

АКАДЕМИЯ НАУК СССР

КАЗАНСКИЙ ФИЛИАЛ

ИЗВЕСТИЯ

КАЗАНСКОГО ФИЛИАЛА АКАДЕМИИ НАУК СССР

СЕРИЯ ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИХ
И ТЕХНИЧЕСКИХ НАУК

2



1950

АКАДЕМИЯ НАУК СССР

КАЗАНСКИЙ ФИЛИАЛ

ИЗВЕСТИЯ
КАЗАНСКОГО ФИЛИАЛА
АКАДЕМИИ НАУК СССР

СЕРИЯ ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИХ И ТЕХНИЧЕСКИХ НАУК

Выпуск 2

ИЗДАТЕЛЬСТВО КАЗАНСКОГО ФИЛИАЛА АКАДЕМИИ НАУК СССР
КАЗАНЬ

1950

ПОСВЯЩАЕТСЯ
ТРИДЦАТИЛЕТИЮ ТАТАРСКОЙ
АВТОНОМНОЙ СОВЕТСКОЙ
СОЦИАЛИСТИЧЕСКОЙ
РЕСПУБЛИКИ

Главный редактор академик А. Е. Арбузов

Отв. редактор проф. Х. М. Муштари

П 12378
ЦЕНТРАЛЬНАЯ НАУЧНАЯ
БИБЛИОТЕКА
А. Н. Киргизской ССР

Печатается по постановлению редакционно-издательского Совета Казанского
филиала Академии наук СССР

К. З. ГАЛИМОВ

ОБЩАЯ ТЕОРИЯ УПРУГИХ ОБОЛОЧЕК ПРИ КОНЕЧНЫХ ПЕРЕМЕЩЕНИЯХ

Настоящая работа является продолжением нашей статьи „Уравнения равновесия теории упругости при конечных перемещениях и их приложение к теории оболочек“ [1]. В этой статье были выведены уравнения равновесия оболочки в лагранжевых и ейлеровых координатах.

В предлагаемой работе развита общая теория деформации поверхности и получена полная система уравнений теории оболочек при конечных перемещениях.

В § 1 дано изложение теории деформации поверхности в общих координатах. Впервые введены в рассмотрение характеристики деформации поверхности, отнесенные к деформированному состоянию последней и выведены условия неразрывности для них.

В § 2 проведено исследование уравнений равновесия оболочки при конечных перемещениях, отнесенных к метрике недеформированной поверхности. Введены специальные тензоры усилий и моментов: один индекс составляющих этих тензоров относится к гауссовым координатам до деформации, а другой — к координатам поверхности после деформации. Особо рассмотрен вопрос о зависимости внешних сил и моментов от деформации.

В § 3 выведены граничные условия для оболочек при конечных перемещениях. Они установлены для деформированного и недеформированного состояния оболочки.

Условия сформулированы так, что в них непосредственно входят искомые усилия и моменты, а граничные условия линейной теории содержатся в них как частный случай.

В § 4 выводятся соотношения между усилиями, моментами и деформациями поверхности. Они взяты в такой форме, что удовлетворяется шестое уравнение равновесия при минимальном количестве членов, содержащих погрешность гипотезы Кирхгофа.

В § 5 приведена полная система уравнений теории оболочек в различных вариантах. Здесь даются впервые условия неразрывности деформации в формах (5.14) и (5.18). При рассмотрении уравнений в метрике деформированной поверхности можно пользоваться характеристиками деформации $P_{\alpha\beta}$ и $q_{\alpha\beta}$. Однако, если отнести уравнения к первоначальной метрике и учесть влияние деформации поверхности на внешние силы и моменты, то неизбежно приходится употреблять $e_{\alpha\beta}$ и ω_{α} .

Теория, развитая в этой работе, в целом является точной и не зависит от каких-либо гипотез. Упрощению уравнений и применению их к решению конкретных задач будет посвящена особая статья.

§ 1. Деформация поверхности и оболочки

1. Обозначим через S_0 срединную поверхность недеформированной оболочки, а через x^1 и x^2 гауссовы координаты на S_0 . Векторное уравнение поверхности S_0 зададим в форме

$$\bar{r} = \bar{r}(x^1, x^2). \quad (1.1)$$

Из каждой точки поверхности S_0 выходят два координатных вектора

$$\bar{r}_\alpha = \frac{\partial \bar{r}}{\partial x^\alpha}, \quad (1.2)$$

направленные по касательным к координатным линиям x^α .

Коэффициенты первой квадратичной формы поверхности S_0 образуются при помощи (1.2) по формулам*)

$$a_{\alpha\beta} = \bar{r}_\alpha \bar{r}_\beta. \quad (1.3)$$

Обозначая через

$$a = a_{11} a_{22} - a_{12}^2 = \det(a_{\alpha\beta})$$

для контравариантных составляющих основного метрического тензора поверхности будем иметь формулы:

$$a^{\alpha\beta} = C^{\alpha\kappa} C^{\beta\lambda} a_{\kappa\lambda}. \quad (1.4)$$

Здесь и далее, $C^{\alpha\kappa}$ — дискриминантный тензор поверхности S_0 :

$$C_{11} = C_{22} = C^{11} = C^{22} = 0, \quad C_{12} = -C_{21} = \sqrt{a},$$

$$C^{12} = -C^{21} = \frac{1}{\sqrt{a}}.$$

Если сообщить точкам поверхности S_0 перемещение, характеризуемое вектором $\bar{v}$, то радиус-вектор (1.1) преобразуется в

$$\bar{r}^* = \bar{r} + \bar{v}. \quad (1.5)$$

При этом точки поверхности S_0 перейдут в точки поверхности S_0^* . Эту поверхность назовем деформированной срединной поверхностью. В дальнейшем, все величины, относящиеся к поверхности S_0^* , будут снабжены звездочкой.

После деформации гауссовы координаты x^a на S_0 преобразуются в численно-равные гауссовы же координаты x^a на S_0^* , но с основными векторами:

$$\bar{r}_\alpha^* = \frac{\partial \bar{r}^*}{\partial x^\alpha}. \quad (1.2')$$

Для ко- и контравариантных составляющих основного метрического тензора поверхности S_0^* , будем иметь:

$$a_{\alpha\beta}^* = \bar{r}_\alpha^* \bar{r}_\beta^* \quad (1.3'), \quad a_{\alpha\beta}^* = C_{\alpha}^{\kappa} C_{\beta}^{\lambda} a_{\kappa\lambda}. \quad (1.4')$$

Здесь и в дальнейшем, $C_{\alpha\beta}^*$ и $C^{\alpha\beta}$ означают ко- и контравариантные составляющие дискриминантного тензора, составленного из

$$a^* = \det(a_{\alpha\beta}^*).$$

Векторы $\bar{r}^a$ и $\bar{r}_a$, сопряженные основным и направленные по нормаль к координатным линиям $x^a = \text{const}$, будут

$$\bar{r}^a = a^{\alpha\beta} \bar{r}_\beta, \quad \bar{r}_a = a_{\alpha\beta} \bar{r}^\alpha$$

при этом

$$\bar{r}_\alpha \bar{r}^\alpha = \delta_\alpha^\alpha, \quad \bar{r}_a \bar{r}^a = \delta_a^a$$

где δ_a^b — символы Кронеккера.

*) Все греческие индексы пробегают значения 1, 2. Одинаковые индексы суммируются от 1 до 2.

Если $\bar{m}$ и $\bar{m}^*$ — единичные векторы нормалей к S_0 и S_0^* , то векторные произведения

$$[\bar{r}_\alpha, \bar{r}_\beta] = \bar{m} C_{\alpha\beta}, \quad [\bar{r}_\alpha, \bar{m}] = C_{\beta\alpha} \bar{r}^\beta \quad (1.5)$$

$$[\bar{r}_\alpha^*, \bar{r}_\beta^*] = \bar{m}^* C_{\alpha\beta}^*, \quad [\bar{r}_\alpha^*, \bar{m}^*] = C_{\beta\alpha}^* \bar{r}_\beta^*. \quad (1.6)$$

определяют положительные направления тройки векторов $\bar{r}_1, \bar{r}_2, \bar{m}$, а также векторов $\bar{r}_1^*, \bar{r}_2^*, \bar{m}^*$.

Коэффициенты второй квадратичной формы поверхностей S_0 и S_0^* определяются формулами

$$b_{\alpha\beta} = -\bar{r}_\alpha \bar{m}_\beta = -\bar{r}_\beta \bar{m}_\alpha, \quad b_{\alpha\beta}^* = -\bar{r}_\alpha^* \bar{m}_\beta^* = -\bar{r}_\beta^* \bar{m}_\alpha^*. \quad (1.7)$$

Приращения коэффициентов первой квадратичной формы характеризуют изменения размеров малого элемента срединной поверхности:

$$a_{\alpha\beta}^* = a_{\alpha\beta} + 2P_{\alpha\beta}. \quad (1.8)$$

P_{11} и P_{22} характеризуют удлинения элементов в направлении координат x^1 и x^2 , $P_{12} = P_{21}$ — характеризует вместе с P_{11} и P_{22} сдвиг координатного угла. Действительно, относительные удлинения l_a в направлениях x^a равны

$$l_a = \frac{\sqrt{a_{\alpha\alpha}^*} - \sqrt{a_{\alpha\alpha}}}{\sqrt{a_{\alpha\alpha}}} = \sqrt{1 + \frac{2P_{\alpha\alpha}}{a_{\alpha\alpha}}} - 1, \quad (\text{не суммируются по } a)$$

а косинус угла между координатными линиями x^1 и x^2 на S_0^* равен:

$$\cos \omega = \frac{a_{12}^*}{\sqrt{a_{11}^* a_{22}^*}}.$$

Выразим теперь величины $P_{\alpha\beta}$ через перемещения.

Пусть v_a и v^a — ко- и контравариантные составляющие вектора перемещения точек срединной поверхности на направления гауссовых координат на S_0 , W — проекция вектора $\bar{v}$ на $\bar{m}$. Тогда из равенства

$$\bar{r}^* = \bar{r} + \bar{v} = \bar{r} + \bar{r}_\alpha v^\alpha + \bar{m} W.$$

Учитывая формулы

$$\bar{m}_\alpha = -b_{\alpha\beta} \bar{r}^\beta, \quad \bar{r}_\alpha = \left\{ \begin{matrix} \gamma \\ \alpha \beta \end{matrix} \right\} \bar{r}_\gamma + b_{\alpha\beta} \bar{m}, \quad (1.7')$$

будем иметь

$$\bar{r}_\beta^* = \bar{r}_\beta^* (\delta_\beta^\alpha + e_\beta^\alpha) + \bar{m} \omega_\beta \quad (1.9)$$

где

$$e_\beta^\alpha = \nabla_\beta v^\alpha - W b_\beta^\alpha, \quad \omega_\beta = \frac{\partial W}{\partial x^\beta} + b_{\alpha\beta} v^\alpha, \quad (1.10)$$

∇_β — знак ковариантного дифференцирования относительно $a_{\alpha\beta}$. Образую $a_{\alpha\beta}^*$ при помощи (1.9) и внося полученный результат в (1.8), находим

$$2P_{\alpha\beta} = e_{\alpha\beta} + e_{\beta\alpha} + a^{\gamma\delta} e_{\alpha\gamma} e_{\beta\delta} + \omega_\alpha \omega_\beta. \quad (1.11)$$

где

$$e_{\alpha\beta} = \nabla_\alpha v_\beta - \omega b_{\alpha\beta}. \quad (1.12)$$

Формулы (1.11) были получены в работах Х. М. Муштари [2].
Приращенные коэффициенты второй квадратичной формы поверхности S_0 обозначим через $q_{\alpha\beta}$. Тогда

$$b_{\alpha\beta}^* = b_{\alpha\beta} + q_{\alpha\beta}. \quad (1.13)$$

Чтобы выразить $q_{\alpha\beta}$ через перемещения, нужно вычислить $\bar{m}^*$.
Внося (1.9) в формулу $\bar{m}^* \sqrt{a^*} = [\bar{p}_1, \bar{p}_2]$,

находим

$$\bar{m}^* = \sqrt{\frac{a}{a^*}} (\bar{m} E_0 + E_\alpha \bar{p}^\alpha), \quad (1.14)$$

где

$$E_0 = 1 + e_1^1 + e_2^2 + e_1^1 e_2^2 - e_2^1 e_1^2, \\ E_\alpha = C^{\pi\lambda} C_{\alpha\beta} \omega_\lambda (\delta_\pi^\beta + e_\pi^\beta) \quad (1.15)$$

Из (1.14) имеем

$$\bar{m} \bar{m}^* = \sqrt{\frac{a}{a^*}} E_0, \quad \bar{m}^* \bar{p}_\alpha = \sqrt{\frac{a}{a^*}} E_\alpha \quad (1.16)$$

Из этих формул видно, что инвариант E_0 и вектор E_α характеризуют поворот вектора нормали в процессе деформации.
Введем первый и второй инварианты тензора $P_{\alpha\beta}$:

$$P_1 = a^{\alpha\beta} P_{\alpha\beta}, \quad P_2 = \frac{1}{2} C^{\alpha\beta} C^{\pi\lambda} P_{\alpha\pi} P_{\beta\lambda}. \quad (1.17)$$

Тогда простым вычислением находим

$$\frac{a^*}{a} = 1 + 2P_1 + 4P_2, \quad (1.18)$$

$$a^{*\alpha\beta} = \frac{a}{a^*} C^{\alpha\pi} C^{\beta\lambda} a^*_{\pi\lambda} = a^{\alpha\beta} + F^{\alpha\beta\pi\lambda} P_{\pi\lambda}, \quad (1.19)$$

где обозначено:

$$F^{\alpha\beta\pi\lambda} = 2C^{\alpha\pi} C^{\beta\lambda} - 2a^{\alpha\beta} a^{\pi\lambda}. \quad (1.20)$$

Чтобы выразить $q_{\alpha\beta}$ через перемещения, достаточно подставить в формулы (1.7) выражения $\bar{m}_\alpha^*$ и $\bar{p}_\beta^*$ из формул (1.14) и (1.9). Это дает

$$b_{\alpha\beta}^* - \sqrt{\frac{a}{a^*}} \left[\omega_\beta \frac{\partial E_0}{\partial x^\alpha} + \omega_\beta E_\pi b_\alpha^\pi + (\delta_\beta^\pi + e_\beta^\pi) \nabla_\alpha E_\pi - E_0 (\delta_\beta^\pi + e_\beta^\pi) b_{\alpha\pi} \right] \quad (1.21)$$

Отсюда замечая, что

$$\sqrt{\frac{a}{a^*}} \approx 1 - P_1 \approx 1 - e_1$$

и сохраняя лишь вторые степени e_β^α и ω_α , находим:

$$q_{\alpha\beta} = \nabla_\alpha \omega_\beta + b_{\alpha\lambda} e_\beta^\lambda + \omega_\beta \omega_\pi b_\alpha^\pi - \omega_\pi \nabla_\alpha e_\beta^\pi + b_{\alpha\beta} e_2^2 - b_{\alpha\beta} (e_1^1)^2. \quad (1.22)$$

Здесь

$$e_1 = e_1^1 + e_2^2, \quad e_2 = e_1^1 e_2^2 - e_2^1 e_1^2$$

суть первый и второй инварианты тензора e_β^α .

Симметричность правой части (1.22) следует из приводимых ниже тождеств (1.24) и (1.25).

Для вывода этих тождеств образуем разность ковариантных производных от e_β^α и ω_α .
Из (1.10) имеем

$$\frac{\partial \omega_\beta}{\partial x^\alpha} - \frac{\partial \omega_\alpha}{\partial x^\beta} = v^\gamma \left(\frac{\partial b_{\gamma\beta}}{\partial x^\alpha} - \frac{\partial b_{\gamma\alpha}}{\partial x^\beta} \right) + b_{\gamma\beta} \frac{\partial v^\gamma}{\partial x^\alpha} - b_{\gamma\alpha} \frac{\partial v^\gamma}{\partial x^\beta},$$

или преобразуя правую часть при помощи формул Кодацци для S_0

$$\frac{\partial b_{\gamma\beta}}{\partial x^\alpha} - \frac{\partial b_{\gamma\alpha}}{\partial x^\beta} = \left\{ \begin{matrix} \pi \\ \alpha \gamma \end{matrix} \right\} b_{\pi\beta} - \left\{ \begin{matrix} \pi \\ \gamma \beta \end{matrix} \right\} b_{\alpha\pi}, \quad (1.23)$$

имеем

$$\frac{\partial \omega_\beta}{\partial x^\alpha} - \frac{\partial \omega_\alpha}{\partial x^\beta} = b_{\beta\gamma} \nabla_\alpha v^\gamma - b_{\alpha\gamma} \nabla_\beta v^\gamma.$$

Подставляя сюда $\nabla_\alpha v^\gamma$ из (1.10), получаем одно тождество:

$$\frac{\partial \omega_\beta}{\partial x^\alpha} - \frac{\partial \omega_\alpha}{\partial x^\beta} = \nabla_\alpha \omega_\beta - \nabla_\beta \omega_\alpha = b_{\beta\gamma} e_\alpha^\gamma - b_{\alpha\gamma} e_\beta^\gamma. \quad (1.24)$$

Так как

$$\nabla_\gamma \nabla_\beta v^\alpha - \nabla_\beta \nabla_\gamma v^\alpha = v^\pi R_{\beta\gamma\pi}^\alpha, \quad \nabla_\beta b_\gamma^\alpha - \nabla_\gamma b_\beta^\alpha = 0,$$

то из формул (1.10), имеем

$$\nabla_\gamma e_\beta^\alpha - \nabla_\beta e_\gamma^\alpha = v^\pi R_{\beta\gamma\pi}^\alpha + \frac{\partial \omega}{\partial x^\beta} b_\gamma^\alpha - \frac{\partial \omega}{\partial x^\gamma} b_\beta^\alpha. \quad (*)$$

Здесь $R_{\beta\gamma\pi}^\alpha$ — тензор кривизны поверхности S_0 , равный по формуле Гаусса

$$R_{\beta\gamma\pi}^\alpha = b_{\pi\beta} b_\gamma^\alpha - b_{\gamma\pi} b_\beta^\alpha.$$

Учитывая это, правую часть (*) представим в виде:

$$v^\pi R_{\beta\gamma\pi}^\alpha + \frac{\partial \omega}{\partial x^\beta} b_\gamma^\alpha - \frac{\partial \omega}{\partial x^\gamma} b_\beta^\alpha = b_\gamma^\alpha \omega_\beta - b_\beta^\alpha \omega_\gamma. \quad (**)$$

Сравнивая (*) и (**), находим еще два тождества:

$$\nabla_\gamma e_\beta^\alpha - \nabla_\beta e_\gamma^\alpha = b_\gamma^\alpha \omega_\beta - b_\beta^\alpha \omega_\gamma. \quad (1.25)$$

Тензор e_β^α и вектор ω_α наряду с величинами $p_{\alpha\beta}$, $q_{\alpha\beta}$ также могут служить характеристиками деформации поверхности. Тождества (1.24) и (1.25) представляют условия неразрывности для этих характеристик деформации. Определяя ω_1 и ω_2 из (1.25) и подставляя их в (1.24) получаем одно условие совместности для e_β^α . Полученное

условие является обобщением условия неразрывности деформации плоской задачи теории упругости. До сих пор величины, характеризующие деформацию поверхности, были отнесены к метрике недеформированной поверхности S_0 . Отнесем их к метрике поверхности S_0^* . Пусть V_α^* и V^α — ко- и контравариантные составляющие вектора перемещения на направления гауссовых координат на S_0^* , W^* — его проекция на направление m^* , ∇_α^* — знак ковариантного дифференцирования относительно $a_{\alpha\beta}$.

Дифференцируя по x^α первоначальный радиус-вектор

$$\bar{r} = [\bar{r}^* - \bar{V} = \bar{r}^* - \bar{r}_\alpha^* v^\alpha - \bar{m}^* W^*]$$

и пользуясь деривационными формулами

$$\bar{m}_\alpha^* = -b_{\alpha\beta}^* \bar{r}^\beta, \quad \bar{r}_{\alpha\beta}^* = \left\{ \begin{matrix} \gamma \\ \alpha \beta \end{matrix} \right\} \bar{r}_\gamma^* + b_{\alpha\beta}^* \bar{m}^*,$$

будем иметь

$$\bar{r}_\alpha^* = \bar{r}_\alpha^* (\delta_\alpha^\beta - e_\alpha^{\beta*}) - \bar{m}^* \omega_\alpha. \quad (1.9')$$

где

$$\nabla_\beta^* V^\alpha - W^* b_\beta^\alpha = e_\beta^{\alpha*}, \quad \frac{\partial W^*}{\partial x^\alpha} + b_{\alpha\beta}^* V^\beta = \omega_\alpha. \quad (1.10')$$

Для составляющих деформации, как и выше, получим формулы

$$2P_{\alpha\beta} = e_{\alpha\beta}^* + e_{\beta\alpha}^* - \omega_\alpha^* \omega_\beta^* - a^{\pi\lambda} e_{\alpha\pi}^* e_{\beta\lambda}^*, \quad (1.11')$$

где

$$e_{\alpha\beta}^* = \nabla_\alpha^* V_\beta^* - W^* b_{\alpha\beta}^*. \quad (1.12')$$

Подставляя (1.9') в формулу $\bar{m} \sqrt{a} = [\bar{r}_1, \bar{r}_2]$, получим

$$\bar{m} = \sqrt{\frac{a^*}{a}} (E_0^* \bar{m}^* + E_\alpha^* \bar{r}^{\alpha*}), \quad (1.14')$$

где

$$E_0^* = 1 - (e_1^{*1} + e_2^{*2}) + e_1^{*1} e_2^{*2} - e_2^{*1} e_1^{*2}, \quad E_\alpha^* = C_\alpha^{\pi\lambda} C_{\beta\alpha}^* \omega_\lambda^* (\delta_\pi^\beta - e_\pi^{\beta*}). \quad (1.15')$$

Подставляя (1.9'), (1.14') в формулы $b_{\alpha\beta} = -\bar{m}_\alpha \bar{r}_\beta$, найдем соотношения типа (1.21). Если ограничиваться квадратом перемещений, то получим

$$q_{\alpha\beta} = \nabla_\alpha^* \omega_\beta^* + b_{\alpha\pi}^* e_\pi^{\beta*} - b_{\alpha\pi}^* \omega_\pi^* \omega_\beta^* + \omega_\pi^* \nabla_\alpha^* e_\pi^{\beta*} - b_{\alpha\beta}^* e_2^* + b_{\alpha\beta}^* (e_1^*)^2, \quad (1.22')$$

где e_1^* и e_2^* — первый и второй инварианты тензора $e_\beta^{\alpha*}$. Условия неразрывности деформации для $e_\beta^{\alpha*}$ и ω_α^* такие же, как (1.24) и (1.25), но входящие в них величины нужно снабжать звездочкой.

2. Положение произвольной точки P недеформированной оболочки будем определять гауссовыми координатами x^1 и x^2 точки M поверхности S_0 и расстоянием $MP = x^3$ по нормали $\bar{m}$ к S_0 в точке M . Систему x^1, x^2, x^3 назовем нормальной системой координат оболочки. Радиус-вектор точки P будет

$$\bar{r} = \bar{r} + \bar{m} x^3. \quad (1.26)$$

Отсюда для основных векторов нормальной системы будем иметь [3]:

$$\bar{r}_\alpha = \bar{r}_\alpha - x^3 b_{\alpha\beta}^* \bar{r}_\beta, \quad \bar{r}_3 = \bar{m}, \quad (1.27)$$

а для составляющих метрического тензора координат оболочки найдем выражения:

$$g_{\alpha\beta} = a_{\alpha\beta} - 2x^3 b_{\alpha\beta}^* + K_{\alpha\beta} (x^3)^2, \quad g_{\alpha 3} = g^{3\alpha} = 0, \quad g_{33} = g^{33} = 1, \quad (1.28)$$

где $K_{\alpha\beta}$ — коэффициенты третьей квадратичной формы поверхности S :

$$K_{\alpha\beta} = b_{\alpha\gamma}^* b_\beta^\gamma = -2H b_{\alpha\beta}^* - K a_{\alpha\beta}. \quad (1.29)$$

Здесь K и H — гауссова и средняя кривизны для S_0 :

$$H = -\frac{1}{2} a^{\alpha\beta} b_{\alpha\beta}^* = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right),$$

$$K = \frac{1}{2} (a^{\alpha\beta} b_{\alpha\gamma}^* a^{\gamma\lambda} b_{\beta\lambda}^* - b^{\alpha\beta} b_{\alpha\beta}^*) = \frac{1}{R_1 R_2}, \quad (1.30)$$

где R_1 и R_2 — главные радиусы кривизны поверхности S_0 . Имеет место формула

$$g = \det(g_{ik}) = a [1 + 2H x^3 + K (x^3)^2]. \quad (1.31)$$

Если принять за исходное состояние оболочки ее деформированное состояние, то положение точки будем определять гауссовыми координатами x^1 и x^2 на деформированной срединной поверхности S_0^* , и координатой z , нормальной к S_0^* . Обозначая через $\bar{r}_\alpha^* = \bar{r}_\alpha + \bar{m}_\alpha z$ радиус-вектор деформированной оболочки, для основных векторов нормальной системы координат x^1, x^2, z , будем иметь:

$$\bar{r}_\alpha^* = \bar{r}_\alpha - z b_{\alpha\beta}^* \bar{r}_\beta, \quad \bar{r}_3^* = \bar{m}. \quad (1.27')$$

Метрический тензор координат x^1, x^2, z обозначим через h_{ik} :

$$h_{\alpha\beta}^* = a_{\alpha\beta}^* - 2z b_{\alpha\beta}^* + K_{\alpha\beta}^* z^2, \quad h_{\alpha 3}^* = h_{3\alpha}^* = 0, \quad h_{33}^* = h^{33} = 1, \quad (1.28')$$

где $K_{\alpha\beta}^*$ — коэффициенты третьей квадратичной формы поверхности S_0^* . Для этих координат в формулах типа (1.29), (1.30) и (1.31) следует подставлять соответствующие величины для деформированной срединной поверхности.

За составляющие тензора деформации можно принять величины $\eta_{\alpha\beta}$ или $\epsilon_{\alpha\beta}$ [1]. Если принять гипотезу Кирхгофа, то между ними нет разницы. В этом случае они выражаются формулами:

$$\eta_{\alpha\beta} = P_{\alpha\beta} - q_{\alpha\beta} x^3 + r_{\alpha\beta} (x^3)^2, \quad \eta_{\alpha 3} = 0 \quad (1.32)$$

$$\epsilon_{\alpha\beta} = P_{\alpha\beta} - q_{\alpha\beta} z + r_{\alpha\beta} z^2, \quad \epsilon_{\alpha 3} = 0, \quad (1.33)$$

где

$$2r_{\alpha\beta} = K_{\alpha\beta}^* - K_{\alpha\beta}, \quad x^3 = z. \quad (1.34)$$

В формулах (1.32) и (1.33) члены, содержащие $(x^3)^2$ и z^2 при принятии гипотезы Кирхгофа и линейного закона Гука можно отбросить, так как правые части выражений

$$z^2 K_{\alpha\beta}^* = -(2H^* b_{\alpha\beta}^* + K^* a_{\alpha\beta}^*) z^2, \quad (x^3)^2 K_{\alpha\beta} = -(2H b_{\alpha\beta}^* + K a_{\alpha\beta}) (x^3)^2$$

содержат величины порядка $\frac{h}{R}$ по сравнению с единицей.

Такая погрешность присуща гипотезе Кирхгофа при любых значениях $P_{\alpha\beta}$ и $q_{\alpha\beta}$, [4], [5].

§ 2. Уравнения равновесия оболочки при конечных перемещениях

1°. Обозначим через $2h$ — толщину недеформированной оболочки. Уравнения ограничивающих поверхностей деформированной оболочки представим в виде:

$$z = h_{(+)}(x^1, x^2), \quad z = -h_{(-)}(x^1, x^2).$$

Обозначая через $\bar{E}^*$ и $\bar{M}^*$ векторы внешних усилий и моментов, отнесенные к единице площади S_0^* , получим [1]

$$\bar{E}^* = \frac{\bar{P}_{(+)}^*}{|N_{(+)}^z|} \sqrt{\frac{h_{(+)}^*}{a^*}} + \frac{\bar{P}_{(-)}^*}{|N_{(-)}^z|} \sqrt{\frac{h_{(-)}^*}{a^*}} + \int_{-h_{(-)}}^{h_{(+)}} \sqrt{\frac{h^*}{a^*}} \bar{F}^* dz \quad (2.1)$$

$$\begin{aligned} \bar{M}^* = & \frac{[\bar{m}^*, \bar{P}_{(+)}^*] h_{(+)}^*}{|N_{(+)}^z|} \sqrt{\frac{h_{(+)}^*}{a^*}} - \frac{[\bar{m}^*, \bar{P}_{(-)}^*] h_{(-)}^*}{|N_{(-)}^z|} \sqrt{\frac{h_{(-)}^*}{a^*}} + \\ & + \int_{-h_{(-)}}^{h_{(+)}} [\bar{m}^*, \bar{F}^*] \sqrt{\frac{h^*}{a^*}} z dz. \end{aligned} \quad (2.2)$$

Здесь $\bar{P}_{(+)}^*$ — вектор внешней нагрузки, отнесенной к единице поверхности $z = h_{(+)}$, $N_{(+)}^z$ — проекция нормали к этой поверхности на ось z , $h_{(+)}^*$ — значение $\det(h_{ik}) = h^*$ на этой поверхности. $\bar{P}_{(-)}^*$, $N_{(-)}^z$, $h_{(-)}^*$ — соответствующие величины для поверхности $z = -h_{(-)}$. $\bar{F}^*$ — вектор объемной силы, отнесенной к единице деформированного объема оболочки.

Если $\bar{f}_a^*$ и $\bar{L}_a^*$ — векторы внутренних усилий и моментов, отнесенные к единице длины среза $x^2 = \text{const.}$, то векторные уравнения равновесия оболочки, отнесенные к метрике деформированной срединной поверхности S_0^* , имеют вид

$$\frac{\partial \sqrt{a^*} \bar{f}_a^*}{\partial x^a} + \bar{E}_a^* = 0 \quad (2.3)$$

$$\frac{\partial \sqrt{a^*} \bar{L}_a^*}{\partial x^a} + [\bar{p}_a^*, \bar{f}_a^*] + \bar{M}_a^* = 0. \quad (2.4)$$

Тензорами мембранных усилий являются коэффициенты разложения вектора $\bar{f}_a^*$ по основным векторам поверхности S_0^* , проекции же этого вектора на ось z дают перерезывающие силы:

$$\bar{f}_a^* = T_a^{\alpha\beta} \bar{p}_\beta^* + N_a^* \bar{m}_* \quad (2.5)$$

где

$$T_a^{\alpha\beta} = \int_{-h_{(-)}}^{h_{(+)}} \sqrt{\frac{h^*}{a^*}} \sigma_a^{\alpha\beta} (\delta_\alpha^\beta - z b_\alpha^{\beta*}) dz \quad (2.6)$$

$$N_a^* = \int_{-h_{(-)}}^{h_{(+)}} \sqrt{\frac{h^*}{a^*}} \sigma_a^z dz \quad (2.7)$$

Тензор изгибающих и крутящих моментов $H^{\alpha\beta}$ найдем из соотношений

$$\bar{L}_a^* = [\bar{m}^*, \bar{p}_\beta^*] \bar{H}^{\alpha\beta} \quad (2.8)$$

в виде

$$H^{\alpha\beta} = \int_{-h_{(-)}}^{h_{(+)}} \sqrt{\frac{h^*}{a^*}} \sigma_a^{\alpha\beta} (\delta_\alpha^\beta - z b_\alpha^{\beta*}) z dz, \quad (2.9)$$

где σ_{ik}^* — тензор напряжения в оболочке. Скалярная форма уравнений (2.3) и (2.4) будет:

$$\nabla_a^* T_a^{\alpha\beta} - b_\alpha^{\beta*} N_a^* + X_a^{\alpha\beta} = 0 \quad (2.10)$$

$$\nabla_a^* N_a^* + b_\alpha^{\beta*} T_a^{\alpha\beta} + X_a^* = 0 \quad (2.11)$$

$$\nabla_a^* L_a^{\alpha\beta} + C_{\alpha\gamma}^* a_\gamma^{\alpha\beta} N_a^* + M_a^{\alpha\beta} = 0 \quad (2.12)$$

$$b_\alpha^{\beta*} L_a^{\alpha\beta} + C_{\alpha\beta}^* T_a^{\alpha\beta} = 0 \quad (2.13)$$

где

$$L_a^{\alpha\beta} = C_{\alpha\gamma}^* a_\gamma^{\alpha\beta} H^{\alpha\beta}. \quad (2.14)$$

В этих уравнениях ∇^* — знак ковариантного дифференцирования относительно $a_{\alpha\beta}^*$. Это вводит в них зависимость коэффициентов от деформации.

2. Введением подходящих тензоров усилий и моментов уравнения равновесия оболочки могут быть отнесены также и к недеформированному состоянию оболочки. Для этого положим:

$$\bar{E} = \sqrt{\frac{a^*}{a}} \bar{E}^*, \quad \bar{f}_a = \sqrt{\frac{a^*}{a}} \bar{f}_a^* \quad (2.15)$$

$$\bar{M} = \sqrt{\frac{a^*}{a}} \bar{M}^*, \quad \bar{L}_a = \sqrt{\frac{a^*}{a}} \bar{L}_a^* \quad (2.16)$$

Тогда, вместо (2. 3) и (2. 4), получим

$$\frac{\partial \sqrt{a} \bar{f}^\alpha}{\sqrt{a} \partial x^\alpha} + \bar{E} = 0 \quad (2. 17)$$

$$\frac{\partial \sqrt{a} \bar{L}^\alpha}{\sqrt{a} \partial x^\alpha} + [\bar{\rho}_\alpha, \bar{f}^\alpha] + \bar{M} = 0. \quad (2. 18)$$

Из (2. 15) и (2. 16) видно, что $\bar{E}$ и $\bar{M}$ суть векторы внешних сил и моментов, отнесенных к единице площади недеформированной срединной поверхности S_0 .

Чтобы представить (2. 17) и (2. 18) в скалярной форме, положим

$$\bar{f}^\alpha = T^{\alpha\beta} \bar{\rho}_\beta + \bar{m} N^\alpha \quad (2. 19)$$

$$\bar{E} = X^\alpha \bar{\rho}_\alpha + X^\alpha \bar{m} \quad (2. 20)$$

$$\bar{L}^\alpha = L^{\alpha\beta} \bar{\rho}_\beta + L^{\alpha\beta} \bar{m} \quad (2. 21)$$

$$\bar{M} = M^{\alpha\beta} \bar{\rho}_\alpha + M^{\alpha\beta} \bar{m} \quad (2. 22)$$

и вычислим вектор

$$K = K^\alpha \bar{\rho}_\alpha + K^\alpha \bar{m} = [\bar{\rho}_\alpha, \bar{f}^\alpha].$$

В силу формул (1. 5) и (1. 9) и учитывая (2. 19), находим

$$\bar{K} = C_{\gamma\beta} T^{\alpha\beta} (\delta_\alpha^\gamma + e_\alpha^\gamma) \bar{m} + C_{\beta\gamma} \bar{\rho}^\beta (\delta_\alpha^\gamma + e_\alpha^\gamma) N^\alpha - C_{\gamma\beta} \bar{\rho}^\gamma \omega_\alpha T^{\alpha\beta}.$$

Откуда

$$K^\gamma = a^{\beta\lambda} C_{\beta\gamma} (\delta_\alpha^\gamma + e_\alpha^\gamma) N^\alpha - C_{\gamma\beta} a^{\gamma\lambda} \omega_\alpha T^{\alpha\beta}$$

$$K^\alpha = C_{\gamma\beta} (\delta_\alpha^\gamma + e_\alpha^\gamma) T^{\alpha\beta}. \quad (2. 23)$$

Внося (2. 19) и (2. 20) в уравнение (2. 17), а выражения (2. 21), (2. 22), (2. 23) в уравнение (2. 18), и пользуясь деривационными формулами (1. 7'), находим:

$$\nabla_\alpha T^{\alpha\beta} - b_\alpha^\beta N^\alpha + X^\beta = 0 \quad (2. 24)$$

$$\nabla_\alpha N^\alpha + b_{\alpha\beta} T^{\alpha\beta} + X^\alpha = 0 \quad (2. 25)$$

$$\nabla_\alpha L^{\alpha\beta} + a^{\pi\beta} C_{\pi\gamma} [(\delta_\alpha^\gamma + e_\alpha^\gamma) N^\alpha - \omega_\alpha T^{\alpha\gamma}] - b_\alpha^\beta L^{\alpha\beta} + M^\beta = 0. \quad (2. 26)$$

где ∇ — знак ковариантного дифференцирования относительно $a_{\alpha\beta}$. Шестое уравнение равновесия, являющееся тождеством, не выписано.

Составляющие момента $L^{\alpha\beta}$ зависят от $L^{\alpha\beta}$. Действительно, из (2. 8) и (2. 16), имеем

$$\vec{L}^\alpha = \sqrt{\frac{a^*}{a}} [\bar{m}^*, \bar{\rho}_\beta] H^{\alpha\beta}, \quad (2. 27)$$

откуда

$$\bar{m}_* \vec{L}^\alpha = 0,$$

или внося сюда $\vec{L}^\alpha$ из (2. 21), а $\bar{m}_*$ из (1. 14), находим

$$E_0 L^{\alpha\beta} = -E_\beta L^{\alpha\beta}. \quad (2. 28)$$

Найдем соотношения между тензорами T и T_* , L и H . Подставляя (1. 9) и (1. 14) в

$$\bar{f}^\alpha = T^{\alpha\beta} \bar{\rho}_\beta + \bar{m} N^\alpha = \sqrt{\frac{a^*}{a}} (T_*^{\alpha\beta} \bar{\rho}_\beta + \bar{m}_* N_*^\alpha), \quad (2. 28')$$

получим

$$T^{\alpha\beta} = \sqrt{\frac{a^*}{a}} (\delta_\gamma^\alpha + e_\gamma^\alpha) T_*^{\alpha\beta} + a^{\beta\gamma} E_\gamma N_*^\alpha$$

$$N^\alpha = \sqrt{\frac{a^*}{a}} \omega_\beta T_*^{\alpha\beta} + E_0 N_*^\alpha. \quad (2. 29)$$

Обратно умножая (2. 28') скалярно на $\bar{\rho}_\alpha$ и $\bar{m}^*$ и вновь пользуясь формулами (1. 9), (1. 14), будем иметь:

$$T_*^{\alpha\beta} = \sqrt{\frac{a}{a^*}} a^{\pi\beta} [a_{\gamma\lambda} (\delta_\pi^\gamma + e_\pi^\gamma) T^{\alpha\lambda} + \omega_\pi N^\alpha] \quad (2. 30)$$

$$N_*^\alpha = \frac{a}{a^*} (T^{\alpha\beta} E_\beta + E_0 N^\alpha). \quad (2. 31)$$

Умножая (2. 27) скалярно на $\bar{\rho}^\alpha$, получим

$$L^{\alpha\beta} = \sqrt{\frac{a^*}{a}} [\bar{m}^*, \bar{\rho}_\gamma] \bar{\rho}^\beta H^{\alpha\gamma} = \sqrt{\frac{a^*}{a}} C_{\gamma\lambda} a_*^{\alpha\lambda} (\delta_\pi^\beta + e_\pi^\beta) H^{\alpha\gamma}. \quad (2. 32)$$

Эти же формулы можно представить в ином виде. Так как на основании формул (1. 9) и (1. 14)

$$[\bar{m}_* \bar{\rho}_\gamma] \bar{\rho}_\pi = \bar{m}^* [\bar{\rho}_\gamma \bar{\rho}_\pi] = \sqrt{\frac{a}{a^*}} C_{\pi\lambda} [a^{\lambda\beta} E_\beta \omega_\gamma - E_0 (\delta_\gamma^\lambda + e_\gamma^\lambda)],$$

$$L^{a\beta} = a^{\alpha\beta} C_{\alpha\gamma} [a^{\gamma\lambda} E_{\lambda\omega\pi} - E_0(\delta_{\pi}^{\gamma} + e_{\pi}^{\gamma})] H^{a\pi}. \quad (2.32)$$

Обратно, из (2.27), имеем

$$H^{a\beta} = C_{\alpha\gamma}^{\beta\lambda} \bar{r}_{\gamma}^{\alpha} L^{\alpha\gamma} = \sqrt{\frac{a}{a^*}} C_{\alpha\gamma}^{\beta\lambda} \bar{r}_{\gamma}^{\alpha} (L^{\alpha\gamma} \bar{r}_{\gamma}^{\beta} + \bar{m} L^{\alpha\beta}),$$

или учитывая (2.28), находим

$$H^{a\beta} = \sqrt{\frac{a}{a^*}} C^{\beta\lambda} \left\{ a_{\pi\gamma} (\delta_{\lambda}^{\gamma} + e_{\lambda}^{\gamma}) - \frac{\omega_{\lambda} E_{\pi}}{E_0} \right\} L^{\alpha\pi}. \quad (2.33)$$

Легко также выяснить смысл величин T и L .

Пусть C^* — замкнутый контур на S_0^* . Из точек этого контура восстановим нормали к S_0^* . Полученную линейчатую поверхность обозначим через Σ^* . Пусть далее C и Σ означают такой же контур и поверхность для недеформированной оболочки.

Вектор усилия, действующего на поверхность Σ^* в точке M^* (x^1, x^2, z) мы обозначим через $\bar{P} d\Sigma^*$, где $d\Sigma^*$ — элемент поверхности окрестности M^* .

Его можно представить в виде [1]:

$$\bar{P} d\Sigma^* = A^{\alpha\beta} \bar{r}_{\beta} n_{\alpha}^0 d\Sigma,$$

где $\bar{r}_{\beta}$ — основные векторы нормальной системы координат недеформированной оболочки, n_{α}^0 — ковариантные составляющие вектора нормали к Σ на направления гауссовых координат на S_0 , $d\Sigma$ — элемент поверхности окрестности точки $M(x^1, x^2, x^3)$, $A^{\alpha\beta}$ — составляющие тензора напряжения в оболочке, отнесенного к единице первоначальной площадки, на направления нормальных координат недеформированной оболочки. Таким образом,

$$\iint_{\Sigma^*} \bar{P} d\Sigma^* = \iint_{\Sigma} A^{\alpha\beta} \bar{r}_{\beta} n_{\alpha}^0 d\Sigma.$$

Элемент поверхности $d\Sigma$ на уровне x^3 можно выразить через элемент поверхности $ds_0 dx^3$ на уровне $x^3 = 0$ по формуле

$$n_{\alpha}^0 d\Sigma = \sqrt{\frac{g}{a}} ds_0 dx^3 n_{\alpha}^0.$$

Тогда,

$$\iint_{\Sigma^*} \bar{P} d\Sigma^* = \int_C ds_0 \int_{-h}^{+h} A^{\alpha\beta} \bar{r}_{\beta} \sqrt{\frac{g}{a}} n_{\alpha}^0 dx^3,$$

или обозначая

$$\bar{f}^{\alpha} = \int_{-h}^{+h} A^{\alpha\beta} \bar{r}_{\beta} \sqrt{\frac{g}{a}} dx^3,$$

имеем

$$\iint_{\Sigma^*} \bar{P} d\Sigma^* = \int_C \bar{f}^{\alpha} n_{\alpha}^0 ds_0.$$

Левую часть последнего равенства можно представить также в виде [1]:

$$\iint_{\Sigma^*} \bar{P} d\Sigma^* = \int_{C^*} \bar{f}^{\alpha} n_{\alpha} ds.$$

Таким образом

$$\int_{C^*} \bar{f}^{\alpha} n_{\alpha} ds = \int_C \bar{f}^{\alpha} n_{\alpha}^0 ds_0. \quad (*)$$

Применяя формулы преобразования площадей [1]:

$$n_{\alpha} ds = \sqrt{\frac{g^*}{g}} \frac{\partial x^{\beta}}{\partial y^{\alpha}} n_{\beta}^0 ds_0. \quad (2.34)$$

к площадкам $1.ds$ и $1.ds_0$ на уровнях $z=0$, $x^3=0$, имеем

$$n_{\alpha} ds = \sqrt{\frac{a^*}{a}} n_{\alpha}^0 ds_0.$$

тогда вместо (*), получаем

$$\int_{C^*} \bar{f}^{\alpha} \sqrt{\frac{a^*}{a}} n_{\alpha}^0 ds_0 = \int_C \bar{f}^{\alpha} n_{\alpha}^0 ds_0.$$

откуда

$$\bar{f}^{\alpha} = \sqrt{\frac{a^*}{a}} \bar{f}^{*\alpha}.$$

Это совпадает с равенством (2.15).

Таким образом вектор $\bar{f}^{\alpha}$ в уравнении равновесия (2.17) есть вектор усилия, приложенного к срезу $x^{\alpha} = \text{const}$ деформированной оболочки и отнесенный к единице длины среза $x^{\alpha} = \text{const}$ недеформированной оболочки. Тогда N^{α} и $T^{\alpha\beta}$ — составляющие этого вектора на направления нормальных координат недеформированной оболочки.

Путем таких же рассуждений мы получим

$$\iint_{\Sigma^*} [\bar{m}^*, \bar{P}] z d\Sigma^* = \int_{C^*} \bar{L}^{\alpha} n_{\alpha} ds = \int_C \bar{L}^{\alpha} n_{\alpha}^0 ds_0,$$

отсюда применяя (*), будем иметь формулы (2.16):

$$\bar{L}^{\alpha} = \sqrt{\frac{a^*}{a}} \bar{L}^{*\alpha}.$$

Таким образом, $\bar{L}$ — есть вектор-момент внутренних сил, приложенных к срезу $x^{\alpha} = \text{const}$ деформированной оболочки и отнесен-

ных к единице длины среза $x^2 = \text{const.}$ недеформированной оболочки. L^{a3} и L^{a3} — контравариантные составляющие этого вектора на направления нормальных координат недеформированной оболочки. Эти интерпретации такие же, какие нами даны для напряжений в общей нелинейной теории упругости [1].

3. Зависимость внешних сил от деформации.

Внешние силы и моменты $\bar{E}^*$ и $\bar{M}^*$ определяются из формул, данных в работе [1]:

$$\iint_{S_0} \bar{E}^* d\sigma_0 = \iint_{\Sigma(-)} \bar{P}_{(-)} d\Sigma_{(-)} + \iint_{\Sigma(+)} \bar{P}_{(+)} d\Sigma_{(+)} + \iiint_{(v)} \bar{F}^* dv. \quad (a)$$

$$\begin{aligned} \iint_{S_0} \bar{M}^* d\sigma_0 = & - \iint_{\Sigma(-)} [\bar{m}^* h_{(-)}, \bar{P}_{(-)}] d\Sigma_{(-)} + \iint_{\Sigma(+)} [\bar{m}^* h_{(+)}, \bar{P}_{(+)}] d\Sigma_{(+)} + \\ & + \iiint_{(v)} [\bar{m}^* z, \bar{F}^*] dv \end{aligned} \quad (b)$$

где $\bar{P}_{(+)}$ — вектор нагрузки, отнесенной к единице площади, ограничивающей поверхности $z = h_{(+)}$, $d\Sigma_{(+)}$ — элемент этой поверхности. $\bar{P}_{(-)}$, $d\Sigma_{(-)}$ — соответствующие величины, относящиеся к поверхности $z = -h_{(-)}$, $d\sigma_0$ — элемент деформированной срединной поверхности S_0 , $dv = \sqrt{\frac{h^*}{a^*}} d\sigma_0 dz$ — элемент объема деформированной оболочки.

Вектор напряжения $\bar{P}$, отнесенный к единице деформированной поверхности S , выражается формулой, данной в работе [1]:

$$\bar{P} dS = A^{a3} \bar{r}_3 n_a^0 dS_0. \quad (c)$$

где $\bar{r}_3$ — основные векторы недеформированной оболочки, dS_0 — элемент той поверхности S_0 , которая после деформации переходит в S с элементом dS , n_a^0 — ковариантные составляющие нормали к S_0 на направления нормальных координат недеформированной оболочки; A^{a3} — составляющие тензора напряжения, отнесенного к единице первоначальной поверхности. Применяя формулу (c) к ограничивающим поверхностям деформированной и недеформированной оболочек, будем иметь

$$P_{(+)} d\Sigma_{(+)} = A_{(+)}^{3a} \bar{r}_a^{(+)} dS_0^{(+)}, \quad P_{(-)} d\Sigma_{(-)} = A_{(-)}^{3a} \bar{r}_a^{(-)} dS_0^{(-)} \quad (d)$$

где $A_{(+)}^{3a}$ и $A_{(-)}^{3a}$ — контравариантные составляющие нагрузки, отнесенной к единице площади поверхностей $x^3 = +h$ и $x^3 = -h$; $dS_0^{(+)}$ и $dS_0^{(-)}$ — элементы площади этих поверхностей; $\bar{r}_a^{(+)}$, $\bar{r}_a^{(-)}$ — основные векторы ограничивающих поверхностей. Для них имеем формулы

$$\begin{aligned} \bar{r}_a^{(+)} &= \bar{r}_i (\delta_a^i - h b_a^i), \quad \text{при } x^3 = +h \\ \bar{r}_a^{(-)} &= \bar{r}_i (\delta_a^i + h b_a^i), \quad \text{при } x^3 = -h. \end{aligned} \quad (e)$$

Элементы поверхностей $dS_0^{(+)}$ и $dS_0^{(-)}$ можно выразить через эле-

мент поверхности $d\sigma_0$ недеформированной срединной поверхности по формулам [1]:

$$dS_0^{(+)} = \sqrt{\frac{g^{(+)}}{a}} d\sigma_0, \quad dS_0^{(-)} = -\sqrt{\frac{g^{(-)}}{a}} d\sigma_0, \quad (f)$$

где $g^{(+)}$ и $g^{(-)}$ значения $\det(g_{ik})$ на поверхностях $x^3 = \pm h$. Между элементами срединных поверхностей до и после деформации, как это следует из формул (2.34), существует соотношение

$$d\sigma_0 = \sqrt{\frac{a^*}{a}} d\sigma. \quad (g)$$

Подставляя (d) в равенства (a) и (b), учитывая формулы (e), (f), (g) и заменяя dv его выражением

$$dv = \sqrt{\frac{h^*}{a^*}} d\sigma_0 dz = \sqrt{\frac{h^*}{a}} d\sigma dz$$

будем иметь

$$\begin{aligned} \bar{E}^* \sqrt{\frac{a^*}{a}} = \bar{E} = & \sqrt{\frac{g^{(+)}}{a}} A_{(+)}^{3a} (\delta_a^3 - h b_a^3) \bar{p}_3 - \sqrt{\frac{g^{(-)}}{a}} A_{(-)}^{3a} (\delta_a^3 + h b_a^3) \bar{p}_3 + \\ & + A_{(+)}^{33} \sqrt{\frac{g^{(+)}}{a}} \bar{m} - A_{(-)}^{33} \sqrt{\frac{g^{(-)}}{a}} \bar{m} + \int_{-h(-)}^{h(+)} \sqrt{\frac{h^*}{a}} \bar{F}^* dz \\ \bar{M}^* \sqrt{\frac{a^*}{a}} = \bar{M} = & [\bar{m}^*, \bar{r}_a^{(+)}] h_{(+)} \sqrt{\frac{g^{(+)}}{a}} A_{(+)}^{3a} - \\ & - [\bar{m}^*, \bar{r}_a^{(-)}] h_{(-)} \sqrt{\frac{g^{(-)}}{a}} A_{(-)}^{3a} + \int_{-h(-)}^{h(+)} [\bar{m}^*, \bar{F}^*] z \sqrt{\frac{h^*}{a}} dz. \end{aligned} \quad (2.35)$$

$$- [\bar{m}^*, \bar{r}_a^{(-)}] h_{(-)} \sqrt{\frac{g^{(-)}}{a}} A_{(-)}^{3a} + \int_{-h(-)}^{h(+)} [\bar{m}^*, \bar{F}^*] z \sqrt{\frac{h^*}{a}} dz. \quad (2.36)$$

В этих формулах $\bar{F}^*$ — вектор объемной силы, отнесенной к единице деформированного объема оболочки. Введем вектор $\bar{F}$ объемной силы, отнесенной к единице объема недеформированной оболочки, равенством:

$$\bar{F} \sqrt{h_1} = \sqrt{h^*} \bar{F}^*,$$

где h_1 — дискриминант метрического тензора h_{ik} [1].

