

АКАДЕМИЯ НАУК СССР

КАЗАНСКИЙ ФИЛИАЛ

**ИЗВЕСТИЯ
КАЗАНСКОГО ФИЛИАЛА**

серия физико-математических и технических наук

1



1948

П-147 АКАДЕМИЯ НАУК СССР

КАЗАНСКИЙ ФИЛИАЛ

ИЗВЕСТИЯ

КАЗАНСКОГО ФИЛИАЛА

СЕРИЯ ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИХ И ТЕХНИЧЕСКИХ НАУК

Выпуск 1

Печатается по постановлению редакционно-издательского совета Казанского
Филиала Академии Наук СССР

Главный редактор академик А. Е. Арбузов
Отв. редактор проф. Х. М. Муштари.

П 12377

ЦЕНТРАЛЬНАЯ НАУЧНАЯ
БИБЛИОТЕКА
А. Н. Киргизской ССР

МАГНИТОСПИНОВЫЙ РЕЗОНАНС В РАСТВОРАХ ТРЕХ- ХЛОРИСТОГО ХРОМА.

Б. М. КОЗЫРЕВ.

Явление магнитоспинового резонанса, теоретически рассматривавшееся Кронигом [1], Френкелем [2] и др. [3], экспериментально изучалось главным образом на твердых парамагнитных солях ионов IV периода Менделеевской системы [4]. Обнаружено оно также и в ряде металлов [5], в некоторых растворах парамагнитных солей [6], [7] и наконец, в свободных радикалах [8].

Следует думать, что резонанс между частотой Ларморовой прецессии результирующего момента парамагнитной частицы (атома, иона, радикала) в постоянном магнитном поле H_0 с частотой слабого переменного магнитного поля h , наложенного перпендикулярно к направлению постоянного поля, должен вызывать возникновение абсорбции и соответствующее изменение восприимчивости в любом парамагнетике.

Однако, экспериментальное обнаружение этого эффекта путем измерения зависимости парамагнитной абсорбции от напряженности постоянного поля H_0 при заданной частоте ν осциллирующего поля h оказывается далеко не всегда доступным. Это, повидимому, следует приписать влиянию магнитных и электрических взаимодействий между частицами поглощающего вещества; внутренние поля, создаваемые этими взаимодействиями, могут так сильно расширить кривую абсорбции $Q = Q(H_0)$, что сделают резонанс практически не наблюдаемым.

С этой точки зрения изучение магнитоспинового резонанса в жидких растворах представляет большой интерес, так как может пролить свет на природу внутренних полей, определяющих ширину абсорбционной кривой и — косвенным образом — на величину и строение сольватных оболочек, окружающих в растворе парамагнитные ионы.

До настоящего времени магнитоспиновый резонанс в жидких растворах был открыт лишь для солей двухвалентного марганца Завойским [6] и для солей двухвалентной меди и ряда редкоземельных элементов автором настоящей работы [7].

С целью расширить круг изучаемых веществ автор предпринял попытку обнаружить магнитоспиновый резонанс в растворах солей трехвалентного хрома.

Среди твердых соединений иона Cr^{+++} магнитоспиновый резонанс был открыт и изучен в безводном треххлористом хrome $CrCl_3$ [4].

Полуширина¹ резонансной кривой этого вещества, определенная на ряде частот осциллирующего магнитного поля от $\sim 5 \cdot 10^7$ до $\sim 3 \cdot 10^8$ герц, оказалась равной примерно 90 эрстед, т. е. более узкой, чем в безводных солях иона Mn^{++} .

Однако, в гидратированных солях Cr^{+++} , как фиолетовой, так и темнозеленой модификации, по крайней мере при частотах до 10^8 герц и при комнатной температуре, резонансную абсорбцию почти не удается измерить. Автором были изучены следующие соединения: темнозеленый сульфат хрома, темнозеленый и фиолетовый хлорид, фиолетовый нитрат и, наконец, фиолетовые хромокалиевые квасцы. Получающиеся результаты в силу малости эффекта настолько неточны, что позволяют судить о полуширине кривых лишь весьма грубым образом; можно однако утверждать, что полуширина во всех названных соединениях должна быть больше 300 эрстед.

Совокупность этих данных показывает, что, повидимому, электрические взаимодействия иона Cr^{+++} с молекулами воды вызывают весьма сильное расширение резонансной кривой абсорбции. В силу этого представлялось заранее мало вероятным, что магнитоспиновый резонанс может быть обнаружен в водных растворах солей Cr^{+++} . Действительно, произведенные при частоте осциллирующего магнитного поля $6,88 \cdot 10^7$ герц исследования водных растворов темнозеленого и фиолетового хлоридов хрома высокой концентрации (50—30%) показали, как и в твердых гидратированных солях, лишь весьма трудно измеримый эффект.

С другой стороны, исследования спиртоводных растворов солей Mn^{++} указывают, что присутствие молекул спирта в растворителе изменяет резонансную кривую. Поэтому автор обратился к изучению магнитоспинового резонанса в спиртовых растворах солей хрома. При той же частоте $6,88 \cdot 10^7$ герц в этих растворах обнаружился хотя и небольшой, но все таки доступный измерениям эффект.

Для исследования был избран хлорид хрома. Растворы готовились из химически чистого препарата треххлористого хрома темнозеленой модификации состава $[Cr(H_2O)_4Cl_2]Cl \cdot 2H_2O$. Навеска растворялась в абсолютном этиловом спирте; тотчас после приготовления исходного раствора из него готовились путем разбавления тем же абсолютным спиртом растворы низших концентраций. Эти растворы наливались в плотно закупориваемые стеклянные пробирки подходящего диаметра, помещавшиеся в поле измерительной катушки. Измерения производились со свежес приготовленными растворами.

Всего было изучено 4 концентрации: 0,6-молярная, 0,3-молярная, 0,15-молярная и 0,075-молярная. При переходе к более низким концентрациям получить четкие результаты, к сожалению, оказалось слишком затруднительным из-за малости измеряемого эффекта; поэтому соответствующие данные не приводятся в настоящей работе.

Метод измерения парамагнитной абсорбции применялся тот же, что был принят при ряде предшествовавших исследований [4], [7]; имея в виду это, мы не останавливаемся здесь на его описании.

Две серии опытов дали достаточно хорошее согласие между собою.

Полученные результаты приведены на таблице № 1.

¹ Под „полушириной“ здесь и в дальнейшем мы подразумеваем расстояние по оси H от точки максимума абсорбции ($Q = Q_{max}$) до точки, лежащей вправо от максимума и соответствующей $Q = \frac{1}{2} Q_{max}$.

Парамагнитная абсорбция в спиртовых растворах треххлористого хрома в зависимости от напряженности постоянного перпендикулярного магнитного поля.

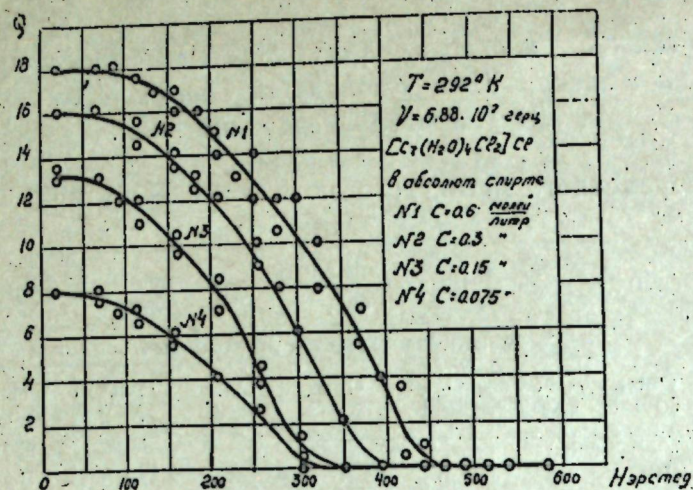
Частота переменного магнитного поля $\nu = 6,88 \cdot 10^7$ герц; $T = 292^\circ K$.

Концентрация	C=0,6 молей литр		0,3 молей литр		0,15 молей литр		0,075 молей литр	
	Парамагнитная абсорбция в условных единицах							
H_0 в эрстедах	Опыт № 1	Опыт № 2	Опыт № 1	Опыт № 2	Опыт № 1	Опыт № 2	Опыт № 1	Опыт № 2
20	18	18	16	16	13	13,5	8	8
67	18	18	16	16	13	13	7,5	8
90	18	18	—	—	12	—	7	—
114	17,5	17,5	14,5	15,5	11	12	6,5	7
137	17	17	—	—	—	—	—	—
161	16	17	13,5	14	9,5	10,5	5,5	6
184	—	16	12,5	13	—	—	—	—
208	14	15	12	12	7	8,5	4	4
231	13	—	—	—	—	—	—	—
255	12	14	9	10	3,5	4,5	1,5	1,5
278	10,5	12	8	8	—	—	—	—
302	—	12	6	6	0,5	1,5	0	0
325	8	10	—	—	—	—	—	—
349	—	—	2	2	0	0	0	0
372	5,5	7,5	—	—	—	—	—	—
396	4	—	0	0	0	0	0	0
419	0,5	3,5	—	—	—	—	—	—
443	0	1	0	0	—	—	—	—
466	0	0	—	—	—	—	—	—
490	0	0	0	0	—	—	—	—
513	0	0	—	—	—	—	—	—
537	0	0	—	—	—	—	—	—
560	0	0	—	—	—	—	—	—
584	0	0	—	—	—	—	—	—
725	0	0	0	0	0	0	0	0

В первом столбце таблицы даны величины напряженности постоянного магнитного поля в эрстедах, а в следующих столбцах — соответствующие им значения парамагнитной абсорбции, выраженные в условных единицах. Необходимо при этом отметить, что условная единица, может быть, несколько изменяется при переходе от одной концентрации к другой. Поэтому делать вполне уверенные заключения о зависимости величины поглощения на ион от концентрации на основании имеющихся данных кажется еще преждевременным.

На основании данных таблицы 1 вычерчены кривые парамагнитной абсорбции в перпендикулярных полях H_0 , приведенные на чертеже 1.

Мы видим, что по мере разведения эти кривые заметным образом сужаются, оставаясь, однако, даже и при малых концентрациях весьма широкими. Как ширина кривых, так и сравнительно небольшая величина эффекта не позволяют при данной частоте установить положение максимума абсорбции; для этого необходимы были бы измерения при более высоких частотах и при большей чувствительности режима генератора к изменениям ваттной нагрузки. Однако, для оценки полуширины кривых это не оказывается существенным,



Фиг. 1.

если мы посмотрим каково должно быть при нашей частоте „теоретическое“ положение максимума абсорбции:

$$H_{\max} = \frac{h\nu}{g\mu_0},$$

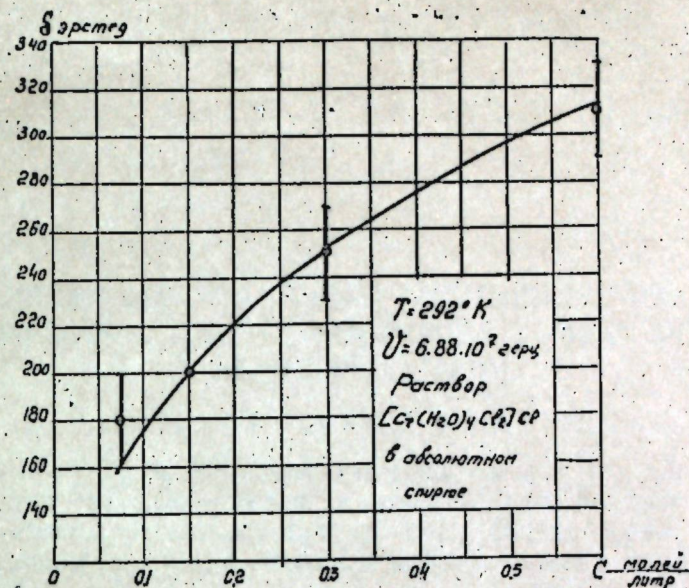
где ν есть частота генератора, g — фактор Ланде, μ_0 — магнетон Бора и h — постоянная Планка. При допущении, что g имеет величину порядка 2 и что на положение максимума не влияет слишком грубо время релаксации, для частоты $\nu = 6,88 \cdot 10^7$ герц H_{\max} должно быть равным приблизительно 24 эрстедам.

Эта величина слишком мала, чтобы ошибка в ее определении даже в 100% могла существенно образом исказить выводы о зависимости полуширины наших экспериментальных кривых от концентрации. Зависимость эта оказывается, в общем, весьма слабой.

Если для $C = 0,6 \frac{\text{молей}}{\text{литр}}$ полуширина δ из 1-й кривой равна ~ 330 эрстед, а из 2-й кривой ~ 290 эрстед, т. е. δ средн. = 310 ± 20 эрстед, то для $C = 0,3 \frac{\text{моля}}{\text{литр}}$ δ средн. = 250 ± 20 эрстед, для $C = 0,15 \frac{\text{моля}}{\text{литр}}$ δ средн. = 200 ± 20 эрстед и для $C = 0,075 \frac{\text{моля}}{\text{литр}}$ δ средн. = 185 ± 20 эрстед.

Убыль полуширины с разведением изображена графически на черт. 2. Как видно из этого чертежа, зависимость $\delta = \delta(C)$ довольно хорошо описывается уравнением $\delta = k\sqrt{C}$, согласно которому вычерчена на чертеже кривая.

Таким образом, в случае растворов треххлористого хрома в этиловом спирте разведение меньше влияет на полуширину резонансных кривых, чем в случае водных растворов солей двухвалентной меди. Для этих последних автором было найдено, что полуширина кривой абсорбции пропорциональна корню квадратному из концентрации.



Фиг. 2.

Нам представляется довольно вероятным следующее объяснение наблюдаемого различия в зависимости δ от C . Устранение вырождения основного уровня иона Cr^{++} , обладающего спином $1/2$, может, согласно теореме Крамерса [9], осуществляться лишь магнитными полями, но не электрическими. Поэтому ширина кривых $Q = Q(H_0)$ для растворов солей меди должна зависеть лишь от магнитных взаимодействий между ионами Cr^{++} . Для иона же Cr^{+++} , обладающего спином $3/2$, вырождение основного уровня может частично устраняться и электрическими полями. Таким образом, в этом случае ширина кривых определяется, вероятно, не только магнитными взаимодействиями, но и электрическими.

Поскольку магнитное взаимодействие убывает с уменьшением концентрации парамагнитных ионов, а электрические поля, создаваемые сольватными оболочками этих ионов, вряд ли так существенно изменяются с разведением, медленность хода кривой $\delta = \delta(C)$ для хрома сравнительно с той же кривой для меди качественно становится объяснимой.

В заключение отметим, что нами производятся дальнейшие измерения парамагнитной абсорбции в растворах солей хрома.

Поступила в редакцию
5.XI 1947 г.

Сектор физики ФТИ.

ЛИТЕРАТУРА.

1. R. de L. Kronig, Physica, 5,65 (1938).
2. Я. И. Френкель, ЖЭТФ, 15, 409 (1945).
3. С. А. Альшулер, Е. К. Завойский, Б. М. Козырев, ЖЭТФ 17, 1123 (1947).
4. Е. К. Завойский, ЖЭТФ, 16, вып. 17, 603 (1946).
5. Е. К. Завойский. Докторская диссертация, ФИАН, (1944).
6. Е. К. Завойский, ЖЭТФ, 15, 344 (1945).
7. Б. М. Козырев, ДАН, 60, 567 (1948 г.).
8. Б. М. Козырев и С. Г. Салихов, ДАН, 58, 1023 (1947).
9. Kramers, Atti Congr. dei Fisici, Como, 1927.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ НАПРЯЖЕННОГО СОСТОЯНИЯ ПРИ УПРУГОМ
РАВНОВЕСИИ В ПОГРАНИЧНОЙ ЗОНЕ ТОНКИХ ОБОЛОЧЕК
НЕКОТОРЫХ ТИПОВ.

Х. М. МУШТАРИ и С. Г. ВИНОКУРОВ *

В статье [1] Х. М. Муштари был предложен метод приближенного определения упругого усилия и момента в пограничной зоне оболочки с погрешностью порядка h_0^{2r} по сравнению с единицей. Здесь h_0 — отношение толщины оболочки к наименьшему из других линейных размеров; $r = \frac{1}{2}$, если граничный контур не имеет точек соприкосновения с асимптотическими линиями срединной поверхности оболочки. В этом случае погрешность предложенного решения составляет величину порядка h_0 по сравнению с единицей, т. е. не превышает погрешность, присущую теории тонких оболочек, опирающейся на гипотезу Кирхгофа-Лява. Это обстоятельство, на наш взгляд, существенно, так как приближенные решения задачи равновесия пограничной зоны оболочки, основанные на пренебрежении величинами порядка $\sqrt{h_0}$ по сравнению с единицей и предложенные И. В. Геккелером [2] и др. авторами, не могут считаться достаточно надежными, что было отмечено [3] Х. М. Муштари. Поэтому мы сочли небезинтересным дать в настоящей статье приложение метода к решению некоторых частных задач, представляющих и самостоятельный интерес, а также уточнение решения для случая края, находящегося под действием самоуравновешивающихся сил и подробное изложение решения с помощью функции напряжений.

При этом для краткости изложения мы сохраняем обозначения статьи [1] и ссылаемся на выведенные там формулы, сохраняя их нумерацию, а для обозначения параграфов настоящей статьи употребляем римские цифры.

1. Формулы второго приближения для меньших усилий.

Меньшие усилия T_*^n , T_*^m , N^1 и N^2 , которые являются величинами одного порядка с $h_0^r T_*^n$, определяются по формулам (3.10), если допустить погрешность порядка h_0^r по сравнению с единицей. Для определения этих усилий с погрешностью самое большее порядка h_0^{2r} по сравнению с единицей необходимо обратиться к уравнениям равновесия (2.7 и 2.8), содержащим погрешность, не превышающую погрешность теории, основанной на гипотезах Кирхгофа-Лява. Прежде всего дадим вывод уравнения (2.8), приведенного в статье [1] без доказательства.

* §§ I—II, IV написаны Х. М. Муштари,
§ III—С. Г. Винокуровым.

Умножая (1.3) на $\frac{Di}{h'}$ и складывая с (1.8) и учитывая обозначения (2.5), приходим к уравнению

$$\Delta_{\beta} T_{*}^{s\beta} - b_{\beta}^{s\beta} \left\{ \frac{Di}{h'} c^{j\beta} c^{ak} \nabla_k \epsilon_{j\alpha} + \nabla_k M^{\beta k} \right\} = b_{\beta}^{s\beta} Y_j c^{\beta j} - X^s = Z^s,$$

которое с помощью соотношений (1.6) и (1.7) может быть приведено к виду

$$\Delta_{\beta} T_{*}^{s\beta} - b_{\beta}^{s\beta} i h' \left\{ c^{j\beta} c^{ak} (a_{j\gamma} a_{\alpha\delta} - \sigma c_{j\gamma} c_{\alpha\delta}) \nabla_k T_{*}^{\gamma\delta} - \frac{Di}{h'} (a^{\beta\alpha} a^{kt} + \sigma c^{\beta\alpha} c^{kt}) \nabla_k \mu_{t\alpha} \right\} = Z^s.$$

Но

$$c^{j\beta} c_{j\gamma} = a_{\gamma}^{\beta}, \quad c^{ak} c_{\alpha\delta} = a_{\delta}^k, \quad a^{\beta\alpha} = c^{j\beta} c^{\gamma\alpha} a_{j\gamma}, \dots$$

Следовательно, предыдущее уравнение преобразуется к виду

$$\nabla_{\beta} T_{*}^{s\beta} + b_{\gamma}^{s\beta} h' i \sigma \nabla_{\delta} \bar{T}_{*}^{\gamma\delta} - i b_{\beta}^{s\beta} h' c^{j\beta} c^{ak} a_{j\gamma} a_{\alpha\delta} \nabla_k T_{*}^{\gamma\delta} = Z^s,$$

где $\bar{T}_{*}^{\gamma\delta}$ — величина, сопряженная $T_{*}^{\gamma\delta}$.
Далее имеем

$$c^{\gamma t} c^{\delta\alpha} \nabla_{\delta} \mu_{t\alpha} = -c^{\alpha\delta} b_{\delta}^{\gamma} c^{jk} \nabla_k \epsilon_{\alpha j}.$$

Поэтому

$$i b_{\gamma}^{s\beta} h' \sigma \nabla_{\delta} \bar{T}_{*}^{\gamma\delta} = i b_{\gamma}^{s\beta} h' \sigma \left(\nabla_{\delta} T_{*}^{\gamma\delta} - \frac{Di}{h'} c^{\alpha\delta} b_{\delta}^{\gamma} c^{jk} \nabla_k \epsilon_{\alpha j} \right).$$

Второй член в правой части этого равенства по сравнению с главными членами уравнения $\nabla_1 T_{*}^{s1}$ и $\nabla_2 T_{*}^{s2}$ содержит множитель порядка h_0^{2-r} , поэтому, вводя погрешность этого же порядка по сравнению с единицей, можно в рассматриваемом уравнении $h' \nabla_{\delta} \bar{T}_{*}^{\gamma\delta}$ заменить через $h' \nabla_{\delta} T_{*}^{\gamma\delta}$. Таким образом приходим к уравнению

$$\nabla_{\beta} T_{*}^{s\beta} + i h' b_{\beta}^{s\beta} (\sigma \nabla_{\delta} T_{*}^{\beta\delta} - c^{j\beta} c^{ak} a_{j\gamma} a_{\alpha\delta} \nabla_k T_{*}^{\gamma\delta}) = Z^s.$$

Но

$$\nabla T_{*}^{\beta\delta} = -i h' b_{\delta}^{\beta} (\sigma \nabla_{\mu} T_{*}^{\beta\mu} - c^{j\beta} c^{ak} a_{j\gamma} a_{\alpha\delta} \nabla_k T_{*}^{\gamma\delta}) + Z^{\beta}.$$

Поэтому с погрешностью порядка h_0^{2-r} в однородных уравнениях и порядка h_0 по сравнению с единицей в общем случае членом, имеющим множитель σ , в рассматриваемых уравнениях можно пренебречь. Таким образом, получаем приближенные уравнения (2.8). Эти уравнения совместно с уравнением (2.7) образуют полную систему уравнений относительно комплексных усилий и могут служить для определения этих последних не только в пограничной зоне, но и во всей оболочке.

Ограничиваясь далее рассмотрением напряженного состояния в пограничной зоне упругой оболочки вблизи контура $x^1 = \text{const}$, или $\xi = 0$ и учитывая, что при этом

$$T_{*}^{11} \sim T_{*}^{12} \sim T_{*}^{22} h_0^r,$$

уравнения равновесия можно значительно упростить, если допускать погрешность порядка h_0^{2r} по сравнению с единицей ($r = \frac{1}{2}$, если

границный контур не имеет общих участков с асимптотическими линиями срединной поверхности, и $r = \frac{1}{3}$, если граничный контур

не удовлетворяет этому условию и гауссова кривизна поверхности отрицательная). Упрощая таким образом уравнения равновесия, из членов, содержащих множитель h_0 , следует сохранить лишь члены вида $\partial_1 T_{*}^{22}$, при чем в коэффициентах их можно положить $\xi = 0$, т. е. соответствующие величины заменять их значениями на контуре, обозначаемыми индексом (0). Точно также можно поступить с символами Кристоффеля, являющимися коэффициентами перед меньшими компонентами комплексного усилия, а эти последние заменить их значениями по первому приближению. Таким образом, однородное уравнение (2.8) при $s = 1$ можно заменить приближенным уравнением

$$\partial_1 T_{*}^{11} + \partial_2 T_{*}^{12} + [2\Gamma_{11(0)}^{12} + \Gamma_{21(0)}^2] T_{*}^{11} + [3\Gamma_{21(0)}^{11} + \Gamma_{22(0)}^2] T_{*}^{12} + \Gamma_{22}^1 T_{*}^{22} - \frac{i h'}{a_0} (b_{\cdot 1}^1 a_{22}^2 - b_{\cdot 2}^1 a_{12} a_{22})_0 \partial_1 T_{*}^{22} = 0.$$

Следовательно, после предварительного определения большего усилия T_{*}^{22} в первом приближении по формуле (3.9) и уточненного его значения T_{*}^{22} по формуле (3.12), а значений меньших усилий в первом приближении по формулам (3.10) находим с принятой точностью

$$T_{*}^{11} = - \int \{ \Gamma_{22}^1 T_{*}^{22} + [2\Gamma_{11(0)}^{12} + \Gamma_{21(0)}^2] T_{*}^{11} + \partial_2 T_{*}^{12} + [3\Gamma_{12(0)}^{11} + \Gamma_{22(0)}^2] T_{*}^{12} \} d\xi + \frac{i h'}{a_0} (b_{\cdot 1}^1 a_{22}^2 - b_{\cdot 2}^1 a_{12} a_{22})_0 \partial_1 T_{*}^{22}. \quad (1.1)$$

Также из второго уравнения (2.8) имеем

$$T_{*}^{12} = - \int \{ \partial_2 T_{*}^{22} + (\Gamma_{12}^1 + 2\Gamma_{22}^2) T_{*}^{22} + [\Gamma_{11(0)}^1 + 3\Gamma_{12(0)}^2] T_{*}^{12} + \Gamma_{11(0)}^2 T_{*}^{11} \} d\xi + \frac{i h'}{a_0} (b_{\cdot 2}^2 a_{22}^2 - b_{\cdot 2}^2 a_{12} a_{22})_0 T_{*}^{22}. \quad (1.2)$$

В частном случае, когда срединная поверхность отнесена к линиям кривизны, формулы сильно упрощаются, так как

$$a_{12} = b_{12} = 0, \quad b_{\cdot 1}^1 = b_{\lambda 1} a^{\lambda 1} = b_{11} a^{11} = -\frac{1}{R_1}, \quad b_{\cdot 2}^2 = b_{\cdot 1}^2 = 0, \\ b_{\cdot 2}^2 = b_{\lambda 2} a^{\lambda 2} = b_{22} a^{22} = -\frac{1}{R_2}, \quad (1.3)$$

где R_1 и R_2 — радиусы кривизны главных сечений поверхности. В разобранных ниже задачах имеет место как раз этот частный случай. Нетрудно видеть однако, что применение наших формул и в общем случае не приводит к принципиальным затруднениям.

Пусть далее $b_{22} < 0$ и линии кривизны образуют полугеодезическую систему координат так, что

$$a_{11} = \text{const}. \quad (1.4)$$

Тогда

$$\Gamma_{11}^1 = \Gamma_{12}^1 = \Gamma_{11}^2 = 0 \quad (1.5)$$

$$T_{*(1)}^{22} \approx c_1(x^2) e^{\lambda \xi} + c_2(x^2) e^{-\lambda \xi}$$

$$T_{*(1)}^{11} \approx -\Gamma_{22(0)}^1 \int T_{*(1)}^{22} d\xi$$

$$T_{*(1)}^{12} \approx -\int [\partial_2 T_{*(1)}^{22} + 2\Gamma_{22(0)}^2 T_{*(1)}^{22}] d\xi \quad (1.6)$$

$$\text{где } \lambda = (1-i)k, \quad k = \sqrt{a_{11} |b_{22(0)}| : 2h' a_{22(0)}}.$$

Здесь следует положить $c_1 = 0$, если в пограничной зоне $\xi = x^1 - x_0^1 \geq 0$. Мы рассматриваем далее случай $\xi \leq 0$ и таким образом полагаем $c_2 = 0$. Формулы для случая $\xi \geq 0$ получаются из формул, данных ниже, если в них повсюду k заменить на $-k$. Физические составляющие тензора изменения кривизны суть

$$x_1 = \mu_{11} \sqrt{a_{11} a_{11}} = \frac{\mu_{11}}{a_{11}}, \quad x_2 = \frac{\mu_{22}}{a_{22}}, \quad \tau = \frac{\mu_{12}}{\sqrt{a_{11} a_{22}}}.$$

Следовательно, пользуясь обозначениями главы XXIV курса теории упругости Лява, для физических составляющих комплексного усилия имеем выражения

$$T_{*(11)} = T_*^{11} a_{11} = T_1 - \frac{Dx_2 i}{h'} \quad (1.7)$$

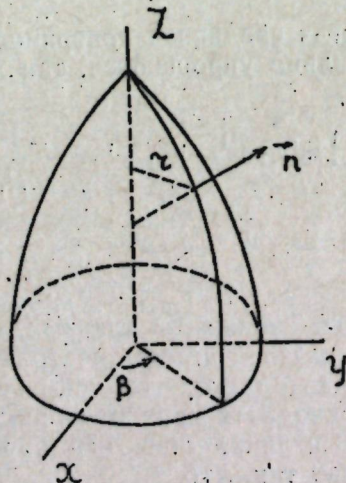
$$T_{*(22)} = T_*^{22} a_{22} = T_2 - \frac{Dx_1 i}{h'}$$

$$T_{*(12)} = T_*^{12} \sqrt{a_{11} a_{22}} = S_1 + \frac{D\tau i}{h'}$$

II. Определение краевого эффекта для оболочек вращения.

Если за безразмерные координаты принять угол θ , образованный внешней нормалью к поверхности с осью вращения, и долготу β , то

$$ds^2 = R_1 d\theta^2 + r^2 d\beta^2, \quad r = R_2 \sin \theta, \quad b_{22} = \frac{-r^2}{R_2}, \quad \lambda_{22} = \frac{-iR_1^2}{h'R_2}$$



Фиг. 1.

и уравнение (3.9), определяющее T_*^{22} в первом приближении принимает вид аналогичного уравнения И. В. Геккелера. Мы считаем более удобным пользоваться полугеодезической системой координат.

