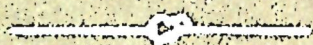


**БУЛЕТИНУЛ
АКАДЕМИЕЙ ДЕ ШТИИНЦЕ
А РСС МОЛДОВЕНЕШТЬ**



**ИЗВЕСТИЯ
АКАДЕМИИ НАУК МОЛДАВСКОЙ ССР**



естест. техн.

«КАРТЯ МОЛДОВЕНЯСКЭ»
1964

АКАДЕМИЯ НАУК МОЛДАВСКОЙ ССР

БУЛЕТИНУЛ

АКАДЕМИЕЙ ДЕ ШТИИНЦЕ
А РСС МОЛДОВЕНЕШТЬ

ИЗВЕСТИЯ

АКАДЕМИИ НАУК МОЛДАВСКОЙ ССР

№ 11

СЕРИЯ ЕСТЕСТВЕННО-ТЕХНИЧЕСКИХ НАУК

ИЗДАТЕЛЬСТВО
"КАРТА МОЛДОВЕНЯСКЭ"
КИШИНЕВ * 1964

МАТЕМАТИКА

В. Д. БЕЛОУСОВ

ВЗАИМНООБРАТНЫЕ КВАЗИГРУППЫ И ЛУПЫ

В настоящей статье рассматриваются некоторые зависимости между взаимнообратными квазигруппами и лупами с помощью преобразования изотопии, дается классификация квазигрупп и луп по родам с этой точки зрения и доказывается ряд предложений, дополняющих результаты А. Сада [2], Ш. Стейна [3], Р. Арци [4].

1. Пусть Q — некоторое фиксированное конечное или бесконечное множество, через A обозначим бинарную операцию, определенную на Q . Множество Q с операцией A называется *квазигруппой*, если уравнения $A(a, x) = b$, $A(y, a) = b$ разрешимы однозначно для любых $a, b \in Q$. Операцию A для краткости тоже будем называть квазигруппой. Если квазигруппа A обладает единицей, т. е. если $A(a, e) = A(e, a) = a$, то A называется *лупой*.

С каждой квазигруппой A связываются две обратные операции: *левая обратная* операция ${}^{-1}A$, которая определяется уравнением $A(y, a) = b$, именно $y = {}^{-1}A(b, a)$, и *правая обратная* операция A^{-1} , которая определяется уравнением $A(a, x) = b$, именно $x = A^{-1}(a, b)$. Легко видеть, что ${}^{-1}A$ и A^{-1} тоже квазигруппы, поэтому для каждой из них существуют обратные операции; так, ${}^{-1}A$ имеет две обратные операции $({}^{-1}A)^{-1}$ и ${}^{-1}({}^{-1}A)$. Но ${}^{-1}({}^{-1}A) = A$, следовательно, получаем одну новую операцию $({}^{-1}A)^{-1}$. Вообще говоря, можно получить следующие пять обратных операций: A^{-1} , ${}^{-1}A$, ${}^{-1}({}^{-1}A)$, $({}^{-1}A)^{-1}$, $[{}^{-1}({}^{-1}A)]^{-1}$. Действительно, следуя Стейну [3], обозначим через σ некоторую перестановку трех элементов a, b, c : $\sigma(a, b, c) = (a', b', c')$. Тогда $A^{\sigma}(a, b) = c$ будет эквивалентно равенству $A(a', b') = c'$. Например, если $\sigma(a, b, c) = (c, a, b)$, то $A^{\sigma} = {}^{-1}({}^{-1}A)$, так как ${}^{-1}({}^{-1}A)(a, b) = c \Leftrightarrow A(c, a) = b$. Если мы рассмотрим все возможные перестановки трех элементов a, b, c , то получим пять обратных операций, перечисленных выше, и еще операцию A . Заметим, что $[{}^{-1}({}^{-1}A)]^{-1} = {}^{-1}[({}^{-1}A)^{-1}] = A^*$, где A^* — операция, которая получается из операции A коммутированием: $A^*(a, b) = A(b, a)$. Действительно, имеем $[{}^{-1}({}^{-1}A)]^{-1}(a, b) = c \Leftrightarrow {}^{-1}({}^{-1}A)(a, c) = b \Leftrightarrow A^{-1}(b, c) = a \Leftrightarrow A(b, a) = c$, т. е. $[{}^{-1}({}^{-1}A)]^{-1} = A^*$. Аналогично доказывается, что ${}^{-1}[({}^{-1}A)^{-1}] = A^*$.

Итак, с каждой квазигруппой A связана система Σ_A шести квазигрупп $\Sigma_A = \{A, {}^{-1}A, A^{-1}, {}^{-1}({}^{-1}A), ({}^{-1}A)^{-1}, A^*\}$, которую мы назовем

РЕДАКЦИОННАЯ КОЛЛЕГИЯ

Академики АН МССР Я. С. Гросул (главный редактор),
А. В. Аблов (зам. главного редактора), В. А. Андрунакиевич,
кандидаты физико-математических наук И. Ц. Гохберг,
Т. И. Малиновский, В. А. Москаленко, С. И. Радауцан

746221
Центральная научная
БИБЛИОТЕКА
Академии наук Киргизской ССР

системой обратных квазигрупп для A . Легко видеть, что если B — одна из квазигрупп системы Σ_A , то $\Sigma_B = \Sigma_A$. Например, если $B = {}^{-1}(A^{-1})$, то $B^{-1} = A^*$, ${}^{-1}B = A^{-1}$ и т. д.

2. Напомним теперь определение изотопии двух квазигрупп. Пусть B и A — две квазигруппы, определенные на множестве Q . Квазигруппы B и A *изотопны*, если существуют такие три взаимнооднозначные отображения α, β, γ множества Q на себя (подстановки), что имеет место равенство: $B(x, y) = \gamma^{-1}A(\alpha x, \beta y)$ для всех $x, y \in Q$. Упорядоченную тройку подстановок (α, β, γ) обозначим через T и вместо предыдущего равенства будем писать кратко $B = A^T$ или $B = A^{(\alpha, \beta, \gamma)}$. Если $T = (\alpha, \beta, \gamma)$, то через T^{-1} обозначим тройку $(\alpha^{-1}, \beta^{-1}, \gamma^{-1})$, и если $S = (\alpha_1, \beta_1, \gamma_1)$, то через TS обозначим тройку $(\alpha\alpha_1, \beta\beta_1, \gamma\gamma_1)$. Тогда имеют место следующие утверждения: 1) если $B = A^T$, то $A = B^{T^{-1}}$, 2) если $C = B^T$, $B = A^S$, то $C = A^{ST}$, или, что то же самое, $(A^S)^T = A^{ST}$.

Иногда изотопия квазигрупп B и A будет обозначаться и через $B \sim A$.

Из утверждений 1) и 2) следует, что отношение изотопии симметрично и транзитивно, и так как $A = A^{(1,1,1)}$ (1 — единичная подстановка множества Q), то $A \sim A$, поэтому отношение изотопии является эквивалентностью на множестве всех квазигрупп, определенных на множестве Q . Изоморфизм двух квазигрупп B и A является частным случаем изотопии, именно при $\alpha = \beta = \gamma$. В этом случае будем писать $(\alpha, \alpha, \alpha) = \alpha$ и $B = A^{(\alpha, \alpha, \alpha)} = A^\alpha$.

3. Рассмотрим связь, которая существует между обратными операциями и изотопией. Пусть A^σ — какая-нибудь обратная квазигруппа к A . Через T^σ обозначим такое же перемещение в тройке (α, β, γ) , которое производится σ в тройке (a, b, c) .

Лемма 1. $(A^T)^\sigma = (A^\sigma)^{T^{\sigma^{-1}}}$.

Докажем лемму только для одного случая, например, когда $A^\sigma = {}^{-1}(A^{-1})$, т. е. $\sigma(a, b, c) = (c, a, b)$. Если $T = (\alpha, \beta, \gamma)$, то $T^\sigma = (\gamma, \alpha, \beta)$. Пусть $(A^T)^\sigma(a, b) = c$, тогда $A^T(c, a) = b$, или $\gamma^{-1}A(\alpha c, \beta a) = b$, $A(\alpha c, \beta a) = \gamma b$, откуда $A^\sigma(\beta a, \gamma b) = \alpha c$, $\alpha^{-1}A^\sigma(\beta a, \gamma b) = c$, $(A^\sigma)^{(\beta, \gamma, \alpha)}(a, b) = c$, $(A^\sigma)^{T^{\sigma^{-1}}}(a, b) = c$, следовательно, $(A^\sigma)^{T^{\sigma^{-1}}} = (A^T)^\sigma$.

Следствие. Если $B \sim A$, тогда $B^\sigma \sim A^\sigma$.

Рассматривая систему обратных квазигрупп Σ_A , можно заметить, что она также разбивается на подсистемы изотопных между собой квазигрупп. Такие разбиения могут быть следующих родов:

1) Все операции из Σ_A попарно не изотопны. Если мы назовем индексом операции A число классов эквивалентности, на которое разбивается множество Σ_A , то операция A этого рода имеет индекс 6.

2) Пусть $A^{-1} \sim A$. Тогда по следствию леммы 1 имеем ${}^{-1}(A^{-1}) \sim {}^{-1}A$ и $[{}^{-1}(A^{-1})]^{-1} \sim ({}^{-1}A)^{-1}$ или $A^* \sim ({}^{-1}A)^{-1}$, т. е. имеем следующее разбиение:

$$\Sigma_A = \{A, A^{-1}, [{}^{-1}A, ({}^{-1}A)^{-1}], \{A^*, ({}^{-1}A)^{-1}\}\}.$$

Аналогично получаем еще два рода:

$$\text{II б) } \Sigma_A = \{A, {}^{-1}A, [A^{-1}, ({}^{-1}A)^{-1}], \{A^*, {}^{-1}(A^{-1})\}\}.$$

$$\text{II с) } \Sigma_A = \{A, A^*, [{}^{-1}A, ({}^{-1}A)^{-1}], \{A^{-1}, {}^{-1}(A^{-1})\}\}.$$

Операции родов IIa, IIб, IIс имеют индекс 3.

III) Пусть ${}^{-1}(A^{-1}) \sim A$, откуда $[{}^{-1}(A^{-1})]^{-1} \sim {}^{-1}A$ или $A^{-1} \sim {}^{-1}A$. Но из ${}^{-1}(A^{-1}) \sim A$ следует и $[{}^{-1}(A^{-1})]^{-1} \sim A^{-1}$, т. е. $A^* \sim A^{-1}$. Итак, в этом случае операции A^* , A^{-1} , ${}^{-1}A$ изотопны между собой. Остаток рассмотрим операцию $({}^{-1}A)^{-1}$. Но из $A^{-1} \sim {}^{-1}A$ следует $(A^{-1})^{-1} \sim ({}^{-1}A)^{-1}$, т. е. $A \sim ({}^{-1}A)^{-1}$. Таким образом, операции A , ${}^{-1}(A^{-1})$, $({}^{-1}A)^{-1}$ изотопны между собой, и для этого имеем следующее разбиение:

$$\Sigma_A = \{A, {}^{-1}(A^{-1}), ({}^{-1}A)^{-1}, [A^{-1}, {}^{-1}A, A^*]\}.$$

В этом случае операция A имеет индекс 2.

IV) Если $A \sim A^{-1} \sim {}^{-1}A$, то из того, что доказано для родов IIa, IIб, следует, что $A \sim {}^{-1}(A^{-1})$ и $A \sim ({}^{-1}A)^{-1}$, а из того, что доказано для рода III, следует, что все операции из Σ_A изотопны между собой, т. е. операция A имеет индекс 1. Полученный результат можно сформулировать в виде следующей теоремы:

Теорема 1. Существует взаимно однозначное соответствие между всевозможными родами квазигрупп A и разбиениями симметрической группы степени 3 на правые смежные классы по ее подгруппам.

Действительно, легко доказывается, что $(A^\sigma)^\tau = A^{\sigma\tau}$. Для этого надо использовать определение обратной квазигруппы A^σ с помощью подстановки σ из S_3 . Теперь, если $A^\sigma \sim A$, то совокупность всех таких σ образует подгруппу H в S_3 , а отсюда следует, что если $A^\sigma \sim A^\tau$, то σ и τ принадлежат одному правому смежному классу по α . Таким образом, каждому роду соответствует некоторая подгруппа (и следовательно, некоторое разбиение на правые смежные классы по этой подгруппе) группы S_3 . Ниже мы даем эти соответствия для каждого рода:

$$\text{I} \Leftrightarrow \{1\}, \text{IIa} \Leftrightarrow \{1, (23)\}, \text{IIб} \Leftrightarrow \{1, (13)\}, \text{IIс} \Leftrightarrow \{1, (12)\},$$

$$\text{III} \Leftrightarrow \{1, (132), (123)\}, \text{IV} \Leftrightarrow \{S_3\}.$$

Следствие 1. Род и, следовательно, индекс квазигруппы A инвариантен при изотопии. Утверждение следует из того факта, что если $B \sim A$, то из $A^\sigma \sim A$ следует $B^\sigma \sim B$.

Индекс операции A определяется порядком подстановки $\sigma \neq 1$, для которой $A^\sigma \sim A$. Отсюда вытекает

Следствие 2. Индекс квазигруппы инвариантен и при взятии обратных операций.

Действительно, пусть $B = A^\sigma$, тогда $B^{\tau^{-1}} = A$, откуда $B^{\tau^{-1}\sigma} = A^\sigma \sim A$, $B^{\tau^{-1}\sigma} \sim A$, $B^{\tau^{-1}\sigma} \sim A^\sigma$, $B^{\tau^{-1}\sigma} \sim B$. Но $\tau^{-1}\sigma$ имеет тот же порядок, что и σ .

4. С каждой квазигруппой A можно связать следующие группы подстановок множества Q (см. [1]).

1) \mathfrak{L}_A — группа левых регулярных подстановок:

$$\mathfrak{L}_A = \{\lambda; \lambda A(x, y) = A(\lambda x, y), \forall x, y \in Q\}. \quad (1)$$

2) \mathfrak{R}_A — группа правых регулярных подстановок:

$$\mathfrak{R}_A = \{\rho; \rho A(x, y) = A(x, \rho y) \forall x, y \in Q\}.$$

3) \mathcal{C}_A — группа средних регулярных подстановок: $\varphi \in \mathcal{C}_A$, если существует такая подстановка φ^* , что $A(\varphi x, y) = A(x, \varphi^* y)$ для всех $x, y \in Q$. То, что $\mathcal{L}_A, \mathcal{R}_A, \mathcal{C}_A$ группы, доказано в [1], кроме того, можно еще рассматривать группу S_A^* , состоящую из всех φ^* . Перечисленные группы подстановок играют для квазигрупп такую же роль, какую играют ядра для луп [5]. В [1] доказано, что, если $Q(A)$ — лупа, то \mathcal{L}_A изоморфна левому ядру N_A , \mathcal{R}_A и \mathcal{C}_A обратны изоморфны правому и среднему ядру соответственно, причем $\mathcal{L}_A 1 = N_A$, где $\mathcal{L}_A 1 = \{\lambda 1, \lambda \in \mathcal{L}_A\}$. 1 — единица лупы $Q(A)$ и т. д. Если $\lambda \in \mathcal{L}_A$, то из (1) следует, что $A^{(\lambda, 1, \lambda)} = A$. Здесь мы имеем, таким образом, частный случай автотопии квазигруппы A . Как известно [5], тройка подстановок $T = (\alpha, \beta, \gamma)$ множества Q называется автотопией квазигруппы A , если $A^T = A$. На основании леммы 1 вытекает, что T^{-1} является автотопией обратной квазигруппы A^* . Используя это утверждение, легко доказать следующую лемму:

Лемма 2. Пусть A — некоторая квазигруппа. Тогда

$$\mathcal{L}_{-1A} = \mathcal{L}_A, \mathcal{R}_{-1A} \subseteq \mathcal{C}_A; \mathcal{L}_{A^{-1}} \subseteq \mathcal{C}_A, \mathcal{R}_{A^{-1}} = \mathcal{R}_A.$$

Действительно, пусть $\lambda \in \mathcal{L}_A$ или $A^T = A$, где $T = (\lambda, 1, \lambda)$. Операции $-1A$ соответствует подстановка $\sigma = (13)$: $-1A = A^{(13)}$. По предыдущему замечанию $T^{-1} = T^* = T^{(13)} = (\lambda, 1, \lambda) = T$ будет автотопией квазигруппы $A^* = -1A$, т. е. $\lambda \in \mathcal{L}_{-1A}$. Таким образом, $\mathcal{L}_A \subseteq \mathcal{L}_{-1A}$. Но отсюда вытекает, что $\mathcal{L}_{-1A} \subseteq \mathcal{L}_A$, так как вместо A можно подставить любую квазигруппу. Следовательно, $\mathcal{L}_{-1A} = \mathcal{L}_A$. Пусть $\rho \in \mathcal{R}_{-1A}$. Это означает, что $\mathcal{C} = (1, \rho, \rho)$ является автотопией квазигруппы $-1A = A^{(13)}$. Но тогда $S^{(13)} = (\rho, \rho, 1)$ является автотопией квазигруппы A и, следовательно, $A(\rho x, \rho y) = A(x, y)$ или $A(\rho x, y) = A(x, \rho^{-1} y)$. Поэтому $\rho \in \mathcal{C}_A$, т. е. $\mathcal{R}_{-1A} \subseteq \mathcal{C}_A$. Аналогично доказывается вторая группа соотношений леммы 2.

Следствие. Пусть будет $\mathcal{D}_A = \{\varphi; A(\varphi x, y) = A(x, \varphi^{-1} y)\}$. Легко видеть, что \mathcal{D}_A группа, назовем ее группой центральных регулярных подстановок; очевидно, $\mathcal{D}_A \subseteq \mathcal{L}_A \cap \mathcal{L}_A^*$. Из предыдущего вытекает включение $\mathcal{R}_{-1A} \subseteq \mathcal{D}_A$. Идя обратным путем, легко доказывать и включение $\mathcal{D}_A \subseteq \mathcal{R}_{-1A}$, т. е. $\mathcal{R}_{-1A} = \mathcal{D}_A$. Аналогично получаем $\mathcal{L}_{A^{-1}} = \mathcal{D}_A$.

Лемма 3. 1) Если A обладает левой единицей, тогда $\mathcal{R}_A = \mathcal{L}_{-1A}$.

2) Если A обладает правой единицей, тогда $\mathcal{L}_A = \mathcal{C}_{A^{-1}}$.

Пусть $\varphi \in \mathcal{C}_{-1A}$, это означает, что существует такая подстановка φ^* , что $-1A(\varphi x, y) = -1A(x, \varphi^* y)$ для всех $x, y \in Q$. Пусть $-1A(\varphi x, y) = z$, откуда $\varphi x = A(z, y)$. Одновременно будем иметь $x = A(z, \varphi^* y)$, поэтому $\varphi A(z, \varphi^* y) = A(z, y)$. В этом равенстве z и y могут быть любыми элементами, пусть, в частности, $z = 1$, откуда $\varphi \varphi^* y = y$ или $\varphi^* = \varphi^{-1}$ и, поэтому, будем иметь $\varphi A(z, \varphi^{-1} y) = A(z, y)$ или $\varphi A(z, y) = A(z, \varphi y)$, т. е. $\varphi \in \mathcal{R}_A$, следовательно, $\mathcal{C}_{-1A} \subseteq \mathcal{R}_A$. Но из леммы 2 следует, что $\mathcal{R}_A \subseteq \mathcal{C}_{-1A}$, поэтому $\mathcal{C}_{-1A} = \mathcal{R}_A$. Аналогично доказывается и второе утверждение леммы.

Замечание. Если A — лупа (с единицей 1), то: 1) A^* тоже лупа. 2) A^{-1} и $-1(A^{-1})$ обладают левой единицей 1 и 3) $-1A$ и $(-1A)^{-1}$ обладают правой единицей 1.

Теорема 2. Пусть A — квазигруппа. Тогда имеют место следующие соотношения для групп регулярных подстановок обратных операций:

$$1) \mathcal{L}_{-1A} = \mathcal{L}_A \quad 2) \mathcal{L}_{A^{-1}} = \mathcal{D}_A \quad 3) \mathcal{L}_{A^*} = \mathcal{R}_A \quad 4) \mathcal{L}_{(-1A)^{-1}} = \mathcal{R}_A$$

$$\mathcal{R}_{-1A} = \mathcal{D}_A \quad \mathcal{R}_{A^{-1}} = \mathcal{R}_A \quad \mathcal{R}_{A^*} = \mathcal{L}_A \quad \mathcal{R}_{(-1A)^{-1}} = \mathcal{D}_A$$

$$\mathcal{D}_{-1A} = \mathcal{R}_A \quad \mathcal{D}_{A^{-1}} = \mathcal{L}_A \quad \mathcal{D}_{A^*} = \mathcal{D}_A \quad \mathcal{C}_{(-1A)^{-1}} = \mathcal{L}_A$$

$$5) \mathcal{L}_{-1(A^{-1})} = \mathcal{D}_A$$

$$\mathcal{R}_{-1(A^{-1})} = \mathcal{L}_A$$

$$\mathcal{D}_{-1(A^{-1})} = \mathcal{R}_A$$

Если A — лупа, то добавляются еще следующие соотношения:

$$\mathcal{C}_{-1A} = \mathcal{C}_{(-1A)^{-1}} = \mathcal{L}_A, \mathcal{C}_{A^{-1}} = \mathcal{C}_{-1(A^{-1})} = \mathcal{R}_A, \mathcal{C}_{A^*} = \mathcal{C}_A^*$$

Доказательство. Докажем равенства группы 1). Первое и второе следуют из леммы 2 и её следствия. Так как A — любая операция, то, заменяя во втором равенстве A на $-1A$, получаем $\mathcal{R}_{-1(-1A)} = \mathcal{D}_{-1A}$, т. е. $\mathcal{D}_{-1A} = \mathcal{R}_A$. Аналогично доказывается и вторая группа равенств. Остальные равенства вытекают из равенств групп 1) и 2).

Например: $\mathcal{R}_{-1(A^{-1})} = \mathcal{D}_{A^{-1}} = \mathcal{L}_A$.

Соотношения для групп средних регулярных подстановок доказываются на основании леммы 3 и равенств пяти групп теоремы 2.

5. Если A лупа, то Σ_A не состоит из одних луп. Так, если $A(x, y) = xy$ — группа, то $A^{-1}(x, y) = x^{-1}y$ и A^{-1} в общем случае не имеет правой единицы. Поэтому целесообразно рассмотреть такие изотопы обратных операций для A , чтобы они были также лупами. Сделаем это следующим образом. Если A лупа (с единицей 1), то рассмотрим подстановку I , определенную равенством: $A(x, Ix) = 1$; т. е. Ix — правый обратный элемент для x .

Введем следующие две операции: $A^p(x, y) = A^{-1}(I^{-1}x, y)$, $A^l(x, y) = -1A(x, Iy)$. Покажем, что A^p и A^l — лупы с той же единицей 1. Из определения 1 следует, что $I1 = 1$. Выше мы видели, что если A лупа, то A^{-1} обладает левой единицей 1. Поэтому $A^p(1, y) = A^{-1}(I^{-1}1, y) = A^{-1}(1, y) = y$. Пусть теперь $A^p(x, 1) = x'$. Пользуясь определением операции A^p , мы заключаем, что $A(I^{-1}x, x') = 1$, но из $A(x, Ix) = 1$ следует $A(I^{-1}x, x) = 1$, откуда $x' = x$. Таким образом, с каждой лупой можно ассоциировать две лупы — A^p и A^l , которые можно назвать правой и левой обратной лупой соответственно для A . Их рассмотрение подсказывается обратными операциями для группы или, более обще, IP -лупы [5].

Определения для A^p и A^l можно переписать и следующим образом: $A^p = (A^{-1})^{P_A}$, $A^l = (-1A)^{S_A}$, где $P_A = (I^{-1}, 1, 1)$, $S_A = (1, I, 1)$,

и $I = I_A$ определены равенством $A(x, I_A x) = 1$. Легко показать, что $I_{A^p} = I_{A^\lambda} = I^{-1}$. Отсюда, как следствие, получаем соотношения:

$$P_{A^p} = P_{A^\lambda} = P_A^{-1}, \quad S_{A^p} = S_{A^\lambda} = S_A^{-1}.$$

Как и для обратных квазигрупп, мы можем рассмотреть обратные лупы для луп A^p и A^λ и т. д., причем мы определяем: $(A^p)^p = A^{p^2}$, $(A^p)^\lambda = A^{p\lambda}$ и т. д.

Для квазигрупп мы видели, что существуют всего шесть обратных квазигрупп (включая и самую квазигруппу). Для того чтобы выяснить аналогичный вопрос для обратных луп, мы сначала приведем без доказательства следующие леммы:

Лемма 4. $A^{p^2} = A$, $A^{\lambda^2} = A$.

Лемма 5.

$$\begin{cases} A^{p\lambda} = [-1(A^{-1})](1, I^{-1}, I^{-1}) \\ A^{p\lambda} = [(-1A)^{-1}](I, 1, I) \end{cases} \quad \begin{cases} A^{p\lambda p} = (A^*)^{I^{-1}} \\ A^{\lambda p\lambda} = (A^*)^I \end{cases}$$

Таким образом, из предыдущих двух лемм следует, что система Σ_A^0 обратных луп для лупы A состоит из операций:

$$A, A^p, A^\lambda, A^{p\lambda}, A^{\lambda p}, A^{p\lambda p}, A^{\lambda p\lambda}, A^{\lambda p\lambda p}, \dots$$

Но с точностью до изоморфизма их всего шесть, как это следует из лемм 4 и 5 и из следующей леммы.

Лемма 6. $A^{p^2} = A^{\alpha p}$, $A^{\lambda^2} = A^{\lambda \alpha}$, где α — любая подстановка множества Q .

Рассмотрим теперь последние два равенства леммы 5. Из них мы выводим равенство: $A^{p\lambda p} = A^{p\lambda I^{-1}}$, откуда $A^{\lambda p\lambda} = (A^{p\lambda p})^{I^2}$, т. е. $A^{\lambda p\lambda}$ и $A^{p\lambda p}$ изоморфны. Поэтому в системе Σ_A^0 все лупы вида $A^{p\lambda p \dots}$ или $A^{\lambda p\lambda \dots}$, где в показателе больше чем три буквы, изоморфны следующим шести лупам: A , A^p , A^λ , $A^{p\lambda}$, $A^{\lambda p}$, $A^{p\lambda p}$.

6. Назовем лупу A G -лупой, если она обладает следующим свойством (G): если некоторая лупа B изотопна лупе A , тогда B будет изоморфна A . Как известно [6], группы являются G -лупами, некоторые лупы Муфанг тоже будут G -лупами. Следующая теорема показывает, что свойство (G) инвариантно относительно взятия обратных луп.

Теорема 3. Если A — G -лупа, то и любая операция A^α из Σ_A^0 тоже будет G -лупой.

Достаточно рассмотреть главные изотопы (B главно-изотопна с A , если $B = A^{(\alpha, \beta, 1)}$), так как любой изотоп A изоморфен некоторому главному изотопу [5]. Если лупа B главно-изотопна лупе A : $B = A^T$, то изотопия T имеет вид: $T = (R_k^{-1}, L_l^{-1}, 1)$, где $R_k x = A(x, k)$, $L_l x = A(l, x)$ [5]. В этом случае единицей лупы B будет $m = A(l, k)$. Сформулируем теперь лемму, которую примем без доказательства:

Лемма 7. $(A^T)^p = (A^p)^{T^p}$, $(A^T)^\lambda = (A^\lambda)^{T^\lambda}$, где $T^p = (IV_m^{-1} L_l^{-1}, 1; L_l^{-1})$, $T^\lambda = (1, I^{-1} V_m R_k^{-1}, R_k^{-1})$, а подстановка V_a определяется равенством: $V_a x = A^{-1}(x, a)$.

Доказательство теоремы 3. Достаточно доказать, что A^p и A^λ являются G -лупами, а для остальных обратных луп применить индукцию. Если A G -лупа, то, каковы бы ни были элементы k и $l \in Q$, существует такая подстановка α множества Q , что $A^T = A^\alpha$, $T = (R_k^{-1}, L_l^{-1}, 1)$. Докажем, что A^p тоже G -лупа. С этой целью вычислим $(A^T)^p$. Так как $A^T = A^\alpha$, то $(A^T)^p = A^{\alpha p}$ или $(A^p)^{T^p} = A^{p\alpha}$; ввиду лемм 6 и 7. Перепишем последнее равенство более подробно: $(A^p)^{(IV_m^{-1}, L_l^{-1}, 1; L_l^{-1})} = A^{p\alpha}$, откуда

$$(A^p)^{(IV_m^{-1}, L_l^{-1}, 1)} = (A^p)^{\alpha L_l}. \quad (2)$$

Пусть $\tilde{R}_u x = A^p(x, u)$, $\tilde{L}_v x = A^p(v, x)$. Вычислим эти две подстановки. Имеем $\tilde{R}_u x = A^{-1}(I^{-1}x, u) = V_u I^{-1}x$, откуда $\tilde{R}_u = V_u I^{-1}$. Для \tilde{L}_v имеем: $\tilde{L}_v x = A^{-1}(I_v^{-1}, x)$, откуда $A(I_v^{-1}, \tilde{L}_v x) = x$, $L_{I_v^{-1}} \tilde{L}_v = 1$, следовательно, $\tilde{L}_v = L_{I_v^{-1}}$. Из равенств для \tilde{R}_u и \tilde{L}_v мы находим $IV_u^{-1} = \tilde{R}_u^{-1}$, $L_{I_v^{-1}} = \tilde{L}_v^{-1}$ или $L_v = L_{I_v^{-1}}$, поэтому равенство (2) принимает вид $(A^p)^{(\tilde{R}_u^{-1}, \tilde{L}_v^{-1}, 1)} = (A^p)^{\alpha L_l}$. Но $m = A(l, k)$, и если $Il = n$, то $l = I^{-1}n$, $k = A^{-1}(I^{-1}n, m)$, откуда

$$(A^p)^{(\tilde{R}_u^{-1}, \tilde{L}_v^{-1}, 1)} = (A^p)^{\alpha L_p}. \quad (3)$$

Так как m и n могут быть любыми элементами из Q , то равенство (3) показывает, что любая лупа, главно-изотопная лупе A^p , будет изоморфна A^p ; т. е. A^p тоже G -лупа. Аналогично доказывается, что и A^λ — G -лупа.

ЛИТЕРАТУРА

1. В. Д. Белоусов, Ученые записки Бельцкого пединститута, вып. 1, 1958, 39—49.
2. A. Sade, Math. Nachrichten, 1959, v. 20, № 1—2, 73—106.
3. S. K. Stein, Trans. Amer. Math., 1957, v. 85, № 1, 228—256.
4. R. Artzy, Proc. Amer. Math. Soc., 1960, v. 11, № 6, 847—851.
5. R. H. Bruck, A survey of binary systems, Berlin—Göttingen—Heidelberg, 1958.
6. A. A. Albert, Trans. Amer. Math. Soc., 1943, v. 54, 507—519.

В. Д. БЕЛОУСОВ

КВАЗИГРУПЫ ШИ ЛУПЕ РЕЧИПРОК ИНВЕРСЕ

Резюме

Ла фиекаре квазигруп A се асочиязе ынкэ чинч квазигрупурь инверсе луй A . Системул Σ_A дин шасе квазигрупурь речипрок инверсе се ымпарт ын класе де квазигрупурь изотопе ынтре еле. Се дэ класификация ачестор партиций. Ла фиекаре квазигруп се асочиязе трей групурь де субституций регулате \mathcal{E}_A , \mathcal{R}_A ши \mathcal{C}_A . Се дескриу ачесте групурь пентру операцийле дин Σ_A ын казул кынд A есте лупэ. Се консидерэ ши лупеле речипрок инверсе ши се дэ класификация лор. Ын ынкеере се демонстразе кэ лупеле инверсе ла о G -лупэ есте де асеменя о G -лупэ.

И. Ц. ГОХБЕРГ

О НОРМАЛЬНОЙ РАЗРЕШИМОСТИ И ИНДЕКСЕ ФУНКЦИИ ОТ ОПЕРАТОРА

В этой статье излагается своеобразное операционное исчисление, связанное с теорией Φ -операторов (см. [1]). В приводимых здесь теоремах (§ 3) дается критерий того, что функция от некоторого оператора является Φ -оператором, и выводится формула для вычисления индекса функции от оператора.

Доказательства основываются на некоторых предложениях теории нормированных колец, излагаемых в первых двух параграфах.

§ 1. Индексные функционалы в R -кольцах

1. Пусть R — произвольное нормированное кольцо с единицей e . Через O_R обозначим мультипликативную группу всех обратимых элементов из R .

Индексным функционалом (или, короче, *и. функционалом*) кольца R назовем любой гомоморфизм $\nu(O_R \rightarrow Z)$ группы O_R в группу целых чисел. Иными словами, индексным функционалом кольца R называется всякий функционал $\nu(x)$, определенный на группе O_R и обладающий следующими свойствами: а) $\nu(x)$ ($x \in O_R$) принимает только целочисленные значения, б) $\nu(x_1 x_2) = \nu(x_1) + \nu(x_2)$ ($x_1, x_2 \in O_R$).

Очевидно, что если ν_j ($j = 1, 2, \dots, n$) являются и. функционалами кольца R , то таковым будет и функционал

$$\nu = \sum_{j=1}^n k_j \nu_j,$$

где k_j — произвольные целые числа.

Более того, если имеется некоторая совместная система и. функционалов $\{\nu_\alpha\}$ (термин "совместная" означает, что на каждом элементе $x \in O_R$ не более конечного числа функционалов ν_α отличны от нуля), то и. функционалом будет

$$\nu = \sum_{\alpha} k_{\alpha} \nu_{\alpha}, \quad (1)$$

где k_{α} — произвольные целые числа.

Совместную систему и. функционалов $\{\nu_{\alpha}\}$ назовем *линейно независимой*, если из равенства нулю функционала (1) вытекает, что $k_{\alpha} = 0$ для всех значений α .

Совместную линейно независимую систему и. функционалов $\{v_\alpha\}$ кольца R назовем *индексным базисом* кольца R , если всякий и. функционал кольца R может быть представлен в виде (1).

1°. Всякий и. функционал v кольца R непрерывен.

В самом деле, пусть $x_0 \in O_R$, тогда любой элемент $x \in R$ из окрестности $|x - x_0| < |x_0^{-1}|^{-1}$ обратим и кольцо R принадлежит элементу

$$y = \ln(e - x_0^{-1}(x_0 - x)) = - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x_0^{-1}(x_0 - x))^n}{n}.$$

Для последнего элемента $\exp y = e - x_0^{-1}(x_0 - x)$.

Так как $\exp y = (\exp(y/n))^n$ для любого натурального n , то $v(\exp y) = n v(\exp(y/n))$. Из последнего вытекает, что $v(\exp y) = 0$. Учитывая, что $v(x) = v(x_0) + v(\exp y)$, получаем $v(x) = v(x_0)$.

2. Пусть F — произвольное замкнутое множество на комплексной плоскости. Через $\hat{K}(F)$ обозначим кольцо всех рациональных функций, полюса которых не принадлежат F . Нормированное коммутативное кольцо $K(F)$ комплекснозначных непрерывных функций, заданных на F , назовем *R-кольцом*, если $\hat{K}(F)$ содержится в $K(F)$ и плотно в нем в смысле нормы кольца $K(F)$.

Через $K_0(F)$ обозначим замыкание кольца $\hat{K}(F)$ по норме, равной максимуму функции на F .

Без труда доказывается, что бикомпакт максимальных идеалов R -кольца $K(F)$ гомеоморфен множеству F .

Обозначим через G дополнительную область к множеству F . Область G состоит из конечного или счетного множества связных компонент G_j ($j = 0, 1, \dots, \omega$; $\omega \leq \infty$).

На множестве $O_{\hat{K}(F)}$ всех обратимых в $K(F)$ рациональных функций из $\hat{K}(F)$ определим функционал x_j ($j = 0, 1, \dots, \omega$), полагая значение $x_j(r)$ ($r \in O_{\hat{K}(F)}$) равным разности числа нулей и числа полюсов рациональной функции $r(\zeta)$ (с учетом их кратностей), которые содержатся в компоненте G_j .

Очевидно, $x_j(r_1 \cdot r_2) = x_j(r_1) + x_j(r_2)$ ($r_1, r_2 \in O_{\hat{K}(F)}$, $j = 0, 1, \dots, \omega$).

С помощью теоремы Руше доказывается, что функционалы x_j можно расширить по непрерывности на всю группу $O_{K_0(F)}$. После этого расширения все x_j ($j = 0, 1, \dots, \omega$) становятся и. функционалами в кольце $K_0(F)$.

Если F — ограниченное множество, то среди G_j имеется только одна неограниченная компонента. В дальнейшем в этом случае неограниченную компоненту всегда будем обозначать через G_0 .

Систему и. функционалов $\{x_j\}_1^\omega$ назовем *стандартной системой* и. функционалов для области F .

Отметим, что если компонента G_k ограничена конечным числом замкнутых ориентированных кривых $\Gamma_1, \Gamma_2, \dots, \Gamma_n$, причем все кривые $\Gamma_2, \Gamma_3, \dots, \Gamma_n$ содержатся в области, окруженной кривой Γ_1 , то

$$x_k(a) = \frac{1}{2\pi} [\arg a(\zeta)]_{\Gamma_1} - \frac{1}{2\pi} \sum_{j=1}^n [\arg a(\zeta)]_{\Gamma_j} \quad (2)$$

Легко доказывается, что всегда $\sum_{j=0}^{\omega} x_j = 0$.

Имеет место следующая

Теорема 1. *Стандартная система и. функционалов $\{x_j\}_1^\omega$ для множества F является индексным базисом любого R -кольца $K(F)$.*

Доказательство. Покажем сначала, что система $\{x_j\}_1^\omega$ совместна. Пусть $a \in O_{K(F)}$ и $r \in \hat{K}(F)$ такая рациональная функция, что

$$\|a - r\| < \|a^{-1}\|^{-1}. \quad (3)$$

Тогда

$$r = a(e - a^{-1}b)^{-1}, \quad (4)$$

где $b = a - r$.

Так как $\|a^{-1}b\| < 1$, то $r(\zeta) \neq 0$ ($\zeta \in F$). Более того, из (3), (4) следует, что $x_j(r) = x_j(a)$ ($j = 0, 1, \dots, \omega$).

Так как $x_j(r)$ равно разности числа нулей и числа полюсов функции $r(\zeta)$, которые содержатся в компоненте G_j , а функция $r(\zeta)$ имеет конечное число нулей и полюсов, то только конечное число чисел $x_j(a)$ может быть отлично от нуля.

Пусть теперь v — произвольный и. функционал в $K(F)$.

Положим $k_j = v((\zeta - \lambda_j)(\zeta - \lambda_0)^{-1})$ ($j = 1, 2, \dots, \omega$), где $\{\lambda_j\}_0^\omega$ — произвольный набор чисел из соответствующих компонент $\{G_j\}_0^\omega$ ($\lambda_j \in G_j$). Числа k_j не зависят от выбора чисел $\lambda_j \in G_j$.

Легко видеть, что если все нули и полюсы функции $r \in O_{\hat{K}(F)}$ принадлежат одной и той же компоненте G_j , то $v(r) = 0$.

Если же все нули и полюсы функции $r \in O_{\hat{K}(F)}$ принадлежат компонентам G_j ($j \neq 0$) и G_0 , то, как легко видеть,

$$v(r) = k_j x_j(r). \quad (5)$$

Всякую функцию $r \in O_{\hat{K}(F)}$ можно представить в виде произведения

$$r = \prod_{j=1}^m r_j \quad (r_j \in O_{\hat{K}(F)}), \quad (6)$$

где все нули и полюсы r_j принадлежат G_j и G_0 .

Из (5) и (6) следует равенство $v(r) = \sum_j k_j x_j(r)$, а вместе с ним и равенство

$$v = \sum_{j=1}^{\omega} k_j x_j. \quad (7)$$

Легко убедиться в том, что числа k_j в (7) однозначно определяются и. функционалом v .

Теорема доказана.

3. Если R — некоторое нормированное кольцо, то через $R_{n \times n}$ обозначим нормированное кольцо всех квадратных матриц n -го порядка с элементами из R , с обычным определением умножения и сложения матриц и с определением нормы:

$$|A| = n \max_{j, k} |a_{jk}|_R,$$

где $A = \|a_{jk}\|_1^n$ ($a_{jk} \in R$).

Если кольцо R является коммутативным, то матрица $A \in R_{n \times n}$ обратима в том и только том случае, когда элемент $\det A (\in R)$ обратим. Группу всех обратимых матриц из $R_{n \times n}$ обозначим через $O_R; n$.

Пусть $K(F)$ — произвольное R -кольцо и ν — какой-либо н. функционал кольца $K(F)$. Тогда равенством

$$\nu(X) = \nu(\det X) \quad (X \in O_{K(F); n}), \quad (8)$$

очевидно, определяется некоторый н. функционал кольца $K_{n \times n}(F)$. Имеет место следующая

Теорема 2.* Пусть $K(F)$ — произвольное R -кольцо. Тогда общий вид н. функционала в кольце $K_{n \times n}(F)$ дается формулой (8), где ν — произвольный н. функционал кольца $K(F)$.

Доказательство. Пусть ν — произвольный н. функционал кольца $K_{n \times n}(F)$. Равенством

$$\nu(A) = \nu \begin{pmatrix} a & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix} \quad (A \in O_{K(F)}),$$

очевидно, определяется н. функционал в кольце $K(F)$. Легко видеть, что теорема будет доказана, коль скоро будет установлено равенство

$$\nu(A) = \nu(\det A) \quad (A \in O_{K(F); n}). \quad (9)$$

При доказательстве этого равенства будем различать три случая:

1) Предположим, что матрица A состоит из скаляров, т. е. $A = \|a_{jk}\|_1^n$, где a_{jk} — комплексные числа. Тогда, очевидно, найдутся непрерывные функции $a_{jk}(t)$ ($0 \leq t \leq 1$) такие, что $\det \|a_{jk}(t)\|_1^n \neq 0$ ($0 \leq t \leq 1$), $a_{jk}(0) = a_{jk}$ и $a_{jk}(1) = \delta_{jk}$. Образует матрицу $A(t) = \|a_{jk}(t)\|_1^n$. Тогда из непрерывности и целочисленности функционала ν следует

$$\nu(A) = \nu(A(t)) = \nu(I) = 0 \quad (0 \leq t \leq 1).$$

Последнее означает, что в рассматриваемом случае выполняется равенство (9).

2) Рассмотрим второй случай, когда матрица A является треугольной. Введем в рассмотрение матрицу-функцию $A(t) = tA + (1-t)\|a_{jk}(t)\delta_{jk}\|_1^n$ ($0 \leq t \leq 1$), где $a_{jk}(t) (\in K(F))$ элементы матрицы A .

* Теоремы 1 и 2 приведены без доказательства в статьях [2], [3].

Так как при любом $t \in [0, 1]$ $\det A(t) = \det A$, то все значения матрицы-функции $A(t) \in O_{K(E); n}$.

Из непрерывности $A(t)$ следует, что

$$\nu(A) = \nu(A(1)) = \nu(A(0)). \quad (10)$$

Матрицу $A(0) = \|a_{jj}(t)\delta_{jk}\|_1^n$, очевидно, можно представить в виде $A(0) = C_1 A_1 C_2 \dots C_n A_n C_{n+1}$, где C_j — некоторые обратимые скалярные матрицы, а

$$A_j = \begin{pmatrix} a_{jj} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}.$$

Таким образом,

$$\nu(A(0)) = \sum_{j=1}^n \nu(A_j) = \nu \left(\prod_{j=1}^n A_j \right).$$

Принимая во внимание, что

$$\nu \left(\prod_{j=1}^n A_j \right) = \nu(\det A(0)) = \nu(\det A),$$

получаем в силу (10)

$$\nu(A) = \nu(\det A).$$

3) Пусть $A (\in O_{K(E); n})$ — матрица с рациональными элементами.

Тогда из теории полиномиальных матриц можно легко вывести, что матрица A допускает представление в виде $A = A_1 D A_2$, где D — диагональная матрица из $O_{K(E); n}$, а A_1, A_2 суть произведения некоторых треугольных матриц из $O_{K(E); n}$ и скалярных матриц, причем $\det A_1(t) = \det A_2(t) = 1$ для всех t .

Так как $\nu(A) = \nu(A_1) + \nu(A_2) + \nu(D)$ и так как по доказанному $\nu(A_1) = \nu(A_2) = 0$, $\nu(D) = \nu(\det D)$, то $\nu(A) = \nu(\det A)$.

Принимая, наконец, во внимание, что $\det D = \det A$, получаем $\nu(A) = \nu(\det A)$.

Таким образом, равенство (9) имеет место для плотного множества матриц из $O_{K(E); n}$. Отсюда непосредственно следует, что оно справедливо и во всей общности.

Теорема доказана.

§ 2. Подкольца нормированного кольца, порожденные одним элементом

Пусть R — произвольное нормированное кольцо с единицей e , а $R_1 (e \in R_1)$ — его подкольцо. Для любого элемента $x \in R$ обозначим через $\rho(x, R_1)$ множество всех комплексных чисел λ , для которых элемент $x - \lambda e$ обратим в R и $(x - \lambda e)^{-1} \in R_1$. В частности, $\rho(x, R) = \rho(x)$ состоит из всех регулярных чисел элемента x .

Множество $\rho(x, R_1)$ является открытым множеством. В самом деле, пусть $\lambda_0 \in \rho(x, R_1)$ и λ удовлетворяет неравенству $|\lambda - \lambda_0| < |(x - \lambda_0 e)^{-1}|^{-1}$. Так как $x - \lambda e = (x - \lambda_0 e)(e - (\lambda - \lambda_0)(x - \lambda_0 e)^{-1})$ и $|(\lambda_0 - \lambda)(x - \lambda_0 e)^{-1}| < 1$, то элемент $x - \lambda e$ обратим и

$$(x - \lambda e)^{-1} = \sum_{j=0}^{\infty} (\lambda_0 - \lambda)^j (x - \lambda_0 e)^{-j-1} \in R_1. \quad (11)$$

Множество $\sigma(x, R_1)$, дополняющее $\rho(x, R_1)$ до всей комплексной плоскости, будем называть спектром элемента x в подкольце R_1 . В частности, $\sigma(x, R) = \sigma(x)$ состоит из всех точек спектра $x \in R$.

Множество $\sigma(x, R_1)$, очевидно, замкнуто.

Для того чтобы множество $\sigma(x, R_1)$ было ограниченным, необходимо и достаточно, чтобы элемент x принадлежал R_1 .

В самом деле, если $x \in R_1$, то для всех λ с $|\lambda| > |x|$

$$(x - \lambda e)^{-1} = - \sum_{j=0}^{\infty} \lambda^{-j-1} x^j \in R_1.$$

Обратно, пусть в области $|\lambda| \geq \delta$ ($\delta > |x|$) элемент $x - \lambda e$ обратим и $(x - \lambda e)^{-1} \in R_1$. Тогда элемент $(e - \frac{1}{\lambda} x)^{-1} = \sum_{j=0}^{\infty} \lambda^{-j} x^j$ ($|\lambda| \geq \delta$) также принадлежит R_1 , а вместе с ним кольцу R_1 принадлежит элемент

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{|\lambda|=\delta} (e - \frac{1}{\lambda} x)^{-1} d\lambda = x.$$

Область $\rho(x, R_1)$ распадается на конечное или счетное множество связных компонент $\rho_j(x, R_1)$ ($j=0, 1, \dots, \omega$; $\omega \leq \infty$).

Если спектр $\sigma(x, R_1)$ ограничен, то только одна из компонент $\rho_j(x, R_1)$ неограниченна. В этом случае неограниченную компоненту будем обозначать через $\rho_0(x, R_1)$.

Всегда $\sigma(x) \subseteq \sigma(x, R_1)$. Легко видеть, что спектр $\sigma(x, R_1)$, вообще говоря, шире спектра $\sigma(x) = \sigma(x, R)$. Однако, если в некоторой компоненте $\rho_j(x, R)$ имеется хотя бы одна точка λ_0 из $\rho(x, R_1)$, то и вся эта компонента $\rho_j(x, R)$ принадлежит $\rho(x, R_1)$. В самом деле, пусть λ — произвольная фиксированная точка из $\rho_j(x, R)$ и Γ — произвольная кривая, соединяющая точки λ_0 и λ и целиком лежащая в $\rho_j(x, R)$.

