ИНСТИТУТ АВТОМАТИКИ И ТЕЛЕМЕХАНИКИ
АКАДЕМИИ НАУК СССР

На правах рукописи

Л. А. ТЕЛЬКСНИС

СТАТИСТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ СИСТЕМ АВТОМАТИЧЕСКОГО УПРАВЛЕНИЯ С ПРИМЕНЕНИЕМ ЭЛЕКТРОННЫХ МОДЕЛИРУЮЩИХ УСТРОЙСТВ

Автореферат диссертации
на соискание ученой степени
кандидата технических наук

Научные руководители:
доктор технических наук,
профессор В. С. ПУГАЧЕВ,
кандидат технических наук,
доцент Б. Я. КОГАН

Москва — 1960

А-3

Работа выполнена в лаборатории статистических проблем кибернетики Института Автоматики и Телемеханики АН СССР.

Важную роль при исследовании и проектировании современных систем автоматического управления (САУ) играет статистический анализ их динамической точности. Учет случайных факторов необходим при проектировании летательных аппаратов, устройств автоматической навигации, успокоителей качки кораблей, определения точности радиолокационных систем, артиллерийских приборов, решении задач передачи информации, проектировании современных бурильных устройств, угледобывающих машин, систем подвески автомобилей и т. д.

К сожалению, существующие способы статистического анализа САУ [1], [2], [3] являются малопригодными для использования в инженерной практике.

В настоящей работе дается практический способ статистического анализа САУ, позволяющий по сравнению с известными способами существенно упростить задачу определения моментов второго порядка различных координат как стационарных, так и нестационарных линейных, а также нелинейных, статистически линеаризуемых систем автоматического управления.

Работа состоит из четырех глав.

Первая глава посвящена рассмотрению существующих способов статистического анализа САУ и выбору приемлемого для практических вычислений алгоритма определения моментов второго порядка различных координат САУ. Показано, что

1. Существующие аналитические способы определения моментов второго порядка различных переменных САУ [1], [2], [3] из-за большого объема сложных аналитических вычислений и преобразований могут найти применение в инженерных расчетах только при решении самых элементарных задач.

2. Метод физического моделирования случайных процессов с применением электронных моделирующих устройств для статистического анализа САУ [3] может быть использован только при решении узкого класса стационарных задач.

3. Методы математического моделирования случайных процессов с применением электронных вычислительных устройств [2], [3] хотя принципиально позволяют решить стационарные и нестационарные задачи статистического анализа САУ, но их применение на практике весьма затруднительно из-за большого объема сложных аналитических вычислений и преобразований, которые должны быть проделаны при подготовке к решению и в процессе решения задач.

4. Для создания практического способа вычисления моментов второго порядка различных координат САУ целесообразно использовать канонические представления случайных функций [1]

$$X(t) = \sum_{\nu=1}^{\infty} V_\nu x_\nu(t), \tag{1}$$

где V_ν — случайные некоррелированные между собой коэффициенты канонического разложения с дисперсиями D_ν;

$x_\nu(t)$ — неслучайные координатные функции канонического разложения.

Введением понятия нормированной координатной функции

$$x_\nu{}^*(t) = D_\nu^{\frac{1}{2}} x_\nu(t) \tag{2}$$

получены выражения моментов второго порядка различных координат САУ, легко поддающиеся вычислению при помощи несложного специализированного электронно-вычислительного оборудования:

а) для выходной дисперсии

$$D_y(t) = \sum_{\nu=1}^{\infty} y_\nu^{*2}(t), \tag{3}$$

б) для выходной корреляционной функции

$$K_y(t,\tau) = \sum_{\nu=1}^{\infty} y_\nu^*(t)\, y_\nu^*(\tau), \tag{4}$$

в) для взаимной корреляционной функции входной и выходной переменных в данный момент времени

$$D_{xy}(t) = \sum_{\nu=1}^{\infty} x_\nu^*(t)\, y_\nu^*(t), \tag{5}$$

г) для взаимной корреляционной функции входной и выходной переменных

$$K_{xy}(t,\tau) = \sum_{\nu=1}^{\infty} x_\nu^*(t)\, y_\nu^*(\tau), \tag{6}$$

где $y_\nu^*(t)$ является решением дифференциального уравнения

$$L(p,t)\, y_\nu^*(t) = M(p,t)\, x_\nu^*(t), \quad \nu = 1, 2, \ldots \tag{7}$$

а

$$L(p,t) = \sum_{i=0}^{n} a_i(t)\, p^i,$$

$$M(p,t) = \sum_{j=0}^{m} b_j(t)\, p^j, \quad p \equiv \frac{d}{dt}, \quad m < n$$

являются операторами дифференциального уравнения, описывающего исследуемую систему автоматического управления.