Тогда

$$\begin{aligned} \int_{-h(-)}^{h(+)} \sqrt{\frac{h^*}{a}} \bar{F}^* dz &= \int_{-h(-)}^{h(+)} \sqrt{\frac{h_1}{a}} \bar{F} dz \\ \int_{-h(-)}^{h(+)} [\bar{m}^* z, \bar{F}^*] \sqrt{\frac{h^*}{a}} dz &= \int_{-h(-)}^{h(+)} \sqrt{\frac{h_1}{a}} [\bar{m}^* z, \bar{F}] dz, \end{aligned}$$

Если положить $x^3 = z$ и $h_1 = g$, то эти интегралы равны^{*}

$$\int_{-h}^{+h} \sqrt{\frac{g}{a}} \bar{F} dx^3, \quad \int_{-h}^{+h} \sqrt{\frac{g}{a}} [\bar{m}^* x^3, \bar{F}] dx^3. \quad (2.37)$$

Выпишем выражения составляющих векторов $\bar{E}$ и $\bar{M}$ на направления координат недеформированной оболочки при этих условиях.

Подставляя в (2.55)

$$\bar{E} = X^a \bar{\rho}_a + X^3 \bar{m}$$

$$\bar{F} = F^i \bar{r}_i = F^a (\delta_a^3 - x^3 b_a^3) \bar{\rho}_3 + F^3 \bar{m}$$

будем иметь:

$$X^a = A_{(+)}^{31} (\delta_1^3 - h b_1^3) \sqrt{\frac{g^{(+)}}{a}} - A_{(-)}^{31} (\delta_1^3 + h b_1^3) \sqrt{\frac{g^{(-)}}{a}} + \int_{-h}^{+h} \sqrt{\frac{g}{a}} F^1 (\delta_1^3 - x^3 b_1^3) dx^3, \quad (2.38)$$

$$X^3 = A_{(+)}^{33} \sqrt{\frac{g^{(+)}}{a}} - A_{(-)}^{33} \sqrt{\frac{g^{(-)}}{a}} + \int_{-h}^{+h} \sqrt{\frac{g}{a}} F^3 dx^3.$$

Выражение (2.36) мы запишем в виде:

$$\begin{aligned} \bar{M} = & h [\bar{m}^*, A_{(+)}^{3a} \bar{\rho}_3 (\delta_a^3 - h b_a^3) + A_{(+)}^{33} \bar{m}] \sqrt{\frac{g^{(+)}}{a}} - \\ & - h [\bar{m}^*, A_{(-)}^{3a} \bar{\rho}_3 (\delta_a^3 + h b_a^3) + A_{(-)}^{33} \bar{m}] \sqrt{\frac{g^{(-)}}{a}} + \\ & + \int_{-h}^{+h} [\bar{m}^*, \bar{\rho}_3] F^a (\delta_a^3 - x^3 b_a^3) x^3 \sqrt{\frac{g}{a}} dx^3 + \int_{-h}^{+h} [\bar{m}^*, \bar{m}] x^3 F^3 \sqrt{\frac{g}{a}} dx^3. \end{aligned} \quad (2.39)$$

Здесь квадратные скобки означают векторное умножение. Применяя формулы (1.14) найдем

$$[\bar{m}^*, \bar{\rho}_a] = \sqrt{\frac{a}{a^*}} a^{\pi\lambda} C_{\pi\lambda} (E_0 \bar{\rho}_\lambda - E_\lambda \bar{m})$$

$$[\bar{m}^*, \bar{m}] = \sqrt{\frac{a}{a^*}} a^{\pi\lambda} C_{\pi\lambda} \bar{\rho}^a E_\lambda$$

^{*} Это равносильно пренебрежению ϵ по сравнению с единицей.

Учитывая эти выражения, из (2.39), будем иметь:

$$\begin{aligned} M^a = & h \sqrt{\frac{g^{(+)}}{a^*}} C_{\pi\lambda} a^{\pi\lambda} \{ -E_\lambda a^{\beta\lambda} A_{(+)}^{33} - E_0 (\delta_\lambda^3 - h b_\lambda^3) A_{(+)}^{3\lambda} \} + \\ & + h \sqrt{\frac{g^{(-)}}{a^*}} C_{\pi\lambda} a^{\pi\lambda} \{ E_\lambda a^{\beta\lambda} A_{(-)}^{33} + E_0 (\delta_\lambda^3 + h b_\lambda^3) A_{(-)}^{3\lambda} \} - \\ & - a^{\pi\lambda} C_{\pi\lambda} \int_{-h}^{+h} x^3 \sqrt{\frac{g}{a^*}} \{ E_0 F^\lambda (\delta_\lambda^3 - x^3 b_\lambda^3) + E_\lambda a^{\beta\lambda} F^\beta \} dx^3. \end{aligned}$$

Откуда, если ввести новый вектор

$$\begin{aligned} M_1^a = & h a^{\pi\lambda} C_{\pi\lambda} \left\{ \sqrt{\frac{g^{(+)}}{a}} (\delta_\lambda^3 - h b_\lambda^3) A_{(+)}^{3\lambda} + \sqrt{\frac{g^{(-)}}{a}} (\delta_\lambda^3 + h b_\lambda^3) A_{(-)}^{3\lambda} \right\} + \\ & + C_{\pi\lambda} a^{\pi\lambda} \int_{-h}^{+h} \sqrt{\frac{g}{a}} (\delta_\lambda^3 - x^3 b_\lambda^3) F^\lambda x^3 dx^3, \end{aligned} \quad (2.40)$$

получим

$$M^a = \sqrt{\frac{a}{a^*}} (E_0 M_1^a + a^{\pi\lambda} C_{\pi\lambda} a^{\beta\lambda} E_\lambda y), \quad (2.41)$$

где

$$y = h \sqrt{\frac{g^{(+)}}{a}} A_{(+)}^{33} - h \sqrt{\frac{g^{(-)}}{a}} A_{(-)}^{33} + \int_{-h}^{+h} F^3 \sqrt{\frac{g}{a}} x^3 dx^3. \quad (2.43)$$

Из (2.40) видно, что вектор M_1^a является вектором внешнего момента в смысле линейной теории оболочек, но приложенным к точкам $M^*(\bar{r}^*)$ деформированной срединной поверхности S_0^* . M^* — составляющие внешнего момента в той же точке, на направления гауссовых координат на S_0 . Разница между этими векторами обусловлена влиянием деформации срединной поверхности на внешние моменты. Величины $A_{(+)}^{3i}$ и $A_{(-)}^{3i}$, $i=1, 3$, являются контравариантными составляющими внешних напряжений, приложенных к точкам ограничивающих поверхностей деформированной оболочки и отнесенных к единице площадей ограничивающих поверхностей $x^3 = \pm h$ недеформированной оболочки, на направления нормальных координат последней. F^i — контравариантные составляющие объемных сил в точке $M^*(\bar{r}^*)$ деформированной оболочки и отнесенных к единице объема недеформированной оболочки, на направления нормальных координат последней. Благодаря введению в формулы внешних сил (a) и (b) величин $A_{(+)}^{3i}$, $A_{(-)}^{3i}$, F^i , а также принятию гипотезы Кирхгофа, влияние деформации оболочки на внешние силы сводится лишь к перемещению точек приложения внешних сил. Повороты внешних сил в значительной степени связаны с деформациями срединной поверхности. Эти видно из формул (2.41) и формул (4.12).

Введем в рассмотрение векторы нагрузок $\bar{Q}_{(+)}$ и $\bar{Q}_{(-)}$, отнесенных к единице первоначальной площади поверхностей $x^3 = \pm h$ и прило-

Пусть B^i — контравариантные составляющие некоторого вектора на направления координат недеформированной оболочки и приложенного к точке $M^*(\bar{r}^*)$ деформированной оболочки. Обозначим значения величин B^i в точке $M(\bar{r})$ недеформированной оболочки через B_0^i , ко-н контравариантные составляющие вектора перемещения точки $M(\bar{r})$ через U_i и U^i . Тогда, разлагая функции B^i в ряд Тейлора по степеням перемещений, будем иметь

$$B^I = B_0^I + U^k \nabla_k B_0^I + \frac{1}{2!} U^k U^l (\nabla_k \nabla_l B_0^I) + \dots$$

$$A_{(+)}^{3l'} = Q_{(+)}^{l'} + \overset{(+)}{U}_k \nabla^k Q_{(+)}^{l'} + \frac{1}{9!} \overset{(+)}{U}_k \overset{(+)}{U}_l \nabla^k \nabla^l Q_{(+)}^{l'} + \dots$$

$$A_{(-)}^{3l} = Q_{(-)}^l + \bar{U}_k \nabla^k Q_{(-)}^l + \frac{1}{2!} \bar{U}_k \bar{U}_l \nabla^k \nabla^l Q_{(-)}^l + \dots \quad (2.43')$$

$$F^I = F_0^I + U_k \nabla^k F_0^I + \frac{1}{2!} U_k U_l \nabla^k \nabla^l F_0^I + \dots$$

Таким образом, для полного приведения трехмерной задачи к двумерной необходимо привлечь гипотезу о характере смещенного состояния оболочки. Для тонкой оболочки, например, можно принять гипотезу Кирхгофа. По этой гипотезе вектор перемещения $\bar{U}$ равен

$$\begin{aligned} \bar{U} = \bar{r}^* - \bar{r} = \bar{p}^* - \bar{p} + x^3(\bar{m}^* - \bar{m}) = \bar{v} + x^3 \left(\sqrt{\frac{a}{a^*}} E_a \bar{p}^a + \right. \\ \left. + \sqrt{\frac{a}{a^*}} E_0 - \bar{m} \right) \end{aligned}$$

$$\bar{U}_k = \bar{U} \bar{r}_k = \bar{r}_k \left\{ \bar{v} + x^3 \left(\sqrt{\frac{a}{a^*}} E_a \bar{p}^a + \sqrt{\frac{a}{x^*}} E_0 \bar{m} - \bar{m} \right) \right\}$$
$$U_\alpha = \left(\delta_\alpha^\pi - x^3 b_\alpha^\pi \right) \left(v_\pi + x^3 \sqrt{\frac{a}{a^*}} E_\pi \right), U_3 = W + x^3 \left(\sqrt{\frac{a}{a^*}} E_0 - 1 \right) \quad (2.44)$$

Тогда

$$U_\alpha = V_\alpha + x^3 \sqrt{\frac{a}{a^*}} E_\alpha, \quad U_3 = W + x^3 \left(\sqrt{\frac{a}{a^*}} E_0 - 1 \right). \quad (2.45)$$

§ 3. Граничные условия, отнесенные к деформированному и к недеформированному состояниям оболочки

Геометрическое место граничных точек срединной поверхности деформированной незамкнутой оболочки назовем граничным контуром C^* , а граничным срезом этой оболочки назовем линейчатую поверхность Σ , образованную совокупностью нормалей к срединной поверхности, проведенных через точки C^* . Обозначим: $\underline{n}$ — единичный вектор нормали к C^* , лежащей в касательной плоскости срединной поверхности S_0 , $\underline{\tau}$ — единичный вектор касательной к контуру C^* , $\underline{m}$ — нормаль к S_0 в точках контура C^* . Ориентацию триэдра $(\underline{n}, \underline{\tau}, \underline{m})$ будем считать правосторонней. Обозначим, далее, через $\bar{P}$ и $\bar{L}$ векторы упругого усилия и упругого момента, отнесенные к единице длины контура C^* , а их проекции на оси триэдра через T, S, N и H, G, O , соответственно:

$$\bar{L} = \bar{n}H + \bar{\tau}G,$$

Как известно, крутящий момент на контуре C^* тонкой оболочки можно заменить соответствующе распределенным усилием типа —

Таким образом, совокупность упругого усилия и крутящего момента на контуре C^* деформированной оболочки приводится к усилию $\bar{F}$, отнесенному к единице длины этого контура:

$$\bar{\Phi} = \bar{P} - \frac{\partial \bar{m} H}{\partial s} \quad (3.1)$$

Изгибающий момент на контуре остается без изменения. Вектор Φ в (3.1) мы будем приравнивать вектору внешнего усилия, приложенного к контуру C^* деформированной оболочки и отнесенного к единице длины этого контура. Обозначая вектор внешнего уси-

для той же буквой $\bar{\Phi}$, а его составляющие на оси триэдра $(\bar{n}, \bar{\tau}, \bar{m}^*)$ через $\Phi_n, \Phi_\tau, \Phi_{m^*}$, из (3.1) будем иметь:

$$\Phi_n = T - \bar{n} \frac{\partial \bar{m}^* H}{\partial s}, \quad \Phi_\tau = S - \bar{\tau} \frac{\partial \bar{m}^* H}{\partial s}, \quad \Phi_{m^*} = N - \bar{m}^* \frac{\partial \bar{m}^* H}{\partial s}. \quad (3.2)$$

Так как

$$\frac{\partial \bar{m}^* H}{\partial s} = \frac{\partial \bar{m}^*}{\partial x^a} \frac{\partial x^a}{\partial s} H + \bar{m}^* \frac{\partial H}{\partial s}, \quad \frac{\partial \bar{m}^*}{\partial x^a} = -b_{a\beta}^* \bar{r}_\beta^*,$$

то

$$\frac{\partial \bar{m}^* H}{\partial s} = -b_{a\beta}^* \bar{r}_\beta^* \frac{dx^a}{ds} H + \bar{m}^* \frac{\partial H}{\partial s}. \quad (3.2')$$

Внося последнее в (3.2), получим

$$\Phi_n = T + H b_{a\beta}^* \frac{dx^a}{ds} (\bar{n}, \bar{r}_\beta^*)$$

$$\Phi_\tau = S + H b_{a\beta}^* \frac{dx^a}{ds} (\bar{\tau}, \bar{r}_\beta^*) \quad (3.3)$$

$$\Phi_{m^*} = N - \frac{\partial H}{\partial s}.$$

Представляя единичные векторы $\bar{\tau}$ и $\bar{n}$ в виде

$$\bar{\tau} = \frac{\bar{r}_\beta^*}{\rho_\beta} \frac{dx^\beta}{ds}, \quad \bar{n} = \frac{\bar{r}_\beta^*}{\rho_\beta} C_{\beta\alpha}^* \frac{dx^\alpha}{ds}, \quad (3.4)$$

где $C_{\beta\alpha}^*$ — дискриминантный тензор поверхности S_0^* , имеем

$$\bar{n} \bar{r}_\beta^* = n_\beta = \frac{\bar{r}_\beta^*}{\rho_\beta} \bar{r}_\alpha^* C_{\alpha\beta}^* \frac{dx^\alpha}{ds} = C_{\beta\alpha}^* \frac{dx^\alpha}{ds} \quad (3.5)$$

$$\bar{\tau} \bar{r}_\beta^* = \tau_\beta = \frac{\bar{r}_\beta^*}{\rho_\beta} \frac{dx^\alpha}{ds} = a_{\alpha\beta}^* \frac{dx^\alpha}{ds}.$$

Внося эти выражения в (3.3), получаем

$$\Phi_n = T + b_{a\beta}^* C_{\beta\gamma}^* \frac{dx^a}{ds} \frac{dx^\gamma}{ds} H$$

$$\Phi_\tau = S + b_{a\beta}^* a_{\beta\gamma}^* \frac{dx^a}{ds} \frac{dx^\gamma}{ds} H \quad (3.6)$$

$$\Phi_{m^*} = N - \frac{\partial H}{\partial s}.$$

Скаляр

$$-b_{a\beta}^* \frac{dx^a}{ds} \frac{dx^\beta}{ds} = \frac{\Pi}{I},$$

являющийся отношением второй квадратичной формы к первой, представляет собой кривизну нормального сечения, проведенного в направлении $\bar{\tau}$: $-\frac{1}{R^1} = \frac{\Pi}{I}.$

Учитывая это, выражения (3.6) запишутся окончательно в виде:

$$\begin{aligned} \Phi_n &= T + b_{a\beta}^* C_{\beta\gamma}^* \frac{dx^a}{ds} \frac{dx^\gamma}{ds} H \\ \Phi_\tau &= S - \frac{H}{R^1} \\ \Phi_{m^*} &= N - \frac{\partial H}{\partial s}. \end{aligned} \quad (3.7)$$

Эти формулы представляют собой статические граничные условия, отнесенные к деформированному состоянию. Пусть за x^a приняты линии кривизны.

Тогда

$$b_1^{*1} = -\frac{1}{R_1^*}, \quad b_2^{*2} = -\frac{1}{R_2^*}, \quad b_2^{*1} = b_1^{*2} = 0,$$

где R_1^* и R_2^* — главные радиусы кривизны деформированной средней поверхности S_0^* на контуре C^* оболочки. Учитывая это можно записать

$$\Phi_n = T - V a^* \frac{dx^1}{ds} \frac{dx^2}{ds} \left(\frac{1}{R_1^*} - \frac{1}{R_2^*} \right) H.$$

Обозначим угол между линией x^1 и $\bar{\tau}$ через φ . Тогда физические составляющие вектора $\bar{\tau}$ будут

$$[\tau^1] = \cos \varphi = \sqrt{a_{11}} \tau^1, \quad [\tau^2] = \sin \varphi = \sqrt{a_{22}} \tau^2, \quad \tau^1 = \frac{dx^1}{ds}, \quad \tau^2 = \frac{dx^2}{ds}$$

Принимая во внимание эти формулы, получим

$$\begin{aligned} \Phi_n &= T - H \sin \varphi \cos \varphi \left(\frac{1}{R_1^*} - \frac{1}{R_2^*} \right) \\ \Phi_\tau &= S - \frac{H}{R^1} \\ \Phi_{m^*} &= N - \frac{\partial H}{\partial s}. \end{aligned} \quad (3.8)$$

В таком виде и приведены граничные условия в курсе Ляв. Статические граничные условия можно представить и иначе, вводя в них искомые величины $T^{\alpha\beta}$, N^α , $H^{\alpha\beta}$. Пусть $\bar{P}$ означает вектор напряжения, действующего на граничный срез Σ^* деформированной оболочки и приходящийся на единицу площади среза. По формулам общей теории упругости [1] представим этот вектор в виде

$$\bar{P} = \sigma^{ia} \bar{r}_i^* n_a, \quad i=1, 2, 3, \quad a=1, 2, \quad (3.9)$$

где n_a — ковариантные составляющие вектора нормали к граничному срезу Σ^* , а следовательно и к контуру C^* . Вектор усилия $\bar{P}$, приходящийся на единицу длины контура оболочки можно выразить формулой

$$\bar{P} = \int_{-h(-)}^{h(+)} \bar{p} \frac{d\Sigma^*}{ds},$$

Здесь $d\Sigma^*$ — площадь полоски граничного среза Σ^* на уровне Z от срединной поверхности S_0^* ; ds — элемент контура C^* оболочки. Таким образом:

$$\bar{P} = \int_{-h(-)}^{+h(+)} \sigma_{ia} \bar{r}_i n_a \frac{d\Sigma}{ds}$$

$d\Sigma^*$ можно выразить через площадь полоски $d\Sigma_0^* = ds dz$ на уровне $z = 0$, по формуле

$$d\Sigma^* = \sqrt{\frac{h^*}{a^*}} d\Sigma_0^* = \sqrt{\frac{h^*}{a^*}} ds dz.$$

Тогда имеем

$$\bar{P} = \int_{-h(-)}^{+h(+)} \sigma_{ia} \bar{r}_i n_a \sqrt{\frac{h^*}{a^*}} dz,$$

откуда, пользуясь обозначениями усилий (2.6) и (2.7) будем иметь формулы, аналогичные формулам (3.9):

$$\bar{P} = n_a (\bar{p}_\beta^* T_{\alpha\beta}^* + \bar{m}^* N_\alpha^*). \quad (3.10)$$

Пользуясь обозначениями (2.9) упругий момент представим в виде:

$$\bar{L} = \int_{-h(-)}^{+h(+)} [\bar{m}^* z, \bar{P}] \frac{d\Sigma}{ds} = \int_{-h(-)}^{+h(+)} [\bar{m}^* z, \bar{r}_a^*] \sigma_{a\beta} \sqrt{\frac{h^*}{a^*}} n_a dz = [\bar{m}^* \bar{p}_\beta^*] H^{\alpha\beta} n_\alpha.$$

Откуда, учитывая, что $[\bar{m}^*, \bar{p}_\beta^*] = C_{\beta\alpha}^* \bar{p}_\alpha^*$ и вводя новый тензор $L_{\alpha\beta}^*$ по формулам (2.14):

$$L_{\alpha\beta}^* = C_{\alpha\gamma}^* a_{\gamma\lambda}^* H^{\lambda\pi},$$

мы получим

$$\bar{L} = L_{\alpha\beta}^* n_\alpha \bar{p}_\beta^*. \quad (3.11)$$

Отсюда для крутящего момента имеем:

$$H = \bar{L} \cdot \bar{n} = L_{\alpha\beta}^* n_\alpha \bar{p}_\beta^*. \quad (3.12)$$

Внося (3.10) в (3.1) и пользуясь формулой (3.2¹), находим

$$\bar{\Phi} = (T_{\alpha\beta}^* \bar{p}_\beta^* + N_\alpha^* \bar{m}^*) n_\alpha + b_{\alpha\beta}^* \frac{dx^\alpha}{ds} H - \bar{m}^* \frac{\partial H}{\partial s}, \quad (3.12^1)$$

а для составляющих вектора $\bar{\Phi}$, получим

$$\begin{aligned} \Phi^a &= T_{\alpha\beta}^* n_\beta + b_{\beta\alpha}^* \frac{dx^\beta}{ds} H \\ \Phi^z &= N_\alpha^* n_\alpha - \frac{\partial H}{\partial s}, \end{aligned} \quad (3.13)$$

где $\frac{dx^\beta}{ds} = n_\alpha C_{\alpha\beta}^*$, Φ^a и Φ^z — составляющие внешнего усилия на нормальные координаты деформированной оболочки. Граничные условия в виде (3.13) удобны в том отношении, что в них входят искоемые величины непосредственно, как в общей теории упругости.

Легко также вывести статические граничные условия, относя их к недеформированному состоянию оболочки. Пусть n^0 означает единичный вектор нормали к недеформированному контуру C , дифференциал дуги которого обозначим через ds_0 . Тогда сравнивая формулы (2.28¹) и (3.10) сразу получим

$$\bar{P} = \sqrt{\frac{a}{a^*}} (T_{\alpha\beta}^* \bar{p}_\beta^* + N_\alpha^* \bar{m}^*) n_\alpha.$$

Но из формул (3.5) имеем

$$n_\alpha = C_{\alpha\beta}^* \frac{\partial x^\beta}{\partial s} \quad (3.14)$$

аналогично имеем для n_α^0 :

$$n_\alpha^0 = C_{\alpha\beta}^* \frac{dx^\beta}{ds_0}. \quad (3.14')$$

Сравнивая их находим

$$n_\alpha = n_\alpha^0 \sqrt{\frac{a^*}{a}} \frac{ds_0}{ds}. \quad (3.15)$$

Учитывая эти формулы, получим

$$\bar{P} = (T_{\alpha\beta}^* \bar{p}_\beta^* + N_\alpha^* \bar{m}^*) n_\alpha^0 \frac{ds_0}{ds}. \quad (3.16)$$

Далее, так как

$$H = L_{\alpha\beta}^* n_\alpha \bar{p}_\beta^* = C_{\alpha\gamma}^* a_{\gamma\lambda}^* n_\alpha \bar{p}_\beta^* H^{\lambda\pi},$$

то внося n_α и $H^{\alpha\pi}$ из формул (3.15) и (2.33), и пользуясь формулами (1.4¹), будем иметь

$$\left(\frac{ds}{ds_0}\right)^2 H = \sqrt{\frac{a^*}{a}} a^{*\lambda} \left\{ a_{\gamma\pi}^* (\delta_\lambda^\pi + e_\lambda^\pi) - \frac{\omega_\lambda E_\pi}{E_0} \right\} L^{\alpha\pi} n_\alpha^0 \bar{p}_\beta^0. \quad (3.17)$$

Отсюда при помощи формул (1.18), (1.19), а также формулы

$$\frac{ds}{ds_0} = \sqrt{1 + 2p_{\alpha\beta}^* \frac{dx^\alpha}{ds} \frac{dx^\beta}{ds}} = \sqrt{1 + 2p_{\alpha\beta}^* C_{\alpha\gamma}^* n_\gamma^0 \bar{p}_\beta^0},$$

можно вычислить H с требуемой точностью.

Теперь, внося (3.16) в (3.12¹), будем иметь

$$\bar{\Phi} \frac{ds}{ds_0} = (T_{\alpha\beta}^* \bar{p}_\beta^* + N_\alpha^* \bar{m}^*) n_\alpha^0 + b_{\alpha\beta}^* \frac{dx^\alpha}{ds_0} H - \bar{m}^* \frac{\partial H}{\partial s_0}.$$

Откуда, учитывая, что

$$\bar{p}_\beta^* \bar{p}_\alpha = a_{\alpha\pi}^* (\delta_\beta^\pi + e_\beta^\pi), \quad \bar{p}_\beta^* \bar{m} = \omega_\beta$$

$$\bar{m}^* \bar{p}_\alpha = \sqrt{\frac{a}{a^*}} E_\alpha, \quad \bar{m}^* \bar{m} = \sqrt{\frac{a}{a^*}} E_0, \quad \frac{dx^\beta}{ds_0} = n_\alpha^0 C_{\alpha\beta}^*,$$

найдем граничные условия в виде:

$$\begin{aligned} \Phi^\pi \frac{ds}{ds_0} &= \{ T_{\alpha\pi}^* + b_{\gamma\pi}^* (\delta_\beta^\pi + e_\beta^\pi) C^{\alpha\gamma} H \} n_\alpha^0 - a^{\alpha\pi} \sqrt{\frac{a}{a^*}} E_\alpha \frac{\partial H}{\partial s_0} \\ \Phi^3 \frac{ds}{ds_0} &= (N^\alpha + b_{\gamma\pi}^* C^{\alpha\gamma} \omega_\pi) n_\alpha^0 - \sqrt{\frac{a}{a^*}} E_0 \frac{\partial H}{\partial s_0}, \end{aligned} \quad (3.18)$$

где H выражается формулой (3.17).

В случае линейной теории, мы отсюда получим

$$\Phi^\pi = (T^{\alpha\pi} + b_\lambda^\pi C^{\alpha\lambda} H) n_\alpha^0 \quad (3.18')$$

$$\Phi^3 = N^\pi n_\alpha^0 - \frac{\partial H}{\partial s}, \quad H = L_\alpha^\beta n_\alpha^0 n_\beta^0.$$

Пусть контур C недеформированной оболочки совпадает с линией кривизны $x^2 = \text{const}$. В этом случае:

$$n_1^0 = 0, \quad n_2^0 = \sqrt{a_{22}}, \quad H = L_\alpha^\beta n_\alpha^0 n_\beta^0 = L_\alpha^{22} a_{22}, \quad (*)$$

но

$$L_\alpha^\beta = C^{\lambda\beta} a_{\alpha\lambda} H^{\alpha\pi},$$

где

$$H^{\alpha\pi} = \int_{-h}^{+h} \sigma^{\alpha\beta} (\delta_\beta^\pi - x^3 b_\beta^\pi) \sqrt{\frac{g}{a}} x^3 dx^3,$$

тогда

$$L_\alpha^{22} = C^{\lambda 2} a_{\alpha\lambda} H^{2\pi} = \frac{a_{11}}{a} [H^{21}],$$

где под $[B^{ik}]$ подразумеваются физические составляющие тензора B^{ik} .

Учитывая это из (*) имеем:

$$H = [H^{21}].$$

Если ввести еще физические составляющие тензоров:

$$\Phi^1 = \frac{[\Phi^1]}{\sqrt{a_{11}}}, \quad \Phi^2 = \frac{[\Phi^2]}{\sqrt{a_{22}}}, \quad T^{22} = \frac{[T^{22}]}{a_{22}},$$

то в силу равенства

$$\frac{\partial}{\partial s_0} = \frac{1}{a_{11}} \frac{\partial}{\partial x^1}$$

формулы (3.18') переходят в известные формулы линейной теории:

$$[\Phi^2] = [T^{22}], \quad [\Phi^1] = [T^{21}] - \frac{[H^{21}]}{R_1},$$

$$\Phi^3 = [N^2] - \frac{1}{a_{11}} \frac{\partial [H^{21}]}{\partial x^1}.$$

Чтобы вывести формулу для изгибающего момента G подставим $\bar{L}$ из (3.1) в формулу

$$G = \bar{L} \cdot \bar{\tau}.$$

Это дает

$$G = L_\alpha^\beta (\bar{\tau} \cdot \bar{\rho}_\beta) n_\alpha.$$

Внося сюда $\bar{\tau}$ из (3.4) и пользуясь формулами $\frac{dx^\beta}{ds} = n_\alpha C^{\alpha\beta}$, получим

$$G = L_\alpha^\beta a_{\beta\lambda} C^{\lambda\gamma} n_\alpha n_\gamma, \quad (3.19)$$

или, если подставить L_α^β из (2.14), то

$$G = H^{\alpha\beta} n_\alpha n_\beta. \quad (3.20)$$

Чтобы выразить G через тензор моментов, отнесенных к недеформированному состоянию оболочки, подставим в (3.20) n_α и $H^{\alpha\beta}$ из формул (3.15) и (2.33). Это дает:

$$\left(\frac{ds}{ds_0}\right)^2 G = C^{\lambda\lambda} \left\{ a_{\tau\lambda} (\delta_\lambda^\tau + e_\lambda^\tau) - \frac{\omega_\lambda E_\pi}{E_0} \right\} L^{\alpha\pi} n_\alpha^0 n_\pi^0 \quad (3.21)$$

Граничные условия (3.13), (3.19) для деформированного состояния оболочки или граничные условия (3.18), (3.21), отнесенные к недеформированному состоянию оболочки, определяют напряженное состояние на краях оболочки. Кроме силовых условий могут быть и геометрические условия, зависящие от способа закрепления краев оболочки. Рассмотрим граничные условия обычного типа.

1° Свободный край

$$\Phi^1 = \Phi^2 = \Phi^3 = 0, \quad G = 0.$$

2° Шарнирный, неподвижно опертый край

$$G = 0, \quad v^1 = v^2 = W = 0.$$

3° Шарнирный свободный в нормальном направлении край.

$$G = 0, \quad \Phi^3 = 0, \quad v^1 = v^2 = 0.$$

4° Абсолютно заделанный край

$$v^1 = v^2 = W = 0.$$

Кроме того наклон срединной поверхности у граничного контура остается неизменным. Рассмотрим это условие. Если $\bar{n}_0$ — единичный вектор нормали к контуру недеформированной оболочки, то это условие, очевидно, сводится к равенству нулю скалярного произведения

$$\bar{m} \cdot \bar{n}_0 = 0.$$

Представляя вектор n_α^0 в виде

$$\bar{n}_0 = \bar{\rho}^\beta C_{\beta\alpha} \frac{dx^\alpha}{ds_0},$$

имеем

$$\bar{m} \cdot \bar{\rho}^\beta C_{\beta\alpha} \frac{dx^\alpha}{ds_0} = 0.$$

Внося в последнее выражение $\bar{m}^*$ из (1.14), получим четвертое граничное условие

$$a_{\tau\beta} C_{\alpha\beta} E_\tau \frac{dx^\alpha}{ds_0} = 0. \quad (3.22)$$

Для линейной теории в силу $E_\alpha = -\omega_\alpha$, имеем

$$a_{\tau\beta} C_{\alpha\beta} \omega_\tau \frac{dx^\alpha}{ds_0} = 0. \quad (3.23)$$

Пусть контуром оболочки является линия кривизны $x^2 = \text{const}$. Тогда

$$a_{\tau\beta} C_{1\beta} \omega_\tau \frac{dx^1}{ds_0} = 0,$$

откуда получаем известное граничное условие для заземленного края оболочки:

$$\omega_2 = \frac{\partial W}{\partial x^2} + b_{22} v^2 = 0.$$

Теперь пусть мы имеем дело с пластинками ($b_{a\beta} = 0$). Тогда из (3.23) имеем

$$\omega_1 \frac{dy}{ds_0} - \omega_2 \frac{dx}{ds_0} = 0$$

или так как

$$\frac{dy_1}{ds_0} = \cos(n_0, x), \quad \frac{dx}{ds_0} = -\cos(n_0, y),$$

то последнее равенство приводится к условию $\frac{\partial W}{\partial n_0} = 0$ на контуре.

Это условие при больших прогибах пластинки должно быть замещено условием

$$E_2 \frac{dx}{ds_0} - E_1 \frac{dy}{ds_0} = 0.$$

Выпишем теперь граничное условие рассматриваемого типа, относя его к деформированному состоянию оболочки. Если $\bar{n}$ — единичный вектор нормали к деформированному контуру оболочки, то представляя его в виде

$$\bar{n} = \bar{p}^{*3} C_{\beta z}^* \frac{dx^*}{ds}$$

будем иметь

$$\bar{m} \bar{n} = \bar{m} \bar{p}^{*3} C_{\beta z}^* \frac{dx^*}{ds} = 0.$$

Отсюда, пользуясь (1.14'), получим:

$$a^{*3} C_{a\beta}^* E_1 \frac{dx^*}{ds} = 0, \quad (4.21)$$

где E_1^* выражаются формулами (1.15').

Сделаем еще следующее замечание. Уравнения равновесия и граничные условия, отнесенные к недеформированному состоянию оболочки, довольно сложны по структуре. Задачи при граничных условиях 2° и 4°, при условии их выполнения на всем контуре, удобнее решать с помощью уравнений, отнесенных к деформированному состоянию оболочки.

§ 4. Соотношения между усилиями, моментами и деформациями срединной поверхности

Закон Гука для оболочки, отнесенный к ее деформированному состоянию, при принятии гипотезы Кирхгофа имеет вид [3]:

$$\sigma^{a\beta} = A_*^{a\beta\kappa\lambda} \varepsilon_{\kappa\lambda}, \quad (4.1)$$

где

$$A_*^{a\beta\kappa\lambda} = \frac{E}{1 - \sigma^2} [\sigma h_*^{a\beta} h_*^{\kappa\lambda} + (1 - \sigma) h_*^{a\kappa} h_*^{\beta\lambda}], \quad (4.2)$$

$\varepsilon_{\kappa\lambda}$ выражаются формулами (1.34), E и σ — модуль Юнга и коэффициент Пуассона. Так как при принятии гипотезы Кирхгофа $\varepsilon_{a\beta}$ и $\eta_{a\beta}$ совпадают, то напряжения можно выразить также и через $\eta_{a\beta}$ по формулам (1.33).

Разложим теперь (4.1) в ряд Тейлора по степеням z , сохранив в нем вторые степени z .

При $z = 0$ имеют место формулы:

$$\varepsilon_{a\beta} = p_{a\beta}, \quad h_{a\beta}^* = a_{a\beta}^*, \quad h_{*}^{a\beta} = a_{*}^{a\beta}, \quad \frac{\partial \varepsilon_{a\beta}}{\partial z} = -q_{a\beta}, \quad \frac{\partial h_{*}^{a\beta}}{\partial z} = 2b_{*}^{a\beta},$$

$$\frac{\partial^2 h_{*}^{a\beta}}{\partial z^2} = 6a_{*}^{a\gamma} a_{*}^{\beta\mu} k_{\mu\gamma}^*.$$

где $k_{\mu\gamma}^*$ — коэффициенты третьей квадратичной формы S_0 . Пользуясь ими напряжения в оболочке представим в виде:

$$\sigma^{a\beta} = \sigma_1^{a\beta} + \sigma_2^{a\beta} z + \frac{1}{2} \sigma_3^{a\beta} z^2, \quad (4.3)$$

где

$$\sigma_1^{a\beta} = A^{a\beta\kappa\lambda} p_{\kappa\lambda}, \quad \sigma_2^{a\beta} = -A^{a\beta\kappa\lambda} q_{\kappa\lambda} + O_1^{a\beta} (b^* p),$$

$$\sigma_3^{a\beta} = O_2^{a\beta} (b^* q, b^* p q, p b^2, p q^2, q^2),$$

$$A^{a\beta\kappa\lambda} = \frac{E}{1 - \sigma^2} [\sigma a_*^{a\beta} a_*^{\kappa\lambda} + (1 - \sigma) a_*^{a\kappa} a_*^{\beta\lambda}].$$

через O_1 и O_2 обозначены величины порядка погрешности гипотезы Кирхгофа. Чтобы в этом убедиться достаточно перейти к безразмерным координатам и безразмерным напряжениям. Это так же следует из формул, данных в работе [6], не основанных на гипотезе Кирхгофа. При принятии этой гипотезы и линейного закона Гука, было бы непоследовательным сохранять члены, содержащие эти величины.

При вычислении усилий и моментов в формулах (2.6) и (2.9), учитывая погрешность гипотезы Кирхгофа, можно положить $h_* = a_*$. Тогда, подставляя (4.3) в формулы (2.6) и (2.9) и интегрируя, получим

$$T_*^{a\beta} = 2h \sigma_1^{a\beta} - \frac{2h^3}{3} b_1^{*3} \sigma_2^{a\beta}, \quad H^{a\beta} = \frac{2h^3}{3} (\sigma_2^{a\beta} - b_1^{*3} \sigma_1^{a\beta}). \quad (4.4)$$

Чтобы удовлетворить тождеству

$$C_{a\beta}^* b_1^{*3} H^{a\beta} + C_{a\beta}^* T_*^{a\beta} = 0 \quad (4.5)$$

в формулах (4.4) следует сохранить члены, содержащие погрешность гипотезы Кирхгофа. В формулах (4.4) члены $b_1^{*3} \sigma_1^{a\beta}$ при подстановке $T_*^{a\beta}$ и $H^{a\beta}$ в (4.5) сокращаются, так как $C_{a\beta}^* b_1^{*3} b_1^{*3} \sigma_1^{a\beta} = 0$, а члены $\frac{2h^3}{3} \sigma_2^{a\beta}$ и $-\frac{2h^3}{3} b_1^{*3} \sigma_2^{a\beta}$ сокращаются взаимно.

Поэтому выражения

$$T_*^{a\beta} = 2h \sigma_1^{a\beta} - \frac{2h^3}{3} b_1^{*3} \sigma_2^{a\beta}, \quad H^{a\beta} = \frac{2h^3}{3} \sigma_2^{a\beta}$$

удовлетворяют шестому уравнению равновесия (4.5) при любых

симметричных $\sigma_2^{\alpha\beta}$. Внося в них $\sigma_1^{\alpha\beta}$ и $\sigma_2^{\alpha\beta}$, будем иметь соотношения, удовлетворяющие тождеству (4.5):

$$T_{\alpha\beta}^{\alpha\beta} = 2hA^{\alpha\beta\pi\lambda}p_{\pi\lambda} + \frac{2h^3}{3}b_{\gamma}^{\alpha\beta}A^{\alpha\gamma\pi\lambda}q_{\pi\lambda} \quad (4.6)$$

$$H^{\alpha\beta} = -\frac{2h^3}{3}A^{\alpha\beta\pi\lambda}q_{\pi\lambda}. \quad (4.7)$$

Соотношения

$$\begin{aligned} T_{\alpha\beta}^{\alpha\beta} &= 2hA^{\alpha\beta\pi\lambda}p_{\pi\lambda}, \text{ при } \alpha=\beta \\ T_{\alpha\beta}^{\alpha\beta} &= 2hA^{\alpha\beta\pi\lambda}p_{\pi\lambda} + \frac{2h^3}{3}b_{\gamma}^{\alpha\beta}A^{\alpha\gamma\pi\lambda}q_{\pi\lambda}, \text{ при } \alpha \neq \beta \end{aligned} \quad (4.8)$$

$$H^{\alpha\beta} = -\frac{2h^3}{3}A^{\alpha\beta\pi\lambda}q_{\pi\lambda}$$

также удовлетворяют тождеству (4.5).

Учитывая погрешность гипотезы Кирхгофа и линейного закона Гука из (4.6) и (4.7), найдем:

$$T_{\alpha\beta}^{\alpha\beta} = 2hA_0^{\alpha\beta\pi\lambda}p_{\pi\lambda} + \frac{2h^3}{3}b_{\gamma}^{\alpha\beta}A_0^{\alpha\gamma\pi\lambda}q_{\pi\lambda}, \quad H^{\alpha\beta} = -\frac{2h^3}{3}A_0^{\alpha\beta\pi\lambda}q_{\pi\lambda}, \quad (4.9)$$

$$\text{где} \quad A_0^{\alpha\beta\pi\lambda} = \frac{E}{1-\sigma^2} [\sigma a^{\alpha\beta}a^{\pi\lambda} + (1-\sigma)a^{\alpha\pi}a^{\beta\lambda}].$$

Перерезывающие усилия N_{α}^{β} определяются из уравнений моментов (2.12) при помощи (2.14):

$$N_{\alpha}^{\beta} = -M_{\beta}^{\alpha} C_{\alpha}^{\beta\gamma} + \nabla_{\beta}^{\alpha} H^{\beta\gamma}. \quad (4.10)$$

Отнесем правые части этих выражений к недеформированному состоянию оболочки.

Умножая (2.16) скалярно на $\bar{p}_{\beta}^{\alpha}$ и пользуясь формулами (1.9), имеем

$$M_{\beta}^{\alpha} = \sqrt{\frac{\bar{a}}{a_{\alpha}}} \bar{M}_{\beta}^{\alpha} = \sqrt{\frac{\bar{a}}{a_{\alpha}}} [M_{\alpha} (\delta_{\beta}^{\alpha} + e_{\beta}^{\alpha}) + M^3 \omega_{\beta}],$$

но из $\bar{m}_{\alpha} \bar{M}_{\alpha} = 0$, пользуясь формулами (1.14) и (2.22), имеем

$$E_0 M^3 = -E_{\alpha} M^{\alpha}. \quad (4.11)$$

$$\text{Тогда} \quad M_{\beta}^{\alpha} = \sqrt{\frac{\bar{a}}{a_{\alpha}}} M_{\gamma}^{\alpha} \left[a_{\alpha\gamma} (\delta_{\beta}^{\alpha} + e_{\beta}^{\alpha}) - \frac{E_{\gamma} \omega_{\beta}}{E_0} \right] \quad (4.12)$$

$$M_{\beta}^{\alpha} C_{\alpha}^{\beta\gamma} = \frac{a}{a^{\alpha}} C^{\beta\gamma} M^{\alpha} \left[a_{\alpha\pi} (\delta_{\beta}^{\alpha} + e_{\beta}^{\alpha}) - \frac{E_{\pi} \omega_{\beta}}{E_0} \right]. \quad (4.13)$$

Здесь M^{α} выражаются формулами (2.41).

В ковариантных производных в (4.10) символы Кристоффеля деформированной поверхности, пользуясь формулами (5.29), приводимыми ниже, представим в виде:

$$\nabla_{\alpha}^{\alpha} H^{\alpha\beta} = \nabla_{\alpha} H^{\alpha\beta} + H^{\alpha\beta} \nabla_{\alpha} P_1 + a^{\pi\beta} P_{\pi\alpha\gamma} H^{\alpha\gamma}. \quad (4.14)$$

Здесь отброшены члены порядка $h^3 p q$, $h^3 p^2$, $h^3 p^2 \frac{\partial p}{\partial x}$

Если производные от $P_{\alpha\beta}$ не возрастают, то $\nabla_{\alpha}^{\alpha} H^{\alpha\beta} = \nabla_{\alpha} H^{\alpha\beta}$. Внося (4.13) и (4.14) в (4.10) получим выражения N_{α}^{β} , содержащие ковариантное дифференцирование относительно $a_{\alpha\beta}$. Тензоры $T^{\alpha\beta}$, N^{α} и $L^{\alpha\beta}$ будут найдены по формулам (2.29) и (2.32).

§ 5. Основные уравнения теории тонких оболочек

Уравнения равновесия, граничные условия и соотношения для усилий и моментов были отнесены как к деформированному состоянию оболочки, так и к ее недеформированному состоянию. В соответствии с этим основные уравнения будут отнесены к обоим состояниям оболочки.

1. Уравнения теории тонких оболочек, отнесенные к деформированному состоянию оболочки

а) Уравнения равновесия и условия совместности для P и q .

Внося N_{α}^{β} из уравнений моментов (2.12) в уравнения (2.10) и (2.11), получаем три уравнения

$$\nabla_{\alpha}^{\alpha} T_{\alpha}^{\alpha\beta} - b_{\alpha}^{\alpha\beta} \nabla_{\gamma}^{\alpha} H^{\gamma\alpha} + b_{\alpha}^{\alpha\beta} M_{\gamma}^{\alpha} C_{\alpha}^{\gamma\beta} + X_{\alpha}^{\beta} = 0, \quad (5.1)$$

$$\nabla_{\alpha}^{\alpha} \nabla_{\beta}^{\alpha} H^{\beta\alpha} + b_{\alpha\beta}^{\alpha} T_{\alpha}^{\beta\alpha} - C_{\alpha}^{\alpha\beta} \nabla_{\gamma}^{\alpha} M_{\alpha}^{\gamma} + X_{\alpha}^{\beta} = 0. \quad (5.2)$$

Если подставить сюда выражения усилий и моментов из (4.6) и (4.7), то будем иметь три уравнения для p и q :

$$\begin{aligned} 2hA^{\alpha\beta\pi\lambda} \nabla_{\alpha}^{\alpha} P_{\pi\lambda} + \frac{2h^3}{3} A^{\alpha\gamma\pi\lambda} [2b_{\gamma}^{\alpha\beta} \nabla_{\alpha}^{\alpha} q_{\pi\lambda} + q_{\pi\lambda} \nabla_{\alpha}^{\alpha} b_{\gamma}^{\alpha\beta}] + \\ + b_{\gamma}^{\alpha\beta} M_{\alpha}^{\gamma} C_{\alpha}^{\gamma\beta} + X_{\alpha}^{\beta} = 0 \end{aligned} \quad (5.3)$$

$$\begin{aligned} A^{\alpha\beta\pi\lambda} \left(2hb_{\alpha\beta}^{\alpha} P_{\pi\lambda} - \frac{2h^3}{3} \nabla_{\alpha}^{\alpha} \nabla_{\beta}^{\alpha} q_{\pi\lambda} \right) - \left[\frac{2h^3}{3} A^{\alpha\beta\pi\lambda} (2H^{\alpha\beta} b_{\alpha\beta}^{\alpha} + K^{\alpha\beta} a_{\alpha\beta}^{\alpha}) q_{\pi\lambda} \right] \\ - C_{\alpha}^{\alpha\beta} \nabla_{\gamma}^{\alpha} M_{\alpha}^{\gamma} + X_{\alpha}^{\beta} = 0. \end{aligned} \quad (5.4)$$

Заметим следующее. В выражениях усилий (4.6) члены, содержащие h^3 , были сохранены, чтобы удовлетворить шестому уравнению равновесия. В результате подстановки (4.6) в (5.1) эти члены после дифференцирования дают величины порядка $b_{\alpha\beta}^{\alpha} \nabla_{\gamma}^{\alpha} H^{\gamma\alpha}$, которые сохраняются в уравнениях равновесия от пренебрежения членами, содержащими h^3 в (4.6), больше той погрешности, которая соответствует пренебрежению этими членами в (4.6). Члены, заключенные в квадратные скобки в (5.3) и (5.4), можно отбросить, за исключением членов $b_{\gamma}^{\alpha\beta} \nabla_{\alpha}^{\alpha} q_{\pi\lambda}$, так как они представляют величины порядка $b_{\alpha\beta}^{\alpha} \nabla_{\gamma}^{\alpha} H^{\gamma\alpha}$. К уравнениям (5.3) и (5.4), нужно еще присоединить три условия совместности, вытекающие из формулы Гаусса и Кодаци для поверхностей S_0^* и S_0 . Формулы Гаусса для этих поверхностей имеют вид:

$$\begin{aligned} b_{\mu\pi}^{\alpha} b_{\nu\gamma}^{\alpha} - b_{\mu\gamma}^{\alpha} b_{\nu\pi}^{\alpha} &= \frac{1}{2} (a_{\mu\gamma,\nu\pi}^{\alpha} + a_{\nu\pi,\mu\gamma}^{\alpha} - a_{\mu\pi,\nu\gamma}^{\alpha} - a_{\nu\gamma,\mu\pi}^{\alpha}) + \\ &+ a_{\alpha}^{\alpha\beta} ([\nu\pi, \alpha]^{\alpha} [\mu\gamma, \beta]^{\alpha} - [\nu\gamma, \alpha]^{\alpha} [\mu\pi, \beta]^{\alpha}) \\ b_{\mu\pi}^{\alpha} b_{\nu\gamma}^{\alpha} - b_{\mu\gamma}^{\alpha} b_{\nu\pi}^{\alpha} &= \frac{1}{2} (a_{\mu\gamma,\nu\pi}^{\alpha} + a_{\nu\pi,\mu\gamma}^{\alpha} - a_{\mu\pi,\nu\gamma}^{\alpha} - a_{\nu\gamma,\mu\pi}^{\alpha}) + \\ &+ a_{\alpha}^{\alpha\beta} ([\nu\pi, \alpha]^{\alpha} [\mu\gamma, \beta]^{\alpha} - [\nu\gamma, \alpha]^{\alpha} [\mu\pi, \beta]^{\alpha}). \end{aligned} \quad (5.5)$$

Во второй из этих формул положим $b_{\alpha\beta} = b_{\alpha\beta}^*$, $-q_{\alpha\beta}$, $a_{\alpha\beta} = a_{\alpha\beta}^* - 2p_{\alpha\beta}$ и из результата вычтем первое, а затем полученную разность умножим на $C_{\alpha\beta}^{\mu\nu} C_{\alpha\beta}^{\pi\sigma}$. Пользуясь формулами ковариантного дифференцирования на S_0 :

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 P_{\mu\sigma}}{\partial x^\alpha \partial x^\pi} = & \nabla_\pi^* \nabla_\alpha^* P_{\mu\sigma} + \left\{ \begin{array}{c} \lambda \\ \nu\pi \end{array} \right\}^* \nabla_\lambda^* P_{\mu\sigma} + \left\{ \begin{array}{c} \lambda \\ \mu\pi \end{array} \right\}^* \nabla_\lambda^* P_{\mu\sigma} + \left\{ \begin{array}{c} \lambda \\ \pi\sigma \end{array} \right\}^* \nabla_\lambda^* P_{\mu\sigma} + \\ & + P_{\alpha\lambda} \frac{\partial \left\{ \begin{array}{c} \lambda \\ \nu\mu \end{array} \right\}^*}{\partial x^\pi} + P_{\mu\lambda} \frac{\partial \left\{ \begin{array}{c} \lambda \\ \nu\sigma \end{array} \right\}^*}{\partial x^\pi} + \left\{ \begin{array}{c} \lambda \\ \nu\mu \end{array} \right\}^* \left(\nabla_\pi^* P_{\alpha\lambda} + \left\{ \begin{array}{c} \gamma \\ \pi\sigma \end{array} \right\}^* P_{\gamma\lambda} + \left\{ \begin{array}{c} \gamma \\ \pi\lambda \end{array} \right\}^* P_{\gamma\sigma} \right) + \\ & + \left\{ \begin{array}{c} \lambda \\ \nu\sigma \end{array} \right\}^* \left(\nabla_\pi^* P_{\mu\lambda} + \left\{ \begin{array}{c} \gamma \\ \pi\mu \end{array} \right\}^* P_{\gamma\lambda} + \left\{ \begin{array}{c} \gamma \\ \pi\lambda \end{array} \right\}^* P_{\gamma\mu} \right) \end{aligned} \quad (5.6)$$

и формулами Бианки для S_0^*

$$R_{\alpha\beta\lambda}^* = \frac{\partial \left\{ \begin{array}{c} \gamma \\ \lambda\alpha \end{array} \right\}^*}{\partial x^\beta} - \frac{\partial \left\{ \begin{array}{c} \gamma \\ \lambda\beta \end{array} \right\}^*}{\partial x^\alpha} + \left\{ \begin{array}{c} \nu \\ \lambda\alpha \end{array} \right\}^* \left\{ \begin{array}{c} \gamma \\ \nu\beta \end{array} \right\}^* - \left\{ \begin{array}{c} \nu \\ \lambda\beta \end{array} \right\}^* \left\{ \begin{array}{c} \gamma \\ \nu\alpha \end{array} \right\}^* = K^* C_{\alpha\beta}^* C_{\lambda}^{\gamma}, \quad (5.7)$$

где K^* — гауссова кривизна поверхности S_0^* . Комбинацию вторых производных от $P_{\alpha\beta}$ представим в виде:

$$\begin{aligned} C_{\alpha\beta}^{\mu\nu} C_{\alpha\beta}^{\pi\sigma} (P_{\mu\sigma, \nu\pi} + P_{\nu\pi, \mu\sigma} - P_{\mu\pi, \nu\sigma} - P_{\nu\sigma, \mu\pi}) = & 4 C_{\alpha\beta}^{\mu\nu} C_{\alpha\beta}^{\pi\sigma} \left(\nabla_\pi^* \nabla_\nu^* P_{\mu\sigma} + \right. \\ & \left. + \left\{ \begin{array}{c} \lambda \\ \mu\pi \end{array} \right\}^* \left\{ \begin{array}{c} \gamma \\ \nu\sigma \end{array} \right\}^* P_{\lambda\gamma} - \left\{ \begin{array}{c} \lambda \\ \nu\pi \end{array} \right\}^* P_{\lambda, \mu\sigma} \right) + 4K^* a_{\alpha\beta}^* P_{\alpha\beta}, \end{aligned} \quad (5.8)$$

где

$$P_{\lambda, \mu\sigma}^* = \nabla_\mu^* P_{\lambda\sigma} + \nabla_\sigma^* P_{\lambda\mu} - \nabla_\sigma^* P_{\mu\lambda}$$

Кроме того, замечая, что $C_{\alpha\beta}^* C_{\alpha\beta}^{\gamma\lambda} b_{\gamma\lambda}^* = -2H^* a_{\alpha\beta}^* - b_{\alpha\beta}^*$, где H^* — средняя кривизна S_0^* , будем иметь

$$\begin{aligned} C_{\alpha\beta}^{\mu\nu} C_{\alpha\beta}^{\pi\sigma} (b_{\mu\pi} b_{\nu\sigma} - b_{\mu\sigma} b_{\nu\pi} - b_{\mu\pi}^* b_{\nu\sigma}^* + b_{\mu\sigma}^* b_{\nu\pi}^*) = \\ = 2C_{\alpha\beta}^{\mu\nu} C_{\alpha\beta}^{\pi\sigma} q_{\mu\pi} q_{\nu\sigma} + 4q_{\alpha\beta} (2H^* a_{\alpha\beta}^* + b_{\alpha\beta}^*). \end{aligned} \quad (5.9)$$

Пользуясь формулами (5.8) и (5.9) разность выражений (5.5) запишется в виде:

$$\begin{aligned} C_{\alpha\beta}^{\mu\nu} C_{\alpha\beta}^{\pi\sigma} \left(\frac{1}{2} q_{\mu\pi} q_{\nu\sigma} + \nabla_\pi^* \nabla_\nu^* P_{\mu\sigma} + \left\{ \begin{array}{c} \lambda \\ \mu\pi \end{array} \right\}^* \left\{ \begin{array}{c} \gamma \\ \nu\sigma \end{array} \right\}^* P_{\lambda\gamma} - \right. \\ \left. - \left\{ \begin{array}{c} \lambda \\ \nu\pi \end{array} \right\}^* P_{\lambda, \mu\sigma}^* + \frac{1}{2} a_{\alpha\beta}^* [\nu\pi, \alpha]^* [\mu\sigma, \beta]^* - \frac{1}{2} a_{\alpha\beta}^* [\nu\pi, \alpha] [\mu\sigma, \beta] \right) + \\ + (2H^* a_{\alpha\beta}^* + b_{\alpha\beta}^*) q_{\alpha\beta} + K^* a_{\alpha\beta}^* P_{\alpha\beta} = 0. \end{aligned} \quad (5.10)$$

Здесь величины, относящиеся к недеформированной поверхности S_0 следует подставлять из формул:

$$a_{\alpha\beta}^* = \frac{a^*}{a} C_{\alpha\beta}^* C_{\alpha\beta}^{\gamma\delta} a_{\gamma\delta}^* = (1 + 2p_1 + 4p_2) (a_{\alpha\beta}^* - 2C_{\alpha\beta}^* C_{\alpha\beta}^{\gamma\delta} P_{\gamma\delta}). \quad (5.11)$$

где

$$P_1 = a_{\alpha\beta}^* P_{\alpha\beta}, \quad P_2 = \frac{1}{2} C_{\alpha\beta}^* C_{\alpha\beta}^{\gamma\delta} P_{\gamma\delta} P_{\mu\sigma},$$

$$[\nu\pi, \alpha] = [\nu\pi, \alpha]^* - P_{\alpha, \nu\pi}^* - 2 \left\{ \begin{array}{c} \lambda \\ \pi\nu \end{array} \right\}^* P_{\alpha\lambda}. \quad (5.12)$$

Заметим, что имеют место равенства:

$$\left\{ \begin{array}{c} \gamma \\ \nu\pi \end{array} \right\}^* = \left\{ \begin{array}{c} \lambda \\ \nu\pi \end{array} \right\}^* - a^{\gamma\beta} P_{\beta, \nu\pi}^*. \quad (5.13)$$

Действительно, умножая эти равенства на $a_{\gamma\alpha} = a_{\gamma\alpha}^* - 2P_{\alpha\gamma}$, мы снова получаем (5.12)

Тогда пользуясь соотношениями (5.12) и (5.13), находим

$$\begin{aligned} \left\{ \begin{array}{c} \beta \\ \nu\pi \end{array} \right\}^* [\mu\sigma, \beta] = \left\{ \begin{array}{c} \beta \\ \nu\pi \end{array} \right\}^* [\mu\sigma, \beta]^* - 2 \left\{ \begin{array}{c} \beta \\ \nu\pi \end{array} \right\}^* \left\{ \begin{array}{c} \lambda \\ \mu\sigma \end{array} \right\}^* P_{\beta\gamma} - 2 \left\{ \begin{array}{c} \gamma \\ \mu\sigma \end{array} \right\}^* P_{\gamma, \nu\pi}^* + \\ + a^{\beta\gamma} P_{\gamma, \nu\pi}^* P_{\beta, \mu\sigma}^* \end{aligned} \quad (5.13')$$

Подставляя последние в (5.10), окончательно получаем

$$\begin{aligned} C_{\alpha\beta}^{\mu\nu} C_{\alpha\beta}^{\pi\sigma} \left(\frac{1}{2} q_{\mu\pi} q_{\nu\sigma} + \nabla_\pi^* \nabla_\nu^* P_{\mu\sigma} - \frac{1}{2} a^{\lambda\gamma} P_{\lambda, \nu\pi}^* P_{\gamma, \mu\sigma}^* \right) + \\ + (2H^* a_{\alpha\beta}^* + b_{\alpha\beta}^*) q_{\alpha\beta} + K^* a_{\alpha\beta}^* P_{\alpha\beta} = 0. \end{aligned} \quad (5.14)$$

Здесь $a^{\lambda\gamma}$ выражаются формулами (5.11).

