 10^{-4}$	$1.6 \cdot 10^{-4}$
$\theta^{(0)}(\varphi)$	φ			
$\mu_1^{(1)}(\varphi)$	$0.5 \sin \varphi$			
$\theta^{(1)}(\varphi)$	$\varphi + 0.5 - 0.5 \cos \varphi$			
$P^{(1)}(q_i)$	0.4632	0.1065	-0.1558	-0.3635

Строим на графике (фиг. 8) кривую $P^{(1)}(q)$. По ней находим $q^{(1)} = 1.12 \cdot 10^{-4}$. То же значение дают последующие приближения.

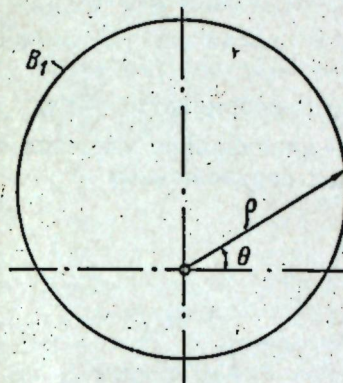
б. Определение q вторым методом. $\theta^{(0)}(\varphi) = \varphi$; $\mu_1^{(1)}(\varphi) = 0.5 \sin \varphi$; $q^{(1)} = \frac{r_c}{\rho(0)} \cdot e^{-\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \mu_1^{(1)}(\varphi) d\varphi} = 1.0 \cdot 10^{-4}$;

$$\theta^{(1)}(\varphi) = \varphi + 0.5 - 0.5 \cos \varphi; \mu_1^{(2)}(\varphi) = 0.5 \sin(\varphi + 0.5 - 0.5 \cos \varphi);$$

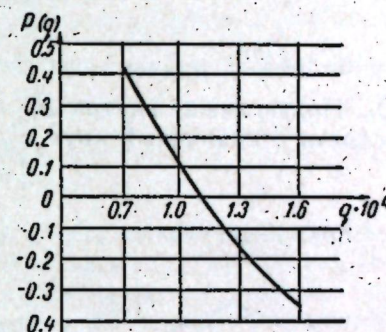
$$q^{(2)} = \frac{r_c}{\rho(0)} \cdot e^{-\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \mu_1^{(2)}(\varphi) d\varphi} = 1.112 \cdot 10^{-4};$$

$$\theta^{(2)}(\varphi) = \varphi + 0.4743 - 0.4337 \cos \varphi - 0.0586 \cdot \cos 2\varphi + 0.018 \cos 3\varphi + -0.2180 \sin \varphi - 0.0964 \sin 2\varphi - 0.0049 \sin 3\varphi;$$

$$q^{(3)} = 1.12 \cdot 10^{-4},$$



Фиг. 7.



Фиг. 8.

что совпадает с значением q , найденным первым методом. Таким образом,

$$Q = \frac{31416}{\ln \frac{1}{1.12 \cdot 10^{-4}}} = 3453 \text{ см}^3/\text{сек.} = 298 \text{ м}^3/\text{сутки.}$$

Глава II

МНОГОСКВАЖИННАЯ СИСТЕМА

В настоящей главе будет рассмотрена задача определения дебитов n скважин, расположенных в плоском пласте с контуром питания произвольной формы. Жидкость, как и ранее, предполагается несжимаемой.

§ 4. Отображение на единичный круг

1. Сформулируем точнее постановку задачи. Имеется контур питания B_0 произвольной формы, внутри которого размещены n скважин с координатами центров z_1, \dots, z_n , радиусами r_1, \dots, r_n и давлениями на забоях соответственно P_{c1}, \dots, P_{cn} , причем эти давления могут быть функциями времени (фиг. 9). Давление на контуре питания B_0 равно P_n . Требуется определить дебиты скважин.

Введем потенциал скоростей $\varphi = -\frac{k}{\mu} P$. Тогда на контуре питания B_0 имеем

$$\varphi_n = -\frac{k}{\mu} P_n = \text{const.}, \quad (\text{II}, 1)$$

а на k -й скважине

$$\varphi_{ck}(t) = -\frac{k}{\mu} P_{ck}(t). \quad (k=1, 2, \dots, n) \quad (\text{II}, 2)$$

Составим комплексный потенциал течения

$$W(z) = \varphi(x, y) + i\psi(x, y), \quad (II, 3)$$

где $W(z)$ — функция многозначная, так как при обходе вокруг k -й скважины его мнимая часть ψ получает приращение $\psi_{1k} - \psi_{2k} = -Q_k$, где Q_k — дебит k -й скважины. Далее, отображим конформно область, ограниченную контуром B_0 , на внутренность единичного круга в плоскости ξ (фиг. 10).

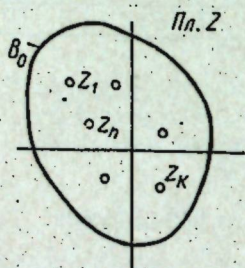
2. Отображающая функция может быть найдена, например, следующим методом. Как и в гл. I, запишем уравнение контура B_0 в следующем виде:

$$z = e^{-\mu(\theta) + i\theta}, \quad (II, 4)$$

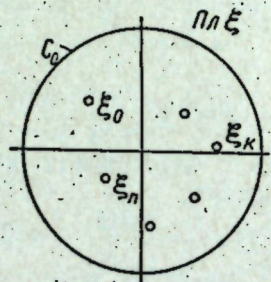
где $\mu(\theta) = \ln \frac{\rho(\theta)}{r}$, причем ρ и θ — полярные координаты точек контура B_0 . Полюс лежит внутри B_0 , $r = \rho(0)$ — минимальное значение $\rho(0)$. В плоскости ξ единичный круг C_0 определен соотношением

$$\xi = e^{i\gamma}, \quad (II, 5)$$

где γ — полярный угол.



Фиг. 9.



Фиг. 10.

Для единственности отображающей функции потребуем, чтобы $z=0$ при $\xi=0$ и $z=r$ при $\xi=1$. Будем искать отображающую функцию, как и в гл. I, в виде

$$z = r\xi e^{h(\xi)}, \quad (II, 6)$$

где $h(\xi)$ — ряд Тейлора с комплексными коэффициентами

$$h(\xi) = A_0 + iB_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (A_n + iB_n)\xi^n. \quad (II, 7)$$

Из соответствия точек контуров B_0 и C_0 найдем

$$\left. \begin{aligned} \mu(\theta) &= A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (A_n \cos n\gamma - B_n \sin n\gamma), \\ \theta - \gamma &= B_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (B_n \cos n\gamma - A_n \sin n\gamma). \end{aligned} \right\} \quad (II, 8)$$

Отсюда

$$A_0 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \mu d\gamma; \quad A_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \mu \cos n\gamma d\gamma; \quad B_n = -\frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \mu \sin n\gamma d\gamma. \quad (II, 9)$$

Условие $z=1$ при $\xi=1$ дает $B_0 = -\sum_{n=1}^{\infty} B_n$. Подставляя полученные выражения для коэффициентов в соотношение (II, 8), получаем для определения $\theta(\gamma)$ нелинейное сингулярное интегральное уравнение с несимметричным ядром

$$\theta - \gamma = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \mu(\theta') \left[\operatorname{ctg} \frac{\gamma'}{2} - \operatorname{ctg} \frac{\gamma - \gamma'}{2} \right] d\gamma'. \quad (II, 10)$$

Отсюда методом последовательных приближений определяем $\theta(\gamma)$.¹ Подставляя эту зависимость в $\mu(\theta)$, найдем $\mu(\gamma)$, а затем и все коэффициенты Фурье, после чего будет известна отображающая функция (II, 6). Отметим, что если вместо условия $z=r$ при $\xi=1$ наложить условие $\frac{dz}{d\xi} \Big|_{\xi=0} = 1$, то получаем уравнение с симметричным ядром

$$\theta - \gamma = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \mu(\theta') \operatorname{ctg} \frac{\gamma - \gamma'}{2} d\gamma'.$$

Зная отображающую функцию $z(\xi)$, можно найти координаты точек ξ_1, \dots, ξ_n , соответствующие центрам скважин z_1, \dots, z_n . Так как радиусы скважин весьма малы сравнительно с размерами контура B_0 , то изменением формы скважин при отображении на плоскость ξ можно пренебречь, полагая их окружностями и в плоскости ξ (см. § 2 гл. I). Радиусы скважин изменяются как линейные размеры элементов при конформном преобразовании. Обозначая радиус k -й скважины в пл. ξ через ρ_k , имеем

$$\rho_k = r_k \left| \frac{dz}{d\xi} \right|_{\xi=\xi_k}. \quad (II, 11)$$

При конформном преобразовании $z(\xi)$ точка $z=0$, переходящая в $\xi=0$, вообще говоря, не совпадает с центром ни одной из скважин.

Таким образом, в пл. ξ имеем n скважин радиусов ρ_1, \dots, ρ_n , с координатами точек внутри скважин ξ_k ($k=1, \dots, n$).

§ 5. Сведение задачи к системе линейных уравнений

1. Следующий этап заключается в отображении области, ограниченной единичной окружностью C_0 (фиг. 10) и окружностью каждой из скважин в пл. ξ на кольцевую область, ограниченную концентрическими окружностями. При этом переведем точку ξ_k в центр круга $\zeta_k=0$ (фиг. 11), а точку $\xi=1$ — в точку $\zeta_k=1$. Требуя при этом, чтобы производная $\zeta'_k(\xi_k)$ была положительна, получим отображающую дробно-линейную функцию в виде

$$\zeta_k(\xi) = \frac{\xi - \xi_k}{1 - \bar{\xi}_k \xi}. \quad (II, 12)$$

¹ Сходимость процесса доказана для звездного контура при следующих условиях (см. [8, 9]):

$$\frac{a}{1+\varepsilon} \leq \rho(\theta) \leq a(1+\varepsilon); \quad \left| \frac{\rho'(\theta)}{\rho(\theta)} \right| = |\mu'(\theta)| \leq \varepsilon,$$

где a — положительная постоянная и $0 < \varepsilon < 1$.

Здесь допущено следующее приближение. Точка ζ_k^* , при переходе которой в точку $\zeta_k = 0$ окружность радиуса ρ_k в пл. ξ переходит в окружность радиуса q_k , концентрическую с единичной в пл. ζ_k , лежит внутри окружности ρ_k . Точка ξ_k лежит также внутри окружности ρ_k , но в общем случае не совпадает с ζ_k^* . Однако ввиду малости ρ_k можно с высокой степенью точности положить $\zeta_k^* = \xi_k$, как и принято в формуле (II, 12). Не повторяя ранее приведенных рассуждений, найдем радиус скважины, помещаемой в центр:

$$q_k = \rho_k \left| \frac{d\zeta_k}{d\xi} \right|_{\xi=\xi_k} = \rho_k \left| \frac{d}{d\xi} \left(\frac{\xi - \xi_k}{1 - \bar{\xi}_k \xi} \right) \right|_{\xi=\xi_k} = \frac{\rho_k}{1 - |\xi_k|^2}. \quad (\text{II, 13})$$

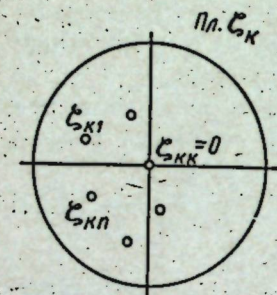
При преобразовании (II, 12) координаты ξ_i ($i \neq k$) остальных $n-1$ скважин переходят во внутренние точки этих скважин в плоскости ζ_k (фиг. 11):

$$\zeta_{ki} = \zeta_k(\xi_i) = \frac{\xi_i - \xi_k}{1 - \bar{\xi}_k \xi_i} \quad (i \neq k). \quad (\text{II, 14})$$

Комплексный потенциал $W(\zeta_k)$ — функция многозначная, ввиду его многозначности в плоскости z , сохраняющейся при конформных преобразованиях.

2. Составим функцию $F(\zeta_k)$, однозначную и голоморфную внутри кольца, ограниченного изнутри окружностью радиуса q_k , а снаружи — единичной окружностью

$$F(\zeta_k) = \Phi + i\Psi = W(\zeta_k) + \sum_{i=1}^n \frac{Q_i}{2\pi} \ln(\zeta_k - \zeta_{ki}) \quad (i=1, 2, \dots, n). \quad (\text{II, 15})$$



Фиг. 11.

Обозначим полярный угол в плоскости ζ_k через λ . Тогда вещественная часть $F(\zeta_k)$ на единичной окружности $e^{i\lambda}$ равна

$$\Phi_1(\lambda) = \varphi_n + \sum_{i=1}^n \frac{Q_i}{2\pi} \ln |e^{i\lambda} - \zeta_{ki}|. \quad (\text{II, 16})$$

Вещественная часть на внутренней окружности

$$\Phi_2(\lambda) = \varphi_{ck} + \sum_{i=1}^n \frac{Q_i}{2\pi} \ln |q_k e^{i\lambda} - \zeta_{ki}| + \frac{Q_k}{2\pi} \ln q_k. \quad (\text{II, 17})$$

Штрих при Σ означает, что в сумме опущен член с индексом $i=k$. Применим условие однозначности функции $F(\zeta_k)$

$$\int_0^{2\pi} \Phi_1(\lambda) d\lambda = \int_0^{2\pi} \Phi_2(\lambda) d\lambda. \quad (\text{II, 18})$$

Подставляя сюда выражение (II, 16) и (II, 17) и учитывая независимость φ_n и φ_{ck} от λ , получим

$$2\pi\varphi_n + \frac{1}{2\pi} \sum_{i=1}^n Q_i \int_0^{2\pi} \ln |e^{i\lambda} - \zeta_{ki}| d\lambda = 2\pi\varphi_{ck} + \frac{1}{2\pi} \sum_{i=1}^n Q_i \ln |q_k e^{i\lambda} - \zeta_{ki}| d\lambda + Q_k \ln q_k.$$

Иначе это можно записать так:

$$Q_k \ln q_k + \frac{1}{2\pi} \sum_{i=1}^n Q_i \int_0^{2\pi} \ln \frac{|q_k e^{i\lambda} - \zeta_{ki}|}{|e^{i\lambda} - \zeta_{ki}|} d\lambda = 2\pi(\varphi_n - \varphi_{ck}). \quad (\text{II, 19})$$

Входящие сюда интегралы легко вычисляются [5].

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \ln \frac{|q_k e^{i\lambda} - \zeta_{ki}|}{|e^{i\lambda} - \zeta_{ki}|} d\lambda = \ln |\zeta_{ki}|. \quad (\text{II, 18'})$$

Поэтому уравнению (II, 19) можно придать вид

$$Q_k \ln q_k + \sum_{i=1}^n Q_i \ln |\zeta_{ki}| = 2\pi(\varphi_n - \varphi_{ck}). \quad (\text{II, 19'})$$

Взяв из формул (II, 13) и (II, 14) выражения для q_k и ζ_{ki} , а из формул (II, 1) и (II, 2) значения потенциала скоростей через давления, получаем систему уравнений

$$Q_k \ln \frac{1 - |\xi_k|^2}{\rho_k} + \sum_{i=1}^n Q_i \ln \left| \frac{1 - \bar{\xi}_k \xi_i}{\xi_i - \xi_k} \right| = \frac{2\pi k}{\mu} (P_n - P_{ck}) \quad (k=1, 2, \dots, n), \quad (\text{II, 20})$$

так как рассуждения были проведены для любой из n скважин.

Таким образом, задача свелась к отысканию неизвестных Q_1, \dots, Q_n из системы n неоднородных линейных уравнений. Если обозначить $\xi_i = \delta_i e^{i\alpha_i}$ и $\xi_k = \delta_k e^{i\alpha_k}$, то система (II, 20) приобретает вид

$$Q_k \ln \frac{1 - \delta_k^2}{\rho_k} + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n Q_i \ln \frac{1 + \delta_i^2 \delta_k^2 - 2\delta_i \delta_k \cos(\alpha_i - \alpha_k)}{\delta_i^2 + \delta_k^2 - 2\delta_i \delta_k \cos(\alpha_i - \alpha_k)} = \frac{2\pi k}{\mu} (P_n - P_{ck}) \quad (k=1, 2, \dots, n). \quad (\text{II, 21})$$

Эта система по существу совпадает с системой, полученной И. А. Чарным иным путем [10].

Мощность пласта предполагалась единичной; если пласт имеет мощность h , то в правую часть уравнений (II, 20) и (II, 21) войдет множитель h .

Необходимо отметить те допущения, на которых основан вывод системы.

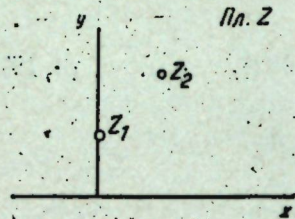
1) Малость размеров скважин сохраняется при всех отображениях, что выполняется при достаточном удалении скважин от контура питания и малости их размеров сравнительно с размерами контура питания.

2) Влияние $n-1$ скважин на k -ю подменялось влиянием точечных стоков, что допустимо, когда расстояния между скважинами велики сравнительно с радиусами скважин.

Обычно на практике оба условия выполняются.