Обозначим через $\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_m (= \lambda)$ точки кривой Γ , обладающие свойством

$$|\lambda_{k-1} - \lambda_k| < \delta \quad (k=1, 2, \dots, m), \quad (12)$$

где

$$\delta = (\max_{\lambda \in \Gamma} |(x - \lambda e)^{-1}|)^{-1}. \quad (13)$$

Элемент $(x - \lambda_0 e)^{-1}$ по условию принадлежит кольцу R_1 и, следовательно, из соотношений (12), (13) вытекает, что ряд (11) сходится при $\lambda = \lambda_1$. Этот ряд определяет элемент $(x - \lambda_1 e)^{-1} \in R_1$. Отправляясь от элемента $(x - \lambda_1 e)^{-1}$, таким же образом доказываем, что

элемент $(x - \lambda_2 e)^{-1} \in R$. Продолжая рассуждения так далее, заключаем, что $(x - \lambda_m e)^{-1} = (x - \lambda e)^{-1} \in R_1$, т. е. $\lambda \in \rho(x; R_1)$.

Таким образом, $\rho_j(x, R) \subseteq \rho(x, R_1)$.

Если элемент $x \in R_1$, то, очевидно, $\rho_0(x, R) = \rho_0(x, R_1)$.

Предыдущими рассуждениями доказано следующее предложение

2⁰. Пусть R_1 — подкольцо нормированного кольца R и $x \in R$. Тогда спектр $\sigma(x; R_1)$ элемента x в R_1 состоит из спектра $\sigma(x)$ этого элемента во всем кольце R и, быть может, некоторых целых связных компонент $\rho_j(x, R)$ области $\rho(x) = \rho(x, R)$.

Если $x \in R_1$, то $\rho_0(x, R_1) = \rho_0(x, R)$.

2. Нам понадобится еще одно вспомогательное предложение.

3⁰. Пусть R ($e \in R$) нормированное кольцо и $R^{(1)}$ ($e \in R$) — коммутативное подкольцо R .

Если в $R_{n \times n}^{(1)}$ имеется плотное множество L для всех элементов, X которого:

$$\sigma(X, R_{n \times n}^{(1)}) = \sigma(X, R_{n \times n}),$$

то для любого $Z \in R_{n \times n}^{(1)}$

$$\sigma(Z; R_{n \times n}^{(1)}) = \sigma(Z, R_{n \times n}).$$

Обозначим через M бикомпакт максимальных идеалов кольца $R^{(1)}$. Каждой матрице $Z = \|Z_{jk}\|_1^n \in R_{n \times n}^{(1)}$ сопоставим матрицу-функцию $Z(M) = \|Z_{jk}(M)\|_1^n$ ($M \in M$). Очевидно, спектр $\sigma(Z, R_{n \times n}^{(1)})$ состоит из всех точек λ , для которых $\det(Z(M) - \lambda I) = 0$ хотя бы при одном $M \in M$.

Допустим, что для матрицы $Z \in R_{n \times n}^{(1)}$, имеющей обратную в $R_{n \times n}$, найдется идеал $M_0 \in M$ такой, что

$$\det Z(M_0) = 0.$$

Тогда найдется такое $\delta > 0$, что всякая матрица Z_1 , удовлетворяющая неравенству

$$|Z_1 - Z| < \delta, \quad (14)$$

также имеет обратную в $R_{n \times n}$.

Подберем матрицу $X \in L$ так, чтобы, во-первых, $|Z - X| < \delta/2$ и, во-вторых, в круге $|\lambda| < \delta/2$ находился по крайней мере один корень λ_1 уравнения $\det(X(M_0) - \lambda I) = 0$.

Тогда, с одной стороны, матрица $X_1 = X - \lambda_1 I$ будет удовлетворять условию (14) и, следовательно, будет иметь обратную в $R_{n \times n}$. С другой стороны, $\det X_1(M_0) = 0$. Последнее невозможно.

3. Для любого элемента x из нормированного кольца R через N_x обозначим множество всех целых чисел, использованных в качестве индексов для нумерации всех связных компонент $\rho_j(x; R)$ его области регулярности $\rho(x)$.

Пусть $x \in R$, N — произвольная часть N_x и λ_j — какие-либо числа из $\rho_j(x, R)$ ($j \in N$). Через $R(x, N)$ обозначим наименьшее подкольцо кольца R , содержащее все элементы $(x - \lambda_j e)^{-1}$ ($j \in N$). Кольцо $R(x, N_x)$ будем обозначать через $R(x)$.

Кольцо $R(x, N)$, очевидно, является замыканием линейной оболочки всех элементов вида $(x - \lambda_j e)^{-k}$ ($k=0, 1, \dots; j \in N$).

Заметим прежде всего, что коммутативное нормированное кольцо $R_1 = R(x, N)$ не зависит от выбора чисел λ_j в соответствующих компонентах $\rho_j(x, R)$ ($j \in N$).

В самом деле, согласно предложению 1° все компоненты $\rho_j(x; R) \subset \rho_j(x, R_1)$, а следовательно, элементы $(x - \lambda_j e)^{-1}$ принадлежат R_1 , каковы бы ни были точки $\lambda_j \in \rho_j(x, R)$ ($j \in N$). Пусть R'_1 — минимальное подкольцо R , содержащее элементы $(x - \lambda_j e)^{-1}$ ($j \in N$). Тогда $R'_1 \subset R_1$. Поменяв числа λ'_j и λ_j ролями, получим $R_1 \subset R'_1$. Таким образом, $R_1 = R'_1$.

Легко видеть, что если $0 \in N$, то в определении кольца $R(x, N)$ элемент $(x - \lambda_0 e)^{-1}$ можно заменить элементом x .

Теорема 3. Пусть $x \in R$. Тогда спектр элемента x подкольца $R_1 = R(x, N)$ состоит из объединения $\sigma(x)$ и всех компонент $\rho_j(x, R)$ ($j \in N_x, j \in N$).

Бикомпакт максимальных идеалов кольца R_1 гомеоморфен множеству $\sigma(x, R_1)$.

Если $N = N_x$, т. е. $\sigma(x, R) = \sigma(x, R_1)$, то и для любого элемента $z \in R_1$

$$\sigma(z, R_1) = \sigma(z, R). \quad (15)$$

Доказательство. Обозначим через $\hat{R}(x, N)$ линейную оболочку всех элементов $(x - \lambda_j e)^{-n}$ ($j \in N, n = 0, 1, \dots$). Каждому элементу вида

$$r = \sum_{j \in N; n} a_{jn} (x - \lambda_j e)^{-n} \quad (r \in \hat{R}_1 = \hat{R}(x, N)) \quad (16)$$

сопоставим рациональную функцию $r(\zeta)$, получаемую заменой в (16) элемента x аргументом ζ .

Пусть ζ — произвольная точка из $\sigma(x, R)$. Так как $\sigma(z, R) \subset \sigma(z, R_1)$ для любого $z \in R$, то найдется максимальный идеал M_ζ кольца R_1 такой, что $(x - \lambda_j e)^{-1} (M_\zeta) = (\zeta - \lambda_j)^{-1}$ ($j \in N$). Следовательно, для любого элемента $r \in \hat{R}_1$: $r(M_\zeta) = r(\zeta)$ ($\zeta \in \sigma(x, R)$). В частности, отсюда следует, что

$$|r(\zeta)| \leq |r| \quad (\zeta \in \sigma(x, R), r \in \hat{R}_1). \quad (17)$$

Последнее неравенство имеет место во всех точках ζ границ компонент $\rho_j(x, R)$ ($j \in \bar{N}$). Так как функция $r(\zeta)$ ($r \in \hat{R}_1$) голоморфна в каждой из компонент $\rho_j(x, R)$ ($j \in N$), то в силу принципа максимума модуля, неравенство (17) имеет место и для всех $\zeta \in \rho_j(x, R)$ ($j \in N$). Таким образом,

$$\max_{\zeta \in F} |r(\zeta)| \leq |r| \quad (r \in \hat{R}_1),$$

где $F = \sigma(x) \cup \bigcup_{j \in N} \rho_j(x, R)$.

Пусть z — произвольный элемент из R_1 и r_n ($n = 1, 2, \dots$) — последовательность элементов из \hat{R}_1 , стремящаяся к z . Тогда в силу (17) последовательность функции $r_n(\zeta)$ стремится равномерно на F к некоторой непрерывной функции, которую естественно обозначить

через $z(\zeta)$. Очевидно, функция $z(\zeta)$ не зависит от выбора последовательности $r_n \rightarrow z$ и $|z(\zeta)| < |z|$.

Кольцо R_1 изоморфно R -кольцу $K(F)$, состоящему из всех функций $z(\zeta)$ ($\zeta \in F; z \in R_1$) с определением нормы $\|z(\zeta)\| = |z|$.

Следовательно, бикомпакт максимальных идеалов кольца R_1 гомеоморфен множеству F . Каждый максимальный идеал M_ζ ($\zeta \in F$) кольца R_1 определяется равенством $M_\zeta = \{z \in R_1; z(\zeta_0) = 0\}$. Спектр $\sigma(x, R_1) = F$. В самом деле, элемент

$$x - \lambda e = (x - \mu e) (e - (\lambda - \mu) (x - \mu e)^{-1}),$$

$\mu \in F$ имеет обратный в R_1 в том и только том случае, когда

$$1 - (\lambda - \mu) (\zeta - \mu)^{-1} \neq 0 \quad (\zeta \in F).$$

Последнее условие эквивалентно условию $\lambda \neq \zeta$ ($\zeta \in F$).

Перейдем к доказательству последнего утверждения теоремы. Положим, что $N = N_x$. В этом случае $\sigma(x, R) = \sigma(x, R_1)$. В частности, отсюда следует, что элемент $x \in R_1$.

Как известно, если $z \in R$ и $F(\zeta)$ — функция, голоморфная в области, содержащей спектр элемента z , то для элемента $F(z) \in \hat{R}_1$

$$\sigma(F(z), R) = \{F(\zeta); \zeta \in \sigma(z, R)\}.$$

Следовательно, для любого элемента $r \in R_1$

$$\sigma(r, R_1) = \sigma(r, R) = \{r(\zeta); \zeta \in F\},$$

откуда в силу предложения 3° вытекает справедливость равенства (15) для всех $z \in R_1$.

Теорема доказана.

4. Пусть R — нормированное кольцо, $x \in R$ и $R^{(1)} = R(x)$.

Теорема 4. Для того чтобы матрица $Z = \|Z_{jk}\|_{j,k=1}^n \in R_{n \times n}^{(1)}$ имела обратную в $R_{n \times n}$, необходимо и достаточно, чтобы

$$\det Z(\zeta) \neq 0 \quad (\zeta \in \sigma(x)), \quad (18)$$

где $Z(\zeta) = \|Z_{jk}(\zeta)\|_{j,k=1}^n$.

Таким образом, спектры $\sigma(Z, R_{n \times n}^{(1)})$ и $\sigma(Z, R_{n \times n})$ совпадают и состоят из всех λ , для которых определитель $\det(Z(\zeta) - \lambda I)$ обращается в нуль хотя бы в одной точке $\zeta \in \sigma(x)$.

Доказательство. Условие (18) является достаточным для того, чтобы матрица Z имела обратную в $R_{n \times n}^{(1)}$, а тем более в $R_{n \times n}$.

Докажем, что условие (18) является необходимым. В силу предложения 3° это, очевидно, достаточно сделать для случая, когда

элементы матрицы Z принадлежат $\hat{R}^{(1)}$. В этом случае из теории полиномиальных λ -матриц следует, что матрицу Z можно представить в виде $Z = L_1 D L_2$, где $L_1, L_2 \in \hat{R}_{n \times n}^{(1)}$, причем $\det L_j(\zeta) = 1$ ($j = 1, 2; \zeta \in \sigma(x, R)$), а $D = \|d_j \delta_{jk}\|_{j,k=1}^n$ — диагональная матрица.

Так как $L_1^{-1}, L_2^{-1} \in R_{n \times n}^{(1)}$, то матрица D имеет обратную в $R_{n \times n}$. Следовательно, все элементы $d_j (j=1, 2, \dots, n)$ имеют обратные в R . Но тогда в силу теоремы 3 $d_j^{-1} \in R^{(1)}$.

Таким образом, $Z^{-1} \in R_{n \times n}^{(1)}$ и, стало быть, выполняется условие (18). Теорема доказана.

§ 3. Приложения к теории Φ -операторов

1. Пусть E — банахово пространство, R — кольцо линейных ограниченных операторов, действующих в E , и $R_V = R/V$, где V — идеал всех вполне непрерывных операторов из R . Если $X \in R$, то $\rho(\hat{X}, R_V)$ является Φ -областью оператора \hat{X} , а $\rho_j(\hat{X}, R_V)$ — ее связные компоненты*). Через $\hat{A}(\zeta)$ ($\zeta \in \sigma(\hat{X}, R_V)$) обозначим непрерывную функцию, отвечающую элементу $\hat{A} \in R_V(\hat{X})$ при гомоморфном отображении кольца $R_V(\hat{X})$ на кольцо непрерывных функций на бикомпакте максимальных идеалов кольца $R_V(\hat{X})$. Этот бикомпакт в рассматриваемом случае гомоморфен $\sigma(\hat{X}, R_V)$.

Теорема 5. Пусть X — произвольный оператор из R .

Для того чтобы оператор A из класса вычетов $\hat{A} \in R_V(\hat{X})$ был Φ -оператором, необходимо и достаточно, чтобы

$$\hat{A}(\zeta) \neq 0 \quad (\zeta \in \sigma(\hat{X}, R_V)). \quad (19)$$

Если условие (19) выполняется, то $\kappa(A) = \sum_j k_{j\kappa_j}(\hat{A}(\zeta))$, где $\{\kappa_j\}$ — базисная система стандартных и функционалов для $\sigma(\hat{X}, R_V)$, $\kappa(A)$ — индекс оператора A , а

$$k_j = \kappa(X - \lambda_j I) \quad (\lambda_j \in \rho_j(\hat{X}, R_V)). \quad (20)$$

Если спектр $\sigma(\hat{X}, R_V)$ не содержит ни одной Φ_{\pm} -точки оператора X , то в кольце $R_V(\hat{X})$ нет ни одного Φ_{\pm} -оператора.

Последнее утверждение теоремы, очевидно, будет иметь место, если $\sigma(\hat{X}, R_V)$ не имеет ни одной внутренней точки.

Доказательство. Первое утверждение теоремы является простым следствием теоремы 3. Индекс $\kappa(A) = \kappa(\hat{A})$ является и функционалом в кольце $R_V(\hat{X})$, следовательно, в силу теоремы 2,

*) В этом параграфе мы придерживаемся терминологии статьи [1]. Через \hat{X} обозначается класс вычетов из R_V , содержащий оператор X .

он допускает представление (19). Полагая в этом равенстве $A = X \lambda_j I$, где $\lambda_j \in \rho_j(\hat{X}, R_V)$, и учитывая, что

$$\kappa_j(\zeta - \lambda_j) = \delta_{jk} \quad (\zeta \in \sigma(\hat{X}, R_V)),$$

получим равенство (20).

Перейдем к доказательству последнего утверждения теоремы. Пусть $\hat{A} \in R_V(\hat{X})$ является Φ_{\pm} -оператором и пусть $\hat{B} \in R_V(\hat{X})$ — элемент, достаточно близкий к A . Тогда любой оператор из класса \hat{B} также является Φ_{\pm} -оператором. Очевидно, элемент \hat{B} можно представить в виде

$$\hat{B} = \prod_j (\hat{X} - \lambda_j I)^{-1} \prod_k (\hat{X} - \mu_k I),$$

где $\lambda_j \in \rho_j(\hat{X}, R_V)$, а μ_k — некоторые комплексные числа. Следовательно,

$$\prod_j (\hat{X} - \lambda_j I) \hat{B} = \prod_k (\hat{X} - \mu_k I)$$

и

$$\prod_j (X - \lambda_j I) B + T = \prod_k (X - \mu_k I), \quad (21)$$

где T — некоторый линейный вполне непрерывный оператор. Так как произведение Φ -оператора на Φ_{\pm} -оператор является Φ_{\pm} -оператором, то из (21) следует, что оператор

$$C = \prod_k (X - \mu_k I) \quad (22)$$

является Φ_{\pm} -оператором. Положим для определенности, что C является Φ_{\pm} -оператором.

Все операторы $X - \mu_k I$ коммутируют между собой, следовательно, числа $\alpha(X - \mu_k I)$ конечны. Отсюда и из (22) можно легко вывести, что все операторы $X - \mu_k I$ являются нормально разрешимыми.

Так как по условию операторы $X - \mu_k I$ не могут быть Φ_{\pm} -операторами, то числа*) $\beta(X - \mu_k I)$ также конечны и, стало быть, конечно число $\beta(C)$, что невозможно.

Аналогично проводится последний этап доказательства для случая, когда C является Φ_- -оператором.

Теорема доказана.

2. Через $E^{(n)}$ обозначим банахово пространство векторов $f = \{f_j\}_n^*$, с компонентами из E и с определением нормы

$$\|f\| = \sum_j |f_j|.$$

Всякий линейный ограниченный оператор A , действующий в $E^{(n)}$, естественным образом можно представить в виде матрицы $\|A_{jk}\|_{j,k=1}^n$ с элементами из R . Очевидно, кольцо всех линейных ограниченных операторов, действующих в $E^{(n)}$, совпадает с кольцом $R_{n \times n}$, идеал всех линейных вполне непрерывных операторов — с $V_{n \times n}$. Отметим еще, что $R_{n \times n}^{(V)} = R_{n \times n} / V_{n \times n} = (R_V)_{n \times n}$.

*) Через $\alpha(A)$ и $\beta(B)$ обозначаются, соответственно, размерности подпространственных решений уравнений $Ax = 0$ ($x \in E$), $A^*f = 0$ ($f \in E^*$), где $A \in R$.

Пусть $X \in R$. Тогда из коммутативности кольца $R_V(\hat{X})$ следует, что для любого элемента $\hat{A} \in [R_V(\hat{X})]_{n \times n}$ имеет смысл $\det \hat{A} \in R_V(\hat{X})$. Через $\det A$ будем обозначать один из операторов класса $\det \hat{A}$.

Теорема 6. Пусть X — произвольный оператор из R .

Для того чтобы оператор $A = \|A_{jk}\|_1$ из класса вычетов $\hat{A} \in [R_V(\hat{X})]_{n \times n}$ был Φ -оператором, необходимо и достаточно $\det \hat{A}(\zeta) = \det \| \hat{A}_{jk}(\zeta) \| \neq 0$ ($\zeta \in \sigma(\hat{X}, R_V)$).

(23)

Если условие (23) выполняется, то

$$\chi(A) = \chi(\det A).$$

Если спектр $\sigma(\hat{X}, R_V)$ не содержит ни одной Φ_{\pm} -точки оператора X , то в $[R_V(\hat{X})]_{n \times n}$ нет ни одного Φ_{\pm} -оператора.

Доказательство. Первые два утверждения теоремы вытекают из теоремы 4. Последнее утверждение легко доказывается с помощью приема, использованного в доказательстве предложения 3.

3. Пусть $E = H$ — гильбертово пространство и U — частично изометрический оператор, действующий в нем. Как известно, оператор U характеризуется следующими свойствами:

$$U^*U = P_1, UU^* = P_2, \quad (24)$$

где P_1 — ортогональный проектор, проектирующий H на U^*H , а P_2 — ортогональный проектор, проектирующий H на UH . В этом пункте будем предполагать, что числа $\alpha(U), \beta(U)$ конечны и $\chi(U) \neq 0$. В этом случае всюду в единичном круге $|\zeta| < 1$ оператор $U - \zeta I$ является Φ -оператором и $\chi(U - \zeta I) \neq 0$. В области $|\zeta| > 1$ оператор $U - \zeta I$ обратим.

Все точки единичной окружности не являются ни Φ -, ни Φ_{\pm} -точками оператора U .

В самом деле, допустим, что оператор $U - \zeta_0 I$ ($|\zeta_0| = 1$) является Φ - или Φ_{\pm} -оператором, тогда таковым будет и оператор $U - \zeta I$ для всех ζ из некоторой окрестности ζ_0 , причем во всех этих точках ζ функция $\chi(U - \zeta I)$ принимает одно и то же значение. Последнее невозможно.

Таким образом, $\sigma(\hat{U}, R_V) = \{\zeta; |\zeta| = 1\}$.

Каждому тригонометрическому полиному

$$p(\zeta) = \sum_j a_j \zeta^j \quad (|\zeta| = 1)$$

сопоставим оператор

$$p(U) = \sum_j a_j U^{(j)},$$

где

$$U^{(j)} = \begin{cases} U^j; & j = 0, 1, \dots, \\ (U^*)^{-j}; & j = -1, -2, \dots \end{cases}$$

Из (24) следует, что

$$\hat{U}\hat{U}^* = \hat{U}^*\hat{U} = \hat{I},$$

а следовательно,

$$(\hat{U})^{-1} = \hat{U}^*.$$

Таким образом, $\widehat{p(U)} = \sum_j a_j \hat{U}^j = p(\hat{U})$.

Для любого тригонометрического полинома $p(\zeta)$:

$$|p(U)| = |\widehat{p(U)}| = \max_{|\zeta|=1} |p(\zeta)|. \quad (25)$$

Как известно, в некотором расширении \tilde{H} пространства H существует унитарный оператор \tilde{U} такой, что

$$QU^n f = \tilde{U}^{(n)} f \quad (n = \pm 1, \pm 2, \dots; f \in H),$$

где Q — ортогональный проектор, проектирующий \tilde{H} на H . Тогда

$$Qp(\tilde{U})f = p(U)f \quad (f \in H),$$

и, стало быть,

$$|p(U)| \leq |p(\tilde{U})| \leq \max_{|\zeta|=1} |p(\zeta)|. \quad (26)$$

С другой стороны, $\sigma(\hat{U}) = \{\zeta; |\zeta| = 1\}$ и, следовательно,

$$|p(U)| \geq |\widehat{p(U)}| \geq \max_{|\zeta|=1} |p(\zeta)|. \quad (27)$$

Из (26) и (27) вытекает (25).

Пусть $a(\xi)$ ($|\xi| = 1$) — произвольная непрерывная функция и $p_n(\xi)$ ($|\xi| = 1$) — последовательность тригонометрических полиномов, равномерно стремящаяся к $a(\xi)$. Тогда последовательность операторов $p_n(U)$ стремится по норме к некоторому оператору, который обозначим $a(U)$. Очевидно, $a(U)$ не зависит от выбора последовательности $p_n(\zeta) \rightarrow a(\zeta)$. Аналогично можно определить $a(\hat{U})$. Легко видеть, что $a(\hat{U}) = a(\hat{U})$. Когда $a(\zeta)$ пробегает все кольцо непрерывных функций, то $a(\hat{U})$ пробегает все нормированное кольцо $R_V(\hat{U})$.

В качестве следствия из теоремы 3.1 получаем следующее предложение.

Теорема 7. Для того чтобы оператор $a(U)$ был Φ - или Φ_{\pm} -оператором, необходимо, чтобы

$$a(\zeta) \neq 0 \quad (|\zeta| = 1). \quad (28)$$

Если условие (28) выполняется, то $a(U)$ является Ф-оператором и

$$\chi(a(U)) = \frac{\chi(U)}{2\pi} [\arg a(e^{i\theta})]_{\theta=0}^{\theta=2\pi}.$$

Аналогичным образом формулируется теорема о матрицах с элементами вида $a(U)$.

Отметим также, что результаты этого пункта обобщаются на случай банахова пространства.

ЛИТЕРАТУРА

1. Гохберг И. Ц. и Крейн М. Г., Успехи математических наук, 12, в. 2, 1957.
2. Гохберг И. Ц., ДАН СССР, 145, № 5, 1962.
3. Гохберг И. Ц., ДАН СССР, 146, № 2, 1962.

И. Ц. ГОХБЕРГ

КУ ПРИВИРЕ ЛА РЕЗОЛВАБИЛИТАТЯ НОРМАЛЭ ШИ ИНДИЧЕЛЕ ФУНКЦИЕЙ ДЕ ОПЕРАТОР

Резумат

Ын артикол се експуне ун калкул операционал спечифик ын легэтурэ ку теория Ф-операторилор [1]. Се стабилеште (§ 3) критериул де апарцинере а уней функций де оператор класей де Ф-операторь ши се дедуче формула пентру индичеле функций де оператор.

Демонстрэриле сынт базате пе унеле афирмаций але теорией инелелор нормате, че сынт експусе ын §§ 1,2.

Е. А. ПАВЛОВА

О НЕКОТОРЫХ КЛАССАХ ГИПЕРИММУННЫХ МНОЖЕСТВ

Настоящая заметка примыкает к [1, 2]. В ней вводятся и изучаются несколько классов гипериммунных множеств¹⁾, пользуясь понятием густоты подмножества натурального ряда. Большая часть результатов этой заметки анонсирована в [3].

Все рассматриваемые ниже множества предполагаются подмножествами натурального ряда $\{0, 1, 2, \dots, n, \dots\}$, который мы обозначим буквой N . Малыми латинскими буквами будем обозначать переменные с областью изменения N . Например, $\exists k \forall n (\dots)$ означает: „существует такое $k \in N$, что для всякого $n \in N$ имеет место...“. Буквами $\theta, \varphi, \psi, \lambda, \kappa$ будем обозначать только обще-рекурсивные функции. Выражения $\exists \theta(\dots)$ и $\forall \theta(\dots)$ означают: „существует обще-рекурсивная функция θ такая, что...“ и „Для всякой обще-рекурсивной θ ...“ соответственно.

Определение 1. Множество $E_1 \subseteq N$ больше или равно по густоте²⁾ чем множество $E_2 \subseteq N$ (пишем $E_1 \leq E_2$), если $\exists \forall n (E_1(n) \leq E_2(\theta(n)))$,³⁾ где $E(n)$ метахарактеристическая функция множества E , определяемая следующим образом: $E(0) = 0$; $E(n)$ при $n > 0$ есть число точек множества $E \cap \{0, 1, 2, \dots, n-1\}$.

Если $E \leq E_2$ и $E_2 \leq E_1$, то говорим, что множества E_1 и E_2 равны по густоте (пишем $E_1 \hat{=} E_2$). Густоты определяются как классы эквивалентности по отношению „ $\hat{=}$ “.

Определение 2. Переходной функцией множества E называется функция ρ такая, что $\rho(n) = \mu k (k > n \ \& \ k \in E)$ ⁴⁾.

Определение 3. Будем говорить, что функция f обгоняет функцию g на множестве E ⁵⁾, если $\exists k \forall n (n \in E \ \& \ n \geq k \rightarrow f(n) > g(n))$.

Определение 4. Бесконечное множество E называется разреженным, если его переходная функция обгоняет на множестве E всякую обще-рекурсивную функцию.

Легко убедиться в том, что всякое бесконечное множество имеет разреженное подмножество. В самом деле, рассмотрим некоторую функцию ρ , обгоняющую все обще-рекурсивные функции и такую,

¹⁾ Определение гипериммунного множества см., например, в [4], стр. 289.

²⁾ Это отношение между множествами было введено в [5].

³⁾ Очевидно, функцию θ всегда можно дополнительно предполагать неубывающей или возрастающей.

⁴⁾ $\mu k (\dots)$ означает оператор: «Наименьшее число k такое, что...».

⁵⁾ Если $E = N$, то будем говорить, что f обгоняет g .

что $\rho(n) > n$. Пусть E — данное бесконечное множество и $a_0 \in E$. Элементы искомого подмножества E_1 множества E строим следующим образом:

$$\begin{cases} a_0 \in E_1 \\ a_{i+1} \in E_1 \text{ экв. } a_{i+1} = \mu n (n \in E \ \& \ n \geq \rho(a_i)). \end{cases}$$

Обозначим через ρ' переходную функцию множества E_1 . Тогда $\forall n (n \in E_1 \rightarrow \rho(n) \leq \rho'(n))$, и поэтому E_1 является разреженным множеством.

Из определения разреженного множества непосредственно следует

Лемма 1. Бесконечное подмножество разреженного множества является разреженным множеством.

Лемма 2. Если множества E_1 и E_2 равны по густоте, а их симметрическая разность бесконечна, то $E_1 \cup E_2$ не является разреженным множеством¹⁾.

Доказательство. Так как E_1 и E_2 равны по густоте, то существует такое взаимно-однозначное отображение f множества E_1 на множество E_2 , что f и обратное к нему отображение f^{-1} мажорируются на своих областях определения некоторыми обще-рекурсивными функциями²⁾. Определим функцию f^* следующим образом:

$$f^*(n) = \begin{cases} \max (f(n), f^{-1}(n)), & \text{если } f(n) \text{ опред. и } f^{-1}(n) \text{ опред.} \\ f(n) & \text{, если } f(n) \text{ опред. и } f^{-1}(n) \text{ не опред.} \\ f^{-1}(n) & \text{, если } f(n) \text{ не опред. и } f^{-1}(n) \text{ опред.} \\ \text{не опред.} & \text{, если } f(n) \text{ не опред. и } f^{-1}(n) \text{ не опред.} \end{cases}$$

Множество $E_1 \cup E_2$ является, очевидно, областью определения функции f^* . Отметим, что функция f^* мажорируется на $E_1 \cup E_2$ некоторой обще-рекурсивной функцией θ , а также что

$$\forall n (f^*(n) \in E_1 \cup E_2). \quad (1)$$

Так как симметрическая разность E и E_2 бесконечна, то $\exists^\infty n (f^*(n) \neq n)$, т. е. $\exists^\infty n (f^*(n) > n) \ \forall \exists^\infty n (f^*(n) < n)$.

Докажем, что $\exists^\infty n (f^*(n) < n) \rightarrow \exists^\infty k (f^*(k) > k)$. Из определения функции f^* следует, что $\forall m (f^*(f^*(m)) \geq m)$. Пусть m — такое число, что $f^*(m) < m$. Тогда

$$f^*(f^*(m)) > f^*(m). \quad (2)$$

Убедимся в том, что существует бесконечно много таких $f^*(m)$, для которых имеет место соотношение (2). Для этого достаточно показать, что для трех различных элементов m_1, m_2 и m_3 множества $E_1 \cup E_2$ не могут одновременно выполняться соотношения $f^*(m_1) = f^*(m_2) = f^*(m_3)$, а это утверждение вытекает из определе-

¹⁾ Однако симметрическая разность двух равных по густоте множеств E_1 и E_2 (т. е. $(E_1 \setminus E_2) \cup (E_2 \setminus E_1)$) может оказаться хотя и бесконечной, но не разреженной. Например, если в качестве E_1 взять натуральный ряд, а в качестве E_2 — дополнение к разреженному множеству, то симметрическая разность множеств E_1 и E_2 совпадает с E_2 , т. е. не является разреженным множеством.

²⁾ См. [3].

³⁾ $\exists^\infty n (\dots)$ означает: «существует бесконечно много таких n , что...».

ния функции f^* и взаимной однозначности отображения f и f^{-1} . Таким образом,

$$\exists^\infty n (f^*(n) > n). \quad (3)$$

Переходная функция ρ^* множества $E_1 \cup E_2$ определяется равенством $\rho^*(n) = \mu l (l > n \text{ \& } l \in E_1 \cup E_2)$; поэтому, в силу (1) и (3), $\exists^\infty n (f^*(n) > \rho^*(n) \text{ \& } n \in E_1 \cup E_2)$. А так как θ мажорирует f^* на области ее определения, то $\exists^\infty n (\theta(n) \geq \rho^*(n) \text{ \& } n \in E_1 \cup E_2)$. Последнее соотношение и доказывает лемму.

Теорема 1. Для того чтобы бесконечное множество являлось разреженным, необходимо и достаточно, чтобы всякие его два подмножества, симметрическая разность которых бесконечна, имели различные густоты.

Необходимость. Допустим, что E_1 и E_2 — такие два подмножества разреженного множества E , что их симметрическая разность бесконечна, но E_1 и E_2 равны по густоте. Тогда в силу леммы 2 множество $E_1 \cup E_2$ не является разреженным, что противоречит лемме 1.

Достаточность. Предположим, что множество E не является разреженным, т. е. существует возрастающая обще-рекурсивная функция θ такая, что $\exists^\infty n (\theta(n) \geq \rho(n) \text{ \& } n \in E)$, где ρ — переходная функция множества E . Пусть

$$E^* = \mathcal{E}\{n \in N \mid n \in E \text{ \& } \theta(n) \geq \rho(n)\}^1.$$

Введем в рассмотрение следующие подмножества множества E :

$$E_1 = \mathcal{E}\{n \in N \mid n \in E \text{ \& } E^*(n) \text{ — четное}\},$$

$$E_2 = \mathcal{E}\{n \in N \mid \exists m (m < n \text{ \& } m \in E_1 \text{ \& } n = \rho(m))\}.$$

Легко заметить, что E_1 и E_2 являются бесконечными непересекающимися множествами, поэтому их симметрическая разность бесконечна. Из определения множества E_2 следует, что $\forall n (E_2(n) \leq E_1(n))$, поэтому

$$E_2 \leq E_1. \quad (4)$$

С другой стороны,

$$\forall n (n \in E_1 \rightarrow E_1(n+1) = E_2(\rho(n)+1)). \quad (5)$$

Через $\varphi(n)$ обозначим наибольшее t , удовлетворяющее условию $t < n \text{ \& } t \in E_1$. Тогда в силу (5)

$$E_1(n) = E_1(\varphi(n)+1) = E_2(\rho(\varphi(n))+1), \quad (6)$$

а так как $\varphi(n) \in E^*$ и θ — возрастающая функция, то

$$E_2(\rho(\varphi(n))+1) \leq E_2(\theta(\varphi(n))+1) \leq E_2(\theta(n)+1). \quad (7)$$

Пусть $a = \mu t (t \in E_1)$, тогда, сопоставляя (6) и (7), получим,

$$\forall n (E_2(n) \leq E(n+a+1) \leq E_2(\theta(n+a+1)+1)).$$

Таким образом, существует обще-рекурсивная функция $\psi(n) = \theta(n+a+1)+1$ такая, что $\forall n (E_2(\psi(n)) \geq E_1(n))$, следовательно,

$$E_1 \leq E_2. \quad (8)$$

¹⁾ $\mathcal{E}\{n \in N \mid \dots\}$ — означает: «Множество тех натуральных чисел, для которых...».

Из соотношений (4) и (8) следует, что $E_1 \hat{=} E_2$, а это противоречит условию теоремы.

Следствие. У всякого разреженного множества существует континуум его подмножеств, попарно различных по густоте.

Это утверждение вытекает из теоремы, если учесть, что для любого счетного множества существует континуум его подмножеств, таких, что любые два из них имеют бесконечную симметрическую разность.

Определение 5. Множество E называется *слаборазреженным*, если его прямой пересчет¹⁾ σ обгоняет всякую обще-рекурсивную функцию, т. е. $\forall \theta \exists k \forall n [n \geq k \rightarrow \sigma(n) > \theta(n)]$.

Сформулируем и докажем ряд предложений, характеризующих некоторые свойства слаборазреженных и разреженных множеств.

1°. Всякое слаборазреженное множество является гипериммунным. Другими словами, $\forall \psi \exists n (\sigma(n) > \psi(n))$, где σ — прямой пересчет рассматриваемого слаборазреженного множества.

Это утверждение вытекает из одного результата В. А. Успенского (см. [6] или [4], стр. 290).

2°. Всякое бесконечное подмножество слаборазреженного множества является слаборазреженным.

Действительно, пусть E — слаборазреженное множество, $E_1 \subseteq E$, а σ_1 и σ — прямые пересчеты множеств E_1 и E соответственно. Из определения слаборазреженного множества и очевидного соотношения $\forall n (\sigma(n) < \sigma_1(n))$ следует $\forall \theta \exists k \forall n [n \geq k \rightarrow \sigma_1(n) > \theta(n)]$, что свидетельствует о слаборазреженности множества E_1 .

3°. Всякое разреженное множество является слаборазреженным множеством.

Обозначим через ρ и σ , соответственно, переходную функцию и прямой пересчет разреженного множества E . Для доказательства предложения 3° достаточно показать, что функция σ обгоняет всякую обще-рекурсивную функцию. Допустим, что σ обгоняет не всякую обще-рекурсивную функцию, т. е. $\exists \theta \exists^\infty n [\sigma(n+1) \leq \theta(n+1)]$. Обще-рекурсивную функцию θ можно считать неубывающей (ибо в противном случае мы вместо нее могли бы взять обще-рекурсивную

функцию $\theta^*(n) = \sum_{i=0}^n \theta(i)$). Так как $\forall n (\sigma(n+1) = \rho(\sigma(n)))$ и $\exists k \forall n (n \geq k \rightarrow n+1 \leq \sigma(n))$, то из принятого допущения следует, что $\exists^\infty n (\rho(\sigma(n)) \leq \theta(\sigma(n)))$. А так как $\forall n (\sigma(n) \in E)$, то имеет место соотношение $\exists \theta \exists^\infty n (n \in E \text{ \& } \rho(n) \leq \theta(n))$, которое противоречит разреженности множества E .

4°. Объединение двух слаборазреженных множеств есть слаборазреженное множество.

Это предложение непосредственно вытекает из определения слаборазреженного множества.

5°. Существует слаборазреженное множество, не являющееся разреженным.

В самом деле, пусть E_1 — некоторое разреженное множество, не содержащее число 0, а σ — прямой пересчет этого множества. Рас-

¹⁾ Определение прямого пересчета см., например, в [4], стр. 117.

смотрим множество $E_2 = \{\sigma(0)-1, \sigma(2)-1, \dots, \sigma(n)-1, \dots\}$. Нетрудно заметить, что это множество также является разреженным. В силу предложений 3° и 4° множество $E = E_1 \cup E_2$ является слабо-разреженным, но не разреженным множеством, так как его переходная функция ρ не обгоняет уже обще-рекурсивную функцию $u = n+1$.

6°. Существуют гипериммунные множества, не являющиеся слаборазреженными.

Таковыми являются, например, взаимно-дополнительные гипериммунные множества (существование таких множеств доказано в [1]).

Теорема 2. Объединение слаборазреженного и гипериммунного множества является гипериммунным множеством.

Доказательство. Обозначим через σ_1 прямой пересчет слаборазреженного множества E_1 , через σ_2 — прямой пересчет гипериммунного множества E_2 и через σ — прямой пересчет их объединения. По условию

$$\forall \theta \exists k \forall n (n \geq k \rightarrow \sigma_1(n) > \theta(n)) \quad (9)$$

$$\text{и} \quad \forall \psi \exists n (\sigma_2(n) > \psi(n)). \quad (10)$$

Из последнего соотношения следует, что $\forall \theta \exists m \exists n (n > m \& \sigma_2(n) > \theta(n))$. Сравнив полученное соотношение и соотношение (1), приходим к выводу, что $\forall \theta \exists n (\sigma_1(n) > \theta(n) \& \sigma_2(n) > \theta(n))$. А так как $\forall n (\sigma(2n) > \sigma_1(n) \vee \sigma(2n) > \sigma_2(n))$, то $\forall \theta \exists n (\sigma(2n) > \theta(n))$ и, следовательно, $\forall \varphi \exists n (\sigma(2n) > \varphi(2n))$. Стало быть, $\forall \varphi \exists n (\sigma(n) > \varphi(n))$, что означает гипериммунность множества E .

Определение 6. Множество E называется *моногопериммунным*, если для всякого гипериммунного множества E_1 множество $E \cup E_1$ также является гипериммунным множеством.

Очевидно, что всякое слаборазреженное множество является моногопериммунным множеством.

Нетрудно показать, что дополнение к гиперпростому¹⁾ множеству является моногопериммунным множеством.

Из следующих двух утверждений вытекает, что свойства быть разреженным или слаборазреженным множеством являются по существу не свойствами множеств, а свойствами самих густот, что позволяет естественным образом ввести понятия слаборазреженной и разреженной густоты.

7°. Множество, равное по густоте разреженному множеству, является разреженным.

Пусть $E_2 \hat{=} E_1$ и E_1 — разреженное множество. Допустим, что F_2 не является разреженным множеством. Тогда существует неубывающая обще-рекурсивная функция θ такая, что $\exists^n n (n \in E_2 \& \theta(n) \geq \rho_2(n))$, где ρ_2 — переходная функция множества E_2 . Если обозначить через σ_1 и σ_2 прямые пересчеты множеств E_1 и E_2 соответственно, то предыдущее соотношение переписывается в виде

$$\exists^n l (\theta(\sigma_2(l)) \geq \rho_2(\sigma_2(l))). \quad (11)$$

Так как $E_2(\sigma_2(l)) = E_1(\sigma_1(l))$ и $E_1 \hat{=} E_2$, то существуют такие обще-рекурсивные функции ψ и χ , что $\forall l (\psi(\sigma_1(l)) \geq \sigma_2(l))$ и

$\forall l (\chi(\sigma_2(l)) \geq \sigma_1(l))$. Сопоставляя эти соотношения и соотношение (11), приходим к соотношению

$$\exists^n l (\rho_2(\sigma_2(l)) \leq \theta(\psi(\sigma_1(l)))). \quad (12)$$

С другой стороны, $\forall l (E_1(\chi(\rho_2(\sigma_2(l)))) \geq E_2(\rho_2(\sigma_2(l))) = E_2(\sigma_2(l+1))) = E_1(\sigma_1(l+1)) = E_1(\rho_1(\sigma_1(l)))$,

где ρ_1 — переходная функция множества E_1 ; следовательно,

$$\forall l (\rho_1(\sigma_1(l)) \leq \chi(\rho_2(\sigma_2(l)))). \quad (13)$$

Сопоставляя соотношения (12) и (13), получим $\exists^n l (\rho(\sigma_1(l)) \leq \chi(\rho_2(\sigma_2(l))) \leq \chi(\theta(\psi(\sigma_1(l))))$, т. е. $\exists^n k (k \in E \& \rho_1(k) \leq \chi(k))$, где χ — обще-рекурсивная функция, задаваемая равенством $\chi(n) = \chi(\theta(\psi(n)))$. Полученное соотношение противоречит разреженности множества E_1 .

8°. Если E_1 — слаборазреженное множество, то всякое бесконечное множество E_2 такое, что $E_2 \leq E_1$, является слаборазреженным.

По условию $E_2 \leq E_1$, т. е. $\exists \chi \forall n (E_2(n) \leq E_1(\chi(n)))$. Допустим, что $\exists \theta \exists^n n (\sigma_2(n) \leq \theta(n))$, где $\sigma_2(n)$ — прямой пересчет множества E_2 , тогда $\exists^n n (E_1(\chi(\theta(n))) \geq E_2(\theta(n)) \geq E_2(\sigma_2(n)) = E_1(\sigma_1(n)))$. Следовательно, $\exists^n n (\chi(n) \geq \sigma_1(n))$, где χ обще-рекурсивная функция, определяемая равенством $\chi(n) = \chi(\theta(n))$. Это противоречит слаборазреженности множества E_1 .

Замечание. Из того, что E_1 — разреженное множество, а E_2 — бесконечное множество, меньшее по густоте, чем множество E_1 , вообще говоря, не следует, что E_2 разреженное множество. Например, если $n < n_2 < n_3 < \dots$ и множество $E_1 = \{n_1, n_2, \dots, n_k, \dots\}$ является разреженным, то бесконечное множество $E_2 = \{n_2-1, n_2, n_4-1, n_4, \dots\}$, меньшее по густоте, чем множество E_1 , не является разреженным, хотя и является слаборазреженным множеством.

Определение 7. Множество называется *дигипериммунным*, если оно само и его дополнение являются гипериммунными множествами.

Очевидно, что множества, рассматриваемые в теореме 1 [1], являются таковыми.

Нетрудно убедиться также в справедливости следующих предложений:

9°. Гипериммунное множество, имеющее дигипериммунное подмножество, само является дигипериммунным множеством.

10°. Если множества E_1 и E_2 гипериммунны и $E_1 \cup E_2 = N$, то каждое из этих множеств является дигипериммунным множеством.

11°. Множество точек, в которых метакarakterистическая функция разреженного множества принимает четные значения¹⁾, является дигипериммунным множеством.

¹⁾ Выбор четности значений метакarakterистической функции множества здесь не по существу. Требование четности можно заменить нечетностью или делимостью на три и т. п.

¹⁾ Определение гиперпростого множества см., например, в [4], стр. 290.

ЛИТЕРАТУРА

1. Павлова Е. А. Известия Молдавского филиала АН СССР, № 10 (76) (1960), 31—38.
2. Павлова Е. А. Известия Академии наук Молдавской ССР, № 10 (88) (1961), 10—15.
3. Павлова Е. А. ДАН СССР, 139, № 4, (1961), 814—817.
4. Успенский В. А. Лекции о вычислимых функциях, М., 1960.
5. Медведев Ю. Т. ДАН СССР, 102, № 2 (1955), 211—214.
6. Успенский В. А. Zeitschr. f. math. Logic und Grundlagen d. Math., 3 (1957), 157—170.

Работа была выполнена под руководством А. В. Кузнецова, которому автор приносит искреннюю благодарность за ценные советы и указания.

Е. А. ПАВЛОВА

КУ ПРИВИРЕ ЛА УНЕЛЕ КЛАСЕ ДЕ МУЛЦИМЬ ХИПЕРИМУНЕ

Резумат

Се студиязэ кытева класе де мулцимь (ши ануме: мулцимиле рэрите, слабрэрите, монохиперимуне ши дихиперимуне), фолосинд ноциуня де денситате а мулцимий. Се анализазэ ынсушириле ачестор мулцимь ши се стабилеск легэтуриле динтре еле.

Резултатул есенциал ал ачестуй артикол есте дат ын теорема 1.

Ю. М. РЯБУХИН

О ВЛОЖЕНИЯХ РАДИКАЛОВ

Введение.

В работах [1—3] развивалась общая теория радикалов колец, преимущественно ассоциативных. Мы будем рассматривать только ассоциативные кольца. Напомним некоторые определения и результаты, необходимые для дальнейшего.

Пусть σ — произвольное свойство колец. Рассмотрим класс всех колец, обладающих свойством σ , т. е. класс всех σ -колец. Если σ -кольцо B является идеалом кольца K , то кольцо B называется σ -идеалом кольца K . Через $\sigma(K)$ будем обозначать сумму всех σ -идеалов кольца K .

Скажем, что определен радикал σ в смысле А. Г. Куроша, или, короче, *общий радикал* σ , если и только если свойство σ удовлетворяет следующим требованиям [3]: —

- I. 1. Всякий гомоморфный образ σ -кольца есть σ -кольцо;
- I. 2. Для любого кольца K $\sigma(K)$ есть σ -идеал в K ;
- I. 3. Для любого кольца K $\sigma(K/\sigma(K)) = 0$.

Если определен общий радикал σ , то σ -кольца называются σ -радикальными кольцами, кольца без ненулевых σ -идеалов — σ -полупростыми кольцами. Для любого кольца K , в этом случае, σ -идеал $\sigma(K)$ называется σ -радикалом кольца K .

Если свойство σ удовлетворяет требованиям I. 1, I. 2, то условие I. 3 эквивалентно следующему требованию: I'. 3. Всякое расширение σ -кольца с помощью σ -кольца есть σ -кольцо, т. е. если кольца $K = K/V$ и V являются σ -кольцами, то и само кольцо K является σ -кольцом.

Если свойство σ удовлетворяет требованию I. 1, то требования I. 2 и I. 3, вместе взятые, эквивалентны требованию I'. 2. Если любой ненулевой гомоморфный образ кольца K содержит в качестве ненулевого идеала некоторое σ -кольцо, то само кольцо K является σ -кольцом.

В дальнейшем под радикалом мы всегда будем понимать некоторый общий радикал. Пример общего радикала будет дан в § 2. Пусть M — произвольный класс колец, удовлетворяющий следующему требованию:

II. 1. Всякий ненулевой идеал кольца из M гомоморфно отображается на некоторое ненулевое кольцо из класса M .

Назовем кольцо K S_M -кольцом, если и только если оно не отображается гомоморфно на ненулевые кольца из класса M . Легко

проверить, что свойство S_M удовлетворяет требованиям I. 1, I'. 2, и потому определен радикал S_M — *верхний радикал* ⁽³⁾; определяемый классом колец M . Очевидно, что всякий общий радикал R является верхним радикалом, определяемым классом всех R -полупростых колец.

В множестве всех общих радикалов введем отношение частичной упорядоченности, положив по определению $R_1 \geq R_2$, где R_1 и R_2 являются общими радикалами тогда и только тогда, когда $R_1(A) \supseteq R_2(A)$ для любого кольца A . Естественно считать, что $R = R_2$, если и только если $R_1(A) = R_2(A)$ для любого кольца A . Наконец полагаем $R_1 > R_2$, если $R_1 \geq R_2$, но $R_1 \neq R_2$.

Если класс колец M обладает свойством II. 1, то верхний радикал S_M является наибольшим среди всех таких радикалов R , что все кольца класса M R -полупросты. Легко видеть, что $R_1 \geq R_2$ тогда и только тогда, когда всякое R_2 -радикальное кольцо является и R_1 -радикальным. Поэтому, если классы M_1 и M_2 обладают свойством II. 1, причем $M_1 \subseteq M_2$, то $S_{M_1} \geq S_{M_2}$.