Если пренебречь удлинениями и сдвигами по сравнению с единицей, то в (5.14) полагаем $a^{\lambda\gamma} \approx a_{\lambda\gamma}^*$.

Образуя разность из формул Кодацци для S_0^* и S_0 :

$$C_{\alpha\beta}^{\gamma\tau} \nabla_\tau^* b_{\alpha\beta}^* = 0, \quad (5.15), \quad C_{\alpha\beta}^{\gamma\tau} \nabla_\tau b_{\alpha\beta} = 0, \quad (5.16)$$

получим

$$C_{\alpha\beta}^{\gamma\tau} \left[\nabla_\tau^* q_{\alpha\beta} + (b_{\lambda\beta}^* - q_{\lambda\beta}) \left(\left\{ \begin{array}{c} \lambda \\ \alpha\gamma \end{array} \right\}^* - \left\{ \begin{array}{c} \lambda \\ \alpha\gamma \end{array} \right\} \right) \right] = 0, \quad (5.17)$$

ибо

$$\begin{aligned} C_{\alpha\beta}^{\gamma\tau} \left(\frac{\partial b_{\alpha\beta}}{\partial x_\tau} - \left\{ \begin{array}{c} \lambda \\ \alpha\gamma \end{array} \right\} b_{\lambda\beta} - \left\{ \begin{array}{c} \lambda \\ \gamma\beta \end{array} \right\} b_{\alpha\lambda} \right) = C_{\alpha\beta}^{\gamma\tau} (\nabla_\tau^* b_{\alpha\beta} + a^{\lambda\pi} P_{\pi, \alpha\gamma}^* b_{\lambda\beta} + \\ + a^{\lambda\pi} P_{\pi, \gamma\beta}^* b_{\alpha\lambda}) = C_{\alpha\beta}^{\gamma\tau} \left(\Delta_\tau^* b_{\alpha\beta} + b_{\lambda\beta} \left\{ \begin{array}{c} \lambda \\ \alpha\gamma \end{array} \right\}^* - b_{\lambda\beta} \left\{ \begin{array}{c} \lambda \\ \alpha\gamma \end{array} \right\} \right) \end{aligned}$$

Так как

$$\left\{ \pi \right\}_{\alpha\gamma} - \left\{ \pi \right\}_{\alpha\gamma}^* = -(1 + 2p_1 + 4p_2) (a_{\alpha}^{\pi\lambda} - 2C_{\alpha}^{\pi\rho} C_{\rho}^{\lambda\omega} p_{\rho\omega}) P_{\lambda,\alpha\gamma}^*$$

то внося последнее в (5.17), получаем еще два точных соотношения:

$$C_{\alpha}^{\beta\gamma} [\nabla_{\gamma}^* q_{\alpha\beta} - (1 + 2p_1 + 4p_2) (a_{\alpha}^{\pi\lambda} - 2C_{\alpha}^{\pi\rho} C_{\rho}^{\lambda\omega} p_{\rho\omega}) (b_{\pi\beta}^* - q_{\pi\beta}) P_{\lambda,\alpha\gamma}^*] = 0.$$

Таким образом, система уравнений (5.3) и (5.4) вместе с (5.14) и (5.18) содержит необходимое число уравнений для шести неизвестных p и q .

в) Уравнения для усилий и моментов. Из (4.6) и (4.7) имеем

$$P_{\alpha\beta} = \frac{\sigma}{2hE} B_{\alpha\beta\pi\lambda} T_{\pi\lambda}^*, \quad q_{\alpha\beta} = -\frac{3\sigma}{2Eh^3} B_{\alpha\beta\pi\lambda} H^{\pi\lambda},$$

где

$$B_{\alpha\beta\pi\lambda} = \frac{1+\sigma}{\sigma} a_{\alpha\pi}^* a_{\beta\lambda}^* - a_{\alpha\beta}^* a_{\pi\lambda}^*.$$

Внося $P_{\alpha\beta}$ и $q_{\alpha\beta}$ в (5.14) и (5.18), получим систему трех нелинейных уравнений для усилий и моментов. Из них и уравнений равновесия (5.1) и (5.2) определятся шесть неизвестных

с) Система уравнений для e_{β}^{α} и ω_{α}^* .

При помощи формул (1.9) и (1.14) и формул $b_{\alpha\beta} = -\bar{m}_{\alpha} \bar{p}_{\beta}$ мы выразим $q_{\alpha\beta}$ через $e_{\alpha\beta}$ и ω_{α} .

Если пренебречь $P_{\alpha\beta}$ по сравнению с единицей, то

$$q_{\beta\gamma} = b_{\beta\gamma}^* - E_0^* b_{\pi\beta}^* (\delta_{\gamma}^{\pi} - e_{\gamma}^{\pi*}) + (\delta_{\gamma}^{\pi} - e_{\gamma}^{\pi*}) \nabla_{\beta}^* E_{\pi}^* - \omega_{\gamma}^* \nabla_{\beta}^* E_0^* - \omega_{\gamma}^* b_{\beta}^* E_{\pi}^*. \quad (5.19)$$

и, кроме того,

$$2P_{\alpha\beta} = e_{\alpha\beta}^* + e_{\beta\alpha}^* - a_{\alpha}^{\pi\lambda} e_{\beta\lambda}^* e_{\alpha\pi}^* - \omega_{\alpha}^* \omega_{\beta}^*. \quad (5.20)$$

Подставляя (5.19) и (5.20) в выражения усилий и моментов T_{α}^{β} и $H^{\alpha\beta}$, а последние в уравнения равновесия (5.1) и (5.2), получаем систему трех нелинейных уравнений относительно $e_{\alpha\beta}$ и ω_{α} . Присоединив к ним условия совместности типа (1.24) и (1.25):

$$C_{\alpha}^{\beta\gamma} \nabla_{\gamma}^* e_{\beta}^{\alpha} = C_{\alpha}^{\beta\gamma} b_{\gamma}^* \omega_{\beta}^*, \quad C_{\alpha}^{\beta\gamma} \nabla_{\alpha}^* \omega_{\beta}^* = C_{\alpha}^{\beta\gamma} b_{\gamma\beta}^* e_{\alpha}^{\gamma*}, \quad (5.21) \quad (5.22)$$

получим полную систему уравнений для шести величин $e_{\alpha\beta}$ и ω_{α} .

Задачу можно свести к отысканию четырех величин $e_{\alpha\beta}$.

Решая систему (5.21) относительно ω_{β} , имеем

$$\omega_{\beta}^* = \frac{a_{\beta}^*}{b_{\beta}^*} C_{\pi\alpha}^* C_{\alpha}^{\lambda\gamma} b_{\beta}^* \nabla_{\gamma}^* e_{\lambda}^{\alpha*} = \frac{1}{K^*} C_{\pi\alpha}^* C_{\alpha}^{\lambda\gamma} b_{\beta\pi}^* \nabla_{\gamma}^* e_{\lambda}^{\alpha*}, \quad (5.23)$$

где

$$b^* = b_{11}^* b_{22}^* - b_{12}^* b_{21}^*, \quad b^* = a^* K^*.$$

Внося (5.23) в (5.22) и учитывая, что

$$C_{\alpha}^{\beta\gamma} C_{\beta}^{\lambda\pi} b_{\lambda\gamma}^* = 2H^* a_{\alpha}^{\pi\pi} + b_{\alpha}^{\beta\pi}, \quad C_{\pi\alpha}^* C_{\alpha}^{\lambda\gamma} = \delta_{\pi}^{\lambda} \delta_{\alpha}^{\gamma} - \delta_{\alpha}^{\lambda} \delta_{\pi}^{\gamma},$$

получим одно соотношение для $e_{\alpha\beta}$:

$$C_{\alpha}^{\lambda\gamma} \nabla_{\alpha}^* \left(\frac{2H^* a_{\alpha}^{\pi\pi} + b_{\alpha}^{\beta\pi}}{K^*} \nabla_{\gamma}^* e_{\lambda}^{\pi*} \right) = b_{\gamma\beta}^* C_{\alpha}^{\alpha\beta} e_{\alpha}^{\gamma*}.$$

$$\text{или } C_{\alpha}^{\alpha\beta} \nabla_{\alpha}^* \frac{b_{\beta}^* \nabla_{\gamma}^* e_{\lambda}^{\pi*} - b_{\beta}^* \nabla_{\lambda}^* e_{\gamma}^{\pi*}}{K^*} = b_{\gamma\beta}^* C_{\alpha}^{\alpha\beta} e_{\alpha}^{\gamma*}. \quad (5.24)$$

При помощи (5.23) $P_{\alpha\beta}$ и $q_{\alpha\beta}$ будут выражены в функции одних $e_{\alpha\beta}$.

Тогда задача сведется к отысканию четырех величин из уравнений равновесия и условия совместности (5.24).

2°. Уравнения равновесия теории оболочек, отнесенные к недеформированному состоянию.

а) Уравнения равновесия и условия совместности для P и q .

Предположим, что внешние усилия и моменты не зависят от деформации. В этом случае в уравнениях равновесия (2.10), (2.11), (2.12) ковариантное дифференцирование на S_0^* заменим ковариантным дифференцированием на S_0 .

Для какого либо тензора $B^{\alpha\beta}$, имеем

$$\nabla_{\alpha}^* B^{\alpha\beta} = \frac{\partial B^{\alpha\beta}}{\partial x^{\alpha}} + \frac{B^{\alpha\beta}}{\sqrt{a_{\alpha}^*}} \cdot \frac{\partial \sqrt{a_{\alpha}^*}}{\partial x^{\alpha}} + B^{\alpha\gamma} \left\{ \beta \right\}_{\alpha\gamma}^*,$$

но

$$\left\{ \beta \right\}_{\alpha\gamma}^* = \left\{ \beta \right\}_{\alpha\gamma} + a_{\alpha}^{\pi\lambda} P_{\pi,\alpha\gamma}. \quad (5.26)$$

где

$$P_{\pi,\alpha\gamma} = \nabla_{\alpha} P_{\pi\gamma} + \nabla_{\gamma} P_{\alpha\pi} - \nabla_{\pi} P_{\alpha\gamma}, \quad (5.27)$$

$$a_{\alpha}^{\pi\lambda} = \frac{C^{\pi\omega} C^{\beta\lambda} (a_{\lambda\omega} + 2P_{\lambda\omega})}{1 + 2P_1 + 4P_2}, \quad (5.28)$$

где P_1 и P_2 выражаются формулами (1.17).

При помощи этих формул ковариантные производные преобразуются к виду:

$$\nabla_{\alpha}^* B^{\alpha\beta} = \nabla_{\alpha} B^{\alpha\beta} + \frac{1}{2} B^{\alpha\beta} \frac{\partial \lg(1 + 2P_1 + 4P_2)}{\partial x^{\alpha}} + \frac{(a_{\alpha}^{\pi\lambda} + 2C^{\pi\omega} C^{\beta\lambda} P_{\lambda\omega}) B^{\alpha\gamma} P_{\pi,\alpha\gamma}}{1 + 2P_1 + 4P_2} \quad (5.29)$$

Формулы (5.29) — вполне точные.

Выражение

$$\nabla_a^* N_a^* = \frac{\partial N_a^*}{\partial x^a} + \frac{N_a^*}{V a_*} \frac{\partial V a_*}{\partial x^a}$$

преобразуется к виду:

$$\nabla_a^* N_a^* = \nabla_a N_a^* + \frac{1}{2} N_a^* \frac{\partial \lg(1 + 2P_1 + 4P_2)}{\partial x^a} \quad (5.30)$$

Пользуясь формулами (5.29) и (5.30), уравнения равновесия (2.10), (2.11) и (2.12) представляем в виде:

$$\begin{aligned} \nabla_a T_a^{\alpha\beta} + \frac{1}{2} T_a^{\alpha\beta} \frac{\partial \lg(1 + 2P_1 + 4P_2)}{\partial x^a} + \\ + \frac{(a^{\pi\beta} + 2C^{\pi\omega} C^{\beta\lambda} P_{\lambda\omega}) [T_a^{\alpha\gamma} P_{\pi,\alpha\gamma} - N_a^* (b_{a\pi} + q_{a\pi})]}{1 + 2P_1 + 4P_2} + X_a^{\beta} = 0. \\ \nabla_a N_a^* + \frac{1}{2} N_a^* \frac{\partial \lg(1 + 2P_1 + 4P_2)}{\partial x^a} + (b_{a\alpha} + q_{a\alpha}) T_a^{\alpha\beta} + X_a^{\beta} = 0. \end{aligned} \quad (5.31)$$

$$\begin{aligned} \nabla_a L_a^{\alpha\beta} + \frac{1}{2} L_a^{\alpha\beta} \frac{\partial \lg(1 + 2P_1 + 4P_2)}{\partial x^a} + \\ + \frac{(a^{\pi\beta} + 2C^{\pi\omega} C^{\beta\lambda} P_{\lambda\omega}) (P_{\pi,\alpha\gamma} L_a^{\alpha\gamma} + V \sqrt{1 + 2P_1 + 4P_2} \cdot C_{\pi\nu} N_a^{\nu})}{1 + 2P_1 + 4P_2} + M_a^{\beta} = 0. \end{aligned} \quad (5.32)$$

где
$$L_a^{\alpha} = C^{\lambda\beta} (a_{\pi\lambda} + 2P_{\pi\lambda}) (1 + 2P_1 + 4P_2)^{-\frac{1}{2}} H_{a\pi}.$$

К этим уравнениям необходимо присоединить еще условия неразрывности деформации, отнесенные к недеформированному состоянию оболочки.

Выражая частные производные от $P_{a\beta}$ через ковариантные производные относительно $a_{a\beta}$, мы получим:

$$\begin{aligned} C^{\mu\nu} C^{\pi\gamma} \left(-\frac{1}{2} q_{\nu\beta} q_{\mu\pi} + \nabla_\pi \nabla_\nu P_{\mu\beta} + \{ \pi_\nu \} \{ \mu_\beta \} P_{\lambda\gamma} - \{ \pi_\nu \} P_{\lambda,\mu\sigma} + \right. \\ \left. + \frac{1}{2} a_{\pi\beta}^{\alpha\beta} [\nu\pi, \alpha] [\mu\sigma, \beta] - \frac{1}{2} a^{\alpha\beta} [\nu\pi, \alpha] [\mu\sigma, \beta] \right) + q_{a\beta} (2H a^{\alpha\beta} + b^{\alpha\beta}) + K a^{\alpha\beta} P_{a\beta} = 0 \end{aligned} \quad (5.10)$$

где H и K средняя и Гауссова кривизны поверхности S_0 . Величины $a_{\pi\beta}^{\alpha\beta} [\nu\pi, \alpha] [\mu\sigma, \beta]$ должны быть взяты из формул (5.26).

Пользуясь формулами типа (5.13'), после упрощений, получим

$$\begin{aligned} C^{\mu\nu} C^{\pi\gamma} \left[-\frac{1}{2} q_{\nu\beta} q_{\mu\pi} + \nabla_\pi \nabla_\nu P_{\mu\beta} + \frac{(a^{\alpha\beta} + 2C^{\alpha\gamma} C^{\beta\omega} P_{\gamma\omega}) P_{\alpha,\nu\pi} P_{\beta,\mu\sigma}}{2(1 + 2P_1 + 4P_2)} \right] + \\ - q_{a\beta} (2H a^{\alpha\beta} - b^{\alpha\beta}) + K a^{\alpha\beta} P_{a\beta} = 0. \end{aligned} \quad (5.33)$$

Из (5.15) имеем

$$C^{\beta\gamma} [\nabla_\gamma q_{a\beta} + (b_{a\beta} + q_{a\beta}) (\{ \pi_\gamma \} - \{ \pi_\gamma^* \})] = 0,$$

где

$$\{ \pi_\gamma \}^* = a_{\pi\gamma}^* [\alpha\gamma, \pi]^* = \frac{(a^{\pi\pi} + 2C^{\alpha\gamma} C^{\pi\omega} P_{\gamma\omega}) (\{ \alpha_\gamma, \pi \} + P_{\pi,\alpha\gamma} + 2 \{ \pi_\gamma \} P_{\pi\lambda})}{1 + 2P_1 + 4P_2}.$$

Тогда

$$C^{\beta\gamma} \left[\nabla_\gamma q_{a\beta} - \frac{(a^{\pi\pi} + 2C^{\alpha\gamma} C^{\pi\omega} P_{\gamma\omega}) (b_{a\beta} + q_{a\beta}) P_{\pi,\alpha\gamma}}{1 + 2P_1 + 4P_2} \right] = 0. \quad (5.34)$$

Формулы (5.33) и (5.34) по существу совпадают с формулами В. И. Чена [6].

Система уравнений (5.31) и (5.32) вместе с (5.33) и (5.34) достаточна для определения шести неизвестных p и q .

в) Внешние усилия и моменты зависят от деформации срединной поверхности.

В этом случае задача решается исключительно в величинах $e_{a\beta}$ и ω_a .

Уравнения (5.31) и (5.32) остаются в силе, но внешние силы и моменты в них необходимо отнести к метрике недеформированной срединной поверхности.

Учитывая формулы (2.15) и (2.20), имеем

$$\bar{E}_* = \sqrt{\frac{a}{a_*}} (X^a \bar{p}_a + X^3 m)$$

откуда

$$X_a^{\beta} = \bar{E}_* a_{\pi\beta}^{\pi\pi} \bar{p}_\pi, \quad X_a^3 = \bar{E}_* \bar{m}_a,$$

или, пользуясь формулами (1.9), (1.14), (5.28), находим

$$\begin{aligned} X_a^{\beta} &= (a^{\pi\pi} + 2C^{\pi\gamma} C^{\beta\omega} P_{\gamma\omega}) (1 + 2P_1 + 4P_2)^{-1/2} [X_a (\delta_{\pi\pi}^{\beta} + e_{\pi\pi}^{\beta}) + X^3 \omega_\pi] \\ X_a^3 &= (E_0 X^3 + E_a X^a) (1 + 2P_1 + 4P_2)^{-1/2} \end{aligned} \quad (5.35)$$

Из формул (4.12), учитывая (5.28) и (2.41), будем иметь:

$$M_a^{\gamma} = \frac{(a^{\beta\gamma} + 2C^{\beta\pi} C^{\gamma\omega} P_{\pi\omega}) (E_0 M_1^a + C^{\lambda\alpha} E_{\lambda} Y) \left(a_{\pi\beta} + e_{\pi\beta} - \frac{E_{\pi\omega\beta}}{E_0} \right)}{(1 + 2P_1 + 4P_2)^2}. \quad (5.36)$$

Внося (5.35) и (5.36) в (5.31) и (5.32), получим уравнения с внешними силами, отнесенными к метрике недеформированной срединной поверхности.

К полученным уравнениям присоединим три условия совместности типа (5.21) и (5.22):

$$C^{\beta\gamma} \nabla_\gamma e_{a\beta}^{\pi\pi} = C^{\beta\gamma} b_{\gamma\omega}^{\pi\pi} \omega_\omega, \quad C^{\alpha\beta} \nabla_\alpha \omega_\beta = C^{\alpha\beta} b_{\gamma\beta}^{\pi\pi} e_a^{\gamma}, \quad (5.21')$$

причем

$$\omega_\beta = \frac{1}{K} C^{\pi\mu} C^{\mu\gamma} b_{\beta,\gamma}^{\pi\pi} \nabla_\gamma e_{\mu\pi}, \quad (5.23')$$

Таким образом, задача будет решаться в величинах $e_{a\beta}$ и ω_a .

При помощи (5.23') и соотношений типа (5.24) задача сведется к отысканию четырех функций $e_{a\beta}$.

с) Внешние силы и моменты зависят от деформации оболочки. В этом случае задача решается в перемещениях при помощи урав-

нений (2.24), (2.25) и (2.26), отнесенных к недеформированному состоянию оболочки.

ЛИТЕРАТУРА

1. К. З. Галимов. Уравнения равновесия теории упругости при конечных перемещениях и их приложение к теории оболочек. (Известия КФАН, серия физико-математ. и технич. наук, № 1, 1948).
2. Х. М. Муштари. Об определении деформации срединной поверхности оболочки при произвольных изгибах. (Труды Казанского химико-технолог. ин-та им. С. М. Кирова, № 13, 1948).
3. А. И. Лурье. Общая теория упругих тонких оболочек. (Прикл. матем. и механ., т. IV, вып. 2, 1940).
4. В. В. Новожилов и Финкельштейн. О погрешности гипотез Кирхгофа в теории оболочек. (Прикл. матем. и механ., т. VII, вып. 5, 1943).
5. Х. М. Муштари. Об области применимости приближенной теории оболочек Кирхгофа-Лава. (Прикл. матем. и механ., т. XI, вып. 5, 1947).
6. W. Z. Cien The Intrinsic Theory of Thin shell and Plates Quarterly of Applied Mathematics. 1944. vol. I. NO 4; vol. II. NO 1; NO 2.

Поступила в редакцию 25/II-1949.

Сектор механики ФТИ.

Х. М. МУШТАРИ

ТЕОРИЯ УПРУГОГО РАВНОВЕСИЯ ПЛАСТИН И ОБОЛОЧЕК С УЧЕТОМ НАЧАЛЬНЫХ НАПРЯЖЕНИЙ

Настоящая статья представляет естественное продолжение нашей работы [1] по теории упругого равновесия оболочек при произвольных перемещениях, обозначениями которой мы пользуемся и здесь.

В § 1 статьи дается краткое изложение работы [2] автора об определении деформации срединной поверхности начально деформированной оболочки.

В §§ 2-3 выводятся условия совместности деформаций и уравнения равновесия такой оболочки.

§ 4 посвящается классификации частных случаев.

В § 5 рассматриваются некоторые классы деформаций до потери устойчивости.

В § 6 рассматривается упрощение уравнений нейтрального равновесия недлиной оболочки, в частности, оболочки вращения.

§ 1. Определение деформации срединной поверхности начально деформированной оболочки

Пусть $\vec{r}$ — радиус-вектор точки срединной поверхности оболочки до деформации, $\vec{r}_i$ и $\vec{m}$ — основные векторы соответствующих координат оболочки. Тогда вектор перемещения точки при начальной деформации и радиус-вектор, определяющий положение той же точки после этой деформации, будут равны

$$\vec{v}_0 = v_0^i \vec{r}_i + w^0 \vec{m}, \quad \vec{r}^0 = \vec{r} + \vec{v}_0 = \vec{r} + v_0^i \vec{r}_i + w^0 \vec{m}. \quad (1.1)$$

Здесь и в дальнейшем все индексы принимают значения 1 и 2. При переходе от начального деформированного состояния к новому деформированному состоянию, называемому нами состоянием I, точка получает добавочное перемещение

$$\vec{v}_1 = v_1^i \vec{r}_i^0 + w^1 \vec{m}^0;$$

разложенное по направлениям основных векторов начально деформированной поверхности. Таким образом, радиус-вектор, определяющий положение точки поверхности в состоянии I, равен

$$\vec{r}^I = \vec{r}^0 + v_1^i \vec{r}_i^0 + w^1 \vec{m}^0. \quad (1.2)$$

Наконец, пусть переход от состояния I к окончательному состоянию II осуществляет путем перемещения $\vec{v}_{II}$, разложенного по основным направлениям состояния I так, что

$$\vec{r}^{II} = \vec{r}^I + v_{II}^k \vec{r}_k^I + w^{II} \vec{m}^I. \quad (1.3)$$

Соответствующие величины начальной деформации при произвольных перемещениях $\vec{v}_0$ определяются по формулам нашей статьи [2]:

$$2e_{st}^0 = a_{st}^0 - a_{st} = e_{st}^0 + e_{ts}^0 + e_s^{0k} e_{tk}^0 + \omega_s^0 \omega_t^0, \\ q_{st}^0 = b_{st}^0 - b_{st} = b_{st}(\gamma^0 - a^{\alpha\beta} e_{\alpha\beta}^0) + (1 + \gamma^0)(\nabla_t \omega_s^0 + b_{kt} e_s^{0k}) + \gamma_k^0 \Omega_{ts}^{0k}, \quad (1.4)$$

где приняты обозначения

$$a_{st} = (\vec{r}_s, \vec{r}_t), \quad a_{st}^0 = (\vec{r}_s^0, \vec{r}_t^0), \quad b_{st}^0 = (\vec{r}_{st}^0, \vec{m}^0), \quad e_{st}^0 = \nabla_s v_t^0 - b_{st}^0 \omega^0, \\ e_s^{0k} = e_{st}^0 a^{tk} = \nabla_s v_0^k - b_s^{0k} \omega^0, \quad \omega_s^0 = \nabla_s \omega^0 + b_{ks} v_0^k = (\vec{r}_s^0, \vec{m}), \\ \gamma^0 = e_1^{01} + e_1^{01} e_2^{02} - e_1^{02} e_2^{01}, \quad \gamma_k^0 = \omega_1^0 e_k^{01} - \omega_k^0 - \omega_k^0 e_k^{01}, \quad \Omega_{ts}^{0k} = \nabla_t e_s^{0k} - \omega_s^0 b_t^{0k}, \\ (\vec{m}^0, \vec{m}) = (1 + \gamma^0)(1 - a^{\alpha\beta} e_{\alpha\beta}^0), \quad (\vec{m}^0, \vec{r}_k) = \gamma_k^0(1 - a^{\alpha\beta} e_{\alpha\beta}^0), \\ \vec{m}^0 = \vec{r}_1^0 \times \vec{r}_2^0 : V \vec{a}^0 = \sqrt{\frac{a^0}{a^0}} \left\{ \vec{m}(1 + \gamma^0) + \vec{r}_k^0 \gamma_k^0 \right\}. \quad (1.5)$$

Далее находим

$$\vec{r}_s^1 = \vec{r}_s^0 + e_s^{11} \vec{r}_t^0 + \omega_s^1 \vec{m}^0, \quad 2e_{st}^{01} = a_{st}^1 - a_{st}^0 = e_{st}^1 + e_{ts}^1 + e_s^{1k} e_{tk}^1 + \omega_s^1 \omega_t^1, \\ q_{st}^{01} = b_{st}^1 - b_{st}^0 = b_{st}^0(\gamma^1 - a^{\alpha\beta} e_{\alpha\beta}^{01}) + (1 + \gamma^1)(\nabla_t \omega_s^1 + b_{kt} e_s^{1k}) + \gamma_k^1 \Omega_{ts}^{1k}, \quad (1.6)$$

где e_{st}^{01}, q_{st}^{01} — ковариантные составляющие добавочных удлинений и параметров изменения кривизны при переходе от начального деформированного состояния к состоянию I,

$$e_{st}^1 = \nabla_s^0 v_t^1 - b_{st}^0 \omega^1, \quad \omega_s^1 = b_{ks}^0 v_1^k + \nabla_s^0 \omega^1, \quad \gamma^1 = e_1^{11} + e_1^{11} e_2^{12} - e_1^{12} e_2^{11}, \\ \gamma_k^1 = \omega_1^1 e_k^{11} - \omega_k^1 - \omega_k^1 e_k^{11}, \quad \Omega_{ts}^{1k} = \nabla_t^0 e_s^{1k} - \omega_s^1 b_t^{0k}, \\ \vec{m}^1 = \vec{r}_1^1 \times \vec{r}_2^1 : V \vec{a}^1 = (1 - a^{\alpha\beta} e_{\alpha\beta}^{01}) \left\{ \vec{m}^0(1 + \gamma^1) + \vec{r}_0^k \gamma_k^1 \right\}. \quad (1.7)$$

Здесь ∇_s^0 обозначает ковариантное дифференцирование при метрике начального деформированного состояния.

Совершенно также

$$\vec{r}_s^1 = \vec{r}_s^0 + e_s^{11} \vec{r}_t^1 + \omega_s^1 \vec{m}^1, \quad 2e_{st}^{11} = a_{st}^1 - a_{st}^1, \quad q_{st}^{11} = b_{st}^1 - b_{st}^1.$$

Предполагаем в дальнейшем, что переход от состояния I к состоянию II совершается при таких малых добавочных перемещениях, для которых величинами

$$e_{st}^{11} = \nabla_s^1 v_t^{11} - b_{st}^1 \omega^{11} \ll \epsilon_p$$

можно пренебрегать по сравнению с единицей.

Этот случай имеет место, например, при местной потере устойчивости оболочки или при хлопании тонкой пластинки малой кривизны. Таким образом, находим добавочные удлинения и параметры изменения кривизны, характеризующие переход от состояния I к состоянию II:

$$2e_{st}^{11} = e_{st}^{11} + e_{ts}^{11} + \omega_s^{11} \omega_t^{11}, \quad q_{st}^{11} = \nabla_t^1 \omega_s^{11} + b_{kt}^1 e_s^{11k}. \quad (1.8)$$

При этом

$$e_{st}^{11} = \nabla_s^1 e_{st}^{11} - b_{st}^1 \omega^{11}, \quad \omega_s^{11} = b_{ks}^1 v_{11}^k + \nabla_s^1 \omega^{11}, \\ \vec{m}^{11} = \vec{r}_1^{11} \times \vec{r}_2^{11} : V \vec{a}^{11} = \vec{m}^1 - \vec{r}_1^k \omega_k^{11}. \quad (1.9)$$

∇_t^1 — ковариантное дифференцирование при метрике состояния I.

Если перемещение $\vec{v}^{11}$ выразить через составляющие его по основным направлениям начального деформированного состояния, то (1.8) и (1.9) заменятся значительно более сложными формулами, выведенными в статье [2].

$a_{\alpha\beta}$ и $b_{\alpha\beta}$ — коэффициенты первой и второй квадратичных форм недеформированной срединной поверхности, $a_{\alpha\beta}^{11}$ и $b_{\alpha\beta}^{11}$ эти же величины для конечного состояния деформации (для состояния II).

Полные составляющие параметров деформации суть

$$a_{\alpha\beta}^{11} - a_{\alpha\beta} = 2e_{\alpha\beta} = 2(e_{\alpha\beta}^0 + e_{\alpha\beta}^{01} + e_{\alpha\beta}^{11}), \\ b_{\alpha\beta}^{11} - b_{\alpha\beta} = q_{\alpha\beta} = q_{\alpha\beta}^0 + q_{\alpha\beta}^{01} + q_{\alpha\beta}^{11}. \quad (1.10)$$

§ 2. Условия совместности деформаций

По уравнениям (2.7) и (2.8) статьи [1] между компонентами удлинения и параметрами изменения кривизны в начальном деформированном состоянии имеют место следующие зависимости:

$$c^{\beta\gamma} \{ \nabla_\gamma q_{\alpha\beta}^0 - a^{\pi\omega} (b_{\beta\pi}^0 + q_{\beta\pi}^{01}) (\nabla_\gamma e_{\alpha\omega}^0 + \nabla_\alpha e_{\gamma\omega}^0 - \nabla_\omega e_{\alpha\gamma}^0) \} = 0, \quad (a)$$

$$c^{\alpha\beta} c^{\gamma\omega} [\nabla_\beta \nabla_\alpha e_{\gamma\omega}^0 + \left(\frac{1}{2} q_{\rho\omega}^0 + b_{\rho\omega} \right) q_{\alpha\beta}^0] - K a^{\alpha\beta} e_{\alpha\beta}^0 = 0. \quad (2.1)$$

Как видно из исследования различных возможных случаев, приведенного в указанной статье, а также из аналогичного рассмотрения в случае краевого эффекта, уравнения (a) можно линеаризировать, пренебрегая удлинениями по сравнению с единицей. Таким образом, приходим к уравнениям

$$c^{\beta\gamma} \{ \nabla_\gamma q_{\alpha\beta}^0 - b_{\beta\pi}^0 (\nabla_\gamma e_{\alpha\omega}^0 + \nabla_\alpha e_{\gamma\omega}^0 - \nabla_\omega e_{\alpha\gamma}^0) \} = 0. \quad (2.2)$$

Для деформированного состояния I полные величины удлинений и параметров изменения кривизны будут соответственно

$$\frac{1}{2} (a_{\alpha\beta}^1 - a_{\alpha\beta}) = e_{\alpha\beta}^0 + e_{\alpha\beta}^{01}, \quad b_{\alpha\beta}^1 - b_{\alpha\beta} = q_{\alpha\beta}^0 + q_{\alpha\beta}^{01}.$$

Поэтому должны удовлетворяться условия:

$$c^{\beta\gamma} \{ \nabla_\gamma (q_{\alpha\beta}^0 + q_{\alpha\beta}^{01}) - a^{\pi\omega} b_{\beta\pi}^1 [\nabla_\gamma (e_{\alpha\omega}^0 + e_{\alpha\omega}^{01}) + \nabla_\alpha (e_{\gamma\omega}^0 + e_{\gamma\omega}^{01}) - \nabla_\omega (e_{\alpha\gamma}^0 + e_{\alpha\gamma}^{01})] \} = 0,$$

$$c^{\alpha\beta} c^{\gamma\omega} \{ \nabla_\beta \nabla_\alpha (e_{\gamma\omega}^0 + e_{\gamma\omega}^{01}) + \frac{1}{2} (q_{\rho\omega}^0 + q_{\rho\omega}^{01} + 2b_{\rho\omega}) (q_{\alpha\beta}^0 + q_{\alpha\beta}^{01}) \} - K a^{\alpha\beta} (e_{\alpha\beta}^0 + e_{\alpha\beta}^{01}) = 0. \quad (b)$$

Вычитая из них (a) и (2.1) и сделав указанные выше пренебрежения, приходим к уравнениям

$$c^{\beta\gamma} \{ \nabla_\gamma q_{\alpha\beta}^{01} - a^{\pi\omega} [b_{\beta\pi}^{01} (\nabla_\gamma e_{\alpha\omega}^{01} + \nabla_\alpha e_{\gamma\omega}^{01} - \nabla_\omega e_{\alpha\gamma}^{01}) + q_{\beta\pi}^{01} (\nabla_\gamma e_{\alpha\omega}^0 + \nabla_\alpha e_{\gamma\omega}^0 - \nabla_\omega e_{\alpha\gamma}^0)] \} = 0 \quad (2.3)$$

$$c^{\alpha\beta}c^{\gamma\omega}\{\nabla_{\beta}\nabla_{\alpha}\varepsilon_{\gamma\omega}^{0I} + \frac{1}{2}q_{\gamma\omega}^{0I}q_{\alpha\beta}^{0I} + b_{\gamma\omega}^0q_{\alpha\beta}^{0I}\} - Ka^{\alpha\beta}\varepsilon_{\alpha\beta}^{0I} = 0. \quad (2.4)$$

Совершенно также, учитывая (1.10), условия совместности для состояния II представляем в виде уравнений:

$$\begin{aligned} c^{\beta\gamma}\{\nabla_{\gamma}(q_{\alpha\beta}^0 + q_{\alpha\beta}^{0I} + q_{\alpha\beta}^{I\text{II}}) - a^{\pi\omega}b_{\beta\pi}^{\text{II}}[\nabla_{\gamma}(\varepsilon_{\alpha\omega}^0 + \varepsilon_{\alpha\omega}^{0I} + \varepsilon_{\alpha\omega}^{I\text{II}}) + \\ + \nabla_{\alpha}(\varepsilon_{\gamma\omega}^0 + \varepsilon_{\gamma\omega}^{0I} + \varepsilon_{\gamma\omega}^{I\text{II}}) - \nabla_{\omega}(\varepsilon_{\alpha\gamma}^0 + \varepsilon_{\alpha\gamma}^{0I} + \varepsilon_{\alpha\gamma}^{I\text{II}})]\} = 0, \\ c^{\alpha\beta}c^{\gamma\omega}\{\nabla_{\beta}\nabla_{\alpha}(\varepsilon_{\gamma\omega}^0 + \varepsilon_{\gamma\omega}^{0I} + \varepsilon_{\gamma\omega}^{I\text{II}}) + \frac{1}{2}(q_{\gamma\omega}^0 + q_{\gamma\omega}^{0I} + q_{\gamma\omega}^{I\text{II}} + 2b_{\gamma\omega})(q_{\alpha\beta}^0 + q_{\alpha\beta}^{0I} + q_{\alpha\beta}^{I\text{II}})\} - \\ - Ka^{\alpha\beta}(\varepsilon_{\alpha\beta}^0 + \varepsilon_{\alpha\beta}^{0I} + \varepsilon_{\alpha\beta}^{I\text{II}}) = 0. \end{aligned} \quad (c)$$

Вычитая из них уравнения (b), получаем с принятой точностью уравнения:

$$\begin{aligned} c^{\beta\gamma}\{\nabla_{\gamma}q_{\alpha\beta}^{\text{III}} - a^{\pi\omega}b_{\beta\pi}^{\text{I}}(\nabla_{\gamma}\varepsilon_{\alpha\omega}^{\text{II}} + \nabla_{\alpha}\varepsilon_{\gamma\omega}^{\text{II}} - \nabla_{\omega}\varepsilon_{\alpha\gamma}^{\text{II}}) - \\ - a^{\pi\omega}q_{\beta\pi}^{\text{III}}[\nabla_{\gamma}(\varepsilon_{\alpha\omega}^0 + \varepsilon_{\alpha\omega}^{0I}) + \nabla_{\alpha}(\varepsilon_{\gamma\omega}^0 + \varepsilon_{\gamma\omega}^{0I}) - \nabla_{\omega}(\varepsilon_{\alpha\gamma}^0 + \varepsilon_{\alpha\gamma}^{0I})]\} = 0, \end{aligned} \quad (2.5)$$

$$c^{\alpha\beta}c^{\gamma\omega}\{\nabla_{\beta}\nabla_{\alpha}q_{\gamma\omega}^{\text{III}} + q_{\alpha\beta}^{\text{III}}(b_{\gamma\omega}^{\text{I}} + \frac{1}{2}q_{\gamma\omega}^{\text{III}})\} - Ka^{\alpha\beta}q_{\alpha\beta}^{\text{III}} = 0. \quad (2.6)$$

§ 3. Уравнения равновесия

По формулам (2.1) и (2.2) статьи [1] имеем уравнения равновесия:

$$\nabla_{\pi}T_{*}^{\pi\alpha} - b_{\gamma\lambda}^{*}a_{*}^{\alpha}c_{*}^{\gamma\delta}(\nabla_{\pi}L_{*}^{\pi\delta} + M_{*}^{\delta}) + F_{*}^{\alpha} = 0, \quad (3.1)$$

$$c_{*}^{\beta\gamma}\nabla_{\delta}(\nabla_{\lambda}L_{*}^{\lambda\gamma} + M_{*}^{\gamma}) + (b_{\pi\lambda} + q_{\pi\lambda})T_{*}^{\pi\lambda} + F_{*}^{\lambda} = 0, \quad (3.2)$$

где знаки * показывают, что все величины и ковариантное дифференцирование отнесены к метрике деформированной оболочки. По формулам (2.8) этой же статьи, пренебрегая h по сравнению с единицей в случае оболочки конечной кривизны и h^2 — в случае пластинок малой кривизны, приходим к формулам первого приближения, рациональным при построении теории на основе гипотезы Кирхгофа-Лява:

$$F_{*}^{\lambda} = 2X_{*}^{\lambda}h + P_{*}^{\lambda}, \quad F_{*}^{\alpha} = 2X_{*}^{\alpha}h + P_{*}^{\alpha}, \quad M_{*}^{\alpha} = c^{\lambda\alpha}a_{\beta\lambda}Q_{*}^{\beta}h,$$

$$T_{*}^{\alpha\beta} = 2A^{\alpha\beta\kappa\lambda}\varepsilon_{\kappa\lambda}h, \quad L_{*}^{\alpha\beta} = \frac{2}{3}c_{\pi}^{\beta}A^{\alpha\pi\lambda\delta}q_{\lambda\delta},$$

$$A^{\alpha\beta\kappa\lambda} = \{aa^{\alpha\beta}a^{\pi\lambda} + (1 - \sigma)a^{\alpha\pi}a^{\beta\lambda}\} : (1 - \sigma^2). \quad (3.3)$$

Все величины, отнесенные к состояниям 0, I и II, будем снабжать соответственно индексами 0, I и II.

Пренебрегая относительным удлинением по сравнению с единицей, уравнения равновесия для состояния 0 приводим к виду:

$$\nabla_{\pi}T_0^{\pi\alpha} - (b_{\gamma\lambda} + q_{\gamma\lambda}^0)a^{\alpha\lambda}c_{\gamma}^{\delta}(\nabla_{\pi}L_0^{\pi\delta} + M_0^{\delta}) + F_0^{\alpha} = 0, \quad (3.4)$$

$$c_{\gamma}^{\beta}\nabla_{\delta}(\nabla_{\lambda}L_0^{\lambda\gamma} + M_0^{\gamma}) + (b_{\pi\lambda} + q_{\pi\lambda}^0)T_0^{\pi\lambda} + F_0^{\lambda} = 0, \quad (3.5)$$

где

$$T_0^{\alpha\beta} = 2A^{\alpha\beta\kappa\lambda}\varepsilon_{\kappa\lambda}^0h, \quad L_0^{\alpha\beta} = \frac{2}{3}c_{\pi}^{\beta}A^{\alpha\pi\lambda\delta}q_{\lambda\delta}^0, \quad (3.6)$$

$$F_0^i = 2X_0^ih + P_0^i \quad (i = 1, 2, 3), \quad M_0^{\alpha} = c^{\lambda\alpha}a_{\beta\lambda}Q_0^{\beta}h.$$

Если нет краевого эффекта, то и в уравнениях (3.4), полагая $\nabla_{\pi}T_0^{\pi\alpha} \approx \nabla_{\pi}T_0^{\pi\alpha}$, допускаем погрешность порядка $\varepsilon_{\alpha\beta}^0$ по сравнению с единицей. В случае же краевого эффекта, как видно из работы [3], при этом упрощении вводим погрешность порядка $\varepsilon_{\alpha\beta}^0 h^{-1/2}$ по сравнению с единицей. Однако в этом случае уравнения (3.4) служат лишь для выражения меньших усилий T_0^{11} и T_0^{12} через большее из усилий T_0^{22} , поэтому погрешность при определении этого последнего будет порядка $\varepsilon_{\alpha\beta}^0$ по сравнению с единицей за исключением того особого случая, когда внешние силы, действующие на каждый из краевых контуров, взаимно-уравновешиваются. В этом последнем случае погрешность при определении усилий из уравнений (3.4) и (3.5) после их линеаризации согласно [3] также не будет превышать порядка h по сравнению с единицей, если $\varepsilon_p^{1/2} \leq h \leq \varepsilon_p^{2/2}$. Если же $h \sim \varepsilon_p$, то погрешность может достигнуть величины порядка $\sqrt{\varepsilon_p}$ по сравнению с единицей. Учитывая это, вместо (3.4) будем пользоваться упрощенными уравнениями

$$\nabla_{\pi}T_0^{\pi\alpha} - b_{\lambda\gamma}a^{\alpha\lambda}c_{\gamma}^{\delta}(\nabla_{\pi}L_0^{\pi\delta} + M_0^{\delta}) + F_0^{\alpha} = 0. \quad (3.4')$$

Таким образом, величины $\varepsilon_{\alpha\beta}^0$ и $q_{\alpha\beta}^0$, характеризующие начальную деформацию, могут быть определены из шести уравнений (2.1), (2.2), (3.4) и (3.5).

Предположим далее, что в состоянии I на оболочку действуют внешние силы, компоненты которых, отнесенные к метрике этого состояния I, суть:

$$F_i^i = F_0^i + F_{01}^i = 2X_i^ih + P_i^i, \quad (i = 1, 2, 3); \quad M_i^{\alpha} = c^{\lambda\alpha}a_{\beta\lambda}Q_i^{\beta}h. \quad (3.7)$$

Компоненты упругого усилия и момента в этом состоянии по формулам (3.3) равны

$$T_1^{\alpha\beta} = T_0^{\alpha\beta} + T_{01}^{\alpha\beta}, \quad L_1^{\alpha\beta} = L_0^{\alpha\beta} + L_{01}^{\alpha\beta},$$

где

$$T_{01}^{\alpha\beta} = 2A^{\alpha\beta\kappa\lambda}\varepsilon_{\kappa\lambda}^{01}h, \quad L_{01}^{\alpha\beta} = \frac{2}{3}c_{\pi}^{\beta}A^{\alpha\pi\lambda\delta}q_{\lambda\delta}^{01} \quad (3.8)$$

— добавочные усилия и моменты, появившиеся при переходе из состояния 0 в состояние I.

Уравнения равновесия для состояния I суть

$$\nabla_{\pi}^I(T_0^{\pi\alpha} + T_{01}^{\pi\alpha}) - c_{\gamma}^{\delta}a^{\alpha\lambda}(b_{\gamma\lambda} + q_{\gamma\lambda}^0 + q_{\gamma\lambda}^{01})[\nabla_{\pi}(L_0^{\pi\delta} + L_{01}^{\pi\delta}) + M_1^{\delta}] + F_1^{\alpha} = 0, \quad (a)$$

$$c_{\gamma}^{\beta}\nabla_{\delta}[\nabla_{\lambda}(L_0^{\lambda\gamma} + L_{01}^{\lambda\gamma}) + M_1^{\gamma}] + (b_{\pi\lambda} + q_{\pi\lambda}^0 + q_{\pi\lambda}^{01})(T_0^{\pi\lambda} + T_{01}^{\pi\lambda}) + F_1^{\lambda} = 0. \quad (b)$$

Вычитая из них (3.4) и (3.5), имеем

$$\begin{aligned} \nabla_{\pi}^I T_{01}^{\pi\alpha} + (\Gamma_{\pi\lambda}^{\alpha})_{01}T_0^{\lambda\alpha} + (\Gamma_{\pi\mu}^{\alpha})_{01}T_0^{\pi\mu} - a^{\alpha\lambda}c_{\gamma}^{\delta} \cdot [b_{\gamma\lambda}^I(\nabla_{\pi}L_{01}^{\pi\delta} + M_{01}^{\delta}) + \\ + q_{\gamma\lambda}^{01}\nabla_{\pi}L_0^{\pi\delta}] + F_{01}^{\alpha} = 0, \end{aligned} \quad (3.9)$$

$$c_{\gamma}^{\beta} \cdot \nabla_{\delta}(\nabla_{\lambda}L_{01}^{\lambda\gamma} + M_{01}^{\gamma}) + b_{\pi\lambda}^I T_{01}^{\pi\lambda} + q_{\pi\lambda}^{01} T_0^{\pi\lambda} + F_{01}^{\lambda} = 0, \quad (3.10)$$

где

$$(\Gamma_{ik}^{\lambda})_{01} = (\Gamma_{ik}^{\lambda})_1 - (\Gamma_{ik}^{\lambda})_0 = a^N \left(\frac{\partial \varepsilon_{ik}^{01}}{\partial x^i} + \frac{\partial \varepsilon_{ij}^{01}}{\partial x^k} - \frac{\partial \varepsilon_{ik}^{01}}{\partial x^j} \right).$$

Эти уравнения совместно с уравнениями (2.3) и (2.4) служат для определения добавочных удлинений $\varepsilon_{\alpha\beta}^{01}$ и параметров изменения кривизны $q_{\alpha\beta}^{01}$.

