БУЛЕТИНУЛ
АКАДЕМИЕЙ ДЕ ШТИИНЦЕ А РСС МОЛДОВЕНЕШТЬ

ИЗВЕСТИЯ
АКАДЕМИИ НАУК МОЛДАВСКОЙ ССР

Хб. и Гер

1

1963

КАРТЯ МОЛДОВЕНЯСКЭ

АКАДЕМИЯ НАУК МОЛДАВСКОЙ ССР

БУЛЕТИНУЛ
АКАДЕМИЕЙ де ШТИИНЦЕ
а РСС МОЛДОВЕНЕШТЬ
ИЗВЕСТИЯ
АКАДЕМИИ НАУК МОЛДАВСКОЙ ССР

№ 1

СЕРИЯ ЕСТЕСТВЕННЫХ И ТЕХНИЧЕСКИХ НАУК

ГОСУДАРСТВЕННОЕ ИЗДАТЕЛЬСТВО
«КАРТЯ МОЛДОВЕНЯСКЭ»
КИШИНЕВ * 1963

Известия Академии наук Молдавской ССР № 1, 1963 г.

И. У. БРОНШТЕЙН

О ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМАХ БЕЗ ЕДИНСТВЕННОСТИ КАК ПОЛУГРУППАХ НЕОДНОЗНАЧНЫХ ОТОБРАЖЕНИЙ ТОПОЛОГИЧЕСКОГО ПРОСТРАНСТВА

Введение

1. Теория динамических систем без единственности (обобщенных динамических систем), созданная в работах Е. А. Барбашина [1], М. И. Минкевича [2] и Б. М. Будака [3], возникла при изучении свойств интегральных воронок системы уравнений

$$\frac{dx_i}{dt} = f_i(x_1,\ldots,x_n) \qquad (1)$$

с непрерывными правыми частями, но оказалась применимой и при более общих предположениях.

В приложениях (например, в теории релейных систем регулирования) встречаются системы вида (1) с разрывными правыми частями. В работах Е. Е. Викторовского [4] и А. Ф. Филиппова [5] показано, что при некоторых условиях такие системы уравнений также определяют динамическую систему без единственности.

Для изучения регулируемых систем, содержащих звенья с гистерезисными и релейными характеристиками, в работах Ю. И. Алимова [6, 7] и Е. А. Барбашина [7] была применена теория уравнений в контингенциях [8, 9]. Как указывает Ю. И. Алимов [6], уравнения и этого типа приводят к обобщенным динамическим системам.

Таким образом, вновь пробуждается интерес к динамическим системам без единственности.

С другой стороны, в связи с созданием советскими и американскими математиками [10—14] теории общих динамических систем (R, G), где R—топологическое пространство, G—произвольная топологическая группа, Е. А. Барбашин [15] предложил аксиоматику *общих систем неоднозначных отображений пространства.* При этом аксиома гомоморфизма $g_1 g_2(x) = g_1[g_2(x)]$ была заменена более слабым условием

$$\text{B)}\ g_1 g_2(x) \subseteq g_1[g_2(x)];\ \text{из}\ x \in g(y)\ \text{следует}\ y \in g^{-1}(x).$$

Условие гомоморфизма является одним из важнейших свойств динамической системы. Его можно сохранить и для системы без единственности, если вместо группы G рассматривать полугруппу S, не являющуюся группой.

Таким образом, мы приходим к концепции динамической системы без единственности как *полугруппы неоднозначных отображений пространства.* Изучение систем такого рода облегчается тем, что в последнее время создана теория многозначных отображений топологического пространства [16, 17] и теория полугрупп [18].

Настоящая работа является непосредственным продолжением работ Е. А. Барбашина [1, 15], М. И. Минкевича [2] и Б. М. Будака [3]. В статье изучаются некоторые общие свойства полугрупп неоднозначных отображений пространства, различные типы инвариантных и минимальных множеств, а также минимальные центры притяжения воронок и движений. Основные результаты этой работы опубликованы в [19].

2. Изложим некоторые сведения из теории *многозначных отображений* топологического пространства [16, 17], которые потребуются нам в дальнейшем.

Пусть X и Y—топологические пространства и $f:X\to Y$—отображение, при котором образ любой точки $x\in X$ является непустым замкнутым множеством $f(x)\subseteq Y$.

Отображение f называется *непрерывным,* если для любой точки $x\in X$ и любой окрестности U множества $f(x)$ найдется окрестность V точки x такая, что $f[V(x)]\subseteq U[f(x)]$.

Малым прообразом множества $B\subseteq Y$ называется множество $E\{x\in X:f(x)\subseteq B\}$. *Большим прообразом* множества $B\subseteq Y$ называется множество $f'(B)=E\{x\in X:f(x)\cap B\neq\Lambda\}$. Если $f(X)=Y$, то дополнение к большому прообразу множества $B\subseteq Y$ является малым прообразом дополнения к B.

Нетрудно показать, что отображение $f:X\to Y$ непрерывно тогда и только тогда, когда малый прообраз всякого открытого множества $B\subseteq Y$ открыт в X. Если $f(X)=Y$, то последнее условие равносильно тому, что большой прообраз всякого замкнутого множества $B\subseteq Y$ замкнут в X.

Отображение $f:X\to Y$ называется *косонепрерывным,* если большой прообраз всякого открытого множества $B\subseteq Y$ открыт в X. Если $f(X)=Y$, то это условие равносильно тому, что малый прообраз всякого замкнутого множества $B\subseteq Y$ замкнут в X.

Отображение $f:X\to Y$ называется *сильно непрерывным*, если оно непрерывно и косонепрерывно.

Пусть X—топологическое пространство и F_X—совокупность всех непустых замкнутых подмножеств пространства X. В множестве F_X можно ввести различные топологии.

Пусть $A\in F_X$ и U—открытое в X множество такое, что $A\subseteq U$. Окрестностью U' точки $A\in F_X$, соответствующей U, назовем множество всех $B\in F_X$ таких, что $B\subseteq U$. Совокупность всех U' для произвольных U образует полную систему окрестностей, определяющую некоторую топологию. Множество F_X, снабженное этой топологией, обозначается через $\varkappa X$ [16].

Пусть $U_1,\dots,U_n$—произвольное конечное число открытых в X множеств. Следуя [17], обозначим через $\langle U_1,\dots,U_n\rangle$ совокупность всех $A\in F_X$ таких, что $A\subseteq\bigcup\limits_{i=1}^{n}U_i$ и $A\cap U_i\neq\Lambda$ $(i=1,\dots,n)$. Совокупность всех $\langle U_1,\dots,U_n\rangle$ образует базу так называемой *финитной* топологии в F_X. Множество F_X, снабженное этой топологией, обозначается через ϕX.

Если отображение $f:X\to Y$ таково, что образом точки $x\in X$ является замкнутое множество $f(x)\subseteq Y$, то:

1) Для непрерывности отображения f необходимо и достаточно, чтобы определяемое этим отображением однозначное отображение f^* пространства X в $\varkappa Y$ было непрерывным.

2) Для сильной непрерывности отображения f необходимо и достаточно, чтобы определяемое этим отображением однозначное отображение f^{**} пространства X в ϕY было непрерывным.

Отображение $f:X\to Y$ называется *непрерывным (сильно непрерывным) в точке* $x\in X$, если однозначное отображение f^* (f^{**}) непрерывно в точке x.

Если f—непрерывное отображение пространства X в пространство Y, то для любой точки $y\in Y$ множество $f'(y)=E\{x\in X:f(x)\ni y\}$ замкнуто в X.

Если f—непрерывное отображение бикомпакта X на бикомпакт Y, то обратное отображение f' также непрерывно.

§ 1. Определение полугруппы неоднозначных отображений пространства. Связь с обобщенными динамическими системами

1. Определение 1. A_0. *Пусть R—топологическое пространство, S—топологическая полугруппа (т. е. топологическое пространство с непрерывной по совокупности компонент бинарной ассоциативной мультипликативной операцией) с единицей e, f—отображение, ставящее в соответствие каждой точке $p\in R$ и каждому элементу $s\in S$ непустой бикомпакт $f(p,s)\subseteq R$.*

Совокупность (R,S,f) назовем полугруппой неоднозначных отображений (п. н. о.), если выполнены следующие три условия:

A_1. *$f(p,e)=p$ для любой точки $p\in R$.*

A_2. *$f[f(p,s_1),s_2]=f(p,s_1s_2)$ для любых двух элементов s_1 и s_2 из S и любой точки $p\in R$*[1].

A_3. *Многозначное отображение f пространства $R\times S$ в R непрерывно.*

Отображение $f=f(p,s)$ при фиксированном $p\in R$ будем обозначать через $f_p(s)$, а при фиксированном $s\in S$—через $f^s(p)$.

Иногда мы будем налагать на п. н. о. (R,S,f) дополнительные ограничения:

A_4. *Отображение $f(p,s)$ пространства $R\times S$ в R косонепрерывно.*

A_5. *Отображение $f_p(s)$ пространства S в R косонепрерывно для любой фиксированной точки $p\in R$.*

Аксиомы A_3 и A_4 в совокупности равносильны аксиоме

A'_3. *Отображение $f(p,s)$ пространства $R\times S$ в R сильно непрерывно.*

Множество $f(p,S)=\bigcup\limits_{s\in S}f(p,s)$ назовем *воронкой точки p.*

2. Пусть D—аддитивная топологическая группа вещественных чисел с обычной топологией, D^+ (D^-)—подполугруппа неотрицательных (неположительных) чисел топологической группы D.

Рассмотрим связь между понятием полугруппы неоднозначных отображений и понятием обобщенной динамической системы. Следует отметить, что в работах [1, 2, 3] аксиомы непрерывности формулируются по-разному. Наиболее слабыми являются аксиомы, предложенные в статье Б. М. Будака [3]. Сформулируем эти аксиомы для случая *топологического* пространства (в работах [1, 2, 3] пространство R предполагается метрическим).

Определение 2. *Пусть R—топологическое пространство, D—аддитивная группа действительных чисел, f—отображение, ставящее в соответствие каждой точке $p\in R$ и каждому числу $t\in D$ множество $f(p,t)\subseteq R$.*

---

[1] Если $A\subseteq R$ и $B\subseteq S$, то под $f(A,B)$ понимаем объединение $f(p,s)$ по всем $p\in A$ и $s\in B$.

Совокупность (R, D, f) *называется обобщенной динамической системой (о. д. с.), если выполнены следующие условия:*

B_1. $f(p, 0) = p$ *для всякой точки* $p \in R$.

B_2. *Для любых* $p \in R$ *и* $t \in D$ *множество* $f(p, t)$ *есть непустой бикомпакт.*

B_3. *Из* $q \in f(p, t)$ *следует* $p \in f(q, -t)$ $(p \in R,\ q \in R, t \in D)$.

B_4. *Если* $t_1 \cdot t_2 \geqslant 0$, $p \in R$, *то* $f[f(p, t_1), t_2] = f(p, t_1 + t_2)$.

B_5. *Многозначное отображение* f *пространства* $R \times D$ *в* R *непрерывно.*

В работе Б. М. Будака [3] имеется еще одна аксиома, которую в случае топологического пространства R можно сформулировать так:

B_6. *Для каждой фиксированной точки* $p \in R$ *многозначное отображение* f_p *пространства* D *в* R, *определяемое соотношением* $f_p(t) = f(p, t)$, *сильно непрерывно.*

Однако ниже будет показано, что в T_1-отделимых пространствах эта аксиома является следствием аксиом B_1—B_5.

В дальнейшем под обобщенной динамической системой будем понимать систему (R, D, f), удовлетворяющую условиям определения 2.

Если пространство R — метрическое, то определение 2 равносильно соответствующему определению 1 из работы Б. М. Будака [3]. Для доказательства следует заметить, что в метрическом пространстве аксиома B_6 эквивалентна аксиоме 5° из [3], так как в множестве всех компактных подмножеств метрического пространства R финитная топология [17] индуцируется отклонением двух множеств по Хаусдорфу [20]. Аксиома B_5 эквивалентна аксиоме 6° из [3], так как сферические окрестности компактного множества в метрическом пространстве образуют фундаментальную систему окрестностей этого множества [21].

Легко видеть, что всякая о. д. с. (R, D, f) определяет две п. н. о.: (R, D^+, f) и (R, D^-, f).

Теорема 1. *Для п. н. о.* (R, D^+, f), *где* R — *бикомпакт и* $f(R, t) = R$ *при всех* $t > 0$, *существует, и притом единственная, о. д. с.* (R, D, f^*) *такая, что* $f^*(p, t) = f(p, t)$ *для* $t \geqslant 0$, $p \in R$.

Доказательство. Если искомая о. д. с. (R, D, f^*) существует, то в силу аксиомы B_3 определения 2 при $t < 0$, $p \in R$ выполняется соотношение: $f^*(p, t) = E\{q \in R : f(q, -t) \in p\} \equiv f'^{(-t)}(p)$.

Пусть

$$f^*(p, t) = \begin{cases} f(p, t) \text{ при } t \geqslant 0,\ p \in R, \\ f'^{(-t)}(p) \text{ при } t < 0,\ p \in R. \end{cases}$$

Докажем, что (R, D, f^*), где f^* определено, как указано выше, является о. д. с.

Ясно, что $f^*(p, 0) = p$ для любой точки $p \in R$. Из условия $f(R, t) = R$ при всех $t > 0$ следует, что $f^*(p, t) \neq \Lambda$ при $t < 0$, $p \in R$. Для проверки аксиомы B_2 теперь достаточно показать, что $f^*(p, t)$ замкнуто при любых $t < 0$, $p \in R$. Но при этих условиях $f^*(p, t) = f'^{(-t)}(p)$, а большой прообраз $f'^{(-t)}(p)$ при непрерывном отображении $f^{(-t)} : R \rightarrow R$ замкнут.

Справедливость аксиомы B_3 вытекает из определения функции $f^*(p, t)$.

Для проверки аксиомы B_4 достаточно показать, что $f^*[f^*(p, -t_1), -t_2] = f^*(p, -t_1 - t_2)$ при любых $t_1 > 0$, $t_2 > 0$, $p \in R$. Пусть $r \in f^*[f^*(p, -t_1), -t_2]$. Найдется точка $q \in f^*(p, -t_1)$ такая, что $r \in f^*(q, -t_2)$. Тогда $p \in f(q, t_1)$, $q \in f(r, t_2)$ и $p \in f[f(r, t_2), t_1] = f(r, t_1 + t_2)$, так как $t_1 > 0$, $t_2 > 0$. Поэтому $r \in f^*(p, -t_1 - t_2)$. Таким образом, $f^*[f^*(p, -t_1), -t_2] \subseteq f^*(p, -t_1 - t_2)$. Аналогично доказывается и обратное включение.

Проверим выполнение аксиомы B_5. Достаточно показать, что для $p \in R, t > 0$ и окрестности $U[f^*(p, -t)]$ найдутся окрестность $V(p)$ и число $\delta > 0$ такие, что $f^*(q, -t') \subseteq U[f^*(p, -t)]$, если $q \in V(p)$ и $|t' - t| < \delta$.

Предварительно докажем лемму, которая будет полезна и в дальнейшем.

Лемма 1. *Пусть* (R, S, f) — *п. н. о. Если* B — *бикомпактное множество из* R, *то для любого конечного открытого покрытия* $\{U_1, \ldots, U_n\}$ *множества* B *существует такая окрестность* $W(e)$ *единицы полугруппы* S, *что* $f[p, W(e)] \subseteq U_k$ *для некоторого натурального числа* k $(1 \leqslant k \leqslant n)$.

Доказательство. Обозначим через $U(p)$ пересечение всех U_k, содержащих точку p. Для точки $p \in B$ и окрестности $U(p)$ найдутся в силу аксиом A_1 и A_3 такие окрестности $V(p) \subseteq U(p)$ и $W_p(e)$, что из $q \in V(p)$ и $s \in W_p(e)$ следует $f(q, s) \subseteq U(p)$. Из покрытия $\{V(p)\}$ множества B выберем конечное покрытие $\{V(p_1), \ldots, V(p_m)\}$ и обозначим через $W(e)$ множество $\bigcap\limits_{l=1}^{m} W_{p_l}(e)$.

Пусть $p \in B$ и $s \in W(e)$. Найдется такой номер l $(1 \leqslant l \leqslant m)$, что $p \in V(p_l)$, тогда $f(p, s) \subseteq U(p_l)$. Если $p_l \in U_k$ $(1 \leqslant k \leqslant n)$, то $f(p, s) \subseteq U_k$ в силу определения $U(p_l)$. Значит, нашлась окрестность U_k, содержащая $f[p, W(e)]$. Лемма доказана.

Известно, что в бикомпакте существует, и притом единственная, равномерная структура, согласующаяся с топологией, а именно—равномерная структура конечных покрытий [21].

Поэтому из леммы 1 следует, что для произвольного окружения α равномерной структуры бикомпакта R существует окрестность $W(0) = [0, \delta)$ $(\delta > 0)$, удовлетворяющая условию $f[p, W(0)] \subseteq \alpha(p)$ для любой точки $p \in R$. Отсюда и из определения $f^*(p, t)$ следует, что $f^*(p, t) \subseteq \alpha(p)$ при $|t| < \delta$, $p \in R$.

Так как при каждом $t > 0$ отображение $f^t(p)$ бикомпакта R на R непрерывно, то непрерывно и отображение $f'^{t}(p)$ $(t > 0)$. Поэтому для точки $p \in R$ числа $t > 0$ и окружения α равномерной структуры бикомпакта R найдется окрестность $V(p)$ такая, что из $q \in V(p)$ следует $f^*(q, -t) \subseteq \alpha[f^*(p, -t)]$.

Вернемся теперь к проверке выполнения аксиомы B_5. Для окрестности $U[f^*(p, -t)]$ бикомпакта $f^*(p, -t)$ найдем окружение α из условия $\overset{2}{\alpha}[f^*(p, -t)] \subseteq U$. Используя аксиому B_4, нетрудно показать, что найденные выше число $\delta > 0$ и окрестность $V(p)$ являются искомыми. Теорема полностью доказана.

3. Пусть (R, G), где G — произвольная топологическая группа, является системой неоднозначных отображений пространства [15].

Если условие включения $g_1 g_2(x) \subseteq g_1[g_2(x)]$ $(g_1, g_2 \in G)$ заменить условием равенства, то получается общая динамическая система с единственностью. Действительно, пусть $y \in g(x)$. Докажем, что $g(x) = y$. Из условия В работы [15] следует, что $x \in g^{-1}(y)$. Применим к обеим частям этого включения преобразование g. Тогда $g(x) \subseteq g[g^{-1}(y)] = e(y) = y$, то есть $g(x) = y$.

Таким образом, если мы хотим в аксиоматике динамической системы без единственности сохранить свойство гомоморфизма, то вместо группы G должны рассматривать полугруппу S, не являющуюся группой.

§ 2. Общие свойства полугрупп неоднозначных отображений пространства

1. Теорема 2. *Если множества F из R и K* из S *бикомпактны, то и множество $f(F,K)$ бикомпактно.*

Доказательство. Пусть $\{U_\alpha\}$ —произвольное открытое покрытие множества $f(F,K)$. Так как при каждом $s \in S$ и для любой точки $p \in F$ множество $f(p,s)$ бикомпактно, то существует конечное покрытие $\{U_1,\ldots, U_n\}$ этого множества. В силу аксиомы A_3 найдутся окрестности $V(p) \subseteq R$ и $W(s) \subseteq S$ такие, что $f[V(p), W(s)] \subseteq \bigcup_{k=1}^{n} U_k$. Так как множество F бикомпактно, то из покрытия $\{V(p)\}$ можно выделить конечное покрытие $\{V(p_1),\ldots, V(p_m)\}$. Аналогично, из покрытия $\{W(s)\}$ множества K можно выделить конечное покрытие $\{W(s_1),\ldots, W(s_l)\}$. Для каждой пары $p_i, s_j (1 \leqslant i \leqslant m,\ 1 \leqslant j \leqslant l)$ существует конечное покрытие $\{U_1,\ldots, U_n\}$ множества $f(p_i, s_j)$. Но тогда совокупность всех U_α, входящих хотя бы в одно из указанных покрытий, образует конечное покрытие множества $f(F,K)$.

Определение 3. *П. н. о. (R, S, f) называется континуальной, если для любой точки $p \in R$ и любого элемента $s \in S$ множество $f(p,s)$ связно.*

Теорема 3. *Если п. н. о. (R, S, f) континуальная, а полугруппа S связная, то воронка $f(p,S)$ любой точки $p \in R$ связна.*

Доказательство. Допустим противное: для некоторой точки $p \in R$ множество $f(p,S) = A \cup B$, $A \cap B = \Lambda$, $A \neq \Lambda$, $B \neq \Lambda$, A и B открыты в R. Согласно условию, каждое сечение принадлежит одному и только одному множеству—A или B. Обозначим через $S_A = E\{s \in S : f(p,s) \subseteq A\}$ и через $S_B = E\{s \in S : f(p,s) \subseteq B\}$. Так как отображение $f_p : S \to R$ непрерывно, то множества S_A и S_B открыты в R. Поскольку $S_A \neq \Lambda$, $S_B \neq \Lambda$, $S = S_A \cup S_B$ и $S_A \cap S_B = \Lambda$, мы получаем противоречие с условием связности полугруппы S.

Теорема 4. *Если п. н. о. (R, S, f) удовлетворяет аксиоме* A_5, *и полугруппа S связна, то воронка $f(p,S)$ любой точки $p \in R$ связна.*

Доказательство вытекает из аксиомы A_1 и теоремы о сохранении связности при сильно непрерывном отображении $f_p(s)$ $(p \in R,\ s \in S)$ [16].[2)]

Теорема 5. *Если R—T_1—отделимое топологическое пространство, а $S = D^+$, то п. н. о. (R, S, f) удовлетворяет аксиоме* A_5.

Доказательство. Пусть $p \in R$, $t_0 \in D^+$ и открытое в R множество U_0 таково, что $f(p,t_0) \cap U_0 \neq \Lambda$. Достаточно рассмотреть случай $t_0 \geqslant 0$. Обозначим через $K = [0, t_0]$ и построим покрытие множества $f(p,K)$ следующим образом: выберем точку $q_0 \in f(p,t_0) \cap U_0$, в качестве окрестности точки q_0 возьмем U_0, а окрестности остальных точек из $f(p,K)$ выберем так, чтобы они не содержали точку q_0. Так как множество $f(p,K)$ бикомпактно, то из построенного покрытия можно выделить конечное подпокрытие $\{U_0, U_1,\ldots, U_n\}$. Для этого покрытия найдем окрестность $W(0) = [0, \delta)$, удовлетворяющую требованиям леммы 1. Можно считать, что $\delta < t_0$. Докажем теперь, что если $|t' - t_0| < \delta$, то $f(p,t') \cap U_0 \neq \Lambda$. Если $t' > t_0$, то $f(p,t') = f[f(p,t_0), t' - t_0]$. Так как $q_0 \in f(p,t_0) \cap U_0$ и U_0—единственная окрестность точки q_0 в $\{U_0, U_1,\ldots, U_n\}$, то $f(q_0,t) \subseteq U_0$ при $0 \leqslant t < \delta$, в частности, $f(q_0, t' - t_0) \subseteq U_0$. Следовательно, $f(p,t') \cap U_0 \neq \Lambda$.

[2)] Теорема о сохранении связности доказана, по существу, еще в работе Е. А. Барбашина [15].

Пусть теперь $t_0 > t' \geqslant 0$. Тогда $f(p,t_0) = f[f(p,t'),\ t_0 - t']$. Так как $q_0 \in f(p,t_0)$, то существует точка $r \in f(p,t')$ такая, что $q_0 \in f(r, t_0 - t')$, поэтому найдётся множество $U_k (0 \leqslant k \leqslant n)$, удовлетворяющее условию $f(r, t_0 - t') \subseteq U_k$. Но $q_0 \in f(r, t_0 - t')$, следовательно, $U_k = U_0$. Таким образом, $r \in U_0$ и поэтому $f(p,t') \cap U_0 \neq \Lambda$. Теорема доказана.

Из этой теоремы вытекает, что *аксиома* B_6 *в T_1-отделимых пространствах является следствием аксиом* B_1—B_5. Это следует из того, что каждая из п. н. о. (R, D^+, f) и (R, D^-, f), определяемых о. д. с. (R, D, f), удовлетворяет аксиоме A_5. Поэтому отображение $f_p : D \to R$ при каждом $p \in R$ сильно непрерывно.

Если R—T_1—отделимое пространство, то из теорем 5 и 4 следует, что воронка $f(p, D^+)$ любой точки $p \in R$ в п. н. о. (R, D^+, f) является связной.

Примеры показывают, что если $S \neq D^+$, то утверждение теоремы 5, вообще говоря, неверно.

Пример 1. В качестве пространства R_0 возьмем полупрямые $y = 0$, $x \geqslant 0$ и $y = 1$, $x \geqslant 1$ и на этих лучах зададим естественную топологию подпространства плоскости. В качестве полугруппы S_0 возьмём полугруппу неотрицательных вещественных чисел с обычной операцией сложения, а топологию зададим так: открытыми множествами в S_0 будут все открытые множества на $[0, +\infty)$ при обычной топологизации и множество, состоящее из одной точки 0. Получим топологическую полугруппу S_0.

Зададим отображение f так: если $(x, y) \in R_0$ и $s \in S_0$, то

$$f[(x,y), s] = \begin{cases} (x+s, 0), & \text{если } 0 \leqslant x + s < 1,\ y = 0; \\ (x+s, 0) \cup (x+s, 1), & \text{если } x + s \geqslant 1,\ s > 0,\ y = 0; \\ (x, 0) \text{ для любой точки } (x, 0) \text{ при } s = 0; \\ (x+s, 1), & \text{если } x \geqslant 1,\ y = 1,\ s \geqslant 0. \end{cases}$$

Легко проверить, что (R_0, S_0, f) является п. н. о. Требование аксиомы A_5 нарушается при $p = (0,0)$ и $s = 1$: $f[(0,0), 1] = (1,0) \cup (1,1)$; если же $s < 1$, то $f[(0,0), s] = (s,0)$. Воронка точки $p = (0,0)$ не связна.

2. Определение 4 [1]. *Точку $p_0 \in R$ назовем точкой непрерывности при п. н. о. (R, S, f), если при любом $s \in S$ отображение $f^s(p)$ пространства R в себя сильно непрерывно в точке $p = p_0$.*

Из аксиомы A_3 следует, что это определение равносильно следующему:

Определение 4′. *Точка $p_0 \in R$ называется точкой непрерывности при п. н. о. (R, S, f), если для любого $s \in S$ и любого открытого в R множества U, пересекающегося с множеством $f(p_0, s)$, найдется такая окрестность $V(p_0)$, что если $q \in V(p_0)$, то $f(q,s) \cap U \neq \Lambda$.*

Замечание. В дальнейшем мы будем опускать слова „при п. н. о. (R, S, f)“, если это не сможет привести к недоразумениям. В формулировках тех или иных утверждений будем предполагать, что свойства точек и множеств из пространства R рассматриваются при определённой п. н. о. (R, S, f).

Лемма 2. *Если все точки бикомпакта R—точки непрерывности, то для $s \in S$ и окружения α равномерной структуры в R найдется такое окружение β, что из $(p, q) \in \beta$ следует $f(p,s) \subseteq \alpha[f(q,s)]$ и $f(q,s) \subseteq \alpha[f(p,s)]$.*

Доказательство. Для окружения α найдем окружение δ такое, что $\overset{2}{\delta} \subseteq \alpha$. Для произвольной точки $p \in R$, окружения δ и данного $s \in S$ в силу определения 4 найдётся такая окрестность $V(p)$, что из $q \in V(p)$ следует $f(p,s) \subseteq \delta[f(q,s)]$ и $f(q,s) \subseteq \delta[f(p,s)]$. Из покрытия $\{V(p)\}$ $(p \in R)$ выделим конечное подпокрытие $\{V(p_1), \ldots, V(p_n)\}$, которое определяет некоторое окружение $\beta = \bigcup_{i=1}^{n} V(p_i) \times V(p_i)$. Покажем, что окружение β—искомое. Пусть $(p,q) \in \beta$, тогда $p \in V(p_i)$ и $q \in V(p_i)$ для некоторого i $(1 \leqslant i \leqslant n)$. Тогда $f(p,s) \subseteq \delta[f(p_i,s)]$; $f(p_i,s) \subseteq \delta[f(p,s)]$, $f(q,s) \subseteq \delta[f(p_i,s)]$ и $f(p_i,s) \subseteq \delta[f(q,s)]$. Поэтому $f(p,s) \subseteq \overset{2}{\delta}[f(q,s)] \subseteq \subseteq \alpha[f(q,s)]$, и аналогично $f(q,s) \subseteq \alpha[f(p,s)]$. Лемма доказана.

Теорема 6. *П. н. о. (R, D^+, f), где R — бикомпакт, все точки которого—точки непрерывности, удовлетворяют аксиоме A_3'.*

Доказательство. Пусть $p_0 \in R$, $t_0 \in D^+$ и α—окружение равномерной структуры в R. Выберем окружение β из условия $\overset{2}{\beta} \subseteq \alpha$. Для окружения β и $t_0 \in D^+$ по лемме 2 найдем такое окружение γ, что из $(p,q) \in \gamma$ следует $f(p,t_0) \subseteq \beta[f(q,t_0)]$ и $f(q,t_0) \subseteq \beta[f(p,t_0)]$. Так как R—бикомпакт, то аналогично теореме 5 можно показать, что для окружения β и $t_0 \in D^+$ можно найти число $\delta > 0$ такое, что для любой точки $q \in R$ выполняется $f(q,t) \subseteq \beta[f(q,t_0)]$ и $f(q,t_0) \subseteq \beta[f(q,t)]$, если только $|t - t_0| < \delta$, $t \in D^+$.

Если $|t - t_0| < \delta, t \in D^+$ и $(q, p_0) \in \gamma$, то $f(q,t) \subseteq \beta[f(q,t_0)[\subseteq \overset{2}{\beta}[f(p_0,t_0)] \subseteq \subseteq \alpha[f(p_0,t_0)]$ и аналогично $f(p_0,t_0) \subseteq \alpha[f(q,t)]$. Теорема доказана.

§ 3. Инвариантные множества

Определение 5. *Множество $A \subseteq R$ назовем инвариантным (полуинвариантным, квазиинвариантным) при п. н. о. (R, S, f), если $f(A,s) = A$ $(f(A,s) \subseteq A,\ f(A,s) \supseteq A)$ при любом $s \in S$.*

Определение 6. *Множество $A \subseteq R$ назовем псевдоинвариантным при п. н. о. (R, S, f), если для любой точки $p \in A$ и любого элемента $s \in S$ выполняется $f(p,s) \cap A \neq \Lambda$.*

В дальнейшем мы будем опускать слова „при п. н. о. (R, S, f)“, придерживаясь принятого ранее соглашения.

Примеры показывают, что никакие два из введенных нами четырех понятий — инвариантности, полуинвариантности, квазиинвариантности и псевдоинвариантности — не совпадают между собой (даже в случае $S = D^+$).

Теорема 7. *Если множество A полуинвариантно и все точки из $\overline{A} \setminus A$ являются точками непрерывности, то $\overline{A}$—полуинвариантное множество.*

Доказательство. По условию, $f(A,s) \subseteq A$ при всех $s \in S$. Пусть $p \in \overline{A} \setminus A$ и $s \in S$. Докажем, что $f(p,s) \subseteq \overline{A}$. Пусть $r \in f(p,s)$ и $U(r)$—произвольная окрестность точки r. Так как p—точка непрерывности, то для данного $s \in S$ и окрестности $U(r)$ найдется окрестность $V(p)$ такая, что из $q \in V(p)$ следует $f(q,s) \cap U \neq \Lambda$. Из условия $p \in \overline{A}$ следует, что найдётся точка $q \in V(p) \cap A$. Тогда $f(q,s) \subseteq A$ и $U(r) \cap A \neq \Lambda$. Поэтому $r \in \overline{A}$, и теорема доказана.

Теорема 8. *Если пространство R — бикомпакт, то замыкание квазиинвариантного множества квазиинвариантно.*

Доказательство. Пусть $A \subseteq f(A,s)$ при всех $s \in S$, и $q \in \overline{A}$. Докажем, что $q \in f(\overline{A},s)$ при любом $s \in S$. Допустим противное: тогда для некоторого $s_0 \in S$ множество $E\{r \in R : f(r,s_0) \ni q\} = f'^{s_0}(q) \equiv B$ таково, что $B \cap \overline{A} = \Lambda$. Множество B замкнуто. Так как R—бикомпакт, $A \subseteq f(A,s_0)$ и $q \in \overline{A}$, то $B \neq \Lambda$, и для любой окрестности $U(B)$ существует окрестность $V(q)$ такая, что $f'^{s_0}(p) \subseteq U(B)$ для всех $p \in V(q)$. Возьмем в качестве $U(B)$ множество $R \setminus \overline{A}$. Найдётся точка $p_1 \in A \cap V(q)$. Тогда $f'^{s_0}(p_1) \subseteq U(B)$. С другой стороны, $p_1 \in A \subseteq f(A,s_0)$, и поэтому найдётся точка $p_2 \in A$ такая, что $p_1 \in f(p_2,s_0)$. Поэтому $p_2 \in f'^{s_0}(p_1) \subseteq \subseteq U(B) = R \setminus \overline{A}$, а это противоречит условию $p_2 \in A$. Теорема доказана.

Так как множество A инвариантно тогда и только тогда, когда оно полуинвариантно и квазиинвариантно, то из теорем 7 и 8 в качестве следствия вытекает

Теорема 9. *Если пространство R — бикомпакт, а множество A инвариантно, и все точки из $\overline{A} \setminus A$—точки непрерывности, то $\overline{A}$ —инвариантно.*

Если пространство R не является бикомпактом, то утверждения теорем 8 и 9, вообще говоря, неверны.

Теорема 10. *Замыкание псевдоинвариантного множества A псевдоинвариантно.*

Доказательство. Допустим противное. Найдутся точка $p_0 \in \overline{A}$ и элемент $s_0 \in S$ такие, что $f(p_0,s_0) \cap \overline{A} = \Lambda$. В силу аксиомы A_3 найдётся окрестность $V(p_0)$ точки p_0 такая, что $f[V(p_0), s_0] \subseteq R \setminus \overline{A}$. Так как $p_0 \in \overline{A}$, то существует точка $q \in V(p_0) \cap A$. Тогда $f(q,s_0) \subseteq R \setminus \overline{A}$, но множество A псевдоинвариантно, поэтому $f(q,s_0) \cap A \neq \Lambda$. Полученное противоречие доказывает теорему.

2. Сформулируем лемму, доказательство которой не представляет труда.

Лемма 3. *Пусть $A_1 \supseteq A_2 \supseteq \ldots A_\alpha \supseteq \ldots$—вполне упорядоченная система непустых бикомпактов, занумерованных всеми трансфинитными числами, меньшими некоторого предельного трансфинитного числа β. Тогда для любой окрестности $U[\bigcap_{\alpha<\beta} A_\alpha]$ найдется трансфинит $\gamma < \beta$ такой, что $A_\gamma \subseteq U[\bigcap_{\alpha<\beta} A_\alpha]$.*

Лемма 4. *Пусть пространство R—хаусдорфово и $A_1 \supseteq A_2 \supseteq \ldots \supseteq \supseteq A_\alpha \supseteq \ldots$ — вполне упорядоченная система непустых бикомпактных инвариантных (полуинвариантных, квазиинвариантных, псевдоинвариантных) множеств, занумерованных всеми трансфинитными числами, меньшими некоторого трансфинита β. Тогда множество $\bigcap_{\alpha<\beta} A_\alpha$ инвариантно (полуинвариантно, квазиинвариантно, псевдоинвариантно).*

Доказательство. Достаточно ограничиться случаем, когда β— предельное число.

Докажем вначале, что $f[\bigcap_{\alpha<\beta} A_\alpha, s] = \bigcap_{\alpha<\beta} f(A_\alpha, s)$ при любом $s \in S$. Если $q \in f[\bigcap A_\alpha, s]$, то $q \in f(p,s)$, где $p \in \bigcap A_\alpha$, тогда $q \in f(A_\alpha, s)$ для любого $\alpha < \beta$, и поэтому $q \in \bigcap f(A_\alpha, s)$.

Пусть теперь $q \in \bigcap f(A_\alpha, s)$. Докажем, что $q \in f[\bigcap A_\alpha, s]$. Допустим противное: тогда $f'^{s}(q) \cap (\bigcap A_\alpha) = \Lambda$. Множество $f'^{s}(q)$ замкнуто, поэтому согласно лемме 3 существует такой трансфинит γ, что $A_\gamma \subset R \setminus$

$\setminus f'^s(q)$. Так как $q\in f(A_\gamma, s)$, то $f'^s(q)\cap A_\gamma\neq\Lambda$. Полученное противоречие доказывает, что $q\in f[\cap A_\alpha, s]$. Таким образом, $f[\cap A_\alpha, s]=\cap f(A_\alpha, s)$. Отсюда уже вытекает утверждение леммы для инвариантных, полуинвариантных и квазиинвариантных множеств.

Пусть теперь все множества A_α $(\alpha<\beta)$ псевдоинвариантны, пусть $p\in\bigcap\limits_{\alpha<\beta}A_\alpha$ и $s\in S$. Тогда $p\in A_\alpha$ $(\alpha<\beta)$ и $f(p,s)\cap A_\alpha\neq\Lambda$. Так как множество $f(p,s)$ замкнуто, то из леммы 3 вытекает, что $f(p,s)\cap(\cap A_\alpha)\neq\Lambda$. Значит, множество $\bigcap\limits_{\alpha<\beta}A_\alpha$ псевдоинвариантно. Лемма доказана.

Из леммы 4 вытекает следующая теорема:

Теорема 11. *Если пространство R хаусдорфово, то непустое пересечение любой системы бикомпактных инвариантных (полуинвариантных, квазиинвариантных, псевдоинвариантных) множеств инвариантно (полуинвариантно, квазиинвариантно, псевдоинвариантно).*

Действительно, согласно теореме Цермело, любую систему множеств можно вполне упорядочить. Пусть $\{\Phi_\alpha\}$—вполне упорядоченная система бикомпактных инвариантных (полуинвариантных, квазиинвариантных, псевдоинвариантных) множеств, занумерованных всеми трансфинитными числами, меньшими числа β. Составим множества $F_\alpha=\bigcap\limits_{\gamma<\alpha}\Phi_\gamma$ $(\alpha<\beta)$. Применяя метод трансфинитной индукции и используя лемму 4, можно показать, что все множества F_α $(\alpha<\beta)$ инвариантны (полуинвариантны, квазиинвариантны, псевдоинвариантны). Для завершения доказательства остается применить лемму 4 к множествам F_α $(\alpha<\beta)$.

4. В этом пункте будем рассматривать п. н. о. (R, D^+, f), где R—хаусдорфово пространство. Следуя Б. М. Будаку [3], введем следующее определение:

Определение 7. *Непрерывное отображение $\varphi_p(t)$ топологической полугруппы D^+ в топологическое пространство R называется движением, выходящим из точки p, если:*

1) $\varphi_p(0)=p$;

2) *из* $0\leqslant t'\leqslant t''$ *следует* $\varphi_p(t'')\in f[\varphi_p(t'), t''-t']$[3].