Пусть

$$x = r \cos \beta, \quad y = r \sin \beta, \quad z = z(r). \quad (1.1)$$

Тогда

$$ds^2 = r_0^2 du^2 + r^2 d\beta^2,$$

где

$$du = \pm \sqrt{1 + z_r^2} \frac{dr}{r_0}, \quad r_u = \pm r_0 \sqrt{1 + z_r^2}, \quad (1.2)$$

при чем перед радикалом следует брать знак $+$, если точки поверхности находятся над экватором ($z > 0$). Очевидно, что $r_0 u$ — дуговое расстояние, измеренное по меридиану от полюса к экватору. При этом мы имеем

$$a_{11} = r_0^2, \quad a_{22} = r^2, \quad \Gamma_{22}^2 = 0, \quad \Gamma_{12}^2 = \frac{r_u}{r}, \quad \Gamma_{22}^1 = -\frac{r r_u}{r_0^2},$$

$$\mu_1 = 0, \quad \mu_2 = -\left(\frac{6r_u}{r}\right)_0 = -3\mu, \quad \mu = 2\left(\frac{r_u}{r}\right)_0,$$

$$b_{11} = \frac{r_u^3}{r_0} \frac{d^2 z}{dr^2}, \quad b_{22} = \frac{r r_u}{r_0} \frac{dz}{dr}, \quad \lambda_{11(0)} = \frac{i b_{11(0)}}{h'} = 2mi,$$

$$\lambda_{22} = -\frac{i r_0^2}{R_2 h'}, \quad k = \sqrt{\frac{r_0^2}{2h'R_{2(0)}}}, \quad \lambda_{22(0)} = -2ik^2, \quad (1.3)$$

$$\lambda_{22(1)} = \frac{i r_0}{h'} \left[\frac{d}{du} \left(\frac{r_u}{r} z_r \right) \right]_0 = 2in, \quad \xi = u - u_0 \leq 0, \quad n \sim m \sim k^2.$$

По формулам (1.6) и (1.3), полагая $c_1 = A_1 e^{\psi i}$, находим

$$T_{*(1)}^{11} = \frac{A_1 (1+i)\mu}{4k} e^{k\xi + (\psi_1 - k\xi)i}, \quad T_{*(1)}^{12} = -\frac{1+i}{2k} e^{(1-i)k\xi} \partial_2 (A_1 e^{\psi i}). \quad (1.4)$$

Подставляя в (3.12)

$$f = T_{*(1)}^{22} \lambda_{22(1)} \xi - 3\mu \partial_1 T_{*(1)}^{22} + \lambda_{11(0)} T_{*(1)}^{11},$$

и величины (1.3) и (1.4), для величины большего усилия с погрешностью порядка h_0 по сравнению с единицей получаем выражение

$$T_*^{22} = A_1 e^{(1-i)k\xi + \psi i} \left\{ 1 + \frac{3\mu(1+i)}{8k} - \frac{3\mu}{2} \xi + \frac{(1+i)}{16k^3} (\mu m - n) - \frac{\mu m}{4k^2} \xi - \frac{(1-i)n}{4k} \xi^2 + \frac{n\xi}{4k^2} \right\}.$$

Вводя другие произвольные функции с помощью равенства

$$A_1 e^{\psi i} \left\{ 1 + \frac{3\mu(1+i)}{8k} + \frac{1+i}{16k^3} (\mu m - n) \right\} = A e^{\psi i},$$

это выражение с сохранением прежней степени точности приводим к виду

$$T_{*22} = Ae^{(1-i)k\xi + \psi} \left\{ 1 - \left(\frac{3\mu}{2} + \frac{\mu m - n}{4k^2} \right) \xi - \frac{(1-i)n}{4k} \xi^2 \right\}. \quad (II.5)$$

При этом в формулах первого приближения (II.4) A_1 и ψ_1 можно заменить через A и ψ . Таким образом с погрешностью порядка $\sqrt{h_0}$ по сравнению с единицей:

$$\begin{aligned} T_1 &= Re \{ T_{*(11)} \} = \frac{Ar_0^2 \mu e^{k\xi}}{k\sqrt{8}} \cos \left(\psi - k\xi + \frac{\pi}{4} \right), \\ -\frac{Dx_2}{h'} &= Im \{ T_{*(11)} \} = \frac{Ar_0^2 \mu e^{k\xi}}{k\sqrt{8}} \sin \left(\psi - k\xi + \frac{\pi}{4} \right), \\ S_1 &= Re \{ T_{*(12)} \} = -\frac{r_0^2 e^{k\xi}}{k\sqrt{2}} \partial_2 \left\{ A \cos \left(\psi - k\xi + \frac{\pi}{4} \right) \right\}, \\ \frac{D\tau}{h'} &= Im \{ T_{*(12)} \} = -\frac{r_0^2 e^{k\xi}}{k\sqrt{2}} \partial_2 \left\{ A \sin \left(\psi - k\xi + \frac{\pi}{4} \right) \right\}. \end{aligned} \quad (II.6)$$

С погрешностью порядка h_0 по сравнению с единицей

$$\begin{aligned} T_2 &= Re \{ T_{*(22)} \} = Ar^2 e^{k\xi} \left\{ \left[1 - \left(\frac{3\mu}{2} + \frac{\mu m - n}{4k^2} \right) \xi - \frac{n}{4k} \xi^2 \right] \cos(\psi - k\xi) - \right. \\ &\quad \left. - \frac{n}{4k} \xi^2 \sin(\psi - k\xi) \right\}, \end{aligned} \quad (II.7)$$

$$\begin{aligned} -\frac{Dx_1}{h'} &= Ar^2 e^{k\xi} \left\{ \left[1 - \left(\frac{3\mu}{2} + \frac{\mu m - n}{4k^2} \right) \xi - \frac{n}{4k} \xi^2 \right] \sin(\psi - k\xi) + \right. \\ &\quad \left. + \frac{n}{4k} \xi^2 \cos(\psi - k\xi) \right\}. \end{aligned}$$

После этого изгибающие и скручивающие моменты определяем по известным формулам

$$G_1 = -D(x_1 + \sigma x_2), \quad G_2 = -D(x_2 + \sigma x_1), \quad H_1 = -H_2 = D(1 + \sigma)\tau. \quad (II.8)$$

Полученное решение показывает, что дифференцирование найденных величин по ξ действительно увеличивает их в k раз, где $k \sim h_0^{-1/2}$. Это решение применимо к определению влияния края как в случае симметричной, так и в случае несимметричной нагрузки. Однако, следует заметить, что в последнем случае частота изменения нагрузки должна быть небольшой так, чтобы двухкратное дифференцирование по длине не могло увеличить в число раз, сравнимое с k^2 . В частности, с достаточной точностью это решение можно применить к случаю действия ветрового давления.

Как в случае свободных краев, так и в случае смешанных граничных условий, произвола величин c_1 и c_2 недостаточна для удовлетворения четырем граничным условиям на каждом контуре. Поэтому в общем случае для определения напряженного состояния оболочки величины II.6—II.7 следует сложить с величинами, найденными из уравнений чисто моментного и безмоментного напря-

женных состояний. Это даст еще 4 произвольных постоянных. Для удовлетворения смешанным граничным условиям приходится, кроме того, определять смещения, соответствующие найденному напряженному состоянию.

Для вывода формул с погрешностью порядка h_0 по сравнению с единицей для меньших усилий используем равенства

$$\begin{aligned} \Gamma_{12}^2 &\approx \frac{\mu}{2}, \quad \Gamma_{22}^1 \approx -\frac{\mu}{2} - \left(\frac{\mu^2}{4} + \nu \right) \xi, \quad r \approx r_0 \left(1 + \frac{\mu}{2} \xi + \frac{\nu}{2} \xi^2 \right), \\ \nu &= \frac{(r_{uu})_0}{r_0}. \end{aligned}$$

После небольших вычислений из формул (I.1) — (I.6) находим

$$\begin{aligned} T_{*11} &= \frac{A\mu}{4k} e^{(1-i)k\xi + \psi} \left\{ 1 + i + \frac{i}{2k} \mu + \frac{i}{4k^3} (\mu m - 3n) + \right. \\ &\quad \left. + (1+i) \left(\frac{3n - \mu m}{4k^2} + \frac{2\nu}{\mu} - \mu \right) \xi - \frac{n}{2k} \xi^2 \right\} + \frac{i}{2k^2} e^{(1-i)k\xi} \partial_2 \partial_2 (Ae^{\psi}). \\ T_{*12} &= -\frac{\partial_2 (Ae^{\psi}) e^{(1-i)k\xi}}{2k} \left\{ 1 + i + \frac{i}{4k^3} (\mu m - 3n) - (1+i) \left(\frac{3\mu}{2} + \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \frac{\mu m - 3n}{4k^2} \right) \xi - \frac{n}{2k} \xi^2 \right\}. \end{aligned} \quad (II.9)$$

Положим далее

$$\psi = \text{const.}; \quad A = A(\beta). \quad (II.10)$$

Тогда

$$\begin{aligned} T_1 &= \frac{A\mu}{4k} r_0^2 e^{k\xi} \left\{ \left[1 + \left(\frac{3n - \mu m}{4k^2} + \frac{2\nu}{\mu} - \mu \right) \xi - \frac{n}{2k} \xi^2 \right] \cos(\psi - k\xi) + \right. \\ &\quad \left. + \left[-1 - \frac{\mu}{2k} + \frac{3n - \mu m}{4k^2} - \left(\frac{3n - \mu m}{4k^2} + \frac{2\nu}{\mu} - \mu \right) \xi \right] \sin(\psi - k\xi) \right\} + \\ &\quad + \frac{1}{2k^2} \partial_2 \partial_2 (A) e^{k\xi} \cos(\psi - k\xi), \\ -\frac{Dx_2}{h'} &= \frac{\mu Ar_0^2 e^{k\xi}}{4k} \left\{ \left[1 + \left(\frac{3n - \mu m}{4k^2} + \frac{2\nu}{\mu} - \mu \right) \xi - \frac{n}{2k} \xi^2 \right] \sin(\psi - k\xi) + \right. \\ &\quad \left. + \left[1 + \frac{\mu}{2k} + \frac{\mu m - 3n}{4k^3} + \left(\frac{3n - \mu m}{4k^2} + \frac{2\nu}{\mu} - \mu \right) \xi \right] \cos(\psi - k\xi) \right\} + \\ &\quad + \frac{1}{2k^2} \partial_2 \partial_2 (A) e^{k\xi} \sin(\psi - k\xi), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} S_1 &= -\frac{rr_0}{2k} \partial_2 (A) e^{k\xi} \left\{ \left[1 - \left(\frac{3\mu}{2} + \frac{\mu m - 3n}{4k^2} \right) \xi - \frac{n}{2k} \xi^2 \right] \sin(\psi - k\xi) + \right. \\ &\quad \left. + \left[1 + \frac{\mu m - 3n}{4k^3} - \left(\frac{3\mu}{2} + \frac{\mu m - 3n}{4k^2} \right) \xi \right] \cos(\psi - k\xi) \right\}, \end{aligned}$$

$$\frac{D\tau}{h'} = -\frac{rr_0}{2k} \partial_2 (A) e^{k\xi} \left\{ \left[1 - \left(\frac{3\mu}{2} + \frac{\mu m - 3n}{4k^2} \right) \xi - \frac{n}{2k} \xi^2 \right] \sin(\psi - k\xi) + \right.$$

$$+ \left[1 + \frac{\mu m - 3n}{4k^3} - \left(\frac{3}{2} \mu + \frac{\mu m - 3n}{4k^2} \right) \xi \right] \cos(\psi - k\xi) \}. \quad (\text{II. 11})$$

Выражения для T_2 и x_1 остаются прежними.

$$N^1 \approx \partial_1 M^{11} + \frac{\mu}{2} (M^{11} - M^{22}) = \frac{D}{r_0^2} \left\{ \partial_1 x_1 + \sigma \partial_1 x_2 + \frac{\mu}{2} (1 - \sigma) x_1 \right\}$$

$$N_1 = -Akh' r_0 e^{k\xi} \left\{ \left[1 - \left(\frac{\mu}{2} + \frac{\mu m + n}{4k^2} \right) \xi \right] \sin(\psi - k\xi) + \right. \\ \left. + \left[-1 + \left(\frac{\mu}{2} + \frac{\mu m + n}{4k^2} \right) \xi + \frac{n}{2k} \xi^2 \right] \cos(\psi - k\xi) \right\}. \quad (\text{II. 12})$$

В случае сферической оболочки

$$n = 0, r_0 = R \sin \theta_0, R_1 = R_2 = R, k = \sqrt{\frac{R}{2h'}} \sin \theta_0,$$

$$m = -k^2, \mu = 2 \cos \theta_0,$$

и формулы (II. 1) — (II. 12) значительно упрощаются.

В случае конической оболочки кругового сечения $z = H_0 - r \operatorname{ctg} \gamma$, где H_0 — расстояние от вершины до плоскости xoy , 2γ — угол при вершине. Следовательно,

$$r_u = r_0 \sin \gamma, \mu = 2 \sin \gamma, m = 0, k = \sqrt{\frac{R}{2h'}} \cos \gamma, \nu = 0, n = k^2 \sin \gamma$$

$$T_*^{22} = Ae^{(1-n)\xi + \psi} \left\{ 1 - \frac{11}{4} \xi \sin \gamma - \frac{1-i}{4} k \sin \gamma \xi^2 \right\}. \quad (\text{II. 13})$$

III. Определение краевого эффекта в оболочке, очерченной по эллиптическому конусу.

Срединную поверхность оболочки задаем уравнениями

$$x = c_0 H \cos \beta, y = d_0 H \sin \beta, z = H_0 - H, \quad (\text{III. 1})$$

где H_0 — расстояние от вершины конуса до плоскости xoy , перпендикулярной к его оси, H — расстояние от рассматриваемого сечения до вершины, c и d полуоси эллипса, образованного пересечением поверхности конуса плоскостью xoy (см. фиг. 2), $c_0 = c : H_0$, $d_0 = d : H_0$.

Легко показать, что линии $\beta = \text{const.}$ и $H = \text{const.}$ не ортогональны. Поэтому за гауссовы координаты на срединной поверхности примем прямолинейные образующие $\beta = \text{const.}$ и их ортогональные траектории, лежащие на поверхности сферы радиуса α , описанной из вершины конуса. Очевидно, что

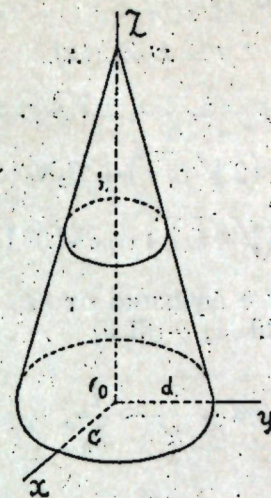
$$\alpha = (x^2 + y^2 + z^2)^{1/2} = H \cdot F,$$

где введено обозначение

$$F = F(\beta) = (c_0^2 \cos^2 \beta + d_0^2 \sin^2 \beta + 1)^{1/2}. \quad (\text{III. 2})$$

Параметрические линии $\alpha = \text{const.}$ и $\beta = \text{const.}$ образуют два семейства линий кривизны. При этом уравнения срединной поверхности суть:

$$x = \frac{c_0 \alpha \cos \beta}{F}, y = \frac{d_0 \alpha \sin \beta}{F}, z = H_0 - \frac{\alpha}{F}. \quad (\text{III. 1a})$$



Фиг. 2.

Пользуясь обычными формулами теории поверхностей, находим геометрические величины, характеризующие эту поверхность:

$$a_{11} = 1, a_{12} = 0, a_{22} = \alpha^2 \Phi(\beta), b_{11} = b_{12} = 0, b_{22} = -\frac{c_0 d_0 \alpha}{\sqrt{\Phi(\beta)}}$$

$$\Gamma_{11}^1 = \Gamma_{12}^1 = \Gamma_{11}^2 = 0, \Gamma_{22}^1 = -\alpha \Phi(\beta), \Gamma_{12}^2 = \frac{1}{\alpha}, \Gamma_{22}^2 = \frac{1}{2} \frac{\Phi'(\beta)}{\Phi(\beta)}, \quad (\text{III. 3})$$

где

$$\Phi(\beta) = c_0^2 (1 + d_0^2)^2 \sin^2 \beta + d_0^2 (1 + c_0^2)^2 \cos^2 \beta + (c_0^2 - d_0^2) \sin^2 \beta \cos^2 \beta \\ \Phi(\beta) = \varphi(\beta) : F^3. \quad (\text{III. 4})$$

Также по формулам (3.8)

$$\mu_1 = 0, \mu_2 = -\frac{6}{\alpha}, \lambda_{11} = \lambda_{12} = 0, \lambda_{22} = -\frac{i c_0 d_0 F^3}{\alpha h' \varphi^{3/2}} = -\frac{i}{\alpha} q. \quad (\text{III. 5})$$

Таким образом, разрешающее уравнение (3.7) принимает следующий вид:

$$\partial_1 \partial_1 T_*^{22} + \frac{6}{\alpha} \partial_1 T_*^{22} + \frac{i q}{\alpha} T_*^{22} = 0. \quad (\text{III. 6})$$

Это уравнение путем введения новой независимой переменной

$$t = \sqrt{\alpha}$$

приводится к уравнению

$$\frac{d^2 T_*^{22}}{dt^2} + \frac{11}{t} \frac{dT_*^{22}}{dt} + 4 i q T_*^{22} = 0,$$

которое в свою очередь принадлежит к типу уравнений

$$\frac{d^2 y}{dx^2} + \frac{1-2\gamma}{x} \frac{dy}{dx} + \left(\delta^2 + \frac{\gamma^2 - p^2}{x^2} \right) y = 0.$$

Интеграл этого последнего равен

$$y = x^\gamma Z_p(\delta x).$$

В нашем случае $\gamma = -5$, $p = 5$, $\delta = \pm \sqrt{4iq}$. Поэтому

$$T_*^{22} = \alpha^{-5/2} \{B_1 I_5(2\sqrt{iq}\alpha) + B_2 N_5(2\sqrt{iq}\alpha)\} = \\ = \alpha^{-5/2} \{D_1 H_5^{(1)}(\sqrt{4iq}\alpha) + D_2 H_5^{(2)}(\sqrt{4iq}\alpha)\}, \quad (\text{III. 7})$$

где D_1 и D_2 — произвольные функции от β .

Как видно из формул (III. 1) — (III. 5)

$$q\alpha \sim \frac{\alpha}{h'} \sim \frac{1}{h_0},$$

если α не мало.

Следовательно, можно пользоваться асимптотическими разложениями функций Ханкеля

$$H_5^{(1)}(\zeta) = \sqrt{\frac{2}{\pi\zeta}} e^{i(\zeta - \frac{11}{4}\pi)} \sum_{m=0}^k \frac{(-1)^m (5, m)}{(2i\zeta)^m}$$

$$H_5^{(2)}(\zeta) = \sqrt{\frac{2}{\pi\zeta}} e^{-i(\zeta - \frac{11}{4}\pi)} \sum_{m=0}^k \frac{(5, m)}{(2i\zeta)^m},$$

где

$$(5, m) = \frac{\Gamma(5\frac{1}{2} + m)}{m! \Gamma(5\frac{1}{2} - m)}$$

У нас $\zeta = \sqrt{4iq}\alpha = (1+i)\sqrt{2q}\alpha$, поэтому, если граничный контур совпадает с линией $\alpha = \alpha_0$ и в пограничной зоне $\alpha \leq \alpha_0$, то функция Ханкеля первого рода возрастает по мере удаления от края и, следовательно, не может характеризовать краевой эффект. Поэтому, рассматривая такую зону, следует положить

$$D_2 = 0.$$

Совершенно также в пограничной зоне, где $\alpha \geq \alpha_0$, следует положить $D_1 = 0$. При этом мы предполагаем, что граничные контуры неблизки друг к другу так, что их взаимным влиянием можно пренебречь. В дальнейшем мы ограничиваемся рассмотрением первого случая. Поэтому

$$T_*^{22} = D_1 \alpha^{-5/2} \sqrt{\frac{2}{\pi\zeta}} e^{(1-i)\sqrt{2q}\alpha + \frac{11}{4}\pi i} \sum_{m=0}^k \frac{(5, m)}{(2i\zeta)^m}$$

Кроме того,

$$\alpha = \alpha_0 + \xi$$

$$\zeta = (1+i)\sqrt{2q(\alpha_0 + \xi)} \approx (1+i)\sqrt{2q\alpha_0} \left(1 + \frac{\xi}{2\alpha_0} - \frac{1}{8} \frac{\xi^2}{\alpha_0^2}\right) = \\ = (1+i) \left(\sqrt{2q\alpha_0} + k\xi - \frac{1}{4} \frac{k\xi^2}{\alpha_0}\right), \quad k = \frac{\sqrt{2q\alpha_0}}{2\alpha_0}. \quad (\text{III. 8})$$

В виду того, что в пограничной зоне $\frac{\xi}{\alpha_0}$ малая величина, с принятой точностью в асимптотическом разложении функции Ханкеля мы можем ограничиться двумя членами ряда, во втором из которых положить $\zeta = (1+i)\sqrt{2q\alpha_0}$.

Таким образом

$$\sum_{m=0}^k \frac{(-1)^m (5, m)}{(2i\zeta)^m} \approx 1 - \frac{(5, 1)}{2i\zeta} = \text{const.}$$

Далее имеем

$$\alpha^{-5/2} \approx \alpha_0^{-5/2} \left(1 - \frac{5}{2} \frac{\xi}{\alpha_0}\right), \quad \frac{1}{V\zeta} \approx [(1+i)\sqrt{2q\alpha_0}]^{-1/2} \left(1 - \frac{1}{4} \frac{\xi}{\alpha_0}\right).$$

Следовательно,

$$T_*^{22} \approx c_1 \left(1 - \frac{5}{2} \frac{\xi}{\alpha_0}\right) \left(1 - \frac{1}{4} \frac{\xi}{\alpha_0}\right) e^{(1-i)k\xi - \frac{1}{4} \frac{k\xi^2}{\alpha_0}} \approx \\ \approx c_1 \left[1 - \frac{11}{4} \frac{\xi}{\alpha_0} - \frac{(1-i)}{4} \frac{k\xi^2}{\alpha_0}\right] e^{(1-i)k\xi}, \quad (\text{III. 9})$$

где c_1 произвольная функция от β .

К этому же результату мы приходим, применяя метод, предложенный в статье[1]. В самом деле, в данном случае

$$\lambda = \sqrt{\lambda_{22(0)}} = \sqrt{\frac{-iq}{\alpha_0}} = (1-i)k, \quad \lambda_{22(1)} = \frac{iq}{\alpha_0^2},$$

$$f = -\frac{6}{\alpha_0} \partial_1 T_{*^{(1)}}^{22} + \frac{iq}{\alpha_0^2} \xi T_{*^{(1)}}^{22},$$

где

$$T_{*^{(1)}}^{22} = K_1 e^{\lambda\xi} + K_2 e^{-\lambda\xi}, \quad K_1 \text{ и } K_2 \text{ — произвольные функции от } \beta.$$

Подставляя эти величины в уравнение (3.12), находим

$$T_*^{22} = K_1 e^{\lambda\xi} \left(1 - \frac{11}{4} \frac{\xi}{\alpha_0} + \frac{11}{8\lambda\alpha_0} - \frac{\lambda\xi^2}{4\alpha_0}\right) + \\ + K_2 e^{-\lambda\xi} \left(1 - \frac{11}{4} \frac{\xi}{\alpha_0} - \frac{11}{8\lambda\alpha_0} + \frac{\lambda\xi^2}{4\alpha_0}\right).$$

Отсюда, полагая $K_2 = 0$ для пограничной зоны, где $\xi \leq 0$ и вводя обозначение

$$K_1 = c_1 \left(1 - \frac{11}{8\lambda\alpha_0}\right),$$

с принятой точностью приходим к решению (III. 9), которое в частном случае круговой конической оболочки переходит в формулу (II. 13) за исключением разницы в обозначениях.

Пусть

$$c_1 = A_1 e^{-i\psi_1},$$

где A_1 и ψ_1 произвольные вещественные функции от β . Учитывая (1.7), находим физические составляющие упругого усилия и изменения кривизны

$$\begin{aligned} T_2 &= A_1 \alpha_0^2 \Phi(\beta) e^{k\xi} \left\{ \left(1 - \frac{3}{4} \frac{\xi}{\alpha_0} - \frac{k\xi^2}{4\alpha_0} \right) \cos(k\xi + \psi_1) + \frac{k\xi^2}{4\alpha_0} \sin(k\xi + \psi_1) \right\} = \\ &= A_1 \alpha_0^2 \Phi(\beta) e^{k\xi} \left\{ \left(1 - \frac{3}{4} \frac{\xi}{\alpha_0} \right) \cos(k\xi + \psi_1) + \right. \\ &\quad \left. + \frac{k}{\alpha_0 \sqrt{8}} \xi^2 \sin\left(k\xi + \psi_1 - \frac{\pi}{4}\right) \right\} \\ D x_1 &= A_1 \alpha_0^2 h' \Phi(\beta) e^{k\xi} \left\{ \left(1 - \frac{3}{4} \frac{\xi}{\alpha_0} \right) \sin(k\xi + \psi_1) - \right. \\ &\quad \left. - \frac{k}{\alpha_0 \sqrt{8}} \xi^2 \cos\left(k\xi + \psi_1 - \frac{\pi}{4}\right) \right\}. \end{aligned} \quad (\text{III. 10})$$

Эти формулы выведены, пренебрегая h_0 по сравнению с единицей. Для меньших усилий и составляющих изменения кривизны даем лишь значения по первому приближению:

$$\begin{aligned} T_{*1}^{11} &= \frac{\alpha_0}{\lambda} \Phi(\beta) c_1 e^{i\xi}, \quad T_{*1}^{12} = -\frac{c_1 (1+i) e^{(1-i)k\xi}}{2k} \left(\ln \frac{c_1 \Phi e^{(1-i)k\xi}}{k} \right)_{\beta}, \\ T_1 &= \frac{\alpha_0 \Phi}{k \sqrt{2}} A_1 e^{k\xi} \cos\left(k\xi + \psi_1 - \frac{\pi}{4}\right), \\ D x_2 &= h' \alpha_0 \Phi A_1 e^{k\xi} \sin\left(k\xi + \psi_1 - \frac{\pi}{4}\right), \\ S_1 &= \frac{-A_1 \alpha_0 \sqrt{\Phi} e^{k\xi}}{2k} \left\{ \partial_2 \left(\ln \frac{A_1 \Phi}{k e^{k\xi}} \right) \sin(k\xi + \psi_1) + \right. \\ &\quad \left. + \partial_2 \left(\ln \frac{A_1 \Phi e^{2k\xi + \psi_1}}{k} \right) \cos(k\xi + \psi_1) \right\}, \\ D \tau &= -\frac{A_1 h' \alpha_0 \sqrt{\Phi} e^{k\xi}}{2k} \left\{ \partial_2 \left(\ln \frac{A_1 \Phi}{k e^{k\xi}} \right) \cos(k\xi + \psi_1) - \right. \\ &\quad \left. - \partial_2 \left(\ln \frac{A_1 \Phi e^{2k\xi + \psi_1}}{k} \right) \sin(k\xi + \psi_1) \right\}. \end{aligned} \quad (\text{III. 11})$$

Формулы для пограничной зоны контура при $\xi \geq 0$ получаются из выведенных выше при замене k через $-k$, A_1 и ψ_1 через A_2 и ψ_2 , α_0 , k , ... через соответствующие величины для второго контура.

Рассмотренное решение без особых затруднений может быть обобщено на случай произвольной конической оболочки, если за координатные линии принять прямолинейные образующие и их

ортогональные траектории, при этом общий ход решения не изменяется и лишь несколько усложняются выражения соответствующих величин в функции от β .

IV. Введение функции напряжения.

При рассмотрении краевого эффекта из членов уравнений (2.8), содержащих множитель ih' , следует сохранять лишь $\nabla_1 T_*^{22} \approx \partial_1 T_*^{22}$, при этом коэффициенты, стоящие перед ними, можно считать постоянными и равными их крайним значениям, если пренебрегать h_0 по сравнению с единицей. Таким образом приходим к уравнениям

$$\nabla_1 T_*^{11} + \nabla_2 T_*^{12} - ih' (b_1^1 a_{22} a^{11} + b_2^1 a_{22} a^{12})_0 \partial_1 T_*^{22} = 0 \quad (\text{IV. 1})$$

$$\nabla_1 T_*^{12} + \nabla_2 T_*^{22} - ih' (b_1^2 a_{22} a^{11} + b_2^2 a_{22} a^{12})_0 \partial_1 T_*^{22} = 0. \quad (\text{IV. 2})$$

Кроме того, имеем уравнение

$$b_{s\beta} T_*^{s\beta} + ih' (a^{11} \nabla_1 \nabla_1 T_* + 2a^{12} \nabla_1 \nabla_2 T_* + a^{22} \nabla_2 \nabla_2 T_*) = 0, \quad (\text{IV. 3})$$

где $T_* = a_{jk} T_*^{jk}$ — инвариант.

При этом уравнения (IV. 1) и (IV. 2) приблизительно удовлетворяются, если комплексные усилия выразить через скалярную функцию напряжения χ с помощью равенств

$$T_*^{11} = \frac{1}{a} \nabla_2 \nabla_2 \chi - \frac{(b_2^1)^2}{a_{22}} \chi, \quad T_*^{22} = \frac{1}{a} \nabla_1 \nabla_1 \chi \quad (\text{IV. 4})$$

$$T_*^{12} = -\frac{1}{a} \nabla_2 \nabla_1 \chi - \frac{b_2^1 b_2^2}{a_{22}} \chi.$$

При доказательстве этого положения будем различать три возможных случая.

а) $b_{22} \neq 0$ т. е. граничный контур не имеет общих участков с асимптотическими линиями поверхности. В этом случае, так как

$$\begin{aligned} (\nabla_1 \nabla_2 \nabla_2 - \nabla_2 \nabla_2 \nabla_1) \chi &= (\nabla_1 \nabla_2 - \nabla_2 \nabla_1) \nabla_2 \chi = \\ &= R_{122}^{\dots} \nabla_2 \chi = (b_{12}^2 - b_{11} b_{22}) (a^{11} \nabla_1 \chi + a^{12} \nabla_2 \chi), \end{aligned}$$

а из (IV. 3) при сохранении лишь главных членов в первом приближении

$$b_{22} T_*^{22} \approx \frac{b_{22}}{a} \frac{\partial^2 \chi}{\partial \xi^2} \approx -\frac{h' i}{a^2} a_{22}^2 \frac{\partial^4 \chi}{\partial \xi^4}, \quad r = \frac{1}{2};$$

при подстановке (IV. 4) уравнение (IV. 1) удовлетворяется, если пренебречь членами, содержащими $\partial_2 \chi$ по сравнению с $\partial_1 \partial_1 \chi$, т. е. если пренебречь $h_0^{2r} = h_0$ по сравнению с единицей. С этой же точностью удовлетворяется и уравнение (IV. 2).

б) Пусть $b_{11} = b_{22} = 0$, т. е. за гауссовы координаты приняты асимптотические линии поверхности отрицательной гауссовой кривизны. Тогда из (IV. 3) в первом приближении

$$ih' \frac{\partial^3 \chi}{\partial \xi^3} \approx \frac{2b_{12} \nabla_2 \chi}{a^{11} a_{22}}, \quad r = \frac{1}{3},$$

и, следовательно, при подстановке (IV. 4) уравнение (IV. 1) приблизительно удовлетворяется, если пренебречь $h_0^{2r} = h_0^3$ (в частности, при $a_{12} = 0$ погрешность уменьшается до h_0 по сравнению с единицей).

При этом уравнение (IV.2) удовлетворяется во всех случаях с погрешностью порядка $h_0^{3/2}$ по сравнению с единицей.

с) Пусть $b_{12} = b_{22} = a_{12} = 0$, т. е. рассматривается развертывающаяся поверхность, отнесенная к линиям кривизны так, что граничный контур совпадает с одной из прямолинейных образующих. Тогда из (IV.3) в первом приближении

$$ih' \frac{\partial^3 \chi}{\partial \xi^3} \approx - \int \frac{b_{11} \nabla_2 \nabla_2 \chi}{a^{11} a_{22}} dx^1, \quad r = \frac{1}{4}.$$

Уравнение (IV.1) удовлетворяется при подстановке (IV.4), если пренебречь $h_0^{3/2}$ по сравнению с единицей, а уравнение (IV.2) удовлетворяется точно.

Подстановка (IV.4) в (IV.3) приводит к следующему уравнению, служащему для определения χ :

$$\Delta \Delta \chi - a^{\beta\gamma} \nabla_\beta \nabla_\gamma \left[\frac{b^{1,2}}{a_{22}} (b_{12} + a_{12} b^{2,2}) \chi \right] - \frac{i}{h'} \left\{ b_{s\beta} c^{sm} c^{\beta n} \nabla_m \nabla_n \chi - \frac{b_{2,1}}{a_{22}} (b_{11} b^{1,2} + 2b_{12} b^{2,2}) \chi \right\} = 0, \quad (IV.5)$$

где $\Delta \chi = a^{jk} \nabla_j \nabla_k \chi$ — обобщенный оператор Лапласа.

Заменим это уравнение приближенным уравнением, пренебрегая величинами порядка $h_0^{2/2}$ по сравнению с единицей. В случае а) это даст погрешность, не превышающую погрешность от принятия гипотезы Кирхгофа-Лява. В случае б) погрешность больше, а именно, $h_0^{2/3}$ по сравнению с единицей. Нам думается, что и в этом случае приближенное решение является удовлетворительным. В случае с) краевой эффект не имеет резко выраженного характера, допускаемая ниже погрешность доходит до величин порядка $h_0^{1/2}$ по сравнению с единицей и соответствующее решение едва ли можно считать удовлетворительными. Оставляя в стороне рассмотрение этого последнего случая, особо исследованного А. Л. Гольденвейзером, имеем с принятой точностью

$$b_{s\beta} c^{sm} c^{\beta n} \nabla_m \nabla_n \chi = - \frac{1}{a} \left[b_{11} \Gamma_{22}^1 \partial_1 \chi + 2b_{12} (\partial_1 \partial_2 \chi - \Gamma_{12}^a \partial_a \chi) - b_{22} (\partial_1 \partial_1 \chi - \Gamma_{11}^1 \partial_1 \chi) \right],$$

$$\Delta \Delta \chi = (a^{11})^2 \left\{ \frac{\partial^4 \chi}{(\partial x^1)^4} - \mu_3 \frac{\partial^3 \chi}{(\partial x^1)^3} - \mu_1 \frac{\partial^4 \chi}{(\partial x^1)^3 \partial x^2} \right\},$$

где

$$\mu_3 = \{ 5\Gamma_{11}^1 + 4\Gamma_{12}^2 + \mu_2 - 2\mu_1 (\Gamma_{12}^1 + \Gamma_{22}^2) \}_0, \quad (IV.6)$$

μ_1 и μ_2 определяются по формулам (3.8), а индексом (0) обозначены значения соответствующих величин на граничном контуре.