§ 6. Пример определения дебитов

Рассмотрим пласт с бесконечным прямолинейным контуром питания (ось x) мощностью $h=5$ м = 500 см, в котором имеются две скважины радиуса $r=0.1$ м с координатами $z_1=ai$ (фиг. 12) и $z_2=a+2ai$, где $a=500$ м. Пусть, далее, давление на контуре питания $P_2=160$ атм., на забоях скважин $P_{c1}=145$ атм., $P_{c2}=150$ атм.; вязкость нефти μ = сантипуазу, проницаемость $k=0.2$ дарси.



Фиг. 12.

Отобразим пласт на единичный круг в плоскости ξ с помощью функции

$$\xi = \frac{z-z_1}{z-\bar{z}_1} = \frac{z-ai}{z+ai}$$

$$\xi_1 = \xi(z_1) = \xi(ai) = 0; \quad |\xi_1| = 0; \quad \xi_2 = \xi(z_2) = \xi(a+2ai) = 0.4 - 0.2i;$$

$$|\xi_2| = \frac{1}{\sqrt{5}}; \quad \rho_1 = r \left| \frac{d\xi}{dz} \right|_{z=z_1} = r \left| \frac{2ai}{(z+ai)^2} \right|_{z=ai} = 0.5 \cdot \frac{r}{a} = 1.0 \cdot 10^{-4};$$

$$\rho_2 = r \left| \frac{d\xi}{dz} \right|_{z=z_2} = r \left| \frac{2ai}{(z+ai)^2} \right|_{z=a+2ai} = 0.2 \cdot \frac{r}{a} = 0.4 \cdot 10^{-4}.$$

Составим теперь систему уравнений, исходя из (II, 20):

$$Q_1 \ln \frac{1-|\xi_1|^2}{\rho_1} + Q_2 \ln \left| \frac{1-\bar{\xi}_1 \xi_2}{\xi_2 - \xi_1} \right| = \frac{2\pi kh}{\mu} (P_n - P_{c1});$$

$$Q_2 \ln \frac{1-|\xi_2|^2}{\rho_2} + Q_1 \ln \left| \frac{1-\bar{\xi}_2 \xi_1}{\xi_1 - \xi_2} \right| = \frac{2\pi kh}{\mu} (P_n - P_{c2}).$$

После подстановки численных значений получаем систему:

$$4Q_1 + 0.3495Q_2 = 4093.1;$$

$$0.3495Q_1 + 4.3010Q_2 = 2728.7.$$

Отсюда

$$Q_1 = 974.6 \text{ см}^3/\text{сек.} = 84.2 \text{ м}^3/\text{сутки},$$

$$Q_2 = 555.2 \text{ см}^3/\text{сек.} = 48.0 \text{ м}^3/\text{сутки}.$$

Дебит каждой из скважин при отсутствии другой можно вычислить по формуле (1, 6), вводя h . При этом

$$q = \frac{\rho}{\delta + \sqrt{\delta^2 - \rho^2}}$$

Формула эта при $\frac{\rho}{\delta} \ll 1$ упрощается: $q \approx \frac{\rho}{2\delta}$. Для скважины z_1 $\rho=r$, $\delta=a$; для скважины z_2 $\rho=r$, $\delta=2a$. Получаем

$$Q_{10} = 1023.9 \text{ см}^3/\text{сек.} = 88.4 \text{ м}^3/\text{сутки},$$

$$Q_{20} = 634.4 \text{ см}^3/\text{сек.} = 54.8 \text{ м}^3/\text{сутки}.$$

Интерференцию хорошо характеризует отношение дебита скважины в системе к дебиту ее при отсутствии остальных скважин. В нашем случае

$$I_1 = \frac{Q_1}{Q_{10}} = 0.953;$$

$$I_2 = \frac{Q_2}{Q_{20}} = 0.875.$$

ЛИТЕРАТУРА

1. М. В. Келдыш. Конформные отображения многосвязных областей на канонические области. Успехи математ. наук, вып. VI, 1939.
2. М. Маскет. Течение однородных жидкостей в пористой среде. Гостоптехиздат, М.-Л., 1949.
3. Л. В. Канторович и В. Н. Крылов. Методы приближенного решения уравнений в частных производных. ОНТИ, 1936.
4. В. Н. Щелкачев и Г. В. Пыхачев. Интерференция скважин и теория пластовых водонапорных систем. АзГОНТИ, Баку, 1939.
5. В. Л. Данилов. К расчету гидродинамических решеток. Кандидатская диссертация. Казань, 1951.
6. Б. И Гехт. Разрешимость нелинейных интегральных и интегродифференциальных уравнений методом последовательных приближений. Кандидатская диссертация. Казань, 1952.
7. А. И. Гусейнов. Теоремы существования и единственности нелинейных сингулярных интегральных уравнений. Математический сборник, Новая серия, т. 20, (62), № 2, 1947.
8. S. E. Warschawski. On Theodorsen's method of conformal mapping of nearly circular regions. Quarterly of Applied Mathematics, vol. III, № 1, 1945.
9. G. Opitz. Zur Konvergenz bei genäherter konformer Abbildung. Zeitschrift für angewandte Mathematik und Mechanik, Bd. 30, H. 11/12, 1950.
10. И. А. Чарный. О притоке нефти к скважинам в месторождениях различных форм. ДАН СССР, т. 42, № 4, 1944.

Физико-технический институт.
Казанского филиала АН СССР

Поступило 14 марта
1953 г.

А. Н. ХОВАНСКИЙ

**К РАСЧЕТУ ВОССТАНОВЛЕНИЯ ЗАБОЙНОГО ДАВЛЕНИЯ
ПОСЛЕ ЗАКРЫТИЯ СКВАЖИНЫ**

В работе получены приближенные асимптотические выражения для некоторых функций от корней функций Бесселя и Неймана. Эти выражения применены к упрощенно расчета восстановления забойного давления после закрытия скважины.

§ 1. Асимптотические формулы для корней функций Бесселя

1. Известно, что

$$J_n(x) \approx \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \left[\cos \left(x - \frac{\pi}{4} - \frac{n\pi}{2} \right) - \frac{4n^2 - 1}{8x} \sin \left(x - \frac{\pi}{4} - \frac{n\pi}{2} \right) \right] (x \gg 0), (1, 1)$$

где $J_n(x)$ — функция Бесселя порядка n . Поэтому корни x_{kn} функции $J_n(x)$ приближенно определяются из уравнения

$$\cos \left(x - \frac{\pi}{4} - \frac{n\pi}{2} \right) - \frac{4n^2 - 1}{8x} \sin \left(x - \frac{\pi}{4} - \frac{n\pi}{2} \right) = 0.$$

Полагая

$$x_{kn} = \left(k - \frac{1}{4} + \frac{n}{2} \right) \pi + \varepsilon_{kn}$$

получаем приближенное равенство

$$x_{kn} \approx \frac{4k + 2n - 1}{4} \pi - \frac{4}{(4k + 2n - 1)\pi} \cdot \frac{4n^2 - 1}{8} \quad (k = 1, 2, \dots).$$

Отсюда

$$J_m(x_{kn}) \approx \frac{2}{\pi} \sqrt{\frac{2}{4k + 2n - 1}} (-1)^k \left[\sin \frac{n - m}{2} \pi + \frac{4m^2 - 1}{2(4k + 2n - 1)\pi} \cos \frac{n - m}{2} \pi \right] \quad \left(\frac{2}{\pi} \approx 0.63662 \right) \quad (1, 2)$$

$$x_{kn} J_m(x_{kn}) \approx (-1)^k \cdot \left(\sqrt{\frac{4k + 2n - 1}{2}} \sin \frac{n - m}{2} \pi + \frac{4m^2 - 1}{4\pi} \sqrt{\frac{2}{4k + 2n - 1}} \cos \frac{n - m}{2} \pi \right).$$

2. Положим $n = 0, m = 1$. Тогда

$$x_{k0} \approx \frac{4k - 1}{4} \pi + \frac{4}{(4k - 1)\pi} \cdot \frac{1}{8} \equiv "x_{k0}";$$

$$J_1(x_{k0}) \approx \frac{2}{\pi} \sqrt{\frac{2}{4k - 1}} (-1)^{k+1} \equiv "J_1(x_{k0})";$$

$$x_{k0} J_1(x_{k0}) \approx \left(\frac{4k - 1}{4} \pi + \right.$$

$$\left. + \frac{4}{(4k - 1)\pi} \cdot \frac{1}{8} \right) \frac{2}{\pi} \sqrt{\frac{2}{4k - 1}} (-1)^{k+1} \approx \sqrt{\frac{4k - 1}{2}} (-1)^{k+1}. \quad (1, 3)$$

Имеем следующую таблицу:

k	x_{k0}	$\frac{4k-1}{4} \pi$	" x_{k0} "	$J_1(x_{k0})$	$\frac{2}{\pi} \sqrt{\frac{2}{4k-1}} (-1)^{k+1}$	$x_{k0} J_1(x_{k0})$	$\sqrt{\frac{4k-1}{2}} (-1)^{k+1}$	" x_{k0} " · $J_1(x_{k0})$ "
1	2.405	2.356	2.409	0.5191	0.5198	1.248	1.225	1.252
2	2.520	5.498	5.521	-0.3403	-0.3403	-1.878	-1.871	-1.879
3	8.654	8.639	8.654	0.2715	0.2714	2.350	2.345	2.349

Эта таблица опровергает распространенное мнение о том, что асимптотические формулы для функций Бесселя пригодны лишь для очень больших значений аргумента.

3. Подобные рассуждения можно применить к различным другим специальным функциям. Например, для функции Неймана порядка n имеет место асимптотическая формула

$$Y_n(x) \approx \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \left[\sin \left(x - \frac{\pi}{4} - \frac{n\pi}{2} \right) + \frac{4n^2 - 1}{8x} \cos \left(x - \frac{\pi}{4} - \frac{n\pi}{2} \right) \right] (x \gg 0). (1, 4)$$

Поэтому, обозначая корни данной функции через x_{kn} и поступая так же, как с функциями Бесселя, получим следующие приближения:

$$x_{kn} \approx \frac{4k + 2n + 1}{4} \pi - \frac{4}{(4k + 2n + 1)\pi} \cdot \frac{4n^2 - 1}{8}; \quad (1, 5)$$

$$Y_m(x_{kn}) \approx \frac{2}{\pi} \sqrt{\frac{2}{4k + 2n + 1}} (-1)^k \left[\sin \frac{n - m}{2} \pi + \frac{4m^2 - 1}{2(4k + 2n + 1)\pi} \cos \frac{n - m}{2} \pi \right]. \quad (1, 6)$$

4. Положим $n = 0, m = 1$. Тогда

$$x_{k0} \approx \frac{4k + 1}{4} \pi + \frac{4}{(4k + 1)\pi} \cdot \frac{1}{8} \equiv "x_{k0}";$$

$$Y_1(x_{k0}) \approx \frac{2}{\pi} \sqrt{\frac{2}{4k + 1}} (-1)^{k+1}.$$

Имеем следующую таблицу:

k	x_{k0}	$\frac{4k+1}{4} \pi$	" x_{k0} "
0	0.8936	0.7854	0.9446
1	3.958	3.927	3.959
2	7.086	7.069	7.087
3	10.22	10.21	10.22

5. Пользуясь полученными формулами, легко вычислим приближенные соотношения для корней x_{kn} функции

$$U_n(x) = Y_n(\lambda x) J(x) - Y_n J(x) (\lambda x),$$

применяемой М. Маскетом [1] и В. Н. Щелкачевым [2] для решения задач подземной гидравлики. Имеем $x_{kn} \approx \frac{k\pi}{\lambda - 1} + \frac{\lambda - 1}{k\pi} \cdot \frac{4n^2 - 1}{8\lambda} \equiv "x_{k0}"$. В частности, при $\lambda = 5, n = 0$

$$x_{k0} \approx \frac{k\pi}{4} - \frac{4}{k\pi} \cdot \frac{1}{40} \equiv "x_{k0}"$$

Имеем следующую табличку:

k	x_{k0}	$\frac{k\pi}{4}$	" x_{k0} "
1	0.763	0.785	0.781
2	1.558	1.571	1.555
3	2.347	2.356	2.345
4	3.135	3.142	3.134
5	3.921	3.927	3.921

§ 2. Применение полученных формул к расчету восстановления забойного давления после закрытия скважины

1. При расчете восстановления забойного давления после закрытия скважины Маскет [1] и Щелкачев [2] пользуются формулой

$$\alpha = 1 - \frac{2}{\ln \frac{r_0}{r_1}} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{J_0(x_n \frac{r_1}{r_0})}{x_n^2 J_1^2(x_n)} e^{-x_n^2 F_0}, \quad (2,1)$$

где $\alpha = \frac{P - P_1}{P - P_0}$; $F_0 = \frac{a^2}{r_0^2} t$; P — текущее забойное давление, P_0 — давление на контуре питания, P_1 — забойное давление в начальный момент, a^2 — коэффициент преезопроводности, t — время, x_n — корни уравнения $J_0(x) = 0$, r_0 — радиус кругового контура питания, r_1 — радиус скважины. Заметим, что $\alpha = 0$ при $F_0 = 0$, $\alpha = 1$ при $F_0 = \infty$.

Ясно, что вычисления с помощью ряда (2,1) достаточно сложны. Кроме того, Щелкачев отмечает, что этот ряд медленно сходится при $F_0 \approx 0$.

Мы попытаемся упростить ряд (2,1) и оценить его сумму при $F_0 \approx 0$. При этом будем оценивать лишь главную часть ряда, т. е. везде будем отбрасывать члены, содержащие F_0 не под знаком логарифма. Обозначим $\frac{r_0}{r_1} = \lambda$ и учтем, что $r_0 \gg r_1$. Тогда $J_0(x_n \frac{r_1}{r_0}) \approx 1$. Далее, пользуясь формулой

$$x_{n0} J_1^2(x_{n0}) \approx \frac{4n - 1}{2},$$

вытекающей из (1,1), имеем

$$\alpha \approx 1 - \frac{4}{\ln \lambda} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{-\frac{(4n-1)^2 \pi^2 F_0}{16}}}{4n - 1} \equiv 1 - \frac{4}{\ln \lambda} s. \quad (2,2)$$

При $F_0 = 0$ полученный ряд расходится. Но из соотношений, определяющих F_0 и λ , ясно, при $F_0 = 0$ имеет место равенство $\lambda = \infty$. Раскрывая получающуюся неопределенность, видим, что попрежнему

$$\lim_{F_0 \rightarrow 0} \alpha = 1.$$

2. Для оценки выражения (2,2) докажем сначала, что при $a(x) > 0$, $a'(x) < 0$, $a''(x) > 0$ ($1 \leq x \leq \infty$) имеет место неравенство [3]

$$\int_1^{\infty} a(x) dx + \frac{a_1}{2} < \sum_{n=1}^{\infty} a_n < \int_1^{\infty} a(x) dx + \frac{a_1}{2} - \frac{a_1'}{8}. \quad (2,3)$$

Здесь $a(x)$ означает функцию, которая так же зависит от непрерывного аргумента x , как a_n зависит от целого индекса n . Ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ предполагаем сходящимся. На представленном графике AC — касательная к $y = a(x)$ в точке F , $BC \perp AG$. Ясно, что

$$\angle ACB = \pi - \text{arc tg } a_n'$$

Тогда

$$CD = a_n - \frac{1}{2} AB = a_n -$$

$$-\frac{1}{2} \cdot \text{tg } ACB = a_n + \frac{a_n'}{2};$$

$$AG = a_n + \frac{1}{2} AB = a_n - \frac{a_n'}{2}.$$

Отсюда

$$s_{FECD} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \left(a_n + a_n + \frac{a_n'}{2} \right) = \frac{a_n}{2} + \frac{a_n'}{8} < \int_n^{n+\frac{1}{2}} a(x) dx;$$

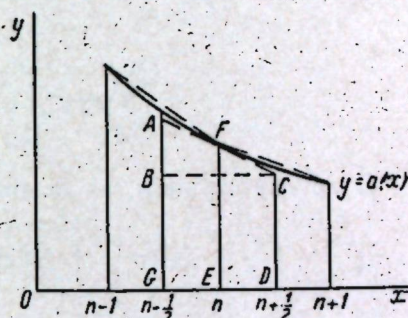
$$s_{FECA} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \left(a_n + a_n - \frac{a_n'}{2} \right) = \frac{a_n}{2} - \frac{a_n'}{8} < \int_{n-\frac{1}{2}}^n a(x) dx.$$

Поэтому справедливы следующие соотношения:

$$\frac{a_1}{2} = \frac{a_1'}{2};$$

$$\frac{a_1}{2} + \frac{a_1'}{8} < \int_1^{\frac{3}{2}} a(x) dx;$$

$$\frac{a_2}{2} - \frac{a_2'}{8} < \int_{\frac{3}{2}}^2 a(x) dx;$$



$$\frac{a_2}{2} + \frac{a_2'}{8} < \int_2^{\frac{5}{2}} a(x) dx;$$

$$\frac{a_n}{2} - \frac{a_n'}{8} < \int_{n-\frac{1}{2}}^n a(x) dx;$$

$$\frac{a_n}{2} = \frac{a_n'}{2}.$$

Складывая эти соотношения, получим

$$\sum_{k=1}^n a_k + \frac{a_1'}{8} - \frac{a_n'}{8} < \int_1^n a(x) dx + \frac{a_1}{2} + \frac{a_n}{2}.$$

т. е.

