

ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ордена ЛЕНИНА ОПТИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ  
имени С. И. ВАВИЛОВА

---

Д. Ю. ГАЛЬПЕРН

ИССЛЕДОВАНИЯ ПО ГЕОМЕТРИ-  
ЧЕСКОЙ ОПТИКЕ

Автореферат диссертации,  
представленной на соискание ученой степени  
доктора технических наук

ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ОПТИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ  
ИМЕНИ С. И. ВАВИЛОВА  
Москва

1960

Работа выполнена в Государственном ордена Ленина  
Оптическом институте им. С. И. Вавилова

161127  
ЦЕНТРАЛЬНАЯ НАУЧНАЯ  
БИБЛИОТЕКА  
А. Н. Киргизской ССР

## ИССЛЕДОВАНИЯ ПО ГЕОМЕТРИЧЕСКОЙ ОПТИКЕ

Автореферат диссертации

### Введение

В диссертации рассмотрен ряд вопросов геометрической оптики, касающихся оптических систем из одноосных кристаллов и теории aberrаций третьего и более высоких порядков. Большое внимание уделено соотношениям, связывающим дифференциалы величин, определяющих положение луча в пространстве предметов и изображений, так как эти формулы в последние годы нашли практическое применение. Большинство полученных результатов иллюстрировано примерами, часть которых имеет практическое значение.

### § 1. Важнейшие свойства эйконалов оптических систем, состоящих из анизотропных сред

Исследования по геометрической оптике, выполненные в настоящей работе, в части, относящейся к оптике анизотропных сред, основаны на принципе Ферма и представлениях об эйконалах различного вида.

Для оптических систем, состоящих из одноосных кристаллов, выведены формулы для частных производных характеристической функции  $H$  и точечного эйконала  $E_1$ , которые равны

$$\frac{\partial H}{\partial x_p} = \frac{n_{op}^2}{n_p} \cos \alpha_p; \quad \frac{\partial H}{\partial y_p} = \frac{n_{ep}^2}{n_p} \cos \beta_p; \quad \frac{\partial H}{\partial z_p} = \frac{n_{ep}^2}{n_p} \cos \gamma_p, \quad (1)$$

где  $n_{op}$ ,  $n_{ep}$  обыкновенный и необыкновенный показатели преломления для среды, заполняющей последнее пространство,  $n_p$  — показатель преломления необыкновенного луча;  $x_p$ ,  $y_p$  и  $z_p$  координаты точки на необыкновенном луче в пространстве изображений, а  $\cos \alpha_p$ ,  $\cos \beta_p$  и  $\cos \gamma_p$  — направляющие коси-

нусы необыкновенного луча в том же пространстве. Подобные формулы имеют место и для частных производных от характеристической функции по координатам точки, лежащей на луче в пространстве предметов.

Для точечного эйконала имеют место следующие выражения

$$\frac{\partial E_1}{\partial y_p} = \frac{n_{ep}^2}{n_p} \cos \beta_p; \quad \frac{\partial E_1}{\partial z_p} = \frac{n_{ep}^2}{n_p} \cos \gamma_p. \quad (2)$$

Если первая и последняя среда оптической системы изотропны, то формулы для частных производных от точечного, углового и смешанного эйконалов и эйконала Зейделя-Шварцшильда имеют одинаковый вид как для систем, все остальные среды которых изотропны, так и для систем, часть сред которых является одноосными кристаллами. Доказательство приведенного утверждения основывается на том, что приращения эйконалов при изменении их аргументов определяются только приращением оптического пути в пространстве предметов и изображений.

Так как значения смешанных производных не зависят от порядка дифференцирования, то, дифференцируя надлежащим образом частные производные от эйконалов, находим полные инварианты, связывающие дифференциалы направляющих косинусов лучей и дифференциалы координат точек пересечения лучей с плоскостью  $YOZ$  в пространстве предметов и изображений. Примером таких инвариантов являются следующие формулы:

$$\left[ -\frac{\partial \left( \frac{n_{e1}^2}{n_1} \cos \beta_1 \right)}{\partial y_p} \right]_{y_1, z_1, z_p} = \left[ \frac{\partial \left( \frac{n_e^2}{n_p} \cos \beta_p \right)}{\partial y_1} \right]_{z_1, y_p, z_p}, \quad (3)$$

$$\left[ -n_1 \frac{\partial y_1}{\partial \cos \beta_p} \right]_{\cos \beta_1, \cos \gamma_1, \cos \gamma_p} = \left[ n_p \frac{\partial y_p}{\partial \cos \beta_1} \right]_{\cos \gamma_1, \cos \beta_p, \cos \gamma_p}, \quad (4)$$

$$\left[ -\frac{\partial \left( \frac{n_{e1}^2}{n_1} \cos \beta_1 \right)}{\partial \cos \beta_p} \right]_{y_1, z_1, \cos \gamma_p} = n_p \left[ \frac{\partial y_p}{\partial y_1} \right]_{z_1, \cos \beta_p, \cos \gamma_p}. \quad (5)$$

