

2022

Национальная академия наук Кыргызской Республики  
Институт машиноведения и автоматики

Кыргызско-Российский Славянский университет  
им. Б.Н. Ельцина

Диссертационный совет Д 05.21.631

На правах рукописи

УДК: 517.711.3:621.394(575.2)(043.3)

Кокозова Айнагул Жылкычиевна

Разработка математической модели и численное регуляризованное решение  
обратной и прямой задачи телеграфного уравнения

05.13.18 – математическое моделирование, численные методы и комплексы  
программ

Автореферат диссертации на соискание ученой степени  
кандидата физико-математических наук

Бишкек – 2022

Работа выполнена на кафедре информационных технологий и управления  
Ошского технологического университета имени академика М.М. Адышева.

**Научный руководитель:** Сатыбаев Абдуганы Джунусович  
доктор физико-математических наук, профессор,  
заведующий кафедрой информационных технологий и  
управления Ошского технологического университета  
имени академика М.М. Адышева

**Официальные оппоненты:** Дженалиев Муваширхан Танабаевич  
доктор физико-математических наук, профессор, главный  
научный сотрудник Института математики и  
математического моделирования Комитета науки  
Министерства образования и науки Республики  
Казахстан (г. Алматы, Республика Казахстан)  
Уралиев Алымбек Абдыраевич  
кандидат физико-математических наук, доцент кафедры  
дифференциальных уравнений Кыргызского  
национального университета им. Ж.Баласагына (г. Бишкек  
Кыргызская Республика)

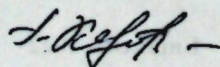
**Ведущая организация:** Институт электроники и телекоммуникации Кыргызского  
Государственного технического университета им. И.  
Раззакова, г.Бишкек, 720044 пр. Ч. Айтматова, 66

Защита диссертации состоится 23 декабря 2022 года в 14:00 часов на заседании  
диссертационного совета Д 05.21.631 по защите диссертаций на соискание ученой  
степени доктор а (кандидата) физико-математических и технических наук при  
Институте машиноведения и автоматизации Национальной академии наук Кыргызской  
Республики и Кыргызско-Российском Славянском университете им. Б.Н. Ельцина по  
адресу 720071, г. Бишкек, пр. Чуй, 265, ауд. 349. Идентификационный код онлайн  
трансляции защиты диссертации <https://vc.vak.kg/b/052-dry-zfv-dd6>.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеках Национальной академии  
наук Кыргызской Республики (720071, г.Бишкек, пр. Чуй, 265), Кыргызско-  
Российского Славянского университета им. Б.Н. Ельцина (720000, г. Бишкек, ул.  
Киевская, 44), Ошского технологического университета (723503, г. Ош, ул. Исанова,  
81) и на сайте по адресу [www.imash.kg](http://www.imash.kg), e-mail: [diss\\_ima@mail.ru](mailto:diss_ima@mail.ru).

Автореферат разослан 21 ноября 2022 года.

Ученый секретарь  
диссертационного совета  
к.ф.-м.н., с.н.с.



Керимкулова Г.К.

## ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

**Актуальность темы диссертации.** Диссертационная работа посвящена  
усовершенствованию математических моделей и разработке методов численного  
решения одномерной и двумерной прямой задачи и численного регуляризованного  
решения обратной задачи телеграфного уравнения.

Как правило, обратные задачи относятся к некорректным задачам  
математической физики, теория которых основана А.Н. Тихоновым, В.К. Ивановым,  
М.М. Лаврентьевым и т.д. Если в прямых задачах отыскивается решение задачи при  
известных параметрах, то в обратных задачах определяются физические параметры,  
коэффициенты уравнений совместно с решением задачи при задании дополнительной  
информации о решении прямой задачи на поверхности.

В телеграфное уравнение входят физические параметры такие, как скорость  
распространения волн, электрическая и магнитная проницаемости,  
электропроводимость среды и нахождения этих параметров представляет  
практический интерес в телеграфии, сейсмике, геофизике, геоэлектрике, акустике,  
биомедицине и т.д.

Рассмотренная задача в диссертационной работе, является обратной  
гиперболической задачей динамического типа. Дополнительной информацией в  
обратных задачах динамического типа считается результат решения прямой задачи в  
определенной временноподобной поверхности. Задачи такого рода были  
исследованы в работах М.М. Лаврентьева (1966), В.Г. Романова (1985), А.С.  
Алексеева (1967), А.С. Благовещенского (1966), С.И. Кабанихина (1983) и др. Из  
более новых работ, можно отметить М.А. Шишленина (2016) и Н.С. Новикова (2017).  
В нашей республике вклад в этом направлении внесли А.Дж. Сатыбаев (2001), А.Т.  
Маматкасымова (2015) и Ю.В. Анищенко (2017), Г.А. Калдыбаева (2009).

В связи с тем, что решение обратных задач считается сложным процессом, так  
как они некорректны, неустойчивы относительно к измерительным ошибкам и часто  
могут быть нелинейными, в связи с чем разработка и обоснование численных методов  
решения, а также алгоритмов решения подобных обратных задач является актуальной  
задачей, в силу практической важности и необходимости создания эффективных  
алгоритмов решения.

Связь темы диссертации с приоритетными научными направлениями,  
крупными научными программами (проектами), основными научно-  
исследовательскими работами, проводимыми образовательными и научными  
учреждениями. Работа является инициативной.

**Цель и задачи исследования.** Целью диссертационной работы является  
усовершенствование математической модели прямой и обратной задачи  
телеграфного уравнения, разработка методов численного решения одномерной и  
двумерной прямой задачи и численного регуляризованного решения обратной задачи

телеграфного уравнения, а также его компьютерная реализация.

Для достижения поставленной цели необходимо было решить следующие задачи:

- усовершенствовать математические модели прямой и обратной задачи телеграфного уравнения, установить начальные и граничные условия при мгновенных и шнуровых источниках;
- исследовать корректность прямой задачи телеграфного уравнения, т.е. обосновать существование, единственность и устойчивость поставленной прямой задачи телеграфного уравнения;
- разработать методы численного решения прямой задачи и численного регуляризованного решения одномерной обратной задачи телеграфного уравнения, с определением коэффициентов электропроводимости среды, магнитной проницаемости и электрической проницаемости;
- разработать и проанализировать численные алгоритмы решения одномерной прямой и обратной задачи телеграфного уравнения с мгновенным источником и с плоской границей;
- Составить комплекс программ на основе разработанных алгоритмов решения.

**Научная новизна полученных результатов.** Усовершенствована математическая модель прямой и обратной задачи телеграфного уравнения, установлены граничные условия при мгновенных и шнуровых источниках, разработаны методы численного решения одномерной и двумерной прямой задачи и численного регуляризованного решения одномерной обратной задачи телеграфного уравнения.

**Практическая значимость, полученных результатов.** Практическая значимость заключается в разработке новых алгоритмов решения задач телеграфного уравнения, в возможности применения разработанных алгоритмов и программ в моделировании и решении телеграфных, геофизических, сейсмических задач, а также в биомедицине.

Полученные результаты внедрены в учебный процесс Ошского технологического университета по двум направлениям магистратуры.

**Основные положения диссертации, выносимые на защиту.**

- Математические модели прямой и обратной задачи телеграфного уравнения с граничными условиями при мгновенных и шнуровых источниках.
- Теоремы существования, единственности и теоремы условной устойчивости решения двумерной прямой задачи телеграфного уравнения.
- Теоремы сходимости конечно-разностного регуляризованного решения, для одномерных обратных задач телеграфного уравнения.
- Численное решение прямых задач, численное регуляризованное решение обратных задач телеграфного уравнения и их программная реализация.
- Анализ результатов решения, полученные в виде графиков.

**Личный вклад соискателя.** Все результаты, представленные в диссертационной работе и имеющие научную новизну, получены автором лично и под руководством научного руководителя. Автором усовершенствована математическая модель одномерной, двумерной прямой и одномерной обратной задачи телеграфного уравнения с установкой граничных условий при мгновенных и шнуровых источниках, доказана возможность комбинированного использования метода выпрямления характеристики, метода выделения особенностей, метода конечных разностей и численное регуляризованное решение обратных задач телеграфного уравнения.