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n < \int_1^{\infty} a(x) dx + \frac{a_1}{2} - \frac{a_1'}{8}.$$

С другой стороны, на основании того же чертежа,

$$\int_{n-1}^n a(x) dx < \frac{a_{n-1} + a_n}{2},$$

т. е.

$$\int_1^n a(x) dx < \sum_{k=1}^n a_k - \frac{a_1}{2} - \frac{a_n}{2}.$$

Отсюда

$$\int_1^{\infty} a(x) dx + \frac{a_1}{2} < \sum_{n=1}^{\infty} a_n.$$

Тем самым неравенство (2,3) доказано.

3. Докажем, что оценка (2,3) применима к ряду (2,2).

Обозначим

$$4x-1=t, \quad \frac{\pi^2 F_0}{16} = \beta.$$

Тогда

$$a(t) = \frac{e^{-\beta t^2}}{t} > 0; \quad a'(t) = -\frac{2\beta t^2 + 1}{t^2} e^{-\beta t^2} < 0;$$

$$a''(t) = \frac{4\beta^2 t^4 + 2\beta t^2 + 2}{t^3} e^{-\beta t^2} > 0.$$

Следовательно, оценка (2,3) применима к ряду (2,2).

Имеем

$$\int_1^{\infty} e^{-\frac{(4x-1)^2}{16} \pi^2 F_0} dx + \frac{e^{-\frac{9}{16} \pi^2 F_0}}{6} < s < \int_1^{\infty} e^{-\frac{(4x-1)^2}{16} \pi^2 F_0} dx + \frac{e^{-\frac{9}{16} \pi^2 F_0}}{6} + \frac{1}{18} \left(1 + \frac{9\pi^2}{8} F_0 \right) e^{-\frac{9}{16} \pi^2 F_0},$$

или, отбрасывая члены высших порядков малости,

$$\int_1^{\infty} e^{-\frac{(4x-1)^2}{16} \pi^2 F_0} dx + \frac{1}{6} < s < \int_1^{\infty} e^{-\frac{(4x-1)^2}{16} \pi^2 F_0} dx + \frac{2}{9}. \quad (2,4)$$

Обозначим

$$\frac{(4x-1)^2}{16} \pi^2 F_0 = y.$$

Тогда

$$\int_1^{\infty} e^{-\frac{(4x-1)^2}{16} \pi^2 F_0} dx = \frac{1}{8} \int_{\frac{9}{16} \pi^2 F_0}^{\infty} \frac{e^{-y}}{y} dy,$$

и оценка (2,4) примет вид

$$\frac{1}{8} \int_{\frac{9}{16} \pi^2 F_0}^{\infty} \frac{e^{-y}}{y} dy + \frac{1}{6} < s < \int_{\frac{9}{16} \pi^2 F_0}^{\infty} \frac{e^{-y}}{y} dy + \frac{2}{9}.$$

Отсюда

$$1 - \frac{1}{2 \ln \lambda} \int_{\frac{9}{16} \pi^2 F_0}^{\infty} \frac{e^{-y}}{y} dy - \frac{8}{9 \ln \lambda} < \alpha < 1 - \frac{1}{2 \ln \lambda} \int_{\frac{9}{16} \pi^2 F_0}^{\infty} \frac{e^{-y}}{y} dy - \frac{2}{3 \ln \lambda}. \quad (2,5)$$

Но при отбрасывании членов высших порядков малости справедливо соотношение

$$\int_{\frac{9}{16} \pi^2 F_0}^{\infty} \frac{e^{-y}}{y} dy \approx -C - \ln \frac{9}{16} \pi^2 F_0,$$

где $C \approx 0.5772$ — постоянная Эйлера. Поэтому оценка (2,5) примет вид

$$1 + \frac{1}{2 \ln \lambda} \left(C + \ln \frac{9}{16} \pi^2 F_0 \right) - \frac{8}{9 \ln \lambda} < \alpha < 1 + \frac{1}{2 \ln \lambda} \left(C + \ln \frac{9}{16} \pi^2 F_0 \right) - \frac{2}{3 \ln \lambda},$$

т. е.

$$1 + \frac{1}{\ln \lambda} \left(\frac{C}{2} + \ln \frac{3}{4} \pi - \frac{8}{9} + \frac{1}{2} \ln F_0 \right) < \alpha < 1 + \frac{1}{\ln \lambda} \left(\frac{C}{2} + \ln \frac{3}{4} \pi - \frac{2}{3} + \frac{1}{2} \ln F_0 \right).$$

Окончательно:

$$1 + \frac{1}{\ln \lambda} \left(0.257 + \frac{1}{2} \ln F_0 \right) < \alpha < 1 + \frac{1}{\ln \lambda} \left(0.479 + \frac{1}{2} \ln F_0 \right). \quad (2,6)$$

Положим $\lambda = 10^m$, $F_0 = 10^{-n}$. Оценка (2,6) примет вид

$$1 - \frac{n-0.22}{2m} < \alpha < 1 - \frac{n-0.42}{2m}. \quad (2,7)$$

В частности, при $m=5$

$$1.022 - \frac{n}{10} < \alpha < 1.042 - \frac{n}{10}. \quad (2, 8)$$

4. В. Н. Щелкачев^[2], не приводя соответствующих оценок, получил формулу

$$\alpha \approx 1.035 - \frac{n}{10},$$

которая является примерно средним арифметическим границ оценки (2, 8).

На основании соотношений, определяющих λ и F_0 , нетрудно показать, что всегда должно выполняться неравенство

$$2m + 2 \gg n,$$

что необходимо иметь в виду при использовании оценки (2, 7).

ЛИТЕРАТУРА

1. М. Маскет. Течение однородных жидкостей в пористой среде. Гостоптехиздат, 1949.
2. В. Н. Щелкачев. Упругий режим пластовых водонапорных систем. Гостоптехиздат, 1948.
3. E. Catalan. Traité élémentaire des séries. Paris, 1860.

Физико-технический институт
Казанского филиала АН СССР

Поступило 14 марта
1953 г.

Г. С. САЛЕХОВ и М. А. МЕРТВЕЦОВА

О СХОДИМОСТИ НЕКОТОРЫХ ИТЕРАЦИОННЫХ ПРОЦЕССОВ

В статье дается обзор работ, посвященных изучению сходимости процессов Ньютона и различным обобщениям этого процесса. Исследуется сходимость новых итерационных процессов для нелинейных функциональных уравнений и рассматривается их приложение к приближенному решению алгебраических, трансцендентных и нелинейных интегральных уравнений.

Введение

Исследование сходимости различных итерационных процессов имеет теоретическое и прикладное значение, и этому вопросу посвящены работы многих авторов.

За последние годы в прикладной математике всё шире и шире стали находить приложение методы функционального анализа. В первую очередь следует указать на появление фундаментальной работы Л. В. Канторовича^[1] „Функциональный анализ и прикладная математика“, где функциональный анализ широко применен к исследованию сходимости и оценки остаточных членов различных аналитических процессов, которые рассматривались лишь для частных случаев и при более жестких ограничениях. Последняя глава этой работы посвящена изучению сходимости процесса Ньютона для общих нелинейных функциональных уравнений. Результаты этой работы, в частности, содержат в себе выводы, к которым пришли в своих исследованиях А. Коши^[2], А. Островский^[3] и другие.

В настоящей статье, наряду с кратким обзором работ, посвященных исследованию сходимости процесса Ньютона и различных обобщений этих процессов, авторами рассмотрена сходимость некоторых новых итерационных процессов для общих нелинейных функциональных уравнений. Эффективность того или другого метода показана на отдельных примерах, доведенных до численного результата.

В первой главе содержится краткий обзор работ, относящихся к исследованию сходимости процесса Ньютона и различных обобщений этого процесса.

Вторая глава посвящена исследованию сходимости нового итерационного процесса, названного авторами процессом касательных гипербол. Доказательство основной теоремы для случая нелинейных алгебраических и трансцендентных уравнений дано Г. С. Салеховым^[4]. М. А. Мертвцово^[5] принадлежит доказательство этой теоремы для общих нелинейных функциональных уравнений, которое приводится в тексте настоящей работы.

В третьей главе излагается некоторая общая схема построения „нижних“ и „верхних“ функций для решения нелинейного функционального урав-

нения, предложенная Г. С. Салеховым. Применения этой схемы к различным конкретным итерационным процессам с примерами указаны М. А. Мертвецовой.

Четвертая глава посвящена изучению сходимости нового итерационного процесса для квадратно-функциональных и операторных уравнений с применением метода цепных дробей.

Выводы, приведенные в этой главе, принадлежат Г. С. Салехову [6].¹

Глава I

ПРОЦЕСС НЬЮТОНА И ЕГО ОБОБЩЕНИЯ

§ 1. Результаты Коши

Коши [2] излагает метод приближенного определения корней алгебраического или трансцендентного уравнения

$$f(x) = 0. \quad (1, 1)$$

Пусть x_0 — приближенное значение корня этого уравнения. Тогда второе приближенное значение равно $x_1 = x_0 + \delta$, где δ — число, по модулю достаточно малое и определенное из уравнения

$$f(x_0) + \delta f'(x_0) \approx 0. \quad (1, 2)$$

Для оценки степени приближения Коши доказал следующие теоремы

Теорема 1. Если

$$\max_{x_0 \leq x \leq x_0 + 2\delta} f''(x) = B, \\ f'(x_0) > 2B\delta,$$

то уравнение (1, 1) допускает единственный действительный корень заключенный в интервале $(x_0, x_0 + 2\delta)$.

Теорема 2. Если выполнены условия

$$\min_{x_0 \leq x \leq x_0 + 2\delta} f'(x) = A; \quad \frac{2B\delta}{A} < 1 \text{ и } \sigma < \frac{B}{2A} \delta^2,$$

где

$$\sigma = -\frac{f(x_1)}{f'(x_1)}; \quad x_1 = x_0 + \delta,$$

то уравнение (1, 1) допускает единственный действительный корень, заключенный в интервале $(x_1, x_1 + 2\delta)$.

Таким образом, если дается приближенное значение x_0 действительного корня уравнения (1, 1), то с помощью алгоритма Ньютона

$$x_k = x_{k-1} - \frac{f(x_{k-1})}{f'(x_{k-1})}$$

можно получить новые значения и указать пределы, в которых заключен корень.

¹ Результаты, изложенные во второй и четвертой главах, доложены М. А. Мертвецовой и Г. С. Салеховым на Всесоюзном совещании по дифференциальным уравнениям в Москве (май 1952 г.).

§ 2. Результаты В. П. Максимовича

В. П. Максимович [7] рассматривал уравнение

$$f(x) = 0, \quad (2, 1)$$

где $f(x)$ — непрерывная, конечная и однозначная функция действительного переменного x . Пусть x^* простой корень уравнения (2, 1), а x_0 — величина, достаточно близкая к x^* , притом такая, что уравнение

$$f'(x) = 0 \quad (2, 2)$$

не имеет корней между x_0 и x^* . Для получения формулы приближения разность $x^* - x_0$ разлагается в ряд Эйлера

$$x^* - x_0 = -f(x_0) \left(\frac{dx}{dy}\right)_{y=f(x_0)} - \frac{[f(x_0)]^2}{2!} \left(\frac{d^2x}{dy^2}\right)_{y=f(x_0)} - \\ - \dots (-1)^n \frac{[f(x_0)]^n}{n!} \left(\frac{d^n x}{dy^n}\right)_{y=f(x_0)} - R_{n+1}, \quad (2, 3)$$

где $f(x) = y$ и

$$R_{n+1} = (-1)^{n+1} \frac{[f(x_0)]^{n+1}}{(n+1)!} \left(\frac{d^{n+1}x}{dy^{n+1}}\right)_{y=f(x_0)}; \quad \xi = x_0 + \theta(x^* - x_0) \quad (0 \leq \theta \leq 1).$$

Затем Максимович исследует формулы приближения к корню, которые получаются, если ограничиться в строке Эйлера конечным числом членов.

Если обозначить через $F(x_0)$ сумму n членов ряда Эйлера при $n \leq N$, где N — наибольшее число, обладающее тем свойством, что между производными $f(x)$ порядков, не превосходящих $(N-1)$, производные четных порядков имеют знак $f(x)$ в некотором интервале, содержащем корень x^* , а производные нечетных порядков имеют знак, противоположный $f'(x)$, то существует $\lim_{k \rightarrow \infty} x_k = x^*$, где $x_k = x_{k-1} + F(x_{k-1})$

($k=0, 1, \dots$), причем x_k заключено между x_{k-1} и x^* .

§ 3. Результаты Шрёдера

Е. Шрёдер [8] исследовал сходимость нескольких методов последовательных приближений к корню алгебраического или трансцендентного уравнения

$$f(z) = 0. \quad (3, 1)$$

Пусть $f(z)$ — некоторая однозначная дифференцируемая функция комплексного переменного. Задача состоит в отыскании такой функции $F(z)$, чтобы уравнение

$$z_1 = F(z_0) \quad (3, 2)$$

всегда давало точку z_1 , к которой корень z^* лежит ближе, чем вначале взятая точка z_0 . Продолжая этот процесс, нужно получить

$$\lim_{n \rightarrow \infty} z_n = z^*.$$

Исследуя сходимость этого процесса, Шрёдер доказал следующую теорему.

Теорема 1. Если z^* — корень уравнения $f(z)=0$, а внутри области, заключающей точку z^* , $F(z)$ однозначна и непрерывна, $F(z^*)=z^*$, $|F'(z^*)| < 1$, то

$$\lim_{n \rightarrow \infty} z_n = z^*.$$

Сходимость в этом случае линейная, т. е.

$$z_{n+1} - z^* = C_1(z_n - z^*) + C_2(z_n - z^*)^2 + \dots$$

Если же $F^{(1)}(z^*)=0, \dots, F^{(w-1)}(z^*)=0$, а $|F^{(w)}(z^*)| < 1$, то сходимость w -го порядка, т. е. $z_{n+1} - z^* = C_w(z_n - z^*)^w + \dots$. Из теоремы 1, в частности, следует условие сходимости алгоритма Ньютона, если положить $F(z) = z - \frac{f(z)}{f'(z)}$. Если положить $F(z) = z - \frac{f(z)f'(z)}{f'^2(z) - f(z)f''(z)}$, то получаем алгоритм, сходящийся всегда с квадратичной быстротой.

§ 4. Результаты Г. Фабера

Исследования Г. Фабера [9] посвящены решению уравнения

$$f(z) = 0, \quad (4, 1)$$

где $f(z)$ — аналитическая функция комплексного переменного. Пусть z_1 — любое вещественное или комплексное число. Рассматривается последовательность

$$\left. \begin{aligned} z_2 &= z_1 - \frac{f(z_1)}{f'(z_1)}; \\ &\dots \\ z_i &= z_{i-1} - \frac{f(z_{i-1})}{f'(z_{i-1})}. \end{aligned} \right\} \quad (4, 2)$$

Для установления сходимости способа Ньютона образуется частное

$$\frac{z_{n+1} - z_n}{z_n - z_{n-1}} = \frac{f(z_n)}{f'(z_n)} \cdot \frac{f'(z_{n-1})}{f(z_{n-1})} = \frac{f(z_{n-1} - \frac{f(z_{n-1})}{f'(z_{n-1})})}{f'(z_{n-1} - \frac{f(z_{n-1})}{f'(z_{n-1})})} \cdot \frac{f'(z_{n-1})}{f(z_{n-1})}.$$

К этому частному Фабер применяет теорему Дарбу о среднем значении для функций комплексного переменного. Тогда

$$\begin{aligned} & \frac{f(z_{n-1} - \frac{f(z_{n-1})}{f'(z_{n-1})})}{f'(z_{n-1} - \frac{f(z_{n-1})}{f'(z_{n-1})})} = \frac{f(z_{n-1})}{f'(z_{n-1})} - \lambda \frac{f(z_{n-1})}{f'(z_{n-1})} \times \\ & \times \left[1 - \frac{f(z_{n-1} - \theta \frac{f(z_{n-1})}{f'(z_{n-1})}) f''(z_{n-1} - \theta \frac{f(z_{n-1})}{f'(z_{n-1})})}{f'(z_{n-1} - \theta \frac{f(z_{n-1})}{f'(z_{n-1})})^2} - 1 \right] \frac{f(z_{n-1})}{f'(z_{n-1})}, \end{aligned}$$

где $|\lambda| \leq 1$ и $0 \leq \theta \leq 1$. Следовательно,

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{z_{n+1} - z_n}{z_n - z_{n-1}} = \lambda \frac{f(z_{n-1} + \theta(z_n - z_{n-1})) f''(z_{n-1} + \theta(z_n - z_{n-1}))}{[f'(z_{n-1} + \theta(z_n - z_{n-1}))]^2}.$$

Теперь, согласно признаку сходимости Даламбера, следует, что бесконечный ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ сходится абсолютно, если

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{u_{n+1}}{u_n} \right| < 1.$$

Далее Фабер доказал, что если существует такое положительное число $\alpha < 1$, что внутри круга K , описанного радиусом

$$R = \frac{1}{1-\alpha} \left| \frac{f(z_1)}{f'(z_1)} \right|$$

вокруг точки z_1 , выполняется неравенство $\left| \frac{f(z)f''(z)}{[f'(z)]^2} \right| < \alpha$, то процесс Ньютона сходится, начиная с первого приближения z_1 , к корню уравнения (4, 1), лежащему внутри K . Относительно скорости сходимости к корню уравнения можно сказать следующее: пусть z^* — корень α -го порядка, т. е. $f(z) = a(z - z^*)^\alpha + \dots$. Тогда, если z^* — регулярная точка разветвления аналитической функции $f(z)$ и $\alpha > \frac{1}{2}$, то существует определенная окрестность около точки z^* , что в ней процесс Ньютона сходится к z^* . Если $\alpha \neq 1$, то сходимость будет с быстротой сходимости ряда $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\alpha-1)^n}{\alpha^n}$. Сходимость тем лучше, чем ближе будет α к единице. В случае $\alpha=1$ сходимость сильнее, чем у некоторой геометрической прогрессии.