Пусть при некоторых критических значениях внешних сил, приложенных к поверхностям оболочки и к ее граничным срезам, происходит переход из состояния I в состояние II. При этом будем предполагать, что изменением компонент (3.7) поверхностных и объемных сил можно пренебречь. Тогда состояние II должно удовлетворять уравнениям равновесия

$$\nabla_{\pi}^{II} (T_{\alpha}^{\pi\alpha} + T_{\alpha I}^{\pi\alpha} + T_{II}^{\pi\alpha}) - a^{\alpha\lambda} b_{\gamma\lambda}^{II} c_{\beta}^{\gamma} [\nabla_{\pi} (L_{\alpha}^{\pi\beta} + L_{\alpha I}^{\pi\beta} + L_{II}^{\pi\beta}) + M_{\alpha}^{\beta}] + F_{\alpha}^{\beta} = 0, \quad (c)$$

$$c_{\gamma}^{\beta} \nabla_{\beta} [\nabla_{\lambda} (L_{\alpha}^{\lambda\gamma} + L_{\alpha I}^{\lambda\gamma} + L_{II}^{\lambda\gamma}) + M_{\alpha}^{\gamma}] + b_{\alpha\lambda}^{II} (T_{\alpha}^{\pi\lambda} + T_{\alpha I}^{\pi\lambda} + T_{II}^{\pi\lambda}) + F_{\alpha}^{\pi} = 0, \quad (d)$$

где

$$T_{II}^{\alpha\beta} = 2A^{\alpha\beta\pi\lambda} \varepsilon_{\alpha\lambda}^{II} h, \quad L_{II}^{\alpha\beta} = \frac{2}{3} c_{\pi}^{\beta} A^{\alpha\pi\lambda\delta} q_{\lambda\delta}^{II}. \quad (3.11)$$

Вычитая из (c) и (d) уравнения (a) и (b), приходим к уравнениям относительно компонент малых добавочных усилий и моментов, появляющихся при переходе из состояния I в состояние II. Пренебрегая при этом квадратами добавочных удлинений по сравнению с их первыми степенями при одновременном сохранении квадратов поворотов, имеем

$$\nabla_{\pi}^I T_{II}^{\pi\alpha} + T_{II}^{\lambda\alpha} (I_{\pi\lambda}^{\pi\alpha})_{II} + T_{II}^{\pi\mu} (I_{\pi\mu}^{\alpha})_{II} - c_{\beta}^{\gamma} a^{\alpha\lambda} (b_{\gamma\lambda}^{II} \nabla_{\pi} L_{II}^{\pi\beta} + q_{\gamma\lambda}^{II} \nabla_{\pi} L_{II}^{\pi\beta}) = 0, \quad (3.12)$$

$$c_{\gamma}^{\beta} \nabla_{\beta} \nabla_{\lambda} L_{II}^{\lambda\gamma} + b_{\alpha\lambda}^{II} T_{II}^{\pi\lambda} + q_{\alpha\lambda}^{II} T_{II}^{\pi\lambda} = 0, \quad (3.13)$$

где

$$(I_{ik}^{\lambda})_{II} = (I_{ik}^{\lambda})_{II} - (I_{ik}^{\lambda})_I = a^{\lambda j} \left(\frac{\partial \varepsilon_{jk}^{III}}{\partial x^i} + \frac{\partial \varepsilon_{ij}^{III}}{\partial x^k} - \frac{\partial \varepsilon_{ik}^{III}}{\partial x^j} \right).$$

$$T_{II}^{\lambda\alpha} = T_{\alpha}^{\lambda\alpha} + T_{\alpha I}^{\lambda\alpha}, \quad L_{II}^{\alpha\beta} = L_{\alpha}^{\alpha\beta} + L_{\alpha I}^{\alpha\beta}. \quad (3.14)$$

Эти уравнения могут служить для исследования явления местной потери устойчивости.

§ 4. Классификация частных случаев

В работе [1] была дана классификация задач теории упругого равновесия оболочки, при чем число типов задач, даже существенно отличных друг от друга, оказалось значительным. В рассматриваемом нами случае деформации, состоящей из трех последовательных деформаций, такая детальная классификация является крайне затруднительной. Поэтому мы ограничиваемся здесь классификацией, основанной на рассмотрении наиболее крупных особенностей рассматриваемых деформаций.

Деформацию будем относить к типу M, если безразмерная кривизна пластинки как до деформации, так и после нее остается малой так, что

$$b \lesssim V \varepsilon_p, \quad q \lesssim V \varepsilon_p.$$

В этом случае, как известно, краевой эффект места не имеет, и принятие гипотезы Кирхгофа приводит к погрешности, вообще говоря,

порядка h^2 по сравнению с единицей и не превышающей во всяком случае ε_p по сравнению с единицей.

Деформацию будем относить к типу K, если безразмерная кривизна пластинки или оболочки есть величина порядка единицы, так что

$$b \sim 1, \quad q \sim 1.$$

В этом случае будем упрощать уравнения так, чтобы погрешность не превышала h по сравнению с единицей. Если максимальная деформация от изгиба мала по сравнению с деформацией срединной поверхности так, что

$$hq \lesssim \varepsilon h,$$

то деформацию будем называть безмоментной и относить к классу B. Если деформация от изгиба одного порядка с деформацией срединной поверхности, то общую деформацию будем называть смешанной и относить к классу C.

Если преобладают изгибные деформации так, что

$$\varepsilon \lesssim h^2 q,$$

то общую деформацию будем называть изгибной и относить к классу I.

Деформацию, состоящую из нескольких, будем обозначать несколькими буквами с соответствующими индексами. Так, например, деформация класса $KB^0C^{01}I^{111}$ представляет из себя деформацию оболочки конечной кривизны, состоящую из начальной безмоментной деформации, дополнительной смешанной деформации и изгибной деформации, появляющейся при потере устойчивости.

Очевидно, что деформация типа B^{11} не может иметь места и что при рассмотрении влияния начальной деформации до потери устойчивости $\vec{v}^{11} = 0$. Нетрудно далее убедиться в том, что лишь в случае деформации класса B^0B^{01} начальная и дополнительная деформации независимы друг от друга. Во всех остальных случаях наложение решений, строго говоря, недопустимо.

Практически наиболее важными являются следующие классы деформации:

а) до потери устойчивости — MB^0C^{01} , MI^0C^{01} , MC^0C^{01} , KB^0C^{01} , KI^0C^{01} и KC^0C^{01} ;

б) при местной потере устойчивости — MB^1C^{11} , MB^1I^{11} , MC^1C^{11} , KB^1I^{11} , KB^1C^{11} , KC^1C^{11} .

Здесь для краткости через B^1 и C^1 обозначены соответственно деформации B^0B^{01} и C^0C^{01} .

Ниже мы подробнее рассматриваем некоторые из этих классов деформации для того, чтобы показать упрощение соответствующих уравнений задачи с принятой точностью.

§ 5. Уравнения равновесия до потери устойчивости с учетом начальных напряжений

1. Деформация класса MB^0C^{01} . В этом случае

$$b \lesssim V \varepsilon_p, \quad h \lesssim V \varepsilon_p, \quad \varepsilon^0 \sim \varepsilon_p,$$

$$\omega^0 \sim q^0 \lesssim \varepsilon_p, \quad \omega^{01} \sim q^{01} \sim V \varepsilon_p, \quad hq^{01} \sim \varepsilon^{01} \sim \varepsilon_p, \quad v^{01} \sim \varepsilon_p. \quad (5.1)$$

По формулам (1.4) и (1.6), пренебрегая при определении деформаций ϵ_p по сравнению с единицей и учитывая, что $w^0 \leq v^0$, находим

$$2\epsilon_{st}^0 = \nabla_s v_t^0 + \nabla_t v_s^0, \quad q_{st}^0 = \nabla_t \nabla_s w^0, \quad \omega_s = \nabla_s w^1, \\ e_{st}^1 = \nabla_s v_t^1 - b_{st}^0 w^1, \quad 2\epsilon_{st}^{01} = e_{st}^1 + e_{ts}^1 + \omega_s^1 \omega_t^1, \quad q_{st}^{01} = \nabla_t \omega_s^1. \quad (5.2)$$

Уравнения (2.1), (2.2), (3.4) и (3.5), определяющие совместно с (5.2) начальное деформированное состояние, линеаризируются, как показано в работе [1].

Уравнения совместности (2.3) и (2.4) и уравнения равновесия (3.9) и (3.10), определяющие добавочную деформацию, могут быть упрощены и приведены к виду:

$$c^{\beta\gamma} \nabla_\gamma q_{\alpha\beta}^{01} = 0, \quad (5.3)$$

$$c^{\alpha\beta} c^{\beta\omega} (\nabla_\beta \nabla_\alpha \epsilon_{\rho\omega}^{01} + \frac{1}{2} q_{\rho\omega}^{01} q_{\alpha\beta}^{01} + b_{\rho\omega}^0 q_{\alpha\beta}^{01}) = 0, \quad (5.4)$$

$$\nabla_\pi T_{01}^{\pi\pi} + F_{01}^\pi = 0, \quad (5.5)$$

$$c_\gamma^\delta \nabla_\delta (\nabla_\lambda L_{01}^{\lambda\gamma} + M_{01}^\gamma) + b_{\pi\lambda}^0 T_{01}^{\pi\lambda} + q_{\pi\lambda}^{01} (T_{01}^{\pi\lambda} + T_{01}^{\pi\lambda}) + F_{01}^3 = 0. \quad (5.6)$$

Если бы в последнем из этих уравнений не было члена $q_{\pi\lambda}^{01} T_{01}^{\pi\lambda}$, зависящего от начальных удлинений, то добавочная деформация определялась бы теми же уравнениями, что и деформация без начальных напряжений такой пластинки, коэффициенты второй квадратичной формы которой равны соответствующим коэффициентам срединной поверхности после начальной деформации, и наложение решений было бы допустимо.

Заметим, что в рассматриваемом случае начальными напряжениями в пластинке могут быть, например, температурные напряжения, возникающие благодаря закреплению граничных срезов.

Система уравнений (5.3) и (5.6) может быть упрощена путем введения функций прогиба и функции напряжения подобно тому, как это было сделано в аналогичном случае в работе [1].

II. Деформация класса MI^0C^{01} . В этом случае

$$b \leq V_{\epsilon_p}, \quad h \leq V_{\epsilon_p}, \quad \epsilon^0 \leq h \epsilon_p, \quad w^0 \sim q^0 \leq V_{\epsilon_p}, \\ w^{01} \sim q^{01} \sim V_{\epsilon_p}, \quad h q^{01} \sim \epsilon^{01} \sim \epsilon_p, \quad v^{01} \sim \epsilon_p. \quad (5.7)$$

По формулам (1.4) и (1.6)

$$2\epsilon_{st}^0 = e_{st}^0 + e_{ts}^0 + \omega_s^0 \omega_t^0, \quad q_{st}^0 = \nabla_t \nabla_s w^0 \\ e_{st}^1 = \nabla_s v_t^1 - b_{st}^0 w^1, \quad 2\epsilon_{st}^{01} = e_{st}^1 + e_{ts}^1 + \omega_s^1 \omega_t^1, \quad q_{st}^{01} = \nabla_t \omega_s^1. \quad (5.8)$$

Уравнения (5.3), (5.4) и (5.5) будут иметь место и в этом случае, а из уравнения (5.6) выпадает указанный выше член, если

$$\epsilon^0 \leq \epsilon_p^2$$

т. е. если удлинения срединной поверхности в начальной деформации пренебрежимо малы. В этом последнем случае, добавочные деформации под действием сил F_{01}^3 и F_{01}^π можно, определять, считая

эти силы приложенными к такой пластинке без начальных напряжений, срединная поверхность которой совпадает с срединной поверхностью данной пластинки после начальной деформации. Однако при этом следует учитывать возможную разницу в формулировке граничных условий.

III. Деформация класса KB^0C^{01} . В этом случае

$$b \sim 1, \quad h \leq V_{\epsilon_p}, \quad q^0 \leq \epsilon^0, \quad h q^{01} \sim \epsilon^{01}. \quad (5.9)$$

По формулам (1.4) — (1.7) находим

$$2\epsilon_{st}^0 \approx e_{st}^0 + e_{ts}^0, \quad 2\epsilon_{st}^{01} \approx e_{st}^1 + e_{ts}^1 + \omega_s^1 \omega_t^1, \\ q_{st}^{01} \approx \nabla_t \omega_s^1, \quad \omega_s^1 \approx \nabla_s w^1. \quad (5.10)$$

Условия совместности (2.3) и (2.4) приводятся к упрощенному виду

$$c^{\beta\gamma} \{ \nabla_\gamma q_{\alpha\beta}^{01} - b_{\beta}^{\omega} (\nabla_\gamma \epsilon_{\alpha\omega}^{01} + \nabla_\alpha \epsilon_{\gamma\omega}^{01} - \nabla_\omega \epsilon_{\alpha\gamma}^{01}) \} = 0, \quad (5.11)$$

$$c^{\alpha\beta} c^{\beta\omega} \{ \nabla_\beta \nabla_\alpha \epsilon_{\rho\omega}^{01} + \frac{1}{2} q_{\rho\omega}^{01} q_{\alpha\beta}^{01} + b_{\rho\omega}^0 q_{\alpha\beta}^{01} \} = 0. \quad (5.12)$$

Уравнения же (3.9) и (3.10), вообще говоря, не могут быть существенно упрощены за исключением того, что в них можно положить

$$b_{\gamma\lambda}^1 \approx b_{\gamma\lambda} + q_{\gamma\lambda}^{01}.$$

При допущении погрешности порядка $\epsilon h^{-1/2}$ эта задача приводится к системе уравнений:

$$c^{\beta\gamma} \nabla_\gamma q_{\alpha\beta}^{01} = 0, \quad c^{\alpha\beta} c^{\beta\omega} (\nabla_\beta \nabla_\alpha \epsilon_{\rho\omega}^{01} + b_{\rho\omega}^0 q_{\alpha\beta}^{01}) = 0, \\ \nabla_\pi T_{01}^{\pi\pi} + F_{01}^\pi = 0, \quad c_\gamma^\delta \nabla_\delta (\nabla_\lambda L_{01}^{\lambda\gamma} + (b_{\pi\lambda} + q_{\pi\lambda}^{01}) T_{01}^{\pi\lambda} + q_{\pi\lambda}^{01} T_{01}^{\pi\lambda} + F_{01}^3) = 0. \quad (5.13)$$

Пример. Цилиндрическая оболочка постоянной толщины δ , радиус которой равен R , а длина — $2l$, предварительно растянута и зашпелена своими концевыми сечениями $x^1 = x = \pm l$. После чего на оболочку начинает действовать внутреннее нормальное давление с напряженностью p . Определить влияние начального растяжения на краевой эффект.

Приняв за координатные линии прямолинейные образующие $x^2 = y = R\varphi = \text{const}$ и параллели $x^1 = x = \text{const}$, после возвращения к размерным величинам и к физическим составляющим деформации, усилий и моментов, находим соответственно:

а) компоненты начальной деформации и начального усилия

$$\epsilon_{11}^0 = \frac{du^0}{dx}, \quad \epsilon_{12}^0 = 0, \quad \epsilon_{22}^0 = \frac{w^0}{R}, \quad q_{11}^0 = 0, \\ T_{11}^0 = E \delta \epsilon_{11}^0, \quad T_{22}^0 = T_{12}^0 = 0,$$

где u^0, v^0, w^0 — компоненты начального перемещения; б) компоненты добавочной деформации по формулам (5.10)

$$q_{11}^{01} = \frac{d^2 w^1}{dx^2}, \quad q_{12}^{01} = q_{22}^{01} = 0, \quad e_{11}^1 = \frac{dw^1}{dx}, \quad e_{12}^1 = 0, \quad e_{22}^1 = \frac{w^1}{R},$$

$$\epsilon_{11}^{01} = \frac{du^1}{dx} + \frac{1}{2} \left(\frac{dw^1}{dx} \right)^2, \quad \epsilon_{12}^{01} = 0, \quad \epsilon_{22}^{01} = \frac{w^1}{R};$$

в) компоненты добавочного упругого усилия и момента

$$T_{11}^{01} = \frac{E\delta}{1-\sigma^2} \left(\epsilon_{11}^{01} + \sigma \epsilon_{22}^{01} \right), \quad T_{22}^{01} = \frac{E\delta}{1-\sigma^2} \left(\epsilon_{22}^{01} + \sigma \epsilon_{11}^{01} \right), =$$

$$L_{01}^{12} = \frac{E\delta^3}{12(1-\sigma^2)} \frac{d^2 w^1}{dx^2}. \quad (5.14)$$

Из уравнений равновесия (5.13), учитывая граничные условия

$$w^1 = 0 \text{ и } \frac{dw^1}{dx} = 0 \text{ при } x = \pm l, \text{ имеем}$$

$$T_{11}^{01} = a_1 = \frac{E\delta}{1-\sigma^2} \left(\frac{du^1}{dx} \right)_{x=\pm l} \quad (5.15)$$

$$-\frac{E\delta^3}{12(1-\sigma^2)} \frac{d^4 w^1}{dx^4} + \left(T_{11}^{01} + T_{11}^0 \right) \frac{d^2 w^1}{dx^2} - \frac{T_{22}^{01}}{R} + p = 0. \quad (5.16)$$

По формулам (5.14) и (5.15)

$$\frac{E\delta}{1-\sigma^2} \epsilon_{11}^{01} = a_1 - \frac{E\delta}{1-\sigma^2} \sigma \epsilon_{22}^{01}, \quad T_{22}^{01} = \sigma a_1 + E\delta \frac{w^1}{R}.$$

Следовательно, (5.16) приводится к уравнению

$$\frac{d^4 w^1}{dx^4} - 2m^2 k^2 \frac{d^2 w^1}{dx^2} + k^4 w^1 - p_1 = 0, \quad (5.16')$$

$$2m^2 k^2 = \frac{a_1 + T_{11}^0}{D}, \quad k^4 = \frac{E\delta}{DR^2}, \quad p_1 = \frac{p}{D} - \frac{\sigma a_1}{RD}, \quad D = \frac{E\delta^3}{12(1-\sigma^2)}.$$

Отсюда

$$w^1 = e^{zx} (A_1 \cos \beta x + B_1 \sin \beta x) + e^{-zx} (A_2 \cos \beta x + B_2 \sin \beta x) + \frac{p_1}{k^4},$$

$$\frac{dw^1}{dx} = e^{zx} [(\alpha A_1 + \beta B_1) \cos \beta x + (\alpha B_1 - \beta A_1) \sin \beta x] +$$

$$+ e^{-zx} [(-\alpha A_2 + \beta B_2) \cos \beta x - (\alpha B_2 + \beta A_2) \sin \beta x],$$

$$\text{при } \alpha = k \sqrt{\frac{1+m^2}{2}}, \quad \beta = k \sqrt{\frac{1-m^2}{2}}. \quad (5.17)$$

Если оболочка не очень коротка, а именно, если $l \gg \sqrt{\delta R}$, то взаимным влиянием закрепления концов можно пренебречь. Поэтому

$$\left(\frac{dw^1}{dx} \right)_{x=l} = 0 \approx e^{\alpha l} [(\alpha A_1 + \beta B_1) \cos \beta l + (\alpha B_1 - \beta A_1) \sin \beta l],$$

$$B_1 = A_1 (\beta \sin \beta l - \alpha \cos \beta l) : (\beta \cos \beta l + \alpha \sin \beta l).$$

Также находим

$$B_2 = A_2 (\alpha \cos \beta l - \beta \sin \beta l) : (\beta \cos \beta l + \alpha \sin \beta l).$$

Из условий

$$(w^1)_{x=\pm l} = 0.$$

находим

$$A_1 = A_2 = -\frac{p_1}{k^4} e^{\alpha l} \frac{(\beta \cos \beta l + \alpha \sin \beta l)}{\beta}.$$

Следовательно,

$$B_2 = -B_1 \approx \frac{p_1}{k^4} e^{\alpha l} \frac{(\beta \sin \beta l - \alpha \cos \beta l)}{\beta},$$

$$w^1 \approx \frac{p_1}{k^4 \beta} \left\{ e^{\alpha(x-l)} [-\beta \cos \beta(x-l) + \alpha \sin \beta(x-l)] - \right.$$

$$\left. e^{-\alpha(x+l)} [\beta \cos \beta(x+l) + \alpha \sin \beta(x+l)] + \beta \right\}. \quad (5.18)$$

При этом должно удовлетворяться условие (5.15) или

$$2la_1 = \int_{-l}^l T_{11}^{01} dx = \int_{-l}^l \frac{E\delta}{1-\sigma^2} \left[\frac{du^1}{dx} + \frac{1}{2} \left(\frac{dw^1}{dx} \right)^2 + \frac{\sigma w^1}{R} \right] dx.$$

Так как концы оболочки сближаться не могут, то, пренебрегая величинами порядка $\frac{1}{\alpha R}$ по сравнению с единицей, имеем

$$a_1 \approx \frac{E\delta}{1-\sigma^2} \frac{\sigma p_1}{k^4 R}, \quad a_1 = T_{11}^{01} \approx pR \sigma.$$

Изменение кривизны образующей равно $\frac{1}{R_1^*} = -\frac{d^2 w^1}{dx^2}$. Оно принимает максимальное по модулю значение на концах оболочки. Максимальное удлинение от изгиба равно $\frac{p_1}{k^2} \frac{\delta}{2}$. Полное максимальное удлинение вдоль образующей при отсутствии начального растяжения равно

$$\epsilon_{max} = \frac{pR(1-\sigma^2)}{E\delta} \left[\sigma + \sqrt{3(1-\sigma^2)} \right]. \quad (5.19)$$

Эта же величина получается при наложении решений безмоментной теории и линейной теории краевого эффекта. При наличии начального растяжения начальное удлинение ϵ_1^0 складывается с удлинением (5.19). Кроме того, начальное растяжение способствует более быстрому затуханию краевого эффекта.

§ 6. Уравнения нейтрального равновесия с учетом начальных напряжений

Для определения критических значений нагрузок, при которых оболочка начинает выпучиваться, появляющиеся добавочные деформации и усилия можно считать бесконечно-малыми и, следовательно,

пренебрегать их квадратами и высшими степенями. Благодаря этому уравнения (2.5), (2.6), (3.12) и (3.13) упрощаются. Рассмотрим это упрощение для одного класса деформации.

Деформация класса KBC^{II} . В этом случае, имеющем место при потере устойчивости ограниченной оболочки, срединная поверхность ее принимает волнообразную форму с большим числом волн (см. [4]). Благодаря этому дифференцирование компонент перемещения хотя бы по одной из координат сильно увеличивает соответствующую компоненту. Пусть

$$w_{,1}^{II} \sim m w^{II}, w_{,2}^{II} \sim n w^{II}, \varepsilon_{st}^0 \sim \varepsilon_{st}^{0I} \sim \varepsilon_{st}^0, \alpha \sim \varepsilon_{st}^{0I}, \alpha \sim \varepsilon_p, \quad (6.1)$$

Имеющиеся решения задач устойчивости, полученные пока лишь для случая, когда граничные срезы проходят по линиям кривизны, показывают [4], что квадрат по крайней мере одной из величин m и n есть величина порядка h^{-1} . Поэтому в таких случаях, пренебрегая единицей по сравнению с m^2 или n^2 , мы допускаем погрешность одного порядка с погрешностью от принятия гипотезы Кирхгофа-Лява. При этом по формулам (1.8) и (1.9) условие того, что добавочная деформация смешанная, т. е. условие

$$h q_{st}^{III} \sim \varepsilon_{st}^{III} \quad (6.2)$$

может выполняться лишь при условии

$$v_a^{II} \sim w^{II} h^{1/2}. \quad (6.3)$$

Кроме того,

$$q_{st}^{III} \approx \nabla_t \nabla_s w^{II}, \varepsilon_{st}^{III} \approx \nabla_s v_t^{II} - b_{st} w^{II}, 2\varepsilon_{st}^{III} = \varepsilon_{st}^{III} + \varepsilon_{ts}^{III}. \quad (6.4)$$

Рассмотрим некоторые частные случаи.

а) Пусть $m^2 \sim n^2 \sim h^{-1}$.

Это имеет место, например, при несимметричной форме потери устойчивости недлинной цилиндрической оболочки при продольном сжатии. В таком случае условия совместности деформации (2.5) и (2.6) и уравнения равновесия (3.12) и (3.13) с принятой точностью можно заменить уравнениями

$$c^{3T} \nabla_T q_{a\beta}^{III} = 0 \quad (6.5); \quad c^{3P} c^{8\omega} (\nabla_\beta \nabla_\alpha \varepsilon_{\rho\omega}^{III} + b_{\rho\omega} q_{a\beta}^{III}) = 0, \quad (6.6)$$

$$\nabla_\pi T_{11}^{III} = 0 \quad (6.7); \quad c_T^3 \nabla_\beta \nabla_\alpha L_{11}^{III} + b_{\pi\lambda} T_{11}^{III} + q_{\pi\lambda}^{III} T_1^{\pi\lambda} = 0. \quad (6.8)$$

Уравнения (6.5) удовлетворяются при подстановке (6.4), если пренебречь h по сравнению с единицей. Например, левая часть первого из этих уравнений

$$c^{21} \nabla_1 q_{12}^{III} + c^{12} \nabla_2 q_{11}^{III} = c^{21} (\nabla_1 \nabla_2 - \nabla_2 \nabla_1) \nabla_1 w^{II} = c^{21} R_{12}, \quad i^a \nabla_a w^{II} \sim w_{,a}^{II} \sim w^{II} h^{-1/2}$$

между тем, как взаимно-уничтожившиеся главные члены — величины $\sim w h^{-1/2}$.

Совершенно также удовлетворяются уравнения (6.7) при подстановке

$$T_{11}^{III} = c^{\mu\pi} c^{\nu\lambda} \nabla_\nu \nabla_\mu \Phi^{II} \quad (6.9)$$

При этом для определения функции прогиба w^{II} и функций напряжения Φ^{II} имеем систему уравнений

$$(a^{PT} a^{2\omega} + c^{PT} c^{2\omega}) \nabla_\beta \nabla_T \left(\frac{1}{2h} \nabla_\rho \nabla_\omega \Phi^{II} \right) + c^{2P} c^{8\omega} b_{\rho\omega} \nabla_\alpha \nabla_\beta w^{II} = 0, \quad (6.10)$$

$$-\frac{2}{3} A^{\lambda\mu\nu} \nabla_\beta \nabla_\lambda (h^3 \nabla_\nu \nabla_\mu w^{II}) + c^{\mu\pi} c^{\nu\lambda} b_{\pi\lambda} \nabla_\nu \nabla_\mu \Phi^{II} + T_1^{\pi\lambda} \nabla_\pi \nabla_\lambda w^{II} = 0 \quad (6.11)$$

в) Пусть $x^1 = \text{const}$. — граничные контуры, $n^2 \sim h^{-1}$, $m^2 \sim 1$. (6.12)

Это имеет место, например, при потере устойчивости круговой цилиндрической оболочки под действием внешнего нормального давления, если квадрат длины оболочки одного порядка с квадратом ее радиуса. В таком случае уравнения (6.7) получаются при пренебрежении $h^{1/2}$ по сравнению с единицей и удовлетворяются при подстановке (6.9), которая представляется в виде

$$T_{11}^{III} = \frac{1}{a} \left(\Phi_{,22}^{II} - \Gamma_{22}^{\alpha} \Phi_{,\alpha} \right), \quad T_{11}^{22} = \frac{1}{a} \left(\Phi_{,11}^{II} - \Gamma_{11}^{\alpha} \Phi_{,\alpha} \right), \quad T_{11}^{12} = -\frac{1}{a} \left(\Phi_{,12}^{II} - \Gamma_{12}^{\alpha} \Phi_{,\alpha} \right).$$

Отсюда и из (6.12) следует, что вообще говоря

$$T_{11}^{12} \sim T_{11}^{11} h^{1/2} \quad (6.13a); \quad T_{11}^{22} \sim T_{11}^{11} h^{1/2} \quad (6.13b)$$

В частном же случае оболочки вращения, граничные контуры которого — параллели, вместо (6.13b) имеем

$$T_{11}^{22} \sim T_{11}^{11} h \quad (6.13'в);$$

так как $\Gamma_{12}^2 = 0$. В дальнейшем мы будем рассматривать именно этот случай, предполагая, кроме того, что $b_{11} \sim b_{22}$.

По (3.11)

$$T_{11}^{11} = \frac{2ha^{11}}{1-\sigma^2} \left(a^{11} \varepsilon_{11}^{III} + \sigma a^{22} \varepsilon_{22}^{III} \right), \quad T_{11}^{22} = \frac{2ha^{22}}{1-\sigma^2} \left(a^{22} \varepsilon_{22}^{III} + \sigma a^{11} \varepsilon_{11}^{III} \right),$$

$$T_{11}^{12} = \frac{2h}{1-\sigma^2} \varepsilon_{12}^{III} a \quad (6.14)$$

Отсюда и из (6.4), (6.13a) и (6.13'в) следует, что

$$a^{22} \varepsilon_{22}^{III} \approx -\sigma \varepsilon_{11}^{III} a^{11} \quad (\text{при пренебрежении } h \text{ по сравнению с } 1),$$

$$T_{11}^{11} \approx 2h \varepsilon_{11}^{III} (a^{11})^2, \quad 2\varepsilon_{12}^{III} = \nabla_1 v_2^{II} + \nabla_2 v_1^{II} \sim \varepsilon_{11}^{III} h^{1/2} \sim \varepsilon_{22}^{III} h^{1/2},$$

$$\varepsilon_{11}^{III} = \nabla_1 v_1^{II} - b_{11} w^{II}, \quad \varepsilon_{22}^{III} = \nabla_2 v_2^{II} - b_{22} w^{II}. \quad (6.15)$$

Для совместности этих зависимостей (6.2), (6.4) и (6.12) необходимо, чтобы было

$$v_2^{II} \lesssim w^{II} h^{1/2}, \quad v_1^{II} \sim w^{II} h. \quad (6.16)$$

Поэтому пренебрегая по-прежнему h по сравнению с 1, находим

$$\varepsilon_{11}^{III} \approx -b_{11} w^{II}, \quad \varepsilon_{22}^{III} \approx \sigma b_{11} w^{II} \approx v_{,2}^{II} - b_{22} w^{II}. \quad (6.17)$$

Далее из первого уравнения (6.7), сохраняя лишь главные члены, находим зависимость

$$T_{11,1}^{11} + 2\Gamma_{11}^1 T_{11}^{11} + T_{11,2}^{21} + \Gamma_{21}^2 T_{11}^{21} = 0. \quad (6.18)$$

Из (6.17) можно найти выражение v_2'' через w'' . Подставляя его в (6.15) и (6.14), из (6.18) определяем v_1'' через w'' . Величина же w'' определяется из уравнения (6.8) и из граничных условий при подстановке (6.4), (6.15), (6.17). При этом полагая

$$T_{11}'' \approx 0,$$

мы вносим в это уравнение погрешность порядка $h^{1/2}$ по сравнению с единицей. Уточнение этого решения не вызывает принципиальных затруднений. На нем мы здесь останавливаться не будем.

ЛИТЕРАТУРА

- [1]. Муштари Х. М. Качественное исследование напряженного состояния упругой оболочки при малых деформациях и произвольных смещениях. П. М. М., т. XIII, вып. 2, 1949.
- [2]. Муштари Х. М. Определение деформации срединной поверхности оболочки при произвольных изгибах. Труды Казанского химико-технологического ин-та, вып. 13, 1948.
- [3]. Муштари Х. М. Инвариантные уравнения равновесия пограничной зоны упругой оболочки в комплексной форме. П. М. М., т. XII, вып. 2, 1948.
- [4]. Муштари Х. М. Некоторые обобщения теории тонких оболочек с приложениями к задаче устойчивости и упругого равновесия. Изв. физико-математ. об-ва при Казанском университете, т. XI, серия 3, стр. 71—150, Казань, 1938.

Поступила в редакцию 20. II. 1949.

Сектор механики ФТИ.

А. П. НОРДЕН

К ВОПРОСУ О ГЕОМЕТРИЧЕСКОЙ ТЕОРИИ КОНЕЧНЫХ ДЕФОРМАЦИЙ

В 1911—13 году Ж. Леру опубликовал два больших мемуара [1], [2], посвященных теории бесконечно малых и конечных деформаций. Своеобразие его подхода состояло в том, что он обращал свое внимание, главным образом, на те свойства деформации, которые отличают ее от однородной аффинной деформации. В последнее время, в связи с построением нелинейной теории упругости, интерес к результатам Леру снова оживился. Однако чтение его мемуаров представляет большие трудности, так как автор не пользуется тензорным методом. Ввиду этого, я считал нелишним дать тензорное изложение результатов Леру, используя при этом произвольную криволинейную систему координат.

С геометрической точки зрения деформация есть взаимно однозначное и непрерывное отображение пространства на себя. При этом отображении всякой точке M в ее начальном положении соответствует некоторая точка M' , с которой совпадает точка M после деформации тела. В теории деформаций говорят также, что точка M' определяет актуальное положение точки M .

Для того, чтобы охарактеризовать деформацию, можно отнести точки M и M' к общей системе криволинейных координат, т. е. предположить, что обе точки соответствуют одним и тем же значениям трех независимых переменных u^1, u^2, u^3 . Предполагая, что в пространстве задано начало координат O , мы можем охарактеризовать деформацию, задав радиусы векторы соответствующих точек M и M' в функции криволинейных координат

$$\vec{OM} = \vec{r}(u^1, u^2, u^3); \quad \vec{OM'} = \vec{r'}(u^1, u^2, u^3) \quad (1)$$

Предполагая, что соответствие является не только непрерывным, но и дифференцируемым, следует считать, что функции $\vec{r}, \vec{r'}$ допускают существование частных производных по u^i до тех порядков, которые встречаются в дальнейших рассуждениях. Принимая во внимание тот факт, что геометрические начальное и актуальное состояние тела вполне равноправны, можно стать еще на такую точку зрения. Дано аналитическое пространство (u) , каждая точка которого определена совокупностью трех чисел u^1, u^2, u^3 и два евклидовых пространства (r) и (r') , находящихся во взаимно однозначном соответствии с пространством (u) .

Если в пространстве (u) задан контравариантный вектор a^i , то ему можно сопоставить вполне определенные векторы $\bar{a}$ и $\bar{a'}$ в каждом из пространств (r) и (r') , полагая

$$\bar{a} = a^i \bar{r}_i; \quad \bar{a'} = a^i \bar{r'_i} \quad (2)$$

где $\bar{r}_i = \partial_i \bar{r}$; $\bar{p}_i = \partial_i \bar{p}$.

Эти векторы называются соответственными по отношению к деформации.

Совокупность направлений векторов x^i , удовлетворяющих уравнению

$$A_i x^i = 0, \quad (3)$$

определяют площадку, если A_i ковариантный вектор пространства (u) . Соответствующие векторы $\bar{x}$ и $\bar{\xi}$ пространств (r) и (p) лежат каждый в плоскостях, проходящих через точку M или M' соответственно.

Два контравариантные вектора a^i и b^i неколлинеарные между собою определяют содержащую их площадку. Ковариантный вектор этой площадки A_i определяется по формуле

$$A_i = e_{ijk} a^j b^k,$$

где e_{ijk} есть тривектор, т. е. тензор кососимметрический по всем своим индексам. Выбор компоненты $e = e_{123}$ этого тензора несущественен, так как в уравнении (3), определяющем площадку компоненты A_i должны быть определены только с точностью до общего множителя.

Коэффициенты связности пространств (r) и (p) определяются как коэффициенты разложений

$$\partial_j \bar{r}_i = G_{ij}^k \bar{r}_k; \quad \partial_j \bar{p}_i = \Gamma_{ij}^k \bar{p}_k. \quad (4)$$

Чтобы различить ковариантное дифференцирование в связностях (r) и (p) , введем обозначения

$$D_k a^i = \partial_k a^i + G_{mk}^i a^m; \quad \nabla_k a^i = \partial_k a^i + \Gamma_{mk}^i a^m \quad (5)$$

$$Da^i = D_k a^i du^k; \quad \nabla a^i = \nabla_k a^i du^k.$$

Так как разность $\nabla_k a_i - D_k a^i$

есть тензор, то и разность

$$A_{ij}^k = \Gamma_{ij}^k - G_{ij}^k \quad (6)$$

есть тензор третьей валентности симметричный по двум своим ковариантным индексам.

Мы будем называть его *тензором аффинной деформации*. Если $A_{ij}^k = 0$, то радиусы векторы $\bar{r}$ и $\bar{p}$ удовлетворяют одной и той же системе линейных уравнений в частных производных, откуда следует, что

$$\bar{p} = \Phi \cdot \bar{r} + \bar{c}$$

где Φ есть символ постоянного аффинора.

Итак: обращение в нуль тензора аффинной деформации характеризует однородное аффинное преобразование пространства.

Тензор A_{ij}^k не может быть выбран произвольно, так как связности (r) и (p) обе являются связностями нулевой кривизны. Учитывая известные формулы преобразования тензора кривизны [3], мы получим две равносильные системы уравнений

$$D_{[i} A_{j]k}^m - A_{[i}^m A_{j]m}^l = 0; \quad \nabla_{[i} A_{j]k}^l + A_{[i}^m A_{j]m}^l = 0, \quad (7)$$

которым должен удовлетворять тензор аффинной деформации.

Тензор, удовлетворяющий этим уравнениям, может быть выражен через произвольный вектор. Действительно: положим

$$\bar{p} = \rho^i \bar{r}_i. \quad (8)$$

Дифференцируя и принимая во внимание (4) получим

$$\bar{p}_j = \rho_j^i \bar{r}_i \quad (9) \text{ где } \rho_j^i = D_j \rho^i. \quad (10)$$

Введем в рассмотрение систему приведенных миноров матрицы $||\rho_j^i||$ и обозначим их через r_i^k , так, чтобы при этом выполнялись условия

$$r_i^k \rho_j^i = \delta_j^k \quad (11)$$

или

$$\bar{r}_i = r_i^k \bar{p}_k. \quad (12)$$

Дифференцируя (9) в связности (r) мы получим

$$D_k \bar{p}_j = -A_{kj}^m \bar{p}_m = \rho_j^i \bar{r}_i.$$

где

$$\rho_{jk}^i = D_k \rho_j^i = D_k D_j \rho^i. \quad (13)$$

Окончательно вследствие (12)

$$A_{jk}^i = -r_m^i \rho_{jk}^m. \quad (14)$$

Рассмотрим кривую в (u) $u^i = u^i(t)$.

Касательные векторы соответствующих кривых в (r) и (p) будут соответствовать вектору многообразия u с координатами

$$t^i = \frac{du^i}{dt}. \quad (15)$$

Ковариантные векторы площадок, соприкасающихся кривым в (r) и в (p) , будут

$$A_i = e_{ijk} t^j t^k D_s t^s; \quad A_i = e_{ijk} t^j t^k \nabla_s t^s$$

соответственно, откуда

$$A_i = A_i - e_{ijk} A_{mn}^k t^m t^n t^j \quad (16)$$

Если линия до деформации была прямой, то $A_i = 0$ и после деформации ее соприкасающаяся площадка

$$A_i = -e_{ijk} A_{mn}^k t^m t^n t^j. \quad (17)$$

Если A_i площадка касающаяся поверхности, то вторые квадратичные формы этой поверхности, заданные с точностью до множителя до и после деформации будут

$$\varphi = A_k D_i (du^k) du^i; \quad \varphi' = A_k \nabla_i (du^k) du^i$$

при условии $A_k du^k = 0$
откуда

$$\varphi' = \varphi + A_k A_i^k du^i du^j. \quad (18)$$

Если поверхность до деформации была плоскостью, то после деформации ее вторая квадратичная форма, заданная с точностью до множителя, будет

$$\varphi' = A_k A_i^k du^i du^j \quad (19)$$

при условии $A_k du^k = 0$.

До сих пор мы рассматривали только такие свойства деформаций, которые не зависят от метрики пространства. Перейдем теперь к рассмотрению метрических свойств деформации. Пусть линейные элементы пространств (r) и (p) имеют вид

$$ds^2 = g_{ij} du^i du^j, \quad d\sigma^2 = \gamma_{ij} du^i du^j \quad (20)$$

Так как $\nabla_k \gamma_{ij} = D_k \gamma_{ij} - \gamma_{im} A_{jk}^m - \gamma_{jm} A_{ik}^m = 0$,

то $\gamma_{im} A_{jk}^m + \gamma_{jm} A_{ik}^m = D_k \gamma_{ij}$.

Переставляя индексы i, j, k циклически, складывая и вычитая полученные равенства, мы будем иметь

$$\gamma_{im} A_{jk}^m = \frac{1}{2} (D_j \gamma_{ik} + D_k \gamma_{ji} - D_i \gamma_{jk}),$$

откуда

$$A_{jk}^i = \frac{1}{2} \tilde{\gamma}^{im} (D_j \gamma_{km} + D_k \gamma_{jm} - D_m \gamma_{jk}), \quad (21)$$

где $\tilde{\gamma}^{ij}$ тензор взаимный с γ_{ij} , т. е. связан с ним соотношениями

$$\tilde{\gamma}^{im} \gamma_{mj} = \delta^i_j. \quad (22)$$

Объемы соответствующих параллелепипедов в пространствах (r) и (p) выражаются с помощью дискриминантных тривекторов e_{ijk} и e_{ijk} как

$$L = e_{ijk} a^i b^j c^k, \quad \Delta = e_{ijk} a^i b^j c^k$$

причем имеют место условия

$$D_m e_{ijk} = 0; \quad \nabla_m e_{ijk} = 0, \quad (23)$$

которые равносильны следующим

$$\partial_i e = G_{mi}^m e; \quad \partial_i e = \Gamma_{mi}^m e,$$

эти

$$e = e_{123}; \quad e = e_{123}.$$

Отсюда

$$\partial_k \lg \left(\frac{e}{e} \right) = A_{mk}^m. \quad (24)$$

С другой стороны коэффициент объемного расширения

$$1 + \theta = \lim \frac{\Delta}{L} = \frac{e}{e},$$

откуда

$$\frac{\partial \theta}{1 + \theta} = A_i = A_{mi}^m, \quad (25)$$

Сравним кривизну кривой до и после деформации. Пусть s и σ длины дуг, t^i и τ^i ее единичные касательные векторы, n^i и v^i единичные векторы главных нормалей, а k и κ кривизны. В силу формул Серре-Френе мы будем иметь

$$t^k D_k t^i = kn^i; \quad \tau^k \nabla_k \tau^i = \kappa v^i,$$

но

$$\nabla_k \tau^i = D_k \tau^i + A_{km}^i \tau^m$$

а

$$\tau^i = t^i \frac{ds}{d\sigma} = t^i s'.$$

Таким образом

$$\kappa v^i = s' t^i + (s')^2 (kn^i + A_{mn}^i t^m t^n)$$

где

$$s' = (1 + e)^{-1}$$

есть обратная величина коэффициента линейного расширения. Вводя единичный ковариантный вектор бинормали как векторное произведение вектора касательной и главной нормали мы будем иметь

$$b_i = e_{ijk} t^j n^k; \quad \beta_i = e_{ijk} \tau^j v^k$$

и имея ввиду соотношения

$$e_{ijk} = (1 + \theta) e_{ijk}, \quad (26)$$

мы получим

$$\kappa \beta_i = \frac{1 + \theta}{(1 + e)^2} (k b_i + e_{ipq} A_{mn}^q t^p t^m t^n) \quad (27)$$

Следует особо отметить, что это равенство справедливо, вообще говоря, только для ковариантных координат векторов бинормали, так как переход к контравариантным координатам требует свертывания с тензорами взаимными метрическим, которые различны для начального и деформированного состояния.

Перейдем теперь к инвариантному разложению тензора A_{jk}^i *, то-есть к его представлению через линейные комитанты — тензоры более низких валентностей или тензоры, обладающие специальными свойствами симметрии. Эти тензоры можно выбрать так, чтобы они были алгебраически независимыми. Леру дает подобное разложение, хотя и не доводит его до конца. В настоящее время теория таких разложений разработана в общем виде, но принадлежит к числу наиболее трудных разделов тензорной алгебры (4). Мы не будем пользоваться ей в нашем изложении.

Начнем с вывода некоторых вспомогательных формул для дискриминантного тривектора. Его компоненты равны смешанным произведениям координатных векторов, так что

$$e_{ijk} = (r_i r_j r_k). \quad (28)$$

Отсюда следуют такие тождества

$$e_{ijk} e_{pqr} = \begin{vmatrix} g_{ip} g_{iq} g_{ir} \\ g_{jp} g_{jq} g_{jr} \\ g_{kp} g_{kq} g_{kr} \end{vmatrix}, \quad (29)$$

$$e_{ijk} e_{pqk} = g_{ip} g_{jq} - g_{iq} g_{jp}, \quad (30)$$

$$e_{ijk} e_{p..}{}^{jk} = 2 g_{ip}, \quad (31)$$

которыми мы будем пользоваться в дальнейшем.

В трехмерном пространстве можно установить взаимно однозначное соответствие между бивекторами, т. е. кососимметричными тензорами и векторами. Действительно если a_{ij} бивектор, то вводя вектор

$$a_i = e_{i..}{}^{pq} a_{pq} \quad (32)$$

мы можем однозначно разрешить эту систему относительно a_{pq} . Для этого свернем обе части равенства с e^{ijk} и воспользуемся тождеством (30).

*) Ввиду необходимости перебрасывания индексов с помощью тензора g_{ik} , мы будем писать в дальнейшем A_{jk}^i вместо A_{jk}^i .

При этом

$$e^{ijk}a_i = e^{ijk}e_{i..}^{pq}a_{pq} = (g^{ip}g^{jq} - g^{iq}g^{jp})a_{pq} = a^{jk} - a^{kj} = 2a^{jk}.$$

Итак

$$a_{jk} = \frac{1}{2} e_{ijk} a^i. \quad (33)$$

Из тензора аффинной деформации могут быть образованы следующие тензоры, которые или имеют более низкие валентности, или обладают особыми свойствами симметрии.

1. Тензор

$$p_{ij} = -\frac{1}{2} e^{mn} A_{mnij} \quad (34)$$

удовлетворяющий условию

$$p^k_k = 0. \quad (35)$$

2. Симметричный тензор

$$\tau_{ij} = p_{(ij)}, \quad (36)$$

удовлетворяющий условию

$$\tau^k_k = 0. \quad (37)$$

3. Тензор

$$\delta_{ijk} = e_{ijs} p^s_k. \quad (38)$$

4. Вектор

$$\varphi^i = -\frac{1}{2} e^{imn} p_{mn}. \quad (39)$$

5. Тензор третьей валентности симметричный по всем индексам

$$c_{ijk} = \frac{1}{3} (A_{ijk} + A_{jik} + A_{kji}) \quad (40)$$

Подставляя в (38) выражение тензора p_{ij} мы получим

$$\begin{aligned} \delta_{ijk} &= e_{ijs} p^s_k = \frac{1}{2} e_{ijs} e^{mns} A_{mnk} = -\frac{1}{2} (\delta_i^m \delta_j^n - \delta_i^n \delta_j^m) A_{mnk} = \\ &= \frac{1}{2} (A_{jik} - A_{ijk}) \end{aligned}$$

откуда без труда следует, что

$$A_{ijk} = c_{ijk} - \frac{4}{3} \delta_{i(jk)}.$$

С другой стороны

$$\tilde{p}_{ij} = \tau_{ij} + p_{[ij]},$$

но вследствие (33) и (39)

$$p_{[ij]} = -e_{ijm} \varphi^m$$

и

$$\begin{aligned} \delta_{ijk} &= e_{ijs} \tau^s_k - e_{ijs} e^s_{km} \varphi^m = e_{ijs} \tau^s_k - (g_{ik} g_{jm} - g_{im} g_{jk}) \varphi^m = \\ &= e_{ijs} \tau^s_k - (g_{ik} \varphi_j - g_{jk} \varphi_i) \end{aligned}$$

откуда окончательно

$$A_{ijk} = c_{ijk} + \frac{4}{3} e_{ijs} \tau^s_k + \frac{2}{3} (g_{ik} \varphi_j + g_{ji} \varphi_k - 2 g_{jk} \varphi_i). \quad (41)$$

Леру, приводя аналогичные разложения, останавливается на них и дает введенным ковариантам тензора аффинной деформации следующие названия:

1) Второго растяжения — кубической форме

$$c_{ijk} t^i t^j t^k$$

2) Кручения — квадратичной форме

$$\tau_{ij} t^i t^j$$

3) Производного вращения — вектору φ_i

Для тензора c_{ijk} возможно еще дальнейшее разложение, а именно его можно представить в виде

$$c_{ijk} = B_{ijk} + \frac{1}{3} (c_i g_{jk} + c_j g_{ki} + c_k g_{ij}) \quad (42)$$

где

$$c_i = c^m_{mi} \quad (43)$$

а B_{ijk} симметричный тензор, удовлетворяющий так называемому условию аполярности

$$B^m_{mi} = 0 \quad (44)$$

Итак: тензор аффинной деформации можно выразить линейно через два симметричных тензора B_{ijk} и τ_{ij} удовлетворяющих условиям (37) и (44) и два вектора φ_i и c_i . Как показывается в тензорном анализе все эти величины алгебраически независимы, т. е. всегда можно произвести такую деформацию, что в данной точке значения их координат примут любые наперед заданные числовые значения. В этой независимости нас может до некоторой степени убедить подсчет числа их компонент. Действительно выпишем это число против каждого тензора

$$B_{ijk} - 7; \quad \tau_{ij} - 5; \quad \varphi_i - 3; \quad c_i - 3; \quad A_{ijk} - 18$$

и заметим, что последнее равно сумме четырех первых. Окончательное выражение тензора аффинного преобразования имеет вид

$$A_{ijk} = B_{ijk} + \frac{4}{3} e_{ijs} \tau^s_k + g_{ik} p_j + g_{ji} p_k + g_{jk} \varphi_i \quad (44)$$

где

$$p_i = \frac{1}{5} c_i + \frac{2}{3} \varphi_i, \quad q_i = \frac{1}{5} c_i - \frac{4}{3} \varphi_i. \quad (45)$$

Введенный в (25) вектор A_i выражается так:

$$A_i = 4 p_i + q_i = c_i + \frac{4}{3} \varphi_i. \quad (46)$$

Отсюда следует, что эквивалентная деформация, вернее такая, которая комбинируется из деформации, сохраняющей объемы и однородной аффинной деформации, характеризуется условием

$$4p_i + q_i = 0. \quad (47)$$

Для деформации сводящейся к проективному преобразованию

$$B_{ijk} = 0; \quad \tau_{ij} = 0; \quad q_i = 0. \quad (48)$$

Для конформного преобразования или преобразования сводящегося к нему с помощью однородного аффинитета характерны равенства

$$B_{ijk} = 0; \quad \tau_{ij} = 0; \quad q_i = -p_i. \quad (49)$$

В заключение посмотрим как специализируются полученные соотношения для случая бесконечно малой деформации. Пусть

$$\bar{p} = \bar{r} + \bar{u} = \bar{r} + u^k \bar{r}_k,$$

где величины u^k настолько малы, что можно пренебрегать квадратами и произведениями их самих и их производных.