Теорема 12. *Если $q\in f(p,t_0)$, то существует движение $\varphi_p(t)$, выходящее из точки p и такое, что $\varphi_p(t_0)=q$.*

Доказательство протекает точно так же, как и в работе [3]. Заметим лишь, что в силу леммы 1 отображение $\varphi_p(\theta)$, где θ — двоично-рациональные точки отрезка $[0,1]$, в множество $f(p,[0,1])$ равномерно непрерывно, если снабдить бикомпакт $f(p,[0,1])$ равномерной структурой, согласующейся с его топологией.

Теорема 13. *Для того, чтобы замкнутое множество A было псевдоинвариантным, необходимо и достаточно, чтобы для любой точки $p\in A$ существовало движение $\varphi_p(t)$ такое, что $\varphi_p(D^+)\subseteq A$.*

Доказательство. Достаточность условия вытекает из того, что $\varphi_p(t)\in f(p,t)$ $(p\in R,\ t\in D^+)$.

Необходимость. Следуя Е. А. Барбашину [1], обозначим через $\{q_{n,i}\}$ последовательность точек, удовлетворяющих условиям:

$$q_{n,i+1}\in f\left(q_{n,i}, \frac{1}{2^n}\right)\cap A \text{ и } q_{n,0}=p\ (i=0,1,\ldots;\ n=1,2,\ldots).$$

При каждом $n=1,2,\ldots$ существует движение $\varphi_p^{(n)}(t)$, проходящее через точки $q_{n,i}$ $(i=0,1,\ldots)$. Пусть $T>0$—фиксированное число. Семейство отображений $\{\varphi_p^{(n)}(t)\}$ $(n=1,2,\ldots;\ t\in[0,T])$ по лемме 1 равностепенно непрерывно, если бикомпакт $f(p,[0,T])$ снабдить равномерной структурой, согласующейся с его топологией. Пусть C—семейство всех непрерывных отображений отрезка $[0,T]$ в бикомпакт $f(p,[0,T])$ и пусть C снабжено топологией равномерной сходимости. Тогда замыкание F семейства отображений $\{\varphi_p^{(n)}(t)\}$ $(n=1,2,\ldots)$ в C бикомпактно ([22], стр. 233). Поэтому семейство $\{\varphi_p^{(n)}(t)\}$ $(n=1,2,\ldots)$ имеет предельную точку в F. Обозначим ее через $\varphi_p(t)$. Нетрудно показать, что $\varphi_p(t)$ $(t\in[0,T])$ является отрезком движения. Увеличивая T, получим движение $\varphi_p(t)$ $(t\in D^+)$. Легко видеть, что $\varphi_p(D^+)\subseteq A$.

---

[3] Заметим, что непрерывность отображения $\varphi_p(t)$ следует из условия 2) и леммы 1.

Аналогично теореме 13 может быть доказана

Теорема 14. *Для того, чтобы бикомпактное множество A было квазиинвариантным, необходимо и достаточно, чтобы для любой точки $p\in A$ существовало непрерывное отображение $\psi_p(t)$ полугруппы D^+ в R, удовлетворяющее условиям:*

1′) $\psi_p(0)=p$,

2′) *если* $0\leqslant t'\leqslant t''$, *то* $\psi_p(t')\in f[\psi_p(t''), t''-t']$,

и такое, что $\psi_p(D^+)\subseteq A$.

Отображение $\psi_p(t)$ $(t\in D^+)$, удовлетворяющее условиям 1′) и 2′), естественно назвать *движением в отрицательном направлении.*

§ 4. Минимальные множества

В этом параграфе будем предполагать, что пространство R хаусдорфово.

1. Определение 8. *Множество M называется минимальным полуинвариантным (квазиинвариантным, инвариантным, псевдоинвариантным), если оно непусто, замкнуто, полуинвариантно (квазиинвариантно, инвариантно, псевдоинвариантно) и не содержит собственного подмножества, обладающего этими тремя свойствами.*

Из леммы 4 вытекает следующая

Теорема 15. *Непустое бикомпактное полуинвариантное (квазиинвариантное, инвариантное, псевдоинвариантное) множество содержит минимальное полуинвариантное (квазиинвариантное, инвариантное, псевдоинвариантное) множество.*

Доказательство ничем не отличается от обычного доказательства существования минимальных множеств [23]. Следует только заметить, что если множество Σ имеет мощность m, то множество всех подмножеств множества Σ имеет мощность 2^m, а по теореме Цермело существует такое трансфинитное число β, что мощность множества всех трансфинитных чисел α, $\alpha<\beta$, больше, чем 2^m.

Теорема 16. *Если полугруппа S коммутативна, то бикомпактное множество является минимальным инвариантным тогда и только тогда, когда оно является минимальным полуинвариантным.*

Доказательство. Пусть A — бикомпактное минимальное полуинвариантное множество. Докажем, что A — минимальное инвариантное множество. Достаточно показать, что A — инвариантно. Допустим противное: найдется $s_0\in S$ такой, что $B=f(A,s_0)$ — истинное подмножество множества A. В силу теоремы 2 множество B бикомпактно. Покажем, что B полуинвариантно. $f(B, s)=f[f(A, s_0), s]=f(A, s_0s)=$ $=f(A, ss_0)=f[f(A, s), s_0]\subseteq f(A,s_0)=B$. Итак, B — непустое замкнутое полуинвариантное множество. Так как A — минимальное полуинвариантное множество и $B\subseteq A$, то $B=A$ вопреки допущению.

Пусть теперь A — бикомпактное минимальное инвариантное множество. Докажем, что A — минимальное полуинвариантное множество

Допустим противное. В силу теоремы 15 найдется минимальное полуинвариантное множество B, составляющее собственное подмножество A. Но согласно первой части доказательства, B — минимальное инвариантное множество и поэтому $B=A$, что противоречит допущению. Теорема доказана.

2. В этом пункте будем рассматривать п. н. о. $(R,\ D^+,\ f)$.

Теорема 17. *Для того, чтобы бикомпакт* Σ *был минимальным псевдоинвариантным множеством, необходимо и достаточно, чтобы*:

а) *для любой точки* $p\in\Sigma$ *существовало движение* $\varphi_p(t)$ *такое, что* $\varphi_p(D^+)\subseteq\Sigma$;

б) *для любого движения* $\varphi_q(t)$, *удовлетворяющего условию* $\varphi_q(D^+)\subseteq\Sigma$, *имело место* $\overline{\varphi_q(D^+)}=\Sigma$.

Доказательство вытекает из теоремы 13, теоремы 10 и очевидного замечания, что множество $\varphi_q(D^+)$ $(q\in R)$ псевдоинвариантно.

Аналогично формулируется и доказывается теорема для квазиинвариантных множеств:

Теорема 18. *Для того, чтобы бикомпакт* Σ *был минимальным квазиинвариантным множеством, необходимо и достаточно, чтобы:*

а′) *для любой точки* $p\in\Sigma$ *существовало движение в отрицательном направлении* $\psi_p(t)$ *такое, что* $\psi_p(D^+)\subseteq\Sigma$;

б′) *для любого движения в отрицательном направлении* $\psi_q(t)$, *удовлетворяющего условию* $\psi_q(D^+)\subseteq\Sigma$, *имело место* $\overline{\psi_q(D^+)}=\Sigma$.

Теорема 19. *В п. н. о.* $(R,\ D^+,\ f)$ *бикомпактное множество является минимальным псевдоинвариантным тогда и только тогда, когда оно является минимальным квазиинвариантным.*

Доказательство. Пусть Σ — бикомпактное минимальное псевдоинвариантное множество. Докажем, что оно является квазиинвариантным.

Вначале покажем, что для любого движения $\varphi_p(t)$, удовлетворяющего условию $\varphi_p(D^+)\subseteq\Sigma$, любого $T>0$ и любой окрестности $U(p)$ найдется число $t\geqslant T$, при котором $\varphi_p(t)\in U(p)$. Допустим противное: для некоторой окрестности $U_0(p)$ и некоторого $T_0>0$ при всех $t\geqslant T_0$ выполняется $\varphi_p(t)\cap U_0=\Lambda$. Рассмотрим точку $q=\varphi_p(T_0)$ и движение $\varphi_q(t)\equiv\varphi_o(T_0+t)$. Тогда $\varphi_q(D^+)\subseteq\Sigma\setminus U$ и $\overline{\varphi_q(D^+)}\subseteq\Sigma\setminus U$ вопреки тому, что $\overline{\varphi_q(D^+)}=\Sigma$ по теореме 17.

Пусть $t_0>0$ — произвольное число, $p\in\Sigma$. Докажем, что существует точка $r\in\Sigma$ такая, что $p\in f(r,\ t_0)$. Пусть Θ — направленное по включению множество окрестностей $\alpha\equiv U_\alpha(p)$ точки p. Для t_0 и $U_\alpha(p)$ найдется число $t_\alpha>t_0$ и движение $\varphi_p(t)$ такое, что $q_\alpha=\varphi_p(t_\alpha)\in U_\alpha(p)$.

Рассмотрим множество точек $\{r_\alpha\}=\{\varphi_p(t_\alpha-t_0)\}$. Так как Σ бикомпакт, найдется конфинальная часть $\{r'_\lambda,\lambda\in\Theta'\}$ направления $\{r_\alpha,\alpha\in\Theta\}$, сходящаяся к некоторой точке $r\in\Sigma$ [24]. Существуют движения $\varphi_{r'_\lambda}(t)$ такие, что $\varphi_{r'_\lambda}(t_0)=q'_\lambda$. Так как направление $\{r'_\lambda,\ \lambda\in\Theta'\}$ сходится к r, а $\{q'_\lambda,\ \lambda\in\Theta'\}$ сходится к p, то в силу аксиомы A_3 точка p принадлежит $f(r,\ t_0)$. Таким образом, множество Σ квазиинвариантно.

Аналогично можно доказать, что бикомпактное минимальное квазиинвариантное множество псевдоинвариантно.

Из этих двух утверждений, как нетрудно видеть, и вытекает справедливость теоремы.

§ 5. Минимальные центры притяжения воронок и движений

В этом параграфе будем рассматривать п. н. о. $(R,\ D^+,\ f)$, заданную в хаусдорфовом топологическом пространстве R.

Пусть $p\in R$ и E — открытое или замкнутое множество из R. Рассмотрим функции $(t\geqslant 0)$:

$$\nu_1(p,\ t,\ E)=\begin{cases}1, & \text{если } f(p,\ t)\subseteq E,\\ 0, & \text{если } f(p,\ t)\cap(R\setminus E)\neq\Lambda;\end{cases}$$

$$\nu_2(p,\ t,\ E)=\begin{cases}1, & \text{если } f(p,\ t)\cap E\neq\Lambda,\\ 0, & \text{если } f(p,\ t)\cap E=\Lambda.\end{cases}$$

Легко видеть, что $\nu_2(p,t,E)=1-\nu_1(p,t,R\setminus E)$. В силу теоремы 5 и свойств сильно непрерывных отображений функции ν_1 и ν_2 измеримы. Введем обозначения:

$$P_i(p,E)=\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_0^T\nu_i(p,\ t,\ E)dt\quad (i=1,2),$$

если указанные пределы существуют.

Определение 9. *Замкнутое множество* $A\subseteq R$ *назовем центром сильного (слабого) притяжения воронки точки* p, *если для любой окрестности* $U(A)$ *множества* A

$$P_1[p,\ U]=1\ \ (P_2[p,\ U]=1).$$

Определение 10. *Центр сильного (слабого) притяжения воронки точки* p *назовем минимальным, если он не содержит собственного подмножества, являющегося центром сильного (слабого) притяжения воронки точки* p.

Теорема 20. *Если множество* $\overline{f(p,\ D^+)}$ *бикомпактно, то существует единственный минимальный центр* $Z_1(p)$, *сильного притяжения воронки точки* p, *причем множество* $Z_1(p)$ *квазиинвариантно.*

Доказательство. Существование минимального центра сильного притяжения вытекает из леммы 3. Докажем единственность минимального центра сильного притяжения $Z_1(p)$. Допустим противное, что существует еще один такой центр Z'_1, не совпадающий с Z_1. Обозначим $Z_1^{\cdot}=Z_1\cap Z'_1$. Нетрудно показать, что $Z_1^{\cdot}\neq\Lambda$. Покажем, что $Z_1^{\cdot}$ является центром сильного притяжения воронки точки p. Пусть $U(Z_1^{\cdot})$ произвольная окрестность множества $Z_1^{\cdot}$. Найдутся окрестности $V(Z_1)$ и $W(Z'_1)$ такие, что $U=V\cap W$. Тогда $P_1[p,V(Z_1)]=P_1[p,W(Z'_1)]=1$. Поэтому $P_2[p,R\setminus V]=0$ и $P_2[p,R\setminus W]=0$, но тогда, как нетрудно показать, $P_2[p(R\setminus V)\cup(R\setminus W)]=0$. Так как $(R\setminus V)\cup(R\setminus W)=R\setminus(V\cap W)=R\setminus U$, то $P_1(p,U)=1$, а это и означает, что $Z_1^{\cdot}$ является центром сильного притяжения. Но множество $Z_1^{\cdot}$ является собственным подмножеством хотя бы одного из множеств Z_1 или Z'_1, что противоречит их минимальности.

Остается доказать, что множество $Z_1(p)$ квазиинвариантно. Для этого достаточно показать, что при любом $t_0\geqslant 0$ множество $f(Z_1,t_0)$ является центром сильного притяжения. Пусть $U[f(Z_1,t_0)]$ — произвольная окрестность множества $f(Z_1, t_0)$. Найдется окрестность $V(Z_1)$ такая, что $f[V(Z_1), t_0] \subseteq U[f(Z_1, t_0)]$. Если $f(p, t) \subseteq V(Z_1)$, то $f(p, t_0 + t) \subseteq U[f(Z_1, t_0)]$. Поэтому $\nu_1(p, t, V) \leqslant \nu_1(p, t + t_0, \overline{U})$.

Обозначим $t + t_0 = \tau$, тогда $\int\limits_0^T \nu_1(p, t, V)dt \leqslant \int\limits_0^T \nu_1(p, t + t_0, U)dt =$

$$= \int\limits_{t_0}^{t_0+T} \nu_1(p, \tau, U)d\tau \leqslant \int\limits_0^{T+t_0} \nu_1(p, \tau, U)d\tau \leqslant \int\limits_0^T \nu_1(p, \tau, U)d\tau + t_0.$$

Поэтому $\frac{1}{T}\int\limits_0^T \nu_1(p, \tau, U)d\tau \geqslant \frac{1}{T}\int\limits_0^T \nu_1(p, t, V)dt - \frac{t_0}{T}$

и $1 \geqslant P_1(p,U) \geqslant P_1(p, V) = 1$. Значит, $f(Z_1, t_0)$ — центр сильного притяжения, и поэтому $Z_1 \subseteq f(Z_1, t_0)$. Теорема доказана.

Теорема 21. *Если $\overline{f(p, D^+)}$ бикомпактно, то существует по крайней мере один минимальный центр слабого притяжения воронки точки p. Все минимальные центры слабого притяжения воронки точки p содержатся в $Z_1(p)$.*

Доказательство. Остановимся на доказательстве второго утверждения теоремы.

Пусть $Z_2(p)$ — произвольный минимальный центр слабого притяжения воронки точки p. Докажем, что $Z_2 \subseteq Z_1$. Допустим противное: найдется точка $q \in Z_2 \cap (R \setminus Z_1)$. Так как пространство R хаусдорфово, а множество Z_1 бикомпактно, то найдутся непересекающиеся окрестности $U(Z_1)$ и $V(q)$. Тогда $P_1(p, U) = 1$ и тем более $P_1(p, \overline{U}) = 1$. Поэтому $P_2(p, R \setminus \overline{U}) = 0$. Введем обозначения: $A = Z_2 \cap \overline{U}$ и $B = Z_2 \cap (R \setminus \overline{U})$. Множество $R \setminus \overline{U} \equiv V$ является окрестностью множества B. Выберем произвольную окрестность W множества A. Тогда $V \cup W$ является окрестностью множества Z_2. Поэтому $P_2(p, V \cup W) = 1$, но $P_2(p, V \cup W) \leqslant P_2(p, V) + P_2(p, W)$, и так как $P_2(p, V) = 0$ в силу выбора окрестности V, то $P_2[p, W(A)] = 1$. Так как множество A замкнуто и $A \subseteq Z_2$, то $A = Z_2$, поэтому $Z_2 \subseteq \overline{U}$. Так как $q \in V$ и $U \cap V = \Lambda$, то q не принадлежит $\overline{U}$, что противоречит условию $q \in Z_2 \subseteq \overline{U}$. Теорема доказана.

Пусть $\varphi_p(t)$ — движение, выходящее из точки p, $\nu(q, E)$ — характеристическая функция множества E. Обозначим через $P[\varphi_p(t), E] =$

$$= \lim_{T \to +\infty} \frac{1}{T} \int\limits_0^T \nu[\varphi_p(t), E]dt,$$ если предел существует.

Определение 11 [23]. *Замкнутое множество $A \subseteq R$ назовем центром притяжения движения $\varphi_p(t)$, если для любой окрестности $U(A)$ множества A выполняется*

$$P[\varphi_p(t), U(A)] = 1.$$

Понятие минимального центра притяжения движения $\varphi_p(t)$ вводится, как обычно [23].

Аналогично теореме 20 доказывается

Теорема 22. *Если множество $\overline{\varphi_p(D^+)}$ бикомпактно, то существует единственный минимальный центр $Z[\varphi_p(t)]$ притяжения движения $\varphi_p(t)$. Множество $Z[\varphi_p(t)]$ квазиинвариантно.*

Из самих определений вытекает, что для любого движения $\varphi_p(t)$ множество $Z[\varphi_p(t)]$ является центром слабого притяжения воронки точки p (но не обязательно минимальным). Если учесть, что $P_2(p,E) \geqslant P[\varphi_p(t),E]$, то аналогично теореме 21 можно показать, что для любого движения $\varphi_p(t)$ множество $Z[\varphi_p(t)] \subseteq Z_1(p)$.

Автор приносит благодарность проф. В. В. Немыцкому и проф. Е. А. Барбашину за ценное обсуждение результатов этой работы.

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

1. *Е. А. Барбашин,* К теории обобщенных динамических систем, Ученые зап. Московского госуниверситета, вып. 135, математика, т. 2, (1948), 110—133.
2. *М. И. Минкевич,* Теория интегральных воронок в динамических системах без единственности, Ученые зап. Московского госуниверситета, вып. 135, математика, т. 2 (1948), 134—151.
3. *Б. М. Будак,* Понятие движения в обобщенной динамической системе, Ученые зап. Московского госуниверситета, вып. 155, математика, т. 5 (1952), 174—194.
4. *Е. Е. Викторовский,* Об одном обобщении понятия интегральных кривых, Математ. сб., т. 34(76), № 2, (1954), 213—248.
5. *А. Ф. Филиппов,* Дифференциальные уравнения с разрывной правой частью, Математ. сб., т. 51(93), № 1 (1960), 99—128.
6. *Ю. И. Алимов,* О применении прямого метода Ляпунова к дифференциальным уравнениям с неоднозначными правыми частями, Автоматика и телемеханика, т. 22, № 7 (1961), 817—830.
7. *Е. А. Барбашин, Ю. А. Алимов,* К теории динамических систем с неоднозначными и разрывными характеристиками, ДАН СССР, т. 140, № 1 (1961), 9—11.
8. *S. Ch. Zaremba,* Bull. des Sci. math., vol. 66, n° 1 (1936).
9. *A. Marchaud,* Compositio Math., vol. 3, f. 1 (1936).
10. *В. В. Немыцкий,* Общие динамические системы, ДАН СССР, т. 53, № 6 (1946). 495—498.
11. *В. В. Немыцкий,* К теории орбит общих динамических систем, Математ. сб., т. 23, вып. 2 (1948), 161—186.
12. *Е. А. Барбашин,* О гомоморфизмах динамических систем, Математ. сб., т. 27, вып. 3 (1950), 455—470.
13. *Е. А. Барбашин,* Метод сечений в теории динамических систем, Математ. сб., т. 29, вып. 3 (1951), 501—518.
14. *W. H. Gottschalk, G. A. Hedlund,* Topological dynamics, Amer. Math. Soc. Coll. Publ., vol. 36, Providence (1955), 1—151.
15. *Е. А. Барбашин,* К теории систем неоднозначных отображений топологического пространства, Ученые зап. Уральского университета, вып. 7 (1950), 54—60.
16. *В. И. Пономарев,* Новое пространство замкнутых множеств и многозначные непрерывные отображения бикомпактов, Математ. сб., т. 48(90), № 2 (1959), 191—212.
17. *E. Michael,* Topologies on spaces of subsets. Trans. Amer. Math. Soc., vol. 71 (1951), 152—183.
18. *Е. С. Ляпин,* Полугруппы, М., ГИФМЛ, (1960).
19. *И. У. Бронштейн,* О динамических системах без единственности как полугруппах неоднозначных отображений топологического пространства, ДАН СССР, т. 144, № 5 (1962), 954—957.
20. *Хаусдорф,* Теория множеств, М. (1937).
21. *Н. Бурбаки,* Общая топология (основные структуры), М., ГИФМЛ, (1958).
22. *I. L. Kelley,* General Topology, New Jork (1955).
23. *В. В. Немыцкий* и *В. В. Степанов,* Качественная теория дифференциальных уравнений, М.—Л., (1949).
24. *П. С. Александров,* О некоторых результатах в теории топологических пространств, полученных за последние двадцать пять лет, Успехи математических наук, т. 15, № 2 (1960), 25—95.

И. У. БРОНШТЕЙН

ДЕСПРЕ СИСТЕМЕЛЕ ДИНАМИЧЕ ФЭРЭ УНИЧИТАТЕ, КА СЕМИГРУПУРЬ ДЕ ТРАНСФОРМЭРЬ НЕУНИВОЧЕ АЛЕ СПАЦИУЛУЙ ТОПОЛОЖИК

Резумат

Ачест артикол есте о континуаре а лукрэрилор луй Е. А. Барбашин [1, 15], М. И. Минкевич [2] ши Б. М. Будак [3]. Ын ел се студиязэ унеле проприетэць женерале але семигрупурилор де трансформэрь неунивоче але спациулуй, диферите фелурь де инварианцэ ши минималитате а мулцимилор, прекум ши чентреле минимале де атракцие але пылниилор ши мишкэрилор.

Резултателе принчипале але ачестей лукрэрь сынт експусе ын [19].

Поступило
14.VII 1962 г.

Известия Академии наук Молдавской ССР № 1, 1963 г.

В. Н. ВИЗИТЕЙ

О НЕКОТОРЫХ НЕРАВЕНСТВАХ ДЛЯ СОБСТВЕННЫХ ЧИСЕЛ И НОРМ ЛИНЕЙНЫХ ОПЕРАТОРОВ

В настоящей заметке рассматриваются некоторые свойства собственных и сингулярных чисел суммы двух ограниченных операторов и применение этих свойств для доказательства неравенств, установленных в конечномерном случае Фань Цюем и Гофманом [1].

1. Пусть G — произвольный ограниченный самосопряженный оператор, действующий в гильбертовом пространстве H. Точку λ спектра оператора G назовем **точкой непрерывного спектра**, если она является предельной точкой спектра оператора G, либо бесконечнократным собственным числом этого оператора. Обозначим через $\lambda_\infty(G)$ и $\lambda_{-\infty}(G)$ соответственно верхнюю и нижнюю границу непрерывного спектра оператора G. Спектр оператора G, расположенный вне отрезка $[\lambda_{-\infty}(G), \lambda_\infty(G)]$, состоит из изолированных собственных значений конечной кратности. Собственные значения оператора G, расположенные правее точки $\lambda_\infty(G)$, занумеруем в последовательность $\{\lambda_j(G)\}_1^\infty$, при этом если правее точки $\lambda_\infty(G)$ имеется лишь конечное число $n(\geqslant 0)$ собственных значений, то полагаем $\lambda_{n+j}(G)=\lambda_\infty(G)$ $(j=1,2,\ldots)$. Собственные значения, расположенные левее точки $\lambda_{-\infty}(G)$, занумеруем аналогично, но в порядке возрастания индексами от -1 до $-\infty$. Числа $\lambda_j(G)$ $(j=\pm 1, \pm 2, \ldots)$ будем называть **λ-числами** оператора G. Отметим, что для вполне непрерывного оператора G последовательность всех его λ-чисел совпадает с полной последовательностью собственных чисел, так как в этом случае $\lambda_{-\infty}(G)=\lambda_\infty(G)=0$.

Пусть A — любой линейный ограниченный оператор, действующий в H, и $G=(A^*A)^{1/2}$. Числа $s_j(A)=\lambda_j(G)$ $(j=1, 2\ldots)$ назовем s-числами оператора A. Приведенное определение s-чисел ограниченного оператора принадлежит И. Ц. Гохбергу и М. Г. Крейну; ими же получено следующее предложение[1]), которое понадобится нам в дальнейшем.

1°. *Если A и B — произвольные ограниченные операторы, то*

$$\sum_{i=1}^{n} s_i(AB) \leqslant \sum_{i=1}^{n} s_i(A)s_i(B) \quad (n=1,2,\ldots).$$

Нетрудно проверить, что для λ-чисел ограниченного самосопряженного оператора имеют место следующие минимаксимальные свойства:

$$\lambda_{j+1}(G)=\inf_{N_j}\sup_{\substack{\varphi\perp N_j\\ |\varphi|=1}}(A\varphi, \varphi), \tag{1}$$

---

[1]) Для вполне непрерывных операторов это предложение было получено Хорном [2].

$$\lambda_{-j-1}(G) = \sup_{N_j} \inf_{\substack{\varphi \perp N_j \\ |\varphi| = 1}} (A\varphi; \varphi), \tag{2}$$

где N_j пробегает множество всех j-мерных подпространств пространства H.

Пусть G — ограниченный самосопряженный оператор, действующий в H, и L — некоторое подпространство H. Обозначим через P ортогональный проектор на L в H и через $\widehat{G}$ — оператор, индуцированный в L оператором PG. Из соотношений (1) и (2) нетрудно получить следующие неравенства:

$$\lambda_j(G) \geqslant \lambda_j(\widehat{G}),\ \lambda_{-j}(\widehat{G}) \geqslant \lambda_{-j}(G)\ \ (j = 1, 2, \ldots).$$

Если L — n-мерное подпространство H, то эти неравенства можно записать в виде

$$\lambda_{j-n-1}(G) \leqslant \lambda_j(\widehat{G}) \leqslant \lambda_j(G)\ \ (j = 1, 2, \ldots, n), \tag{3}$$

где $\lambda_j(\widehat{G})$ $(j = 1, 2, \ldots, n)$ собственные значения оператора $\widehat{G}$, занумерованные в порядке убывания.

Следующее утверждение является обобщением одного результата Виландта[2] ([3], теорема 2) на случай ограниченных самосопряженных операторов.

Теорема 1. *Если A и B—самосопряженные ограниченные операторы и $A + B = C$, то для любых целых неотрицательных чисел k и l и любого набора индексов*

$$-i_1 < -i_2 < \ldots < -i_k < 0 < j_l < \ldots < j_2 < j_1$$

имеет место неравенство

$$\sum_{t=1}^{k}\Big(\lambda_{-i_t}(C) - \lambda_{-i_t}(B)\Big) + \sum_{t=1}^{l}\Big(\lambda_{j_t}(C) - \lambda_{j_t}(B)\Big) \leqslant \sum_{j=1}^{k+l}\lambda_j(A). \tag{4}$$

Доказательство[3]. Покажем прежде всего, что без ограничения общности можно считать, что числам $\lambda_{-i}(B)$ $(i = 1, 2, \ldots, i_k)$ отвечает ортонормированная система собственных векторов φ_{-i} $(i = 1, 2, \ldots, i_k)$ оператора B и числам $\lambda_j(C)$ $(j = 1, 2, \ldots, j_l)$ — ортонормированная система собственных векторов ψ_j $(j = 1, 2, \ldots, j_l)$ оператора C.

В самом деле, пусть среди чисел $\lambda_{-i}(B)$ $(i = 1, 2 \ldots, i_k)$ имеется $p_1 (\geqslant 0)$ чисел, равных $\lambda_{-\infty}(B)$, а среди $\lambda_j(C)$ $(j = 1, 2, \ldots, j_l)$ $p_2 (\geqslant 0)$ чисел, равных $\lambda_\infty(c)$, которым не соответствуют собственные векторы. Рассмотрим пространство $\widetilde{H} = H \oplus L_1 \oplus L_2$, где $\dim L_1 = p_1$, $\dim L_2 = p_2$, и действующие в $\widetilde{H}$ операторы $\widetilde{A}$, $\widetilde{B}$ и $\widetilde{C}$, совпадающие с A, B и C на H и определенные на L_1, L_2 равенствами

$$\widetilde{B}f = \lambda_\infty(B)f,\ \ \widetilde{C}f = \lambda_\infty(C)f,\ \ \widetilde{A}f = (\lambda_\infty(C) - \lambda_\infty(B))f,\ \ (f \in L_1),$$

$$\widetilde{B}\varphi = \lambda_{-\infty}(B)\varphi,\ \ \widetilde{C}\varphi = \lambda_{-\infty}(C)\varphi,\ \ \widetilde{A}\varphi = (\lambda_{-\infty}(C) - \lambda_{-\infty}(B))\varphi,\ \ (\varphi \in L_2).$$

---

[2] Ранее эту теорему в геометрической формулировке доказал В. Б. Лидский [4].

[3] Идея доказательства заимствована из [5], где теоремы 1 и 2 доказываются для случая вполне непрерывных операторов.

Очевидно, что

$$\lambda_j(C) = \lambda_j(\widetilde{C}),\ \lambda_j(B) = \lambda_j(\widetilde{B})\ \ (j = \pm 1, \pm 2, \ldots),\ \ \widetilde{C} = \widetilde{A} + \widetilde{B}.$$

Докажем, что $\lambda_j(A) = \lambda_j(\widetilde{A})$ $(j = \pm 1, \pm 2, \ldots)$. Для этого достаточно показать, что имеют место неравенства

$$\lambda_{-\infty}(A) \leqslant \lambda_\infty(C) - \lambda_\infty(B) \leqslant \lambda_\infty(A), \tag{5}$$

$$\lambda_{-\infty}(A) \leqslant \lambda_{-\infty}(C) - \lambda_{-\infty}(B) \leqslant \lambda_\infty(A). \tag{6}$$

Для доказательства неравенства (5) рассмотрим сначала случай, когда A, B и C — положительные операторы.

Как известно, для положительного оператора G $\lambda_\infty(G) = |G|_T = \inf|G + T|$, где нижняя грань берется по всем линейным вполне непрерывным операторам T. Так как $|C|_T \leqslant |A|_T + |B|_T$, то

$$\lambda_\infty(C) - \lambda_\infty(B) \leqslant \lambda_\infty(A). \tag{7}$$

Пусть теперь A, B и C — произвольные ограниченные самосопряженные операторы. Тогда найдутся такие числа α, β и γ, $\alpha + \beta = \gamma$, что операторы $A + \alpha I$, $B + \beta I$, $C + \gamma I$ будут положительными. Следовательно, для них имеет место неравенство (7)

$$\lambda_\infty(C + \gamma I) - \lambda_\infty(B + \beta I) \leqslant \lambda_\infty(A + \alpha I),$$

или

$$\lambda_\infty(C) + \gamma - \lambda_\infty(B) - \beta \leqslant \lambda_\infty(A) + \alpha,$$

т. е.

$$\lambda_\infty(C) - \lambda_\infty(B) \leqslant \lambda_\infty(A). \tag{8}$$

Для доказательства второй части неравенства (5) применим неравенство (8) к $B = C + (-A)$. В результате получим

$$\lambda_\infty(B) \leqslant \lambda_\infty(C) + \lambda_\infty(-A).$$

Учитывая, что для любого самосопряженного ограниченного оператора G

$$\lambda_\infty(-G) = -\lambda_{-\infty}(G), \tag{9}$$

получим

$$\lambda_\infty(C) - \lambda_\infty(B) \geqslant \lambda_{-\infty}(A).$$

Неравенство (5) доказано. Перейдем к доказательству неравенства (6).

Применяя неравенство (5) к $A = (-B) - (-C)$, получим

$$\lambda_{-\infty}(A) \leqslant \lambda_\infty(-B) - \lambda_\infty(-C) \leqslant \lambda_\infty(\mathrm{A}),$$

и, следовательно, в силу (9) получим

$$\lambda_{-\infty}(A) \leqslant \lambda_{-\infty}(C) - \lambda_{-\infty}(B) \leqslant \lambda_\infty(A).$$

Таким образом, неравенства (5) и (6) доказаны, следовательно, $\lambda_j(A) = \lambda_j(\widetilde{A})$ $(j = \pm 1, \pm 2, \ldots)$. Поэтому вместо операторов A, B и C можно рассматривать операторы $\widetilde{A}$, $\widetilde{B}$ и $\widetilde{C}$, а для этих операторов сформулированное в начале доказательства утверждение очевидно.

Пусть L — какое-нибудь подпространство H размерности $n=i_k+j_l$, содержащее векторы φ_{-i} $(i=1, 2, \ldots, i_k)$ и ψ_j $(j=1, 2, \ldots, j_l)$. Обозначим через P ортогональный проектор на L и через $\hat{A}$, $\hat{B}$, $\hat{C}$ — операторы, индуцированные в L операторами PA, PB, PC соответственно. Так как в подпространстве L содержатся векторы φ_{-l}, $(i=1,2,\ldots,i_k)$ и $\psi_j(j=1,2,\ldots j_l)$, то числа $\lambda_{-i}(B)$ $(i=1,2,\ldots, i_k)$ являются собственными для $\hat{B}$, а числа $\lambda_j(C)$ $(j=1, 2, \ldots, j_l)$ для $\hat{C}$. Следовательно, учитывая неравенства (3), получим

$$\lambda_{n+1-i}(\hat{B})=\lambda_{-i}(B) \quad (i=1, 2, \ldots, i_k),$$

$$\lambda_j(\hat{C})=\lambda_j(C) \quad (j=1, 2, \ldots, j_l).$$

Из этих равенств и соотношений (3) следует

$$\lambda_{n+1-l}(\hat{C})-\lambda_{n+1-l}(\hat{B}) \geqslant \lambda_{-l}(C)-\lambda_{-l}(B) \quad (i=1, 2, \ldots, i_k), \tag{10}$$

$$\lambda_j(\hat{C})-\lambda_j(\hat{B}) \geqslant \lambda_j(C)-\lambda_j(B) \quad (j=1, 2, \ldots, j_l). \tag{11}$$

Применяя к операторам A, B, и C теорему 2 Виландта [3], получим

$$\sum_{t=1}^{k}\left(\lambda_{n+1-i_t}(\hat{C})-\lambda_{n+1-i_t}(\hat{B})\right)+\sum_{t=1}^{l}\left(\lambda_{j_t}(\hat{C})-\lambda_{j_t}(\hat{B})\right) \leqslant \sum_{j=1}^{k+l}\lambda_j(\hat{A}).$$

Из этого неравенства и соотношений (10), (11), (3) следует (4).

Теорема доказана.

Из теоремы 1 следует аналогичное утверждение о s-числах суммы операторов.

Теорема 2. *Если A и B—ограниченные операторы и $A+B=C$, то для любого натурального числа k и любого набора k различных натуральных чисел $i_1, i_2, \ldots i_k$ имеет место неравенство*

$$\sum_{t=1}^{k}\left|s_{i_t}(C)-s_{i_t}(B)\right| \leqslant \sum_{t=1}^{k} s_t(A). \tag{12}$$

Доказательство. Если D — некоторый ограниченный оператор, действующий в H, то через D_{II} обозначим действующий в пространстве $H \times H$ самосопряженный оператор, определенный равенством

$$D_{\text{II}}=\begin{pmatrix}0 & D\\ D^* & 0\end{pmatrix}.$$

Легко проверить, что

$$\lambda_j(D_{\text{II}})=s_j(D),\ \lambda_{-j}(D_{\text{II}})=-s_j(D_{\text{II}}) \quad (j=1, 2, \ldots). \tag{13}$$

Без ограничения общности можно считать, что для некоторого числа l, $0 \leqslant l \leqslant k$:

$$s_{i_t}(C)-s_{i_t}(B) \geqslant 0 \text{ при } 1 \leqslant t \leqslant l;$$

$$s_{i_t}(C)-s_{i_t}(B) \leqslant 0 \text{ при } l+1 \leqslant t \leqslant k.$$

Применяя теорему 1 к операторам A_{II}, B_{II} и C_{II} для набора индексов

$$i_1>i_2>\ldots>i_l>0>-i_k>-i_{k-1}>\ldots>-i_{l+1},$$

получим:

$$\sum_{t=l+1}^{k}\left(\lambda_{-i_t}(C_{\text{II}})-\lambda_{-i_t}(B_{\text{II}})\right)+\sum_{t=1}^{l}\left(\lambda_{i_t}(C_{\text{II}})-\lambda_{i_t}(B_{\text{II}})\right) \leqslant \sum_{t=1}^{k}\lambda_t(A_{\text{II}}). \tag{14}$$

Из соотношений (13) и неравенства (14) следует (12).

Следствие 1. *Если A и B—ограниченные операторы и $A+B=C$, то имеет место неравенство:*

$$\sum_{t=1}^{k} s_t(C) \leqslant \sum_{=1}^{k}\left(s_t(A)+s_t(B)\right) (k=1, 2, \ldots).$$

Это утверждение для случая вполне непрерывных операторов было получено Фань Цюем [6] (по этому поводу см. также [7]).

2. Для формулировки дальнейших предложений нам понадобится понятие симметрической нормирующей функции [8]. Обозначим через K векторное пространство всех последовательностей $\eta=\{\eta_j\}_1^\infty$ вещественных чисел, в каждой из которых имеется лишь конечное число ненулевых координат. Функцию $\Phi(\eta)$, определенную на K, назовем симметрической нормирующей функцией, если она обладает следующими свойствами:

а) $\Phi(\eta)>0$ $(\eta \in K;\ \eta \neq 0)$;

б) для любого вещественного μ $\Phi(\mu\eta)=|\mu|\Phi(\eta)$ $(\eta \in K)$;

в) $\Phi(\eta_1+\eta_2) \leqslant \Phi(\eta_1)+\Phi(\eta_2)$ $(\eta_1, \eta_2 \in K)$;

г) если $\eta=\{\eta_j\}_1^\infty \in K$ и $\eta'=\{\varepsilon_j\eta_{n_j}\}_1^\infty$,

где n_j $(j=1, 2, \ldots)$ — произвольная перестановка чисел 1, 2, ... и $\varepsilon_j=\pm 1$, то

$$\Phi(\eta)=\Phi(\eta');$$

д) $\Phi(1, 0, 0, \ldots)=1$.

Определим симметрическую нормирующую функцию $\Phi(\xi)$ на произвольной последовательности вещественных чисел $\xi=\{\xi_l\}_1^\infty$ следующим образом:

$$\Phi(\xi)=\lim_{n\to\infty}\Phi(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n, 0, 0, \ldots).$$

Нетрудно видеть, что этот предел (конечный или бесконечный) всегда существует и что $\Phi(\xi)$ сохраняет свойства а) — д).

Нам понадобится следующее предложение Фань Цюя ([6], теорема 4).