§ 5. Результаты А. Островского

А. Островский [3] рассматривает уравнение

$$f(x) = 0, \quad (5, 1)$$

где $f(x)$ — непрерывная функция, и строит последовательные приближения

$$\left. \begin{aligned} x_2 &= x_1 + Cf(x_1), \\ &\dots \\ x_{n+1} &= x_n + Cf(x_n), \end{aligned} \right\} \quad (5, 2)$$

где C — некоторая положительная постоянная, $x_1 \in [A, B]$ и

$$\left. \begin{aligned} x_2 &= x_1 - Cf(x_1), \\ &\dots \\ x_{n+1} &= x_n - Cf(x_n). \end{aligned} \right\} \quad (5, 3)$$

О сходимости последовательностей (5, 2) и (5, 3) к корню уравнения (5, 1) доказаны следующие теоремы.

Теорема 1. Если $f(x_1) > 0$ и все числа x_n , определенные из (5, 2), остаются $\leq B$, то последовательность x_n сходится, возрастая, к пределу x^* , который является меньшим корнем уравнения (5, 1), заключенным в (x_1, B) .

Теорема 2. Если $f(x_1) < 0$ и все числа x_n , определенные из (5, 3), остаются равными или большими A , то последовательность x_n

сходится, убывая, к пределу x^* , который является наибольшим корнем уравнения (5, 1), заключенным в $[A, x_1]$.

Скорость сходимости процесса (5, 2) к корню уравнения (5, 1) дает следующая теорема.

Теорема 3. Если при тех же предположениях, как и в теоремах 1, 2, существует $f'(x^*)$, отличная от нуля, то

$$\frac{x^* - x_{n+1}}{x^* - x_n} \rightarrow 1 - C|f'(x^*)|;$$

$$\frac{x^* - x_{n+1}}{x_{n+1} - x_n} \rightarrow \frac{1}{C|f'(x^*)|} - 1.$$

Для алгоритма Ньютона доказаны следующие теоремы.

Теорема 4. Если $f(x)$ определена в некотором замкнутом интервале I , содержащем точку x_0 , а $f''(x)$ не меняет знака в I и

$$f(x_0)f''(x_0) > 0; \quad f(x_0)f''(b) < 0 \quad (x_0 \geq b),$$

то уравнение (5, 1) имеет единственный корень x^* внутри I , а $f'(x)$ остается отличной от нуля в (x_0, x^*) , и последовательность

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \quad (5, 4)$$

сходится к x^* .

Теорема 5. Если выполнены условия: $f(x)$ непрерывна в точке x_0 , $f'(x)$ непрерывна в $I = [x_0, x_0 + 2h]$, где

$$h = -\frac{f(x_0)}{f'(x_0)} \neq 0; \quad \sup_{x \in I} |f''(x)| < M, \quad 2M|h| \leq |f'(x_0)|,$$

то уравнение (5, 1) обладает единственным корнем x^* в I , к которому сходится последовательность (5, 4).

Предыдущие результаты могут быть распространены и на аналитические функции комплексного переменного.

§ 6. Результаты Л. В. Канторовича, Д. А. Граве и других авторов

Л. В. Канторович [1] распространил метод Ньютона на общие нелинейные функциональные уравнения

$$P(x) = 0, \quad (6, 1)$$

где операция P , переводящая пространство X типа Банаха в Y того же типа, предполагается дважды дифференцируемой.

Пусть x_0 — начальное приближение к решению. Тогда

$$P(x) \approx P(x_0) + P'(x_0)(x - x_0) = 0. \quad (6, 2)$$

Решение этого уравнения x_1 и дает новое приближенное значение корня. Если операция $P'(x_0)$ имеет обратную

$$[P'(x_0)]^{-1} \subset (Y \rightarrow X),$$

то

$$x_1 = x_0 - [P'(x_0)]^{-1} P(x_0) \quad (6, 3)$$

и аналогично

$$x_{n+1} = x_n - [P'(x_n)]^{-1} P(x_n). \quad (6, 4)$$

Теорема 1. Пусть выполнены следующие условия: 1) для элемента x_0 — начального приближения, операция $P'(x_0) \subset (X \rightarrow Y)$ имеет обратную $\Gamma_0 = [P'(x_0)]^{-1}$ и

$$\|\Gamma_0\| \leq B_0; \quad (6, 5)$$

2) элемент x_0 приближенно удовлетворяет уравнению (6, 1), причем

$$\|\Gamma_0 P(x_0)\| \leq \tau_0; \quad (6, 6)$$

3) вторая производная $P''(x)$ ограничена в области, определяемой неравенством (6, 9),

$$\|P''(x)\| \leq K; \quad (6, 7)$$

4) постоянные B_0, τ_0, K удовлетворяют неравенству

$$h_0 = B_0 \tau_0 K \leq \frac{1}{2}. \quad (6, 8)$$

Тогда уравнение (6, 1) имеет решение x^* , которое находится в области вблизи x_0 , определяемой неравенством

$$\|x - x_0\| \leq N(h_0) \tau_0 = \frac{1 - \sqrt{1 - 2h_0}}{h_0} \tau_0. \quad (6, 9)$$

При этом последовательные приближения процесса Ньютона x_n сходятся к x^* , и быстрота сходимости оценивается неравенством

$$\|x_n - x^*\| \leq \frac{1}{2^{n-1}} (2h_0)^{2^{n-1}} \tau_0. \quad (6, 10)$$

Единственность решения дает следующая теорема.

Теорема 2. Пусть выполнены условия 1)–4) с той разницей, что неравенство (6, 7) выполнено в области, определяемой неравенством

$$\|x - x_0\| < L(h_0) \tau_0 = \frac{1 + \sqrt{1 - 2h_0}}{h_0} \tau_0. \quad (6, 11)$$

Тогда решение уравнения (6, 1) единственно в области (6, 11).

Канторович рассмотрел также модифицированный процесс Ньютона, при котором последовательные приближения выражаются одно через другое следующим образом:

$$x'_{n+1} = x'_n - [P'(x_0)]^{-1} P(x_n). \quad (6, 12)$$

Для этого случая Л. В. Канторовичем доказана следующая теорема.

Теорема 3. При выполнении условий теоремы 1 и при $h_0 < \frac{1}{2}$ имеет место сходимость модифицированного процесса Ньютона к решению $\lim_{n \rightarrow \infty} x'_n = x^*$ с быстротой, определяемой неравенством

$$\|x'_n - x^*\| \leq q^{n-1} \|x'_1 - x^*\|, \quad (6, 13)$$

где $q = 1 - \sqrt{1 - 2h_0} < 1$. Д. А. Граве [10] дал несколько иную модификацию процесса Ньютона, а именно, когда последовательные приближения связаны формулой

$$x_{n+1} = x_n - Q \frac{P(x_n)}{P'(x_n)}, \quad (6, 14)$$

где $0 < Q < 1$ и $P(x) = 0$ — алгебраическое или трансцендентное уравнение.

Канторович распространил этот процесс также на нелинейные функциональные уравнения и показал, что при условиях теоремы 1 обобщенный процесс Граве сходится к решению уравнения $P(x) = 0$.

Из теоремы 1, в частности, для случая нелинейного интегрального уравнения следует такое рассуждение.

Пусть имеем нелинейное интегральное уравнение

$$x(s) = \int_0^1 K(s, t, x(t)) dt, \quad (6, 15)$$

где K — непрерывная функция своих аргументов. Тогда $x_1(s)$ будет определяться из линейного интегрального уравнения

$$x_1(s) - x_0(s) - \int_0^1 K'_x(s, t, x_0(t)) (x_1(t) - x_0(t)) dt = \varepsilon_0(s), \quad (6, 16)$$

где

$$\varepsilon_0(s) = \int_0^1 K(s, t, x_0(t)) dt - x_0(s).$$

Если операцию $P(x) = x(s) - \int_0^1 K(s, t, x(t)) dt$ рассматривать как операцию из C в C^1 , то сходимость процесса определяет следующая теорема.

Теорема 4. Если выполнены условия: 1) для начального значения $x_0(s)$ ядро $K'_x(s, t, x_0(t)) = \bar{K}(s, t)$ имеет резольвенту $G(s, t)$, причем $\int_0^1 |G(s, t)| dt \leq B$, $0 \leq s \leq 1$; 2) $|\varepsilon_0(s)| = \left| x_0(s) - \int_0^1 K(s, t, x_0(t)) dt \right| \leq \bar{\eta}$;

3) $|K''_{xx}(s, t, u)| \leq K$, в области, определяемой (6, 9); 4) $h = (B+1)^2 \bar{\eta} K \leq \frac{1}{2}$, то процесс Ньютона для интегрального уравнения (6, 15) с начальным значением $x_0(s)$ сходится к решению этого уравнения, которое существует и лежит в области $|x^*(s) - x_0(s)| \leq N(h)(B+1)\bar{\eta}$ и единственно в области $|x^*(s) - x_0(s)| \leq L(h)(B+1)\bar{\eta}$.

Если же операцию $P(x) = x(s) - \int_0^1 K(s, t, x(t)) dt$ рассматривать как операцию из L^2 в L^2 , то справедлива следующая теорема.

Теорема 4а. При выполнении условий 1) $\int_0^1 \left[x_0(s) - \int_0^1 K(s, t, x_0(t)) dt \right]^2 ds \leq \bar{\eta}^2$; 2) выполнено неравенство $\max \frac{|\lambda_n|}{|1 - \lambda_n|} \leq B$,

где λ_n — собственные числа ядра $K'_x(s, t, x_0(t)) = \bar{K}(s, t)$, если последнее симметрично и $\max_n \sqrt{\frac{\lambda_n}{|1 - \lambda_n|}} \leq B$, где λ_n — собственные числа

$$\bar{K}(s, t) = \bar{K}(s, t) + \bar{K}(t, s) - \int_0^1 \bar{K}(u, s) \bar{K}(u, t) du$$

в общем случае; 3) $|K''_{xx}(s, t, u)| \leq K$ для всех конечных значений u ; 4) $h = B^2 \bar{\eta} K \leq \frac{1}{2}$ — уравнение имеет решение, которое может быть найдено процессом Ньютона.

Сходимость процесса Ньютона для случая нелинейного интегрального уравнения была исследована, по предложению Л. В. Канторовича, Д. М. Загадским^[11], но при более жестких условиях ($h_0 \leq \frac{1}{10}$).

И. П. Мысовских^[12] рассмотрел вопрос о решении нелинейного функционального уравнения с помощью процесса Ньютона в том случае, когда производный оператор от левой части уравнения в каждой точке некоторой сферы имеет обратный, равномерно ограниченный по норме.

Пусть X и Y — полные линейные нормированные пространства и $P(x)$ — оператор, преобразующий пространство X в Y . Рассматривается уравнение $P(x) = 0$, где $P(x)$ предполагается функцией, дважды дифференцируемой в смысле Фреше^[13]. Пусть, далее, $H = \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{h_0}{2}\right)^{2^k - 1}$,

где число $h_0 < 2$.

Тогда имеет место следующая теорема.
Теорема 5. Пусть выполнены следующие условия: 1) элемент x_0 приближенно удовлетворяет уравнению, т. е.

$$\|P(x_0)\| \leq \eta_0; \quad (6, 17)$$

2) для линейного оператора $P'(x)$ имеется обратный $\Gamma_x = [P'(x)]^{-1}$ в каждой точке сферы

$$\|x - x_0\| \leq HB\eta_0, \quad (6, 18)$$

причем для всех точек этой сферы

$$\|\Gamma_x\| \leq B; \quad (6, 19)$$

3) в области (6, 18)

$$\|P''(x)\| \leq K; \quad (6, 20)$$

4)

$$B^2 K \eta_0 = h_0 < 2. \quad (6, 21)$$

Тогда в сфере (6, 18) уравнение (6, 1) имеет решение x^* , которое можно найти процессом Ньютона, начиная с x_0 . При этом быстрота сходимости определяется неравенством

$$\|x_n - x^*\| \leq HB\eta_0 \left(\frac{h_0}{2}\right)^{2^n - 1}. \quad (6, 22)$$

Мысовских^[14] доказаны также следующие две теоремы.
Теорема 6. Пусть $P(x) = 0$,

¹ C — пространство непрерывных функций.

² L^2 — пространство функций, интегрируемых с квадратом.

где $P(x)$ — вещественная, дважды дифференцируемая функция, имеет решение x^* , причем

$$|x^* - x_0| \leq r, \quad (6, 23)$$

где x_0 — начальное приближение и $r > 0$. Предположим, что

$$P(x_0)P'(x_0) > 0 \quad (P(x_0)P'(x_0) < 0), \quad (6, 24)$$

и выполняются неравенства

$$|[P'(x)]^{-1}| \leq B, \quad |P''(x)| \leq K \quad (6, 25)$$

для всех точек промежутка

$$\left[x_0 - \left(1 + \frac{1}{2}l\right)r, x_0 \right] \quad \left(\left[x_0, x_0 + \left(1 + \frac{1}{2}l\right)r \right] \right). \quad (6, 26)$$

При этом постоянные B, K, r подчинены условию

$$l = BKr \leq 2. \quad (6, 27)$$

Тогда последовательность Ньютона

$$x_{n+1} = x_n - [P'(x_n)]^{-1}P(x_n) \quad (n = 0, 1, \dots) \quad (6, 28)$$

сходится к решению x^* уравнения (6, 1), единственному в промежутке (6, 26).

Теорема 7. Пусть

$$P(x_0)P'(x_0) > 0 \quad (P(x_0)P'(x_0) < 0).$$

Далее, пусть существует $P''(x)$ в промежутке

$$[x_0 - \lambda, x_0] \quad ([x_0, x_0 + \lambda]) \quad (6, 29)$$

и выполнены условия

$$|[P'(x)]^{-1}| \leq B;$$

$$|P(x_0)| \leq \eta;$$

$$|P''(x)| \leq K$$

для x из промежутка (6, 29). Если $\lambda \geq B\eta$, то уравнение (6, 1) имеет единственное решение x^* , и к нему сходится последовательность (6, 28).

§ 7. Результаты Бодевига и других

Бодевиг^[16] в своей работе сначала дает следующее определение меры быстроты сходимости некоторой последовательности.

Сходящаяся последовательность $x_1, \dots, x_n \rightarrow X$ называется сходящейся со степенью g , если существует предел

$$\lim \frac{d_{n+1}}{d_n^g} = c \neq 0,$$

где $d_n = x_n - X$.

Чтобы определить степень сходимости, нужно разложить d_{n+1} в ряд по степеням d_n . Первый член cd_n^g этого разложения определяет сте-

пень g и коэффициент c . Пусть далее $f(x)$ имеет корень X кратности p :

$$f(x) = (x - X)^p g(x), \quad (7, 1)$$

где $g(x) \neq 0$. Тогда обобщенная формула Ньютона в окрестности корня кратности p есть

$$x_{n+1} = x_n - p \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}. \quad (7, 2)$$

Рассмотрим итерацию

$$x_{n+1} = x_n - a \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}, \quad (7, 3)$$

где a — некоторое произвольное число.

Для исследования характера сходимости последовательности $x_1, \dots, x_n \rightarrow X$, которая предполагается сходящейся, Бодевиг развывает $g(x)$ по степеням $d_n = X_n - X$, используя (7, 1) и (7, 3). Тогда $d_{n+1} = \left(1 - \frac{a}{p}\right)d_n + \frac{a}{p^2} \cdot \frac{g'(X)}{g(X)}d_n^2 + \dots$. Отсюда следует:

1) В окрестности корня кратности p формула (7, 3) дает последовательность, которая сходится квадратично к корню (если она вообще сходится) только для $a = p$. Сходимость тем лучше, чем больше p .

2) Для $a \neq p$ последовательность сходится линейно.

3) Для $a = 1$ сходимость квадратичная только около простого корня и линейная около кратного корня.

Формула, которая дает всегда квадратичную сходимость, не требуя знания кратности корня p , получается при выборе функции, которая имеет все корни $f(x)$ простыми и не имеет других корней. Такова $\frac{f}{f'}$. Тогда (7, 3) с $a = 1$ дает

$$x_{n+1} = x_n - \frac{ff'}{f'^2 - ff''}. \quad (7, 4)$$

Рассмотрим итерацию

$$x_{n+1} = x_n - \frac{ff'}{f'^2 - aff''}. \quad (7, 5)$$

Исследование характера сходимости для случая

$$f(x) = (x - X)^p g(X)$$

дает, как и выше,

$$d_{n+1} = c_1 d_n + c_2 d_n^2 + \dots,$$

где

$$c_1 = -\frac{(p-1)(a-1)}{(p+a-ap)}, \quad c_2 = -\frac{(a+ap-p)g'(X)}{p(a+p-ap)g^2(X)}.$$

При этом получаются следующие результаты:

1) Формула (7, 4) дает всегда квадратичную сходимость, так как $a = 1$ и $c_1 = 0$. Возрастание кратности p улучшает сходимость.