Наконец напомним, что радикал R называется *наследственным*, если всякий идеал R -радикального кольца является R -радикальным кольцом.

§ 1. Среди общих радикалов наиболее удобны для изучения наследственные радикалы. Так, например, в работе [1] доказано, что радикал R (в классе всех ассоциативных колец) является наследственным тогда и только тогда, когда для любого кольца K и для любого идеала B из K справедливо равенство $R(B) = R(K) \cap B$. Поэтому для любого общего радикала мы будем искать наиболее близкие к нему, в некотором смысле, наследственные радикалы.

Дадим сначала такое

Определение. Пусть δ — произвольное свойство колец. Наследственный радикал S_δ^0 назовем *нижним наследственным радикалом относительно свойства δ* , если и только если S_δ^0 является наименьшим среди всех таких наследственных радикалов R , что все δ -кольца R -радикальны. Наследственный радикал S_δ^1 назовем *верхним наследственным радикалом относительно свойства δ* , если и только если S_δ^1 является наибольшим среди всех таких наследственных радикалов R , что все R -радикальные кольца являются δ -кольцами.

Теорема. Для произвольного свойства δ -колец нижний наследственный радикал S_δ^0 существует. Если свойство δ удовлетворяет условию I'. 2, то существует и верхний наследственный радикал S_δ^1 . Для произвольного свойства δ -колец, в множестве всех таких наследственных радикалов R , что все δ -кольца R -полупросты, существует наибольший радикал S_δ^1 .

Доказательство. Построим сначала радикалы S_δ^0 и S_δ^1 . Радикал S_δ^0 построим с помощью радикала S_δ^1 .

1) Пусть δ — произвольное свойство колец. В качестве первого члена трансфинитной цепочки классов N_α возьмем $N_0 = \{B | \bar{B} \text{ — гомоморфный образ идеала некоторого } \delta\text{-кольца}\}$.

Допустим, что для всех $\beta < \alpha$ мы уже построили классы N_β . Если α — предельное, то полагаем $N_\alpha = \bigcup_{\beta < \alpha} N_\beta$. Если α не предельное, т. е. $\alpha - 1$ существует, то строим сначала класс $N'_\alpha = \{K\}$. Любой

ненулевой гомоморфный образ кольца K содержит в качестве идеала некоторое ненулевое кольцо из класса $N_{\alpha-1}$, а затем полагаем $N_\alpha = \{B \mid B\text{-гомоморфный образ идеала некоторого кольца из класса } N_\beta\}$.

По трансфинитной индукции нами построена возрастающая цепочка классов колец $N_0 \subseteq N_1 \subseteq \dots \subseteq N_\beta \subseteq N_{\beta+1} \subseteq \dots$.

На некотором α эта цепочка должна стабилизироваться. Пусть она стабилизируется при $\alpha = \tau$. Обозначим $N_\tau = N'_{\tau+1} = N_{\tau+1}$ через N^δ .

Пусть кольцо $K \in N^\delta$. Так как $N^\delta = N'_{\tau+1}$, то, в силу построения класса $N_{\tau+1}$, всякий гомоморфный образ и всякий идеал кольца K принадлежат классу $N_{\tau+1} = N^\delta$. Таким образом, класс колец N^δ обладает свойствами 1.1 и 1.4: всякий идеал кольца из N^δ принадлежит классу N^δ .

Пусть любой ненулевой гомоморфный образ кольца K содержит в качестве идеала некоторое ненулевое кольцо из класса N^δ . Так как $N^\delta = N_\tau$, то в силу построения класса $N'_{\tau+1}$, $K \in N'_{\tau+1} = N_{\tau+1} = N^\delta$. Следовательно, класс N^δ обладает свойством 1.2.

Таким образом, свойство R^δ кольца принадлежать классу N^δ удовлетворяет требованиям 1.1, 1.2 и потому нами определен радикал R^δ . Так как свойство R^δ наследственно: всякий идеал кольца из N^δ принадлежит классу N^δ , — то радикал R^δ является наследственным радикалом. Так как все δ -кольца содержатся в классе N^δ , то все δ -кольца R^δ -радикальны.

Пусть R — любой наследственный радикал, такой, что все δ -кольца R -радикальны. Обозначим через N класс всех R -радикальных колец. В силу наследственности радикала R и условия 1.1 получаем, в таком случае, что $N \supseteq N_0$.

Допустим, что для всех $\beta < \alpha$ мы уже доказали, что $N \supseteq N_\beta$. Если α — предельное, то, очевидно, $N \supseteq N_\alpha = \bigcup_{\beta < \alpha} N_\beta$. Пусть $\alpha - 1$ существует. В силу индуктивного предположения, $N \supseteq N_{\alpha-1}$. Так как класс N обладает свойством 1.2, то $N \supseteq N'_\alpha$. В силу наследственности радикала R и $N_\alpha \subseteq N$. Методом трансфинитной индукции доказано, что $N \supseteq N_\alpha$ для всех α . В частности, $N \supseteq N_\tau = N^\delta$. Но это и означает, что $R \supseteq R^\delta$. Таким образом, R^δ является наименьшим среди всех таких наследственных радикалов R , что все δ -кольца R -радикальны. Но это и означает, в силу определения 1, что $R^\delta = S^\delta$ — нижний наследственный радикал относительно свойства δ .

2) Введем сначала такое обозначение. Если M — произвольный класс колец, то скажем, что кольцо K принадлежит классу M^δ , если и только если $K = 0$ или существуют такие кольца A, B, B^δ, T , что выполнены требования: а) T — идеал кольца B , B — идеал кольца A ; б) B/T — ненулевое кольцо из класса M ; в) T не содержит ни одного ненулевого идеала из A ; г) B^δ — максимальный* в множестве всех идеалов кольца A , имеющих нулевое пересечение с B ; д) K есть фактор-кольцо кольца A по идеалу B^δ .

Заметим, что для любого класса колец M класс $M^\delta \supseteq M$. Действительно, если $K = 0$, то, в силу определения, $K \in M^\delta$. Если же $K \neq 0$ и $K \in M$, то возьмем $A = B = K$, $T = 0$. Тогда $B^\delta = 0$, $B/T = B \in M$, $K = A/B^\delta$, единственным идеалом из A , содержащимся в T , является нулевой идеал. Но это и означает, что $K \in M^\delta$. В силу

произвольности выбора кольца K класс колец M^δ содержит класс колец M .

Теперь мы можем осуществить следующее построение по трансфинитной индукции. В качестве первого члена трансфинитной цепочки классов колец Π_α возьмем класс колец $\Pi_0 = \{B \mid B\text{-идеал некоторого } \delta\text{-кольца}\}$.

Допустим, что для всех $\beta < \alpha$ мы уже построили классы Π_β . Если α — предельное, то полагаем $\Pi_\alpha = \bigcup_{\beta < \alpha} \Pi_\beta$. Если α не предельное, т. е. $\alpha - 1$ существует, то строим сначала класс $\Pi_{\alpha-1}$, а затем полагаем

$$\Pi_\alpha = \{B \mid B\text{-идеал некоторого кольца из } \Pi_{\alpha-1}\}.$$

По трансфинитной индукции нами построена возрастающая цепочка классов колец $\Pi_0 \subseteq \Pi_1 \subseteq \dots \subseteq \Pi_\beta \subseteq \Pi_{\beta+1} \subseteq \dots$.

На некотором α эта цепочка стабилизируется. Пусть она стабилизируется при $\alpha = \tau$. Обозначим $\Pi_\tau = \Pi^\delta = \Pi_{\tau+1}$ через Π_δ .

Пусть кольцо $K \in \Pi_\delta$. Так как $\Pi_\delta = \Pi^\delta$, то, в силу построения класса $\Pi_{\tau+1}$, любой идеал кольца K принадлежит классу $\Pi_{\tau+1} = \Pi_\delta$. Таким образом, всякий идеал кольца из Π_δ принадлежит классу Π_δ . Следовательно, класс Π_δ определяет некоторый верхний радикал R_δ . Так как все δ -кольца принадлежат классу Π_δ , то все δ -кольца R_δ -полупросты.

Пусть идеал B кольца K отображается гомоморфно на ненулевое кольцо из класса Π_δ , т. е. существует такой идеал T кольца B , что $T \subseteq B$ и фактор-кольцо $B/T \in \Pi_\delta$. Обозначим через S_T сумму всех идеалов кольца K , содержащихся в T . Рассмотрим фактор-кольцо $\bar{K} = K/S_T$. Кольцо \bar{K} содержит в качестве идеала кольцо $\bar{B} = B/S_T$, а кольцо B содержит в качестве идеала кольцо $\bar{T} = T/S_T$. Легко видеть, что кольцо \bar{T} не содержит ненулевых идеалов кольца \bar{K} . Обозначая через \bar{B}^δ идеал из \bar{K} максимальный* в множестве идеалов из \bar{K} , имеющих нулевое пересечение с \bar{B} , и учитывая, что $\bar{B}/\bar{T} \cong B/T \in \Pi_\delta = \Pi_\tau$, получаем $\bar{K}/\bar{B}^\delta \in \Pi_\tau^\delta = \Pi_{\tau+1} = \Pi_\delta$. Заметим, наконец, что $\bar{K}/\bar{B}^\delta \supseteq \bar{B} + B^\delta/B \cong \bar{B}/\bar{B} \cap \bar{B}^\delta = \bar{B} \neq 0$. Таким образом, если идеал B кольца K отображается гомоморфно на ненулевые кольца из класса Π_δ , то и само кольцо K отображается гомоморфно на ненулевые кольца из Π_δ . Но тогда, как легко видеть, всякий идеал R_δ -радикального кольца есть R_δ -радикальное кольцо, т. е. радикал R_δ оказался наследственным радикалом.

Пусть R — любой наследственный радикал такой, что все δ -кольца R -полупросты. В силу наследственности радикала R , если Π — класс всех R -полупростых колец, то имеет место включение $\Pi_0 \subseteq \Pi$.

Допустим, что для всех $\beta < \alpha$ мы уже доказали, что $\Pi_\beta \subseteq \Pi$. Если α — предельное, то, очевидно, $\bigcup_{\beta < \alpha} \Pi_\beta = \Pi_\alpha \subseteq \Pi$. Пусть $\alpha - 1$ существует.

В силу индуктивного предположения, $\Pi_{\alpha-1} \subseteq \Pi$. Пусть кольцо $K \in \Pi_{\alpha-1}$. Если $K = 0$, то, очевидно, $K \in \Pi$. Если же $K \neq 0$, то,

* В силу леммы Куратовского — Цорна этот идеал всегда существует.

в силу определения класса $\Pi_{\alpha-1}^{\delta}$, существуют такие кольца A, B, B^{δ}, T , что а) T —идеал кольца B , B —идеал кольца A ; б) B/T —ненулевое кольцо из класса $\Pi_{\alpha-1} \subseteq \Pi$; в) T —не содержит ни одного ненулевого идеала из A ; г) B^{δ} —максимальный в множестве всех идеалов из A , имеющих нулевое пересечение с идеалом B ; $K=A/B^{\delta}$. Так как радикал $R(B)$ кольца B есть пересечение всех таких идеалов T_{α} из B , что фактор-кольца B/T_{α} R -полупросто; то из $\Pi_{\alpha-1} \subseteq \Pi$ следует, что $R(B) \subseteq T$. Но $R(B) = B \cap R(A)$ и потому является идеалом кольца A . В силу условия в) $R(B) = 0$. Между тем, кольцо $K = A/B^{\delta}$ содержит в качестве идеала кольцо $\bar{B} = B + B^{\delta}/B^{\delta} \cong B$, причем, как легко видеть, $\bar{P} \cap \bar{B} \neq 0$ для любого ненулевого идеала \bar{P} из K . Так как $R(K) \cap \bar{B} = R(\bar{B}) = 0$, то и $R(K) = 0$, т. е. кольцо K R -полупросто. $\Pi_{\alpha-1} \subseteq \Pi$. Но тогда в силу наследственности радикала R и $\Pi_{\alpha} \subseteq \Pi$. Методом трансфинитной индукции доказано, что $\Pi_{\alpha} \subseteq \Pi$ для всех α . В частности, $\Pi_{\delta} = \Pi_{\delta} \subseteq \Pi$. Но это и означает, что $R_{\delta} \geq R$, т. е. $R_{\delta} = S_{\delta}$ —наибольший среди всех таких наследственных радикалов R , что все δ -кольца R -полупросто.

3) Пусть свойство δ удовлетворяет требованию $I'2$. Рассмотрим следующее свойство δ' : кольцо K является δ' -кольцом в том и только в том случае, когда оно не имеет ненулевых δ -идеалов. В силу доказанного в случае 2), существует наследственный радикал $S_{\delta'}$ —наибольший среди всех наследственных радикалов R таких; что все δ' -кольца R -полупросто.

Пусть кольцо K $S_{\delta'}$ -радикально. Это означает, что кольцо K не отображается гомоморфно на ненулевые $S_{\delta'}$ -полупростые кольца. В частности, кольцо K не отображается гомоморфно на ненулевые δ' -кольца. Следовательно, в любом ненулевом гомоморфном образе кольца K содержится в качестве ненулевого идеала некоторое ненулевое δ -кольцо. В силу требования $I'2$, K является δ -кольцом. Следовательно, все S_{δ} -радикальные кольца являются δ -кольцами.

Пусть R —любой наследственный радикал такой, что все R -радикальные кольца являются δ -кольцами. Тогда всякое δ' -кольцо R -полупросто. В силу построения радикала $S_{\delta'}$, $S_{\delta'} \geq R$. Но это и означает, что $S_{\delta'}$ —наибольший среди всех таких наследственных радикалов R , что все R -радикальные кольца являются δ -кольцами, т. е. $S_{\delta'} = S_{\delta}$ —верхний наследственный радикал относительно свойства δ .

Теорема доказана.

Замечая, что свойство радикальности удовлетворяет требованию $I'2$, получаем

Следствие. Для любого радикала R существуют нижний и верхний наследственные радикалы относительно свойства R -радикальности колец. Другими словами, существуют такие наследственные радикалы $S_{\bar{R}}$ и $S_{\underline{R}}$, что $S_{\bar{R}} \geq R \geq S_{\underline{R}}$, причем $S_{\bar{R}}$ —наименьший среди наследственных радикалов, содержащихся в радикале R , а $S_{\underline{R}}$ —наибольший среди наследственных радикалов, содержащихся в радикале R .

§ 2. Дадим теперь несколько примеров радикалов.

Если объявить радикальными все кольца, то, очевидно, что требования $I.1$ — $I.3$ будут выполняться. Таким образом, определен

радикал S : все кольца S -радикальны. Очевидно, что радикал S является наследственным радикалом.

Если объявить все кольца полупростыми, то, очевидно, что требования $I.1$ — $I.3$ будут выполняться. Таким образом, определен нулевой радикал 0 : единственным 0 -радикальным кольцом является нулевое кольцо.

Построим теперь два менее тривиальных примера радикалов.

Пример 1. Рассмотрим свойство I идемпотентности колец. Напомним, что кольцо K называется идемпотентным тогда и только тогда, когда $K^2 \equiv \{\sum a_i b_i | a_i, b_i \in K\} = K$.

Свойство I удовлетворяет требованиям $I.1$, $I.2$, $I'3$ и потому определен идемпотентный радикал I .

Действительно, выполнение $I.1$ очевидно. Если K —произвольное кольцо и $I(K) = \sum K_{\alpha}$ —сумма всех идемпотентных идеалов K_{α} кольца K , то $(I(K))^2 = (\sum K_{\alpha})^2 \subseteq \sum K_{\alpha}^2 = \sum K_{\alpha} = I(K)$, т. е. $I(K) = (I(K))^2$. Следовательно, выполнено и требование $I.2$. Наконец, если кольца $\bar{K} = K/B$ и B идемпотентны, то возьмем произвольное $a \in K$. Переходя к образам и учитывая, что $\bar{a}^2 = \bar{a}$, получим $\bar{a} = \sum \bar{a}_i \bar{b}_i$ для некоторых $\bar{a}_i, \bar{b}_i \in \bar{K}$. Переходя обратно к прообразам, получим, что $a = \sum a_i b_i + b$ для некоторого $b \in B$. Но кольцо B идемпотентно и потому $b = \sum c_j d_j$ для некоторых $c_j, d_j \in B$. Следовательно, $a = \sum a_i b_i + \sum c_j d_j \in K^2$, т. е. $K = K^2$ и требование $I'3$ тоже выполнено.

Радикал I совпадает с верхним радикалом, определяемым классом всех нильпотентных колец.

Действительно, если кольцо K I -радикально, то, очевидно, оно не отображается гомоморфно на ненулевые нильпотентные кольца. Обратное, если кольцо K не отображается гомоморфно на ненулевые нильпотентные кольца, то, учитывая, что фактор-кольцо K/K^2 является нильпотентным кольцом, получаем $K = K^2$, т. е. кольцо K I -радикально.

Идемпотентный радикал I не является наследственным.

Действительно, все нильпотентные кольца I -полупросто, а все кольца с единицей I -радикальны. Между тем всякое кольцо можно вложить в некоторое кольцо с единицей в качестве идеала (см., например, [4], стр. 54).

Пример 2. Рассмотрим класс P всех простых колец.

Очевидно, что класс P удовлетворяет требованию $II.1$, т. е. определяет некоторый верхний радикал Γ : кольцо K тогда и только тогда Γ -радикально, когда оно не имеет максимальных идеалов.

Напомним, что идеал B кольца K называется максимальным, если $B \subseteq K$ и единственным идеалом из K , строго содержащим идеал B , является само кольцо K .

Радикал Γ не является наследственным радикалом.

Действительно, рассмотрим кольцо $R(0)$ с нулевым умножением над аддитивной группой всех рациональных чисел (см., например [4], стр. 38). В кольце $R(0)$ для любого $x \in R(0)$ и любого натурального числа n уравнение $x = nu$ разрешимо. Поэтому уравнение $\bar{x} = n\bar{u}$ разрешимо и в любом гомоморфном образе $R(0)$ кольца $R(0)$ для любого $\bar{x} \in \bar{R}(0)$ и любого натурального числа n . Так как кольцо $R(0)$ —кольцо с нулевым умножением, то и все гомоморфные

образы $\overline{R(0)}$ кольца $R(0)$ являются кольцами с нулевым умножением. Но известно, что простые кольца с нулевым умножением исчерпываются кольцами с нулевым умножением над циклическими аддитивными группами простого порядка. Так как во всякой циклической группе простого порядка p уравнение $x = px$ не разрешимо для любого $x \neq 0$, то кольцо $R(0)$ Γ -радикально. Между тем кольцо $Z(0)$ с нулевым умножением над бесконечной циклической аддитивной группой является идеалом кольца $R(0)$, хотя $Z(0)$ есть подпрямая сумма простых колец с нулевым умножением и потому является Γ -полупростым кольцом.

Нижний наследственный радикал S_I относительно свойства I -радикальности колец совпадает с радикалом S .

Действительно, пусть наследственный радикал $R > I$. Тогда все кольца с единицей, а потому и все кольца R -радикальны. Следовательно, $S_I = S$.

Верхний наследственный радикал $S_{\bar{I}}$ относительно свойства Γ -радикальности колец совпадает с нулевым радикалом 0 .

Действительно, пусть наследственный радикал $R \leq \Gamma$. Так как все простые кольца Γ -полупросты, то они будут и R -полупростыми кольцами. Легко доказать, что тогда и все кольца с нулевым умножением будут R -полупростыми. Но в таком случае и все подпрямо неразложимые кольца будут R -полупростыми. Так как всякое кольцо представимо в виде подпрямой суммы подпрямо неразложимых колец, то и все кольца будут R -полупростыми, т. е. $S_{\bar{I}} = 0$.

Напомним, наконец, что кольцо K называется наследственно идемпотентным, если любой идеал кольца K идемпотентен. Оказывается, что класс всех наследственно идемпотентных колец является классом радикальных колец и определяет наследственно идемпотентный (f -регулярный) радикал Блэра F (см., например, [2], § 3).

Верхний наследственный радикал S_I относительно свойства I -радикальности колец совпадает с наследственно идемпотентным радикалом F .

Действительно, если наследственный радикал $R < I$, то все R -радикальные кольца будут наследственно идемпотентными. Следовательно, $S_I = F$.

ЛИТЕРАТУРА

1. S. A. Amitsur, A general theory of radicals, II: Radicals, in rings and bicategories. Amer. Journ. Math., 76 (1952), 774.
2. В. А. Андрунакиевич, Радикалы ассоциативных колец, I, Матем. сб., 44 (86): 2 (1958), 179.
3. А. Г. Курош, Радикалы колец и алгебр, Матем. сб., 33 (75): 1 (1953), 13.
4. А. Г. Курош, Лекции по общей алгебре, М., Физматгиз, 1962.

Ю. М. РЯБУХИН

ДЕСПРЕ ИНКЛУДЕРЯ РАДИКАЛЕЛОР

Резумат

Пентру орьче радикал жeneral R ын сенсул луй А. Г. Курош се конструеск, ку ажуторул индукцией трансфините, радикалеле ередитаре S_R и $S_{\bar{R}}$, каре сатисфак урмэтоареле кондиций:

$$1) S_R \geq R \geq S_{\bar{R}}.$$

2) S_R — чел май мик радикал ередитар, каре концине радикалул R .

3) $S_{\bar{R}}$ — чел май mare радикал ередитар, пе каре-л концине R .

Се дэ ун екземплу де радикал жeneral ши се конструеск радикалеле ередитаре кореспунзэтоаре.

К. С. СИБИРСКИЙ, А. М. СТАХИ

ПРЕДЕЛЬНЫЕ СВОЙСТВА ЧАСТИЧНО УПОРЯДОЧЕННЫХ ДИСПЕРСНЫХ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ

Теория динамических систем, начатая Биркгофом, была развита работами советских математиков в различных направлениях. В настоящее время достаточно подробно исследованы общие [1—3], частично упорядоченные [4—6] и дисперсные (без единственности) [7—15] динамические системы.

В этой заметке ставится вопрос о перенесении теории динамических систем без единственности на случай частично упорядоченной группы. В отличие от работ [4—6] частичная упорядоченность группы понимается, как в [16], без дополнительного условия существования в ней ω -ряда. Здесь мы ограничились рассмотрением лишь предельных свойств таких систем. При этом изучаются вопросы инвариантности множеств (теоремы 1 и 2), устанавливаются связанные с ними свойства динамически предельных множеств (теоремы 3—5) и дается критерий устойчивости воронок по Лагранжу (теорема 6).

Рассмотрим произвольное метрическое пространство R и частично упорядоченную аддитивную (в общем случае некоммутативную) группу G , т. е. такую группу, что между некоторыми ее элементами введено отношение порядка, которое мы будем обозначать знаком $<$ и такое, что:

A. $g < g$ невозможно.

B. Из $g_1 < g_2$ и $g_2 < g_3$ следует $g_1 < g_3$.

C. Если $g_1 < g_2$, то $g + g_1 < g + g_2$ и $g_1 + g < g_2 + g$ при любом $g \in G$.

Вместо $g_1 < g_2$ (g_1 меньше g_2) будем также писать $g_2 > g_1$ (g_2 больше g_1). Если соотношение $g_1 < g_2$ не имеет места, то будем говорить, что g_1 не меньше g_2 или g_2 не больше g_1 .

Обозначим через θ нуль группы G , а для полугрупп её положительных и отрицательных элементов введем соответственно обозначения:

$$G^+ = \{g \in G, g \geq \theta\}, \quad G^- = \{g \in G, g \leq \theta\}.$$

Определение 1. Под *частично упорядоченной дисперсной динамической системой* будем понимать функцию $Q = f(p, g)$, которая каждой точке $p \in R$ и каждому элементу $g \in G$ ставит в соответствие непустое, компактное в себе множество $Q \subseteq R$ и которая удовлетворяет следующим четырем условиям (под $f(P, \Gamma)$, где $P \subseteq R$,

а $\Gamma \subseteq G$ во всем дальнейшем понимается объединение множеств $f(p, g)$ по всем $p \in P$ и $g \in \Gamma$):

1). $f(p, \theta) = p$.

2). $f(f(p, g_1), g_2) = f(p, g_1 + g_2)$ при $g_1, g_2 \in G^+$, а также при $g_1, g_2 \in G^-$.

3). Если $q \in f(p, g)$, то $p \in f(q, -g)$.

4). Для любой точки $p_0 \in R$, элемента $g_0 \in G$ и числа $\varepsilon > 0$ существует такое $\delta > 0$, что, какова бы ни была точка $p \in S(p_0, \delta)$, имеет место

$$f(p, g_0) \subseteq S(f(p_0, g_0), \varepsilon), \quad \text{т. е. } \beta(f(p, g_0), f(p_0, g_0)) < \varepsilon,$$

где β — знак полуотклонения по Хаусдорфу.

Функцию $f(p, g)$ при фиксированном p назовем *поток*ом, исходящим из точки p . Множества $f(p, G)$ и $f(p, G^+)$ ($f(p, G^-)$) назовем соответственно *воронкой* точки p и *положительной (отрицательной) частью воронки* точки p . Множества $f(p, g)$ ($g \in G$) называются *сечениями воронки* $f(p, G)$.

Пусть $g^* \in G^+$. Под отрезком $f(p; \theta, g^*)$ ($f(p; -g^*, \theta)$) положительной (отрицательной) части воронки $f(p, G)$ будем понимать объединение сечений $f(p, g)$ по всем $g \in G^+$ ($g \in G^-$), которые не больше g^* (не меньше $-g^*$).

По аналогии с [14] введем

Определение 2. Множество $A \subseteq R$ назовем ω - (α) -*полуинвариантным*, если $f(A, g) \subseteq A$ при всех $g \in G^+$ ($g \in G^-$); ω - (α) -*квазиинвариантным*, если $f(A, g) \supseteq A$ при всех $g \in G^+$ ($g \in G^-$); ω - (α) -*инвариантным*, если $f(A, g) = A$ при всех $g \in G^+$ ($g \in G^-$), и ω - (α) -*псевдоинвариантным*, если для любой точки $p \in A$ и любого $g \in G^+$ ($g \in G^-$) выполнено $f(p, g) \cap A \neq \emptyset$.

Очевидно, что множество A ω - (α) -инвариантно тогда и только тогда, когда оно является одновременно ω - (α) -полуинвариантным и ω - (α) -квазиинвариантным.

Установим следующую теорему, являющуюся непосредственным обобщением леммы Е. А. Барбашина ([8], стр. 127).

Теорема 1. Для того чтобы множество A было ω - (α) -квазиинвариантным, необходимо и достаточно, чтобы A было α - (ω) -псевдоинвариантным.

Доказательство. Пусть A является ω -квазиинвариантным множеством, т. е. $A \subseteq f(A, g)$ при любом $g \in G^+$, и p — произвольная точка из A . Тогда $p \in f(A, g)$ ($g \in G^+$), т. е. существует точка $q \in A$ такая, что $p \in f(q, g)$, или (по свойству 3) $q \in f(p, -g)$. Но $q \in A$, следовательно, $q \in f(p, -g) \cap A$, т. е. $f(p, -g) \cap A \neq \emptyset$ и A является α -псевдоинвариантным множеством.

Допустим теперь, что множество A является α -псевдоинвариантным. Это означает, что $f(p, -g) \cap A \neq \emptyset$ ($p \in A; g \in G^+$). Возьмем точку $q \in f(p, -g) \cap A$. По условию 3) имеем $p \in f(q, g) \subseteq f(A, g)$, так как $q \in A$. Но p — произвольная точка из A , и тогда $A \subseteq f(A, g)$ для любого $g \in G^+$, т. е. A является ω -квазиинвариантным. Аналогично доказывается эквивалентность α -квазиинвариантности и ω -псевдоинвариантности.

Лемма 1. Если $f(N, g) \subseteq M$, то $N \subseteq f(M, -g)$.

Доказательство. При условии, что $f(N, g) \subseteq M$, для произвольной точки $n \in N$ имеем $f(n, g) \subseteq M$. Пусть $q \in f(n, g)$, тогда по свойству 3) $n \in f(q, -g) \subseteq f(M, -g)$. Так как n произвольная точка из N , то $N \subseteq f(M, -g)$.

Теорема 2. Если множество A является ω - (α) -полуинвариантным, то оно является α - (ω) -квазиинвариантным.

Действительно, пусть $f(A, g) \subseteq A$ при всех $g \in G^+$ ($g \in G^-$). Тогда по лемме 1 множество $A \subseteq f(A, -g)$ при всех $-g \in G^-$ ($-g \in G^+$), т. е. множество A является α - (ω) -квазиинвариантным.

Простой пример, приведенный Е. А. Барбашиным ([8], стр. 120), показывает, что обратная теорема не верна. В этом примере ось OX является α - (ω) -квазиинвариантным, но не ω - (α) -полуинвариантным множеством.

Следствие 1. Для того чтобы множество A было одновременно и ω - и α -инвариантным, необходимо и достаточно, чтобы оно было и ω - и α -полуинвариантным.

Ниже, если не оговорено противное, речь будет идти лишь о свойствах положительной части воронки $f(p, G)$. Аналогичные утверждения можно сформулировать и доказать для ее отрицательной части.

Определение 3. Скажем, что множество M содержит сколь угодно поздние точки воронки $f(p, G)$, если для любого элемента $g_0 \in G^+$ существует такой элемент $g \in G^+$, что $g > g_0$ и $f(p, g) \cap M \neq \Lambda$.

Точку q назовем ω -предельной точкой потока $f(p, g)$, если любая ее окрестность $u(q)$ содержит сколь угодно поздние точки воронки $f(p, G)$. Множество всех ω -предельных точек потока $f(p, g)$ обозначим через Ω_p . Очевидно, что это множество замкнуто.

Обозначим через Ω'_q множество всех тех точек $p \in R$, для которых $q \in \Omega_p$, и назовем его „областью“ положительного притяжения точки q .

Теорема 3. Множество Ω'_q является α -полуинвариантным и, следовательно, ω -квазиинвариантным.

Доказательство. Пусть $p \in \Omega'_q$, то есть $q \in \Omega_p$, и пусть $r \in f(p, -g_0)$, где $g_0 \in G^+$. Тогда для любых $\varepsilon > 0$ и $g_1 \in G^+$ найдется элемент $g_2 > g_1$ ($g_2 \in G^+$) такой, что $S(q, \varepsilon) \cap f(p, g_2) \neq \Lambda$. При этом $f(r, g_0 + g_2) \supseteq f(p, g_2)$ и, следовательно, $S(q, \varepsilon) \cap f(r, g_0 + g_2) \neq \Lambda$, причём $g_0 + g_2 > g_1$. Таким образом, $q \in \Omega_r$, и, следовательно, $r \in \Omega'_q$. Так как r — произвольная точка $f(p, -g_0)$, отсюда вытекает, что $f(p, -g_0) \subseteq \Omega'_q$, а тогда и $f(\Omega'_q, -g_0) \subseteq \Omega'_q$ при любом $g_0 \in G^+$, что и означает α -полуинвариантность Ω'_q .

Заметим, что множество Ω'_q , вообще говоря, не является ω -полуинвариантным. Это видно из примера, изображённого схематически на рис. 1, в котором $p \in \Omega'_q$, а $r \notin \Omega'_q$.

Лемма 2. Если $q \in \Omega_p$, а $g \in G^+ \cup G^-$, то любая окрестность сечения $f(q, g)$ содержит сколь угодно поздние точки воронки $f(p, G)$.

Доказательство. По свойству 4) для точки q , элемента g и числа ε существует такое $\delta > 0$, что, какова бы ни была точка $r_1 \in S(q, \delta)$, выполняется

$$f(q_1, g) \subseteq u, \quad (1)$$

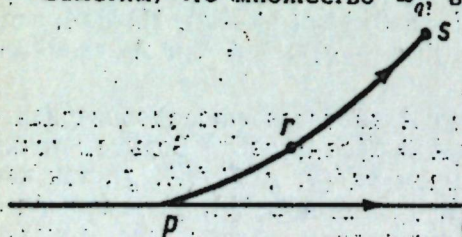


Рис. 1.

где $u = S(f(q, g), \varepsilon)$. Возьмем любое $g_1 \in G^+$ и рассмотрим элемент $g' = g_1 + |g|$, где $|g|$ равно g , если $g \in G^+$, и $-g$, если $g \in G^-$. Так как точка $q \in \Omega_p$, а $g' \in G^+$, то найдется $g'' > g'$ такое, что $f(p, g'') \cap S(q, \delta) \neq \Lambda$. Таким образом, существует точка $r \in f(p, g'') \cap S(q, \delta)$. На основании (1)

$$f(r, g) \subseteq u.$$

Обозначим $g'' + g = g_2$. Тогда $g'' = g_2 - g$ и $g_2 > g' + g > g_1$. Если $g \in G^+$, то $f(r, g) \subseteq f(p, g'' + g) = f(p, g_2)$ и, следовательно, $f(p, g_2) \cap u \neq \Lambda$.

Если $g \in G^-$, то $r \in f(p, g_2 + (-g)) = f(f(p, g_2), -g)$ и существует точка $x \in f(p, g_2)$ такая, что $r \in f(x, -g)$. Но тогда по свойству 3) динамической системы $x \in f(r, g) \subseteq u$ и опять $f(p, g_2) \cap u \neq \Lambda$. Лемма доказана.

Определение 4. Точку $p_0 \in R$ назовем точкой непрерывности, если для любого элемента $g_0 \in G$ и числа $\varepsilon > 0$ существует такое $\delta > 0$, что, какова бы ни была точка $p \in S(p_0, \delta)$, имеет место

$$f(p, g_0) \subseteq S(f(p_0, g_0), \varepsilon).$$

Учитывая свойство 4), нетрудно заметить, что точка $p_0 \in R$ является точкой непрерывности тогда и только тогда, когда для любого элемента $g_0 \in G$ и числа $\varepsilon > 0$ существует такое $\delta > 0$, что, какова бы ни была точка $p \in S(p_0, \delta)$, имеет место неравенство

$$\alpha(f(p, g_0), f(p_0, g_0)) < \varepsilon,$$

где α — знак отклонения по Хаусдорфу [17].

Лемма 3. Если $q \in \Omega_p$ и является точкой непрерывности, $g, g_1 \in G^+$, а $\varepsilon > 0$, то существует элемент $g_2 \in G$ такой, что $g_2 > g_1$ и

$$\beta(f(q, g), f(p, g_2)) < \varepsilon. \quad (3)$$

Доказательство проводится точно так же, как и в лемме 2, с заменой включений (1) и (2) соответственно на неравенства $\alpha(f(q, g), f(q_1, g)) < \varepsilon$ и $\alpha(f(q, g), f(r, g)) < \varepsilon$. Отсюда и из $f(r, g) \subseteq f(p, g_2)$ следует (3).

Лемма 4. Если любая окрестность компакта K содержит сколь угодно поздние точки воронки $f(p, G)$, то $K \cap \Omega_p \neq \Lambda$.

Доказательство. Пусть любая окрестность u компакта K содержит сколь угодно поздние точки воронки $f(p, G)$ и пусть $K \subseteq \bigcup_{i=1}^m u_i$, где u_i — открытые множества.

Докажем, что хотя бы одно из u_i содержит сколь угодно поздние точки $f(p, G)$. Допустив противное, найдутся элементы $g_i \in G^+$ ($i = 1, 2, \dots, m$) такие, что $f(p, g) \cap u_i = \Lambda$ при всех $g > g_i$. Но тогда

$$f(p, g) \cap \left(\bigcup_{i=1}^m u_i \right) = \Lambda \text{ при всех } g > \sum_{i=1}^m g_i, \text{ а это противоречит тому,}$$

что $\bigcup_{i=1}^m u_i$ является окрестностью компакта K и, следовательно, со-

держит сколь угодно поздние точки воронки $f(p, G)$. Таким образом, в рассматриваемом случае хотя бы одна из окрестностей любого

конечного покрытия компакта K должна содержать сколь угодно поздние точки $f(p, G)$.

Возьмем теперь последовательность положительных чисел $\{\varepsilon\} \rightarrow 0$ и для каждого n выберем конечное покрытие $\bigcup_{l=1}^{m_n} S(k_l^{(n)}, \varepsilon_n)$ компакта $K(k_l^{(n)} \in K)$. Пусть окрестность $S(k_l^{(n)}, \varepsilon_n)$ ($1 \leq l_n \leq m_n$) содержит сколь угодно поздние точки воронки $f(p, G)$. Ввиду компактности K последовательность $\{k_l^{(n)}\}$ можно считать сходящейся. Пусть $\{k_l^{(n)}\} \rightarrow k (k \in K)$. Тогда очевидно, что любая окрестность $u(k)$ точки k содержит сколь угодно поздние точки воронки $f(p, G)$ и поэтому $k \in \Omega_p$ и, следовательно, $K \cap \Omega_p \neq \Lambda$.

Теорема 4. Множество Ω_p является ω - (α) -псевдоинвариантным.

Доказательство непосредственно следует из лемм 2 и 4 ($K = f(q, g)$).

Из теорем 1 и 4 вытекает

Следствие 2. Множество Ω_p является ω - (α) -квазиинвариантным.

Лемма 5. Если точка $q \in \Omega_p$ и является точкой непрерывности, то $f(q, G^+) \subseteq \Omega_p$.

Доказательство. Пусть заданы произвольные $\varepsilon > 0$, точка $q_1 \in f(q, g) \subseteq f(q, G^+)$ и $g_1 \in G^+$. На основании леммы 3 найдется $g_2 > g_1$ такой, что $\beta(f(q, g), f(p, g_2)) < \varepsilon$. Тогда $\beta(q_1, f(p, g_2)) < \varepsilon$ и $q_1 \in \Omega_p$.

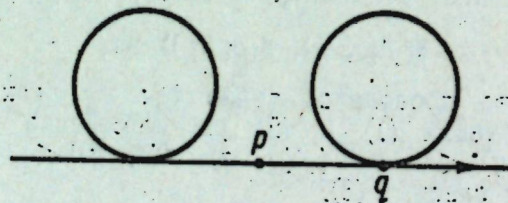


Рис. 2.

Пример, изображенный схематически на рис. 2, показывает, что условие непрерывности точки q в этой теореме не необходимо. Здесь Ω_p представляет собой совокупность второй окружности и луча, исходящего из точки q . Любая точка $q_1 \in f(q, G^+)$ будет принадлежать Ω_p , хотя точка q не является точкой непрерывности.

Из доказанной леммы нетрудно получить

Следствие 3. Если множество Ω_p состоит из точек непрерывности, то оно является ω -полуинвариантным.

Замечание. Если точки множества Ω_p не являются точками непрерывности, то, как показывает пример, построенный Б. М. Будаком ([10], стр. 192), Ω_p может не являться ω -полуинвариантным.

Что касается α -полуинвариантности Ω_p , то ее может не быть и в случае динамической системы с условием непрерывности, как показывает следующий пример:

Пространство R в данном примере представляет собой луч, исходящий из точки q , включая и саму эту точку (рис. 3). Образом произвольной точки $p \in R$ в момент времени $t \neq 0$ является отрезок длины $|t|$, отложенный от точки p влево, если $t < 0$, и вправо, если $0 < t < pq$, где pq — длина отрезка pq . Если же $t > pq$, то в качестве $f(p, t)$ возьмем отрезок pq . Ω_p представляет собой отрезок pq . Ясно, что в данном случае Ω_p является ω -инвариантным множеством, однако не является α -полуинвариантным.

Теорема 5. Множество Ω_p , состоящее из точек непрерывности, является ω -инвариантным.

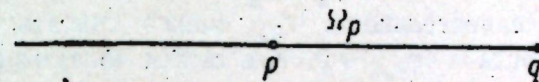


Рис. 3.

Действительно, согласно следствию 3 в этом случае множество Ω_p является ω -полуинвариантным, а по следствию 2 оно является ω -квазиинвариантным. Отсюда следует ω -инвариантность Ω_p .

Определение 5. Воронка $f(p, G)$ называется ω - (α) -устойчивой по Лагранжу, если $f(p, G^+)$ ($f(p, G^-)$) компактно.

Теорема 6. Для того, чтобы воронка $f(p, G)$ была ω -устойчивой по Лагранжу, необходимо и достаточно выполнение следующих четырех условий:

1. Ω_p не пусто.
2. Ω_p компактно.
3. Для любого $\varepsilon > 0$ существует такое $g_1 \in G^+$, что $f(p, g_2) \subseteq S(\Omega_p, \varepsilon)$ при всех $g_2 > g_1$.
4. Любой отрезок $f(p; \theta, g^*)$ положительной части воронки $f(p, G)$ является компактным в R множеством.

Необходимость. Пусть воронка $f(p, G)$ является ω -устойчивой по Лагранжу. Покажем, что выполняются условия 1—4.

Действительно, любая окрестность $u(f(p, G^+))$ компакта $f(p, G^+)$ содержит сколь угодно поздние точки воронки $f(p, G)$. Тогда на основании леммы 4 $f(p, G^+) \cap \Omega_p \neq \Lambda$ и, следовательно, $\Omega_p \neq \Lambda$. Кроме того, Ω_p компактно, так как $\Omega_p \subseteq f(p; G^+)$.

Допустим, что условие 3 не выполняется, т. е. существует $\varepsilon_0 > 0$ такое, что, каково бы ни было $g_1 \in G^+$, существует хотя бы одно $g_2 > g_1$ и хотя бы одна точка $k \in f(p, g_2)$ такие, что $k \notin S(\Omega_p, \varepsilon_0)$.

Рассмотрим компактное в себе множество $K = f(p, G^+) \cap S(\Omega_p, \varepsilon_0)$, любая окрестность которого (и даже само K) содержит сколь угодно поздние точки $f(p, G)$. По лемме 4 $K \cap \Omega_p \neq \Lambda$, что противоречит определению множества K .

Необходимость условия 4 очевидна.

Достаточность. Пусть выполнены все 4 условия теоремы. Докажем, что воронка $f(p, G)$ является ω -устойчивой по Лагранжу. Рассмотрим произвольную последовательность точек $\{q_n\} \subseteq f(p, G^+)$. Найдутся такие элементы $g_n \in G^+$, что $q_n \in f(p, g_n)$. Допустим, что существует элемент $g^* \in G^+$ такой, что g_n не больше чем g^* при всех

л. Тогда $\{q_n\} \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} f(p, g_n) \subseteq f(p; \theta, g^*)$, а это множество по условию 4 является компактным в R , и $\{q_n\}$ можно считать сходящейся. Предположим теперь, что, каков бы ни был элемент $g^* \in G^+$, существует хотя бы один элемент последовательности $\{g_n\}$, который больше g^* . Рассмотрим последовательность положительных чисел $\{\varepsilon_n\} \rightarrow 0$. По условию 3, для ε_n существует $g_{1n} \in G^+$ такой, что $f(p, g_{2n}) \subseteq S(\Omega_p, \varepsilon_n)$ для всех $g_{2n} > g_{1n}$. Для $g^* = g_{1n}$ существует по крайней мере один элемент g_{kn} последовательности $\{g_n\}$ такой, что $g_{kn} > g_{1n}$. Для него $f(p, g_{kn}) \subseteq S(\Omega_p, \varepsilon_n)$. Тогда для точки $q_{kn} (q_{kn} \in f(p, g_{kn}))$ найдётся точка $r_{kn} \in \Omega_p$ такая, что $\rho(q_{kn}, r_{kn}) < \varepsilon_n$. Из второго условия теоремы вытекает, что последовательность $\{r_{kn}\}$ можно считать сходящейся. Пусть $\{r_{kn}\} \rightarrow q$. Тогда и $\{q_{kn}\} \rightarrow q$. Тем самым доказана компактность в R множества $f(p, G^+)$. Отсюда уже следует, что $f(p, G^+)$ является компактным множеством и воронка $f(p, G)$ является ω -устойчивой по Лагранжу.

Доказанная теорема обобщает соответствующую теорему работы [15]. Простые примеры показывают, что условие 4 в теореме 6 не может быть опущено.

ЛИТЕРАТУРА

1. В. В. Немыцкий, ДАН СССР, 53, № 6, 495 (1946).
2. В. В. Немыцкий, Матем. сборник, 23, вып. 2, 161 (1948).
3. W. H. Gottschalk, G. A. Hedlund, Topological dynamics, Amer. Math. Soc. Coll. Publ., vol. 36, 1955.
4. Е. А. Барбашин, ДАН СССР, 51, № 1, 3 (1946).
5. Е. А. Барбашин, Труды Уральск. политехн. ин-та, сб. 51, 4 (1954).
6. К. С. Сибирский, В. И. Крецу, И. У. Бронштейн, Уч. зап. Кишинев. ун-та, 54, 29 (1960).
7. Е. А. Барбашин, ДАН СССР, 41, № 4, 145 (1943).
8. Е. А. Барбашин, Уч. зап. МГУ, вып. 153, Математика, т. 2, 110 (1948; на обл. 1949).
9. Б. М. Будаков, Вестник МГУ, № 8, 135 (1947).
10. Б. М. Будаков, Уч. зап. МГУ, вып. 155, Математика, т. 5, 174 (1952).
11. М. И. Минкевич, Уч. зап. МГУ, вып. 135, Математика, т. 2, 134 (1948; на обл. 1949).
12. М. И. Минкевич, Уч. зап. МГУ, вып. 163, Математика, т. 6, 73 (1952).
13. Е. А. Барбашин, Уч. зап. Уральск. ун-та, вып. 7, 54 (1950; на обл. 1949).
14. И. У. Бронштейн, ДАН СССР, 144, № 5, 954 (1962).
15. И. У. Бронштейн, Б. А. Щербаков, Изв. АН МССР, № 5, 99 (1962).
16. А. Г. Курош, Лекции по общей алгебре, ГИФМЛ, М., 1962.
17. Ф. Хаусдорф, Теория множеств, М.—Л., 1937.

К. С. СИБИРСКИЙ, А. М. СТАХИ

ПРОПРИЕТАЦИЛЕ ЛИМИТА АЛЕ СИСТЕМОРО ДИНАМИЧЕ
ДИСПЕРСЕ ПАРЦИАЛ ОРДОНАТЕ

Резумат

Ын артикол се пуне кестиуня де а екстинде теория системелор динамиче дисперсе асупра казулуй унуй груп парциал ордонат.

Спре деосебире де лукрэриле [4—6] ордонаря парциалэ а групуй се ынцележе ка ын [16], фэрэ кондиция суплиментарэ де екзистенцэ а унуй ω -шир. Аич не-ам мэржинит ла консидераря проприетэцилор лимита але ачестор системе. Се экзаминазэ кестиуниле де инварианцэ а мулцимилор (теоремеле 1 ши 2), се стабилеск, ын легэтурэ ку ачаста, унеле проприетэць але мулцимилор динамик лимита (теоремеле 3—5) ши се дэ ун критериу де стабилитате а пылнилор ын сенс Лагранж (теорема 6).

А. И. КАСИЯН, Л. Э. КОН

НЕКОТОРЫЕ ВОПРОСЫ АДИАБАТИЧЕСКОЙ ТЕОРИИ ВОЗМУЩЕНИЙ

Введение

В работе С. В. Тябликова [1] был развит метод квантовых функций Грина адиабатической теории возмущений и указан способ приближенного расщепления уравнений для этих функций. На этой основе определены некоторые электронные и фоновые характеристики системы.

Цель нашей статьи — дополнить работу [1] учетом кулоновского взаимодействия между электронами и установить некоторые общие соотношения, на базе которых в дальнейшем будут вычислены такие величины, как теплоемкость и магнитная восприимчивость.

В отличие от работы [1] нами используются температурные функции Грина—Мацубары [2—4].

§ 1. Определения

Гамильтониан электронно-фононной системы в адиабатическом приближении с учетом кулоновского взаимодействия между электронами и наличием интегралов движения (импульса и полного числа частиц) имеет вид [1]:

$$H = E_0 + H_1 + H_2 + H_3 + V, \quad (1)$$

где

$$E_0 = \lambda N + (\vec{P}, \vec{v}) + \sum_q \bar{\omega}_q |c_q|^2, \quad (2)$$

$$H_1 = \sum_{k_2} \bar{T}_k a_{k_2}^+ a_{k_2} + \sum_q A_q (c_q \rho_q + c_{-q}^* \rho_{-q}), \quad (3)$$

$$H_2 = \sum_q (A_q \rho_q + \bar{\omega}_q c_q^*) \beta_q + \sum_q (A_q \rho_{-q}^* + \bar{\omega}_{-q} c_{-q}) \beta_{-q}, \quad (4)$$

$$H_3 = \sum_q \bar{\omega}_q \beta_q^+ \beta_q, \quad (5)$$

$$V = \frac{1}{2} \sum_{kk'q+0} U(q) a_k^+ a_{k'}^+ a_{k-k'} a_{k+q}, \quad (6)$$

Здесь

$$\bar{T}_k = T_k - \lambda - (\vec{v}, \vec{k}), \quad (7)$$

$$\rho_q = \sum_{k_2} a_{k_2}^+ a_{k-q}, \quad (8)$$

$$\bar{\omega}_q = \omega_q - (\vec{v}, \vec{q}), \quad (9)$$

где T_k и ω_q — собственные энергии свободных электронов и фононов; a_{k_2} , b_q — операторы Ферми и Бозе, соответственно; \vec{v} и λ — скорость и химический потенциал системы; N и P — операторы полного числа частиц и импульса системы, соответственно; A_q — некоторая функция от \vec{q} , вид которой определяется характером взаимодействия $c_q - c -$ числа, определение которых будет дано ниже.