Дифференцируя, получим

$$\bar{p}_i = (\delta_i^k + D_i u^k) \bar{r}_k \quad (50)$$

и свертывая с $\delta_j^i - D_j u^i$ и пренебрегая произведениями

$$\bar{r}_j = (\delta_j^k - D_j u^k) \bar{p}_k. \quad (51)$$

Вторичное дифференцирование в связности (r) дает

$$D_j \bar{p}_i = D_j D_i u^k \bar{r}_k = D_j D_i u^k \bar{p}_k.$$

Но

$$\nabla_i \bar{p}_i = D_i \bar{p}_i - A_{jj}^i \bar{p}_k = 0.$$

Откуда

$$A_{ij}^k = D_j D_i u^k. \quad (52)$$

Сравнивая метрические тензоры пространств (r) и (p)

$$g_{ij} = \bar{r}_i \bar{r}_j; \quad \gamma_{ij} = \bar{p}_i \bar{p}_j$$

и пользуясь (50) и (51) мы получим

$$2\epsilon_{ij} = \gamma_{ij} - g_{ij} = 2D_{(i} u_{j)} \quad (53)$$

где ϵ_{ij} тензор растяжения или тензор метрической деформации [5]. Дифференцируя ковариантно (53), мы будем иметь

$$D_k \epsilon_{ij} = \frac{1}{2} (D_k D_i u_j + D_k D_j u_i).$$

Переставив индексы циклически, вычитая и складывая, обычным приемом можно разрешить эту систему уравнений и представить тензор аффинной бесконечно-малой деформации через тензор метрической деформации в следующем виде:

$$A_{ijk} = D_j \epsilon_{ki} + D_k \epsilon_{ji} - D_i \epsilon_{jk}. \quad (54)$$

Отсюда легко получить выражение тензора кручения.

Действительно

$$p_{kl} = -\frac{1}{2} e^{mn}_{\dots k} A_{mnl} = -e^{mn}_{\dots k} D_m \epsilon_{nl}.$$

откуда

$$\tau_{kl} = D_m \epsilon_{n(k} e^{mn}_{\dots l)}. \quad (55)$$

С другой стороны, из (52) следует, что

$$p_{kl} = -\frac{1}{2} e^{mn}_{\dots k} D_l D_m u_n = -\frac{1}{2} D_k \omega_l$$

где

$$\omega_l = e^{mn}_{\dots l} D_m u_n$$

есть ротация вектора u^l , т. е. вектор бесконечно малого вращения [5].

Таким образом тензор кручения

$$\tau_{kl} = -\frac{1}{2} D_{(k} \omega_{l)} \quad (56)$$

а тензор производного вращения

$$\varphi_l = -\frac{1}{4} e^{mn}_{\dots l} D_m \omega_n.$$

Итак: при бесконечно малой деформации тензор кручения отличается только постоянным множителем от симметризованной ковариантной производной вектора вращения, а вектор второго вращения — от второй ротации этого вектора.

ЛИТЕРАТУРА

1. J. Le Roux. Annales scient. de l'école normale. T. 28 (1911).
2. J. Le Roux. Annales scient. de l'école normale. T. 30 (1913).
3. И. Схоутен и Д. Стройк. Введение в новые методы дифференциальной геометрии, т. I, стр. 125 (11,76) М. — Л. 1939.
4. J. Schouten. Der Ricci-Kalkül. Глава VII. Berlin, 1924.
5. Д. И. Кутилин. Теория конечных деформаций. Глава V. М. — Л. 1947.

И. В. СВИРСКИЙ

О ТОЧНОСТИ ВАРИАЦИОННЫХ МЕТОДОВ ОПРЕДЕЛЕНИЯ ВЕЛИЧИНЫ КРИТИЧЕСКИХ СИЛ ПРИ ПРОДОЛЬНОМ ИЗГИБЕ

Как известно, определение критических сил, вызывающих потерю устойчивости упругих систем, обычно сводится к нахождению взаимных собственных значений двух операторов. Для этой цели применяются методы Галеркина, Рунца и другие, которые дают хорошие приближенные решения для целого ряда задач.

В этой статье рассматривается вопрос об оценке погрешности приближенных решений. Этот вопрос представляет интерес в том отношении, что эффективный метод оценки погрешности позволил бы смелее применять вариационные методы к таким задачам, к которым применение вариационных методов без последующей оценки погрешности было бы делом рискованным. В этой статье мы покажем применение предлагаемого метода оценки на примере продольного изгиба балки переменного сечения, хотя тот же метод с небольшими изменениями может быть применен и ко многим другим задачам.

§ 1. Рассмотрим балку с шарнирным закреплением ее концов

Накопленная в балке упругая энергия изгиба выражается формулой

$$\mathfrak{D}(y, y) = \int_0^l I(s) E \frac{[y''(s)]^2}{2} ds \quad (1)$$

при этом введены следующие обозначения:

$y(s)$ — прогиб балки;
 $I(s)$ — моменты инерции сечений;
 E — модуль упругости.

Сближение концов балки благодаря прогибу равно $l - \int_0^l \cos \alpha ds$

где $\alpha(s)$ угол отклонения от вертикали касательной к оси балки.

$$\cos \alpha = \sqrt{1 - \tan^2 \alpha} \cong 1 - \frac{\tan^2 \alpha}{2} = 1 - \frac{[y'(s)]^2}{2}$$

следовательно:

$$h \cong l - \int_0^l \left\{ 1 - \frac{[y'(s)]^2}{2} \right\} ds = \int_0^l \frac{[y'(s)]^2}{2} ds.$$

Величину предыдущего интеграла в дальнейшем будем обозначать через $R(y, y)$

$$\int_0^l \frac{[y'(s)]^2}{2} ds = R(y, y).$$

В дальнейшем мы также будем употреблять следующие обозначения

$$\int_0^l \frac{y_1'(s)y_2'(s)}{2} ds = R(y_1, y_2) \quad (1.2)$$

$$\int_0^l \frac{EI y_1''(s)y_2''(s)}{2} ds = \mathcal{E}(y_1, y_2) \quad (1.3)$$

Непосредственно легко проверить, что функционалы $\mathcal{E}(y, y)$ и $R(y, y)$ обладают тем свойством, что

$$\left. \begin{aligned} R(y_1, y_2) &= R(y_2, y_1) \\ \mathcal{E}[(y_1 + y_2), (y_1 + y_2)] &= \mathcal{E}(y_1, y_1) + 2\mathcal{E}(y_1, y_2) + \mathcal{E}(y_2, y_2) \end{aligned} \right\} \quad (1.4)$$

$$R[(y_1 + y_2)(y_1 + y_2)] = R(y_1, y_1) + 2R(y_1, y_2) + R(y_2, y_2) \quad (1.5)$$

$$\mathcal{E}(\alpha y_1, \alpha y_1) = \alpha^2 \mathcal{E}(y_1, y_1); \quad R(\alpha y_1, \alpha y_1) = \alpha^2 R(y_1, y_1) \quad (1.6)$$

В дальнейшем мы будем употреблять следующую терминологию: если $y_1(x) = \lambda y_2(x)$, где λ постоянное число, то тогда будем называть функции $y_1(x)$ и $y_2(x)$ между собой „коллинеарными“.

Если же $R(y_1, y_2) = 0$

то функции y_1 и y_2 будем называть между собой „ортогональными“. Балка будет в устойчивом равновесии, если для всех возможных форм прогиба $y(s)$ работы силы P будет нехватать для создания в балке соответствующей потенциальной энергии.

Математически это выражается так:

$$P < \mathcal{E}(\tilde{y}, \tilde{y}) \quad \text{при} \quad R(\tilde{y}, \tilde{y}) = 1$$

при этом введена нормированная функция

$$\tilde{y}(s) = \frac{y(s)}{\sqrt{R(y, y)}}$$

Из вышесказанного можно вывести, что величина первой критической силы определяется формулой

$$P_1 = \min \frac{\mathcal{E}(y, y)}{R(y, y)} \quad (1.7)$$

или, что то же,

$$P_1 = \min \mathcal{E}(\tilde{y}, \tilde{y}) \quad \text{при добавочном условии}$$

$$R(\tilde{y}, \tilde{y}) = 1.$$

Функция $y_1(s)$, для которой достигается минимум характеризует первую форму прогиба.

Эта функция определяется уравнением

$$\delta \{ [\mathcal{E}(y, y)] / R(y, y) \} = 0 \quad (1.8)$$

Следовательно

$$\frac{R(y, y) \delta \mathcal{E}(y, y) - \mathcal{E}(y, y) \delta R(y, y)}{R(y, y)^2} = 0 \quad \text{при} \quad y = y_1.$$

то-есть:

$$\delta \mathcal{E}(y, y) - \frac{\mathcal{E}(y_1, y_1)}{R(y_1, y_1)} \delta R(y, y) = 0 \quad \text{при} \quad y = y_1. \quad (1.9)$$

Пользуясь уравнением (1.7), предыдущее равенство мы записываем так:

$$\delta \mathcal{E}(y, y) - P_1 \delta R(y, y) = 0 \quad (1.9), \quad \delta [\mathcal{E}(y, y) - P_1 R(y, y)] = 0 \quad (1.10)$$

Уравнение (1.9) является математической записью принципа возможных перемещений.

Уравнение Эйлера, соответствующее вариационным уравнениям (1.9), а следовательно и (1.8) совпадает с уравнением равновесия. Предыдущие выводы можно обобщить: если какая-нибудь функция обладает тем свойством, что при отклонении от этой функции удовлетворяются уравнения

$$\delta \left[\frac{\mathcal{E}(y, y)}{R(y, y)} \right] = 0 \quad \text{или} \quad \delta \mathcal{E}(y, y) - P_k \delta R(y, y) = 0. \quad (1.11)$$

то эта функция удовлетворяет уравнению Эйлера, которое является уравнением равновесия при критической величине сжимающей силы:

$$P_k = \frac{\mathcal{E}(y_k, y_k)}{R(y_k, y_k)}, \quad K = 1; 2; \dots \quad (1.12)$$

Уравнение (1.10) означает, что для всякой допустимой функции, т. е. функции, которая удовлетворяет граничным условиям и для которой нижеприведенные уравнения имеют смысл, имеет место уравнение:

$$\frac{d}{d\alpha} \{ \mathcal{E}[(y + \alpha \eta), (y + \alpha \eta)] - P_1 R[(y + \alpha \eta), (y + \alpha \eta)] \} = 0$$

при $\alpha = 0$

Но в силу равенств (1.4) и (1.5)

$$\mathcal{E}[(y + \alpha \eta), (y + \alpha \eta)] = \mathcal{E}(y, y) + 2\alpha \mathcal{E}(y, \eta) + \alpha^2 \mathcal{E}(\eta, \eta);$$

$$R[(y + \alpha \eta), (y + \alpha \eta)] = R(y, y) + 2\alpha R(y, \eta) + \alpha^2 R(\eta, \eta).$$

Поэтому предыдущее уравнение приводится к следующему:

$$\mathcal{E}(y, \eta) = P_1 R(y, \eta) \quad (1.13)$$

(где P_1 определяется по формуле (1.12)) при всякой функции $\eta(s)$, удовлетворяющей граничным условиям.

Так как в дальнейшем будут встречаться только такие функции, то мы специально этого не оговаривая, будем предполагать, что все встречающиеся в дальнейшем функции удовлетворяют граничным условиям $y(0) = y''(0) = y(l) = y''(l) = 0$. Условия (1.13), (1.9) и (1.8) между собой эквивалентны. Разложим функцию η на две составляющие: одну коллинеарную с y_1 , другую η' к нему ортогональную

$$\eta = \beta y_1 + \eta', \quad \text{при} \quad R(y_1, \eta') = 0. \quad (1.14)$$

Для определения этих составляющих рассмотрим выражение

$$R(\eta, y_1) = \beta R(y_1, y_1) + R(\eta', y_1)$$

из которого следует:

$$R(\eta, y_1) = \beta R(y_1, y_1).$$

Отсюда определяем

$$\beta = \frac{R(\eta, y_1)}{R(y_1, y_1)}; \eta' = \eta - \frac{R(\eta, y_1)}{R(y_1, y_1)} y_1.$$

Подставляя (1.14) в (1.13), получим:

$$\partial [y, (\beta y_1 + \eta')] = P_1 R[y_1 (\beta y_1 + \eta')].$$

Следовательно:

$$\beta \partial(y_1, y_1) + \partial(y_1, \eta') = P_1 \beta R(y_1, y_1) + P_1 R(y_1, \eta').$$

В силу уравнений (1.12) и (1.14) имеем:

$$\partial(y_1, \eta') = 0, \quad (1.15)$$

при всякой функции η' , удовлетворяющей условию (1.14). Формулы (1.15) и (1.13) между собой эквивалентны. Таким образом, доказано, что, если для функции y_1 выполняется уравнение $\partial(y_1, \eta') = 0$ при всякой функции η' , удовлетворяющей уравнению $R(y_1, \eta') = 0$, то эта функция y_1 удовлетворяет уравнению (1.13), а следовательно и уравнению (1.8) и поэтому она является функцией, характеризующей равновесную форму прогиба балки.

§ 2. Определение второй формы прогиба

Для определения второй формы прогиба рассмотрим следующую задачу.

Найти среди всевозможных функций y_2 , удовлетворяющих условию

$$R(y_1, y_2) = 0 \quad (2.1)$$

а также граничным условиям ту функцию y_2 , для которой выражение $\frac{\partial(y, y)}{R(y, y)}$ принимает минимальное значение. Это значение обозначим через P_2 .

При этом для всех других y , удовлетворяющих условию:

$$R(y_1, y) = 0, \quad \frac{\partial(y, y)}{R(y, y)} \geq P_2. \quad (2.2)$$

Подобно предыдущему можно доказать, что функция y_2 удовлетворяет при этом условию

$$\partial(y_2, \eta_2) = 0 \quad (2.3)$$

при всякой функции η_2 , удовлетворяющей двум условиям

$$R(y_1, \eta_2) = 0 \quad (2.4) \quad R(y_2, \eta_2) = 0 \quad (2.5)$$

Однако легко доказать, что уравнение (2.3) будет выполняться так же для всякой функции η_2 , которая удовлетворяет только второму условию (2.5). Действительно, как это было указано раньше, функцию η_2 можно разложить на две составляющие

$$\eta_2 = \beta y_1 + \eta_2.$$

причем

$$R(y_1, \eta_2) = 0.$$

Тогда

$$\partial(y_2, \eta_2) = \partial(y_2, [\beta y_1 + \eta_2]) = \beta \partial(y_2, y_1) + \partial(y_2, \eta_2).$$

Используя формулы (2.1) и (2.3) имеем:

$$\partial(y_2, \eta_2) = 0 \quad (2.6)$$

для всякой функции η_2 , удовлетворяющей только одному условию

$$R(y_2, \eta_2) = 0. \quad (2.7)$$

Согласно предыдущему, отсюда следует, что функция y_2 действительно характеризует форму прогиба, удовлетворяющего условиям равновесия.

§ 3. Оценка погрешности приближенных решений

Допустим, что одним из известных методов получено приближенное значение функции $y_{1s}(x)$: первой формы прогиба. Соответствующее приближенное значение первой критической силы обозначим через P_{1s} .

$$P_{1s} = \frac{\partial(y_{1s}, y_{1s})}{R(y_{1s}, y_{2s})} \quad (3.1)$$

Задачей нашей статьи является выяснение в каких пределах может лежать погрешность решения.

Для этого мы применим следующий прием:

Рассмотрим слегка измененную от данной нам механическую систему, для которой $y_{1s}(x)$ являлась бы точным решением.

Например, в случае продольного прогиба балки изменим ее моменты инерции сечений так, чтобы при этом первая функция прогиба оказалась точно равной $y_{1s}(x)$. Для этого возьмем распределение моментов инерции следующим образом

$$I_s(s) = -P_{1s} \frac{y_{1s}(s)}{y_{1s}''(s)} \quad (3.2)$$

При этом:

$$I_s(s) y_{1s}''(s) + P_{1s} y_{1s}(s) = 0 \quad (3.3)$$

т. е. уравнения равновесия при этом точно выполняются. Число P_{1s} подберем так, чтобы $I_1(s)$ оказалась немного меньше чем $I(s)$

$$I_s(x) \leq I(x) \text{ при } 0 \leq x \leq l.$$

Упругую энергию нашей несколько измененной системы будем обозначать так:

$$\partial_s(y, y) = \int_0^l \frac{I_s(s) [y''(s)]^2}{2} ds.$$

Введем также обозначения

$$\Delta \partial(y, y) = \partial(y, y) - \partial_s(y, y) \geq 0. \quad (3.4)$$

Величина первой критической силы равна

$$P_1 = \min \partial(\tilde{y}, \tilde{y}), \quad (3.5)$$

где $\tilde{y}(s)$ любая функция, удовлетворяющая граничным условиям и нормированному условию

$$R(\tilde{y}, \tilde{y}) = 1 \quad (3.6)$$

Разложим функцию $\tilde{y}$ на две составляющих, одну коллинеарную y_{1s} и другую к ней „ортогональную“ то есть

$$\tilde{y} = c_1 y_{1s} + c_2 \eta. \quad (3.7)$$

Причем

$$R(y_{1s}, \eta) = 0, \quad R(y_{1s}, y_{1s}) = 1; \quad R(\eta, \eta) = 1. \quad (3.8)$$

В силу (3.6) коэффициенты c_1 и c_2 удовлетворяют условиям:

$$c_1^2 R(\tilde{y}_{1s}, \tilde{y}_{1s}) + 2c_1 c_2 R(y_{1s}, \eta) + c_2^2 R(\eta, \eta) = 1,$$

т. е.

$$c_1^2 + c_2^2 = 1. \quad (3.9)$$

Уравнение (3.5) при этом примет вид:

$$P_1 = \min \Delta([c_1 y_{1s} + c_2 \eta], [c_1 y_{1s} + c_2 \eta]),$$

т. е.

$$P_1 = \min [c_1^2 \Delta(y_{1s}, y_{1s}) + 2c_1 c_2 \Delta(y_{1s}, \eta) + c_2^2 \Delta(\eta, \eta)]. \quad (3.10)$$

При отыскании минимума в правую часть формулы следует подставлять всевозможные „нормированные“ функции $\eta(s)$, т. е. удовлетворяющие условиям:

$$R(\eta, \eta) = 1 \text{ и } R(y_{1s}, \eta) = 1$$

и всевозможные числа c_1 и c_2 , удовлетворяющие условию (3.9). Из уравнения (3.9) имеем:

$$c_1 = \sqrt{1 - c_2^2}.$$

Пользуясь этим, уравнению (3.10) можно придать следующий вид:

$$P_1 = \min [(1 - c_2^2) \Delta(y_{1s}, y_{1s}) + 2c_2 \sqrt{1 - c_2^2} \Delta(y_{1s}, \eta) + c_2^2 \Delta(\eta, \eta)]$$

т. е.

$$P_1 = \min \{ \Delta(y_{1s}, y_{1s}) + 2c_2 \sqrt{1 - c_2^2} \Delta(y_{1s}, \eta) + c_2^2 [\Delta(\eta, \eta) - \Delta(y_{1s}, y_{1s})] \}. \quad (3.11)$$

Для облегчения дальнейших вычислений введем подстановку

$$c_2 = \sin \varphi.$$

Тогда

$$P_1 = \min \{ \Delta(y_{1s}, y_{1s}) + 2 \sin \varphi \cos \varphi \Delta(y_{1s}, \eta) + \sin^2 \varphi [\Delta(\eta, \eta) - \Delta(y_{1s}, y_{1s})] \}.$$

Величина в фигурных скобках принимает минимальное значение при тех значениях $\varphi = \varphi_0$, при которых первая частная производная равна нулю, а вторая положительная, т. е.

$$2 \cos 2\varphi_0 \Delta(y_{1s}, \eta) + \sin 2\varphi_0 [\Delta(\eta, \eta) - \Delta(y_{1s}, y_{1s})] = 0 \quad (3.12)$$

$$-4 \sin 2\varphi_0 \Delta(y_{1s}, \eta) + 2 \cos 2\varphi_0 [\Delta(\eta, \eta) - \Delta(y_{1s}, y_{1s})] \geq 0. \quad (3.13)$$

Следовательно,

$$\operatorname{tg} 2\varphi_0 = \frac{2\Delta(y_{1s}, \eta)}{\Delta(\eta, \eta) - \Delta(y_{1s}, y_{1s})}. \quad (3.14)$$

Умножив равенство (3.12) на величину

$$2 \operatorname{tg} 2\varphi_0$$

и сложив с неравенством (3.13), получим:

$$\left[2 \frac{\sin^2 2\varphi_0}{\cos 2\varphi_0} + 2 \cos 2\varphi_0 \right] [\Delta(\eta, \eta) - \Delta(y_{1s}, y_{1s})] \geq 0.$$

Отсюда следует, что знак величины $\cos 2\varphi_0$ совпадает со знаком величины:

$$[\Delta(\eta, \eta) - \Delta(y_{1s}, y_{1s})];$$

если она положительна, то

$$-\frac{\pi}{2} \leq 2\varphi \leq \frac{\pi}{2}, \quad (3.15)$$

если отрицательна, то величина φ не удовлетворяет неравенству (3.15),

и величина:

$$c_2 = \sin \varphi$$

может оказаться большой. В этом случае применение метода Рунге весьма рискованно.

Согласно (3.4)

$$\Delta(\eta, \eta) - \Delta(y_{1s}, y_{1s}) = [\Delta_s(\eta, \eta) - \Delta_s(y_{1s}, y_{1s})] + [\Delta \Delta(\eta, \eta) - \Delta \Delta(y_{1s}, y_{1s})].$$

Применяя (3.6) и (2.2) к измененной системе имеем:

$$\Delta_s(\eta, \eta) \geq P_{2s}.$$

Из уравнений (3.1) и (3.6)

$$\Delta_s(y_{1s}, y_{1s}) = P_{1s}.$$

Пользуясь этими соотношениями, а также (3.4), получим

$$\Delta(\eta, \eta) - \Delta(y_{1s}, y_{1s}) \geq P_{2s} - P_{1s} - \Delta \Delta(y_{1s}, y_{1s}).$$

Исходя из вышесказанного, мы ограничимся в дальнейшем случаем, когда

$$P_{2s} - P_{1s} - \Delta \Delta(y_{1s}, y_{1s}) > 0.$$

Тогда справедлива формула (3.15).

Из (3.14) и (3.15) имеем:

$$|\varphi| \leq \left| \frac{\Delta(y_{1s}, \eta)}{\Delta(\eta, \eta) - \Delta(y_{1s}, y_{1s})} \right|.$$

Отсюда:

$$|c_2| = |\sin \varphi| \leq \left| \frac{\Delta(y_{1s}, \eta)}{\Delta(\eta, \eta) - \Delta(y_{1s}, y_{1s})} \right|. \quad (3.16)$$

Из формулы (3.11) можно вывести неравенство:

$$P_1 \geq \min \{ \mathcal{E}(y_{1s}, y_{1s}) - 2|c_2|^2 \mathcal{E}(y_{1s}, \eta) + |c_2|^2 [\mathcal{E}(\eta, \eta) - \mathcal{E}(y_{1s}, y_{2s})] \}.$$

Возьмем частную производную по $|c_2|$ от выражения в фигурных скобках и приравняем ее нулю. Из полученного уравнения определим при каком значении $|c_2|$ выражение, стоящее в фигурных скобках, достигает наименьшей величины:

$$|c_2|_0 = \mathcal{E}(y_{1s}, \eta) : [\mathcal{E}(\eta, \eta) - \mathcal{E}(y_{1s}, y_{2s})].$$

Подставляя, эту величину вместо $|c_2|$ в предыдущую формулу, имеем:

$$P_1 \geq \min \left\{ \mathcal{E}(y_{1s}, y_{1s}) - \frac{\mathcal{E}(y_{1s}, \eta)^2}{\mathcal{E}(\eta, \eta) - \mathcal{E}(y_{1s}, y_{2s})} \right\}.$$

Отсюда следует, что:

$$P_1 \geq \mathcal{E}(y_{1s}, y_{1s}) - \max \left\{ \frac{[\mathcal{E}(y_{1s}, \eta)]^2}{\mathcal{E}(\eta, \eta) - \mathcal{E}(y_{1s}, y_{2s})} \right\}. \quad (3.17)$$

С другой стороны, из формулы (3.5) имеем

$$P_1 \leq \mathcal{E}(y_{1s}, y_{1s}) = P_{1s}. \quad (3.18)$$

Поэтому можно дать следующую оценку величины погрешности для первой критической силы:

$$|P_{1s} - P_1| \leq \max \left\{ \frac{[\mathcal{E}(y_{1s}, \eta)]^2}{\mathcal{E}(\eta, \eta) - \mathcal{E}(y_{1s}, y_{2s})} \right\}. \quad (3.19)$$

Далее,

$$\mathcal{E}(y_{1s}, \eta) = \mathcal{E}_s(y_{1s}, \eta) + \Delta \mathcal{E}(y_{1s}, \eta) \quad (3.20)$$

Так как $y_{1s}(x)$ является первой функцией прогиба измененной системы, а функция $\eta(x)$ удовлетворяет уравнению (3.8), то

$$\mathcal{E}_s(y_{1s}, \eta) = 0 \quad (3.21)$$

следовательно:

$$\mathcal{E}(y_{1s}, \eta) = \Delta \mathcal{E}(y_{1s}, \eta). \quad (3.22)$$

Так как функционал $\Delta \mathcal{E}(y_{1s}, \eta)$ является линейным относительно функции $\eta(x)$, то имеет место равенство

$$\Delta \mathcal{E}(y_{1s}, \eta) = \frac{d}{d\alpha} [\Delta \mathcal{E}(y_{1s}, \alpha\eta)] = \frac{d}{d\alpha} \int_0^l \frac{[I - I_s] y_{1s}'' \alpha \eta''}{2} dx,$$

т. е. величина $\Delta \mathcal{E}(y_{1s}, \eta)$ равна своей первой вариации по η . Следовательно,

$$\Delta \mathcal{E}(y_{1s}, \eta) = \int_0^l L_{\Delta s}(y_{1s}) \eta(x) dx. \quad (3.23)$$

где $L_{\Delta s}(y_{1s})$ оператор Эйлера.

В дальнейшем мы для краткости будем употреблять следующее обозначение „скалярного произведения“ двух функций.

$$\int_0^l f(x) g(x) dx = (f, g). \quad (3.24)$$

Тогда уравнение (3.23) запишется так

$$\Delta \mathcal{E}(y_{1s}, \eta) = (L_{\Delta s} y_{1s}, \eta). \quad (3.25)$$

Аналогичным образом можно получить:

$$R(y, \eta) = (L_R y, \eta), \quad (3.26)$$

где L_R соответствующий оператор Эйлера. Из уравнения (3.26) и (1.4) имеем:

$$(L_R y_{1s}, \eta) = R(y_{1s}, \eta) = R(\eta, y_{1s}) = (L_R \eta, y_{1s})$$

и следовательно:

$$(L_R y_{1s}, \eta) = (y_{1s}, L_R \eta), \quad (3.27)$$

т. е. оператор L_R является самосопряженным. Аналогичным образом доказывается самосопряженность операторов L_s и $L_{\Delta s}$, т. е.

$$(L_s y_{1s}, \eta) = (y_{1s}, L_s \eta); (L_{\Delta s} y_{1s}, \eta) = (y_{1s}, L_{\Delta s} \eta). \quad (3.28)$$

Из уравнения (3.8) следует:

$$0 = (L_R y_{1s}, \eta). \quad (3.29)$$

Вычитая из уравнения (3.25) уравнение (3.29), которое предварительно умножим на некоторое число γ , величиной которого мы распорядимся в дальнейшем, получим:

$$\Delta \mathcal{E}(y_{1s}, \eta) = ([L_{\Delta s} y_{1s} - \gamma L_{\Delta s} y_{1s}], \eta). \quad (3.30)$$

Последнее уравнение запишем так:

$$\Delta \mathcal{E}(y_{1s}, \eta) = (L_{\Delta s}^{-1} [L_{\Delta s} y_{1s} - \gamma L_R y_{1s}], \eta). \quad (3.31)$$

Для краткости введем следующие обозначения:

$$L_{\Delta s}^{-1} L_{\Delta s} y_{1s} = Z; \quad L_{\Delta s}^{-1} L_R y_{1s} = t. \quad (3.32)$$

Тогда уравнение (3.31) примет вид

$$\Delta \mathcal{E}(y_{1s}, \eta) = (L_{\Delta s} [Z - \gamma t], \eta). \quad (3.33)$$

Так как $L_{\Delta s}$ есть положительный оператор, т. е. он обладает тем свойством, что

$$(L_{\Delta s} y, y) > 0$$

при любой функции y , то мы можем в правой части уравнения (3.33) применить обобщенное неравенство Буняковского—Шварца, согласно которому

$$|L_{\Delta s} (Z - \gamma t), \eta| \leq (L_{\Delta s} [Z - \gamma t], [Z - \gamma t])^{1/2} (L_{\Delta s} \eta, \eta)^{1/2}. \quad (3.34)$$

Для того, чтобы получить наиболее жесткое неравенство, величину γ мы подберем так, чтобы величина правой части неравенства была минимальной. Для этого γ определим из уравнения:

$$\frac{\partial}{\partial \gamma} (L_{\Delta s} [Z - \gamma t], [Z - \gamma t]) = 0.$$

т. е.

$$\frac{\partial}{\partial \gamma} [(L_{\Delta s} Z, Z) - \gamma (L_{\Delta s} t, Z) - \gamma (L_{\Delta s} Z, t) + \gamma^2 (L_{\Delta s} t, t)] = 0$$

или

$$-(L_{\Delta s} t, Z) - (L_{\Delta s} Z, t) + 2\gamma (L_{\Delta s} t, t) = 0.$$

Ввиду самосопряженности оператора $L_{\Delta s}$, первые два члена уравнения между собой равны.

Поэтому

$$\gamma = \frac{(L_{\Delta s} t, Z)}{(L_{\Delta s} t, t)}.$$

Используя уравнение (3.32) получим окончательно:

$$\gamma = \frac{(L_{\Delta s} y, L_{\Delta s} L_R y_{1s})}{(L_{\Delta s} y_{1s}, L_{\Delta s} L_R y_{1s})}. \quad (3.35)$$

Подставив в уравнение (3.34) вместо Z и t их выражения из уравнения (3.32), получим после сокращений

$$\Delta \mathcal{E}(y, \eta) \leq ([L_{\Delta s} y_{1s} - \gamma L_R y_{1s}], L_{\Delta s} [L_{\Delta s} y_{1s} - \gamma L_R y_{1s}])^{\frac{1}{2}} (L_s \eta, \eta). \quad (3.36)$$

Используя формулы (3.32) и (3.36), мы приводим формулу (3.19) к следующему виду:

$$|P_{1s} - P_1| \leq \frac{([L_{\Delta s} - \gamma L_R] y_{1s}, L_{\Delta s} [L_{\Delta s} - \gamma L_R] y_{1s}) (L_{\Delta s} \eta, \eta)}{\mathcal{E}(\eta, \eta) - \mathcal{E}(y_{1s}, y_{1s})}. \quad (3.37)$$

Ввиду того что

$$(L_{\Delta s} \eta, \eta) = \mathcal{E}_s(\eta, \eta) \geq P_{2s} R(\eta, \eta) = P_{2s},$$

где P_{2s} величина критической силы для измененной системы, а

$$\mathcal{E}(\eta, \eta) = \mathcal{E}_s(\eta, \eta) + \Delta \mathcal{E}(\eta, \eta) \geq \mathcal{E}_s(\eta, \eta)$$

то из неравенства (3.37) следует неравенство:

$$|P_{1s} - P_1| \leq \frac{([L_{\Delta s} - \gamma L_R] y_{1s}, L_{\Delta s} [L_{\Delta s} - \gamma L_R] y_{1s})}{1 - P_{1s}/P_{2s}}. \quad (3.38)$$

Для случая, когда L_R есть единичный оператор, можно получить более удобную для вычисления формулу.

Для этого выберем величину γ так, чтобы функция

$$U = L_{\Delta s} y_{1s} - \gamma y_{1s}$$

была ортогональна к y_{1s} . Для этого положим

$$\gamma = \frac{(L_{\Delta s} y_{1s}, y_{1s})}{(y_{1s}, y_{1s})}.$$

Пользуясь ортогональностью функции

$$L_{\Delta s} y_{1s} - \gamma y_{1s},$$

к первой собственной функции оператора $L_{\Delta s}$, y_{1s} . читатель, знакомый с теорией операторов, сумеет доказать неравенство

$$\begin{aligned} & (L_{\Delta s} [L_{\Delta s} y_{1s} - \gamma y_{1s}], [L_{\Delta s} y_{1s} - \gamma y_{1s}]) \leq \\ & \leq \frac{1}{P_{2s}} ([L_{\Delta s} y_{1s} - \gamma y_{1s}], [L_{\Delta s} - \gamma y_{1s}]). \end{aligned}$$

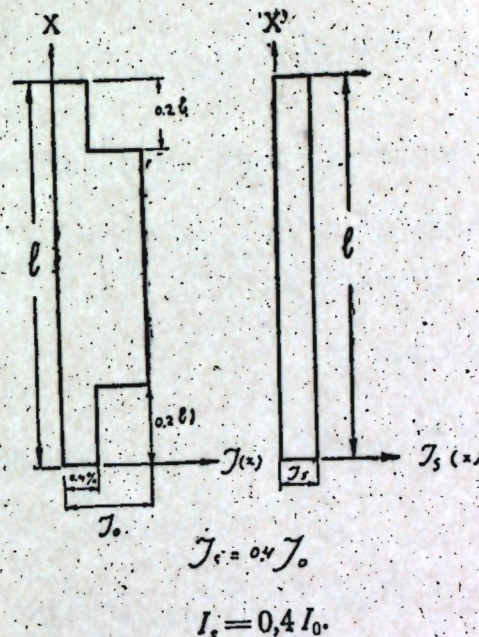
Пользуясь этим, из (3.37) можно получить более удобную для вычисления формулу

$$|P_{1s} - P_1| \leq \frac{([L_{\Delta s} y_{1s} - \gamma y_{1s}], [L_{\Delta s} y_{1s} - \gamma y_{1s}])}{P_{2s} (1 - P_{1s}/P_{2s})}$$

Следовательно процент ошибки оценивается так:

$$\frac{|P_{1s} - P_1|}{P_{1s}} 100\% \leq \frac{([L_{\Delta s} y_{1s} - \gamma y_{1s}], [L_{\Delta s} y_{1s} - \gamma y_{1s}])}{P_{1s} P_{2s} (1 - P_{1s}/P_{2s})} 100\%.$$

§ 3. Перейдем к рассмотрению нашего примера — к задаче о продольном изгибе балки. Рассмотрим шарнирно-опертую балку, у которой распределение моментов инерции $I(x)$ по ее длине дается графиком, изображенным на фигуре.



За приближенную первую функцию прогиба возьмем:

$$y_{1s}(x) = a \sin \frac{\pi x}{l} \quad (4.1)$$

Число a подберем так, чтобы выполнялось условие „нормирования“:

$$R(y_{1s}, y_{1s}) = \int_0^l \frac{y_{1s}^2}{2} dx = \int_0^l \frac{a^2 \pi^2 \sin^2 \pi x / l}{2l^2} dx = 1, \quad (4.2)$$

т. е.

$$\frac{a^2 \pi^2}{l^2} \cdot \frac{l}{4} = 1; \quad a = \frac{\sqrt{4l}}{\pi}; \quad y_{1s} = \frac{\sqrt{4l}}{\pi} \sin \frac{\pi x}{l}.$$

Измененная система будет представлять из себя балку с моментом инерции

$$I_s(x) = P_{1s} \frac{y_{1s}(x)}{y_{1s}(x)} = P_{1s} \left(\frac{l}{\pi} \right)^2. \quad (4.2)$$

При этом число P_{1s} выберем так, чтобы величина $I_s(x)$ оказалась во всех сечениях меньше, чем $I(x)$. Для этого положим

$$P_1 = \min_{0 \leq x \leq l} \left| \frac{I(x)}{\left(\frac{l}{\pi}\right)^2} \right| = 0,4 I_0 \left(\frac{\pi}{l}\right)^2.$$

Следовательно

$$I_s(x) = 0,4 I_0.$$

В нашем примере

$$\partial(y, y) = \int_0^l \frac{EI(x)y''^2}{2} dx; \quad \partial_s(y, y) = \int_0^l \frac{EI_s y''^2}{2} dx,$$

$$\Delta \partial(y, y) = \int_0^l \frac{E(I(x) - I_s)y''^2}{2} dx, \quad R(y, y) = \int_0^l \frac{y'^2}{2} dx.$$

Соответствующие выражения Эйлера для предыдущих функционалов равны

$$L_y y(x) = [EI(x)y''(x)]''/2; \quad L_{ys} y(x) = [EI_s y''(x)]''/2$$

$$L_{\Delta s} y(x) = [E(I(x) - I_s)y''(x)]''/2, \quad L_R y(x) = -y''(x)/2.$$

Переходим к вычислениям

$$L_R y_{1s} = -\frac{\pi \sqrt{4I}}{2l^2} \sin \frac{\pi x}{l}; \quad L_{\Delta s} y_{1s} = \sum_{k=1}^{\infty} b_k \sin \frac{k\pi x}{l},$$

где

$$b_k = \frac{2}{l} \int_0^l \frac{[E(I - I_s)y_{1s}'']^{11}}{2} \sin \frac{k\pi x}{l} dx. \quad (4.3)$$

$$(L_{\Delta s} - \gamma L_R) y_{1s} = (b_1 + \gamma \pi \sqrt{4I}/2l^2) \sin \frac{\pi x}{l} + \sum_{k=2}^{\infty} b_k \sin \frac{k\pi x}{l}$$

$$\begin{aligned} L_{ys}^{-1} (L_{\Delta s} - \gamma L_R) y_{1s} = & \left\{ \left[b_k + \gamma \frac{\pi \sqrt{4I}}{2l^2} \right] / \frac{EI_s}{2} \left(\frac{\pi}{l}\right)^2 \right\} \sin \frac{\pi x}{2} + \\ & + \sum_{k=2}^{\infty} \left[b_k / \frac{EI_s}{2} \left(\frac{k\pi}{l}\right)^2 \right] \sin \frac{k\pi x}{l}. \end{aligned}$$

В виду взаимной ортогональности синусоидальных функций,

$$\begin{aligned} ((L_{\Delta s} - \gamma L_R) y_{1s}, L_{ys}^{-1} (L_{\Delta s} - \gamma L_R) y_{1s}) = \\ = \left[b_1 + \gamma \frac{\pi \sqrt{4I}}{4l^2} / \frac{EI_s}{2} \left(\frac{\pi}{l}\right)^2 \right] \frac{l}{2} + \sum_{k=2}^{\infty} \left[b_k / \left(\frac{k\pi}{l}\right)^2 \right] \frac{l}{EI_s}. \end{aligned}$$

Величину γ определим из уравнения:

$$b_1 + \gamma \frac{\pi \sqrt{4I}}{4l^2} = 0; \quad \gamma = -b_1 / \frac{\pi \sqrt{4I}}{4l^2}$$

Тогда:

$$([L_{\Delta s} - \gamma L_R] y_{1s}, L_{ys}^{-1} [L_{\Delta s} - \gamma L_R] y_{1s}) = \sum_{k=2}^{\infty} \left(\frac{c_k^2}{\left(\frac{k\pi}{l}\right)^2} \right) \frac{l}{EI_s}. \quad (4.4)$$

Интегрируя два раза по частям (4.3) и, учитывая, что

$$y_{1s}(0) = y_{1s}(l) = y_{1s}''(0) = y_{1s}''(l) = 0$$

получим

$$b_k = \left(\frac{k\pi}{l}\right)^2 \frac{2}{l} \int_0^l \frac{E(I - I_s)}{2} y_{1s}'' \sin \left(\frac{k\pi x}{l}\right) dx. \quad (4.5)$$

т. е.

$$b_k = \left(\frac{k\pi}{l}\right)^2 c_k,$$

где c_k коэффициенты Фурье функций

$$\frac{E(I - I_s)y_{1s}''}{2}$$

Подставляя в (4.4) имеем:

$$([L_{\Delta s} - \gamma L_R] y_{1s}, L_{ys}^{-1} [L_{\Delta s} - \gamma L_R] y_{1s}) = \left(\frac{l}{2EI_s} \right) \sum_{k=2}^{\infty} c_k^2 \quad (4.6)$$

Согласно равенству Парсеваля

$$\sum_{k=1}^{\infty} c_k^2 = \frac{2}{l} \int_0^l \left[\frac{E(I - I_s)y_{1s}''}{2} \right]^2 dx. \quad (4.7)$$

Отсюда:

$$\sum_{k=2}^{\infty} c_k^2 = \frac{2}{l} \int_0^l \frac{[E(I - I_s)y_{1s}'']^2}{4} dx - c_1^2 \quad (4.8)$$

где

$$c_1 = \frac{2}{l} \int_0^l \frac{E(I - I_s)y_{1s}''}{2} \sin \frac{\pi x}{l} dx. \quad (4.9)$$

Используя формулы (4.6), (4.8), (3.14) и (4.9) мы придадим формуле (3.38) вид:

$$\begin{aligned} |P_{1s} - P_1| \leq l EI_s \left\{ \frac{2}{l} \int_0^l \left[\frac{E(I - I_s)y_{1s}''}{2} \right]^2 ds - \right. \\ \left. - \left[\frac{2}{l} \int_0^l \frac{E(I - I_s)}{2} y_{1s}'' \sin \frac{\pi x}{l} dx \right]^2 \right\} / (1 - P_{1s}/P_{2s}) \end{aligned} \quad (4.10)$$

или окончательно:

$$|P_{1s} - P_1| \leq \frac{1}{2} \frac{EI_s \left\{ \int_0^l \left[\frac{I - I_s}{I_s} y_{1s}'' \right]^2 dx - \frac{2}{l} \left[\int_0^l \frac{I - I_s}{I_s} y_{1s}'' \sin \frac{\pi x}{l} dx \right]^2 \right\}}{1 - P_{1s}/P_{2s}}.$$

Хотя в начале рассуждений предполагалось, что $I(x)$ есть дважды дифференцируемая функция, однако из формулы (4.10) видно, что ее можно применять и в том случае, когда $I(x)$ есть разрывная функция с конечным числом разрывов. Доказательство легко проводится путем предельного перехода.

Перейдем к вычислениям. Для нашего примера

$$\int_0^l \left[\frac{I - I_s}{I_s} y_{1s}'' \right]^2 dx = \int_{0,2l}^{0,8l} \left[\frac{0,6I_0 \sqrt{4l}}{0,4I_0} \frac{\pi^2}{l^2} \sin \frac{\pi x}{l} \right]^2 dx$$

$$\int_0^l \frac{I - I_s}{I_s} y_{1s}'' \frac{\sin \pi x}{l} dx = \int_{0,2l}^{0,8l} \frac{0,6I_0 \pi^2 \sqrt{4l}}{0,4I_0 l^2} \sin \frac{2\pi x}{l} dx$$

$$P_{1s} \approx \int_0^l \frac{I(y_{1s}'')^2}{2} dx$$

После вычислений получим:

$$P_{1s} = \frac{E_0 I_0 \pi^2}{l^2} \cdot 0,954.$$

Согласно формуле Эйлера

$$p_{2s} = 9 \left(\frac{\pi}{l} \right)^2 EI_s, \quad \frac{P_{1s}}{P_{2s}} = \frac{I_0}{9I_s} \cdot 0,954 = 0,26. \quad (4.11)$$

Примечание:

Ввиду того, что наша балка симметрична относительно своей середины, первая форма прогиба также является симметричной. Поэтому первая критическая сила не изменится, если на балку наложить связи, позволяющие только симметричные прогибы. В этом случае вторая возможная симметричная форма прогиба будет:

$$y_{2s} = \sin \frac{3\pi}{l} x$$

соответствующая величина критической силы указывается формулой (4.11).

Подставляя полученные величины в (4.10) находим

$$|P_{1s} - P_1| \leq \frac{0,53}{2} \cdot \frac{EI_s \pi^2}{l^2}; \quad |P_{1s} - P_1| \leq 0,11 P_{1s}.$$

Точный расчет показывает, что

$$P_1 = \frac{EI_0 \pi^2}{l^2} \cdot 0,86; \quad |P_{1s} - P_1| = P_{1s} \cdot 0,095.$$

Г. С. САЛЕХОВ

ОБ АСИМПТОТИЧЕСКОМ ПОВЕДЕНИИ ИНТЕГРАЛОВ НЕКОТОРЫХ ЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ С ЧАСТНЫМИ ПРОИЗВОДНЫМИ ВБЛИЗИ ГРАНИЦЫ ОБЛАСТИ ИХ СУЩЕСТВОВАНИЯ

§ 1. В 1900 году Э. Ле Руа (1) для широкого класса степенных рядов с положительными коэффициентами, расположенных по целым положительным степеням действительной переменной, на основании закона изменения коэффициентов ряда, дал простой способ построения асимптотического выражения вблизи границы их интервала сходимости. При этом он рассматривает следующие два возможных случая:

1. Когда ряд имеет конечный интервал сходимости, который всегда можно предполагать интервалом $(-1, +1)$. Очевидно, точку $x = +1$ для данного ряда необходимо считать особенной.

2. Когда ряд имеет бесконечный интервал сходимости.

В первом случае, когда x возрастая стремится к 1, и во втором случае, когда x растет беспрестанно, принимая положительные значения, значение самой функции, определяемой данным степенным рядом, будет по какому-то закону расти.

В каждом из указанных случаев Ле Руа дал способы построения асимптотических выражений для функций, представленных данным степенным разложением. В настоящей работе, пользуясь указанными исследованиями Ле Руа, а также ранее опубликованными нашими результатами (2), мы даем ряд асимптотических выражений, характеризующих поведение интегралов некоторых уравнений с частными производными вблизи границы области их существования. Из полученных результатов мы убеждаемся, что понятие веса для уравнений с частными производными, введенное нами в той же работе, имеет существенное значение также в изучении поставленной проблемы в этой работе.

§ 2. Ранее нами была доказана следующая

Теорема: *)

Для того, чтобы уравнение

$$\frac{\partial^p z}{\partial t^p} - \epsilon t^m \frac{\partial^q z}{\partial x^q} = 0, \quad (2.1)$$

*) В последнее время аналогичные результаты мною были обобщены на более широкий класс уравнений с частными производными типа

$$\frac{\partial p_z}{\partial t^p} - \epsilon t^m DZ = 0,$$

где D — некоторый линейный дифференциальный оператор с постоянными коэффициентами. Эта работа сдана в печать в «Известия АН СССР».

(где $\varepsilon = \pm 1$ и m — целое число ≥ 0) в некоторой области D ($|t| < R$, $a \leq t \leq b$) при начальных данных

Коши:

$$\left. \frac{\partial^k z}{\partial t^k} \right|_{t=a} = \varphi_k(x) \quad (k=0, 1, \dots, p-1) \quad (2.2)$$

допускало единственное аналитическое решение относительно (вещественного или комплексного) переменного t , необходимо и достаточно, чтобы начальные данные (2.2) были бесконечно дифференцируемыми на $[a, b]$ и принадлежали к классу α в смысле Жеврея (3) не выше, чем вес уравнения (2.1), т. е.

$$\alpha \leq \frac{p}{q}.$$

При этом:

1) Если $\alpha = \frac{p}{q}$, то решение будет аналитическим по t для $|t| < R$, где $R \neq 0$ и ∞ .

2) Если $\alpha < \frac{p}{q}$, то решение будет целой функцией относительно t , т. е. $R = \infty$.

Доказательство этой теоремы основывается на следующем представлении решения уравнения (2.1) в виде бесконечного ряда:

$$Z(t, x) = \sum_{k=0}^{p-1} \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon^{np} \varphi_k^{(nq)}(x) \frac{[m+k]! [m+k+h]! \dots [m+k+(n-1)h]!}{k! [k+h]! \dots [k+(n-1)h]! [k+nh]!} t^{nh+k} \quad (2.3)$$

где $h = m + p$.

При выше сделанных предположениях относительно функции $\varphi_k(x)$ ($k=0, 1, \dots, p-1$) этот ряд в области D сходится абсолютно и равномерно.

Рассмотрим частный случай уравнения (2.1) и соответственно его решения (2.3), когда $m=0$. Для этого случая будем исследовать вопрос об асимптотическом поведении решения уравнения на границе области его существования.

Решение уравнения

$$\frac{\partial^p Z}{\partial t^p} - \varepsilon \frac{\partial^q Z}{\partial x^q} = 0 \quad (2.4)$$

при начальных данных

$$\left. \frac{\partial^k Z}{\partial t^k} \right|_{t=0} = \begin{cases} \varphi_l(x), & \text{если } k=l, \\ 0, & \text{если } k \neq l, \end{cases} \quad (2.5)$$

где k и $l=0, 1, \dots, p-1$, обозначим через $Z_k(t, x)$.

Согласно (2.3), при наших предположениях, имеем

$$Z_k(t, x) = \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon^{np} \varphi_k^{(nq)}(x) \frac{t^{np+k}}{(np+k)!}, \quad (2.6)$$

Учитывая принадлежность функций $\varphi_k(x)$ ($k=0, 1, \dots, p-1$) на отрезке $[a, b]$ классу α в смысле Жеврея не выше, чем вес уравнения, т. е.

$$\text{Max} |\varphi_k^{(n)}(x)| \leq \frac{M(n!)^\alpha}{H^n}, \quad \text{где } \alpha \leq \frac{p}{q}. \quad (2.7)$$

для ряда (2.6) можно написать следующую мажоранту:

$$|Z_k| \leq M \sum_{n=0}^{\infty} \frac{[(nq)]^\alpha}{H^{nq}} \cdot \frac{|t|^{np+q}}{(np+k)!}. \quad (2.8)$$

Так как условие (2.3) для существования решения (2.6) в области D является необходимым и достаточным, то мажоранта (2.8) для ряда (2.6), по существу поставленной задачи Коши, является в некотором смысле наилучше возможной. Как мною показано (2), мажоранта (2.8) дает возможность, во-первых, установить *нелокальную область сходимости решения*, а во-вторых, она позволяет качественно оценить структурные свойства мажорируемого ряда, представляющего решение данного уравнения в частных производных в области, вообще говоря, даже неаналитических сколь угодно гладких начальных данных. Поэтому естественно называть такую мажоранту в рассматриваемой области D *характеристической* относительно самого решения Z . С этой точки зрения исследование асимптотического поведения мажоранты (2.8), когда $|t|$ стремится к особой точке этого ряда, будет характеризовать рост и асимптотическое поведение интеграла Z данного уравнения на границе области его существования.

§ 3. С указанной точки зрения здесь уместно обратить внимание на один из возможных классов сколь угодно гладких функций, для которых асимптотическое поведение характеристической мажоранты в некоторых точках на границе области существования решений иногда может точно выражать асимптотическое поведение самого решения.

Мы будем говорить, что сколь угодно гладкая функция $\varphi(x)$ принадлежит в окрестности точки $x=x_0$ *строго* классу M_n , если в этой точке *все* производные этой функции $\varphi^{(nq)}(x)$ ($q \geq 1$), начиная с некоторого $n \geq N$ достигают своего максимального значения M_{nq} т. е.

$$\varphi^{(nq)}(x_0) = M_{nq}.$$

Для того, чтобы показать существование таких функций и яснее представить смысл введенного нами определения, мы здесь приведем нижеследующий пример подобных функций, построенных Адамаром (4). Всякая функция $\varphi(x)$, определенная бесконечным рядом

$$\varphi(x) = \sum_{m=0}^{\infty} C_m \cos mx, \quad C_m > 0, \quad (3.1)$$

очевидно, допускает производные всех порядков, если ряд $\sum_{m=0}^{\infty} C_m m^n$ будет сходиться для всех значений n . В частности, например, это будет иметь место, если положить $C_m = e^{-m^{\frac{1}{\alpha}}}$, где $\alpha > 0$.

$$\text{Ряд } \sum_{m=0}^{\infty} m^n e^{-m^{\frac{1}{\alpha}}}, \quad (3.2)$$

где n — четное число, представляет значение n -ых производных (3.1) для $x=0$ и он же является максимальным значением производных $\varphi(x)$ для любого x . Ряд (3.2), очевидно, будет величиной того же порядка относительно n , что и интеграл

$$\int_0^m m^n e^{-m^{\frac{1}{\alpha}}} dm = \alpha \Gamma[(n+1)\alpha] \dots \dots \dots (3.3)$$

Это показывает, что ряд (3.1) принадлежит к классу α и не принадлежит классу меньше чем α , по крайней мере в некотором сколь угодно малом интервале, содержащем $x=0$.

Если в ряду (3.1) положить $m=b^v$, где b целое число $\neq 1$ и $v=1, 2, 3 \dots \infty$, то порядок ряда (3.2) относительно n не изменится. В самом деле, интеграл (3.3) в этом случае принимает вид:

$$\int_0^{\infty} b^{nv} e^{-b^{\frac{v}{\alpha}}} dv = \frac{\alpha}{\lg b} \Gamma(n\alpha).$$

Теперь мы можем утверждать, что ряд

$$\sum_{v=1}^{\infty} e^{-b^{\frac{v}{\alpha}}} \cos(b^v x) \quad (3.4)$$

не может быть класса $< \alpha$ не только в окрестности $x=0$, но также в некотором конечном интервале. Потому что ряд (3.4) будет менять

только свои первые члены, когда x заменяется через $x + \frac{2l\pi}{b^k}$ при любых целых числах l и k . Очевидно, числами $\frac{2l\pi}{b^k}$ можно сколь угодно

точно приближать любое заданное действительное число.