2) В случае простого корня формула (7, 5) с произвольным a будет всегда давать квадратичную сходимость.

3) При $a = \frac{1}{2}$ (7, 5) дает кубическую сходимость в случае простого корня с $c_3 = -\frac{1}{2} \cdot \frac{g''(X)}{g(X)} + \left[\frac{g'(X)}{g(X)}\right]^2$ и только линейную с $c = \frac{p-1}{p+1}$ в случае кратного корня.

М. Лагерр^[16] дал метод, который применим только к алгебраическим уравнениям, имеющим все корни действительные. Последовательные приближения определяются формулой

$$x_{k+1} = x_k - \frac{nf(x_k)}{f'(x_k) \pm [H(x_k)]^{1/2}}, \quad (7,6)$$

где n — степень уравнения $f(x) = 0$ и

$$H(x) \equiv (n-1)^2 f'^2(x) - n(n-1) f f''(x)$$

есть ковариант Гесса функции $f(x)$.

М. Лагерр доказал следующее:

- 1) процесс (7,6) всегда сходится для произвольного x_1 ;
- 2) каждый знак квадратного корня $\pm [H(x_k)]^{1/2}$ дает сходящуюся последовательность

$$x_1, x'_2, x'_3, \dots \rightarrow X',$$

$$x_1, x''_2, x''_3, \dots \rightarrow X'',$$

где X' — ближайший корень, лежащий слева от x_1 , а X'' — ближайший корень, лежащий справа от x_1 ;

3) сходимость — кубическая в случае простого корня и линейная в случае кратного;

4) чтобы получить кубическую сходимость в случае корня кратности p , нужно заменить $H(x_k)$ на $aH(x_k)$, где $a = \frac{n-p}{p(n-1)}$.

Позднее Ван дер Корпут^[17] доказал, что если уравнение имеет, по крайней мере, один корень кратности $\geq p$, то упомянутая формула, в которой $H(x)$ заменено на $aH(x)$, будет аппроксимировать только два корня кратности $\geq p$ налево от x_1 и направо от него, пропуская корни кратности $< p$. В случае корня кратности p сходимость кубическая, а при кратности $> p$ — линейная.

Далее Бодевиц поставил задачу определить некоторую функцию $F(x)$ так, чтобы $x_1, x_2, \dots, x_k, \dots$ была бы сходящаяся последовательностью степеней n , причем $x_{k+1} = F(x_k)$. Такой функцией оказалась

$$F(x) = x - fr + \frac{1}{2} f^2 P_r - \frac{1}{6} f^3 P_r^2 + \dots + \frac{(-1)^{n-1}}{(n-1)!} f^{(n-1)} P_r^{n-2} - f^n(x) g_n(x),$$

где $P = rD$, $r = \frac{1}{f'(x)}$, $D = \frac{d}{dx}$, $g_n(x)$ — произвольная функция. При этом сходимость будет степеней n , если X — простой корень.

§ 8. Результаты А. П. Доморяда

Для обобщения формулы Ньютона А. П. Доморяд^[18] поступает следующим образом.

Пусть x_0 — приближенное значение искомого корня x^* уравнения

$$f(x) = 0, \quad (8,1)$$

алгебраического или трансцендентного, причем

$$x^* = x_0 + \alpha \approx x_0, \quad (8,2)$$

т. е. α — погрешность приближенного равенства $x^* \approx x_0$. Так как $f(x_0 + \alpha) = 0$, то справедливо равенство при любом значении постоянного c :

$$x^* = x_0 + \alpha + cf(x_0 + \alpha) = x_0 + \alpha + c \left[f(x_0) + f'(x_0)\alpha + \frac{f''(\xi)}{2!} \alpha^2 \right] = \\ = x_0 + cf(x_0) + \alpha [1 + cf'(x_0)] + c \frac{f''(\xi)}{2!} \alpha^2 \quad (x_0 < \xi < x^*). \quad (8,3)$$

Если взять

$$c = -\frac{1}{f'(x_0)}, \quad (8,4)$$

то

$$x^* = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)} - \frac{f''(\xi)}{2f'(x_0)} \alpha^2 = x_1 + \alpha_1 \approx x_1, \quad (8,3')$$

где $x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}$ — новое (ньютоновское) приближение к искомому корню, а

$$\alpha_1 = -\frac{f''(\xi)}{2f'(x_0)} \alpha^2 \quad (8,5)$$

есть погрешность приближенного равенства $x^* \approx x_1$.

Если же написать равенство (8,2) в виде

$$x^* = x_0 + \alpha + (c_1 + c_2 \alpha) f(x_0 + \alpha) = \\ = x_0 + \alpha + (c_1 + c_2 \alpha) \left[f(x_0) + f'(x_0)\alpha + \frac{f''(x_0)}{2!} \alpha^2 + \frac{f'''(\xi)}{3!} \alpha^3 \right], \quad (8,6)$$

или, вводя обозначения

$$f(x_0) = F, \quad f'(x_0) = F', \quad \frac{f''(x_0)}{2!} = F'', \quad \frac{f'''(\xi)}{3!} = F'''(\xi) \quad (8,7)$$

в виде

$$x^* = x_0 + c_1 F + \alpha [1 + c_1 F' + c_2 F'] + \alpha^2 [c_1 F'' + c_2 F''] + \\ + \alpha^3 [c_1 F'''(\xi) + c_2 F'''(\xi)], \quad (8,8)$$

то, выбрав c_1 и c_2 так, чтобы обратились в нуль коэффициенты при α и α^2 , получим равенство

$$x^* = x_0 - \frac{FF'}{F'^2 - FF''} + \frac{\alpha^3 [F''' - F'F'''(\xi)] + \alpha^4 F''F'''(\xi)}{F'^2 - FF''} \quad (8,9)$$

или

$$x^* = x_1^* + \alpha_1^* \approx x_1^*, \quad (8,10)$$

где

$$x_1^* = x_0 - \frac{FF'}{F'^2 - FF''} = x_0 - \frac{2f(x_0)f'(x_0)}{2[f'(x_0)]^2 - f(x_0)f''(x_0)} \quad (8,11)$$

и

$$\alpha_1^* = \frac{\alpha^3 [F''' - F'F'''(\xi)] + \alpha^4 F''F'''(\xi)}{F'^2 - FF''} \quad (8,12)$$

Если же взять множитель при $f(x_0 + \alpha)$ в равенстве типа (8,6) в виде $c_1 + c_2 \alpha + c_3 \alpha^2$, то можно получить

$$x^* = x_1^{**} + \alpha_1^{**} \approx x_1^{**}, \quad (8,13)$$

где

$$x_1^{**} = x_0 - \frac{\begin{vmatrix} F'F \\ F''F' \\ F'''F'' \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} F & F'F \\ F'' & F'F' \\ F''' & F''F'' \end{vmatrix}}, \quad (8,14)$$

а α_1^{**} зависит от α^4 , α^5 и α^6 . Формулы (8,5) и (8,12) можно применить для оценки верхней границы погрешности приближенных значений x_1 и x_1^* искомого корня. Зная, что $|\alpha| < j$ (где j равна 0.1 или 0.01 и т. п.), определяют сначала границы, в которых заключена $f''(\xi)$ или $f'''(\xi)$, а затем ищут по формулам (8,5) или (8,10) верхнюю границу для $|\alpha_1|$ или для $|\alpha_1^*|$.

Глава II

МЕТОД КАСАТЕЛЬНЫХ ГИПЕРБОЛ

Рассмотрим уравнение

$$P(x) = 0, \quad (1)$$

где $P(x)$ — нелинейная операция, имеющая производные до 3-го порядка в смысле Фреше, переводящая элементы нормированного пространства X типа Бахана в элементы нормированного пространства Y того же типа. Для получения итеративного процесса возьмем два равенства.

$$P(x) = P(x_0) + P'(x_0)(x - x_0) + R(x) = 0; \quad (2)$$

$$P(x) = P(x_0) + P'(x_0)(x - x_0) + \frac{1}{2}P''(x_0)(x - x_0)^2 + R_1(x) = 0. \quad (3)$$

Допустим, что $P'(x_0)$ имеет обратную операцию $[P'(x_0)]^{-1} = \Gamma_0$. Умножим (2) слева на линейный оператор $\frac{1}{2}P''(x_0)(x - x_0)\Gamma_0$ и вычтем (3):

$$\begin{aligned} & \left(\frac{1}{2}P''(x_0)(x - x_0)\Gamma_0 - I \right) P(x_0) + \\ & + \frac{1}{2}P''(x_0)(x - x_0)^2 - \frac{1}{2}P''(x_0)(x - x_0)^2 - P'(x_0)(x - x_0) + \\ & + \frac{1}{2}P''(x_0)(x - x_0)\Gamma_0 R(x) - R_1(x) = 0. \end{aligned}$$

Отбросив два последних члена и используя симметричность операции $P''(x_0)$, получим следующее уравнение:

$$\left[P'(x_0) - \frac{1}{2}P''(x_0)\Gamma_0 P(x_0) \right] (x - x_0) + P(x_0) = 0,$$

или

$$\left[I - \frac{1}{2}\Gamma_0 P''(x_0)\Gamma_0 P(x_0) \right] (x - x_0) + \Gamma_0 P(x_0) = 0. \quad (4)$$

Таким образом, предполагая существование обратной операции

$$Q_0 = \left[I - \frac{1}{2}\Gamma_0 P''(x_0)\Gamma_0 P(x_0) \right]^{-1},$$

имеем

$$x_1 - x_0 + Q_0 \Gamma_0 P(x_0) = 0. \quad (5)$$

Аналогичным образом выражаются последовательно одно через другое и дальнейшие приближения

$$x_{n+1} - x_n + Q_n \Gamma_n P(x_n) = 0. \quad (5')$$

Условия сходимости последовательности x_n к точному решению и одновременно достаточные условия для существования этого решения дает следующая теорема.

Теорема 1. Пусть для начального приближения выполнены условия: 1) для элемента x_0 — начального приближения $P'(x_0)$ имеет обратную операцию Γ_0 и $\|\Gamma_0\| \leq B_0$; 2) существует операция

$$Q_0 = \left[I - \frac{1}{2}\Gamma_0 P''(x_0)\Gamma_0 P(x_0) \right]^{-1},$$

причем $\|Q_0 \Gamma_0 P(x_0)\| \leq \eta_0$; 3) $\sup \|P''(x)\| \leq M$, $\sup \|P'''(x)\| \leq N$ в области g , определяемой неравенством $\|x - x_0\| \leq 2\eta_0$; 4) $h_0 = B_0 M \eta_0 \leq \frac{1}{2}$; 5) $R_0 = \left[\frac{N}{M^2 B_0} (2 + h_0) + 3 \right] (1 + h_0) \leq 9$. Тогда уравнение (1) в области g имеет решение x^* , к которому сходится процесс касательных гипербол (5'), причем быстрота сходимости определяется неравенством

$$\|x^* - x_n\| < \frac{1}{2^{n-1}} (2h_0)^{3^{n-1} - 1} \eta_0. \quad (6)$$

Доказательство. Покажем, что при переходе от x_0 к x_1 условия 1)–5) не нарушаются.

На основании 5) и 2) $\|x_1 - x_0\| \leq \eta_0$. Докажем существование операции Γ_1 (это доказательство принадлежит Л. В. Канторовичу). Имеем

$$\begin{aligned} \|\Gamma_0 [P'(x_0) - P'(x_1)]\| & \leq \|\Gamma_0\| \|P'(x_0) - P'(x_1)\| \leq \\ & \leq B_0 (\sup \|P''(\bar{x})\|) \|x_1 - x_0\| \leq B_0 M \eta_0 = h_0 < 1 \\ \bar{x} & = x_0 + \theta(x_1 - x_0) \\ 0 & \leq \theta \leq 1. \end{aligned}$$

Отсюда, на основании теоремы Банаха, операция

$$H = I - \Gamma_0 (P'(x_0) - P'(x_1))$$

имеет обратную операцию и

$$\|H^{-1}\| \leq \frac{1}{1 - h_0}.$$

Тогда операция

$$\begin{aligned} H^{-1} \Gamma_0 & = [I - \Gamma_0 (P'(x_0) - P'(x_1))]^{-1} \cdot [P'(x_0)]^{-1} = \\ & = \{ P'(x_0) [I - \Gamma_0 (P'(x_0) - P'(x_1))] \}^{-1} = \\ & = [P'(x_0) - (P'(x_0) - P'(x_1))]^{-1} = [P(x_1)]^{-1} = \Gamma_1, \end{aligned}$$

а

$$\|\Gamma_1\| \leq \|H^{-1} \Gamma_0\| \leq \|H^{-1}\| \cdot \|\Gamma_0\| \leq \frac{B_0}{1 - h_0} = B_1.$$

Таким образом, условие 1) выполнено для точки x_1 .

Далее справедливо неравенство

$$\left\| \frac{1}{2} \Gamma_0 P''(x_0)(x_1 - x_0) \right\| \leq \frac{B_0 M \eta_0}{2} = \frac{h_0}{2} \leq \frac{1}{4} < 1.$$

На основании теоремы Банаха операция

$$Q = I - \frac{1}{2} \Gamma_0 P''(x_0)(x_1 - x_0)$$

имеет обратную операцию, причем

$$\|Q^{-1}\| = \left\| \left\{ I - \frac{1}{2} \Gamma_0 P''(x_0)(x_1 - x_0) \right\}^{-1} \right\| \leq \frac{1}{1 - \frac{h_0}{2}}.$$

Для дальнейшего доказательства введем операцию

$$f_0(x) = Q^{-1} \left[I - \frac{1}{2} \Gamma_0 P''(x_0)(x - x_0) \right] \Gamma_0 P(x).$$

В силу дифференцируемости $P(x)$, операция $f_0(x)$ будет иметь производные до 3-го порядка включительно. Рассматривая выражение $P''(x_0)(x - x_0) \Gamma_0 P(x)$ как произведение и применяя правило дифференцирования произведения, данное Гавуриным [19], получим

$$f_0(x_0) = Q^{-1} \Gamma_0 P(x_0);$$

$$f_0'(x) \Delta x = Q^{-1} \left\{ \left[I - \frac{1}{2} \Gamma_0 P''(x_0)(x - x_0) \right] \Gamma_0 P'(x) \Delta x - \frac{1}{2} \Gamma_0 P''(x_0) \Delta x \Gamma_0 P(x) \right\};$$

$$f_0''(x_0) = Q^{-1} \left[\Gamma_0 P''(x_0) - \frac{1}{2} \Gamma_0 P''(x_0) \Gamma_0 P(x_0) \right] = Q^{-1} \left[I - \frac{1}{2} \Gamma_0 P''(x_0) \Gamma_0 P(x_0) \right];$$

$$f_0''(x) \Delta x \Delta_1 x = Q^{-1} \left\{ \left[I - \frac{1}{2} \Gamma_0 P''(x_0)(x - x_0) \right] \Gamma_0 P''(x) \Delta x \Delta_1 x - \right.$$

$$\left. - \frac{1}{2} \Gamma_0 P''(x_0) \Delta_1 x \Gamma_0 P'(x) \Delta x - \frac{1}{2} \Gamma_0 P''(x_0) \Delta x \Gamma_0 P'(x) \Delta_1 x \right\};$$

$$f_0'''(x_0) = Q^{-1} [\Gamma_0 P''(x_0) - \Gamma_0 P''(x_0)] = 0;$$

$$f_0'''(x) \Delta x \Delta_1 x \Delta_2 x = Q^{-1} \left\{ \left[I - \frac{1}{2} \Gamma_0 P''(x_0)(x - x_0) \right] \Gamma_0 P'''(x) \Delta x \Delta_1 x \Delta_2 x - \right.$$

$$\left. - \frac{1}{2} \Gamma_0 P''(x) \Delta_2 x \Gamma_0 P''(x) \Delta x \Delta_1 x - \frac{1}{2} \Gamma_0 P''(x_0) \Delta_1 x \Gamma_0 P'''(x) \Delta x \Delta_2 x - \right.$$

$$\left. - \frac{1}{2} \Gamma_0 P''(x_0) \Delta x \Gamma_0 P''(x) \Delta_1 x \Delta_2 x \right\};$$

$$f_0'''(\xi_0) = Q^{-1} \left\{ \left[I - \frac{1}{2} \Gamma_0 P''(x_0)(\xi_0 - x_0) \right] \Gamma_0 P'''(\xi_0) - \frac{3}{2} \Gamma_0 P''(x_0) \Gamma_0 P''(\xi_0) \right\}.$$

Имеем

$$\|f_0(x_1) - f_0(x_0) - f_0'(x_0)(x_1 - x_0) - \frac{1}{2} f_0''(x_0)(x_1 - x_0)^2\| \leq \left\| \frac{1}{6} f_0'''(\xi_0)(x_1 - x_0)^3 \right\|,$$

где

$$\xi_0 = \theta(x_1 - x_0); \quad 0 \leq \theta \leq 1,$$

или

$$\|f_0(x_1) - f_0(x_0) - f_0'(x_0)(x_1 - x_0)\| \leq \frac{1}{6} \|f_0'''(\xi_0)(x_1 - x_0)^3\|.$$