Сатыбасвым А.Дж. была предложена общая идея и ему принадлежит постановка задачи исследования, внедрение полученных результатов. При реализации методов полученных результатов научного исследования были опубликованы статьи совместно с Т.Ч. Култаевым[2], Ю.В.Анищенко[8,11,13,14,15], А.Т. Маматкасымовой[15], Г.А. Калдыбаевой, А.А.[15]. Алимкановым[8,11,13,14]. Письменное согласие соавторов на использование результатов прилагаются в документации.

**Апробации результатов диссертации.** Основные результаты, полученные в диссертации, докладывались на международных конференциях: Двенадцатая международная азиатская школа-семинар "Проблемы оптимизации сложных систем", Новосибирск, Академгородок 12–16 декабря 2016 г.; В рамках «Марчуровских научных чтений – 2017» институт вычислительной математики и математической геофизики сибирского отделения российской академии наук, Новосибирск, Академгородок 25 июня–14 июля 2017 г.; Международная конференция "Математика в современном мире", посвященная 60-летию института математики им. С.Л. Соболева Новосибирск, 14–19 августа 2017 года; International Conference «Inverse Problems in Finance, Economics and Life Sciences Programm», Al-Farabi Kazakh National University, Almaty, Kazakhstan, December 26-28, 2017 г.; Четырнадцатая международная азиатская школа-семинар "Проблемы оптимизации сложных систем", Алматы, 26–28 мая 2018 г.; Международная конференция "International Conference on Analysis and Applied Mathematics (ICAAM 2018)". 6–9 сентября 2018 г. Турция, Кипр: Lefkosa (Nicosia), Mersin 10, Turkey; Международная конференция «Applied Inverse Problems» Grenoble, July 8<sup>th</sup>-12<sup>th</sup> 2019, fr.<http://aip2019-grenoble.fr>.

**Достоверность и обоснованность полученных результатов в диссертации** заключается:

- теоретически обоснованы численные решения теоремами об условной устойчивости прямых и обратных задач телеграфного уравнения и они подтверждены численными решениями и численными реализациями, полученные в виде графиков;
- для подтверждения в начале решается прямая задача и по полученным дополнительным условиям решается конечно-разностное регуляризованное решение;
- сравнивались физические параметры заданных прямых задач с физическими

параметрами полученных обратных задач по дополнительной информации прямых задач и относительные погрешности составляют в рамках требований.

**Полнота отражения результатов диссертации в публикациях.** Основные результаты по теме диссертации опубликованы в 17 научных работах, из них 7 в журналах, рекомендованных НАК ПКР; 3 в материалах международной научной конференции; 2 в зарубежном периодическом издании; 2 в журналах, зарегистрированных в системе Scopus и Web of Science; 1 в журнале Республики Казахстан, индексируемом КазБЦ (Казахстанская база цитирования) и рекомендованным КОКСОН (Комитет по обеспечению качества в сфере образования и науки) МОН РК; 2 авторских свидетельства Кыргызпатента на созданные программы ЭВМ.

**Структура и объем диссертации.** Диссертация состоит из оглавления, введения, пяти глав, которые разбиты на разделы и заключений по главам, заключения, практических рекомендаций, списка использованных источников из 92 наименований и 4 приложений. Основное содержание диссертации изложено на 167 страницах.

### ОСНОВНОЕ СОДЕРЖАНИЕ ДИССЕРТАЦИИ

Во введении обосновывается актуальность темы диссертационной работы, формулированы ее цель и задачи, научная новизна, практическая значимость результатов исследований и положения, выносимые на защиту, личный вклад автора, указана полнота отражения результатов, структура и объем диссертации.

В первой главе «Обзор литературы» приводится обзор литературы по теме диссертационной работы.

Телеграфное уравнение является одним из упрощенных видов системы уравнения Максвелла. Многие задачи электродинамики описываются полной системой уравнений Максвелла. Применяя некоторые преобразования к полной системе уравнений Максвелла, можно получить телеграфное уравнение вида:

$$\frac{\partial^2 H(z, t)}{\partial t^2} = \frac{\tilde{\epsilon}^2(z)}{\epsilon(z)\mu(z)} \cdot \frac{\partial^2 H(z, t)}{\partial z^2} - \frac{4\pi\lambda(z)}{\epsilon(z)} \frac{\partial H(z, t)}{\partial t},$$

где  $H(z, t)$  - напряженность магнитного поля,  $\tilde{\epsilon}(z)$  - скорость распространения волн,  $\epsilon(z), \mu(z)$  - электрическая и магнитная проницаемость,  $\lambda(z)$  - электропроводимость. Первые постановки таких задач были исследованы и сформулированы А. Н. Тихоновым (1990), А. С. Алексеевым (1984), А. С. Благовещенским (1997), М. М. Лаврентьевым (1978) и В. Г. Романовым (1984). А методика доказательства локальных теорем существования и единственности решения обратных динамических задач развития В. Г. Романовым (1984), а также теорем единственности и условной устойчивости в «целом» применяется в исследовании широкого круга обратных задач С. И. Кабанихиным (1991), и его учениками.

С. И. Кабанихиным (1991) был предложен подход к построению численных алгоритмов решения многомерных обратных задач для гиперболических уравнений

на основе проекционного метода В. Г. Романовым (1984), С. И. Кабанихиным (1991), Т. П. Пухначевой (1982) были исследованы обратные задачи для уравнения электродинамики. В монографии С. И. Кабанихина (1991) рассмотрены вопросы численного решения прямых и обратных задач.

В данной области следует отметить работы отечественных ученых А. Дж. Сатыбаева, (2001), Г. А. Калдыбасовой (2009), А. Т. Маматкасымовой (2015).

Реализация большинства разработанных алгоритмов являлись итерационными методами, где на каждом шаге итерации приходится решать соответствующую прямую задачу. Эффективность таких алгоритмов напрямую зависит от быстроты решения прямой задачи.

Таким образом, в данной главе изложены результаты исследования обратных задач гиперболических уравнений динамического типа, подобных задаче рассматриваемой в диссертационной работе. Дано обоснование метода, применяемого автором для численного решения задачи.

Во второй главе «Методология и методы исследования» представлены материалы и методы, используемые в решении поставленных задач.

**Объект исследования.** Объектом исследования в данной диссертационной работе являются различные постановки прямых и обратных задач телеграфного уравнения.

**Предмет исследования.** Предметом исследования в данной диссертационной работе являются математическая модель задач телеграфного уравнения, численное регуляризованное решение, алгоритм решения, а также программный комплекс и его функциональность.

**Методы исследования.** Методами исследования в данной диссертационной работе являются метод выпрямления характеристик, метод выделения особенностей, конечно-разностный метод и конечно-разностный регуляризованный метод, математическое моделирование, а также современные языки программирования для создания интерфейса программы.

Для решения задач телеграфного уравнения применяют различные методы в зависимости от начальных и граничных, краевых условий, а также в зависимости от физических процессов и явлений и т. д.

При исследовании обратных задач определения неизвестного коэффициента из дифференциального уравнения в частных производных гиперболического типа при начальных и граничных условиях и дополнительной информации применяют некоторые методы математической физики. У решения прямой задачи сначала, выделяют сингулярную и регулярную части, применяя метод выделения особенностей и получая соответствующие соотношения. Затем строится система уравнений обратной задачи, используя метод характеристик, с помощью которого дифференциальное уравнение в частных производных второго порядка сводится к системе дифференциальных уравнений в частных производных первого порядка.

Далее получаем систему нелинейных интегральных уравнений, для решения, которой можно применить конечно-разностный и конечно-разностный регуляризованный методы.

С третьей по пятой главы посвящены результатам собственных исследований и их обоснованию.