Приведенные примеры получены дифференцированием частных производных соответственно от точечного, углового и смешанного эйконалов. Индексы, стоящие у квадратных ско-

бок, указывают на аргументы, оставшиеся постоянными при дифференцировании. В работе приведено 18 инвариантов такого рода.

Указанные формулы находят непосредственное применение, например, для вычисления значений aberrаций в обратном ходе лучей по известным aberrациям в прямом. Полагая в (3)  $n_{e1} = n_1$  и  $n_{ep} = n_p$ , получаем

$$\delta y_1 = \frac{n_p}{n_1} \frac{d \cos \beta_p}{\left[ \frac{\partial \cos \beta_1}{\partial y_p} \right]_{y_1, z_1, z_p}}, \quad (6)$$

где  $\delta y_1$  — aberrация для обратного хода лучей, равная разности координат  $y$  точек пересечения с плоскостью предмета данного луча и главного луча,  $\left[ \frac{\partial \cos \beta_1}{\partial y_p} \right]_{y_1, z_1, z_p}$  — частная производная,

приближенно равная отношению разности направляющих косинусов данного и главного лучей к разности координат  $y$  точек их пересечения с плоскостью изображения,  $\delta \cos \beta_p$  — разность направляющих косинусов с осью  $OY$  того луча, для которого вычисляется aberrация для обратного хода, и главного луча. Индексы у квадратных скобок указывают на то, что при вычислении частной производной должны рассматриваться лучи, пересекающие плоскость предмета в одной точке, а координаты  $z$  точек пересечения обоих лучей с плоскостью изображения должны быть равны; последнее требование выполняется, если оба луча лежат в меридианной плоскости, совпадающей с плоскостью  $YOX$ .

Формула (6) верна с точностью до величин второго порядка малости по сравнению с  $d \cos \beta_p$ .

Формулы (4) и (5) применимы для вычисления угловых aberrаций телескопической системы для обратного хода лучей по известным aberrациям в прямом ходе и для вычисления по известным линейным aberrациям лупы для обратного хода лучей угловых aberrаций для прямого хода.

## § 2. Свойства элементарных пучков

Лучи, пересекающиеся в каком-либо пространстве в одной точке и составляющие бесконечно малые углы друг с другом, образуют элементарный пучок. В каждой среде все лучи такого пучка являются либо обыкновенными, либо необыкновенными. При преломлении элементарного луча на границе двух

анизотропных сред элементарный пучок распадается на два пучка. Один состоит из обыкновенных лучей, а другой — из необыкновенных. Один из лучей элементарного пучка принимается за осевой или центральный.

Для совокупности элементарных пучков, центральные лучи которых образуют бесконечно малые углы и пересекают координатную плоскость  $YOZ$  на бесконечно малых расстояниях друг от друга, выведены следующие формулы, позволяющие по известному ходу луча, принадлежащего к указанной совокупности в пространстве предметов, установить его ход в пространстве изображений:

$$\begin{aligned} dy_p &= \frac{1}{t} \left[ (\bar{Q}_2 - \bar{Q}_1) dy_1 + (\bar{S}_2 - \bar{S}_1) dz_1 + \bar{Q}_1 td \cos \beta_1 + \right. \\ &\quad \left. + \bar{S}_1 td \cos \gamma_1 \right], \\ dz_p &= \frac{1}{t} \left[ (\bar{R}_2 - \bar{R}_1) dy_1 + (\bar{T}_2 - \bar{T}_1) dz_1 + \bar{R}_1 td \cos \beta_1 + \right. \\ &\quad \left. + \bar{T}_1 td \cos \gamma_1 \right], \\ d \cos \beta_p &= \frac{1}{t} \left[ (Q_2 - Q_1) dy_1 + (T_2 - T_1) dz_1 + Q_1 td \cos \beta_1 + \right. \\ &\quad \left. + S_1 td \cos \gamma_1 \right], \\ d \cos \gamma_p &= \frac{1}{t} \left[ (R_2 - R_1) dy_1 + (T_2 - T_1) dz_1 + R_1 td \cos \beta_1 + \right. \\ &\quad \left. + T_1 td \cos \gamma_1 \right]. \end{aligned} \quad (7)$$

При выводе (7) сделаны следующие предположения. Ось  $OX$  в пространстве предметов совмещена с центральным лучом одного из элементарных пучков, ось  $O'X'$  совмещена с сопряженным лучом в пространстве изображений. Начало координат в пространстве предметов совпадает с вершиной упомянутого элементарного пучка, а начало координат для пространства изображений выбрано произвольно.