Таким образом, вводя обозначения (3.7), имеем приближенное уравнение

$$\frac{\partial^4 \chi}{(\partial x^1)^4} - \mu_3 \frac{\partial^3 \chi}{(\partial x^1)^3} - \mu_1 \frac{\partial^4 \chi}{(\partial x^1)^3 \partial x^2} + \lambda_{11} \Gamma_{22(0)}^1 \partial_1 \chi + \dots \quad (IV.7)$$

$$+ 2\lambda_{12} (\partial_2 \partial_1 \chi - \Gamma_{12}^a \partial_a \chi) - \lambda_{22} (\partial_1 \partial_1 \chi - \Gamma_{11(0)}^1 \partial_1 \chi) + \mu_4 \chi = 0,$$

где

$$\mu_4 = \frac{i}{h'} \left[\frac{a^2}{a_{22}^2} b_{2,1} (b_{11} b^{1,2} + 2b_{12} b^{2,2}) \right]_0.$$

Пусть далее граничный контур — линия кривизны и $b_{22} \neq 0$.

В этом случае

$$\mu_1 = 0, \quad \lambda_{12} = 0, \quad |\mu_4 \chi| \ll |\lambda_{22} \partial_1 \partial_1 \chi|.$$

Пусть, кроме того, $x^1 - x^1_0 = \xi$, на контуре $\xi = 0$, в пограничной зоне

$$\lambda_{22} \approx \lambda_{22(0)} + \lambda_{22(1)} \xi, \quad \xi \lesssim \sqrt{h_0}.$$

Следовательно, (IV.7) приводится к приближенному уравнению

$$\frac{\partial^4 \chi}{\partial \xi^4} - \mu_3 \frac{\partial^3 \chi}{\partial \xi^3} - \lambda_{22(0)} \partial_1 \partial_1 \chi + [\lambda_{11(0)} \Gamma_{22(0)}^1 + \lambda_{22(0)} \Gamma_{11(0)}^1] \partial_1 \chi - \lambda_{22(1)} \xi \partial_1 \partial_1 \chi = 0. \quad (IV.8)$$

Учитывая, что

$$|\lambda_{22(0)}| \sim \frac{1}{h_0}, \quad |\lambda_{22(1)}| \sim \frac{1}{h_0}, \quad |\mu_3| \sim 1, \quad |\Gamma_{jk}^i| \sim 1,$$

и, пренебрегая величинами порядка $\sqrt{h_0}$ по сравнению с единицей в первом приближении находим

$$\frac{\partial^4 \chi}{\partial \xi^4} \approx \lambda_{22(0)} \frac{\partial^2 \chi}{\partial \xi^2}, \quad \frac{\partial \chi}{\partial \xi} \approx \frac{1}{\lambda_{22(0)}} \frac{\partial^3 \chi}{\partial \xi^3}. \quad (IV.9)$$

Подставляя это выражение в члены уравнения, отношения которых к главным членам суть величины порядка $\sqrt{h_0}$, мы вносим в уравнение погрешность порядка h_0 по сравнению с единицей. Таким образом, (IV.8) заменяем с принятой точностью уравнением

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial \xi^2} - 2\nu \frac{\partial \psi}{\partial \xi} - [\lambda_{22(0)} + \lambda_{22(1)} \xi] \psi = 0 \quad (IV.10)$$

$$\psi = \frac{\partial^2 \chi}{\partial \xi^2}, \quad 2\nu = \left\{ 4\Gamma_{11}^1 + 4\Gamma_{12}^2 + \mu_2 - \frac{\lambda_{11}}{\lambda_{22}} \Gamma_{22}^1 \right\}_0 \sim 1.$$

Заметим, что в случае развертывающихся поверхностей, отнесенных к линиям кривизны, $\lambda_{11} = 0$, $\Gamma_{11}^1 = 0$ и уравнение (IV.8) приводится к виду (IV.10) и без использования приближенной зависимости (IV.9). В случае сферической оболочки, отнесенной к геодезической системе координат, $\lambda_{22(1)} = 0$, и (IV.10) — обыкновенное дифференциальное уравнение с постоянными коэффициентами.

В общем случае уравнению (IV.10) можно удовлетворить с принятой точностью, положив

$$\psi = e^{p\xi} + q\xi^2,$$

где

$$|p| \sim |q| \sim h_0^{-1/2}$$

При этом p и q определяются из уравнений

$$p^2 + 2q - 2\nu p - \lambda_{22(0)} = 0, \quad 4q(p - \nu) = \lambda_{22(1)}$$

Исключая q , приходим к уравнению

$$p^2 - 2\nu p - \lambda_{22(0)} + \frac{\lambda_{22(1)}}{2(p - \nu)} = 0.$$

Отсюда в первом приближении

$$p^2 \approx \lambda^2 = \lambda_{22(0)}, \quad \lambda = (1 + i)k, \quad k = \sqrt{\frac{a|b_{22}|}{2h'a_{22}^2}}, \quad (IV.11)$$

причем верхние знаки соответствуют случаю, когда $b_{22} < 0$.
Для получения затухающего краевого эффекта в пограничной зоне, где $\xi \leq 0$, следует положить $p \approx \lambda$. Имея в виду в дальнейшем рассмотрение именно этого случая, уточненное значение p определяем из уравнения

$$p^2 - 2\nu p - \lambda^2 + \frac{\lambda_{22(1)}}{2(\lambda - \nu)} = 0.$$

Следовательно, с принятой точностью

$$p = \nu + \sqrt{\nu^2 + \lambda^2 - \frac{\lambda_{22(1)}}{2(\lambda - \nu)}} \approx \lambda + \nu - \frac{1}{4} \frac{\lambda_{22(1)}}{\lambda^2}, \quad q \approx \frac{\lambda_{22(1)}}{4\lambda}$$
$$\chi = ce^{p\xi} \left(1 + \frac{6q}{p^2} - \frac{4q}{p} \xi + q\xi^2 \right), \quad (IV.12)$$

где c — произвольная достаточно гладкая комплексная функция от x^2 .
Нетрудно проверить, что, например, в случае оболочки вращения из формул (IV.4) и (IV.12) с принятой точностью для комплексных усилий получаются выражения (II.5) и (II.9), выведенные ранее иным путем.

Поступила в редакцию 1/XII-1947 г.

Сектор механики ФТИ.

ЛИТЕРАТУРА.

- 1) X. M. Муштари „Инвариантные уравнения равновесия в пограничной зоне упругой оболочки в комплексной форме“, ПММ., т. XII, вып. 2, 1948 г.
- 2) И. В. Геккелер „Статика упругого тела“ (§ 67).
- 3) X. M. Муштари „Об области применимости линейной теории упругости“, Доклады АН СССР, т. LVIII, вып. 6, 1947 г.

УРАВНЕНИЯ РАВНОВЕСИЯ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ ПРИ КОНЕЧНЫХ ПЕРЕМЕЩЕНИЯХ И ИХ ПРИЛОЖЕНИЕ К ТЕОРИИ ОБОЛОЧЕК.

К. З. ГАЛИМОВ.

В главе I из уравнений равновесия, отнесенных к деформированному состоянию, выведены уравнения равновесия теории упругости конечных перемещений в первоначальных координатах. Коэффициенты уравнений равновесия в деформированных координатах зависят от деформации. Введением подходящего тензора напряжений удается устранить эту зависимость, и ковариантное дифференцирование в них уже производится относительно метрического тензора недеформированного пространства.

В главе II выведены уравнения равновесия оболочек при конечных перемещениях (§ 2). Эти уравнения удобны для качественных исследований напряженного состояния оболочек при конечных перемещениях. По виду они отличаются от современных уравнений наличием вектора Φ в уравнениях моментов (2.18) и (2.19). Эти уравнения показывают, что безмоментное напряженное состояние в оболочках при конечных перемещениях возможно только при некоторых ограничительных условиях, накладываемых на перемещения. В § 3 этой главы предложен простой и физически ясный вывод уравнений равновесия оболочек переменной толщины.

Дальнейшее развитие теории и приложение ее к конкретным задачам будут освещены в последующих статьях автора.

ГЛАВА I. УРАВНЕНИЯ РАВНОВЕСИЯ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ ПРИ КОНЕЧНЫХ ПЕРЕМЕЩЕНИЯХ.

§ 1. Два способа рассмотрения деформированного состояния.

1.0. Пусть x^2 — криволинейные координаты частицы до деформации, $\bar{r}(x^1, x^2, x^3)$ и $\bar{r}^*(x^1, x^2, x^3)$

— радиусы-векторы этой частицы до и после деформации. Тогда

$$g_{\alpha\beta} = (\bar{r}_\alpha, \bar{r}_\beta), \quad g^{\alpha\beta} = (\bar{r}^*_\alpha, \bar{r}^*_\beta) \quad \alpha, \beta = 1, 2, 3.$$

являются ковариантными составляющими основного метрического тензора недеформированного и деформированного пространств,

$$a \quad \bar{r}_\alpha = \frac{\partial \bar{r}}{\partial x^\alpha} \quad \text{и} \quad \bar{r}^*_\beta = \frac{\partial \bar{r}^*}{\partial x^\beta}$$

основными векторами в этих пространствах. Так как

$$\bar{r}_\alpha^* = \bar{r}_\alpha + \bar{r}_\beta \nabla_\alpha u^\beta = \bar{r}_\beta (\delta_\alpha^\beta + \nabla_\alpha u^\beta). \quad (1.1)$$

то квадрат линейного элемента деформированного пространства равен

$$ds^2 = |d\bar{r}^*|^2 = (\bar{r}_\alpha^*, \bar{r}_\beta^*) dx^\alpha dx^\beta = g_{\alpha\beta}^* dx^\alpha dx^\beta, \quad (1.2)$$

где

$$g_{\alpha\beta}^* = g_{\alpha\beta} + 2\eta_{\alpha\beta}, \quad 2\eta_{\alpha\beta} = \nabla_\alpha u_\beta + \nabla_\beta u_\alpha + g^{\gamma\delta} \nabla_\alpha u_\gamma \cdot \nabla_\beta u_\delta. \quad (1.3)$$

Величины $\eta_{\alpha\beta} = \eta_{\alpha\beta}$ называются ковариантными составляющими тензора деформации, отнесенного к недеформированному состоянию среды. Операция повышения или понижения индексов при η производится с помощью $g^{\alpha\beta}$ или $g_{\alpha\beta}$, соответственно. В формулах (1.3) ∇ — знак ковариантного дифференцирования относительно $g_{\alpha\beta}^*$. Заметим, что одни и те же параметры x^α определяют положение частицы до и после деформации, а координатные системы отличаются лишь метрическими тензорами. Координаты x^α , по аналогии с гидродинамикой, называют лагранжевыми, а только что приведенный способ описания деформации — лагранжевым.

2°. Пусть ξ^i — криволинейные координаты частицы деформированной среды, отличные от деформированных лагранжевых x^α , а h^*_{ik} метрический тензор координат ξ^i .

Будем рассматривать радиусы-векторы \bar{r}^* и \bar{r} как функции координат ξ^i . Тогда

$$\bar{r}_i^* = \frac{\partial \bar{r}^*}{\partial \xi^i}, \quad h^*_{ik} = (\bar{r}_i^*, \bar{r}_k^*) \quad i, k = 1, 2, 3.$$

Квадрат деформированного элемента в координатах ξ^i будет

$$ds^2 = \left(\frac{\partial \bar{r}^*}{\partial \xi^i}, \frac{\partial \bar{r}^*}{\partial \xi^k} \right) d\xi^i d\xi^k = h^*_{ik} d\xi^i d\xi^k, \quad (1.4)$$

а квадрат недеформированного элемента

$$ds_0^2 = \left(\frac{\partial \bar{r}}{\partial x^\alpha}, \frac{\partial \bar{r}}{\partial x^\beta} \right) dx^\alpha dx^\beta = h_{ik} dx^\alpha dx^\beta, \quad (1.5)$$

где

$$h_{ik} = g_{\alpha\beta} \frac{\partial x^\alpha}{\partial \xi^i} \frac{\partial x^\beta}{\partial \xi^k}. \quad (1.6)$$

Тогда

$$ds^2 - ds_0^2 = 2\varepsilon_{ik} d\xi^i d\xi^k,$$

где величины

$$2\varepsilon_{ik} = h^*_{ik} - h_{ik} \quad (1.7)$$

называются ковариантными составляющими тензора деформации, отнесенного к деформированному состоянию. Повышение и понижение индекса производится при помощи h^*_{ik} или h_{ik} . Из формул (1.4) и (1.5) видно, что одни и те же параметры ξ^i определяют положения частицы как до так и после деформации. Координатная система ξ^i с метрическим тензором h^*_{ik} при уменьшении этого последнего на $2\varepsilon_{ik}$ превращается в координатную систему ξ^i недеформированной среды с метрическим тензором h_{ik} . Поэтому ε_{ik} можно называть составляющими обратной деформации. Координаты ξ^i назовем эйлеровыми, а рассматриваемый способ описания деформации — эйлеровым.

Выразим ε_{ik} через перемещение. Из $\bar{r} = \bar{r}^* - \bar{u}$

имеем

$$\frac{\partial \bar{r}}{\partial \xi^i} = \frac{\partial \bar{r}^*}{\partial \xi^i} - \frac{\partial}{\partial \xi^i} (u^s \bar{r}_s^*) = \bar{r}_i^* - \nabla_i u^k \cdot \bar{r}_k^*$$

здесь ∇_i — ковариантная производная относительно h^*_{ik} , u^k — контравариантные составляющие перемещения на деформированные оси ξ^k . Внося \bar{r}_i в выражения $h_{ik} = (\bar{r}_i, \bar{r}_k)$ и пользуясь (1.7) находим

$$2\varepsilon_{ik} = \nabla_i u_k + \nabla_k u_i - h^{*rs} \nabla_i u_s \cdot \Delta_k u_r. \quad (1.8)$$

В случае, если координатная система ξ^i и координатная система x^α — прямоугольные декартовы, то

$$2\varepsilon_{ik} = \frac{\partial u_i}{\partial \xi^k} + \frac{\partial u_k}{\partial \xi^i} - \sum_{s=1}^3 \frac{\partial u^s}{\partial \xi^i} \frac{\partial u^s}{\partial \xi^k} \quad (1.9)$$

В дальнейшем лагранжевым координатам присваиваются греческие индексы, а эйлеровым — латинские. В случае бесконечно малых перемещений оба способа описания деформации тождественны.

§ 2. Уравнения равновесия теории упругости в лагранжевых координатах.

Допущение конечных перемещений в нелинейной теории упругости требует различия начального и конечного состояний деформируемой среды. Это обеспечивается: 1) сохранением квадратов и произведений перемещений и их первых производных в выражениях компонентов деформации (1.3) или (1.8), 2) нелинейностью закона Гука относительно перемещений и их производных, 3) отнесением всех сил и уравнений равновесия к метрике и основным направлениям деформированной среды. В соответствии с двумя способами описания деформации, требование 3) может быть выполнено; либо относя все силы и уравнения равновесия к деформированным координатам x^α , либо к координатам Эйлера ξ^i . Мы рассмотрим оба случая, причем начнем с первого. Введем обозначения: \bar{F} — вектор внешней силы, отнесенной к единице деформированного объема, ρ_0 и ρ — плотности недеформированной и деформированной сред, g и g^* — определители матриц $\|g_{\alpha\beta}\|$ и $\|g^*_{\alpha\beta}\|$, \bar{r}_α и \bar{r}^*_α — основные векторы недеформированных и деформированных лагранжевых координат x^α ,

$$\left\{ \begin{matrix} \bar{r}_\alpha \\ \bar{r}^*_\alpha \end{matrix} \right\} \left\{ \begin{matrix} \bar{r}_\alpha \\ \bar{r}^*_\alpha \end{matrix} \right\}^{-1}$$

символы Кристоффеля недеформированной и деформированной сред, ∇_α и ∇^*_α — знаки ковариантного дифференцирования относительно $g_{\alpha\beta}$ и $g^*_{\alpha\beta}$, $T^{*\alpha\beta}$ — контравариантные составляющие тензора напряжения на деформированные оси x^α .

Тогда, составляя условия равновесия параллелепипеда, ограниченного поверхностями $x^\alpha = \text{const.}$ и $x^\alpha + dx^\alpha = \text{const.}$, получаем уравнения равновесия в обычной форме [8]

$$\nabla^*_\alpha T^{*\alpha\beta} + \rho F^\beta = 0, \quad (2.1) \quad \alpha, \beta = 1, 2, 3.$$

причем $T^{*\alpha\beta} = T^{*\beta\alpha}$. Эти уравнения неудобны в том отношении, что благодаря ковариантному дифференцированию коэффициенты в них зависят от компонентов деформации $\eta_{\alpha\beta}$, которые входят через символы Кристоффеля. Однако избавиться от них чрезвычайно просто. Для этого уравнения (2.1) перепишем в векторной форме

$$\frac{\partial}{\partial x^\alpha} \left(\sqrt{g^*} T^{*\alpha\beta} \bar{r}_\beta^* \right) + \rho \sqrt{g^*} \bar{F} = 0. \quad (2.2)$$

В самом деле, применяя деривационные формулы

$$\bar{r}_{*\alpha\beta}^* = \frac{\partial^2 \bar{r}^*}{\partial x^\alpha \partial x^\beta} = \left\{ \begin{matrix} \gamma \\ \alpha\beta \end{matrix} \right\}_{g^*} \bar{r}_\gamma^*,$$

мы обратно получаем уравнение (2.1). Заменяя \bar{r}_β^* по формулам (1.1) и, пользуясь соотношением между плотностями

$$\rho_0 \sqrt{g} = \rho \sqrt{g^*}, \quad (2.3)$$

вместо (2.2) получаем

$$\frac{\partial}{\partial x^\alpha} \left[\sqrt{g^*} T^{*\alpha\beta} \bar{r}_\beta^* (\delta_\beta^\gamma + \nabla_\beta^* u^\gamma) \right] + \rho_0 \sqrt{g} \bar{F} = 0.$$

Обозначая

$$A^{\alpha\gamma} = \sqrt{\frac{g^*}{g}} T^{*\alpha\beta} (\delta_\beta^\gamma + \nabla_\beta^* u^\gamma), \quad (2.4)$$

находим

$$\frac{\partial}{\partial x^\alpha} \left(\sqrt{g} A^{\alpha\gamma} \bar{r}_\gamma \right) + \rho_0 \sqrt{g} \bar{F} = 0. \quad (2.5)$$

Это векторное уравнение сходно с (2.2). Поэтому пользуясь деривационными формулами

$$\bar{r}_{*\alpha\beta}^* = \left\{ \begin{matrix} \gamma \\ \alpha\beta \end{matrix} \right\}_{g^*} \bar{r}_\gamma^*,$$

находим окончательно

$$\nabla_\alpha A^{\alpha\beta} + \rho_0 F^\beta = 0, \quad (2.6)$$

где ковариантное дифференцирование производится относительно $g^{\alpha\beta}$, и символы Кристоффеля не зависят от деформации. Укажем на некоторые свойства величин $A^{\alpha\beta}$: 1) $A^{\alpha\beta} \neq A^{\beta\alpha}$, 2) по индексу β эти величины относятся к направлениям недеформированных координат x^β , что видно из (2.4). Следовательно, они являются составляющими вектора \bar{P} напряжения в точке $M^*(\bar{r}^*)$ деформированной среды на первоначальные направления, 3) по индексу α они относятся к деформированному пространству, 4) они образуют настоящий тензор, ибо

$$\frac{g^*}{g} = 1 + 2s_1 + 4s_2 + 8s_3, \text{ где } s_1, s_2, s_3$$

суть инварианты тензора η_β^{α} .

Соотношения, компенсирующие отсутствие симметрии, можно вывести следующим образом. Из формул (1.1) и (2.4) получаем

$$A^{\alpha\gamma} = \sqrt{\frac{g^*}{g}} T^{*\alpha\beta} (\bar{r}_\beta^*, r^\gamma). \quad (2.41)$$

Умножая эти равенства на скаляры (\bar{r}^*, r^ν) , в силу соотношений

$$(\bar{r}_\beta^*, r^\nu) (\bar{r}^*, r_\nu) = \delta_\beta^\nu,$$

находим

$$T^{*\alpha\beta} = \sqrt{\frac{g}{g^*}} A^{\alpha\nu} (\bar{r}^*, r_\nu). \quad (2.7)$$

Так как $T^{*\alpha\beta} = T^{\beta\alpha}$, то искомые соотношения имеют вид:

$$A^{\alpha\nu} (\bar{r}^*, r_\nu) = A^{\beta\nu} (\bar{r}^*, r_\nu). \quad (2.8)$$

Если внести сюда \bar{r}^* по формулам

$$\bar{r}^* = g^{*\alpha\gamma} \bar{r}_\gamma^* = g^{*\alpha\gamma} (\bar{r}_\gamma^* + r_{\gamma\mu} \Delta_\gamma u^\mu),$$

находим

$$A^{\alpha\nu} g^{*\beta\gamma} (g_{\gamma\nu} + \nabla_\gamma u_\nu) = A^{\beta\nu} g^{*\alpha\gamma} (g_{\gamma\nu} + \nabla_\gamma u_\nu). \quad (2.9)$$

Отсюда видно, что $A^{\alpha\nu} = A^{\nu\alpha}$ лишь в случае бесконечно малых перемещений. Рассмотрим подробно свойство 3. Пусть \bar{P}^α вектор напряжения, отнесенный к единице деформированной площади и приложенный к координатной поверхности $x^\alpha = \text{const}$. В силу известных соотношений

$$\bar{P}^\alpha = \frac{T^{*(\alpha)\beta} \bar{r}_\beta^*}{\sqrt{g^{*(\alpha\alpha)}}} \quad (2.10)$$

(не суммируется по α)

имеем

$$(\bar{P}^\alpha, r^\nu) = (\bar{P}^\alpha)^\nu = \frac{T^{*(\alpha)\beta} (\bar{r}_\beta^* r^\nu)}{\sqrt{g^{*(\alpha\alpha)}}}$$

или, пользуясь обозначениями (2.4), получаем

$$(\bar{P}^\alpha)^\nu = \sqrt{\frac{g}{g^{*(\alpha\alpha)} g^*}} A^{(\alpha)\nu}. \quad (2.11)$$

Далее, если da_α и $d\sigma^{\alpha}$ элементарные площадки на недеформированных и деформированных координатных поверхностях $x^\alpha = \text{const}$, то в результате несложных выкладок, найдем

$$\frac{d\sigma^{(\alpha)}}{da^{(\alpha)}} = \sqrt{\frac{g^* g^{*(\alpha\alpha)}}{g g^{(\alpha\alpha)}}}$$

(не суммируется по α).

Внося эти отношения в (2.11), после умножения на r_ν , находим

$$\bar{P}^{(\alpha)} \frac{d\sigma^{(\alpha)}}{d\sigma^{(\alpha)}} = \frac{A^{(\alpha)\nu} \bar{r}_\nu}{\sqrt{g^{(\alpha\alpha)}}} \quad (2.12)$$

(не суммируется по α).

Это последнее выражение есть вектор усилия, приходящегося на элементарную площадку $d\sigma^{(\alpha)}$ деформированной координатной поверхности $x^\alpha = \text{const}$ и отнесенного к единице первоначальной

координатной поверхности $x^a = \text{const.}$ в точке $M(r^{*a})$ деформированной среды.

Итак, из формул (2.12) мы заключаем, что величины A^{*a} суть контравариантные составляющие вектора усилия, действующего на деформированную поверхность, отнесенного к единице той первоначальной координатной поверхности, которая в результате деформации переходит в деформированную поверхность $x^a = \text{const.}$, на направление недеформированных осей x^a . Таким образом, индекс a при A^{*a} является указателем площадки до и после деформации. Это аналогично индексу альфа при x^a , где этот индекс указывает координаты до и после деформации.

§ 3. Уравнения равновесия в Эйлеравых координатах.

Пусть ξ^i — деформированные координаты частицы,

$$\bar{r}_i^{*a} = \frac{\partial \bar{r}^{*a}}{\partial \xi^i}, \quad h^{*ik}$$

основные векторы и составляющие основного метрического тензора этих координат, T^{ik} — контравариантные составляющие тензора напряжения. Рассматривая равновесие элементарного параллелепипеда, получаем

$$\frac{\partial}{\partial \xi^i} \left(\sqrt{h^{*a}} \bar{T}^{ik} r^{*k} \right) + \rho \sqrt{h^{*a}} \bar{F} = 0 \quad (3.1)$$

и применяя дивергентные формулы

$$\frac{\partial^2 \bar{r}^{*a}}{\partial \xi^i \partial \xi^k} = \left\{ \begin{matrix} ik \\ h^{*a} \end{matrix} \right\} \frac{\partial \bar{r}^{*a}}{\partial \xi^s},$$

имеем уравнения Мернагхана [11]

$$\nabla_i T^{ik} + \rho F^k = 0, \quad (3.1')$$

полученные им энергетическим методом.

Если координаты ξ^i — прямоугольные декартовы, то $\xi = x + u$, $\eta = y + v$, $\zeta = z + w$ и уравнения (3.1) переходят в уравнения Буссинеска

$$\frac{\partial \sigma^{ij}}{\partial \xi^i} + \rho F_j = 0, \quad (3.2)$$

которые он впервые применил к изучению волновых движений в сплошной среде с учетом сил инерции. Уравнения (3.2) использованы в ряде работ: Д. Панов [3] применил эти уравнения для выявления вторичных эффектов при кручении эллиптического цилиндра, Зволинский и Риз [1] применили к контурным задачам изгиба и кручения, Рухадзе [5] — для изучения изгиба и для выяснения взаимного влияния двух напряженных состояний. Некоторые авторы преобразовывают уравнения (3.2) к первоначальным координатам в каждом конкретном случае по формулам преобразования производных

$$\frac{\partial u}{\partial \xi} = \left(1 - \frac{\partial u}{\partial \xi} \right) \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial \xi} \frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial w}{\partial \xi} \frac{\partial u}{\partial z}$$

Из 9-ти формул этого типа определяем

$$\frac{\partial u}{\partial \xi}, \frac{\partial v}{\partial \eta}, \dots$$

в функции

$$\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \dots$$

и вставляем их в выражения ε_{ik} . Уравнения (3.2) преобразуются по тем же формулам. Однако такие преобразования неудобны в том отношении, что их надо проводить для каждой конкретной задачи; далее, преобразования сами по себе не имеют физического смысла, и, наконец, полученные таким путем уравнения довольно сложны по виду. Мы ставим здесь себе задачей преобразовать уравнения (3.1) к первоначальным координатам в общем случае, когда обе координатные системы x^a и ξ^k — произвольные криволинейные. Пусть dS — элемент некоторой поверхности S в деформированной среде, n_1, n_2, n_3 — проекции единичного вектора \bar{n} нормали к dS на прямоугольные оси координат ξ, η, ζ . Далее, пусть dS_0 — элемент недеформированной поверхности S_0 , переходящей после деформации в поверхность S . Нормаль к dS_0 обозначим через n^0 или n_0 , а ее проекции на недеформированные оси x, y, z через n_1^0, n_2^0, n_3^0 . Тогда между проекциями площадей $n_k dS_0$ и $n_k dS$ существуют известные соотношения (см. Гурса, Курс математич. анализа, ч. 1, стр. 328)

$$n_j dS = D \frac{\partial x^a}{\partial \xi^j} n_0^a dS_0. \quad (3.3)$$

Здесь $D = \det \left(\frac{\partial \xi^j}{\partial x^a} \right)$, причем $D = \frac{\rho_0}{\rho}$ или в общих

координатах

$$\frac{\rho_0}{\rho} = \sqrt{\frac{g^{*a}}{g}}. \quad (3.4)$$

Преобразуя ковариантные векторы $n_j dS$ и $n_0^a dS_0$ в общие криволинейные в силу (3.4) вместо (3.3) получим

$$n_k dS = \sqrt{\frac{g^{*a}}{g}} \frac{\partial x^a}{\partial \xi^k} n_0^a dS_0, \quad (3.5)$$

где x^a и ξ^k — недеформированные и деформированные криволинейные координаты, n_0^a и n_k — ковариантные составляющие нормалей на направления этих координат.

Далее, если v — объем деформированной среды, а \bar{P}_n вектор напряжения, отнесенный к единице площади деформированной поверхности S , то (3.1) можно представить в интегральной форме

$$\iint_{(S)} \bar{P}_n dS + \iiint_{(v)} \rho F d\bar{v} = 0. \quad (3.6)$$

В самом деле, если \bar{P}_n представить в виде линейной вектор-функции нормали

$$\bar{P}_n = T \cdot \bar{n}, \quad (3.7)$$

то

$$\iint_{(S)} T \cdot \bar{n} dS + \iiint_{(v)} \rho F d\bar{v} = 0,$$

откуда по формуле Гаусса имеем

$$\iiint_{(v)} (\operatorname{div} T + \rho \bar{F}) dv = 0,$$

что приводит к уравнениям (3.1) и (3.1'). Представим тензор T в виде суммы девяти диад:

$$T = T^{ik} \bar{r}_i \bar{r}_k. \quad (3.8)$$

Тогда

$$\bar{P}_n = T^{ik} \bar{r}_k \bar{r}_i \cdot n = T^{ik} \bar{r}_i (\bar{r}_k \cdot n) = T^{ik} \bar{r}_i n_k$$

и по (3.5)

$$\bar{P}_n dS = \sqrt{\frac{g^*}{g}} \cdot T^{ik} \bar{r}_i \frac{\partial x^a}{\partial \xi^k} n_a^0 dS_0,$$

или в составляющих на недеформированные оси x^a :

$$(\bar{P}_n, \bar{r}^\beta) dS = (\bar{p}_n)^\beta dS = \sqrt{\frac{g^*}{g}} T^{ik} (\bar{r}_i, \bar{r}^\beta) \frac{\partial x^a}{\partial \xi^k} n_a^0 dS_0.$$

Наконец, в силу $\bar{r}_i = \bar{r}^a \frac{\partial x^a}{\partial \xi^i}$, имеем

$$(\bar{P}_n)^\beta dS = \sqrt{\frac{g^*}{g}} T^{ik} (\bar{r}^a, \bar{r}^\beta) \frac{\partial x^a}{\partial \xi^k} \frac{\partial x^v}{\partial \xi^i} n_a^0 dS_0.$$

Умножая эти соотношения на \bar{r}^β , получим

$$\bar{P}_n dS = \sqrt{\frac{g^*}{g}} \cdot \bar{T}^{av} (\bar{r}^a, \bar{r}^\beta) \bar{r}_\beta n_a^0 dS_0,$$

где

$$\bar{T}^{av} = T^{ik} \frac{\partial x^a}{\partial \xi^i} \frac{\partial x^v}{\partial \xi^k}. \quad (3.9)$$

Эти формулы выражают соотношения между двумя тензорами напряжения, отнесенными к действительным площадкам. Принимая во внимание (2.4'), усилие $\bar{P}_n ds$ можно представить в виде

$$\bar{P}_n dS = A^{a\beta} \bar{r}_\beta n_a^0 dS_0. \quad (3.10)$$

Внося эти выражения в (3.6) и пользуясь принципом сохранения массы $\rho_0 dv_0 = \rho dv$, имеем

$$\iint_{(s_0)} A^{a\beta} \bar{r}_\beta n_a^0 dS_0 + \iiint_{(v_0)} \rho_0 \bar{F} dv_0 = 0.$$

откуда, применяя формулу Гаусса и учитывая произвольность v_0 , вновь приходим к уравнению (2.5).

Из (3.10) имеем $(\bar{P}_n)^\beta dS = A^{a\beta} n_a^0 dS_0$, (3.11)

и если положить

$$A_{n_0}^\beta = P_n^\beta \frac{dS}{dS_0},$$

то

$$A_{n_0}^\beta = A^{a\beta} n_a^0. \quad (3.12)$$

Последние могут служить в качестве граничных условий для $A^{a\beta}$. Рассмотрим случай, когда обе системы координат x^a и ξ^i декартовы.