В третьей главе «Математические модели и прямая задача телеграфного уравнения» исследована корректность двумерной прямой задачи телеграфного уравнения, доказаны теоремы существования и единственности решения телеграфного уравнения, а также единственность решения задачи волнового процесса. Построен конечно-разностный аналог дифференциальной задачи:

Напряженность электрического поля по двум пластинам выражается двумерным телеграфным уравнением следующего вида [1-4]:

$$E_{tt}''(z, y, t) = \frac{\varepsilon^2(z, y)}{\varepsilon(z, y)\mu(z, y)} \Delta E(z, y, t) - \frac{\partial(z, y)}{\varepsilon(z, y)} E_t'(z, y, t), \quad (z, t) \in R_+^2, y \in R, \quad (1)$$

где  $\tilde{c}(z, y)$  - скорость распространения электромагнитных волн,  $\varepsilon(z, y)$ ,  $\mu(z, y)$  - электрическая и магнитная проницаемости,  $\tilde{\sigma}(z, y)$  - электропроводимость среды,  $E(z, y, t)$  - напряженность электрического поля,  $\Delta E(z, y, t) = E_{zz}'' + E_{yy}''$  - оператор Лапласа.

Для определения однозначного единственного решения уравнения (1) среди многих решений, нам необходимо задать начальное и граничное условия.

Пусть заданы условия следующего вида

$$E(z, y, t)|_{t=0} \equiv 0, \quad E_t'(z, y, t)|_{z=0} = h(y)\delta(t) + r(y)\theta(t), \quad t \in (0, T), y \in [-D, D], \quad (2)$$

где  $\delta(t)$  - дельта-функция Дирака,  $\theta(t)$  - тета-функция Хевисайда,  $h(y)$ ,  $r(y)$  - силы источников. Под действием этих сил начинается электромагнитный процесс. Условие (2) называется мгновенным и шнуровым источниками.

Пусть выполнены некоторые условия,

$$\left. \begin{aligned} \tilde{c}(z, y), \varepsilon(z, y), \mu(z, y), \tilde{\sigma}(z, y) \in A_1, \\ h(y), r(y) \in A_2, \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

где  $A_1 = \{\varepsilon(z, y) \in C^6((0, d) \times (-D_1, D_1), \sup p \{\varepsilon(z, y)\} \in ((0, d) \times (-D_1, D_1)))\}$ ,  $\alpha = \|\varepsilon(z, y)\|_{C^2} \leq M_1$ ,  $0 < M_1 \leq \varepsilon(z, y) \leq M_2$ ,

$$A_2 = \{\sup p h(y) \in C^5(-D, D), \quad h(y) \in C^5(-D, D)\},$$

где  $M_1, M_2, D_1, d$  - положительные постоянные,

$$D = D_1 + T(M_2 + \alpha), T = 2d/(M_1 - \alpha).$$

Здесь  $T$  - время, порожденное возмущением электрической напряженности

функциями источниками  $r(y), h(y)$ , которое достигает глубину  $d$  и возвращается обратно на поверхность  $z = 0$  для всех  $y$ . Введив некоторые новую переменную  $\alpha(x, y)$ , и новую функцию  $\mu(\alpha, y) = \tilde{\mu}(z, y)$ ,  $\varepsilon(\alpha, y) = \tilde{\varepsilon}(z, y)$ ,  $c(\alpha, y) = \tilde{c}(z, y)$ ,  $\sigma(\alpha, y) = \tilde{\sigma}(z, y)$ ,  $\vartheta(\alpha, y, t) = E(z, y, t)$  и выделив регулярные и сингулярные части решения получим прямую задачу с данными на характеристиках

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial^2 \vartheta}{\partial t^2} &= \frac{\partial^2 \vartheta}{\partial \alpha^2} + L_1 \vartheta(\alpha, y, t), \quad |\alpha| < t < T, y \in (-D, D), \\ \vartheta(\alpha, y, t)|_{\alpha=t} &= S(t, y), \quad t \in [0, T], y \in (-D, D), \\ \vartheta(\alpha, y, t)|_{y=-D} &= \vartheta(\alpha, y, t)|_{y=+D} = 0. \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

$$\text{где } L_1 \vartheta(\alpha, y, t) = \frac{c^2(\alpha, y)}{\varepsilon(\alpha, y)\mu(\alpha, y)} \left[ \frac{\partial^2 \vartheta}{\partial y^2} + \Delta \alpha \frac{\partial \vartheta}{\partial \alpha} + \alpha y \frac{\partial^2 \vartheta}{\partial \alpha \partial y} \right] - \frac{\sigma(\alpha, y) \partial \vartheta}{\varepsilon(\alpha, y) \partial t}.$$

Из предыдущих неравенств, используя энергетические неравенства для гиперболических уравнений получим следующее неравенство:

$$\max_{|\alpha| \leq t \leq T} \{\|\vartheta\|_2^2(t)\} \leq \{\|\vartheta\|_2^2(\alpha)\} \exp \left[ \left( \frac{5\pi_{12}^2 \pi_{14}}{\pi_{11}^2} + \frac{3\pi_{12}^2}{\pi_{11}^2} + \frac{2\pi_{11}}{\pi_{11}} \right) t \right], \quad (5)$$

$$\text{где } \|\vartheta\|_2^2(t) = (\|\vartheta\|^2 + \|\vartheta_t\|^2 + \|\vartheta_\alpha\|^2 + \|\vartheta_y\|^2)(t).$$

Таким образом, доказана следующая теорема единственности.

**Теорема 1.** Пусть функции  $c(\alpha, y), \mu(\alpha, y), \varepsilon(\alpha, y), \sigma(\alpha, y), \alpha, \Delta \alpha$ , непрерывны и имеют непрерывные частные производные первого порядка пусть решение задачи (4) существует и принадлежит  $C^2(\Omega(T, D))$  и выполнено условие (3). Тогда решение задачи (4) единственно в области  $\Omega(T, D)$  и имеет оценку

$$\max_{|\alpha| \leq t \leq T} \{\|\vartheta\|_2^2(t)\} \leq \|\vartheta\|_2^2(|\alpha|) * \exp(\pi_{15} t), \quad (6)$$

$$\text{где } \pi_{15} = \frac{5\pi_{12}^2 \pi_{14}}{\pi_{11}^2} + \frac{3\pi_{12}^2}{\pi_{11}^2} + \frac{2\pi_{11}}{\pi_{11}}.$$

Из эквивалентности задач (4) и (1)-(2) следует, что решение задачи (1)-(2) также единственно в области  $\Omega(T, D)$ , при выполнении условия теоремы.

Доказано существование двумерной прямой задачи телеграфного уравнения с мгновенным и шнуровым источниками, а также исследована прямая задача для волновых процессов.

Эти задачи приведены к задачам дифференциальных уравнений второго порядка с данными на характеристиках, и доказана единственность решения данных задач.

Обоснована сходимость численного решения к точному решению прямой задачи.

Построен конечно-разностный аналог дифференциальной двумерной прямой задачи телеграфного уравнения, построено конечно-разностное решение задачи для волновых процессов.

Таким образом, в третьей главе построена математическая модель двумерного телеграфного уравнения. Составлены начальные и граничные условия двумерного

телеграфного уравнения. Ставится прямая задача для двумерного телеграфного уравнения, доказано существование, единственность двумерной прямой задачи телеграфного уравнения. Приведены практические приложения телеграфного уравнения. Приведены методы решения прямой задачи телеграфного уравнения. Обоснована сходимость численного решения к точному решению прямой задачи.

В четвертой главе «Обратная задача телеграфного уравнения» предлагаются методы решений одномерных обратных задач телеграфного уравнения. Рассмотрим телеграфное уравнение следующего вида:

$$\frac{\partial^2 V(z,t)}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 V(z,t)}{\partial z^2} - \frac{1}{2} \left[ \frac{a'_1(z)}{a(z)} \right] \frac{\partial V(z,t)}{\partial z} - \frac{4\pi(z)}{\varepsilon(z)} \frac{\partial V(z,t)}{\partial t}, \quad (z,t) \in R_+^2 \quad (7)$$

$$V(z,t)|_{t=0} \equiv 0, \quad z \in R_+, \quad \frac{\partial V(z,t)}{\partial z} \Big|_{z=0} = h_0 \delta(t) + r_0 \theta(t), \quad t \in R_+ \quad (8)$$

где  $\delta(t)$  - дельта функция Дирака,  $\theta(t)$  - тета функция Хевисайда.

Для решения обратной задачи телеграфного уравнения пусть задается дополнительная информация о решении прямой задачи вида  $V(z,t)|_{z=0} = f(t), t \in [0, 2T]$ .