$dy_1, dz_1$  и  $dy_p, dz_p$  — дифференциалы координат точек пересечения, сопряженных лучей с плоскостями  $YOZ$  и  $Y'O'Z'$ , расположенными соответственно в пространстве предметов и изображений,  $d \cos \beta_1, d \cos \gamma_1$  и  $d \cos \beta_p, d \cos \gamma_p$  — дифференциалы направляющих косинусов лучей с осями  $OY, OZ$  и  $O'Y', O'Z'$  тех же систем координат.

16 величин  $Q_1, S_1, R_1, T_1$  и т. д. — частные производные следующего вида

$$\begin{aligned} Q_1 &= \left[ \frac{\partial \cos \beta_p}{\partial \cos \beta_1} \right]_{y_1, z_1, \cos \gamma_1}; & R_1 &= \left[ \frac{\partial \cos \gamma_p}{\partial \cos \beta_1} \right]_{y_1, z_1, \cos \gamma_1}; \\ S_1 &= \left[ \frac{\partial \cos \beta_p}{\partial \cos \gamma_1} \right]_{y_1, z_1, \cos \beta_1}; & T_1 &= \left[ \frac{\partial \cos \gamma_p}{\partial \cos \gamma_1} \right]_{y_1, z_1, \cos \beta_1}; \\ \bar{Q}_1 &= \left[ \frac{\partial y_p}{\partial \cos \beta_1} \right]_{y_1, z_1, \cos \gamma_1}; & \bar{R}_1 &= \left[ \frac{\partial z_p}{\partial \cos \beta_1} \right]_{y_1, z_1, \cos \gamma_1}; \\ \bar{S}_1 &= \left[ \frac{\partial y_p}{\partial \cos \gamma_1} \right]_{y_1, z_1, \cos \beta_1}; & \bar{T}_1 &= \left[ \frac{\partial z_p}{\partial \cos \gamma_1} \right]_{y_1, z_1, \cos \beta_1}, \end{aligned} \quad (8)$$

вычисленные для элементарного пучка, вершина которого лежит в начале координат в пространстве предметов, а центральный луч совпадает с осью  $OX$ .

$Q_2, S_2, R_2$  и т. д. определены таким же образом для элементарного пучка, вершина которого лежит на оси  $OX$  на расстоянии  $t$  от начала координат, а центральный луч совпадает с этой осью.

Формулы (7) применимы к любым двум совокупностям прямых, между которыми существует однозначное соответствие, устанавливаемое с помощью следующих функциональных зависимостей:

$$\begin{aligned} \cos \beta_p &= F_1(x_1, y_1, \cos \beta_1, \cos \gamma_1); & y_p &= F_3(x_1, y_1, \cos \beta_1, \cos \gamma_1); \\ \cos \gamma_p &= F_2(x_1, y_1, \cos \beta_1, \cos \gamma_1); & z_p &= F_4(x_1, y_1, \cos \beta_1, \cos \gamma_1); \end{aligned} \quad (9a)$$

Должны существовать конечные частные производные функций  $F_1, F_2, F_3$  и  $F_4$ .

При выводе (7) не были использованы соотношения, вытекающие из законов оптики.

С помощью инвариантов вида (3), (4), (5) устанавливается ряд зависимостей между производными  $Q_1, R_1, S_1, T_1$  и т. д.

Формулы (7) позволяют распространить на системы, состоящие из анизотропных сред, законы оптики, установленные Гуллстрандом и рядом других исследователей для двух совокупностей бесконечно близких сопряженных лучей, одна из которых расположена в пространстве предметов, а другая в пространстве изображений оптической системы из изотропных сред. С помощью (7) выводятся формулы, определяющие в пространстве изображений точки пересечения с центральным лучом лучей элементарного пучка, лежащих в двух сечениях.