Отметим, что первые четыре члена формулы (1) получаются из гамильтониана Фрелиха H_F после выполнения над ним унитарного преобразования типа сдвига

$$H = S^{-1} H_F S, \quad S^{-1} \beta_q S = \beta_q + c_q. \quad (10)$$

$$S = \exp \sum_q [c_q \beta_q^+ - c_q^* \beta_q]. \quad (11)$$

Целесообразно перейти от операторов $a_{k_2}^+$, a_{k_2} к новым — $\alpha_{k_2}^+$, α_{k_2} согласно формулам:

$$a_{k_2}^+ = \sum_v u_{k_2 v}^* \alpha_{v_2}^+, \quad (12)$$

$$a_{k_2} = \sum_v u_{k_2 v} \alpha_{v_2}, \quad (12)$$

где $u_{k_2 v}$ — система собственных функций уравнения:

$$\bar{T} u_{k_2 v} + \sum_q A_q (c_q + c_q^*) u_{k_2 - q, v} = E_v u_{k_2 v}, \quad (13)$$

удовлетворяющая условиям ортонормированности:

$$\sum_k u_{k_2 v}^* u_{k_2 \mu} = \delta_{v\mu}, \quad (14)$$

$$\sum_v u_{k_2 v}^* u_{k_2 f} = \delta_{kf}.$$

В новых амплитудах гамильтониан системы приобретает вид:

$$H = E_0 + H_0 + H_1, \quad (15)$$

где

$$H_0 = \sum_{v_2} E_v \alpha_{v_2}^+ \alpha_{v_2} + \sum_q \bar{\omega}_q \beta_q^+ \beta_q \quad (16)$$

и H_1 — оператор взаимодействия:

$$H_1 = \sum_q \int d\vec{x} \bar{\psi}(\vec{x}, \sigma) \psi(\vec{x}, \sigma) \Phi(\vec{x}) + \sum_q [\bar{\omega}_q c_q^* \beta_q^* + \bar{\omega}_{-q} c_{-q} \beta_{-q}^+]. \quad (17)$$

При этом

$$\bar{\psi}(\vec{x}\sigma) = \frac{1}{\sqrt{\Omega}} \sum_{\nu} \sum_k u_{k\nu}^* \alpha_{\nu\sigma}^* e^{i\vec{k}\vec{x}}, \quad (18)$$

$$\psi(\vec{x}\sigma) = \frac{1}{\sqrt{\Omega}} \sum_{\nu} \sum_k u_{k\nu} \alpha_{\nu\sigma} e^{-i\vec{k}\vec{x}},$$

$$\Phi(\vec{x}) = \varphi(\vec{x}) + e\eta(\vec{x}), \quad (19)$$

где

$$\varphi(\vec{x}) = \sum_q A_q (b_q e^{-i\vec{q}\vec{x}} + b_q^* e^{i\vec{q}\vec{x}}), \quad (20)$$

$\eta(\vec{x})$ — амплитуда вспомогательного квантованного поля Бозе-типа [5], удовлетворяющая дополнительному условию:

$$D_{\eta}^0(x, x^1) = \bar{\eta}(x)\eta(x^1) = -U(\vec{r} - \vec{r}^1)\delta(\tau - \tau^1), \quad (21)$$

где D_{η}^0 — нулевая функция Грина бозонного поля η .

Свободную функцию Грина Φ -поля можно представить в виде:

$$B_0(x, x^1) = \langle T\Phi(x)\Phi(x^1) \rangle = D_{ph}^0(x, x^1) + e^2 D_{\eta}^0(x, x^1), \quad (22)$$

где $D_{ph}^0(x, x^1)$ — нулевая фононная функция Грина.

Полные электронная и бозонная функции Грина системы имеют вид:

$$G_{\sigma\sigma'}(x, x^1) = \frac{\langle T\psi(x\sigma)\bar{\psi}(x^1\sigma')u \rangle}{\langle u \rangle}, \quad (23)$$

$$B^1(x, x^1) = \frac{\langle T\Phi(x)\Phi(x^1)u \rangle}{\langle u \rangle}, \quad (24)$$

где u — оператор «эволюции» системы.

Отсутствие трансляционной инвариантности нулевой задачи и наличие второго члена в операторе взаимодействия приводит к появлению новых диаграмм в дополнении к диаграммам пространственно-однородной системы с тройным взаимодействием.

В частности, это приводит к рассмотрению еще и таких функций Грина:

$$D^1(x/x^1) = \frac{\langle T\Phi(x)\Delta(x^1)u \rangle}{\langle u \rangle}, \quad (25)$$

$$\tilde{\Phi}(x) = \frac{\langle T\Phi(x)u \rangle}{\langle u \rangle}, \quad (26)$$

$$\tilde{\Lambda}(x) = \frac{\langle T\Delta(x)u \rangle}{\langle u \rangle}, \quad (27)$$

где

$$\Lambda(x) = \delta(x) \sum_q (\bar{\omega}_q c_q^* \beta_q(\tau) + \bar{\omega}_{-q} c_{-q} \beta_{-q}^+(\tau)). \quad (28)$$

Функцию Грина $B^1(x, x^1)$ и $D^1(x/x^1)$ можно представить в виде двух слагаемых:

$$B^1(x, x^1) = \tilde{\Phi}(x)\tilde{\Phi}(x^1) + B(x, x^1), \quad (29)$$

$$D^1(x/x^1) = \tilde{\Phi}(x)\tilde{\Lambda}(x^1) + D(x/x^1), \quad (30)$$

где

$$D(x/x^1) = \langle T\Phi(x)\Delta(x^1)u \rangle_c, \quad (31)$$

$$B(x, x^1) = \langle T\Phi(x)\Phi(x^1)u \rangle_c \quad (32)$$

содержат лишь связанные диаграммы.

Для введенных функций Грина имеют место уравнения Дайсона:

$$G_{\sigma\sigma'}(x, x^1) = G_{\sigma\sigma'}^0(x, x^1) + \iint \sum_{\sigma_1\sigma_2} dx_1 dx_2 G_{\sigma\sigma'}^0(x, x_1) \sum_{\sigma_3\sigma_4} (x_1\sigma_1, x_2\sigma_2) G_{\sigma_3\sigma_4}(x_2, x^1), \quad (33)$$

$$\sum_{\sigma_1\sigma_2} (x_1\sigma_1, x_2\sigma_2) = \sum \iint dx_3 dx_4 G_{\sigma_3\sigma_4}(x_1, x_3) \Gamma(x_3\sigma_3, x_2\sigma_2/x_4) \cdot B(x_1, x_4) - \tilde{\Phi}(x_1)\delta(x_1 - x_2), \quad (34)$$

$$B(x_1, x) = B_0(x_1, x) + \iint dx_3 dx_4 B_0(x_1, x_3) \Pi(x_3, x_4) B(x_4, x), \quad (35)$$

$$\Pi(x_1, x_2) = - \sum \iint dx_3 dx_4 G_{\sigma_3\sigma_4}(x_1, x_3) \Gamma(x_3\sigma_3, x_4\sigma_4/x_2) G_{\sigma_4\sigma_1}(x_4, x_2), \quad (36)$$

$$D_{ph}(x, x^1) = D_{ph}^0(x, x^1) + \iint D_{ph}^0(x, x_1) \Pi^1(x_1, x_2) D_{ph}^0(x_2, x^1) dx_1 dx_2, \quad (37)$$

$$\Pi^1(x_1, x_2) = \Pi(x_1, x_2) + \iint \Pi(x_1, x_3) B_0(x_3, x_4) \Pi^1(x_4, x_2) dx_3 dx_4, \quad (38)$$

где

$$D_{ph}(x, x^1) = \langle T\varphi(x)\varphi(x^1)u \rangle_c, \quad (39)$$

Γ — сумма всех вершинных операторов,

Σ — сумма всех сильно связанных электронных собственно-энергетических частей, Π^1 — несобственный поляризованный оператор,

Π — сумма всех сильно связанных поляризованных частей.

Для термодинамического потенциала в нашем случае получаем:

$$\Psi = \Psi_0 + \frac{1}{\beta} \int_0^1 \frac{d\lambda}{\lambda} \sum_{\sigma\sigma'} \iint dx dx^1 \sum (x\sigma, x^1\sigma') G(x^1\sigma', x\sigma) + \frac{1}{\beta} \int_0^1 \frac{d\lambda}{\lambda} \int dx \tilde{\Lambda}(x) + E_0. \quad (40)$$

§ 2. Вариационные теоремы

Выражения (33)–(40) могут быть использованы для вычисления термодинамических свойств системы, в частности для вычисления теплоемкости.

С этой целью покажем, что термодинамический потенциал системы может быть представлен в форме, обладающей свойством стационарности по отношению к вариациям функций G , Σ , Π , B и c_q .

Доказательство основано на идеях работ Латтинжера, Уорда [6] и Клейна [7], которые впервые рассмотрели этот вопрос для ферми-систем.

Представим $\langle u \rangle_c$ следующим образом:

$$\langle u \rangle_c = \int_0^1 \frac{d\lambda}{\lambda} \left[\begin{array}{l} \text{сумма всех неприводимых вакуумных} \\ \text{диаграмм с точки зрения исключения} \\ \text{собственно-энергетических электрон-} \\ \text{ных и бозонных частей.} \end{array} \right] \quad (42)$$

Выполняя в (41) интегрирование по частям, учитывая только явную зависимость от λ через вершины, получим:

$$\begin{aligned} \langle u \rangle_c = & u^1 + \sum_{\sigma\sigma^1} \iint G_{\sigma\sigma^1}(x_1, x^1) \sum (x^1\sigma^1, x_1\sigma_1) dx^1 dx_1 - \\ & - \frac{1}{2} \iint dx dx^1 \Pi(x^1, x) B(x, x^1) - \sum_{\sigma\sigma^1} \iint dx dx^1 \int_0^1 G_{\sigma\sigma^1}(xx^1) \frac{\partial \Sigma(x^1\sigma^1, x\sigma)}{\partial \lambda} d\lambda + \\ & + \frac{1}{2} \iint dx dx^1 \int_0^1 B(x, x^1) \frac{\partial \Pi(x^1, x)}{\partial \lambda} d\lambda, \end{aligned} \quad (42)$$

где u^1 — сумма неприводимых вакуумных диаграмм с точки зрения исключения собственно-энергетических электронных и бозонных частей, причем каждая диаграмма содержит множитель $\frac{1}{n}$, где n — число вершин скелетной диаграммы,

$$\begin{aligned} u^1 = & \frac{1}{2} \quad \text{X} \text{---} \text{X} \quad + \frac{1}{2} \quad \text{O} \text{---} \text{O} \quad - \\ & - \text{X} \text{---} \text{O} \quad - \frac{1}{2} \quad \text{O} \text{---} \text{O} \quad - \\ & - \frac{1}{4} \quad \text{X} \text{---} \text{X} \quad - \frac{1}{2} \quad \text{O} \text{---} \text{O} \quad - \dots \end{aligned}$$

где тройные вершины соответствуют первому члену оператора взаимодействия, тогда как вершины, отмеченные знаком "X" — второму члену этого оператора.

При выводе (42) было использовано, что

$$\frac{\partial u^1}{\partial G_{\sigma\sigma^1}(x, x^1)} = - \sum (x^1\sigma^1, x\sigma), \quad (43)$$

$$\frac{\partial u^1}{\partial B(x, x^1)} = \frac{1}{2} \Pi(x^1, x). \quad (44)$$

Введем обратные функции G^{-1} и B^{-1} , удовлетворяющие уравнениям вида:

$$\int A(x, x_1) A^{-1}(x_1, x^1) dx_1 = \int A^{-1}(x^1, x_1) A(x_1, x) dx_1 = \delta(x - x^1), \quad (45)$$

где A — функция G или B .

Исходя из формул (33), (35) и (45), получим соотношения:

$$G_{\sigma\sigma^1}^{-1}(x, x^1) = G_{\sigma\sigma^1}^{-1}(x, x^1) + \sum (x\sigma, x^1\sigma^1), \quad (46)$$

$$B_0^{-1}(x, x^1) = B^{-1}(x, x^1) + \Pi(x, x^1), \quad (47)$$

использование которых даст возможность преобразовать два последних члена формулы (42). Итак:

$$\begin{aligned} \langle u \rangle_c = & u^1 + \sum_{\sigma\sigma^1} \iint dx dx^1 G_{\sigma\sigma^1}(x, x^1) \sum (x^1\sigma^1, x\sigma) - \\ & - \frac{1}{2} \iint dx dx^1 \Pi(x^1, x) B(x, x^1) - \\ & - \sum_{\sigma\sigma^1} \iint dx dx^1 \int_0^1 d\lambda \frac{\partial G_{\sigma\sigma^1}(xx^1)}{\partial \lambda} G_{\sigma\sigma^1}^{-1}(x^1, x) + \\ & + \frac{1}{2} \iint dx dx^1 \int_0^1 \frac{\partial B(xx^1)}{\partial \lambda} B^{-1}(x^1, x) d\lambda = u^1 + \\ & + \sum_{\sigma\sigma^1} \iint dx dx^1 G_{\sigma\sigma^1}(xx^1) \sum (x^1\sigma^1, x\sigma) - \frac{1}{2} \iint dx dx^1 \Pi(x^1, x) B(x, x^1) - \\ & - \sum_{\sigma\sigma^1} \iint dx dx^1 \int_0^1 \frac{G_{\sigma\sigma^1}(x, x^1)}{G_{\sigma\sigma^1}^0(x, x^1)} G_{\sigma\sigma^1}^{-1}(x^1, x) dG_{\sigma\sigma^1}(xx^1) + \\ & + \frac{1}{2} \iint dx dx^1 \int_0^1 \frac{B(x, x^1)}{B_0(x, x^1)} B^{-1}(x^1, x) dB(x, x^1). \end{aligned} \quad (48)$$

Введем обозначение

$$\begin{aligned} \sum_{\sigma\sigma^1} \iint dx dx^1 \int_0^1 \frac{G_{\sigma\sigma^1}(x, x^1)}{G_{\sigma\sigma^1}^0(x, x^1)} G_{\sigma\sigma^1}^{-1}(x^1, x) dG_{\sigma\sigma^1}(x, x^1) = \text{Spln } G_0^{-1} G, \\ \iint dx dx^1 \int_0^1 \frac{B(x, x^1)}{B_0(x, x^1)} B^{-1}(x^1, x) dB(x, x^1) = \text{Spln } B_0^{-1} B. \end{aligned} \quad (49)$$

Тогда

$$\begin{aligned} \langle u \rangle_c = u^1 + \sum_{\sigma^1} \int \int dx dx^1 G_{\sigma^1}(x, x^1) \sum (x^1 \sigma^1, x \sigma) - \\ - \frac{1}{2} \int \int dx dx^1 \Pi(x^1, x) B(x, x^1) - Sp \ln G_0^{-1} G + \\ + \frac{1}{2} Sp \ln B_0^{-1} B. \end{aligned} \quad (50)$$

Заметим, что

$$-\frac{1}{\beta} Sp \ln G_0^{-1} + \frac{1}{2\beta} Sp \ln D_{ph}^{0-1} = \Psi_0. \quad (51)$$

Окончательно термодинамический потенциал системы приобретает вид:

$$\begin{aligned} \Psi = E_0 - \frac{1}{\beta} u^1 - \frac{1}{\beta} \sum_{\sigma^1} \int \int dx dx^1 G_{\sigma^1}(xx^1) \sum (x^1 \sigma^1, x \sigma) + \\ + \frac{1}{2\beta} \int \int dx dx^1 \Pi(x^1, x) B(x^1, x) + \frac{1}{\beta} Sp \ln \hat{G} - \\ - \frac{1}{2\beta} Sp \ln \hat{B} + \frac{1}{2\beta} Sp \ln \frac{B_0}{D_{ph}^0}. \end{aligned} \quad (52)$$

Это выражение является функционалом от функций Грина G , B и величин c_q , которые пока остались неопределёнными.

Рассматривая все три величины независимыми, нетрудно убедиться на основе формулы (52) и определения u^1 в обращении в нуль вариационных производных:

$$\left(\frac{\delta \Psi}{\delta G} \right)_{c_q, B} = 0, \quad (53)$$

$$\left(\frac{\delta \Psi}{\delta B} \right)_{c_q, G} = 0. \quad (54)$$

При варьировании u^1 использовались формулы (43) и (44). Варьирование термодинамического потенциала по Σ и Π дает:

$$\begin{aligned} \left(\frac{\delta \Psi}{\delta \Sigma} \right)_{c_q, B} = 0; \\ \left(\frac{\delta \Psi}{\delta \Pi} \right)_{c_q, G} = 0. \end{aligned} \quad (56)$$

Доказательство равенства

$$\left(\frac{\delta \Psi}{\delta c_q} \right)_{G, B} = 0 \quad (56)$$

следует непосредственно из определения термодинамического потенциала и унитарного характера преобразования сдвига (10).

Так как параметры c_q остались неопределёнными, положим следующее условие:

$$\frac{\langle T \varphi(x) u \rangle}{\langle u \rangle} = 0, \quad (57)$$

что соответствует тому, что c_q является новыми положениями равновесия фононов.

Тогда для c_q получаем определение Тябликова [1] (с учетом кулоновского взаимодействия):

$$\begin{aligned} \bar{\omega}_q c_q = A_{-q} \sum \int d\vec{x} G_{\sigma^1}(xx^+) e^{i q \vec{x}}, \\ \bar{\omega}_q c_q^* = A_q \sum \int d\vec{x} G_{\sigma^1}(xx^+) e^{i q \vec{x}}, \\ \bar{\omega}_q c_q = \bar{\omega}_{-q} c_{-q}^*. \end{aligned} \quad (58)$$

Пользуясь формулой (11) и коммутацией оператора \hat{S} с $\psi(\vec{x} \sigma)$ и $\psi^+(\vec{x} \sigma)$, для электронной функции Грина можем написать:

$$\begin{aligned} G_{\sigma^1}(x, x^1) = \langle T \psi(x \sigma) \bar{\psi}(x^1 \sigma^1) \rangle = (Sp e^{-\beta H})^{-1} \cdot \\ \cdot Sp \{ T S e^{-\beta H} e^{\epsilon H} \psi(\vec{x} \sigma) e^{-\epsilon H} e^{\epsilon H} \psi^+(x^1 \sigma^1) e^{-\epsilon H} S^{-1} \} = \\ = \langle T \psi(x \sigma) \bar{\psi}(x^1 \sigma^1) \rangle |_{c_q = 0}, \end{aligned} \quad (59)$$

что означает стационарность электронной функции Грина относительно изменения c_q .

Аналогичным образом может быть доказана стационарность по c_q всех электронных функций Грина системы.

Полученные соотношения облегчают задачу вычисления термодинамических свойств системы.

ЛИТЕРАТУРА

1. С. В. Тябликов. ФТТ, 3, 3445, 1961.
2. T. Matsubara. Progr. Theor. Phys. 14, 351, 1955.
3. А. А. Абрикосов, Л. П. Горьков, И. Е. Дзялошинский. Методы квантовой теории поля в статистической физике. ГИФ МЛ, М., 1962.
4. Е. С. Фрадкин. ЖЭТФ, 36, 1286, 1959.
5. В. А. Москаленко. ФТТ, 4, 2770, 1962.
6. Luttinger, Ward. Phys. Rev. 118, 1417, 1960.
7. Klein. Phys. Rev. 121, 950, 1961.

А. И. КАСИЯН, Л. Э. КОН

УНЕЛЕ КЕСТИУНЬ ПРИВИНД ТЕОРИЯ АДИАБАТИКЭ
А ПЕРТУРБАЦИИЛОР

Резумат

Метода функцилор луй Грин ын теория адиабатикэ а пертурба-
циилор, креатэ де С. В. Тябликов-есте жeneralизатэ пентру казул, кынд
се еа ын консидацание интеракциуня речипрокэ а електронилор.

Пе база методей диаграмелор де температурэ а луй Фейнман се
капэтэ о експресие пентру потенциалул термодинамик, каре есте ста-
ционар фацэ де вариациле операторилор де масэ ши де поларизацие
ши а мэририй депласэрий фононилор.

В. В. СОБОЛЕВ

К ВОПРОСУ О ВЕЛИЧИНЕ ЭНЕРГИИ ЗАПРЕТНОЙ ЗОНЫ
КРИСТАЛЛОВ ГРУППЫ $A^{IV}B^{VI}$

Введение

Согласно теории неметаллов любой кристалл может иметь сложную
структуру зон проводимости и зон валентных. Поэтому в спектральном
монотонном распределении коэффициента поглощения может проявиться
несколько резких изломов (краёв), среди которых самый длинновол-
новый край соответствует энергии запретной зоны. Однако в любом
реальном кристалле имеются фононный спектр (даже при низких тем-
пературах), всевозможные нарушения, дефекты, примеси и т. д., которые
могут уменьшить резкость длинноволнового края собственного погло-
щения и даже сильно сдвинуть его в длинноволновую (или коротковол-
новую) область спектра. Зейтц [19] рассмотрел три пути, которыми
нарушения могут изменить край основного поглощения: 1) оптические
правила отбора релаксируют благодаря отклонению от периодичности;
2) изменение локальной плотности по соседству с нарушениями изменя-
ют локальную ширину запрещенной зоны, позволяя происходить более
низкоэнергетическим переходам зона—зона; 3) возникают различного ро-
да заряженные области благодаря нарушениям, также уменьшающие
 E_g . Блакни и Дэкстер [20] считают, что третий возможный механизм —
самый важный из трёх.

Бардин с сотрудниками [21] предложили механизм неперпендикулярных
переходов электронов с участием фононов, ставший в настоящее время
классическим и общепринятым: этот механизм, как и три предыдущих,
может привести к возникновению дополнительных «хвостов» поглощения
с $K < 10^3 \text{ см}^{-1}$ и шириной до $\approx 0,5 \text{ эв}$ (для $E_g \approx 3 \text{ эв}$). Примесные атомы
(ионы) могут давать дополнительное поглощение за счет переходов из
основных в возбужденные состояния, которое может по энергиям сов-
пасть с областью собственного поглощения кристалла и исказить его
истинное значение.

Современные методы выращивания монокристаллов группы $A^{IV}B^{VI}$
позволяют получить очень «чистые» совершенные кристаллы с концен-
трациями примесей, не большими $\sim 10^{-6} \text{ г/г}$, т. е. $< 10^{-16} - 10^{-17} \text{ см}^{-3}$ [22].
Поликристаллические тонкие слои получают, как правило, напылением
на различные подложки — естественно, что такие слои имеют гораздо
большее количество нарушений решетки вещества, отклонений от сте-
хиометрии и концентрацию поверхностных состояний, чем совершенные
монокристаллы; кроме того, слои часто имеют несколько модификаций,
а кристалл — только одну из возможных нескольких модификаций.

Несмотря на то, что монокристаллы имеют гораздо более совершенную решетку и малые концентрации примесей, чем поликристаллические слои, вопрос о природе длинноволновых краёв сплошного поглощения и примыкающих к ним линейчатых структур решен убедительно лишь в единичных кристаллах. Только широкие комплексные исследования оптических свойств кристаллов могут дать убедительное решение этого вопроса.

В последние годы появилось большое количество теоретических работ, посвященных сложной структуре зон и экситонов кристаллов группы $A^{II}B^{VI}$ [5, 7, 8, 9, 12, 13, 3]. Основные их результаты: 1) экстремумы зон находятся очень близко у $K=0,0,0$; 2) валентная полоса состоит из трех верхних зон и одной глубокой нижней зоны, а зона проводимости — простая — из одной зоны; 3) самый длинноволновый край собственного

поглощения должен быть резко поляризованным при $\vec{E} \perp \vec{C}$, остальные — частично поляризованными; 4) к краю должна примыкать экситонная серия полос с такой же поляризацией, как и у краёв; 5) поглощение в области сплошного собственного поглощения должно быть порядка 10^5 — 10^6 см^{-1} , а в экситонных линиях — для разрешенных переходов $\sim 10^5$ см^{-1} , для запрещенных — $\sim 10^2$ — 10^3 см^{-1} .

Казалось бы, теория однозначно определяет природу происхождения того или иного поглощения. Однако до недавнего времени в подавляющем большинстве работ изучалась лишь энергетическая структура оптических спектров, но не количественное спектральное распределение коэффициента поглощения, которое и может помочь решению вопроса о природе поглощения в области собственного поглощения.

С другой стороны, авторы работ [15—18], проведя обширные исследования оптических и фотоэлектрических свойств поликристаллических слоёв, делают следующие далеко идущие выводы: 1) собственное поглощение сульфида кадмия (а значит, и других кристаллов группы $A^{II}B^{VI}$) расположено в ультрафиолетовой области спектра; максимум фундаментальной абсорбции соответствует $\lambda=2230$ Å, т. е. энергия запрещенной зоны для CdS $E_g=5,36$ эв; 2) сплошное и линейчатое поглощение кристаллов в видимой и ближней у.ф. области спектра, изученное и принятое как собственное и экситонное поглощение, соответственно, в громадном количестве работ, обусловлено поглощением избыточных, сверхстехиометрического состава, атомов кадмия (цинка), причем линейчатое поглощение принадлежит электронным переходам с нормального уровня примеси 1S_0 на его уровни возбуждения 3P_2 , 3P_1 и 3P_0 , расщепленных в поле решетки гексагональных кристаллов по закону $l+1$; 3) монокристаллы и мелкокристаллические порошки кристаллов группы $A^{II}B^{VI}$ обладают специфической особенностью кристаллизоваться с большим избытком металлического компонента.

В 1956—1962 гг. нами были вначале обнаружены сложные линейчатые структуры спектров поглощения, отражения, фотолюминесценции и спектрального распределения внутреннего фотоэффекта монокристаллов селенида кадмия, а далее было проведено обширное комплексное изучение коэффициента поглощения монокристаллов CdS и CdSe, пленок CdSe и CdTe, влияние прогрева в разных атмосферах и примесей на спектры поглощения и излучения CdSe и др. Кратко некоторые наши результаты будут описаны в настоящей работе и обсуждены в сравнении с результатами работ [15—18].

Экспериментальные результаты

Нами были изучены поликристаллические слои CdSe ($d=0,5$ — $0,02$ микрона), монокристаллы CdS и CdSe («чистые» и с содержанием примесей Cu, Ag, Au и др. до 10^{-5} г/г, прогретые в атмосфере Cd и Se (S), в вакууме, на воздухе, в аргоне) в широком температурном интервале 4° — 290°K при дисперсии спектрометров $3,5$ — 100 Å/м в области 1 — 6 эв. Слои получены нами распылением спектрально чистых порошков CdSe и CdTe на различные подложки (стекло, кварц, соль NaCl, слюда) в форвакууме (в этом методе благодаря установлению градиента температуры по высоте вдоль подложки слои получались в виде клиньев) и в высоком вакууме (образцы получались в виде плоскопараллельных слоев распылением CdSe и CdTe на подложки, нагретые до $T=20^\circ$ — 300°C). Монокристаллы CdSe и CdS изготовлены в лаб. С. М. Рывкина и лаб. Ю. П. Маслаковца¹; «чистые» — с возможной концентрацией примесей $<10^{-6}$ г/г, «примесные» — до 10^{-5} г/г. Плёнки, полученные первым методом, для CdSe имели только гексагональную структуру, а вторым методом — в зависимости от температуры подложек — кубическую ($T=100^\circ\text{C}$), гексагональную ($T=300^\circ\text{C}$) и смешанную кубическую с гексагональной, а плёнки CdTe — кубическую структуру². Толщина плёнок определялась на интерферометре Личникова.

Спектры поглощения у плёнок CdSe и CdTe при $T=290^\circ\text{K}$ в видимой области спектра приведены на рисунке 1, а, б, в, г, рис. 2, а в у.ф. области — на рис. 3, а и 3, б (несколько кривых на рисунках, принадлежащих к одной группе — кривые поглощения образцов одной и той же серии изготовленных слоёв при одинаковых условиях — разброс кривых указывает на отличие самих слоёв друг от друга).

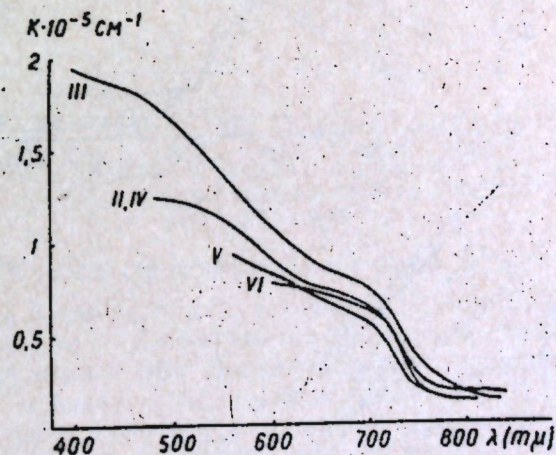
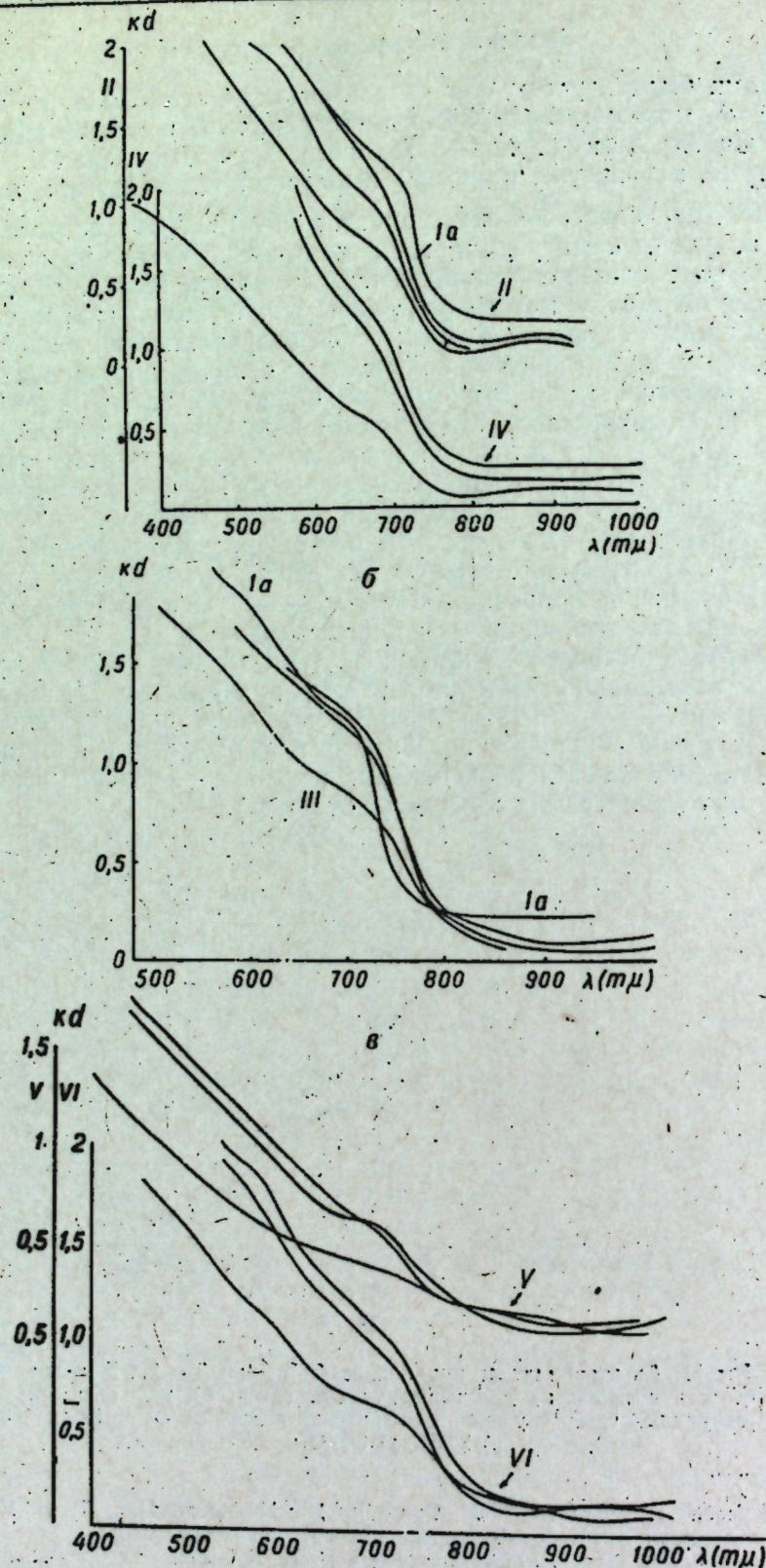


Рис. 1. Спектры поглощения пленок CdSe при $T=290^\circ\text{K}$ в видимой области спектра: а) для форвакуумных слоёв; б), в), г) для высоковакуумных слоёв с разной температурой подложек — б) 52° и 130°C , в) 200°C , г) 350°C и 400°C .

¹ Искренне признателен С. М. Рывкину, Ю. П. Маслаковцу, Т. Л. Ковальчук, О. И. Матвееву, Л. А. Масловой за предоставление монокристаллов.
² Автор благодарит Г. М. Филаретову и Б. И. Кузнецова за получение электрограмм слоёв CdSe и CdTe.



Из рисунков 1, 2, 3 видно следующее: 1) кривые поглощения пленок имеют, как правило, резко выраженные края — для CdSe при 7500 \AA , для CdTe — при 8500 \AA ; 2) в видимой области спектра пленки CdSe и CdTe не обнаруживают никаких заметных нарушений монотонности хода величины Kd ; имеется разброс данных ОК от слоя к слою на $\pm 40\%$; поглощение имеет порядок $K > 0,5 \times 10^5 \text{ см}^{-1}$; 3) в у. ф. области пленки CdSe обнаруживают резкую интенсивную полосу поглощения при $\lambda 2600 \text{ \AA}$ (4,77 эв), пленки CdTe — две полосы при $\lambda 2400 \text{ \AA}$ (5,17 эв) и $\lambda 3250 \text{ \AA}$ (3,815 эв); имеется разброс данных ОК от слоя к слою на $\pm 15\%$; поглощение в максимуме у. ф. полос имеет порядок $8-10 \times 10^5 \text{ см}^{-1}$.

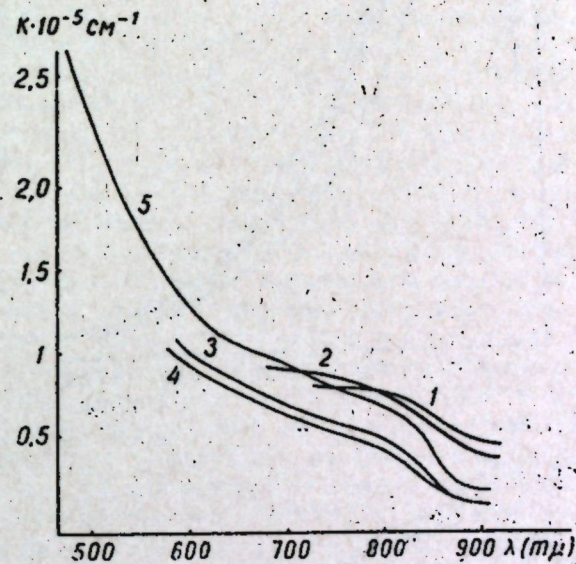


Рис. 2. Спектры поглощения пленок CdTe при $T = 290^\circ\text{K}$ в видимой области спектра для форвакуумных слоев

При $T = 290^\circ\text{K}$ в спектрах поглощения слоев CdSe нами была обнаружена слабая широкая полоса в области $\lambda \text{ \AA} 6800-7100$. Понижение температуры до 77°K не приводит к заметным изменениям в спектрах высоковакуумных слоев. Дополнительная термообработка этих слоев также не вызывает существенных изменений. В противоположность высоковакуумным слоям форвакуумные слои, напыленные на стекло, ведут себя иначе при понижении температуры: при $T = 77^\circ\text{K}$ на длинноволновом крае поглощения появляются две узкие полосы $\lambda 6786 \text{ \AA}$ (полуширина 16 \AA) и $\lambda 6668 \text{ \AA}$ (полуширина 17 \AA) и еще третья узкая полоса $\lambda 5495 \text{ \AA}$ (полуширина 20 \AA). Дальнейшее понижение температуры до $4,2^\circ\text{K}$ не приводит к существенным изменениям в спектрах поглощения форвакуумных слоев CdSe, напыленных на стекло: обе длинноволновые полосы смещаются на 28 \AA , а третья, самая коротковолновая — на 20 \AA в коротковолновую область спектра, при этом полуширины полос остаются примерно теми же, что и при $T = 77^\circ\text{K}$.

Форвакуумные слои, напыленные на свежие сколы NaCl, имеют несколько другую структуру спектров поглощения при $T=77^\circ\text{K}$: широкая полоса λ 6770 Å, слабая узкая полоса λ 7050 Å, а также слабые полосы $\lambda\lambda$ 6610, 6700, 6865.

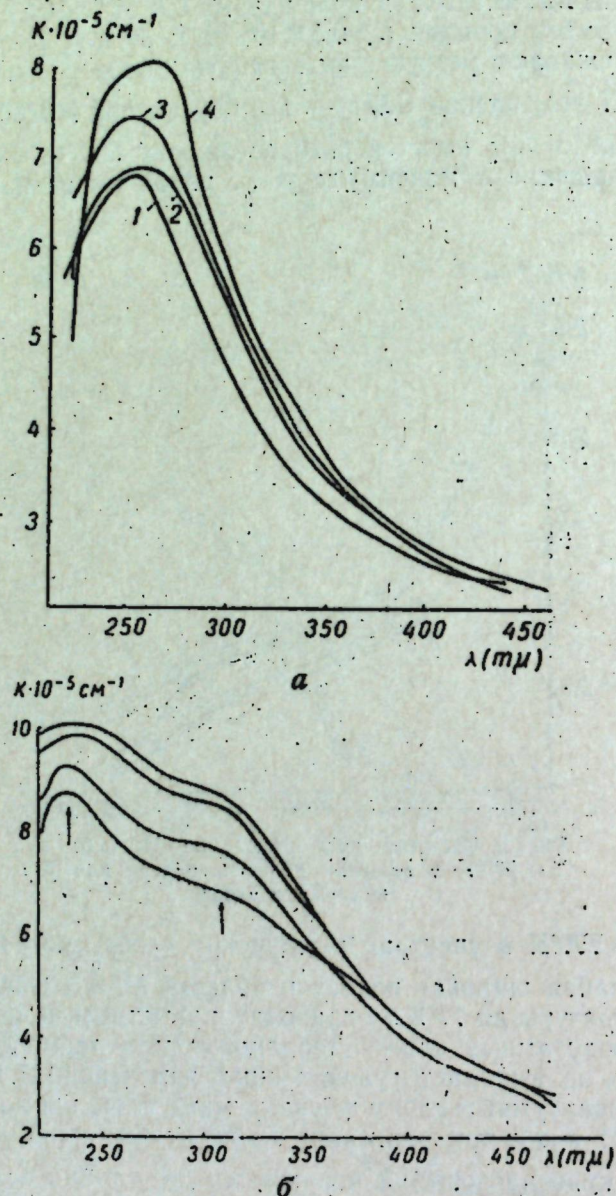


Рис. 3. Спектры поглощения пленок в у. ф. области а) для CdSe, б) для CdTe.

При $T=77^\circ\text{K}$ спектр поглощения пленок CdTe состоит из 3—4 узких полос, расположенных в области длинноволнового края поглощения. Понижение температуры до $4,2^\circ\text{K}$ приводит к смещению всего спектра в у. ф. область примерно на 36 Å как целое и сужению полос:

полоса λ 7685 Å смещается к λ 7650 Å, полоса λ 7757 Å — λ 7720 Å и полоса λ 7817 Å расщепляется на очень узкие полосы $\lambda\lambda$ 7745, 7775.

Далее очень кратко остановимся на экспериментальных результатах, полученных нами по спектральному распределению коэффициента поглощения, влиянию различного рода обработок, примесей на спектр поглощения монокристаллов CdSe и CdS при $T=4,2^\circ\text{K}$ в видимой области спектра: 1. В области длинноволнового края поглощения кристалла CdSe обнаружены два резких края непрерывного поглощения — полностью поляризованный край для $\vec{E} \perp \vec{C}$ при λ 6735 Å и частично поляризованные края при $\lambda\lambda$ 6644, 5440 при $T=4,2^\circ\text{K}$; к этим трем краям поглощения тесно примыкают неперекрывающиеся три группы узких линий поглощения, также поляризованные, как и края. 2. Для линий поглощения монокристаллов CdS и CdSe получены значения величины сил осцилляторов для самых интенсивных линий в каждой из трех групп $\approx 0,001-0,002$. 3. При наложении деформаций (при $T=77,3^\circ\text{K}$), создаваемых в плоскости, параллельной гексагональной оси кристаллов CdS и CdSe, первый край сплошного поглощения и линия $\pi=1$ серии A смещаются примерно в два раза сильнее, чем второй край и линия $\pi=1$ серии B. 4. Введение разнообразных примесных атомов (ионов) (Ag, Au, Tl, Li, Br, Cl, Sb) в решетку «чистых» монокристаллов CdSe приводит к следующему: и линейчатое и сплошное поглощение «примесных» кристаллов не изменилось заметным образом относительно «чистых» кристаллов, за исключением появления дополнительной очень слабой и узкой линии поглощения, расположенной в длинноволновой области спектра по отношению к линейчатому поглощению «чистых» кристаллов на 0,003 эв. 5. Термообработка «чистых» монокристаллов CdSe в различных газовых атмосферах приводит к следующему: а) возникает дополнительный сплошной фон поглощения, б) линейчатая структура сильно размывается и испытывает изменения своего положения в спектре, в) никаких дополнительных линий поглощения не возникает, г) все использованные нами газовые атмосферы прокалок приводят к почти одинаковым искажениям спектров поглощения, д) поверхность кристаллов несомненно сильно портится.

Обсуждение результатов

1. Проведенное нами тщательное сопоставление известных теоретических расчетов [3, 9, 12, 13], известных [11, 4—8] и полученных нами экспериментальных данных для монокристаллов группы AII BV1 с большой убедительностью показало следующее: а) три края в сплошном поглощении гексагональных кристаллов CdSe, ZnSe, ZnS, CdS и ZnO по величине поглощения, характеру поляризации, расположению в спектре соответствуют оптическим переходам электронов из трех верхних валентных зон в нижнюю зону проводимости, т. е. сплошное и линейчатое поглощение кристаллов имеет характер собственного поглощения и не может быть обусловлено поглощением примесей, нарушений в решетке кристаллов, а три группы линий поглощения — три экситонные серии; б) у. ф. полосы поглощения кристаллов в полном согласии с теорией обусловлены переходами зона—зона в сложной структуре зон — по своей большой величине поглощения и расположению в спектре; в) экспериментально показано [23], что CdS (и другие кристаллы группы AII BV1)

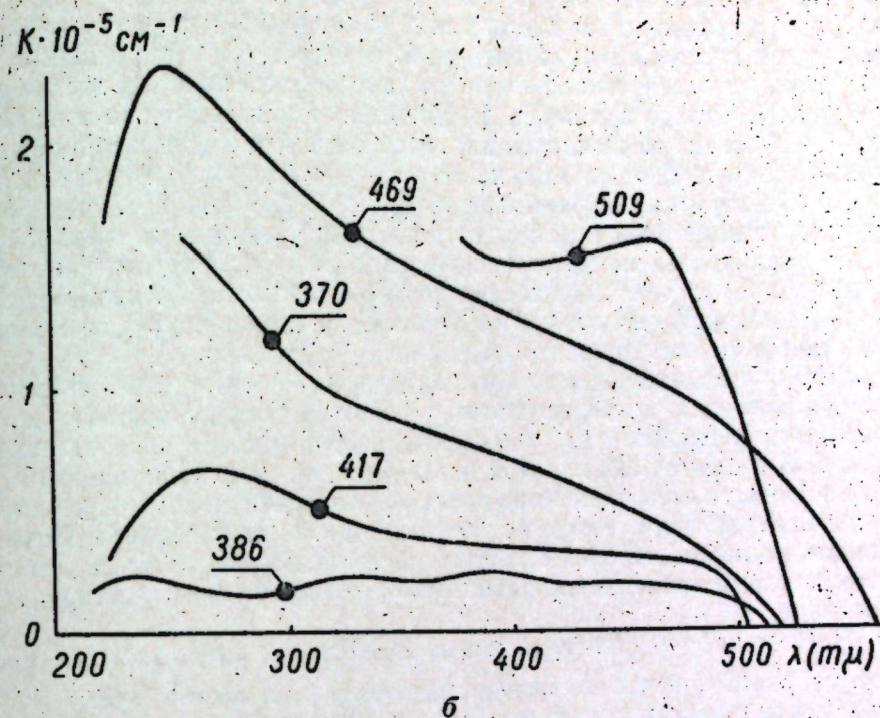
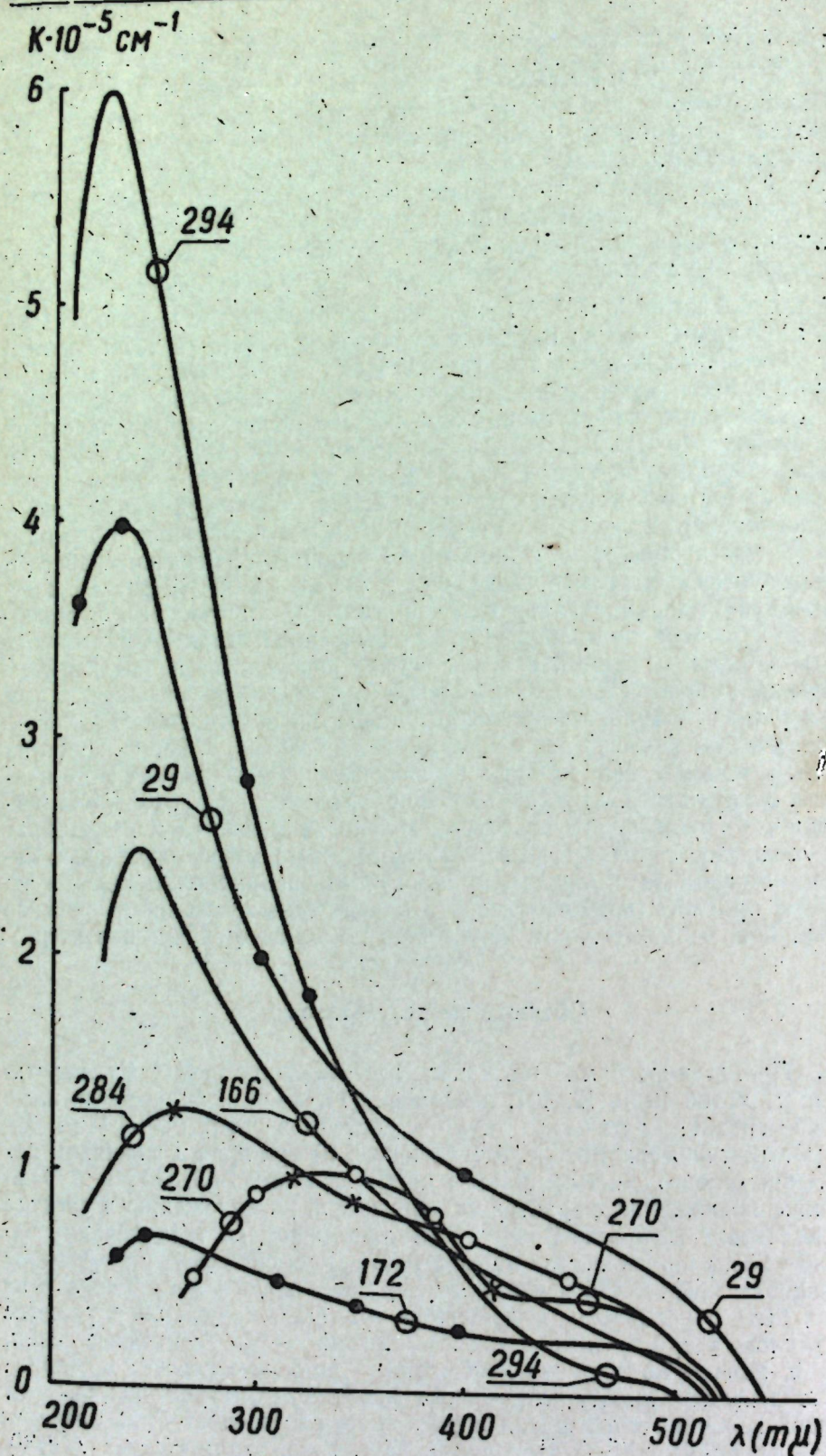


Рис. 4. Спектры поглощения работ [16], пересчитанные нами в кривые K от λ : а) образцы №№ 29, 118, 166, 172 изготовлены в вакууме при температуре подложки 18°C, а образцы №№ 294, 270, 284 при 450°C; б) образцы №№ 370 и 386, 417 и 469, 509 изготовлены в атмосфере аргона при температуре подложки 18°C, 350°C и 450°C, соответственно.