Тогда

$$g = 1, h^* = 1, V g^* = \det \left(\frac{\partial \xi^i}{\partial x^a} \right) = D, g_\beta^\alpha + \nabla_\beta u^\alpha = g_\beta^\alpha + \frac{\partial u^\alpha}{\partial x^\beta} = \frac{\partial \xi^\alpha}{\partial x^\beta}.$$

Уравнения (3.1), (2.5) и формулы (2.4) переходят в

$$\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial \xi^i} + \rho F_j = 0, \quad (3.13)$$

$$\frac{\partial A^{\alpha\beta}}{\partial x^\alpha} + \rho_0 F^\beta = 0, \quad (3.14)$$

$$A^{\alpha\beta} = D T^{*av} \frac{\partial \xi^\beta}{\partial x^v}. \quad (3.15)$$

Эти уравнения являлись предметом исследования ряда авторов. Формулы (3.15) выведены в нашей работе [7], где было дано их приложение к задаче кручения призматических стержней.

Преобразования, приведенные в §§ 2 и 3, представляют собой аналог преобразования гидродинамических уравнений Эйлера к переменным Лагранжа. В случае декартовых координат это преобразование было начато Кирхгофом в 1852 г. При этом он пользовался идеями Сен-Венана, высказанными в 1849 г. о необходимости введения в теорию упругости конечных перемещений. Позднее, уравнения (3.13) были предметом исследования Буссинека. Он и Кирхгоф выразили величины A через производные энергии деформации. Надо отметить, что геометрический смысл введенных ими величин оставался не выясненным.

В 1891 году М. Бриллюэн вновь рассмотрел уравнения вида (3.14) и вывел соотношения между напряжениями и деформациями. В 1896 году Эжен и Франсуа Коссера [9] в мемуаре, названном ими „Первый мемуар о теории упругости“, развивая идеи упомянутых авторов, получили соотношения между напряжениями, отнесенными к первоначальному и деформированному площадкам. Гораздо позднее, в 1925 году Л. Бриллюэн [10] вывел формулы указанных авторов и уравнения равновесия и движения типа (2.5). Обобщить все формулы на случай общих координат Л. Бриллюэну не удалось, т. к. он ввел величины, не являющиеся настоящими тензорами. Метод исследования всех упомянутых авторов — энергетический. Повидимому, по этой причине, геометрический смысл рассматриваемых величин ускользал от внимания авторов. Что касается преобразований, проведенных в работе [7] и здесь, то геометрическая сторона их вполне ясна. Благодаря этому мы в состоянии получить из них все результаты, опубликованные различными авторами вплоть до последнего времени. Формулы Коссера (первый мемуар, стр. 45)

$$A^{a\beta} = P^{av} \frac{\partial \xi^\beta}{\partial x^v} \quad (3.16)$$

сразу получаются из (3.15), если положить $P^{av} = D T^{*av} \dots$ (а смысл величин P^{av} при энергетическом выводе остается невыясненным).

T^{*av} — суть контравариантные составляющие вектора напряжения на криволинейные оси x^a , в которые переходят прямоугольные декартовы в результате деформации. Отсюда ясен смысл P^{av} . Тензор T^* можно выразить через σ по формулам (3·9):

$$T^{*av} = \sigma^{ik} \frac{\partial x^a}{\partial \xi^k} \frac{\partial x^v}{\partial \xi^i} \quad (3·17)$$

Внося их в (3·15), имеем

$$A^{\alpha\beta} = D \sigma^{k\beta} \frac{\partial x^\alpha}{\partial \xi^k} \quad (3·18)$$

Если $D \frac{\partial x^\alpha}{\partial \xi^k}$ заменить минорами $\det \left(\frac{\partial \xi^i}{\partial x^\alpha} \right)$, получаем формулы Коссера

(стр 48, первого мемуара), вновь полученные Бриллюэном [10].
Далее, из (3·17) мы имеем

$$\sigma^{ik} = T^{*a\beta} \frac{\partial \xi^i}{\partial x^a} \frac{\partial \xi^k}{\partial x^\beta},$$

выражая T^* через P по формулам (а), находим формулы

$$\sigma^{ik} = \frac{1}{D} P_{\alpha\beta} \frac{\partial \xi^i}{\partial x^\alpha} \frac{\partial \xi^k}{\partial x^\beta} = \frac{1}{D} P_{\alpha\beta} \left(\delta_\alpha^i + \frac{\partial u^i}{\partial x^\alpha} \right) \left(\delta_\beta^k + \frac{\partial u^k}{\partial x^\beta} \right),$$

принадлежащие Коссера (вывод этих формул занимает 44 стр. большого формата первого мемуара). Они выведены также и у Бриллюэна [10].

Далее, пусть T^* выражается линейно через компоненты деформации, т. е. деформации малы. Тогда множитель $D = \sqrt{g^*}$ заменим единицей

и в силу формул $\frac{\partial \xi^i}{\partial x^a} = \delta_a^i + \frac{\partial u^i}{\partial x^a}$ имеем из (3·15)

$$A^{\alpha\beta} = T^{*av} \left(\delta_v^\beta + \frac{\partial u^\beta}{\partial x^v} \right).$$

Внося их в (3·14) имеем уравнения равновесия

$$\frac{\partial}{\partial x^a} T^{*av} \left(\delta_v^\beta + \frac{\partial u^\beta}{\partial x^v} \right) + \rho_0 F^\beta = 0,$$

полученные Каппусом [12] путем сложных выкладок.

Наконец, если в формулах (3·15) сохранить квадраты и произведения первых производных перемещений по начальным координатам, то получаем уравнения равновесия, данные М. А. Био.

Подробный вывод этих уравнений из формул (2·4) и (3·15) приведен в статье [7].

II. УРАВНЕНИЯ РАВНОВЕСИЯ ОБОЛОЧЕК ПРИ КОНЕЧНЫХ ПЕРЕМЕЩЕНИЯХ.

§ 1. Предварительные формулы и обозначения.

Результаты, изложенные в гл. I, позволяют составить уравнения равновесия оболочек при конечных перемещениях. Для составления

уравнений равновесия достаточен существующий дифференциально-геометрический аппарат линейной теории оболочек. Изложение основ этого аппарата можно найти в статье А. И. Лурье [8]. В этом параграфе мы приведем необходимые формулы. Обозначим: через S_0 срединную поверхность недеформированной оболочки; через $2h$ постоянную толщину оболочки.

За недеформированные координаты оболочки выберем: x^1 и x^2 — гауссовы координаты на срединной поверхности, x^3 — третья координата по внутренней нормали к S_0 , так что уравнением S_0 будет $x^3 = 0$. Положение любой точки оболочки определяется радиусом-вектором \bar{r} , проведенным из произвольной точки пространства, а положение точки срединной поверхности определяется радиусом-вектором $\bar{\rho}$, проведенным из той же точки. Обозначая через \bar{m} единичный вектор нормали к S_0 , определяем положение любой точки недеформированной оболочки вектором $\bar{r} = \bar{\rho} + \bar{m}x^3$.

Далее, обозначим через $\bar{r}_1, \bar{r}_2, \bar{r}_3$ основные векторы пространственной координатной системы, а через

$$\bar{\rho}_1 = \frac{\partial \bar{\rho}}{\partial x^1}, \quad \bar{\rho}_2 = \frac{\partial \bar{\rho}}{\partial x^2}$$

основные векторы гауссовых координат.

Тогда метрические тензоры пространственных и гауссовых координат будут:

$$g_{ik} = (\bar{r}_i, \bar{r}_k), \quad g_{13} = g_{23} = 0, \quad g_{33} = 1, \quad \det(g_{ik}) = g \quad (1·1)$$

$$a_{\alpha\beta} = (\bar{\rho}_\alpha, \bar{\rho}_\beta), \quad \det(a_{\alpha\beta}) = a.$$

Для векторов, сопряженных основным, имеют место формулы:

$$[\bar{r}_i, \bar{r}_k] = C_{ikj} \bar{r}^j, \quad (1·2)$$

где C_{ikj} — дискриминантный тензор пространственных координат:

$$C_{123} = C_{231} = C_{312} = \sqrt{g}, \quad C_{132} = C_{213} = C_{321} = -\sqrt{g}, \\ C_{ikj} = 0 \text{ в остальных случаях,}$$

и аналогично для поверхностных векторов

$$[\bar{\rho}_\alpha, \bar{\rho}_\beta] = C_{\alpha\beta\gamma} \bar{\rho}^\gamma, \\ [\bar{\rho}_\alpha, \bar{m}] = C_{\beta\alpha} a^{\beta\gamma} \bar{\rho}_\gamma, \quad (1·3)$$

где $C_{11} = C_{22} = 0, C_{12} = -C_{21} = \sqrt{a}$.

Для них имеют место дериационные формулы

$$\bar{\rho}_{\alpha\beta} = \left\{ \begin{matrix} \gamma \\ \alpha\beta \end{matrix} \right\} \bar{\rho}^\gamma + b_{\alpha\beta} \bar{m} \\ \bar{\rho}_\alpha = - \left\{ \begin{matrix} \beta \\ \alpha\gamma \end{matrix} \right\} \bar{\rho}^\gamma + b_\alpha^\beta \bar{m} \\ \frac{\partial \bar{m}}{\partial x^\alpha} = -b_\alpha^\beta \bar{\rho}_\beta = -b_{\alpha\beta} \bar{\rho}^\beta, \quad (1·4)$$

где $b_{\alpha\beta}$ — коэффициенты второй квадратичной формы.

И наконец,

$$\left. \begin{aligned} \bar{r}_\alpha &= \bar{\rho}_\alpha - x^3 b_{\alpha\beta}^{\bar{\rho}} \\ \bar{r}_3 &= \bar{m}. \end{aligned} \right\} \quad (1.5)$$

Гауссовы координаты обозначаем греческими индексами α, β, \dots , которые принимают значения 1, 2, а пространственные координаты латинскими индексами $i, j, k, \dots = (1, 2, 3)$.

§ 2. УРАВНЕНИЯ РАВНОВЕСИЯ ОБОЛОЧЕК ПОСТОЯННОЙ ТОЛЩИНЫ.

Проинтегрируем по x^3 уравнение (2.5) главы I по толщине оболочки в пределах от $-h$ до $+h$:

$$\int_{-h}^{+h} \frac{\partial}{\partial x^3} (V\bar{g} A^{\alpha k} \bar{r}_k) dx^3 + \int_{-h}^{+h} \rho_0 V\bar{g} \bar{F} dx^3 = 0.$$

Откуда имеем

$$\frac{\partial}{\partial x^3} (V\bar{a} \bar{f}^\alpha + V\bar{a} \bar{m} N^\alpha) + V\bar{a} \bar{E} = 0, \quad (2.1)$$

где обозначены:

$$\bar{f}^\alpha = \int_{-h}^{+h} \sqrt{\frac{\bar{g}}{a}} A^{\alpha\beta} \bar{r}_\beta dx^3 \quad (2.2)$$

$$N^\alpha = \int_{-h}^{+h} \sqrt{\frac{\bar{g}}{a}} A^{\alpha 3} dx^3 \quad (2.3)$$

$$\bar{E} = \sqrt{\frac{\bar{g}}{a}} A^{\alpha k} \bar{r}_k \Big|_{-h}^{+h} + \int_{-h}^{+h} \rho_0 \sqrt{\frac{\bar{g}}{a}} F^k \bar{r}_k dx^3.$$

Разложим векторы \bar{f}^α и \bar{E} на составляющие по направлениям гауссовых координат x^1 и x^2 и нормали m

$$\bar{f}^\alpha = T^{\alpha\beta} \bar{\rho}_\beta, \quad \bar{E} = E^{\beta\bar{\rho}_\beta} + E^3 \bar{m} \quad (2.4)$$

Внося эти векторы в уравнение (2.1) и пользуясь деривационными формулами (1.4), имеем три скалярных уравнения

$$\frac{1}{V\bar{a}} \frac{\partial}{\partial x^3} (V\bar{a} T^{\alpha\beta}) + T^{\alpha\gamma} \{ \bar{\rho}_\gamma \}_\alpha - N^\alpha b_\alpha^\beta + E^\beta = 0 \quad (2.5)$$

$$\frac{1}{V\bar{a}} \frac{\partial}{\partial x^3} (V\bar{a} N^\alpha) + b_{\alpha\beta} T^{\alpha\beta} + E^3 = 0 \quad (2.6)$$

или же

$$\nabla_\alpha T^{\alpha\beta} - b_\alpha^\beta N^\alpha + E^\beta = 0$$

$$\nabla_\alpha N^\alpha + b_{\alpha\beta} T^{\alpha\beta} + E^3 = 0, \quad (2.7)$$

где ∇ — знак ковариантного дифференцирования относительно $a_{\alpha\beta}$. Найдем явное выражение макроскопических тензоров усилий T . Из формул (1.5) и (2.2) получаем

$$\bar{f}^\alpha = T^{\alpha\beta} \bar{\rho}_\beta = \int_{-h}^{+h} \sqrt{\frac{\bar{g}}{a}} A^{\alpha\beta} (\bar{\rho}_\beta - x^3 b_{\beta\gamma}^{\bar{\rho}}) dx^3,$$

откуда

$$T^{\alpha\beta} = \int_{-h}^{+h} \sqrt{\frac{\bar{g}}{a}} A^{\alpha\gamma} (a_\gamma^\beta - b_\gamma^{\beta\alpha} x^3) dx^3 \quad (2.8)$$

$$N^\alpha = \int_{-h}^{+h} \sqrt{\frac{\bar{g}}{a}} A^{\alpha 3} dx^3. \quad (2.3)$$

Из структуры этих формул видно, что $T^{\alpha\beta}$ — контравариантный тензор мембранных усилий, а N^α — контравариантный вектор перерезывающих сил, т. к. $\sqrt{\frac{\bar{g}}{a}}$ ведет себя как абсолютный инвариант при преобразовании гауссовых координат.

Пользуясь формулами (1.5), легко найти составляющие внешних сил

$$\begin{aligned} \bar{E} = E^{\beta\bar{\rho}_\beta} + E^3 \bar{m} &= \sqrt{\frac{\bar{g}}{a}} A^{\alpha\beta} (\bar{\rho}_\alpha - x^3 b_{\alpha\gamma}^{\bar{\rho}}) \Big|_{-h}^{+h} + \rho_0 \int_{-h}^{+h} \sqrt{\frac{\bar{g}}{a}} F^\alpha (\bar{\rho}_\alpha - \\ &- x^3 b_{\alpha\gamma}^{\bar{\rho}}) dx^3 + \sqrt{\frac{\bar{g}}{a}} A^{33} \Big|_{-h}^{+h} \bar{m} + \bar{m} \int_{-h}^{+h} \rho_0 \sqrt{\frac{\bar{g}}{a}} F^3 dx^3, \end{aligned}$$

откуда

$$E^\alpha = \sqrt{\frac{\bar{g}}{a}} A^{\alpha\beta} (a_\beta^\alpha - x^3 b_\beta^\alpha) \Big|_{-h}^{+h} + \rho_0 \int_{-h}^{+h} \sqrt{\frac{\bar{g}}{a}} F^\beta (a_\beta^\alpha - x^3 b_\beta^\alpha) dx^3 \quad (2.9)$$

$$E^3 = \sqrt{\frac{\bar{g}}{a}} A^{33} \Big|_{-h}^{+h} + \rho_0 \int_{-h}^{+h} \sqrt{\frac{\bar{g}}{a}} F^3 dx^3. \quad (2.10)$$

Рассмотрим моменты внутренних и внешних сил. Умножим уравнение равновесия (2.5) главы I на плечо силы $\rho_0 \bar{F}$ относительно произвольной точки срединной поверхности. Так как точкой приложения этой силы является точка $M^*(\bar{r}^*)$ деформированной оболочки,

то радиусом-вектором ее относительно произвольной точки средней поверхности будет $\bar{R} = r^* - \bar{r} = \bar{m}x^3 + \bar{u}$. Умножая уравнение (2.5) главы I векторно на \bar{R} , имеем

$$\frac{\partial}{\partial x^3} [\bar{R}, V\bar{g} A^{sk} \bar{r}_k] - \left[\frac{\partial \bar{R}}{\partial x^3}, V\bar{g} A^{sk} \bar{r}_k \right] + [\bar{R}, \rho_0 V\bar{g} \bar{F}] = 0. \quad (a)$$

Покажем, что имеет место равенство

$$J = [\bar{r}_s^*, \bar{r}_k] A^{sk} = 0. \quad (2.11)$$

В самом деле, внося сюда A^{sk} и \bar{r}_s^* по формулам (1.1) и (2.4) гл. 1, имеем

$$J = \sqrt{\frac{g^{st}}{g}} T^{st} (\delta_i^k + \nabla_i u^k) (\delta_s^j + \nabla_s u^j) [\bar{r}_j, \bar{r}_k].$$

и т. к. тензор $K^{kj} = T^{st} (\delta_i^k + \nabla_i u^k) (\delta_s^j + \nabla_s u^j)$, симметричен относительно индексов k, j , то $J = 0$. Интегрируя (a) по x^3 от $-h$ до $+h$ с учетом (2.11), имеем

$$\int_{-h}^{+h} \frac{\partial}{\partial x^3} [\bar{m} x^3, V\bar{g} A^{sk} \bar{r}_k] dx^3 + \int_{-h}^{+h} [\bar{r}_s, V\bar{g} A^{sk} \bar{r}_k] dx^3 + \int_{-h}^{+h} [\bar{m} x^3, \rho_0 \bar{F} V\bar{g}] dx^3 + V\bar{a} \bar{\Phi} = 0, \quad (b)$$

где положено

$$V\bar{a} \bar{\Phi} = \int_{-h}^{+h} \left\{ \frac{\partial}{\partial x^3} [\bar{u}, V\bar{g} A^{sk} \bar{r}_k] + [\bar{u}, \rho_0 \bar{F}] V\bar{g} \right\} dx^3. \quad (c)$$

Из этого равенства можно исключить вектор \bar{u} . Для этого умножим уравнение равновесия (2.5) главы I векторно на \bar{u}

$$\frac{\partial}{\partial x^3} [\bar{u}, V\bar{g} A^{sk} \bar{r}_k] - \left[\frac{\partial \bar{u}}{\partial x^3}, V\bar{g} A^{sk} \bar{r}_k \right] + [\bar{u}, \rho_0 V\bar{g} \bar{F}] = 0.$$

Так как $\frac{\partial \bar{u}}{\partial x^3} = \bar{r}_s^* - \bar{r}_s$, то это равенство в силу (2.11) запишется в виде

$$\frac{\partial}{\partial x^3} [\bar{u}, V\bar{g} A^{sk} \bar{r}_k] + [\bar{u}, \rho_0 \bar{F} V\bar{g}] = -[\bar{r}_s, \bar{r}_k] V\bar{g} A^{sk}.$$

Подставляя последнее в (c), получаем

$$\bar{\Phi} = \int_{-h}^{+h} \sqrt{\frac{g}{a}} [\bar{r}_k, \bar{r}_s] A^{sk} dx^3. \quad (2.12)$$

Далее замечая, что в уравнении (b)

$$\int_{-h}^{+h} [\bar{r}_s, V\bar{g} A^{sk} \bar{r}_k] dx^3 = [\bar{r}_s, \int_{-h}^{+h} V\bar{g} A^{sk} \bar{r}_k dx^3] = [\bar{r}_s, V\bar{a} \bar{f}_1^s],$$

где

$$\bar{f}_1^s = \bar{f}^s + \bar{m} N^s,$$

представим его в виде

$$\frac{\partial}{\partial x^3} (V\bar{a} \bar{L}^s) + [\bar{r}_s, V\bar{a} \bar{f}_1^s] + V\bar{a} \bar{M} + V\bar{a} \bar{\Phi} = 0, \quad (2.13)$$

где обозначено:

$$\bar{L}^s = \int_{-h}^{+h} [\bar{m} x^3, \bar{r}_\beta] \sqrt{\frac{g}{a}} A^{\alpha\beta} dx^3 \quad (2.14)$$

$$\bar{M} = [\bar{m} x^3, \bar{r}_\beta] \sqrt{\frac{g}{a}} A^{\alpha\beta} \Big|_{-h}^{+h} + \int_{-h}^{+h} [\bar{m} x^3, \bar{F}] \rho_0 \sqrt{\frac{g}{a}} dx^3. \quad (2.15)$$

Для представления уравнения моментов (2.13) в скалярной форме внесем выражение \bar{r}_β по формулам (1.5) в (2.14). Это дает

$$\bar{L}^s = \int_{-h}^{+h} [\bar{m} x^3, \bar{r}_\beta] \sqrt{\frac{g}{a}} A^{\alpha\beta} dx^3 = \int_{-h}^{+h} [\bar{m}, \bar{r}_\gamma] (a_\beta^\alpha - b_\beta^\alpha x^3) A^{\alpha\beta} \sqrt{\frac{g}{a}} x^3 dx^3,$$

и согласно формул (1.3), имеем

$$\bar{L}^s = C_{\gamma\mu} a^{\alpha\mu} L^{\alpha\gamma} \bar{\rho}_\mu, \quad (2.16)$$

где положено

$$L^{\alpha\beta} = \int_{-h}^{+h} A^{\alpha\gamma} (a_\gamma^\beta - x^3 b_\gamma^\beta) \sqrt{\frac{g}{a}} x^3 dx^3. \quad (2.17)$$

Найдем теперь $\bar{K} = [\bar{r}_s, \bar{f}_1^s]$. Представляя \bar{K} в виде

$$\bar{K} = K^\alpha \bar{\rho}_\alpha + K^3 \bar{m} = [\bar{r}_s, T^{\alpha\beta} \bar{\rho}_\beta + \bar{m} N^s]$$

по формулам (1.3), находим

$$K^\alpha = C_{\gamma\mu} a^{\alpha\mu} N^\gamma, \quad K^3 = C_{\alpha\beta} T^{\alpha\beta}.$$

В силу последних и (2.16) уравнение (2.13) запишется

$$\frac{1}{V\bar{a}} \frac{\partial}{\partial x^3} (V\bar{a} C_{\gamma\mu} a^{\alpha\mu} L^{\alpha\gamma} \bar{\rho}_\mu) + K^\alpha \bar{\rho}_\alpha + K^3 \bar{m} + M^\alpha \bar{\rho}_\alpha + \Phi^s \rho_s = 0.$$

Откуда, пользуясь формулами (1.4), и внося значения K^α и K^β , имеем

$$C_{\gamma\beta} \nabla_\alpha L^{\alpha\gamma} + C_{\beta\alpha} N^\alpha + M_\beta + \Phi_\beta = 0 \quad (2.18)$$

$$C_{\gamma\alpha} a^{\nu\mu} b_{\alpha\mu} L^{\alpha\gamma} + C_{\alpha\beta} T^{\alpha\beta} + \Phi_3 = 0. \quad (2.19)$$

При этом мы пользовались формулами $C^{\alpha\nu} C_{\alpha\beta} = a_\beta^\nu$, $C_{\gamma\nu} a^{\nu\mu} a^{\beta\gamma} = C^{\beta\mu}$ и тем, что ковариантная производная дискриминантного тензора равна нулю.

Положим

$$L^{\alpha\beta} = C^{\lambda\beta} a_{\lambda\alpha} L^{\alpha\nu}.$$

Тогда

$$\nabla_\alpha L^{\alpha\beta} + C_{\alpha\nu} a^{\alpha\beta} N^\nu + M^\beta + \Phi^\beta = 0 \quad (2.20)$$

$$a_{\alpha\beta} L^{\alpha\beta} + C_{\alpha\beta} T^{\alpha\beta} + \Phi_3 = 0. \quad (2.21)$$

Для вычисления составляющих вектора $\bar{\Phi}$ преобразуем (2.12) при помощи формул (1.2) к виду

$$\bar{\Phi} = \int_{-h}^{+h} C_{ksj} \bar{r}^j \sqrt{\frac{g}{a}} A^{sk} dx^3.$$

Если ввести ковариантный вектор $P_j = C_{ksj} A^{sk}$ с составляющими

$$P_1 = \sqrt{g} (A^{32} - A^{23}), P_2 = (A^{13} - A^{31}) \sqrt{g}, P_3 = (A^{21} - A^{12}) \sqrt{g}, \quad (2.22)$$

то

$$\bar{\Phi} = \int_{-h}^{+h} \sqrt{\frac{g}{a}} P_j \bar{r}^j dx^3 = \int_{-h}^{+h} g^{vj} P_j (a_\alpha^v - x^3 b_\alpha^v) \sqrt{\frac{g}{a}} dx^3 + \\ + \bar{m} \int_{-h}^{+h} P_3 \sqrt{\frac{g}{a}} dx^3,$$

откуда

$$\left. \begin{aligned} \Phi^\alpha &= \int_{-h}^{+h} g^{\beta j} P_j (a_\beta^\alpha - x^3 b_\beta^\alpha) \sqrt{\frac{g}{a}} dx^3 \\ \Phi^3 &= \Phi_3 = \int_{-h}^{+h} P_3 \sqrt{\frac{g}{a}} dx^3. \end{aligned} \right\} \quad (2.23)$$

Пользуясь формулами (1.3) и (1.5), из (2.15), имеем

$$M^\beta = C_{\alpha\nu} a^{\nu\beta} \left\{ \int_{-h}^{+h} \sqrt{\frac{g}{a}} (a_\gamma^\alpha - b_\gamma^\alpha x^3) x^3 A^{\beta\gamma} dx^3 + \right. \\ \left. + \int_{-h}^{+h} \sqrt{\frac{g}{a}} (a_\gamma^\alpha - b_\gamma^\alpha x^3) x^3 F_\gamma dx^3 \right\}. \quad (2.24)$$

Шестое уравнение равновесия (2.21) обращается в тождество. Это мы докажем, взяв за гауссовы координаты линии кривизны. В этом случае

$$b_2^1 = b_1^2 = 0, \quad b_1^1 = k_1, \quad b_2^2 = k_2, \quad g_{\alpha\alpha} = a_{\alpha\alpha} (1 - k_\alpha x^3)^2,$$

и уравнение (2.21) приводится к виду

$$\sqrt{a} (T^{12} - T^{21}) + \sqrt{a} (L^{21} k_2 - L^{12} k_1) + \Phi^3 = 0.$$

Внося сюда выражения усилий и моментов

$$T^{12} = \int_{-h}^{+h} \sqrt{\frac{g}{a}} A^{12} (1 - k_2 x^3) dx^3, \quad T^{21} = \int_{-h}^{+h} \sqrt{\frac{g}{a}} A^{21} (1 - k_1 x^3) dx^3,$$

$$L^{12} = \int_{-h}^{+h} \sqrt{\frac{g}{a}} A^{12} (1 - k_2 x^3) x^3 dx^3,$$

$$L^{21} = \int_{-h}^{+h} \sqrt{\frac{g}{a}} A^{21} (1 - k_1 x^3) x^3 dx^3,$$

$$\Phi_3 = \int_{-h}^{+h} \sqrt{g} (1 - k_1 x^3) (1 - k_2 x^3) (A^{21} - A^{12}) dx^3,$$

имеем

$$\int_{-h}^{+h} \sqrt{g} (A^{21} - A^{12}) \cdot 0 \cdot dx^3 = 0.$$

В случае линейной теории это тождество удовлетворяется в силу симметрии касательных напряжений, здесь же благодаря равенству нулю коэффициента при разности касательных напряжений, т. е. благодаря присутствию Φ в уравнениях моментов. Отметим, что внешние силы E и моменты M зависят от деформации.

§ 3. Вывод уравнений равновесия оболочки из интегральных условий равновесия теории упругости.

В этом параграфе мы рассматриваем оболочку переменной толщины, принимая за поверхность приведения поверхность S_0 , уравнение которой $x^3 = 0$. Положение точки на этой последней определяем гауссовыми координатами x^1 и x^2 , причем x^i — эйлеровы координаты. Уравнения ограничивающих поверхностей будут:

$$x^3 = h_{(+)}(x^1, x^2), \quad x^3 = h_{(-)}(x^1, x^2).$$

Пусть l — замкнутый контур на S_0 . Из точек этого контура восстановим нормали к S_0 . Геометрическое место этих нормалей обозначим через Σ . Рассмотрим элемент оболочки, ограниченный поверхностью Σ и поверхностями $x^3 = h_{(+)}$, $x^3 = h_{(-)}$.

Введем обозначения:

1) $\Sigma_{(+)}$ — часть поверхности $x^3 = h_{(+)}$, вырезанная поверхностью Σ , $d\Sigma_{(+)}$ — элементарная площадка на $\Sigma_{(+)}$, $N^{(+)}$ — нормаль к $d\Sigma_{(+)}$, $\bar{P}_{(+)}$ — вектор напряжения на единицу площади $\Sigma_{(+)}$, g — значение g на $\Sigma_{(+)}$.

2) $\Sigma_{(-)}$, $d\Sigma_{(-)}$, $N^{(-)}$, $\bar{P}_{(-)}$, g — те же величины на поверхности $x^3 = h_{(-)}$

3) $d\Sigma$ — элемент поверхности Σ , n_a — ковариантные составляющие нормали к $d\Sigma$, \bar{P} — вектор напряжения на единицу площади Σ , на уровне x^3 от S_0 .

4) σ_0 — часть поверхности приведения S_0 , заключенная в l .

$d\sigma_0$ — элементарная площадка на ней.

5) σ — часть поверхности, параллельной σ_0 , на уровне x^3 от S_0 , $d\sigma$ — элементарная площадка на ней.

6) $d\Sigma_0$ — элемент поверхности Σ , имеющий общие точки с l , n^0_a — составляющая нормали к l и $d\Sigma_0$.