Если лучи элементарного пучка, лежащие в пространстве предметов в одной плоскости, после любого отражения или преломления поверхностями оптической системы образуют с этой плоскостью углы, величина которых не ниже второго порядка малости по сравнению с  $dy_1$ ,  $dz_1$ ,  $d \cos \beta_1$  и  $d \cos \gamma_1$ , то такие пучки называются плоскими элементарными пучками лучей.

Для плоских элементарных пучков лучей с помощью формул (7) доказано, что элементарному плоскому пучку лучей, вершина которого лежит в пространстве предметов, соответствуют в пространстве изображений лучи, пересекающиеся в одной точке, т. е. существуют сопряженные точки. Далее легко доказать, что точкам, расположенным в пространстве предметов на одной прямой, соответствуют в пространстве изображений точки, тоже лежащие на прямой. Это вытекает из линейности формул (7). Далее устанавливаются для элементарных плоских пучков лучей формулы для вычисления углового и линейного увеличений формулы Ньютона и другие соотношения. Из изученных свойств элементарных пучков вытекает, что параксиальные величины оптики, например, углы лучей с осью системы, высоты падения на поверхности и т. д. являются, строго говоря, дифференциалами.

Свойствам элементарных пучков уделено в работе внимание, так как за последние десять лет они стали более широко использоваться в практических расчетах.

### § 3. Законы преломления и отражения

На основании принципа Ферма получены формулы для вычисления направляющих косинусов преломленного луча по известным направляющим косинусам падающего луча и нормали в точке падения

$$\begin{aligned} \frac{n_o'^2}{n'} \cos \alpha' - \frac{n_o^2}{n} \cos \alpha \cos \theta + \frac{n_e^2}{n} \cos \beta \sin \theta &= k \cos \mu; \\ \frac{n_e'^2}{n'} \cos \beta' - \frac{n_e^2}{n} \cos \beta \cos \theta - \frac{n_o^2}{n} \cos \alpha \sin \theta &= k \cos \nu; \\ \frac{n_e'^2}{n'} \cos \gamma' - \frac{n_e^2}{n} \cos \gamma &= k \cos \lambda; \end{aligned} \quad (9)$$

$$\begin{aligned} k^2 \left( \frac{\cos^2 \mu}{n_o'^2} + \frac{\cos^2 \nu}{n_e'^2} + \frac{\cos^2 \lambda}{n_e'^2} \right) + \frac{2k}{n} \left[ \frac{n_o^2 \cos \alpha \cos \theta - n_e^2 \cos \beta \sin \theta}{n_o'^2} \times \right. \\ \left. \times \cos \mu + \frac{n_e^2 \cos \beta \cos \theta + n_o^2 \cos \alpha \sin \theta}{n_e'^2} \cos \nu + \frac{n_e^2}{n_e'^2} \cos \gamma \cos \lambda \right] + \\ + \frac{1}{n^2} \left[ \frac{(n_o^2 \cos \alpha \cos \theta - n_e^2 \cos \beta \sin \theta)^2}{n_o^2} + \right. \\ \left. + \frac{(n_e^2 \cos \beta \cos \theta + n_o^2 \cos \alpha \sin \theta)^2}{n_e^2} + \frac{n_e^4}{n_e'^2} \cos^2 \gamma \right] - 1 = 0; \quad (10) \\ \frac{1}{n'^2} = \left( k \cos \mu + \frac{n_o^2}{n} \cos \alpha \cos \theta - \frac{n_e^2}{n} \cos \beta \sin \theta \right)^2 \frac{1}{n_o'^4} + \\ + \left( k \cos \nu + \frac{n_e^2}{n} \cos \beta \cos \theta + \frac{n_o^2}{n} \cos \alpha \sin \theta \right)^2 \frac{1}{n_e'^4} + \\ + \left( k \cos \lambda + \frac{n_e^2}{n} \cos \gamma \right)^2 \frac{1}{n_e'^4}. \quad (11) \end{aligned}$$