По сравнению с упомянутыми в п.п. 1, 2, 3 способами анализа САУ, такой способ дает значительную экономию труда и оборудования, а также обеспечивает единую методику определения моментов второго порядка различных координат широкого класса как стационарных, так и нестационарных САУ.

Во второй главе даны алгоритмы и методика практического получения канонических разложений случайных функций с использованием электронных вычислительных средств. Описано разработанное вычислительное устройство, позволяющее автоматизировать основную часть вычислений в связи с получением канонических разложений случайных функций.

1. С целью получения практического способа разложения случайной функции $X(t)$ использована возможность выражения случайной функции при помощи функций линейных относительно случайных параметров X_r [1], т. е.

$$X(t) = \sum_{r=1}^{\infty} X_r f_r(t), \quad r = 1, 2, \ldots \tag{8}$$

где
$$M[X_r] = 0$$
$$M[X_\nu X_\mu] \neq 0$$

При этом канонический ряд случайной функции $X(t)$ может быть представлен в виде:

$$X(t) = \sum_{\nu=1}^{\infty} V_\nu x_\nu(t), \tag{9}$$

где

$$x_\nu(t) = \sum_{\mu=\nu}^{\infty} a_{\mu\nu} f_\mu(t), \quad \nu = 1, 2, \ldots$$

$$a_{\nu_1} = \frac{k_{\nu_1}}{D_1},$$

$$a_{\nu\mu} = \frac{1}{D_\mu}\left(k_{\nu\mu} - \sum_{\lambda=1}^{\mu-1} a_{\nu\lambda}\, a_{\mu\lambda}\, D_\lambda\right), \quad \mu = 2, 3, \; . \; . \; . \; , \nu - 1,$$

$$M[V_\nu] = 0;$$

$$M[V_\nu V_\mu] = \begin{cases} 0, & \nu \neq \mu \\ D_\nu = k_{\nu\lambda} - \sum\limits_{\lambda=1}^{\nu-1} a^2_{\nu\lambda} D_\lambda, & \nu = \mu, \end{cases}$$

$$k_{\nu\mu} = M[X_\nu X_\mu].$$

Представление случайной функции $X(t)$ рядом Фурье со случайными коэффициентами X_ν в произвольном интервале T,

$$X(t) = \sum_{\nu=1}^{\infty} [X_{2\kappa} \sin \omega_\kappa t + X_{2\kappa+1} \cos \omega_\kappa t] \tag{10}$$

позволило получить выражения корреляционных моментов в явном виде:

$$k_{2p,2q} = \frac{4}{T^2} \int_0^T\!\!\int_0^T K(t,\tau) \sin \omega_p t \sin \omega_q \tau \, dt\, d\tau$$

$$k_{2p+1,2q+1} = \frac{4}{T^2} \int_0^T\!\!\int_0^T K(t,\tau) \cos \omega_p t \cos \omega_q \tau \, dt\, d\tau \tag{11}$$

$$k_{2p,2q+1} = \frac{4}{T^2} \int_0^T\!\!\int_0^T K(t,\tau) \sin \omega_p t \cos \omega_q \tau \, dt\, d\tau$$

где $K(t,\tau)$ корреляционная функция случайной функции

Таким образом, каноническое разложение случайной функции $X(t)$ с известной корреляционной функцией $K(t,\tau)$ может быть получена согласно формулам (9), (11).