Пусть относительно коэффициентов уравнения выполнены условия  $(\varepsilon(z), \mu(z), \lambda(z), c(z)) \in A_0$ ,

где  $A_0 = \{ \varepsilon(z) : \varepsilon(z) \in C^6(R_+), \varepsilon'(t+0) = 0, 0 < M_1 < \varepsilon(z) \leq M_2, \|\varepsilon(z)\|_{C^2(R_+)} \leq M_3 \}$ .

Телеграфное уравнение (7) является уравнением гиперболического типа, тогда задачу можно рассматривать в области  $\Delta(T)$ :

$$\Delta(T) = \{(z,t) : z \in (0,T), |z| < t < 2T - |z|\}. \quad (12)$$

**Обратная задача.** Заключается в определении  $\lambda(z)$  -электропроводности среды из (7)-(9) при известных значениях:  $\mu(z)$ ,  $\varepsilon(z)$  - магнитной и диэлектрической проницаемости, а также дополнительной информации о решении прямой задачи вида (9). Обозначим через  $g(z) = -\frac{1}{2} \frac{a'_1(z)}{a(z)}$ .

Выделим особенности, а для этого представим сингулярную и регулярную части решения прямой задачи (7)-(8) по методике В.Г.Романова (2005) и представим решение задачи в виде:

$$V(z,t) = V(z,t) + S(z)\theta(t - |z|) + R(z)\theta_1(t - |z|), \quad (13)$$

где  $\tilde{V}(z,t)$  - гладкая непрерывная функция,  $\theta(t)$  - функция Хевисайда,  $\theta_1(t) = t\theta(t)$ .

Применив метод особенностей и метод характеристики и подставляя их в уравнение (7), получим следующую обратную задачу с данными на характеристиках:

$$V_{tt}(z,t) = V_{zz}(z,t) + g(z)V'_z(z,t) - \left[ g(z) + 2 \frac{S'(z)}{S(z)} \right] V'_t(z,t), \quad (z,t) \in \Delta(t), \quad (14)$$

$$V(z,t)|_{t=|z|} = S(z), \quad z \in [0,T]. \quad (15)$$

$$V(z,t)|_{z=0} = f(t), \quad t \in [0,2T]. \quad (16)$$

Здесь обратная задача заключается в определении функции  $V(z,t)$ ,  $S(z)$  при известных функциях  $\varepsilon(z)$ ,  $g(z)$  (они зависят от известных функций  $\mu(z)$  и  $\varepsilon(z)$ ), при известной функции  $f(t)$  - дополнительная информация о решении прямой задачи. Если определена функция  $S(z)$ , то по следующей формуле

$$\lambda(z) = -\frac{\varepsilon(z)}{4\pi} \left[ g(z) + \frac{2S'(z)}{S(z)} \right], \quad (17)$$

мы можем определить и неизвестную функцию  $\lambda(z)$  - электропроводность.

Введем сеточную область для решения задачи (14)-(16) конечно-разностным методом:

$$\Delta_h(T) = \left\{ x_l = lh, \quad t_k = kh, \quad h = \frac{T}{2N}; \quad l = \overline{0, N}, \quad lh \leq kh \leq T - lh \right\},$$

где  $h$  сеточный шаг по  $x$ ,  $t$ .

Введя некоторые обозначения получим сходимость конечно-разностного решения разностной задачи к решению дифференциальной задачи (14)-(16).

**Теорема 2.** Пусть решение обратной дифференциальной задачи (15), (16) существует и  $V(z,t) \in C^4(\Delta(T))$  и пусть выполняется условие (10) и тогда построенные решения  $(\tilde{V}_i^k, \tilde{S}_i)$  обратной задачи сходятся к точному решению  $V_i^k, S_i$  обратной задачи (15), (16) со скоростью порядка  $O(h)$ .

**Конечно-разностное регуляризованное решение.** Пусть теперь дополнительная информация о решении прямой задачи задана в виде  $f^\delta(t)$  и выполнена условие:

$$|f(t) - f^\delta(t)| < \delta, \quad \delta - \text{малое число} \quad (18)$$

Тогда, учитывая некоторые обозначения формулы  $\tilde{V}_i^k$  и  $\tilde{S}_i^k$  регуляризованного решения обратной задачи, получим оценку

$$Z_{l+1}^{\delta, O(h)} = (\delta + O(h)) \cdot \exp(1 + 4TG + 4TE + 4TES). \quad (19)$$

Последняя оценка является оценкой конечно-разностного регуляризованного решения обратной задачи.

**Теорема 3.** Пусть решение прямой задачи (14)-(16) существует и пусть  $V(z,t) \in C^4(\Delta(T))$ , выполнено условие (10).

Тогда построенное конечно-разностное регуляризованное решение обратной задачи сходит к точному решению обратной задачи (14)-(16) со скоростью порядка  $O(h)$  имеет оценку (19).

Из формулы (17) получим конечно-разностное регуляризованное решение первоначальной задачи (7)-(9):

$$\lambda_l^\delta = -\frac{\varepsilon_l}{4\pi} \left\{ \frac{1}{2} \cdot \frac{\left[ \frac{c_l^2}{h\varepsilon_l\mu_l} - \frac{c_{l-1}^2}{h\varepsilon_{l-1}\mu_{l-1}} \right]}{\frac{c_l^2}{\varepsilon_l\mu_l}} + \frac{2(S_l^\delta - S_{l-1}^\delta)}{hS_l^\delta} \right\} =$$

$$= -\frac{\varepsilon_l}{4\pi} \left\{ \frac{\left[ \frac{c_l^2}{h\varepsilon_l\mu_l} - \frac{c_{l-1}^2}{h\varepsilon_{l-1}\mu_{l-1}} \right] * \varepsilon_l\mu_l}{2c_l^2} + \frac{2S_l^\delta - S_{l-1}^\delta}{hS_l^\delta} \right\}, l = \overline{1, N}.$$

Таким образом, в этой главе разработано конечно-разностное регуляризованное решение одномерной обратной задачи телеграфного уравнения, в котором определена электропроводимость и доказана теорема о сходимости приближенного решения к точному решению обратной задачи.

В пятой главе «Численный алгоритм и реализация решения прямых и обратных задач телеграфного уравнения» изложены численные алгоритмы, программная реализация одномерных прямых и обратных задач для телеграфного уравнения, изученные в главах 3, 4.

Приведено численное решение прямой задачи телеграфного уравнения с мгновенными и шнуровым источниками.

$$\frac{\partial^2 E(z, t)}{\partial t^2} = \frac{c^2(z)}{\varepsilon(z)\mu(z)} \frac{\partial^2 E}{\partial z^2} - \frac{4\pi\lambda(z)}{\varepsilon(z)} \frac{\partial E}{\partial t}, (z, t) \in R_+^2. \quad (20)$$

где  $E(z, t)$  — напряженность электрического поля,  $\tilde{c}(z)$  — скорость распространения волн,  $\tilde{\varepsilon}(z)$ ,  $\tilde{\mu}(z)$  — электрическая и магнитная проницаемость,  $\lambda(z)$  — электропроводимость.

Определить  $E(z, t)$  — напряженность электрического поля из (20) при заданных значениях  $\tilde{c}(z)$ ,  $\tilde{\varepsilon}(z)$ ,  $\tilde{\mu}(z)$ ,  $\lambda(z)$ , а также при заданных начальных и граничных условиях вида

$$E(z, t)|_{t < 0} \equiv 0, E_z'(z, t)|_{z=0} = -\frac{1}{2}\delta(t) + r_0\theta(t), t \in [0, T], \quad (21)$$

где  $\delta(t)$  — дельта функция Дирака,  $\theta(t)$  — тета функция Хевисайда,  $r_0$  — положительная постоянная.

Для нахождения  $E(z, t)$ , т.е. решения прямой задачи, нужно (20)-(21) привести к прямой задаче с данными на характеристиках. Поэтому нужно ввести новую переменную  $x$ :

$$x(z) = \int_0^z \frac{2\sqrt{\tilde{\varepsilon}(\lambda)\tilde{\mu}(z)}}{\tilde{\varepsilon}(z)} d\lambda. \quad (22)$$

Пусть выполняется условие вида

$$x(z) > 0, \lim_{z \rightarrow \infty} x(z) = 0. \quad (23)$$

Это условие ведет к тому, что замена переменного  $x(z)$  была вырожденной.