обладают очень сильным пьезоэффектом; косвенно это отражается на линейчатом экситонном поглощении кристаллов (малейшая деформация, порча поверхности, введение нарушений и т. д. — все это приводит к сильному смещению линий, их расширению, деполяризации и расщеплению) (см., например, [1, 2]).

2. Проведенное нами тщательное сопоставление известных данных по краю поглощения пленок CdS, ZnSe [14—18], наших данных для пленок CdSe, CdTe с соответствующими данными для монокристаллов показало следующее: сплошное и линейчатое поглощение поликристаллических слоёв кристаллов группы AII BVI имеет также характер собственного поглощения — величина сплошного поглощения слоёв и монокристаллов имеет одинаковый порядок, линейчатое поглощение слоёв и монокристаллов соответствует друг другу со сдвигом всего спектра слоёв из-за влияния подложки.

3. Кратко остановимся на результатах работ Шалимовой с соотр. [15—18]. а) На рис. 4, а, б представлены пересчитанные нами характерные кривые поглощения пленок CdS работ [16] в виде K от λ : наблюдается громадный разброс данных как для слоёв, изготовленных при одинаковых условиях, так и для слоёв, изготовленных при разных условиях — во всей области спектра, в том числе и при $\lambda = 2300 \text{ \AA}$, принятого Шалимовой за фундаментальное поглощение. По данным работы [15] также видно, что для $\lambda = 2300 \text{ \AA}$ для пленки № 10 $K = 0,6 \times$

$\times 10^5 \text{ см}^{-1}$, а для пленки № 5 $K > 10^6 \text{ см}^{-1}$ (??). Сопоставление возможного разброса опытных данных для слоев CdSe и CdTe с данными работ [15, 16] для слоев CdS приводит нас к выводу о том, что Шалимова с сотрудниками в действительности не контролировала и не воспроизводила условия получения слоев. Необходимо отметить, что во всех работах [15—18] среди многочисленных графиков Kd от λ имеются лишь единичные графики K от λ , очень часто величина d вообще не приводится.

б) Спектры поглощения пленок CdS [17, 18] при $T=77^\circ\text{K}$ имеют структуру в виде 3—5 полос (см. также [14]), которая от слоя к слою сильно различалась по положению в спектре и соотношению интенсивностей; эти 3—5 полос поглощения поликристаллов CdS совпадают с известными интенсивными линиями поглощения монокристаллов с некоторым сдвигом по спектру почти как целое.

4. На основе тщательного анализа данных по оптическим свойствам монокристаллов и поликристаллов с большой убедительностью можно утверждать следующее: а) громадный разброс в спектрах поглощения слоев CdS в опытах Шалимовой и сотрудников непосредственно указывает на большое несовершенство или в изготовлении слоев (даже одной и той же партии) или в методике измерения оптических свойств. Поэтому ценность экспериментальных данных многочисленных работ Шалимовой с сотрудниками практически равна нулю, они могут ввести только в заблуждение.

б) Поражает исключительная голословность выводов Шалимовой с сотрудниками о фундаментальности полосы поглощения CdS $\lambda 2300 \text{ \AA}$, о примесном характере сплошного и линейчатого поглощения CdS (и многих других кристаллов группы $A^{II}B^{VI}$) в видимой области спектра, о специфической особенности монокристаллов и порошков CdS кристаллизоваться с избытком металлической компоненты; при этом всячески обходится вопрос о том, что для получения наблюдаемого большого «примесного» поглощения ($K \approx 10^5 \text{ см}^{-1}$) необходима концентрация примесей порядка 10^{22} см^{-3} , да еще в большом интервале энергий 5—2,5 эв — и все это лишь на основании собственных результатов, без малейшего анализа многочисленных данных о монокристаллах.

ЛИТЕРАТУРА

1. В. В. Соболев. Автореферат канд. дисс., Л., 1962.
2. Е. Ф. Гросс, В. В. Соболев, ЖТФ, 26, 1622 (1956); ФТТ, 2, 406 (1960); ДАН СССР, 133, 56 (1960); Тезисы XI и XIII совещаний по спектроскопии, VII Совещания по люминесценции, I и II Всесоюзного совещания по фотоэлектрическим и оптическим явлениям в полупроводниках, VIII Всесоюзной конференции по физике низких температур.
3. Г. Е. Пикус, ЖЭТФ, 5, 1507 (1961).
4. Е. Ф. Гросс, Л. Г. Суслина, П. А. Коньков, ФТТ, 4, 396 (1962).
5. D. G. Thomas, J. J. Hopfield, Phys. Rev., 116, 573 (1959).
6. Е. Ф. Гросс, Б. С. Разбирин, М. А. Якобсон, ЖТФ, 27, 207 (1957).
7. A. Lempicki, J. Birman, H. Samelson, G. Neumark, Proc. Intern. Conf. semic., Praha, 768 (1960).
8. D. G. Thomas, J. Phys. Chem. Solids., 15, 86 (1960).
9. F. L. Pedrotti, D. C. Reynolds, Phys. Rev., 127, 1584 (1962).
10. M. Aven, D. T. F. Marple, B. Segall, J. Appl. Phys., Suppl. to V. 32, 2261 (1961).
11. J. F. Hall, W. F. C. Ferguson, J.O.S.A., 45, 714 (1955).
12. E. I. Rasba, Proc. Intern. Conf. semic., Praha, 45 (1960); J. J. Hopfield, J. Appl. Phys., Suppl. to V. 32 (1961).
13. R. J. Elliot, Phys. Rev., 108, 1384.

14. Е. Ф. Гросс, П. С. Разбирин, В. И. Сафаров, ФТТ, 2, 2945 (1960).
15. К. В. Шалимова, Н. В. Карпенко, Научн. докл. Высш. школы, № 2, 233 (1958); № 3, 176 (1958).
16. К. В. Шалимова, Т. С. Травина, Л. Л. Голлк, ДАН СССР, 138, 90 (1961); К. В. Шалимова, Т. С. Травина, Р. Р. Резвый, ДАН СССР, 138, 334 (1961).
17. К. В. Шалимова, Н. В. Пирогова, ДАН СССР, 139, 938 (1961); Н. В. Пирогова, ДАН СССР, 139, 1159 (1961).
18. А. Ф. Андрушко, Автореферат канд. дисс., Саратов, 1963; К. В. Шалимова, А. Ф. Андрушко, Кристаллография, 7, 371 (1962).
19. F. Seitz, Rev. Mod. Phys., 23, 328 (1951).
20. R. M. Blakney, D. L. Dexter, Phys. Rev., 96, 227 (1954).
21. J. Bardeen, F. J. Blatt, L. M. Halle, Phys. Rev., 95, 559 (1954).
22. A. Kremheller, J. Electrochem. Soc., 107, 422 (1960); D. R. Boyd, J. T. Sihvonen, J. Appl. Phys., 30, 176 (1959).
23. H. Gobrecht, A. Barschatt, Zs. f. Physik, 136, 224 (1953); 152, 417 (1958).

В. В. СОБОЛЕВ

ДЕСПРЕ МЭРИМЯ ЕНЕРЖИЕЙ ЗОНЕЙ ИНТЕРЗИСЕ
А КРИСТАЛЕЛОР ГРУПУЛУИ А^{II} В^{VI}

Резумат

С'ау черчетат спектреде абсорбции а монокристалелор ши поликристалелор селенидулуй де кадмиу ын интервалул абсорбциие проприй (1—6 еволць) при методеле фотографикэ ши фотоелектрикэ ла температуриле 290, 160, 77 ши 42°K.

Вастеле дате експериментале примите конфирмэ резултателе теорией ши експериментелор пентру монокристале ши се афлэ ын контрадикцие ку конфирмацииле луй Шалимова К. В. кум, кэ абсорбция проприе а кристалелор де CdSe, CdS ши а се гэсеск ын партя ултравиолетэ ши ну ын партя визибилэ а спектрулуй.

Н. Д. ФИЛИПП

ОЦЕНКА ИНТЕРВАЛА УСРЕДНЕНИЯ ПРИ СТАТИСТИЧЕСКОЙ ОБРАБОТКЕ ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНЫХ ДАННЫХ ПО РАСПРОСТРАНЕНИЮ УЛЬТРАКОРОТКИХ РАДИОВОЛН

Процесс флуктуаций уровня радиосигнала, прошедшего через статистически неоднородную среду или рассеянного на статистически неоднородной поверхности, является некоторой случайной функцией времени и точки пространства. Общая задача теории статистической обработки опытов заключается, как известно [1], в нахождении таких функций результатов опытов, которые могут быть приняты за искомые вероятности событий и характеристики случайных величин. При этом принимается, что при большом числе опытов вероятности событий могут быть заменены соответствующими частотами, а математические ожидания случайных величин — их средними арифметическими значениями. При большом числе опытов (или большом интервале записи случайной функции) можно быть уверенным, что полученные характеристики случайных величин близки к их истинным значениям.

Однако на практике часто приходится ограничиваться сравнительно небольшим числом опытов (небольшим интервалом записи случайной функции). Для определения характеристик случайных величин по результатам небольшого числа опытов приходится пользоваться теми же формулами, которые применяются при большом числе опытов. В этом случае, однако, необходимо дополнительно оценить статистическую точность получаемых из опыта характеристик.

В подавляющем большинстве случаев условия распространения радиоволн в тропосфере таковы, что с достаточной степенью точности можно считать, что напряжение принятого сигнала $U(P, t)$ представляет стационарный случайный процесс на временном интервале в несколько десятков минут [2]. Исключения составляют лишь случаи появления на трассе холодных или теплых фронтов воздушных масс, прохождение через трассу грозных дождей, резкое изменение скорости ветра и др.

При обработке экспериментальных данных можно в основном ограничиваться исследованием стационарных процессов, вследствие чего можно использовать некоторые общие их свойства, в частности свойство эргодичности [1]. Это свойство стационарных случайных функций дает возможность определить вероятные характеристики этой функции по одной её экспериментальной записи, поскольку дисперсия стационарной случайной функции постоянна, а корреляционная функция зависит только от интервала $\tau = t - t'$ и не зависит от расположения этого интервала в области изменения аргумента t . Поэтому вместо того, чтобы рассматривать ряд реализаций функций при фиксированном значении t , можно

взять значения одной и той же реализации при различных значениях t на достаточно большом интервале изменения.

При обработке экспериментальных данных (полученных в экспериментах по изучению статистических характеристик ультракоротких радиоволн [9]) запись случайной величины огибающей амплитуды принятого сигнала $U(P, t)$ на временном интервале $(0, T)$ разбивалась на n равных частей через промежутки времени ΔT и использовались значения $U(t_i) = U_i$, пронумерованные в порядке следования. По этим данным вычислялись основные статистические характеристики функции $U(P, t)$.

1°. Среднее значение сигнала на выходе приемной системы:

$$\bar{U}(P, T, n) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n U_i$$

2°. Среднее квадратичное отклонение:

$$\sigma(P, T, n) = \sqrt{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n U_i^2 - \left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n U_i \right)^2}$$

3°. Временной коэффициент автокорреляции флуктуаций амплитуды принятого сигнала

$$\rho(\tau, P, T, n) = \frac{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n U_i U_{i+\tau} - \left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n U_i \right) \left(\frac{1}{n} \sum_{i=\tau}^{n+\tau} U_i \right)}{\sqrt{\left[\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n U_i^2 - \left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n U_i \right)^2 \right] \left[\frac{1}{n} \sum_{i=\tau}^{n+\tau} U_i^2 - \left(\frac{1}{n} \sum_{i=\tau}^{n+\tau} U_i \right)^2 \right]}}$$

4°. Пространственный коэффициент корреляции флуктуаций амплитуд принятых сигналов

$$\frac{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n U_{1i} U_{2i} - \left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n U_{1i} \right) \left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n U_{2i} \right)}{\sqrt{\left[\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n U_{1i}^2 - \left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n U_{1i} \right)^2 \right] \left[\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n U_{2i}^2 - \left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n U_{2i} \right)^2 \right]}}$$

5°. Средняя частота флуктуаций — $N_0 = \frac{n_0}{T}$.

Здесь $n = \frac{T}{\Delta T}$ и n_0 — число положительных пересечений среднего уровня сигнала. Так как при определении статистических характеристик используется конечный объем дискретной выборки, то необходимо оценить точность истинных значений статистических характеристик по их экспериментальным значениям. Как видно из 1° — 5°, значения экспериментальных статистических характеристик зависят от T и ΔT при непрерывной записи

радиосигнала. Нам нужно по возможности рациональнее выбрать t и ΔT (или n).

При определении оптимальных значений T и n необходимо, с одной стороны, чтобы T и n были достаточно велики, для того чтобы обеспечить статистическую точность измерений, а с другой стороны, для уменьшения трудоемкости вычислительной работы необходимы возможно меньшие T и n .

Остановимся на выборе интервала усреднения T , обеспечивающего нужную точность и надежность оценки $U_0(P)$ с помощью $U(P, T, n)$, $\sigma_0(P)$ с помощью $\sigma(P, T, n)$ и аналогично $\rho_0(P, \tau)$ с помощью $\rho(P, \tau, T, n)$, где $U_0(P)$, $\sigma_0(P)$ и $\rho_0(P, \tau)$ — математические ожидания соответствующих величин в генеральной совокупности (при $T \rightarrow \infty$).

При радиусе временной корреляции τ_0 на интервале усреднения T будут содержаться N независимых событий. Используя при определении $\bar{U}(P, T, n)$ N независимых случайных величин U_k , согласно теореме Ляпунова при большом N имеем [3]:

$$\mathcal{P}\left(-Z_\alpha < \frac{\bar{U}(P, T, n) - U_0(P)}{\frac{\sigma_0(P)}{\sqrt{N}}} < Z_\alpha\right) \cong 2\Phi(Z_\alpha) = \alpha,$$

где $\Phi(Z_\alpha)$ — функция Лапласа и α — степень надежности.

Пусть задана требуемая надежность α и желаемая точность результатов наблюдений, т. е. верхний предел ошибки в определении $U_0(P)$ по $\bar{U}(P, T, n)$. Иными словами, потребуем, чтобы неравенство

$$|\bar{U}(P, T, n) - U_0(P)| < \Delta_u \quad (2)$$

выполнялось с вероятностью, не меньшей α .

Здесь Δ_u — верхний предел ошибки.

Учитывая (1) и (2), можем писать

$$Z_\alpha \frac{\sigma_0(P)}{\sqrt{N}} \leq \Delta_u.$$

Решая это неравенство относительно N , получим

$$N = \frac{T_u}{\tau_0} \geq \frac{Z_\alpha^2 \sigma_0^2(P)}{\Delta_u^2},$$

откуда

$$T_u \geq \tau_0 \frac{Z_\alpha^2}{q_u^2}, \quad (3)$$

где $q_u = \frac{\Delta_u}{\sigma_0(P)}$ представляет предельную ошибку оценки $U_0(P)$, выраженную в долях $\sigma_0(P)$.

Из соотношения (3) видно, что для определения T необходимо знать, в каких пределах изменяется радиус временной корреляции флуктуаций амплитуды τ_0 в различных сеансах записи сигналов. Принято считать, что $U(t)$ и $U(t+\tau)$ не коррелируют, если $\rho(\tau) \leq 0,5$.

Для определения τ_0 было взято несколько сеансов записи от самых „быстрых“ до самых „медленных“ флуктуаций с заведомо завышенным интервалом усреднения.

Определяя радиус временной автокорреляции τ_0 как временный сдвиг, при котором коэффициент временной автокорреляции равен 0,5, получили, что в подавляющем числе проведенных сеансов измерений

$$0,5 \text{ сек} \leq \tau_0 \leq 7 \text{ сек}.$$

Задаваясь предельной ошибкой $q_u = \frac{\Delta_u}{\sigma_0(P)} = 0,3$ и степенью надежности $\alpha = 2\Phi(Z_\alpha) = 0,95$, находим $Z_\alpha = 1,96$ и для T_u получаем из (3)

$$T_u \geq 0,35 \div 5 \text{ мин.} \quad (3')$$

Отметим при этом, что предельная допустимая нами ошибка в 30% по отношению к $\sigma_0(P)$ не составляет больше 5% по отношению к среднему значению измеряемой величины $\bar{U}(P, T, n)$. Действительно, в наших экспериментах максимальное стандартное отклонение не превышало 0,17, то есть $\gamma = \frac{\sigma_u}{\bar{U}(P, T, n)} \leq 0,17$,

поэтому

$$\Delta_u = 0,3 \cdot \sigma_u(P) \leq 0,3 \cdot 0,17 \bar{U}(P, T, n) \cong 0,05 \bar{U}(P, T, n).$$

Аналогичным образом находим интервал усреднения для получения среднего квадратичного отклонения с определенной статистической точностью. Для достаточно большого N имеет место соотношение, аналогичное (1), где вместо величины \bar{U} фигурирует σ .

$$\mathcal{P}\left(-Z_\alpha < \frac{\sigma_0(P, T, n) - \sigma_0(P)}{\frac{\sigma_0(P)}{\sqrt{2N}}} < Z_\alpha\right) \cong 2\Phi(Z_\alpha) = \alpha. \quad (4)$$

Из требования

$$|\sigma(P, T, n) - \sigma_0(P)| < \Delta_\sigma,$$

где Δ_σ — предельная допустимая ошибка оценки $\sigma_0(P)$, получаем

$$N = \frac{T_\sigma}{\tau_0} \geq \frac{Z_\alpha^2 \sigma_0^2(P)}{2\Delta_\sigma^2}.$$

Таким образом:

$$T_\sigma \geq \tau_0 \frac{Z_\alpha^2}{2q_\sigma^2}, \quad (5)$$

здесь $q_\sigma = \frac{\Delta_\sigma}{\sigma_0(P)}$ представляет предельную ошибку оценки $\sigma_0(P)$, выраженную в долях самого же $\sigma_0(P)$.

Задаваясь 95% надежностью ($\alpha = 0,95$), находим $Z_\alpha = 1,96$. Требуя, чтобы предельная ошибка оценки $\sigma_0(P)$ не превышала 20%, то есть чтобы $q_\sigma \leq 0,2$, получаем

$$T_\sigma \geq 0,4 \div 5,6 \text{ мин.} \quad (5')$$

Экспериментальной проверкой было показано [4], что при вычислении коэффициента корреляции для непрерывных случайных стационарных процессов необходимый интервал усреднения T_p в первом приближении можно определить из соотношения $\sigma_p = \frac{1-\rho^2}{N}$, (6)

откуда $N = \frac{T_p}{\tau_0} \geq \left(\frac{1-\rho^2}{\sigma_p}\right)^2$, и, следовательно,

$$T_p \geq \tau_0 \left(\frac{1-\rho^2}{\sigma_p}\right)^2. \quad (6')$$

Если ограничиться точностью 10% от максимального значения $\rho(\tau)$, то получим $T_p \geq 100 \tau_0 [1-\rho^2(\tau)]^2$ (7) и при $\rho(\tau)=0,5$ и $\tau_0=0,5 \div 7$ сек

$$T_p \geq 0,47 \div 6,5 \text{ мин.} \quad (7')$$

Таким образом, из (3'), (5') и (7') следует, что при допустимых погрешностях за интервал усреднения для определения основных статистических характеристик может быть взята трехминутная запись для „быстрых флуктуаций“ и пятиминутная — для более „медленных“. Этот интервал совпадает с интервалом усреднения, взятым другими авторами [5, 6].

Следует отметить, что соотношения (3), (5) и (6), строго говоря, справедливы для случайных величин, подчиняющихся следующим условиям:

1. В течение времени опыта (время записи при одном разное) закон распределения остается постоянным;
2. Число независимых событий N в данном непрерывном процессе достаточно велико;
3. Определяемые величины распределены по нормальному или во всяком случае не слишком сильно отличающемуся от нормального закону.

Заметим, что из (3), (5) и (6') следует, что при одинаковых предельных ошибках оценок $U_0(P)$, $\rho_0(P, \tau)$ и $\sigma_0(P)$, выраженных в долях самих определяемых величин, оптимальные интервалы усреднения T_u , T_p и T_s различны, причём $T_u < T_p < T_s$.

Таблица 1

$n = \frac{T}{\Delta T}$	$\bar{U}(P, T, n)$	$\sigma^2(P, T, n)$	$\sigma(P, T, n)$	$\rho(P_1, P_2)$
30	159,3	29,5	5,43	
60	161,1	36,6	6,05	0,37
90	160,7	44,8	6,70	
120	160,2	51,8	7,20	0,5
150	159,2	54,6	7,40	0,54
180	160,0	58,2	7,63	
210	161,7	74,1	8,60	
240	161,9	73,2	8,60	
270	162,4	71,0	8,55	0,67
300	162,2	68,7	8,43	0,66
330	161,7	69,7	8,28	
360	161,8	68,7	8,35	0,66
390	161,9	69,0	8,28	
420	162,0	67,3	8,20	0,66

В таблице 1 приведены экспериментальные результаты обработки записи принятого сигнала при различных интервалах усреднения и постоянном $\Delta T = 1$ сек. Максимальный разброс среднего отклонения не превосходит 20% установившегося значения, начиная с $T \geq 150$ сек, а среднее значение $\bar{U}(P, T, n)$ не выходит за рамки допустимых погрешностей, начиная с 30 секунд.

Поскольку радиус временной автокорреляции в этом сеансе записи сигнала был $\tau_0 \approx 2,5$ сек (рис. 1, 2), получаемые результаты удовлетворительно согласуются с полученной оценкой.

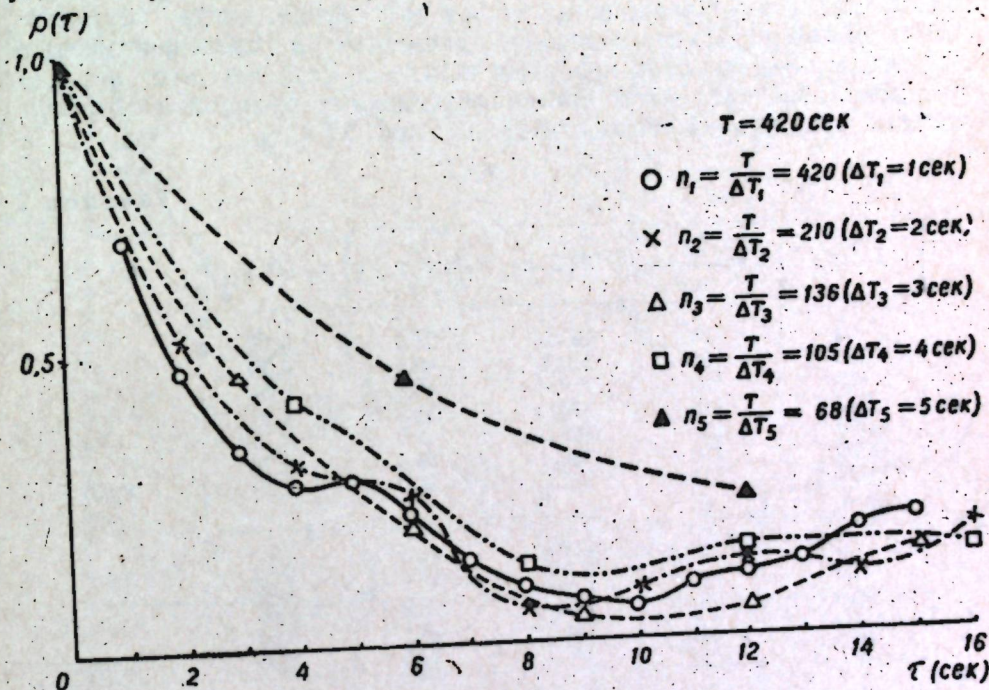


Рис. 1. Поведение временного коэффициента автокорреляции при различных интервалах усреднения

На рис. 1 представлено поведение временного коэффициента автокорреляции при различных интервалах усреднения T . Видно, что при временных сдвигах, когда корреляционная зависимость флуктуаций еще заметна ($\rho(\tau) \geq 0,5$), разброс экспериментальных данных не превышает допустимых погрешностей при $T \geq 168$ сек, а при $T \geq 216$ сек отклонение коэффициента от установившихся значений не превышает 10% при любых τ , что также удовлетворительно согласуется с оценкой (7')!

Отметим, что электронно-счётная машина „Стрела“, при помощи которой обрабатывались наши экспериментальные данные, выдавала среднее значение $\bar{U}(P, T, n)$ и дисперсию $\sigma_u^2(P, T, n)$ через каждые 30 точек дискретной выборки, так что для каждого сеанса записи в отдельности можно было проследить, восстанавливается ли $\bar{U}(P, T, n)$ и $\sigma^2(P, T, n)$ в допустимых пределах ошибок на интервале усреднения T . Полученные данные, таким образом, полностью оправдали выбранный нами интервал T .

Вопрос о том, как выбрать число точек $n = \frac{T}{\Delta T}$ в дискретной выборке на временном интервале T , сводится к вопросу о более рациональном выборе интервала времени ΔT . Этот вопрос подробно рассмотрен ранее [7]. Показано, что целесообразно выбрать $\Delta T > \tau_0$, так как при дискретно выборочном методе оценки статистических характеристик процесса дискретная выборка объема n некоррелированных величин даёт большую статистическую точность оценки, чем выборка того же объема, но на меньшем временном интервале $T' < T$. Однако надо отметить, что ΔT целесообразно взять больше радиуса корреляции τ_0 лишь в том случае, когда нас интересует только среднее значение, дисперсия и пространственные корреляционные функции принятых сигналов. Если же нас интересует поведение временных автокорреляционных функций и скорости (частоты) флуктуаций, то мы обязаны взять $\Delta T < \tau_0$.

Таблица 2

	$T(\text{сек})$	$n = \frac{T}{\Delta T}$	$\bar{U}(P, T, n)$	$\sigma_u^2(P, T, n)$	$\sigma_u(P, T, n)$	$\rho(P_1, P_2)$
$\Delta T = 2 \text{ сек}$	60	30	161,0	25,3	5,03	0,63
	120	60	160,4	40,5	6,35	
	180	90	159,8	45,6	6,71	
	240	120	161,9	71,2	8,45	
	300	150	162,5	66,5	8,15	
	360	180	162,2	68,4	8,27	
	410	205	162,3	68,0	8,25	
$\Delta T = 3 \text{ сек}$	90	30	161,5	45,0	6,71	0,64
	180	60	160,2	59,2	7,70	
	270	90	162,7	75,0	8,66	
	360	120	161,8	74,1	8,61	
	411	137	162,1	73,8	8,59	
$\Delta T = 4 \text{ сек}$	120	30	160,3	49,0	7,00	0,66
	240	60	161,9	70,6	8,40	
	360	90	162,2	64,1	8,01	
	408	102	162,0	62,0	7,88	
$\Delta T = 6 \text{ сек}$	180	30	159,5	45,0	6,71	0,56
	360	60	161,5	76,3	8,74	
	408	68	161,7	79,3	8,91	

В табл. 2 приведены экспериментальные, результаты (того же сеанса записи, что и в табл. 1) средних значений $\bar{U}(P, T, n)$, дисперсии $\sigma_u^2(P, T, n)$ и пространственно-поперечной корреляционной функции при различных интервалах усреднения T и различном числе точек n , соответствующих различным ΔT .

Из приведенных таблиц видно, что статистическая точность оценки средних значений и дисперсии уровня принятого сигнала получается приблизительно одна и та же, используя:

1. 210 точек при $\Delta T = 1 \text{ сек}$ ($T = 210 \text{ сек}$).
2. 120 точек при $\Delta T = 2 \text{ сек}$ ($T = 240 \text{ сек}$).
3. 90 точек при $\Delta T = 3 \text{ сек}$ ($T = 270 \text{ сек}$).
4. 60 точек при $\Delta T = 6 \text{ сек}$ ($T = 360 \text{ сек}$).

Таким образом, для облегчения счета целесообразно использовать в данном случае $T = 270 \text{ сек}$ при $\Delta T = 3 \text{ сек}$.

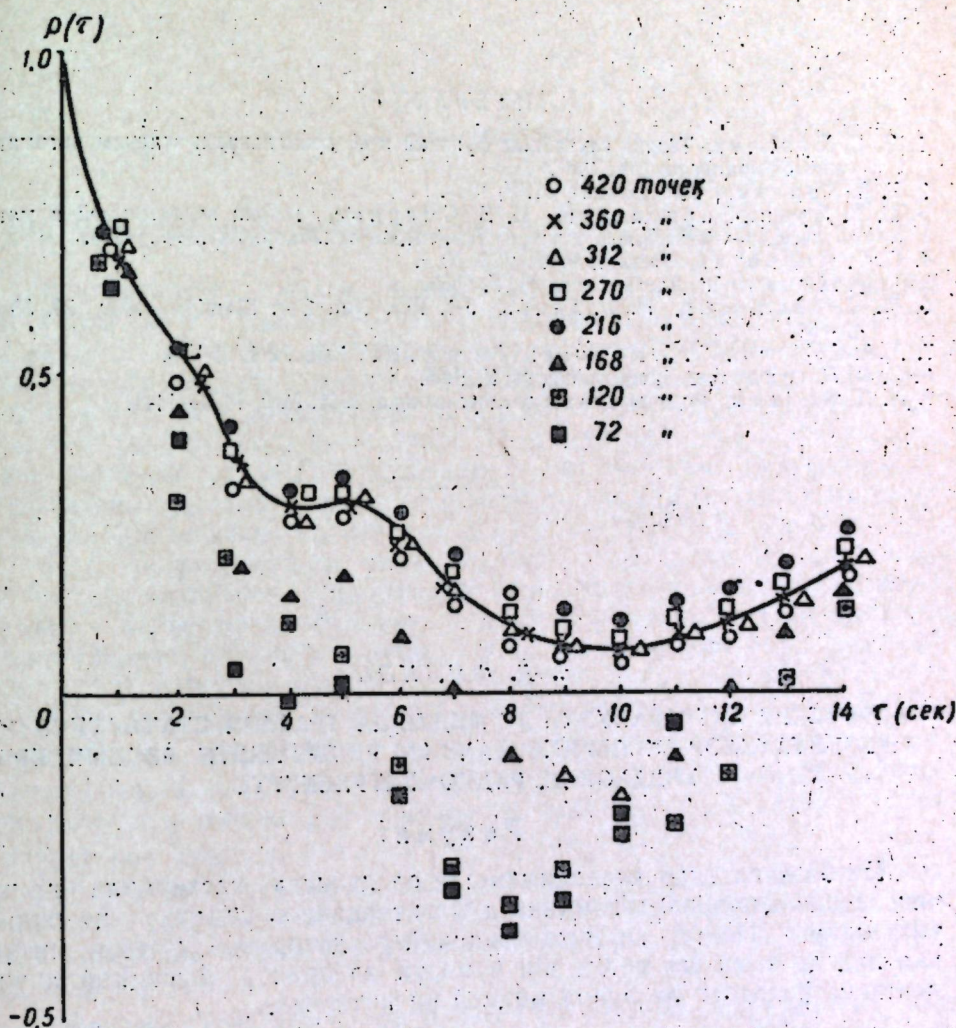


Рис. 2. Временной коэффициент автокорреляции флуктуаций амплитуды принятого сигнала.

На рис. 2 приведен временной коэффициент автокорреляции флуктуаций амплитуды принятого сигнала (того же сеанса измерений) при постоянном интервале $T = 420 \text{ сек}$, но различных τ . Отсюда видно, во-первых, что для изучения поведения коэффициента автокорреляции необходимо использовать $\Delta T \lesssim 2 \text{ сек}$, и, во-вторых, если использовать $\Delta T > 2 \text{ сек}$ (т. е. $\Delta T > \tau_0$), то сильнее выявляется низкочастотный спектр флуктуаций, в то время как высокочастотный спектр учитывается слабее.

В наших экспериментах мы в основном пользовались значением $\Delta T = 1$ сек и 2 сек и только в нескольких сеансах измерений с очень «быстрыми» флуктуациями выбиралось $\Delta T = 5,0$ сек.

ЛИТЕРАТУРА

1. В. С. Пугачев, Теория случайных функций и её применение к задачам автоматического управления, М., 1957.
2. Г. А. Карпеев, Диссертация, МГУ, 1957.
3. И. В. Дунин-Барковский, И. В. Смирнов, Теория вероятностей и математическая статистика в технике, Гос. изд-во тех. теор. лит., М., 1955.
4. С. Ф. Миркотан, Вестник МГУ, 1956, № 1.
5. Ч. Ц. Цыдыпов, Диссертация, МГУ, 1958.
6. M. S. Thompson, H. B. Janes, J-l. Res. Nat. Bur. Standart, 1959, 63, № 1, 45—51.
7. А. А. Семенов, Т. А. Карнеев, Вестник МГУ, 1958, № 4, 71—83.
8. С. Ф. Миркотан, Диссертация, МГУ, 1955.
9. Н. Д. Филипп, Радиотехника и электротехника, 1961, № 9, 1433—1441.

Н. Д. ФИЛИПП

АПРЕЧИЕРЯ ИНТЕРВАЛУЛУЙ ДЕ МИДИЕ ЛА ТРАТАРЯ СТАТИСТИКЭ
А РЕЗУЛТАТЕЛОР ЕКСПЕРИМЕНТАЛЕ ЫН ЧЕ ПРИВЕШТЕ РЭСПЫНДИРЯ
УНДЕЛОР ДЕ РАДИО УЛТРАСКУРТЕ

Резумат

Пе база дателор експериментале се дискуте кестиуниле принципале але трэтэрий статистиче а флуктуацнилоу унделоу де радио ултраскурте. Пентру анумите кондиций се детерминэ ординя интервалулуй де тимп Ын медие ши нумэрул валорилор функцией акцидентале, фолосите ла луаря медией пе интервал.

КРАТКИЕ СООБЩЕНИЯ ПО МАТЕМАТИКЕ

В. И. АРНАУТОВ

ТОПОЛОГИЧЕСКИЙ РАДИКАЛ БЭРА И РАЗЛОЖЕНИЕ КОЛЬЦА

В настоящей заметке доказывается, что известная теорема М. Холла [4] о разложении ассоциативных конечномерных алгебр может быть обобщена на топологические кольца. Как известно, эта теорема обобщалась Брауном и Маккеем [2] для ассоциативных колец с условием минимальности для левых идеалов (m -кольца), затем Фейтом [3], Андрунакиевичем [1] для таких колец K , для которых фактор-кольца $K/R(K)$ удовлетворяют условию минимальности для главных правых идеалов (MP-кольца), где $R(K)$ — соответственно радикал Джекобсона, произвольный наднильпотентный радикал.

Под топологическим кольцом будем понимать ассоциативное кольцо, являющееся хаусдорфовым пространством, причем операции кольца — непрерывные функции от двух переменных. Под идеалом ниже следует понимать двусторонний не обязательно замкнутый идеал. Как известно, элемент x топологического кольца K называется нильпотентным, если для любой окрестности нуля A_α существует такое натуральное число n , что $x^i \in A_\alpha$ для всех $i > n$. Аналогично, идеал I топологического кольца K называется нильпотентным, если для любой окрестности нуля A_α существует такое натуральное число n , что $I^n = \{\sum_{i_1, \dots, i_n} x_{i_1} \dots x_{i_n} \mid x_{i_j} \in I\} \subseteq A_\alpha$.

Обозначим через $N(K)$ замыкание суммы всех нильпотентных идеалов топологического кольца K . Для каждого порядкового числа α определим замкнутый двусторонний идеал $N_\alpha(K)$ следующим образом.

Положим $N_0(K) = 0$ и допустим, что $N_\alpha(K)$ определены для всех $\alpha < \beta$. Если β — предельно, то возьмем за $N_\beta(K)$ замыкание суммы всех идеалов $N_\alpha(K)$, где $\alpha < \beta$. Если же $\beta = \gamma + 1$, то рассмотрим фактор-кольцо $\bar{K} = K/N_\gamma(K)$. За $N_\beta(K)$ возьмем прообраз в K идеала $N(\bar{K})$ кольца \bar{K} . Существует такое порядковое число τ , что $N_\tau(K) = N_{\tau+1}(K)$. Положим $N_\tau(K) = L(K)$ и назовем $L(K)$ топологическим радикалом Бэра. Если $L(K) = 0$, то K называется L -полупростым кольцом.

Предложение 1. Если идеал I топологического кольца K обладает полной системой групповых окрестностей нуля, то $L(I) = \cap L(K)$.

Как обычно, говорим, что топологическое кольцо удовлетворяет условию минимальности для двусторонних идеалов, если в любом множестве двусторонних идеалов, не содержащихся в некоторой окрестности нуля A_α , существует минимальный идеал.

Предложение 2. В любом топологическом кольце K , удовлетворяющем условию минимальности для двусторонних идеалов, $L(K)$ является нильпотентным идеалом.

Топологическое кольцо K называется лево (право) ограниченным, если для любой окрестности нуля A_α существует такая окрестность нуля A_β , что $K \cdot A_\beta = \{a \cdot b/a \in K, b \in A_\beta\} \subseteq A_\alpha$ ($A_\beta K \subseteq A_\alpha$). Наконец, топологическое кольцо называется ограниченным, если оно лево и право ограничено.

Предложение 3. В ограниченном коммутативном кольце K $L(K)$ совпадает с множеством всех нильпотентных элементов кольца K .

Как известно, топологическое кольцо K называется линейно топологическим, если оно обладает полной системой окрестностей нуля из левых идеалов. Линейно топологическое кольцо K называется линейно компактным, если всякий фильтр из классов вычетов по замкнутым левым идеалам имеет непустое пересечение. Наконец, линейно компактное кольцо K называется в узком смысле линейно компактным; если всякий непрерывный гомоморфизм кольца K в линейно топологическое кольцо \bar{K} является открытым [5].

Предложение 4. В ограниченном, в узком смысле линейно компактном кольце K $L(K) = I(K)$ и является нильпотентным идеалом ($I(K)$ — алгебраический радикал Джекобсона кольца K).

Из предложения 4 и теоремы 1 из [7] получаем

Следствие 1. Ограниченное, в узком смысле линейно компактное L -полупростое кольцо есть полная прямая сумма с тихоновской топологией дискретных матричных колец над телами.

Ограниченное кольцо K назовем λ -кольцом, если всякий замкнутый идеал I кольца K , являющийся L -полупростым кольцом, является линейно компактным кольцом, и фактор-кольцо $K/L(K)$ является в узком смысле линейно компактным кольцом.

Можно доказать, что класс λ -колец содержит класс бикомпактных и класс ограниченных, в узком смысле линейно компактных колец. В дискретном случае класс λ -колец совпадает с классом таких колец K , для которых фактор-кольцо $K/L(K)$ являются m -кольцами.

Очевидно, что полная прямая сумма регулярных в смысле Неймана колец является регулярным кольцом.

Из определения λ -кольца, следствия 1 получаем

Следствие 2. Для любого λ -кольца K фактор-кольцо $K/L(K)$ является регулярным кольцом.

Лемма 1. Замыкание регулярного идеала в ограниченном кольце K является L -полупростым кольцом.

Используя лемму 1, определение λ -кольца, предложение 1 и следствия 1, 2, легко доказать

Предложение 5. Максимальный регулярный идеал K_1 λ -кольца K является замкнутым идеалом и обладает единицей e .

Если Q — идеал кольца K , то через Q_K^* обозначим двусторонний аннулятор идеала Q в кольце K . Имеет место утверждение

(1) Если Q — такой идеал кольца K , что фактор-кольцо K/Q — регулярно, то $Q \cap (Q_K^*)^2 = 0$ (см., например [1] лемма 1).

Как обычно, говорим, что кольцо K ограничено радикалом L , если $L_K^* \subseteq L$.

Теорема. Любое λ -кольцо K представимо единственным образом в виде прямой суммы с тихоновской топологией регулярного кольца K_1 и кольца K_2 , ограниченного радикалом $L \cdot K_1$ есть полная прямая сумма с тихоновской топологией дискретных матричных колец над телами.

Доказательство. Пусть K_1 — максимальный регулярный идеал λ -кольца K и e — единица в K_1 . Рассмотрим разложение $K = Ke + K(1-e)$. Тогда $K_1 = Ke = \{ae/a \in K\}$. Обозначим $K(1-e) = \{a - ae/a \in K\}$ через K_2 . Топологии в K_1 и K_2 определим, как в подкольцах кольца K . Используя непрерывность операций в кольце K , легко проверить, что топология в K совпадает с топологией в прямом произведении $K_1 \times K_2$ топологических пространств K_1, K_2 . Можно проверить, что $L(K) = L(K_2) = L$ и, следовательно, K_1/L является регулярным кольцом. Согласно (1) $(L_{K_1}^*)^2$ алгебраически и з о м о р ф е н некоторому идеалу кольца K_2/L . Так как $K_2 = K/K_1$ не содержит регулярных идеалов, то $(L_{K_2}^*)^2 = 0$. Следовательно, $L_{K_2}^* \subseteq L$, т. е. K_2 ограничено радикалом L .

Пусть $K = K_1^1 + K_2^1$ — второе разложение, удовлетворяющее условию теоремы. Тогда $K_1^1 \subseteq K_1$. Если $K_1^1 = K_1$, то и $K_2^1 = K_2$. Предположим, что $K_1^1 \subset K_1$. Тогда $K_1 \cap K_2^1 \neq 0$ и $(K_1 \cap K_2^1) \cap L(K_2^1) = 0$. Это противоречит ограниченности кольца K_2^1 радикалом L . Этим теорема полностью доказана.

Автор пользуется случаем выразить свою признательность В. А. Андрунакиевичу, под руководством которого эта работа выполнена.

ЛИТЕРАТУРА

1. В. А. Андрунакиевич, Радикалы и разложение кольца, ДАН СССР, т. 145, № 1, (1962), 9—12.
2. B. Brown, N. H. McCoy, The maximal regular ideal of a ring, Proc. Amer. Math. Soc. 1 (1950), 165—171.
3. C. Faith, Ring with minimum condition on principal ideals, Arch. Math., 12, 179.
4. M. Hall, The position of the radical in algebra, Trans., Math. Soc., 48 (1940) 319—404.
5. H. Leptin, Linear kompakte Moduln un Ringe, Math., Z., 62 (1955), 241—267.
6. K. Humakura, A note on Wedderburn decompositions of compact rings, Proc. Japon. Acad., 35, № 7 (1959), 313—315.
7. D. Zelinsky, Linearly compact modules and rings, Amer. J. Math., 75, (1953), 79—90.

И. У. БРОНШТЕЙН

О РАЗЛИЧНЫХ ПОНЯТИЯХ ПРЕДЕЛА НАПРАВЛЕНИЯ
ЗАМКНУТЫХ МНОЖЕСТВ

1. Пусть Θ — частично упорядоченное множество, направленное по возрастанию [1], и пусть для любого элемента $\alpha \in \Theta$ существует элемент $\beta \in \Theta$ такой, что $\beta > \alpha$. Изображение множества Θ в множество X называется направлением в X с носителем Θ и обозначается через $\{x_\alpha, \alpha \in \Theta\}$.

Говорят, что направление $\{x_\alpha, \alpha \in \Theta\}$ в топологическом пространстве R сходится к точке y , если для любой окрестности $U(y)$ существует элемент $\alpha \in \Theta$ такой, что $x_\beta \in U(y)$ при всех $\beta > \alpha$. Символически это записывают в виде $\lim \{x_\alpha, \alpha \in \Theta\} = y$.

Пусть F_R — множество всех замкнутых подмножеств пространства R . Совокупность всех множеств вида $\mathcal{G} \{A \in F_R : A \subseteq V\}$, где U — произвольное открытое множество из R , образует базис некоторой топологии в F_R . Множество F_R , снабженное этой топологией, обозначается через $\ast R$ [2].

Пусть U_1, \dots, U_n — произвольное конечное число открытых в R множеств. Следуя [3], через $\langle U_1, \dots, U_n \rangle$ обозначим множество

$\mathcal{G} \{A \in F_R : A \subseteq \bigcup_{k=1}^n U_k, A \cap U_k \neq \Delta (k=1, \dots, n)\}$. Совокупность всех

$\langle U_1, \dots, U_n \rangle$ образует базис так называемой финитной [3] топологии в F_R . Множество F_R , снабженное этой топологией, обозначается через ψR .

В дальнейшем пространство R предполагается регулярным, хотя некоторые утверждения справедливы и в хаусдорфовых пространствах.

2. Пусть $\{F_\alpha, \alpha \in \Theta\}$ — направление замкнутых в R множеств. В. И. Пономарев [2] ввел понятия минимального и сильного пределов направления $\{F_\alpha, \alpha \in \Theta\}$.

Определение 1. Говорят, что направление $\{F_\alpha, \alpha \in \Theta\}$ сходится к замкнутому множеству F , если для любой окрестности $U(F) \subseteq R$ найдется элемент $\alpha \in \Theta$ такой, что $F_\beta \subseteq U(F)$ для всех $\beta > \alpha$.

Определение 2. Множество F называется минимальным пределом направления $\{F_\alpha, \alpha \in \Theta\}$, если $\{F_\alpha, \alpha \in \Theta\}$ сходится к F , но не сходится ни к какому собственному (замкнутому) подмножеству множества F .

Минимальный предел направления $\{F_\alpha, \alpha \in \Theta\}$ будем обозначать через $\text{Lim} \{F_\alpha, \alpha \in \Theta\}$.

Определение 3. Направление $\{F_\alpha, \alpha \in \Theta\}$ называют сильно сходящимся к замкнутому множеству $F \subseteq R$, если направление $\{F_\alpha, \alpha \in \Theta\}$ точек $F_\alpha \in \psi R$ сходится к точке $F \in \psi R$.

Сильный предел направления $\{F_\alpha, \alpha \in \Theta\}$ будем обозначать через $\text{Lim} \{F_\alpha, \alpha \in \Theta\}$.

Обобщая понятия, введенные Хаусдорфом [4], сформулируем еще два определения.

Определение 4. Верхним топологическим пределом направления $\{F_\alpha, \alpha \in \Theta\}$ называется множество всех точек $x \in R$ таких, что для любой окрестности $V(x)$ и любого $\alpha \in \Theta$ найдется $\beta > \alpha$, для которого $F_\beta \cap V(x) \neq \Delta$.

Определение 5. Нижним топологическим пределом направления $\{F_\alpha, \alpha \in \Theta\}$ называется множество всех точек $x \in R$, удовлетворяющих условию: для любой окрестности $V(x)$ найдется такой элемент $\alpha \in \Theta$, что для всех $\beta > \alpha$ имеет место $F_\beta \cap V(x) \neq \Delta$.

Верхний (нижний) топологический предел направления $\{F_\alpha, \alpha \in \Theta\}$ будем обозначать через $\overline{\text{lt}} \{F_\alpha, \alpha \in \Theta\}$ ($\underline{\text{lt}} \{F_\alpha, \alpha \in \Theta\}$).

Если $\overline{\text{lt}} \{F_\alpha, \alpha \in \Theta\} = \underline{\text{lt}} \{F_\alpha, \alpha \in \Theta\} = F$, то множество F будем называть топологическим пределом направления $\{F_\alpha, \alpha \in \Theta\}$ и обозначать через $\text{lt} \{F_\alpha, \alpha \in \Theta\}$.

Если $\{\Phi_\gamma, \gamma \in \Theta'\}$ — конфинальная часть направления $\{F_\alpha, \alpha \in \Theta\}$, то

$$\overline{\text{lt}} \{F_\alpha, \alpha \in \Theta\} \supseteq \overline{\text{lt}} \{\Phi_\gamma, \gamma \in \Theta'\},$$

$$\underline{\text{lt}} \{F_\alpha, \alpha \in \Theta\} \subseteq \underline{\text{lt}} \{\Phi_\gamma, \gamma \in \Theta'\}.$$

Если существует $\text{lt} \{F_\alpha, \alpha \in \Theta\}$, то

$$\text{lt} \{F_\alpha, \alpha \in \Theta\} = \text{lt} \{\Phi_\gamma, \gamma \in \Theta'\}.$$

Из самих определений вытекает, что множества $\overline{\text{lt}} \{F_\alpha, \alpha \in \Theta\}$ и $\underline{\text{lt}} \{F_\alpha, \alpha \in \Theta\}$ замкнуты. Кроме того,

$$\underline{\text{lt}} \{F_\alpha, \alpha \in \Theta\} \subseteq \overline{\text{lt}} \{F_\alpha, \alpha \in \Theta\}.$$

3. Цель настоящей заметки — исследовать связь между приведенными выше понятиями.