Установим теперь некоторое соотношение между только что введенными величинами. Пусть x^a — криволинейные координаты, а $\bar{x}^k = \bar{x}^k(x^a)$ определяет точечное преобразование пространства; если точка (x^a) описывает некоторую поверхность Π_0 с нормалью n^0 , то точка (\bar{x}^k) опишет поверхность Π с нормалью n . Формулы преобразования площадей (3.3) главы 1-й запишутся в виде

$$n_k d\Pi = \sqrt{\frac{g}{g}} \det \left(\frac{\partial \bar{x}^k}{\partial x^a} \right) \frac{\partial x^b}{\partial \bar{x}^k} n^0_b d\Pi_0, \quad (3.1)$$

где n_k и n^0_a — ковариантные составляющие нормалей на оси \bar{x}^k и x^a . Применяя эти формулы к поверхности $x^3 = h$, т. е. к преобразованию $x^1 = \bar{x}^1$, $x^2 = \bar{x}^2$, $x^3 = \bar{x}^3 + h$, получаем

$$d\sigma = \sqrt{\frac{g}{g}} d\sigma_0. \quad (3.2)$$

По тем же формулам (3.1) можно установить соответствие между элементами поверхностей

$$n_a d\Sigma = \sqrt{\frac{g}{g}} n^0_a d\Sigma_0. \quad (3.3)$$

В свою очередь $d\Sigma_0$ можно представить как произведение элемента длины контура l на dx^3

$$n_a d\Sigma = \sqrt{\frac{g}{g}} n^0_a dl dx^3 \quad (3.4)$$

и, наконец, для элементов $d\Sigma_{(+)}$, $d\Sigma_{(-)}$ получим таким же путем

$$\begin{aligned} N^{(+)}_3 d\Sigma_{(+)} &= \sqrt{\frac{g}{g}} d\sigma_0^{(+)} \\ N^{(-)}_3 d\Sigma_{(-)} &= \sqrt{\frac{g}{g}} d\sigma_0^{(-)} \end{aligned} \quad (3.5)$$

Условия равновесия элемента оболочки по общей теории упругости запишутся:

$$\iint_{(s)} \bar{P}_n dS + \iiint_{(v)} \rho_0 \bar{F} dv = 0 \quad (3.6)$$

$$\iint_{(s)} [r, \bar{P}_n] dS + \iiint_{(v)} [r, \rho_0 \bar{F}] dv = 0. \quad (3.7)$$

Перепишем (3.6) в виде

$$\iint_{\Sigma_{(-)}} \bar{P}_{(-)} d\Sigma_{(-)} + \iint_{\Sigma_{(+)}} \bar{P}_{(+)} d\Sigma_{(+)} + \iint_{\Sigma} \bar{P} d\Sigma + \iiint_{(v)} \rho_0 \bar{F} dv = 0, \quad (3.8)$$

где элемент объема оболочки $dv = d\sigma dx^3 = \sqrt{\frac{g}{g}} d\sigma_0 dx^3$. Если ввести напряжение σ^{lk} по формуле $\bar{P} = \sigma^{lk} \bar{r}_l n_k$, то в силу (3.4) имеем

$$\iint_{\Sigma} \bar{P} d\Sigma = \iint_{\Sigma} \sigma^{lk} \bar{r}_l n_k d\Sigma = \int_{(l)} n_k dl \int_{h^{(-)}}^{h^{(+)}} \sqrt{\frac{g}{g}} \sigma^{lk} \bar{r}_l dx^3,$$

и обозначая

$$\bar{f}^k = \int_{h^{(-)}}^{h^{(+)}} \sigma^{lk} \bar{r}_l \sqrt{\frac{g}{g}} dx^3 \quad (3.9)$$

в силу (3.8) находим

$$\int_{(l)} \bar{f}^a n^0_a dl + \iint_{(\sigma_0)} \bar{E} d\sigma_0 = 0, \quad (3.10)$$

где

$$\bar{E} = \frac{\bar{P}_{(+)}}{|N^{(+)}_3|} \sqrt{\frac{g^{(+)}{g}}{g}} + \frac{\bar{P}_{(-)}}{|N^{(-)}_3|} \sqrt{\frac{g^{(-)}{g}}{g}} + \int_{h^{(-)}}^{h^{(+)}} \rho_0 \sqrt{\frac{g}{g}} \bar{F} dx^3. \quad (3.11)$$

Далее, преобразуя контурный интеграл по l в поверхностный, получаем

$$\iint_{(\sigma_0)} \left(\frac{1}{\sqrt{a}} \frac{\partial V a \bar{f}^a}{\partial x^a} + \bar{E} \right) d\sigma_0 = 0,$$

откуда

$$\frac{1}{\sqrt{a}} \frac{\partial V a \bar{f}^a}{\partial x^a} + \bar{E} = 0. \quad (3.12)$$

Если записать \bar{f}^a в виде

$$\vec{f} = T^{\alpha\beta} \bar{\rho}_\beta + T^{\alpha 3} \bar{m} = \int_{h(-)}^{h(+)} \{ \sigma^{\alpha\beta} (\bar{\rho}_\beta - x^3 b_\beta^3 \bar{\rho}_\beta) + \sigma^{\alpha 3} \bar{m} \} \sqrt{\frac{g}{a}} dx^3,$$

то, как и в § 2, получаем

$$\nabla_\alpha T^{\alpha 3} - T^{\alpha\beta} b_\alpha^3 + E^3 = 0 \quad (3.13)$$

$$\nabla_\alpha T^{\alpha 3} + b_{\alpha\beta} T^{\alpha\beta} + E^3 = 0,$$

где

$$T^{\alpha\beta} = \int_{h(-)}^{h(+)} \sqrt{\frac{g}{a}} \sigma^{\alpha\gamma} (a_\gamma^\beta - x^3 b_\gamma^\beta) dx^3,$$

$$T^{\alpha 3} = \int_{h(-)}^{h(+)} \sqrt{\frac{g}{a}} \sigma^{\alpha 3} dx^3. \quad (3.14)$$

\bar{E} — главный вектор всех внешних сил, отнесенных к единице площади поверхности приведения S_0 .

Развертывая уравнения моментов (3.7), имеем

$$\begin{aligned} & \iint_{\Sigma(+)} [\bar{r}, \bar{P}_{(+)}] d\Sigma_{(+)} + \iint_{\Sigma(-)} [\bar{r}, \bar{P}_{(-)}] d\Sigma_{(-)} + \iint_{\Sigma} [\bar{r}, \bar{P}] d\Sigma + \\ & + \iiint_{(v)} [\bar{r}, \rho_0 \bar{F}] dv = 0. \end{aligned} \quad (3.15)$$

Так как для точек оболочки $\bar{r} = \bar{\rho} + \bar{m}x^3$, а для точек ограничивающих поверхностей

$$\bar{r} = \bar{\rho} + \bar{N}_{(+)} h_{(+)}, \quad \bar{r} = \bar{\rho} + \bar{N}_{(-)} h_{(-)},$$

то пользуясь формулами (3.5) и (3.11), первое, второе и четвертое слагаемые в (3.15) запишутся в виде

$$\iint_{(s_0)} \{ \bar{M} + [\bar{\rho}, \bar{E}] \} d\sigma_0,$$

где

$$\begin{aligned} \bar{M} = & \frac{h_{(+)} [\bar{N}_{(+)}, \bar{P}_{(+)}]}{|\bar{N}_{(+)}^3|} \sqrt{\frac{g^{(+)}}{a}} + \frac{[\bar{N}_{(-)}, \bar{P}_{(-)}], h_{(-)}}{|\bar{N}_{(-)}^3|} \sqrt{\frac{g^{(-)}}{a}} + \\ & + \int_{h(-)}^{h(+)} [\bar{m}x^3, \bar{F}] \rho_0 \sqrt{\frac{g}{a}} dx^3. \end{aligned} \quad (3.16)$$

Следовательно, (3.15) принимает вид

$$\iint_{\Sigma} [\bar{r}, \bar{P}] d\Sigma + \iint_{(s_0)} \{ \bar{M} + [\bar{\rho}, \bar{E}] \} d\sigma_0 = 0, \quad (3.17)$$

но

$$\iint_{\Sigma} [\bar{r}, \bar{P}] d\Sigma = \iint_{\Sigma} [\bar{m}x^3, \bar{P}] d\Sigma + \iint_{\Sigma} [\bar{\rho}, \bar{P}] d\Sigma$$

и

$$\iint_{\Sigma} [\bar{\rho}, \bar{P}] d\Sigma = \int_{(l)} [\bar{\rho}, \bar{f}^\alpha] n_\alpha^0 dl = \int_{(s_0)} \frac{1}{\sqrt{a}} \frac{\partial \sqrt{a} [\bar{\rho}, \bar{f}^\alpha]}{\partial x^\alpha} d\sigma_0.$$

В силу этих соотношений, (3.17) запишется так:

$$\iint_{\Sigma} [\bar{m}x^3, \bar{P}] d\Sigma + \iint_{(s_0)} \left\{ \bar{M} + [\bar{\rho}, \bar{E}] + \frac{1}{\sqrt{a}} \frac{\partial \sqrt{a} [\bar{\rho}, \bar{f}^\alpha]}{\partial x^\alpha} \right\} d\sigma_0 = 0. \quad (3.18)$$

Умножая векторно уравнения равновесия (3.12), имеем

$$\frac{1}{\sqrt{a}} \frac{\partial \sqrt{a} [\bar{\rho}, \bar{f}^\alpha]}{\partial x^\alpha} + [\bar{\rho}, \bar{E}] = [\bar{\rho}_\alpha, \bar{f}^\alpha].$$

В силу этого равенства, (3.18) принимает вид

$$\iint_{\Sigma} [\bar{m}x^3, \bar{P}] d\Sigma + \iint_{(s_0)} (\bar{M} + [\bar{\rho}_\alpha, \bar{f}^\alpha]) d\sigma_0 = 0.$$

Если обозначать

$$\bar{L}^\alpha = \int_{h(-)}^{h(+)} [\bar{m}x^3, \bar{r}_\beta] \sigma^{\alpha\beta} \sqrt{\frac{g}{a}} dx^3, \quad (3.19)$$

то

$$\int_{(c)} \bar{L}^\alpha n_\alpha^0 dl + \iint_{(s_0)} (\bar{M} + [\bar{\rho}_\alpha, \bar{f}^\alpha]) d\sigma_0 = 0,$$

откуда

$$\frac{1}{\sqrt{a}} \frac{\partial \sqrt{a} \bar{L}^\alpha}{\partial x^\alpha} + [\bar{\rho}_\alpha, \bar{f}^\alpha] + \bar{M} = 0. \quad (3.20)$$

Если положить

$$L^{\alpha\gamma} = \int_{h(-)}^{h(+)} \sigma_{\alpha\beta}^{\gamma} (a_\beta^\gamma - x^3 b_\beta^\gamma) \sqrt{\frac{g}{a}} x^3 dx^3 \quad (3.21)$$

или

$$L^{\alpha\beta} = c^{\lambda\beta} a_{\alpha\lambda} L^{\alpha\gamma} \quad (3.22)$$

то векторное уравнение (3.20) запишется в точности как (2.18), (2.19) или как (2.20), (2.21), причем в силу $\sigma^{ik} = \sigma^{ki}$ в этих уравнениях нужно положить $\Phi = 0$.

Из приведенного вывода видно, что \bar{L}^α есть момент внутренних сил относительно произвольной точки поверхности приведения S_0 , а $L^{\alpha\beta}$ его составляющие.

Примечания: 1°. Результаты этого § были выведены иным и притом более длинным путем в работе (13).

2°. Уравнения равновесия § 2 гл. II могут быть получены способом, приведенным в § 3, если в интегральных условиях равновесия (3.6) и (3.7) $\bar{P} dS$ заменить по формуле (3.10) гл. I через $A^{\alpha\beta} \bar{r}_\beta n_\alpha^0 S d\sigma_0$.

Поступила в редакцию 1 янв. 1948 г.

Сектор механики ФТИ.

- 1) Н. Зволинский — П. Риз. О некоторых задачах нелинейной теории упругости. Прикладная матем. и механ., т. II, в. 4, 1939.
- 2) Н. Зволинский. Кручение бруса, растянутого постоянными массовыми силами. Прикл. матем. и механ., т. III, вып. 3, 1939.
- 3) Д. Панов. Вторичные эффекты при кручении эллиптического цилиндра. Труды ЦАГИ, 1939, вып. 459.
- 4) П. Риз. Общее решение задачи кручения в нелинейной теории упругости. Прикл. матем. и механ., т. VII, вып. 3, 1943 г.
- 5) А. Рухадзе. Влияние на изгиб стержня парой изгиба от поперечной силы. Прикладн. матем. и механ., т. XI, вып. 3, 1947 г.
- 6) А. Горгидзе—А. Рухадзе. О вторичных эффектах при изгибе круглого цилиндра. Сообщение Грузинской АН, т. II, № 5, 1941.
- 7) К. Галимов. Уравнения равновесия теории упругости при конечных перемещениях. Ученые записки КГУ, 1948 г.
- 8) А. Лурье. Общая теория упругих тонких оболочек. Прикладн. матем. и механ. т. IV, вып. 2, 1940 г.
- 9) E. et F. Cosserat, Sur la Théorie de l'élasticité, premier Mémoire, Annales de la Faculté des sciences de Toulouse. Tome X, 1896, стр. 1—116.
- 10) L. Brillouin, Les Lois de l'élasticité sous forme tensorielle valable pour des coordonnées quelconques. Annales de Physique, Tome III, 1925, стр. 251—298.
- 11) D. Murnaghan, Finite Deformations of an Elastic solid. American Journal of Mathematics vol. L IX, № 2, 1937 г.
- 12) R. Kappus, Zur Elastizitätstheorie endlicher Verschlebungungen, I Teil, ZAMM Bd. 19, № 5, 1939 г.
- 13) W. Z. Chien. The intrinsic theory of thin Shelles and Plates. Quarterly of Applied Mathematics vol. I. № 4, vol. II. № 1, 2.

ПОСТРОЕНИЕ КАНАЛОВ И СОПЕЛ ПО ЗАДАННОМУ
РАСПРЕДЕЛЕНИЮ ДОЗВУКОВЫХ СКОРОСТЕЙ ВДОЛЬ СТЕНОК.

Г. Г. ТУМАШЕВ.

Рассмотрим движение газа по бесконечному каналу. Допустим, что распределение скоростей вдоль стенок задано в функции дуги ϵ , отсчитываемой от некоторой точки взятой на стенке. Будем считать движение газа плоским и безвихревым, происходящим при отсутствии трения и теплопроводности. Плотность ρ и давление p связаны соотношением

$$\frac{p}{p_0} = \left(\frac{\rho}{\rho_0}\right)^x, \quad \text{где } x = \frac{c_p}{c_v}.$$

Воспользуемся уравнениями движения газа, полученными С. А. Чаплыгиным [1]

$$\frac{\partial \beta}{\partial \varphi} = \frac{1}{\lambda} \left(1 - \frac{x-1}{x+1} \lambda^2\right)^{\frac{1}{x-1}} \frac{\partial \lambda}{\partial \psi},$$

$$\frac{\partial \beta}{\partial \psi} = -\frac{1-\lambda^2}{\lambda} \left(1 - \frac{x-1}{x+1} \lambda^2\right)^{\frac{x}{x-1}} \frac{\partial \lambda}{\partial \varphi},$$

где

 β — угол наклона вектора скорости к оси x , $\lambda = \frac{v}{a_*}$ (a_* — критическая скорость)следуя С. А. Христиановичу [2], введем переменную s , определяемую формулой

$$ds = \sqrt{\frac{1-\lambda^2}{1-\lambda^2 \frac{x-1}{x+1}}} \frac{d\lambda}{\lambda}$$

и преобразуем уравнение (1) к виду

$$\frac{ds}{d\varphi} = \sqrt{K} \frac{\partial \beta}{\partial \varphi}, \quad \frac{\partial \beta}{\partial \psi} = -\sqrt{K} \frac{\partial s}{\partial \varphi}, \quad (2)$$

где

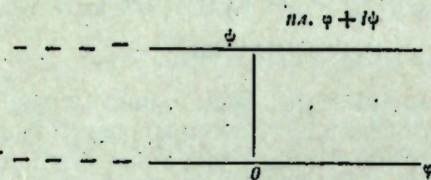
$$K = (1-\lambda^2) \left(1 - \frac{x-1}{x+1} \lambda^2\right)^{\frac{1+x}{1-x}}$$

Если $\lambda \leq 0,5$, то $\sqrt{K} \approx 1$.

Предыдущие уравнения могут быть заменены системой следующих приближенных уравнений:

$$\frac{\partial s}{\partial \psi} = \frac{\partial \beta}{\partial \varphi}, \quad \frac{\partial \beta}{\partial \psi} = -\frac{\partial s}{\partial \varphi}. \quad (3)$$

Отсюда видно, что $s - i\beta$ является аналитической функцией $f = \varphi + i\psi$. Области течения в плоскости $z = x + iy$ соответствует бесконечная полоса в пл. $\varphi + i\psi$, ширина которой равна расходу газа через сечение канала (фиг. 1). Пусть расход равен $\frac{\pi}{2}$



Фиг. 1.

Значение потенциала скорости на стенках может быть вычислено по формуле

$$\varphi = \int_0^z (\bar{v}, d\bar{z}),$$

отсюда функция s может быть выражена через φ .

Обозначим $s_1 = s_1(\varphi)$ на оси φ

$$s_2 = s_2(\varphi) \text{ на прямой } \psi = \frac{\pi}{2}.$$

Для определения функции $s - i\beta$ имеем формулу [3]

$$s - i\beta = \frac{1}{\pi i} \int s [cth(f - f') + 1] df, \quad (4)$$

Интеграл берется по двум бесконечным прямым $\psi = 0$ и $\psi = \frac{\pi}{2}$. Углы наклона вектора скорости на стенках канала определяются

$$\beta_1 = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} s_1 [cth(\varphi - \varphi') + 1] d\varphi + \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} s_2 [th(\varphi - \varphi') + 1] d\varphi,$$

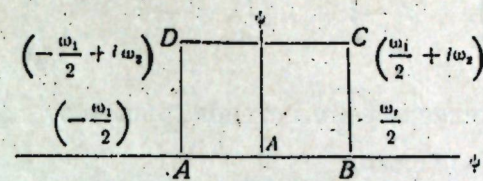
$$\beta_2 = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} s_2 [cth(\varphi - \varphi') + 1] d\varphi + \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} s_1 [th(\varphi - \varphi') + 1] d\varphi.$$

Форма стенок может быть определена по следующим формулам

$$x_1 + iy_1 = \int e^{\beta_1'} d\epsilon_1, \quad (\text{нижняя стенка})$$

$$x_2 + iy_2 = \int e^{\beta_2'} d\epsilon_2, \quad (\text{верхняя стенка}) \quad (5)$$

Приведенный метод также применим к определению формы каналов конечной длины. Тогда области течения в пл. z соответствует прямоугольник ABCD в пл. переменного $f = \varphi + i\psi$ (фиг. 2).



Фиг. 2.

Пусть ради простоты во входном и выходном сечениях $\beta = 0$. Размеры прямоугольника определяются по заданному расходу через сечение и распределению скорости вдоль стенок.

Отображение внутренности прямоугольника на верхнюю полу-плоскость t может быть достигнуто с помощью функции

$$f = A \int_0^t \frac{dt}{V(1-t^2)(1-k^2t^2)}.$$

Величину k определяем, беря отношение сторон:

$$\frac{\omega_1}{\omega_2} = 2 \int_0^1 \frac{dt}{V(1-t^2)(1-k^2t^2)} : \int_1^{\frac{1}{k}} \frac{dt}{V(t^2-1)(1-k^2t^2)}$$

н.л. t

Фиг. 3.

Решение задачи приводится к нахождению аналитической функции $s - i\beta$ по заданным действительной части на отрезках вещественной оси пл. t (фиг. 3) — $\infty, D; AB; C, \infty$ и мнимой части на отрезках DA, BC. Такая функция может быть определена по формуле [3]

$$s - i\beta = \frac{1}{\pi i g(t)} \left[\int_{-\infty}^{-\frac{1}{k}} \frac{sg(\xi) d\xi}{\xi - t} + \int_{-\frac{1}{k}}^1 \frac{sg(\xi) d\xi}{\xi - t} + \int_1^{\infty} \frac{sg(\xi) d\xi}{\xi - t} \right],$$

где

$$g(t) = \sqrt{\frac{(kt+1)(t-1)}{(kt-1)(t+1)}}.$$

Отсюда значение мнимой части на оси ξ ,

$$\beta = \frac{1}{\pi g} \left[\int_{-\infty}^{-\frac{1}{k}} \frac{sg(\xi') d\xi'}{\xi' - \xi} + \int_{-1}^1 \frac{sg(\xi') d\xi'}{\xi' - \xi} + \int_{\frac{1}{k}}^{\infty} \frac{sg(\xi') d\xi'}{\xi' - \xi} \right].$$

Формулы для определения формы стенок совпадают с формулами (1.5).

Поступила в редакцию 30/XI.1947 г.

Сектор механики ФТИ.

ЛИТЕРАТУРА.

1. С. А. Чаплыгин. О газовых струях. Полное собрание сочинений, том II, 1933.
2. С. А. Христианович. Обтекание тел газом при больших дозвуковых скоростях. Вып. трудов ЦАГИ № 481, 1940.
3. Л. И. Седов. Теория плоских движений идеальной жидкости. 1939.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ ЧИСЛА КОРНЕЙ, ЛЕЖАЩИХ В ПРАВОЙ ПОЛУПЛОСКОСТИ
ДЛЯ ФУНКЦИЙ ВИДА $F(e^z, z)$, ГДЕ $F(e^z, z)$ — РАЦИОНАЛЬНАЯ ФУНКЦИЯ
ОТ АРГУМЕНТОВ e^z И z , И ПРИМЕНЕНИЕ РЕЗУЛЬТАТОВ К ИССЛЕДОВАНИЮ
АВТОМАТИЧЕСКОГО РЕГУЛИРОВАНИЯ ПАРОВЫХ ТУРБИН.

И. В. СВИРСКИЙ

§ 1. Заменяя z на iz , приводим задачу к определению числа корней уравнения:

$$F(e^{iz}, iz) = 0, \quad (1.1)$$

лежащих в нижней половине плоскости комплексного переменного. Пользуясь формулой

$$\cotg \frac{z}{2} = \frac{i \left(e^{\frac{iz}{2}} + e^{-\frac{iz}{2}} \right)}{\left(e^{\frac{iz}{2}} - e^{-\frac{iz}{2}} \right)},$$

имеем:

$$e^{iz} = \frac{\cotg \frac{z}{2} + i}{\cotg \frac{z}{2} - i}. \quad (1.2)$$

Подставляя правую часть этого выражения вместо e^{iz} , имеем:

$$F \left(\frac{\cotg \frac{z}{2} + i}{\cotg \frac{z}{2} - i}, z \right) = 0, \quad (1.3)$$

Это уравнение можно решить относительно $\cotg \frac{z}{2}$.

$$\cotg \frac{z}{2} = \Phi(z), \quad (1.4)$$

где $\Phi(z)$ — некоторая алгебраическая функция. Отсюда

$$\cotg \frac{z}{2} - \Phi(z) = 0.$$

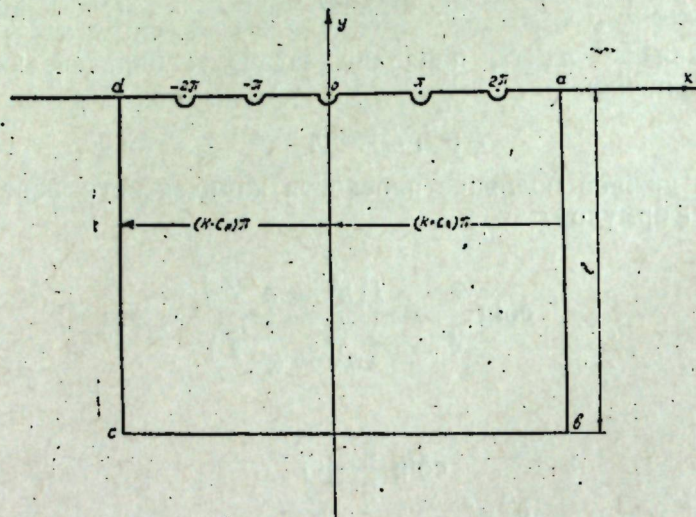
Обозначим действительную и мнимую части функции $[\Phi(z)]$ через $\varphi(z)$ и $\psi(z)$, где $\varphi(z)$ и $\psi(z)$ — функции, принимающие вещественные значения при вещественных значениях z .

Тогда уравнение примет вид:

$$F(z) = \cotg \frac{z}{2} + \varphi(z) + i\psi(z) = 0. \quad 4$$

§ 2. В этой статье мы рассмотрим случай, когда в уравнение (1.1) аргумент e^{iz} входит только в первой степени; тогда вышеуказанные преобразования действительно легко выполняются, и $\varphi(z)$ и $\psi(z)$ являются рациональными функциями. Здесь мы рассмотрим случай, когда полюса этих функций не лежат на действительной оси*. На вещественной оси функция $F(z)$ будет иметь полюсами точки, где $\cotg \frac{z}{2}$ обращается в бесконечность, т. е. точки $t_n = \pi n$.

Для определения числа корней функций $F(z)$, лежащих в нижней полуплоскости, рассмотрим контур, изображенный на черт. 1.



Фиг. 1

Полюса функции $\cotg \frac{z}{2}$ обойдены этим контуром путем маленьких полуокружностей малого радиуса δ . Число корней функции $F(z)$, расположенных в нижней полуплоскости, равно пределу, к которому стремится число полных оборотов, которые делает вектор, изображающий функцию $F(z)$ при обходе контура, когда числа l и k стремятся к бесконечности и радиус δ полуокружности стремится к нулю, плюс число полюсов функций $F(z)$, лежащих в нижней полуплоскости.

§ 3. Вычислим изменения аргумента функции $F(z)$ на трех сторонах: ab , bc и cd . Функция $\cotg \frac{z}{2} = i \frac{e^{iz} + 1}{e^{iz} - 1}$ на стороне dc и ab является функцией, модуль которой остается ограниченным и не обращается в нуль, точнее $0 < d < \left| \cotg \frac{z}{2} \right| < D$, где константы D и d постоянные числа, независимые от чисел k и l . На стороне bc $\cotg \frac{z}{2} = i \frac{e^{iz} + 1}{e^{iz} - 1}$ при увеличении высоты l контура стремится к ве-

* Случай, когда полюса лежат на действительной оси, рассмотрен в дополнении № 1.

личине $i = \sqrt{-1}$. Функция $[-\Phi(z)] = \varphi(z) + i\psi(z)$ имеет разложение в ряд в окрестности бесконечно удаленной точки

$$\varphi(z) + i\psi(z) = \sum_{k=-\infty}^J a_k z^k, \quad a_j \neq 0.$$

1. Если $J \geq 1$, то эта функция стремится к бесконечности, и поэтому, при учете предела величины изменения аргумента, при увеличении размеров контура, мы будем пренебрегать величиной $\cotg \frac{z}{2}$.

Этот предел изменения аргумента равен $l\pi$.

2. $J = 0$, тогда:

$$\varphi(z) + i\psi(z) + \cotg \frac{z}{2} = \left(\cotg \frac{z}{2} + a_0 \right) + \sum_{k=-\infty}^{-1} a_k z^k.$$

Выберем величины $c < 1$ (см. фиг. 1) так, чтобы на сторонах контура ab , bc , cd величина, стоящая в скобках, не обращалась в нуль; тогда легко показать, что существует положительная нижняя грань модуля величины, стоящей в скобках, которая не зависит от k , если только l больше некоторого фиксированного числа (при этом мы не рассматриваем исключительный случай, когда $a_0 = i$)*, тогда, при вычислении предела изменения аргумента, мы можем пренебречь величиной суммы. Выражения, стоящие в скобках, на сторонах ab и cd имеют равные по величине и прямо противоположные по знаку изменения аргументов. На стороне bc величина, стоящая в скобках, равномерно стремится к $a_0 + i \neq 0$. Учитывая эти обстоятельства, мы выводим, что предел изменения аргумента на сторонах ab , bc , и cd равен нулю. Здесь мы рассмотрим наиболее общий случай, когда аргументы числовой последовательности $F[(k+c)\pi]$ при $k \rightarrow \infty$ стремятся к пределу, отличному от нуля**.

В рассматриваемом здесь случае векторы $F((k+c)\pi)$ при $k > k_1$, где k_1 — достаточно большое число, наклонены под углами, большими некоторого положительного угла. Исходя из последнего обстоятельства, а также, учитывая то, что при обходе сторон ab , bc , cd изменение аргумента равно $J\pi$, следует, что разность между числом раз, которое вектор $F(z)$ пересечет вещественную ось в положительном и отрицательном направлениях, равна J . 3-й случай $J < 0$ сводится к первому путем следующих преобразований уравнения:

$$\cotg \frac{z}{2} + \varphi(z) + i\psi(z) = 0,$$

$$\frac{1}{\cotg \frac{z}{2}} = \frac{-1}{\varphi(z) + i\psi(z)},$$

$$\tg \frac{z}{2} + \frac{\varphi(z) - i\psi(z)}{\varphi(z)^2 + \psi(z)^2} = 0.$$

Делая замену $z = z' - \pi$, получим уравнение вида:

$$\cotg \frac{z'}{2} + \varphi^*(z') + i\psi^*(z') = 0,$$

* Исключительный случай рассмотрен в дополнении № 2.
** Рассмотрение исключительных случаев — смотрите дополнение № 3.

где

$$\varphi^*(z') = -\frac{\varphi(z' - \pi)}{\varphi(z' - \pi)^2 + \psi(z' - \pi)^2},$$

$$\psi^*(z') = \frac{\psi(z' - \pi)}{\varphi(z' - \pi)^2 + \psi(z' - \pi)^2}.$$

Это уравнение принадлежит к первому типу.

Для определения изменения аргумента вдоль стороны da , которое претерпевает $F(z)$, заметим, что при совершении одного полуоборота вектором, изображающим комплексную величину $F(z)$, он пересекает действительную ось; при этом мнимая часть $F(z)$ обращается в нуль.

§ 4. Займемся сейчас определением того, сколько раз вектор пересекает действительную ось при изменении z вдоль прямолинейных отрезков стороны da нашего контура; при этом z принимает лишь вещественные значения t . Вектор $F(t)$ пересекает действительную ось при тех значениях t , при которых мнимая часть функции $F(t)$, т. е. рациональная функция $\psi(t)$ обращается в нуль, т. е. во всех вещественных корнях $\psi(t)$, лежащих на рассматриваемых отрезках. Величины этих корней обозначим через t_k . Для определения, в каком направлении вектор пересекает действительную ось, определим знаки следующего выражения:

$$\frac{\frac{d}{dt} [Im F(t)]}{Re F(t)} \Big|_{t=t_k} = \frac{\frac{d}{dt} \psi(t)}{\cotg t + \varphi(t)} \Big|_{t=t_k} \quad (4.1)$$

Если знак положителен, то вектор пересекает положительную ось в положительном направлении, т. е. против часовой стрелки; если знак отрицателен, то в отрицательном направлении.

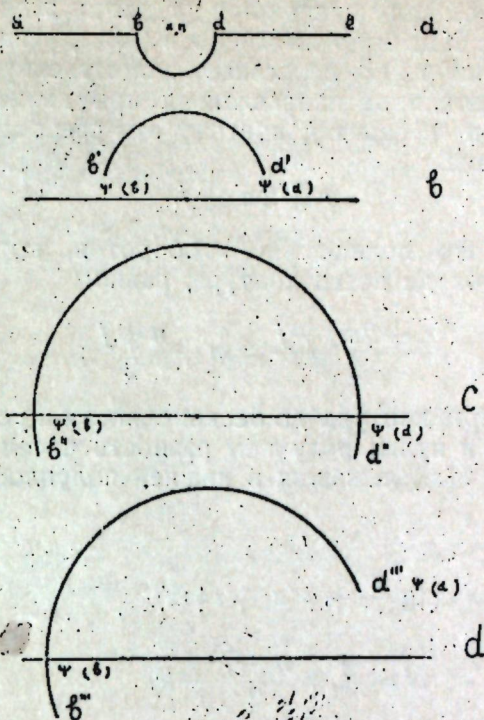
Вывод: разность между числом раз, когда вектор $F(z)$ пересекает действительную ось в положительном направлении, и числом раз, когда вектор пересекает действительную ось в отрицательном направлении, при движении аргумента z по прямолинейным участкам стороны ad контура, равна числу n . Числом n мы обозначаем здесь разность между числом вещественных корней функции $\psi(t)$, лежащих на стороне da , при которых выражение (4.1) принимает положительные значения и числом корней, для которых оно принимает отрицательные значения.

§ 5. Перейдем к определению числа раз, которое вектор, изображающий $F(z)$, пересекает действительную ось при движении z по полуокружностям. На черт. 2а изображена в увеличенном виде одна из таких полуокружностей с центром, имеющим абсциссу $k\pi$. Разложение $F(z)$ в ряд Лорана в окрестности этой точки, вообще, имеет следующий вид:

$$F(z) = \cotg \frac{z}{2} + \varphi(z) + i\psi(z) = \frac{2}{z - k\pi} + a_0 + a_1(z - k\pi) + \dots$$

$$Im a_0 = \psi(k\pi).$$

Рассмотрим вначале случай, когда $\psi(k\pi) > 0$. Пользуясь разложением в ряд Лорана, можно заметить, что малая полуокружность bcd плоскости z черт. 2а отобразится с помощью функции $F(z)$ в линию, весьма похожую на полуокружность большого радиуса (черт. 2(b)). Точки b и d перейдут при этом в точки b' и d' , которые имеют



Фиг. 2

ординаты $\psi(b)$ и $\psi(d)$; последние величины мало отличаются от $\psi(k\pi)$ и поэтому имеют положительный знак. Наша линия, очевидно, расположена выше действительной оси и ее ни разу не пересекает. Подобным же образом рассматривается случай, когда $\psi(k\pi) < 0$; в этом случае маленькая полуокружность в плоскости z отображается в линию, изображенную на черт. 2(c). Оба конца этой линии расположены ниже вещественной оси, и поэтому линия пересекает ее точно два раза.

Легко рассмотреть исключительный случай, когда $\psi(t)$ обращается в нуль в точке $t = k\pi$ и меняет при этом свой знак (черт. 2(d)). В этом случае линия один раз пересекает действительную ось; также рассматривается случай, когда $\psi(t)$ обращается в нуль при $t = k\pi$ и не меняет своего знака (черт. 2(b) или 2(c)).

Из всего вышесказанного в этом параграфе видно, что число раз, когда вектор, изображающий $F(z)$, пересекает действительную ось при движении точки z по малым полуокружностям, равно удвоенному количеству целых чисел k , при которых функция $\psi(k\pi)$ принимает отрицательное значение. Это количество легко определить, если известны корни функции $\psi(k\pi)$ и те интервалы между ними, внутри которых эта функция положительна.