2°. *Пусть $\alpha=\{\alpha_l\}_1^\infty$ и $\beta=\{\beta_l\}_1^\infty$ — невозрастающие последовательности неотрицательных чисел и*

$$\sum_{l=1}^{k}\alpha_l \leqslant \sum_{l=1}^{k}\beta_l \quad (k=1, 2, \ldots).$$

Тогда для любой симметрической нормирующей функции Φ

$$\Phi(\alpha) \leqslant \Phi(\beta).$$

Пусть $\Phi(\xi)$ — некоторая симметрическая нормирующая функция. Для любого ограниченного оператора A положим

$$|A|_\Phi=\Phi(s_1(A), s_2(A), \ldots). \tag{15}$$

Легко показать, что $|A|_\Phi$ обладает всеми свойствами нормы. Неравенство треугольника вытекает из утверждения 2° и следствия 1, другие же свойства нормы очевидны. Очевидно также, что норма $|A|_\Phi$ является унитарно инвариантной, т. е.

$$|AU|_\Phi = |UA|_\Phi = |A|_\Phi$$

для любого унитарного оператора U. Об унитарно инвариантной норме $|A|_\Phi$, определяемой соотношением (15), будем говорить, что она порождается симметрической нормирующей функцией Φ.

В этом пункте мы установим, что для унитарно инвариантной нормы операторов, порождаемой некоторой симметрической нормирующей функцией, имеют место неравенства, полученные для унитарно инвариантных норм матриц Фань Цюем и Гофманом [1]. Доказательства теорем 3, 4, 5 в основном аналогичны доказательствам из [1].

Теорема 3. *Пусть A — некоторый вполне непрерывный оператор и $A = UG$, где U — унитарный, а G — неотрицательный оператор. Тогда для любого унитарного оператора W и для любой симметрической нормирующей функции Φ*

$$|A - U|_\Phi \leqslant |A - W|_\Phi \leqslant |A + U|_\Phi. \tag{16}$$

Доказательство. Очевидно,

$$|A \pm U|_\Phi = |U(G \pm I)|_\Phi = |G \pm I|_\Phi,$$

$$|A - W|_\Phi = |U(G - U^*W)|_\Phi = |G - U^*W|_\Phi.$$

Таким образом, неравенства (16) эквивалентны следующим неравенствам:

$$|G - I|_\Phi \leqslant |G - V|_\Phi, \tag{17}$$

$$|G - V|_\Phi \leqslant |G + I|_\Phi, \tag{18}$$

где оператор $V = U^*W$ является унитарным.

Покажем, что имеет место неравенство (17). Легко видеть, что

$$\sum_{i=1}^{k} s_i(G - I) = \sup_{i_1 < i_2 < \dots < i_k} \sum_{i=1}^{k} \left| s_{i_i}(G) - 1 \right| \quad (k = 1, 2, \ldots).$$

Применяя к оператору $G - V$ теорему 2 и учитывая, что

$$s_i(V) = 1 \quad (i = 1, 2, \ldots),$$

получим

$$\sup_{i_1 < i_2 < \dots < i_k} \sum_{i=1}^{k} \left| s_{i_i}(G) - 1 \right| \leqslant \sum_{i=1}^{k} s_i(G - V) \quad (k = 1, 2, \ldots).$$

Таким образом,

$$\sum_{i=1}^{k} s_i(G - I) \leqslant \sum_{i=1}^{k} s_i(G - V) \quad (k = 1, 2, \ldots).$$

Отсюда и из 2° следует неравенство (17).

Перейдем к доказательству неравенства (18).

Так как

$$G - V = G + (-V),$$

то, применяя к оператору $G + (-V)$ следствие 1, получим

$$\sum_{i=1}^{k} s_i(G - V) = \sum_{i=1}^{k} s_i(G + (-V)) \leqslant \sum_{i=1}^{k} (s_i(G) + 1) = \sum_{i=1}^{k} s_i(G + I) \quad (k = 1, 2, \ldots).$$

Из последних неравенств в силу 2° следует (18).

Теорема доказана 4).

Теорема 4. *Если A — ограниченный оператор, а G — самосопряженный, то*

$$\left| A - \frac{A + A^*}{2} \right|_\Phi \leqslant |A - G|_\Phi \tag{19}$$

для любой симметрической нормирующей функции Φ.

Доказательство. Заметим прежде всего, что $s_i(A) = s_i(A^*)$ $(i = 1, 2, \ldots)$. Следовательно, $|A|_\Phi = |A^*|_\Phi$. Так как

$$A - \frac{A + A^*}{2} = \frac{A - G}{2} + \frac{G - A^*}{2},$$

то

$$\left| A - \frac{A + A^*}{2} \right|_\Phi \leqslant \frac{1}{2} \left| A - G \right|_\Phi + \frac{1}{2} \left| G - A \right|_\Phi. \tag{20}$$

Но

$$|G - A^*|_\Phi = |A - G|_\Phi,$$

и, таким образом, из (20) следует (19).

Теорема 5. Пусть Q и G *— самосопряженные ограниченные операторы, U и V — их преобразования Кэли:*

$$U = (Q - iI)(Q + iI)^{-1}, \quad V = (G - iI)(G + iI)^{-1}.$$

Тогда

$$|U - V|_\Phi \leqslant 2 \, |Q - G|_\Phi \tag{21}$$

для любой симметрической нормирующей функции Φ.

Доказательство. Очевидно,

$$U = I - 2i(Q + iI)^{-1}, \quad V = I - 2i(G + iI)^{-1},$$

и следовательно,

$$\frac{1}{2i}(U - V) = (Q + iI)^{-1} - (G + iI)^{-1} = (G + iI)^{-1} [(Q + iI) -$$

$$-(G + iI)] (Q + iI)^{-1} = (G + iI)^{-1} (Q - G)(Q + iI)^{-1}.$$

Так как

$$[(G + iI)^{-1}]^* (G + iI)^{-1} = (G^2 + I)^{-1},$$

то

$$s_j^2((G + iI)^{-1}) = \lambda_j((G^2 + I)^{-1}) = \lambda_j^{-1}(G^2 + I) \quad (j = 1, 2, \ldots). \tag{23}$$

---

4) Легко заметить, что доказательство неравенства (17) сохраняет силу для любого ограниченного неотрицательного оператора G. Возможно, что и неравенство (18) верно для любого ограниченного неотрицательного оператора G.

Из неотрицательности оператора G^2 следует, что

$$\lambda_j(G^2+I) \geqslant 1 \quad (j=1,\ 2,\ldots). \tag{24}$$

Из соотношений (23) и (24) вытекает

$$s_j((G+iI)^{-1}) \leqslant 1 \quad (j=1,\ 2,\ldots). \tag{25}$$

Точно так же получим

$$s_j((Q+iI)^{-1}) \leqslant 1 \quad (j=1,\ 2,\ldots). \tag{26}$$

Из неравенства (22) в силу предложения 1° получим, учитывая (25) и (26),

$$\sum_{j=1}^{n} s_j\left(\frac{U-V}{2i}\right) = \sum_{j=1}^{n} s_j\left(\frac{U-V}{2}\right) \leqslant \sum_{j=1}^{n} s_j((G+iI)^{-1}) s_j((Q-G)(Q+iI)^{-1}) \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{j=1}^{n} s_j((Q-G)(Q+iI)^{-1}) \leqslant \sum_{j=1}^{n} s_j(Q-G) \quad (n=1,\ 2,\ldots).$$

Из последних неравенств согласно 2° следует (21).

Теорема доказана.

Автор выражает благодарность И. Ц. Гохбергу и А. С. Маркусу за постановку задачи и полезные советы.

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

1. *Ky Fan* and *A. J. Hoffman*, Some metric inequalities in the space of matrices, Proc. Amer. Soc., 6, № 1 (1955), 111—116.
2. *A. Horn*, On the singular values of a product of completely continuous operators, Proc. Nat. Acad. Sci. USA, 36 (1950), 374—375.
3. *H. Wielandt*, An extremum property of sums of eigenvalues, Proc. Amer. Math. Soc., 6 (1955), 106—110.
4. *В. Б. Лидский*, О собственных значениях суммы и произведения симметрических матриц, ДАН СССР, 75 (1950), № 6, 769—772.
5. *А. С. Маркус*, О собственных и сингулярных числах суммы и произведения линейных операторов, ДАН СССР, 146 (1962), № 1, 34—36.
6. *Ky Fan*, Maximum properties and inequalities for the eigenvalues of completely cotinuous operators, Proc. Nat. Acad. Sci. USA, 37 (1951), 760—766.
7. *И. Ц. Гохберг*, О связях между спектрами эрмитовых компонент нульстепенных матриц и об интеграле треугольного усечения, Изв. АН МССР, 1963, № 1, 27—37.
8. *R. Schatten*, Norm ideals of completely continuous operators, Springer-Verlag, Berlin—Göttingen—Heidelberg, 1960.

В. Н. ВИЗИТЕЙ

ДЕСПРЕ УНЕЛЕ НЕЕГАЛИТЭЦЬ ПЕНТРУ НУМЕРЕЛЕ ПРОПРИЙ ШИ НОРМЕЛЕ ОПЕРАТОРИЛОР ЛИНЕАРЬ

Резумат

Се демонстрязэ, кэ неегалитэциле пентру нумереле проприй ши сингуларе але сумей де дой операторь комплект континуй (в. [5]) ау лок ши ын казул операторилор мэржиниць. Ачесте неегалитэць се апликэ ла довада унор релаций пентру нормеле операторилор мэржиниць, стабилите ын казул n-дименсионал [1].

Поступило
12.VII 1962 г.

И. Ц. ГОХБЕРГ

О СВЯЗЯХ МЕЖДУ СПЕКТРАМИ ЭРМИТОВЫХ КОМПОНЕНТ НУЛЬСТЕПЕННЫХ МАТРИЦ И ОБ ИНТЕГРАЛЕ ТРЕУГОЛЬНОГО УСЕЧЕНИЯ

В статьях М. Г. Крейна и автора [1, 2] и В. И. Мацаева [3, 4] установлены некоторые соотношения между спектрами эрмитовых компонент вольтеррова оператора, действующего в гильбертовом пространстве. В настоящем сообщении эти соотношения уточняются для случая конечномерного пространства. Этим самым устанавливаются некоторые „точные" оценки, связывающие между собой спектры эрмитовых компонент любой нульстепенной матрицы. Кроме того, доказывается сходимость одного интеграла по цепочке проекторов, который является естественным обобщением интеграла треугольного усечения, введенного М. С. Бродским [5].

§ 1. Конечное треугольное усечение одномерных операторов

В дальнейшем H обозначает конечномерное или бесконечномерное гильбертово пространство. Конечное множество ортогональных проекторов $P^{(n)}=\{P_j\}_0^n$ назовем **конечной цепочкой**, если оно упорядочено (естественным образом) и содержит 0 и I, т. е.

$$0=P_0<P_1<\ldots<P_{n-1}<P_n=I.$$

Через R обозначим кольцо всех линейных ограниченных операторов, действующих в H. Каждой конечной цепочке $P^{(n)}=\{P_j\}_0^n$ и каждому оператору $X\epsilon R$ сопоставим оператор $Y\epsilon R$, определенный равенством

$$Y=T(X;\,P^{(n)})=\sum_{j=1}^{n} P_{j-1}X\Delta P_j \quad (\Delta P_j=P_j-P_{j-1});$$

Без труда доказывается, что $T(\,\cdot\,;\,P^{(n)})$ является линейным ограниченным оператором, проектирующим кольцо R на кольцо всех нульстепенных операторов $Y\epsilon R$, обладающих свойством

$$YP_jH\subseteq P_{j-1}H \quad (j=1,\ 2,\ldots,\ n).$$

Одновременно с оператором $T(\,\cdot\,;\,P^{(n)})$ рассмотрим оператор $S(\,\cdot\,;\,P^{(n)})$, определенный по правилу

$$S(X;\,P^{(n)})=i\sum_{j=1}^{n}[P_{j-1}X\Delta P_j-\Delta P_jXP_{j-1}] \quad (X\epsilon R).$$

Если оператор X самосопряжен, то, очевидно,

$$[2iT(X;P^{(n)})]_R = S(X;P^{(n)}),$$

$$[2i\,T(X;\ P^{(n)})]_J = X - \sum_{j=1}^{n} \Delta P_j X \Delta P_j,$$

где для любого оператора $A \in R$

$$A_R = (A+A^*)/2 \text{ и } A_J = (A-A^*)/2i.$$

Теорема 1. *Пусть* $P^{(n)} = \{P_j\}_0^n$*—некоторая конечная цепочка и* $X_e = (\cdot, e)e$*—одномерный оператор, где* e*—произвольный орт из* H*, удовлетворяющий условию*

$$\Delta P_j e \neq 0 \ (\Delta P_j = P_j - P_{j-1};\ j = 1, 2, \ldots, n). \tag{1.1}$$

Тогда спектр оператора

$$Y_e = S(X;\ P^{(n)}) \tag{1.2}$$

состоит из $2k\ (k = [n/2])$ *простых собственных чисел*

$$\{\pm \lambda_j(e)\}_1^k \ (\lambda_1(e) > \lambda_2(e) > \ldots > \lambda_k(e) > 0) \tag{1.3}$$

и, быть может, из числа $\lambda = 0$.

Числа (1.3) *определяются из равенств*

$$\sum_{\nu=1}^{n} \arg\,(\lambda_j(e) + i\,|\,\Delta P_\nu e\,|^2) = (2j-1)\frac{\pi}{2} \ \ (j = 1, 2 \ldots, k).$$

Кроме того, имеют место соотношения:

$$\mu_j^{(n)} = \max_{e \in H;\ |e| = 1,\ \Delta P_r e \neq 0} \lambda_j(e) = \frac{1}{n} \operatorname{ctg} \frac{\pi}{2n}(2j-1) \ (j = 1, 2, \ldots, k),$$

где все наибольшие значения $\mu_j^{(n)}$ $(j = 1, 2, \ldots, k)$ *достигаются в том и только в том случае, когда выполняется условие*

$$|\,\Delta P_1 e\,| = |\,\Delta P_2 e\,| = \ldots = |\,\Delta P_n e\,|\ (= 1/\sqrt{n}). \tag{1.4}$$

Доказательство. Уравнение $Y_e \varphi = \lambda\varphi$ $(\,|\,\varphi\,| = 1)$ очевидным образом можно преобразовать к следующей эквивалентной системе уравнений:

$$i\left(\sum_{j=r+1}^{n} (\varphi,\ \Delta P_j e) - \sum_{j=1}^{r-1} (\varphi,\ \Delta P_j e)\right)\Delta P_r e = \lambda \Delta P_r \varphi \ \ (r = 1, 2, \ldots, n). \tag{1.5}$$

Отсюда следует, что $\Delta P_j \varphi = \xi_j \Delta P_j\, e$ $(j = 1, 2, \ldots, n)$, и, стало быть, полагая $|\,\Delta P_j e\,|^2 = a_j$, получим следующую систему уравнений, эквивалентную (1.5):

$$\sum_{j=1}^{r-1} a_j \xi_j - \sum_{j=r+1}^{n} a_j \xi_j + i\lambda\xi_r = 0 \ \ (r = 1, 2, \ldots, n).$$

Определитель этой системы легко вычисляется (см. [6], задачу 250), он равен величине

$$\prod_{j=1}^{n} (i\lambda - a_j) + \prod_{j=1}^{n} (i\lambda + a_j).$$

Таким образом, собственными числами оператора будут все корни уравнения

$$\prod_{j=1}^{n} \frac{\lambda + ia_j}{\lambda - ia_j} = -1, \tag{1.6}$$

а также, может быть, число $\lambda = 0$. Последнему числу отвечают собственные векторы, ортогональные системе $\{\Delta P_j e\}_1^n$ (если таковые имеются).

Если λ является корнем уравнения (1.6), то число $-\lambda$, очевидно, также является корнем этого уравнения. Отсюда следует, что если число n нечетно, то хотя бы один из корней уравнения (1.6) равен нулю. Таким образом, уравнение (1.6) имеет не более $2k\ (k = [n/2])$ различных ненулевых корней.

Обозначим через $\theta_r(\lambda)$ функцию $\arg\,(\lambda + ia_r)$ $(-\infty < \lambda < \infty)$. Тогда уравнение (1.6) эквивалентно уравнению

$$(\theta(\lambda) =)\ \sum_{r=1}^{n} \theta_r(\lambda) = (2j-1)\ \frac{\pi}{2} \ \ (j = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots). \tag{1.7}$$

Функция $\theta(\lambda)$ является непрерывной и монотонно возрастающей на всей оси. Так как

$$\lim_{\lambda \to +\infty} \theta(\lambda) = 0 \text{ и } \theta(0) = n\frac{\pi}{2},$$

то существуют числа $\lambda_1(e) > \lambda_2(e) > \ldots > \lambda_k(e) > 0$ такие, что

$$\theta(\lambda_j(e)) = (2j-1)\pi/2 \ (j = 1, 2, \ldots, k).$$

Этим числами исчерпываются все положительные решения уравнения (1.7), а следовательно, и уравнения (1.6).

Легко видеть, что числа $\lambda_j(e)$, как и числа $-\lambda_j(e)$ $(j = 1, 2, \ldots, k)$, являются простыми собственными числами оператора Y_e. Первое утверждение теоремы доказано.

Обычным образом проверяется, что при любом фиксированном $\lambda(>0)$ функция $\theta(\lambda) = \theta(\lambda;\ a_1, a_2 \ldots a_n) = \sum_1^n \operatorname{arctg}\,(a_j\lambda^{-1})$ достигает в области $\sum a_j = 1,\ a_j > 0$ наибольшего значения только в точке

$$a_1 = a_2 = \ldots = a_n = \frac{1}{n}. \tag{1.8}$$

Отсюда следует, что при выполнении условия (1.8) и только в этом случае все собственные числа $\lambda_j(e)$ одновременно достигают своих максимумов $\mu_j^{(n)}$.

Так как

$$\theta_r(\mu_j^{(n)}) = \operatorname{arc\,tg}\frac{1}{n\mu_j^{(n)}} = \frac{\pi}{2n}(2_j-1),$$

то

$$\mu_j^{(n)} = \frac{1}{n}\operatorname{ctg}\frac{\pi}{2n}(2_j-1)\ (j=1,\ 2,\ \ldots,\ k).$$

Теорема доказана.

Замечание 1. Если условие (1.1) теоремы 1 не выполняется, а число ненулевых векторов системы $\{\Delta P_j e\}_1^n$ равно m, то легко показать, что в этом случае теорема 1 сохраняет силу, если в ее утверждениях заменить n на m.

Замечание 2. Каждая из последовательностей

$$\{(\mu_j^{(n)}\}_{n-k+1}^{\infty}\quad (j=1, 2, \ldots;\ k=[n/2])$$

является монотонно возрастающей и

$$\lim_{n\to\infty}\mu_j^{(n)} = \frac{2}{\pi(2j-1)}\,^{1)}.$$

§ 2. Соотношения между спектрами эрмитовых компонент нильпотентной матрицы и их обобщения

1. В этом пункте будем предполагать, что $H=E_n$ является n-мерным гильбертовым пространством.

Через $\{\lambda_j(A)\}_1^n\ (\,|\lambda_1(A)| \geqslant |\lambda_2(A)| \geqslant \ldots \geqslant |\lambda_n(A)|\,)$ обозначим множество всех собственных чисел оператора A, действующего в E_n.

Если G — самосопряженный оператор, действующий в E_n, то его можно представить в виде разности двух неотрицательных, взаимно ортогональных операторов: $G = G_+ - G_-,\ \ G_+G_- = G_-G_+ = 0$.

Положим: $\lambda_j^{\pm}(G) = \lambda_j(G_{\pm})\ \ (j=1,\ 2,\ \ldots,\ n)$. Очевидно, $\lambda_j(G) = \lambda_j^{+}(G) - \lambda^{-}{}_{n-j}(G)\ (j=1,\ 2,\ \ldots,\ n)$.

В доказательстве следующей теоремы понадобятся два соотношения, вытекающие из теорем Фань-Цюя (Ки Фана [8]):

а) *для любого неотрицательного оператора G, действующего в E_n, и чисел $c_1 \geqslant c_2 \geqslant \ldots \geqslant c_m > 0\ (m \leqslant n)$*

$$\sum_{j=1}^{m} c_j\,(G\chi_j\,\chi_j) \leqslant \sum_{j=1}^{m} c_j\,\lambda_j(G),$$

где $\{\chi_j\}_1^m$ — произвольная ортонормированная система векторов из E_n.

б) *для любой системы самосопряженных операторов G_j ($j=1,\ 2,\ \ldots,\ m$), действующих в E_n, и вещественных чисел $c_1, c_2, \ldots, c_m$*

$$\sum_{j=1}^{l} \lambda_j^{\pm}(c_1G_1 + c_2G_2 + \ldots + c_mG_m) \leqslant \sum_{r=1}^{m} |c_r| \sum_{j=1}^{l} \max\,(\lambda_j^{+}(G);\ \ \lambda_j^{-}(G))$$
$$(l=1,\ 2,\ \ldots,\ n).$$

Предложение б) вытекает из а). Пусть $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_l$ — собственные орты оператора $G = c_1G_1 + c_2G_2 + \ldots + c_mG_m$, отвечающие собственным числам $\lambda_j^{+}(G)\ (j=1,\ 2,\ \ldots,\ l)$.

Тогда

$$\sum_{j=1}^{l} \lambda_j^{+}(G) = \sum_{j=1}^{l} (G\varphi_j,\ \varphi_j) \leqslant \sum_{r=1}^{m}\ \sum_{j=1}^{l} ([c_rG_r]_+\,\varphi_j,\ \varphi_j).$$

Согласно предложению а)

$$\sum_{j=1}^{l} ([c_rG_r]_+\varphi_j,\ \varphi_j) \leqslant \sum_{j=1}^{l} \lambda_j^{+}(c_r\,G_r).$$

Так как

$$\lambda_j^{+}(c_rG_r) \leqslant |c_r| \max\,(\lambda_j^{+}(G_r),\ \lambda_j^{-}(G_r)),$$

то из приведенных соотношений вытекает предложение б).

Теорема 2. *Пусть A — произвольный линейный нульстепенной оператор, действующий в E_n. Тогда спектры его эрмитовых компонент*

$$A_R = (A + A^*)/2 \text{ и } A_J = (A - A^*)/2i$$

связаны между собой соотношениями:

$$|A_R| \leqslant \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{k} (\lambda_j^{+}(A_J) + \lambda_j^{-}(A_J))\operatorname{ctg}\frac{\pi}{2n}(2j-1)\ \ (k=[n/2]), \qquad (2.1)$$

$$\sum_{j=1}^{l} \lambda_j^{\pm}(A_R) \leqslant \frac{1}{n}\sum_{r=1}^{n} |\lambda_r(A_J)| \sum_{j=1}^{\min(l,\,k)} \operatorname{ctg}\frac{\pi(2j-1)}{2n}(l=1, 2, \ldots, n). \quad (2.2)$$

Если оператор A имеет вид $A=2iT(X_e;\ P^{(n)})\ (X_e = (\,\cdot\,,e)e;\ |e|=1)$, где $P^{(n)} = \{P_j\}_0^n$ — некоторая конечная цепочка в E_n и

$$|\Delta P_j e| = \frac{1}{\sqrt{n}}\ \ (j=1,\ 2,\ \ldots,\ n),$$

то в силу теоремы 1 в каждом из соотношений (2.1) и (2.2) наступает знак равенства.

Доказательство. Обозначим через $e_1, e_2, \ldots, e_n$ ортонормированный базис пространства E_n, в котором оператор A приводится к (верхнему) треугольному виду. Пусть $P_j\ (j=0,\ 1,\ \ldots,\ n;\ P_0=0)$ — ортогональный проектор, проектирующий пространство E_n на подпространство с базисом $e_1, e_2, \ldots, e_j$, и e — произвольный орт из E_n, для которого $\Delta P_j e \neq 0\ (j=1,\ 2,\ \ldots,\ n)$. Образуем нульстепенной оператор $Z^{(e)}$, полагая

$$Z^{(c)} = 2i\sum_{j} P_{j-1}X_e\Delta P_j\ \ (X_e = (\,\cdot\,,\ e)\,e).$$

Легко видеть, что

$$Z_R^{(e)} = S(X_e;\ P^{(n)})$$

$$Z_J^{(e)} = X_e - \sum_{j=1}^{n} \Delta P_j X_e \Delta P_j.$$

---

[1] Это равенство является естественным, так как числа $2/\pi(2j-1)$ ($j=1,\ 2,\ldots$) образуют полную систему положительных собственных чисел вещественной компоненты вольтеррова оператора с одномерной мнимой компонентой $(\cdot\,,e)\,e$ ($|e|=1$), а такой оператор может быть представлен как предел операторов вида (1.2), удовлетворяющих условию (1.4) (см. [7]).

Так как оба оператора $Z^{(e)}$ и A приводятся в одном и том же базисе к верхнему треугольному виду, то нульстепенным является и оператор $Z^{(e)}A$, и, стало быть,

$$\operatorname{Sp}[Z^{(e)}A]_R = \operatorname{Sp}(Z_R^{(e)}A_R) + \operatorname{Sp}(Z_J^{(e)}A_J) = 0. \qquad (2.3)$$

Согласно теореме 1 оператор $Z_J^{(e)}$ можно представить в виде

$$Z_J^{(e)} = \sum_{j=1}^{k} \lambda_j(e)(\cdot,\, \varphi_j)\, \varphi_j - \sum_{j=1}^{k} \lambda_j(e)\ (\cdot,\, \varphi_{-j})\varphi_{-j}\ (k=[n/2]),$$

где φ_j ($j=\pm 1, \pm 2, \ldots, \pm k$)—некоторая ортонормированная система из E_n.

Принимая во внимание, что

$$\operatorname{Sp}(Z_R^{(e)}A_R) = (A_R e,\, e)$$

и

$$\operatorname{Sp}(Z_J^{(e)}A_J) = \sum_{j=1}^{k} \lambda_j(e)(A_J\varphi_j,\, \varphi_j) - \sum_{j=1}^{k} \lambda_j(e)\, A_J\, \varphi_{-j},\, \varphi_{-j}),$$

получим в силу (2.3)

$$|(A_R e, e)| = |\sum_{j=1}^{k} \lambda_j(e)[(A_R^+\varphi_j,\, \varphi_j) + (A_J^-\varphi_j,\, \varphi_j)] -$$

$$-\sum_{j=1}^{k} \lambda_j(e)[(A_R^-\varphi_j,\, \varphi_j) + (A_J^+\varphi_{-j},\, \varphi_{-j})].$$

Стало быть,

$$|(A_R e,\, e)| \leqslant \max\left\{\sum_{j=1}^{k} \lambda_j(e)[(A_R^+\varphi_j, \varphi_j) + (A_J^-\varphi_{-j},\, \varphi_{-j})],\right.$$

$$\left.\sum_{j=1}^{k} \lambda_j(e)\,[(A_R^-\varphi_j, \varphi_j) + (A_J^+\,\varphi_{-j}, \varphi_{-j})]\right\}.$$

Согласно предложению а), предшествовавшему теореме, отсюда следует:

$$|(A_R e,\, e)| \leqslant \sum_{j=1}^{k} (\lambda_j^+(A_J) + \lambda_j^-(A_J))\lambda_j(e).$$

Следовательно, в силу теоремы 1 будем иметь

$$|(A_R e,\, e)| \leqslant \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{k} (\lambda_j^+(A_J) + \lambda_j^-(A_J))\ \operatorname{ctg}\frac{\pi}{2n}(2j-1).$$

Так как множество ортов e, удовлетворяющих условию (1.1), плотно в единичной сфере пространства E_n, то из (2.4) непосредственно следует соотношение (2.1).

Для доказательства соотношения (2.2) воспользуемся представлением оператора A_J в виде

$$A_J = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j(A_J)(\cdot,\, \chi_j)\chi_j,$$

где $\{\chi_J\}_1^n$ — ортонормированный базис E_n.

Пусть цепочка $P^{(n)} = \{P_j\}_1^n$ та же, что и в доказательстве предыдущего соотношения. Учитывая, что $\sum_j \Delta P_j A_J \Delta P_j = 0$, оператор A_J можно представить в виде

$$A_J = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j(A_J)\chi_j,$$

где

$$\chi_j = (\cdot,\, \chi_j)\ \chi_J - \sum_{r=1}^{n} (\cdot, \Delta P_j\chi_r)\, \Delta P_r\chi_r.$$

Таким образом,

$$A_R = S(A_J;\ P^{(n)}) = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j(A_R)\, S(\chi_j;\ P^{(n)}).$$

Отсюда в силу предложения б), предшествовавшего теореме, вытекает, что

$$\sum_{j=1}^{l} \lambda_j^{\pm}(A_R) \leqslant \sum_{r=1}^{n} |\lambda_r(A_J)| \sum_{j=1}^{l} \lambda_j^{\pm}(S(\chi_r;\ P^{(n)})\ (l=1,\, 2, \ldots, k).$$

Принимая во внимание равенства

$$\lambda_j^{\pm}(S(\chi_r;\ P^{(n)})) = \lambda_j(\chi_r),$$

приходим в силу теоремы 1 к соотношениям (2.2). Теорема доказана.

Соотношения (2.1) и (2.2) являются уточнениями для случая конечномерного пространства аналогичных соотношений, установленных М. Г. Крейном и автором [1] и В. И. Мацаевым [4] для операторов, действующих в бесконечномерном гильбертовом пространстве. Последние соотношения для соответствующих классов операторов получаются из (2.1) и (2.2), если в (2.1) и (2.2) устремить n к бесконечности. Идея доказательства теоремы 2 та же, что и в [1, 4].

Аналогичным образом можно уточнить для случая конечномерного пространства и другие соотношения, связывающие спектры эрмитовых компонент вольтеррова оператора. К ним относятся, например, соотношение из [3], которое объединяет (2.1) и (2.2), а также более общие соотношения, содержащиеся в первых параграфах [9].

2. Пусть G — произвольный линейный ограниченный положительный оператор, действующий в бесконечномерном гильбертовом пространстве H. Точка спектра оператора G называется точкой непрерывного спектра, если она является предельной точкой G, либо бесконечнократным собственным числом этого оператора. Обозначим через $\lambda_\infty(G)$ верхнюю границу непрерывного спектра оператора G.

Пусть $E(\lambda)$ обозначает спектральную функцию оператора G. Подпространство $\hat{H} = (I - E(\lambda\infty(G) + 0))H$ является инвариантным подпространством оператора G, и в нем оператор G порождает оператор $\hat{G}$, спектр которого совпадает со спектром оператора G из промежутка $[\lambda_\infty(G), +\infty)$. Расширим оператор $\hat{G}$ на все пространство H, полагая

$$\tilde{G}(\varphi + \psi) = \hat{G}\varphi + \lambda_\infty(G)\psi\ \ (\varphi\in\hat{H}\psi\in\hat{H}\perp).$$

Оператор $\tilde{G} - \lambda_\infty(G)I$ является вполне непрерывным.

Для всякого положительного вполне непрерывного оператора A, действующего в H, через $\{\lambda_j(A)\}_1^\infty (\lambda_1(A_1) \geqslant \lambda_2(A) \geqslant \ldots)$ обозначим его полную систему собственных чисел.

Числа $\left\{\hat{\lambda}_j(A)\right\}_1^\infty$, определенные равенствами

$$\hat{\lambda}_j(G) = \hat{\lambda}_j(\widetilde{G}) = \lambda_j(\widetilde{G} - \lambda_\infty(G)I) + \lambda_\infty(G) \quad (j = 1, 2, \ldots),$$

назовем λ-числами оператора G.

Если оператор G вполне непрерывен, то $\lambda_\infty(G) = 0$, $\widetilde{G} = G$ и

$$\hat{\lambda}_j(G) = \lambda_j(G) \quad (j = 1, 2, \ldots).$$

Если G — самосопряженный оператор и $G = G_+ - G_-$, где операторы $G_\pm$ неотрицательны и $G_+ G_- = G_- G_+ = 0$, то положим

$$\hat{\lambda}_j^\pm(G) = \hat{\lambda}_j(G_\pm) \quad (j = 1, 2, \ldots).$$

Для ограниченных операторов и их λ-чисел также имеют место соотношения а) и б). А именно:

а) *для любого оператора* $G \geqslant 0$

$$\sum_{j=1}^m c_j(G\chi_j\chi_j) \leqslant \sum_{j=1}^m c_j\hat{\lambda}_j(G) \quad (c_1 > c_2 > \ldots > c_m > 0),$$

где $\{\chi_j\}_1^m$ — *любая ортонормированная система из* H;

б) *для любых самосопряженных операторов* $G_1, G_2, \ldots G_m$ *и вещественных чисел* $c_1, c_2, \ldots, c_m$

$$\sum_{j=1}^l \hat{\lambda}_j^\pm\left(\sum_{r=1}^m c_r G_r\right) \leqslant \sum_{r=1}^m |c_r| \sum_{j=1}^l \max(\hat{\lambda}_j^\pm(G); \hat{\lambda}_j^-(G)) \quad (l = 1, 2, \ldots).$$

Повторяя почти дословно доказательство первой части теоремы (2), приходим к следующему предложению.

Теорема 3. *Пусть* $P^{(n)} = \{P_j\}_1^n$ — *произвольная конечная цепочка и* X — *произвольный самосопряженный оператор, действующий в* H. *Тогда эрмитовы компоненты* Y_R *и* Y_J *оператора*

$$Y = 2i\,T(X; P^{(n)}),$$

которые выражаются формулами

$$Y_R = X - \sum_{j=1}^n \Delta P_j X \Delta P_j; \quad Y_J = S(X; P^{(n)}),$$

связаны между собой соотношением[2]:

$$|Y_R| \leqslant \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{[n/2]} [\lambda_j^+(Y_J) - \lambda_j^-(Y)] \operatorname{ctg} \frac{\pi}{2n}(2j-1). \tag{2.5}$$

---

[2] Если A произвольный нульстепенной оператор из R: $A^n = 0$ $(A^{n-1} \neq 0)$, то легко построить конечную цепочку такую, что $A = 2i\,T(A_J; P^{(n)})$, и, стало быть, в силу теоремы 3 компоненты A_R и A_J оператора A связаны между собой соотношением (2.5).

§ 3. Сходимость одного интеграла по цепочке

В настоящем параграфе будем придерживаться определений и некоторых обозначений из статей [1, 2, 10].

В частности, через $S_\omega(S_p;\ 1 \leqslant p < \infty)$ обозначается банахово пространство, состоящее из всех линейных вполне непрерывных операторов A, удовлетворяющих условию

$$|A|_\omega = \sum_{j=1}^\infty (2_j-1)^{-1} s_j(A) < \infty \quad \left(|A|_p = \left(\sum_{j=1}^\infty s_j^p(A)\right)^{1/p} < \infty\right),$$

где $\{s_j(A)\}_1^\infty$ — полная система s-чисел оператора A.

Из оценки (2.5) без труда можно вывести, что для любой конечной цепочки $P^{(n)}$ и любого оператора $X \in S_\omega$

$$|T(X; P^{(n)})| \leqslant c\,|X|_\omega,$$

где c — константа, не зависящая ни от X, ни от $P^{(n)}$.

В. И. Мацаев [4] показал, что для любой непрерывной цепочки $\boldsymbol{P} = \{P\}$ и любого оператора $X \in S_\omega$ сходится интеграл

$$T(X; P) = \int_P PXdP.$$

В [1] получена следующая оценка для этого интеграла

$$|T(X; P)| \leqslant |X|_\omega. \tag{3.2}$$

Имеет место следующее обобщение этих предложений

Теорема 4. *Пусть* $\boldsymbol{P} = \{P\}$ — *произвольная непрерывная цепочка и* $X_1, X_2 \ldots, X_m \in S_\omega$.

Тогда интеграл

$$\int_P PX_1PX_2 \ldots, PX_m dP \tag{3.3}$$

сходится, причем $\int_P PX_1PX_2 \ldots PX_m dP = T(X_1T(X_2 \ldots T(X_m) \ldots))$, (3.4)

где $T(X) = T(X; \boldsymbol{P})$.

Кроме того, имеет место оценка

$$\left|\int_P PX_1PX_2 \ldots PX_m dP\right| \leqslant |X_1|_\omega |X_2|_\omega \ldots |X_m|_\omega. \tag{3.5}$$

Доказательство. Как уже отмечалось, для $m = 1$ эта теорема доказана в [1] и [4]. Предположим, что теорема верна для $m-1$, и покажем, что отсюда следует ее справедливость для m.

Пусть $\varepsilon > 0$. Выберем разбиение $\boldsymbol{P}_\varepsilon$ цепочки $\boldsymbol{P}$ ($\boldsymbol{P}_\varepsilon$ — конечная цепочка, содержащаяся в $\boldsymbol{P}$) так, чтобы для всякого разбиения $P^{(n)} = \{P_j\}_0^n$ этой же цепочки, содержащего $\boldsymbol{P}_\varepsilon$, выполнялись условия

$$\left|\sum_{j=1}^n Q_j X_1 Y_2 \Delta P_j - Y_1\right| < \varepsilon \tag{3.6}$$

и

$$\left| \sum_{j=1}^{n} F(Q_j)\,\Delta P_j - Y_2 \right| < \varepsilon, \tag{3.7}$$

где

$$\Delta P_j = P_j - P_{j-1};\ P_{j-1} \leqslant Q_j \leqslant P_j,\ \ Q_j \in P;\ F(P) = PX_2PX_3 \dots PX_m \text{ и } Y_r = T(X_r T(X_{r+1} \dots T(X_m) \dots))\ (r = 1, 2, \dots, m).$$

Так как

$$\sum_{j=1}^{n} Q_j X_1 F(Q_j)\Delta P_j = \sum_{j=1}^{n} Q_j X Y'_2 \Delta P_j,$$

где

$$Y'_2 = \sum_{j=1}^{n} F(Q_j)\Delta P_j,$$

то

$$\left| \sum_{j=1}^{n} Q_j X_1 F(Q_j)\Delta P_j - Y_1 \right| \leqslant \left| \sum_{j=1}^{n} Q_j X_1 (Y'_2 - Y_2)\Delta P_j \right| +$$

$$+ \left| \sum_{j=1}^{n} Q_j X_1 Y_2 \Delta P_j - Y_1 \right| \leqslant \left| \sum_{j=1}^{n} P_{j-1} X_1 (Y'_2 - Y_2)\Delta P_j \right| +$$

$$+ \left| \sum_{j=1}^{n} \Delta P_j X_1 (Y'_2 - Y_2)\Delta P_j \right| + \left| \sum_{j=1}^{n} Q_j X_1 Y_2 \Delta P_j - Y_1 \right|.$$

Отсюда и из соотношений (3.1), (3.6) и (3.7) следует, что

$$\left| \sum_{j=1}^{n} Q_j X_1 F(Q_j)\Delta P_j - Y_1 \right| \leqslant \varepsilon (1 + (c+1) \mid X_1 \mid_\omega).$$

Последнее соотношение в силу произвольности ε (> 0) означает, что интеграл (3.3) сходится и имеет место равенство (3.4).

Наконец, оценка (3.5) очевидным образом выводится из оценки (3.2) Теорема доказана.