Теорема 1. Если существует $\text{Lim} \{F_\alpha, \alpha \in \Theta\}$, то существует $\text{lt} \{F_\alpha, \alpha \in \Theta\} = \text{Lim} \{F_\alpha, \alpha \in \Theta\}$.

Доказательство. Введем обозначения:

$$\underline{\text{lt}} \{F_\alpha, \alpha \in \Theta\} = M, \quad \overline{\text{lt}} \{F_\alpha, \alpha \in \Theta\} = N, \quad \text{Lim} \{F_\alpha, \alpha \in \Theta\} = L.$$

Докажем, что $L \subseteq M$. Пусть $x \in L$ и $V(x)$ — произвольная окрестность точки x . Рассмотрим окрестность $\langle V, R \rangle$ точки $L \in \psi R$. Для этой окрестности найдется индекс $\alpha \in \Theta$ такой, что при всех $\beta > \alpha$ имеет место $F_\beta \in \langle V, R \rangle$, поэтому $F_\beta \cap V \neq \Delta$ при всех $\beta > \alpha$. Значит, $x \in M$.

Докажем теперь, что $N \subseteq L$. Пусть $x \in R \setminus L$. Так как пространство R регулярно, найдутся непересекающиеся окрестности $U(L)$ и $V(x)$. Для $U(L)$ найдется элемент $\alpha \in \Theta$ такой, что $F_\beta \subseteq U(L)$ при всех $\beta > \alpha$, то есть $F_\beta \cap V(x) = \Delta$, а это значит, что $x \in R \setminus N$. Следовательно, $N \subseteq L$. Выше мы заметили, что $M \subseteq N$, поэтому $L \subseteq M \subseteq N \subseteq L$, то есть $M = N = L$. Таким образом, топологический предел существует и равен сильному пределу.

Теорема 2. Если существует $\lim \{F_\alpha, \alpha \in \Theta\}$, то $\lim \{F_\alpha, \alpha \in \Theta\} = \overline{\text{lt}} \{F_\alpha, \alpha \in \Theta\}$.

Доказательство. Воспользуемся введенными при доказательстве теоремы 1 обозначениями. Кроме того, обозначим $\lim \{F_\alpha, \alpha \in \Theta\}$ через K .

Пусть $x \in N$. Докажем, что $x \in K$. Допустим противное. Найдутся непересекающиеся окрестности $U(K)$ и $V(x)$. Для $U(K)$ найдется элемент $\alpha \in \Theta$ такой, что $F_\beta \subseteq U(K)$ при всех $\beta > \alpha$, тогда $F_\beta \cap V(x) = \Delta$, что противоречит условию $x \in N$.

Пусть $x \in K$. Докажем, что $x \in N$. Допустим противное. Найдется окрестность $V_0(x)$ и элемент $\alpha_0 \in \Theta$ такие, что $F_\beta \cap V_0(x) = \Delta$ при всех $\beta > \alpha_0$. Обозначим через K' множество $K \setminus V_0$. Множество K' замкнуто. Пусть $W(K')$ — произвольная окрестность множества K' . Тогда $W(K') \cup V_0$ является окрестностью множества K' .

Для этой окрестности найдется элемент $\alpha_1 \in \Theta$ такой, что $F_\beta \subseteq W(K') \cup V_0$ при всех $\beta > \alpha_1$. Пусть $\alpha_2 > \alpha_1$ и $\alpha_2 > \alpha_0$. Тогда при всех $\beta > \alpha_2$ выполняется соотношение $F_\beta \subseteq W(K')$, что противоречит определению минимального предела. Теорема доказана.

Следствие 1. Если существуют минимальный предел и топологический предел направления замкнутых множеств, то они совпадают.

Следствие 2. Если существуют сильный предел и минимальный предел направления замкнутых множеств, то они совпадают.

Докажем теорему, усиливающую следствие 2.

Теорема 3. Если существует сильный предел направления замкнутых множеств, то он является и минимальным пределом.

Доказательство. Пусть $L = \lim \{F_\alpha, \alpha \in \Theta\}$. Для любой окрестности $U(L) \subseteq R$ найдется элемент $\alpha \in \Theta$ такой, что $F_\beta \subseteq U(L)$ при всех $\beta > \alpha$. Докажем, что $L = \lim \{F_\alpha, \alpha \in \Theta\}$. Допустим противное. Найдется собственное подмножество $L' \subseteq L$, удовлетворяющее следующему условию: для любой окрестности $V(L') \subseteq R$ существует индекс $\alpha_0 \in \Theta$ такой, что $F_\beta \subseteq V(L')$ при всех $\beta > \alpha_0$. Пусть $x \in L \setminus L'$. Найдутся непересекающиеся окрестности $V(L')$ и $W(x)$. Поэтому $F_\beta \cap W(x) = \Delta$ при всех $\beta > \alpha_0$, а это, как легко видеть, противоречит условию $x \in L$.

Теорема 4. Если существуют минимальный предел и топологический предел направления замкнутых множеств, то существует сильный предел (и все три предела совпадают).

Доказательство. Введем обозначения: $\lim \{F_\alpha, \alpha \in \Theta\} = L$, $\lim \{F_\alpha, \alpha \in \Theta\} = K$. Согласно следствию 1, $\lim \{F_\alpha, \alpha \in \Theta\} = \text{lt} \{F_\alpha, \alpha \in \Theta\}$. Пусть $\langle U_1, \dots, U_n \rangle$ — произвольная окрестность точки K в ψR . Для $\bigcup_{k=1}^n U_k$ найдется элемент $\alpha \in \Theta$ такой, что $F_\beta \subseteq \bigcup_{k=1}^n U_k$ при всех $\beta > \alpha$. Докажем теперь, что множество K является сильным пределом направления $\{F_\alpha, \alpha \in \Theta\}$. Допустим противное. Тогда, как легко видеть, найдется открытое множество U_0 такое, что $U_0 \cap K \neq \Delta$, причем для любого $\alpha \in \Theta$ найдется элемент $\beta = \varphi(\alpha) > \alpha$, удовлетворяющий условию $F_\beta \cap U_0 = \Delta$. Рассмотрим упорядоченное подмножество $\Theta' \subseteq \Theta$ элементов $\gamma \equiv \varphi(\alpha), \alpha \in \Theta$.

Обозначим через Φ_γ множество $F_{\varphi(\alpha)}$. Направление $\{\Phi_\gamma, \gamma \in \Theta'\}$ является конфинальной частью направления $\{F_\alpha, \alpha \in \Theta\}$. Действительно, пусть $\beta \in \Theta$. Если $\varphi(\alpha) \equiv \delta > \gamma \equiv \varphi(\beta)$ в Θ' , то $\varphi(\alpha) > \varphi(\beta) > \beta$ в Θ .

Согласно сделанному выше замечанию, $\text{lt} \{\Phi_\gamma, \gamma \in \Theta'\} = \text{lt} \{F_\alpha, \alpha \in \Theta\} = K$. Но $\Phi_\gamma \cap U_0 = \Delta$ при всех $\gamma \in \Theta'$, что противоречит условию $U_0 \cap K \neq \Delta$. Теорема доказана.

Следствие 3. Если существует топологический предел направления замкнутых множеств, а пространство R бикомпактно, то существует и сильный предел направления (и оба предела совпадают).

Действительно, в работе [2] показано, что в бикомпакте всегда существует минимальный предел направления замкнутых множеств. Заметим, что следствие 3 является обращением теоремы 1 в бикомпактах.

Если R — не бикомпакт, то из существования топологического предела направления замкнутых в R множеств, вообще говоря, не следует существование минимального предела (и тем более — сильного предела).

Заметим также, что из существования минимального предела, вообще говоря, не следует существование сильного предела. Однако имеет место следующая

Теорема 5. Следующие два утверждения эквивалентны:

а) $F = \lim \{F_\alpha, \alpha \in \Theta\}$,

б) $F = \lim \{\Phi_\lambda, \lambda \in \Theta'\}$ для любой конфинальной части $\{\Phi_\lambda, \lambda \in \Theta'\}$

направления $\{F_\alpha, \alpha \in \Theta\}$.

Доказательство проводится аналогично доказательству теоремы 4.

4. Известно [3], что в пространстве замкнутых подмножеств компактного метрического пространства финитная топология индуцируется метрикой — склонением двух множеств по Хаусдорфу [4]. Поэтому понятие сильного предела является обобщением понятия метрического предела, а теорема 1 и следствие 3 — обобщением соответствующих теорем Хаусдорфа [4].

ЛИТЕРАТУРА

1. Б. З. Вулих. Введение в теорию полуупорядоченных пространств. ГИФМЛ, М., (1961).
2. В. И. Пономарев. Новое пространство замкнутых множеств и многозначные непрерывные отображения бикомпактов. Матем. сборник, т. 48 (90), № 2 (1959), 191—212.
3. E. Michael, Topologies on spaces of subsets, Trans. Amer. Math. Soc., vol. 71 (1951), 152—183.
4. Ф. Хаусдорф. Теория множеств. ОНТИ, М., (1937).

К. С. СИБИРСКИЙ

РЕШЕНИЕ ПРОБЛЕМЫ ЦЕНТРА ДЛЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ

$$\frac{dy}{dx} = - \frac{c_{10}x + c_{01}y + c_{20}x^2 + c_{11}xy + c_{02}y^2}{b_{10}x + b_{01}y + b_{20}x^2 + b_{11}xy + b_{02}y^2}$$

1°. Проблема наличия в начале координат центра уравнения

$$\frac{dy}{dx} = - \frac{c_{10}x + c_{01}y + c_{20}x^2 + c_{11}xy + c_{02}y^2}{b_{10}x + b_{01}y + b_{20}x^2 + b_{11}xy + b_{02}y^2}, \quad (1)$$

поставленная в общем виде Пуанкаре [1], состоит в нахождении условий, при которых существует окрестность начала координат O , не содержащая других особых точек кроме точки O и такая, что все интегральные кривые уравнения (1), пересекающие эту окрестность в какой-либо точке (отличной от точки O), являются замкнутыми кривыми, окружающими начало координат.

Проблема центра для уравнения (1) была фактически решена в работах Дюляка [2] и Каптейна [3]. В частности, Каптейном [3] было показано, что для наличия в начале координат центра уравнения

$$\frac{\tilde{d}y}{\tilde{d}x} = - \frac{\tilde{x} - \tilde{c}_{02}\tilde{x}^2 + \tilde{c}_{11}\tilde{x}\tilde{y} + \tilde{c}_{02}\tilde{y}^2}{\tilde{y} + \tilde{b}_{20}\tilde{x}^2 + \tilde{b}_{11}\tilde{x}\tilde{y} + \tilde{b}_{02}\tilde{y}^2} \quad (2)$$

необходимо и достаточно выполнение хотя бы одной из следующих четырех серий условий:

$$I. \tilde{B} = 0; \quad II. \tilde{c}_{02} = \tilde{\beta} = 0; \quad III. \tilde{\alpha} = \tilde{\beta} = 0;$$

$$IV. \tilde{\beta} = \tilde{\alpha} + 5\tilde{B} = \tilde{b}_{20}\tilde{b}_{02} + 2\tilde{b}_{02}^2 + \tilde{c}_{02}^2 = 0,$$

$$\text{где } \tilde{B} = \tilde{b}_{20} + \tilde{b}_{02}; \quad \tilde{\alpha} = \tilde{c}_{11} - 2\tilde{b}_{20}; \quad \tilde{\beta} = \tilde{b}_{11} - 2\tilde{c}_{02}.$$

Позднее вопросы, связанные с решением задачи о наличии в начале координат центра уравнения (1) или его частных случаев, рассматривались в работах [2-16]. Однако, несмотря на то, что при существовании центра уравнение (1) неособым линейным преобразованием координат всегда можно привести к виду (2), усло-

вия, которые налагает наличие центра непосредственно на коэффициенты уравнения (1), до сих пор не получены.

Между тем необходимость совершать каждый раз в уравнении (1) линейные преобразования для проверки условий центра вызывает большие затруднения. Это привело, например, автора статьи [14] к неверному утверждению о наличии фокуса при условии 5' леммы 14, а ее переводчик М. Л. Гервера к утверждению, что справедливость этой леммы легко установить формальным вычислением коэффициентов аналитического интеграла, если заменить условие 5' другим условием 5''.

Интерес к явным выражениям для условий центра через коэффициенты уравнения (1) в последнее время возрос также в связи с появлением ряда работ, в которых изучается качественная картина поведения интегральных кривых уравнения (1) в предположении существования особой точки типа центр [4, 6, 7, 9, 10].

В настоящей заметке устанавливается

Теорема. Для наличия в начале координат центра уравнения (1) необходимо и достаточно выполнение хотя бы одной из следующих трех серий условий: (4)

- 1) $\epsilon > 0, \lambda = B = C = 0;$
- 2) $\epsilon > 0, \lambda = \gamma C - \delta B = N\alpha^3 + Q\alpha^2\beta + P\alpha\beta^2 + M\beta^3 = 0;$
- 3) $\epsilon > 0, \lambda = \gamma + 5B = \delta + 5C = 2c_{11}^2 + 3b_{20}^2 - 5c_{20}c_{02} + 7b_{20}c_{11} - 10b_{11}c_{20} = 0,$

где $\lambda = c_{01} - b_{10}; \quad \epsilon = c_{10}b_{01} - b_{10}c_{01}; \quad \alpha = c_{11} - 2b_{20}; \quad \beta = b_{11} - 2c_{02};$
 $\gamma = b_{01}\alpha + b_{10}\beta; \quad \delta = c_{01}\alpha + c_{10}\beta; \quad B = b_{01}b_{20} - b_{10}b_{11} + c_{10}b_{02};$
 $C = b_{01}c_{20} - b_{10}c_{11} + c_{10}c_{02}; \quad M = c_{10}b_{20} - b_{10}c_{20}; \quad N = c_{01}b_{02} - b_{01}c_{02};$
 $P = c_{01}b_{20} - b_{01}c_{20} + c_{10}b_{11} - b_{10}c_{11}; \quad Q = c_{01}b_{11} - b_{01}c_{11} + c_{10}b_{02} - b_{10}c_{02}.$

2°. Характеристическое уравнение для дифференциального уравнения (1), или что то же для системы дифференциальных уравнений

$$\frac{dx}{dt} = b_{10}x + b_{01}y + b_{20}x^2 + b_{11}xy + b_{02}y^2,$$

$$\frac{dy}{dt} = -(c_{10}x + c_{01}y + c_{20}x^2 + c_{11}xy + c_{02}y^2),$$

имеет вид

$$x^2 + \lambda x + \epsilon = 0. \quad (5)$$

Поскольку центр является неасимптотически устойчивой изолированной особой точкой, то из общих теорем А. М. Ляпунова [17] (теорема I на стр. 127, теорема III на стр. 128 и теорема на стр. 165) и примера 1 на стр. 444 вытекает, что в случае, когда не все коэффициенты b_{10}, b_{01}, c_{10} и c_{01} равны нулю, для наличия в начале координат центра уравнения (1) необходимо, чтобы уравнение (5) имело чисто мнимые корни, что равносильно условиям

$$\lambda = 0, \epsilon > 0. \quad (6)$$

В случае $b_{10} = b_{01} = c_{10} = c_{01} = 0$ [18—20] начало координат для уравнения (1) не может быть центром, так как соотношение

$$c_{20}b^3 - (b_{20} + c_{11})ab^2 + (b_{11} + c_{02})a^2b - b_{02}a^3 = 0$$

определяет для этого уравнения хотя бы одну инвариантную прямую вида $ax + by = 0$, которая является либо интегральной прямой, либо прямой, состоящей сплошь из особых точек.

Таким образом, выполнение условий (6) необходимо для того, чтобы начало координат было центром для уравнения (1).

Допустим теперь, что условия (6) выполнены. В этом случае $c_{10} \neq 0$ и неособой линейной заменой переменных

$$x = \varepsilon \sqrt{\varepsilon} c_{10} \bar{x} - \varepsilon c_{10} b_{10} \bar{y}, \quad y = \varepsilon c_{10}^2 \bar{y}$$

уравнение (1) приводится к виду

$$\frac{d\bar{y}}{d\bar{x}} = - \frac{\bar{x} + \bar{c}_{20} \bar{x}^2 + \bar{c}_{11} \bar{x} \bar{y} + \bar{c}_{02} \bar{y}^2}{\bar{y} + b_{20} \bar{x} + b_{11} \bar{x} \bar{y} + b_{02} \bar{y}^2}, \quad (7)$$

где

$$\begin{aligned} \varepsilon &= c_{10} b_{01} - b_{10}^2; & \bar{c}_{20} &= \varepsilon \sqrt{\varepsilon} c_{20}; & \bar{c}_{11} &= (c_{10} c_{11} - 2b_{10} c_{20}) \varepsilon; \\ \bar{c}_{02} &= (c_{10}^2 c_{02} - c_{10} b_{10} c_{11} + b_{10}^2 c_{20}) \sqrt{\varepsilon}; & \bar{b}_{20} &= (c_{10} b_{20} - b_{10} c_{20}) \varepsilon; \\ \bar{b}_{11} &= (c_{10}^2 b_{11} - c_{10} b_{10} c_{11} - 2c_{10} b_{10} b_{20} + 2b_{10}^2 c_{20}) \sqrt{\varepsilon}; \\ \bar{b}_{02} &= c_{10}^3 b_{02} - c_{10}^2 b_{10} (c_{02} + b_{11}) + c_{10} b_{10}^2 (c_{11} + b_{20}) - b_{10}^3 c_{20}. \end{aligned}$$

В уравнении (7) сделаем теперь обычное преобразование поворота координатных осей по формулам

$$\bar{x} = \tilde{x} \cos \varphi - \tilde{y} \sin \varphi, \quad \bar{y} = \tilde{x} \sin \varphi + \tilde{y} \cos \varphi,$$

где угол φ удовлетворяет соотношению

$$(\bar{c}_{20} + \bar{c}_{02}) \cos \varphi + (\bar{b}_{20} + \bar{b}_{02}) \sin \varphi = 0.$$

Тогда уравнение (7) примет вид (2).

Заметим, что условия Каптейна (3) наличия в начале координат центра уравнения (2), очевидно, эквивалентны следующим: (9)

$$I. \quad \bar{B}^2 + \bar{C}^2 = 0;$$

$$II. \quad \bar{\alpha} \bar{C} - \bar{\beta} \bar{B} = \bar{c}_{20} \bar{\alpha}^3 - (\bar{b}_{20} + \bar{c}_{11}) \bar{\alpha}^2 \bar{\beta} + (\bar{b}_{11} + \bar{c}_{02}) \bar{\alpha} \bar{\beta}^2 - \bar{b}_{02} \bar{\beta}^3 = 0;$$

$$III. \quad (\bar{\alpha} + 5\bar{B})^2 + (\bar{\beta} + 5\bar{C})^2 = 2\bar{\mu} - (\bar{\alpha} + 5\bar{B})\bar{b}_{02} - (\bar{\beta} + 5\bar{C})\bar{c}_{20} = 0,$$

где $\bar{\mu} = 2\bar{c}_{20}^2 + 2\bar{b}_{02}^2 + \bar{c}_{20} \bar{c}_{02} + \bar{b}_{20} \bar{b}_{02}$, $\bar{C} = \bar{c}_{20} + \bar{c}_{02}$ ($\bar{c}_{20} = -\bar{c}_{02}$).

Эта запись условий Каптейна выгодно отличается от записи (3) тем, что все пять выражений, которые приравнены нулю в этих условиях, оказываются инвариантами при любом повороте координатных осей и поэтому условия наличия центра для уравнения (7) можно получить из условий (9) простой заменой тильд черточками.

Таким образом, для наличия в начале координат центра уравнения (7) необходимо и достаточно выполнение хотя бы одной из следующих трех серий условий: (10)

$$1) \quad \bar{B} = \bar{C} = 0;$$

$$2) \quad \bar{\alpha} \bar{C} - \bar{\beta} \bar{B} = \bar{c}_{20} \bar{\alpha}^3 - (\bar{b}_{20} + \bar{c}_{11}) \bar{\alpha}^2 \bar{\beta} + (\bar{b}_{11} + \bar{c}_{02}) \bar{\alpha} \bar{\beta}^2 - \bar{b}_{02} \bar{\beta}^3 = 0;$$

$$3) \quad \bar{\alpha} + 5\bar{B} = \bar{\beta} + 5\bar{C} = 2\bar{c}_{20}^2 + 2\bar{b}_{02}^2 + \bar{c}_{20} \bar{c}_{02} + \bar{b}_{20} \bar{b}_{02} = 0,$$

где $\bar{B} = \bar{b}_{20} + \bar{b}_{02}$; $\bar{C} = \bar{c}_{20} + \bar{c}_{02}$; $\bar{\alpha} = \bar{c}_{11} - 2\bar{b}_{20}$; $\bar{\beta} = \bar{b}_{11} - 2\bar{c}_{02}$.

Другим методом эти условия были получены ранее в [13].

3°. Для установления сформулированной выше теоремы подставим теперь в соотношения (10) выражения (8). Тогда:

1) $\bar{C} = \sqrt{\varepsilon} c_{10} C$; $\bar{B} = c_{10} (c_{10} B - b_{10} C)$; так как $\varepsilon > 0$, а $\lambda = 0$, и, следовательно, $c_{10} \neq 0$, условия $\bar{B} = \bar{C} = 0$ равносильны условиям $B = C = 0$.

$$2) \quad \bar{\alpha} = \varepsilon c_{10} \alpha; \quad \bar{\beta} = \sqrt{\varepsilon} c_{10} \beta; \quad \bar{\alpha} \bar{C} - \bar{\beta} \bar{B} = \sqrt{\varepsilon} c_{10}^3 (\gamma C - \delta B).$$

Отсюда следует, что условие $\bar{\alpha} \bar{C} - \bar{\beta} \bar{B} = 0$ эквивалентно условию

$$\gamma C - \delta B = 0. \quad (11)$$

$$\begin{aligned} \bar{A} &= \bar{c}_{20} \bar{\alpha}^3 - (\bar{b}_{20} + \bar{c}_{11}) \bar{\alpha}^2 \bar{\beta} + (\bar{b}_{11} + \bar{c}_{02}) \bar{\alpha} \bar{\beta}^2 - \bar{b}_{02} \bar{\beta}^3 = \\ &= \varepsilon \sqrt{\varepsilon} c_{10}^3 [\varepsilon^3 c_{20} \alpha^3 + \varepsilon^2 (3b_{10} c_{20} - c_{10} b_{20} - c_{10} c_{11}) \alpha^2 \beta + \\ &+ \varepsilon (-2b_{10} c_{10} b_{20} + 3b_{10}^2 c_{20} + c_{10}^2 b_{11} - 2b_{10} c_{10} c_{11} + c_{10}^2 c_{02}) \alpha \beta^2 - \bar{b}_{02} \beta^3]. \end{aligned}$$

Но $\bar{b}_{02} = c_{10} (c_{10} B - b_{10} C) - M \varepsilon$. С учетом условия (11) имеем далее

$$-\bar{b}_{02} \beta = c_{10} (-c_{10} \gamma C + b_{10} \delta C) + M \varepsilon \beta = \varepsilon (M \delta - c_{10} \alpha C).$$

$$\begin{aligned} \text{Тогда } \bar{A} &= \varepsilon \sqrt{\varepsilon} c_{10}^3 [\varepsilon^2 c_{20} \alpha^3 + \varepsilon (3b_{10} c_{20} - c_{10} b_{20} - c_{10} c_{11}) \alpha^2 \beta + \\ &+ (-2b_{10} c_{10} b_{20} + 3b_{10}^2 c_{20} + c_{10}^2 b_{11} - 2b_{10} c_{10} c_{11} + c_{10}^2 c_{02}) \alpha \beta^2 + \\ &+ (M \delta - c_{10} \alpha C) \beta^2] = \varepsilon^2 \sqrt{\varepsilon} c_{10}^5 [(b_{01}^2 c_{20} - b_{10} b_{01} b_{20} - b_{10} b_{01} c_{11} + \\ &+ b_{10}^2 b_{11}) \alpha^3 + (b_{10} b_{01} c_{20} - c_{10} b_{01} b_{20} - c_{10} b_{01} c_{11} - b_{10}^2 c_{11} + \\ &+ 2b_{10} c_{10} b_{11}) \alpha^2 \beta + c_{10} P \alpha \beta^2 + c_{10} M \beta^3]. \end{aligned} \quad (12)$$

Из условия (11) имеем

$$\begin{aligned} \alpha (b_{01}^2 c_{20} - b_{10} b_{01} b_{20} - b_{10} b_{01} c_{11} + b_{10}^2 b_{11}) &= \alpha c_{10} N + \\ + \beta (-b_{10} b_{01} c_{20} + c_{10} b_{01} b_{20} + b_{10}^2 c_{11} - b_{10} c_{10} b_{11} - c_{10} b_{10} c_{02} + c_{10}^2 b_{02}). \end{aligned}$$

Подставляя это выражение в (12), получаем, что $\bar{A} = \varepsilon^2 \sqrt{\varepsilon} c_{10}^6 (N \alpha^3 + Q \alpha^2 \beta + P \alpha \beta^2 + M \beta^3)$. Условие $\bar{A} = 0$ дает, следовательно,

$$N \alpha^3 + Q \alpha^2 \beta + P \alpha \beta^2 + M \beta^3 = 0.$$

$$3) \bar{\alpha} + 5\bar{B} = c_{10} [c_{10}(\gamma + 5B) - b_{10}(\delta + 5C)]; \bar{\beta} + 5\bar{C} = c_{10} \sqrt{\varepsilon}(\delta + 5C).$$

Отсюда видно, что условия $\bar{\alpha} + 5\bar{B} = \bar{\beta} + 5\bar{C} = 0$ эквивалентны условиям

$$\gamma + 5B = \delta + 5C = 0. \quad (13)$$

$$\begin{aligned} \bar{\mu} &\equiv 2\bar{c}_{20}^2 + 2\bar{b}_{02}^2 + \bar{c}_{20}\bar{c}_{02} + \bar{b}_{20}\bar{b}_{02} = 2\varepsilon^3 c_{20}^2 + 2b_{02}^2 + \\ &+ \varepsilon^2 c_{20}(b_{10}^2 c_{20} - b_{10} c_{10} c_{11} + c_{10}^2 c_{02}) + \varepsilon(c_{10} b_{20} - b_{10} c_{20}) \bar{b}_{02}. \end{aligned}$$

С другой стороны,

$$5\bar{b}_{02} = (-3c_{10} b_{20} + 5b_{10} c_{20} - c_{10} c_{11}) \varepsilon + c_{10} [c_{10}(\gamma + 5B) - b_{10}(\delta + 5C)].$$

Учитывая условие (13), получаем, что

$$5\bar{b}_{02} = (-3c_{10} b_{20} + 5b_{10} c_{20} - c_{10} c_{11}) \varepsilon.$$

Подставляя это выражение в $\bar{\mu}$, получим

$$25\bar{\mu} = \varepsilon^2 c_{10} [10c_{20}(\delta + 5C) + c_{10}(2c_{11}^2 + 3b_{20}^2 - 5c_{20}c_{02} + 7b_{20}c_{11} - 10b_{11}c_{20})].$$

Условие $\bar{\mu} = 0$, с учетом (13), дает в этом случае

$$2c_{11}^2 + 3b_{20}^2 - 5c_{20}c_{02} + 7b_{20}c_{11} - 10b_{11}c_{20} = 0,$$

чем и завершается доказательство теоремы.

Нетрудно заметить, что, полагая в условиях (4) $c_{10} = b_{01} = 1$, $c_{01} = b_{10} = 0$, естественно, получаются условия, эквивалентные условиям (10), а если в условиях (10) положить $\bar{c}_{20} = -\bar{c}_{02}$, то получаются условия Каптейна (3).

4°. В качестве примера рассмотрим дифференциальное уравнение

$$\frac{dy}{dx} = \frac{b(1-x_0)x + (d+e)y + bx^2 + dxu + cy^2}{ay + axu}, \quad (14)$$

к которому заменой x через $x+1$ сводится система дифференциальных уравнений (E_0) из [14].

Условия (4) показывают, что начало координат является центром для уравнения (14) тогда и только тогда, когда выполнена хотя бы одна из следующих двух серий условий:

$$1) ab(x_0 - 1) > 0, \quad d+e=0, \quad c(1-x_0)=a;$$

$$2) ab(x_0 - 1) > 0, \quad d=e=0.$$

Таким образом, при $ab(x_0 - 1) > 0$ и $d+e=0$ начало координат для уравнения (14) является фокусом тогда и только тогда, когда

$$c(1-x_0) \neq a, \quad d \neq 0. \quad (15)$$

Этим показано, что лемма 14 работы [14] справедлива только при выполнении условий 5'', так как они совпадают с условиями (15).

ЛИТЕРАТУРА

1. А. Пуанкаре, О кривых, определяемых дифференциальными уравнениями, М.—Л., 1947.
2. H. Dulac, Bull. sciences math., 32, 230 (1908).
3. W. Картеуп, Proc. Koninkl. Akad. Wet., Amsterdam, 13, 2 p., 1241 (1911), 14, 2 p., 1185 (1912), 15, 1 p., 46 (1912).
4. Н. Н. Баутин, ДАН СССР, 24, № 7, 668 (1939) и Матем. сб., 30, вып. 1, 181 (1952).
5. Л. Н. Белюстина, ПММ, 18, в. 4, 511 (1954).
6. А. Н. Берлинский, Изв. высш. уч. зав., Математика, № 2, 3 (1960) и № 5, 27 (1960).
7. А. П. Воробьев, ДАН БССР, 6, № 5, 281 (1962).
8. И. С. Куклес, Труды Самаркандск. ун-в., в. 107, 49 (1960; на обл. 1961).
9. X. P. Латипов, Автореф. канд. дисс., Самарканд, 1962.
10. Н. А. Лукашевич, ДАН БССР, 4, № 12, 497 (1960).
11. К. Е. Малкин, Уч. зап. Рязанск. пединст., 24, 107 (1960).
12. Н. А. Сахарников, ПММ, 12, в. 5, 669 (1948).
13. К. С. Сибирский, Уч. зап. Кишиневск. ун-в., 11, 115 (1954) и 17, 27 (1955).
14. Тун Цзинь-чжу, Математика. Пер. сб. переводов иностр. статей, 6:2, 150 (1962).
15. M. Frommer, Math. Ann., 109, N. 3, 395 (1934).
16. И. И. Широв, ДАН УзССР, № 8, 11, (1962).
17. А. М. Ляпунов, Общая задача об устойчивости движения, М.—Л., 1950.
18. H. Forster, Math. Zeitschr., 43, N. 2, 271 (1937).
19. Г. Е. Шильов, УМН, 5, в. 5, 193 (1950).
20. Л. С. Лягина, УМН, 6, в. 2, 171 (1951).

КРАТКИЕ СООБЩЕНИЯ ПО ФИЗИКЕ.

А. И. БОБРЫШЕВА

К ВЫВОДУ ГАМИЛЬТОНИАНА БИЭКСИТОНА

В работах [1, 2] обсуждаются коллективные свойства экситонов, связанные с их бозе-эйнштейновской конденсацией, которая, как показано в работе [2], может иметь место в ряде полупроводников при температурах порядка 1°К и концентрациях экситонов порядка $10^{16}-10^{17}$ см⁻³. Аналогичный вывод о возможности бозе-эйнштейновской конденсации экситонов сделан в недавно появившихся работах Блатта, Бёера и Брандта [3] и Каселла [4].

В работе [2] рассмотрен гамильтониан экситонов, взаимодействующих с фононами в предположении, что квазиравновесие в экситонной среде установится раньше, чем экситон испытает рассеяние на фононе и что между экситонами преобладает отталкивание. В результате получен фоногидронный спектр элементарных возбуждений $E(p, x)$.

Для вещественности $E(p, x)$ необходимо, чтобы выполнялось следующее условие для фурье-образа энергии взаимодействия экситонов $v(0)$

$$v(0) \geq \frac{4}{9} |C_e - C_h|^2 / DU^2, \quad (1)$$

где C_e и C_h — константы взаимодействия электрона и дырки с акустическими колебаниями решетки; D — плотность кристалла, U — скорость звука в нем.

Однако не исключено, что в некоторых кристаллах во взаимодействии экситонов преобладает притяжение. Тогда, как замечено в работе [1], следует рассматривать газ биэкситонов.

Помимо коллективных свойств экситонов, обсужденных выше, имеются еще и другие свойства, связанные со взаимодействием экситонов. Использование новых мощных источников света возбудило интерес к двухфотонным переходам одного электрона [5] и к одно-временным переходам двух электронов под действием одного кванта света [6]. В связи с этим целесообразно поставить вопрос об одно-временном возбуждении светом двух экситонов или двух связанных экситонов, т. е. биэкситона.

С целью изучения этого круга вопросов мы рассмотрим гамильтониан двух электронов и двух дырок, связанными состояниями которого и будут экситоны и биэкситоны.

Исходный гамильтониан системы может быть записан в виде:

$$\begin{aligned} \hat{H} = & \sum_{g, g'} L(g, g') a_{g\sigma}^+ a_{g'\sigma} + \sum_{h, h'} L(h, h') b_{h\sigma} b_{h'\sigma}^+ + \\ & + \sum_{g, h} L(g, h) a_{g\sigma}^+ b_{h\sigma}^+ + \sum_{h, g} L(h, g) b_{h\sigma} a_{g\sigma} + \\ & + \frac{1}{2} \sum_{g_1, g_2, g_3, g_4} F(g_1, g_2, g_3, g_4) a_{g_1\sigma_1}^+ a_{g_2\sigma_2}^+ a_{g_3\sigma_3} a_{g_4\sigma_4} + \\ & + \frac{1}{2} \sum_{h_1, h_2, h_3, h_4} F(h_1, h_2, h_3, h_4) b_{h_1\sigma_1} b_{h_2\sigma_2} b_{h_3\sigma_3}^+ b_{h_4\sigma_4}^+ + \\ & + \frac{1}{2} \sum_{g_1, g_2, h_1, h_2} F(g_1, g_2, h_1, h_2) a_{g_1\sigma_1}^+ a_{g_2\sigma_2}^+ b_{h_1\sigma_1}^+ b_{h_2\sigma_2}^+ + \\ & + \frac{1}{2} \sum_{g_1, g_2, h_1, h_2} F(h_1, h_2, g_1, g_2) b_{h_1\sigma_1} b_{h_2\sigma_2} a_{g_1\sigma_1} a_{g_2\sigma_2} + \\ & + \sum_{g_1, g_2, h_1, h_2} F(g_1, g_2, g_3, h) a_{g_1\sigma_1}^+ a_{g_2\sigma_2}^+ b_{h\sigma_3}^+ a_{g_3\sigma_3} + \\ & + \sum_{g_1, g_2, h_1, h_2} F(g_1, h; g_3, g_2) a_{g_1\sigma_1}^+ b_{h_2\sigma_2} a_{g_3\sigma_3} a_{g_2\sigma_2} + \\ & + \sum_{h_1, h_2, h_3, g} F(h_1, h_2, h_3, g) b_{h_1\sigma_1} b_{h_2\sigma_2} a_{g\sigma_3} b_{h_3\sigma_3}^+ + \\ & + \sum_{g_1, h_2, h_1, h_4} F(g_1, h_2; h_1, h_4) a_{g_1\sigma_1}^+ b_{h_2\sigma_2} b_{h_1\sigma_1}^+ b_{h_4\sigma_4}^+ + \\ & + \sum_{g_1, h_2, h_1, h_4} F(g_1, h_2; g_2, h_1) a_{g_1\sigma_1}^+ b_{h_2\sigma_2} b_{h_1\sigma_1}^+ a_{g_2\sigma_2} + \\ & + \sum_{g_1, h_1, h_2, \sigma_1, \sigma_2} F(h_1, g_2; g_1, h_2) b_{h_1\sigma_1} a_{g_2\sigma_2}^+ b_{h_2\sigma_2}^+ a_{g_1\sigma_1} \end{aligned} \quad (2)$$

где \vec{g} и \vec{h} — радиусы-векторы узлов решетки, в которых находятся электрон и дырка соответственно; σ — квантовое число спина электрона; $a_{g\sigma}^+$, $a_{g\sigma}$, $b_{h\sigma}^+$, $b_{h\sigma}$ — операторы рождения и уничтожения электронов и дырок соответственно; $L(f_1, f_2)$ и $F(f_1, f_2; f_1', f_2')$ — матричные элементы типа $L(f_1, f_2) = \int \psi_f^*(q) \left[-\frac{\hbar^2}{2m} \Delta_q + V(q) \right] \psi_f(q) dq$

$$F(f_1, f_2, f_1', f_2') = e^2 \int \psi_{f_1}^*(q_1) \psi_{f_2}(q_2) \frac{1}{|q_1 - q_2|} \psi_{f_1'}(q_1) \psi_{f_2'}(q_2) dq_1 dq_2,$$

ψ_f — одноэлектронные волновые функции изолированного атома. Волновая функция всех электронов кристалла, по которой усредняется

гамильтониан (2), построена с учетом принципа Паули и соответствует случаю, когда два электрона из узлов \bar{H} и \bar{Q} из состояния $1s$ перешли в узлы \bar{G} и \bar{L} в состоянии $2s$.

$$\Phi = \frac{1}{N^2} \sum_{\substack{K_1, K_2, K_3, K_4, s, \pi, t, T \\ \bar{G} \bar{H} \bar{L} \bar{Q}}} C(K_1, K_2, K_3, K_4; s, \pi, t, T) e^{iK_1 \bar{G} + iK_2 \bar{L} + iK_3 \bar{H} + iK_4 \bar{Q}} a_{\bar{G}s}^+ a_{\bar{L}\pi}^+ b_{\bar{H}t}^+ b_{\bar{Q}T}^+$$

где $C(K_1, K_2, K_3, K_4, s, \pi, t, T)$ функции волновых векторов и спинов электронов и дырок.

Процедура усреднения производится, применяя теорему Вика. В результате получаем секулярное уравнение, решение которого даст возможность определить энергию взаимодействия двух экситонов.

$$\begin{aligned} f(K_1', K_2', K_3', K_4'; s', \pi', t', T') \left\{ E_0 + \frac{\hbar^2 K_1'^2}{2m_e^*} + 2\varepsilon_g + \frac{\hbar^2 K_2'^2}{2m_e^*} + \frac{\hbar^2 K_3'^2}{2m_h^*} + \right. \\ \left. + \frac{\hbar^2 K_4'^2}{2m_h^*} \right\} + \frac{1}{N} \sum_{K R_1 R_2 R_3} \left\{ F(20, 2R_1, 2R_2, 2R_3) [e^{iKR_1 + i(K_2' + K_1' - K)R_2 - iK_1'R_1} \times \right. \\ \times \varphi_1(K, K_1' + K_2' - K, K_3', K_4'; s', \pi', t', T') - e^{iKR_2 + i(K_2' + K_1' - K)R_3 - iK_1'R_1} \times \\ \times \varphi_1(K, K_1' + K_2' - K, K_3', K_4'; \pi', s', t', T')] + F(1R_1, 1R_2; 10, 1R_3) \times \\ \times e^{iKR_1 + i(K_2' + K_1' - K)R_2 - iK_1'R_1} \varphi_2(K_1', K_2', K, K_3' + K_4' - K; s', \pi', t', T') - \\ - e^{iKR_1 + i(K_2' + K_1' - K)R_2 - iK_1'R_1} \varphi_2(K_1', K_2', K, K_3' + K_4' - K; s', \pi', T', t')] - \\ - F(20, 1R_1, 2R_2, 1R_3) [e^{iKR_2 + i(K_2' + K_1' - K)R_1 - iK_1'R_2} \times \\ \times f(K_1', K, K_3' K_2' + K_4' - K; s', \pi', t', T') + e^{iKR_2 + i(K_1' + K_2' - K)R_1 - iK_1'R_2} \times \\ \times f(K, K_2', K_1' + K_3' - K, K_4'; s', \pi', t', T') + e^{iKR_2 + i(K_2' + K_3' - K)R_1 - iK_1'R_2} \times \\ \times f(K_1', K, K_2' + K_3' - K, K_4'; s', \pi', t', T') + e^{iKR_2 + i(K_1' + K_1' - K)R_1 - iK_1'R_2} \times \\ \times f(K, K_2', K_3', K_1' + K_4' - K; s', \pi', t', T') + F(20, 1R_1; 1R_3, 2R_2) \times \\ \times \sum_{\pi} [e^{iKR_2 + i(K_2' + K_1' - K)R_1 - iK_1'R_2} \delta(\pi' T') f(K_1', K, K_3', K_2' + K_4' - K; s', \pi, t', \pi) + \\ + e^{iKR_2 + i(K_1' + K_2' - K)R_1 - iK_1'R_2} \delta(t' s') f(K, K_2', K_1' + K_3' - K, K_4'; \pi, \pi', \pi, T') + \\ + e^{iKR_2 + i(K_2' + K_3' - K)R_1 - iK_1'R_2} \delta(t' \pi') f(K_1', K, K_2' + K_3' - K, K_4'; s', \pi, \pi, T') + \\ + e^{iKR_2 + i(K_1' + K_1' - K)R_1 - iK_1'R_2} \delta(T' s') f(K, K_2', K_3', K_1' + K_4' - K; \pi, \pi', t', \pi)] \} = \\ = E f(K_1', K_2', K_3', K_4'; s', \pi', t', T'), \end{aligned}$$

где $f(K_1', K_2', K_3', K_4'; s', \pi', t', T') = C(K_1', K_2', K_3', K_4'; s', \pi', t', T') - C(K_2', K_1', K_3', K_4'; \pi', s', t', T') + C(K_2', K_1', K_4', K_3'; \pi', s', T', t') - C(K_1', K_2', K_4', K_3'; s', \pi', T', t')$;

$\varphi_1(K, K_1' + K_2' - K, K_3', K_4'; s', \pi', t', T') = C(K, K_1' + K_2' - K, K_3', K_4'; s', t', T') - C(K, K_1' + K_2' - K, K_4', K_3'; s', \pi', T', t')$;

$\varphi_2(K_1', K_2', K, K_3' + K_4' - K; s', \pi', t', T') = C(K_1', K_2', K, K_3' + K_4' - K; s', \pi', t', T') - C(K_2', K_1', K, K_3' + K_4' - K; \pi', s', t', T')$.

E_0 — энергия основного состояния; $\frac{\hbar^2 K_1'^2}{2m_e^*} + \varepsilon_g, \frac{\hbar^2 K_2'^2}{2m_e^*} + \varepsilon_g, \frac{\hbar^2 K_3'^2}{2m_h^*}, \frac{\hbar^2 K_4'^2}{2m_h^*}$ — энергии зонных электронов и дырок в параболическом приближении.

Член, включающий $F(20, 2R_1, 2R_2, 2R_3)$, описывает кулоновское и обменное взаимодействие электронов;

$F(1R_1, 1R_2; 10, 1R_3)$ — описывает кулоновское и обменное взаимодействие дырок;

$F(20, 1R_1; 2R_2, 1R_3)$ — описывает кулоновское взаимодействие электрона с дыркой;

$F(20, 1R_1, 1R_3, 2R_2)$ — описывает обменное взаимодействие электрона с дыркой.

В заключение выражаю благодарность С. А. Москаленко за руководство работой.

ЛИТЕРАТУРА

1. С. А. Москаленко, ФТТ, 4, вып. 1, 276, 1962.
2. С. А. Москаленко, П. И. Хаджи, А. И. Бобрышева, А. В. Леляков, ФТТ, 5, вып. 5, 1445, 1963.
3. J. M. Blatt, K. W. Boer, A. W. Brandt. Phys. Rev., 126, 1691, 1962.
4. R. C. Casella. J. Phys. Chem. Solids, 24, 19—24, 1963.
5. R. T. Elliott, A. R. Loudon. Physics Letters, 3, № 4, 189, 1963.
6. D. L. Dexter. Phys. Rev., 126, № 6, 1962.

Ю. С. БОЯРСКАЯ, М. И. ВАЛЬКОВСКАЯ.

О НЕКОТОРЫХ ОСОБЕННОСТЯХ ДВИЖЕНИЯ ДИСЛОКАЦИИ В МОНОКРИСТАЛЛАХ NaCl

Вопрос о возникновении и движении дислокаций в щелочногалогидных кристаллах рассматривался в ряде работ [1—8]. При этом в большинстве случаев наблюдения проводились над дислокационными полупетлями, вводимыми в кристалл при действии сосредоточенной силы [1, 2, 5—7] или возникающими при расколе кристалла [8]*. Вопрос о свойствах дислокаций, появляющихся в кристалле при его сжатии или изгибе, изучался сравнительно мало [9].

В связи с этим в настоящей работе методом избирательного травления проводилось наблюдение за возникновением и движением дислокаций на грани (100) монокристаллов NaCl, подвергаемых сжатию. Травителем являлась уксусная кислота. Образцы в виде пластинок, выколотых из большого монокристалла, подвергались сжатию вдоль направления [001]. Было исследовано около 30 монокристаллов NaCl. Появление дислокаций при сжатии наблюдалось на разных образцах при напряжениях $\sigma = 430 \div 600$ г/мм². При этом, в согласии с результатами работы [9], в которой производилось сжатие и изгиб монокристаллов LiF, более легко происходило зарождение винтовых дислокаций, чем краевых.

После сжатия обычно наблюдались полосы скольжения, состоящие из винтовых дислокаций и идущие перпендикулярно направлению сжатия. Ряды, состоящие из краевых дислокаций, шли обычно от мест, где наблюдалась концентрация напряжений (от краёв образца, от осколков кристалла, попавших на поверхность при расколе, от конца трещины).

Наряду с полосами скольжения возникали и отдельные дислокации.

После повторного сжатия наблюдалось, как правило, движение винтовых дислокаций, а иногда и краевых.

При этом существенно отметить, что дислокационные полупетли и их движение наблюдались довольно редко. В основном происходило движение в одну сторону от отдельных ямок травления (рис. 1). Наблюдавшиеся типы движения дислокаций представлены схематически на рис. 2.

* В работах [3, 4] не указывается, каким способом новые дислокации вводились в кристалл и получались ли при этом дислокационные полупетли или какие-либо другие дислокации.

Так как, насколько нам известно из литературы, такое одностороннее движение отдельных дислокаций (в отличие от движения в противоположные стороны концов дислокационных полупетель) в щелочногалогидных кристаллах не изучалось, то представлялось интересным рассмотреть некоторые его закономерности.

Прежде всего был рассмотрен вопрос о скоростях винтовых и краевых дислокаций. В тех областях кристаллов, где после повторного сжатия двигались отдельные винтовые и краевые дислокации, измерялись пути, проходимые ими за время приложения напряжения, и вычислялись их скорости.

Измерение скоростей винтовых и краевых дислокаций на разных кристаллах показало, что винтовые дислокации движутся быстрее, чем краевые.

Среднее значение скорости, полученное из измерений на разных кристаллах (при $\sigma \approx 500$ г/мм²), равно $4 \cdot 10^{-4}$ см/сек для винтовых дислокаций и $1,4 \cdot 10^{-4}$ см/сек для краевых дислокаций. Вдобавок надо учесть, что движение винтовых дислокаций в тех местах кристалла, где не было заметно каких-либо повреждений поверхности и скоплений дислокаций, наблюдалось гораздо чаще, чем краевых. Причем иногда наблюдалось, что от одной плоскостной ямки отходят несколько остроконечных ямок (рис. 2), т. е. движение винтовых дислокаций сопровождалось размножением и образованием полос скольжения.

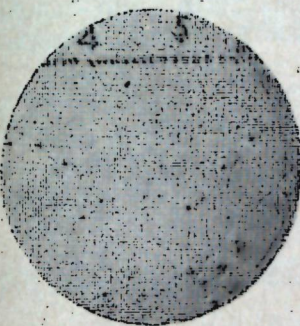


Рис. 1. Движение отдельных винтовых дислокаций. $\times 450$.

Таким образом, образование полос скольжения происходит не только при расширении дислокационных полупетель [1], но и при одностороннем движении отдельных дислокаций. Скорости винтовых дислокаций при движении с размножением порядка 10^{-3} см/сек.

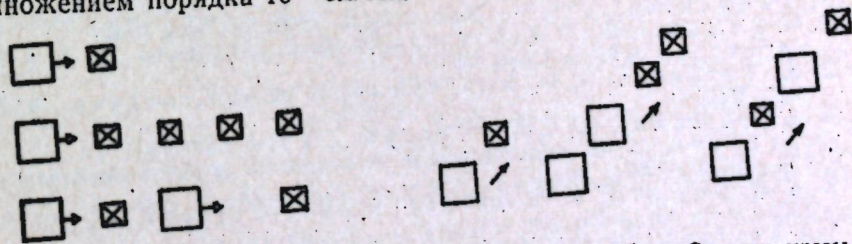


Рис. 2. Схема наблюдавшихся видов движения дислокаций. Стрелки указывают направления движения.