Сформулируем результат: Число раз, когда вектор $F(z)$ пересекает действительную ось в положительном направлении при движении точки z по маленьким полуокружностям, равно $2m$. (Через m обозначено число целых чисел k , лежащих внутри интервалов, где функция $\psi(k\pi)$ отрицательна*).

§ 6. Из результатов последних двух параграфов следует, что разность между числом раз, когда вектор $F(z)$ пересекает действительную ось в положительном направлении и числом раз пересечения

* Очевидно, что эти интервалы ограничиваются корнями функции $\psi(k\pi)$.

оси в отрицательном направлении при движении z вдоль всей стороны da , равна $n + 2m$. Как было выяснено в § 3-м, разность между числом раз, когда вектор $F(z)$ пересекает вещественную ось в положительном и отрицательном направлениях при движении точки z по сторонам ab , bc , и cd равна j , поэтому эта разность для всего контура равна величине

$$(n + 2m) + j.$$

Отсюда следует, что полное число оборотов, которое совершает вектор $F(z)$ при обходе всего контура, равно:

$$\frac{(n + 2m) + j}{2} = m + \frac{n + j}{2};$$

Увеличивая размеры контура до бесконечности и устремляя радиусы полуокружностей к нулю, получаем разность чисел корней N и полюсов P функции $F(z)$, лежащих в нижней полуплоскости, $N - P = \bar{m} + \frac{\bar{n} + \bar{j}}{2}$.

Значит, для $F(z) = \cotg \frac{z}{2} + \varphi(z) + i\psi(z)$.

$$N = \bar{m} + \frac{\bar{n} + \bar{j}}{2} + P. \quad (7)$$

В этой формуле \bar{m} —число всех целых чисел k , лежащих внутри интервалов, где функция $\psi(k\pi)$ отрицательна (очевидно, что эти интервалы ограничиваются корнями функций $\psi(k\pi)$), \bar{n} —разность между числами всех вещественных корней функции $\psi(t)$, при которых выраже-

ние $\frac{d}{dt} \psi(t)$ принимает положительные и отрицательные значения, j —показатель члена, с которого начинается разложение в ряд Лорана функции

$$\varphi(z) + i\psi(z) = \sum_{k=-\infty}^j a_k z^k,$$

Если $j < 0$, то применяем указанное ранее преобразование.

P —число полюсов рациональной функции $\varphi(t) + i\psi(t)$, лежащих в нижней полуплоскости; оно равно числу корней ее знаменателя, лежащих в нижней полуплоскости. Это число легко определить одним из известных способов, например, путем вычисления последовательности детерминантов Гурвица и подсчета в ней числа перемен знаков.

Пользуясь формулой (7) легко доказать, что, если

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \psi(t) < 0,$$

то имеется бесконечное число нулей в нижней полуплоскости.

Дополнение № 1.

Если функция $[\varphi(z) + i\psi(z)]$ имеет на действительной оси полюс t_0 —того порядка, то контур, изображенный на фиг. 1, надо деформировать в окрестности этой точки, сделав обход вокруг нее по

малой полуокружности. То дополнительное число раз, в которое вектор $F(z)$ пересекает действительную ось, будет равно:

$$Q = \text{sign } \psi(t + 0) + \text{sign } \psi(t - 0) + q,$$

где $\psi(t + 0)$ конечный или бесконечный предел, к которому стремится $\psi(z)$ при устремлении точки z по действительной оси справа к точке t .

$\psi(t - 0)$ —аналогичный предел слева.

Величину, определяемую формулой (7), следует при этом увеличить на число $Q/2$.

Дополнение № 2.

Рассмотрим случай, когда уравнение (4) имеет вид:

$$-i + \frac{P(z)}{Q(z)} + \cotg z/2 = 0,$$

где степень $P(z)$ меньше степени полинома $Q(z)$. Перепишем это уравнение так:

$$-i + \frac{P(z)}{Q(z)} + \frac{i(e^{iz} + 1)}{e^{iz} - 1} = 0.$$

Отсюда:

$$P(z) \cdot e^{iz} + i2Q(z) = 0.$$

В этом уравнении нет „главного члена“ (см. статью Понтрягина „Известия Акад. Наук СССР“ 1942 г. т. 6. № 3) и поэтому, как доказывается в этой статье, бесконечное число корней лежит в нижней полуплоскости.

Дополнение № 3.

1) Рассмотрение исключительного случая при $J = 0$.
Здесь мы будем рассматривать случай, когда

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \psi(t) > 0,$$

$$\lim_{t \rightarrow -\infty} \psi(t) > 0,$$

В противном случае наш квазиполином имел бы бесконечное число нулей в нижней полуплоскости*. Тогда векторы $F(a)$ и $F(d)$ оба лежат в верхней полуплоскости, а так как общие изменения аргумента $F(z)$ по трем сторонам контура ab , bc и cd весьма близки к нулю, то отсюда следует, что разность между числом раз, в которое вектор $F(z)$ пересечет действительную ось в положительном и отрицательном направлениях, равна нулю.

2) Рассмотрение исключительного случая, когда $J > 0$. Здесь мы воспользуемся тем, что функция $\cotg \frac{z}{2} + \varphi(z)$ имеет корень в каждом интервале длины π . Вместо рассматриваемой ранее последовательности контуров с постоянным числом c для всех кон-

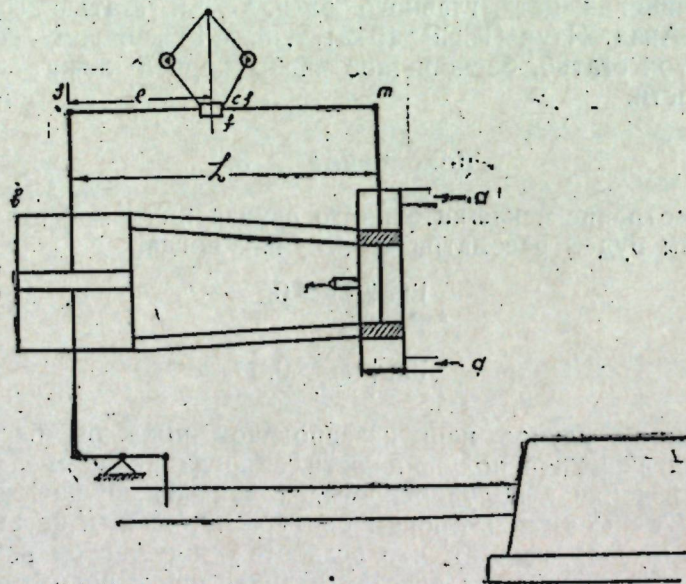
* Это будет доказано в конце статьи.

туров будем рассматривать последовательность контуров с переменным c , причем для каждого контура будем подбирать такое число $0 < c < \pi$, чтобы точки „а“ контуров совпадали с корнями функций $\operatorname{ctg} \frac{z}{2} + \varphi(z)$. Тогда в соответствующих точках „а“ аргумент функции $f(z)$ будет равен $\frac{\pi}{2}$ или $-\frac{\pi}{2}$. Тем самым мы сводим

этот исключительный случай к ранее разобранным.

§ 7. В качестве примера, иллюстрирующего теорию, рассмотрим уравнение системы автоматического регулирования. При этом будем предполагать, что инерцией регулятора и трением его частей можно пренебречь. В нашем примере мы будем учитывать явление запаздывания изменения подачи пара в турбину относительно перемещений заслонки, так как, например, открытие заслонки вызовет увеличение давления у входа в турбину только после того, как волна давления успеет распространиться по трубопроводу от заслонки до входа в турбину.

Система состоит из турбины, вал которой связан с центробежным регулятором (черт. 3). Муфта регулятора f посредством рычага sm связана с штоком золотника m . В зависимости от положения золотника масло подается в верхнюю или в нижнюю половину цилиндра сервомотора b . Поршень сервомотора посредством рычага sm также может воздействовать на положение золотника. Это воздействие называется „обратной связью“.



Фиг. 3.

Рассмотрим простейшее объяснение действия этого регулятора. При увеличении угловой скорости вала турбины выше нормы муфта регулятора поднимается и передвигает вверх шток золотника m . Вследствие этого масло, которое подается к золотнику по трубе a , пропускается золотником в нижнюю часть цилиндра сервомотора. Поршень сервомотора поднимается и прикрывает заслонку трубопровода, питающего паром турбину.

Благодаря этому скорость турбины уменьшается. Поднятие поршня сервомотора вызывает, благодаря рычагу sm , опускание штока золотника, что прекращает подачу масла в цилиндр.

Если бы не было „обратной связи“, то даже небольшие перемещения золотника вызывали бы с течением времени очень большие поднятия поршня сервомотора.

Движение нашей системы описывается следующими уравнениями.

Поднятие муфты регулятора $f(t)$ — пропорционально отклонению от номинала угловой скорости турбины $\omega(t)$:

$$f(t) = a \omega(t) \dots \quad (7.1)$$

где a — некоторый коэффициент пропорциональности, зависящий от конструктивных данных.

Поднятие золотника $m(t)$ связано с поднятием муфты регулятора $f(t)$ и поднятием поршня сервомотора $s(t)$ следующей формулой:

$$m(t) = \frac{L}{l} f(t) - \frac{L-l}{l} s(t), \dots \quad (7.2)$$

где длины L и l указаны на черт.

Скорость поднятия поршня сервомотора $s'(t)$ пропорциональна поднятию золотника $m(t)$

$$s'(t) = b \cdot m(t). \quad (7.3)$$

Уменьшение давления у входа в турбину $P_b(t)$ пропорционально открытию заслонки $s(t-\tau)$ в момент времени на τ секунд более ранний, чем рассматриваемый момент времени t .

$$P_b(t) = -cs(t-\tau) \dots \quad (7.4)$$

c — некоторый коэффициент пропорциональности.

Через τ здесь обозначена величина промежутка времени, необходимого для распространения волны давления по трубопроводу от заслонки до входа в турбину.

При этом мы считаем, что затухание волн давления в трубопроводе велико и поэтому можно пренебречь давлением волн, отраженных несколько раз от концов трубопровода. Избыточный момент сил, вызывающий ускорение турбины, мы будем считать пропорциональным изменению давления у входа в турбину.

$$I \cdot \omega'(t) = k P_b(t) \dots \quad (7.5)$$

I момент инерции турбины, k — некоторый коэффициент пропорциональности, зависящий от конструктивных данных устройства. Подставляя выражение для $P_b(t)$ из (7.4) в (7.5), имеем:

$$I \cdot \omega'(t) = -k \cdot c \cdot s(t-\tau) \dots \quad (7.6)$$

Дифференцируя обе части уравнения по t и используя уравнение (7.3), имеем $I \cdot \omega''(t) = -k \cdot c \cdot s'(t-\tau)$ или

$$I \cdot \omega''(t) = -k \cdot c \cdot b \cdot m(t-\tau) \dots \quad (7.7)$$

Пользуясь уравнением (7.2), запишем предыдущие уравнения так:

$$I \cdot \omega''(t) = -k \cdot c \cdot b \left[\frac{L}{l} f(t-\tau) - \frac{L-l}{l} s(t-\tau) \right] \dots \quad (7.8)$$

Из уравнения (7.6) имеем:

$$s(t-\tau) = -\frac{I \cdot \omega'(t)}{k \cdot c} \dots \quad (7.9)$$

Пользуясь уравнением (7.9) и (7.1), можно соотношению (7.8) придать следующий вид:

$$I \cdot \omega''(t) = -k \cdot c \cdot b \left[\frac{L}{l} \cdot a \omega(t - \tau) + \frac{L-l}{l} \cdot \frac{1}{kc} \cdot \omega'(t) \right] \dots \quad (7.10)$$

Необходимым условием устойчивости системы является отсутствие бесконечно нарастающих со временем частных решений этого дифференциально-разностного уравнения. Эти решения будем искать в виде $\omega_i(t) = e^{\lambda t}$; $\lambda_i = \omega + i\delta$. После подстановки этого выражения в уравнение (7.10) и деления на величину $e^{\lambda t}$ получим следующее характеристическое уравнение, которому должна удовлетворять величина λ

$$-I\lambda^2 = -kcb \left[\frac{L}{l} a e^{-\lambda \tau} + i \cdot \frac{L-l}{l} \cdot \frac{1}{kc} \cdot \lambda \right] \dots \quad (7.11)$$

Таким образом выяснение того, при каких обстоятельствах система устойчива, сводится к вопросу: при каких условиях квази-полином (7.11) не имеет корней с отрицательными мнимыми частями. Для краткости введем обозначения:

$$\frac{L-l}{l} b = h; \quad \frac{kcb}{l} \cdot \frac{L}{l} a = g \quad (7.12)$$

$$h \geq 0 \quad g \geq 0$$

Тогда формула (11) примет следующий вид:

$$(\lambda^2 - ih\lambda) e^{\lambda \tau} - g = 0 \dots \quad (7.13)$$

Сделаем замену переменной $\lambda \cdot \tau = z$; $\lambda = \frac{z}{\tau}$, тогда получим:

$$\left[\left(\frac{z}{\tau} \right)^2 - ih \left(\frac{z}{\tau} \right) \right] e^{iz} - g = 0 \dots \quad (7.14)$$

К этому квазиполиному применим вышележащий метод исследования расположения корней.

Подставим выражение для e^{iz} : $e^{iz} = \frac{\cotg\left(\frac{z}{2}\right) + i}{\cotg\left(\frac{z}{2}\right) - i}$ в формулу (7.14)

$$\left[\left(\frac{z}{\tau} \right)^2 - ih \left(\frac{z}{\tau} \right) \right] \cdot \frac{\cotg\left(\frac{z}{2}\right) + i}{\cotg\left(\frac{z}{2}\right) - i} - g = 0.$$

Отсюда имеем:

$$\cotg\left(\frac{z}{2}\right) + \frac{h\left(\frac{z}{\tau}\right) + i \left[\left(\frac{z}{\tau} \right)^2 + g \right]}{\left[\left(\frac{z}{\tau} \right)^2 - g \right] - ih\left(\frac{z}{\tau}\right)} = 0 \dots \quad (7.15)$$

Умножив числитель и знаменатель дроби на величину, сопряженную знаменателю, получим:

$$\cotg\left(\frac{z}{2}\right) + \frac{-2hg\left(\frac{z}{\tau}\right) + i \left[h^2\left(\frac{z}{\tau}\right)^2 + \left(\frac{z}{\tau}\right)^4 - g^2 \right]}{\left[\left(\frac{z}{\tau} \right)^2 - g \right]^2 + h^2\left(\frac{z}{\tau}\right)^2} = 0.$$

В нашем случае:

$$\varphi(z) = \frac{-2hg\left(\frac{z}{\tau}\right)}{\left[\left(\frac{z}{\tau} \right)^2 - g \right]^2 + h^2\left(\frac{z}{\tau}\right)^2}, \quad \psi(z) = \frac{h^2\left(\frac{z}{\tau}\right)^2 + \left(\frac{z}{\tau}\right)^4 - g^2}{\left[\left(\frac{z}{\tau} \right)^2 - g \right]^2 + h^2\left(\frac{z}{\tau}\right)^2}.$$

Число корней квазиполинома, лежащих в нижней полуплоскости, равно

$$N = \bar{m} + \frac{\bar{n} + \bar{r}}{2} + P.$$

Число P корней знаменателя дроби формулы (7.15), лежащих в нижней полуплоскости, равно нулю.

Вещественных корней функции $\psi(z)$ будет только два:

$$t_1 = \tau \left[\sqrt{\frac{h^2}{2} + \sqrt{\left(\frac{h^2}{2}\right) + g^2}} \right] \text{ и } t_2 = -t_1$$

Легко вывести, что $\bar{m} = \left[\frac{t_1 - t_2}{\pi} \right] + 1 = \left[\frac{2t_1}{\pi} \right] + 1$

[] — знак целой части от числа. $[3^{1/2}] = 3$

В нашем случае:

$$\bar{n} = \text{sign} \left[\frac{\frac{d}{dt_1} \psi(t_1)}{\cotg \frac{t_1}{2} + \varphi(t_1)} \right] + \text{sign} \left[\frac{\frac{d}{dt_2} \psi(t_2)}{\cotg \frac{t_2}{2} + \varphi(t_2)} \right].$$

В виду четности функции $\psi(t)$ и нечетности $\varphi(t)$

$$\bar{n} = 2 \text{sign} \left[\frac{\frac{d}{dt_1} \psi(t_1)}{\cotg \frac{t_1}{2} + \varphi(t)} \right].$$

Число j равно разности степеней числителя и знаменателя форм (15). В нашем случае $j=0$ и условие устойчивости работы системы регулирования в окончательной форме имеет такой вид:

$$N = \bar{m} + \frac{\bar{n} + \bar{j}}{2} + P = \left[\frac{2t_1}{\pi} \right] + 1 + \text{sign} \left[\frac{\frac{d}{dt_1} \psi(t_1)}{\cotg \frac{t_1}{2} + \varphi(t)} \right] = 0.$$

Поступила в редакцию 1 дек. 1947 г.

Сектор математики ФТИ.

О ЗАДАЧЕ КОШИ ДЛЯ ОДНОГО КЛАССА УРАВНЕНИЙ С ЧАСТНЫМИ ПРОИЗВОДНЫМИ В ОБЛАСТИ СКОЛЬ УГОДНО ГЛАДКИХ ФУНКЦИЙ*

Г. САЛЕХОВ

§ 1. Пусть задано двучленное уравнение в частных производных

$$\frac{\partial^p z}{\partial t^p} - \varepsilon t^m \frac{\partial^q z}{\partial x^q} = 0, \quad (1.1)$$

где $\varepsilon = \pm 1$, m — целое число ≥ 0 .

Будем исследовать вопрос о возможности существования а priori аналитического решения этого уравнения по переменному t в некоторой области D ($|t| < R$, $a \leq x \leq b$). Относительно x решение в области D предполагается регулярным, т. е. допускающим непрерывную производную q -го порядка.

Тогда естественна постановка следующей задачи Коши:

1. Какие необходимые и достаточные условия надо наложить на структурные свойства начальных данных

$$\left. \frac{\partial^k z}{\partial t^k} \right|_{t=0} = \varphi_k(x) \quad (k = 0, 1, 2, \dots, p-1),$$

определенных на отрезке $[a, b]$, для того, чтобы уравнение (1.1) по (действительному или комплексному) переменному t допускало аналитическое решение в некоторой окрестности $t=0$?

2. Если такое решение существует, то какова будет при этом его природа относительно переменного x ?

Задача Коши в такой постановке, очевидно, может быть сформулирована для более общих уравнений с частными производными. Результаты в этом направлении мы намерены опубликовать в последующих статьях. Необходимо заметить, что указанная формулировка задачи является в некотором смысле обратной к классической задаче Коши-Ковалевской.

В самом деле, если в задаче Коши-Ковалевской заранее предполагается аналитичность начальных данных в окрестности некоторой точки и доказывается существование также локального аналитического решения в некоторой области D , то в нашей постановке задачи требуется существование а priori аналитического решения по данному переменному t и ищется класс допустимых функций для начальных данных, а также природа решения относительно других переменных.

* Краткое содержание этой работы опубликовано в „ДАН“, Том LIX, № 5 (1948).

§ 2. Теперь докажем две леммы, которые будут использованы при доказательстве основной теоремы I.

Лемма 1. Для любого решения уравнения (1.1), аналитического по t и регулярного по x в области D , всегда имеет место следующее равенство

$$\frac{\partial^n}{\partial t^n} \left(\frac{\partial^q z}{\partial x^q} \right) = \frac{\partial^q}{\partial x^q} \left(\frac{\partial^n z}{\partial t^n} \right), \quad (2.1)$$

где n — любое целое положительное число.

Доказательство: В силу предположения аналитичности решения уравнения (1.1) по переменному t внутри круга радиуса R и для всех x , когда $a \leq x \leq b$, мы имеем возможность написать

$$z(t, x) = \frac{1}{2\pi i} \int_{(c)} \frac{z(\xi, x)}{\xi - t} d\xi,$$

где через (c) обозначается произвольный спрямляемый контур, целиком лежащий внутри круга $|t| < R$. В силу того, что решение уравнения (1.1) в области D допускает непрерывную производную q -го порядка по x , очевидно, справедлива следующая формула:

$$\frac{\partial^q z}{\partial x^q} = \frac{1}{2\pi i} \int_{(c)} \frac{1}{\xi - t} \frac{\partial^q z(\xi, x)}{\partial x^q} d\xi.$$

Откуда следует, что

$$\frac{\partial^n}{\partial t^n} \left(\frac{\partial^q z}{\partial x^q} \right) = \frac{nl}{2\pi i} \int_{(c)} \frac{1}{(\xi - t)^{n+1}} \frac{\partial^q z(\xi, x)}{\partial x^q} d\xi. \quad (2.2)$$

С другой стороны

$$\frac{\partial^n z}{\partial t^n} = \frac{nl}{2\pi i} \int_{(c)} \frac{z(\xi, x)}{(\xi - t)^{n+1}} d\xi.$$

Учитывая законность дифференцирования последнего интеграла q — раз по x , имеем

$$\frac{\partial^q}{\partial x^q} \left(\frac{\partial^n z}{\partial t^n} \right) = \frac{nl}{2\pi i} \int_{(c)} \frac{1}{(\xi - t)^{n+1}} \frac{\partial^q z(\xi, x)}{\partial x^q} d\xi. \quad (2.3)$$

Сравнивая равенства (2.2) и (2.3), убеждаемся в справедливости высказанной леммы.

Лемма 2. Если производные бесконечное число раз дифференцируемой функции $f(x)$ на данном отрезке $[ab]$ для любого фиксированного целого положительного k удовлетворяют неравенству

$$\text{Max}_{a < x < b} |f^{(nk)}(x)| \leq \frac{\tilde{M}(nk)^\alpha}{\tilde{H}^{nk}} \quad (\alpha > 0, n = 0, 1, 2, \dots),$$

тогда для производных всех порядков справедливо неравенство

$$\text{Max}_{a < x < b} |f^{(n)}(x)| \leq \frac{M(n)^\alpha}{H^n},$$

где M и H , как и \tilde{M} и \tilde{H} , некоторые положительные числа, причем H может быть выбрано сколь угодно близким к \tilde{H} .
Доказательство*: Введем обозначение

$$M_n = \text{Max}_{a < x < b} |f^{(n)}(x)|.$$

Пусть ξ — точка принадлежащая отрезку $[a, b]$, где $|f^{(k-1)}(x)|$ достигает своего максимального значения M_{k-1} , b — наиболее удаленный от ξ конец отрезка $[a, b]$, $h = |b - a|$ и $l = |\xi - b|$; $l \geq \frac{h}{2}$

$$f^{(k-1)}(x) = f^{(k-1)}(\xi) + \int_{\xi}^x f^{(k)}(s) ds.$$

Интегрируя последнее равенство $(k-1)$ раз, имеем

$$f^{(k-1)}(\xi) \frac{(x - \xi)^{k-1}}{(k-1)!} = f(x) - \{a_0 + a_1(x - \xi) + \dots + a_{k-2}(x - \xi)^{k-2}\} - \int_{\xi}^x \frac{(x-s)^{k-1}}{(k-1)!} f^{(k)}(s) ds. \quad (2.4)$$

Для исключения постоянных интегрирования a_0, a_1, \dots, a_{k-2} применим $n-1$ раз к обеим частям равенства операцию Δ , которая определяется так:

$$\Delta f = f\left(x + \frac{l}{k-1}\right) - f(x). \quad (2.5)$$

Учитывая, что

$$\Delta^{k-1} \frac{(x - \xi)^{k-1}}{(k-1)!} = \left(\frac{l}{k-1}\right)^{k-1} \quad \text{и} \quad \Delta^{k-1} [a_0 + \dots + a_{k-2}(x - \xi)^{k-2}] = 0,$$

имеем

$$f^{(k-1)}(\xi) \left(\frac{l}{k-1}\right)^{k-1} = \Delta^{k-1} f(x) - \Delta^{k-1} \int_{\xi}^x \frac{(x-s)^{k-1}}{(k-1)!} f^{(k)}(s) ds. \quad (2.6)$$

Так как $|f(x)| \leq M_0$, то из (2.5) следует

$$\begin{aligned} |\Delta f(x)| &\leq 2M_0, \\ |\Delta^2 f(x)| &\leq 2^2 M_0, \\ &\dots \dots \dots \\ |\Delta^{k-1} f(x)| &\leq 2^{k-1} M_0, \end{aligned} \quad (2.7)$$

но

$$\left| \int_{\xi}^x \frac{(x-s)^{k-1}}{(k-1)!} f^{(k)}(s) ds \right| \leq \frac{h^k M_k}{(k-1)!},$$

* Мы приводим здесь доказательство этой леммы, предложенное И. В. Свирским.

поэтому

$$\Delta^{k-1} \int \frac{(x-s)^{k-1}}{(k-1)!} f^{(k)}(s) ds \leq \frac{2^{k-1} h^k M_k}{(k-1)!} \quad (2.8)$$

Тогда согласно (2.6), (2.7) и (2.8), имеем:

$$M_{k-1} \left(\frac{l}{k-1} \right)^{k-1} \leq 2^{k-1} M_0 + \frac{2^{k-1} h^k M_k}{(k-1)!}$$

или

$$M_{k-1} \leq N_k (M_0 + M_k),$$

где

$$N_k = \text{Max} \left\{ \frac{2^{k-1}}{\left[\frac{h}{2(k-1)} \right]^{k-1}}, \frac{2^{k-1} h^k}{(k-1)! \left[\frac{h}{2(k-1)} \right]^{k-1}} \right\}$$

Заменяя в предыдущих рассуждениях функцию $f(x)$ на функцию $f^{(nk-k)}(x)$, имеем:

$$M_{nk-1} \leq N_k [M_{(n-1)k} + M_{nk}]. \quad (2.9)$$

Согласно нашему допущению

$$M_{nk} \leq \frac{\tilde{M}(nk)!^\alpha}{H^{nk}}$$

Тогда из (2.9) следует, что

$$M_{nk-1} \leq 2 N_k \frac{\tilde{M}(nk)!^\alpha}{H^{nk}} = 2 N_k \frac{\tilde{M}\{(nk-1)!\}^\alpha (nk)^\alpha}{H^{nk}}$$

При любом малом $\varepsilon > 0$,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (nk)^\alpha (1-\varepsilon)^{nk} = 0,$$

поэтому можно найти такое число L_1 , что для всех n

$$M_{nk-1} \leq \frac{L_1 \{(nk-1)!\}^\alpha}{H_1^{kn-1}}, \quad \text{где } H_1 = (1-\varepsilon)\tilde{H}.$$

Повторяя эти рассуждения, можно показать, что

$$M_{nk-2} \leq \frac{L_2 \{(nk-2)!\}^\alpha}{H_2^{nk-2}},$$

$$M_{nk-k+1} \leq \frac{L_{k-1} \{(nk-k+1)!\}^\alpha}{H_{k-1}^{nk-k+1}}$$

Следовательно, вообще, можно найти такие постоянные M и H , что

$$M_n \leq \frac{M(n)!^\alpha}{H^n}$$

при этом H можно выбрать сколь угодно близким к \tilde{H} . Прежде чем дать формулировку и доказательства основных теорем, которые будут ответом на поставленную нами задачу Коши, введем новое понятие о весе уравнений в частных производных. Назовем величину дроби $\delta = \frac{p}{q}$ весом уравнения (1.1). Оказывается, это понятие имеет

существенное значение для характеристики структурных свойств решений этого уравнения. Понятие веса уравнений по существу может быть обобщено на более широкий класс линейных уравнений с частными производными и на подобные системы уравнений с частными производными¹⁾.

§ 3. Может быть доказана следующая основная

Теорема 1. Для того, чтобы уравнение (1.1) в окрестности $t=0$ допускало единственное аналитическое решение относительно (вещественного или комплексного) переменного t , необходимо и достаточно, чтобы начальные данные $\varphi_k(x)$ ($k=0, 1, \dots, p-1$) были бесконечно дифференцируемыми на $[a, b]$ и принадлежали к классу α в смысле Жеврея²⁾ не выше чем вес уравнения (1.1), т. е. $\alpha \leq \delta$.

При этом:

1) Если $\alpha = \delta$, то решение будет аналитическим по t для $|t| < R$, где R некоторое фиксированное число $\neq 0$.

2) Если $\alpha < \delta$, то решение будет целой функцией относительно t .
Доказательство необходимости:

Для того, чтобы уравнения (1.1) допускало аналитическое решение по переменному t в любой области D' ($|t| \leq r < R$, $a \leq x \leq b$) $\subset D$, необходимо существование таких постоянных M и d (независимо от x), чтобы всюду в области D' имело место

$$\left| \frac{\partial^n z(t, x)}{\partial t^n} \right| \leq \frac{Mn!}{d^n}, \quad (n=0, 1, 2, \dots, \infty). \quad (3.1)$$

В самом деле, пользуясь интегральной формулой Коши, имеем

$$\frac{\partial^n z(t, x)}{\partial t^n} = \frac{nl}{2\pi i} \int_{(\Gamma)} \frac{z(\xi, x)}{(\xi-t)^{n+1}} d\xi, \quad (3.2)$$

где через (Γ) обозначается произвольный спрямляемый контур, лежащий целиком внутри кольца $r \leq |t| < R$ и охватывающий круг $|t| < r$. Пусть длина контура (Γ) есть l . В силу того, что всякое решение уравнения (1.1) для любой замкнутой области, лежащей в области D , ограничено независимо от t и x , имеем $|z(t, x)| < c$.

Обозначим через d минимум расстояний точек круга $|t| \leq r$ от точек контура (Γ) . Тогда на основании (3.2) в области D' будем иметь:

$$\left| \frac{\partial^n z(t, x)}{\partial t^n} \right| \leq \frac{Mn!}{d^n}, \quad \text{где } M = \frac{cl}{2\pi d}.$$

Теперь последовательно дифференцируя обе части уравнения (1.1) по t , пользуясь леммой 1, и полагая каждый раз после дифференцирования $t=0$, будем иметь

$$\varphi_n(x) = \begin{cases} \varphi_n(x), & \text{если } n=0, 1, \dots, p-1 \\ 0, & \text{если } n=p, p+1, \dots, p+m-1 \\ C_{n-p}^m m! \varepsilon \varphi_{n-(p+m)}^{(q)}(x), & \text{если } n=p+m, p+m+1, \dots, \infty, \end{cases} \quad (3.3)$$

где

$$\varphi_n(x) = \frac{\partial^n z}{\partial t^n} \Big|_{t=0}, \quad (n=0, 1, \dots, \infty).$$

Согласно равенству (2.3) следует, что в области D производные любого порядка по переменному t от $z(t, x)$ допускают также производные q -го порядка. Тогда из бесконечной последовательности уравнений (3.3) следует, что начальные данные $\varphi_k(x)$ ($k=0, 1, \dots, p-1$) на отрезке $[a, b]$ должны быть *бесконечно дифференцируемыми функциями* по x , и поэтому каждая функция бесконечной последовательности $\varphi_{p+m}(x), \varphi_{p+m+1}(x), \dots$ из уравнений (3.3) на отрезке $[a, b]$ определяются однозначно. Пользуясь последовательностью уравнений (3.3), после некоторых элементарных вычислений, легко показать справедливость следующих уравнений

$$\frac{\partial^{nh+k} z(0, x)}{\partial t^{nh+k}} = \begin{cases} \varepsilon^n \varphi_k^{(nq)}(x) \prod_{\lambda=0}^{n-1} \frac{(\lambda h + m + k)!}{(\lambda h + k)!}, & \text{если } k=0, 1, \dots, p-1 \\ 0, & \text{если } k=p, p+1, \dots, m+p-1, \end{cases} \quad (3.4)$$

где $h=m+p$ и $n=0, 1, 2, \dots$
Но согласно (3.1), имеем

$$\left| \frac{\partial^{nh+k} z(0, x)}{\partial t^{nh+k}} \right| \leq \frac{M(nh+k)!}{a^{nh+k}}$$

Следовательно,

$$\text{Max}_{x \in [a, b]} |\varphi_k^{(nq)}(x)| \leq \frac{M(nh+k)!}{a^{nh+k}} \prod_{\lambda=0}^{n-1} \frac{(\lambda h + k)!}{(\lambda h + m + k)!}, \quad (k=0, 1, \dots, p-1).$$

Теперь учитывая, что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\frac{[(nq)!]^{\delta}}{M(nh+k)! \prod_{\lambda=0}^{n-1} \frac{(\lambda h + k)!}{(\lambda h + m + k)!}}} = H_1^q \neq 0, \quad *)$$

где $\delta = \frac{p}{q}$,

асимптотически можно принять

$$\frac{(nh+k)!}{a^{nh+k}} \prod_{\lambda=0}^{n-1} \frac{(\lambda h + k)!}{(\lambda h + m + k)!} \sim \frac{[(nq)!]^{\delta}}{H_1^{nq}}$$

* Этот предел легко вычисляется пользуясь тем положением, что если

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{U_{n+1}}{U_n} = a, \text{ то } \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{U_n} = a.$$

Следовательно, существуют такие постоянные N_1 и H_1 независимые от n , что

$$\text{Max}_{x \in [a, b]} |\varphi_k^{(nq)}(x)| \leq \frac{N_1 [(nq)!]^{\delta}}{H_1^n},$$

или согласно лемме 2, имеем

$$\text{Max}_{x \in [a, b]} |\varphi_k^{(n)}(x)| \leq \frac{N(n!)^{\delta}}{H^n}, \quad (3.5)$$

где $\delta = \frac{p}{q}$, N и H некоторые положительные числа, независимые

от n , причем постоянное H может сколь угодно мало отличаться от H_1 . Таким образом, нами доказано, что для того, чтобы уравнение (1.1) в окрестности $t=0$ допускало аналитическое решение относительно (вещественного или комплексного) переменного t , необходимо, чтобы начальные данные $\varphi_k(x)$ были *бесконечно дифференцируемыми функциями* на $[a, b]$ и принадлежали классу α в смысле Жеврея не выше чем вес уравнения (1.1), то есть $\alpha \leq \delta$.