Отметим еще одно предложение, вытекающее из равенства (3.4) *Если выполняются условия теоремы 4 и оператор X_r принадлежит S_p $(1 < p < \infty)$, то и оператор* (3.3) *принадлежит S_p, причем*

$$\left| \int_P PX_1PX_2 \dots PX_m dP \right|_p \leqslant \gamma_p^r \mid X_r \mid_p \prod_{j>r} \mid X_j \mid_\omega \prod_{j<r} \mid X_j \mid, \tag{3.8}$$

где γ_p — константа, зависящая только от p.

Это предложение является следствием равенства (3.4) и оценки (3.8) для случая $m = 1$, установленной в [3] (см. также [2]).

Можно получить и другие оценки, подобные (3.8), которые являются обобщениями соответствующих оценок из [1—4], установленных там для случая $m = 1$.

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

1. *И. Ц. Гохберг* и *М. Г. Крейн*, К теории треугольного представления несамосопряженных операторов, ДАН, 137, № 5 (1961), 1034—1038.
2. *И. Ц. Гохберг* и *М. Г. Крейн*. О вольтерровых операторах с мнимой компонентой того или иного класса, ДАН, 139, № 4 (1961), 779—782.
3. *В. И. Мацаев*, О вольтерровых операторах, получаемых возмущениями самосопряженных, ДАН, 139, № 4 (1961), 810—814.
4. *В. И. Мацаев*, Об одном классе вполне непрерывных операторов, ДАН, 139, № 3 (1961), 548—552.
5. *М. С. Бродский*, О треугольном представлении вполне непрерывных операторов с одной точкой спектра. Успехи матем. наук, т. 16, вып. 1 (97) (1961), 135—141.
6. *Д. К. Фадеев* и *И. С. Соминский*, Сборник задач по высшей алгебре, Физматгиз, 1961.
7. *И. Ц. Гохберг* и *М. Г. Крейн*, О вполне непрерывных операторах со спектром, сосредоточенном в нуле, ДАН, 128, № 2 (1959), 227—330.
8. *Ky Fan*, Maximum properties and inequalities for the eigenvalues of completely continuous operators, Proc. Acad. Sci. USA, 37, № 11 (1951), 760—766.
9. *И. Ц. Гохберг* и *М. Г. Крейн*, О влиянии некоторых трансформаций ядер интегральных уравнений на спектры этих уравнений, т. 13, № 3 (1961), 12—38.
10. *И. Ц. Гохберг* и *М. Г. Крейн*, О проблеме факторизации операторов в гильбертовом пространстве, ДАН, 147, № 2 (1962).

И. Ц. ГОХБЕРГ

ДЕСПРЕ РЕЛАЦИИЛЕ ДИНТРЕ СПЕКТРЕЛЕ КОМПОНЕНТЕЛОР ЕРМИТЕ АЛЕ МАТРИЧЕЛОР НИЛПОТЕНТЕ ШИ ДЕСПРЕ ИНТЕГРАЛА СЕКЦИУНЕЙ ТРИУНГЮЛАРЕ

Резумат

Ын артиколул де фацэ се конкретизяэ, пентру казул спациилор де дименсиунь фините, унеле резултате але луй, М. Г. Крейн, ауторулуй [1—3] ши В. И. Мацаев [4]. Се стабилеск унеле апричиерь „екзакте“, каре ынбинэ ынтре еле спектреле компонентелор ермите але матричей нилпотенте арбитраре.

Ын афарэ де ачаста, се демонстряэ конверженца уней интеграле дупэ ланцул де проекторь, каре презинтэ о женерализаре натуралэ а интегралей секциуней триунгюларе, ынтродусэ де М. С. Бродский [5].

Поступило
10.VII 1962 г.

К. С. СИБИРСКИЙ

РАВНОМЕРНАЯ АППРОКСИМАЦИЯ ТОЧЕК И СВОЙСТВА ДВИЖЕНИЙ В ДИНАМИЧЕСКИ ПРЕДЕЛЬНЫХ МНОЖЕСТВАХ

Введение. В теории динамических систем [1, 2] большую роль играют движения, устойчивые по Пуассону, и различные типы этих движений. Еще И. Бендиксоном [3] было доказано, что для динамических систем, определяемых с помощью дифференциальных уравнений в плоскости, устойчивые по Пуассону движения исчерпываются классом особых движений (то есть периодическими и стационарными движениями). Дж. Д. Биркгофом [4] были рассмотрены рекуррентные движения. Франклин [5] ввел почти периодические движения. М. В. Бебутовым [6] были введены и изучены почти рекуррентные и равномерно устойчивые по Пуассону движения. Наконец, совсем недавно Б. А. Щербаковым [7] были обнаружены новые движения, названные им псевдорекуррентными. Объединяет все эти типы движений их „возвращаемость" в произвольную окрестность любой точки или дуги траектории. Для всех этих движений динамически предельные множества совпадают с замыканием их траекторий. Различаются эти движения лишь по „характеру возвращаемости".

В. В. Немыцкий [8] ввел определение асимптотического движения (как движения, для которого динамически предельные множества не пусты, а их пересечение с траекторией движения пусто), поставил задачу об изучении характера возвращаемости асимптотической траектории в окрестность своего предельного множества и его влияния на свойства движений в этом множестве, а также показал [9, 10], что этот вопрос имеет большое значение в теории автоматического регулирования.

Среди движений, ω-предельное множество которых непусто, особое место занимают движения, устойчивые по Лагранжу в положительном направлении (устойчивые L^+) [1]. Такие движения полностью характеризуются тем, что для них Ω_p непусто и компактно, а полутраектория $f(p, I^+)$ приближается к Ω_p так, что $\lim\limits_{t\to+\infty} \rho\,(f(p, t), \Omega_p) = 0$ [11]. В исследовании устойчивых L^+ движений В. В. Немыцким получены существенные результаты [8, 12, 9, 10] и, в частности, показано [1, 8], что:

1°. Множество Ω_p всех ω-предельных точек устойчивого L^+ движения $f(p, t)$ является минимальным множеством (рекуррентных движений) тогда и только тогда, когда полутраектория $f(p, I^+)$ равномерно аппроксимирует Ω_p.

2°. Равномерная устойчивость по Ляпунову в положительном направлении множества $f(p, I^+)$ относительно $f(p, I^+)$ достаточна для почти периодичности движений в ω-предельном множестве устойчивого L^+ движения $f(p, t)$.

В настоящей заметке вводится понятие ϕ-предельной точки движения $f(p, t)$ как точки, которую равномерно аппроксимирует положительная полутраектория $f(p, I^+)$; изучается структура множества Ψ_p всех ϕ-предельных точек движения $f(p, t)$; выясняется, какие подмножества Ω_p равномерно аппроксимируются полутраекторией $f(p, I^+)$ и устанавливаются необходимые и достаточные условия почти периодичности и периодичности движений в Ω_p. При этом обобщаются предложения 1° и 2°. Основные результаты статьи опубликованы в [13].

1. Основные определения. Пусть в произвольном метрическом пространстве R задана динамическая система $f(p, t)$ [1].

Как известно, точка q называется ω-(α-) *предельной точкой движения* $f(p, t)$, если существует такая последовательность значений времени $\{t_n\}\to+\infty(-\infty)$, что последовательность $\{f(p, t_n)\}\to q$. Множество всех ω-(α-)предельных точек движения $f(p, t)$ называется ω-(α-)*предельным множеством движения* $f(p, t)$ и обозначается через Ω_p (A_p). Множества Ω_p и A_p называются еще *динамически предельными множествами.*

Будем говорить, что множество $P\subseteq R$ *аппроксимирует множество* $Q\subseteq R$ *с точностью до* ε, если $\inf\limits_{p\in P} \rho(q, p) < \varepsilon$ при всех $q \in Q$, т. е. $Q\subseteq S(P, \varepsilon)$.

Следуя В. В. Немыцкому, скажем, что *полутраектория* $f(p, I^+)$ ($f(p, I^-)$, *траектория* $f(p, I)$) *равномерно аппроксимирует множество* $Q\subseteq R$, если для любого $\varepsilon>0$ существует $T(\varepsilon)>0$ такое, что любая дуга полутраектории $f(p, I^+)(f(p, I^-)$, траектории $f(p, I))$ временной длины T аппроксимирует множество Q с точностью до ε.

Движение $f(p, t)$ называется *рекуррентным* [4] (*почти рекуррентным* [6]), если траектория $f(p, I)$ равномерно аппроксимирует себя (точку p).

Точку q назовем ϕ-(β-) *предельной точкой движения* $f(p, t)$, если полутраектория $f(p, I^+)(f(p, I^-))$ равномерно аппроксимирует точку q. Множество всех ϕ-(β-) предельных точек движения $f(p, t)$ назовем ϕ-(β-) *предельным множеством движения* $f(p, t)$ и обозначим через $\Psi_p(B_p)$.

В дальнейшем речь будет идти лишь о множествах Ω_p и Ψ_p. Все результаты без труда могут быть перенесены на множества A_p и B_p.

Последовательность неотрицательных чисел $\{t_n\}$ называется *относительно плотной на* $I^+ = [0, +\infty)$, если существует такое $L > 0$, что при любом $l \geqslant 0$ на отрезке $[l, l + L]$ находится, по крайней мере, одна точка этой последовательности.

Очевидно, что точка q является ϕ-предельной точкой движения $f(p, t)$ тогда и только тогда, когда для любого $\varepsilon > 0$ существует такая относительно плотная на I^+ последовательность $\{t_n\}$, что $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} f(p, t_n) \subseteq S(q, \varepsilon)$. С другой стороны, точка $q \in \Omega_p$ тогда и только тогда, когда для любого $\varepsilon > 0$ существует последовательность $\{t_n\}\to+\infty$ такая, что $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} f(p, t_n) \subseteq S(q, \varepsilon)$. Поэтому

$$\Psi_p \subseteq \Omega_p \subseteq \overline{f(p, I)}. \qquad (1)$$

2. Простейшие свойства множества Ψ_p.

Теорема 1. *Множество Ψ_p инвариантно.*

Доказательство. Пусть $q_0 \in \Psi_p$. Возьмем произвольную точку $q = f(q_0, \tau) \in f(q_0, I)$ и число $\varepsilon > 0$. По условию непрерывности динамической системы найдется такое $\delta > 0$, что при $\rho(r, q_0) < \delta$ имеем $\rho(f(r, \tau), f(q_0, \tau)) < \varepsilon$. Из условия $q_0 \in \Psi_p$ найдем такую относительно плотную на I^+ последовательность $\{t_n\}$, что $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} f(p,t_n) \subseteq S(q_0, \delta)$. Тогда $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} f(p,t_n+\tau) \subseteq S(q,\varepsilon)$. Легко видеть, что $\{t_n+\tau\} \cap I^+$ является относительно плотной на I^+ последовательностью и поэтому $q \in \Psi_p$. Теорема доказана.

Теорема 2. *Множество Ψ_p замкнуто.*

Доказательство. Допустим, что $q_0 \in \overline{\Psi}_p$ и $\varepsilon > 0$. Найдется точка $q \in \Psi_p$ и число $\varepsilon_1 > 0$ такие, что $S(q, \varepsilon_1) \subseteq S(q_0, \varepsilon)$. По числу ε_1 найдем относительно плотную на I^+ последовательность $\{t_n\}$, для которой $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} f(p,t_n) \subseteq S(q, \varepsilon_1)$. Тогда $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} f(p,t_n) \subseteq S(q_0, \varepsilon)$ и $q_0 \in \Psi_p$.

Следствие 1. *Если K непустое подмножество Ψ_p, то $f(K, I) \subseteq \Psi_p$.*

Теорема 3. *Если p и q две точки одной траектории, то $\Psi_p = \Psi_q$.*

Доказательство. Пусть $q = f(p, \tau)$ и $r \in \Psi_q$. Тогда для любого $\varepsilon > 0$ существует такая относительно плотная на I^+ последовательность $\{t_n\}$, что $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} f(q, t_n) \subseteq S(r, \varepsilon)$. Это включение можно переписать так: $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} f(p,\ t_n+\tau) \subseteq S(r, \varepsilon)$. Так как последовательность $\{t_n+\tau\} \cap I^+$ является относительно плотной на I^+, то $r \in \Psi_p$. Таким образом, $\Psi_q \subseteq \Psi_p$. Аналогичным образом, исходя из равенства $p = f(q, -\tau)$, доказывается обратное включение.

Существуют примеры, когда $q \in \overline{f(p, I)}$, а $\Psi_q \neq \Psi_p$.

Теорема 4. *Для того, чтобы полутраектория $f(p, I^+)$ равномерно аппроксимировала некоторое подмножество $K \subseteq \Psi_p$, достаточно, а в случае полноты пространства R и необходимо, чтобы K было компактным*[1]).

Доказательство. Пусть $K \subseteq \Psi_p$ и K компактно. Возьмем произвольное $\varepsilon > 0$. Из всех $\frac{\varepsilon}{2}$-окрестностей точек компактного в себе множества $\overline{K}$ выберем конечное их число $S(q_i, \frac{\varepsilon}{2})$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ так, чтобы $\overline{K} \subseteq \bigcup\limits_{i=1}^{n} S(q_i, \frac{\varepsilon}{2})$. По теореме 2 множество $\overline{K} \subseteq \Psi_p$. Для числа $\frac{\varepsilon}{2}$ и точки q_i подберем соответствующее $T_i > 0$, при котором $q_i \in S(f(p; t_0, t_0+T_i), \frac{\varepsilon}{2})$, каково бы ни было $t_0 \geqslant 0$. Обозначим $T = \max\limits_{1 \leqslant i \leqslant n} T_i$. Тогда $q_i \in S(f(p; t_0, t_0+T), \frac{\varepsilon}{2})$, при всех $i = 1, 2, \ldots, n$. Возьмем теперь любую точку $q \in \overline{K}$. Найдется такое i, что $q \in S\left(q_i, \frac{\varepsilon}{2}\right)$. Тогда $q \in S(f(p; t_0, t_0+T), \varepsilon)$. Таким образом, $\overline{K} \subseteq S(f(p; t_0, t_0+T), \varepsilon)$ при любом $t_0 \geqslant 0$ и полутраектория $f(p, I^+)$ равномерно аппроксимирует $\overline{K}$.

Допустим теперь, что пространство R полно и полутраектория $f(p, I^+)$ равномерно аппроксимирует множество K. Тогда для любого $\varepsilon > 0$ найдется такое $T > 0$, что

$$K \subset S\left(f(p; t_0, t_0+T), \frac{\varepsilon}{2}\right) \qquad (2)$$

---

[1]) Справедливость второй части этой теоремы отмечена в [8].

при любом $t_0 \geqslant 0$. Ввиду компактности дуги $f(p; t_0, t_0+T)$, для нее существует конечная $\frac{\varepsilon}{2}$-сеть. В силу включения (2) она же будет ε-сетью для множества K. Отсюда, ввиду полноты пространства R, следует компактность множества K (см. [14], стр. 63).

Следствие 2. *Если движение $f(p, t)$ устойчиво L^+, а $\Psi_p \neq \Lambda$, то полутраектория $f(p, I^+)$ равномерно аппроксимирует Ψ_p.*

Известно, что устойчивое по Пуассону в положительном направлении движение $f(p, t)$ характеризуется каждым из следующих трех соотношений: $p \in \Omega_p$, $f(p, I) \cap \Omega_p \neq \Lambda$, $\Omega_p = \overline{f(p, I)}$[1]). Аналогично имеет место

Теорема 5. *Следующие утверждения эквивалентны: а) движение $f(p, t)$ почти рекуррентно; б) $p \in \Psi_p$; в) $f(p, I) \cap \Psi_p \neq \Lambda$; г) $\Psi_p = \overline{f(p, I)}$.*

Для доказательства этой теоремы установим одно вспомогательное предложение.

Лемма 1. *Если точка $q \in f(p, I) \cap \Omega_p$, а число $T > 0$ таково, что неравенство*

$$\rho(q, f(p; t_0, t_0+T)) \leqslant \varepsilon \qquad (3)$$

имеет место при всех $t_0 \geqslant 0$, то неравенство (3) *имеет место при всех $t_0 \in (-\infty, +\infty)$.*

Доказательство. Пусть $q \in f(p, I) \cap \Omega_p$, а число $T > 0$ таково, что неравенство (3) справедливо при всех $t_0 \geqslant 0$, но существует $t_0 < 0$, для которого неравенство (3) не имеет места. Тогда при этом t_0 имеет место равенство $\rho(q, f(p;\ t_0, t_0+T)) = \varepsilon + d$, где $d > 0$. Обозначим $f(p, t_0) = r$ и найдем из условия интегральной непрерывности соответствующее $\delta(r, d, T) > 0$. Так как $q \in f(p, I) \cap \Omega_p$ и Ω_p инвариантно, то и $r \in f(p, I) \subseteq \Omega_p$, и поэтому найдется такое $\tau > 0$, что $\rho(f(p, \tau), r) < \delta$. Тогда $\rho(f(p, \tau+t), f(r, t)) < d$ при всех $t \in [0, T]$. Но при этих t расстояние $\rho(q, f(r, t)) \geqslant \varepsilon + d$. Тогда $\rho(q, f(p, \tau+t)) \geqslant \rho(q, f(r,t)) - \rho(f(p, \tau+t), f(r, t)) > \varepsilon + d - d = \varepsilon$ при всех $t \in [0, T]$, т. е. $\rho(q, f(p; \tau, \tau+T)) > \varepsilon$. Это противоречит тому, что неравенство (3) выполнено при всех $t_0 \geqslant 0$.

Доказательство теоремы 5. Во-первых, заметим, что утверждение б) следует непосредственно из определения почти рекуррентного движения. Пусть теперь $p \in \Psi_p$. Тогда $p \in \Omega_p$ и для любого $\varepsilon > 0$ найдется такое $T(\varepsilon) > 0$, что

$$\rho(p, f(p; t_0, t_0+T)) \leqslant \varepsilon \qquad (4)$$

при любом $t_0 \geqslant 0$. На основании леммы 1 неравенство (4) имеет место при всех t_0 и движение $f(p, t)$ почти рекуррентно. Таким образом, доказана эквивалентность предложений а) и б). Из условия б) с очевидностью вытекает выполнение условия в), а с учетом следствия 1 и включения (1) вытекает и условие г). С другой стороны, из условия г) с очевидностью вытекает выполнение условия б). Кроме того, ввиду инвариантности Ψ_p из условия в) также вытекает условие б).

Следствие 3. *Если движение $f(p, t)$ периодическое или стационарное, то $\Psi_p = \Omega_p = f(p, I)$.*

Теорема 6. *Движение $f(p, t)$ является рекуррентным тогда и только тогда, когда полутраектория $f(p, I^+)$ равномерно аппроксимирует $f(p, I)$.*

---

[1]) Из этого равенства вытекает [1—7], что если движение $f(p, t)$ равномерно устойчиво по Пуассону (почти рекуррентно, псевдорекуррентно, рекуррентно, почти периодично, является особым), то в Ω все движения являются таковыми же.

Доказательство. Если движение $f(p, t)$ рекуррентно, то траектория $f(p, I)$ и тем более полутраектория $f(p, I^+)$ равномерно аппроксимируют $f(p, I)$. Пусть теперь полутраектория $f(p, I^+)$ равномерно аппроксимирует $f(p, I)$. Тогда $f(p, I) \subseteq \Psi_p \subseteq \Omega_p$ и для всякого $\varepsilon > 0$ существует такое $T(\varepsilon) > 0$, что неравенство (3) выполнено при всех $q \in f(p, I)$ и $t_0 \geqslant 0$. На основании леммы 1 неравенство (3) имеет место при всех $q \in f(p, I)$ и всех $t_0 \in (-\infty, +\infty)$, и поэтому движение $f(p, t)$ рекуррентно.

3. Структура множества Ψ_p. Докажем две теоремы, характеризующие структуру ψ-предельных множеств.

Теорема 7. *Множество Ψ_p пусто в каждом из следующих двух случаев:*

1. *Ω_p содержит более одного минимального множества.*

2. *Пространство R локально компактно, а движение $f(p, t)$ неустойчиво L^+.*

Доказательству этой теоремы предпошлем две леммы.

Лемма 2. *Если Ω_p содержит минимальное множество M, то либо $\Psi_p = M$, либо $\Psi_p = \Lambda$.*

Доказательство. Пусть существует минимальное множество $M \subseteq \Omega_p$. Возьмем любую точку $q \in M$ и произвольные положительные числа ε и T. По свойству интегральной непрерывности найдется такое $\delta > 0$, что $\rho(f(r, t), f(q, t)) < \varepsilon$ при всех $r \in S(q, \delta)$ и $t \in [0, T]$. Тогда $\rho(f(r, t), M) < \varepsilon$ при всех $t \in [0, T]$, т. е. $f(r; 0, T) \subseteq S(M, \varepsilon)$. Так как $q \in \Omega_p$, то найдется число $\tau \geqslant 0$ такое, что точка $r = f(p, \tau) \in S(q, \delta)$ и тогда $f(p; \tau, \tau + T) \subseteq S(M, \varepsilon)$. Таким образом, в любой окрестности множества M движение $f(p, t)$ протекает при $t > 0$ сколь угодно большие промежутки времени, а поэтому никакая другая точка, кроме точек множества M, не может принадлежать Ψ_p, т. е. $\Psi_p \subseteq M$. Допустим, что $\Psi_p \neq \Lambda$. Тогда, будучи инвариантным и замкнутым подмножеством минимального множества M, Ψ_p должно совпадать с M. Лемма доказана.

Лемма 3. *Ни одна точка локальной компактности R не может принадлежать ψ-предельному множеству движения неустойчивого L^+.*

Доказательство. Допустим, что точка $q \in \Psi_p$ и является точкой локальной компактности R. Тогда найдется окрестность U точки q, замыкание которой $\overline{U}$ компактно, и число $T > 0$ такое, что какова бы ни была точка $r \in f(p, I^+)$, $f(r; 0, T) \cap U \neq \Lambda$. Поэтому существует такое $\tau \in [0, T]$, что $f(r, \tau) \in U$. Отсюда следует, что $r \in f(U, -\tau) \subseteq f(U; -T, 0)$ и ввиду произвольности r полутраектория $f(p, I^+) \subseteq f(U; -T, 0) \subseteq$ $\subseteq f(\overline{U}; -T, 0)$. Отсюда, в силу компактности множества $f(\overline{U}; -T, 0)$, следует, что движение $f(p, t)$ устойчиво L^+. Тем самым лемма доказана.

Доказательство теоремы 7. Пусть существуют два различных минимальных множества M_1 и M_2, содержащиеся в Ω_p. Тогда, согласно лемме 2, либо $\Psi_p = M_1$, либо $\Psi_p = \Lambda$. Равенство $\Psi_p = M_1$ невозможно, так как согласно той же лемме необходимо либо $\Psi_p = M_2$, либо $\Psi_p = \Lambda$. Таким образом, $\Psi_p = \Lambda$.

Предположим теперь, что пространство R локально компактно, а движение $f(p, t)$ неустойчиво L^+. В этом случае все точки пространства R являются точками локальной компактности, и на основании леммы 3 множество $\Psi_p = \Lambda$.

Примечание 1. Как следует из примера 3 работы [11], неустойчивое L^+ движение $f(p, t)$, расположенное в полном пространстве, может иметь непустое компактное ψ-предельное множество.

Установим два следствия, вытекающие из теоремы 7.

Следствие 4. *В локально компактном пространстве Ψ_p компактно.*

Действительно, если R локально компактно и $\Psi_p \neq \Lambda$, то движение $f(p, t)$ должно быть устойчивым L^+. Тогда Ω_p компактно и Ψ_p, будучи замкнутым подмножеством Ω_p, также компактно.

Как утверждается в [6], в компактном пространстве почти рекуррентность сводится к рекуррентности. Имеет, однако, место более общее предложение:

Следствие 5. *В локально компактном пространстве всякое почти рекуррентное движение рекуррентно.*

Действительно, если движение $f(p, t)$ почти рекуррентно, то $\Psi_p = \overline{f(p, I)} \neq \Lambda$, и тогда на основании теоремы 7 движение $f(p, t)$ устойчиво по Лагранжу (в обоих направлениях). Из последнего факта и почти рекуррентности движения $f(p, t)$ вытекает его рекуррентность [1, 6]. (Это вытекает также непосредственно из следствия 2 и теоремы 6).

Как известно, устойчивость L^+ движения $f(p, t)$ обеспечивает существование в Ω_p по крайней мере одного минимального множества.

Теорема 8. *Если движение $f(p, t)$ устойчиво L^+, а M единственное в Ω_p минимальное множество, то $\Psi_p = M$.*

Доказательство. Допустим, что движение $f(p, t)$ устойчиво L^+, а M единственное минимальное множество в Ω_p. Предположим, что полутраектория $f(p, I^+)$ не аппроксимирует M равномерно. Тогда найдется такое $\varepsilon_0 > 0$, что каково бы ни было число $T_n > 0$, существует пара точек $p_n \in f(p, I^+)$ и $q_n \in M$, для которой $\rho(f(p_n; 0, T_n), q_n) \geqslant \varepsilon_0$. Числа $T_n > 0$ $(n = 1, 2, \ldots)$ выберем так, чтобы $\{T_n\} \to +\infty$. Так как $p_n \in \overline{f(p, I^+)}$ и $q_n \in \Omega_p \subseteq \overline{f(p, I^+)}$, а $\overline{f(p, I^+)}$ компактно, последовательности $\{p_n\}$ и $\{q_n\}$ можно считать сходящимися. Пусть $\{p_n\} \to p_0$, а $\{q_n\} \to q_0$. Тогда $p_0 \in \overline{f(p, I^+)}$, $q_0 \in M$, а $\rho(f(p_0; 0, +\infty), q_0) \geqslant \varepsilon_0$. Но $\Omega_{p_0} \subseteq \Omega_p$ и поэтому Ω_{p_0} компактно и содержит некоторое минимальное множество. Поскольку M единственное в Ω_p минимальное множество, то $M \subseteq \Omega_{p_0}$ и, в частности, $q_0 \in \Omega_{p_0}$. Это противоречит неравенству $\rho(f(p_0; 0, +\infty), q_0) \geqslant \varepsilon_0$. Отсюда заключаем, что полутраектория $f(p, I^+)$ равномерно аппроксимирует M. Тогда $M \subseteq \Psi_p$ и $\Psi_p \neq \Lambda$. На основании леммы 2 множество $\Psi_p = M$. Теорема доказана.

Заметим, что в рассматриваемом случае M является компактным минимальным множеством, и поэтому в Ψ_p все движения рекуррентны.

Примечание 2. В локально компактных пространствах существуют примеры, в которых Ω_p содержит единственное минимальное множество, а $\Psi_p = \Lambda$. Для построения такого рода движения достаточно рассмотреть случай, когда R локально компактно, а Ω_p содержит только два минимальных множества, и удалить одно из них. В таком примере, однако, Ω_p не будет компактным.

Так как в локально компактном пространстве для устойчивости L^+ движения $f(p, t)$ необходимо и достаточно, чтобы Ω_p было непустым и компактным [11], из теорем 7 и 8 вытекает

Следствие 6. *В локально компактном пространстве $\Psi_p \neq \Lambda$ тогда и только тогда, когда Ω_p компактно и содержит единственное минимальное множество M. При этом $\Psi_p = M$.*

4. Движения полуасимптотические по Биркгофу. Из приведенных выше двух теорем вытекает

Теорема 9. *Для того, чтобы полутраектория $f(p, I^+)$ устойчивого L^+ движения $f(p, t)$ равномерно аппроксимировала некоторое подмножество $Q \subseteq \Omega_p$, необходимо и достаточно, чтобы $\overline{f(Q, I)}$ было бы в Ω_p единственным минимальным множеством.*

Доказательство. Пусть $f(p, I^+)$ равномерно аппроксимирует некоторое подмножество $Q \subseteq \Omega_p$. Тогда $Q \subseteq \Psi_p$ и $\Psi_p \neq \Lambda$. Согласно теоремам 7 и 8 множество Ψ_p является единственным в Ω_p минимальным множеством. При этом $\overline{f(Q, I)} = \Psi_p$. Обратно, пусть $\overline{f(Q, I)}$ является единственным в Ω_p минимальным множеством. Тогда по теореме 8 $\Psi_p = \overline{f(Q, I)}$. При этом полутраектория $f(p, I^+)$ равномерно аппроксимирует Ψ_p и, тем более, его подмножество Q.

Доказанная теорема обобщает сформулированный во введении результат 1°, принадлежащий В. В. Немыцкому [8]. С другой стороны, она устанавливает новое свойство движений, в ω-предельном множестве которых имеется единственное минимальное множество. Такие движения были введены в рассмотрение Дж. Д. Биркгофом под названием положительно полуасимптотических движений (см. [4], стр. 172).

Оказывается, что для того, чтобы в ω-предельном множестве движения $f(p, t)$ содержалось единственное минимальное множество, это движение должно в некотором смысле „относительно плотно скручиваться". Точнее, имеет место

Теорема 10. *Для того, чтобы ω-предельное множество устойчивого L^+ движения $f(p, t)$ содержало единственное минимальное множество, необходимо и достаточно, чтобы для любого $\varepsilon > 0$ существовали точка $q \in f(p, I^+)$ и относительно плотная на I^+ последовательность $\{t_n\}$ такие, что $\bigcup_{n=1}^{\infty} f(p, t_n) \subseteq S(q, \varepsilon)$.*

Доказательство. Пусть движение $f(p, t)$ устойчиво L^+, а его ω-предельное множество содержит единственное минимальное множество M. Тогда на основании теоремы 8 множество $\Psi_p = M \neq \Lambda$. Возьмем любые $\varepsilon > 0$ и $r \in \Psi_p$. Найдется такая относительно плотная на I^+ последовательность $\{t_n\}$, что $\bigcup_{n=1}^{\infty} f(p, t_n) \subseteq S(r, \frac{\varepsilon}{2})$.

Обозначим $f(p, t_1) = q$. Тогда, очевидно, $\bigcup_{n=1}^{\infty} f(p, t_n) \subseteq S(q, \varepsilon)$.

Допустим теперь, что движение $f(p, t)$ устойчиво L^+ и для любого $\varepsilon > 0$ существуют точка $q \in f(p, I^+)$ и относительно плотная на I^+ последовательность $\{t_n\}$ такие, что $\bigcup_{n=1}^{\infty} f(p, t_n) \subseteq S(q, \varepsilon)$. Возьмем последовательность положительных чисел $\{\varepsilon_k\} \to 0$. Для каждого ε_k найдем соответствующие точки $q_k \in f(p, I^+)$ и относительно плотные на I^+ последовательности $\{t_n^{(k)}\}$ такие, что $\bigcup_{n=1}^{\infty} f(p, t_n^{(k)}) \subseteq S(q_k, \varepsilon_k)$. Так как $q_k \in f(p, I^+)$, а $\overline{f(p, I^+)}$ компактно, то последовательность $\{q_k\}$ можно считать сходящейся. Пусть $\{q_k\} \to q_0$. Для любого $\varepsilon > 0$ найдется такое k, что $S(q_k, \varepsilon_k) \subseteq S(q_0, \varepsilon)$. Тогда и $\bigcup_{n=1}^{\infty} f(p, t_n^{(k)}) \subseteq S(q_0, \varepsilon)$, а поэтому $q_0 \in \Psi_p$ и $\Psi_p \neq \Lambda$. Тогда на основании теоремы 7 в Ω_p содержится единственное минимальное множество. Теорема доказана.

Заметим, что на прямой $E^{(1)}$ всегда $\Psi_p = \Omega_p$, так как Ω_p либо пусто, либо состоит из одной точки, и тогда движение $f(p, t)$ устойчиво L^+.

Если же динамическая система заполняет область в плоскости $E^{(2)}$ и описывается системой двух дифференциальных уравнений, то $\Psi_p \neq \Lambda$ тогда и только тогда, когда полутраектория $f(p, I^+)$ ограничена, а Ω_p содержит не более одной точки покоя. Действительно, если бы Ω_p содержало более одной точки покоя, то на основании теоремы 7 множество Ψ_p было бы пустым. Если Ω_p содержит одну и только одну точку покоя q, то q является единственным в Ω_p минимальным множеством, так как кроме точки q множество Ω_p может содержать еще не более чем счетное число траекторий K_l, примыкающих обоими концами к этой точке [1, 15]. При этом $\Psi_p = q$. В случае, когда Ω_p не содержит особых точек, оно состоит из одной периодической траектории $f(q, I)$ [1, 15] и тогда $\Psi_p = f(q, I)$.

5. Почти периодичность движений в Ω_p. Докажем ряд теорем, устанавливающих условия почти периодичности и периодичности движений в ω-предельном множестве.

В связи с этим условимся определять расстояние между двумя фундаментальными последовательностями $\{p_n\}$ и $\{q_n\}$ точек пространства R по формуле $\rho(\{p_n\}, \{q_n\}) = \lim_{n \to +\infty} \rho(p_n, q_n)$ [16]. Очевидно, что если все точки последовательностей $\{p_n\}$ и $\{q_n\}$ принадлежат некоторому компактному в себе подмножеству пространства R, то эти последовательности сходятся и $\rho(\{p_n\}, \{q_n\}) = \rho(p_0, q_0)$, где $p_0 = \lim_{n \to +\infty} p_n$ и $q_0 = \lim_{n \to +\infty} q_n$.

Будем говорить, что *множество B обладает S^+-свойством,* если B равномерно устойчиво по Ляпунову в положительном направлении относительно B, т. е. для любого $\varepsilon > 0$ существует $\delta > 0$ такое, что как только $q_1 \cup q_2 \subseteq B$ и $\rho(q_1 q_2) < \delta$ расстояние $\rho(f(q_1, t), f(q_2, t)) < \varepsilon$ при всех $t \geqslant 0$.

Теорема 11. *Для того, чтобы в минимальном ω-предельном множестве устойчивого L^+ движения $f(p, t)$ все движения были почти периодическими, необходимо и достаточно выполнение следующего условия A:*

Для любого $\varepsilon > 0$ существует такое $\delta > 0$, что из $\rho(\{f(p, t_n)\}, \{f(p, t'_n)\}) < \delta$ следует $\rho(\{f(p, t_n + t)\}, \{f'(p, t_n' + t)\}) < \varepsilon$, *каковы бы ни были число $t \geqslant 0$ и фундаментальные последовательности $\{f(p, t_n)\}$* и *$\{f(p, t'_n)\}$ такие, что $\{t_n\} \to +\infty$ и $\{t'_n\} \to +\infty$.*

Доказательство. Заметим, во-первых, что устойчивость L^+ движения $f(p, t)$ обеспечивает компактность множества Ω_p и устойчивость по Лагранжу всех движений в нем. При этом условие A равносильно тому, что множество Ω_p обладает S^+-свойством.

Поэтому из устойчивости L^+ движения $f(p, t)$ и выполнения условия A на основании теоремы А. А. Маркова (см. [17] или [1] стр. 416, теорема 38) следует почти периодичность всех движений в Ω_p.

Предположим теперь, что движение $f(p, t)$ устойчиво L^+, а Ω_p является минимальным множеством почти периодических движений. Так как Ω_p компактно в себе, а компактное пространство всегда полно, то на основании следствия 2 на стр. 415 книги [1] множество Ω_p равномерно устойчиво по Ляпунову относительно Ω_p, а тогда условие A выполнено (даже при всех действительных t).

Как видно из доказательства теоремы 11, достаточность условия A для почти периодичности всех движений в ω-предельном множестве устойчивого L^+ движения $f(p, t)$ вытекает и без предположения минимальности Ω_p.

Заметим, что одним из случаев, когда условие A выполняется с очевидностью, является как раз случай, указанный В. В. Немыцким [8] (см. предложение 2° во введении к настоящей работе), когда полутраектория $f(p, I^+)$ обладает S^+-свойством. Это условие, однако, не является необходимым для почти периодичности движений даже в минимальном ω-предельном множестве устойчивого L^+ движения, что легко подтверждается примерами. Более того, при выполнении условия A (даже в случае устойчивости L^+ движения $f(p, t)$) множество Ω_p может не быть минимальным, в то время как ω-предельное множество даже неустойчивого L^+ движения $f(p, t)$, у которого полутраектория $f(p, I^+)$ обладает S^+-свойством, всегда минимально (если оно не пусто), что подтверждает

Теорема 12. *Если $f(p, I^+)$ обладает S^+ свойством, а $\Omega_p \neq \Lambda$, то Ω_p также обладает S^+-свойством и представляет собой минимальное множество.*

Доказательство. Пусть $f(p, I^+)$ обладает S^+-свойством, а $\Omega_p \neq \Lambda$. Тогда, как установлено В. В. Немыцким при доказательстве теоремы 41 на стр. 429 в [1], множество Ω_p обладает S^+-свойством. Этот факт вытекает также непосредственно из того, что если $f(p, I^+)$ обладает S^+-свойством, то выполнено условие A, а тогда Ω_p обладает S^+-свойством. Остается доказать минимальность Ω_p.

Допустим, что множество Ω_p не является минимальным. Тогда найдется точка $\underline{q} \in \Omega_p$ такая, что множество $\Sigma \equiv \overline{f(q, I)} \neq \Omega_p$. Пусть точка $r \in \Omega_p$, но $r \bar{\in} \Sigma$. В силу замкнутости Σ, расстояние $\rho(r, \Sigma) = d > 0$. Из того, что $f(p, I^+)$ обладает S^+-свойством, найдем для числа $\frac{d}{3}$ соответствующее $\delta > 0$ и рассмотрим окрестности $S(q, \frac{\delta}{2})$ и $S(r, \frac{d}{3})$. Найдутся такие положительные числа t_1 и t_2, что $T \equiv t_2 - t_1 > 0$, $f(p, t_1) \in S(q, \frac{\delta}{2})$, а $f(p, t_2) \in S(r, \frac{d}{3})$. Тогда, как только при положительном t точка $f(p, t) \in S(q, \frac{\delta}{2})$, расстояние $\rho(f(p, t), f(p, t_1)) < \delta$ и тогда, в силу выбора δ расстояние $\rho(f(p, t+T), f(p, t_2)) < \frac{d}{3}$, т. е. $f(p, t+T) \in S(f(p, t_2), \frac{d}{3}) \subseteq S(r, \frac{2d}{3})$ и поэтому $f(p, t+T) \bar{\in} S(\Sigma, \frac{d}{3})$. Это противоречит тому, что в силу непрерывности $f(p, t)$ для чисел T и $\frac{d}{3}$ и точки q можно найти такое $\delta_1 < \frac{\delta}{2}$, что как только $\rho(q_1, q) < \delta_1$, расстояние $\rho(f(q_1, T), f(q, T)) < \frac{d}{3}$.

Теперь можно сформулировать теорему, которая усиливает теорему 2 работы [8] (предложение 2° введения к настоящей статье) и показывает, что в теореме 3 той же работы (в теореме 41 в [1]), условие равномерности навивания (равномерной аппроксимации) излишне, на что обратил наше внимание И. У. Бронштейн.

Теорема 13. *Если движение $f(p, t)$ устойчиво L^+, а полутраектория $f(p, I^+)$ обладает S^+-свойством, то $\Psi_p = \Omega_p$ и представляет собой (компактное) минимальное множество почти периодических движений.*

При выполнении условий этой теоремы, как показывает следствие 2 на стр. 415 в [1], Ω_p обладает S-свойством, т. е. равномерно устойчиво по Ляпунову относительно Ω_p.