Введем теперь новые функции  $c(x(z)) = \tilde{c}(z)$ ,  $a(x(z)) = \tilde{\varepsilon}(z)$ ,  $b(x(z)) = \tilde{\mu}(z)$ ,  $u(x(z), t) = E(z, t)$ .

Рассматриваем прямую задачу.

$$u_{tt}(x, t) = u_{xx}(x, t) - \frac{(\sqrt{a(x)b(x)})' \cdot c(x) - \sqrt{a(x)b(x)} \cdot c_x'(x)}{\sqrt{a(x)b(x)} \cdot c(x)} u_x - \frac{4\pi d(x)}{a(x)} u_t, \quad (24)$$

$$\left. \begin{aligned} x \in R, t \in R_+, u(x, t)|_{t < 0} &\equiv 0, \\ u_x(x, t)|_{x=0} &= -\frac{1}{2} \cdot \frac{c(0)}{\sqrt{a(0)b(0)}} \delta(t) + \frac{c(0)}{\sqrt{a(0)b(0)}} r_0 \theta(t), \end{aligned} \right\}$$

Здесь искомой функцией является функция  $u(x, t)$ , можно ограничиться рассмотрением прямой задачи в области:

$$\Delta(T) = \{(x, t) \in R \times R_+, x \in (-T/2, T/2), |x| < t < T\}.$$

Конечно-разностное решение. Введем сеточную область

$$\Delta_h(T) = \{x_l = lh, l = \overline{0, N}, h = T/2N; t = k\tau; k = \overline{0, M}, \tau = T/M\},$$

$h, \tau$  — шаги сетки по  $x, t$ . Пусть  $\tau = h$ .

Используя сеточные обозначения [6], напомним разностный аналог дифференциальной задачи (24):

$$u_{t\tau} = u_{x\bar{x}} - 2 \frac{S_{l+1} - S_{l-1}}{2hS_l} * \frac{u_{l+1}^k - u_{l-1}^k}{2h} + \frac{4\pi d_l}{a_l} * \frac{u_l^k - u_l^{k-1}}{h}, (x_l, \tau_k) \in \Delta_h(T). \quad (25)$$

$$u_l^0 = S_l, l = \overline{0, N}.$$

Формула (25) является конечно-разностным аналогом задачи (24).

Используя дискретный аналог неравенства Гронулла-Беллмана получим оценку

$$\bar{U}^{k+1} \leq O(h) * \exp \left[ 2 \frac{\bar{S}}{\underline{S}} + \frac{4\pi \bar{D} h}{\underline{A}} \right]. \quad (26)$$

Таким образом доказана сходимость приближенного конечно-разностного решения задачи (25) к точному решению дифференциальной задачи (24).

Теорема 4. Пусть решение дифференциальной задачи (22) существует и пусть  $u(x, t) \in C^4(\Delta(T))$ , пусть выполнены условия (21) и (22). Тогда приближенное решение построенным конечно-разностным методом задачи (25) сходится к точному решению задачи (24) со скоростью порядка  $O(h)$  и получена оценка (26).

Задача также приводится к задаче с данными на характеристиках. Заменяется конечно-разностным аналогом. Доказана сходимость приближенного решения к точному.

При решении прямой задачи относительно входных функций  $\lambda(x)$  — электропроводности среды,  $c(x)$  — скорости распространения волн,  $\mu(x)$  — магнитной проницаемости и  $\varepsilon(x)$  — электрической проницаемости были взяты функции в виде постоянные, косинусообразные и мгновенные функции.

Таблица 5.1. — Тестовые функции для прямой задачи, погрешность вычисления

№	№ рисунка	Функции				Шаг	Отн. погрешность
		$\lambda(x)$ - $\epsilon r v$ - электропроводимость	$c(x)$ - $zrv$ - скорость распространения волны	$\mu(x)$ - $\mu n$ - магнитная проницаемость	$\epsilon(x)$ - $\epsilon r z$ - электрическая проницаемость		
1.	Рисунок 5.1 а)	$1.1 \cdot \cos^2(\beta x)$	$3.1 \cdot \cos^2(1.57 x)$	$2.1 \cdot \cos^2(3.14 x)$	$4.1 \cdot \cos^2(6.28 x)$	0.02	10.66
2.	Рисунок 5.1 б)	$1.1 \cdot \cos^2(0.785 x)$	$3.1 \cdot \cos^2(\beta x)$	$2.1 \cdot \cos^2(3.14 x)$	$4.1 \cdot \cos^2(6.28 x)$	0.002	11.55

Прямая задача заключается в определении сеточной функции  $V_i^k$  из разностной задачи с данными на характеристиках при вышеуказанных известных функциях. Для вычисления этой задачи, определяем дополнительную функцию т.е. напряженность электрического поля и сеточная функция зависящая от известных сеточных функций.

На рисунке 5.1 заданы  $d_k = \lambda_k, c_k, \mu_k, \epsilon_k$ , вычислены  $S_k$  - сеточная функция зависящая от известных сеточных функций,  $f_k$  - дополнительная информация для обратной задачи.

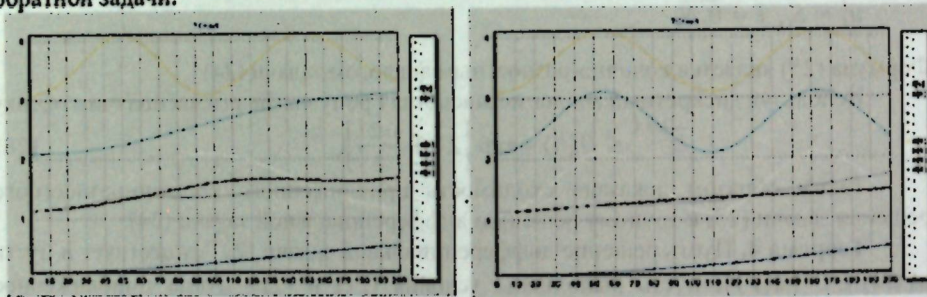


Рисунок 5.1 - Определение дополнительной информации для обратной задачи.

Алгоритм конечно-разностного регуляризованного решения обратной задачи (24)-(25):

1. Значение дополнительной информации для обратной задачи  $f^{k,\epsilon}$ ,

определяется по формуле  $f^{k,\epsilon} = V_0^{k,\epsilon}, k = 0, N$ .

2. Второй слой определяется по формуле:

$$V_1^{k,\epsilon} = \frac{f^{k+1,\epsilon} + f^{k-1,\epsilon}}{2}, \quad k = 1, N-1, \text{ которая выведена из формулы Тейлора.}$$

3. Вычисляются  $S_0^\epsilon = f_0^\epsilon$  и  $S_1^\epsilon = f_1^\epsilon$ ,

4. Затем вычисляются  $V_{i+1}^{k,\epsilon}, i = 2, N-2, ih \leq kh \leq T - ih$ ,

5. В каждом вычислении определяем значение неизвестной

$$S_i^\epsilon = V_i^{1,\epsilon}, \quad i = 3, N$$

6. Вычисляем  $S_i'(x) \approx \frac{S_i - S_{i-1}}{h}, R_i'(x) = \frac{R_i - R_{i-1}}{h}, i = 1, N$

7. Вычисляем неизвестную функцию по формуле

$$d_i = \left[ \frac{S_i - S_{i-1}}{h \cdot S_{i-1}} + \frac{R_i - R_{i-1}}{h R_{i-1}} \right] * \frac{a_i}{4\pi}, \quad i = 1, N.$$

Численная компьютерная реализация. Для реализации нами были заданы различные тестовые функции:

Задаем функции  $\lambda(z)$  - электропроводность среды,  $c(z)$  - скорость распространения волны в среде,  $\mu(z)$  - магнитная проницаемость,  $\epsilon(z)$  - электрическая проницаемость.

Затем по формуле  $x(z) = \int_0^z R(x) d\xi$ , где  $R(x) = \frac{\sqrt{a(x)b(x)}}{c(x)}$ , переходим на

новые переменные и получим новые функции  $\lambda(x), c(x), \mu(x)$  и  $\epsilon(x)$  (они в компьютерной программе обозначены через  $d(x), c(x), b(x)$  и  $a(x)$  соответственно).