Если теперь предположить, что сколь угодно гладкая функция $\varphi(x)$ принадлежит строго к классу $\frac{M(n)!}{H^n} \left(\alpha \leq \frac{p}{q} \right)$ в окрестности точки x_0 , то ясно, что особые точки $|t| \neq \infty$ или $+\infty$ для характеристической мажоранты при $x=x_0$, с точностью до аргумента t , будут

определять особенную точку ряда (2.6). Для случая же вещественной переменной t , очевидно, асимптотическое выражение для характеристической мажоранты и для решения, когда $t \rightarrow R \neq 0$ или $+\infty$ будут совпадать полностью.

§ 4. Согласно (2.8) при $\kappa=0$ имеем

$$|Z_0| \leq M \sum_{n=0}^{\infty} \frac{[(nq)!]^{\alpha}}{H^{nq}} \frac{|t|^{np}}{(np)!} \dots \dots \dots (4.1)$$

Введем обозначения

$$\eta = \frac{|t|^p}{H^q} \frac{1}{\delta^p} = \left(\frac{|t|}{\delta H^{1/q}} \right)^p, \dots \dots \dots (4.2)$$

$$a_n = \frac{[(nq)!]^{\alpha}}{(np)!} \delta^{np}, \dots \dots \dots (4.3)$$

где $\delta = \frac{p}{q}$ и

$$u(|t|) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \eta^n \dots \dots \dots (4.4)$$

Тогда согласно (4.1), имеем

$$|Z_0| \leq M u(|t|). *) \dots \dots \dots (4.5)$$

Радиус сходимости степенного ряда (4.4) есть

$$R = \frac{1}{\delta^p} \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\frac{(np)!}{[(nq)!]^{\alpha}}} = \begin{cases} 1, & \text{если } \alpha = \delta \\ \infty, & \text{если } \alpha < \delta \end{cases}$$

*) Для общего случая начальных данных Коши

$$\frac{\partial^k}{\partial t^k} \Big|_{t=0} = \varphi_k(x) \quad (k=0, 1, \dots, p-1)$$

зная, что

$$Z(t, x) = Z_0(t, x) + \sum_{k=0}^{p-1} \int_0^t \frac{(t-\tau)^{k-1}}{(k-1)!} \varphi_k(\tau, x) d\tau,$$

$$\text{где } \varphi_k(\tau, x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\varphi_k^{(nq)}(x) t^{np}}{(np)!} \text{ и}$$

предполагая, что все $\varphi_k(x)$ ($k=0, 1, \dots, p-1$) принадлежат одному общему классу $\alpha \leq \delta$, вместо оценки (4.5) будем иметь следующую оценку:

$$|Z| \leq M \left\{ u(|t|) + \sum_{k=1}^{p-1} \int_0^{|t|} \frac{(|t|-\tau)^{k-1}}{(k-1)!} u(\tau) d\tau \right\} \dots \dots \dots (4.5')$$

В дальнейшем, пользуясь методом, предложенным в работе (1), для каждого из двух возможных случаев в отдельности будем исследовать асимптотическое поведение характеристикой мажоранты (4.4), когда $|t|$ возрастая стремится к 1 или ∞ .

1-й случай, когда $\alpha = \delta$, т. е. $R = 1$.

В этом случае имеем

$$a_n = \frac{[(nq)!]^\delta \delta^{np}}{(np)} \quad (4.6)$$

Как показано в работе (1), асимптотическое поведение ряда (4.4) с положительными коэффициентами при $\eta \rightarrow \infty$ зависит лишь от главных частей коэффициентов его. Поэтому зная, что при $n \rightarrow \infty$

$$[(nq)!]^\delta \sim (nq)^{np + \frac{\delta}{2}} e^{-np} (2\pi)^{\frac{\delta}{2}}$$

и

$$(np)! \sim (np)^{np + \frac{1}{2}} e^{-np} (2\pi)^{\frac{1}{2}},$$

согласно (4.6), имеем

$$a_n \sim \frac{(2\pi q)^{\delta/2}}{(2\pi p)^{1/2}} n^{\frac{1}{2}(\delta-1)} \quad (4.7)$$

В зависимости от величины δ рассмотрим следующие три случая:

1. $\delta = 1$, тогда все $a_n = 1$,
2. $\delta < 1$, тогда $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$,
3. $\delta > 1$, тогда $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = +\infty$.

В I-м случае, согласно (4.2), (4.4) и (4.5) будем иметь

$$|Z_0(t, x)| \leq \frac{M}{1 - \left(\frac{|t|}{\delta H^{1/\delta}}\right)^p} \quad (4.8)$$

где знак $\sim$ обозначает, что в правой части его стоит асимптотическое выражение для характеристической мажоранты решения $Z_0(t, x)$ уравнения (2.4) при условии, когда $\eta \rightarrow 1$ или тоже самое $|t| \rightarrow \delta H^{1/\delta}$, где δ — есть вес уравнения.

Как показано в § 2 работы (1), асимптотическое выражение для ряда (4.4), когда $\eta \rightarrow 1$ в обоих остальных случаях (т. е. когда $\delta < 1$ и $\delta > 1$) будет определяться соотношением

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n \eta^n \sim c \int_0^1 a(x) dx, \dots \dots \dots (4.9)$$

где $\eta = e^{-\epsilon}$ ($\epsilon \rightarrow 0$), $a(x)$ есть положительная непрерывная функция для $0 \leq x < +\infty$ и $a(n) = a_n$ для всех $n = 0, 1, 2, 3, \dots$. Вместо $a(x)$ можно

взять также ее асимптотическое выражение при $x \rightarrow \infty$. Постоянное C определяется соотношением

$$C = \lim_{\eta \rightarrow 0} \frac{\int_0^{\infty} a(x) e^{-\eta x} dx}{\int_0^1 a(x) dx} \dots \dots \dots (4.10)$$

Как показано в работе (1), в силу того, что

$$\lim_{\eta \rightarrow 0} \frac{e}{1 - \eta} = \lim_{\eta \rightarrow 1} \frac{\ln 1 - \ln \eta}{1 - \eta} = 1.$$

Соотношение (4.9) может быть заменено через

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n \eta^n \sim C \int_0^1 a(x) dx \dots \dots \dots (4.11)$$

Согласно (4.11) и (4.7), будем иметь

$$C = \lim_{\eta \rightarrow 0} \frac{\int_0^{\infty} x^{\frac{1}{2}(\delta-1)} e^{-\eta x} dx}{\int_0^1 x^{\frac{1}{2}(\delta-1)} dx} = \Gamma\left(1 + \frac{\delta}{2}\right) \dots \dots \dots (4.12)$$

Тогда отношение (4.11) дает

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n \eta^n \sim 2 \frac{(2\pi q)^{\delta/2}}{(2\pi p)^{1/2}} \cdot \frac{\Gamma\left(1 + \frac{\delta}{2}\right)}{(1 - \eta)^{\frac{\delta+1}{2}}} \dots \dots \dots (4.13)$$

Следовательно, на основании (4.5) и (4.13), при $|t| \rightarrow \delta H^{1/\delta}$, получим

$$|Z_0(t, x)| \leq \frac{A}{\left\{1 - \left(\frac{|t|}{\delta H^{1/\delta}}\right)^p\right\}^{\frac{\delta+1}{2}}} \dots \dots \dots (4.14)$$

где

$$A = \frac{2M(2\pi q)^{\delta/2}}{(2\pi p)^{1/2}} \Gamma\left(1 + \frac{\delta}{2}\right).$$

II-й случай, когда $\alpha < \delta$ т. е. $R = +\infty$

В этом случае имеем

$$a_n = \frac{[(nq)!]^\delta \delta^{np}}{(np)!} \dots \dots \dots (4.15)$$

где $\alpha < \delta$.

Если, согласно § 5 работы (1), положить

$$a_n = e^{-\varphi(n)}, \dots \dots \dots (4.16)$$

то функция $\varphi(n)$ как раз будет удовлетворять тем условиям, которые требуются для приложимости метода Ле Руа, когда $R = \infty$, т. е. $\frac{\varphi(x)}{x} \rightarrow \infty$ при $x \rightarrow \infty$, причем $\varphi(x)$ и $\varphi'(x)$ будут возрастать неограни-

ченно, $\varphi''(x)$ будет неограниченно убывать и функция $\psi(x) = x^2 \varphi''(x)$ будет при $x \rightarrow \infty$ положительной и неограниченно возрастающей функцией. В этом случае для $\sum_{n=0}^{\infty} a_n \eta^n$ дается следующее асимптотическое выражение:

$$U(|t|) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \eta^n \sim V \sqrt{\frac{2\pi}{\psi''(\xi)}} e^{\xi \varphi'(\xi) - \varphi(\xi)} \dots \dots \dots (4.17)$$

где $\xi \rightarrow \infty$, причем ξ и η связаны соотношением

$$e^{\varphi'(\xi)} = \eta \dots \dots \dots (4.18)$$

Согласно (4.16) и (4.15), имеем

$$\varphi(x) = -\alpha \ln \Gamma(xq + 1) + \ln \Gamma(xp + 1) - xp \ln \delta.$$

Откуда, сохраняя в выражении (4.17) бесконечные малые первого порядка, надо положить*)

$$\begin{aligned} \varphi(\xi) = & -\alpha \left[\xi q + \frac{1}{2} \right] \ln \xi q + \alpha \xi q - \frac{\alpha}{2} \ln 2\pi + \left[\xi p + \frac{1}{2} \right] \ln \xi p - \xi p + \\ & + \frac{1}{2} \ln 2\pi - \xi p \ln \delta = (p - \alpha q) \xi \ln \xi + \frac{1 - \alpha}{2} \ln \xi + (p - \alpha q)(\ln q - 1) \xi + \\ & + \ln \sqrt{\frac{2\pi p}{(2\pi q)^{\alpha}}}, \end{aligned} \quad (4.19)$$

$$\varphi'(\xi) = (p - \alpha q) \ln \xi + \frac{1 - \alpha}{2\xi} + (p - \alpha q) \ln q, \quad (4.20)$$

$$\varphi''(\xi) = \frac{p - \alpha q}{\xi}. \quad (4.21)$$

В самом деле, тогда (4.17) дает

$$U(|t|) \sim \sqrt{\frac{(2\pi q \xi)^{\alpha}}{p(p - \alpha q)}} e^{\frac{1 - \alpha}{2} + (p - \alpha q) \xi} \quad (4.22)$$

Но согласно (4.18) и (4.20), имеем

$$(q \xi)^{p - \alpha q} e^{\frac{1 - \alpha}{2\xi}} = \eta.$$

*) См. пример I, § 5 работы (1)

Следовательно, при $\xi \rightarrow \infty$

$$\frac{\eta^{\frac{1}{p - \alpha q}}}{(q \xi)^{\alpha}} \rightarrow 1 \dots \dots \dots (4.23)$$

Зная, что

$$e^{\frac{c}{\xi}} = 1 + \frac{c}{\xi} + \frac{c^2}{\xi^2 2!} + \frac{c^3}{\xi^3 3!} + \dots \dots \dots$$

где $C = \frac{1 - \alpha}{2(p - \alpha q)}$ при $\xi \rightarrow \infty$ можно принять

$$\xi \sim \frac{\eta^{\frac{1}{p - \alpha q}}}{q} - \frac{1 - \alpha}{2(p - \alpha q)} \dots \dots \dots (4.24)$$

Тогда, учитывая (4.23) и (4.24), согласно (4.22) при $\eta \rightarrow \infty$ будем иметь

$$U(|t|) \sim \sqrt{\frac{(2\pi)^{\alpha}}{p(p - \alpha q)}} \eta^{\frac{1}{p - \alpha q}} e^{\left[\frac{p}{q} - \alpha \right] \eta^{\frac{1}{p - \alpha q}}}$$

откуда, зная, что $\eta = \left[\frac{|t|}{\delta H^{1/q}} \right]^p$ и полагая $\delta = \frac{p}{q}$,

$$A = M \sqrt{\frac{(2\pi)^{\alpha}}{p(p - \alpha q)}}, \text{ при } |t| \rightarrow \infty, \text{ согласно (4.5) оконча-}$$

тельно получим

$$|Z_0(t, x)| \leq A \left(\frac{|t|}{\delta H^{1/q}} \right)^{\frac{\alpha \delta}{2(\delta - \alpha)}} e^{(\delta - \alpha) \left(\frac{|t|}{\delta H^{1/q}} \right)^{\frac{\delta}{\delta - \alpha}}} \quad (4.25)$$

Полученные выражения (4.8), (4.14) и (4.25) показывают существенную роль веса δ уравнения (2.4) также в качестве основного параметра, от которого зависит асимптотическое поведение интеграла вблизи границы области его существования.

В настоящей работе наши вычисления проведены специально для уравнения типа (2.4), т. е. к этому типу относятся следующие основные уравнения математической физики

$\frac{\partial^2 z}{\partial t^2} \pm \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 0$; $\frac{\partial^2 z}{\partial t^2} \pm \frac{\partial z}{\partial x} = 0$; $\frac{\partial z}{\partial t} \pm \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 0$, для каждого из которых класс допустимых функций для начальных данных Коши, согласно приведенной нами в § 2 теореме, определяется соответствующим весом самого уравнения. А также для каждого из этих уравнений при различных начальных данных Коши эти асимптотические выражения, очевидно, механически записываются, пользуясь вышеполученными соотношениями (4.8), (4.18) и (4.25).

Было бы интересно также получить асимптотические выражения для уравнений типа (2.1) в общем случае, когда $m \neq 0$. Аналогичные результаты можно было бы, очевидно, получить и для более общих линейных уравнений типа

$$\frac{\partial^p z}{\partial t^p} - \epsilon t^m Dz = 0,$$

где $\epsilon = \pm 1$ и D некоторый линейный дифференциальный оператор вида

$$D = \sum_{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_s} A_{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_s} \frac{\partial^{\lambda}}{\partial x_1^{\lambda_1} \partial x_2^{\lambda_2} \dots \partial x_s^{\lambda_s}},$$

$A_{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_s}$ постоянные коэффициенты.

Полученные асимптотические выражения непосредственно связываются с вопросами теории роста функций, поэтому представляет интерес использовать эти соотношения и эту идею для применения теории роста функций к общему изучению поведения интегралов уравнений с частными производными в области сколь угодно гладких функций.

ЛИТЕРАТУРА

1. É. Le Roy. Valeurs asymptotiques des certains séries procédant suivant les puissances entières et positives d'une variable réelle. (Bulletin des sciences mathématiques, t. XXIV. 2 série, 1-partie, 1900).
2. Г. С. Салехов. О задаче Коши для одного класса уравнений с частными производными в области сколь угодно гладких функций (ДАН. 1948, т. LIX. № 5. Полный текст напечатан в "Известиях Каз. филиала АН СССР", т. 1, 1948).
3. М. Jevrey. Ann. Ec. Norm., 35, 3 (1918).
4. J. Hadamard. Le Problème de Cauchy, 1932, p. 33.

Поступила в редакцию
29. XI. 1948.

Сектор математики ФТИ.

Б. М. КОЗЫРЕВ, С.-Х. Г. КАШАЕВ

РЕЗОНАНСНОЕ ПАРАМАГНИТНОЕ ПОГЛОЩЕНИЕ В КРИСТАЛЛИЧЕСКИХ ПОРОШКАХ НЕКОТОРЫХ СОЛЕЙ

Cr^{+++} и Cu^{++}

§ 1. Идея магнитоспинового резонанса впервые была высказана Я. Г. Дорфманом [1]. Экспериментально резонансное парамагнитное поглощение, обязанное спинам электронных оболочек, было открыто Е. К. Завойским [2], [3], [4]. Для обнаружения его измеряется величина коэффициента парамагнитного поглощения χ'' в зависимости от напряженности постоянного магнитного поля H_0 , расположенного перпендикулярно к слабому осциллирующему полю частоты ν . Согласно Я. И. Френкелю [5], разработавшему теорию этого явления,

$$\chi'' / \chi_0 = \frac{2\nu_0\nu'}{(\nu_0^2 - \nu^2)^2 + 4\nu^2\nu'^2} \quad (1)$$

Здесь χ_0 есть статическая восприимчивость, ν' — обратная величина времени релаксации, а ν_0 представляет собой частоту прецессии Лармора:

$$\nu_0 = \frac{g\mu_0}{h} H_0. \quad (2)$$

где g есть гиромагнитный фактор, h постоянная Планка, μ_0 магнетон. В предыдущей работе одного из авторов и С. Г. Салихова [6] были приведены результаты измерений резонансного парамагнитного поглощения в кристаллических порошках CrCl_3 , MnSO_4 , $\text{CuSO}_4 \cdot 5\text{H}_2\text{O}$, $\text{CuCl}_2 \cdot 2\text{H}_2\text{O}$, $\text{Cu}(\text{NO}_3)_2 \cdot 6\text{H}_2\text{O}$ и $\text{Cu}(\text{NH}_3)_4\text{SO}_4 \cdot \text{H}_2\text{O}$ при частотах переменного поля $\nu_1 = 2,07 \cdot 10^3$ и $\nu_2 = 0,688 \cdot 10^3$ герц и при комнатной температуре. При этом были подтверждены отмеченные ранее С. А. Альтшулером, Е. К. Завойским и одним из авторов [7] два свойства экспериментальных кривых $\chi'' = \chi''(H_0)$:

- 1) Независимость полуширины δ этих кривых от частоты ν (относительно определения δ см. работу [6]) и
- 2) Сохранение при любой частоте*) условия максимума поглощения

$$\nu = \frac{g\mu_0}{h} H_0. \quad (3)$$

Кроме того, было показано, что величина

$$k = \frac{\chi''_{\max} \cdot \delta}{\chi_0 \cdot m} \quad (4)$$

*) Конечно, если эта частота достаточно высока для того, чтобы максимум поглощения был вообще наблюдаем в данном веществе.

для всех исследованных парамагнетиков имеет приблизительно одно и то же значение. В формуле (4) $\chi''_{\max}$ означает максимальное значение χ'' , m есть число граммов парамагнетика.

Как постоянство полуширины δ , так и соотношения (3) и (4) могут быть объяснены, если учесть магнитные взаимодействия в веществе. Это впервые было сделано в цитированной работе С. А. Альтшулера, Е. К. Завойского и одного из авторов [7].

В точке, занимаемой j -тым магнитным ионом, соседние ионы будут создавать внутреннее магнитное поле H_j . Поэтому условием резонанса для j -го иона будет:

$$\nu = \frac{g\mu_0}{h}(H_0 + H_j).$$

Ввиду того, что поля H_j могут иметь для разных ионов в данный момент времени всевозможные направления и величину, условием максимума суммарного поглощения, производимого всеми ионами, остается выражение (3), но кривая $\chi'' = \chi''(H_0)$ должна симметрично расширяться, причем среднее значение внутреннего поля и будет определять наблюдаемую полуширину этой кривой.

При гауссовском распределении внутренних полей для χ'' была получена [7] такая формула:

$$\chi''/\chi_0 = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \cdot \frac{\nu}{\nu_i} \left\{ \exp\left[-\left(\frac{\nu_0 - \nu}{\nu_i}\right)^2\right] + \exp\left[-\left(\frac{\nu_0 + \nu}{\nu_i}\right)^2\right] \right\} \quad (5)$$

Здесь $\nu_i = \frac{g\mu_0}{h}H_i$, причем H_i есть среднее значение напряженности внутреннего магнитного поля.

Из формулы (5) вытекают и постоянство полуширины кривых $\chi'' = \chi''(H_0)$ и соотношения (3) и (4). Приведенная формула справедлива, если $\nu_0 - \nu < \nu_i$.

Существенным в изложенной концепции является предположение, что „первоначальная“ полуширина кривой, которая имела бы место при отсутствии внутренних полей и определялась бы, согласно формуле Я. И. Френкеля (1) временем релаксации $\tau' = \frac{1}{\nu'}$, должна быть малой сравнительно с полушириной, наблюдаемой в действительности.

Согласно Я. И. Френкелю [5] τ' есть так называемое время спин-решеточной релаксации, т. е. время установления термодинамического равновесия между поглощающими энергию переменного поля спинами, с одной стороны, и тепловыми движениями в парамагнетике, содержащем эти спины, с другой стороны.

Если условиться характеризовать наблюдаемую полуширину резонансных кривых $\chi'' = \chi''(H_0)$ обратным значением некоторого времени τ'' , связанного с магнитными взаимодействиями в веществе, то основная предпосылка изложенной выше концепции может быть выражена в виде:

$$\tau'' < \tau'. \quad (6)$$

Эта предпосылка близка по смыслу к основному допущению термодинамической теории парамагнитной релаксации в параллельных полях [8], [9].

В связи с этим небезынтересно отметить, что для гидратированных солей Mn^{++} экспериментальная полуширина δ имеет порядок нескольких сот эрстед, а в отдельных случаях (например, $MnCl_2 \cdot 4H_2O$) даже больше тысячи эрстед. Это отвечает τ'' порядка 10^{-9} секунды.

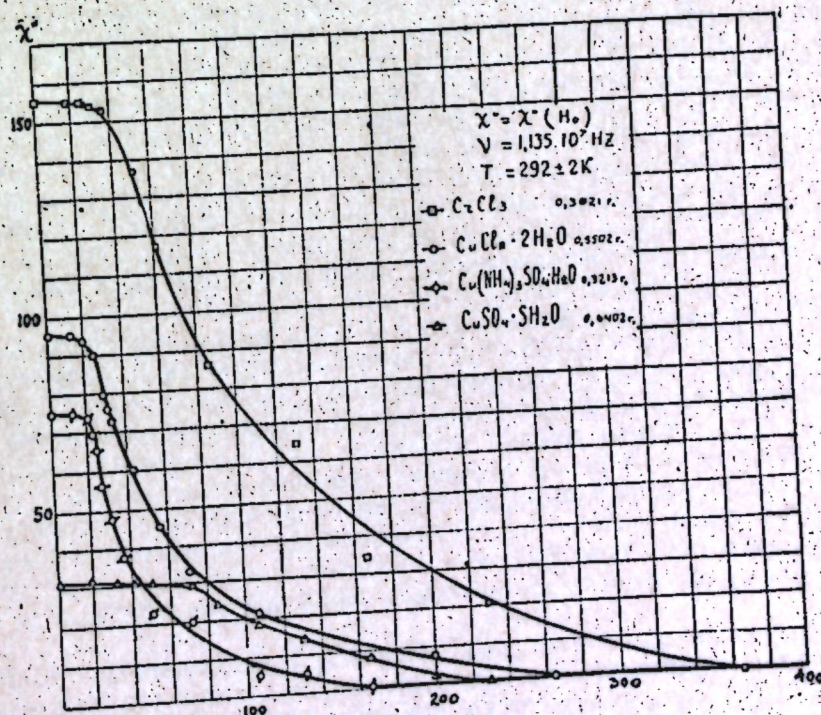
Время же спин-решеточной релаксации (определенное из опытов в параллельных полях H_0) даже при комнатной температуре для тех же солей Mn^{++} имеет порядок 10^{-7} сек, а при более низких температурах делается еще больше.

Неравенство (6), конечно, должно выполняться не всегда. Так, например, возможно, что в достаточно разведенных твердых или жидких растворах парамагнетиков в диамагнитных растворителях τ'' может стать больше, чем τ' . Тогда полуширина кривой $\chi'' = \chi''(H_0)$ должна будет определяться временем спин-решеточной релаксации τ' ; следует ожидать, что в этом случае будет иметь место зависимость δ от внешней частоты ν .

§ 2. Авторами была поставлена задача выяснить, сохраняются ли при частотах ν гораздо более низких, чем применявшиеся ранее основные резонансные черты явления парамагнитного поглощения в присутствии перпендикулярных полей H_0 . Для этой цели были предприняты измерения кривых $\chi'' = \chi''(H_0)$ при частоте осциллирующего магнитного поля $\nu = 1,315 \cdot 10^7$ герц.

Генератор переменного поля был собран по схеме Хартля на лампе С V 6. Колебательный контур состоял из емкости и катушки самоиндукции; последняя служила для измерений. Постоянное поле H_0 создавалось двумя соленоидами. Оно могло достигать 500 эрстед и обладало достаточной для наших целей однородностью в объеме, занимаемом исследуемым веществом. Метод измерения в существенных чертах не отличался от принятого в работе [6], поэтому мы не останавливаемся на его описании.

Все измерения производились при комнатной температуре ($295 \pm 2^\circ K$). Величины χ'' выражались в условных единицах. В качестве испытуемых веществ были взяты кристаллические порошки четырех следующих солей: $CrCl_3$, $CuSO_4 \cdot 5H_2O$, $CuCl_2 \cdot 2H_2O$ и $Cu(NH_3)_4SO_4 \cdot H_2O$. Химически чистые препараты этих веществ были того же происхождения, что и применявшиеся в работе [6].



Взвешенный образец каждой соли помещался в закрытой стеклянной ампуле в измерительную катушку таким образом, чтобы весь объем испытуемого вещества находился в поле катушки.

В начале каждой серии опытов снималась кривая $\chi'' = \chi''(H_0)$ для CrCl_3 (эта соль служила стандартным веществом). Вслед за тем производились измерения с другими веществами. Серия заканчивалась повторным измерением с CrCl_3 . Полученные результаты принимались во внимание лишь при условии, что обе кривые для CrCl_3 хорошо согласовывались между собой. Был произведен целый ряд таких серий опытов. Кривые $\chi'' = \chi''(H_0)$, полученные в одной из серий, приведены на чертеже (стр. 89).

Таблица дает сводку результатов всех измерений.

Таблица

Вещество	$\chi_0 \cdot 10^6$	m грамм:	δ эрстед	k условн. едн.
CrCl_3	44,3	0,3821	99 ± 5	1,00
$\text{CuCl}_2 \cdot 2\text{H}_2\text{O}$	8,35	0,5502	47 ± 5	1,01
$\text{CuSO}_4 \cdot 5\text{H}_2\text{O}$	5,9	0,6402	110 ± 5	1,14
$\text{Cu}(\text{NH}_3)_4\text{SO}_4 \cdot \text{H}_2\text{O}$	—	0,3213	25 ± 5	—

В ней приведены средние значения полуширины δ и средние значения константы k , которая для CrCl_3 была условно принята за единицу.

Необходимо добавить, что при вычислении $k = \frac{\chi''_{\text{max}} \cdot \delta}{\chi m \cdot 0}$ вместо χ''_{max} ставились значения χ'' , соответствовавшие $H_0 \rightarrow 0$ (так называемое "нулевое" поглощение), ибо при низких частотах максимум оказывается неразрешимым, что не противоречит формуле (5).

При сопоставлении полученных результатов с данными предшествовавших измерений магнитоспинового резонанса в указанных веществах [2], [3], [4], [6] видно, что полуширина кривых при частоте $\nu = 1,315 \cdot 10^7$ герц для всех четырех веществ остается примерно той же самой, что и при более высоких частотах (вплоть до частот порядка 10^9 для CrCl_3 и $\text{CuSO}_4 \cdot 5\text{H}_2\text{O}$).

Отсюда можно заключить, что среднее значение внутренних магнитных полей, определяющее полуширину резонансной кривой $\chi'' = -\chi''(H_0)$ для данного вещества, не изменяется существенным образом при изменении напряженности внешнего поля H_0 в резонансе от ~ 5 эрстед и по меньшей мере до 1000 эрстед.

Далее, таблица показывает, что значения константы k для CrCl_3 , $\text{CuSO}_4 \cdot 5\text{H}_2\text{O}$ и $\text{CuCl}_2 \cdot 2\text{H}_2\text{O}$ прекрасно согласуются между собой. Таким образом, явление магнитоспинового резонанса сохраняет свои существенные черты и при такой сравнительно низкой частоте как $1,315 \cdot 10^7$ герц. Теперь вполне очевидно, что не требуется никаких специальных гипотез для объяснения нулевого поглощения.

Для аммиаката серномедной соли величина k не была определена, т. к. мы не имеем данных по статической восприимчивости. Можно, однако, пойти обратным путем и вычислить для этой соли статическую восприимчивость с помощью формулы (4), положив в ней $k \approx 1$.

Такое вычисление дает для $\text{Cu}(\text{NH}_3)_4 \cdot \text{SO}_4 \cdot \text{H}_2\text{O}$ значение $\chi_0 \approx 6 \cdot 10^{-6}$. По порядку величины это значение не противоречит сведениям о статической восприимчивости других солей меди. Заметим, что та же величина χ_0 получается как результат измерений магнитоспи-

нового резонанса в $\text{Cu}(\text{NH}_3)_4\text{SO}_4 \cdot \text{H}_2\text{O}$ при частотах $2,07 \cdot 10^8$ и $0,688 \cdot 10^6$ герц.

ЛИТЕРАТУРА

1. Я. Г. Дорфман. *Zeits. f. Physik*, 17, 98 (1923).
2. Е. К. Завойский. Докторская диссертация, Москва, ФИАН (1944).
3. Е. К. Завойский. *ЖЭТФ*, 16, 603 (1946).
4. Е. К. Завойский. *Journ of Phys.*, X, 197 (1946).
5. Я. И. Френкель. *ЖЭТФ*, 15, 409 (1945).
6. Б. М. Козырев и С. Г. Салихов. *ЖЭТФ*, 19, 185 (1949).
7. С. А. Альтшулер, Е. К. Завойский, Б. М. Козырев. *ЖЭТФ*, 17, 1122 (1947).
8. Н. В. G. Casimir. *Magnetism and Very Low Temperatures*. Cambridge Univ. Press (1940).
9. И. Г. Шапошников. *ЖЭТФ*, 17, 824 (1947).

Поступила в редакцию
25/II 1949 г.

Сектор физики ФТИ

П. Т. СМОЛЯКОВ

К ВОПРОСУ СТАЦИОНАРНОСТИ БАРИЧЕСКОГО ПОЛЯ

Запишем уравнения движения атмосферного воздуха в форме

$$\frac{du}{dt} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + lv + \psi_1, \quad \frac{dv}{dt} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} - lu + \psi_2 \quad (1)$$

$$\text{где} \quad l = 2\omega \sin \varphi, \quad (2)$$

а ψ_1 и ψ_2 — функции, определяющие трение. Таким образом, мы ограничиваемся в настоящей статье рассмотрением только плоского движения, причем в первом приближении будем принимать, что оно характеризуется геострофическим ветром. В этом случае, как известно, приближение принимается:

$$\frac{du}{dt} = \frac{dv}{dt} = 0, \quad \psi_1 = \psi_2 = 0, \quad (3)$$

откуда

$$u = -\frac{1}{l\rho} \frac{\partial p}{\partial y}, \quad v = \frac{1}{l\rho} \frac{\partial p}{\partial x}. \quad (4)$$

Будем далее считать, что вертикальные слагающие скорости движения настолько малы, что уравнение неразрывности допустимо записать в виде

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial \rho}{\partial t} + u \frac{1}{\rho} \frac{\partial \rho}{\partial x} + v \frac{1}{\rho} \frac{\partial \rho}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0. \quad (5)$$

Подставляя сюда значения из (4) и при дифференцировании пренебрегая изменениями элементов ρ и v по широте, получаем

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = 0 \quad (6)$$

Но, как показано И. А. Кибелем [1], по первому приближению для движения типа (4) имеем

$$\frac{\partial p}{\partial t} = -\alpha(T, p), \quad \frac{\partial T}{\partial t} = \beta(T, p), \quad (T, p) = \frac{\partial T}{\partial x} \frac{\partial p}{\partial y} - \frac{\partial T}{\partial y} \frac{\partial p}{\partial x}. \quad (7)$$

А это значит, что по (6) должны выполняться условия

$$\frac{\partial p}{\partial t} = 0, \quad \frac{\partial T}{\partial t} = 0, \quad (8) \quad \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0. \quad (9)$$

В итоге мы видим, что рассматриваемое нами движение связано со стационарностью полей давления, температуры и плотности и, кроме того, оно является бездивергентным.

Несмотря, однако, на столь значительные ограничения, изучение этого типа движения интересно, так как при этом получаются важные с принципиальной стороны результаты.

Положим прежде всего, что поле является безвихревым, т. е.

$$\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} = 0. \quad (10)$$

Тогда, по (4) имеем

$$\frac{\partial^2 p}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 p}{\partial y^2} - \frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial p}{\partial x} \frac{\partial \rho}{\partial x} + \frac{\partial p}{\partial y} \frac{\partial \rho}{\partial y} \right) = 0 \quad (11)$$

Порядок величин (2) первых двух членов $10^{-12} - 10^{-11}$, а последнего $10^{-16} - 10^{-13}$, а потому можно свести (11) к уравнению Пуассона

$$\frac{\partial^2 p}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 p}{\partial y^2} = 0. \quad (12)$$

Будем искать решение в виде

$$p = p_0 + X(x) \cdot Y(y) \quad (13)$$

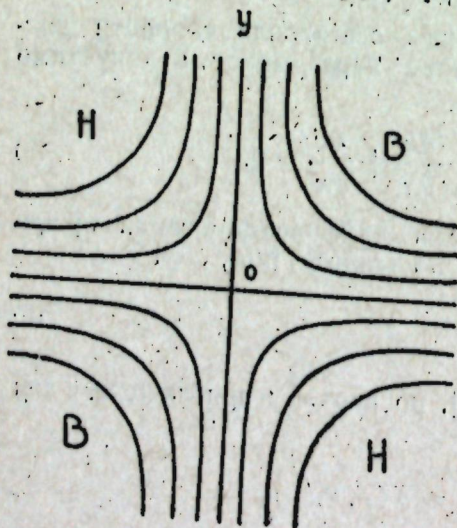
В таком случае уравнение (12) распадается на два обыкновенных уравнения

$$X''(x) \pm k^2 X(x) = 0, \quad Y''(y) \mp k^2 Y(y) = 0, \quad (14)$$

где $k^2 \geq 0$.

Полагая $k^2 = 0$, получаем решение

$$p = p_0 + c_1 x + c_2 y + c_3 xy. \quad (16)$$



Фиг. 1.

При $c_3 = 0$ мы имеем поле прямых изобар, а при $c_1 = c_2 = 0$ изобары представляются в форме четырех семейств равнобочных гипербол с гиперболической точкой в центре, т. е. кривых хорошо известных в динамической и синоптической метеорологии (фиг. 1; буквами В и Н обозначены соответственно области высокого и низкого давления).

Повертывая оси координат на 45° , мы получаем и другую известную форму выражения для давления

$$p = p_0 + a(x^2 - y^2). \quad (17)$$

Здесь абсцисса и ордината являются уже осями симметрии, а не асимптотами кривых, как на фиг. 1.

Положим теперь, что $k^2 \neq 0$. Тогда, принимая верхние или нижние знаки в (14) и введя граничные условия

$$\begin{cases} x=0, y=\text{произв.}, p=p_0 \\ y=0, x=\text{произв.}, p=p_0 \end{cases} \quad (18)$$

т. е. задавая постоянным давление по двум взаимно перпендикулярным осям, имеем, при k^2 известном, соответственно

$$\begin{cases} p = p_0 + M \sin kx \sinh ky \\ p = p_0 + M \sinh kx \sin ky \end{cases} \quad (19)$$

Здесь и в дальнейшем мы не исследуем решения более общего вида, куда входят суммы частных решений типа (18) и др.

Изобары представляются в форме разомкнутых кривых гиперболического типа, как это изображено на фиг. 2 для второго решения (19); число семейств кривых неограниченно растет по оси x для первого и по оси y для второго решения. Бесконечно велико также и число нейтральных или гиперболических точек (например, точки $O, O_1, O_2, \dots$ и $O_{-1}, O_{-2}, \dots$ на фиг. 2).

Эти решения большого интереса не представляют, так как определяемое ими барическое поле в практике синоптической метеорологии не встречается. В самом деле, мы имеем здесь дело с разомкнутыми изобарами, простирающимися в бесконечность, тогда как в действительности барическое поле определяется в основном замкнутыми кривыми. Правда, плоское поле, изучаемое нами, дает упрощенную картину, но принципиальной сущности вопроса такое упрощение не затрагивает. Даже поле, определяемое фиг. 1 или записью (17), привлекаясь в свое время усиленное внимание фронтологов и послужившее Т. Бергеру основой для его известной схемы циркуляции, действительности не отражает. Это показывает, что условие (10), т. е. принцип отсутствия вихрей для стационарности поля, повидимому, мало реален. Об этом же говорит и практика синоптического анализа.

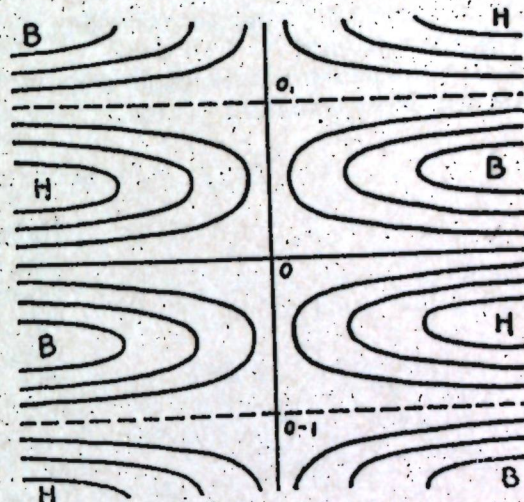
Мы применим, поэтому, другой принцип. Сделаем предположение, что при стационарности барического поля движение разворачивается так, что касательные силы сопротивления в среде или, иначе, касательные силы вязкости среды приближенно равны нулю. Для плоского движения это условие запишется в виде (при всяком μ)

$$\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} = 0. \quad (20)$$

Оно отличается от (10) лишь знаком при втором слагаемом. Из теории упругости известно, что запись (20) говорит о равенстве нулю одного компонента тензора скоростей деформации в плоскости xy .

Подставляя в (20) величины из (4) и ограничиваясь, как и в предыдущем случае, главными членами, получаем уравнение

$$\frac{\partial^2 p}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 p}{\partial y^2} = 0, \quad (21)$$



Фиг. 2.

хорошо изученное в математической физике (уравнение колебания поля). При решении его мы воспользуемся подстановкой (13), что дает

$$X''(x) \pm \kappa^2 X(x) = 0, \quad Y''(y) \pm \kappa^2 Y(y) = 0. \quad (22)$$

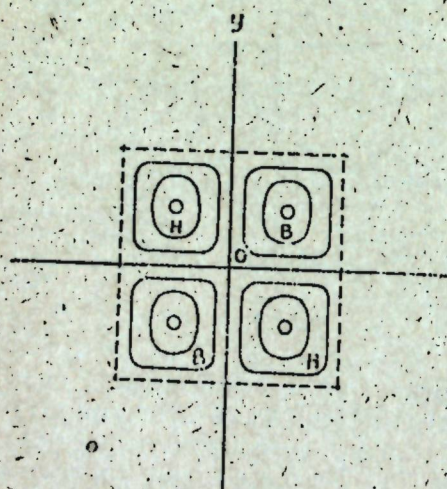
Решение при $\kappa^2 = 0$ дает известную уже нам картину (16) или (17). Не представляет интереса и решение при $\kappa^2 \neq 0$, но при нижнем знаке в (22), т. е. (при указанных выше граничных условиях):

$$p = p_0 + M \sinh kx \sin hy. \quad (23)$$

Здесь изобары — кривые гиперболического типа с асимптотами — осями координат.

Рассмотрим поэтому уравнение (22) при верхнем знаке. Тогда, при тех же граничных условиях, мы получаем

$$p = p_0 + M \sin kx \sin ky. \quad (24)$$



Фиг. 3.

Найденное решение представляет уже существенный интерес (фиг. 3). Во-первых, здесь мы имеем замкнутые изобары (типа ячеек Бенара [4]), причем они близки к окружностям в центральных частях, но с приближением к осям раздела ($kx = \pi, 2\pi, 3\pi, \dots$ и $ky = \pi, 2\pi, 3\pi, \dots$) переходят в квадраты. Во-вторых, система чередующихся областей высокого и низкого давления как раз и отображает ту схему зубчатых колес циркуляции, которая была на основании практики установлена Т. Бержероном.

Конечно, схема Бержерона удовлетворительно оправдывается в действительных условиях лишь при значительном осреднении (напри-

мер, за отдельные сезоны года), как это и следует из собственных его трактовок вопроса [3]. Однако, небезынтересно отметить, что при установлении на большой территории относительно мало меняющейся местной погоды схема зубчатых колес на ней осуществляется. Это подтверждается, в частности, методом сборных карт. Отсюда следует, что условие (20) является, повидимому, важным фактором, поддерживающим стационарность (вернее квази-стационарность) барического поля. Следует только заметить, что общепринятый термин наименования точек пересечения осей координат или осей раздела, как гиперболических точек, уже не уместен; для таких точек более приемлемо другое название — также известное, но менее употребительное — нейтральные точки.

Легко показать, что линии тока в нашем случае совпадают с изобарами

$$\sin kx \sin ky = c. \quad (25)$$

Что касается изотерм, то при условии (7) распределение температуры представляется в общем виде

$$T = T_0 + \psi(\sin kx \sin ky) \quad (26)$$

или в простейшем и частном случае

$$T = T_0 + N \sin kx \sin ky. \quad (27)$$

Мы имеем, таким образом, совпадение изотерм с изобарами.

Конечно, наше решение по методу (13) и при граничных условиях (18) с заранее заданным k^2 отображает лишь частный случай распределения стационарного барического поля, хотя этот случай и находит удовлетворительную оправдываемость на практике. Применяя методы Даламбера или Фурье можно было бы получить и ряд новых решений в зависимости от различных граничных условий.

Чтобы получить некоторое представление о других возможных частных решениях полезно представить интеграл уравнения (21) в виде ряда, разложенного по двум независимым переменным x и y . Определяя его коэффициенты сравнением, получаем (ограничиваясь первыми членами ряда)

$$p = p_0 + c_1 x + c_2 y + c_3 xy + c_4 (x^2 + y^2) + \dots + c_5 x (x^2 + 1 \cdot 3y^2) + c_6 y (y^2 + 1 \cdot 3x^2) + \dots \quad (27)$$

Отсюда видно, в частности, что помимо прямолинейных и гиперболических изобар мы видим и круговые циклонального или антициклонального типа.

Решение (24) уравнения (20) определяет в основном незональную циркуляцию (за исключением весьма частных случаев изобарии и прямолинейных изобар в широтном направлении). Мы склонны думать, что здесь решающую роль играет подстилающая поверхность в связи с ее термикой (прогревание и охлаждение). Чистая адвекция тепла или холода здесь исключается, так как она, несомненно, вызывает нарушение стационарности барического поля. Но в таком случае возникает вопрос: обязательно ли, чтобы характер подстилающей поверхности благоприятствовал каждому из четверки колес циркуляции для их устойчивости? Строго говоря, конечно, это так. Однако можно показать, что задание одного колеса вполне определяет и 3 прочих. Отсюда следует, что если создаются в какой-либо зоне весьма благоприятные условия для образования по соседству одного устойчивого и активного колеса, то в соответствующих направлениях возникнут дополняющие схему три прочие, даже при наличии некоторых заметно препятствующих им факторов (например, в летнее время на суше может длительное время существовать антициклон, а на море пассивный циклон типа термической депрессии).

Отметим еще, что наше стационарное барическое поле является вихревым. В самом деле,

$$\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{2Mk^2}{lp} \sin kx \sin ky \neq 0, \quad (28)$$

причем изолинии вихренности совпадают с изобарами. Наибольшая (по абсолютной величине) вихренность констатируется в центрах колес, а на осях раздела она обращается в нуль.

Что касается принятия допущения, что вертикальные слагающие в нашем движении малы, то это вполне правдоподобно при преобладающем его характере по типу геострофического ветра. В самом деле, отброшенные нами члены в уравнении неразрывности дают нам добавочное условие

$$\frac{w}{p} \frac{\partial p}{\partial z^2} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0, \quad (29)$$

откуда получаем

$$\rho w = \text{const.}, \quad (30)$$

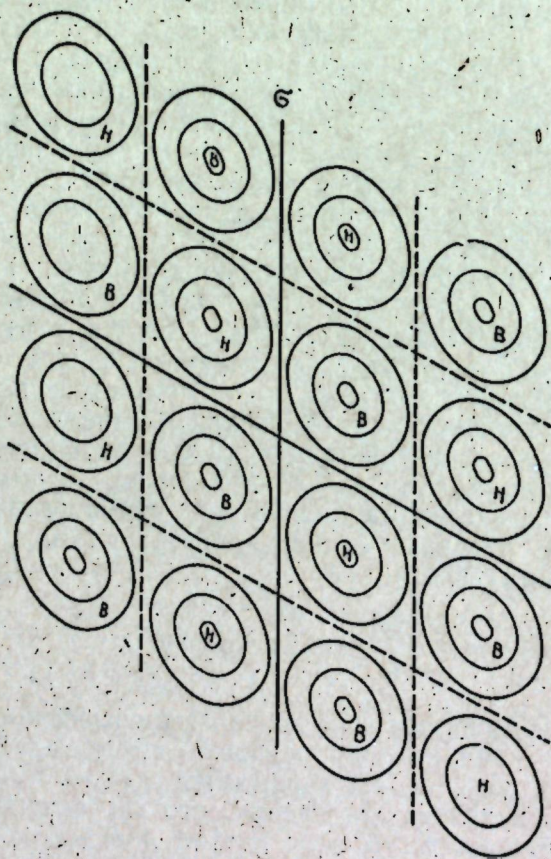
причем, очевидно, $w = 0$. Однако всякое отклонение движения от геострофического немедленно вызывает нарушение и появляются вертикальные слагающие.

В связи с этим рассмотрим барическое поле при том же условии (20), но ветер определим с учетом факторов трения ψ_1 и ψ_2 , представив выражение скорости в виде

$$u = -\frac{1}{\rho l} \frac{\partial p}{\partial y} - \alpha \cdot \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x}, \quad v = \frac{1}{\rho l} \frac{\partial p}{\partial x} - \alpha \cdot \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y}. \quad (30)$$

Такая интерпретация правдоподобна и вполне логична, так как отклонения от геострофического ветра за счет трения связаны с конвергенцией потоков в сторону пониженного давления, что записями (30) как раз и определяется (коэффициент α постоянный). Подставляя (1) и (30) в (20) и пренебрегая, как и раньше, членами меньшего порядка, получаем

$$\frac{\partial^2 p}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 p}{\partial y^2} - \beta \frac{\partial^2 p}{\partial x \partial y} = 0, \quad \beta = 2\alpha l. \quad (31)$$



Фиг. 4.

Уравнение (31) при переходе к новым независимым переменным

$$\psi = x, \quad \sigma = ax + by \quad (32)$$

приводится к типу (20)

$$\frac{\partial^2 p}{\partial \psi^2} - \frac{\partial^2 p}{\partial \sigma^2} = 0 \quad (33)$$

при значениях

$$a = \frac{1}{2} \beta (1 + 1/4 \beta^2)^{-1/2}, \quad b = \beta (1 + 1/4 \beta^2)^{-1/2}. \quad (34)$$

Если принять аналогичные (18) граничные условия, но осями раздела считать $x=0, y=-\frac{a}{b}x$, то мы получим решение

$$p = p_0 + M \sin kx \sin k(ax + by). \quad (35)$$

Графически оно представляется также системой замкнутых изобар (фиг. 4) со скошенными осями раздела, и некоторой ассиметрией в смежных углах. Вместе с тем, колеса циркуляции имеют теперь вид эллипсообразных кривых, большие оси которых параллельны большим диагоналям отграничивающих колеса ромбов. При $x=0$ и $y=\beta x$ изобары очерчивают стороны этих ромбов. На рис. 4 для простоты изобары изображены концентричными эллипсами.

Решение (34) связано уже с дивергентным движением, что легко проверить. Очевидно, в таком случае, что для выполнения условий стационарности барического поля необходимо наличие вертикальных потоков, причем в первом приближении

$$w = \frac{\alpha}{\rho} \int_0^x \left(\frac{\partial^2 p}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 p}{\partial y^2} \right) dx.$$

Подставляя сюда значение из (36) мы убеждаемся, что наибольших по абсолютной величине значений вертикальные потоки достигают в центрах колес, причем в циклонах они положительные (восходящие потоки), в антициклонах отрицательны (нисходящие потоки), а на осях раздела $w=0$. Одновременно следует отметить, что в отличие от решения (24) мы здесь имеем межколесный обмен воздуха (потоки из антициклона проникают в циклонные области). Для циркуляции воздуха при некоторых колебательных смещениях колес (квазистационарность) такой обмен должен играть существенную роль.

Приложение полученных здесь решений к ряду конкретных вопросов синоптической метеорологии будет нами дано в другой работе.

ЛИТЕРАТУРА

1. И. А. Кибель. Известия АН СССР, серия геофиз. и геогр., 5, 1940.
2. Б. И. Извеков и Н. Е. Кочин (ред.) Динамическая метеорология. Ленинград, ч. I, 1935.
3. Т. Бергерон. Трехмерно-связный синоптический анализ, Москва, ч. I, 1934.
4. Д. Брент. Физическая и динамическая метеорология, Ленинград, Москва, 1938.

Поступила в редакцию
6-XII 1948.

Сектор геофизики
и астрономии

И. Т. СМОЛЯКОВ, С. С. ИБАТУЛЛИНА

МИКРОКЛИМАТИЧЕСКИЕ НАБЛЮДЕНИЯ В ЗОНЕ ПОБЕРЕЖЬЯ Р. ВОЛГИ В ЛЕТНИЙ ПЕРИОД

Настоящее исследование является первой попыткой в области изучения микроклимата на территории Татарской республики. В работе освещаются материалы наблюдений, проведенных двумя экспедициями Физико-технического Института Казанского филиала Академии наук в 1947 и 1948 годах. Из них первая имела объектом изучения приволжскую зону в окрестностях г. Тетюши, а вторая тоже приволжскую зону, но в районе с. Верхний Услон. Обе экспедиции были кратковременными: месячная в Тетюшах (июль 1947 г.) и двухнедельная в В.-Усломе (11—24 июня 1948 г.); к тому же, как увидим дальше, погода не вполне благоприятствовала наблюдениям и период работы в действительности еще более укоротился.

Непосредственными целями и задачами экспедиций являлось изучение метеорологического режима приземного слоя воздуха в весенне-летнее время и, особенно, в дни с ярко выраженными конвективными процессами. Такая установка была принята в связи с проводившейся в течение 1946—1948 гг. исследовательской работой по проблеме засух в Татарской АССР. При изучении засух приходится, как известно, решать две задачи: выявления макроклиматических процессов, обуславливающих и вызывающих засухи, и выявления развивающихся на этом фоне процессов в приземном слое воздуха. Последняя задача является наиболее трудной, так как здесь необходимо учитывать огромное многообразие факторов чисто местного значения, главнейшими из которых являются рельеф и ландшафт местности.

Трудность изучения процессов в приземном слое воздуха (иначе микроклимата) состоит, между прочим, и в том, что методика исследований разработана пока недостаточно (если не сказать больше). Несмотря на довольно значительную литературу по микроклиматическим наблюдениям, общие методологические установки имеют и до настоящего времени только ориентировочный характер. Их конкретизация—дело самих исследователей, проводящих наблюдения в тех или иных зонах и с теми или иными целями и задачами.

В отношении наших экспедиций трудности усилились благодаря скромности оборудования, которым мы располагали. Помощь в отношении оборудования была оказана кафедрой геофизики Казанского государственного университета; тем не менее, задачи, поставленные перед экспедициями, пришлось ограничить.

Исходя из изложенного, в настоящей работе мы приводим немного выводов. Они носят предварительный характер, хотя в общем достаточно обоснованы и оказывают, несомненно, помощь в выявлении микроклиматических особенностей изучаемой нами зоны. Эти выводы будут полезны и при разрешении задач, связанных с изучением засух.

Обе экспедиции возглавлялись руководителем геофизической группы Физико-технического Института профессором И. Т. Смоляковым. В составе экспедиции работали: младший научный сотрудник А. Я. Порсева (1947 и 1948 гг.), лаборанты С. С. Ибатуллина и Н. В. Митянина (1948 г.) и наблюдатель—студентка практикантка Казанского университета Е. В. Чемалина (1947 и 1948 гг.).