Теперь докажем, что это условие является и достаточным.

Доказательство достаточности:

Согласно (3.4), формальное а priori аналитическое решение уравнения (1.1) в окрестности $t=0$ при заданных начальных функциях $\varphi_k(x)$ ($k=0, 1, \dots, p-1$) может быть записано в виде ряда:

$$Z(t, x) = \sum_{k=0}^{p-1} \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon^n \varphi_k^{(nq)}(x) \prod_{\lambda=0}^{n-1} \frac{(\lambda h + m + k)!}{(\lambda h + k)!} \frac{t^{nh+k}}{(nh+k)!}. \quad (3.6)$$

Нам нужно доказать, что при условии

$$\text{Max}_{x \in [a, b]} |\varphi_k^{(n)}(x)| \leq \frac{N(n!)^{\delta}}{H^n}, \quad \text{где } \alpha \leq \delta, \quad (3.7)$$

степенный ряд (3.6) имеет радиус сходимости $R \neq 0$. Составим мажорантный ряд

$$|Z(t, x)| \leq \sum_{k=0}^{p-1} \sum_{n=0}^{\infty} |\varphi_k^{(nq)}(x)| \prod_{\lambda=0}^{n-1} \frac{(\lambda h + m + k)!}{(\lambda h + k)!} \frac{|t|^{nh+k}}{(nh+k)!}$$

или, пользуясь условием (3.7), имеем

$$|Z(t, x)| \leq N \sum_{k=0}^{p-1} H^{\frac{qk}{h}} \sum_{n=0}^{\infty} (nq!)^{\delta} \prod_{\lambda=0}^{n-1} \frac{(\lambda h + m + k)!}{(\lambda h + k)!} \frac{1}{(nh+k)!} \left| \frac{t}{H^{q/n}} \right|^{nh+k}. \quad (3.8)$$

Вычисление радиуса сходимости R последнего степенного ряда относительно $|t|$, согласно формуле Коши-Адамара, дает

$$R = \frac{H^{q/h}}{\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[nh]{\frac{(nq)!^\alpha}{(nh+k)!} \prod_{\lambda=0}^{n-1} \frac{(\lambda h + m + k)!}{(\lambda h + k)!}}}$$

откуда следует

$$R = \begin{cases} \infty, & \text{если } \alpha < \delta \\ \left(\frac{H}{r_1}\right)^{q/h} \neq 0, & \text{если } \alpha = \delta \\ 0, & \text{если } \alpha > \delta. \end{cases}$$

Дифференцируемость решения.

Покажем, что в области его существования D ряд (3.6), также как и ряды, полученные из него дифференцированием p — раз по t или q — раз по x сходятся равномерно для всех $|t| < R$ и $a \leq x \leq b$. В самом деле, дифференцируемость ряда (3.6) по t очевидна по свойству степенных рядов. Докажем дифференцируемость решения по крайней мере q — раз по x .

Из (3.6) следует, что

$$\frac{\partial^s Z}{\partial x^s} = \sum_{k=0}^{p-1} \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon^n \varphi_k^{(nq+s)}(x) \prod_{\lambda=0}^{n-1} \frac{(\lambda h + m + k)!}{(\lambda h + k)!} \frac{t^{nh+k}}{(nh+k)!}$$

На основании оценки (3.7), имеем

$$\max_{x \in [a, b]} |\varphi_k^{(nq+s)}(x)| \leq \frac{N(nq+s)!^\alpha}{H^{nq+s}}, \text{ где } \alpha \leq \delta.$$

Следовательно,

$$\left| \frac{\partial^s Z}{\partial x^s} \right| \leq \frac{N}{H^s} \sum_{k=0}^{p-1} H^{\frac{qk}{h}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(nq+s)!^\alpha}{(nh+k)!} \prod_{\lambda=0}^{n-1} \frac{(\lambda h + m + k)!}{(\lambda h + k)!} \left| \frac{t}{H^{q/h}} \right|^{nh+k} \quad (3.9)$$

Теперь, учитывая, что для любого s

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\{(nq+1)(nq+2)\dots(nq+s)\}^\alpha} = 1, \quad (3.10)$$

мы легко убедимся, что радиус сходимости степенного ряда (3.9) оказывается тем же самым R , что и для степенного ряда (3.8).

О единственности решения.

Построенное нами решение уравнения (1.1) в области его существования, при заданных начальных условиях, будет единственным.

В самом деле, если бы существовали два таких интеграла с одними и теми же начальными данными, тогда разность их давала бы новый интеграл, регулярный в рассматриваемой области и обращающийся в нуль вместе со своими производными до $(p-1)$ — го порядка включительно по переменному t вдоль всего отрезка $[a, b]$. Следовательно, все частные производные его оказались нулями вдоль всего отрезка. Но ввиду того, что интеграл представляет аналитическую функцию от t , он будет тождественным нулем.

Таким образом теорема 1 доказана полностью.

Теорема 2. Любое решение уравнения (1.1), аналитическое по t в окрестности $t=0$, будет сколь угодно дифференцируемой функцией по x в области D и оно будет функцией класса $\alpha \leq \delta$ относительно x в некоторой замкнутой области D^1 ($|t| \leq r < R$, $a \leq x \leq b$) $\supset D$.

Доказательство: Положение о том, что решение (3.7) будет сколь угодно дифференцируемой функцией по x в области D сразу следует из (3.9) и (3.10). Докажем, что это решение будет функцией класса $\alpha \leq \delta$ относительно переменного x в некоторой замкнутой области D^1 ($|t| \leq r < R$, $a \leq x \leq b$) $\subset D$.

В самом деле, учитывая неравенство

$$(nq+s)!^\alpha \leq e^{(nq+s)\alpha} (nq)!^\alpha (s!)^\alpha.$$

Согласно (3.9), имеем

$$\left| \frac{\partial^s Z}{\partial x^s} \right| \leq \frac{N(s!)^\alpha}{(He^{-\alpha})^s} \sum_{k=0}^{p-1} H^{\frac{qk}{h}} e^{-\frac{qk}{h}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(nq)!^\alpha}{(nh+k)!} \prod_{\lambda=0}^{n-1} \frac{(\lambda h + m + k)!}{(\lambda h + k)!} \left| \frac{t}{H^{q/h}} \right|^{nh+k}$$

Сравнивая с (3.8), мы видим, что последний степенный ряд имеет радиус сходимости

$$\rho = e^{-\frac{q\alpha}{h}} R < R,$$

но так как для любого $r < \rho$ этот степенный ряд является равномерно ограниченным независимо от s , это доказывает справедливость нашей высказанной теоремы.

§ 4. Рассмотрим теперь некоторые важные следствия, которые легко вытекают из вышесказанных теорем 1 и 2. Если положить $p=1$, $q=2$, $m=0$, из теоремы 1 вытекает следующее

Следствие 1. Для того, чтобы уравнение

$$\frac{\partial U}{\partial t} - \varepsilon \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} = 0 \quad (\varepsilon = \pm 1) \quad (4.1)$$

в окрестности $t=0$ допускало единственное аналитическое решение относительно (вещественного или комплексного) переменного t , необходимо и достаточно, чтобы класс начальной функции

$$U(0, x) = \varphi(x)$$

не превосходил веса $\delta = \frac{1}{2}$. При этом, если $\alpha < \frac{1}{2}$, то решение бу-

дет целой функцией от t , если же $\alpha = \frac{1}{2}$, то оно будет аналити-

ческой функцией для $|t| < R$. Данное следствие содержит в себе результаты С. Ковалевской³⁾, Ле Ру⁴⁾ и Хольмгрена⁵⁾, полученные ими для уравнения теплопроводности.

В самом деле, допустим, что $\varphi(x)$ имеет разложение в степенный ряд

$$\varphi(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n,$$

где $a_n = \frac{\varphi^{(n)}(0)}{n!}$.

Но в силу того, что класс начальной функции в смысле Жеврея не может превосходить веса $\delta = \frac{1}{2}$ уравнения (4.1), имеем

$$|\varphi^{(n)}(0)| \leq \frac{M(n!)^{1/2}}{R^n},$$

или

$$|a_n| n! \leq \frac{M(n!)^{1/2}}{R^n}.$$

Пользуясь асимптотическим соотношением $n! \sim n^{n+1/2} e^{-n} \sqrt{2\pi}$ при условии, когда $n \rightarrow \infty$ выводим, что произведение

$$n^{1/2} \sqrt{|a_n|}$$

должно оставаться конечным. Это есть результат Ле Ру, который в частности содержит в себе и достаточное условие С. Ковалевской. Теперь, зная, что целые функции $\varphi(x)$ класса $\alpha < 1$ удовлетворяют условию

$$|\varphi(x)| < e^{K|x|^{1-\alpha}} \quad (K = \text{const})$$

и, что, наоборот, функции, удовлетворяющие этому условию, являются целыми функциями класса $\alpha < 1$, при $\alpha = \frac{1}{2}$ получаем тот же самый результат в формулировке Хольмгрена:

Если в уравнении (1.1) положить $p=2$, $q=1$ и $m=0$, согласно теореме 1, имеем

Следствие 2. Для того, чтобы уравнение

$$\frac{\partial^2 U}{\partial t^2} - \varepsilon \frac{\partial U}{\partial x} = 0, \quad (\varepsilon = \pm 1) \quad (4.2)$$

с начальными условиями Коши

$$U(0, x) = \varphi(x), \quad \frac{\partial U(0, x)}{\partial t} = \psi(x)$$

имело аналитическое по (вещественному или комплексному) переменному t в окрестности $t=0$, необходимо и достаточно, чтобы класс α начальных данных $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ не превосходил веса $\delta=2$.

При этом если $\alpha < 2$, то решение будет целой функцией от t , если же $\alpha=2$, то решение будет аналитической функцией для $|t| < R \neq 0$. Это следствие дает результаты Ле Ру⁴⁾ и Хольмгрена⁵⁾ в формулировке для уравнения (4.2) с начальными функциями $\varphi(x)$ и $\psi(x)$.

Следствие 3. Для уравнения (1.1) с весом $\delta = \frac{p}{q} \leq 1$ требования аналитичности решения его по переменному t влечет за собой аналитичность его решения также по переменному x .

В частности, отсюда следует, например, что гиперболическое уравнение $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0$ и эллиптическое уравнение $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0$ могут иметь аналитическое решение лишь одновременно по обоим переменным t и x , что, очевидно, не справедливо для параболического уравнения $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\partial u}{\partial x} = 0$.

Следствие 4. Если для уравнения (1.1) начальные данные $\varphi_k(x)$ ($k=0, 1, \dots, p-1$) являются функциями, аналитическими на отрезке $[a, b]$, то всякое решение его, аналитическое по (вещественному или комплексному) переменному t в некоторой окрестности $t=0$ будет также функцией аналитической по x на $[a, b]$ и целой функцией относительно t , когда $\delta > 1$, и аналитической функцией для $|t| < R \neq 0$, когда $\delta = 1$.

Очевидно, это следствие является частным случаем теоремы Коши-Ковалевской для уравнения (1.1), но в нелокальной ее формулировке.

Следствие 5. Любое уравнение (1.1) с весом $\delta > 1$ всегда допускает существование неаналитического решения по переменному x .

В самом деле, предварительно заметим, что согласно Карлеману⁶⁾ имеет место следующая теорема:

Если ряд $\sum_{n=0}^{\infty} (M_n)^{-\frac{1}{n}}$ сходится, то существуют функции $\varphi(x)$,

допускающие производные всех порядков и такие, что имеем $\varphi^{(n)}(0) = 0$, $|\varphi^{(n)}(x)| < M_n$, причем функции $\varphi(x)$ в сколь угодно малой окрестности $x=0$ отличны от нуля.

Пусть $M_n = \frac{M(n!)^\alpha}{R^n}$, где $\alpha > 1$, то, очевидно, ряд $\sum_{n=0}^{\infty} (M_n)^{-\frac{1}{n}}$

сходится. Следовательно, существуют неаналитические функции, принадлежащие к классу $\alpha > 1$ в смысле Жеврея. Назовем их сокращенно неаналитическими функциями Карлемана-Жеврея в окрестности $x=0$.

Теперь рассмотрим аналитическое решение уравнения (1.1) по t в некоторой окрестности $t=0$ с начальными данными $\varphi_k(x)$ ($k=0, 1, \dots, p-1$). Ради простоты рассуждений предположим, что все начальные данные $\varphi_k(x)$, кроме одной $\varphi_s(x)$ ($0 \leq s \leq p-1$) суть тождественно нули, причем $\varphi_s(x)$ в окрестности $x=0$ является неаналитической функцией Карлемана-Жеврея. Тогда решение уравнения (1.1) согласно (3.6) будет иметь вид

$$z(t, x) = \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon^n \varphi_s^{(nq)}(x) \prod_{\lambda=0}^{n-1} \frac{(\lambda h + m + s)!}{(\lambda h + s)!} \frac{t^{nh+s}}{(nh+s)!} \quad (4.3)$$

Мы утверждаем, что это решение не может быть аналитическим относительно переменного x в окрестности $x=0$. В самом деле, допустим обратное, т. е. пусть функция $z(t, x)$ относительно переменного x в окрестности $x=0$ является аналитической. Тогда дифференцируя ряд (4.3) последовательно по x и каждый раз полагая $x=0$, получим

$$\left. \frac{\partial^n z}{\partial x^n} \right|_{x=0} = 0, \quad (n=0, 1, 2, \dots, \infty),$$

но в силу допущения аналитичности функции $z(t, x)$ относительно переменного x , имеем

$$z(t, x) \equiv 0.$$

Отсюда согласно (4.3) следует, что тогда

$$\varphi_s \equiv 0.$$

Но последнее обстоятельство противоречит предположению о природе функции $\varphi_s(x)$.

Данжуа⁷⁾ доказал, что класс бесконечно дифференцируемых функций, для которых

$$M_n = \frac{Mn! (lnn)^n}{R^n}, \quad M_n = \frac{Mn! (lnn)^n (lnlnn)^n}{R^n}, \quad M_n = \dots$$

является всегда классом квазианалитических функций.

Легко показать, что при любом $\varepsilon > 0$, начиная с некоторого $n \geq N$, имеет место неравенство.

$$M_n < n!^{1+\varepsilon}, \quad (\varepsilon > 0). \quad (4.4)$$

Учитывая это обстоятельство, из теорем 1 и 2, вытекает следующее:

Следствие 6. Любое аналитическое решение в окрестности $t=0$ для уравнения (1.1) с весом $\delta > 1$ и с начальными данными $\varphi_k(x)$ ($k=0, 1, \dots, p-1$), определенным в классе квазианалитических функций Данжуа (или, вообще говоря, в классе квазианалитических функций, определенных условием (4.4)) будет целой функцией относительно переменного t . При этом решение $z(t, x)$ в некоторой замкнутой области D' ($|t| \leq r < R, a \leq x \leq b$) $\subset D$ будет функцией класса $1 + \varepsilon$ в смысле Жеврея.

Результаты этой работы также легко переносятся на более широкий класс уравнений с частными производными.

Поступила в редакцию 27. X. 1947 г.

Сектор математики ФТИ

ЛИТЕРАТУРА.

- 1) Г. Салехов. „Проблема Коши для линейных уравнений с частными производными в области бесконечно дифференцируемых функций“ (Казань, диссертация, 1946 г.)
- 2) M. Jevrey. Ann. Éc. Norm 3. t. 35 (1918).
- 3) S. Kowalewsky. Journal für die reine und angew. Math., Bd. 80 (1875).
- 4) J. Le Roux, Bulletin des sciences math., t. XIX p. 127 (1895).
- 5) E. Holmgren. Arkiv för Math, Astr. och. Fysik, Bd. 4 Häfte 1—2, 3—4 (1908).
- 6) T. Carleman. „Les Fonctions quasianalytiques“ Paris. p II (1926).
- 7) Denjoy. Compts Rendus, t. 173. p. 1329 (1921).

О ПРИВЕДЕНИИ УРАВНЕНИЙ ДВИЖЕНИЯ В АТМОСФЕРЕ К ИНТЕГРИРУЕМЫМ В КВАДРАТУРАХ.

П. Т. СМОЛЯКОВ.

В динамической метеорологии чаще всего приходится иметь дело с дифференциальными уравнениями типа

$$\left. \begin{aligned} \frac{d^2 u}{dz^2} + \frac{1}{\mu} \frac{dz}{dz} \frac{du}{dz} - 2a^2 \frac{\rho}{\mu} v &= \frac{1}{\mu} \Pi_\lambda \\ \frac{d^2 v}{dz^2} + \frac{1}{\mu} \frac{d\mu}{dz} \frac{dv}{dz} + 2a^2 \frac{\rho}{\mu} u &= \frac{1}{\mu} \Pi_\varphi \end{aligned} \right\}, \quad (1)$$

где μ коэффициент виртуальной вязкости, ρ плотность воздуха, а

$$a^2 = \omega \sin \varphi,$$

$$\Pi_\lambda = \frac{1}{\rho \cos \varphi} \frac{\partial p}{\partial \lambda}, \quad \Pi_\varphi = \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial \varphi}. \quad (2)$$

Введение комплексной скорости

$$s = v - iu \quad (3)$$

позволяет два уравнения (1) свести к одному

$$\frac{d^2 s}{dz^2} + \frac{1}{\mu} \frac{d\mu}{dz} \frac{ds}{dz} + 2a^2 \frac{\rho}{\mu} is = \frac{1}{\mu} \Pi, \quad (4)$$

причем

$$\Pi = \Pi_\varphi - i \Pi_\lambda. \quad (5)$$

Решение (4), с учетом реальных атмосферных условий, сопряжено с большими трудностями. Чаще всего для простоты полагают $\mu = \mu_0 = \text{const}$; но даже и в этом случае зависимость $\rho = \rho(z)$ не дает возможности получить решение (4) в конечной форме или, по крайней мере, привести его к квадратуре. Приходится прибегать к интегрированию с помощью рядов или же к численному интегрированию методами конечных разностей. Получающиеся при этом погрешности нередко значительно обезценивают результаты и не оправдывают кропотливой и весьма трудоемкой работы, затраченной на вычисления. Избегая трудностей, некоторые авторы рассматривают простейшие случаи, когда решение (4) можно свести к квадратурам без каких либо искусственных приемов. Так, Акерблом [F. Akerblom, 1] принимает

$$\left. \begin{aligned} \mu = \mu_0 = \text{const.}, \quad \Pi_\lambda = \text{const.} \\ \rho = \rho_0 = \text{const.}, \quad \Pi_\varphi = \text{const.} \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

и получает интеграл в конечной форме. Этот интеграл весьма грубо отображает реальную картину изменений ветра от приземных нулевых значений до высотных, где ветер становится геострофическим (вне пограничного слоя турбулентного перемешивания). Решение Акерблома, известное под названием „модели Акерблома“, весьма часто используется не только для качественных оценок, но и для количественных расчетов, что вызывает естественное чувство неудовлетворенности.

Между тем, в ряде случаев, весьма близко отображающих реальные условия, можно свести решение (4) к квадратурам, применяя надлежащие подстановки. Последние позволяют свести линейное уравнение (4) к уравнению с постоянными коэффициентами. Дадим общую схему таких подстановок.

Вместо z введем новое независимое переменное $\psi = \psi(z)$ и соответствующим путем преобразуем (4). Мы получаем

$$\frac{d^2 s}{d\psi^2} + A \frac{ds}{d\psi} + B s = \frac{1}{\mu} \frac{\Pi}{\left(\frac{d\psi}{dz}\right)^2} \quad (7)$$

Чтобы коэффициенты A и B , являющиеся вообще функциями z , были постоянными, необходимо положить

$$\left. \begin{aligned} \frac{\rho}{\mu} &= m^2 \left(\frac{d\psi}{dz}\right)^2 \\ \frac{d^2 \psi}{dz^2} + \frac{1}{\mu} \frac{d\mu}{dz} \frac{d\psi}{dz} &= n \left(\frac{d\psi}{dz}\right)^2 \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

где m и n числа действительные и постоянные. Из (8) нетрудно получить соотношение между μ и ρ

$$\frac{d}{dz} (\sqrt{\mu\rho}) = \frac{n}{m} \rho, \quad (9)$$

при выполнении которого коэффициенты A и B становятся постоянными. Вместе с тем, находится и вид подстановки

$$\psi = \frac{1}{m} \int \sqrt{\frac{\rho}{\mu}} dz, \quad (10)$$

удовлетворяющий этому условию.

Рассмотрим некоторые конкретные случаи. Положим

$$\mu = \mu_0 = \text{const.} \quad (11)$$

Тогда из (9) и (10) получаем

$$\rho = \rho_0 (1 + \tau z)^{-2} \quad (12)$$

$$\psi = M_1 + N_1 \log(1 + \tau z), \quad (13)$$

где M_1 и N_1 произвольные константы, а τ параметр, характеризующий распределение плотности в атмосфере. Проведенные по моему предложению В. М. Степановой вычисления показали, что подбором надлежащего τ можно весьма близко отобразить реальное убывание плотности с высотой. Подстановка же (13) позволяет уравнение (4) свести к интегрируемому в квадратурах.

Рассмотрим второй случай

$$\rho = \rho_0 = \text{const.} \quad (14)$$

что приемлемо для первых двух десятков метров приземного слоя, где скорость ветра от нулевых значений нарастает до конечных на уровне флюгера. Можно допустить, что здесь μ довольно быстро меняется. По (9) и (10) получаем:

$$\mu = \mu_0 (1 + kz)^2 \quad (15)$$

$$\psi = M_2 + N_2 \log(1 + \tau z) \quad (16)$$

Подбирая надлежащим образом величину k , можно провести небезинтересные исследования, проливающие свет на структуру коэффициента вязкости в самой низкой зоне пограничного слоя.

Рассмотрим, наконец, случай

$$\rho = \rho_0 e^{-2\alpha z}, \quad (17)$$

еще более близко, чем по формуле (12), отображающий реальное распределение плотности в атмосфере. Подставив в (9), имеем уравнение типа Бернулли

$$\frac{d\mu}{dz} - 2\alpha\mu - \frac{2n}{m} \rho_0^{1/2} e^{-\alpha z} \mu^{1/2} = 0, \quad (18)$$

решение которого получается без труда:

$$\mu = \frac{\mu_0 e^{2\alpha z} (1 - \gamma e^{-2\alpha z})^2}{(1 - \gamma)^2}, \quad (19)$$

где γ — некоторый параметр.

В таком случае

$$\psi = M_3 + N_3 \log(1 - \gamma e^{-2\alpha z}). \quad (20)$$

Соотношения (19) и (20) были, в частности, мной использованы в диссертационной работе [2], что позволило мне выполнить ряд решений (4) для весьма разнообразных целей.

В заключение остановимся на вопросе о константах M_k и N_k , входящих в выражения для ψ . Конечно, подстановка ψ при любых конечных значениях M_k (включая и нулевые) и конечных (но ненулевых) значениях N_k приводит (4) к уравнению с постоянными коэффициентами. Однако целесообразно их выбрать так, чтобы они давали возможность легко переходить к известным частным случаям при критических значениях входящих в них параметров. Так, подстановки (13), (16) и (20) удобно записать соответственно:

$$\psi = \frac{1}{\tau} \log(1 + \tau z) \quad (21)$$

$$\psi = \frac{1}{k} \log(1 + kz) \quad (22)$$

$$\psi = \frac{(1 - \gamma) [\log(1 - \gamma e^{-2\alpha z}) - \log(1 - \gamma)]}{2\alpha\gamma} \quad (23)$$

При $\tau = 0$ и $k = 0$ мы получаем из (21) и (22) соотношение

$$\psi = z, \quad (24)$$

очевидное из уравнения (4) по (11), (12), (14) и (15).

Далее, при $\gamma = 0$ имеем по (19) и (20)

$$\mu = \mu_0 e^{2\alpha z} \quad (25)$$

$$\psi = \frac{1 - e^{-2\alpha z}}{2\alpha} \quad (26)$$

В свою очередь, при $\alpha = 0$ последняя запись (26) дает, как и следовало ожидать, равенство (24).

Можно рассмотреть и еще небезинтересный частный случай (19) и (23). Именно, положим $\gamma = \infty$. Тогда нетрудно получить

$$\mu = \mu_0 e^{-2\alpha z}, \quad (27)$$

а для ψ справедливо равенство (24), очевидное как из самого уравнения (4), так и из (9).

Возможные другие приемлемые подстановки мы здесь не рассматриваем. Самые решения уравнения (4) на основании изложенного здесь метода и следствия из них будут даны в другой работе.

Поступила в редакцию 1. XI. 1947 г. Сектор геофизики и астрономии ФТИ.

ЛИТЕРАТУРА.

1. F. Akerblom, Nova Acta Reg. Soc. Sc. Upsal., serie IV, vol. № 2, 1908.
2. П. Т. Смоляков. Проблема дрейфовой циркуляции, диссертация (рукопись)

К ОПРЕДЕЛЕНИЮ ВЫСОТЫ ОБЛАКОВ ПО ВЛАЖНОСТИ ВОЗДУХА У ЗЕМЛИ.

П. Т. СМОЛЯКОВ.

В метеорологии уже давно известна формула для вычисления высоты облаков местной конвекции. Она была предложена Феррелем [Ferrel] и имеет вид:

$$H = \sigma(t - \tau). \quad (1)$$

Здесь H — высота нижней границы облака, t температура воздуха у земли, τ — температура насыщения (точка росы), а σ — числовой коэффициент, колеблющийся в пределах 120—125, если H выражено в метрах.

Вывод этой формулы получается без затруднения. Действительно, исходя из законов адиабатического поднятия ненасыщенного воздуха, можно записать выражение для температуры на уровне конденсации:

$$\tau = t - 0,01 H. \quad (2)$$

Однако с высотой удельный объем поднимающегося воздуха увеличивается и точка росы несколько понижается. Поэтому необходимо ввести поправочный коэффициент a , легко находимый из таблиц для упругости насыщающего водяного пара. Исправленная таким путем формула (2) имеет вид:

$$\tau = t - 0,01 aH. \quad (3)$$

Отсюда, полагая

$$\sigma = \frac{1}{0,01a}, \quad (4)$$

мы и получаем (1), причем для некоторых средних условий

$$\left. \begin{aligned} a &= 0,82 \\ \sigma &= 122 \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

Ограниченность приложения формулы Ферреля к реальным условиям очевидна из самой сущности ее вывода. На это указывают, и это подчеркивают многие авторы, в том числе, напр. В. Гемфрис [V. Humphreys, 1]. Попытки, в частности, аэрологов, более широкого использования формулы не подтвердили ее безупречности. Так, П. А. Молчанов графически показывает [2] непостоянство σ , как по величине, так и по знаку (особенно при малых разностях $t - \tau$) даже для таких существенно конвективных облаков, как Си.

Поэтому, вероятно, правы те метеорологи, которые ищут эмпирические зависимости высоты облаков от ряда других метеорологических элементов. Установленная и хорошо оправдывающаяся эмпирическая связь важна как для текущей практической работы, так и для построения обстоятельных теорий.

Небезинтересна в этом направлении попытка А. Н. Ипполитова [3]. По данным шаропилотных наблюдений Свердловской обсерватории им получена корреляционная формула

$$H = 22(100 - r), \quad (6)$$

где r относительная влажность, выраженная в процентах. Формула пригодна, как указывает автор, для вычисления высот конвективных облаков St , $FrSt$, Cu , $FrCu$ и $Frnb$ и, в отличие от Феррелевской, «в большей мере отражает действительные условия в атмосфере» (разрядка моя. П. С.)

Но так ли это? Действительно ли зависимость (6) является эмпирической, «будучи получена на фактическом материале»?

Легко показать, что формула А. Н. Ипполитова является лишь приближенным выражением формулы Ферреля, хотя обе они внешне, как будто, и не находятся в прямой связи между собой.

В самом деле, запишем известную формулу Роша-Магнуса [Roche, Magnus, 4], несколько преобразованную

$$D = E_0 e^{\frac{ct}{286+t}} \quad (7)$$

Здесь D — максимальная упругость водяного пара при температуре t в градусах Цельсия, а коэффициент $c = 17,19$. Если учесть, что дробь $\frac{c}{286+t}$ в пределах от 0° до 25° меняется не больше, чем на 0.003,

то формула Роша-Магнуса заменяется, с достаточной для наших целей степенью точности, формулой Дальтона [Dalton]

$$D = E_0 e^{0,071t} \quad (8)$$

Обозначим далее через e и E соответственно наблюденную и предельную (при данной температуре) абсолютную влажность у земли. Тогда, привлекая сюда запись (3), являющуюся основой формулы Ферреля, имеем по (8)

$$\left. \begin{aligned} E &= E_0 e^{0,071t} \\ e &= E_0 e^{0,071t - 0,00057411t} \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

Отсюда получаем

$$e^{0,00057411t} = \frac{E}{e}, \quad (10)$$

что для неслишком больших высот (напр., до 1000 — 1500 м.) даст приближенно (ограничиваясь двумя первыми членами разложения в ряд Маклорена)

$$H = 1742 \frac{E - e}{e} \quad (11)$$

или

$$H = A(100 - r), \quad (12)$$

причем

$$A = 17,42 \frac{E}{e} \quad (13)$$

Таким образом, исходя из основы формулы Ферреля, мы получили формулу А. Н. Ипполитова (12). Нам остается лишь показать, что коэффициент A имеет как раз тот порядок величины, который отождествляет (12) с (6).

Для этого воспользуемся хотя бы среднемесячными значениями температуры и абсолютной влажности в теплое время года (апрель-октябрь) для какого либо пункта, напр., для Москвы [5]. Исходя из них, вычислим интересующие нас величины (см. табл. 1):

Таблица 1

Месяцы	Апр.	Май	Июнь	Июль	Авг.	Сент.	Окт.
t	3.4	11.8	15.6	18.0	15.8	10.1	3.7
e	4.4	6.6	9.2	10.9	10.0	7.5	5.1
E	5.9	10.4	13.3	15.4	13.5	9.2	6.0
$\frac{E}{e}$	1.34	1.58	1.57	1.45	1.35	1.23	1.18
A	23.3	27.5	27.3	25.3	23.5	21.5	20.6

Из таблицы видно, что действительно, порядок величин A как раз такой, который отождествляет (12) и (6); среднее значение $A = 24$ точно совпадает со средним же, полученным А. Н. Ипполитовым из проверки формулы по ряду пунктов сети.

Вместе с тем ясно, что коэффициент A , вопреки утверждению А. Н. Ипполитова, зависит (вообще говоря) от географических условий, поскольку от них зависят величины E и e . С этой точки зрения, было бы целесообразно по новому провести проверку оправданности формулы на материалах сети.