По заданным функциям  $a(x), b(x), c(x), d(x)$  в начале вычислена прямая задача напряженности электрического поля и вычислена приближенная сеточная функция  $V_i^k$  - решение прямой задачи.

Из вычисленных решений прямой задачи определили дополнительную информацию для обратной задачи напряженности электрического поля:  $f^k = V_0^k, k = 0, 2N$ .

Отметим, что для устойчивости решения прямой задачи шаг сетки по переменным  $t$  брали половину шага сетки по переменной  $z$ , т.е.  $\tau = \frac{h}{2}$ .

Поэтому, для решения обратной задачи дополнительную информацию брали  $f^k = V_0^k, k = 0, 2N$  с шагом 2, таким образом здесь используется метод обращения разностной схемы, это нулевой слой схемы.

В связи с неизвестностью второго слоя, мы определили первый слой по формуле  $V_1^k = (f^{k+1} + f^{k-1})/2$ .

Далее обратная задача напряженности электрического слоя вычислена начиная



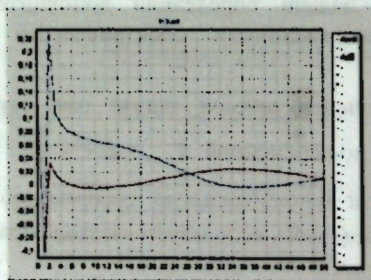
со второго слоя  $k = 2$ .

Каждый раз вычисляя следующий слой обратной задачи, в программе Delphi, они обозначены  $w_i^k$ , мы по формуле  $u(x, t)|_{x=0} = f(t)$ ,  $t \in [0, 2T]$  определяем значение  $S_i$ ,  $i = \overline{0, N}$  в программе они обозначены через  $Sp_{i,}$ ,  $i = \overline{0, N}$ .

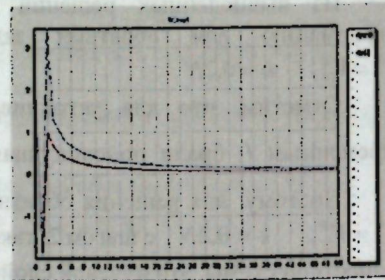
Отметим, что мы можем определить из четырех функций только одну функцию, а остальные три функции должны быть известными функциями. Значения функций некоторых веществ для восстановления неизвестных функций, определены из справочников.

Таблица 5.2. - Тестовые функции для обратной задачи, погрешность вычисления

№	№ рисунка	Функции				Шаг	Отн. погр
		$\lambda(x) - \text{ерв - электропроводность}$	$c(x) - \text{срв - скорость распространения волн}$	$\mu(x) - \text{мдн - магнитная проницаемость}$	$\epsilon(x) - \text{ерс - электрическая проницаемость}$		
1.	Рисунок 5.2 а)	$1.1 \cdot \cos^2(\beta x)$	$3.1 \cdot \cos^2(1.57 x)$	$2.1 \cdot \cos^2(3.14 x)$	$4.1 \cdot \cos^2(6.28 x)$	0.005	10.7
2.	Рисунок 5.2 б)	$3.1 \cdot \cos^2(1.57 x)$	$2.1 \cdot \cos^2(3.14 x)$	$4.1 \cdot \cos^2(6.28 x)$	$3.1 \cdot \cos^2(1.57 x)$	0.0005	8,2
3.	Рисунок 5.3 а)	$1.1 \cdot \cos^2(0.785 x)$	$3.1 \cdot \cos^2(1.57 x)$	$2.1 \cdot \cos^2(\beta x)$	$4.1 \cdot \cos^2(6.28 x)$	0,005	10,7
4.	Рисунок 5.3 б)	Ступенчатая функция	$3.1 \cdot \cos^2(1.57 x)$	$2.1 \cdot \cos^2(\beta x)$	$4.1 \cdot \cos^2(6.28 x)$	0,0005	19,3
5.	Рисунок 5.4 а) для нефти	$2 \cdot 10^{-10}$	1,35	1	2,1	0,0002	3,2
6.	Рисунок 5.4 б) для газа	$10^{-4}$	430	1	1,00058	0,0002	3,3

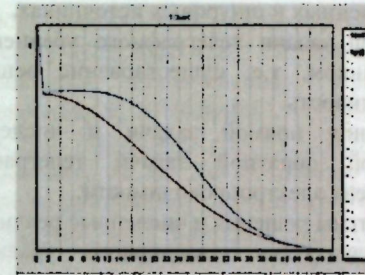


а)

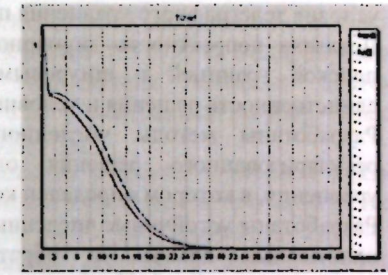


б)

Рисунок 5.3 - Точные и приближенно вычисленные значения функции электропроводности среды.

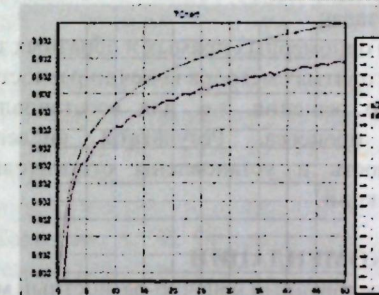


а)

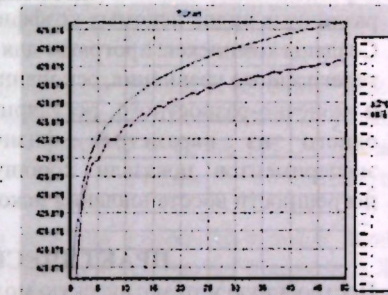


б)

Рисунок 5.5 - Точные и приближенно вычисленные значения функции магнитной проницаемости.



а)



б)

Рисунок 5.7 - Точные и приближенно вычисленные значения функции электропроводности для нефти и газа.

На графиках приведены точные и приближенно-вычисленные значения искомых функций, т.е. или  $dp(x)$  и  $ddp(x)$  или  $cp(x)$  и  $cpr(x)$  или  $bp(x)$  и  $bpr(x)$ . На рисунках 5.2-5.4 мы задали косинусообразные и ступенчатые функции (модельные данные и данные для нефти и газа со справочников).

В пятой главе построено приближенное численное решение одномерной обратной задачи напряженности электрического поля с мгновенным и шнуровым источниками с применением методов выделения особенностей, выпрямления характеристики. Построен алгоритм последовательности действий решения одномерной обратной задачи напряженности электрического поля. Разработана численная компьютерная реализация, результаты которой получены в виде графиков точных и приближенных решений обратной задачи, они сравнивались и получены относительные погрешности, а также они проанализированы.

## ВЫВОДЫ

1. Усовершенствована математическая модель двумерной прямой и одномерной обратной задачи телеграфного уравнения. Установлены начальные и граничные

условия телеграфного уравнения при мгновенных и шнуровых источниках.

2. Доказана корректность двумерной прямой задачи телеграфного уравнения с плоской границей и шнуровым источником, т.е. существование решения, единственность решения и условная устойчивость.
3. Разработаны методы численного решения прямой задачи и численного регуляризованного решения одномерной обратной задачи телеграфного уравнения, в котором определен коэффициент электропроводности.
4. Разработаны устойчивые численные алгоритмы решения и численные реализации одномерных прямых и обратных задач для телеграфного уравнения, проанализированы и выяснены возможности применения разработанного автором алгоритма. Показана достоверность конечно-разностного решения одномерных обратных задач с помощью численного эксперимента на тестовых примерах для различных видов искоемых коэффициентов задач.
5. Созданы комплексы программ для решения одномерных прямых и обратных задач телеграфного уравнения, основанные на алгоритмах методов конечно-разностного и конечно-разностного регуляризованного решения, т.е. для восстановления одного из параметров физического процесса. Результаты численных экспериментов показали хорошую точность и установлены относительные погрешности восстановления искоемых функций.