Теорема 14. *Для того, чтобы ω-предельное множество устойчивого L^+ движения $f(p, t)$ представляло собой траекторию особого движения, необходимо и достаточно существование для каждой точки $q \in \Omega_p$ относительно плотной на I^+ последовательности $\{t_n\}$ такой, что $\{f(p, t_n)\} \to q$.*

Покажем предварительно, что имеет место

Лемма 4. *Если существует такая относительно плотная на I^+ последовательность $\{t_n\}$, что $\{f(p, t_n)\} \to q$, то движение $f(q,t)$ является особым.*

Доказательство. Пусть существуют такие $L > 0$ и последовательность $\{t_n\}$, что при любом $l \geqslant 0$ на отрезке $[l, l+L]$ имеется хотя бы одна точка последовательности $\{t_n\}$ и что $\{f(p, t_n)\} \to q$. Без ограничения общности можно предположить, что при всех n имеют место неравенства: $L \leqslant t_{n+1} - t_n \leqslant 3L$. Для этого достаточно заменить последовательность $\{t_n\}$ ее подпоследовательностью, выбирая по одному её члену на каждом отрезке вида $[2kL, (2k+1)L]$ $(k = 0, 1, 2, \ldots)$. Обозначим $\tau_n = t_{n+1} - t_n$. Так как последовательность $\{\tau_n\}$ ограничена, из нее можно выбрать сходящуюся подпоследовательность $\{\tau_{n_k}\}$. Пусть $\lim\limits_{k \to +\infty} \tau_{n_k} = \tau$. Тогда $\tau \geqslant L > 0$, а $\{f(p, t_{n_k} + \tau_{n_k})\} = \{f(f(p, t_{n_k}), \tau_{n_k})\} \to f(q, \tau)$. С другой стороны, $\{f(p, t_{n_k} + \tau_{n_k})\} = \{f(p, t_{n_k+1})\} \to q$. Отсюда $f(q, \tau) = q$, где $\tau > 0$, а следовательно, движение $f(q, t)$ является особым.

Заметим, что аналогичное предложение для частного случая динамической системы было установлено М. И. Альмухамедовым [18].

Доказательство теоремы 14. Допустим, что движение $f(p, t)$ устойчиво L^+, а Ω_p—траектория особого движения. Возьмем произвольную точку q из Ω_p. Так как движение $f(q, t)$ является особым, существует $\tau > 0$ такое, что $f(q, t+\tau) = f(q, t)$ при всех t. Рассмотрим дугу $f(p; n\tau, (n+1)\tau)$ полутраектории $f(p, I^+)$. На $[n\tau, (n+1)\tau]$ найдется число t_n такое, что точка $f(p, t_n)$ является на дуге $f(p; n\tau, (n+1)\tau)$ ближайшей к q точкой. Очевидно, что последовательность $\{t_n\}$ является относительно плотной на I^+. Докажем, что $\{f(p, t_n)\} \to q$. Так как $\overline{f(p, I^+)}$ компактно, последовательность $\{f(p, t_n)\}$ имеет хотя бы одну предельную точку q'. Выберем теперь подпоследовательность $\{f(p, t_{n_k})\} \to q'$ и такую, что $\{f(p, n_k\tau)\}$ сходится. Пусть $\{f(p, n_k\tau)\} \to q''$. Тогда найдется число $\tau'' \in [0, \tau]$ такое, что $f(q'', \tau'') = q$. При этом $\{f(p, n_k\tau + \tau'')\} = \{f(f(p, n_k\tau), \tau'')\} \to f(q'', \tau'') = q$. Так как согласно выбору чисел t_{n_k} имеет место неравенство $\rho(f(p, t_{n_k}), q) \leqslant \rho(f(p, n_k\tau + \tau''), q)$, то и $\{f(p, t_{n_k})\} \to q$. Значит, $q' = q$, и тогда q является единственной предельной точкой последовательности $\{f(p, t_n)\}$, а поэтому $\{f(p, t_n)\} \to q$.

Предположим теперь, что для каждой точки $q \in \Omega_p$ существует относительно плотная на I^+ последовательность $\{t_n\}$ такая, что $\{f(p, t_n)\} \to q$. Тогда $\Psi_p = \Omega_p \neq \Lambda$. На основании леммы 4 в Ω_p все движения особые, а на основании теоремы 7 множество Ω_p может содержать не более одного минимального множества. Поэтому Ω_p должно представлять собой траекторию одного особого движения. Теорема доказана.

Заметим, что в доказательстве достаточности условие устойчивости L^+ движения $f(p, t)$ не было использовано.

В заключение считаю своим приятным долгом выразить глубокую благодарность профессору В. В. Немыцкому за предоставленную мне возможность доложить основные изложенные здесь результаты на руководимом им семинаре и за полезные советы.

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

1. *В. В. Немыцкий* и *В. В. Степанов,* Качественная теория дифференциальных уравнений, изд. 2-е, ГИТТЛ (1949), гл. V, 345—448.
2. *В. В. Немыцкий,* Топологические вопросы теории динамических систем, Усп. матем. наук, т. IV, вып. 6 (34) (1949), 91—153.
3. *И. Бендиксон,* О кривых, определяемых дифференциальными уравнениями, Усп. матем. наук; т. IX (1941), 191—211.
4. *Дж. Д. Биркгоф,* Динамические системы, М.—Л., 1941.
5. *Ph. Franklin,* Almost periodic recurrent motions, Math. Zeitschr., 30 (1929), 325—331.
6. *М. В. Бебутов,* О динамических системах в пространстве непрерывных функций, Бюллетень Московского госуниверситета, Математика, т. 2, вып. 5 (1941), 1—52.
7. *Б. А. Щербаков,* Классификация устойчивых по Пуассону движений. Псевдорекуррентные движения, ДАН СССР, т. 146, № 2 (1962), 322—324.
8. *В. В. Немыцкий,* Динамические системы на предельном интегральном многообразии, ДАН СССР, т. 47, № 8 (1945), 555—558.
9. *В. В. Немыцкий,* О природе установившихся режимов в многомерных динамических системах, Труды Третьего Всесоюзного математического съезда, т. 1, М., (1956), 208.
10. *В. В. Немыцкий,* Об установившихся режимах в трехмерных автономных динамических системах, Вестник Московского госуниверситета, № 1 (1957), 3—7.
11. *И. У. Боонштейн, Б. А. Щербаков,* Некоторые свойства устойчивых по Лагранжу воронок обобщенных динамических систем, Изв. АН МССР, № 5 (1962), 99—102.
12. *В. В. Немыцкий,* Структура одномерных предельных интегральных многообразий на плоскости и трехмерном пространстве, Вестник Московского госуниверситета, № 10 (1948), 49—61.
13. *К. С. Сибирский,* Равномерная аппроксимация точек динамически предельных множеств и движения в них, ДАН СССР, т. 146, № 2 (1962), 307—309.
14. *Л. А. Люстерник* и *В. И. Соболев,* Элементы функционального анализа, ГИТТЛ, (1951).
15. *Ю. К. Солнцев,* О предельном поведении интегральных кривых одной системы дифференциальных уравнений, Изв. АН СССР, серия математическая, т. 9, № 3 (1945), 233—240.
16. *П. С. Александров,* Введение в общую теорию множеств и функций, ГИТТЛ (1948).
17. *A. A. Markoff*, Stabilität im Liapounoffschen Sinne und Fastperiodizität, Math. Zeitschr., Bd. 36 (1933), 708—738.
18. *М. И. Альмухамедов,* Пространство полупериодических функций в теории динамических систем, Ученые записки Казанского пединститута, вып. 10 (1955), 29—56.

К. С. СИБИРСКИП

АПРОКСИМАЦИЯ УНИФОРМЭ А ПУНКТЕЛОР ШИ ПРОПРИЕТЭЦИЛЕ МИШКЭРИЛОР ЫН МУЛЦИМИЛЕ ДИНАМИК-ЛИМИТЭ

Резумат

Ын артикол се ынтродуче ноциуня де пункт ϕ-лимитэ а́л мишкэрий, ка пункт, каре есте униформ апроксимат де семитраектория позитивэ; се студиязэ структура мулцимий тутурор пунктелор ϕ-лимитэ але мишкэрий; се гэсеск тоате субмулцимиле мулцимий ω-лимитэ, каре сынт униформ апроксимате де семитраектория позитивэ [8], ши се стабилеск кондицииле нечесаре ши суфичиенте де апроапе периодичитате ши периодичитате а мишкэрилор ын мулцимя ω-лимитэ. Тот одатэ се женерализязэ теоремеле, демонстрате де В. В. Немыцкий ын [8].

Результателе принчипале але ачестей лукрэрь ау фост публикате ын [13].

Поступило
14.VII 1962 г.

П. С. СОЛТАН

К ЗАДАЧАМ О ПОКРЫТИИ И ОСВЕЩЕНИИ ВЫПУКЛЫХ ТЕЛ

Пусть в n-мерном эвклидовом пространстве E^n имеется некоторое замкнутое n-мерное выпуклое тело K^n. Его внутренность мы будем обозначать через $\mathrm{Int}K^n$, а границу — через $\mathrm{Fr}K^n$. Относительно тела K^n рассмотрим следующие четыре задачи.

Задача I. *Каково минимальное число выпуклых тел, гомотетичных телу K^n с положительным коэффициентом подобия, меньшим единицы, которыми можно покрыть тело K^n?* В дальнейшем покрытие указанного вида назовем I-покрытием тела K^n, а число тел, составляющих I-покрытие тела K^n, обозначим через $N_1(K^n)$.

Эта задача была поставлена Гохбергом и Маркусом в работе [1], и поэтому ее называют задачей Гохберга—Маркуса.

Задача II. *Каково минимальное число точечных источников света, расположенных в пространстве E^n, которыми можно осветить извне всю границу тела K^n?* (Граничная точка A тела K^n считается освещенной извне некоторым источником света S, если луч SA проходит при его продолжении за точку A через некоторую внутреннюю точку тела K^n). В дальнейшем освещение указанного вида назовем II-освещением границы тела K^n, а число источников, дающих II-освещение границы тела K^n, обозначим через $N_{\mathrm{II}}(K^n)$.

Задача III. *Каково минимальное число открытых выпуклых тел, получающихся из $\mathrm{Int}K^n$ параллельными переносами, которыми можно покрыть тело K^n?* В дальнейшем покрытие указанного вида назовем III-покрытием тела K^n, а число тел, составляющих III-покрытие тела K^n, обозначим через $N_{\mathrm{III}}(K^n)$.

Задача IV. *Каково минимальное число пучков параллельных лучей света в пространстве E^n, которыми можно осветить извне всю границу $\mathrm{Fr}K^n$ тела K^n?* (Граничная точка A тела K^n считается освещенной извне некоторым пучком лучей, если луч этого пучка, проходящий через A, проходит при его продолжении за точку A через некоторую внутреннюю точку тела K^n). В дальнейшем освещение указанного вида назовем IV-освещением границы $\mathrm{Fr}K^n$ тела K^n, а число пучков параллельных лучей, дающих IV-освещение границы тела K^n, обозначим через $N_{\mathrm{IV}}(K^n)$.

Задача IV была поставлена В. Г. Болтянским в работе [2], и поэтому ее называют задачей Болтянского. Идеи же задач II и III были заимствованы из задач Гохберга—Маркуса и Болтянского[1]).

---

[1]) После того, как эта статья была сдана в печать, автор узнал, что задача III была поставлена ранее Леви [5].

Для удобства дальнейших формулировок введем следующие соглашения.

Если выпуклое тело K^n есть точка, то положим

$$N_J(K^n)=1, \text{ где } J=\mathrm{I};\ \mathrm{III}.$$

Для самого пространства $E^n (n \geqslant 0)$ положим

$$N_J(E^n)=1,\ J=\mathrm{II},\ \mathrm{IV}.$$

Заметим, что если выпуклое тело K^n пространства E^n ограничено, то каждое из чисел $N_{\mathrm{I}}(K^n)$, $N_{\mathrm{II}}(K^n)$, $N_{\mathrm{III}}(K^n)$, $N_{\mathrm{IV}}(K^n)$ конечно. Более того, справедлива

Теорема 1. *Если выпуклое тело K^n пространства E^n ограничено, то имеют место равенства:*

$$N_{\mathrm{I}}(K^n)=N_{\mathrm{II}}(K^n)=N_{\mathrm{III}}(K^n)=N_{\mathrm{IV}}(K^n),$$

т. е. в этом случае задачи I, II, III *и* IV *эквивалентны.*

Доказательство. Прежде всего установим неравенство[2])

$$N_{\mathrm{III}}(K^n) \leqslant N_{\mathrm{I}}(K^n). \tag{1}$$

Пусть множества $K_1, K_2, \ldots, K_t$ составляют I-покрытие тела K^n, и пусть h_i, $i=1, 2, \ldots, t$, гомотетия с коэффициентом $k<1$, переводящая тело K^n в K_i, т. е. $K_i=h_i(K^n)$. Возьмем некоторую внутреннюю точку X_i тела K_i и обозначим через h'_i гомотетию с центром X_i и коэффициентом $\frac{1}{k}$. Очевидно, преобразование $p_i=h'_i\cdot h_i$ есть параллельный перенос. Заметим, что $\frac{1}{k}>1$, и потому $K_i \subset \mathrm{Int} h'_i(K_i)=\mathrm{Int} h'_i(h'_i(K^n))=$ $=\mathrm{Int} p_i(K^n)$. Следовательно, открытые множества $\mathrm{Int} p_i(K^n)$, $i=1,2,\ldots,t$, составляют покрытие тела K^n, откуда и получаем неравенство (1).

Теперь докажем неравенство[3])

$$N_{\mathrm{IV}}(K^n) \leqslant N_{\mathrm{III}}(K^n). \tag{2}$$

Пусть множества $L_1, L_2, \ldots, L_s$ составляют III-покрытие тела K^n. Тогда пересечения $L_j \cap \mathrm{Fr}K^n$, $j=1, \ldots, s$ образуют покрытие границы $\mathrm{Fr}K^n$ тела K^n. Пусть p_j — параллельный перенос, переводящий тело L_j в $\mathrm{Int}K^n$. Очевидно, что если $A \in L_j \cap \mathrm{Fr}K^n$, то $p_j(A) \in \mathrm{Int}K^n$, и поэтому пучок лучей Π_j, параллельных направлению переноса p_j, освещает точку A. Таким образом, все точки множества $L_j \cap \mathrm{Fr}K^n$ являются точками освещенности для пучка Π_j, и потому пучки Π_1, $\Pi_2, \ldots, \Pi_s$ освещают извне всю границу $\mathrm{Fr}K^n$ тела K^n. Следовательно, $N_{\mathrm{IV}}(K^n) \leqslant s$ и неравенство (2) доказано.

На основании теоремы 1 работы [2] имеем (для ограниченного тела K^n) равенство $N_{\mathrm{IV}}(K^n)=N_{\mathrm{I}}(K^n)$, а отсюда, учитывая неравенства (1) и (2), получаем

$$N_{\mathrm{I}}(K^n)=N_{\mathrm{III}}(K^n)=N_{\mathrm{IV}}(K^n).$$

---

[2]) Это неравенство и приводимое его доказательство справедливы и для неограниченных выпуклых тел.

[3]) Это неравенство и его доказательство также сохраняются и для неограниченных тел, отличных от E^n; в случае $K^n=E^n$ неравенство (2) очевидно.

Наконец, в работе [3] замечено, что если тело K^n ограничено, то $N_{\mathrm{II}}(K^n)=N_{\mathrm{I}}(K^n)$, что и завершает доказательство теоремы 1.

Теорема 2. *Для любого выпуклого неограниченного тела K^n пространства E^n выполнены соотношения:*

$$N_{\mathrm{IV}}(K^n) \leqslant N_{\mathrm{III}}(K^n) \leqslant N_{\mathrm{I}}(K^n), \tag{3}$$

$$N_{\mathrm{IV}}(K^n) \leqslant N_{\mathrm{II}}(K^n) \leqslant N_{\mathrm{I}}(K^n). \tag{4}$$

Доказательство. Неравенства (3) нами уже доказаны (см. соотношения (1) и (2) и сноски на предыдущих страницах). Докажем неравенства (4) при условии $K^n \neq E^n$ (для $K^n=E^n$ неравенства (4) очевидны). Соотношение $N_{\mathrm{II}}(K^n) \leqslant N_{\mathrm{I}}(K^n)$ доказывается так же, как и соотношение (2), если учесть, что покрытие тела K^n можно осуществить и при помощи открытых множеств, гомотетичных телу K^n с коэффициентом подобия, меньшим единицы (для этого достаточно несколько увеличить, если нужно, коэффициенты гомотетии; в дальнейшем, без особой оговорки, всегда будем подразумевать, что внутренности тел, составляющих I-покрытие тела K^n, также покрывают тело K^n). Далее, пусть источники $S_1, S_2 \ldots, S_q$, расположенные в $E^n \setminus K^n$, освещают извне всю границу $\mathrm{Fr}K^n$ тела K^n. Выберем произвольную точку $O \in \mathrm{Int}K^n$. Тогда пучки параллельных лучей света направления S_iO, $i=1, 2, \ldots, q$, освещают извне всю границу $\mathrm{Fr}K^n$ тела K^n. Действительно, пусть точка $X \in \mathrm{Fr}K^n$ освещается извне источником S_i. Тогда найдется такая точка $Y \in \mathrm{Int}K^n$, что точка X расположена внутри отрезка S_iY. Возьмем на стороне OY треугольника S_iOY такую точку Z, что $XZ \parallel S_iY$. Тогда Z — внутренняя точка тела K^n, и потому точка X является точкой освещенности для пучка лучей направления $\overline{S_iO}$. Итак, пучки направлений $\overline{S_1O}, \ldots, \overline{S_qO}$, освещают извне всю границу $\mathrm{Fr}K^n$ тела K^n, и потому $N_{\mathrm{IV}}(K^n) \leqslant q$, т. е. $N_{\mathrm{IV}}(K^n) \leqslant N_{\mathrm{II}}(K^n)$. Это полностью доказывает теорему 2.

В целях дальнейшего изложения введем некоторые понятия, а также докажем несколько вспомогательных предложений.

Пусть K^n — выпуклое неограниченное тело пространства E^n, а O — какая-нибудь внутренняя точка этого тела. Очевидно, существует хотя бы один луч с началом в точке O, полностью принадлежащий телу K^n. Обозначим через C объединение всех лучей с началом в точке O, полностью принадлежащих телу K^n. Это множество C, представляющее собою, очевидно, выпуклый конус, мы будем называть *вписанным конусом* тела K^n с вершиной в точке O.

Далее, выпуклое тело будем называть *полуограниченным*, если оно не содержит целиком ни одной прямой линии (в частности, всякое ограниченное тело является также и полуограниченным).

Следующие две леммы доказываются без труда.

Лемма 1. *Если луч OX и точка O' принадлежат замкнутому выпуклому множеству K^n, то этому множеству принадлежит и луч $O'X'$, направленный так же, как и луч OX.*

Лемма 2. *Если C_1 и C_2 — вписанные конусы выпуклого тела K^n с вершинами соответственно в точках O_1 и O_2, то C_1 переводится в C_2 при помощи параллельного переноса на вектор O_1O_2.*

Из этой леммы следует, что вписанный конус тела K^n не зависит от выбора его вершины, а поэтому в дальнейшем мы просто будем говорить „вписанный конус тела K^n“.

Лемма 3. *Всякое неограниченное замкнутое выпуклое тело K^n пространства E^n однозначно представляется в виде прямого произведения плоскости E^k некоторого числа измерений $k (o \leqslant k \leqslant n)$ и полуограниченного выпуклого множества L^{n-k}, расположенного в ортогональном дополнении E^{n-k} плоскости E^k. Вписанный конус тела K^n представляет собой прямое произведение плоскости E^k и вписанного конуса множества L^{n-k}.*

Доказательство леммы 3 вытекает из того, что если E^k—плоскость наибольшего числа измерений, содержащаяся в K^n, то плоскость, параллельная E^k и проходящая через произвольную точку $A \in K^n$, целиком принадлежит телу K^n.

Теперь нетрудно заметить, что справедлива

Теорема 3. *Пусть K^n — неограниченное выпуклое тело пространства E^n, а $K^n = E^k \times L^{n-k}$ — представление его в виде прямого произведения плоскости E^k и ортогонального к нему полуограниченного выпуклого множества L^{n-k}. Для тела K^n имеет место соотношение:*

$$N_J(K^n) = N_J(L^{n-k}), \qquad J = \mathrm{I}, \mathrm{II}, \mathrm{III}, \mathrm{IV}.$$

Из теоремы 3 следует, что задачи I — IV достаточно рассмотреть только для полуограниченных тел.

Мы теперь приведем оценки чисел $N_J(K^n)$, $J = \mathrm{I}, \mathrm{II}, \mathrm{III}, \mathrm{IV}$, для неограниченного тела K^n, удовлетворяющего определенным условиям, через аналогичные числа для некоторого ограниченного тела, инвариантно связанного с телом K^n. Для этого мы введем следующие определения.

Пусть K^n — неограниченное выпуклое тело и C — его вписанный конус с вершиной $O \in \mathrm{Int} K^n$. Тело K^n мы будем называть *почти коническим,* если существует такое число $r > 0$, что $K^n \subset U(c, r)$, где $U(c, r)$, есть r-окрестность множества C, т. е. $U(c, r)$ представляет собой совокупность всех точек пространства E^n, находящихся от C на расстоянии $< r$. Обозначим через A несущую плоскость конуса C, а через B ее ортогональное дополнение. Плоскость B имеет размерность $n - q$, где q — размерность конуса C. Проектирование пространства E^n на плоскость B (параллельно плоскости A) мы обозначим через π.

Очевидно, что если тело K^n — почти коническое, то его проекция $\pi(K^n)$ на плоскость B является ограниченным выпуклым (возможно не замкнутым) множеством. Замыкание $\overline{\pi(K^n)}$ этого множества мы обозначим через M^{n-q} и назовем его *ограниченной проекцией* тела K^n. Очевидно, множество M^{n-q} однозначно (с точностью до параллельного переноса) определяется телом K^n, т. е. не зависит от положения плоскости $B \perp A$. Очевидно, далее, что имеет место равенство $\mathrm{Int} M^{n-q} = \pi(\mathrm{Int} K^n)$, где внутренность $\mathrm{Int} M^{n-q}$ множества M^{n-q} понимается, конечно, относительно его несущей плоскости B.

Теорема 4. *Для того, чтобы число $N_\mathrm{I}(K^n)$ было конечным, необходимо и достаточно, чтобы тело K^n было почти коническим. Если это условие выполнено, то*

$$N_\mathrm{I}(K^n) = N_\mathrm{I}(M^{n-q}).$$

Доказательство. Пусть $N_\mathrm{I}(K^n)$ конечно. Тогда существуют такие гомотетии $h_1, h_2, \ldots, h_s$ с коэффициентами < 1, что тела $h_1(K^n), \ldots, h_s(K^n)$ образуют I-покрытие тела K^n. Центр гомотетии h_i обозначим через O_i, а выпуклую оболочку точек $O_1, O_2, \ldots, O_s$ обозначим через L. Далее, через C_Y обозначим конус, получающийся из C параллельным переносом, переводящим вершину O в точку Y, и положим

$$C^* = \bigcup_{Y \in L} C_Y.$$

Покажем, что $K^n \subset C^*$. Допустим противное, и пусть X — точка тела K^n, не принадлежащая множеству C^*. Тогда для любой точки $Y \in L$ луч YX не параллелен никакому лучу конуса C, и потому пересечение луча YX с телом K^n ограничено. Когда точка Y пробегает множество L, прямая YX пробегает некоторый двусторонний конус с вершиной в точке X. Часть этого конуса, содержащую множество L, обозначим через F_1, а симметричную ей часть — через F_2. Так как при $Y \in L$ луч YX имеет с K^n ограниченное пересечение, то (в силу компактности множества L) пересечение $F_2 \cap K^n$ также ограничено. Таким образом, $F_2 \cap K^n$ — ограниченное выпуклое множество. Проведем теперь через точку X гиперплоскость Γ, разделяющую конусы F_1 и F_2. Гиперплоскость Γ является опорной гиперплоскостью выпуклого множества $F_2 \cap K^n$. Проведем и вторую опорную гиперплоскость Γ' множества $F_2 \cap K^n$, параллельную Γ, и обозначим через Z какую-либо общую точку этой гиперплоскости Γ' и тела $F_2 \cap K^n$.

Пусть теперь Y — произвольная точка множества L. Так как $Y \in F_1$, $Z \in F_2$, то луч l, являющийся продолжением отрезка YZ за точку Z, целиком принадлежит F_2. Следовательно,

$$l \cap K^n = (l \cap F_2) \cap K^n = l \cap (F_2 \cap K^n),$$

но гиперплоскость Γ (проходящая через точку X) разделяет конусы F_1 и F_2, так что точки $Z \in F_2$ и $Y \in F_1$ лежат по разные стороны этой гиперплоскости. Следовательно, гиперплоскость Γ', параллельная плоскости Γ и проходящая через точку Z, обладает тем свойством, что обе точки X, Y лежат по одну сторону от Γ'. Поэтому все множество $F_2 \cap K^n$, лежащее по одну сторону от своей опорной гиперплоскости Γ', расположено по ту же сторону от Γ', что и точка X, т. е. по ту же сторону от Γ', что и точка Y. Луч же l, являющийся продолжением отрезка YZ за точку Z, лежит по другую сторону от плоскости Γ'. Из этого следует, что пересечение $l \cap (F_2 \cap K^n)$ состоит только из одной точки Z, т. е.

$$l \cap K^n = l \cap (F_2 \cap K^n) = Z.$$

Таким образом, на луче, исходящем из точки Y и проходящем через Z, точка Z является *последней* точкой тела K^n. Из этого следует, что любая гомотетия h с центром $Y \in L$ и коэффициентом < 1 обладает тем свойством, что $Z \bar{\in} h(K^n)$. В частности,

$$Z \bar{\in} h_i(K^n), \quad i = 1, 2, \ldots, S,$$

а это противоречит тому, что множества $h_1(K^n), \ldots, h_s(K^n)$ образуют I-покрытие тела K^n.

Полученное противоречие показывает, что $K^n \subset C^*$, и потому существует такое $r > 0$, что $K^n \subset U(C, r)$. Итак, если число $N_\mathrm{I}(K^n)$ конечно, то тело K^n — почти коническое.

Остается доказать справедливость заключительного утверждения теоремы, ибо, как было замечено в самом начале, для ограниченного множества M^{n-q} число $N_\mathrm{I}(M^{n-q})$ конечно. При этом на основании леммы 3 и теоремы 3 соотношение $N_{\mathrm{I}}(K^n) = N_{\mathrm{I}}(M^{n-q})$ достаточно доказать для случая, когда K^n является полуограниченным телом. Итак, предположим, что при некотором $r > 0$ полуограниченное тело K^n принадлежит множеству $U(C, r)$.

Пусть $N_{\mathrm{I}}(M^{n-q}) = s$, где полагаем пока, что M^{n-q} отлично от точки, и пусть множества $M_1, \ldots, M_s$ образуют I-покрытие выпуклого множества M^{n-q}. Так как было замечено, что множество M^{n-q} не зависит от положения плоскости B, то мы потребуем, чтобы плоскость B содержала вершину O вписанного конуса C тела K^n. Гомотетию, переводящую множество M^{n-q} в множество $M_i (i = 1, \ldots, s)$, мы продолжим на все пространство E^n и обозначим полученную гомотетию пространства E^n через $h_i (i = 1, \ldots, s)$. Выберем теперь некоторый внутренний луч OX конуса C (относительно его несущей плоскости A).

Пусть Z_0 — произвольная точка множества M^{n-q}, а Z_0Y — луч направления OX. Покажем, что луч Z_0Y пересекается хотя бы с одним из множеств $\mathrm{Int}\, h_i(K^n)$, $i = 1, 2, \ldots, s$. В самом деле, точка Z_0 принадлежит некоторому множеству $\mathrm{Int} M_i$. Далее, множество $M_i = h_i(M^{n-q})$ есть, очевидно, ограниченная проекция тела $h_i(K^n)$, и потому $\mathrm{Int} M_i = \pi(\mathrm{Int} h_i(K^n))$. Следовательно, $Z_0 \in \pi(\mathrm{Int} h_i(K^n))$. Пусть $Z' \in \mathrm{Int} h_i(K^n)$ — такая точка, что $\pi(Z') = Z_0$. Тогда точки Z_0 и Z' находятся в одной q-мерной плоскости A', параллельной A. Обозначим через C' вписанный конус тела $h_i(K^n)$ с вершиной в точке Z', а через $Z'Y'$ — луч, параллельный OX. Так как конус C' получается из C параллельным переносом, то луч $Z'Y'$ является *внутренним* лучом конуса C' (относительно его несущей плоскости A'). Если теперь мы будем удалять точку Y от Z_0 по лучу $Z_0Y \parallel Z'Y'$, то угол $YZ'Y'$ будет стремиться к нулю. При этом точка Y будет все время находиться в плоскости A' (ибо $Z_0 \in A'$ и, значит, $Z_0Y \subset A'$). Следовательно, для достаточно далекой от Z_0 точки Y_0 луча Z_0Y весь луч $Z'Y_0$ будет принадлежать конусу C', а значит, и телу $h_i(K^n)$. Так как $Z' \in \mathrm{Int} h_i(K^n)$, то отсюда следует, что $Y_0 \in \mathrm{Int} h_i(K^n)$.

Итак, для любой точки $Z_0 \in M^{n-q}$ найдется такой номер $i (= 1, \ldots, s)$ и такая точка Y_0 луча Z_0Y, параллельного OX, что $Y_0 \in \mathrm{Int} h_i(K^n)$. Иными словами, для любой точки $Z_0 \in M^{n-q}$ найдется на луче $Z_0Y \parallel OX$ такая точка Y_0, что

$$Y_0 \in \mathrm{Int} h_1(K^n) \cup \mathrm{Int} h_2(K^n) \cup \ldots \cup \mathrm{Int} h_s(K^n). \tag{5}$$

Так как множество, стоящее в правой части включения (5), открыто, то существует такое $\varepsilon > 0$, что ε-окрестность точки Y_0 также содержится в этом множестве:

$$U(Y_0, \varepsilon) \subset \mathrm{Int} h_1(K^n) \cup \ldots \cup \mathrm{Int} h_s(K^n),$$

и подавно

$$U(Y_0, \varepsilon) \subset h_1(K^n) \cup \ldots \cup h_s(K^n).$$

Обозначим теперь через $V(Z_0)$ множество всех точек $Z \in M^{n-q}$, удаленных от Z_0 менее чем на ε, а через $a(Z_0)$ — длину отрезка Z_0Y_0. Тогда $V(Z_0)$ есть открытое подмножество множества M^{n-q}, содержащее Z_0, причем параллельный перенос в направлении луча OX на расстояние $a(Z_0)$ переводит множество $V(Z_0)$ внутрь шара $U(Y_0, \varepsilon)$, т. е. внутрь множества $h_1(K^n) \cup \ldots \cup h_s(K^n)$. Так как параллельный перенос в направлении луча OX (на любое расстояние) переводит множество K^n (а значит, и каждое из множеств $h_i(K^n)$) в себя (это

непосредственно вытекает из леммы 1), то справедливо следующее утверждение:

Для любой точки $Z \in M^{n-q}$ найдется такое открытое (в M^{n-q}) множество $V(Z)$, содержащее Z, и такое число $a(Z)$, что параллельный перенос p в направлении луча OX на любое расстояние $\geqslant a(Z)$ удовлетворяет условию $p(V(Z)) \subset h_1(K^n) \cup \ldots \cup h_s(K^n)$. Такие множества $V(Z)$ и числа $a(Z)$ мы выберем для всех точек $Z \in M^{n-q}$.

В силу компактности множества M^{n-q}, из открытого покрытия $\{V(Z)\}$ этого множества можно выбрать конечное подпокрытие, т. е. можно выбрать, таким образом, точки $Z_1, \ldots, Z_t$ в множестве M^{n-q}, что $V(Z_1) \cup \ldots \cup V(Z_t) = M^{n-q}$. Если теперь обозначить через a' наибольшее из чисел $a(Z_1), \ldots, a(Z_t)$, то, в силу сказанного выше, параллельный перенос p' в направлении луча OX на расстояние a' удовлетворяет для каждого $i = 1, 2, \ldots, t$ включению $p'(V(Z_i)) \subset \subset h_1(K^n) \cup \ldots \cup h_s(K^n)$, т. е. выполняется включение $p'(M^{n-q}) \subset h_1(K^n) \cup \ldots \cup h_s(K^n)$.

Из леммы 1 теперь непосредственно вытекает включение

$$p'\Big(\bigcup_{Y \in M^{n-q}} C_Y\Big) \subset h_1(K^n) \cup \ldots \cup h_s(K^n). \tag{6}$$

Пусть теперь r — такое число, что $K^n \subset U(c, r)$. Так как OX — *внутренний* луч конуса C, то существует такое число $a'' > 0$, что параллельный перенос p'' в направлении OX на расстоянии a'' обладает следующим свойством: для любой точки $X' \in A$, расположенной на расстоянии $\leqslant r$ от конуса C, выполнено включение $p''(X') \in C$. Докажем, что выполнено включение

$$p''(K^n) \subset \bigcup_{Y \in M^{n-q}} C_Y. \tag{7}$$

В самом деле, пусть $Z_0 \in K^n$ и пусть Q — такая точка конуса C, что $\rho(Z_0, Q) < r$. Положим $Y_0 = \pi(Z_0)$ и проведем из точки Q вектор $\overline{QR}$, равный $\overline{OY_0}$. Так как $Q \in C = C_0$, то $R \in C_Y$. Далее, так как точки O, Y_0 принадлежат множеству M^{n-q}, то вектор $\overline{OY_0}$ ортогонален плоскости A; значит, и вектор $\overline{QR}$ ортогонален плоскости A. Так как, далее, $\pi(Q) = O$ и $\overline{QR} = \overline{OY_0}$, то $\pi(R) = Y_0$, т. е. $\pi(R) = \pi(Z_0)$, и потому вектор $\overline{RZ_0}$ параллелен плоскости A. Следовательно, QZ_0 — гипотенуза прямоугольного треугольника QRZ_0, и потому $\rho(Z_0, R) < \rho(Q, Z_0) < r$. Так как, наконец, точка Z_0 расположена с конусом C_{Y_0} в одной плоскости, параллельной A (ибо $\pi(Z_0) = Y_0$), и расстояние от Z_0 до конуса C_{Y_0} меньше r (ибо $\rho(Z_0, R) < r$, где $R \in C_{Y_0}$), то в силу определения переноса p'' получим:

$$p''(Z_0) \in C_{Y_0} \subset \bigcup_{Y \in M^{n-q}} C_Y.$$

Тем самым включение (7) доказано.

Обозначим теперь через p перенос в направлении луча OX на расстояние $a' + a''$, т. е. $p = p' \cdot p''$. Тогда из включений (6), (7) вытекает, что $p(K^n) = (p' \cdot p'')(K^n) = p'(p''(K^n)) \subset p'\Big(\bigcup_{Y \in M^{n-q}} C_Y\Big) \subset h_1(K^n) \cup \ldots \cup h_s(K^n)$, т. е. $K^n \subset p^{-1}(h_1(K^n) \cup \ldots \cup h_s(K^n)) = p^{-1}h_1(K^n) \cup \ldots \cup p^{-1}h_s(K^n)$. Так как каждое из тел $p^{-1}h_i(K^n)$, $i=1, \ldots, s$, очевидно, получается из K^n гомотетией с коэффициентом <1, то тем самым доказано соотношение $N_{\mathrm{I}}(K^n) \leqslant s$, т. е. $N_{\mathrm{I}}(K^n) \leqslant N_{\mathrm{I}}(M^{n-q})$. Для доказательства обратного неравенства $N_{\mathrm{I}}(M^{n-q}) \leqslant N_{\mathrm{I}}(K^n)$, достаточно заметить, что если тела $K_1, \ldots, K_t$ образуют I-покрытие тела K^n, то множества $\overline{\pi(K_1)}, \ldots, \overline{\pi(K_t)}$ образуют некоторое покрытие множества $\overline{\pi(K^n)}$, причем I-покрытие, ибо, очевидно, множества $\overline{\pi(K_1)}, \ldots, \overline{\pi(K_t)}$ гомотетичны множеству $\overline{\pi(K^n)}$ с коэффициентом <1. Итак, если множество M^{n-q} отлично от точки, то числа $N_{\mathrm{I}}(K^n)$ и $N_{\mathrm{I}}(M^{n-q})$ совпадают. Если же M^{n-q} есть точка, то $n-q=0$, т. е. $q=n$ и, следовательно, плоскость A совпадает с E^n, а множество $\bigcup\limits_{Y\in M^{n-q}} C_Y$ совпадает с C. Поэтому $p''(K^n) \subset C$ (см. (7)), так как далее для любой гомотетии h с центром O мы имеем $h(K^n) \supset h(C) = C$, т. е. $h(K^n) \supset p''(K^n)$, и потому $(p'')^{-1}h(K^n) \supset K^n$, то в рассматриваемом случае $N_{\mathrm{I}}(K^n)=1$. Таким образом, равенство $N_{\mathrm{I}}(K^n) = N_{\mathrm{I}}(M^{n-q})$ остается в силе и для этого случая, а это полностью доказывает теорему 4.

Применяя теоремы 1 и 2 к только что доказанной теореме 4, получаем

Следствие. *Для любого почти конического тела K^n выполнено соотношение:*

$$N_J(K^n) \leqslant N_J(M^{n-q}), \quad J = \mathrm{II},\ \mathrm{III},\ \mathrm{IV}.$$

Ниже дается необходимый и достаточный признак того, чтобы неограниченное выпуклое тело K^n было почти коническим. Этот признак дает иной подход к рассмотрению почти конических тел. Для его формулировки введем следующие определения.

Пусть K^n — замкнутое выпуклое тело пространства E^n. Гиперплоскость Γ пространства E^n будем называть *асимптотической гиперплоскостью* тела K^n, если: 1) множество $\mathrm{Int}K^n$ расположено по одну сторону гиперплоскости Γ; 2) как угодно близко к Γ имеются точки тела K^n и 3) пересечение $\Gamma \cap K^n$ либо пусто, либо неограниченно. Очевидно, что асимптотические гиперплоскости могут существовать только у неограниченных тел. Для каждой асимптотической гиперплоскости Γ мы обозначим через E_Γ то из двух полупространств, определенных гиперплоскостью Γ, в котором расположено тело K^n. Далее, обозначим через M множество всех асимптотических гиперплоскостей тела K^n и положим:

$$\widetilde{K}^n = \begin{cases} E^n, & \text{если множество } M \text{ пусто,} \\ \bigcap\limits_{\Gamma\in M} E_\Gamma, & \text{если множество } M \text{ непусто.} \end{cases}$$

Тело $\widetilde{K}^n$ мы будем называть *телом асимптотического захвата* для тела K^n, а его границу $\mathrm{Fr}\widetilde{K}^n$ — *асимптотикой* тела K^n. Вписанный конус тела $\widetilde{K}^n$ обозначим через $\widetilde{C}$.

Пусть теперь K^n — неограниченное выпуклое тело и $K^n = E^k \times L^{n-k}$ — представление его в виде прямого произведения плоскости E^k и ортогонального к нему полуограниченного выпуклого множества L^{n-k}. Пусть, далее, C_L и $\widetilde{C}_L$ — соответствующие вписанные конусы множеств L^{n-k} и $\widetilde{L}^{n-k}$.