Формуле А. Н. Ипполитова нетрудно придать иной вид, где зависимость H от r представится в чистой форме. Действительно, выражение (13) можно записать так:

$$A = 1742 \frac{E}{100e} = \frac{1742}{r} \quad (14)$$

В таком случае

$$H = 1742 \frac{100 - r}{r}, \quad (15)$$

и входящий сюда числовой коэффициент 1742 является уже настоящей константой, определяемый общими термодинамическими и гидродинамическими характеристиками воздуха.

Однако более целесообразно преобразовать к виду $H = H(r)$ формулу Ферреля, что также нетрудно сделать. В самом деле, логарифмируя (10), выражая e и E через r и определяя H , сразу же получаем

$$H = C(2 - \log r), \quad (16)$$

причем

$$C = \frac{1}{0,000574 \log e} = 4012. \quad (17)$$

Запись (16) является точным выражением формулы Ферреля и, при строгом выполнении условий местной конвекции, она должна давать безупречные результаты. Поэтому, небезинтересно, в целях сравнения, произвести вычисления по обеим формулам (16) и (11); тем самым представится возможность сделать суждение о степени пригодности формулы А. Н. Ипполитова при различных значениях r . Результаты вычисления даны в таблице 11 (принято: $A=24$, H выражено в км.).

Таблица 2.

r в процентах	10	20	30	40	50	60	65
$H_1 = H$ по фор. (16)	4.01	2.80	2.10	1.60	1.21	0.89	0.75
$H_2 = H$ по фор. (II)	2.16	1.92	1.68	1.44	1.20	0.96	0.84
$\Delta = H_1 - H_2$	1.85	0.88	0.42	0.16	0.01	-0.07	-0.09
Относ. ошибки в %	46	32	20	10	1	8	12

r в процентах	70	75	80	85	90	95	100
$H_1 = H$ по фор. (16)	0.62	0.50	0.39	0.28	0.18	0.09	0.00
$H_2 = H$ по фор. (II)	0.72	0.60	0.48	0.36	0.24	0.12	0.00
$\Delta = H_1 - H_2$	-0.10	-0.10	-0.09	-0.08	-0.06	-0.03	0.00
Относ. ошибки в %	16	20	23	29	33	33	0

Из таблицы видно, что разность $\Delta = H_1 - H_2$ с возрастанием r сначала убывает, при $r=51\%$ обращается в нуль, при $r=72,6\%$ достигает минимума (-0,105), а затем медленно растет, принимая нулевое значение в точке $r=100\%$. Такое поведение функции $\Delta(r)$ и делает формулу А. Н. Ипполитова достаточно пригодной для практических целей. Действительно, до высоты порядка 1,5—1,6 км. абсолютная ошибка в определении H_2 не превышает 160 м., это же как раз соответствует интервалу изменений относительной влажности от 100 до 40%, чаще всего наблюдаемых в реальных условиях.

Однако необходимо иметь в виду, что относительная ошибка

$$\frac{(H_1 - H_2)}{H_1} \cdot 100 \text{ в указанном интервале может достигнуть } 33\%; \text{ поэ-}$$

тому, все же лучше пользоваться формулой (16), как более точной (протабулирование которой не представляет трудностей), чем формулой А. Н. Ипполитова.

В заключение отметим, что некритическое пользование формулами (16) и (11), равно как и любыми математическими соотношениями вида $H = H(r)$ не может принести пользы. В действительности высота облаков—даже облаков местной конвекции—зависит не только

от r , но и от множества других аргументов. Об этом не за и А. Н. Ипполитов, отмечая, что „в каждом отдельном случае наблюдения приходится учитывать еще характер текущей погоды. Было бы целесообразно, поэтому, использовать метод множественной корреляции, отыскивая зависимость H от двух-трех и более элементов. Располагая большими материалами наблюдений и вдумчиво их изучая в свете физики атмосферы, можно установить надежные связи, пригодные для практики и ценные для улучшения теории. Нам кажется, что в настоящее время уже имеются необходимые предпосылки для успешного проведения такой работы.

Поступила в редакцию 1. XI. 1947 г.

Сектор геофизики и астрономии ФТИ.

ЛИТЕРАТУРА.

1. В. Гемфрис. Физика воздуха, ОНТИ, 1936.
2. П. А. Молчанов. Аэрология.
3. А. Н. Ипполитов. Об определении высоты облаков по влажности воздуха у земли. Метеорология и гидрология, информац. сборник № 1. 196.
4. Roche, Poggendorfs Annalen, Bd. XXVII, S. 26; Magnus, ibidem, Bd. LXI, S. 247.
5. П. Т. Смоляков. Ученые записки Казанск. Гос. Университета, 1936, том 96, кн. 4—5.
6. Климатологический справочник по СССР в. I, под редакцией Е. С. Рубинштейна, 1933.

К РЕШЕНИЮ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ 3-й СТЕПЕНИ.

П. Т. СМОЛЯКОВ и А. Н. ХОВАНСКИЙ.

1. При решении алгебраических уравнений 3-й степени редко прибегают к точному определению корней. Сложность и громоздкость известных формул Гудда-Кардана побуждает избегать их использования и применять способы приближенного решения. Однако такие способы далеко не всегда дают возможность получить значенные корни легко и просто. А между тем, в ряде исследований по физике, астрономии и геофизике приходится иметь дело с алгебраическими уравнениями 3-й степени; к тому же, решение уравнений 4-й степени, играющих также некоторую роль в подобных исследованиях, приводят, по методу Феррари, к резольвенте-уравнению 3-й степени. В виду этого изыскание более простого, хотя и приближенного способа решения следует считать желательным. Один из таких способов мы здесь и приводим.

Запишем уравнение 3-й степени в общем виде

$$a_0 x^3 + a_1 x^2 + a_2 x + a_3 = 0. \quad (1.1)$$

Делением обеих частей на a_0 и подстановкой $x = u + m$ можно, как известно, привести его к виду

$$u^3 + pu + q = 0, \quad (1.2)$$

где p и q новые коэффициенты.

Положив $u = y\sqrt[3]{q}$, приведем (1.2) к виду

$$y^3 + Py + 1 = 0. \quad (1.3)$$

Так как по крайней мере один из кубических корней является числом действительным, то действительными будут в этом случае и величины $\sqrt[3]{q}$ и P .

Из (1.3) видно, что корни уравнения можно найти в виде функций только одного коэффициента P ; это последнее значительно облегчает нашу задачу.

Представим (1.3) в виде

$$P = -\frac{1+y^3}{y} = P(y). \quad (1.4)$$

Легко показать, что кривая (1.4) распадается на две ветви, простирающиеся в $+\infty$ и $-\infty$ (см. рисунок), причем ветвь справа от оси ординат дает $P_{\max} = -1,8899$ при $y = \sqrt[3]{\frac{1}{2}} = 0,7937$.

3) $x^3 - 0,424x^2 - 0,705x + 0,212 = 0$ (из задачи Мерана и Смита по теории относительных размеров небесного свода); $P = 3,34; \sqrt[3]{q} = 0,48$
 $y = 0,147; m = 1,41; x = 0,29$.

В целом, предложенный способ дает решение просто без большой затраты времени и труда.

2. Разберем теперь случай, когда требуется более точное решение.
 1) Пусть $|P| \gg 1$. Тогда примем за первое приближение

$$y = -\frac{1}{P}$$

Оно приводит к приближенному равенству $-\frac{1}{P^3} - 1 + 1 = 0$.

Мы будем искать решение с точностью до 0,0001, полагая, что P задано с той же точностью. Поэтому, первое приближение удовлетворительно при $\left|\frac{1}{P^3}\right| < 0,0001$, т. е. при $P > 21,6$.

Второе приближение:

$$y = -\frac{1}{P} + \frac{a_k}{P^k}$$

Тогда подстановка в (1.3) дает;

$$k=4, a_4=1. \quad y = -\frac{1}{P} + \frac{1}{P^4}$$

Погрешность здесь будет порядка $\frac{3}{P^6}$. Приближение удовлетворительно при $|P| > 5,6$.

Третье приближение:

$$y = -\frac{1}{P} + \frac{1}{P^4} + \frac{a_k}{P^k}$$

Тогда

$$k=7, a_7=-3. \quad y = -\frac{1}{P} + \frac{1}{P^4} - \frac{3}{P^7}$$

Погрешность здесь будет порядка $\frac{12}{P^9}$. Приближение удовлетворительно при $|P| > 3,7$.

Четвертое приближение:

$$y = -\frac{1}{P} + \frac{1}{P^4} - \frac{3}{P^7} + \frac{12}{P^{10}}$$

Погрешность здесь будет порядка $\frac{49}{P^{12}}$. Приближение удовлетворительно при $|P| > 3,0$.

Мы видим, что коэффициенты получаемого разложения возрастают и что поэтому вычисление дальнейших приближений не сможет

значительно уменьшить $|P|$, дающее удовлетворительное приближение.

2) Пусть $|P| \ll 1$. Примем за первое приближение

$$y = -1 + a_k P^k$$

Тогда

$$k=1, a_1 = \frac{1}{3}, y = -1 + \frac{P}{3}$$

Погрешность здесь будет порядка $\frac{P^3}{27}$. Приближение удовлетворительно при $|P| < 0,14$.

Второе приближение:

$$y = -1 + \frac{P}{3} - \frac{P^3}{81}$$

Погрешность здесь будет порядка $\frac{P^4}{81}$. Приближение удовлетворительно при $|P| < 0,30$.

Третье приближение:

$$y = -1 + \frac{P}{3} - \frac{P^3}{81} + \frac{P^4}{243}$$

Погрешность здесь будет порядка $\frac{P^6}{243}$. Приближение удовлетворительно при $|P| < 0,53$.

Ясно, что дальнейшие приближения приведут к медленно сходящемуся ряду при $|P| \approx 1$.

3) Итак, мы получили решение для больших и малых $|P|$ и не смогли получить его для $|P|$, близких к 1. Подобное явление замечается при решении большинства задач с помощью сходящихся и асимптотических рядов.

Для заполнения получившегося пробела применим правило Ньютона-Фурье, согласно которому

$$y_{n+1} = y_n - \frac{f(y_n)}{f'(y_n)}$$

где y_n n 'е приближение корня уравнения $f(y) = 0$.
 Для нашей задачи

$$y_1 = -1 + \frac{P}{3}; \quad y_2 = -1 + \frac{P}{3} - \frac{P^3}{27(3 - P + \frac{P^3}{3})}$$

При $P=1$

$$y_2 = 0,6825; f(-0,6825) = -0,0004;$$

$$y_3 = -0,68233; f(-0,68233) = 0,000002.$$

При $P=2$

$$y_2 = -0,4603; f(-0,4603) = -0,0181;$$

$$y_3 = -0,45343; f(-0,45343) = -0,00009.$$

Положим теперь

$$y = -\frac{1}{P} + \frac{1}{P^4}.$$

Тогда

$$y_2 = -\frac{1}{P} + \frac{1}{P^4} - \frac{\left(-\frac{1}{P} + \frac{1}{P^4}\right)^3 + \frac{1}{P^3}}{3\left(-\frac{1}{P} + \frac{1}{P^4}\right)^2 + P}.$$

При $P=1$ $y_2 = -1$, т. е. получаем плохое приближение.
При $P=2$

$$y_2 = -0,4535.$$

Как видим, значения y_2 , полученные по обеим формулам при $P=2$, достаточно близки между собой. Поэтому можно сделать следующий вывод.

При $|P| \leq 2$

$$y = -1 + \frac{P}{2} \frac{P^3}{27\left(3 - P + \frac{P^2}{3}\right)}.$$

При $|P| \geq 2$

$$y = -\frac{1}{P} + \frac{1}{P^4} - \frac{\left(-\frac{1}{P} + \frac{1}{P^4}\right)^3 + \frac{1}{P^3}}{3\left(-\frac{1}{P} + \frac{1}{P^4}\right)^2 + P}.$$

4) Уравнение

$$z^n + Pz^m + 1 = 0.$$

подстановкой $y = z^{\frac{1}{m}}$ приводится к уравнению

$$y^n + Py + 1 = 0.$$

Положим

$$y_0 = -\frac{1}{P}.$$

Тогда

$$y_1 = -\frac{1}{P} + \frac{1}{P^{n+1}};$$

$$y_2 = -\frac{1}{P} + \frac{1}{P^{n+1}} - \frac{\left(-\frac{1}{P} + \frac{1}{P^{n+1}}\right)^n + \frac{1}{P^n}}{n\left(-\frac{1}{P} + \frac{1}{P^{n+1}}\right)^{n-1} + P}.$$

Положим

$$y_1 = -1 + \frac{P}{n}.$$

Тогда

$$y_2 = -1 + \frac{P}{n} - \frac{\left(-1 + \frac{P}{n}\right)^n - P + \frac{P^2}{n} + 1}{n\left(-1 + \frac{P}{n}\right)^{n-1} + P}.$$

В последнем случае $f(y_1)$ ближе подходит к нулю лишь для $n=3$. Полученные разложения сходятся при четном n к корню лишь при вещественности последнего.

3. Способ, рассмотренный в § 1, может быть распространен и на решение алгебраических уравнений четвертой степени. Однако, в этом случае он значительно усложняется.

В самом деле, уравнение

$$a_0x^4 + a_1x^3 + a_2x^2 + a_3x + a_4 = 0. \quad (3.1)$$

делением на a_0 и последовательными подстановками $x = u + m$, $u = ru$ можно привести к виду

$$u^4 + Pu^2 + u + Q = 0, \quad (3.2)$$

где r определится из решения двучленного кубического уравнения; значит, по крайней мере, один действительный корень всегда будет иметь место. Тогда $u = u(P, Q)$, и для нахождения корней уравнения можно составить надлежащие таблицы. Их сложность состоит в том, что они строятся с двумя входами n , кроме того, должны быть пригодны на случай, когда все корни (3.2) комплексные. Поэтому вопрос о целесообразности применения способа в общем виде к решению уравнения четвертой степени мы оставляем открытым.

Однако, можно указать более простой и более логичный метод сведения решения уравнения четвертой степени к резольвенте одной степени ниже. Действительно, запишем (3.1) в виде

$$x^4 + Bx^2 + Cx + D = 0 \quad (3.3)$$

и представим его, как

$$(x^2 + a_1x + b_1)(x^2 + a_2x + b_2) = 0. \quad (3.4)$$

Будем искать выражение коэффициентов a_1, b_1, a_2 , и b_2 через B, C и D . Это приводит к бикубическому уравнению

$$a_1^3 + 2Ba_1^2 + (B^2 - 4D)a_1^2 - C^2 = 0. \quad (3.5)$$

Решая его, как уравнение третьей степени, по правилам, изложенным в предыдущих параграфах, находим a_1^2 . После этого без труда определяются коэффициенты

$$\begin{aligned} a_2 &= -a_1 \\ b_1 &= \frac{B + a_1^2}{2} + \sqrt{\frac{(B + a_1^2)^2}{4} - D}; \\ b_2 &= \frac{B + a_1^2}{2} - \sqrt{\frac{(B + a_1^2)^2}{4} - D} \end{aligned} \quad (3.6)$$

и окончательно корни уравнения (3.3) отыскиваются из решения двух квадратных уравнений

$$x^2 + a_1x + b_1 = 0; x^2 + a_2x + b_2 = 0. \quad (3.7)$$

Пример: $x^4 - 9x^2 - 4x - 12 = 0$; резольвентное уравнение

$$a_1^6 - 18a_1^4 + 33a_1^2 - 16 = 0,$$

или, согласно §§ 1-2,

$$z^n + Pz + 1 = 0,$$

где $P = -1,8899$; $z = 0,7937$; в таком случае

$$a_1 = 1, a_2 = -1, b_1 = -2, b_2 = -6;$$

корни нашего уравнения окончательно представляются: 1, -2, -2, 3.

Поступила в редакцию 1. XII 1948 г.

Сектор геофизики и астрономии и
сектор математики ФТИ.

НЕКОТОРЫЕ ТОЖДЕСТВА, СВЯЗАННЫЕ С ЧИСЛАМИ БЕРНУЛЛИ.

А. Н. ХОВАНСКИЙ.

Известно символическое тождество (см. например,¹⁾)

$$n \sum_{m=1}^{m-1} m^{n-1} = (x+B)^n - B^n \quad (n, m \text{ целые } > 0) \quad (1)$$

где B — числа Бернулли, у которых указатели заменены показателями. Отсюда

$$n \sum_{m=1}^{x+a-1} m^{n-1} = (x+a+B)^n - B^n$$

и

$$(x+a+B)^n - (x+B)^n = n \sum_{m=x}^{x+a-1} m^{n-1} = n \sum_{m=0}^{a-1} (x+m)^{n-1} \quad (2)$$

Заменяя x на $\frac{x}{t}$, получим

$$[x+t(a+B)]^n - (x+tB)^n = nt \sum_{m=x}^{x+(a-1)t} m^{n-1} = nt \sum_{m=0}^{a-1} (x+mt)^{n-1}. \quad (3)$$

Пусть

$$f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots$$

Тогда

$$f(x+ta+tB) - f(x+tB) = t \sum_{m=0}^{a-1} f'(x+mt). \quad (4)$$

При $a=t=1$ имеем „основное символическое тождество для вычисления чисел Бернулли“²⁾, (стр. 240):

$$f(x+1+B) - f(x+B) = f'(B).$$

Положим в (4)

$$f(x) = (x-1)^p x^q \quad (p, q-1 \text{ целые } > 0).$$

Тогда

$$f'(x) = (x-1)^{p-1} x^{q-1} [(p+q)x - q]$$

и

$$\begin{aligned} & (x+ta+tB-1)^p (x+ta+tB)^q - (x+tB-1)^p (x+tB)^q = \\ & = \sum_{m=0}^{q-1} (x+mt-1)^{p-1} (x+mt)^{q-1} [(p+q)(x+mt) - q]. \end{aligned}$$

При $a = t = 1, x = 0$ получаем формулу Штерна:

$$B^p(B+1)^q - (B-1)^p B^q = 0.$$

Разложим $f(x+ta+tB)$ в ряд Тейлора относительно $f(x+tB)$:

$$atf'(x+tB) + \frac{a^2t^2}{2!}f''(x+tB) + \dots = t \sum_{m=0}^{a-1} f'(x+mt).$$

Разложим $f^{(n)}(x+tB)$ в ряд Тейлора относительно $f^{(n)}(x)$ ($n=1, 2, 3, \dots$):

$$f(at-x) - f(x) + \frac{tB_1}{1!} [f'(at+x) - f'(x)] + \frac{t^2B_2}{2!} [f''(at+x) - f''(x)] + \dots = t \sum_{m=0}^{a-1} f'(x+mt). \quad (5)$$

Положим $f(x) = e^x$. Тогда

$$(e^{at+x} - e^x) e^{Bt} = te^x (1 + e^t + e^{2t} + \dots + e^{(a-1)t}) = \frac{te^x(e^{at} - 1)}{e^t - 1};$$

$$e^{Bt} = \frac{e^t}{e^t - 1}.$$

Заменим t на it :

$$e^{Bit} = \frac{it(\cos t - 1 - i \sin t)}{2 - 2 \cos t} = \frac{t}{2} \operatorname{ctg} \frac{t}{2} - \frac{it}{2}.$$

Отсюда

$$\cos Bt = \frac{t}{2} \operatorname{ctg} \frac{t}{2}; \quad \sin Bt = -\frac{t}{2}; \quad \operatorname{tg} Bt = -\operatorname{tg} \frac{t}{2}; \quad \sin \left(B + \frac{1}{2}\right)t = 0;$$

$$\left(B + \frac{1}{2}\right)^{2n+1} = 0; \quad B_0 = 1; \quad B_1 = -\frac{1}{2}; \quad B_{2n+1} = 0 \quad (n > 0).$$

Положив в (2) $x=0, a=1$, получим формулу Муавра:

$$(B+1)^n = B^n.$$

Следовательно,

$$\cos(B+1)x = \cos Bx; \quad (B+1)^{2n+1} = 0 \quad (n > 0);$$

$$\sin(B+1)x = \frac{x}{2} = \sin Bx + x.$$

У Кудрявцева 1), Люка 2), 3), 4) Чезаро 5) и Чистякова 6) вышеуказанные соотношения выведены сложнее, а формулы (3), (4) и (5) отсутствуют.

Поступила в редакцию 1. XI. 1947 г.

Сектор математики ФТИ.

ЛИТЕРАТУРА.

1. В. А. Кудрявцев. Суммирование степеней чисел натурального ряда и чисел Бернулли. ОНТИ, М. Л. 1936.
2. E. Lucas. Théorie des nombres T. I. Paris, 1891.
3. E. Lucas. Sur le calcul symbolique des nombres de Bernoulli. Bruxelles, 1876.
4. E. Lucas. Théorie nouvelle des nombres de Bernoulli et d' Euler. Annali di matematica, Serie 2, VIII. Milano, 1877.
5. Э. Чезаро. Элементарный учебник алгебраического анализа и исчисления бесконечно малых. ОНТИ. М. Л. 1936.
6. И. И. Чистяков. Бернуллиевые числа. Ученые записки Московского университета, отдел физико-математический, вып. 13. Москва, 1896.

ЧИСЛЕННОЕ РЕШЕНИЕ ОДНОГО НЕЛИНЕЙНОГО ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ.

А. Н. ХОВАНСКИЙ.

Нистром¹⁾ для приближенного решения уравнения

$$\varphi''(s) = \sin \varphi(s) - 1; \quad \varphi\left(\pm \frac{1}{2}\right) = 0 \quad (1)$$

считает последнее частным случаем уравнения

$$\varphi''(s) = F(s, \varphi(s) + g(s); \quad \varphi(a) = \varphi(b) = 0. \quad (2)$$

и указывает на равноценность (2) интегральному уравнению Гаммерштейна²⁾

$$\varphi(s) = \int_a^b K(s, t) F(t, \varphi(t)) dt + f(s), \quad (3)$$

где

$$K(s, t) = \begin{cases} \frac{(s-b)(t-a)}{b-a} & a \leq t \leq s \\ \frac{(s-a)(t-b)}{b-a} & s \leq t \leq b \end{cases} \quad f(s) = \int_a^b K(s, t) g(t) dt.$$

Для доказательства этой равноценности запишем (3) подробнее в виде

$$\varphi(s) = \frac{s-b}{b-a} \int_a^s (t-a) F(t, \varphi(t)) dt + \frac{s-a}{b-a} \int_s^b (t-b) F(t, \varphi(t)) dt +$$

$$+ \frac{s-b}{b-a} \int_a^s (t-a) g(t) dt + \frac{s-a}{b-a} \int_s^b (t-b) g(t) dt.$$

Дважды продифференцировав это выражение, получим уравнение (2). Нистром указывает, что для приближенного решения уравнений такого рода выгодна формула Лобатто

$$\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} g(t) dt = \frac{16}{45} g(0) + \frac{49}{180} \left[g\left(-\frac{1}{2} \sqrt{\frac{3}{7}}\right) + g\left(\frac{1}{2} \sqrt{\frac{3}{7}}\right) \right] +$$

$$+\frac{1}{20}\left[g\left(-\frac{1}{2}\right)+g\left(\frac{1}{2}\right)\right].$$

$$\text{Для (1) } g(s) = -1 \text{ и } f(s) = -\left(s - \frac{1}{2}\right) \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \left(t + \frac{1}{2}\right) dt - \\ - \left(s + \frac{1}{2}\right) \int_s^{\frac{1}{2}} \left(t - \frac{1}{2}\right) dt = \frac{1}{8} - \frac{s^2}{2}.$$

Окончательно

$$\varphi(s) = \left(s - \frac{1}{2}\right) \int_{-\frac{1}{2}}^s \left(t + \frac{1}{2}\right) \sin \varphi(t) dt + \left(s + \frac{1}{2}\right) \int_s^{\frac{1}{2}} \left(t - \frac{1}{2}\right) \sin \varphi(t) dt + \frac{1}{8} - \frac{s^2}{2}. \quad (4)$$

Нистром указывает, что приближенное решение (4) есть

$$\varphi(s) = 0,113200 - 0,443521 s^2 - 0,036750 s^4 - 0,001444 s^6. \quad (5)$$

Это решение является интерполяционным многочленом, построенным с помощью формулы Лобатто путем решения системы трех нелинейных уравнений. Нистром не дает практических указаний относительно решения такой системы, требующего, несомненно, больших и сложных выкладок.

Прежде всего следует указать, что общность (2) не уменьшится от включения $g(s)$ в $F(s, \varphi(s))$, тогда как это включение упростит доказательство равноценности (1) и (2). Далее, можно получить для (1) другое интегральное уравнение, более простое, чем (4).

Дифференцирование (1) дает:

$$\cos \varphi(s) \cdot \varphi'(s) = \varphi'''(s).$$

Отсюда

$$2\varphi''(s) + \varphi''^2(s) + \frac{\varphi'^2(s)}{\varphi'^2(s)} = 0. \quad (6)$$

Заменив в (6) s на $-s$, получим

$$\varphi''(-s) = \varphi''(s).$$

т. е. $\varphi''(s)$ четная функция s . Но тогда и $\sin \varphi(s)$ четная функция s . Следовательно, $\varphi(s)$ четная функция s . Отсюда можно получить более простое интегральное уравнение для $\varphi(s)$:

$$\varphi'(s) = \int_0^s \sin(\varphi(s)) ds - s \quad (\text{в силу четности } \varphi(s) \quad \varphi'(0) = 0)$$

$$\varphi(s) = \varphi(0) + \int_0^s (s-t) \sin \varphi(t) dt - \frac{s^2}{2}.$$

Но, полагая $s = \frac{1}{2}$,

$$\varphi(0) = \frac{1}{8} - \int_0^{\frac{1}{2}} \left(\frac{1}{2} - t\right) \sin \varphi(t) dt,$$

откуда

$$\varphi(s) = \frac{1}{8} - \frac{s^2}{2} - \frac{1}{2} \int_0^{\frac{1}{2}} \sin \varphi(t) dt - s \int_0^s \sin \varphi(t) dt + \int_s^{\frac{1}{2}} t \sin \varphi(t) dt. \quad (7)$$

При решении этого интегрального уравнения можно ограничиться лишь положительными значениями s , причем формулу Лобатто, очевидно, придется заменить или видоизменить.

Однако при попытке численного решения (4) или (7) мы неизбежно натолкнемся на значительные трудности. Кроме того, определение погрешности решения в свою очередь представит затруднения.

Между тем, представляя $\varphi(s)$ как

$$\varphi(s) = a_0 + a_2 s^2 + a_4 s^4 + a_6 s^6 + \dots,$$

нетрудно получить ряд точных соотношений между коэффициентами этого разложения, которые, вместе с краевым условием, приведут нас к числовому решению (1).

Представляя в (8) $s = \frac{1}{2}$, мы получим из краевого условия

$$a_0 + \frac{a_2}{4} + \frac{a_4}{16} + \frac{a_6}{64} + \dots = 0. \quad (9)$$

Полагая в (1) $s = 0$, получим из (8)

$$\sin a_0 = 1 + 2a_2 \quad (10)$$

Полагая в (6) $s = 0$, получим из (8)

$$a_2^3 (1 + a_2) + 36 a_4^2 = 0. \quad (11)$$

Дифференцируем (1) дважды:

$$-\sin \varphi(s) \varphi'^2(s) + \cos \varphi(s) \varphi''(s) = \varphi^{IV}(s).$$

Подставим в последнее уравнение значения $\sin \varphi(s)$ и $\cos \varphi(s)$:

$$\varphi^{IV}(s) \varphi'(s) - \varphi''(s) \varphi''(s) + [(1 + \varphi''(s))] \varphi'^3(s) = 0. \quad (12)$$

Подставляя в (12) последовательные производные от (8), получим

$$60 a_2 a_6 - 24 a_4^2 + a_4^2 (1 + 2a_2) = 0. \quad (13)$$

Но из (11)

$$24 a_4^2 = -\frac{2}{3} a_2^3 (1 + a_2).$$

Подставляя это выражение в (13), находим, считая $a_2 \neq 0$,

$$a_6 = -\frac{(5 + 8a_2) a_2^2}{180}. \quad (14)$$

Последнее предположение верно, ибо из равенства $a_2 = 0$ следует $a_4 = 0$ и т. д.

Совокупность (9), (10), (11), и (14) дает систему для нахождения первых четырех коэффициентов разложения (8).

Непосредственное решение этой системы также затруднительно, но приближенные значения a_0, a_2, a_4 нетрудно получить из следующих соображений.

Из краевого условия мы получим

$$\varphi''\left(\frac{1}{2}\right) = -1; \quad \varphi'\left(\frac{1}{2}\right) = \varphi'''\left(\frac{1}{2}\right); \quad \varphi^{IV}\left(\frac{1}{2}\right) = -1. \quad (15)$$

Из последнего соотношения (15) ясно, что знаки a_2 и a_4 совпадают, т. е. из (11) получим

$$a_4 = \frac{a_2}{6} \sqrt{-a_2(1+a_2)}. \quad (16)$$

Из первых двух соотношений (15) получим

$$2a_2 + 3a_4 = -1 \quad (\text{точнее } 2a_2 + 3a_4 + \frac{15}{8}a_6 = -1)$$

$$a_2 + \frac{a_4}{2} = 12a_6$$

Отсюда

$$a_4 = -\frac{1}{26} = -0,0385; \quad a_2 = -\frac{23}{52} = -0,4428.$$

Из краевого условия

$$a_0 = \frac{23}{52 \cdot 4} = \frac{1}{52 \cdot 8} = \frac{47}{416} = 0,1130.$$

Тогда из (10) $a_2 = -0,4436$.

Из (16), подставляя $a_2 = -0,4436$, находим $a_4 = -0,03731$.

Из (12), подставляя $a_2 = -0,4436$, находим $a_6 = -0,00159$.

Отсюда $a_0 = 0,1132$.

Повторяя этот процесс, получим следующую таблицу приближений:

a_0	$\sin a_0$	a_2	a_4	a_6
0,1130	0,1128	-0,4428	-0,0385	
0,1132	0,11296	-0,4436	-0,03731	-0,00159
0,11320	0,112958	-0,44352	-0,036723	-0,001586
0,113200		-0,443521	-0,036724	-0,001587

Итак,

$$\varphi(s) = 0,113200 - 0,443521 s^2 - 0,036724 s^4 - 0,001587 s^6 - \dots$$

Нетрудно видеть, что у Нистрома a_4 и a_6 вычислены ошибочно.

Поступило в редакцию 1.XI.1947 г.

Сектор математики ФТИ.

ЛИТЕРАТУРА.

1. Nyström, E. I. Praktische Auflösung von Integralgleichungen. Acta Mathematica 54, 1-2 (1929).
2. Hammerstein, A. Nichtlineare Integralgleichungen nebst Anwendungen. Acta Mathematica 54, 1-2 (1929).
3. Moors, B. P. Valeur approximative d'une intégrale définie. Paris, 1905.

СОДЕРЖАНИЕ:

Стр.

1. Б. М. Козырев—Магнитоспиновый резонанс в растворах треххлористого хрома 3
2. Х. М. Муштари и С. Г. Випокуров—Определение напряженного состояния при упругом равновесии в пограничной зоне оболочек некоторых типов. 9
3. К. З. Галимов—Уравнения равновесия теории упругости при конечных перемещениях и их приложение к оболочкам. 25
4. Г. Г. Тумашев—Построение каналов и сопел по заданному распределению дозвуковых скоростей вдоль стенок 47
5. И. В. Свирский—Определение числа корней, лежащих в правой полуплоскости для функций вида $F(e^z, z)$, где $F(e^z, z)$ рациональная функция от аргументов e^z и z 51
6. Г. С. Салехов—О задаче Коши для одного класса уравнений с частными производными в области сколь угодно гладких функций 63
7. П. Т. Смоляков—О приведении уравнений движения в атмосфере к интегрируемым в квадратурах 75
8. П. Т. Смоляков—К определению высоты облаков по влажности воздуха у земли 79
9. П. Т. Смоляков и А. Н. Хованский—К решению алгебраических уравнений 3-й степени 85
10. А. Н. Хованский—Некоторые тождества, связанные с числами Бернулли. 93
11. А. Н. Хованский—Численное решение одного нелинейного дифференциального уравнения 95