Полученный нами результат относительно подвижности винтовых и краевых дислокаций согласуется с данными работы [9] и противоречит полученному для дислокационных полупетель с выходящими на поверхность краевыми и винтовыми участками [2,5].

Последнее можно объяснить тем, что при одностороннем движении подвижность краевых и винтовых дислокаций может быть иной, чем подвижность соответствующих участков дислокационных линий, входящих в состав полупетель.

Далее было интересно выяснить, проходят ли наблюдавшиеся нами отдельные линии краевых и винтовых дислокаций через весь кристалл или оканчиваются внутри кристалла.

Многokратное травление и полировка показали, что дислокационные линии оканчиваются внутри кристалла.

При этом на некоторых дислокационных линиях вместо обычной остроконечной ямки травления появлялись ямки травления с двумя остроконечными вершинами. На основании этого можно предположить, что эти линии заканчиваются петельками. В большинстве же случаев происходило просто вытравливание дислокационных линий (остроконечная ямка превращалась в плоскодонную).

Так как линии дислокаций не могут обрываться внутри кристалла, то весьма вероятно, что к концам наблюдаемых нами дислокационных линий подходят участки, параллельные исследуемой поверхности, которые не могут быть обнаружены применяемым нами методом. Поэтому вопрос о том, что представляют из себя наблюдавшиеся нами отдельные дислокации, требует для своего выяснения постановки дальнейших опытов*.

В заключение отметим следующий факт. При многократном травлении наблюдалось, что остроконечные вершины ямок травления смещаются (в большинстве случаев на небольшие расстояния в пределах ямки травления) в сторону движения дислокаций. Это может быть вызвано смещением дислокаций под влиянием травления [8].

* Одностороннее движение, например, может наблюдаться при поперечном скольжении винтовых дислокаций [10].

ЛИТЕРАТУРА

1. Дж. Гилман и В. Джонстон, в кн. «Дислокации и механические свойства кристаллов», стр. 82—116, М., 1960.
2. W. G. Johnston and J. J. Gilman, *Jor. Appl. Phys.* 30, № 2, 159, 1959. (Перевод УФН, XX, 3, 1960).
3. В. Н. Рожанский и В. М. Степанова, ДАН, 133, № 4, 1960.
4. В. Н. Рожанский, В. М. Степанова, Е. В. Парвова и А. А. Предводителев, ФТТ, 5, 2, 634, 1963.
5. Э. Ю. Гутманас, Э. М. Надгорный и А. В. Степанов, ФТТ, 5, 4, 1021, 1963.
6. Э. М. Надгорный и А. В. Степанов, ФТТ, 5, 4, 1006, 1963.
7. Дж. Гилман, в кн. «Дислокации и механические свойства кристаллов», стр. 438—455, М., 1960.
8. В. Б. Парийский, А. И. Ландау и В. И. Старцев, ФТТ, 5, 5, 1375, 1963.
9. А. А. Урусовская, «Кристаллография», 3, № 6, 1958.
10. S. Mendelson, *Jor. Appl. Phys.*, 33, № 7, 2182, 1962.

А. Е. МАРИНЧУК

НЕКОТОРЫЕ СООТНОШЕНИЯ ДЛЯ ФУНКЦИЙ ГРИНА АНГАРМОНИЧЕСКОЙ РЕШЕТКИ

Выведем ряд вспомогательных соотношений для функций Грина, которые могут оказаться полезными для приложений.

При этом будем основываться на уже полученных нами результатах, изложенных в статье [1]. Дальнейшие обозначения соответствуют этой работе.

1. Анализом диаграмм найдем сначала выражения для функциональных производных от поляризационного оператора Π по функциям Грина D и D° . Рассмотрим сначала оператор $\Pi_{\vec{k}, -\vec{k}}^{j'j}$ как функционал от D , т. е. мы его представляем в виде суммы неприводимых диаграмм. Здесь и в дальнейшем под операцией приведения понимается исключение одних лишь собственно-энергетических частей, не затрагивая при этом вершины. Линиям этих диаграмм сопоставляются полные функции Грина D (т. е. линии этих диаграмм являются жирными).

Рассмотрим

$$\frac{\delta \Pi_{\vec{k}, -\vec{k}}^{j'j}(\omega_n)}{\delta D_{\vec{l}, -\vec{l}}^{j_1 j_1}(\omega_p)}$$

что соответствует разрыву по очереди каждой линии в диаграммах поляризационного оператора Π и отбору соответствующих индексов $(\vec{l}, j_1, j_1', \omega_p)$. Очевидно, результат функционального дифференцирования представляет собой вершинный оператор с четырьмя концами, причем содержащий лишь сильносвязанные диаграммы. Этот оператор носит название собственного вершинного оператора и будет обозначаться через $\bar{\Gamma}'$. Ряд диаграмм, входящих в $\bar{\Gamma}'$, приведен на рис. 1.

$$1 \times_a; -2 \frac{\Gamma}{\delta}; -1 \times_b; -1 \frac{\Gamma}{2}; \frac{1}{2} \frac{\Gamma}{\delta}$$

Рис. 1.

Все они сильно связаны, т. е. не могут быть разрезаны (по вертикали) на две части разрывом 2 линий. Следует указать, что здесь левым клеммам вершинных диаграмм сопоставляются индексы поляризационного оператора, а правым — индексы функций Грина и поэтому ориентация диаграммы не произвольна. Получающаяся диаграмма имеет лишь по 2 независимых индекса и аргумента (в силу закона сохранения импульсов всех концов диаграммы и наличия δ -символа Кронекера по импульсам в D). Такая диаграмма описывает передачу нулевого импульса и схематически имеет вид, указанный на рис. 2.

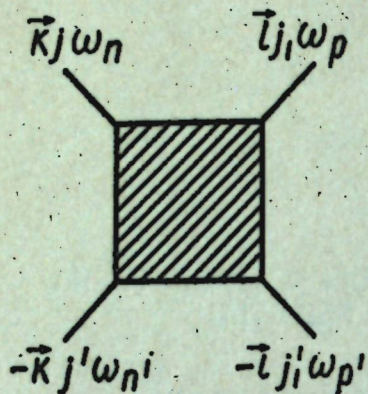
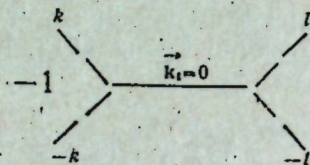


Рис. 2.

Анализ диаграммы приводит к формуле

$$\frac{\delta \prod_{\vec{k}, -\vec{k}}^{j j'}(\omega_n)}{\delta D_{\vec{l}, -\vec{l}}^{j_2 j_3}(\omega_p)} = -\frac{1}{2} \bar{\Gamma}_{\vec{k}, -\vec{k}, \vec{l}, -\vec{l}}^{j j', j_2 j_3}(\omega_n, \omega_n, \omega_p, \omega_p). \quad (1)$$

Заметим, что среди диаграмм $\bar{\Gamma}'$, описывающих передачу нулевого импульса, должно быть и слагаемое

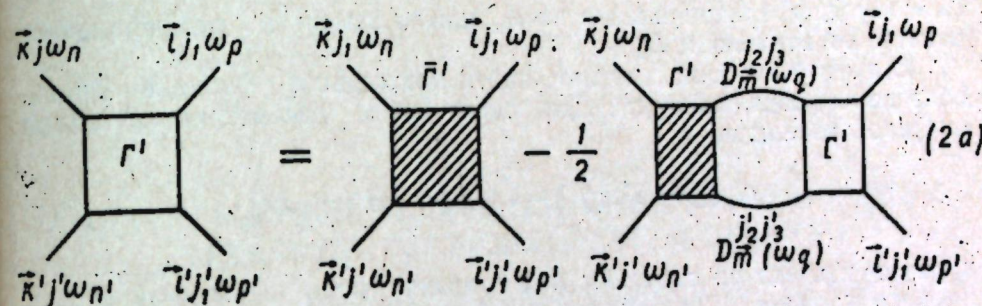


Такая диаграмма также является собственной и входит в определение $\bar{\Gamma}'$. Однако она содержит одну линию с квазиимпульсом $k_l=0$ и, следовательно, мы должны ее опустить.

Располагая определением $\bar{\Gamma}'$, мы можем вывести уравнение Дайсона для вершинного оператора Γ' . Анализом диаграмм убеждаемся, что:

$$\Gamma_{\vec{k}, -\vec{k}, \vec{l}, -\vec{l}}^{j j', j_2 j_3}(\omega_n, \omega_n, \omega_p, \omega_p) = \bar{\Gamma}_{\vec{k}, -\vec{k}, \vec{l}, -\vec{l}}^{j j', j_2 j_3}(\omega_n, \omega_n, \omega_p, \omega_p) - \frac{1}{2} \sum_{\vec{m}, \omega_q} \bar{\Gamma}_{\vec{k}, -\vec{k}, \vec{m}, -\vec{m}}^{j j', j_2 j_3}(\omega_n, \omega_n, \omega_q, \omega_q) D_{\vec{m}}^{j_2 j_3}(\omega_q) D_{\vec{m}}^{j_2 j_3}(\omega_q) \times \times \Gamma_{\vec{m}, -\vec{m}, \vec{l}, -\vec{l}}^{j_2 j_3, j_1 j_1'}(\omega_q, \omega_q, \omega_p, \omega_p). \quad (2)$$

Наряду с (2) может быть установлено более общее соотношение между Γ' и $\bar{\Gamma}'$, справедливое и в том случае, когда они соответствуют передаче импульса и частоты (их индексы связаны лишь общими законами сохранения). Графически это соотношение изобразится следующим образом:



Приведем также выражения для функциональных производных от поляризационного оператора Π и полной функции Грина D по нулевой функции Грина D^0 :

$$\frac{\delta \Pi_{\vec{k}, \vec{l}}^{j j'}(\omega_n)}{\delta D_{\vec{m}}^{j_2 j_3}(\omega_p)} = -\frac{1}{2} \sum_{j_2 j_3} \Gamma_{\vec{k}, \vec{l}, \vec{m}, -\vec{m}}^{j j', j_2 j_3}(\omega_n, \omega_n, \omega_p, \omega_p) D_{\vec{m}}^{j_2 j_3}(\omega_p) \times \times [D_{\vec{m}}^{j_2 j_3}(\omega_p)]^{-1} D_{-\vec{m}}^{j_2 j_3}(\omega_p) [D_{-\vec{m}}^{j_2 j_3}(\omega_p)]^{-1} \quad (3)$$

$$\frac{\delta D_{\vec{k}}^{j j'}(\omega_n)}{\delta D_{\vec{l}}^{j_2 j_3}(\omega_p)} = D_{\vec{k}}^{j j'}(\omega_n) [D_{\vec{l}}^{j_2 j_3}(\omega_p)]^{-2} D_{-\vec{k}}^{j_2 j_3}(\omega_p) \delta_{\vec{k}, -\vec{l}} \delta \omega_n \omega_p - -\frac{1}{2} \sum_{j_2 j_3} \Gamma_{\vec{k}, -\vec{k}, \vec{l}, -\vec{l}}^{j j', j_2 j_3}(\omega_n, \omega_n, \omega_p, \omega_p) D_{\vec{k}}^{j j'}(\omega_n) D_{-\vec{k}}^{j_2 j_3}(\omega_p) \times \times D_{-\vec{l}}^{j_2 j_3}(\omega_p) [D_{-\vec{l}}^{j_2 j_3}(\omega_p)]^{-1} D_{\vec{l}}^{j_2 j_3}(\omega_p) [D_{\vec{l}}^{j_2 j_3}(\omega_p)]^{-1}. \quad (4)$$

Легко проверить, что уравнения (1-4) согласуются между собой.

2. Выведем еще выражение для производной $\frac{\partial}{\partial \omega_x} D_{ke}(\tau - \tau')$, где ω_x собственная частота решетки, воспользуясь приемом из § 19 монографии [2]. Добавим к гамильтониану член

$$H' = \frac{1}{2} \sum_{\vec{m}} B_m \varphi_m \varphi_{-\vec{m}} \quad (5)$$

где $0 < B_m \ll \omega_m$. Для простоты рассматриваем лишь случай с одной ветвью колебаний.

При помощи UV преобразования Боголюбова [3] можно диагонализировать выражение $H_0 + H'$. Новые собственные частоты получаются равными:

$$\tilde{\omega}_m \cong \omega_m - B_m. \quad (6)$$

Поэтому дифференцирование по ω_m можно заменить дифференцированием по величинам B_m .

С другой стороны, можно найти приращение функции Грина, обязанное добавлению H' . Для этого надо рассматривать новый оператор эволюции

$$u'(\beta) = T \exp \left\{ - \int_0^\beta [H_I(\tau) + H'(\tau)] d\tau \right\} \quad (7)$$

и разложить его по степеням B_m , сохраняя лишь члены нулевого и первого порядка. Для приращения функции Грина в указанном приближении получаем выражение:

$$\delta D_{ke}(\tau - \tau') = - \int_0^\beta d\tau_1 \left[\frac{\langle T \varphi_k(\tau) \varphi_e(\tau') H'(\tau_1) u(\beta) \rangle}{\langle u(\beta) \rangle} - D_{ke}(\tau - \tau') \frac{\langle T H'(\tau_1) u(\beta) \rangle}{\langle u(\beta) \rangle} \right]. \quad (8)$$

Подставляя в (8) H' в явном виде и учитывая все возможные средние в первом слагаемом, получаем формулу

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \omega_m} D_{ke}(\tau - \tau') &= \int_0^\beta d\tau_1 D_{km}(\tau - \tau_1) D_{l, -m}(\tau' - \tau_1) - \\ &- \frac{1}{2} \sum_{n_1 n_2 n_3} \int_0^\beta d\tau_1 \dots d\tau_4 D_{kn_1}(\tau - \tau_1) D_{en_2}(\tau' - \tau_2) \\ &\times D_{mn_3}(\tau_1 - \tau_3) D_{-m, n_4}(\tau_1 - \tau_4) \Gamma'(n_4 \tau_1', \dots, n_4 \tau_4'), \end{aligned} \quad (9)$$

где использовалось определение Γ' и свойство $B_m = B_{-m}$. Это выражение и является искомым соотношением.

ЛИТЕРАТУРА

1. А. Е. Маринчук, В. А. Москаленко, ФТТ, 5, 575, 1963.
2. В. А. Абрикосов, Л. П. Горьков, И. Е. Дзялошинский, Методы квантовой теории поля в статистической физике. М., Физматгиз, 1962.
3. Н. Н. Боголюбов, Лекции по квантовой статистике, «Рад. шк.», Киев, 1947.

В. А. МОСКАЛЕНКО, А. Е. МАРИНЧУК

ОДНО СВОЙСТВО МНИМОЙ ЧАСТИ ПОЛЯРИЗАЦИОННОГО ОПЕРАТОРА АНГАРМОНИЧЕСКОЙ РЕШЕТКИ

Для исследования низкотемпературных свойств системы необходимо знать поведение поляризационного оператора $\hat{\Pi}_k(x)$ в окрестности точки $x=0$. Это связано с возможностью представления низкотемпературных свойств системы при помощи функций Грина и поляризационного оператора, взятых при $T=0$ и $x \rightarrow 0$.

Ниже будет показано, что $Im \hat{\Pi}_k(x)$ при $T=0$ обращается достаточно быстро в нуль при $x \rightarrow 0$. Все определения и обозначения этой работы соответствуют тем, которые используются в наших статьях [1, 2].

Для доказательства рассмотрим простейшие диаграммы и обобщим затем полученные таким образом результаты. Вклад простейшей диаграммы a_1 табл. 1 [1] не представляет интереса в этом смысле, так как не имеет мнимой части; поэтому перейдем к исследованию диаграммы a_2 табл. 1 [1], вклад которой при $T=0$ имеет вид:

$$\begin{aligned} \Pi_k^{(2)}(z) &= - \sum_{\vec{l} m} \sum_{\vec{l}' j'} V_{llj}(\vec{k}; \vec{l}; \vec{m}) V_{l'j'j}(\vec{k}; \vec{l}; \vec{m}) \times \\ &\times \frac{\omega_l + \omega_m}{(\omega_l + \omega_m)^2 - z^2}. \end{aligned} \quad (1)$$

Отсюда получаем

$$\begin{aligned} \Pi_k^{(2)}(x \pm i\delta) &= - \sum_{\vec{l} m} \sum_{\vec{l}' j'} V_{llj}(\vec{k}, \vec{l}, \vec{m}) V_{l'j'j}^*(\vec{k}, \vec{l}, \vec{m}) \frac{\omega_e + \omega_m}{(\omega_e + \omega_m)^2 - x^2} \mp \\ &\mp i \frac{\pi}{2} \sum_{\substack{\vec{l} m \\ \vec{l}' j'}} V_{llj}(\vec{k}, \vec{l}, \vec{m}) V_{l'j'j}^*(\vec{k}, \vec{l}, \vec{m}) [\delta(\omega_l + \omega_m - x) - \delta(\omega_l + \omega_m + x)]. \end{aligned} \quad (2)$$

Рассмотрим мнимую часть (2) при $x \rightarrow 0$. Наличие δ -функций приводит к тому, что существенны лишь те ветви колебаний, частоты которых ω_l обеспечивают обращение в нуль аргументов функций

при заданном значении x . Очевидно, что при $x > 0$ следует сохранить лишь первую δ -функцию квадратной скобки формулы (2), а при $x < 0$ — лишь вторую. Выберем x достаточно малым (например, меньше наименьшего значения частот оптических ветвей). Тогда ясно, что в суммах по поляризационным индексам j_1, j_2 следует сохранить лишь вклады акустических ветвей, в то время как индексы j, j' могут соответствовать и оптическим ветвям.

Суммирование по квазимпульсам \vec{l} и \vec{m} заменим интегрированием, учитывая, что коэффициенты при малых значениях квазимпульсов зависят от последних следующим образом:

$$\begin{aligned} V_{\vec{k}, \vec{k}_1, \vec{k}_2}^{j j' \text{opt.} (j_1 j_2) \text{ak.}} &\sim c_1 k \sqrt{k_1 k_2} \Delta(\vec{k} + \vec{k}_1 + \vec{k}_2) \\ V_{\vec{k}, \vec{k}_1, \vec{k}_2}^{(j j') \text{ak.}} &\sim c_2 \sqrt{k k_1 k_2} \Delta(\vec{k} + \vec{k}_1 + \vec{k}_2), \end{aligned} \quad (3)$$

где c_1 и c_2 зависят, вообще говоря, от пространственных углов векторов $\vec{k}, \vec{k}_1, \vec{k}_2$.

Свойства (3) имеют место, например, для моделей, рассматриваемых в [3]. Дальнейшие наши вычисления будут основаны на предположениях (3), а также на аналогичных свойствах коэффициентов W :

$$\begin{aligned} W_{\vec{k} \vec{k}' \vec{k}_1 \vec{k}_2}^{(j j') \text{opt.} (j_1 j_2) \text{ak.}} &\sim c'_1 k k' \sqrt{k_1 k_2} \Delta(\vec{k} + \vec{k}' + \vec{k}_1 + \vec{k}_2) \\ W_{\vec{k} \vec{k}' \vec{k}_1 \vec{k}_2}^{j j' \text{opt.} (j_1 j_2) \text{ak.}} &\sim c'_2 k \sqrt{k' k_1 k_2} \Delta(\vec{k} + \vec{k}' + \vec{k}_1 + \vec{k}_2) \\ W_{\vec{k} \vec{k}' \vec{k}_1 \vec{k}_2}^{(j j') \text{ak.}} &\sim c'_3 \sqrt{k k' k_1 k_2} \Delta(\vec{k} + \vec{k}' + \vec{k}_1 + \vec{k}_2). \end{aligned} \quad (4)$$

Введя среднюю скорость звука s для всех акустических ветвей (поперечных и продольной) мы будем иметь интеграл

$$\begin{aligned} c^2 \int_0^\pi \sin v \, dv \int_0^x l' \, dl \sqrt{k^2 + l^2 + 2kl \cos v} \times \\ \times \delta(sl + s\sqrt{k^2 + l^2 + 2kl \cos v} - x), \end{aligned} \quad (5)$$

где $r=3$ для случая, когда имеет место лишь первое из равенств (3), $r=2$, если имеет место лишь второе равенство (3) и, наконец, $r=\frac{5}{2}$ для случая, когда один потенциал V из (2) ведет себя согласно первому соотношению (3), а второй потенциал — согласно второму.

Взяв сперва интеграл по $y = \cos v$, мы окончательно получаем для указанных трех случаев, соответственно:

$$\begin{aligned} \text{Im } \Pi_k(x \pm i\delta) &\sim x^6 \\ \text{Im } \Pi_k(x \pm i\delta) &\sim x^5 \\ \text{Im } \Pi_k(x \pm i\delta) &\sim x^{\frac{5}{2}} (x \sim 0). \end{aligned} \quad (6)$$

Можно убедиться, что эти формулы справедливы также и при $x < 0$ (сохранив вторую δ -функцию в (2)). Вывод (6) использует ограничение на квазимпульс \vec{k} , а именно $k < \frac{|x|}{s}$.

При исследовании поведения вкладов более сложных диаграмм будем следовать методике, предложенной Латтинджером [4].

Прежде всего необходимо преобразовать выражение вкладов с учетом того, что рассматривается предельный переход $T \rightarrow 0$. При этом частоты становятся непрерывными параметрами, а суммы переходят в интегралы:

$$\frac{2\pi}{\beta} \sum_{\omega_n} \dots = \int_{-\infty}^{\infty} \dots d\omega, \quad (7)$$

а δ — символы Кронекера переходят в δ -функции:

$$\frac{\beta}{2\pi} \delta^{kp}(\omega_{n_1} + \omega_{n_2} - \omega) = \delta(\omega_1 + \omega_2 - \omega). \quad (8)$$

Для последней используется интегральное представление. С учетом сказанного вклад, например, диаграммы в табл. 1 [1] запишется в виде:

$$\begin{aligned} \Pi_{\vec{k}}^{j j'}(\omega_n) &= -\frac{1}{6} \sum_{\substack{\vec{k}_1, \vec{k}_2, \vec{k}_3 \\ j_1, j_2, j_3}} W_{j j' j_1 j_2 j_3}(\vec{k}; \vec{k}_1; \vec{k}_2; \vec{k}_3) W_{j_1 j_2 j_3 j'}(-\vec{k}_1, -\vec{k}_2, -\vec{k}_3, -\vec{k}) \\ &\quad \frac{1}{(2\pi)^2} \iiint_{-\infty}^{\infty} dt \, d\omega_1 \, d\omega_2 \, d\omega_3 \, D_{k_1}^0(\omega_1) \, D_{k_2}^0(\omega_2) \, D_{k_3}^0(\omega_3) \\ &\quad \exp[it(\omega_1 + \omega_2 + \omega_3 - \omega)] \end{aligned} \quad (9)$$

Интегралы по ω_1, \dots можно взять, переходя к комплексным переменным, замыкая контуры на бесконечности в верхней или нижней полуплоскостях, в зависимости от знака t . Получаем:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{i\omega_1} d\omega_1}{\omega_1^2 + \omega_{k_1}^2} = \frac{\pi}{\omega_{k_1}} [\theta(t) e^{-t\omega_{k_1}} + \theta(-t) e^{t\omega_{k_1}}]. \quad (10)$$

Перемножив все необходимые выражения вида (10) для вклада (9), мы получим интеграл вида

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} dt [\theta(t) e^{-(i\omega + \omega_{k_1} + \omega_{k_2} + \omega_{k_3})t} + \theta(-t) e^{(-i\omega + \omega_{k_1} + \omega_{k_2} + \omega_{k_3})t}] = \\ = \frac{1}{\omega_{k_1} + \omega_{k_2} + \omega_{k_3} + i\omega} + \frac{1}{\omega_{k_1} + \omega_{k_2} + \omega_{k_3} - i\omega}. \end{aligned} \quad (11)$$

После замены $i\omega = z = x + i\delta$ мнимая часть выражения (11) преобразуется к виду

$$\pi [\delta(\omega_{k_1} + \omega_{k_2} + \omega_{k_3} - x) - \delta(\omega_{k_1} + \omega_{k_2} + \omega_{k_3} + x)]. \quad (12)$$

Дальнейшее исследование вклада (9) выполняется таким же образом, как и в случае (1). При этом опять-таки существенны лишь акустические ветви j_1, j_2 . Если j и j' также принадлежат к этим ветвям, то мы получим:

$$\text{Im} \prod_k^{j,j'} (x \pm i\delta) \sim x^9 \quad (13)$$

(см. последнее соотношение (4)). Если лишь один из индексов j, j'

соответствует акустической ветви, то мнимая часть вклада (9) $\sim x^{\frac{9}{2}}$, а если оба индекса j, j' соответствуют оптическим ветвям, то имеем $\sim x^{10}$.

Рассмотрим пример вклада диаграммы с тремя вершинами (два независимых закона сохранения частот). Например, для диаграммы e табл. 1[1] имеем:

$$\prod_k^{j,j'} (\omega_n) = -\frac{1}{2} \sum_{\substack{\vec{k}_1, \vec{k}_2, \vec{k}_3, \vec{k}_4 \\ j_1, j_2, j_3, j_4}} W_{j_1 j_2 j_3 j_4}(-\vec{k}; \vec{k}_1; \vec{k}_2; \vec{k}_3) V_{j_1 j_2 j_3}(-\vec{k}_1; -\vec{k}_2; \vec{k}_4) \\ V_{j_1 j_2 j_3}(-\vec{k}_3; -\vec{k}_4; \vec{k}) \frac{1}{\beta^2} \sum_{\omega_{p_1}, \dots, \omega_{p_4}} D_{k_1}^0(\omega_{p_1}) D_{k_2}^0(\omega_{p_2}) D_{k_3}^0(\omega_{p_3}) D_{k_4}^0(\omega_{p_4}) \\ \delta^{k p}(\omega_{p_1} + \omega_{p_2} - \omega_{p_3}) \delta^{k p}(\omega_{p_3} + \omega_{p_4} - \omega_n). \quad (14)$$

Выполнив все интегрирования по частотам согласно методу, изложенному выше, мы получим для мнимой части запаздывающего оператора, взятого в окрестности $x \sim 0$, выражение:

$$\text{Im} \prod_k^{j,j'} (x + i\delta) = -\frac{\pi}{2} \sum_{\substack{\vec{k}_1, \dots, \vec{k}_4 \\ j_1, \dots, j_4}} W V V \frac{2(\omega_{k_1} + \omega_{k_2})}{(\omega_{k_1} + \omega_{k_2})^2 - \omega_{k_1}^2} \times \\ \times [\delta(\omega_{k_3} + \omega_{k_4} - x) - \delta(\omega_{k_3} + \omega_{k_4} + x) - \delta(\omega_{k_1} + \omega_{k_2} + \omega_{k_3} - x) \\ + \delta(\omega_{k_1} + \omega_{k_2} + \omega_{k_3} + x)]. \quad (15)$$

Здесь имеются два независимых интегрирования — по \vec{k}_1 и \vec{k}_2 , что в конечном счете приводит к более высоким степеням по x (x^{10} ,

$x^{\frac{10}{2}}$ или x^{11}).

Очевидно, с ростом порядка диаграмм растет и показатель для соответствующего вклада (при $x \rightarrow 0$). Таким образом, основной вклад получается от диаграммы δ табл. 1[1].

Наряду с установлением характера поведения $\text{Im} \prod_k^{j,j'}(x)$ в окрестности $x \sim 0$ существен также знак этой величины в той же окрестности. В силу матричного характера рассматриваемых величин это не удается, к сожалению, установить для всех элементов матрицы $\prod_k^{j,j'}(z)$.

Ввиду того, что в предельном случае $x \rightarrow 0$ наиболее существенным оказывается вклад в мнимой части поляризационного оператора от диаграммы δ табл. 1 [1], представляет интерес установить знак именно этого слагаемого. При $j=j'$ и $x > 0$ на основании формулы (2) следует, что мнимая часть этого вклада отрицательна. Для произвольных индексов j, j' установить этот знак не удастся. Следует заметить, что, исходя из четности оператора, вытекает нечетность мнимой части этого оператора

$$\prod_k^{\Lambda} (x + i\delta) = \prod_k^{\Lambda} (-x - i\delta) \\ \text{Im} \prod_k^{\Lambda} (x) = -\text{Im} \prod_k^{\Lambda} (-x). \quad (16)$$

Тем самым вышеприведенные формулы (6) должны быть дополнены знаковыми множителями в соответствии с этим общим свойством, так как при их получении мы интересовались лишь абсолютными значениями.

ЛИТЕРАТУРА

1. А. Е. Маринчук, В. А. Москаленко, ФТТ, 5, 575, 1063.
2. А. Е. Маринчук и В. А. Москаленко, Известия АН МССР, этот выпуск.
3. А. А. Maradudin, P. A. Flinn, R. A. Coldwell-Horsfall, Ann. Phys., 15, 337, 360, 1961.
4. J. M. Luttinger, Phys. Rev., 121, 942, 1961.

В. А. МОСКАЛЕНКО, М. Е. ПАЛИСТРАНТ

ФУНКЦИОНАЛЬНЫЕ ПРОИЗВОДНЫЕ В ТЕРМОДИНАМИКЕ

В работах Латтинжера и Уорда [1] и Клейна [2] было показано на примере системы взаимодействующих электронов, что термодинамический потенциал может быть представлен в виде функционала от полной электронной функции Грина или ее массового оператора. Этот функционал обладает свойством стационарности по отношению к вариациям последних величин. Не представляет труда обобщить этот вариационный принцип на системы с тройным взаимодействием.

При этом функциональные дифференцирования термодинамического потенциала осуществляются в данном случае по двум величинам: полной электронной и бозонной функциям Грина, рассматриваемым как независимые, или по массовому и поляризационному операторам этих функций.

Установим также некоторые соотношения между функциональными производными теории.

Определение функционала

Термодинамический потенциал системы определяется, как известно [3], выражением

$$\psi = \psi_0 - \frac{1}{\beta} u, \quad (1)$$

где u — сумма всех связанных вакуумных диаграмм.

Выполняя приведение этих диаграмм путем исключения собственно-энергетических и поляризационных частей [3], мы можем записать выражение для u в виде:

$$u = \int_0^1 \frac{d\lambda}{\lambda} \left[\begin{array}{l} \text{сумма всех скелетных вакуумных диаграмм,} \\ \text{линиями которых сопоставляются полные} \\ \text{электронные и бозонные функции Грина} \end{array} \right]. \quad (2)$$

Пусть n — число вершин скелетной диаграммы; Зависимость от вкладов скелетных диаграмм двоякая: через λ^n от вершин и через упомянутые полные функции Грина $G(\lambda)$ и $B(\lambda)$ ($G = G(\lambda = 1)$; $B =$

$= B(\lambda = 1)$). Интегрирование по частям с учетом явно входящего множителя λ^n приводит к выражению

$$u = u' - \int_0^1 \sum_{n=2}^{\infty} \lambda^n d\lambda \frac{\partial}{\partial \lambda} \left[\frac{u'_n(\lambda)}{\lambda^n} \right], \quad (3)$$

где

$$u' = \sum_n u'_n(1), \quad (4)$$

u'_n — сумма скелетных вакуумных диаграмм с n вершинами, содержащими множители $\frac{1}{n}$.

Дифференцирование по λ во втором члене дает

$$\frac{\partial}{\partial \lambda} \frac{u'_n(\lambda)}{\lambda^n} = \frac{1}{\lambda^n} \int dx dx' \left[\frac{\delta u'_n(\lambda)}{\delta G(x-x'/\lambda)} \frac{\partial G(x-x'/\lambda)}{\partial \lambda} + \frac{\delta u'_n(\lambda)}{\delta B(x-x'/\lambda)} \frac{\partial B(x-x'/\lambda)}{\partial \lambda} \right], \quad (5)$$

Функционал u' имеет вид:

$$U' = -\frac{1}{2} \text{ (diagram)} + \frac{1}{2} \text{ (diagram)} - \frac{1}{4} \text{ (diagram)} - \frac{3}{6} \text{ (diagram)} - \frac{1}{6} \text{ (diagram)} + \dots \quad (6)$$

Здесь и в дальнейшем все линии являются полными функциями Грина кроме пунктирной линии второй диаграммы, которая представляет собой свободную бозонную линию.

Функционал u' обладает свойствами:

$$\frac{\delta u'}{\delta G(x-x')} = \sum_n \frac{\delta u'_n}{\delta G(x-x')} = -2 \sum_n \Sigma_n(x-x') = -2 \Sigma(x-x') \quad (7a)$$

$$\frac{\delta u'}{\delta B(x-x')} = \sum_n \frac{\delta u'_n}{\delta B(x-x')} = \frac{1}{2} \sum_n \Pi_n(x'-x) = \frac{1}{2} \Pi(x'-x), \quad (7b)$$

где Σ и Π — массовый и поляризационный операторы системы, соответственно. (Множитель 2 в первом уравнении обязан спину электрона).

Формулы (4), (5) и (7) дают

$$u = u' + Sp_0 \int_0^{\beta} \int_0^{\beta} G_0(x-x') \Sigma_0(x'-x) dx dx' + Sp_0 Sp \ln G_0^{-1} G_0 - \\ - \frac{1}{2} \int_0^{\beta} \int_0^{\beta} B(x-x') \Pi(x'-x) dx dx' - \frac{1}{2} Sp \ln B^{-1} B_0, \quad (8)$$

где под $Sp \ln A^{-1} A_0$ имеется в виду интеграл

$$\int_0^{\beta} \int_0^{\beta} d\lambda dx dx' A(x-x') \frac{\partial A^{-1}(x-x', \lambda)}{\partial \lambda} = \int_0^{\beta} dx dx' \int_{A(x-x')}^{A(x-x')} A dA^{-1}. \quad (9)$$

При выводе (8) использованы уравнения Дайсона для функций G и B .

$$G^{-1}(x-x') - G_0^{-1}(x-x') = -\Sigma(x-x') \quad (10) \\ B^{-1}(x-x') - B_0^{-1}(x-x') = -\Pi(x-x').$$

На основании формул (7) и (10) нетрудно проверить, что выражение (8) обладает свойством стационарности по отношению к выражениям G и B :

$$\frac{\delta u}{\delta G(x-x')} = \frac{\delta u}{\delta B(x-x')} = 0. \quad (11)$$

Аналогичным образом может быть доказано свойство

$$\frac{\delta u}{\delta \Sigma(x-x')} = \frac{\delta u}{\delta \Pi(x-x')} = 0. \quad (12)$$

Если u' рассматривать как функционал от G и B , а эти последние величины связаны с Σ и Π уравнениями (10).

Функционал u' может быть представлен в компактном виде, если мы введем вершинный оператор $\Gamma_{\lambda}(x, x_2; x_3)$, определенный как сумма неприводимых вершинных диаграмм, линиям которых сопоставляются полные функции Грина $G = G(\lambda = 1)$ и $B = B(\lambda = 1)$, а вершинам этих диаграмм — множитель λ .

$$\Gamma_{\lambda}(x_1, x_2; x_3) = \lambda \left[\text{diagram 1} \right] + \lambda^3 \left[\text{diagram 2} \right] + \dots \quad (13)$$

Тогда нетрудно получить формулу

$$u' = -Sp_0 \int_0^{\beta} d\lambda \int_0^{\beta} \dots \int_0^{\beta} G(x-x_1) \Gamma_{\lambda}(x_1, x_2; x_3) G(x_2-x_1) B(x-x_3) \cdot \\ \cdot dx dx_1 dx_2 dx_3. \quad (14)$$

Или, вводя массовый оператор Σ_{λ} и поляризационный Π_{λ}

$$\Sigma_{\lambda}(x-x') = \int_0^{\beta} \int_0^{\beta} \Gamma_{\lambda}(xx_2; x_3) G(x_2-x') B(x_3-x') dx_2 dx_3 \quad (14a)$$

$$\Pi_{\lambda}(x-x') = -Sp_0 \int_0^{\beta} \int_0^{\beta} G(x-x_1) G(x_2-x) \Gamma_{\lambda}(x_1, x_2; x') dx_1 dx_2, \quad (14b)$$

получаем

$$u' = \int_0^1 d\lambda \int_0^{\beta} \int_0^{\beta} dx dx' \Pi_{\lambda}(x-x') B(x'-x) = \quad (15a)$$

$$= - \int_0^1 d\lambda Sp_0 \int_0^{\beta} \int_0^{\beta} dx dx' G(x-x') \Sigma_{\lambda}(x'-x). \quad (15b)$$

Формулы (14) — (15) удобны для функциональных дифференцирований, так как функционалы Γ_{λ} , Σ_{λ} и Π_{λ} содержат функции Грина при $\lambda = 1$, по которым только и производится дифференцирование.

На основании формул (7) можно считать функционал u' производящим функционалом для массовых операторов одночастичных функций Грина. Это свойство сохраняется по отношению к массовым операторам более сложных функций Грина.

В самом деле, приведем ряд функциональных соотношений, основанных на анализе диаграмм:

$$K_{\lambda}(xx'; y'y') = \frac{\delta \Sigma_{\lambda}(x-x')}{\delta G(y-y')} = \lambda \left[\text{diagram 1} \right] - \lambda \left[\text{diagram 2} \right] + \lambda^3 \left[\text{diagram 3} \right] + \dots \quad (16)$$

где $K_{\lambda}(xx'; y'y')$ — компактный массовый оператор двухчастичной электронной функции Грина.

Аналогичным путем устанавливаются уравнения

$$\int K_{\lambda}(xx'; y'y') G(x'-x) dx' dx = \lambda \frac{d}{d\lambda} \Sigma_{\lambda}(y'-y) \quad (17) \\ \int K_{\lambda}(xx'; y'y') G(y-y') dy dy' = \lambda \frac{d}{d\lambda} \Sigma_{\lambda}(x-x')$$

Дифференцируя правую часть (15b) и используя формулы (17), получим выражение (7a).

На основании (7a) и (16) получаем

$$K_{\lambda}(xx'; y'y') = - \frac{1}{2} \frac{\delta^2 u'_{\lambda}}{\delta G(y-y') \delta G(x'-x)}, \quad (18)$$

где u'_λ получается из u , если в этом последнем выражении каждой вершине скелетной диаграммы приписать множитель λ . Дифференцирование по функции $B(y-y_1)$ дает следующее:

$$\frac{\delta \Sigma_\lambda(x-x_1)}{\delta B(y-y_1)} = \lambda \left[\text{Diagram 1} \right] + \lambda^3 \left[\text{Diagram 2} \right] + \dots \quad (19)$$

$$\delta_B \Sigma_\lambda(x-x_1) = \int \int_0^{\beta} L_\lambda(y, y_1/x, x_1) \delta B(y-y_1) dy dy_1, \quad (20)$$

где $L_\lambda(y, y_1/x, x_1)$ — компактный массовый оператор двухчастичной смешанной функции Грина. На основании (19) легко получить уравнение

$$-Sp_\sigma \int \int G(x_1-x) L_\lambda(y, y_1/x, x_1) dx dx_1 = \frac{1}{2} \frac{d}{d\lambda} \left[\lambda \Pi_\lambda(y-y_1) \right]. \quad (21)$$

Из (15б), (19) и (21) следует формула (7б).

Очевидно, для $L_\lambda(y, y_1/x, x_1)$ имеет место формула

$$L_\lambda(y, y_1/x, x_1) = -\frac{1}{2} \frac{\delta^2 u'_\lambda}{\delta G(x_1-x) \delta B(y-y_1)}. \quad (22)$$

Приведем далее функциональные производные от поляризационного оператора

$$\frac{\delta \Pi_\lambda(x-x_1)}{\delta G(y-y_1)} = -Sp_\sigma 1 [L_\lambda(x_1, x/y, y_1) + L_\lambda(x, x_1/y, y_1)]. \quad (23)$$

Нетрудно получить соотношения

$$\int \int dx dx_1 B(x_1-x) L_\lambda(x, x_1/y, y_1) = \frac{1}{2} \frac{d}{d\lambda} \left(\lambda \sum_\lambda (y_1-y) \right) \quad (24)$$

$$-Sp_\sigma 1 \int \int dy dy_1 L_\lambda(x, x_1/y, y_1) G(y-y_1) = \frac{1}{2} \frac{d}{d\lambda} \left[\lambda \Pi_\lambda(x-x_1) \right]. \quad (25)$$

Дифференцируя Π_λ функционально по B , получим

$$\frac{\delta \Pi_\lambda(x-x_1)}{\delta B(y-y_1)} = -Sp 1 I_\lambda(x, x_1; y, y_1), \quad (26)$$

где I_λ — компактный поляризационный оператор двухчастичной бозонной функции Грина.

$$I_\lambda(x, x_1; y, y_1) = \lambda^3 \left[\text{Diagram 1} \right] + \lambda^5 \left[\text{Diagram 2} \right] + \dots \quad (27)$$

На основании определения (27) нетрудно получить

$$\int \int_0^{\beta} I_\lambda(x, x_1; y, y_1) B(y-y_1) dy dy_1 = \frac{\lambda^2}{2} \frac{d}{d\lambda} \left[\frac{\Pi_\lambda(x-x_1)}{\lambda} \right]. \quad (28)$$

Используя (15а), (25) и (28), получаем снова основную формулу (7б). Формулы (7б) и (26) дают

$$I_\lambda(x, x_1; y, y_1) = -\frac{\delta^2 u'_\lambda}{\delta B(x_1-x) \delta B(y-y_1)}. \quad (29)$$

Формулы (18), (22) и (29) так же, как и (7), указывают на большое значение в термодинамике величины u' как производящего функционала массовых операторов функций Грина.

Приведем для справок также некоторые функциональные соотношения для вершинных операторов.

Функциональная производная от Γ_λ по G дает вершинный оператор с четырьмя электронными и с одним фононным концом θ_λ :

$$\frac{\delta \Gamma_\lambda(x_1, x_2, x_3)}{\delta G(y-y_1)} = \lambda^3 \left[\text{Diagram 1} \right] + \lambda^3 \left[\text{Diagram 2} \right] + \dots = \theta_\lambda(x_1, y_1; x_2, y_1; x_3) \quad (30)$$

$$\delta_G \Gamma_\lambda(x_1, x_2/x_3) = \int \int \theta_\lambda(x_1, y_1; x_2, y_2/x_3) \delta G(y_2-y_1) dy_1 dy_2. \quad (31)$$

На основании (30) имеем

$$\int \theta_\lambda(x, y_1; x_2, y/x_3) G(y-y_1) dy dy_1 = \lambda^2 \frac{d}{d\lambda} \left[\frac{\Gamma_\lambda(x_1, x_2/x_3)}{\lambda} \right]. \quad (32)$$

Анализ диаграмм приводит к соотношению

$$\int \theta_\lambda(x_2, y_1; x_3, y_2/x_4) G(x_1-x_2) G(x_3-x_1) B(x_4-x_1) dx_1 \dots dx_4 = \lambda^2 \frac{d}{d\lambda} \left[\frac{\Sigma_\lambda(y_1-y)}{\lambda} \right]. \quad (33)$$

Далее имеем

$$\frac{\delta \Gamma_\lambda(x_1, x_2, x_3)}{\delta B(y_1-y_2)} = \lambda^3 \left[\text{Diagram 1} \right] + \lambda^5 \left[\text{Diagram 2} \right] + \dots = \Phi_\lambda(x_1, x_2; y_1, y_2) \quad (34)$$

где Φ_λ — вершинная функция Грина с тремя фононными и двумя электронными концами.

Нетрудно видеть, что имеют место соотношения:

$$\int \int_0^{\beta} \Phi_\lambda(x_1, x_2/y_1, y_3, y_2) B(y_1-y_2) dy_1 dy_2 = \frac{\lambda^2}{2} \frac{d}{d\lambda} \left[\frac{\Gamma_\lambda(x_1, x_2/x_3)}{\lambda} \right], \quad (35)$$

а также

$$-Sp_\sigma 1 \int \dots \int_0^{\beta} G(x_1-x_2) \Phi_\lambda(x_2, x_3/y_1, x_4, y_2) G(x_3-x_1) B(x_4-x_1) dx_1 \dots dx_4 = \frac{\lambda^2}{2} \frac{d}{d\lambda} \left(\frac{\Pi_\lambda(y_1-y_2)}{\lambda} \right). \quad (36)$$

На основании функциональных свойств вершинного оператора Γ_λ и определения (14) для U' опять получаем свойства (7). Таким образом, нами показано, что важный для термодинамики функционал u' может быть представлен в компактных формах (14) и (15). Для этой цели были введены функционалы Γ_λ , Σ_λ и Π_λ и анализом диаграмм выведен для них ряд функциональных соотношений.

Из вышеприведенных формул следует, что знание функционала u' позволяет определить массовые и поляризационные операторы всех функций Грина. Учитывая важность последних величин для термодинамических расчетов, а также невозможность точного определения этих величин для реальных систем взаимодействующих частиц, целесообразно приближенно определить u' и на этой основе единым способом приближенно вычислить все массовые операторы. Так, например, сохраняя в u' первые две диаграммы (см. формула (6)), для массового оператора K получим первые две диаграммы в приведенной формуле (16) и т. д.

ЛИТЕРАТУРА

1. J. M. Luttinger и J. C. Ward. Phys. Rev., 118, 1417, 1960.
2. A. Klein. Phys. Rev., 121, 950, 1961.
3. В. А. Москаленко. Вычисление термодинамического потенциала квантовых систем. (Ротопринт), 1961.

В. А. МОСКАЛЕНКО, М. Е. ПАЛИСТРАНТ

ДЕРИВАТЕЛЕ ФУНКЦИОНАЛЕ АЛЕ ТЕРМОДИНАМИЧИЙ

Резумат

Пентру ун систем де електронь, каре акцияязэ ку ун кымп куантик Бозе се калкулязэ потенциалул термодинамик. Ачэстэ мэриме есте презентатэ ын формэ де функционалэ а функциилор луй Грин але електронилор ши бозонилор сау ын формэ де функционалэ а операторилор де масэ ай ачэстор функций.

Се доведеште кэ ачэстэ функционалэ рэмыне стационарэ фацэ де вариациле функциилор луй Грин сау але операторилор де масэ.

Ын артикол се стабилеск де асеменя унеле релаций ынтре деривателе функционале але теорией.

В. В. НЕГРЕСКУЛ, С. И. РАДАУЦАН, С. В. СЛОБОДЧИКОВ.

К ЭЛЕКТРИЧЕСКИМ И ФОТОЭЛЕКТРИЧЕСКИМ СВОЙСТВАМ ФОСФИДА ГАЛЛИЯ

В последнее время большое внимание уделяется исследованию полупроводниковых свойств фосфида галлия — одного из высокотемпературных соединений типа $A^III B^V$. Фосфид галлия сравнительно мало изучен. Отчасти это объясняется тем, что получение этого материала в виде больших и чистых монокристаллов затруднительно из-за его высокой температуры плавления (порядка 1500°C) и давления, достигающего нескольких десятков атмосфер в точке плавления. Ему посвящен ряд работ по исследованию электролюминесценции, выпрямительных, оптических и фотоэлектрических свойств [1—4]. Электрические свойства фосфида галлия приведены в работах [5—8].

В настоящей работе даны результаты исследований температурной зависимости электропроводности и эффекта Холла (от 80°K до 300 K), а также спектрального распределения фотопроводимости фосфида галлия n -типа при температурах 80°K и 295°K .

Методика эксперимента

Кристаллы фосфида галлия были выращены из раствора с избытком галлия [9]. Из монокристаллических пластинок вырезались образцы размерами $4 \times 1,2 \times 0,5$ мм³. Образцы наклеивались на медный держатель специального криостата. Для измерения проводимости и эффекта Холла применялись платиновые зонды (диаметром 50 мк), приваренные к образцу искровым разрядом батареи конденсаторов [8]. Измерения проводимости и эффекта Холла проводились на постоянном токе компенсационным методом.

Фотопроводимость измерялась по методике, описанной в работе [10].

Результаты измерений и их обсуждение

Кристаллы фосфида галлия n -типа имели концентрацию носителей тока порядка $2,2 \cdot 10^{16}$ см⁻³ при комнатной температуре. На рис. 1 приведены кривые температурной зависимости удельной проводимости и коэффициента Холла для GaP. Как отмечено в [8], такое резкое

изменение проводимости и коэффициента Холла при низких температурах характерно для компенсированных образцов фосфида галлия.