2. Так как определение корреляционных моментов $k_{\nu\mu}$ составляет основную часть (приблизительно 95%) вычислительных работ, которые должны быть проделаны при разложении случайных функций в канонические ряды, разработана вычислительная машина, позволяющая осуществить эти вычисления автоматически. В основу алгоритма вычислений корреляционных моментов $k_{\nu\mu}$ представляющих собой двойные интегралы вида

$$R = \int_0^T\!\!\int_0^T F(t,\tau)\, \varphi(t)\, \psi(\tau)\, dt\, d\tau \tag{12}$$

положено их представление в виде

$$R \simeq \int_0^T I(\tau)\, \psi(\tau)\, d\tau, \tag{13}$$

где

$$I(\tau) = \int_0^T F(t,\tau)\, \varphi(t)\, dt.$$

Устройство для вычисления коэффициентов корреляции $k_{\nu\mu}$ представляет собой электронную вычислительную машину непрерывно-дискретного действия. В процессе вычислений машина управляется автоматически программой, записанной на магнитную ленту. Ввод данных в машину также осуществляется с помощью магнитной ленты. Результаты вычислений снимаются непосредственно со шкалы вольтметра.

3. Показано, что, если случайная функция $X(t)$ является стационарной и в качестве разложения ее при помощи функций, линейных относительно случайных параметров X_ν, выбран ряд Фурье функции $X(t)$ в произвольном интервале T (10), случайные коэффициенты при синусах некоррелированы со случайными коэффициентами при косинусах, т. е.

$$k_{2p+1,2q} = 0.$$

Использование этого свойства при получении канонических разложений стационарных случайных функций позволяет приблизительно в два раза сократить вычислительные работы.

4. Приводится пример разложения случайной функции с корреляционной функцией $K(t,\tau) = \exp[-|t-\tau|]$ в канонический ряд.

В третьей главе описывается вычислительное устройство для определения моментов второго порядка различных координат САУ методом канонических представлений случайных функций, а также излагается методика применения этого устройства при статистическом исследовании динамической точности как стационарных, так и нестационарных нелинейных, статистически линеаризуемых САУ.

1. В основу алгоритма вычислений моментов второго порядка различных координат САУ положено их представление в виде (3), (4), (5), (6). Использование соотношений (3), (4), (5), (6) позволило построить такую вычислительную машину для статистического анализа САУ, которая дает возможность определять моменты второго порядка различных координат САУ, находящейся под влиянием случайных возмущений, оперируя только с регулярными сигналами — нормированными координатными функциями. Такое устройство представляет

собой специализированную автоматическую электронную вычислительную машину непрерывного действия. [redacted] Она содержит следующие основные блоки:

а) блок памяти и программного управления вычислением,
б) электронную модель исследуемой САУ,
в) квадратор,
г) специализированный сумматор,
д) множительное устройство,
е) запаздывающее устройство.

В машине в качестве квадрирующего, множительного и запаздывающего устройства использованы стандартные функциональные блоки, применяемые в электронном моделировании [4]. Блок памяти и управления обеспечивает ввод в вычислительную машину информации (нормированных координатных функций $x_\nu^*(t)$ и программы управления вычислением), записанной на магнитной ленте. Для решения дифференциального уравнения (7) используется электронная модель исследуемой САУ. Суммирование рядов осуществляется с помощью специализированного сумматора, который представляет собой усилитель постоянного тока, работающий в режиме масштабного усиления и имеет дополнительную обратную связь в виде управляемой линии задержки.

Время вычисления выходной дисперсии или взаимной корреляционной функции входной и выходной переменных САУ в данный момент времени с помощью такой машины составляет в среднем несколько минут. Время определения выходной корреляционной функции или взаимной корреляционной функции входной и выходной переменных САУ составляет несколько десятков минут.

2. Показано, что способ определения моментов второго порядка различных переменных САУ с применением электронных моделирующих устройств может быть эффективно использован при решении статистических задач динамической точности стационарных и нестационарных нелинейных, статистически линеаризуемых [5], [6] САУ:

а) для определения статистических коэффициентов передачи линеаризуемых нелинейных элементов САУ,

б) для определения моментов второго порядка различных переменных нелинейных статистических линеаризуемых САУ.

3. Приведены примеры:

а) определения средней квадратической ошибки выходной координаты инерционного звена во время переходного процесса при воздействии на его входе случайных возмущений;

б) решения задачи определения качества стабилизации по курту системы автоматического управления ракета—автопилот при воздействии на систему случайных возмущений. При этом найдено среднее квадратическое отклонение угла курса ракеты во время переходного процесса системы.

В третьей главе приведены алгоритмы оценки точности представления случайных функций, а также моментов второго порядка различных координат САУ в связи с представлением случайных функций конечным отрезком канонических рядов.