1. Общая характеристика экспедиционных наблюдений

а) *Тетюшская экспедиция 1947 г.* Она была первой, предпринятой геофизической группой Физико-технического Института по изучению микроклимата, и явилась поэтому лишь предварительной (рекогносцировочной). В процессе ее проведения по существу ледащупывались пути и методы работы для достижения указанных в введении задач. Исследования проводились по методу маршрутно-синхронных съемок в районе города Тетюши.

Город Тетюши ($\varphi = 54^{\circ}56'$ с. ш., $\lambda = 48^{\circ}59'$ в. д.) — районный центр ТАССР, в 130 км от Казани, расположен на высоком правом берегу Волги. Высота над уровнем моря занимаемой им территории около 150—170 м. Окружающая местность — сильно всхолмленное плато с резким обрывом на восток к р. Волге и с относительно слабой покатостью на запад к долине р. Улемы (приток р. Свияги) — см. схематический план рис. 1. Наблюдениями охватывались как правый

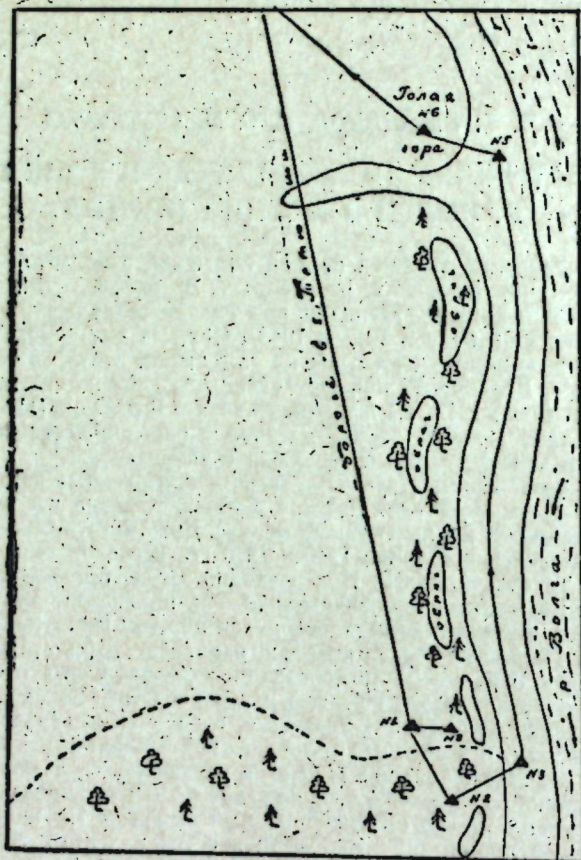


Рис. 1.

высокий, так и левый луговой берега Волги. Выбор пунктов наблюдений проводился с учетом рельефа, ландшафта и экспозиции местности. Приведем краткую характеристику этих пунктов.

Пункт 1. Выбран на поляне около леса в 2 км к югу от г. Тетюши (см. схематический план — рис. 1). Высота пункта над уровнем р. Волги — около 123 м. Поляна совершенно открыта с севера и запада. На расстоянии 50—60 м, к западу от места наблюдения простираются колхозные поля (овес, картофель). В 45—50 м на юг от него поляна, ограниченная смешанным лесом с преобладанием лиственных пород. К востоку, в 30—35 м, находится обрывистый спуск к Волге, представляющий собою глубокий овраг, поросший смешанным лесом. В период наблюдений поляна была покрыта старой поскошенной травой (прошлого года подстилка) вместе с редкой травянистой зеленью этого года.

Пункт 2. Выбран на небольшой лесной поляне, перерезанной канавами (глубиной около 1 м); поляна покрыта редкой травой на довольно плотной подстилке прошлого года. Пункт располагался примерно в 60 метрах от северной границы леса. Лес, окружающий поляну, довольно редкий. Размер площади, занятой им, не велик

(около 1,5—2 кв. км.). К югу и востоку от пункта наблюдений имеются глубокие лесные овраги. На поляне почти всегда тень от кроны деревьев, в виду чего солнечные лучи только отчасти сюда проникают.

Пункт 3. На поляне в ложбине, примерно на 28—30 метров ниже верхнего пункта № 1. С запада поляна ограничена обрывистым склоном (угол наклона 60—70%), покрытым невысокой травой; с восточной стороны она граничит с крутым, заросшим смешанным лесом, обрывом к Волге. Таким образом, пункт расположен в котловине, окруженной с западной стороны — возвышенностью, с восточной — лесом. Ландшафт ложбины — невысокая трава на подстилке прошлого года.

Пункт 4. Непосредственно на берегу Волги. Места замеров располагались в 10 метрах от бровки реки и в 50 м от подножья горы, т. е. крутого, поднимающегося до высоты 120—130 м над уровнем Волги берега, перерезанного глубокими оврагами, поросшими высоким и довольно густым лесом. Почва в зоне пункта — мелкий камень, перемешанный с песком.

Пункт 5. Также на берегу Волги, 1,5 км от пункта № 4 вверх по течению реки, почти у самого города и вместе с тем у подножья береговой террасы и так называемой Голой горы. От подножья горы почти до самой воды берег покрыт зеленой травой.

Пункт 6. На вершине Голой горы, примерно, в полукилometре к юго-востоку от г. Тетюши, на высоте 115 м над уровнем Волги (пик горы лежит несколько ниже, чем город). Площадка, на которой производились наблюдения, покрыта мелкой редкой травой типа „гусиная травка“ и совершенно открыта для доступа ветра и солнца (за некоторым исключением лишь для ветра северо-западных румбов).

Экспедиция работала в г. Тетюши с 2 по 31 июля 1947 г. За этот период в течение 7 дней стояла пасмурная и дождливая погода, 15 дней — облачная (около 80—90% покрытия неба) без осадков; таким образом благоприятствующих для наблюдений было всего 22 дня.

Погоду июля месяца 1947 г. в целом можно охарактеризовать как прохладную с большим дефицитом осадков. Действительно, по данным Казанской университетской метеорологической обсерватории средняя месячная температура была 17.3° (средняя многолетняя 19.4°), минимальная температура в начале первой декады доходила до 5.7° . Сумма осадков за месяц равнялась 30 мм при норме в 61 мм. Отметим еще, что первая декада и вторая половина третьей декады характеризовались большой неустойчивостью, частыми вторжениями холодных масс воздуха. Наиболее благоприятной для экспедиционных работ оказалась вторая декада месяца, когда преобладала малооблачная погода.

Объектами наблюдения были метеорологические элементы: температура и влажность воздуха, а также ветер (направление и скорость).

Инструментарий экспедиции:

1. Анероид-высотомер — 2
2. Ручные анемометры Фусса — 3
3. Психрометр Ассмана — 2 (большая и малая модель)
4. Термометр прашевой — 1
5. Термометр Савинова — 1 комплект
6. Рулетка.

Психрометрические наблюдения производились на высотах: 0,5, 10, 50 и 100 сантиметров над поверхностью почвы. В работе использовались оба психрометра (б/м и м/м), которые последовательно

перемещались по высоте в прямом и обратном порядке. В каждой съемке мы делали три серии отсчетов.

Анемометрические наблюдения производились на высотах: 0,5, 1,0 и 1,5 метра. Приборы устанавливались на тонких деревянных шестах соответствующей длины.

б) Верхне-Услонская экспедиция.

Исследования во второй экспедиции (в июне 1947 г.) проводились в районе села В.-Услон ($\varphi = 55^{\circ}45'$ с. ш., $\lambda = 48^{\circ}58'$ в. д.) методом синхронных съемок.

Село Верхний Услон (районный центр ТАССР) расположено в 10 км к юго-западу от Казани на правом берегу реки Волги у подножья прибрежных Услонских гор. На основании опыта экспедиции 1947 г. было признано целесообразным сосредоточить наблюдения на небольшом числе пунктов, а именно на трех. Приводим краткую их характеристику.

Пункт 1. Небольшая совершенно ровная площадка на одной из вершин прибрежных гор на высоте 110 метров над уровнем реки Волги, в полукилометре от села (см. рис. 2). От площадки к се-

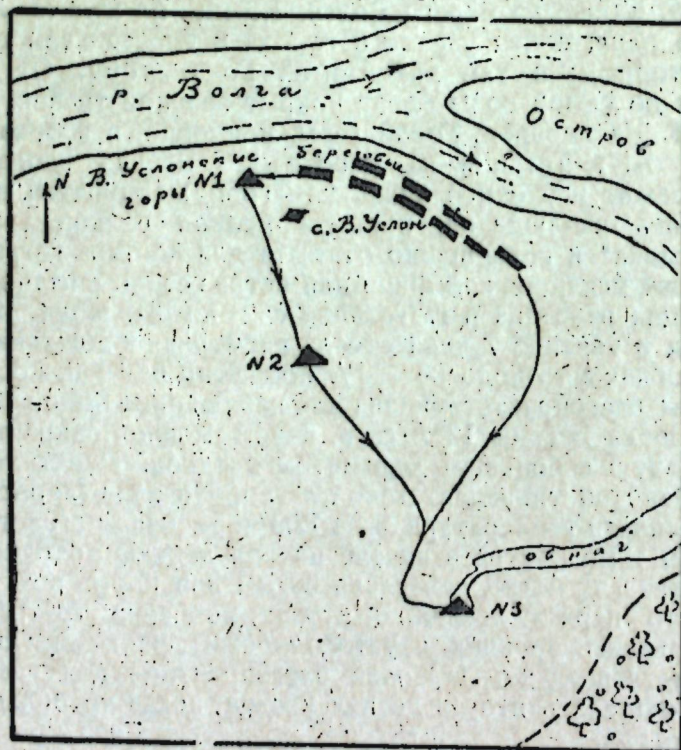


Рис. 2.

веро-западу располагается скат и далее более низкий холм; к северу — крутой скат к реке с отдельными небольшими террасами; к западу и востоку метрах в 30 — более пологие скаты. Ландшафт площадки — очень низкая мелкая и редкая трава. Наиболее характерным для пункта наблюдений является его полная открытость, доступность ветрам любых румбов. Именно, в целях изучения скорости ветра на ветрооткрытых возвышенностях такой пункт и был выбран.

Пункт 2. Небольшая поляна на расстоянии 1 км от села В. Услон на восточном, достаточно пологом склоне прибрежного холма на месте бывшего фруктового сада, вырубленного после гибели плодовых деревьев в зиму 1941—42 г. Высота пункта над уровнем р. Волги — 90 м. Поляна покрыта зеленой травой средней высоты и с трех

сторон горизонта — с севера, востока и юга — ограничена обработанными участками земли (картофельные поля).

Пункт 3. Участок на пониженном месте за прибрежным холмом, на расстоянии 4 км к юго-востоку от села (рис. 3). Он охватывал

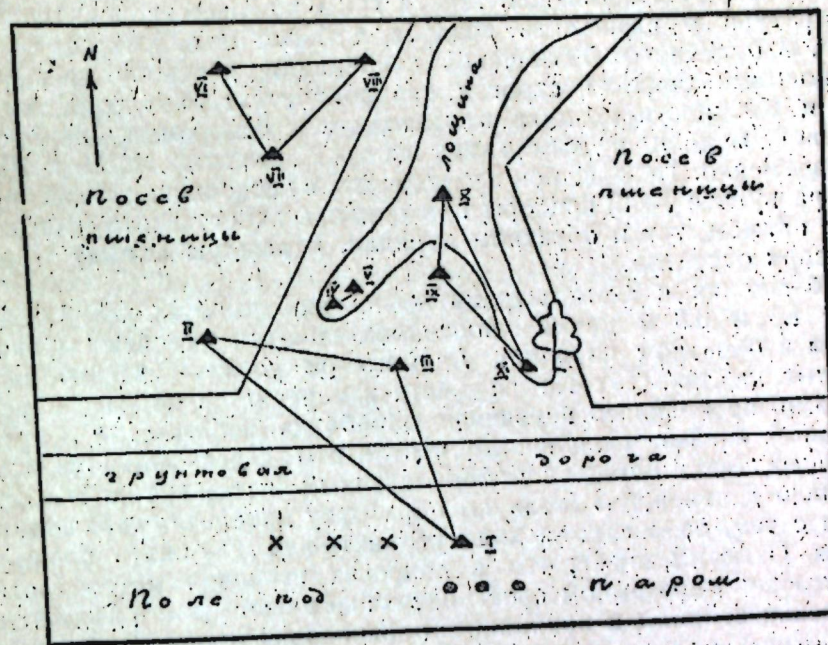


Рис. 3.

часть поля с посевом пшеницы, затем край большого поля, оставленного под пар, и две неглубокие ложины. Последние направлены под углом друг к другу, а на расстоянии 4—5 метров от их тупиков они соединялись и постепенно переходили в глубокий овраг, поросший кустарником. Склоны ложин в период наблюдений были покрыты травой — ягодником. На западном склоне одной из ложин местами отмечался редкий и низкий кустарник — шиповник; в тупике этой же ложины имелись небольшие заросли ежевики, а в тупике другой находилось одинокое дерево вяз, дававшее тень на склоны тупика в дополненные часы.

Наблюдения на пункте № 3 производились в нескольких точках: над паром, в посеве пшеницы (в трех точках одновременно), в ложине (в более открытой части ее и в тени вяза), на бугре, образовавшемся между двумя ложинами и в кустах ежевики.

Экспедиционные исследования в районе села В.-Услон проводились в течение лишь двух недель с 11 по 25 июня 1948 г. За это время 2 дня характеризовались сплошной облачностью, 6 дней со значительной (7—9 баллов) и 4 дня с небольшой. В результате, наблюдения на пунктах проводились фактически только в течение 11 дней.

Погода за этот период, как и за июнь месяц в целом, характеризовалась высокими температурами и значительной засушливостью. Так, средняя месячная температура была 23.3° (средняя многолетняя 17.4), причем, в течение 17 дней дневные максимумы превышали 30° . Сумма осадков за месяц равнялась 35.9 мм (т. е. $\frac{2}{3}$ нормы). Характерно также, что осадки были непродолжительными типа ливневых, т. е. малой эффективности.

Высокие температуры месяца обуславливались выносом к ТВ по западной периферии антициклона, расположенного за Уралом. Относительно пониженные температуры наблюдались лишь в конце первой

и в начале второй декады месяца. Погода с 16 по 22 июня (наиболее интенсивный период работы экспедиции) определялась процессами в теплом секторе обширной циклопической системы, расположенной над ЕТС и характеризовалась значительной неустойчивостью.

Объектами исследования, так же как и в первой экспедиции, были: температура и влажность воздуха, а также температура почвы и ветер. В отличие от Тетюшской экспедиции, в основу наблюдений был положен принцип строгой синхронности. Наблюдения температуры и влажности воздуха производились психрометрами Ассмана большой модели и измерялись на трех высотах (0, 50 и 100 см) одновременно. Правда, при наблюдениях в нескольких точках (например, на пункте № 3) приборы приходилось переставлять по высотам, как в прямом, так и обратном порядке. В каждую съемку делалось три серии отсчетов.

Наблюдения с анемометрами велись на 5 высотах: 0,5, 1,0, 1,5 м и 0,1, 1,5 и 3,0 м двумя последовательными сериями (также в прямом и обратном порядке). Анемометры устанавливались на деревянных шестах. Тут же на месте измерений, в перерыве между съемками, проводилась первичная обработка наблюдений и предварительный анализ. Полученные результаты классифицировались по отдельным типам погоды и по определенным частям суток. Это очень облегчило дальнейшую (полную) обработку материала наблюдений и, вместе с тем, позволяло на ходу уточнять или улучшать первичные выводы. Отметим также, что в вопросах изучения метеорологических условий в приземном слое воздуха на первое место выдвигались физические стороны и причинное обоснование процессов на общем фоне погоды, однако вместе с учетом эффекта местного характера (рельеф и ландшафт).

2. Результаты наблюдений и выводы

а) Температура.

Анализ температурных наблюдений говорит прежде всего о том, что психрометры Ассмана вполне применимы для микроклиматических исследований и дают надежный материал. Рассмотрим результаты температурных наблюдений в отношении выявления распределения температур по высотам, особенности этого распределения и зависимость его от скорости ветра и облачности.

Изменение температуры по вертикали мы будем характеризовать разностью температуры Δt на высотах 0—5 см, 5—10 см, 10—50 см, 50—100 см по первой экспедиции и 0—50 и 50—100 см — по второй. Приводим особенности распределения $|\Delta t|$ по высотам на отдельных участках (табл. 1—V относятся к Тетюшской экспедиции).

1) На участках вблизи леса (вне леса).

Значение $|\Delta t|$ существенно велико до высоты 10 см, и выше резко уменьшается. В среднем здесь мы имеем: $|\Delta t|_{0-10} \approx 4^{\circ}5-2^{\circ}1$; $|\Delta t|_{10-100} \approx 0^{\circ}3-0^{\circ}2$ как это видно из прилагаемой таблицы 1.

Таблица 1.

Число и время наблюдений	По интервалам высот				К-во обл. и форма	Пункт наблюдений
	0—5	5—10	10—50	50—100		
18.VII.47 11 ¹⁵	—4.0	0.1	—0.6	—0.4	5/10 Cl Ac	№ 1 (поляна около леса)
18.VII.47 11 ³⁰	—4.5	—0.9	—0.8	—0.8	3/10 Cl Cs Cg	

Продолж. табл. 1.

Число и время наблюдений	По интервалам высот				К-во обл. и форма	Пункт наблюдений
	0—5	5—10	10—50	50—100		
21.VII.47 10	—2.8	—2.2	—0.8	—0.5	6/4 Ac Sc Cu	№ 4 (берег Волги)
21.VII.47 10 ¹⁵	—3.7	—0.2	—0.8	—0.3	4/1 Ac Cu	"
31.VII.47 10 ⁴⁰	—3.4	—1.4	—0.4	—1.6	3/2 Cl Cu	"
31.VII.47 10 ²⁰	—4.5	—0.6	—1.2	—0.9	3/2 Cl Cu	"
23.VII.47 12 ⁰⁰	—2.8	—2.1	—0.2	—0.0	6/4 Ac Sc Cu	№ 2 (поляна в ложбине)

2) В лесу $|\Delta t|$ по всем интервалам высот имеет небольшое значение в среднем порядка $0,2^{\circ} - 0,3^{\circ}$ (табл. 2).

						Таблица 2
						Пункт № 2 (лес)
18.VII.47 8 ⁴⁴	0.1	0.3	0.6	0.5	5/1 Cl Ac Sc	Левый берег Волги, кусты
18.VII.47 12 ⁴⁵	0.2	0.8	0.2	—0.2	5/1 Cl Ac Sc	
19.VII.47 8 ⁴⁵	—0.2	0.4	0.2	0.0	8/10 Ac As	
21.VII.47 8 ³⁰	0.3	0.2	0.7	0.1	3/2 Ac Cu	
19.VII.47 9 ²⁰	0.1	0.3	0.1	0.3	7/10 Ac	
23.VII.47 11 ²⁰	0.2	0.0	0.4	—0.2	6/4 Ac Sc Cu	
28.VII.47 10 ²⁵	0.5	0.0	0.0	0.0	3/3 Cu	
28.VII.47 10 ⁴⁰	0.2	0.2	0.8	0.0	3/8 Cu Sc	
31.VII.47 10 ¹⁵	1.5	0.2	0.4	—0.5	3/2 Ac Cu	
31.VII.47 10 ³⁵	0.7	0.3	0.0	—0.3	3/2 Ac Cu	
24.VII.47 13 ⁰⁰	0.3	0.3	0.1	0.1	5/4 Ac Sc Cu	
24.VII.47 13 ¹⁶	0.5	0.4	0.1	—0.1	5/4 Ac Sc Cu	
24.VII.47 10 ⁰³	0.0	0.0	0.0	0.0	3/2 Cu	

3) Внутри растительного покрова, при достаточной высоте последнего, $|\Delta t|$ мало и увеличивается над ним, с последующим, однако, уменьшением (табл. 3).

Таблица 3.

Число и время наблюдений	По интервалам высот				К-во обл. и форма	Пункт наблюдений
	0—5	5—10	10—50	50—100		
26.VII.47 16 ³⁰	—0.7	—0.1	—1.2	—0.4	4/4 Cu	Овес (высота 50—60 см)
26.VII.47 16 ³⁵	0.0	—0.4	—1.4	—1.2	4/4 Cu	Овес (высота 60—70 см)
27.VII.47 11 ³⁰	—0.4	—0.1	—1.0	0.0	8/8 Cu Cong	
31.VII.47 12 ³⁰	0.0	—0.2	—0.2	—0.6	9/8 Ac Cu	

4) В безоблачные дни $|\Delta t|$ возрастает к полудню на всех участках и особенно велико его значение в интервале высот 0—5 см (табл. 4а и 4б).

(в интервале 0—5 см 18.VII. 1947 г.)

Таблица 4а

Время	9 ³⁰	10 ³⁰	11 ¹⁵	11 ³⁵	12 ⁴⁵
Пункт					
№ 1 (поляна)	—2.0	—2.9	—4.0	—4.5	—5.0

(в интервале 0—5 см. 21.VII. 1947 г.)

Таблица 46

Время	8 ³⁰	9 ¹⁰	10 ¹⁵	Время	8 ³⁰	9 ³⁵	10 ¹⁵
Пункт				Пункт			
№ 2 (лес)	0.3	0.6	-1.4	№ 1 (поляна)	-1.5	-1.8	-3.7

5). С увеличением облачности и усилением ветра $|\Delta t|$ уменьшается, а Δt может даже изменить знак (см. табл. 5 и чертеж 1).

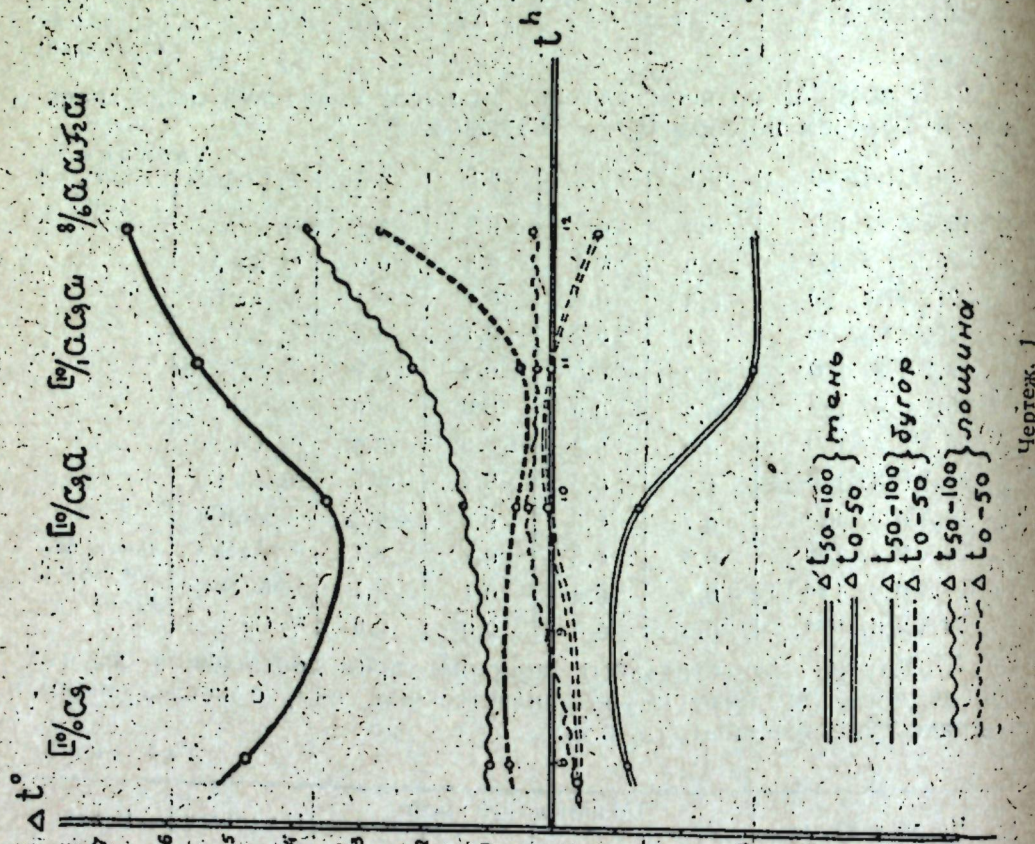


Таблица 5

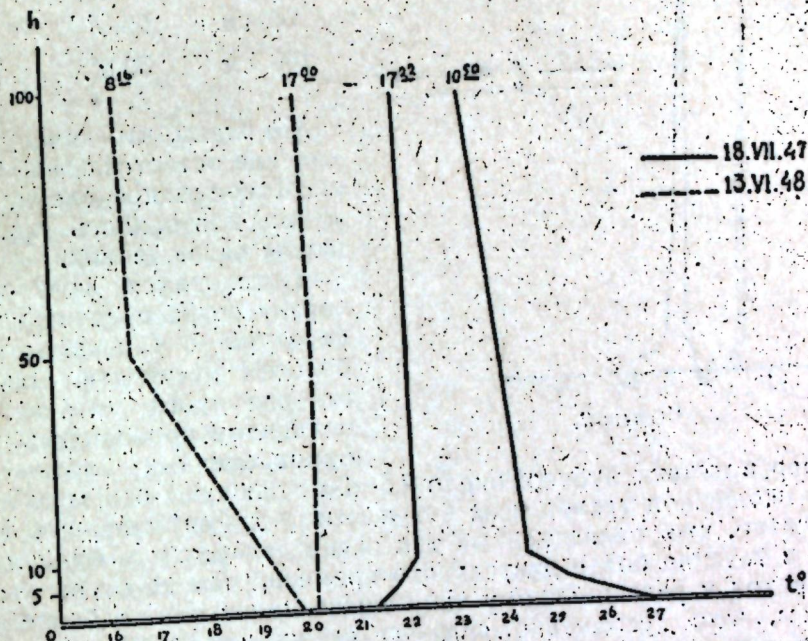
Число и время наблюдений	По интервалам высот				К-во и форма обл.	Ветер	Пункт наблюдений
	0—5	5—10	10—50	50—100			
21.VII.47 10 ¹⁵	-0.4	-0.2	-0.3	-0.3	3/2 Ac Cu	Тихо	№ 2
23.VII.47 11 ⁰⁰	0.2	0.3	0.2	0.3	8/5 Ac Cu		
31.VII.47 10 ⁰⁰	-3.4	-1.4	-0.4	-1.6	3/2 Cu	ESE-2 м/с	№ 1
31.VII.47 11 ³⁰	-2.4	-0.2	-0.6	-0.1	9/8 Ac Cu	ESE-2 м/с	
19.VII.47 11 ⁰⁰	-0.6	-0.6	-0.0	-1.0	9/0 Ac As	E-3-4 м/с	№ 4
21.VII.47 11 ⁰⁰	-2.8	-2.2	-0.8	-0.5	6/4 Ac Cu	NE-1 м/с	

Таковы основные особенности распределения температуры в приземном слое воздуха.

Остановимся теперь на различных типах распределения температуры.

В лесу (на лесной поляне) повышение температуры с высотой наблюдается почти для всех сроков до полудня, т. е. здесь характерен радиационный тип распределения (табл. 2). Для открытых же

мест вне леса, а именно: поляны около леса, берега Волги, Голой горы, Услонской горы и др.—характерно, наоборот, понижение температуры с высотой почти в течение всего дня. Мы имеем, таким образом, инсоляционный тип. Лишь к 16—17 часам наблюдается постепенный переход к радиационному типу (чертеж № 2).



Чертеж 2.

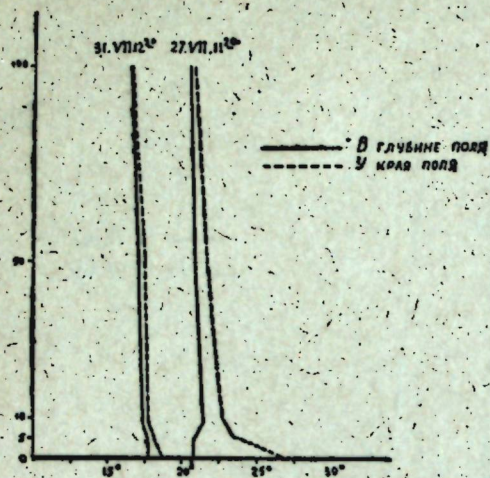
При наличии растительного покрова роль аккумулятора солнечной радиации от поверхности почвы в основном переходит к покрову. Степень этого перехода зависит от густоты, мощности и рода покрова. Для лучшего уяснения картины распределения температуры рассмотрим числовые данные, полученные непосредственными наблюдениями 22 июня 1948 г. в 8 ч. 45 м. при ясной погоде и юго-западном ветре (скорость 3—5 м/с). Измерения производились в посевах пшеницы в трех местах одновременно (пункт № 3 Верхне-Услонской экспедиции). Места замеров были выбраны по степени густоты посева, а именно: 1) на северном пологом склоне среди посева средней густоты, высотой 30—40 см; 2) на южном склоне, среди редкого посева, высотой 15—20 см и 3) в неглубокой ложине между двумя очень пологими склонами, среди густого посева высотой 60—70 см. Результаты даны в табл. 6.

Таблица 6

	1	2	3
У земли	30.6°	31.2°	27.3°
50 см	30.5°	29.9°	29.2°
100 см	30.3°	29.8°	30.0°

Малая густота способствует глубокому проникновению солнечных лучей внутрь деятельного слоя и перемещению сюда максимума температуры. Поэтому, в посевах редких и средней густоты (отчасти) перемещение максимума с поверхности почвы не наблюдается или

же оно незначительно (чертеж № 3). Наоборот, при наличии густой растительности, например, в кустах ежевики был получен в этот же день 22 июня (1948) иной результат:



Чертеж 3.

например, в ложине глубиной около 2,5—3 м в наиболее открытой части ее над скошенной травой и на бугре между двумя ложинами. Было обнаружено, что радиационный тип распределения в ложине сохраняется в течение более длительного времени, чем на бугре. Вечерний переход к радиационному типу также происходит в более ранние часы, что, несомненно, является следствием стока холодного воздуха. Отметим в заключение, что по наблюдениям на бугре выявляется наличие очень больших вертикальных градиентов в первом полуметре над поверхностью земли. Так, 17 июня 1947 г. в 8 ч. 55 м. падение температуры здесь доходило до 8,9 градуса на 0,5 м., что соизмеримо с Гейгеровскими градиентами*).

б) Абсолютная и относительная влажность.

Из общих положений физики следует, что при отсутствии травянистого покрова абсолютная влажность должна падать с высотой вместе с одновременным падением температуры. В действительности это и оправдывается. В зоне же растительного покрова и при слабом ветре максимум абсолютной влажности имеет место у поверхности листьев. Такое явление есть следствие перемещения испарителя с почвы к листе вместе с возрастанием испаряющей поверхности, а также (особенно) благодаря эффекту транспирации. Однако при усилении ветра, т. е. при наличии интенсивного воздухообмена, максимум абсолютной влажности перемещается внутрь растительного покрова, в результате сноса испаряющейся влаги с поверхности листьев. Пары теперь скапливаются внутри растительного покрова и, именно, там, где обмен уже затруднен. Такой тип распределения абсолютной влажности является по нашим наблюдениям наиболее частым.

Повышение температуры приводит к увеличению испарения, т. к. при этом возрастает влажный дефицит, и в основном содержание водяных паров в приземном слое однозначно колеблется вместе с изменениями температуры. Однако в случае, когда количество влаги за счет испарения недостаточно для пополнения расхода, абсолютная влажность с повышением температуры, наоборот, умень-

шается (явление высушивания). Рост абсолютной влажности с высотой может сохраниться в течение лишь короткого времени, когда явление высушивания еще не успело распространиться на верхние слои.

Резюмируя сказанное, можно считать, что абсолютная влажность имеет максимум у поверхности почвы при отсутствии растительного покрова или при малой его мощности; максимум у поверхности листьев наблюдается при наличии покрова достаточной густоты и слабом ветре и наконец, при усиленном воздухообмене максимум перемещается внутрь покрова ближе к поверхности почвы (чертеж № 4).

Относительная влажность является, как известно, функцией абсолютной влажности и температуры. При наличии растительного покрова в распределении этого элемента возможны в основном три случая.

В первом случае максимум абсолютной влажности и минимум температуры имеют место у земной поверхности. С удалением же вверх абсолютная влажность уменьшается, а температура увеличивается, что соответствует максимуму относительной влажности у самой почвы и уменьшению ее вверх к поверхности листьев.

При другом типе наблюдается падение как температуры, так и абсолютной влажности. Однако ход относительной влажности будет зависеть от различной скорости убывания этих двух элементов. Наиболее характерным для этого типа является сначала убывание (до поверхности листьев), а потом рост.

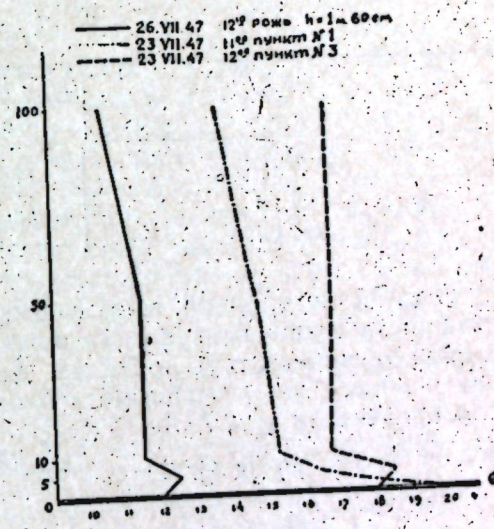
Наконец, в третьем случае при слабом ветре или штиле абсолютная влажность оказывается наибольшей около поверхности травяного покрова и совпадает здесь с наивысшей температурой, тогда как вниз к поверхности почвы, так и вверх, от поверхности листьев, ход относительной влажности так же, как и во втором типе, будет зависеть от скорости убывания абсолютной влажности и температуры. Обычно максимум относительной влажности имеет место у листьев.

Таким образом, при наличии растительного покрова относительная влажность может: а) уменьшаться снизу вверх вплоть до самой поверхности листьев, б) иметь минимум у поверхности покрова и отсюда вверх и вниз увеличиваться, в) иметь максимум вблизи поверхности покрова и отсюда вверх и вниз уменьшаться.

При отсутствии растительного покрова, распределение относительной влажности с высотой зависит только от распределения абсолютной влажности и температуры; в случае же преобладания инсоляционных процессов — от относительной скорости убывания этих двух элементов.

Примерами первого типа распределения могут служить данные, полученные наблюдениями:

1) 15 июня 1948 г. в 12 ч. 05 м. при облачности [10/5 Cl Cu hum и



Чертеж 4.

*) Р. Гейгер — Климат приземного слоя воздуха.

при западном ветре 5—7 м/с в ежевике (высота куста около 75 см) — см: табл. 7.

Таблица 7

	t°	e	f%
У земли	21.4	25.0	97
50 см	21.9	9.2	34
100 см	21.5	8.5	33

2) 14 июня 1948 г. в 7 ч. 50 м. над травой и посевом пшеницы (табл. 8).

Таблица 8

	Над травой		В пшенице	
	e	f%	e	f%
У земли	14.2	72	15.6	80
50 см	10.5	55	10.1	52
100 см	9.9	49	9.9	50

В качестве примера второго типа распределения (относительная влажность около поверхности покрова наименьшая и отсюда вверх и вниз увеличивается) приводим данные, полученные при наблюдении в посеве пшеницы (высотой около 40 см) 21 июня 1948 г. в 9.30 при облачности 10% AsAc:

у земли 63%
50 см 62%
100 см 64%

При отсутствии растительного покрова абсолютная влажность всегда убывает с высотой, относительная же меняется более сложно. В качестве типичных примеров приведем данные нижеследующих таблиц (табл. 9—12).

(14.VI.1948 г. 7 ч. 50 м.)

Таблица 9

Высота в см	t°	e	f%	Примечание
У земли	18.4	10.4	49	Обл. [10/0 Cl Cs
50 см	17.8	9.3	44	
100 см	17.0	8.5	44	

(14.VI.1948 г. 11 ч. 48 м.)

Таблица 10

Высота	t	e	f%	Примечание
У земли	24.2	10.0	33	Обл. 8% Cl Cs Fr Cs Ветер S — 1—3 м/с
50 см	22.1	9.9	37	
100 см	19.4	9.6	42	

(17.VI.1948 г. 8 ч. 41 м.)

Таблица 11

Высота	t	e	f%	Примечание
У земли	17.4	13.5	68	Обл. 9% Ветер w — 2 м/с
50 см	15.9	11.7	64	
100 см	15.6	9.5	53	

(20.VI.1948 г. 12 ч. 40 м.)

Таблица 12

Высота	t	e	f%	Примечание
У земли	24.1	12.1	41	Обл. 4% Cl Cs hum Ветер w Nw-4—6 м/с
50 см	23.4	9.5	32	
100 см	23.0	9.3	33	

Можно считать, что только эти типы распределения над паром и обнаруживались во всех наших наблюдениях.

При рассмотрении влияния на вертикальное распределение абсолютной и относительной влажности таких факторов, как увеличение облачности и усиление ветра, следует иметь в виду, что они вызовут прежде всего изменения в распределении основного элемента — температуры (лишь ветер действует на вариации абсолютной влажности и непосредственно). Так, увеличение облачности нижнего яруса, а также среднего яруса типа AsAc, приводит к уменьшению вертикальных градиентов температуры. Это влечет затруднение обмена, в связи с чем абсолютная влажность со временем, как правило, увеличивается. Хорошее подтверждение сказанному дают нижеприводимые наблюдения (табл. 13 и 14).

Таблица 13

31.VII.47 г. Пункт № 1	10 ч. 40 м. Обл. 2/3 Cl Cs		11 ч. 20 м. обл. 2/3 As Cs	
Высоты в см	e	f%	e	f%
0	11.0	50	11.5	70
5	9.8	55	10.1	72
10	8.9	54	9.4	67
50	7.8	50	9.1	68
100	8.0	55	8.6	65

Таблица 14

15.VI.48 пункт № 3 (над паром)

Высоты в см.	7 ч. 50 м. 6% Cl As		9 ч. 15 м. обл. 10/3 Cl Cs Cs	
	e	f%	e	f%
У земли	8.7	40	9.8	37
50	8.6	45	10.9	47
100	8.8	47	9.3	43

Из этих данных видно, однако, что в отличие от абсолютной влажности относительная имеет более сложный ход во времени.

в) Ветер.

Анемометрические наблюдения показывают, прежде всего, возрастание скорости ветра с высотой. Рассмотрим таблицы повторяемости в процентах различных скоростей по высотам, составленные по наблюдениям Верхне-Услонской экспедиции (табл. 15—17).

Таблица 15

Пункт № 1

V м/с h м	< 0.5	0.5—1	1—2	2—3	3—4	4—5	5—6	6—7	7—8	9—12
0.1	5.5	2.8	25.0	41.7	16.7	8.3	—	—	—	—
0.5	—	—	3.0	27.3	27.3	18.2	18.1	12.1	—	—
1.0	—	—	—	—	12.8	35.9	23.1	15.4	12.8	—
1.5	—	—	—	—	4.3	26.1	24.6	20.3	13.0	11.6
3.0	—	—	—	—	6.7	13.3	16.7	23.3	26.7	33.3

Таблица 16

Пункт № 2

V м/с h м	< 0.5	0.5—1	1—2	2—3	3—4	4—5	5—6	6—7	7—8	9—12
0.1	17.1	22.6	37.7	22.6	—	—	—	—	—	—
0.5	2	—	6.0	36.0	30.0	24.0	2.0	—	—	—
1.0	—	—	—	18.0	30.0	36.0	16.0	—	—	—
1.5	—	—	—	15.5	19.6	26.8	25.8	8.2	3.1	—
3.0	—	—	—	12.0	10.0	12.0	30.0	24.0	10.0	2.0

Таблица 17

Пункт № 3

V м/с h м	< 0.5	0.5—1	1—2	2—3	3—4	4—5	5—6	6—7	7—8	9—12
0.5	1.3	3.8	9.0	19.2	31.1	17.8	12.7	3.8	1.3	—
1.0	—	1.3	3.8	15.4	20.5	19.2	23.0	14.2	1.3	1.3
1.5	—	—	6.4	15.4	7.7	19.2	20.5	20.5	9.0	1.3

Из таблиц хорошо видно, что с увеличением высоты число случаев больших скоростей возрастает, причем аналогично другим элементам, изменение скорости в приземном слое происходит сначала очень быстро, а затем все медленней и медленней.

Далее, сравним повторяемость в процентах разностей скоростей по высотам в отдельных пунктах (табл. 18—21)

Пункт № 1

Таблица 18

Δh м	ΔV м/с	< 0.5	0.5—1	1—2	2—3
0.5—1.0		13	41.0	36.0	10.0
1.0—1.5		38.5	38.5	17.9	5.1

Пункт № 1

Таблица 19

ΔV м/с Δh м	0.5	0.5—1	1—2	2—3	3—4	4—5
0.1—1.5	—	—	5.0	26	33.0	36.0
1.5—3.0	36.0	38	26	—	—	—

Таблица 20

Пункт № 2

ΔV м/с Δh м	< 0.5	0.5—1	1—2	2—3	3—4	4—5	5—6
0.5—1.0	23.0	42.0	29.0	4.0	2.0	—	—
1.0—1.5	40.0	44.0	14.0	2.0	—	—	—
0.1—1.5	—	—	6.0	46.0	26.0	18.0	4.0
1.5—3.0	19.2	13.5	59.6	7.7	—	—	—

Таблица 21

Пункт № 3

ΔV м/с	< 0.5	0.5—1	1—2	2—3
0.5—1.0	20.0	32.0	44.0	4.0
1.0—1.5	49.0	37.0	14.0	—

Мы видим, что разность скоростей с высотой убывает. И это понятно: движение воздуха у земной поверхности подвержено наибольшему трению, вследствие чего здесь происходит особенно интенсивное образование вихрей, постепенно с высотой ослабевающих.

г) Температура почвы.

Почвенно-температурные наблюдения нами производились лишь во время экспедиции 1948 г. Здесь мы приводим только основные выводы из них.

1. Максимум температуры на поверхности почвы приходится в среднем на 13—13,5 ч.

2. В распределении температуры до глубины 10—15 см господствуют два типа — инсоляции и радиации. Переход от одного типа к другому и обратно происходит утром в 5—6 часов и после полудня в 16—17 часов.

3. Температура поверхностного слоя (до глубины 1,5—5 см) в значительной степени зависит от колебания облачности; в частности, с увеличением облачности уменьшается как суточный максимум, так и градиент по глубине.

К работе приложены таблицы кратких характеристик погоды в период обеих экспедиций, что важно для понимания общего фона, на котором разворачивались микроклиматические особенности изучаемых зон (приложения I и II).

Приложены также и таблицы непосредственных (выборочных) наблюдений (приложения III и IV), надлежащим образом обработанные. И те и другие окажут существенную помощь в вопросах лучшего выяснения рассматриваемых нами положений и выводов.

ТАБЛИЦА

воздушных масс и кратких синоптических характеристик
в июле 1947 года в районе г. Тетюши

2.VII пр. АВ Тыл циклона. Прохождение вторичных холодных фронтов	12.VII кТВ теплый сектор	22.VII хол. кПВ периферия антициклона
3.VII хол. кПВ гребень антициклона	13.VII кТВ теплый сектор	23.VII кПВ полоса пониженного давления
4.VII хол. кПВ → кПВ антициклон	14.VII кТВ теплый сектор	24.VII кПВ и хол кПВ прохождение холодного фронта
5.VII кПВ антициклон	15.VII кТВ/кПВ зона стационарного фронта	25.VII хол. кПВ тыловая часть циклона
6.VII кПВ → ТВ прохождение размытого теплого фронта	16.VII кПВ теплый сектор	26.VII хол. кПВ периферия антициклона
7.VII кТВ теплый сектор циклона	17.VII кПВ теплый сектор	27.VII хол. кПВ седловина
8.VII пр. мПВ прохождение холодного фронта	18.VII хол. кПВ прохождение холодного фронта	28.VII пр. мПВ зона фронта окклю- зии
9.VII хол. кПВ антициклональная область	19.VII хол. кПВ периферия антициклона	29.VII теп. кПВ прохождение окклюдирую- щегося циклона
10.VII кПВ антициклон	20.VII хол. кПВ разрушающийся анти- циклон	30.VII хол. кПВ близкий тыл циклона
11.VII кТВ прохождение теплого фронта	21.VII хол. кПВ область повышенного давления	31.VII хол. кПВ гребень антициклона

ТАБЛИЦА

воздушных масс и кратких синоптических характеристик
с 13 по 23 июня 1948 года в районе с. В. Услон

13.VI хол. кПВ Тыл циклона. Прохождение вторичных холодных фронтов	19.VI кПВ и хол. кПВ прохождение теплого фронта, теплый сектор, к концу суток тыловая часть циклона
14.VI хол. кПВ гребень антициклона	20.VI хол. кПВ → кПВ антициклон
15.VI хол кПВ и мПВ прохождение фронта окклюзии	21.VI кПВ и ТВ прохождение теплого фронта
16.VI хол. кПВ/мПВ фронтальная зона	22.VI ТВ теплый сектор циклона
17.VI хол. кПВ волновые возмущения на вторичных холодных фронтах	13.VI ТВ теплый сектор циклона
18.VI хол. кПВ гребень антициклона	24.VI ТВ теплый сектор циклона

Тетюшская экспедиция 1947 г.

Пункт № 1 — поляна около леса.

Дата	Часы	Облачность	Температура воздуха на высоте					Влажность абсолют. на высоте					Влажность отн. на высоте				
			0.0 м	0.05 м	0.1 м	0.5 м	1.0 м	0.0 м	0.05 м	0.1 м	0.5 м	1.0 м	0.0 м	0.05 м	0.1 м	0.5 м	1.0 м
18.VII	9 ³⁰	7/10 Cl Ac	22.5	21.8	22.8	22.7	22.7	17.2	13.3	13.9	13.0	13.3	83	68	66	63	64
	10 ³⁰	5/10 Cl Cs Ac	27.0	25.2	24.3	23.9	23.2	15.4	15.0	13.1	12.7	12.1	57	55	57	57	57
	12 ¹⁵	4/10 Cl Ac	27.9	25.3	24.9	23.8	22.7	14.2	12.6	11.5	10.9	10.5	50	52	49	49	50
19.VII	17 ³⁰	1/10 Ac	21.5	21.9	22.1	22.1	22.0	13.2	12.2	10.5	9.8	10.0	69	62	53	49	50
	7 ³⁵	8/10 Ac As	20.9	18.7	18.1	18.1	17.7	13.3	10.1	9.4	9.4	9.2	72	63	61	60	61
	8 ³⁵	8/10 Ac As	20.2	19.0	18.3	17.9	17.5	11.5	10.8	10.7	9.8	9.5	65	66	67	64	63
	9 ³⁰	2/10 Ac	21.0	19.5	18.9	18.5	18.3	11.5	10.8	9.8	9.4	9.3	61	64	59	59	59
	9 ³⁵	2/10 Ac	23.6	21.7	20.4	19.1	18.9	11.5	10.4	9.5	9.1	10.1	53	53	52	55	62
21.VII	8 ⁵⁰	3/2 Ac Sc	24.6	23.1	23.1	22.6	22.6	14.6	11.4	11.3	9.3	9.1	63	54	53	45	44
	9 ³⁵	3/2 Ac Sc Fcu	26.9	25.2	24.6	23.9	23.5	16.7	11.5	12.4	11.9	11.4	63	48	54	54	54
	10 ¹⁵	4/1 Ac Cu	27.9	23.9	23.9	23.0	22.6	14.8	10.2	9.9	9.4	8.9	53	46	45	45	43
	10 ⁵⁵	7/10 Ac Sc Cu	26.8	25.1	25.1	24.3	24.1	16.0	11.4	11.4	10.4	9.8	61	48	48	45	44
23.VII	9 ⁵⁰	10/8 Ac Sc Cu	24.9	23.7	23.6	23.3	22.9	13.1	11.7	11.6	10.4	10.5	55	53	53	48	50
	11 ⁰⁰	8/10 Ac Sc Cu	23.5	21.9	22.0	20.8	20.5	19.5	16.5	15.3	14.8	13.9	90	84	76	80	77
	11 ⁴⁰	6/10 Ac Sc Cu	27.7	27.0	25.6	25.7	24.2	16.9	11.2	10.5	10.8	9.3	61	42	43	43	41
28.VII	10 ²⁵	4/10 Ac Sc Cu	28.6	26.8	25.5	24.9	25.1	13.1	11.8	12.4	10.9	11.4	44	45	51	46	48
	11 ⁰⁶	5/10 Ac Cu Sc	30.2	28.4	27.2	26.4	25.6	11.6	11.0	11.4	10.3	10.1	36	38	42	40	41
31.VII	10 ⁴⁰	3/10 Ac Cu	23.7	20.3	18.9	18.3	16.9	11.0	9.8	8.9	7.9	8.0	50	55	54	51	55
	11 ²⁰	2/10 Ac Cu	18.9	16.5	16.3	15.7	15.6	11.5	10.1	9.4	9.1	8.6	70	72	67	68	65

Пункт № 2 — лес.

18.VII	8 ⁴⁴	5/1 Cl Ac Sc	18.3	18.4	18.6	19.3	19.8	15.0	14.1	13.8	13.3	13.2	95	88	85	79	76
	10 ²⁸	5/1 Cl Ac Sc	20.1	21.1	22.0	22.1	22.3	15.3	13.2	11.1	11.6	11.9	87	70	56	58	58
	12 ⁴⁵	4/10 Cl Ac	22.3	22.2	22.9	23.1	22.9	12.9	12.2	11.9	12.0	11.8	64	60	57	56	56
	17 ⁰³	1/10 Ac	20.4	20.5	21.0	21.2	20.7	12.2	11.6	11.0	10.7	10.9	68	64	59	56	59
19.VII	8 ¹⁵	8/10 Ac As	16.9	16.7	17.3	17.4	17.3	10.5	10.2	9.5	9.2	9.1	73	71	63	61	61
	9 ³⁵	2/10 Ac	16.8	17.1	17.6	17.9	18.1	10.7	9.7	9.7	9.3	9.2	74	66	64	60	59

Пункт № 2 — лес.

21.VII	9 ¹⁰	3/2 Ac Sc Cu	19.5	20.1	20.4	20.9	21.1	8.8	9.1	9.1	8.8	9.3	51	52	51	48	49
	10 ³⁰	4/4 Cu Sc	22.2	21.5	21.2	21.5	21.4	10.6	11.5	10.7	10.2	10.0	53	59	56	53	52
23.VII	11 ²⁰	6/4 Ac Sc Cu	21.7	21.9	22.0	22.3	22.1	15.7	14.5	14.3	13.7	13.5	81	73	72	68	68
28.VII	10 ⁴⁰	4/8 Ac Sc Cu	21.3	21.5	21.7	22.5	22.5	11.2	11.1	10.7	10.2	9.8	59	58	55	50	48
31.VII	10 ⁵⁵	3/2 Ac Cu	14.8	15.3	15.5	15.6	15.3	9.2	8.9	8.0	7.7	7.6	73	68	60	58	59

Пункт № 3 — поляна в ложбине

18.VII	8 ⁵³	7/10 Cs Ac	23.2	21.9	20.9	20.3	19.6	21.2	17.9	16.5	16.9	15.8	74	67	67	70	69
	9 ⁵⁰	7/10 Cl Cs Cc	24.5	25.1	24.6	23.3	22.8	21.2	21.5	20.2	16.9	16.5	69	67	65	59	59
	11 ¹⁵	5/10 Cl Cs Ac	28.4	26.3	25.7	24.7	23.3	21.5	20.4	19.1	15.7	14.6	55	59	57	52	51
19.VII	8 ³⁵	8/10 Ac	17.9	17.7	18.5	17.9	17.5	13.8	12.8	13.3	12.7	12.7	67	63	62	63	63
	10 ¹⁰	2/10 Ac	22.1	21.2	20.9	20.5	20.4	10.8	11.5	12.0	12.3	12.9	40	45	48	51	53
21.VII	11 ¹⁰	7/10 Ac Sc Cu	31.4	28.0	26.1	24.5	23.3	15.4	12.4	14.2	13.4	13.0	33	32	41	44	45
23.VII	12 ⁰⁰	6/5 Ac Cu	30.2	27.4	25.3	25.1	25.1	18.0	18.6	16.8	16.9	16.9	42	51	52	53	53
28.VII	11 ²⁵	2/8 Ac Sc cong	27.6	25.4	24.1	23.7	23.7	14.1	13.3	12.7	13.1	13.1	38	40	42	45	45
31.VII	11 ²⁵	8/10 Ac Cu	21.1	19.5	19.3	18.7	17.3	15.9	13.9	13.2	13.0	11.7	64	61	58	60	59

Пункт № 4 — берег Волги.