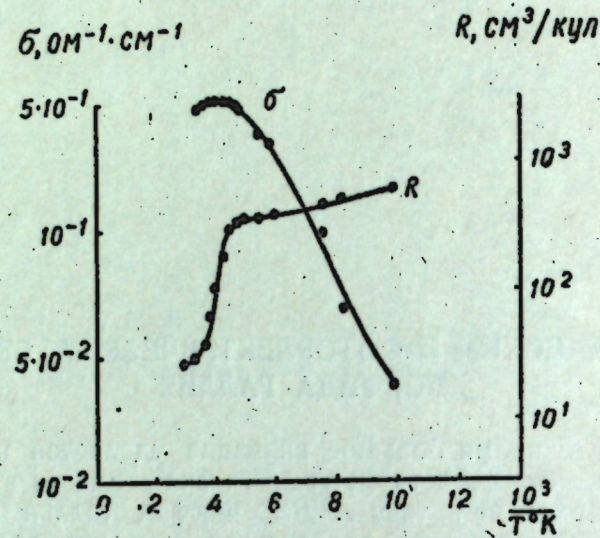


Рис. 1. Температурная зависимость электропроводности и коэффициента Холла в фосфиде галлия *n*-типа.

На рис. 2 дана кривая температурной зависимости концентрации носителей тока, на которой наблюдаются два наклонных участка, соответствующих последовательной ионизации различных уровней. На основании этого экспериментального результата можно предположить, что в исследуемых образцах фосфида галлия существуют, по крайней мере, два примесных уровня с разными значениями энергии активации ΔE_1 и ΔE_2 .

Количественная интерпретация таких закономерностей и метод определения энергии активации подобных уровней были рассмотрены в работе [11]. При повышении температуры от жидкого азота, по-видимому, начинаются переходы электронов с верхнего примесного уровня. Концентрация электронов на участке I изменяется по закону $n \sim \exp\left(-\frac{\Delta E_1}{KT}\right)$. На участке II концентрация носителей тока примерно равна концентрации электронов на верхнем уровне при абсолютном нуле $n = m_1$ (где m_1 — концентрация электронов на верхнем уровне при абсолютном нуле). При увеличении температуры на участке III концентрация равна сумме концентрации m_1 и добавки концентрации, обусловленной переходами электронов со второго уровня в зону проводимости. Последняя экспоненциально растет, как $\exp\left(-\frac{\Delta E_2}{KT}\right)$.

Если выполняются соотношения

$$\Delta E_2 - \Delta E_1 \gg KT \quad (1)$$

$$n = \sqrt{(m_1 + M_2)m_1} \quad (2)$$

где M_2 — концентрация вторых примесных уровней, то можно определить их энергию активации ΔE_2 по формуле:

$$\Delta E_2 = \frac{d \lg n \cdot 2.3 \cdot 2K}{d\left(\frac{1}{T}\right) \left[1 - \frac{m_1}{\sqrt{(m_1 + M_2)m_1}}\right]} - \frac{3}{2} KT. \quad (3)$$

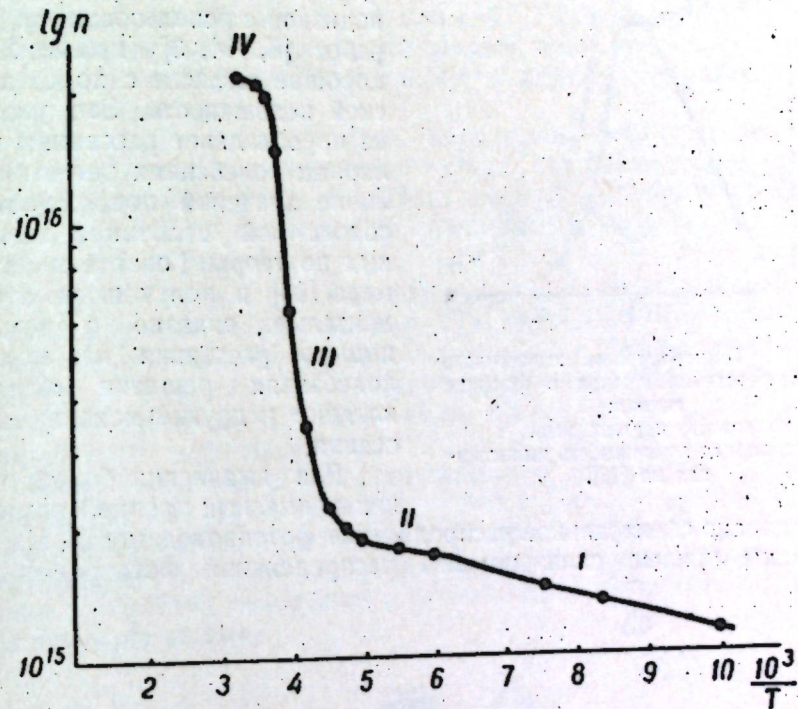


Рис. 2. Температурная зависимость концентрации носителей тока в фосфиде галлия.

Концентрации m_1 и $m_1 + M_2$ равны соответственно концентрациям носителей тока на участках II и IV. Касательная к кривой $\lg n = f\left(\frac{1}{T}\right)$

в точке, удовлетворяющей условию (2), позволяет определить $\frac{d \ln n}{d\left(\frac{1}{T}\right)}$. Подставив значения $\frac{d \ln n}{d\left(\frac{1}{T}\right)}$ и соответственно концентра-

ции m_1 и $m_1 + M_2$ в (3), определяем энергию активации, равную 0,48 эв. Из наклона $\lg n$ в зависимости от обратной температуры была вычислена энергия активации ΔE_1 , равная 0,026 эв (участок I). Таким образом, подтверждается предположение о наличии двух типов донорных уровней с концентрацией электронов порядка $1,8 \cdot 10^{15} \text{ см}^{-3}$ при энергии активации 0,026 эв и более $2 \cdot 10^{16} \text{ см}^{-3}$ при энергии активации 0,48 эв.

Изменение подвижности с температурой показано на рис. 3. При низких температурах подвижность носителей тока, по-видимому, ограничена рассеянием на ионах примеси (кривая 1). При повышении

температуры рассеяние носит сложный характер. Можно предположить, что существенный вклад в этой области температур вносит полярное рассеяние оптическими фононами. В работах [12, 13] был рассмотрен вопрос о проводимости и подвижности в полярных кристаллах. Вычисление температурной зависимости подвижности по формуле для полярных полупроводников с использованием данных работ [8, 14, 3] (кривая 2) дает хорошее согласие с ходом холловской подвижности. Это указывает на преобладание рассеяния на полярных колебаниях решетки. Различие значений подвижностей по абсолютной величине, вычисленных по теории Говарта и Зондгеймера [13] и полученных экспериментально, связано с тем, что помимо рассеяния на полярных колебаниях решетки оказывают влияние и другие механизмы рассеяния.

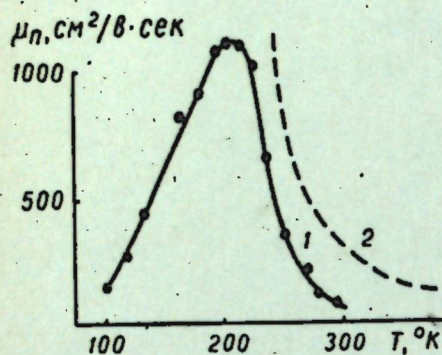


Рис. 3. Температурная зависимость подвижности электронов в фосфиде галлия:

1 — холловская подвижность.
2 — полярная подвижность вычисленная по [13].

Для выявления более глубоких примесных уровней нами было исследовано спектральное распределение фотопроводимости. На рис. 4 показаны кривые спектрального распределения фотопроводимости

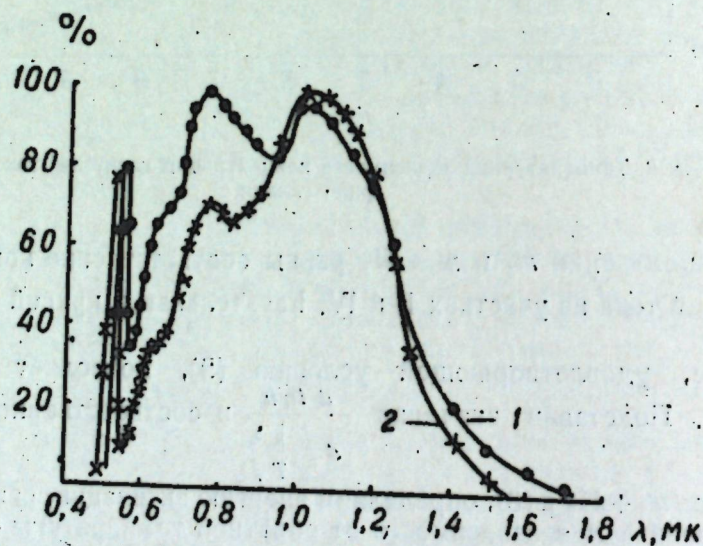


Рис. 4. Спектральное распределение фотопроводимости в фосфиде галлия n-типа.
1 — $T = 295^\circ\text{K}$; 2 — $T = 80^\circ\text{K}$.

для частично компенсированного фосфида галлия n-типа при $T = 295\text{ K}$ (кривая 1) и $T = 80^\circ\text{K}$ (кривая 2). На обеих кривых при $\lambda = 0,55 - 0,56\text{ мкм}$ наблюдаются резкие максимумы фоточувствительности; соответствующие собственной фотопроводимости. Кривые 1 и 2 имеют резко

отличающиеся дополнительные максимумы при длинах волн порядка $0,77\text{ мкм}$ и $1,1\text{ мкм}$. Аналогичный максимум при $\lambda = 0,7 - 0,89\text{ мкм}$ был обнаружен ранее в компенсированных образцах p-типа [15] и являлся глубоким акцепторным уровнем. Появление этого максимума в частично компенсированном образце n-типа, возможно, обусловлено переходом электронов с акцепторного уровня, на котором они ранее находились вследствие компенсаций, в зону проводимости.

Дополнительный максимум при $\lambda = 1,1\text{ мкм}$, по-видимому, связан с наличием глубокого примесного уровня, лежащего посередине ширины запрещенной зоны. Этот максимум хорошо проявляется и при низких температурах.

Ширина запрещенной зоны, определенная по критерию Мосса для определения длинноволнового спада, составляет при комнатной температуре $\Delta E = 2,21\text{ эВ}$. Коэффициент термического изменения ширины запрещенной зоны по сдвигу максимума чувствительности составляет $5,6 \cdot 10^{-4}\text{ эВ/град}$.

Из рис. 4 видно, что концентрация примесных центров велика и поэтому максимумы, соответствующие примесной фотопроводимости, превышают по порядку величины максимум собственной фотопроводимости. Относительно меньшая величина собственной фотопроводимости, в данном случае, может быть связана с большой скоростью рекомбинации носителей.

Изложенные выше экспериментальные результаты показывают, что комплексное изучение электрических и фотоэлектрических свойств фосфида галлия позволяет получить сведения о целом ряде примесных уровней, расположенных на различной глубине. Эти данные особенно важны для дальнейшего исследования легированных материалов фосфида галлия.

ЛИТЕРАТУРА

1. O. G. Folberth, F. Oswald. Z. Naturforsch., 9a, 1050, 1954.
2. W. G. Spitzer, M. Gerschenzon, C. J. Frosch a. D. F. Gibbs. J. Phys. Chem., Solids, 11, 339, 1959.
3. D. A. Kleinman a. W. G. Spitzer. Phys. Rev., 118, 110, 1960.
4. Д. Н. Наследов и С. В. Слободчиков. ФТТ, 4, в. 11, 3162, 1962.
5. R. J. Cherry, J. W. Allen. Phys. Chem. Solids, 23, 163, 1962.
6. G. F. Alfrey a. C. S. Wiggins. Z. Naturforsch., 15a, 267, 1960.
7. J. W. Allen a. R. J. Cherry. Phys. Chem. Solids, 23, 509, 1962.
8. Д. Н. Наследов и С. В. Слободчиков. ФТТ, 4, в. 10, 2755, 1962.
9. E. P. Stambaugh, J. F. Miller, R. C. Himes. «Metallurgy Elemental a. Compound Semiconductors», New York—London, Interscience, 317—327, 1961.
10. М. П. Михайлова, Д. Н. Наследов, С. В. Слободчиков. ФТТ, 4, в. 5, 1227, 1962.
11. Н. А. Витовский, Т. В. Машовец и С. М. Рывкин. ФТТ, 4, в. 10, 2849, 1962.
12. C. Hilsum. Proc. Phys. Soc., 76, 414, 1960.
13. D. J. Howarth, E. H. Sondheimer. Proc. Roy. Soc. 219a, 53, 1953.
14. H. B. Callen. Phys. Rev., 76, 1394, 1949.
15. C. A. Wolff, R. A. Hebert, J. D. Broder. Phys. Rev., 100, 1144, 1955.

С. И. РАДАУЦАН, Л. М. МАНОВЕЦ, М. М. МАРКУС

ТЕРМИЧЕСКИЕ И РЕНТГЕНОГРАФИЧЕСКИЕ ИССЛЕДОВАНИЯ СПЛАВОВ СИСТЕМЫ $\text{AgInTe}_2\text{—In}_2\text{Te}_3$

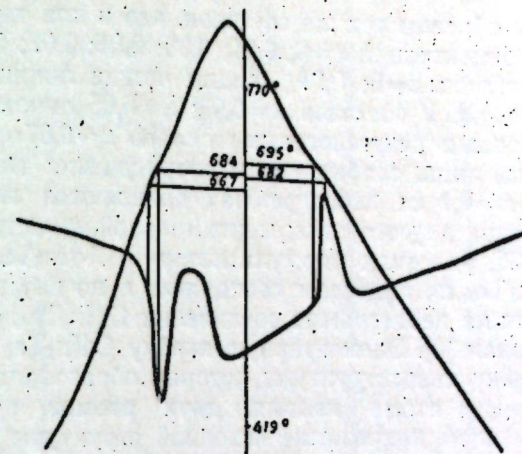
Первоначальные результаты изучения системы $3(\text{AgInTe}_2)_x\text{—}2(\text{In}_2\text{Te}_3)_{1-x}$ изложены в работе [1]. Для выявления температур плавления сплавов системы, областей растворимости исходных соединений, а также для выяснения ряда вопросов, связанных с упорядочением в этих сплавах, нами проведены термические исследования путем снятия кривых нагревания и охлаждения в области температур от 200°C до 800°C . Термограммы снимались на пирометре ФПК-55 и НТР-62 со скоростью нагрева или охлаждения примерно $4^\circ/\text{мин}$. Были исследованы сплавы составов $x = 0,1; 0,2; 0,25; 0,3; 0,4; 0,5; 0,6; 0,7; 0,75; 0,8; 0,9$. Все данные термического анализа приведены в таблице 1.

Таблица 1

Состав (значения x)	Термический анализ, $^\circ\text{C}$		
	sol.	лж.	Добавочные эффекты
0,1	679	689	—
0,2	682	695	—
0,3	686	694	—
0,4	717	733	—
0,5	789	799	499—508
0,6	695	714	—
0,7	677	710	608
0,75	671	693	631
0,8	667	687	616—625
0,9	669	689	634—640

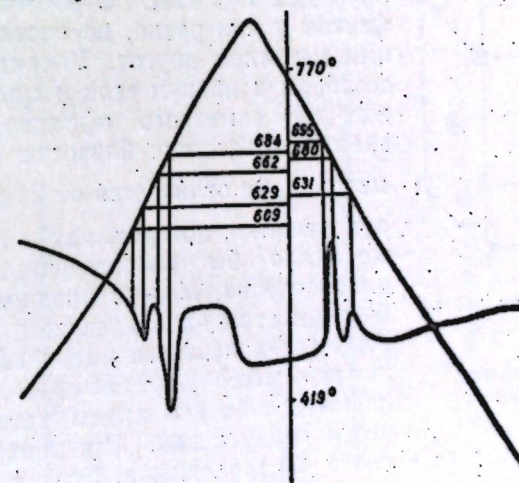
На термограммах сплавов области $x = 0\text{—}0,5$ наблюдается по одному четкому эффекту, соответствующему точкам плавления и кристаллизации, что подтверждает данные рентгенографического анализа о существовании в этой области однофазных твердых растворов. Начало и конец эффектов на кривых нагревания и охлаждения в этой области отличается незначительно — на $15^\circ\text{—}20^\circ$, что указывает на равновесность этих растворов. Эффекта перехода из упорядоченного состояния в неупорядоченное, аналогичного тому, который наблюдался у In_2Te_3 [2].

пока не обнаружено, возможно из-за недостаточной чувствительности дифференциальной термопары. На рис. 1 представлена типичная термограмма из этой области.

Рис. 1. Термограмма сплава $x = 0,2$.

Результаты термических исследований $3(\text{AgInTe}_2)_x\text{—}2(\text{In}_2\text{Te}_3)_{1-x}$

На термограммах сплавов области $x = 0,6\text{—}0,9$, а также одного сплава $x = 0,5$ наблюдаются, кроме основных эффектов плавления и затвердевания, добавочные эффекты при более низкой температуре; они могут быть объяснены недостаточной гомогенностью сплавов либо наличием фазовых переходов. На рис. 2 приведена термограмма, характерная для этой области концентрации.

Рис. 2. Термограмма сплава $x = 0,75$.

Видно, что существует довольно большая разность температур начала и конца эффекта, которая, по-видимому, вызвана значительной неравновесностью каждой из фаз в отдельности. Закалка ряда образцов из этой области не дала существенных изменений.

Для рентгенографического анализа образцы, растертые в порошок, были наклеены цапонлаком на тонкую кварцевую нить и сняты в камере РКД-57 на фильтрованном медном излучении; вблизи AgInTe_2 — на железнном.

Были сняты образцы тех же составов, что и для термического анализа, а также концентрации $x=0; 0,01; 0,03; 0,05; 0,07; 0,15; 1$. На рентгенограммах составов $x=0; 0,01$ видны четкие линии упорядоченной структуры In_2Te_3 [2]. У составов $x=0,03; x=0,05$ линии упорядочения заметно ослаблены, и рентгенограмма сплава $x=0,07$ содержит, кроме линий сфалерита, лишь слабые следы упорядочения типа In_2Te_3 .

Начиная с $x=0,1$ на дебаграммах появляются сверхструктурные линии упорядочения другого типа; максимальной яркости они достигают у состава $x=0,25$, условная формула которого AgIn_5Te_8 . Линии на дебаграмме AgIn_5Te_8 по индексам совпадают, а по интенсивности очень схожи с линиями на дебаграмме соединения CdIn_2Te_4 , структура которого изучена Ханом [3]. Элементарную ячейку CdIn_2Te_4 можно рассматривать как ячейку сверхструктуры, которая образовалась в результате упорядочения одного атома кадмия, двух атомов индия и одной вакансии в катионной подрешетке исходной структуры сфалерита. Кубическая ячейка сфалерита удваивается в направлении 001; новая ячейка обладает группой симметрии S_6^2 , положение атомов следующее:

- 2 Cd (000)
- 2 In (00 0,5)
- 2 In (00 0,5 0,25)
- 8 Te (xyz).

Хан предложил этот структурный тип назвать тигаллатом. На рис. 3 изображена катионная часть элементарной ячейки.

Мы предположили аналогичную структуру для AgIn_5Te_8 . Относительное число дефектов у них равно, но соотношение различных металлов другое. Упорядочение между серебром и индием если и существует, не может дать заметного эффекта на рентгенограмме вследствие близости их атомных номеров; $\frac{c}{a}$ не отличается от 2, т. е. нет искажения решетки, которое, как в AgInTe_2 [4], также могло бы свидетельствовать об этом упорядочении. Можно предположить, что либо один атом одновалентного серебра и один атом трехвалентного индия статистически занимают место двух атомов двухвалентного кадмия, либо все атомы металлов статистически перемешаны. Мы провели расчет интенсивности, исходя из второго предположения. Если принять для атомов теллура положения плотнейшей упаковки (0,25; 0,25; 0,125), интенсивность линий упорядочения очень мала по сравнению с экспериментальной интенсивностью; сдвиг атомов теллура в сторону вакансии увеличивает расчетную интенсивность. При сдвиге теллура в положение (0,275; 0,225; 0,138) расходимость между экспериментальными и теоретическими интенсивностями по 43 линиям составляет 12% без учета поглощения и температурного фактора.

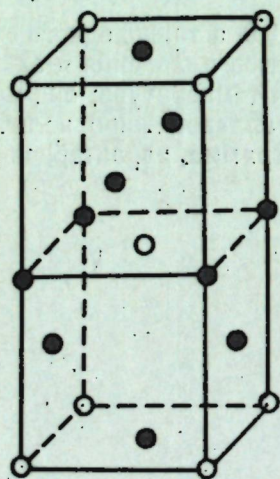


Рис. 3. Катионная часть элементарной ячейки CdIn_2Te_4 .

- — атомы кадмия.
- — атомы индия.

интенсивности, исходя из второго предположения. Если принять для атомов теллура положения плотнейшей упаковки (0,25; 0,25; 0,125), интенсивность линий упорядочения очень мала по сравнению с экспериментальной интенсивностью; сдвиг атомов теллура в сторону вакансии увеличивает расчетную интенсивность. При сдвиге теллура в положение (0,275; 0,225; 0,138) расходимость между экспериментальными и теоретическими интенсивностями по 43 линиям составляет 12% без учета поглощения и температурного фактора.

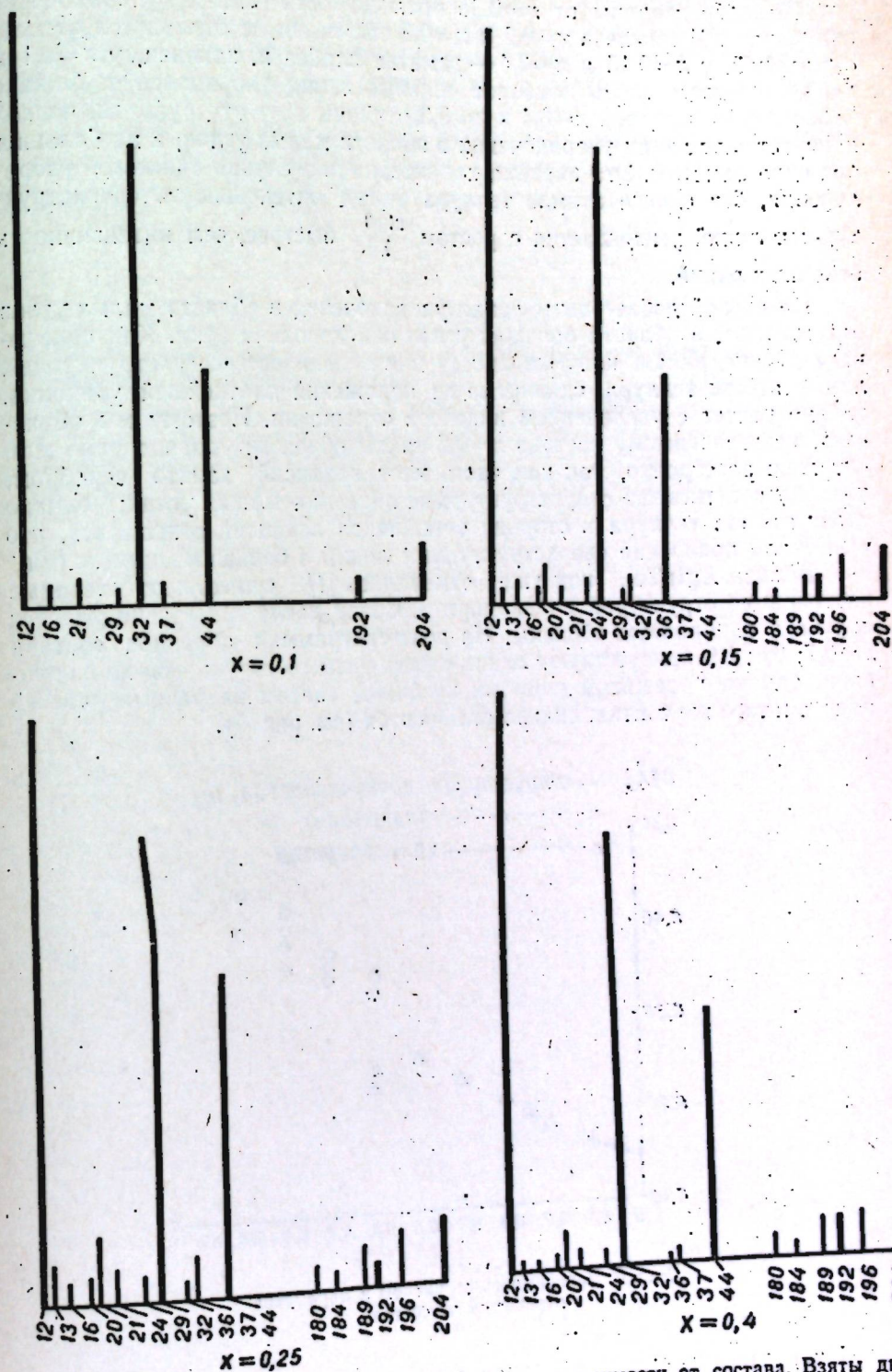


Рис. 4. Интенсивность линий на дебаграммах в зависимости от состава. Взяты две области углов отражения: $12^\circ-2^\circ$ и $50^\circ-60^\circ$. Для каждой линии указана величина $4(h^2 + k^2) + l^2$. Интенсивности линий неупорядоченного сфалерита выделены.

По обе стороны от $x=0,25$ интенсивность линий упорядочения ослабевает. У составов $x=0,2$ и $x=0,3$ она почти не отличается от максимальной; у $x=0,15$ и $x=0,4$ — заметно слабее и, наконец, у $x=0,1$ и $x=0,5$ остаются лишь наиболее сильные линии упорядочения. Однако дебаграммы сплавов $x=0,1$ и $x=0,5$ отличны друг от друга. На первой присутствуют линии упорядочения в области малых углов, а на больших они едва заметны. Эта картина характерна для случая «чистого» упорядочения, без сдвига атомов теллура, когда интенсивность сверхструктурных линий уменьшается с ростом $\frac{\sin \theta}{\lambda}$ быстрее, чем интенсивность основных линий.

На второй дебаграмме линии упорядочения в области малых углов отсутствуют, в области больших углов они довольно ярки. Как показывает расчет, вклад, который вносят в интенсивность сверхструктурных линий атомы теллура, сдвинутые из положений плотнейшей упаковки, сильно растет с увеличением индексов отражения. Поэтому мы объясняем рентгенограмму состава $x=0,5$ таким образом: упорядочение значительно расстроено, так как часть мест вакансий занято серебром, поэтому отсутствуют сверхструктурные линии на малых углах; однако сдвиг атомов теллура в сторону оставшихся вакансий сохранился, что и вызвало появление сверхструктурных линий с большими индексами.

Вблизи AgInTe_2 , как уже отмечалось [1], существуют твердые растворы со структурой халькопирита. Сразу после синтеза не удается получить однородные образцы. На рентгенограммах образцов состава $x=0,7; 0,8; 0,9$ присутствуют линии одной фазы со структурой халькопирита, однако параметры решетки кусочков, взятых из разных частей одного и того же слитка, сильно отличаются (см. рис. 5).

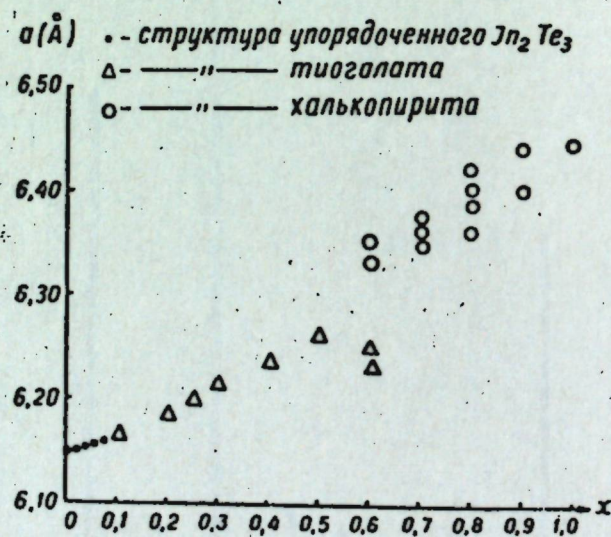


Рис. 5. Зависимость структуры и параметра a решетки от состава.

На рентгенограммах образцов состава $x=0,6$ всегда присутствуют линии как титгаллатной, так и халькопиритной фаз; эта же картина наблюдалась у состава $x=0,5$ в двух случаях из пяти. Надо отметить,

что линии халькопиритной фазы всегда более размыты по сравнению с линиями титгаллата, что свидетельствует о значительной микроликвидации. В пользу этого же говорит и значительная разница температур начала и конца плавления и затвердевания, установленная термическим анализом.

В дальнейшем предполагается разработать способы гомогенизации сплавов системы, а также продолжить изучение упорядочения и выявление диаграммы состояния системы.

ЛИТЕРАТУРА

1. С. И. Радауцан, М. М. Маркус, Р. А. Масляко, Исследования по физике полупроводников, 123, (1963).
2. А. И. Заславский, В. М. Сергеева, ФТТ, 2, 2872 (1960).
3. H. Hahn, G. Frank, W. Klingler, A. D. Störger, G. Störger, Zs. anorg. allg. chem., B. 279, 241 (1955).
4. H. Hahn, G. Frank, W. Klingler, A. Meyer, G. Störger, Zs. anorg. allg. chem., 71, 153 (1953).

В. В. СОБОЛЕВ

К ВОПРОСУ О КОРРЕЛЯЦИИ СТРУКТУР ЛИНЕЙЧАТОГО КРАЕВОГО ПОГЛОЩЕНИЯ С ЭКВИДИСТАНТНЫМ КРАЕВЫМ ИЗЛУЧЕНИЕМ И ЛИНЕЙЧАТОЙ СТРУКТУРОЙ ФОТОЭФФЕКТА КРИСТАЛЛОВ

1. В ряде работ произведены попытки установить связи между линейчатой экситонной структурой поглощения с эквидистантным краевым излучением [2]¹ и с внутренним краевым фотоэффектом [1, 3, 4, 7], изучены спектры краевого поглощения и фотоэффекты в кристаллах As_2S_3 , Bi_2O_3 , V_2O_5 , MoO_3 [1], а также спектры поглощения и излучения кристаллов CsJ_3 , SbJ_3 , и др. [2]. Из опытных данных об отсутствии структур в поглощении, излучении и фотоэффекта этих кристаллов и наличии структур трех явлений в других кристаллах делается вывод о корреляции наличия в целом этих трех эффектов в кристаллах. Однако в других работах [7] было показано, что в деталях тонкая структура краевого фотоэффекта кристаллов Cu_2O и CdS не совпадает с тонкой структурой экситонных линий, а в работах [4] утверждение о точном совпадении до $\pm 1 \text{ \AA}$ пиков фотоэффектов с максимумами линий экситонного поглощения проводится не строго (сопоставляются 3—4 пика фотоэффекта при $T=77,3^\circ K$ с восемью экситонными линиями поглощения, обнаруженными при $T=4,2^\circ K$ и экстраполированными к $T=77,3^\circ K$ по положению в спектре).

II. В 1956—1962 гг. при $T=4—290^\circ K$ нами было проведено обширное комплексное исследование спектров поглощения, отражения, излучения и фотоэффекта большого количества кристаллов CdS и $CdSe$ («чистых», «примесных» и термообработанных в разных газовых атмосферах) [8, 9]. Далее кратко остановимся на некоторых результатах нашей работы только для $T=4,2^\circ K$. При большой дисперсии спектрометра ($\approx 3,5 \text{ \AA/мм}$) при $T=4,2^\circ K$ нами были обнаружены и исследованы линейчатые структуры трех краевых эффектов — поглощения, излучения и внутреннего фотоэффекта (поглощение и излучение изучалось также количественно с помощью охлаждаемых фотоумножителей).

В результате подробных исследований с большой убедительностью было установлено для монокристаллов $CdSe$ следующее: а) В области длинноволнового края собственного поглощения кристаллов имеются

¹ В работе [2] содержатся неверные утверждения: 1) опытные данные по поляризации, положению в спектре и температурной зависимости двух серий эквидистантных полос излучения CdS резко не согласуются с теорией Хапфила, в противоположность формальному утверждению авторов работы [2] о согласии опыта и теории; 2) сопоставление частотной разности между эквидистантными полосами для CuJ и $CuBr$ с частотой и к. поглощения их решеток является грубой ошибкой — сопоставление необходимо проводить с продольной частотой решеток [10].

две серии экситонных узких линий поглощения. б) В спектре фотолюминесценции имеется линейчатое излучение, резонансно совпадающее с линейчатым экситонным поглощением. С длинноволновой стороны к экситонным линиям излучения примыкает характерная эквидистантная группа полос излучения с дублетной структурой. Впервые нами было показано, что эквидистантное излучение имеет очень сложную линейчатую структуру, которая не может быть объяснена простой схемой Шона или Клика — Ламбе [11] и требует для своего объяснения привлечения сложного комплекса экситонно-примесных состояний. Эквидистантное излучение кристаллов, как нам представляется, является частным случаем рекомбинационного излучения: связанная электронно-дырочная пара при наличии специфического дефекта в решетке кристалла вызывает эквидистантную систему полос, в отсутствие этого дефекта — к ряду нерегулярных полос. При прокалке $CdSe$ в парах Se эквидистантное излучение исчезает. в) В спектральном распределении внутреннего фотоэффекта имеется сложная линейчатая структура, с большой точностью совпадающая с линейчатым экситонным спектром поглощения; нами впервые установлено, что линейчатая структура фотоэффекта проявляется лишь при наличии некоторой фотоактивации кристаллов, т. е. наличии в кристалле специфических фотоцентров². Аналогичные результаты получены нами и для сульфида кадмия.

III. При рассмотрении сложных линейчатых структур спектров поглощения, излучения и спектрального распределения фотоэффекта с целью установления их корреляции необходимо принимать во внимание следующее: 1) Тонкая структура фотоэффекта и эквидистантное краевое излучение могут проявиться лишь при наличии в кристалле специфических центров. 2) В области линейчатого экситонного поглощения имеется сильное сплошное собственное поглощение, создающее фотоэффекта (см. дырочные пары и также приводящее к появлению фотоэффекта (см. также [7]) и краевого излучения. 3) Обнаружение и наличие в кристалле экситонного поглощения, экситонных пиков фотоэффекта и эквидистантного краевого излучения очень сильно и неодинаково зависят от величины монокристалличности образцов, состояния их поверхности и наличия в них примесей, нарушений и специфических центров (см. [5] и [6]).

Поэтому отрицательный эффект работ [1, 2], т. е. отсутствие одного (или всех трех) явлений в каком-либо кристалле не может служить убедительным доказательством того, что в действительности в этих кристаллах при соответствующих условиях они не будут обнаружены. Приведем классический пример с записью меди: экситонные серии поглощения легко обнаружены в 1950 году, тонкая же структура фотоэффекта — значительно позднее и с большим трудом, а эквидистантное краевое излучение (как и резонансное излучение экситонов) до сих пор неизвестно. Далее. В кристаллах PbS , $PbSe$, $PbTe$, $InSb$, $InAs$, Si , Ge обнаружены сильный фотоэффект и рекомбинационное излучение, но осуществляются ли в этих кристаллах экситонные состояния и имеется ли эквидистантное краевое излучение — это остается неизвестным (по-видимому, лишь в Ge обнаружены экситоны).

² Нами это установлено впервые убедительно, так как в других работах [4, 7] исследования проводились при дисперсии примерно в 10 раз худшей, при которой и спектры поглощения разрешаются также хуже.

ЛИТЕРАТУРА

1. Е. Ф. Гросс, М. Л. Белле, ЖТФ, 25, 948 (1955).
2. Е. Ф. Гросс, Р. И. Шехмаметьев, ФТТ, 3, 889 (1961).
3. Е. Ф. Гросс, УФН, 63, 608 (1957).
4. Е. Ф. Гросс, А. А. Каплянский, Б. В. Новиков, ДАН СССР, 110, 761 (1956).
5. С. М. Рывкин, Р. Ю. Хансеваров, ЖТФ, 28, 925 (1958).
6. В. И. Ляшенко, О. В. Снитко, Труды Ин-та физики АН УССР, 5, 65 (1954).
7. В. Л. Броуде, В. В. Ерёменко, М. К. Шейнкман; ЖТФ, 28, 2142 (1958).
8. В. В. Соболев, Автореферат канд. диссерт., Л., 1962.
9. Е. Ф. Гросс, В. В. Соболев, ЖТФ, 26, 1622 (1956); ФТТ, 2, 406 (1960); ДАН СССР, 133, 56 (1960).
10. F. A. Kroger, H. J. Meyer, Physica, 20, 1149 (1954).
11. J. J. Lambe, C. C. Klick, D. L. Dexter, Phys. Rev., 103, 1715 (1956).

М. И. ШМИГЛЮК

О ДЕЙСТВИИ НАПРАВЛЕННЫХ ДЕФОРМАЦИЙ НА ДИПОЛЬНО-АКТИВНЫЕ ЭКСИТОННЫЕ УРОВНИ. УЧЕТ КУЛОНОВСКОГО ДАЛЬНОДЕЙСТВИЯ

Экспериментальные и теоретические исследования экситонных полос поглощения под давлением содержатся в основном в работах Гросса с сотрудниками [1, 2, 3]. Поляризационный эффект желтой серии объяснялся влиянием валентной зоны Γ_4^- на верхнюю валентную зону кристалла Cu_2O [1].

Мы покажем, что в такой же мере можно достигнуть согласия теории с опытом, не прибегая к этой гипотезе, а лишь учитывая перемешивание функций относительного движения в экситоне под давлением. Кроме того, в работе [1] не было рассчитано расщепление экситонных уровней. Отметим также, что гипотеза о близости валентной зоны Γ_4^- к верхней валентной зоне Γ_7^+ не согласуется с опытом, что отметили и сами авторы вышеуказанной работы.

Мы предполагаем, что к уровням типа $2p$ с функциями относительного движения вида:

$$\Psi_1 = x R_2(r), \quad \Psi_2 = y R_2(r), \quad \Psi_3 = z R_2(r)$$

примешиваются уровни типа $3p$ с функциями относительного движения вида:

$$\Psi'_1 = x R_3(r), \quad \Psi'_2 = y R_3(r), \quad \Psi'_3 = z R_3(r).$$

Матрица кулоновского дальнего действия в случае сложных зон, так же как и в случае простых зон, для экситонного уровня типа Γ_4^- имеет вид [4]:

$$\delta \begin{vmatrix} S_x^2 - \frac{1}{3} & S_x S_y & S_x S_z \\ S_x S_y & S_y^2 - \frac{1}{3} & S_y S_z \\ S_x S_z & S_y S_z & S_z^2 - \frac{1}{3} \end{vmatrix},$$

где S_x, S_y, S_z — направляющие косинусы вектора \vec{K} , δ — положительная постоянная размерности энергии.

Матрица действия направленных деформаций на уровень типа Γ_4^- взята из работы Г. Е. Пикуса и Г. Л. Бира [5].

P и K	Энергия расщепления уровня типа $\frac{1}{4}$	Поляризация	Интенсивность экситонных переходов ¹⁾	Экспериментальное изменение интенсивности с ростом p ²⁾
$P \parallel \langle 001 \rangle$ $K \parallel \langle 100 \rangle$	$Bp + \frac{2\delta}{3}$ $Bp - \frac{\delta}{3}$ $Ap - \frac{\delta}{3}$	$\langle 010 \rangle$ $\langle 001 \rangle$	$\approx \gamma_0 \left(1 + \frac{B'}{\Delta W} \gamma p\right)^3$ $\approx \gamma_0 \left(1 + \frac{A'}{\Delta W} \gamma p\right)$	Усиление Ослабление до полной поляризации
$P \parallel \langle 001 \rangle$ $K \parallel \langle 001 \rangle$	$Bp - \frac{\delta}{3}$ $Bp - \frac{\delta}{3}$ $Ap + \frac{2\delta}{3}$	$\langle 100 \rangle$ $\langle 010 \rangle$	$\approx \gamma_0 \left(1 + \frac{B'}{\Delta W} \gamma p\right)$ $\approx \gamma_0 \left(1 + \frac{B'}{\Delta W} \gamma p\right)$	Усиление полос
$P \parallel \langle 1\bar{1}0 \rangle$ $K \parallel \langle 110 \rangle$	$\frac{p}{2}(A+B-C) + \frac{2\delta}{3}$ $\frac{p}{2}(A+B+C) - \frac{\delta}{3}$ $Bp - \frac{\delta}{3}$	$\langle 1\bar{1}0 \rangle$ $\langle 001 \rangle$	$\approx \gamma_0 \left(1 + \frac{A'+B'+C'}{2\Delta W} \gamma p\right)$ $\approx \gamma_0 \left(1 + \frac{B'}{\Delta W} \gamma p\right)$	Изменений нет Усиление полос
$P \parallel \langle 1\bar{1}0 \rangle$ $K \parallel \langle 001 \rangle$	$\frac{p}{2}(A+B-C) - \frac{\delta}{3}$ $\frac{p}{2}(A+B+C) - \frac{\delta}{3}$ $Bp + \frac{2\delta}{3}$	$\langle 110 \rangle$ $\langle 1\bar{1}0 \rangle$	$\approx \gamma_0 \left(1 + \frac{A'+B'-C'}{2\Delta W} \gamma p\right)$ $\approx \gamma_0 \left(1 + \frac{A'+B'+C'}{2\Delta W} \gamma p\right)$	Ослабление Изменений нет
$P \parallel \langle 1\bar{1}0 \rangle$ $K \parallel \langle 1\bar{1}0 \rangle$	$\frac{p}{2}(A+B-C) - \frac{\delta}{3}$ $\frac{p}{2}(A+B+C) + \frac{2\delta}{3}$ $Bp - \frac{\delta}{3}$	$\langle 110 \rangle$ $\langle 001 \rangle$	$\approx \gamma_0 \left(1 + \frac{A'+B'-C'}{2\Delta W} \gamma p\right)$ $\approx \gamma_0 \left(1 + \frac{B'}{\Delta W} \gamma p\right)$	Ослабление Усиление
$P \parallel \langle 111 \rangle$ $K \parallel \langle 1\bar{1}0 \rangle$	$\frac{p}{3}(A+2B-C) - \frac{\delta}{3}$ $\frac{p}{3}(A+2B-C) + \frac{2\delta}{3}$ $\frac{p}{3}(A+2B+2C) - \frac{\delta}{3}$	$\langle 11\bar{2} \rangle$ $\langle 111 \rangle$	$\approx \gamma_0 \left(1 + \frac{A'+2B'-C'}{3\Delta W} \gamma p\right)$ $\approx \gamma_0 \left(1 + \frac{A'+2B'+2C'}{3\Delta W} \gamma p\right)$	Ослабление Усиление
$P \parallel \langle 111 \rangle$ $K \parallel \langle 111 \rangle$	$\frac{p}{3}(A+2B-C) - \frac{\delta}{3}$ $\frac{p}{3}(A+2B-C) - \frac{\delta}{3}$ $\frac{p}{3}(A+2B+2C) + \frac{2\delta}{3}$	$\langle 11\bar{2} \rangle$ $\langle 11\bar{0} \rangle$	$\approx \gamma_0 \left(1 + \frac{A'+2B'-C'}{3\Delta W} \gamma p\right)$ $\approx \gamma_0 \left(1 + \frac{A'+2B'-C'}{3\Delta W} \gamma p\right)$	Ослабление Ослабление

Правильные нулевые волновые функции относительного движения, а следовательно, и интенсивности линий в этом приближении не зависят от давления и кулоновского дальнего действия. Такая зависимость появляется в первом порядке теории возмущения (для простоты в этом порядке кулоновское дальнее действие не учитывается).

Отметим, что матрица энергии деформационного возмущения между функциями $2p$ и $3p$ типа также имеет вид матрицы Г. Е. Пикуса и Г. Л. Бира, но только с другими параметрами A' , B' , C' .

Используя известные формулы теории возмущения [6], получили результаты, сведенные в таблицу 1.

Качественное согласие теории с опытом получается при следующих предположениях о деформационных константах кристалла (см [1]):

$$A' > 0, B' < 0, C' < 0, A' \approx |B' + C'|, A' < 3|C'|.$$

На опыте деформационное расщепление желтой серии Si_2O не обнаружено. Этот факт может быть объяснен тем, что по мере расщепления некоторые компоненты ослабевают в интенсивности и плохо наблюдаемы.

Вопрос о поведении полос под давлением нуждается в дополнительном исследовании и других последствий действия давления (например, „возгорание“ уровней [7]).

В заключение выражаю глубокую благодарность С. А. Москаленко за предложенную тему и руководство работой.

ЛИТЕРАТУРА

1. Е. Ф. Гросс, А. А. Каплянский, В. Т. Агекян и Д. С. Буляница, ФТТ, 4, вып. 6, 1660, (1962).
2. Е. Ф. Гросс, А. А. Каплянский и В. Т. Агекян, ФТТ, вып. 8, 2169, 1962.
3. Е. Ф. Гросс и А. А. Каплянский, ФТТ, 2, вып. 11, 2967, 1960.
4. С. А. Москаленко, М. И. Шмиглюк, Материалы XV совещания по спектроскопии, ВИНТИ, 1964.
5. Г. Е. Пикус, Г. Л. Бир, ФТТ, 1, 1642, 1828 (1959).
6. Л. Д. Ландау и Е. М. Лифшиц, Квантовая механика, ОГИЗ, 1948.
7. С. А. Москаленко и А. И. Бобрышева, ФТТ, 4, вып. 7, 1962.
8. Е. Ф. Гросс, Б. П. Захарченя, Л. М. Канская, ФТТ, 3, вып. 3, 972, 1961.

¹ Ограничиваемся членами первого порядка по p (давление).

² Опытные данные из [1].

³ γ_0 , γ — положительные постоянные. $\Delta W < 0$ — разность энергии в нулевом приближении между уровнями $2p$ и $3p$. K — волновой вектор.

СОДЕРЖАНИЕ

Математика

В. Д. Белоусов. Взаимобратные квазигруппы и лупы	3
И. Ц. Гохберг. О нормальной разрешимости и индексе функции от оператора	11
Е. А. Павлова. О некоторых классах гипериммунных множеств	26
Ю. М. Рябухин. О вложениях радикалов	34
К. С. Сибирский, А. М. Стахи. Предельные свойства частично упорядоченных дисперсных динамических систем	42

Физика

А. И. Касьян, Л. З. Кон. Некоторые вопросы адиабатической теории возмущений	50
В. В. Соболев. К вопросу о величине энергии запретной зоны кристаллов группы $A_{15}VI$	59
Н. Д. Филипп. Оценка интервала усреднения при статистической обработке экспериментальных данных по распространению ультракоротких радиоволн	70

Краткие сообщения по математике

В. И. Арнаутов. Топологический радикал Бэра и разложение кольца	79
И. У. Бронштейн. О различных понятиях предела направления замкнутых множеств	82
К. С. Сибирский. Решение проблемы центра для дифференциального уравнения	86
$\frac{dy}{dx} = \frac{c_{10}x^2 + c_{01}y + c_{20}x^2 + c_{11}xy + c_{02}y^2}{b_{10}x^2 + b_{01}y + b_{20}x^2 + b_{11}xy + b_{02}y^2}$	86

Краткие сообщения по физике

А. И. Бобрышева. К выводу гамильтониана биэкситона	92
Ю. С. Боярская, М. И. Вальковская. О некоторых особенностях движения дислокаций в монокристаллах NaCl	96
А. Е. Маринчук. Некоторые соотношения для функций Грина ангармонической решетки	99
В. А. Москаленко, А. Е. Маринчук. Одно свойство мнимой части поляризационного оператора ангармонической решетки	103
В. А. Москаленко, М. Е. Палистрант. Функциональные производные в термодинамике	108
В. В. Негрескул, С. И. Радауцан, С. В. Слободчиков. К электрическим и фотоэлектрическим свойствам фосфида галлия	115
С. И. Радауцан, Л. М. Мановец, М. М. Маркус. Термические и рентгенографические исследования сплавов системы $AgInTe_2 - In_2Te_3$	120
В. В. Соболев. К вопросу о корреляции структур линейчатого краевого поглощения с эквидистантным краевым излучением и линейчатой структурой фотоэффекта кристаллов	126
М. И. Шмиглюк. О действии направленных деформаций на дипольно-активные экситонные уровни. Учет кулоновского дальнего действия	130

3

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК МОЛДАВСКОЙ ССР № 11, 1963 г.

Редакторы В. Дегтярева и Л. Мальцева. Художественный редактор Л. Кирияк. Технический редактор Л. Белоусова. Корректоры Г. Грекул и Л. Болиева.

Сдано в набор 3/VII 1964 г. Подписано к печати 15/IX 1964 г. Формат бумаги 70x108/16. Печатных листов 11,55. Уч.-изд. листов 8,37. Тираж 500. АБ03422. Цена 45 коп. Зак. № 5. Издательство «Карта Молдовеняскэ», Кишинев, ул. Жуковского, 44.

2-я тип. Гос. ком-та по печати Совета Министров МССР, Кишинев, Советская, 8.