#### ПРАКТИЧЕСКИЕ РЕКОМЕНДАЦИИ

1. Построенную математическую модель, исследованный конечно-разностный метод и численный регуляризованный метод решения можно применить для других классов прямых и обратных задач волновых процессов.
2. Построенные алгоритмы прямых и обратных задач телеграфного уравнения и их реализации можно использовать для реальных однородных и неоднородных сред.
3. Алгоритмы решения и комплексы программ прямых и обратных задач, можно осуществить для широкого класса обратных задач.
4. Результаты можно применить в учебном процессе, чтобы познакомить студентов и магистрантов с решением прямых и обратных задач, и привлечь их к научным исследованиям в этой области.

#### СПИСОК ОПУБЛИКОВАННЫХ РАБОТ ПО ТЕМЕ ДИССЕРТАЦИИ

1. Кокозова, А. Ж. Единственность решения двумерной прямой задачи телеграфного уравнения с мгновенным и шнуровым источниками [Текст] / А. Ж. Кокозова // Изв. ВУЗов (Кыргызстан). – 2015. – № 11. – С. 19-23. – То же: [Электронный ресурс]. – Режим доступа: <https://www.elibrary.ru/item.asp?id=30107799>
2. Кокозова, А. Ж. Конечно-разностный алгоритм определения магнитной

проницаемости телеграфного уравнения с мгновенным и шнуровым источником [Текст] / Кокозова А.Ж., Сатыбаев А.Дж., Култаев Т.Ч. // 12-й международный Азиатский школа-семинар. Проблемы оптимизации сложных систем.- Новосибирск, 2016-№4(60). – С.109-114. – То же: [Электронный ресурс]. – Режим доступа: <https://www.elibrary.ru/item.asp?id=28411369>

3. Кокозова, А. Ж. Доказательство существования решения двумерной прямой задачи телеграфного уравнения с мгновенным и шнуровым источником [Текст] / Кокозова А.Ж., Сатыбаев А.Дж., // Известия КГТУ им.И.Раззакова. 2017 - № 1(41)- С.113-123. – То же: [Электронный ресурс]. – Режим доступа: <https://www.elibrary.ru/item.asp?id=29004702>
4. Кокозова, А. Ж. Практические приложения задачи телеграфного уравнения и методы их решения [Текст] / Кокозова А.Ж. // Наука и новые технологии. 2014 - №7 – С.30-36. – То же: [Электронный ресурс]. – Режим доступа: <https://www.elibrary.ru/item.asp?id=29298738>
5. Кокозова, А. Ж. Математические модели двумерной прямой и обратной задачи телеграфного уравнения и их численные методы решения / Кокозова А.Ж. [Текст] // Вестник КГУСТА им. Н.Исанова. 2017 - №1(55) – С.168-175. – То же: [Электронный ресурс]. – Режим доступа: <https://www.elibrary.ru/item.asp?id=29659447>
6. Кокозова, А. Ж. Об одном существовании решения двумерной прямой задачи телеграфного уравнения с мгновенным и шнуровым источником / Кокозова А.Ж., Сатыбаев А.Дж., [Текст] // Известия КГТУ им.И.Раззакова. 2017 - № 2(42)- С.71-82. – То же: [Электронный ресурс]. – Режим доступа: <https://www.elibrary.ru/item.asp?id=30273998>
7. Кокозова, А. Ж. Восстановление электропроводности в обратной задаче телеграфного уравнения с мгновенным источником и плоской границей / Сатыбаев А.Дж., Кокозова А.Ж. [Текст] // Вестник КРСУ. 2018 - № 8, Том 18 – С. 26-30. – То же: [Электронный ресурс]. – Режим доступа: <https://www.elibrary.ru/item.asp?id=36486813>
8. Кокозова, А. Ж. Существование решения двумерной прямой задачи волновых процессов с мгновенным и шнуровым источниками / Сатыбаев А.Дж., Анищенко Ю.В., Кокозова А.Ж., Алимканов А.А. [Текст] // Межд-ная конфер-я «Математика в современном мире», посвящ-я 60-лет-ю инстит.матем. им. С.Л.Соболева. Новосибирск, 2017 – С.326. – То же: [Электронный ресурс]. – Режим доступа: <https://www.elibrary.ru/item.asp?id=36658676>
9. Кокозова, А. Ж. Численное определение емкости мембраны в задаче распространения потенциала действий по нервному волокну [Текст] / Сатыбаев А.Дж., Кокозова А.Ж. // Медикус. Изд-во «Научн. обозрение». № 5(17), 2017 – С.14-22. – То же: [Электронный ресурс]. – Режим доступа: <https://www.elibrary.ru/item.asp?id=38582015>

10. Кокозова, А. Ж. Численное решение, алгоритм и компьютерная реализация одномерной обратной задачи напряженности электрического поля / Кокозова А.Ж., Сатыбаев А.Дж., Асилбеков Т.М. [Текст] // Наука, новые технологии и инновации Кыргызстана. № 12, 2019 – С.3-26. – То же: [Электронный ресурс]. – Режим доступа: <https://www.elibrary.ru/item.asp?id=43930770>
11. Кокозова, А. Ж. Конечно-разностный регуляризованный метод решения одномерной обратной задачи телеграфного уравнения с мгновенным источником и с плоской границей [Текст] / Сатыбаев А.Дж., Кокозова А.Ж., Анищенко Ю.В., Алимканов А.А. // Проблемы оптимизации сложных систем. Мат-лы XIV Международной Азиатской школы-семинара, 2018 – С. 192-201. – То же: [Электронный ресурс]. – Режим доступа: <https://www.elibrary.ru/item.asp?id=37014712>
12. Кокозова, А. Ж. Численное решение прямой задачи телеграфного уравнения с мгновенным и шуровым источниками [Текст] / Кокозова А.Ж. // Вестник КазНПУ им.Абая, Алматы. №4(60). 2017 – С.136-142. – То же: [Электронный ресурс]. – Режим доступа: <http://library2.kaznpu.kz/index.php/repozitorij/vestniki/171-vestnik-kaznpu-im-abaya>
13. Numerical solution of a two-dimensional direct problem of the wave process [Text] / A. D. Satybaev, A. Zh. Kokozova, Y. V. Anishchenko, A. A. Alimkanov // AIP Conference Proceedings. 4. "International Conference on Analysis and Applied Mathematics, ICAAM 2018". – 2018. – P. 020045. – То же: [Электронный ресурс]. – Режим доступа: <https://aip.scitation.org/doi/pdf/10.1063/1.5049039>
14. The uniqueness of the solution of the two-dimensional direct problem of a wave process with an instantaneous source and a flat boundary [Text] / A. D. Satybaev, Y. V. Anishchenko, A. Zh. Kokozova, A. A. Alimkanov // AIP Conference Proceedings. "International Conference on Analysis and Applied Mathematics, ICAAM 2018". – 2018. – P. 020063. – То же: [Электронный ресурс]. – Режим доступа: <https://aip.scitation.org/doi/10.1063/1.5049057>
15. Development of a Finite-difference Regularized Solution of the One-Dimensional Inverse Problem of the Wave Process [Text] / A. D. Satybaev, Y. V. Anishchenko, A. Zh. Kokozova [and other] // American Journal of Applied Mathematics. – 2020. – Vol. 8, Issue 2. – P. 64-73. – То же: [Электронный ресурс]. – Режим доступа: <http://www.applmath.org/article/148/10.11648.ajam.20200802.13>
16. Свид. 724 Кыргызская Республика, Программа решения одномерных прямых задач телеграфного уравнения, [Текст] / Кокозова А.Ж., А.Дж. Сатыбаев, Т.М. Асилбеков; Бишкек. ГИСНИИ при правительстве КР (Кыргызпатент). – №20220001.6; заявл. 10.01.22; опублик. 01.10.19, Бюл. – С. – То же: [Электронный ресурс]. – Режим доступа: <http://patent.kg/wp-content/uploads/2022/04/%D0%98%D0%9C-42022.pdf>
17. Свид. 726 Кыргызская Республика, Программа решения одномерных обратных

задач телеграфного уравнения, [Текст] / Кокозова А.Ж., А.Дж. Сатыбаев, Т.М.Асилбеков; Бишкек. ГИСНИИ при правительстве КР (Кыргызпатент). – №20220003.6; заявл. 14.02.22; опублик. 01.10.19, Бюл. – С. – То же: [Электронный ресурс]. – Режим доступа: <http://patent.kg/wp-content/uploads/2022/04/%D0%98%D0%9C-42022.pdf>

Кокозова Айнагул Жылкычиевнанын «Телеграфтык теңдемелердин тескерин жана түз маселелеринин сандык регуляризацияланган чыгарылышы жана математикалык моделин иштеп чыгуу» темасындагы 05.13.18 – математикалык моделдөө, сандык методтору жана программалык комплекстерин адистиги боюнча физика-математика илимдеринин кандидаты илимий даражасын алуу үчүн жазылган диссертациясынын

#### РЕЗЮМЕСИ

**Негизги сөздөр:** Математикалык модель, телеграфтык теңдеме, түз жана тескерин маселе, сандык регуляризацияланган чечим, чектүү айырмачылык регуляризацияланган ыкмасы, сандык алгоритм, чечимдин чиймеси.