19.VII	12 ⁰⁵	2/10 Ac	24.0	22.5	22.3	21.7	20.0	24.4	19.0	16.9	16.7	13.5	82	69	62	64	58
21.VII	11 ⁰⁵	4/10 Cu hum	24.6	24.1	23.9	24.9	24.7	22.2	18.0	16.6	13.3	13.4	71	59	55	42	43

Пункт № 5 — берег Волги.

19.VII	11 ⁰⁰	2/10 Ac	23.3	22.72	2.1	22.0	21.1	14.6	14.6	14.9	13.9	12.0	51	53	56	52	48
21.VII	10	6/4 Ac Sc Cu	31.2	28.32	6.2	25.4	24.8	17.5	16.8	14.8	14.5	14.5	39	43	43	44	46
23.VII	13 ³⁰	1/4 Ac Cu Sc	29.2	28.4	28.0	27.2	25.2	26.0	22.6	20.5	22.1	19.5	64	58	54	61	61

Пункт № 6 — Годая гора.

Дата	Часы	Облачность	Температура воздуха на высоте					Влажность абсолют. на высоте					Влажность отн. на высоте				
			0.05 м	0.05 м	0.1 м	0.5 м	1.0 м	0.0 м	0.05 м	0.1 м	0.5 м	1.0 м	0.0 м	0.05 м	0.1 м	0.5 м	1.0 м

Пункт № 6 Годая гора.

19.VII	12 ³⁰	2/10 Ac	22.9	21.9	21.9	21.3	20.4	10.5	11.0	11.0	11.4	11.3	37	42	42	44	47
21.VII	15 ⁰⁰	5/5 Cu	26.3	25.5	25.1	24.8	24.5	15.9	15.5	15.1	15.3	16.5	46	48	47	49	54
23.VII	15 ¹⁵	5/6 Ac Sc Cu	25.4	24.9	24.9	24.7	24.5	15.8	14.3	14.3	13.5	13.6	49	45	45	43	44

24.VII	10 ²⁸	2/2 Ac Cu	28.8	26.1	25.8	24.7	24.3	15.2	15.5	15.6	15.2	15.1	51	59	63	65	66
	11 ⁰⁵	5/4 Ac Cu	28.9	28.4	28.0	26.4	25.1	15.2	15.1	15.0	14.4	14.3	51	52	53	55	60
	11 ⁴⁵	6/5 Ac Sc Cu	23.9	23.8	23.8	23.9	23.3	14.5	14.1	13.8	14.0	13.4	65	64	62	63	63
	13 ⁰³	5/4 Ac Sc Cu	22.5	22.8	23.1	23.2	23.3	16.7	15.7	14.5	13.5	13.4	82	75	68	63	63
	13 ⁰⁵	5/4 Ac Sc Cu	25.8	25.5	24.6	23.9	23.8	18.6	16.3	14.2	13.7	12.9	75	66	62	62	58
	13 ¹⁰	5/4 Ac Sc Cu	22.8	23.5	23.7	23.8	23.7	14.7	13.3	12.9	12.2	12.2	74	62	59	55	56
	13 ²⁵	5/4 Ac Sc Cu	23.0	23.9	23.9	23.9	23.8	14.6	14.0	13.1	11.9	11.1	69	63	59	54	49

Картофельное поле.

26.VII	16 ³⁰	4/4 Cu	21.7	20.4	20.1	19.3	18.7	8.3	8.6	8.5	8.1	8.8	43	48	48	48	54
27.VII	11 ⁵⁵	2/8 Ac Cu cong Sc	21.3	20.9	20.5	20.5	20.5	8.6	8.4	8.5	8.5	8.2	45	45	47	47	47
	12 ³⁰	2/8 Ac Cu cong Sc	25.6	25.6	25.2	23.9	23.3	10.8	10.1	10.7	9.3	9.4	44	41	44	42	44
28.VII	9 ³⁰	3/2 Ac Sc Cu	28.6	24.7	24.3	23.5	23.2	13.6	12.5	12.5	12.0	11.6	46	53	55	55	54
31.VII	12 ⁴⁰	2/8 Ac Cu	17.8	17.1	17.3	16.3	16.3	11.2	10.3	10.1	8.3	6.0	74	70	68	60	37

Рожь (h=1 м 60 см).

26.VII	12 ¹⁰	6/6 Sc Cu	24.9	23.3	22.0	20.0	17.6	12.0	12.5	11.4	11.4	10.5	51	58	58	65	70
27.VII	12 ³⁰	2/8 Ac Cu cong Sc	22.6	23.1	22.7	22.5	21.9	11.8	10.7	9.2	8.6	8.8	57	51	44	42	44

Овес (h=50 — 60 см).

26.VII	16 ²⁵	4/4 Cu	21.5	21.5	20.9	19.3	18.5	10.3	10.5	9.8	8.7	8.6	54	54	52	52	54
	17 ⁰⁰	4/4 Cu	19.3	19.5	18.7	18.1	17.4	8.3	8.3	7.8	7.9	8.1	49	49	48	51	54
	17 ¹⁰	4/4 Cu	18.9	18.5	17.9	17.2	16.9	8.5	8.6	8.4	8.6	8.2	52	54	55	58	57
27.VII	11 ²⁰	8/8 Cu cong	26.0	23.5	22.7	21.3	21.1	13.6	11.5	11.6	10.9	10.1	54	52	56	57	54
	11 ⁴⁵	2/8 Ac Cu cong Sc	20.8	20.9	21.5	21.1	20.9	9.1	9.1	9.0	9.0	8.8	49	49	47	47	54
			25.1	23.5	23.5	22.6	22.2	14.3	12.6	12.6	12.6	12.0	60	58	58	58	66
28.VII	9 ¹⁵	3/8 Ac Cu	18.8	18.1	17.5	17.5	16.9	11.3	10.5	9.7	8.9	8.8	69	67	64	66	66
31.VII	12 ²⁰	2/8 Ac Cu	17.7	17.7	17.5	17.3	16.6	10.7	10.2	9.2	8.5	7.8	71	67	61	61	55
	12 ⁴⁰																

Приложение

Пункт № 2 [одновременные наблюдения над паром (I) и над травой (II)].

Дата	Часы	Облачность	Ветер*)	напр.	скорость (м/с) на высоте					№ точки	Температура на высоте			Влажность абс. на высоте			Влажность отн. на высоте		
					0.1 м	0.5 м	1.0 м	1.5 м	3.0 м		0.0 м	0.5 м	1.0 м	0.0 м	0.5 м	1.0 м	0.0 м	0.5 м	1.0 м
12.VI	8 ³⁰	1/10 As Ac	W	1.3	4.0	5.2	6.6	8.0	I II	20.0 16.3	19.6 19.4	19.4 19.3	16.2 14.3	14.1 14.1	13.4 12.9	69 51	62 62	59 57	
	16 ⁴⁴	7/10 Cu Frcu	W	0.8	3.0	4.0	4.9	6.4	I II	21.3 19.6	19.9 19.2	18.8 18.5	11.0 12.0	11.0 11.5	11.4 11.5	43 52	47 52	53 54	
13.VI	8 ³⁵	5/10 Cu hum	NNW	0.8	2.1	2.4	2.6	3.1	I II	22.8 23.8	17.5 17.4	17.3 17.8	11.1 14.0	9.7 11.2	10.8 11.1	40 47	47 54	54 54	
	16 ⁵⁰	5/10 Ac	NNW	0.2	2.2	2.8	3.1	3.3	I II	23.2 21.5	20.4 20.1	20.0 20.3	7.8 11.1	8.3 9.4	8.6 8.8	28 43	34 40	36 36	
14.VI	17 ¹⁷	5/10 Cl Cu	S	1.4	2.7	3.5	4.0	5.3	II I	19.4 20.0	19.0 20.0	18.2 19.6	10.1 10.3	10.1 9.5	9.6 9.1	45 44	46 40	46 39	
15.VI	17 ²⁸	7/10 Cl Ac Cu	W	1.0	3.0	4.1	4.5	5.3	I II	19.4 18.0	19.2 19.3	19.1 19.0	6.8 7.7	6.5 6.7	6.2 6.3	30 37	29 29	27 28	
17.VI	16 ¹⁸	5/10 Cu	SW	0	1.6	2.5	2.7	3.2	I II	22.1 21.3	21.0 21.2	20.7 20.6	9.0 12.1	8.8 9.2	8.6 9.2	33 49	35 36	35 37	
18.VI	8 ³⁴	7/10 Cl	SW	1.8	3.5	4.4	5.1	6.3	I II	24.7 24.1	23.0 23.4	22.5 23.0	16.8 17.6	17.0 18.1	17.1 17.6	54 59	60 62	63 62	
	9 ²⁴	8/10 Cl Ac Cu	SW	2.5	4.0	4.7	5.8	7.1	I II	28.2 27.8	25.8 26.0	24.3 25.2	16.9 21.1	16.6 16.8	16.4 16.5	44 56	50 49	54 51	
	10 ³⁴	9/10 Ac, Cu	SW	2.0	4.8	4.9	5.3	6.5	I II	21.2 23.8	21.3 24.0	22.3 24.2	18.5 17.5	18.8 17.3	18.1 17.2	74 60	75 58	68 57	
	11 ¹¹	8/10 Ac	SW	1.9	4.6	5.2	6.1	8.0	I II	28.4 27.8	25.6 26.0	25.0 25.0	16.4 17.6	16.1 16.4	15.6 15.8	42 47	48 48	49 50	
20.VI	7 ³⁵	5/10	WNW	1.0	3.2	3.7	4.0	4.6	I II	19.0 19.3	17.8 17.5	18.3 17.6	14.8 16.0	13.8 13.5	13.6 13.4	67 71	68 68	64 67	
	8 ²⁵	1/10 Cu hum	WNW	1.4	3.1	3.9	4.1	4.8	I II	20.8 21.6	19.8 19.6	19.4 19.4	13.8 14.4	13.3 12.9	12.5 12.4	56 55	57 56	55 55	
	16 ³⁷	5/10 Cl Cu	WNW	0.9	3.1	3.9	4.1	4.8	I II	22.0 19.7	21.0 20.8	21.6 21.2	9.6 11.4	9.9 9.9	10.0 10.3	36 48	39 40	38 40	
21.VI	16 ⁴⁵	6/10 Cl Cu cong	SW	1.5	4.0	4.9	5.2	6.3	I II	31.5 30.4	30.3 30.4	30.2 30.4	19.5 21.2	19.6 19.3	18.8 18.7	42 49	45 45	44 43	
22.VI	7 ²¹	2/10 Ac	SW	0.8	2.9	3.9	4.0	4.6	I II	29.7 29.2	28.0 27.9	27.5 27.6	19.4 20.3	17.8 18.8	18.0 18.2	46 50	47 49	49 49	
23.VI	6 ³⁴	2/10 Cu	SSE	0	1.0	2.4	2.4	2.6	I II	35.6 32.0	33.0 33.4	33.3 33.5	15.7 19.2	14.2 14.6	14.1 14.2	27 40	28 28	27 28	

*) Наблюдения ветра производились над трапезным покровом.

Пункт № 3 [одновременные наблюдения над паром (I), пшеницей (II) и травой (III)].

Дата	Часы	Облачность	№ точ- ки	Ветер				Температура на высоте			Влажность абс. на высоте			Влажность отн. на высоте		
				скорость на выс.			Напр.	0.0 м	0.5 м	1.0 м	0.0 м	0.5 м	1.0 м	0.0 м	0.5 м	1.0 м
				0.5 м	1.0 м	1.5 м										
13. VI	11 ⁴⁰	5/8 Cu	I II III	—	—	—	NNW	26.1 27.0 25.4	19.6 19.0 19.6	18.2 18.8 18.6	11.0 9.7 9.8	9.6 9.2 9.8	8.4 55 34	32 44 42	41 44 45	40 44 45
14. VI	7 ⁵⁰	10/0 Cl Cs	I II III	—	—	—	—	18.4 17.0 17.2	17.8 16.8 16.5	17.0 17.0 17.1	10.4 15.6 14.2	9.3 10.1 10.5	8.5 9.8 9.8	49 80 72	45 52 55	44 50 49
	9 ³⁴	10/0 Cl Cs	I II III	0.6	2.2	1.9	SW	20.0 18.2 17.9	18.3 18.0 18.0	18.0 17.6 17.8	9.2 15.5 15.5	10.7 11.6 11.3	10.8 10.7 10.9	38 74 75	51 56 55	52 54 54
	10 ⁵¹	10/1 Cl Cs Cu	I II III	2.6	3.4	3.1	NE	22.8 21.4 26.0	19.6 20.0 19.4	19.2 20.3 20.1	12.8 16.7 13.6	13.1 11.3 11.4	12.7 11.1 11.3	45 65 41	57 48 50	57 46 48
	11 ⁴⁸	5/6 Cl Cu Fr Cu	I II III	1.2	3.2	2.8	S	24.2 21.2 21.8	22.1 20.6 21.6	19.5 19.9 20.0	10.0 12.9 13.7	9.9 11.5 11.4	9.6 10.3 9.7	33 51 52	37 47 44	42 44 41
15. VI	7 ⁵⁰	5/0 Cl	I II III	3.8	4.0	5.4	W	18.5 16.2 18.9	16.8 16.6 16.5	16.2 16.3 16.2	8.7 10.7 9.8	8.6 9.4 9.6	8.8 8.4 9.2	40 58 46	45 49 51	47 45 50
	9 ¹⁵	10/3 Cl Cs Cu	I II III	4.9	5.9	6.8	W	21.3 20.0 23.4	19.6 19.1 19.8	18.5 18.6 18.8	9.8 12.7 13.0	10.9 10.4 10.4	9.3 10.2 9.7	37 54 42	47 47 45	43 47 45
	10 ⁵¹	10/4 Cl Cu	I II III	5.3	6.2	7.3	W	21.9 20.2 24.0	20.3 19.8 20.2	19.0 19.4 19.2	9.8 12.9 12.6	10.1 9.8 9.7	11.7 9.7 9.4	37 54 42	43 42 41	54 43 42
17. VI	8 ⁴¹	5/0	I II III	1.4	1.6	2.2	W	17.4 18.5 19.6	15.9 16.6 16.5	15.6 16.2 15.1	13.6 19.3 18.4	11.7 11.2 11.1	9.5 10.7 10.8	68 90 80	64 58 58	53 58 63
	9 ⁵⁵	3/2 Cu hum	I II III	2.4	3.1	3.6	SW	20.6 19.9 21.6	17.5 17.6 17.3	17.1 17.3 17.4	12.0 14.3 15.0	9.3 10.0 9.6	9.3 9.3 9.3	49 67 58	45 50 48	49 47 47
17. VI	10 ⁵⁵	5/8 Cu cong Cu	I II III	3.0	3.4	4.2	SW	22.0 22.3 22.6	19.1 18.4 18.8	18.5 18.4 18.5	13.4 16.4 16.4	9.0 10.3 10.4	9.2 9.2 9.2	51 60 59	40 49 48	42 44 43
	11 ⁴⁰	5/6 Cu cong Cu	I II III	3.2	3.7	4.6	SW	22.2 22.6 24.4	19.6 19.9 20.7	19.4 20.1 20.0	9.6 15.0 14.9	8.2 9.3 9.8	8.2 8.9 9.3	36 53 48	35 39 39	36 37 39
18. VI	15 ³⁰	10/8 Ac Cu cong Sc	I II III	3.4	4.1	4.8	SW	27.1 24.4 22.8	25.8 25.1 25.0	25.7 21.5 24.9	16.8 16.8 16.3	16.3 16.4 16.1	16.7 16.4 16.1	46 71 79	49 53 52	50 51 51
20. VI	10 ³⁰	5/6 Cu hum	I II III	—	—	—	WNW	21.6 23.8 23.3	21.2 21.2 21.0	20.5 20.2 20.2	14.1 21.8 16.3	13.5 13.8 14.4	12.4 12.8 13.1	54 73 56	53 55 58	51 54 55
	11 ³⁰	5/6 Cu hum	I II III	3.8	4.7	5.0	WNW	22.4 22.8 23.7	21.6 21.8 21.6	21.2 21.9 21.4	12.4 16.3 16.4	11.9 12.1 12.0	11.1 11.8 11.2	45 58 56	45 46 46	44 44 44
	12 ⁴⁰	4/4 Cu hum	I II III	4.2	5.5	6.0	WNW	24.1 22.2 22.2	23.4 22.2 22.3	23.0 22.0 22.4	12.1 15.4 13.0	9.5 11.0 10.8	9.3 10.9 9.4	41 57 48	32 40 40	33 41 34
21. VI	9 ⁰⁵	10/0 As Ac	I II III	3.1	4.5	4.6	SE	20.8 17.8 18.3	20.4 19.7 18.7	20.2 19.8 19.0	15.1 18.1 17.7	15.4 16.1 16.4	14.8 15.9 16.4	63 89 84	62 70 76	62 68 74
	10 ¹⁰	8/2 Cl Ac Cu	I II III	4.2	5.6	6.0	SSE	27.2 25.2 26.0	26.3 24.6 25.2	25.4 24.7 24.6	17.5 20.6 19.1	16.3 17.3 17.5	15.8 16.2 15.5	48 64 56	48 56 52	48 52 50
	11 ³⁷	10/0 Cl Ac	I II III	5.6	6.6	7.5	SSE	28.8 26.0 27.5	27.7 26.8 27.1	26.9 26.9 26.7	16.6 21.6 18.1	15.4 16.2 16.5	15.0 15.3 15.2	41 64 49	41 45 46	41 43 43

12

Пункт № 3 [Одновременные наблюдения над паром (I), пшеницей (II) и травой (III)]

Дата	Часы	Облачность	№ точки	Ветер				Температура на высоте			Влажность абс. на высоте			Влажность отн. на высоте		
				скорость на выс.			Напр.	0.0 м	0.5 м	1.0 м	0.0 м	0.5 м	1.0 м	0.0 м	0.5 м	1.0 м
				0.5 м	1.0 м	1.5 м										
	12 ⁴⁵	[10/0] Cl Ac	I II III	4.8	5.8	6.4	SSE	30.0	29.8	29.1	18.5	17.4	17.0	43	41	42
								27.5	29.1	29.2	25.1	18.3	17.8	68	45	43
								28.7	29.4	28.9	21.6	18.7	17.3	54	45	43
22. VI	8 ⁴⁵	%	I II III	3.6	4.4	4.5	W	31.7	30.4	29.4	18.9	18.3	17.7	40	42	43
								29.2	29.6	29.6	23.5	20.0	18.4	58	48	44
								27.3	29.7	29.2	22.5	19.6	21.6	61	47	53
	10 ³⁸	2/0 Ac	I II III	4.0	4.8	5.2	W	35.3	33.8	33.1	18.8	17.4	16.4	32	32	31
								33.4	33.0	32.7	25.5	18.7	17.2	49	37	34
								33.2	33.6	32.9	24.4	18.9	16.2	47	36	32
	14 ⁴⁷	7/0 Cl Ac Cu cong	I II III	4.2	5.3	6.2	W	35.9	34.8	34.0	15.8	14.6	14.2	26	27	27
								31.6	34.1	34.8	24.2	15.7	14.3	51	28	26
								35.1	34.3	34.0	17.8	14.9	13.5	31	27	25
23. VI	8 ¹⁵	2/0 Ac	I II III	0.4	0.5	0.9	SSW	32.5	29.2	28.4	23.1	23.7	23.1	46	59	59
								28.7	28.3	28.6	30.5	24.0	24.8	77	62	63
								31.6	29.1	28.0	31.1	24.4	23.0	66	67	61
	10 ¹⁶	0/0	I II III	1.5	2.8	3.2	SSW	35.9	33.5	34.0	14.9	11.8	12.0	24	23	22
								35.5	33.1	34.4	23.6	12.8	13.0	40	25	24
								35.9	33.3	33.9	20.4	12.7	12.3	34	25	23

Пункт № 3 [одновременные наблюдения в кустах ежевики (IV) и на расстоянии 1 м. от кустов (V)]

Дата	Часы	Облачность	№ точки	Температура на высоте			Влажность абс. на высоте			Влажность отн. на высоте		
				0.0 м	0.5 м	1.0 м	0.0 м	0.5 м	1.0 м	0.0 м	0.5 м	1.0 м
15. VI	12 ⁰³	[10/5] Cl Cu	IV V	21.5 30.0	21.9 21.4	21.5 21.4	24.8 9.0	9.2 8.4	8.6 8.5	97 21	34 33	33
17. VI	9 ⁰⁰	%	IV V	16.7 22.8	19.0 18.8	17.8 19.0	16.8 16.8	13.5 12.4	12.0 12.5	88 60	61 57	58
	10 ¹³	3/3 Cu	IV V	17.8 23.7	20.5 22.3	19.4 20.0	18.1 13.9	13.8 12.9	11.2 11.8	89 47	56 48	50
	11 ¹⁶	8/8 Cu cong	IV V	17.8 26.7	19.7 20.4	18.4 18.2	19.4 15.4	14.4 10.5	11.0 9.9	95 43	62 44	52
	12 ¹¹	6/6 Cu cong Cu	IV V	16.8 19.7	20.3 21.4	20.7 20.3	14.1 11.8	12.4 11.0	10.5 9.9	73 51	51 43	42
18. VI	15 ⁴⁵	[10/10] Cu- cong Sc	IV V	23.2 25.3	25.8 26.3	25.8 26.4	21.7 21.3	19.9 18.9	18.5 18.5	76 66	59 55	55
20. VI	9 ⁴⁵	5/5 Cu hnm	IV V	19.0 25.1	20.0 21.6	20.2 21.3	16.4 19.2	14.3 15.0	14.2 13.1	74 60	61 58	60
	12 ¹⁵	6/6 Cu hnm	IV V	20.1 27.7	22.2 22.7	22.0 22.6	18.4 15.3	13.2 12.6	11.9 12.1	80 41	49 45	44
21. VI	9 ³⁰	10/0 As Ac	IV V	19.5 20.7	20.4 21.0	20.9 21.2	17.8 17.8	16.7 16.2	15.7 15.7	78 73	73 65	67
	10 ³⁷	8/2 Cl Ac Cu	IV V	22.8 25.1	23.8 24.8	24.8 24.9	18.2 18.5	19.6 17.0	18.4 16.5	65 58	65 54	59
	11 ⁵⁷	[10/0] Cl Ac	IV V	25.2 29.0	26.7 28.0	27.4 27.7	20.9 25.7	19.5 17.2	18.0 17.0	65 64	55 45	49
	13 ¹⁴	[10/0] Cl Ac	IV V	26.8 27.4	28.2 28.8	29.3 29.3	21.1 24.7	20.9 20.3	19.5 19.8	59 67	55 51	48
22. VI	9 ⁰⁵	%	IV V	27.8 36.5	29.8 31.0	21.6 31.0	28.9 24.6	25.6 22.0	22.7 22.3	76 43	61 48	51
	10 ⁵⁷	2/0 Ac	IV V	31.8 39.4	29.0 33.4	27.5 33.1	25.3 27.6	27.8 20.9	27.7 19.3	53 38	69 41	67
	15 ⁵⁰	8/8 Cu Cong	IV V	24.5 24.3	28.4 28.0	29.0 28.8	20.8 23.1	17.2 18.6	17.0 17.2	68 76	44 49	42

Пункт № 3 [одновременные наблюдения в кустах ежевики (IV) и на расстоянии 1 м. от кустов (V)]

Дата	Часы	Облачность	№ точки	Температура на высоте			Влажность абс. на высоте			Влажность отн. на высоте		
				0.0 м	0.5 м	1.0 м	0.0 м	0.5 м	1.0 м	0.0 м	0.5 м	1.0 м
23. IV	9 ⁰⁵	2/0 Ac	IV V	27.8 35.4	30.8 32.5	31.6 32.4	29.0 34.6	27.1 22.9	20.0 21.9	78 60	60 64	43
	10 ³¹	%	IV V	28.2 34.2	31.4 33.0	33.0 33.7	25.1 28.9	21.5 17.5	19.2 19.8	65 53	46 34	38
	12 ⁰⁸	2 1/2 Cu hnm	IV V	32.0 35.3	32.2 34.3	34.2 34.8	23.6 28.2	23.2 18.5	17.3 17.0	49 49	48 34	31
			IV V									

Пункт № 3 [одновременные наблюдения в трех точках посева пшеницы: на глине при высоте посева 15—20 см (VI), на суглинке с супесью при высоте посева 30—40 см (VII), на суглинке (в ложбине) при высоте посева 60—70 см (VIII)].

Дата	Часы	Облачность	№ точки	Температура на высоте			Влажность абс. на высоте			Влажность отн. на высоте		
				0.0 м	0.5 м	1.0 м	0.0 м	0.5 м	1.0 м	0.0 м	0.5 м	1.0 м
19. VI	16 ⁴⁴	8 1/2 Ac Cu cong	VI VII VIII	23.0 22.7 21.7	23.0 23.0 22.9	23.1 23.1 23.2	17.7 17.0 21.6	15.2 15.8 15.6	14.9 14.8 14.8	62 61 82	54 56 56	53
20. VI	9 ⁵⁷	6/6 Cu hnm	VI VII VIII	19.2 20.4 19.6	19.4 19.9 19.3	19.6 20.1 19.6	13.8 14.6 17.5	12.9 13.3 13.0	12.5 12.8 12.7	61 61 76	57 57 58	54
	12 ³⁰	6/6 Cu hnm	VI VII VIII	22.3 22.4 23.2	21.8 21.5 21.7	21.6 21.6 21.7	12.1 15.3 18.9	11.8 11.4 11.9	11.6 10.9 11.9	44 56 67	44 44 46	44
	13 ⁰⁷	4/4 Cu hnm	VI VII VIII	23.7 24.5 21.2	22.5 23.6 19.6	22.1 22.9 19.3	11.3 14.8 19.7	11.4 11.8 14.5	11.4 10.3 13.3	38 48 78	41 40 63	42
21. VI	9 ³⁰	[10/0] Ac As	VI VII VIII	22.6 22.2 20.8	22.2 22.8 22.1	22.0 23.2 22.7	17.5 19.5 21.7	16.7 16.9 17.2	16.9 17.0 17.6	63 73 88	62 60 64	64
	10 ⁴⁷	8/2 Cl Ac Cu	VI VII VIII	27.2 26.8 23.7	25.0 25.6 24.6	24.8 25.1 24.8	17.8 18.2 22.1	17.3 16.8 18.0	17.2 16.3 17.1	49 52 76	55 51 58	55
	12 ³⁹	[10/0] Cl Ac	VI VII VIII	29.0 28.4 26.4	27.2 28.0 26.9	27.1 27.4 27.3	15.6 16.9 20.4	15.4 16.0 16.6	15.5 15.9	43 59	42 47	42
	13 ¹⁴	[10/0] Cl Ac	VI VII VIII	30.4 30.6 27.5	29.2 30.0 28.7	29.1 29.4 29.0	19.1 20.5 24.0	18.0 19.5 18.6	18.2 18.9 17.9	45 47 65	44 46 47	45
22. VI	9 ²⁵	%	VI VII VIII	31.2 30.6 27.3	29.9 30.5 29.2	29.8 30.2 30.0	22.0 21.0 26.1	19.9 20.5 22.1	20.0 19.7 20.3	48 48 71	47 47 54	47

Пункт № 3 [одновременные наблюдения в трех точках посева пшеницы: на гряде при высоте посева 15—20 см (VII), на суглинке с супесью при высоте посева 30—40 см (VIII), на суглинке (в ложбине) при высоте посева 60—70 см (IX)]

Дата	Часы	Облачность	№ точки	Температура на высоте			Влажность абс. на высоте			Влажность отн. на высоте		
				0.0 м	0.5 м	1.0 м	0.0 м	0.5 м	1.0 м	0.0 м	0.5 м	1.0 м
22. VI	11 ⁰⁰	2/10 Ac	VI	33.0	32.8	31.8	17.4	17.7	17.7	33	35	38
			VII	29.3	32.6	32.5	20.7	18.3	18.1	50	37	36
			VIII	32.2	32.3	32.8	23.0	19.1	18.6	47	39	37
23. VI	8 ⁰⁰	2/10 Ac	VI	34.4	28.5	28.5	25.6	24.5	24.2	46	63	62
			VII	32.1	29.2	29.1	28.0	24.6	24.2	58	60	60
			VIII	29.5	28.6	28.4	33.4	26.0	23.9	80	66	61
23. VI	10 ⁰⁰	0/0	VI	37.3	33.4	33.6	18.1	13.9	12.8	28	26	24
			VII	35.6	33.5	32.4	18.4	12.9	13.7	31	24	27
			VIII	31.6	31.7	32.3	24.4	16.4	14.6	52	34	30
23. VI	12 ⁰⁰	2/10 Cu hum	VI	36.2	34.4	33.7	15.6	12.1	11.4	25	22	21
			VII	37.6	35.5	33.9	16.8	12.6	11.5	25	22	22
			VIII	35.0	33.6	33.2	26.7	12.8	11.7	36	26	23

Пункт № 3 [одновременные наблюдения в трех точках над травой: на бугре (IX), в ложбине (X), в тени вяза (XI)]

Дата	Часы	Облачность	№ точки	Температура на высоте			Влажность абс. на высоте			Влажность отн. на высоте		
				0.0 м	0.5 м	1.0 м	0.0 м	0.5 м	1.0 м	0.0 м	0.5 м	1.0 м
13. VI	12 ⁰⁰	2/10 Cu	IX	34.3	25.6	21.8	13.9	9.0	8.9	26	20	43
			X	27.8	23.0	18.2	16.5	15.6	13.0	44	31	46
			XI	16.0	16.2	15.1	15.7	14.7	12.2	85	79	75
14. VI	7 ⁰⁰	10/10 Cl Cu	IX	22.8	18.8	17.1	12.1	9.6	9.5	43	46	48
			X	18.6	17.0	18.0	16.5	10.7	10.9	77	53	53
			XI	16.8	16.9	17.3	11.7	10.5	10.2	65	54	51
14. VI	9 ⁰⁰	10/10 Cl Cu	IX	21.3	18.0	17.4	12.3	11.9	11.0	48	57	55
			X	19.5	18.2	17.8	15.1	12.2	11.5	66	58	56
			XI	16.7	17.8	17.8	15.6	12.7	11.9	82	62	58
14. VI	11 ⁰⁰	10/10 Cl Cu Cu	IX	24.9	19.7	19.3	16.7	13.7	11.6	53	59	52
			X	24.0	21.8	21.4	20.0	12.3	12.4	67	46	48
			XI	17.0	20.1	20.2	13.3	12.3	11.7	68	52	49

Пункт № 3 [одновременные наблюдения в трех точках над травой: на бугре (IX), в ложбине (X), в тени вяза (XI)]

Дата	Часы	Облачность	№ точки	Температура на высоте			Влажность абс. на высоте			Влажность отн. на высоте		
				0.0 м	0.5 м	1.0 м	0.0 м	0.5 м	1.0 м	0.0 м	0.5 м	1.0 м
14. VI	12 ⁰⁰	2/10 Cl Cu Psen	IX	28.9	22.5	19.8	16.1	11.3	10.0	39	41	42
			X	25.1	21.2	20.8	13.8	10.5	10.7	42	41	43
			XI	16.4	19.4	20.0	14.2	11.7	11.1	75	52	47
15. VI	8 ⁰⁰	2/10 Cl	IX	22.6	17.6	17.2	8.7	9.1	9.1	32	45	46
			X	20.5	17.6	17.6	13.3	10.0	9.8	55	50	48
			XI	14.7	17.0	16.8	10.8	9.9	9.4	64	50	49
15. VI	9 ⁰⁰	10/10 Cl Cu Cu	IX	22.8	17.9	17.4	9.5	9.9	9.5	34	48	48
			X	19.5	17.3	17.2	13.4	9.9	10.1	58	49	51
			XI	17.8	17.6	17.4	10.6	9.7	10.1	52	48	50
15. VI	10 ⁰⁰	10/10 Cl Cu	IX	22.2	19.6	19.2	10.0	9.8	9.3	41	42	42
			X	22.4	19.2	19.0	12.5	10.5	10.1	40	48	46
			XI	15.4	18.6	18.5	13.9	10.2	9.9	80	47	46

Дата	Часы	Облачность	№ точки	Температура на высоте			Влажность абс. на высоте			Влажность отн. на высоте		
				0.0 м	0.5 м	1.0 м	0.0 м	0.5 м	1.0 м	0.0 м	0.5 м	1.0 м
17. VI	8 ⁰⁰	2/10	IX	25.4	16.5	16.3	16.7	10.1	10.1	52	53	54
			X	19.0	16.1	16.6	15.3	10.6	10.3	69	57	53
			XI	13.3	16.1	16.3	12.1	10.1	10.4	79	55	57
17. VI	10 ⁰⁰	2/10 Cu hum	IX	20.1	17.4	17.6	11.7	9.7	10.6	49	49	53
			X	19.4	17.8	18.0	16.4	10.6	11.0	73	52	53
			XI	13.8	16.6	17.1	11.8	10.2	10.7	74	53	54
17. VI	11 ⁰⁰	2/10 Cu cong Cu	IX	26.0	20.4	17.6	11.5	9.7	9.2	33	40	45
			X	22.3	19.7	17.9	18.5	9.4	10.7	69	40	52
			XI	16.7	19.7	18.0	12.0	10.3	9.0	64	45	43
17. VI	12 ⁰⁰	2/10 Cu cong Cu	IX	27.4	20.7	18.2	11.5	9.0	8.3	31	36	39
			X	22.5	20.3	19.0	17.9	9.0	8.2	65	37	38
			XI	15.5	19.4	18.3	12.5	8.9	8.5	70	39	40
18. VI	15 ⁰⁰	10/10 Cu cong Sc	IX	25.3	25.5	25.2	17.6	16.2	15.7	55	50	49
			X	23.7	25.9	25.7	21.6	17.5	16.6	74	52	50
			XI	23.5	25.8	25.0	17.5	17.2	16.1	60	52	50
19. VI	16 ⁰⁰	2/10 Ac Cu cong	IX	22.5	23.0	22.2	16.6	15.1	14.2	60	54	53
			X	21.8	22.6	22.0	19.1	15.4	14.7	73	56	55
			XI	21.8	21.4	21.8	16.1	15.6	14.6	61	61	56
20. VI	10 ⁰⁰	2/10 Cu hum	IX	20.6	20.0	19.3	18.9	14.2	12.7	77	61	57
			X	21.2	21.0	21.2	13.9	16.0	13.1	63	55	51
			XI	17.4	20.2	19.8	14.9	13.4	12.9	75	57	56
20. VI	11 ⁰⁰	2/10 Cu hum	IX	28.7	22.6	22.0	20.1	12.1	11.1	51	44	42
			X	22.6	22.0	21.9	17.3	12.6	11.8	62	47	44
			XI	19.3	21.2	21.6	12.7	11.9	12.0	56	48	47
20. VI	12 ⁰⁰	2/10 Cu hum	IX	23.6	22.8	22.6	10.9	10.6	10.0	37	38	36
			X	23.6	22.9	22.5	14.9	11.3	10.8	51	41	39
			XI	19.3	22.0	22.5	12.3	10.5	10.3	55	39	38
21. VI	9 ⁰⁰	10/10 As Ac	IX	20.2	20.0	19.8	18.1	16.2	15.3	77	69	66
			X	19.2	20.4	20.5	18.3	15.7	15.5	82	65	64
			XI	19.0	20.3	20.5	17.2	16.1	15.5	78	67	64
21. VI	10 ⁰⁰	2/10 Cl Ac Cu	IX	28.5	24.5	24.0	17.7	15.7	15.2	45	51	51
			X	23.6	24.3	24.5	20.6	16.1	15.9	70	53	51
			XI	21.6	24.4	24.2	20.1	17.0	16.0	78	56	53
21. VI	11 ⁰⁰	10/10 Cl Ac	IX	27.2	27.7	27.2	15.9	16.3	15.0	44	43	41
			X	25.2	27.0	27.4	18.5	15.7	15.5	58	43	42
			XI	26.4	27.0	27.3	15.8	15.9	15.1	45	44	41
21. VI	13 ⁰⁰	10/10 Cl Ac	IX	30.8	30.0	28.7	19.3	18.5	17.4	44	44	44
			X	27.9	29.6	29.9	21.8	17.9	17.4	57	44	43
			XI	27.6	28.8	28.0	20.0	17.8	17.1	53	45	43
22. VI	8 ⁰⁰	2/10	IX	32.8	30.2	29.4	21.7	18.8	18.5	44	44	45
			X	28.3	29.2	29.0	25.5	19.8	18.4	66	48	45
			XI	28.8	29.0	30.0	19.5	18.2	17.4	40	45	41
22. VI	10 ⁰⁰	2/10 Ac	IX	33.5	33.4	32.8	20.0	18.5	16.0	39	36	33
			X	31.1	32.4	32.2	25.2	19.9	18.4	55	41	38
			XI	32.1	32.6	32.6	17.9	18.2	17.8	37	36	35

Приложение V

Температурно-почвенные наблюдения во время В.-Услонской экспедиции.

Пункт № 2

Дата	Часы	Облачность	Г л у б и н а		
			1.5 см	5 см	10 см
12.VI	8 ³⁰	0/0	26.0	21.6	18.8
	8 ⁵⁵	0/0	35.2	21.0	18.7
	9 ¹³	0/0	26.0	21.0	18.7
	9 ²⁰	1/1 Fr Cu	29.1	21.3	18.8
	10 ¹³	1/1 Fr Cu	29.1	22.0	19.0
	10 ³²	2/2 Cu	29.2	22.0	19.1
	16 ²⁰	7/7 Cu Fr Cu	27.3	24.8	23.0
	16 ³³	7/7 Cu Fr Cu	28.8	24.8	22.9
13.VI	17 ⁰⁰	7/7 Cu Fr Cu	27.0	24.5	22.8
	8 ⁰⁰	5/5 Cu hum	31.2	22.2	17.9
	8 ²⁰	5/5 Cu hum	32.5	24.5	18.0
	8 ⁵⁰	5/5 Cu hum	34.2	23.5	18.0
	17 ⁰⁰	5/5 Ac	29.0	29.5	23.2
14.VI	17 ⁵⁵	5/2 Cl Cu	24.5	23.5	22.2
15.VI	17 ²⁶	7/3 Ac Cu	24.0	24.5	—
	18 ⁰¹	7/3 Ac Cu	23.2	24.1	—
16.VI	4 ³⁰	8/0 Ac As	11.5	14.3	—
	4 ³⁵	8/0 Ac As	12.5	14.3	—
	4 ⁵⁰	8/0 Ac As	12.5	14.3	—
	16 ⁵³	0/0 Cu hum	26.5	25.4	22.5
18.VI	8 ⁴⁵	7/0 Cl	25.8	21.1	19.0
	9 ⁴⁵	8/3 Cl Ac Cu	29.0	23.5	20.5
	10 ⁴¹	9/1 Ac Cu	28.0	24.0	21.5
	12 ⁰⁵	8/0 Ac	30.6	25.0	22.1
20.VI	8 ⁰¹	0/0	21.2	18.4	17.7
	9 ³⁰	2/3 Cu	23.2	20.7	19.8
21.VI	16 ⁴⁵	6/5 Cl Cu cong	25.0	25.5	22.7
21.VI	17 ⁰⁵	6/5 Cl Cu cong	30.2	27.3	25.3
22.VI	8 ⁰⁵	2/0 Ac	29.5	25.5	22.6
23.VI	16 ⁵⁵	2/2 Cu hum	40.5	36.1	28.3

Пункт № 3

Дата	Часы	Облачность	Г л у б и н а		
			1.5 см	5 см	10 см
13.VI	11 ⁴⁰	9/8 Cu	29.2	23.6	21.0
	12 ²⁴	5/5 Cu	27.0	24.1	21.3
14.VI	7 ⁵³	[10/0 Cs	18.7	16.8	15.5
	11 ¹³	[10/2 Cl Cu	25.5	24.0	18.5
	12 ⁰⁰	8/0 Cl Cu Fr Cu	26.7	25.5	19.8
	8 ²³	6/0 Cl	18.0	14.8	15.0
15.VI	10 ¹⁰	[10/4 Cl Cu	21.4	16.0	16.0
	12 ²⁵	[10/6 Cl Cu	25.4	18.2	17.5
	9 ⁰⁰	0/0	18.2	17.1	13.4
	10 ¹²	2/3 Cu hum	21.4	19.4	14.1
18.VI	11 ¹⁶	8/8 Cu	23.6	21.6	14.7
	15 ⁵⁰	9/8 Ac Cu cong Sc	30.7	23.6	22.4
	16 ¹⁸	9/8 Ac Cu cong Sc	27.6	23.4	21.7
	17 ⁰⁰	10/8 Ac Cu cong Sc	27.0	23.2	21.5
	16 ⁵²	8/5 Ac Cu cong	21.5	19.7	19.5
19.VI	10 ¹²	0/0 Cu hum	21.5	19.4	16.2
20.VI	10 ³³	0/0 Cu hum	22.7	19.9	16.4
	11 ¹¹	0/0 Cu hum	24.5	21.6	16.7
	11 ⁴⁵	0/0 Cu hum	25.0	22.5	17.3
	12 ²⁰	4/4 Cu hum	26.0	23.3	17.7
	12 ⁵⁵	4/4 Cu hum	26.7	23.8	18.2
21.VI	13 ⁰⁷	4/4 Cu hum	26.9	24.1	18.3
	13 ¹⁶	4/4 Cu hum	27.2	24.2	18.4
	9 ⁵²	[10/0 Ac As	24.4	24.0	16.7
	10 ⁵⁴	[10/0 Cl Ac	27.0	26.0	18.0
22.VI	12 ¹⁵	[10/0 Cl Ac	29.0	28.5	19.0
	13 ³²	[10/0 Cl Ac	30.5	29.4	20.0
	9 ³²	0/0	31.0	26.8	20.7
	11 ¹²	2/0 Ac	35.0	30.2	23.0
	15 ⁵⁰	7/0 Cl Ac Cu cong	37.0	31.7	23.6
	9 ⁰⁵	2/0 Ac	35.6	26.4	24.6
	9 ³²	0/0	37.3	27.5	24.7
	10 ²²	0/0	41.5	28.8	26.3
	10 ³¹	0/0	43.2	29.2	26.7
	10 ⁵³	2/2 Cu	41.6	29.8	23.8
23.VI	12 ²⁵	2/2 Cu hum	42.2	33.8	25.4

Примечание: нами производились наблюдения температуры также на глубине 15 см; однако полученные данные лишь немного отличались от данных на глубине 10 см и мы их не внесли в таблицы.

А. Н. ХОВАНСКИЙ

ПРИБЛИЖЕННОЕ РЕШЕНИЕ ОДНОГО ТРАНСЦЕНДЕНТНОГО УРАВНЕНИЯ ИЗ ТЕОРИИ УСТОЙЧИВОСТИ ПРЯМОУГОЛЬНОЙ ПЛАСТИНКИ

При изучении выпучивания прямоугольной пластинки, у которой три стороны свободно оперты, а четвертая свободна, Тимошенко(1) получает трансцендентное уравнение, которому легко придать вид

$$\sqrt{\frac{a}{b}\sqrt{\kappa}-m} \left[\frac{a}{b}\sqrt{\kappa} + m(1-\nu) \right]^2 \operatorname{th} \frac{\pi b}{a} \sqrt{m \frac{a}{b}\sqrt{\kappa} + m^2} = \\ = \sqrt{\frac{a}{b}\sqrt{\kappa} + m} \left[\frac{a}{b}\sqrt{\kappa} - m(1-\nu) \right]^2 \operatorname{tg} \frac{\pi b}{a} \sqrt{m \frac{a}{b}\sqrt{\kappa} - m^2}.$$

Для сжатости дальнейших выкладок обозначим

$$\frac{a}{b}\sqrt{\kappa} = x; 1-\nu = c; \frac{\pi b}{a} = \lambda.$$

Так как разложение котангенса в ряд сходится быстрее, чем разложение тангенса, и притом в большом промежутке, то придадим уравнению вид

$$\sqrt{x-m}(x+cm)^2 \operatorname{ctg} \lambda \sqrt{mx-m^2} = \sqrt{x+m}(x-cm)^2 \operatorname{cth} \lambda \sqrt{mx+m^2}$$

Заменим теперь ctg и cth их разложениями, сходящимися для аргумента по модулю меньшего π

$$(x+cm)^2 \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{2^{2n}}{(2n)!} B_{2n} \lambda^{2n} (mx-m^2)^n =$$

$$-(x-cm)^2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^{2n}}{(2n)!} B_{2n} \lambda^{2n} (mx+m^2)^n = 0, \text{ где } B_{2n} \text{ числа Бернулли.}$$

Перепишем последнее уравнение в виде

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^{2n}}{(2n)!} B_{2n} \lambda^{2n} m^n [(c^2 m^2 - 2cmx + x^2)(m+x)^n - (c^2 m^2 + 2cmx + x^2)(m-x)^n] = 0.$$

Раскрывая выражение, стоящее в квадратных скобках, получаем следующее:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^{2n}}{(2n)!} B_{2n} \lambda^{2n} m^{n-1} [(-2c + C_n^1 c^2) m^{n+1} + (C_n^1 - 2C_n^2 c + C_n^3 c^2) m^{n-1} x^2 + (C_n^3 - 2C_n^4 c + C_n^5 c^2) m^{n-3} x^4 + (C_n^5 - 2C_n^6 c + C_n^7 c^2) m^{n-5} x^6 + \dots] = 0.$$

Окончательно имеем:

$$-2c + \frac{1}{3} m^2 c (c-2) \lambda^2 + \dots + \left[\frac{1}{3} \lambda^2 - \frac{2}{45} m^2 (1-c) \lambda^4 + \dots \right] x^2 + \left[\frac{2}{945} m^2 \lambda^6 - \dots \right] x^4 + \dots = 0.$$

Положив $x^2 = 1 + \frac{n_1}{\lambda^2}$, имеем, приравнявая нулю коэффициент при λ^0 ,

$$-2c + \frac{n_1}{3} = 0; \quad n_1 = 6(1-v); \quad x^2 = 1 + \frac{6(1-v)}{\lambda^2}.$$

При $v = \frac{1}{4}$ получаем $x^2 = 1 + \frac{9}{2\lambda^2}$, откуда $\kappa = \frac{9}{2\pi^2} + \frac{b^2}{a^2} = \frac{b^2}{a^2} + 0,456$.

Это приближенное соотношение указано у Тимошенко (стр. 303), причем происхождение числа 0,456 им не разъяснено.

Положив $x^2 = n_0 + \frac{n_1}{\lambda^2}$ и выбрав n_0 так, чтобы уничтожить в уравнении член с λ^2 , имеем попрежнему $n_1 = 6(1-v)$ и кроме того

$$\frac{m^2}{3} c(c-2) + \frac{n_0}{3} - \frac{2m}{45} 6(1-c)c + \frac{2m^3}{945} \cdot 36c^2 = 0;$$

$$n_0 = \frac{m^2(1-v)(27+71v)}{35}; \quad x^2 = \frac{m^2(1-v)(27+71v)}{35} + \frac{6(1-v)}{\lambda^2}.$$

Отсюда

$$\kappa = \frac{m^2(1-v)(27+71v)}{35} \frac{b^2}{a^2} + \frac{6(1-v)}{\pi^2}.$$

При $m=1, v=\frac{1}{4}$ имеем $\kappa = 0,9589 \frac{b^2}{a^2} + 0,456$.

Для $\frac{a}{b} > 1$ это приближение лучше подходит к табличным значениям, чем приближение Тимошенко. Это видно из следующей таб-

лицы, вычисленной для $v=\frac{1}{4}$. Во втором столбце таблицы приведены табличные значения k , имеющиеся у Тимошенко.

$\frac{a}{b}$	k	$\frac{b^2}{a^2} + 0,456$	$0,9589 \frac{b^2}{a^2} + 0,456$
1,0	1,440	1,456	1,415
1,2	1,135	1,150	1,122
1,4	0,952	0,966	0,945
1,6	0,835	0,847	0,831
1,8	0,755	0,765	0,752
2,0	0,698	0,706	0,696
2,5	0,610	0,616	0,609
3,0	0,564	0,567	0,563
4,0	0,516	0,519	0,516
5,0	0,494	0,496	0,494

Отметим, что у Тимошенко имеется при $\frac{a}{b} = 5,0$ ошибочное значение: $k = 0,506$.

ЛИТЕРАТУРА

С. П. Тимошенко. Пластинки и оболочки, стр. 302—303, ОГИЗ, Гостехиздат, 1948.

Поступила в редакцию 16. II. 49.

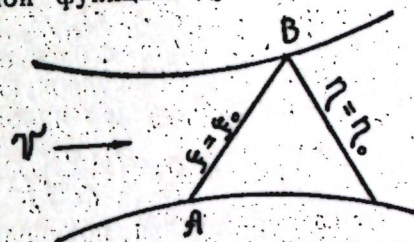
Сектор математики ФТИ

Г. Г. ТУМАШЕВ

ПОСТРОЕНИЕ СОПЛА ПО РАСПРЕДЕЛЕНИЮ СВЕРХЗВУКОВЫХ СКОРОСТЕЙ ВДОЛЬ СТенок

Рассмотрим плоское движение газа по соплу со сверхзвуковой скоростью. Допустим, что на характеристике первого семейства $\xi = \xi_0$ заданы величина и направление скорости, а на стенках сопла величина скорости v является заданной функцией дуговых абсцисс 1° , отсчитываемых от точек А и В (фиг. 1.). Требуется определить форму стенок. Академик С. А. Христианович в своей работе дал метод решения подобной задачи, считая скорость постоянной вдоль линии тока.

Этот метод легко может быть обобщен на случай произвольного распределения скорости. Для этого воспользуемся общими интегралами приближенных уравнений плоского безвихревого течения идеального газа



Фиг. 1.

$$\psi = [f_1(\xi) + f_2(\eta)] : (\xi + \eta), \quad (1)$$

$$\varphi = A(\xi + \eta) [f_2(\eta) - f_1(\xi)] + 2A \left[\int f_1(\xi) d\xi - \int f_2(\eta) d\eta \right], \quad (2)$$

$$\text{где } 2\xi = \sigma - \beta, \quad 2\eta = \sigma + \beta, \quad (3)$$

$$\sigma = \int_1^\lambda V \frac{\lambda^2 - 1}{1 - \lambda^2 \frac{x-1}{x+1}} \frac{d\lambda}{\lambda} \quad (4)$$

Будем считать, что вдоль стенок канала: $\psi = 0$ и $\psi = Q$; φ — известная функция дуги σ или величины σ . Пусть вдоль характеристики $\xi = \xi_0$: $\psi = \psi_2(\eta)$. Тогда — на основании (1)

$$f_2(\eta) = \psi_2(\eta) (\xi_0 + \eta) - f_1(\xi_0), \quad f_1(\xi) = -\psi_2(\sigma - \xi) (\xi_0 + \sigma - \xi) + f_1(\xi_0). \quad (5)$$

Подставив эти выражения в (2), получим уравнение для определения зависимости между σ и ξ .

Угол β наклона вектора скорости к оси x найдется из (3).

Вид контура легко определяется по формулам, приведенным в упомянутой работе С. А. Христиановича:

$$\begin{aligned} dx &= p(\sigma) \cos \beta d\varphi - q(\sigma) \sin \beta \alpha \psi, \\ dy &= p(\sigma) \sin \beta d\varphi + q(\sigma) \cos \beta \alpha \psi. \end{aligned} \quad (6)$$

1. А. Н. Хованский. Приближенное решение одного трансцендентного уравнения из теории устойчивости прямоугольной пластинки	129
2. Г. Г. Тумашев. Построение сопла по распределению сверхзвуковых скоростей вдоль стенок	133

ОПЕЧАТКИ

Страница	Строка	Напечатано	Должно быть
6	3 снизу	В формуле (1.21) $b_{a\beta}^* - \sqrt{\frac{a}{a^*}} [\dots]$	$b_{a\beta}^* = -\sqrt{\frac{a}{a^*}} [\dots]$
12	9 снизу	В формуле (2.23) $C_{\tau\beta}^x$	$C_{\tau\beta}$
25	2 снизу	В формуле (3.18) $(N^x + b_{\tau}^{*3} C^{2\tau} \omega_3) n_a^o$	$(N^x + b_{\tau}^{*3} C^{2\tau} \omega_3 H) n_a^o$
93	8 снизу	элементов ρ и ν по широте	ρ по x и y
93	10 снизу	$\frac{\partial v}{\partial x}$	$\frac{\partial v}{\partial y}$
103	7 сверху	60—70%	60—70°
114	таблица 18	Δ м/с	Δv м/с
117	4 снизу	13 VI	23 VI

Заказ 0191