Но в силу (5)

$$f_0(x_0) - f_0'(x_0)(x_1 - x_0) = 0;$$

$$\|f_0(x_1)\| \leq \frac{1}{6} \|f_0'''(\xi_0)(x_1 - x_0)^3\|.$$

или

$$\|\Gamma_0 P(x_1)\| \leq \frac{1}{6} \|Q^{-1}\| \left\| \left[I - \frac{1}{2} \Gamma_0 P''(x_0)(\xi_0 - x_0) \right] \Gamma_0 P'''(\xi_0) - \frac{3}{2} \Gamma_0 P''(x_0) \Gamma_0 P''(\xi_0) \right\| \|x_1 - x_0\|^3.$$

Таким образом,

$$\|\Gamma_0 P(x_1)\| \leq \frac{1}{6} \left\| \left[I - \frac{1}{2} \Gamma_0 P''(x_0)(x_1 - x_0) \right]^{-1} \right\| \left\| \left[I - \frac{1}{2} \Gamma_0 P''(x_0)(\xi_0 - x_0) \right] \Gamma_0 P'''(\xi_0) - \frac{3}{2} \Gamma_0 P''(x_0) \Gamma_0 P''(\xi_0) \right\| \|x_1 - x_0\|^3,$$

$$\|\Gamma_0 P(x_1)\| \leq \frac{9h_0^2 \eta_0}{12 \left(1 - \frac{h_0}{2}\right) (1 + h_0)}.$$

Но

$$\Gamma_1 P(x_1) = H^{-1} \Gamma_0 P(x_1)$$

и

$$\|\Gamma_1 P(x_1)\| \leq \|H^{-1}\| \|\Gamma_0 P(x_1)\| \leq \frac{9h_0^2 h_0}{12 \left(1 - \frac{h_0}{2}\right) (1 - h_0) (1 + h_0)} = \delta_1.$$

Так как $\delta_1 \leq \frac{\eta_0}{2}$, то

$$\left\| \frac{1}{2} \Gamma_1 P''(x_1) \Gamma_1 P(x_1) \right\| \leq \frac{B_0 M \delta_1}{2(1 - h_0)} \leq \frac{h_0}{4(1 - h_0)} \leq \frac{1}{4} < 1.$$

Снова применяя теорему Банаха, получим, что операция

$$I - \frac{1}{2} \Gamma_1 P''(x_1) \Gamma_1 P(x_1)$$

имеет обратную операцию и

$$\left\| \left\{ I - \frac{1}{2} \Gamma_1 P''(x_1) \Gamma_1 P(x_1) \right\}^{-1} \right\| = \|Q_1\| \leq \frac{1}{1 - MB_0 \delta_1}.$$

Отсюда

$$\|Q_1 \Gamma_1 P(x_1)\| \leq \|Q_1\| \|\Gamma_1 P(x_1)\| = \eta_1 \leq \frac{\delta_1}{1 - MB_0 \delta_1},$$

$$\eta_1 \leq 2h_0^2 \eta_0 \leq \frac{\eta_0}{2}.$$

Таким образом, условие 2) также выполнено для элемента x_1 .
Условие 4) проверяется непосредственно:

$$h_1 = B_1 \eta_1 M = 2B_0 \cdot 2h_0^2 \eta_0 M = 4h_0^3 \leq h_0 \leq \frac{1}{2}.$$

Условие 3) (как легко доказать) также выполняется для элемента x_1 и $R_1 < R_0 < 9$.

Итак, все условия 1)–5) выполняются для элемента $x = x_1$, с заменой чисел B_0, η_0, h_0 и R_0 на B_1, η_1, h_1, R_1 .

Отсюда имеем ряд соотношений

$$B_n = \frac{B_{n-1} - 1}{1 - h_{n-1}}; \quad (7)$$

$$\eta_n < 2h_{n-1}^2 \eta_{n-1}; \quad (8)$$

$$h_n \leq 4h_{n-1}^3; \quad (9)$$

$$R_n = \left[\frac{N}{M^2 B_n} (2 + h_n) + 3 \right] (1 + h_n) \leq 9. \quad (10)$$

(8) вместе с (9) дает

$$\eta_n \leq \frac{1}{2^n} (2h_0)^{3^n-1} \eta_0. \quad (11)$$

Далее, зная, что $\|x_{n+1} - x_n\| \leq \eta_n$, имеем

$$\|x_{n+p} - x_n\| \leq \eta_n + \dots + \eta_{n+p-1} \leq \frac{1}{2^{n-1}} (2h_0)^{3^n-1} \eta_0 \left(1 - \frac{1}{2^p}\right). \quad (12)$$

Таким образом, существует

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x^*.$$

Переходя к пределу в (12) при $p \rightarrow \infty$, получим

$$\|x^* - x_n\| \leq \frac{1}{2^{n-1}} (2h_0)^{3^n-1} \eta_0.$$

Используя условия

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|x_{n+1} - x_n\| = 0, \quad \| \Gamma_0 \| \leq B_0,$$

можно доказать, что x^* является решением уравнения (1).

Теорема 2. При выполнении условий 1)–5) предыдущей теоремы в области $\|x - x_0\| \leq \sqrt{2} \eta_0$ уравнение (1) имеет единственное решение.

Доказательство. В силу того, что

$$\|f_n(x) - f_n(x_n) - f'_n(x_n)(x - x_n)\| \leq \frac{1}{6} \|f''_n(\xi_n)(x - x_n)^3\| \quad (13)$$

$$\begin{aligned} (\xi_n = x_n + \theta_n(x - x_n)) \\ 0 \leq \theta_n \leq 1 \end{aligned}$$

$$f_n(x) = \left[I - \frac{1}{2} \Gamma_n P''(x_n)(x - x_n) \right] \Gamma_n P(x), \quad (14)$$

для любого решения r уравнения $P(x) = 0$ имеем

$$\|f_n(x_n) - f'_n(x_n)(r - x_n)\| \leq \frac{1}{6} \|f''_n(\xi_n)(r - x_n)^3\|. \quad (15)$$

Используя равенство

$$f_n(x_n) + f'_n(x_n)(x_{n+1} - x_n) = 0,$$

получим

$$\|f'_n(x_n)(r - x_{n+1})\| \leq \frac{1}{6} \|f''_n(\xi_n)(r - x_n)^3\|.$$

Используя выкладки теоремы 1, имеем

$$\|r - x_{n+1}\| \leq 2^{2n} M^2 B_0^2 \|r - x_n\|^3, \quad (16)$$

или

$$\|r - x_{n+1}\| \leq \frac{2^{2n-2}}{\eta_0^2} \|r - x_n\|^3. \quad (17)$$

Пусть $\|r - x_0\| \leq \rho \eta_0$. Тогда на основании (17) методом индукции докажем, что $\|r - x_{n+1}\| \leq \frac{1}{2^{\frac{2n+1}{2}}} \left(\frac{\rho}{\sqrt{2}}\right)^{3^{n+1}} \eta_0$, откуда следует, что если

$\rho \leq \sqrt{2}$, то $\lim_{n \rightarrow \infty} \|r - x_{n+1}\| = 0$, т. е. $r = x^*$, что и требовалось доказать.

Рассмотрим применение метода касательных гипербол.

1. Пусть $P(x) = 0$ — алгебраическое или трансцендентное уравнение, где $P(x)$ допускает производную до 3-го порядка. Тогда последовательные приближения определяются итерацией

$$x_{n+1} = x_n - \frac{2P'(x_n)P(x_n)}{2[P'(x_n)]^2 - P''(x_n)P(x_n)}.$$

Теорема 3. Пусть для начального приближения x_0 выполнены следующие условия: 1) $\frac{1}{|P'(x_0)|} \leq B_0$; 2) $\left| \frac{2P'(x_0)P(x_0)}{2[P'(x_0)]^2 - P''(x_0)P(x_0)} \right| \leq \eta_0$; 3) в области G , определяемой неравенством $|x - x_0| < 2\eta_0$, имеют место условия

$$\sup_{x \in G} |P''(x)| \leq M \quad \text{и} \quad \sup_{x \in G} |P'''(x)| \leq N;$$

4) $h_0 = B_0 M \eta_0 \leq \frac{1}{2}$; 5) $R \left[\frac{N}{M^2 B_0} (2 + h_0) + 3 \right] (1 + h_0) \leq 9$. Тогда уравнение (1) в области G имеет решение x^* , к которому сходится процесс касательных гипербол, причем быстрота сходимости определяется неравенством

$$\|x^* - x_n\| < \frac{1}{2^{n-1}} (2h_0)^{3^n-1} \eta_0.$$

В области $|x - x_0| \leq \sqrt{2} \eta_0$ решение единственно.

Пример 1. Для уравнения $x^5 + 4x^4 - 2x^3 + 10x^2 - 2x - 962 = 0$, выбирая за $x_0 = 3.1$, имеем $h_0 = 0.41958 < \frac{1}{2}$. При этом уже первое приближение дает $x_1 \approx 3.35557$, тогда как истинное значение корня $x = 3.35485$. Однако для выбранной точки $x = 3.1$ условия теоремы Л.В. Канторовича в случае процесса Ньютона не выполняются.

Пример 2. Для уравнения $x \lg_{10} x - 4.7772393 = 0$, взяв $x_0 = 6$, имеем $h_0 = 0.00548 < \frac{1}{2}$ и $R_0 = 8.66 < 9$, и первое приближение дает $x_1 \approx 6.089112$, а истинное значение корня $x = 6.089114$. Процесс же Ньютона при $x_0 = 6$ дает $x_1 = 6.08936$.

2. Рассмотрим нелинейное интегральное уравнение

$$x(s) = \int_a^b K(s, t, x(t)) dt, \quad (18)$$

где K — непрерывная функция своих аргументов, трижды дифференцируемая по x . Введем операцию

$$P(x) = x(s) - \int_a^b K(s, t, x(t)) dt. \quad (19)$$

В этом случае последовательные приближения будут определяться следующей итерацией, если (18) записать в виде $(I - K)x = 0$:

$$\left[I - K'_x(x_n) + \frac{1}{2} K''_{xx}(x_n) [I - K'_x(x_n)]^{-1} (I - K) x_n \right] (x_{n+1} - x_n) + (I - K) x_n = 0. \quad (20)$$

Если операцию (19) рассматривать как операцию из C в C , то получим следующую теорему.

Теорема 4. Если выполнены условия: 1) для начального значения $x_0(s)$ ядро $K'_x(s, t, x_0(t)) = k(s, t)$ имеет резольвенту $G(s, t)$,

причем $\int_a^b |G(s, t)| dt \leq B$; 2) $|\epsilon_0(s)| = |x_0(s) - \int_a^b K(s, t, x_0(t)) dt| \leq \bar{\eta}$;

3) ядро $K'_x(x_0) - \frac{1}{2} K''_{xx}(x_0) [I - K'_x(x_0)]^{-1} (I - K) x_0$ имеет резольвенту

$R(s, t)$, причем $\int_a^b |R(s, t)| dt \leq C$; 4) $|K''_{xx}(s, t, u)| \leq M$, $|K'''_{xxx}(s, t, u)| \leq N$; $\eta_0 = (c+1)\bar{\eta}$;

$$5) h_0 = (1+B)(1+c)\bar{\eta}M(b-a) \leq \frac{1}{2};$$

$$6) R_0 = \left[\frac{N}{M^2(b-a)(1+B)} (2+h_0) + 3 \right] (1+h_0) \leq 9,$$

то процесс (20) для интегрального уравнения (18) сходится с быстротой (6) к решению этого уравнения, которое существует в области $|x^*(s) - x_0(s)| \leq 2(c+1)\bar{\eta}$ и единственно в области $|x^*(s) - x_0(s)| \leq \sqrt{2}(c+1)\bar{\eta}$.

Если рассматривать операцию (19) в пространстве L^2 , то справедлива следующая теорема.

Теорема 4а. Пусть выполнены условия:

$$1) \int_a^b \left[x_0(s) - \int_a^b K(s, t, x_0(t)) dt \right]^2 ds \leq \bar{\eta}^2;$$

2) $\max_n \frac{|\lambda_n|}{|1-\lambda_n|} \leq B$, где λ_n — собственные числа ядра $K'_x(s, t, x_0(t)) = k(s, t)$, если последнее симметрично, и $\max_n \sqrt{\frac{\lambda_n}{|1-\lambda_n|}} \leq B$, где

λ_n — собственные числа ядра $\bar{k}(s, t) = k(s, t) + k(t, s) - \int_a^b k(u, s)k(u, t) du$

в общем случае; 3) $\int_a^b \left(\int_a^b K''_{xx}(s, t, u) dt \right)^2 ds \leq M^2$, $\int_a^b \left(\int_a^b K'''_{xxx}(s, t, u) dt \right)^2 ds \leq N^2$

в области $|u - u_0| \leq 2\eta_0$, где $\eta_0 = C\bar{\eta}$; 4) $\max_n \frac{|\mu_n|}{|1-\mu_n|} \leq C$, где μ_n — соб-

ственные числа ядра $K'_x(x_0) - \frac{1}{2} K''_{xx}(x_0) [I - K'_x(x_0)]^{-1} (I - K) x_0 = k_1(s, t)$, если оно симметрично, и $\max_n \sqrt{\frac{\mu_n}{|1-\mu_n|}} \leq C$, где μ_n — собственные числа ядра

$$\bar{k}_1(s, t) = k_1(s, t) + k_1(t, s) - \int_a^b k_1(u, s)k_1(u, t) du$$

в общем случае; 5) $h_0 = BC\bar{\eta}M \leq \frac{1}{2}$; 6) $R_0 \leq 9$. Тогда уравнение (18) имеет решение, к которому сходится процесс последовательных приближений.

Пример. $x(s) = 1 + 0.5146s^2 + s^2 \int_0^1 t \operatorname{arctg} x(t) dt$. Если взять за $x_0(s) = 2.25$, то получим $h_0 = 0.0568 < 0.5$; $R_0 = 7.5673$ и $x_1 = 1 + 1.0096s^2$ ($x^* = 1 + s^2$).

Применим теперь аналог процесса касательных гипербол для решения систем ν алгебраических уравнений с ν неизвестными:

$$\eta^{(k)} = f_k(\xi^{(1)}, \dots, \xi^{(\nu)}) \quad (k=1, \dots, \nu).$$

Последовательные приближения для корня — первое приближение $(\xi_1^{(1)}, \dots, \xi_1^{(\nu)})$ по нулевому $(\xi_0^{(1)}, \dots, \xi_0^{(\nu)})$ — определяются из системы уравнений для поправок

$$\sum_{i=1}^{\nu} \left[\left(\frac{\partial f_k}{\partial \xi_i} \right)_0 - \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{\nu} \left(\frac{\partial^2 f_k}{\partial \xi_i \partial \xi_j} \right)_0 \sum_{\alpha=1}^{\nu} \frac{A_{\alpha j}}{\Delta} (f_{\alpha})_0 \right] \Delta \xi_i + (f_k)_0 = 0 \quad (k=1, \dots, \nu),$$

где Δ — определитель матрицы $\left\| \left(\frac{\partial f_i}{\partial \xi_j} \right)_0 \right\|$ и A_{ij} — алгебраические дополнения его элементов. Будем рассматривать данную систему как одно уравнение $y = P(x) = 0$, где операция P переводит ν -мерное пространство в ν -мерное. Тогда имеют место следующие теоремы.

Теорема 5. Если выполнены условия 1) $|f_i(\xi_0^{(1)}, \dots, \xi_0^{(\nu)})| < \bar{\eta}$ ($i=1, 2, \dots, \nu$); 2) $\Delta \neq 0$ и $\max_i \frac{1}{|\Delta|} \sum_{j=1}^{\nu} |A_{ij}| \leq B$; 3) матрица

$\left\| \left(\frac{\partial f_k}{\partial \xi_i} \right)_0 - \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{\nu} \left(\frac{\partial^2 f_k}{\partial \xi_i \partial \xi_j} \right)_0 \sum_{\alpha=1}^{\nu} \frac{A_{\alpha j}}{\Delta} (f_{\alpha})_0 \right\|$ имеет определитель Δ^* и если

выполнено условие $\max_i \frac{1}{|\Delta^*|} \sum_{j=1}^{\nu} |A_{ij}^*| \leq C$; 4) $\max \left| \frac{\partial^2 f_k}{\partial \xi_i \partial \xi_j} \right| \leq M$,

$\max \left| \frac{\partial^3 f_k}{\partial \xi_i \partial \xi_j \partial \xi_k} \right| \leq N$ в интересующей нас области; 5) $h_0 = BC\bar{\eta}M^2 \leq \frac{1}{2}$;

6) $R_0 \leq 9$, то данная алгебраическая система имеет решение, которое может быть найдено с помощью процесса касательных гипербол. Другая теорема о системах алгебраических уравнений получится, если мы применим метрику R^1 .

¹ R^{ν} — пространство Эвклида.