1. Показано, что n-ый остаток канонического ряда можно мажорировать остатком стохастического ряда Фурье. Использование этого свойства, а также понятия осредненной корреляционной функции [7] дало возможность получить формулы для оценки средней дисперсии остаточного члена канонического ряда

$$D_{2\text{ср}} = D_{\text{ср}} - \frac{1}{T} \int\limits_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} K_{\text{ср}}(u) \frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)\frac{2\pi u}{T}}{\sin\frac{\pi u}{T}}\, du, \qquad (14)$$

где
$$D_{\text{ср}} = K_{\text{ср}}(\tau = 0)$$

и
$$K_{\text{ср}}(\tau) = K_{\text{ср}}(t, u) = \lim_{\mathrm{T}\to\infty} \frac{1}{2T} \int\limits_{-\mathrm{T}}^{\mathrm{T}} K(s, s-\tau)\, ds.$$

Доказанное может быть использовано для предварительного определения, сколько членов канонического ряда необходимо принять во внимание, чтобы данную случайную функцию можно было представить с заранее заданной точностью.

Даются образцы номограмм, которые могут быть использованы при определении точности представления случайной функции n-ым отрезком канонического ряда.

2. Показано, что дисперсия $D_{y2}(t)$ на выходе САУ с частотной характеристикой $\Phi(i\omega, t)$, обуславливаемая отброшенным n-ым остатком канонического разложения может быть оценена по формуле

$$D_{y2}(t) \leqslant D_{2\text{ср}} |\Phi(i\omega_{n+1}, t)|^2. \qquad (15)$$

Корреляционный момент входной и выходной переменных в данный момент времени от отброшенного члена канонического ряда может быть определен по формуле

$$D_{xy2}(t) \leqslant \frac{1}{2}\left[D_{z\text{ср}} + D_{y2}(t)\right]. \qquad (16)$$

3. Дается пример определения дисперсии остаточного члена канонического ряда случайной функции при условии, что она представляется десятью членами канонического ряда.

ЛИТЕРАТУРА

1. Пугачев В. С. Теория случайных функций и ее применение к задачам автоматического управления. Москва, ГИТТЛ, 1957.
2. Лэнинг Дж. Х., Бэттин Р. Г. Случайные процессы в задачах автоматического управления. ИИЛ, 1958.
3. Батков А. М. Решение одного класса нестационарных задач статистической динамики систем автоматического управления с применением электронных моделирующих устройств (кандидатская диссертация), 1958.
4. Коган Б. Я. Электронные моделирующие устройства и их применение для исследования систем автоматического регулирования. ГИТТЛ, 1958.
5. Казаков И. Е. Приближенный вероятностный анализ точности работы существенно нелинейных систем. Автоматика и Телемеханика, т. XVII, № 5, 1956.
6. Booton R. C. Nonlinear control systems with random inputs, Trans. IRE, Profess. group on circ. theory, vol. CT-1, 1954.
7. Леонов Ю. П. Некоторые вопросы синтеза линейных систем при нестационарных случайных воздействиях (кандидатская диссертация), 1957.

ПЕРЕЧЕНЬ

работ, в которых опубликовано содержание диссертации

1. Телькснис Л. А. Разложение случайных функций в канонический ряд с применением электронных моделирующих устройств. Труды Академии Наук Литовской ССР, серия Б, 4(20), 1959.
2. Телькснис Л. А. Статистический анализ систем автоматического управления с применением электронных моделирующих устройств*). Труды конференции «Новые разработки в области вычислительной математики и вычислительной техники» (в печати).
3. Коварский Г. Я., Телькснис Л. А. Оценка точности представления случайных функций конечным отрезком канонического ряда**). Сборник трудов по автоматическому управлению (в печати).
4. Телькснис Л. А. Определение моментов второго порядка различных координат систем автоматического управления с применением электронных моделирующих устройств***). Автоматика и Телемеханика, т. XXI, № 2, 1960.

---

*) Работа доложена на Всесоюзной конференции «Новые разработки в области вычислительной математики и вычислительной техники» в Киеве в 1958 г.

**) Работа доложена на шестой научно-технической конференции молодых ученых по автоматическому управлению в Москве в 1959 г.

***) Работа доложена на Всесоюзном совещании по вычислительной математике и вычислительной технике в Москве в 1959 г.

Т 03357 от 25/III 1960 г. Зак. 772 Тир. 150

Типография Хлебоиздата, Москва, Шелепиха, 4-я ул., д. 1а