Теорема 5. *Для того, чтобы неограниченное выпуклое тело K^n пространства E^n было почти коническим, необходимо и достаточно, чтобы вписанные конусы C_L и $\widetilde{C}_L$ были либо оба одномерными, либо получались друг из друга параллельным переносом.*

Доказательство теоремы 5 не приводим ввиду его простоты.

Автор пользуется случаем выразить признательность В. Г. Болтянскому за ценные советы, улучшившие формулировки и доказательства настоящей статьи, а также И. Ц. Гохбергу и А. С. Маркусу за внимание.

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

1. *И. Ц. Гохберг* и *А. С. Маркус,* Одна задача о покрытии выпуклых фигур подобными, Изв. Молд. фил. АН СССР, № 10 (76), 87 (1960).
2. *В. Г. Болтянский,* Задача об освещении границы выпуклого тела, Изв. Молд. фил. АН СССР, № 10 (76), 79 (1960).
3. *В. Н. Визитей,* Задачи о покрытии и освещении для неограниченных выпуклых фигур, Изв. АН МССР, № 10 (88), 3 (1962).
4. *П. С. Александров,* Комбинаторная топология, М.—Л., Гостехиздат, 1947.
5. *F. W. Lewi,* Überdeckung eines Eibereiches durch Parallelverschiebung eines offenen Kerns, Archiv der Mathematik, 6, Nr. 5, (1955), 369—370.

П. С. СОЛТАН

РЕЛАТИВ ЛА ПРОБЛЕМЕЛЕ ДЕ АКОПЕРИРЕ ШИ ИЛУМИНАРЕ АЛЕ КОРПУРИЛОР КОНВЕКСЕ

Резумат

Се екзаменязэ проблемеле луй Гохберг—Маркус (везь [1]), а луй Болтянский (везь [2]) ши алтеле доуэ аналоаже лор (везь [3] ши проблема III а артиколулуй актуал) пентру корпуриле конвексе але спациулуй euклидиан E^n, прекум ши нумереле че карактеризязэ ачесте проблеме. Се стабилеште критериул нечесар ши суфичиент пентру ка нумэрул луй Гохберг-Маркус сэ фие финит. Яр ын виртутя ачестуй критериу се обцин пентру о фамилие бине детерминатэ де корпурь конвексе немэржините анумите евалуэрь пентру нумэрул луй Болтянский ши челелалте доуэ нумере.

Поступило
1.VII 1962 г.

Б. А. ЩЕРБАКОВ

О КЛАССАХ УСТОЙЧИВЫХ ПО ПУАССОНУ ДВИЖЕНИЙ. ПСЕВДОРЕКУРРЕНТНЫЕ ДВИЖЕНИЯ

В общей теории динамических систем [1, 2], наряду с другими основными классами движений, исследуются движения, устойчивые по Пуассону. Такие движения рассматривал еще А. Пуанкаре [3]. Различают несколько типов устойчивых по Пуассону движений: равномерно устойчивые по Пуассону, почти рекуррентные, рекуррентные, почти периодические, периодические, стационарные. Перечисленные типы устойчивых по Пуассону движений были введены в общую теорию динамических систем не сразу, а постепенно, в ходе развития этой теории, при этом различные типы движений были введены в исследованиях, которые отличаются характером рассмотренных в них задач и теми целями, которые в них преследовались. Дж. Д. Биркгоф [4], ставивший своей целью изучить возможные типы движений и связь между ними, ввел центральные и рекуррентные движения. Его исследования, посвященные этим классам движений, явились основанием общей теории динамических систем. Позднее М. В. Бебутов [5], построив в пространстве непрерывных функций динамическую систему, показал, что некоторым классам функций, определяющим движения в этой динамической системе, соответствуют новые типы устойчивых по Пуассону движений. Так им были введены равномерно устойчивые по Пуассону и почти рекуррентные движения. Почти периодические движения впервые были рассмотрены Ф. Франклином [6]. Несмотря на тесную связь между указанными типами движений, не существует классификации этих движений, основанной на определениях, которые содержали бы явно как то общее, что объединяет все эти движения, так и те признаки, которые отличают тот иной тип устойчивых по Пуассону движений от всех остальных типов.

В настоящей статье вводится понятие π-функции движения. Это некоторая функция трех действительных переменных, которая обладает, в частности, тем свойством, что для данного движения она определяется однозначно (если она существует). Устанавливается, что характерной особенностью устойчивых по Пуассону движений является то, что для них π-функция существует, а ограниченность этой функции по той или иной совокупности ее аргументов является характерной особенностью того или иного типа устойчивых по Пуассону движений. Показано, кроме того, что такая концепция приводит к определению нового типа движений, названных псевдорекуррентными. Далее изучается ряд свойств псевдорекуррентных движений. Выясняется, в частности, что класс псевдорекуррентных движений, с одной стороны, содержится в классе устойчивых по Пуассону движений, а с другой — содержит в себе класс равномерно устойчивых по Пуассону движений и класс рекуррентных движений, не совпадая ни с одним из этих классов даже в том случае, когда динамическая система задана в компактном пространстве.

Основные результаты настоящей статьи без доказательств изложены в [7]. Они были доложены на семинаре, которым руководит профессор В. В. Немыцкий. Автор глубоко благодарен профессору В. В. Немыцкому за внимание и ценные советы.

§ 1. Характеристика различных типов устойчивых по Пуассону движений

Динамической системой [1, 2, 8] называется совокупность (R, I, f), состоящая из метрического пространства R, называемого *фазовым пространством* данной динамической системы, числовой прямой I и функции f, которая каждой паре p и t, $p \in R$ и $t \in I$ ставит в соответствие некоторую определенную точку $f(p, t)$ из R и которая обладает следующими свойствами:

1. $f(p, o) = p$.
2. $f(f(p, t_1), t_2) = f(p, t_1 + t_2)$.
3. $f = f(p, t)$ непрерывна по совокупности переменных p и t. Функция $f(p, t)$ при фиксированном p называется *движением*, а множество $\bigcup\limits_{t \in I} f(p, t)$ обозначается через $f(p, I)$ и называется *траекторией движения* $f(p, t)$. Движение однозначно определяется заданием динамической системы и точки ее фазового пространства.

Динамическая система называется *компактной*, если ее фазовое пространство компактно [2].

Пусть (R, I, f) — произвольная динамическая система. Число τ называется *ε-смещением* точки $q \in R$, если $\rho[f(q, \tau), q] \leqslant \varepsilon$. Пусть p — любая точка пространства R, а ε, t и l — любая тройка чисел, причем $\varepsilon > 0$, $t \in I$, $l \geqslant 0$. Наименьшее (наибольшее) из всех ε-смещений точки $f(p,t)$, содержащихся в промежутке $[l, +\infty)$ $((-\infty, -l])$, обозначим через $\tau^{\omega}_p(\varepsilon, t, l)$ $(\tau^{\alpha}_p(\varepsilon, t, l))$. Ясно, что для данной тройки чисел $\varepsilon > 0$, $t \in I$ и $l \geqslant 0$ и для данной точки $p \in R$ число $\tau^{\omega}_p(\varepsilon, t, l)$ $(\tau^{\alpha}_p(\varepsilon, t, l))$ существует тогда и только тогда, когда множество всех ε-смещений точки $f(p, t)$, содержащихся в промежутке $[l, +\infty)$ $((-\infty, -l])$, непусто.

Определение 1. Функцию переменных ε, t и l, определенную для всех $\varepsilon > 0$, $t \in I$ и $l \geqslant 0$, будем называть *ω-функцией* (*α-функцией*) движения $f(p, t)$ и обозначать ее через $\omega = \omega_p(\varepsilon, t, l)$ $(\alpha = \alpha_p(\varepsilon, t, l))$, если для любой тройки чисел ε, t и l, являющихся значениями соответствующих переменных, $\omega_p(\varepsilon, t, l) = \tau^{\omega}_p(\varepsilon, t, l) - l$ $(\alpha_p(\varepsilon, t, l) = -\tau^{\alpha}_p(\varepsilon, t, l) - l)$.

Лемма 1. Имеют место следующие предложения:

а. *ω-функция (α-функция) движения $f(p, t)$ либо не существует, либо определяется однозначно.*

b. *ω-функция (α-функция) движения $f(p, t)$ существует тогда и только тогда, когда для любой тройки чисел $\varepsilon > 0$, $t \in I$ и $l \geqslant 0$ существует $\tau^{\omega}_p(\varepsilon, t, l)$ $(\tau^{\alpha}_p(\varepsilon, t, l))$.*

c. *ω-функция (α-функция) движения $f(p, t)$ существует тогда и только тогда, когда для любой тройки чисел $\varepsilon > 0$, $t \in I$ и $l \geqslant 0$ множество всех ε-смещений точки $f(p, t)$, содержащихся в промежутке $[l, +\infty)$ $((-\infty, -l])$, непусто.*

d. *ω-функция (α-функция) движения $f(p, t)$ неотрицательна (если она существует).*

Предложения a. — d. вытекают непосредственно из определения 1.

Теорема 1. *Движение $f(p, t)$ устойчиво по Пуассону в положительном (отрицательном) направлении тогда и только тогда, когда ω-функция (α-функция) движения $f(p, t)$ существует.*

Доказательство. Хорошо известно [1], что движение $f(p, t)$ устойчиво по Пуассону в положительном направлении тогда и только тогда, когда всякая точка траектории $f(p, I)$ устойчива по Пуассону в положительном направлении или, что то же самое, когда для любой тройки чисел $\varepsilon > 0$, $t \in I$ и $l \geqslant 0$ множество всех ε-смещений точки $f(p, t)$, содержащихся в промежутке $[l, +\infty)$, непусто. Последнее же условие, согласно предложению c. леммы 1, равносильно условию существования ω-функции движения $f(p, t)$. Аналогично доказывается критерий устойчивости по Пуассону движения $f(p, t)$ в отрицательном направлении.

Определение 2. Функция $F(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ действительных переменных $x_1, x_2, \ldots, x_n$ называется *ограниченной сверху (снизу) по совокупности переменных $x_l, x_j, \ldots, x_k$*, если для любых фиксированных значений всех остальных переменных существует число T такое, что неравенство $F(x_1, x_2, \ldots x_n) \leqslant T$ $(F(x_1, x_2, \ldots, x_n) \geqslant T)$ выполняется при всех значениях переменных $x_l, x_j, \ldots, x_k$ и данных фиксированных значениях остальных переменных. Функция $F(x_1, x_2 \ldots, x_n)$ называется *ограниченной по совокупности переменных $x_l, x_j, \ldots, x_k$*, если она одновременно ограничена и сверху и снизу по той же совокупности переменных. Функция $F(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, ограниченная по совокупности, состоящей из одной переменной x_l, называется еще *ограниченной по переменной x_l*.

Всюду в дальнейшем условие „функция $F(x_1, x_2, \ldots, x_n)$существует и она ограничена (ограничена сверху, ограничена снизу) по совокупности переменных $x_l, x_j, \ldots, x_k$“ формулируется короче, а именно: „Функция $F(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ ограничена (ограничена сверху, ограничена снизу) по совокупности переменных $x_l, x_j, \ldots, x_k$“.

Как будет установлено ниже, для характеристики любого типа устойчивых по Пуассону движений существенную роль играет условие ограниченности ω-функции (α-функции) по той или иной совокупности аргументов. В связи с этим рассмотрим несколько признаков такого рода ограниченности этих функций. Доказательства этих признаков мы приведем только для ω-функции. Соответствующие признаки для α-функции доказываются аналогичным образом.

Ввиду предложения d. леммы 1, для того, чтобы ω-функция (α-функция) движения $f(p, t)$ была ограниченной по той или иной совокупности своих аргументов, достаточно, чтобы она была ограниченной сверху по той же совокупности аргументов.

Лемма 2. *ω-функция (α-функция) движения $f(p,t)$ ограничена по переменной t тогда и только тогда, когда для любой пары чисел $\varepsilon > 0$ и $l \geqslant 0$ можно подобрать неотрицательное T такое, что какова бы ни была точка $q \in f(p, I)$, на отрезке $[l, l+T]$ $([-l-T, -l])$ найдется ε-смещение точки q.*

Доказательство. Предположим, что ω-функция движения $f(p, t)$ ограничена по переменной t. Выберем произвольно пару чисел $\varepsilon > 0$ и $l \geqslant 0$. Найдется неотрицательное T такое, что неравенство $0 \leqslant \omega_p(\varepsilon, t, l) \leqslant T$, где ε и l — данная пара чисел, выполняется при всех $t \in I$. Поэтому для любого действительного t число $l + \omega_p(\varepsilon, t, l)$, являющееся ε-смещением точки $f(p, t)$, принадлежит отрезку $[l, l+T]$. Следовательно, для каждой точки траектории $f(p, I)$ найдется ε-смещение, принадлежащее отрезку $[l, l+T]$.

Обратно, пусть $\varepsilon > 0$ и $l \geqslant 0$ — любая пара чисел. Предположим, что существует $T \geqslant 0$ такое, что какова бы ни была точка $q \in f(p, I)$, на отрезке $[l, l+T]$ найдется ε-смещение точки q. Тогда при всех действительных t выполняется неравенство $\tau_p^\omega(\varepsilon, t, l) \leqslant l + T$, где ε и l — данная пара чисел. Отсюда следует, что ω-функция движения $f(p, t)$ ограничена по переменной t.

Лемма 3. *ω-функция (α-функция) движения $f(p, t)$ ограничена по переменной l тогда и только тогда, когда для любой пары чисел $\varepsilon > 0$ и $t \in I$ можно подобрать неотрицательное T такое, что на каждом отрезке длины T, принадлежащем промежутку $[0, +\infty)$ $((-\infty, 0])$, найдется ε-смещение точки $f(p, t)$.*

Доказательство. Предположим, что ω-функция движения $f(p, t)$ ограничена по переменной l. Выберем произвольно $\varepsilon > 0$ и $t \in I$. Найдется неотрицательное T такое, что неравенство $0 \leqslant \omega_p(\varepsilon, t, l) \leqslant T$, где ε и t — данная пара чисел, выполняется при всех неотрицательных l. Поэтому на любом отрезке $[l, l+T]$, где $l \geqslant 0$, содержится, по меньшей мере, одно ε-смещение точки $f(p, t)$ (например, число $l + \omega_p(\varepsilon, t, l)$).

Обратно, пусть для произвольно выбранной пары чисел $\varepsilon > 0$ и $t \in I$ нашлось неотрицательное T такое, что на любом отрезке $[l, l+T]$, где $l \geqslant 0$, содержится ε-смещение точки $f(p, t)$. Тогда $\tau_p^\omega(\varepsilon, t, l) \leqslant l + T$, каково бы ни было неотрицательное l. Отсюда следует, что ω-функция движения $f(p, t)$ ограничена по переменной l.

Лемма 4. *ω-функция (α-функция) движения $f(p, t)$ ограничена по совокупности переменных t, l тогда и только тогда, когда для любого положительного ε можно подобрать такое неотрицательное T, что какова бы ни была точка q траектории $f(p, I)$, на любом отрезке длины T, принадлежащем промежутку $(0, +\infty]$ $((-\infty, 0])$, найдется ε-смещение точки q.*

Доказательство. Предположим, что ω-функция движения $f(p, t)$ ограничена по совокупности переменных t, l. Выберем произвольное $\varepsilon > 0$. Найдется неотрицательное T такое, что неравенство $0 \leqslant \omega_p(\varepsilon, t, l) \leqslant T$ выполняется при данном ε и любых t и l, $t \in I$ и $l \geqslant 0$. Поэтому какова бы ни была точка q траектории $f(p, I)$, на любом отрезке $[l, l+T]$, где $l \geqslant 0$, найдется ε-смещение точки q (если $q = f(p, t)$, то таким ε-смещением является, например, число $l + \omega_p(\varepsilon, t, l)$).

Обратно, пусть для произвольно выбранного $\varepsilon > 0$ нашлось $T \geqslant 0$ такое, что какова бы ни была точка q траектории $f(p, I)$, на любом отрезке вида $[l, l+T]$, где $l \geqslant 0$, найдется ε-смещение точки q. Тогда неравенство $\tau_p^\omega(\varepsilon, t, l) \leqslant l + T$ выполняется при всех $t \in I$ и $l \geqslant 0$. Отсюда следует, что ω-функция ограничена по совокупности переменных t, l.

Определение 3. *π-функцией* движения $f(p, t)$ будем называть функцию $\pi = \pi_p(\varepsilon, t, l)$ переменных ε, t и l, определенную следующим соотношением:

$$\pi_p(\varepsilon, t, l) = \begin{cases} \omega_p(\varepsilon, t, l) \text{ при } \varepsilon > 0, \ t \in I \text{ и } l \geqslant 0. \\ \alpha_p(\varepsilon, t, -l) \text{ при } \varepsilon > 0, \ t \in I \text{ и } l < 0. \end{cases}$$

Лемма 5. Имеют место следующие предложения:

a. *π-функция движения $f(p, t)$ либо не существует, либо определяется однозначно.*

b. *π-функция движения $f(p, t)$ существует тогда и только тогда, когда существует каждая из функций $\omega=\omega_p(\varepsilon, t, l)$ и $\alpha=\alpha_p(\varepsilon, t, l)$.*

c. *π-функция движения $f(p, t)$ неотрицательна.*

d. *π-функция движения $f(p, t)$ ограничена по той или иной совокупности своих аргументов тогда и только тогда, когда каждая из функций $\omega=\omega_p(\varepsilon, t, l)$ и $\alpha=\alpha_p(\varepsilon, t, l)$ ограничена в том же смысле.*

Предложения a. — d. вытекают непосредственно из определения 3.

Понятие π-функции движения позволяет охарактеризовать различные типы устойчивых по Пуассону движений с единой точки зрения, а именно с точки зрения существования π-функции данного движения и ее ограниченности в том или ином смысле. Именно такие характеристики представляют собой предложения, которые формулируются ниже.

Из теорем 1 и предложения b. леммы 5 вытекает

Теорема 2. *Движение $f(p, t)$ устойчиво по Пуассону тогда и только тогда, когда π-функция движения $f(p, t)$ существует.*

Теорема 3. *Движение $f(p, t)$ почти рекуррентно тогда и только тогда, когда π-функция движения $f(p, t)$ ограничена по переменной l.*

Доказательство. Как известно [5], если движение $f(p, t)$ почти рекуррентно, то для любой точки $q \epsilon f(p, I)$ движение $f(q, t)$ также почти рекуррентно. Поэтому необходимым и достаточным условием того, чтобы движение $f(p, t)$ было почти рекуррентным, является следующее условие: для любого положительного ε и любой точки q траектории $f(p, I)$ существует относительно плотное множество ε-смещений. Но это условие, согласно лемме 3, является критерием ограниченности по переменной l обеих функций $\omega=\omega_p(\varepsilon, t, l)$ и $\alpha=\alpha_p(\varepsilon, t, l)$ и, следовательно, критерием ограниченности в том же смысле π-функции движения $f(p, t)$.

Теорема 4. *Движение $f(p, t)$ рекуррентно тогда и только тогда, когда π-функция движения $f(p, t)$ ограничена по совокупности переменных t, l.*

Доказательство. Как известно [1], движение $f(p, t)$ называется рекуррентным, если для любого $\varepsilon > 0$ существует $T > 0$ такое, что для любой пары чисел u и v найдется w такое, что $w \epsilon [v, v+T]$ и $\rho[f(p, u), f(p, w)] \leqslant \varepsilon$.

Предположим, что π-функция движения $f(p, t)$ ограничена по совокупности переменных t, l. Это означает, что как ω-функция движения $f(p, t)$, так и α-функция того же движения ограничена по совокупности переменных t, l. Пусть ε — любое положительное число. Подберем неотрицательное T такое, что какова бы ни была точка q траектории $f(p, I)$, на любом отрезке длины T найдется ε-смещение точки q. В силу леммы 4, такое число T существует. Выберем произвольно пару чисел u и v. Пусть τ является ε-смещением точки $f(p, u)$, содержащимся на отрезке $[v-u, v-u+T]$. Тогда в качестве w, участвующего в определении рекуррентности движения, можно выбрать число $u+\tau$.

Обратно, пусть движение $f(p, t)$ рекуррентно. Выберем произвольно положительное число ε. Для данного ε находим число T, участвующее в определении рекуррентного движения. Пусть l—любое действительное число, а $q=f(p, t)$—произвольная точка траектории $f(p, I)$. Для пары t и $t+l$ найдется такое w, что $w \epsilon [t+l, t+l+T]$ и $\rho[f(p, t), f(p, w)] \leqslant \varepsilon$, откуда следует, что $w-t$ является ε-смещением точки $f(p, t)$, содержащимся на отрезке $[l, l+T]$. Итак, для любого положительного ε можно подобрать $T \geqslant 0$ такое, что какова бы ни была точка q траектории $f(p, I)$, на любом отрезке длины T найдется ε-смещение точки. Согласно лемме 4, обе функции $\omega=\omega_p(\varepsilon, t, l)$ и $\alpha=\alpha_p(\varepsilon, t, l)$ ограничены по совокупности переменных t, l. Следовательно, π-функция движения $f(p, t)$ ограничена в том же смысле.

Теорема 5. *Движение $f(p, t)$ является особым (т. е. периодическим или стационарным) тогда и только тогда, когда π-функция движения $f(p, t)$ ограничена по совокупности переменных ε, t, l.*

Доказательство. Покажем, что движение $f(p, t)$ является особым, если из двух функций $\omega=\omega_p(\varepsilon, t, l)$ и $\alpha=\alpha_p(\varepsilon, t, l)$, определяющих π-функцию движения $f(p, t)$, хотя бы одна ограничена по переменной ε. Для определенности предположим, что по этой переменной ограниченной является функция $\omega=\omega_p(\varepsilon, t, l)$. Пусть ε_n $(n=1, 2, \ldots)$— положительная последовательность, сходящаяся к нулю. Рассмотрим последовательность $\tau_n=\tau_p^\omega(\varepsilon_n, 0, 1)$. Так как функция $\omega=\omega_p(\varepsilon, t, l)$ ограничена по переменной ε, существует T такое, что $\tau_n \epsilon [1, 1+T]$ при всех натуральных n. Поэтому можно считать, что последовательность τ_n сходится. Пусть $\tau_n \to \tau$. Легко убедиться, что $f(p, \tau)=p$ (для этого достаточно в неравенстве $\rho[f(p, \tau_n)p] \leqslant \varepsilon_n$ перейти к пределу при $n \to \infty$). Учитывая, что $\tau > 0$, заключаем, что движение $f(p, t)$ является особым.

Обратно, пусть движение $f(p, t)$ является особым. Тогда найдется положительное T такое, что для любого целого k соотношение $f(p, t+kT)=f(p, t)$ выполняется при всех действительных t. Выберем произвольно тройку чисел $\varepsilon > 0$, $t \epsilon I$ и $l \geqslant 0$. Найдется целое k такое, что $kT \epsilon [l, l+T]$. Так как kT является ε-смещением точки $f(p, t)$ и $kT \epsilon [l, l+T]$, число $\tau_p^\omega(\varepsilon, t, l)$ не превосходит $l+T$. Отсюда заключаем (учитывая, что T не зависит от выбора тройки ε, t, l), что ω-функция движения $f(p, t)$ ограничена по совокупности переменных ε, t, l. Аналогично убеждаемся, что и α-функция движения $f(p, t)$ ограничена по той же совокупности переменных.

Из приведенного доказательства теоремы 5 вытекает

Следствие 1. *Для того, чтобы π-функция движения $f(p, t)$ была ограниченной по совокупности переменных ε, t, l, необходимо и достаточно, чтобы из двух функций $\omega=\omega_p(\varepsilon, t, l)$ и $\alpha=\alpha_p(\varepsilon, t, l)$ хотя бы одна была ограниченной по переменной ε.*

Таким образом, если π-функция движения $f(p, t)$ ограничена по той или иной совокупности переменных, то, ввиду сформулированного выше следствия, могут представиться лишь следующие различные случаи из всех возможных:

1. π-функция движения $f(p, t)$ ограничена по переменной t.
2. π-функция движения $f(p, t)$ ограничена по переменной l.
3. π-функция движения $f(p, t)$ ограничена по совокупности переменных t, l.
4. π-функция движения $f(p, t)$ ограничена по совокупности переменных ε, t, l.

Согласно теоремам 3—5, каждый из этих случаев, кроме первого, характеризует тот или иной известный тип устойчивых по Пуассону движений. Поэтому условия 2.—4. можно принять за исходные определения соответствующих типов движений. Что же касается первого случая, то он приводит к определению нового класса устойчивых по Пуассону движений, который характеризуется тем, что для движений этого класса π-функция ограничена по переменной t. Ряд свойств этого класса движений, названных псевдорекуррентными, изучается в § 2.

Заметим, что теоремы 3—5 остаются верными, если в их формулировках выражение „π-функция" заменить выражением „ω-функция" или выражением „α-функция", так как имеет место

Теорема 6. *Для того, чтобы π-функция движения $f(p, t)$ была ограниченной по той или иной совокупности своих аргументов, необходимо и достаточно, чтобы из двух функций $\omega = \omega_p(\varepsilon, t, l)$ и $\alpha = \alpha_p(\varepsilon, t, l)$ хотя бы одна была ограниченной в том же смысле.*

Для доказательства этой теоремы нам потребуется

Лемма 6. *Пусть $\varepsilon > 0$. Если для любой точки q траектории $f(p, I)$ найдется ε-смещение точки q, принадлежащее отрезку $[l, L]$, то для любой точки q той же траектории найдется ε-смещение точки q, принадлежащее отрезку $[-L, -l]$.*

Доказательство леммы. Предположим, что условия леммы выполняются и пусть $f(p, t_0)$ есть произвольная точка траектории $f(p, I)$. Рассмотрим последовательность τ_n $(n=0, 1, \ldots)$, где τ_0 есть ε-смещение точки $f(p, t_0)$, принадлежащее отрезку $[l, L]$, τ_1 есть ε-смещение точки $f(p, t_0-\tau_0)$, принадлежащее отрезку $[l, L]$, и вообще, τ_n есть ε-смещение точки $f(p, t_0-\tau_{n-1})$, принадлежащее отрезку $[l, L]$. Последовательность τ_n можно считать сходящейся ввиду того, что она является ограниченной. Пусть $\tau_n \to \tau$. Ясно, что $\tau \in [l, L]$. Если перейти к пределу при $n \to \infty$ в неравенстве $\rho[f(p, t_0-\tau_{n-1}+\tau_n), f(p, t_0-\tau_{n-1})] \leqslant \varepsilon$, то окажется, что $\rho[f(p, t_0), f(p, t_0-\tau)] \leqslant \varepsilon$, т. е. число $-\tau$ есть ε-смещение точки $f(p, t_0)$, принадлежащее отрезку $[-L, -l]$.

Доказательство теоремы. Необходимость условий теоремы 6 очевидна. Докажем достаточность этих условий. Пусть $f(p, t)$— произвольное движение. Для определенности будем предполагать, что ограниченной по той или иной совокупности переменных является ω-функция движения $f(p, t)$.

Пусть ω-функция движения $f(p, t)$ ограничена по совокупности аргументов, содержащей аргумент ε. Тогда справедливость теоремы 6 вытекает из следствия 1.

Предположим теперь, что ω-функция движения $f(p, t)$ ограничена по переменной t. Выберем произвольно пару чисел $\varepsilon > 0$ и $l \geqslant 0$. Пользуясь леммой 2, подберем неотрицательное T такое, что для любой точки q траектории $f(p, I)$ на отрезке $[l, l+T]$ найдется ε-смещение точки q. Тогда, согласно лемме 6, для любой точки q той же траектории и на отрезке $[-l-T, -l]$ найдется ε-смещение точки q. Это означает (см. лемму 2), что α-функция движения $f(p, t)$ ограничена по переменной t. Так как ω-функция обладает тем же свойством, то и π-функция движения $f(p, t)$ ограничена по переменной t. Точно так же, пользуясь леммами 4 и 6, убеждаемся в справедливости теоремы для того случая, когда ω-функция движения $f(p, t)$ ограничена по совокупности переменных t, l.

Наконец, предположим, что ω-функция ограничена по переменной l. Выберем произвольно пару чисел $\varepsilon > 0$ и $t \in I$. Для пары $\frac{\varepsilon}{2}$ и t найдется неотрицательное число T, удовлетворяющее условию леммы 3. Покажем, что на любом отрезке длины T, содержащемся в промежутке $(-\infty, 0]$, найдется ε-смещение точки $f(p, t)$. Пусть $l \geqslant 0$. Пользуясь свойством интегральной непрерывности, найдем $\delta > 0$ такое, что неравенство $\rho[f(p, t+\tau), f(q, \tau)] \leqslant \frac{\varepsilon}{2}$ выполняется для всех $|\tau| \leqslant l+T$, как только $\rho[f(p, t), q] \leqslant \delta$. По найденному $\delta > 0$ подберем τ_1 так, чтобы $\tau_1 \geqslant l+T$ и $\rho[f(p, t+\tau_1), f(p, t)] \leqslant \delta$. Такое τ_1 существует, так как движение $f(p, t)$ устойчиво по Пуассону в положительном направлении. Тогда неравенство $\rho[f(p, t+\tau_1+\tau), f(p, t+\tau)] \leqslant \frac{\varepsilon}{2}$ имеет место для всех $|\tau| \leqslant l+T$. В частности, оно имеет место при $\tau = \tau_2 - \tau_1$, где τ_2 есть $\frac{\varepsilon}{2}$-смещение точки $f(p, t)$, принадлежащее отрезку $[\tau_1 - l - T, \tau_1 - l]$. Поэтому $\rho[f(p, t+\tau_2-\tau_1), f(p, t)] \leqslant \rho[f(p, t+\tau_2-\tau_1), f(p, t+\tau_2)] + \rho[f(p, t+\tau_2), f(p, t)] \leqslant \varepsilon$, т. е. число $\tau_2 - \tau_1$ является ε-смещением точки $f(p, t)$, принадлежащим отрезку $[-l-T, -l]$. Итак, для любой пары чисел $\varepsilon > 0$ и $t \in I$ существует неотрицательное T такое, что на любом отрезке длины T, содержащемся в промежутке $(-\infty, 0]$, найдется ε-смещение точки $f(p, t)$. Согласно лемме 3, α-функция движения $f(p, t)$ ограничена по переменной l. Следовательно, и π-функция рассматриваемого движения ограничена по той же переменной. Теорема доказана.

Заметим, что из существования ω-функции или α-функции движения $f(p, t)$, вообще говоря, не следует существование π-функции того же движения. Доказательством этого факта служат примеры движений, устойчивых по Пуассону только в одном направлении.

Понятие π-функции движения позволяет охарактеризовать и такие типы устойчивых по Пуассону движений, как равномерно устойчивые по Пуассону, почти периодические и стационарные.

Рассмотрим произвольное движение $f(p, t)$ и предположим, что π-функция этого движения существует. Пусть $\varepsilon > 0$. Через l_p^{ε} обозначим множество всех чисел l таких, что $\pi_p(\varepsilon, t, l) = 0$ при всех действительных t. Легко видеть, что множество l_p^{ε} обладает следующим свойством: если $l \in l_p^{\varepsilon}$, то $\rho[f(p, t+l), f(p, t)] \leqslant \varepsilon$ при всех действительных t. Таким образом, всякое число, принадлежащее множеству l_p^{ε}, является ε-смещением траектории $f(p, I)$, т. е. ε-смещением каждой точки этой траектории. Учитывая это свойство, а также определения названных выше типов движений, заключаем, что *движение $f(p, t)$ является равномерно устойчивым по Пуассону (почти периодическим, стационарным) тогда и только тогда, когда π-функция движения $f(p, t)$ существует и при любом $\varepsilon > 0$ множество l_p^{ε} не ограничено (относительно плотно, всюду плотно).*

§ 2. Псевдорекуррентные движения

Определение 3. Движение $f(p, t)$ назовем *псевдорекуррентным,* если π-функция этого движения ограничена по переменной t.

Из теорем 2 и 4 следует, что *всякое рекуррентное движение является псевдорекуррентным, а всякое псевдорекуррентное движение является устойчивым по Пуассону.*

Приведем некоторые признаки, характеризующие псевдорекуррентные движения.

Из теоремы 6 вытекает, что *движение $f(p, t)$ псевдорекуррентно* *тогда и только тогда, когда ω-функция (α-функция) этого движения ограничена по переменной t.* Привлекая лемму 2, этот признак можно сформулировать следующим образом: *движение $f(p, t)$ псевдорекуррентно тогда и только тогда, когда для любой пары положительных чисел ε и l существует такое число L, $L \geqslant l$, что какова бы ни была точка q траектории $f(p, I)$, на отрезке $[l, L]$ ($[-L, l]$) найдется ε-смещение точки q.* Если учесть этот признак и определение равномерно устойчивого по Пуассону движения, то легко убедиться, что всякое равномерно устойчивое по Пуассону движение является псевдорекуррентным.

Теорема 7. *Если точка q принадлежит замыканию траектории псевдорекуррентного движения, то движение $f(q, t)$ является псевдорекуррентным.*

Справедливость этой теоремы вытекает из следующей леммы.

Лемма 7. *Пусть $\varepsilon > 0$. Если для любой точки q траектории $f(p, I)$ на отрезке $[l, L]$ найдется ε-смещение точки q, то и для любой точки q замыкания этой траектории на том же отрезке найдется ε-смещение точки q.*

Доказательство. Предположим, что условие леммы выполняется и $q = \lim\limits_{n \to \infty} f(p, t_n)$. Для каждой точки $q_n = f(p, t_n)$ на отрезке $[l, L]$ выберем число τ_n, являющееся ε-смещением точки q_n. Рассмотрим последовательность $\{\tau_n\}$. Ее можно считать сходящейся, так как она ограничена. Пусть $\tau_n \to \tau$. Ясно, что $\tau \in [l, L]$. Если перейти к пределу при $n \to \infty$ в неравенстве $\rho[f(q_n, \tau_n), q_n] \leqslant \varepsilon$, то окажется, что $\rho[f(q, \tau), q] \leqslant \varepsilon$, т. е. число τ является ε-смещением точки q, принадлежащим отрезку $[l, L]$.

Теорема 8. *Для того, чтобы устойчивое по Лагранжу движение $f(p, t)$ было псевдорекуррентным, необходимо и достаточно, чтобы для каждой точки q, принадлежащей $f(p, I)$, движение $f(q, t)$ было устойчивым по Пуассону в положительном направлении.*

Доказательство. Необходимость условия теоремы 8 вытекает из теоремы 7. Докажем, что это условие является достаточным. Предположим, что оно выполнено, а движение $f(p, t)$ не является псевдорекуррентным. Тогда найдется пара положительных чисел ε и l такая, что для каждого натурального $n > l$ на траектории $f(p, I)$ существует точка q_n, для которой не найдется ε-смещение на отрезке $[l, n]$, так что $\rho[f(q_n, t), q_n] > \varepsilon$ при всех t из $[l, n]$. Так как движение $f(p, t)$ устойчиво по Лагранжу, из последовательности $\{q_n\}$ можно выделить сходящуюся подпоследовательность. Чтобы не усложнять обозначений, будем считать, что $\{q_n\}$ и есть эта подпоследовательность. Пусть $q_n \to q$. Легко видеть, что $\rho[f(q, t), q] \geqslant \varepsilon$ при всех действительных t. Отсюда следует, что движение $f(q, t)$ неустойчиво по Пуассону в положительном направлении, что противоречит исходному предположению.

В формулировке теоремы 8 слово „положительном“ можно заменить словом „отрицательном“. В этом случае ее доказательство аналогично приведенному выше.

Построим *пример псевдорекуррентного движения, не являющегося ни равномерно устойчивым по Пуассону, ни почти рекуррентным.*

Пример 1. Положим $l_1 = 1$, $l_{n+1} = (4n+5)l_n$, $(n = 1, 2, \ldots)$. Отрезок $[(2i-1)l_n, (2i+1)l_n]$, где i — целое, а n — натуральное, будем

обозначать через $\sigma(i, n)$. Из определения последовательности l_n следует, что на каждом отрезке $\sigma(i, n+1)$ содержится $4n+5$ отрезков вида $\sigma(k, n)$. Выберем произвольно пару n и i, где n — натуральное, а i — целое, и рассмотрим отрезок $\sigma(i, n+1)$. Выпишем все отрезки $\sigma(k, n)$, содержащиеся на $\sigma(i, n+1)$, в порядке их следования: $\sigma(k_i+1, n)$, $\sigma(k_i+2, n), \ldots, \sigma(k_i+2n+2, n)$, $\sigma(k_i+2n+3, n), \ldots$, $\sigma(k_i+4n+5, n)$. Здесь k_i есть целое число, которое можно определить из уравнения $(2k_i+1)l_n = (2i-1)l_{n+1}$. Крайний правый отрезок $\sigma(k_i+4n+5, n)$ и отрезок $\sigma(k_i+2n+2, n)$, предшествующий среднему, будем называть особыми отрезками, а остальные — обыкновенными. Если $\sigma(k_i+s, n)$ — особый отрезок, то, как легко видеть, при любом целом j отрезок $\sigma(k_j+s, n)$ тоже особый, а $\sigma(k_j+s+1, n)$ — обыкновенный. Теперь на $(-\infty, +\infty)$ определим функцию $\varphi(x)$ следующим образом:

$$\varphi(x) = 1 - |x| \text{ на } \sigma(0, 1).$$

Предположим, что $\varphi(x)$ определена на $\sigma(0, n)$. Тогда на $\sigma(0, n+1) \setminus \sigma(0, n)$ задаем $\varphi(x)$ формулой:

$$\varphi(x) = \begin{cases} \dfrac{n+2-i}{n+2}\varphi(x-2il_n) \text{ на } \sigma(i, n) \text{ для } i = 1, 2, \ldots, n+1 \\ 0 \text{ на } \sigma(i, n) \text{ для } i = n+2, n+3, \ldots; 2n+2. \\ \varphi(x+l_n+l_{n+1}) \text{ на } \sigma(i, n) \text{ для } i = -2n-2, -2n-1, \ldots, -1. \end{cases}$$

Таким образом, на $(-\infty, +\infty)$ по индукции построена функция $\varphi(x)$, которая обладает следующими свойствами:

1. $\varphi(x)$ равномерно непрерывна и $0 \leqslant \varphi(x) \leqslant 1$ на $(-\infty, +\infty)$.
2. Если $\sigma(i, n)$ — особый отрезок, то $\varphi(x) \equiv 0$ на $\sigma(i-1, n) \cup \sigma(i, n)$.
3. Если $\sigma(i, n)$ — обыкновенный отрезок и $x \in \sigma(i, n)$, то

$$|\varphi(x+2l_n) - \varphi(x)| < \frac{1}{n}.$$

4. Для любой пары чисел n и t, где n — натуральное, а t — действительное, найдется τ, равное $2l_n$, либо $2l_{n+1}$ такое, что $|\varphi(x+t+\tau) - \varphi(x+t)| < \dfrac{1}{n}$ при всех x, принадлежащих отрезку $[0, 2l_n]$.