Теорема 5а. При выполнении условий 1) матрица $\left\| \left(\frac{\partial f_i}{\partial \xi^j} \right)_0 \right\|$ имеет обратную $\left\| \frac{A_{ij}}{\Delta} \right\|$; причем $\frac{1}{|\Delta|} \left(\sum_{i,j=1}^v A_{ij}^2 \right)^{1/2} \leq B$; 2) матрица $\left\| \left(\frac{\partial f_k}{\partial \xi^i} \right)_0 \right\| - \frac{1}{2} \sum_{j=1}^v \left(\frac{\partial^2 f_k}{\partial \xi^i \partial \xi^j} \right)_0 \sum_{\alpha=1}^v \frac{A_{\alpha j}}{\Delta} (f_{\alpha})_0$ имеет обратную и $\sum_{i=1}^v (\xi_1^{(i)} - \xi_0^{(i)})^2 \leq \eta^2$;

3) $\sum_{i,j,k=1}^v \left(\frac{\partial^2 f_i}{\partial \xi^j \partial \xi^k} \right)^2 \leq M^2$, $\sum_{i,j,k,\alpha=1}^v \left(\frac{\partial^3 f_i}{\partial \xi^j \partial \xi^k \partial \xi^{\alpha}} \right)^2 \leq N^2$; 4) $R_0 \leq 9$;

5) $h_0 = BM\eta \leq \frac{1}{2}$, то процесс касательных гипербол сходится к решению системы

$$x^* = (\xi^{(1)*}, \dots, \xi^{(v)*}),$$

которое лежит в области

$$\|x^* - x_0\| = \left[\sum_{i=1}^v (\xi^{(i)*} - \xi_0^{(i)})^2 \right]^{1/2} \leq 2\eta.$$

Пример. $f(x, y) = 2x^3 - y^2 - 3.48975 = 0$; $\varphi(x, y) = x^2 - 2y^3 - y - 0.36325 = 0$. Возьмем за $x_0 = 1.27$; $y_0 = 0.67$. Тогда $h_0 = 0.18088 < 0.5$; $R_0 = 3.8993 < 9$; $x_1 = 1.2506$ и $y_1 = 0.6509$. Истинные значения $x^* = 1.25$ и $y^* = 0.65$.

Глава III

О ПОСТРОЕНИИ „ВЕРХНИХ“ И „НИЖНИХ“ ФУНКЦИЙ ДЛЯ РЕШЕНИЯ ДАННОГО УРАВНЕНИЯ

Для построения „нижних“ и „верхних“ функций для решений нелинейных функциональных уравнений можно дать следующую схему.

Пусть $P(u) = 0$ — некоторое нелинейное функциональное уравнение, где P — операция, переводящая элементы некоторого полупорядоченного пространства u , определенного в некоторой вещественной области $D \subset u$, в другое пространство v . Если при этом 1) доказана теорема существования и единственности решения этого уравнения в области D , исходя из сходимости некоторого итерационного процесса

$$u_n = A(u_{n-1}), \quad (1)$$

где $A(u)$ — вещественный оператор, имеющий первую производную в смысле Фреше в области D ; 2) $\frac{dA(u)}{du}$ — линейный оператор, сохраняющий знак отображений в области D , то две последовательности функций, построенные на основании (1), исходя из начальных функций \bar{u}_0 и \underline{u}_0 таких, что

$$\bar{u}_0 - A(\bar{u}_0) > 0, \quad \underline{u}_0 - A(\underline{u}_0) < 0 \quad (2)$$

будут соответственно последовательностями „верхних“ и „нижних“ функций для решения уравнения $P(u) = 0$.

Доказательство. Как известно,

$$A(u + \Delta u) - A(u) = \frac{dA(u + \theta \Delta u)}{du} \Delta u, \quad (3)$$

где $\frac{dA}{du}$ — линейный оператор. Введем сокращенное обозначение $D(u) = u - A(u)$. Согласно (2), имеем

$$D(\bar{u}_0) = \bar{u}_0 - A(\bar{u}_0) > 0, \quad (4)$$

$$D(\underline{u}_0) = \underline{u}_0 - A(\underline{u}_0) < 0. \quad (5)$$

Рассмотрим сначала случай (4). На основании (1) следует, что $\bar{u}_0 > \bar{u}_1$. Докажем, что $D(\bar{u}_1) > 0$. Согласно (3), имеем

$$\begin{aligned} D(\bar{u}_1) &= \bar{u}_1 - A(\bar{u}_1) = A(\bar{u}_0) - A(\bar{u}_1) = \\ &= \frac{d}{du} A[\bar{u}_0 + \theta(\bar{u}_0 - \bar{u}_1)](\bar{u}_0 - \bar{u}_1). \end{aligned}$$

Но так как $\bar{u}_0 > \bar{u}_1$ и линейный оператор $\frac{dA}{du}$ в области D сохраняет знак отображаемой функции, то $D(\bar{u}_1) > 0$. Следовательно, $\bar{u}_0 > \bar{u}_1 > \bar{u}_2$ и т. д. Аналогично, исходя из (5), мы доказываем, что $\underline{u}_0 < \underline{u}_1 < \underline{u}_2$. Далее следует, что если, например, итерация (1) по отношению к уравнению $P(u) = 0$ есть обычная итерация, т. е. если это уравнение имеет вид $u = A(u)$, то, как следует из результатов Л. В. Канторовича,

$$\lim \|u_n - \bar{u}_n\| \leq M\rho^n \quad (\rho < 1).$$

Применим вышесказанное к общему случаю процесса Ньютона. $\frac{dA}{du}$ имеет вид

$$\frac{dA}{du} = \Gamma(u) P'(u) \Gamma(u) P(u), \quad (6)$$

где $\Gamma(u)$ — операция, обратная операции $P'(u)$. Если операция (6) неотрицательную функцию переводит в неотрицательную, то последовательности \bar{u}_n и \underline{u}_n будут соответственно „нижними“ и „верхними“ функциями для решения u^* . В случае P -системы v алгебраических уравнений с v неизвестными получаем, что

$$A^i \xi^i = \sum_{k=1}^v \frac{A_{k\beta}}{\Delta} \sum_{i=1}^v \left(\sum_{j=1}^v \frac{\partial^2 f_k}{\partial \xi^i \partial \xi^j} \sum_{\alpha=1}^v \frac{A_{\alpha j}}{\Delta} f_{\alpha} \right) \xi^i \geq 0$$

в зависимости от того $\xi^i \geq 0$, где $f_k(\xi^{(1)} \dots \xi^{(v)}) = \eta^{(k)}$ ($k = 1, \dots, v$), а Δ — определитель матрицы $\left\| \frac{\partial f_i}{\partial \xi^j} \right\|$ и A_{ij} — алгебраические дополнения его элементов.

Пример. $f(x, y) = 4y^2 + y^3 - 3x^3 - 5x^2 - 19 = 0$, $\varphi(x, y) = 2x^2 + 3y^2 - y^3 + 2x - 12 = 0$, $x^* = 2$, $y^* = 3$. Предыдущие условия выполняются. Исходя из начальных условий $x_0 = 1$, $y_0 = 2$ и $x_0 = 3$, $y_0 = 4$, получаем последовательности „нижних“ и „верхних“ значений:

$x = 1.66,$	$y = 2.55,$	$x = 2.5285,$	$y = 3.5583,$
$x = 1.8131,$	$y = 2.8062,$	$x = 2.2662,$	$y = 3.3035,$
$x = 1.9174,$	$y = 2.9082,$	$x = 2.1695,$	$y = 3.189,$
$x = 1.9369;$	$y = 2.9277;$	$x = 2.092;$	$y = 3.102.$

В случае интегрального уравнения $(I - K)x = 0$ имеем

$$[I - K'(x)]^{-1} K''(x) ([I - K'_x(x)]^{-1} (I - K)x] \Delta x < 0$$

для „верхних“ функций и

$$[I - K'(x)]^{-1} K''_{xx}(x) ([I - K'_x(x)]^{-1} (I - K) x) \Delta x > 0$$

для „нижних“ функций. Для уравнения

$$x(s) = 0.55s + s \int_0^1 t [x^2(t) + x^3(t)] dt \quad (x^* = s)$$

эти условия выполняются. Имеем соответственно „нижние“ и „верхние“ функции:

$x = 0.5s,$	$x = 0.8827s,$
$x = 0.7291s,$	$x = 1.5s,$
$x = 0.8279s,$	$x = 1.2388s,$
$x = 0.8645s,$	$x = 1.1s,$
$x = 0.8752s,$	$x = 1.0323s.$

Из приведенной схемы вытекают и результаты, ранее полученные Б. Н. Бабкиным [20]. Действительно, в случае уравнения $\frac{dy}{dx} = f(x, y)$ Б. Н. Бабкин, строя последовательные приближения с помощью формул

$$v_n(x) = y_0 + \int_{x_0}^x f(x_1, v_{n-1}) dx;$$

$$u_n(x) = y_0 + \int_{x_0}^x f(x, u_{n-1}) dx,$$

получает последовательности „верхних“ и „нижних“ функций, если, кроме выполнения дифференциальных неравенств С. А. Чаплыгина [21], выполняется условие $\frac{\partial f}{\partial y} > 0$ в области, ограниченной кривыми $y = v(x)$, $y = u(x)$ и прямыми $x = x_0$, $x = x_1$, а это условие мы сразу получаем из выше приведенной нами схемы построения и „верхних“ и „нижних“

функций. В самом деле, здесь $A(v) = y_0 + \int_{x_0}^x f(x, v) dx$, а $A'(v) dv =$

$= \int_{x_0}^x f'_v(x, v) v dv dx$ ($x > x_0$). Чтобы $A'(v)$ сохраняла знак отображений, достаточно выполнения условия $f'_v > 0$. Аналогично этому получаем для

случая уравнения 2-го порядка $y'' = f(x, y, y')$ условия $\frac{\partial f}{\partial y} > 0$, $\frac{\partial f}{\partial y'} > 0$ в некоторой области D . Из указанной схемы, как частный случай, легко вытекают результаты С. С. Мусиной [22] о построении „нижних“ и „верхних“ функций в случае системы интегро-дифференциальных уравнений 1-го порядка

$$y'_i(s) = \lambda \left\{ f_i(s, y) + \int_a^b K_i(s, t) F_i(t, y) dt \right\} \quad (i = 1, \dots, n);$$

$$f_i(s, y) = f_i(s, y_1, y_2, \dots, y_n); \quad F_i(t, y) = F_i(t, y_1, y_2, \dots, y_n).$$

При этом достаточно выполнения условий

$$\lambda > 0; \quad \frac{\partial f_i}{\partial y^k} > 0; \quad K_i(s, t) \frac{\partial F_i}{\partial y^k} \geq 0.$$

О ПРИЛОЖЕНИИ ТЕОРИИ ЦЕПНЫХ ДРОБЕЙ К ИССЛЕДОВАНИЮ СХОДИМОСТИ НЕКОТОРЫХ ИТЕРАТИВНЫХ ПРОЦЕССОВ

§ 1. Об одной теореме существования корня алгебраического или трансцендентного уравнения

Для вещественного или комплексного уравнения

$$F(x) = 0 \quad (1, 1)$$

имеет место следующая теорема.

Теорема 1. Если для функции $F(x)$ постоянные $a, b, c > 0$ и точка x_0 , такие, что

$$q = \left| \frac{a}{b^2} \right| c \leq \frac{1}{4}, \quad (1, 2)$$

и в области g , определяемой неравенством

$$|x - x_0| \leq \frac{1 - \sqrt{1 - 4q}}{2q} \left| \frac{a}{b} \right| \leq 2 \left| \frac{a}{b} \right|, \quad (1, 3)$$

функция $F(x)$ непрерывна, а также имеет место неравенство

$$|F(x) - a - b(x - x_0)| \leq c|x - x_0|^2, \quad (1, 4)$$

то уравнение (1, 1) в области g имеет, по крайней мере, одно решение.

Доказательство. Уравнение (1, 1) перепишем в виде

$$a + b(x - x_0) + f(x)(x - x_0)^2 = 0, \quad (1, 5)$$

где

$$f(x) = \frac{F(x) - a - b(x - x_0)}{(x - x_0)^2}, \quad (1, 6)$$

и будем его решать итерацией

$$a + b(x_k - x_0) + f(x_{k-1})(x_{k-1} - x_0)(x_k - x_0) = 0. \quad (1, 7)$$

Введем сокращенные обозначения

$$y = -\frac{a}{b}, \quad (1, 8)$$

$$A_{k-1} = -\frac{1}{b} f(x_{k-1}), \quad (1, 9)$$

$$z_k = x_k - x_0. \quad (1, 10)$$

Имеем

$$z_k - A_{k-1} z_{k-1} z_k = y. \quad (1, 11)$$

Положим $H_k = A_{k-1} z_{k-1}$, откуда $|H_k| = |A_{k-1}| |z_{k-1}|$. На основании (1, 4) и (1, 9) в области g имеем

$$|H_k| \leq \frac{c}{|b|} |z_{k-1}|. \quad (1, 12)$$

Если $k=1$, то, согласно (1,10) и (1,11), $z_1=y$. Если $k=2$, то

$$z_2 - H_2 z_2 = y. \quad (1,13)$$

Но по (1,12) и (1,2) $|H_2| \leq \left| \frac{a}{b^2} \right| c \leq \frac{1}{4} < 1$. Потому уравнение (1,13) дает

$$|z_2| \leq \frac{|y|}{1-q}. \quad (1,14)$$

Далее, полагая в (1,12) $k=3$ и используя (1,14), имеем

$$|H_3| \leq \frac{c}{|b|} \cdot \frac{|y|}{1-q} = \frac{q}{1-q} = \lambda_2 < 1. \quad (1,15)$$

Потому при $k=3$ уравнение (1,11) дает $|z_3| \leq \frac{|y|}{1-\frac{q}{1-q}}$. При $k=4$

из (1,12) получим $|H_4| \leq \frac{q}{1-\frac{q}{1-q}} = \lambda_3 < 1$. Продолжая этот процесс

и пользуясь методом индукции, во-первых, будем иметь

$$|H_{n+1}| \leq \frac{q}{1-\frac{q}{1-\frac{q}{\dots \frac{q}{1-q}}}} = \lambda_n < 1, \quad (1,16)$$

где λ_n — подходящая дробь соответствующей цепной дроби. Во-вторых

$$|z_{n+1}| \leq \frac{\lambda_n}{q} |y|. \quad (1,17)$$

При этом, как известно [23,24], если $q < \frac{1}{4}$, то

$$\lambda_n = \lambda \frac{1-\delta^n}{1-\delta^{n+1}}, \text{ где } \lambda_2 < \lambda_3 < \dots < \lambda_n < \lambda,$$

и

$$\lambda = \lim \lambda_n = \frac{1}{2} - \sqrt{\frac{1}{4} - q}, \quad (1,18)$$

а $\delta = \frac{1-\sqrt{1-4q}}{1+\sqrt{1-4q}}$. Если же $q = \frac{1}{4}$, то, очевидно, $\lambda_n = \frac{n\lambda}{1+n}$. Таким образом, согласно (1,17) и (1,18), следует, что

$$|z_n| \leq \frac{\lambda - \sqrt{1-4q}}{2q} \left| \frac{a}{b} \right|, \quad (1,19)$$

т. е. последовательность чисел z_0, z_1, z_2, \dots ограничена. Но из каждой ограниченной последовательности можно всегда выделить сходящуюся подпоследовательность

$$z_{n_1}, z_{n_2}, \dots, z_{n_k} \rightarrow z^* = x^* - x_0,$$

причем $|z^*| \leq \frac{1-\sqrt{1-4q}}{2q} \left| \frac{a}{b} \right|$.

Покажем, наконец, что x^* удовлетворяет уравнению (1,1). В самом деле, переходя к пределу в уравнении (1,7) при $k \rightarrow \infty$ и учитывая непрерывность функции $F(x)$ в области g , получим

$$a + b(x^* - x_0) + f(x^*)(x^* - x_0)^2 = F(x^*) = 0,$$

что и требовалось доказать.

Пример. $F(z) = z^2 \sin e^{\frac{1}{z}} + a + bz = 0$. Это уравнение, согласно теореме 1, в круге $|z| \leq 2 \left| \frac{a}{b} \right|$ имеет, по крайней мере, одно решение, если $\left| \frac{a}{b^2} \right| \leq \frac{1}{4}$. При этом здесь функция $F(z)$ в точке $z=0$ не имеет производной, но непрерывна.

§ 2. Приложение метода цепных дробей к решению квадратно-операторных и функциональных уравнений

Рассмотрим квадратно-операторное уравнение

$$Lx = HL^2x + x, \quad (2,1)$$

где L — искомый оператор, H — некоторый линейный оператор, переводящий элементы нормированного пространства X в X .

Будем решать уравнение (2,1) следующим итеративным процессом.

$$L_{n+1}x = H_{n+1}L_{n+1}x + x, \quad (2,2)$$

где $H_{n+1} = HL_n$; $L_0 = 0$; $L_1 = I$ — тождественный оператор. Докажем теперь две теоремы. Первая из этих теорем доказывает условия существования, единственности решения, быстроту сходимости процесса (2,2) к решению и дает область расположения последнего. Вторая теорема дает эффективный способ приближенного решения уравнения (2,1) без необходимости последовательного решения линейных уравнений (2,2).

Теорема 1. Если в пространстве X имеет место условие

$$\|H\| = q \leq \frac{1}{4}, \quad (2,3)$$

то в области

$$\|L\| < \frac{1-\sqrt{1-4q}}{2q} \quad (2,4)$$

уравнение (2,1) имеет единственное решение L^* , которое является также линейным оператором.