**Изилдөөнүн объектиси:** Изилдөөнүн негизги объектиси катары телеграфтык теңдеме үчүн тескерин маселелердин ар кандай формулировкасы тандалган.

**Изилдөөнүн предмети:** Изилдөөнүн предмети болуп телеграфтык теңдемелердин түз жана тескерин маселелеринин математикалык модели, сандык регуляризацияланган чечими, чечимдин алгоритми, программалык комплекси эсептелинет.

**Изилдөөнүн максаты:** Диссертациялык иш телеграфтык теңдемелердин түз жана тескерин маселелеринин математикалык моделин жакшыртууга, телеграфтык теңдемелердин бир өлчөмдүү жана эки өлчөмдүү түз маселелеринин сандык чыгарылышынын жана тескерин маселелеринин сандык регуляризацияланган чыгарылышынын ыкмаларын иштеп чыгууга арналган, ошондой эле аны компьютердик ишке ашыруу.

**Изилдөөнүн ыкмалары:** Телеграфтык теңдемелердин түз жана тескерин маселелерин чечүү үчүн мүнөздөмө ыкмасы, өзгөчөлүктөрдү бөлүп алуу ыкмасы, чектүү айырмачылык ыкмасы жана чектүү айырмачылык регуляризацияланган ыкмасы колдонулат.

**Алынган натыйжалар жана алардын жаңылыгы:** Телеграфтык теңдемелердин эки өлчөмдүү түз маселелерин чечүүгө мамиле сунушталды; уникалдуулук теоремасы, жакындашуу теоремасы далилденип, эки өлчөмдүү түз маселелерин чектүү-айырмалык чечиминин туруктуулугунун баасы алынат; телеграфтык теңдемелердин бир катар бир өлчөмдүү тескерин теңдемелери үчүн чектүү-айырмалык чечиминин шарттуу туруктуулугунун баалары алынат жана так чечимге жакындашуу көрсөтүлөт; телеграфтык теңдемелердин бир өлчөмдүү тескерин маселелерин чечүүнүн сандык регуляризацияланган ыкмасы иштелип чыккан; берилген тапшырмаларды чечүүнүн сандык алгоритмдери иштелип чыккан жана компьютерде ишке

ашырылган.

**Колдонуу чөйрөсү:** Телеграфтык теңдемелери бир өлчөмдүү түз жана тескеринче маселелерин чечүүнүн иштелип чыккан ыкмасы жана анын программалык комплекси түрүндөгү математикалык камсыздоо сейсмикалык, электродинамикалык, электромагниттик талаалар, геоэлектрика ж.б. практикалык маселелерди чечүүдө колдонулушу мүмкүн.

### РЕЗЮМЕ

диссертация Кокозовой Айнагул Жылкычиевны на тему: «Разработка математической модели и численное регуляризованное решение обратной и прямой задачи телеграфного уравнения» на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук по специальности 05.13.18 – математическое моделирование, численные методы и комплексы программ

**Ключевые слова:** Математическая модель, телеграфное уравнение, прямая и обратная задача, численное регуляризованное решение, конечно-разностный регуляризованный метод, численный алгоритм, графики решений.

**Объект исследования:** В качестве основного объекта исследования выбраны различные постановки обратных задач для телеграфного уравнения.

**Предмет исследования:** Предметом исследования являются математическая модель прямой и обратной задачи телеграфного уравнения, численное регуляризованное решение, алгоритм решения, программный комплекс.

**Цель исследования:** Диссертационная работа посвящена усовершенствованию математической модели прямой и обратной задачи телеграфного уравнения, разработка методов численного решения одномерной и двумерной прямой задачи и численного регуляризованного решения обратной задачи телеграфного уравнения, а также его компьютерная реализация.

**Методы исследования.** Для решения прямых и обратных задач для телеграфного уравнения используются метод характеристик, метод выделения особенностей, конечно-разностный метод и конечно-разностный регуляризованный метод.

**Полученные результаты и их новизна:** предложен подход к решению двумерных прямых задач телеграфного уравнения; доказаны теоремы единственности, теоремы сходимости и получены оценка устойчивости конечно-разностного решения двумерной прямой задачи; для ряда одномерных обратных задач телеграфного уравнения получены оценки условной устойчивости конечно-разностного решения и показана сходимость к точному решению; разработан метод численного регуляризованного решения одномерной обратной задачи телеграфного уравнения; разработаны численные алгоритмы решения на поставленные задачи и реализованы на компьютере.

**Область применения:** Разработанный метод решения одномерных прямых и

обратных задач и ее математическое обеспечение в виде комплекса программ могут найти применение в решении практических задач сейсмологии, геоэлектрики, электродинамики, электромагнитных полей и т.д.

### SUMMARY

dissertation of Kokozova Ainagul Zhylykchievna on the topic: "Development of a mathematical model and numerical regularized solution of the inverse and direct problem of the telegraph equation" for the degree of candidate of physical and mathematical sciences in the specialty 05.13.18 - mathematical modeling, numerical methods and software packages

**Keywords:** Mathematical model, telegraph equation, direct and inverse problem, numerical regularized solution, finite-difference regularized method, numerical algorithm, graphs of solutions.

**Object of study:** Various formulations of inverse problems for the telegraph equation are chosen as the main object of study.

**Subject of research:** The subject of research is the mathematical model of the direct and inverse problem of the telegraph equation, numerical regularized solution, solution algorithm, software package.

**Purpose of the research:** The dissertation work is devoted to the improvement of the mathematical model of the direct and inverse problem of the telegraph equation, the development of methods for the numerical solution of the one-dimensional and two-dimensional direct problem and the numerical regularized solution of the inverse problem of the telegraph equation, as well as its computer implementation.

**Research methods.** To solve direct and inverse problems for the telegraph equation, the method of characteristics, the method of extracting singularities, the finite-difference method, and the finite-difference regularized method are used.

**The results obtained and their novelty:** An approach to solving two-dimensional direct problems of the telegraph equation is proposed; uniqueness theorems and convergence theorems were proved, and a stability estimate for a finite-difference solution of a two-dimensional direct problem was obtained; for a number of one-dimensional inverse problems of the telegraph equation, estimates of the conditional stability of finite difference solution and convergence to the exact solution is shown; a method for the numerical regularized solution of the one-dimensional inverse problem of the telegraph equation was developed; Numerical algorithms for solving the assigned tasks have been developed and implemented on a computer.

**Application area:** The developed method for solving one-dimensional direct and inverse problems and its software in the form of a software package can be used in solving practical problems of seismic, geoelectrics, electrodynamics, electromagnetic fields, etc.



**SUMMARY**

Abstract of Kokozova Ainaagul Zhylkychyevna on the topic "Development of a mathematical model and numerical regularized solution of the inverse and direct problem of the telegraph equation for the degree of instability of physical and mathematical sciences in the specialty 02.13.18 - mathematical modeling, numerical methods and software packages.

**Кокозова Айнагул Жылкычыевна**

**Разработка математической модели и численное регуляризованное решение обратной и прямой задачи телеграфного уравнения**

**Автореферат  
диссертации на соискание ученой степени  
кандидата физико-математических наук**

**Подписано к печати: 04.11.2022  
Формат 60x84/16. Объем 1,4 п.л.  
Бумага офсетная. Тираж 50 шт.**