Свойства 1—3 вытекают непосредственно из определения функции $\varphi(x)$. Докажем свойство 4. Пусть n — любое натуральное число, а t — любое действительное число. Найдется такое целое i, что $t \in \sigma(i, n+1)$. Возможен один из следующих трех случаев:

а. $\sigma(i, n+1)$ и $\sigma(i+1, n+1)$ — обыкновенные отрезки.
б. $\sigma(i, n+1)$ — обыкновенный, а $\sigma(i+1, n+1)$ — особый.
в. $\sigma(i, n+1)$ — особый.

В случае а. полагаем $\tau = 2l_{n+1}$. При любом x, взятом на отрезке $[0, 2l_n)$, $x+t \in \sigma(i, n+1) \cup \sigma(i+1, n+1)$, так как $t \in \sigma(i, n+1)$. Но оба отрезка $\sigma(i, n+1)$ и $\sigma(i+1, n+1)$ — обыкновенные. Поэтому неравенство $|\varphi(x+t+\tau) - \varphi(x+t)| < \dfrac{1}{n}$ будет выполнено в силу свойства 3 функции $\varphi(x)$.

В случае б. полагаем $\tau = 2l_n$. Легко видеть, что в рассматриваемом случае оба числа $x+t$ и $x+t+\tau$ принадлежат множеству $\sigma(i, n+1) \cup \sigma(i+1, n+1)$ при любом x из отрезка $[0, 2l_n]$. Согласно свойству 2 функции $\varphi(x)$, при этих значениях x имеем $\varphi(x+t+\tau) = \varphi(x+t) = 0$, и требуемое неравенство выполняется.

$t \in \sigma(i,\ n+1) \setminus \sigma(k_l+4n+4,\ n) \cup$
В случае в. полагаем $\tau = 2l_n$, если
уравнению
$\cup \sigma(k_l+4n+5,\ n)$, где k_l — целое число, удовлетворяющее
$(2k_l+1)l_n = (2i-1)l_{n+1}$. Тогда при любом x из отрезка $[0,\ 2l_n]$ числа
$x+t$ и $x+t+\tau$ принадлежат отрезку $\sigma(i,\ n+1)$, откуда следует, как
и в случае б., что $\varphi(x+t+\tau)=\varphi(x+t)=0$. Если же $t \in \sigma(k_l+4n+4,\ n) \cup$
$\cup \sigma(k_l+4n+5,\ n)$, то полагаем $\tau = 2l_{n+1}$. Тогда либо $x+t \in \sigma(k_l+4n+4,\ n) \cup$
$\cup \sigma(k_l+4n+5,\ n)$, либо $x+t \in \sigma(i+1,\ n+1)$. Если $x+t \in \sigma(i+1,\ n+1)$,
то требуемое неравенство выполняется по свойству 3 функции $\varphi(x)$,
так как $\sigma(i+1,\ n+1)$ — обыкновенный отрезок. Если же $x+t \in \sigma(k_l+$
$+4n+4,\ n) \cup \sigma(k_l+4n+5,\ n)$, то $\varphi(x+t+\tau) = \varphi(x+t) = 0$, так как $x+t$
$+\tau \in \sigma(k_{l+1}+4n+4,\ n) \cup \sigma(k_{l+1}+4n+5,\ n)$, а отрезки $\sigma(k_l+4n+5,\ n)$ и
$\sigma(k_{l+1}+4n+5,\ n)$ являются особыми. Свойство 4 доказано.

В динамической системе М. В. Бебутова [5] рассмотрим движение
$f(\varphi,\ t)$, определяемое функцией $\varphi(x)$. Это движение устойчиво по
Лагранжу, так как функция $\varphi(x)$ ограничена и равномерно непрерыв-
на на всей числовой оси [5].

Покажем, что движение $f(\varphi,\ t)$ является псевдорекуррентным. Пусть
ε и l — произвольная пара положительных чисел. Подберем натураль-
ное n так, чтобы $n \geqslant \frac{1}{\varepsilon}$ и $2l_n \geqslant l$, и положим $L = 2l_{n+1}$. Пусть t — лю-
бое действительное число. Согласно свойству 4 функции $\varphi(x)$, на
отрезке $[l,\ L]$ найдется число τ такое, что неравенство $|\varphi(y+t-l_n+\tau)-$
$-\varphi(y+t-l_n)| < \frac{1}{n}$ выполняется при всех y, принадлежащих отрезку
$[0,\ 2l_n]$. Отсюда, так как всегда $l_n \geqslant n \geqslant \frac{1}{\varepsilon}$, вытекает, что $|\varphi(x+t+$
$+\tau)-\varphi(x+t)| < \varepsilon$ при всех x, удовлетворяющих неравенству $|x| \leqslant \frac{1}{\varepsilon}$.
Следовательно, число τ является ε-смещением точки $f(\varphi,\ t)$. Итак, для
любой пары положительных чисел ε и l нашлось такое число L, $L \geqslant l$,
что какова бы ни была точка $f(\varphi,\ t)$ траектории $f(\varphi,\ I)$, отрезок $[l,\ L]$
содержит ε-смещение точки $f(\varphi,\ t)$. Согласно одному из приведенных
ранее признаков, движение $f(\varphi,\ t)$ является псевдорекуррентным.

Покажем, что движение $f(\varphi, t)$ не является равномерно устойчивым
по Пуассону. Пусть $\tau \in (1,\ +\infty)$. Так как последовательность l_n строго
возрастает, а $\tau > 1$, найдется такое натуральное n, что $\tau \in \bigcup\limits_{l=1}^{2n+2} \sigma(i,\ n) \subset$
$\subset \sigma(0,\ n+1) \setminus \sigma(0,\ n)$. Из определения функции $\varphi(x)$ следует, что либо
$\varphi(-\tau)=0$, либо $\varphi(\tau)=0$. Первое равенство имеет место, если $\tau \in \bigcup\limits_{l=1}^{n+1} \sigma(i,\ n)$, а
второе — если $\tau \in \bigcup\limits_{l=n+2}^{2n+2} \sigma(i,\ n)$. Кроме того, $\varphi(0)=1$. Поэтому найдется такое дей-
ствительное x, что $|\varphi(x+\tau)-\varphi(x)|=1$. Таким образом, каково бы ни было
$\tau > 1$, всегда $\sup\limits_{-\infty < x < +\infty} |\varphi(x+\tau)-\varphi(x)|=1$. Отсюда вытекает, что $\varphi(x)$ не
является псевдопериодической функцией в смысле Бора [9] и, следо-
вательно, движение $f(\varphi,\ t)$ не является равномерно устойчивым по
Пуассону [5].

Покажем, что рассматриваемое движение $f(\varphi,\ t)$ не является поч-
ти рекуррентным. Для этого достаточно показать, что не существует
относительно плотного множества $\frac{1}{2}$-смещений точки $\varphi(x) \in f(\varphi,\ I)$,
т. е. что найдется отрезок как угодно большой длины, не содержащий ни
одного $\frac{1}{2}$-смещения точки $\varphi(x)$. Пусть T — произвольное положи-

тельное число, а $\sigma(i,\ n)$ — особый отрезок, длина которого не меньше, чем T. Таким будет, например. отрезок $\sigma(2n+2,\ n)$, если натуральное n выбрать так, чтобы $T \leqslant 2l_n$. Так как $\varphi(\tau)=0$ при всех τ, принадлежащих отрезку $\sigma(i,\ n)$, а $\varphi(0)=1$, неравенство $|\varphi(x+\tau)-\varphi(x)| \leqslant \frac{1}{2}$ нарушается при $x=0$, каково бы ни было $\tau \in \sigma(i,\ n)$. Отсюда следует, что на отрезке $\sigma(i,\ n)$ не найдется ни одного $\frac{1}{2}$-смещения точки $\varphi(x)$.

Итак, *даже в компактных динамических системах существуют псевдорекуррентные движения, которые не являются ни равномерно устойчивыми по Пуассону, ни почти рекуррентными* (*следовательно, ни рекуррентными*). С другой стороны, *существуют почти рекуррентные движения, которые не являются псевдорекуррентными.* Ниже приводится пример такого движения.

Пример 2. На $(-\infty,\ +\infty)$ определим функцию $\psi(x)$ следующим образом:

$$\psi(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } x \text{ — четное.} \\ n, & \text{если } x = 3^{n-1}(6s+i), \end{cases}$$

где n — натуральное, s — целое, $i = \pm 1$.

Легко убедиться в том, что всякое нечетное число x может быть представлено, притом единственным образом, в виде

$$x = 3^{n-1}(6s+i); \qquad (*),$$

где n — натуральное, s — целое, $i = \pm 1$. Ввиду этого функция $\psi(x)$ определена однозначно для всех целочисленных значений аргумента x. Путем линейной интерполяции задаем $\psi(x)$ на всей числовой прямой. Построенная таким образом функция $\psi(x)$ непрерывна на $(-\infty,\ +\infty)$ и обладает следующим свойством:

Какова бы ни была пара чисел n и k, где n — натуральное, а k — целое, $\psi(x+2k3^n) = \psi(x) \leqslant n$ при всех x, удовлетворяющих неравенству $|x| \leqslant 3^n - 1$.

Чтобы доказать это свойство функции $\psi(x)$, очевидно, достаточно установить следующее: какова бы ни была пара n и k, где n — натуральное, а k — целое, $\psi(x+2k3^n) = \psi(x) \leqslant n$ при всех целых значениях x, удовлетворяющих неравенству $|x| \leqslant 3^n - 1$. Установим это. Пусть n — любое натуральное и k — любое целое. Выберем произвольно целое x. Если x — четное, то $\psi(x+2k3^n) = \psi(x) = 0$, так как оба числа x и $x+2k3^n$ являются четными. Предположим теперь, что x — нечетное и $|x| \leqslant 3^n - 1$. Представим число x в виде (*). Пусть $x = 3^{n'-1}(6s+i)$. Очевидно, что $n - n' \geqslant 0$ (так как $3^{n'-1} \leqslant 3^{n'-1}|6s+i| \leqslant |x| \leqslant 3^{n-1} < 3^n$). Поэтому $x + 2k3^n = 3^{n'-1}(6s+i) + 2k3^n = 3^{n'-1}(6s'+i)$, где $s' = s + k3^{n-n'}$ — целое число. Пользуясь определением функции $\psi(x)$, находим, что $\psi(x+2k3^n) = \psi(x) = n' \leqslant n$.

В динамической системе М. В. Бебутова рассмотрим движение $f(\psi, t)$, определяемое функцией $\psi(x)$. Покажем, что оно почти рекуррентно.
Пусть $\varepsilon > 0$. Подберем натуральное n так, чтобы $\frac{1}{\varepsilon} \leqslant 3^n - 1$, и рассмо-
трим последовательность $\tau_k = 2k3^n$ $(k = \pm 1, \pm 2 \ldots)$. Из доказанного
свойства функции $\psi(x)$ следует, что $|\psi(x+\tau_k)-\psi(x)|=0$ для всех x,
удовлетворяющих неравенству $|x| \leqslant \frac{1}{\varepsilon}$, откуда вытекает, что каждое
число τ_k является ε-смещением точки $\psi(x) \in f(\psi,\ I)$. Так как множе-
ство чисел $\{\tau_k\}$ относительно плотно, движение $f(\psi,\ t)$ является почти
рекуррентным.

Теперь докажем, что рассматриваемое движение $f(\psi, t)$ не является псевдорекуррентным. Предварительно заметим, что при любом натуральном n неравенство $\psi(x+3^n) \leqslant n$ выполняется для всех x, принадлежащих отрезку $[1, 3^n]$. Действительно, если $x \in [1,3^n]$, то $|x-3^n| \leqslant 3^n-1$, и по свойству функции $\psi(x)$ находим: $\psi(x+3^n) \equiv \psi[(x-3^n)+2\cdot 3^n] = \psi(x-3^n) \leqslant n$. Пусть $\varepsilon \in (0,1)$ и $L>1$. Подберем натуральное n так, чтобы $3^n \geqslant L$. Так как $\psi(\tau+3^n) \leqslant n$ для всех τ, принадлежащих отрезку $[1,3^n]$, а $\psi(3^n)=n+1$, неравенство $|\psi(x+3^n+\tau)-\psi(x+3^n)| \leqslant \varepsilon$ нарушается при $x=0$, каково бы ни было τ из отрезка $[1, 3^n]$. Отсюда следует, что на отрезке $[1,L] \subseteq [1,3^n]$ не найдётся ни одного ε-смещения точки $\psi(x+3^n)$. Итак, если $0<\varepsilon<1$, то для любого $L>1$ на траектории $f(\psi,I)$ существует точка, для которой на отрезке $[1, L]$ не найдется ни одного ε-смещения, откуда вытекает, что движение не является псевдорекуррентным.

Так как всякое почти рекуррентное движение является устойчивым по Пуассону, приведенный выше пример еще доказывает, что существуют устойчивые по Пуассону движения, которые не являются псевдорекуррентными. Заметим, что рассмотренное движение $f(\psi, t)$ неустойчиво по Лагранжу. Оказывается, что *и в компактных динамических системах существуют устойчивые по Пуассону движения, которые не являются псевдорекуррентными.*

Действительно, рассмотрим пример динамической системы, который приведен в [1] на стр. 365. Эта динамическая система обладает тем свойством, что для любой точки p тора, не лежащей на кривой $\theta = \alpha\varphi$, движение $f(p,t)$ устойчиво по Пуассону. По теореме 8 такое движение не может быть псевдорекуррентным, так как на кривой $\theta = \alpha\varphi$, которая содержится в $\overline{f(p, I)}$, найдется такая точка q, что движение $f(q, t)$ неустойчиво по Пуассону и, следовательно, не псевдорекуррентно.

Таким образом, устойчивость по Лагранжу не является достаточным условием того, чтобы устойчивое по Пуассону движение было псевдорекуррентным. Следующая теорема показывает, что таким достаточным условием является устойчивость по Ляпунову.

Теорема 9. *Если движение $f(p, t)$ положительно (отрицательно) устойчиво по Ляпунову относительно множества точек своей траектории и устойчиво по Пуассону в отрицательном (положительном) направлении, то оно равномерно устойчиво по Пуассону и, следовательно, псевдорекуррентно.*

Доказательство. Для определенности предположим, что движение $f(p, t)$ положительно устойчиво по Ляпунову относительно множества $f(p, I)$ [1] и устойчиво по Пуассону в отрицательном направлении. Пусть $\varepsilon>0$. Из положительной устойчивости по Ляпунову находим $\delta>0$, соответствующее точке p и числу $\frac{\varepsilon}{2}$. Далее, рассуждая так же, как и при доказательстве теоремы А. А. Маркова (см. [1], стр. 416, теорема 37′), в соответствующей части которого фактически используется лишь устойчивость по Пуассону в отрицательном направлении, приходим к выводу, что всякое $\frac{\delta}{2}$-смещение точки p является ε-смещением траектории $f(p, I)$. Учитывая, что движение $f(p, t)$ устойчиво по Пуассону в отрицательном направлении, заключаем, что существуют как угодно большие по абсолютной величине ε-смещения траектории $f(p, I)$, откуда следует равномерная устойчивость по Пуассону движения $f(p, t)$.

Из теоремы 9 вытекает

Следствие 2. *Всякое псевдорекуррентное движение, не являющееся равномерно устойчивым по Пуассону, не устойчиво по Ляпунову относительно множества точек своей траектории ни в одном направлении.*

Следующий пример показывает, что условие теоремы 9 не необходимо для равномерной устойчивости по Пуассону движения $f(p, t)$.

Пример 3. Полагаем $l_0=0$, $l_1=1$ и $l_{n+1}=4\ (n+2)\, l_n$ для $n \in N$, где через N обозначено множество всех натуральных чисел.

Пусть $x \in I$ и $n \in N$. Через $i_n(x)$ будем обозначать однозначно определяемое целое число i_n такое, что

$$x \in \left((2i_n-1)l_n + \sum_{s=o}^{n-1} l_s, (2i_n+1)l_n + \sum_{s=0}^{n-1} l_s \right].$$

Для любого $x \in I$ полагаем $p(x) = \frac{1}{2}(\cos \pi x + 1) \prod_{n=1}^{m} \frac{2n+1-|j_n(x)|}{2n}$,

где $j_1(x)=i$, $j_{n+1}(x) = i_n(x) - 4(n+2)\, i_{n+1}(x)$, а $m=m(x)$ есть наименьшее натуральное число такое, что $i_m(x)$ является четным числом.

Лемма 8. Имеют место следующие предложения:

a. $p(x)$ *есть равномерно непрерывная функция, отображающая множество I в отрезок* $[0,1]$.

b. *Для любого $\varepsilon>0$ существует относительно плотное множество T такое, что если $\tau \in T$, то $|p(x+\tau)-p(x)|<\varepsilon$ при всех x, удовлетворяющих неравенству $|x| \leqslant \frac{1}{\varepsilon}$.*

c. $p(x)$ *есть псевдопериодическая функция в смысле Бора.*

d. $p(x)$ *не является почти периодической функцией.*

В динамической системе М. В. Бебутова рассмотрим движение $f(p,t)$,
определяемое функцией $p(x)$. Из леммы 8 вытекает, что движение
$f(p,t)$ устойчиво по Лагранжу, почти рекуррентно, равномерно устой-
чиво по Пуассону и не почти периодическое. Из первых двух свойств
движения $f(p, t)$ следует, что оно рекуррентно. На основании теоремы
А. А. Маркова (см. [1], стр. 416, теорема 37′) заключаем, что рас-
сматриваемое движение не устойчиво по Ляпунову относительно своей
траектории ни в одном направлении.

Заметим, что последний пример доказывает существование равно-
мерно устойчивого по Пуассону движения, которое является рекур-
рентным и не является почти периодическим. Как отмечается в [2],
движение такого типа было построено ранее А. Д. Горбуновым. К со-
жалению, пример А. Д. Горбунова не опубликован.

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

1. *В. В. Немыцкий* и *В. В. Степанов*, Качественная теория дифференциальных урав-
нений, ГИТТЛ, М.—Л., (1949).
2. *В. В. Немыцкий*, Топологические вопросы теории динамических систем, Усп. ма-
тем. наук, т. IV, вып. 6 (1949), 91—153.
3. *H. Poincaré*, Les methodes nouvelles de la mécanique céleste, t. 3 (1899), Paris.
4. *Дж. Д. Биркгоф*, Динамические системы, ГИТТЛ, М.—Л., (1941).

5. *М. В. Бебутов,* О динамических системах в пространстве непрерывных функций, Бюллетень Московского госуниверситета, математика, т. 2, вып. 5 (1941), 1—52.
6. *Ph. Franklin,* Almost periodic recurrent motions, Math. Zeitsch., 30, № 3 (1929), 325—331.
7. *Б. А. Щербаков,* Классификация устойчивых по Пуассону движений. Псевдорекуррентные движения, ДАН СССР, т. 146, № 2 (1962), 322—324.
8. *W. H. Gottschalk, G. A. Hedlund,* Topological dynamics, Amer. Math. Soc. Coll. Publ., vol. 36 (1955).
9. *H. Bohr,* Zur Theorie der fastperiodischen Funktionen. I., Acta Mathematica, 45 (1925), 30—127.

Б. А. ЩЕРБАКОВ

ДЕСПРЕ КЛАСЕЛЕ ДЕ МИШКЭРЬ СТАБИЛЕ ДУПЭ ПУАССОН. МИШКЭРЬ ПСЕУДОРЕКУРЕНТЕ

Резумат

Ын ачастэ лукраре се ынтродуче ноциуня де π-функкцие а мишкэрий ($\pi = \pi(\varepsilon, t, l)$), екзистенца кэрея есте о деосебире характеристикэ а мишкэрилор стабиле дупэ Пуассон. Се студиязэ тоате казуриле, ын каре π-функкция есте мэржинитэ дупэ о тоталитате сау алта де аргументе але ей. Се стабилеште, кэ фиекаре дин казуриле посибиле кореспунде уней класе куноскуте де мишкэрь стабиле дупэ Пуассон, ын афарэ де казул, кынд π-функкция есте мэржинитэ дупэ тимп. Ачест дин урмэ каз кореспунде уней ной класе де мишкэрь, пе каре ле нумим псеудорекуренте. Ын § 2 се студиязэ проприетэциле мишкэрилор псеудорекуренте.

Резултателе принчипале але ачестуй артикол ау фост експусе фэрэ демонстраре ын [7].

Поступило
11.VII 1962 г.

КРАТКИЕ СООБЩЕНИЯ

И. У. БРОНШТЕЙН

ДВА ПРИМЕРА ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ

В работе строится два примера динамических систем, являющихся ответами на вопросы, поставленные В. В. Немыцким [1] (глава III, § 5, вопросы 1, 3).

1. Пример динамической системы, у которой инварианты β_B и β_C различны.

Рассмотрим множество всех бесконечных в обе стороны последовательностей $\{a_n\}$, $a_n = 1$ или 0 ($n = \ldots -2, -1, 0, 1, 2, \ldots$). Введем топологию так же, как и в [2] (стр. 46). Полученное пространство гомеоморфно канторову совершенному множеству единичного квадрата $0 \leqslant x \leqslant 1$, $0 \leqslant y \leqslant 1$. Зададим на этом пространстве дискретную динамическую систему $U_n(0,1)$: $T(\{a_n\}) = \{a_{n+1}\}$. Полученная система путем линейной интерполяции включается в универсальную динамическую систему М. В. Бебутова [1] и определяет в ней подсистему, которую мы обозначим $U_t(0,1)$. Система $U_t(0,1)$ по теореме Н. П. Жидкова [2, стр. 33] гомеоморфна динамической системе, определяемой системой дифференциальных уравнений.

Введем следующие обозначения: $(1) = \alpha_0$,

$$(\underbrace{10\ldots0}_{k}1\ldots100\,10\,10\,1001\ldots\underbrace{10\ldots0}_{k}1) = \alpha_k \quad (k = 1, 2, \ldots),$$

$$(\ldots\alpha_k\,000\,\alpha_k\,00\alpha_k\,0\alpha_k\,0\alpha_k\,00\alpha_k\,000\alpha_k\ldots) = a_k \quad (k = 0, 1, 2, \ldots),$$

$$(\ldots0\ldots000\ldots0\ldots) = b, \quad (\ldots0\ldots\,0\alpha_k\,0\ldots0\ldots) = c_k \quad (k = 0, 1, 2, \ldots).$$

Включим последовательности a_k, $в$, c_k в систему М. В. Бебутова и для полученных функций сохраним те же обозначения. Множество R точек, лежащих на траекториях указанных точек в $U_t(0,1)$, замкнуто и поэтому компактно.

Множество P_1 динамически предельных точек системы R_t лежит на траекториях точек b и c_k ($k = 0, 1, 2, \ldots$). Замыкание множества P_1, $\overline{P}_1 = N_1$ содержит, кроме того, еще траекторию точки a_0, не являющуюся динамически предельной для системы R_t.

Множество P_2 точек, динамически предельных для системы P_{1t}, состоит из одной лишь точки покоя b, и поэтому $\beta_c = 2$. Замыкание N_2 множества точек, предельных для N_{1t}, содержат кроме точки покоя еще траекторию точки c_0. Множество N_3 состоит из точки покоя b, и поэтому $\beta_B = 3$.

2. Пример динамической системы, определяемой системой дифференциальных уравнений, у которой некоторое квазиминимальное мно-

жество содержит всюду плотное множество σ-точек и не имеет вовсе μ-точек.

В качестве пространства возьмем тор (θ,φ), $0 \leqslant \theta < 1$, $0 \leqslant \varphi < 1$ и рассмотрим семейство $\{L\}$ траекторий системы $\frac{d\theta}{dt} = \alpha$; $\frac{d\varphi}{dt} = 1$, где α — иррациональное число.

На нулевом меридиане тора выберем замкнутое множество F точек $A_0, A_1, A_2, \ldots$, принадлежащих некоторой обмотке L_0 так, чтобы $\{A_{2k}\} \to A_0$, $\{A_{2k+1}\} \to A_1$ $(k = 1, 2, \ldots)$ и чтобы длины дуг $\{A_k, A_{k+2}\}$ траектории L_0 были больше k, а точки A_i $(i = 0, 1, 2, \ldots)$ располагались на L_0 в следующем порядке:$\ldots A_{2n}, \ldots, A_4, A_2, A_0, A_1, A_3, \ldots, A_{2n+1}, \ldots$.

Это можно сделать так, чтобы единственными предельными точками множества F были точки A_0 и A_1. Построим функцию $f(\theta)$, $0 \leqslant \theta \leqslant 1$, удовлетворяющую условиям: (1) $f(\theta) \geqslant 0$; (2) $f(\theta) = 0$ только в точках A_k $(k = 0, 1, 2, \ldots)$ и (3) $f(0) = f(1)$. Обозначим $\Phi(\theta, \varphi) \equiv \sin^2 \pi\varphi + f(\theta)$ и рассмотрим систему

$$\frac{d\varphi}{dt} = \Phi(\theta, \varphi), \frac{d\theta}{dt} = \alpha\, \Phi(\theta, \varphi).$$

Перейдя по известным формулам к координатам x, y, z, получим систему трех дифференциальных уравнений. Траекториями системы являются: а) счетное множество дуг:$\ldots (A_4, A_2), (A_2, A_0), (A_0, A_1), (A_1 A_3), \ldots$ и точки покоя $A_0, A_1, A_2, \ldots$, лежащие на обмотке L_0; б) несчетное множество остальных обмоток.

Все точки, лежащие на обмотке L_0, являются σ-точками. Остальные точки тора — π-точки.

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

1. *В. В. Немыцкий*, Топологические вопросы теории динамических систем, Усп. матем. наук, т. IV, вып. 6 (1949).
2. *Н. П. Жидков*, Некоторые свойства дискретных динамических систем. Ученые записки Московского госуниверситета, т. VI, 163 (1952).

Поступило
20.I. 1962 г.

А. С. МАРКУС

О СРАВНИМОСТИ РАСТВОРОВ В НОРМИРОВАННОМ ПРОСТРАНСТВЕ

Раствором двух линеалов (линейных подмножеств) L и M нормированного пространства E называется число $\Theta(L,M)$, определяемое равенством

$$\Theta(L, M) = \max \{\sup_{\substack{x \in L \\ |x| = 1}} \rho(x, M), \sup_{\substack{y \in M \\ |y| = 1}} \rho(y, L)\},$$

где

$$\rho(x, M) = \inf_{z \in M} |x - z|.$$

Понятие раствора было введено в статье М. Г. Крейна, М. А. Красносельского и Д. П. Мильмана [1]. В той же статье (см. также [2]) были установлены основные положения о растворе как о мере отклонения друг от друга двух линеалов.

Пусть E.— векторное пространство, в котором введены две нормы $|x|_1$ и $|x|_2$ $(x \in E)$. Говорят, что норма $|x|_1$ подчинена норме $|x|_2$, если существует такое число c, что $|x|_1 \leqslant c\,|x|_2$ для любого вектора $x \in E$. Если каждая из норм $|x|_1, |x|_2$ подчинена другой, то нормы $|x|_1$ и $|x|_2$ называются эквивалентными.

Обозначим через $\Theta_1(L, M)$ и $\Theta_2(L, M)$ растворы между линеалами пространства E, порожденные нормами $|x|_1$ и $|x|_2$ соответственно. По аналогии с приведенной терминологией для норм будем говорить, что раствор Θ_1 подчинен раствору Θ_2, если существует такое число k, что

$$\Theta_1(L, M) \leqslant k\,\Theta_2(L, M) \qquad (1)$$

для любых линеалов $L, M \subset E$. Будем называть растворы Θ_1 и Θ_2 сравнимыми, если хотя бы один из них подчинен другому, и эквивалентными, если каждый из них подчинен другому.

В настоящей заметке дается ответ на следующий вопрос, поставленный автору Д. А. Райковым: какому условию должны удовлетворять нормы $|x|_1$ и $|x|_2$, чтобы порождаемые ими растворы Θ_1 и Θ_2 были сравнимы?

Через $L(x)$ далее обозначается одномерный линеал, натянутый на ненулевой вектор $x \in E$.

Теорема. *Следующие утверждения равносильны:*
1°. *Нормы* $|x|_1$ и $|x|_2$ *эквивалентны.*
2°. *Растворы* Θ_1 и Θ_2 *сравнимы.*
3°. *Растворы* Θ_1 и Θ_2 *эквивалентны.*

Доказательство. Очевидно, что из 1° следует 3°, а из 3°—2°. Перейдем к доказательству того, что из утверждения 2° следует 1°. При этом для определенности будем считать, что раствор Θ_1 подчинен раствору Θ_2.

Покажем, прежде всего, что норма $|x|_1$ подчинена норме $|x|_2$. В самом деле, допустим, что это не так. Тогда существует последовательность x_j $(j=1, 2,\ldots)$ векторов из E такая, что

$$|x_j|_1 = 1 \ (j=1, 2,\ldots) \text{ и } \lim_{j\to\infty} |x_j|_2 = 0.$$

Пусть y — произвольный ненулевой вектор из E. Очевидно,

$$\lim_{j\to\infty} \Theta_2 \left(L(y), L(y+x_j)\right) = 0,$$

и, следовательно, в силу (1),

$$\lim_{j\to\infty} \Theta_1 \left(L(y), L(y+x_j)\right) = 0.$$

Поэтому существуют такие числа $\alpha_j(y)$ $(j=1, 2,\ldots)$, что

$$\lim_{j\to\infty} |y + x_j - \alpha_j(y)\, y|_1 = 0.$$

Без ограничения общности можно считать, что последовательность $\alpha_j(y) - 1$ $(j=1, 2\ldots.)$ сходится к некоторому числу $\alpha(y)$ и, стало быть,

$$\lim_{j\to\infty} |x_j - \alpha(y) y|_1 = 0,$$

что противоречит произвольности y.

Для окончания доказательства осталось установить, что и, обратно, $|x|_2$ подчинена норме $|x|_1$.

Пусть z—произвольный ненулевой вектор и $f(x)$—линейный функционал на E, непрерывный по норме $|x|_1$ (а значит, и по норме $|x|_2$) и такой, что $f(z) \neq 0$. Если M — линеал, состоящий из всех векторов $x \in E$, на которых аннулируется функционал f, то, очевидно, E является топологической прямой суммой линеалов M и $L(z)$ как по норме $|x|_1$, так и по норме $|x|_2$. Поэтому достаточно доказать, что

$$\sup_{0 \neq x \in M} \ |x|_2 / |x|_1 < \infty.$$

Допустим, что это не так. Тогда найдется последовательность y_j $(j=1, 2,\ldots)$ векторов из M такая, что

$$|y_j|_1 = 1 \ (j=1, 2,\ldots) \text{ и } \lim_{j\to\infty} |y_j|_2 = \infty.$$

Легко проверить, что

$$\lim_{j\to\infty} \Theta_2 \left(L(y_j), L(z+y_j)\right) = 0,$$

и поэтому, в силу (1),

$$\lim_{j\to\infty} \Theta_1 \left(L(y_j), L(z+y_j)\right) = 0.$$

Следовательно, найдутся такие числа β_j $(j=1, 2,\ldots)$, что

$$\lim_{j\to\infty} |z + y_j - \beta_j y_j|_1 = 0. \tag{2}$$

Так как $f(y_j) = 0$ $(j=1, 2,\ldots)$, то в силу соотношения (2) $f(z) = 0$, что противоречит выбору функционала f.

Теорема доказана.

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

1. *М. Г. Крейн, М. А. Красносельский* и *Д. П. Мильман*, Сб. трудов Ин-та матем. АН УССР, № 11 (1948), 97 — 112.
2. *И. Ц. Гохберг* и *М. Г. Крейн*, Усп. матем. наук, т. 12, вып. 2 (1957), 43—118.

Поступило
6.VII 1962 г.

Ю. М. РЯБУХИН

КОЛЬЦА С ЕДИНСТВЕННЫМ УМНОЖЕНИЕМ

В настоящей заметке рассматриваются только такие кольца A, не обязательно ассоциативные, что $A^2 \neq \{0\}$.

Определение. Кольцо A называется кольцом *с единственным умножением*, если оно определяется с точностью до изоморфизма своей аддитивной группой.

Отметим, что всякое кольцо с единственным умножением коммутативно, так как оно изоморфно своему антиизоморфному.

Следующая теорема дает полное описание колец с единицей с единственным умножением.

Теорема. *Кольцо A с единицей тогда и только тогда является кольцом с единственным умножением, когда выполнено одно из условий: либо A изоморфно полю вычетов целых чисел по простому модулю p, либо A изоморфно полю всех рациональных чисел.*

Доказательству теоремы предпошлем две леммы.

Лемма 1. *Если абелева группа $G = G_1 \dotplus G_2$, причем группа G_1 обладает свойством: существуют хотя бы два неизоморфных кольца с группой G_1 в качестве аддитивной группы, то и группа G обладает этим свойством.*

Доказательство. Пусть A_1 и A_2—кольца, содержащие группу G_1 в качестве аддитивной группы, B—кольцо с нулевым умножением (см. [1] стр. 38) и с группой G_2 в качестве аддитивной группы. Тогда кольца $A'_1 = A_1 \dotplus B$ и $A'_2 = A_2 + B$—искомые.

Лемма 2. *Если абелева группа $G = G_1 \dotplus G_2$ и группы G_1 и G_2 служат аддитивными группами некоторых колец A_1 и B_1, то группа G служит аддитивной группой хотя бы двух неизоморфных колец.*

Доказательство. Пусть кольца A_2 и B_2—кольца с нулевым умножением и с группами G_1 и G_2 в качестве аддитивных групп, соответственно. Тогда среди колец $C_1 = A_1 \dotplus B_1$, $C_2 = A_1 \dotplus B_2$, $C_3 = A_2 \dotplus B_1$ хотя бы два неизоморфны.

Доказательство теоремы. Докажем сперва достаточность. Пусть аддитивная группа кольца A есть циклическая некоторого простого порядка p. Так как p—простое число, то для любого ненулевого элемента $a \in A$ (см. [1], стр. 75):

$$A = \{0, a,\ldots, (p-1)\, a\}.$$

Но $A^2 \neq 0$ и, следовательно, $a^2 = ka$, где $0 < k \leqslant p-1$. В таком случае сравнение $xk \equiv 1 \pmod{p}$ имеет некоторое решение. Для этого x имеем: $(x a)^2 = x^2 a^2 = x(xka) = xa \neq 0$. Введем обозначение $s(x a) = a_s$,

$(s=0,1,\ldots,p-1)$. Так как $xa\neq 0$, то $A=\{0=a_0, a_1,\ldots,a_{p-1}\}$. Между тем легко видеть, что

$$a_s+a_t=a_{\overline{s+t}},$$
$$a_s\cdot a_t=a_{\overline{st}},$$

где $\overline{s+t}$ и $\overline{st}$—остатки от деления $s+t$ и st на p. Установив взаимно однозначное соответствие $a_s\leftrightarrow s$, получаем: кольцо A изоморфно полю вычетов целых чисел по простому модулю p.

Пусть аддитивная группа кольца A есть полная группа всех рациональных чисел. Так как полная группа всех рациональных чисел характеризуется тем, что а) уравнение $kb=a$ имеет и притом единственное решение при любом целом $k\neq 0$ и любом a; б) для любого $a\neq 0$ полная группа всех рациональных чисел имеет вид: $R=\left\{\frac{m}{n}\ a \mid m,\ n\text{—целые числа, } n\neq 0\right\}$, то доказательство в этом случае проходит вполне аналогично предыдущему.

Докажем теперь необходимость. Пусть A—кольцо с единицей e. Допустим, что A—кольцо с единственным умножением. Возможны лишь два случая:

1) для некоторого натурального n, $ne=0$. Тогда $na=0$ для любого элемента $a\in A$. Поэтому (см. [1], стр. 241) аддитивная группа кольца A разлагается в прямую сумму примарных циклических групп по некоторым простым числам. Из лемм 1, 2 следует, что аддитивная группа кольца есть циклическая простого порядка p. Из доказательства достаточности следует: кольцо A изоморфно полю вычетов целых чисел по модулю p.

2) Для любого натурального n, $ne\neq 0$. Введем в кольце A новое умножение, положив $x\circ y=kxy$, где k—наперед заданное натуральное число, $x, y\in A$. Полученное кольцо должно быть изоморфно кольцу A, а потому должно обладать некоторой единицей e_1. Таким образом, $x\circ e_1=e_1\circ x=ke_1\,x=x$. Это значит, что ke_1 есть единица кольца A, т. е. $ke_1=e$. Поэтому для любого ненулевого элемента $a\in A$ $ka\neq 0$ и $k(e_1a)=a$. Так как число k выбрано произвольно, то аддитивная группа кольца A разрешима. Но всякая разрешимая группа разлагагается в прямую сумму полных рациональных и квазициклических (т. е. типа p^∞, см. [1], стр. 133) групп. Из лемм 1, 2 и условия $ka\neq 0$ для любого $a\in A$, $a\neq 0$, следует: аддитивная группа кольца A есть полная группа всех рациональных чисел. Из доказательства достаточности следует, что кольцо A изоморфно кольцу всех рациональных чисел. Теорема доказана.

Следствие. *Конечное кольцо A является кольцом с единственным умножением тогда и только тогда, когда A изоморфно полю вычетов целых чисел по некоторому простому модулю p.*

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

1. *А. Г. Курош*, Лекции по общей алгебре, М., Физматгиз (1962).

Поступило
10.VII 1962 г.

К. С. СИБИРСКИЙ

ЦЕНТРЫ С СИММЕТРИЕЙ ПОЛЯ НАПРАВЛЕНИЙ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ

Рассмотрим дифференциальное уравнение

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{\sum\limits_{l+k=m}^{p} c_{lk}x^l\ y^k}{\sum\limits_{l+k=m}^{p} b_{lk}\ x^l\ y^k},\tag{1}$$

где m и p—натуральные числа такие, что $m\leqslant p$, b_{lk}, c_{lk}—действительные числа, характеристическое уравнение

$$\sum_{l+k=m}(b_{lk}\ \sin\varphi+c_{lk}\cos\varphi)\cos^l\varphi\ \sin^k\varphi=0$$

не имеет действительных корней, а числитель и знаменатель правой части уравнения (1) не имеют общих множителей ненулевой степени.

Как известно [1], угол φ, определяющий ось симметрии

$$x\sin\varphi-y\cos\varphi=0\tag{2}$$

поля направлений уравнения (1), если таковая существует, должен удовлетворять соотношениям

$$a_{lk}^{(1)}=0,\tag{3}$$

где $m\leqslant i+k\leqslant p$, $a_{lk}^{(1)}\equiv b_{lk}^{(1)}$ при четном k, $a_{lk}^{(1)}\equiv c_{lk}^{(1)}$ при нечетном k, а $b_{lk}^{(1)}$, $c_{ik}^{(1)}$—коэффициенты уравнения, полученного из (1) после поворота координатных осей на угол φ. Ниже мы употребляем также обозначения $a_{lk},\equiv b_{lk}$, $a_{lk}^{*}\equiv c_{lk}$ при четном k и $a_{lk}\equiv c_{lk}$, $a_{lk}^{*}\equiv b_{lk}$ при нечетном k.

Условия совместности системы (3) необходимы и достаточны для существования оси симметрии вида (2) поля направлений уравнения (1) и в то же время достаточны для наличия в начале координат центра уравнения (1) [1].

В [2] были найдены условия совместности системы (3) при $m=1$, $p=3$, $b_{10}=c_{01}=0$, $b_{01}=c_{10}=1$.