При этом, если $q < \frac{1}{4}$, то

$$\|L^* - L_n\| < \frac{\delta^n}{1-\delta}, \quad (2,5)$$

где $\delta = \frac{1-\sqrt{1-4q}}{1+\sqrt{1-4q}} < 1$.

Если же $q = \frac{1}{4}$, то

$$\|L^* - L_n\| < 4 \left[\frac{\pi^2}{6} - \sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{k^2} \right]. \quad (2,6)$$

Доказательство. Зная, что

$$\|H_{n+1}\| \leq \|H\| \|L_n\| \quad (2,7)$$

и $L_0=0, L_1=I$, пользуясь условием (2,3) и теоремой Банаха, имеем

$$\|H_{n+1}\| < \frac{q}{1 - \frac{q}{1 - \frac{q}{1 - \frac{q}{\dots}}}} = \lambda_n < 1, \quad (2,8)$$

где λ_n n -я подходящая дробь соответствующей цепной дроби. Во-вторых,

$$\|L_{n+1}\| \leq \frac{\lambda_n}{q}. \quad (2,9)$$

При этом нам известно [23, 24], что если $q < \frac{1}{4}$, то

$$\lambda_n = \lambda \frac{1 - \delta^n}{1 - \delta^{n+1}}, \quad (2,10)$$

где $\lambda_2 < \lambda_3 < \dots < \lambda_n < \lambda$,

$$\lambda = \lim_{n \rightarrow \infty} \lambda_n = \frac{1}{2} - \sqrt{\frac{1}{4} - q}. \quad (2,11)$$

Если же $q = \frac{1}{4}$, то

$$\lambda_n = \frac{n\lambda}{1+n}. \quad (2,12)$$

Далее, согласно теореме Банаха, имеем

$$L_{n+1} - L_n = (H_{n+1} - H_n) + (H_{n+1}^2 - H_n^2) + \dots \quad (2,13)$$

Но учитывая, что операторы H_n и L_n для различных n коммутируют друг с другом, а также

$$\|H_{n+1} - H_n\| \leq \|H\| \|L_n - L_{n-1}\|$$

и

$$\|H_{n+1}^m + H_{n+1}^{m-1}H_n + H_{n+1}^{m-2}H_n^2 + \dots + H_n^m\| \leq (m+1)\lambda_n^m \quad (m=1, \dots)$$

из (2,13) получим неравенство

$$\|L_{n+1} - L_n\| \leq \frac{q}{(1-\lambda_n)^2} \|L_n - L_{n-1}\|.$$

Это позволяет доказать, что

$$\lim \|L_{n+p} - L_n\| = 0$$

(для любого $p \geq 0$). Таким образом, существует $\lim_{n \rightarrow \infty} L_n = L^*$. Если последовательность $L_n(x)$ линейных операторов, определенных в X , сходится в X , то $L^*(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} L_n(x)$ есть также линейный оператор. Далее,

зная, что $L_0=0, L_1=I$ при $q < \frac{1}{4}$, получим $\|L^* - L_n\| \leq \frac{\delta^n}{1-\delta}$, а при $q = \frac{1}{4}$ будем иметь

$$\|L^* - L_n\| \leq 4 \left[\frac{\pi^2}{6} - \sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{k^2} \right].$$

Переходя к пределу в уравнении (2,2) при $n \rightarrow \infty$, докажем, что оператор L^* удовлетворяет уравнению (2,1) при всех $x \in X$.

На основании (2,9) область существования решения определяется неравенством

$$\|L^*\| \leq \frac{\lambda}{q} = \frac{1 - \sqrt{1-4q}}{2q}.$$

Наконец, в силу того, что (по теореме Банаха) каждое из уравнений (2,2) имеет единственное решение L_{n+1} , доказывается также единственность решения L^* .

Теорема 2. При выполнении условия (2,3) имеет место равенство

$$L_n = Q_n^{-1} \cdot Q_{n-1}, \quad (2,14)$$

где операторы Q_n вычисляются из рекуррентного соотношения

$$Q_{n+1} = Q_n + HQ_{n-1}, \quad (2,15)$$

причем

$$Q_{-1} = Q_0 = I.$$

Доказательство. Во-первых, докажем, что при условии (2,3) существует Q_n^{-1} . В самом деле, благодаря условию $\|H\| = q \leq \frac{1}{4}$, очевидно, можно положить $q = \alpha - \alpha^2$, где $\frac{1}{2} \leq \alpha \leq 1$, так как $\max_{\frac{1}{2} \leq \alpha \leq 1} (\alpha - \alpha^2) = \frac{1}{4}$.

Далее, на основании (2,15), имеем

$$\|Q_n x\| - \alpha \|Q_{n-1} x\| \geq (1 - \alpha) [\|Q_{n-1} x\| - \alpha \|Q_{n-2} x\|].$$

Отсюда, зная, что $\|Q_0\| = \|Q_{-1}\| = 1$, легко доказать неравенство $\|Q_n x\| > \alpha^n \|x\|$, т. е. $\|Q_n^{-1}\| < \alpha^{-n}$. Заметим, что, согласно (2,15), операторы Q_i и Q_j с любыми целыми индексами i и $j \geq -1$ будут между собой коммутативны, и поэтому $Q_i^{-1} Q_j^{-1} = Q_j^{-1} Q_i^{-1}$. Теперь, если положить $L_n = Q_n^{-1} Q_{n-1}$, в силу указаний коммутативности, мы легко убеждаемся, что операторы $Q_n^{-1} Q_{n-1}$ тождественно удовлетворяют уравнениям (2,2) для любого $n \geq 0$.

Рассмотрим квадратно-функциональное уравнение

$$x = Hx^2 + y, \quad (2,16)$$

где операция H переводит квадраты элементов нормированного кольца $X \supset x$ в элементы того же пространства. Если уравнение (2,16), где x неизвестно, решать методом, аналогичным вышесказанному, то получим следующий результат.

Теорема 3. Уравнение (2,16) в области, определяемой неравенством

$$\|x\| \leq \frac{1 - \sqrt{1 - 4q}}{2q} \|y\|, \quad (2,17)$$

где $q = \|y\| \|H\| \leq \frac{1}{4}$ имеет единственное решение x^* , которое может быть вычислено итеративным процессом $x_{n+1} = Hx_n x_{n+1} + y$. При этом скорость сходимости последнего определяется следующими неравенствами: если $q < \frac{1}{4}$, то $\|x^* - x_n\| < \frac{\delta \|y\|}{1 - \delta}$, где $\delta = \frac{1 - \sqrt{1 - 4q}}{1 + \sqrt{1 - 4q}}$; если же $q = \frac{1}{4}$, то

$$\|x^* - x_n\| < 4 \left[\frac{\pi^2}{6} - \sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{k^2} \right] \|y\|.$$

Для уравнения (2,16) теорема 2 аналога не имеет.

Пример 1. Рассмотрим нелинейное интегральное уравнение

$$x(s) = \frac{s}{4} \int_0^1 e^{-st} x^2(t) dt + \frac{1}{4} (3 + e^{-s})$$

в пространстве $X = Y = C$. В данном случае, при $q = \frac{1}{4}$, область существования и единственности определяется неравенством $|x| \leq 2$. При $x_0(s) = 0$ вычисление второго приближения $x_2(s)$ сводится к решению линейного интегрального уравнения

$$x_2(s) = \frac{s}{16} \int_0^1 (3 + e^{-t}) e^{-st} x_2(t) dt + \frac{1}{4} (3 + e^{-s}).$$

Решая это уравнение „смешанным“ методом Л. В. Канторовича [1], полагая

$$x_2(s) \approx C_1 + C_2 \cos \pi s + C_3 \cos 2\pi s,$$

получим

$$x_2(s) \approx 0.9916 + 0.005 \cos \pi s + 0.0007 \cos 2\pi s,$$

$$x^*(s) = 1.$$

Пример 2. Решение систем квадратных алгебраических уравнений:

$$x_1 = a_{11}x_1^2 + a_{12}x_2^2 + b_1;$$

$$x_2 = a_{21}x_1^2 + a_{22}x_2^2 + b_2$$

сводится к следующей итерации:

$$x_1^{(k)} = a_{11}x_1^{(k-1)}x_1^{(k)} + a_{12}x_2^{(k-1)}x_2^{(k)} + b_1$$

$$x_2^{(k)} = a_{21}x_1^{(k-1)}x_1^{(k)} + a_{22}x_2^{(k-1)}x_2^{(k)} + b_2$$

или

$$x_1^{(k)} = \frac{\begin{vmatrix} -b_1 a_{12}x_2^{(k-1)} \\ -b_2 a_{22}x_2^{(k-1)} - 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11}x_1^{(k-1)} - 1 & a_{12}x_2^{(k-1)} \\ a_{21}x_1^{(k-1)} & a_{22}x_2^{(k-1)} - 1 \end{vmatrix}}; \quad x_2^{(k)} = \frac{\begin{vmatrix} a_{11}x_1^{(k-1)} - b_1 \\ a_{21}x_1^{(k-1)} - b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11}x_1^{(k-1)} - 1 & a_{12}x_2^{(k-1)} \\ a_{21}x_1^{(k-1)} & a_{22}x_2^{(k-1)} - 1 \end{vmatrix}}$$

Рассмотрим решение системы

$$x_1 = 0.1x_1^2 + 1.01x_2^2 + 0.2;$$

$$x_2 = 1.01x_1^2 + 0.1x_2^2 + 0.1.$$

Условие $\|H\| = 0.222 < \frac{1}{4}$ выполняется.

Считая

$$x_1^0 = x_2^0 = 0,$$

имеем

$$x_1^{(1)} = 0.2, \quad x_2^{(1)} = 0.1;$$

$$x_1^{(2)} = 0.2191, \quad x_2^{(2)} = 0.1457;$$

$$x_1^{(3)} = 0.2274, \quad x_2^{(3)} = 0.1526;$$

$$x_1^{(4)} = 0.2291, \quad x_2^{(4)} = 0.1549;$$

$$x_1^{(5)} = 0.2296, \quad x_2^{(5)} = 0.1555.$$

Проверка дает:

$$0.2296 = 0.1 \cdot 0.0527 + 1.01 \cdot 0.0242 + 0.2 = 0.2297;$$

$$0.1555 = 1.01 \cdot 0.0527 + 0.1 \cdot 0.0242 + 0.1 = 0.1556.$$

Вторая система:

$$x_1 = 0.22x_1^2 + 0.02x_2^2 + 0.12x_3^2 + 0.56;$$

$$x_2 = 0.02x_1^2 + 0.14x_2^2 + 0.04x_3^2 + 0.08;$$

$$x_3 = 0.12x_1^2 + 0.04x_2^2 + 0.28x_3^2 + 0.50.$$

$$x = Hx^2 + y; \quad q = \|y\| \|H\| = 0.2464 < \frac{1}{4};$$

$$\|x\| = \frac{1 - \sqrt{1 - 4q}}{2q} \|y\| = 1.00005;$$

$$\delta = \frac{1 - \sqrt{1 - 4q}}{1 + \sqrt{1 - 4q}} = 0.7857 < 1; \quad \|x^* - x_3\| = \frac{\delta^3 \|y\|}{1 - \delta} = 1.2,$$

$$x_1^0 = 0; \quad x_1^{(1)} = 0.56; \quad x_2^{(1)} = 0.08; \quad x_3^{(1)} = 0.50;$$

$$x_1^{(2)} = 0.22 \cdot 0.56x_1^{(2)} + 0.02 \cdot 0.08x_2^{(2)} + 0.12 \cdot 0.50x_3^{(2)} + 0.56;$$

$$x_2^{(2)} = 0.02 \cdot 0.56x_1^{(2)} + 0.14 \cdot 0.08x_2^{(2)} + 0.04 \cdot 0.50x_3^{(2)} + 0.08;$$

$$x_3^{(2)} = 0.12 \cdot 0.56x_1^{(2)} + 0.04 \cdot 0.08x_2^{(2)} + 0.28 \cdot 0.50x_3^{(2)} + 0.50;$$

$$x_1^{(2)} = 0.6829, \quad x_2^{(2)} = 0.1013, \quad x_3^{(2)} = 0.6159;$$

$$x_1^{(3)} = 0.7178, \quad x_2^{(3)} = 0.1082, \quad x_3^{(3)} = 0.6750;$$

$$x_1^{(4)} = 0.7319, \quad x_2^{(4)} = 0.1107, \quad x_3^{(4)} = 0.6946.$$

Проверка показывает:

$$0.7319 = 0.22 \times 0.5357 + 0.02 \times 0.0123 + 0.12 \times 0.4825 + 0.56 = 0.7360;$$
$$0.1107 = 0.02 \times 0.5357 + 0.14 \times 0.0123 + 0.04 \times 0.4825 + 0.08 = 0.1117;$$
$$0.6946 = 0.12 \times 0.5357 + 0.04 \times 0.0123 + 0.28 \times 0.4825 + 0.50 = 0.6999.$$

ЛИТЕРАТУРА

1. А. В. Канторович. Функциональный анализ и прикладная математика. Успехи математ. наук, т. 3, вып. 6, 1948.
2. А. Cauchy. Leçons sur le calcul différentiel. Paris, 1829.
3. А. Островский. О сходимости алгоритма Ньютона и его устойчивости по отношению к округлению цифр. Математический сборник, вып. 2, 1937.
4. Г. С. Салехов. О сходимости процесса касательных гипербол. ДАН СССР, т. 82, № 4, 1952.
5. М. А. Мертвецова. Аналог процесса касательных гипербол для общих функциональных уравнений. ДАН СССР, т. 88, № 4, 1953.
6. Г. С. Салехов. Приложение метода цепных дробей к решению квадратно-операторных и функциональных уравнений. ДАН СССР, т. 82, № 2, 1954.
7. В. П. Максимова. О разложении в ряды функции от корней уравнений и о некоторых формулах приближения. Казань, 1882.
8. E. Schröder. Über unendlich viele Algorithmen zur Auflösung der Gleichung. Math. Ann. Bd. 2, 1870.
9. G. Faber. Über die Newtonsche Näherungsformel. Journ. f. die reine und angewandte Mathematik, Bd. 138, 1910.
10. Д. А. Граве. К вопросу о сходимости метода Ньютона. Журнал Математ. инст. АН УССР, т. 2, 1936.
11. Д. М. Загадский. Аналог процесса Ньютона для нелинейных интегральных уравнений. ДАН СССР, т. 59, № 3, 1948.
12. И. П. Мысовских. О методе Ньютона. Труды Математ. инст. им. В. А. Стеклова, т. 28, 1948.
13. M. Fréchet. La notion différentielle dans l'analyse général. Ann. École norm. supérieure, t. 293, Paris, 1925.
14. И. П. Мысовских. О сходимости метода Ньютона для вещественных уравнений при условиях типа Коши. Прикладная математика и механика, т. 16, вып. 6, 1952.
15. E. Bode wig. On types of convergence and on the behavior of approximations in the neighborhood of a multiple root of an equation. Quarterly Journ. of Appl. Math., vol. VII, № 3, 1949.
16. M. E. Laguerre. Sur une méthode pour obtenir par approximation les racines d'une équation algébrique. Oeuvres de Laguerre.
17. J. G. van der Corput. Sur l'approximation de Laguerre des racines d'une équation algébrique qui a toutes ses racines réelles. Akad. Wetensch. Proc. (Amst.), v. 49, 1946.
18. А. П. Доморяд. Численные и графические методы решения уравнений. Математ. энциклопедия, т. 2, Гос. Изд. технико-теорет. лит. М., 1951.
19. М. К. Гавурин. Аналитические исследования нелинейных функциональных преобразований. Ученые записки ЛГУ, вып. 19, 1950.
20. Б. Н. Бабкин. Приближенные решения обыкновенных дифференциальных уравнений любого порядка методом последовательных приближений, на основе теоремы С. А. Чаплыгина о дифференциальных неравенствах. ДАН СССР, т. 59, № 3, 1948.
21. С. А. Чаплыгин. Новый метод приближенного интегрирования дифференциальных уравнений. Гостехиздат, М.—Л., 1950.
22. С. С. Мусина. Приближенные методы решения интегро-дифференциальных уравнений с обыкновенными производными. Диссертация. Казань, 1951.
23. Н. Слешинский. О сходимости непрерывных дробей. Одесса, 1889.
24. O. Perron. Die Lehre von den Kettenbrüchen. Leipzig, 1913.

Физико-технический институт
Казанского филиала АН СССР

Поступило
2 февраля 1953 г.

СОДЕРЖАНИЕ

	Стр.
Г. С. Салехов. Прямые и обратные задачи о продвижении водонефтяного контакта	3
Г. С. Салехов, В. А. Данилов, Н. Ф. Иванов и А. Н. Хованский. К вопросу обводнения нефтяных скважин в пластах с подошвенной водой	16
Н. Ф. Иванов, Г. С. Салехов и И. В. Свирский. Об определении оптимальных условий эксплуатации нефтяных скважин в пластах с упругим режимом	40
В. А. Данилов. Дебит нефтяных скважин при произвольной форме контура питания	52
А. Н. Хованский. К расчету восстановления забойного давления после закрытия скважины	70
Г. С. Салехов и М. А. Мертвецова. О сходимости некоторых итерационных процессов	77