В настоящей заметке дается способ, с помощью которого можно легко выписать условия совместности системы (3) для любого уравнения вида (1), и тем самым *полностью решается задача нахождения условий, при которых начало координат для уравнения (1) является центром с осью симметрии.*

Для любых натуральных m и p $(m \leqslant p)$ нами доказана следующая

Теорема 1. *Система* (3) *эквивалентна системе*

$$C_j^{(n)} \sin k_j^{(n)} \varphi + B_j^{(n)} \cos k_j^{(n)} \varphi = 0, \tag{4}$$

где $n = m,\ m+1, \dots, p;\ j = 0, 1, \dots, n;\ k_j^{(n)} = 2j - n - 1;$

$$C_j^{(n)} = \sum_{l=0}^{n} r_{jl}^{(n)} a^{*}_{n-l,l};\quad B_j^{(n)} = \sum_{l=0}^{n} (-1)^l r_{jl}^{(n)} a_{n-l,l},$$

а $r_{jl}^{(n)} = (-1)^{\left[\frac{l+1}{2}\right]} \sum_s (-1)^s \binom{l}{s} \binom{n-l}{j-s}.$

В последнем выражении суммирование распространяется на все целые s, для которых имеют смысл числа сочетаний $\binom{l}{s}$ и $\binom{n-l}{j-s}$, т. е. на все целые числа s, удовлетворяющие неравенствам $0 \leqslant s \leqslant l$ и $0 \leqslant j - s \leqslant n - l$.

Вычисления дают для элементов матрицы

$$\left\| \begin{matrix} r_{00}^{(n)} & r_{01}^{(n)} & \cdot\ \cdot\ \cdot & r_{0n}^{(n)} \\ r_{10}^{(n)} & r_{11}^{(n)} & \cdot\ \cdot\ \cdot & r_{1n}^{(n)} \\ \cdot & \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot \\ r_{n0}^{(n)} & r_{n1}^{(n)} & \cdot\ \cdot\ \cdot & r_{nn}^{(n)} \end{matrix} \right\| \tag{5}$$

при $n = 1, 2, \dots, 10$ следующие значения (против каждой строки указаны справа соответствующие числа $k_j^{(n)}$, налево вынесены общие множители по строкам):

$n = 1$

$$\left\| \begin{array}{rr} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{array} \right\| \begin{array}{r} -2 \\ 0 \end{array}$$

$n = 2$

$$\left\| \begin{array}{rrr} 1 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{array} \right\| \begin{array}{r} -3 \\ -1 \\ 1 \end{array}$$

$n = 3$

$$\left\| \begin{array}{rrrr} 1 & -1 & -1 & 1 \\ 3 & -1 & 1 & -3 \\ 3 & 1 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \end{array} \right\| \begin{array}{r} -4 \\ -2 \\ 0 \\ 2 \end{array}$$

$n = 4$

$$\begin{array}{r} \\ 2 \\ 2 \\ 2 \\ \\ \end{array} \left\| \begin{array}{rrrrr} 1 & -1 & -1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 0 & -1 & -2 \\ 3 & 0 & 1 & 0 & 3 \\ 2 & 1 & 0 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & -1 & -1 & 1 \end{array} \right\| \begin{array}{r} -5 \\ -3 \\ -1 \\ 1 \\ 3 \end{array}$$

$n = 5$

$$\begin{array}{r} \\ \\ 2 \\ 2 \\ \\ \\ \end{array} \left\| \begin{array}{rrrrrr} 1 & -1 & -1 & 1 & 1 & -1 \\ 5 & -3 & -1 & -1 & -3 & 5 \\ 5 & -1 & 1 & -1 & 1 & -5 \\ 5 & 1 & 1 & 1 & 1 & 5 \\ 5 & 3 & -1 & 1 & -3 & -5 \\ 1 & 1 & -1 & -1 & 1 & 1 \end{array} \right\| \begin{array}{r} -6 \\ -4 \\ -2 \\ 0 \\ 2 \\ 4 \end{array}$$

$n = 6$

$$\begin{array}{r} \\ 2 \\ \\ 4 \\ \\ 2 \\ \\ \end{array} \left\| \begin{array}{rrrrrrr} 1 & -1 & -1 & 1 & 1 & -1 & -1 \\ 3 & -2 & -1 & 0 & -1 & 2 & 3 \\ 15 & -5 & 1 & -3 & -1 & -5 & -15 \\ 5 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 5 \\ 15 & 5 & 1 & 3 & -1 & 5 & -15 \\ 3 & 2 & -1 & 0 & -1 & -2 & 3 \\ 1 & 1 & -1 & -1 & 1 & 1 & -1 \end{array} \right\| \begin{array}{r} -7 \\ -5 \\ -3 \\ -1 \\ 1 \\ 3 \\ 5 \end{array}$$

$n = 7$

$$\left\| \begin{array}{rrrrrrrr} 1 & -1 & -1 & 1 & 1 & -1 & -1 & 1 \\ 7 & -5 & -3 & 1 & -1 & 3 & 5 & -7 \\ 21 & -9 & -1 & -3 & -3 & -1 & -9 & 21 \\ 35 & -5 & 5 & -3 & 3 & -5 & 5 & -35 \\ 35 & 5 & 5 & 3 & 3 & 5 & 5 & 35 \\ 21 & 9 & -1 & 3 & -3 & 1 & -9 & -21 \\ 7 & 5 & -3 & -1 & -1 & -3 & 5 & 7 \\ 1 & 1 & -1 & -1 & 1 & 1 & -1 & -1 \end{array} \right\| \begin{array}{r} -8 \\ -6 \\ -4 \\ -2 \\ 0 \\ 2 \\ 4 \\ 6 \end{array}$$

$n = 8$

$$\begin{array}{r} \\ 2 \\ 2 \\ 2 \\ 2 \\ 2 \\ 2 \\ 2 \\ \\ \end{array} \left\| \begin{array}{rrrrrrrrr} 1 & -1 & -1 & 1 & 1 & -1 & -1 & 1 & 1 \\ 4 & -3 & -2 & 1 & 0 & 1 & 2 & -3 & -4 \\ 14 & -7 & -2 & -1 & -2 & 1 & -2 & 7 & 14 \\ 28 & -7 & 2 & -3 & 0 & -3 & -2 & -7 & -28 \\ 35 & 0 & 5 & 0 & 3 & 0 & 5 & 0 & 35 \\ 28 & 7 & 2 & 3 & 0 & 3 & -2 & 7 & -28 \\ 14 & 7 & -2 & 1 & -2 & -1 & -2 & -7 & 14 \\ 4 & 3 & -2 & -1 & 0 & -1 & 2 & 3 & -4 \\ 1 & 1 & -1 & -1 & 1 & 1 & -1 & -1 & 1 \end{array} \right\| \begin{array}{r} -9 \\ -7 \\ -5 \\ -3 \\ -1 \\ 1 \\ 3 \\ 5 \\ 7 \end{array}$$

$n = 9$

$$\begin{array}{r} \\ \\ 4 \\ 4 \\ 2 \\ 2 \\ 4 \\ 4 \\ \\ \\ \end{array} \left\| \begin{array}{rrrrrrrrrr} 1 & -1 & -1 & 1 & 1 & -1 & -1 & 1 & 1 & -1 \\ 9 & -7 & -5 & 3 & 1 & 1 & 3 & -5 & -7 & 9 \\ 9 & -5 & -2 & 0 & -1 & 1 & 0 & 2 & 5 & -9 \\ 21 & -7 & 0 & -2 & -1 & -1 & -2 & 0 & -7 & 21 \\ 63 & -7 & 7 & -3 & 3 & -3 & 3 & -7 & 7 & -63 \\ 63 & 7 & 7 & 3 & 3 & 3 & 3 & 7 & 7 & 63 \\ 21 & 7 & 0 & 2 & -1 & 1 & -2 & 0 & -7 & -21 \\ 9 & 5 & -2 & 0 & -1 & -1 & 0 & -2 & 5 & 9 \\ 9 & 7 & -5 & -3 & 1 & -1 & 3 & 5 & -7 & -9 \\ 1 & 1 & -1 & -1 & 1 & 1 & -1 & -1 & 1 & 1 \end{array} \right\| \begin{array}{r} -10 \\ -8 \\ -6 \\ -4 \\ -2 \\ 0 \\ 2 \\ 4 \\ 6 \\ 8 \end{array}$$

$n = 10$

$$\begin{array}{r} \\ 2 \\ \\ 8 \\ 2 \\ 4 \\ 2 \\ 8 \\ \\ 2 \\ \\ \end{array} \left\| \begin{array}{rrrrrrrrrrr} 1 & -1 & -1 & 1 & 1 & -1 & -1 & 1 & 1 & -1 & -1 \\ 5 & -4 & -3 & 2 & 1 & 0 & 1 & -2 & -3 & 4 & 5 \\ 45 & -27 & -13 & 3 & -3 & 5 & 3 & 3 & 13 & -27 & -45 \\ 15 & -6 & -1 & -1 & -1 & 0 & -1 & 1 & -1 & 6 & 15 \\ 105 & -21 & 7 & -7 & 1 & -5 & -1 & -7 & -7 & -21 & -105 \\ 63 & 0 & 7 & 0 & 3 & 0 & 3 & 0 & 7 & 0 & 63 \\ 105 & 21 & 7 & 7 & 1 & 5 & -1 & 7 & -7 & 21 & -105 \\ 15 & 6 & -1 & 1 & -1 & 0 & -1 & -1 & -1 & -6 & 15 \\ 45 & 27 & -13 & -3 & -3 & -5 & 3 & -3 & 13 & 27 & -45 \\ 5 & 4 & -3 & -2 & 1 & 0 & 1 & 2 & -3 & -4 & 5 \\ 1 & 1 & -1 & -1 & 1 & 1 & -1 & -1 & 1 & 1 & -1 \end{array} \right\| \begin{array}{r} -11 \\ -9 \\ -7 \\ -5 \\ -3 \\ -1 \\ 1 \\ 3 \\ 5 \\ 7 \\ 9 \end{array}$$

Теперь нетрудно выписать любое уравнение системы (4). Так, например, уравнение, соответствующее седьмой строке матрицы (5) при $n = 8$, запишется так:

$$(14c_{80} + 7b_{71} - 2c_{62} + b_{53} - 2c_{44} - b_{35} - 2c_{26} - 7b_{17} + 14c_{08}) \sin 3\varphi + \\ + (14b_{80} - 7c_{71} - 2b_{62} - c_{53} - 2b_{44} + c_{35} - 2b_{26} + 7c_{17} + 14b_{08}) \cos 3\varphi = 0,$$

уравнение, соответствующее второй строке матрицы (5) при $n = 7$, будет:

$$(7c_{70} - 5b_{61} - 3c_{52} + b_{43} - c_{34} + 3b_{25} + 5c_{16} - 7b_{07}) \sin 6\varphi - \\ - (7b_{70} + 5c_{61} - 3b_{52} - c_{43} - b_{34} - 3c_{25} + 5b_{16} + 7c_{07}) \cos 6\varphi = 0,$$

а уравнение, соответствующее шестой строке матрицы (5) при $n=9$, имеет вид:

$$63b_{90}-7c_{81}+7b_{72}-3c_{63}+3b_{54}-3c_{45}+3b_{36}-7c_{27}+7b_{18}-63c_{09}=0.$$

Распространяя результаты работы [3] на случай любых целых k_j, легко установить, что имеет место

Теорема 2. *Для совместности системы* (4) *необходимо и достаточно выполнение условий*

$$\operatorname{Im}\Pi'\ (C_j^{(n)}+iB_j^{(n)})^{p_{js}^{(n)}}=0\ (s=1,\ 2,\ldots q), \tag{6}$$

в которых целые числа $p_{js}^{(n)}$ *и натуральное число* q *таковы, что выражения* $p_j^{(n)}=\sum\limits_{s=1}^{q} w_s\,p_{js}^{(n)}$ *при произвольных целых* w_s *дают общее решение в целых числах для уравнения*

$$\sum{}' p_j^{(n)}\,k_j^{(n)}=0, \tag{7}$$

причем произведение Π' *и сумма* Σ' *распространены лишь на те* j *и* n, *для которых* $C_j^{(n)}+i\,B_j^{(n)}\neq 0$, *а* $q+1$ — *число таких выражений.*

Заметим, что если равны нулю все числа $k_j^{(n)}$, входящие в уравнение (7), и условия (6) выполнены, то поле направлений дифференциального уравнения (1) симметрично относительно всех прямых, проходящих через начало координат. В противном случае при выполнении условий (6) система (4) эквивалентна уравнению

$$\operatorname{Im}\left(e^{ki\varphi}\,\Pi'(C_j^{(n)}+iB_j^{(n)})^{q_j^{(n)}}\right)=0,$$

определяющему k различных осей симметрии, в котором k — общий наибольший делитель абсолютных величин отличных от нуля чисел $k_j^{(n)}$, входящих в уравнение (7), а целые числа $q_j^{(n)}$ образуют решение уравнения

$$\sum{}' q_j^{(n)}\,k_j^{(n)}=k.$$

Пользуясь этими результатами, легко выписывать и условия совместности системы (4), которые, как отмечено выше, достаточны для наличия в начале координат центра уравнения (1). Такими условиями при $m=1$, $p=4$, $b_{10}=c_{01}=0$, $b_{01}=c_{10}=1$, $z\equiv(c_{20}+c_{02})+i(b_{20}+b_{02})\neq 0$, будут, например, следующие:

$$(c_{20}-b_{11}-c_{02})\operatorname{Im}z^3-(b_{20}+c_{11}-b_{02})\operatorname{Re}z^3=$$
$$=(c_{20}+b_{11}-c_{02})\operatorname{Im}z+(b_{20}-c_{11}-b_{02})\operatorname{Re}z=$$
$$=(c_{30}-b_{21}-c_{12}+b_{03})\operatorname{Im}z^4-(b_{30}+c_{21}-b_{12}-c_{03})\operatorname{Re}z^4=$$
$$=(3c_{30}-b_{21}+c_{12}-3b_{03})\operatorname{Im}z^2-(3b_{30}+c_{21}+b_{12}+3c_{03})\operatorname{Re}z^3=$$
$$=3b_{30}-c_{21}+b_{12}-3c_{03}=$$
$$=(c_{30}+b_{21}-c_{12}-b_{03})\operatorname{Im}z^2+(b_{30}-c_{21}-b_{12}+c_{03})\operatorname{Re}z^2=$$
$$=(c_{40}-b_{31}-c_{22}+b_{13}+c_{04})\operatorname{Im}z^5-(b_{40}+c_{31}-b_{22}-c_{13}+b_{04})\operatorname{Re}z^5=$$

$$=(2c_{40}-b_{31}-b_{13}-2c_{04})\operatorname{Im}z^3-(2b_{40}+c_{31}+c_{13}-2b_{04})\operatorname{Re}z^3=$$
$$=(3c_{40}+c_{22}+3c_{04})\operatorname{Im}z-(3b_{40}+b_{22}+3b_{04})\operatorname{Re}z=$$
$$=(2c_{40}+b_{31}+b_{13}-2c_{04})\operatorname{Im}z+(2b_{40}-c_{31}-c_{13}-2b_{04})\operatorname{Re}z=$$
$$=(c_{40}+b_{31}-c_{22}-b_{13}+c_{04})\operatorname{Im}z^3+(b_{40}-c_{31}-b_{22}+c_{13}+b_{04})\operatorname{Re}z^3=0.$$

Автор глубоко благодарен академику АН БССР профессору Н. П. Еругину за предоставленную возможность доложить эту работу на руководимом им семинаре и полезное обсуждение.

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

1. *К. С. Сибирский*, Принцип симметрии и проблема центра, Ученые записки Кишиневского госуниверситета, т. 17 (1955), 27—34.

2. *К. С. Сибирский, И. И. Плешкан*, Условия симметрии поля направлений некоторого дифференциального уравнения, Ученые записки Кишиневского госуниверситета, т. 29 (1957), 11—14.

3. *К. С. Сибирский*, К вопросу о решении некоторых систем тригонометрических уравнений, Ученые записки Кишиневского госуниверситета, т. 54(1960), 21—27.

Поступило
9.VII 1962 г.

И. А. ФЕЛЬДМАН

ОДНА ТЕОРЕМА О ВОЗМУЩЕНИИ САМОСОПРЯЖЕННОГО ОПЕРАТОРА

В настоящей заметке устанавливается одна теорема о спектре оператора вида $A + UV$, где A — самосопряженный оператор, U — ограниченный, V — замкнутый операторы, удовлетворяющие относительно A определенным условиям.

Для случая $U = I$ более полный результат получен И. Ц. Гохбергом и М. Г. Крейном [1]. Вместе с тем доказываемая теорема уточняет и усиливает один результат Р. М. Мартиросяна [2].

Приведем некоторые определения, заимствованные в основном из [1]. Пусть A — линейный оператор, действующий из банахова пространства E_1 в банахово пространство E_2. Примем следующие обозначения: $D(A)$ $(\subset E_1)$ — область определения оператора A, $R(A)$ $(\subset E_2)$ — множество его значений, $Z(A)$ — множество решений уравнения $Ax = o$, $\alpha(A) = \dim Z(A)$, $\beta(A) = \dim E_2/\overline{R(A)}$. Если числа $\alpha(A)$ и $\beta(A)$ конечны, то их разность $\varkappa(A) = \alpha(A) - \beta(A)$ называется **индексом** оператора A. Замкнутый нормально разрешимый оператор A называется Φ_{+} (Φ_{-})-**оператором**, если число $\alpha(A)$ $(\beta(A))$ конечно, и **Ф-оператором**, если оба числа $\alpha(A)$ и $\beta(A)$ конечны.

Линейный ограниченный оператор M, действующий из E_2 в E_1 (из E_1 в E_2) называется **правым** (**левым**) **регуляризующим** для оператора A, если $R(M) \subset D(A)$ и $AM = I + T$ $(MAx = (I + T)x$, $x \in D(A))$, где I — тождественный, а T — вполне непрерывный операторы, действующие в E_2 (E_1). Если замкнутый оператор A допускает правую (левую) регуляризацию, то он является Φ_{-} (Φ_{+})-оператором. Замкнутый оператор A является Ф-оператором тогда и только тогда, когда он допускает правую и левую регуляризацию.

Пусть A — замкнутый оператор, действующий в банаховом пространстве E. Точка λ комплексной плоскости называется **Ф-точкой** оператора A, если $A - \lambda I$ (I — тождественный оператор в E) является Ф-оператором. Множество Φ_A всех Ф-точек оператора A называется **Ф-множеством** оператора A.

Лемма. *Пусть A—некоторый Ф-оператор, действующий в банаховом пространстве E, M — какой-нибудь его правый регуляризующий оператор $(AM = I + T)$, U—ограниченный, а V—замкнутый операторы, причем $D(A) \subset D(V)$. Если оператор VMU вполне непрерывен, то оператор $B = A + UV$ является Ф-оператором и $\varkappa(B) = \varkappa(A)$.*

Доказательство. В самом деле, если оператор VMU вполне непрерывен, то $I + VMU$ является Ф-оператором. Так как оператор VM ограничен, то Ф-оператором будет оператор $I + UVM$ ([3], теорема 1), а следовательно, и оператор $BM = I + UVM + T$ ([1], теорема 2.3). Отсюда легко вывести, что оператор B допускает правую регуляризацию и поэтому является Ф-оператором. Приведенные рассуждения остаются в силе при замене U на λU, где λ — произвольное комплексное число. Стало быть, оператор $B_\lambda = A + \lambda UV$ есть Ф-оператор для всех комплексных λ.

Если для элементов $x \in D(A)$ ввести новую норму $\| x \| = | x | + | Ax |$, то в этой норме $D(A)$ становится банаховым пространством, а оператор B_λ, действующий из $D(A)$ в E, ограничен, непрерывно зависит от λ и для всех λ является Ф-оператором. В силу теорем об устойчивости индекса ([1], теоремы 2.4 и 7.2) индекс оператора B_λ сохраняет постоянное значение для всех λ. В частности, $\varkappa(B) = \varkappa(B_1) = \varkappa(B_0) = \varkappa(A)$.

Лемма доказана.

Теорема. *Пусть A — самосопряженный, U — ограниченный, а V—замкнутый операторы, действующие в гильбертовом пространстве H, причем $D(A) \subset D(V)$ и $B = A + UV$. Если оператор $VR_\lambda U$, где R_λ — резольвента оператора A, вполне непрерывен для всех значений λ из некоторого множества, имеющего хотя бы по одной предельной точке в верхней и нижней полуплоскостях, то*

$$\Phi_B = \Phi_A .$$

Если, кроме того, оператор V ограничен, то весь невещественный спектр оператора B состоит из изолированных собственных значений, которым соответствуют конечномерные нормально отщепляющиеся корневые подпространства[1]).

Доказательство. Заметим прежде всего, что оператор—функция $T_\lambda = VR_\lambda U$ голоморфна в множестве $\rho(A)$ регулярных точек оператора A. Это следует из равенства

$$VR_\lambda U = VR_\mu U + (\lambda - \mu) VR_\mu R_\lambda U \quad (\lambda \in \rho(A)),$$

где μ — некоторая фиксированная точка из $\rho(A)$, если учесть, что оператор VR_μ ограничен. Покажем теперь, что оператор T_λ вполне непрерывен в каждой точке множества $\rho(A)$[2]).

Пусть Ω — нормированное кольцо всех линейных ограниченных операторов, а Σ — двусторонний замкнутый идеал всех вполне непрерывных операторов. Обозначим через $\hat{\Omega}$ фактор-кольцо Ω/Σ и через $\hat{A}$ — класс вычетов из $\hat{\Omega}$, содержащий оператор A. Норма элемента $\hat{A}$ определяется равенством

$$| \hat{A} | = \inf_{T \in \Sigma} | A + T | .$$

Элемент $\hat{T}_\lambda$ аналитически зависит от λ в области $\rho(A)$ и обращается в нуль на множестве, имеющем предельные точки в верхней и нижней полуплоскостях, поэтому он равен нулю всюду в $\rho(A)$; последнее означает, что оператор T_λ вполне непрерывен для всех $\lambda \in \rho(A)$. Из приведенных замечаний и леммы следует, что $\rho(A) \subset \Phi_B$. Пусть

---

[1]) Определение см. в [1], стр. 66.

[2]) Этим замечанием автор обязан И. Ц. Гохбергу.

теперь λ_0 — нерегулярная Φ-точка оператора A. В этом случае пространство H разлагается в ортогональную сумму подпространств $Z(A-\lambda_0 I)$ и $R(A-\lambda_0 I)$, и вблизи точки λ_0 резольвента R_λ допускает представление

$$R_\lambda = P(\lambda-\lambda_0)^{-1} + R_\lambda^+ \quad (0 < |\lambda-\lambda_0| < \gamma,\ \gamma > 0), \qquad (1)$$

где P — ортогональный проектор на $Z(A-\lambda_0 I)$, а оператор-функция R_λ^+ голоморфна в круге $|\lambda-\lambda_0| < \gamma$.

При этом

$$(A-\lambda I)R_\lambda^+ = I - P \quad (|\lambda-\lambda_0| < \gamma). \qquad (2)$$

Из соотношения (1) следует, что оператор $VR_\lambda^+U(0 < |\lambda_0-\lambda| < \gamma)$ вполне непрерывен. В силу теоремы 5.10.1 из [4] R_λ^+ является решением резольвентного уравнения. Повторяя рассуждения, проведенные в начале доказательства, получим, что оператор-функция VR_λ^+U голоморфна в круге $|\lambda-\lambda_0| < \gamma$. Следовательно,

$$\lim_{\lambda\to\lambda_0} |VR_\lambda^+U - VR_{\lambda_0}^+U| = 0,$$

и, стало быть, оператор $VR_{\lambda_0}^+U$ вполне непрерывен. Из соотношения (2) следует, что $R_{\lambda_0}^+$ является правым регуляризирующим для оператора $A-\lambda_0 I$. В силу леммы λ_0 является Φ-точкой оператора B. Таким образом, $\Phi_A \subset \Phi_B$.

Обратно, пусть λ_0 — вещественная Φ-точка оператора B. Как показано в [5] (см. доказательство теоремы 6), существует оператор-функция $\tilde{R}_\lambda$, голоморфная в области $G(0 < |\lambda-\lambda_0| < \gamma,\ \gamma > 0)$, являющаяся решением резольвентного уравнения и удовлетворяющая для всех $\lambda \in G$ соотношениям:

$$(B-\lambda I)\tilde{R}_\lambda = I - Q_\lambda,\ \tilde{R}_\lambda(B-\lambda I)x = (I-P_\lambda)x\ (x \in D(B)), \qquad (3)$$

где Q_λ и P_λ — конечномерные проекторы, аналитически зависящие от λ в круге $|\lambda-\lambda_0| < \gamma$.

С помощью соотношений (3) нетрудно установить равенство[3]

$$R_\lambda - \tilde{R}_\lambda = \tilde{R}_\lambda UVR_\lambda - K_\lambda\ (\lambda \in G \cap \rho(A)), \qquad (4)$$

где K_λ — конечномерный оператор. Из равенства (4) следует, что оператор $V\tilde{R}_\lambda U$ вполне непрерывен для точек $\lambda \in G \cap \rho(A)$.

Пусть $\tilde{R}_\lambda^-$ и $\tilde{R}_\lambda^+$ — соответственно главная и правильная части разложения в ряд Лорана оператор-функции $\tilde{R}_\lambda$ вблизи точки λ_0. Так как оператор $\tilde{R}_\lambda^-(\lambda \neq \lambda_0)$ конечномерен [5], а оператор-функция $\tilde{R}_\lambda^+$ является решением резольвентного уравнения [4], то, рассуждая как выше, приходим к заключению, что оператор $V\tilde{R}_{\lambda_0}^+U$ вполне непрерывен. Нетрудно убедиться в том, что $\tilde{R}_{\lambda_0}^+$ является правым регуляризирующим для оператора $B-\lambda_0 I$ (в [5] установлено, что $\tilde{R}_{\lambda_0}^+$ — левый регуляризирующий для оператора $B-\lambda_0 I$). Применяя лемму к операторам $B-\lambda_0 I$ и $A-\lambda_0 I = B-\lambda_0 I - UV$, получим, что $A-\lambda_0 I$ является Φ-оператором. Таким образом, равенство $\Phi_B = \Phi_A$ установлено.

Так как верхняя и нижняя полуплоскости содержатся в Φ-множестве оператора B, то для доказательства последнего утверждения теоремы достаточно установить, что в каждой из этих полуплоскостей содержится хотя бы по одной регулярной точке оператора B ([1], следствие из теоремы 3.3 и теорема 4.2). Но если оператор V ограничен и λ удовлетворяет неравенству $|\mathrm{Im}\lambda| > |UV|$, то

$$|UVR_\lambda| \leqslant |UV|\,|\mathrm{Im}\lambda|^{-1} < 1,$$

и, следовательно, оператор $B-\lambda I = (I+UVR_\lambda)(A-\lambda I)$ обратим.

Теорема доказана.

Согласно теореме 5.1 из статьи И. Ц. Гохберга и М. Г. Крейна [1] при $U=I$ последнее утверждение теоремы сохраняет силу для любого замкнутого оператора V, для которого оператор VR_λ вполне непрерывен хотя бы в одной точке λ. Заметим, что рассуждения этих авторов полностью применимы и в том случае, когда V — замкнутый оператор, U — ограниченный оператор, коммутирующий с A, и оператор $VR_\lambda U$ вполне непрерывен хотя бы в одной точке λ.

В случае $V=U$ из доказанной теоремы следует теорема 1 Р. М. Мартиросяна [2].

Пользуюсь случаем выразить благодарность И. Ц. Гохбергу и А. С. Маркусу за постановку задачи и ценные советы.

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

1. *И. Ц. Гохберг* и *М. Г. Крейн*, Усп. матем наук, т. 12. вып. 2 (1957), 43—118.
2. *Р. М. Мартиросян*, Изв. АН Арм. ССР, сер. физ.-мат. наук, 14, № 5 (1961), 7—17.
3. *F. V. Atkinson*, Acta Sci. Math. Szeged, 15, № 1 (1953), 38—56.
4. *Э. Хилл*, Функциональный анализ и полугруппы, М., Изд-во иностр. лит., 1951.
5. *И. Ц. Гохберг* и *А. С. Маркус*, Изв. высших учебн. завед., Математика, № 2 (15) (1960), 74—87.

Поступило
9.V 1962 г.

---

[3] то равенство аналогично второму резольвентному уравнению ([4], стр. 147).

В. Г. ЧЕБАН

ОБ ОЦЕНКАХ РЕШЕНИЙ ЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ

1. Пусть $\| a_{ik} \|_1^\infty$ — бесконечная матрица, составленная из комплексных чисел, удовлетворяющих условию

$$\sup_{i=1,2,\dots} \sum_{k=1}^{\infty} | a_{ik} | = \theta < 1. \tag{1}$$

Как известно [1], при этом предположении система уравнений

$$x_i - \sum_{k=1}^{\infty} a_{ik} x_k = y_i \quad (i = 1, 2, \dots),$$

где y_i — заданные числа, удовлетворяющие условию

$$\sup_i | y_i | = P < \infty, \tag{2}$$

имеет единственное ограниченное решение $\{x_i\} (\sup_i | x_i | < \infty)$, причем для этого решения, которое может быть получено методом последовательных приближений, имеет место оценка

$$\sup_i | x_i | < \frac{P}{1-Q}. \tag{3}$$

При некоторых дополнительных ограничениях, наложенных на матрицу $\| a_{ik} \|$, оценка (3) может быть улучшена.

В статье [2] показано, что если кроме условий (1) и (2) выполняются также условия

$$a_{ik} \geqslant 0 \text{ и } y_i \geqslant 0 \ (i, k = 1, 2, \dots),$$

то имеет место более точная оценка

$$y_i \leqslant x_i \leqslant y_i + \frac{PQ}{1-Q} (i = 1,2,3, \dots); \tag{4}$$

а если выполняются условия

$$a_{ik} \leqslant 0 \text{ и } y_i \geqslant 0 \quad (i, k, = 1, 2 \dots),$$

то

$$y_i - \frac{PQ}{1-Q^2} \leqslant x_i \leqslant y_i + \frac{PQ^2}{1-Q^2} (i = 1, 2, \dots). \tag{5}$$

В настоящей заметке будет показано, что оценки (4) и (5) являются следствиями одного простого и общего предложения об операторах, оставляющих инвариантным конус. Общий подход позволяет получить ряд других оценок, подобных оценкам (4) и (5), и одновременно обобщить эти оценки для интегральных уравнений.

2. Пусть K — произвольный замкнутый конус [3] в банаховом пространстве E. Как обычно, внесем частичное упорядочение для элементов пространства E, полагая $x \geqslant y$, если $x - y \in K$.

1°. *Пусть A — линейный оператор, действующий в пространстве E и обладающий свойствами:*

$$\| A \| < 1 \text{ и } A(K) \subseteq K. \tag{6}$$

Тогда единственные решения x и z соответственно уравнений

$$x - Ax = y, \ z + Az = y \ (x, \ z, \ y \in E), \tag{7}$$

где $y \geqslant 0$, удовлетворяют соотношениям:

$$x \geqslant y, \tag{8}$$

$$y - (Ay + A^3y + \dots + A^{2n-1}y + \dots) \leqslant z \leqslant y + A^2y + A^4y + \dots + A^{2n}y + \dots. \tag{9}$$

В самом деле, вектор x определяется формулой

$$x = (I - A)^{-1} y = y + Ay + A^2y + \dots + A^n y + \dots.$$

Так как для любых целых n вектор $A^n y \in K$, то $x - y \in K$, и, следовательно, получим соотношение (8). Учитывая, что

$$(I + A)^{-1} = I - A + A^2 - A^3 + \dots,$$

получаем

$$z = y + A^2y + A^4y + \dots - (Ay + A^3y + A^5y + \dots). \tag{10}$$

Так как векторы

$$\sum_{i=1}^{\infty} A^{2i} y, \ \sum_{i=1}^{\infty} A^{2i-1} y \in K,$$

то из равенства (10) непосредственно вытекает соотношение (9).

3. Укажем на некоторые приложения соотношений (8) и (9).

а) Пусть $E = m$ (т. е. пространство ограниченных числовых последовательностей) [4] и пусть K — конус всех последовательностей из m с неотрицательными координатами и A — оператор, определенный в m матрицей $\| a_{ik} \|_1^\infty$. В рассматриваемом случае условия (6) имеют вид:

$$\| A \| = \sup_i \sum_{k=1}^{\infty} | a_{ik} | < 1 \text{ и } a_{ik} \geqslant 0 \ (i, \ k = 1, \ 2, \dots),$$

а соотношения (8) и (9) (при $y_i \geqslant 0$) означают

$$x_i \geqslant y_i \ (i = 1, \ 2, \dots) \tag{11}$$

и

$$y_i-[Ay+A^3y+\ldots+A^{2n-1}y+\ldots]_i\leqslant z_i\leqslant y_i+ \\ +[A^2y+A^4y+\ldots+A^{2n}y+\ldots]_i,\ (i=1,\ 2,\ \ldots), \tag{12}$$

где символ $[b]_i$ обозначает i-ю координату векторов b в пространстве m.

Так как

$$x_i=y_i+[Ay+A^2y+A^3y+\ldots]_i,$$

получаем

$$x_i\leqslant y_i+\frac{\| A\|}{1-\| A\|}\| y\|. \tag{13}$$

Тогда из (11) и (13) вытекает соотношение

$$y_i\leqslant x_i\leqslant y_i+\frac{\| A\|}{1-\| A\|}\| y\|, \tag{14}$$

совпадающее с (4). Аналогично из (12) получаем

$$y_i-\frac{\| A\|}{1-\| A\|^2}\ \| y\|\leqslant z_i\leqslant y_i+\ \frac{\| A\|^2}{1-\| A\|^2}\| y\|\,(i=1,\ 2,\ \ldots). \tag{15}$$

Соотношение (15), очевидно, совпадает с оценками (5).

б) Положим $E=l_2$ [4], K — конус всех последовательностей из l_2 с неотрицательными координатами и пусть для оператора A, определенного в l_2 матрицей $\| a_{ik}\|_1^\infty$, выполнены условия

$$\| A\|\leqslant\left(\sum_{i,\ k=1}^{\infty}|a_{ik}|^2\right)^{\frac{1}{2}}=Q<1$$

и

$$a_{ik}\geqslant 0\quad (i,\ k=1,\ 2,\ldots).$$

Тогда из (9) следуют соотношения (12), а поэтому

$$|z_i-y_i|<c_i\ (i=1,\ 2,\ldots),$$

где

$$c_i=\max\left\{\left[\sum_{i=1}^{\infty}A^{2i-1}y\right]_i,\left[\sum_{i=1}^{\infty}A^{2i}y\right]_i\right\}.$$

Очевидно,

$$\left(\sum_{i=1}^{\infty}c_i^2\right)^{\frac{1}{2}}\leqslant\frac{\| A\|}{1-\| A\|^2}\| y\|\leqslant\frac{Q}{1-Q^2}\| y\|,$$

а следовательно,

$$\left(\sum_{i=1}^{\infty}|z_i-y_i|^2\right)^{\frac{1}{2}}\leqslant\frac{Q}{1-Q^2}\left(\sum_{i=1}^{\infty}y_i^2\right)^{\frac{1}{2}};$$

отсюда следует еще, что

$$\left(\sum_{i=1}^{\infty}|z_i|^2\right)^{\frac{1}{2}}\leqslant\left(1+\frac{Q}{1-Q^2}\right)\left(\sum_{i=1}^{\infty}|y_i|^2\right)^{\frac{1}{2}}. \tag{16}$$

в) Пусть $E=C(0,1)$ [4], K — конус всех неотрицательных функций из $C(0,1)$ и A — оператор, определенный в $C(0,1)$ равенством

$$(Af)(t)=\int_0^1 K(t,\ s)\,f(s)\,ds, \tag{17}$$

где $K(t,\ s)$ $(0<t,\ s<1)$ — непрерывное ядро, удовлетворяющее условиям,

$$\| A\|\ \sup_{0\leqslant t\leqslant 1}=\int_0^1|K(t,\ s)|\,ds<1,\ K(t,\ s)\geqslant 0\ (0\leqslant t,\ s\leqslant 1).$$

Тогда в качестве следствия предложения 1° получаем, что для решений $x(t)$ и $z(t)$уравнений (7) имеют место оценки:

$$y(t)\leqslant x(t)\leqslant y(t)+\frac{\| A''\|}{1-\| A\|}\| y\|\quad (0\leqslant t\leqslant 1)$$

$$y(t)-\frac{\| A\|}{1-\| A\|^2}\| y\|\leqslant z(t)\leqslant y(t)+\frac{\| A\|}{1-\| A\|^2}\| y\|\ \ (0\leqslant t\leqslant 1).$$

2) Рассмотрим, наконец, случай $E=L_2\ (0,\ 1)$, K — конус неотрицательных функций в L_2 (0,1), $K\ (t,\ s)$ — ядро, удовлетворяющее условиям

$$K(t,\ s)\geqslant 0\ \text{и}\ \int_0^1\int_0^1 K^2(t,\ s)\,dt\,ds=Q^2<1.$$

Пусть оператор A определен в $L_2(0,1)$ равенством (17), тогда легко вывести следующую оценку, аналогичную оценке (16):

$$\left(\int_0^1|z(t)|^2\,dt\right)^{\frac{1}{2}}\leqslant\left(1+\frac{Q}{1-Q^2}\right)\left(\int_0^1|y(t)|^2\,dt\right)^{\frac{1}{2}}. \tag{18}$$

Число приведенных приложений предложения 1° можно легко увеличить. Оценки типа (16) и (18) можно получить для других классов конкретных операторов и конкретных пространств, в которых имеются эффективные оценки норм этих операторов.

В заключение автор приносит благодарность И. Ц. Гохбергу за советы при написании этой заметки.

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

1. *Л. В. Канторович, И. В. Крылов,* Приближенные методы высшего анализа, Гостехиздат, 1949.
2. *Э. Г. Дейч,* О некоторых бесконечных системах уравнений, Журнал вычислительной математики и математической физики, т. I, № 1, 1961.
3. *М. Г. Крейн, М. А. Рутман,* Линейные операторы, оставляющие инвариантным конус в пространстве Банаха, УМН, т. III, вып. 1(23), 1948.
4. *Л. А. Люстерник, В. И. Соболев,* Элементы функционального анализа, Гостехиздат, 1951.

Поступило
13.VI 1962 г.

СОДЕРЖАНИЕ

Краткие сообщения

ИЗВЕСТИЯ

АКАДЕМИИ НАУК МОЛДАВСКОЙ ССР № 1

(Серия естественных и технических наук)

Редакторы *Б. Г. Сыров* и *Л. К. Мальцева*
Художественный редактор *В. Л. Пленцковский*
Технический редактор *С. А. Полонский*
Корректор *Т. К. Плинк*

Сдано в набор 4.XII 1962 г. Подписано к печати 7/III 1963 г.
Формат бумаги $70\times108^{1}/_{16}$. Печ. л. 8,05. Уч.-изд. л. 7,20.
Тираж 500 экз. АБ 02099. Заказ №849. Цена 50 коп.

Государственное издательство «Картя Молдовеняскэ»
Кишинев, Жуковского, 44

Полиграфкомбинат, Кишинев, Госпитальная, 32.