В формулах (9), (10), (11) величины имеют следующие значения:  $\cos \alpha$ ,  $\cos \beta$ ,  $\cos \gamma$  и  $\cos \alpha'$ ,  $\cos \beta'$  и  $\cos \gamma'$  — направляющие косинусы падающего и преломленного лучей,  $\cos \mu$ ,  $\cos \nu$  и  $\cos \lambda$  — направляющие косинусы нормали в точке падения. Направляющие косинусы падающего луча вычисляются в системе координат, ось  $OX$  которой совпадает с оптической осью кристалла в первой среде, плоскость  $XOY$  проходит через оси кристаллических сред, заполняющих пространство до и после преломляющей поверхности; ось  $OY$  перпендикулярна оси  $OX$ , а ось  $OZ$  перпендикулярна плоскости  $XOY$ ; направляющие косинусы преломленного луча и нормали в точке падения вычисляются относительно системы координат, ось  $O'X'$  которой совпадает с осью кристаллической среды, заполняющей пространство после преломляющей поверхности; плоскость  $X'O'Y'$  совпадает с плоскостью  $XOY$ , ось  $O'Y'$  перпендикулярна оси  $O'X'$ , оси  $OZ$  и  $O'Z'$  совпадают:  $\theta$  — угол между осями кристаллов или осями  $OX$  и  $O'X'$ ;  $n_e$ ,  $n_o$  и  $n_e'$ ,  $n_o'$  — обыкновенный и необыкновенный показатели преломления для первой и второй среды;  $n$  и  $n'$  — показатели преломления для необыкновенного луча в первой и второй среде.

Формулы (9), (10) и (11) позволяют вычислить по известным  $\cos \alpha$ ,  $\cos \beta$ ,  $\cos \gamma$ ,  $\cos \mu$ ,  $\cos \nu$ ,  $\cos \lambda$  и  $n_o$ ,  $n_e$ ,  $n'_o$ ,  $n'_e$ , и  $\theta$  следующий ряд величин  $\cos \alpha'$ ,  $\cos \beta'$ ,  $\cos \gamma'$  и  $n'$ .

Возможны следующие случаи преломления лучей на границе двух анизотропных сред: 1) падающий и преломленный луч необыкновенные; 2) падающий луч обыкновенный, а преломленный необыкновенный; 3) падающий луч необыкновенный, а преломленный луч обыкновенный; 4) оба луча обыкновенные. Формулы (9), (10) и (11) относятся к первому случаю. В остальных случаях формулы упрощаются. Множители при направляющих косинусах обыкновенного луча становятся равными  $n_o$  или  $n'_o$ , точно также имеет место для обыкновенного луча равенство  $n = n_o$ .

Подобные формулы выведены и для отражения лучей в одноосном кристалле.

#### § 4. Расчет хода луча через оптическую систему из анизотропных сред

Для расчета хода луча вводится основная система координат. Уравнения всех преломляющих и отражающих поверхностей отнесены к этой системе координат. Оптические оси кристаллов определяются по отношению к основной системе координат либо направляющими косинусами, либо углами:  $\omega$  — ось кристалла с плоскостью  $\bar{X}O\bar{Z}$  основной системы координат и углом  $\tau$  проекции оси кристалла на плоскость  $\bar{X}O\bar{Z}$  с осью  $O\bar{X}$ . Наряду с основной системой координат вводится ряд вспомогательных, ориентированных в соответствии с изложенным в параграфе 3. Для удобства расчета в ряде случаев между двумя смежными кристаллическими средами вводится бесконечно-тонкий изотропный промежуток, не оказывающий влияние на ход лучей. При этом условию каждой среде приписывается вспомогательная система координат, ось  $OX$  которой совпадает с осью кристалла, плоскость  $XOZ$  которой образует с плоскостью  $\bar{X}O\bar{Z}$  основной системы координат угол  $\omega$ , а ось  $OZ$  совпадает с линией пересечения плоскостей  $XOZ$  и  $\bar{X}O\bar{Z}$ . Для перехода от основной системы координат к вспомогательной и обратно применяются известные формулы Эйлера. Например, направляющий косинус с осью  $OX$  вспомогательной системы координат определяется по формуле

$$\cos \alpha = \cos \bar{\alpha} \cos \beta \cos \omega + \cos \bar{\beta} \sin \omega - \cos \bar{\gamma} \sin \tau \cos \omega,$$

где  $\cos \bar{\alpha}$ ,  $\cos \bar{\beta}$  и  $\cos \bar{\gamma}$  — направляющие косинусы в основной системе координат.

Обратный переход производится следующим образом

$$\cos \bar{\alpha} = \cos \alpha \cos \tau \cos \omega - \cos \beta \cos \tau \sin \omega + \cos \gamma \sin \tau.$$

Для остальных направляющих косинусов имеют место аналогичные формулы.

Расчет хода луча выполняется так.

По известным координатам  $x$ ,  $y$  и  $z$  точки падения луча на поверхность, имеющую номер  $t$ , и по известным направляющим косинусам луча в среде, имеющей номер  $t+1$  (все указанные величины отнесены к основной системе координат), составляется уравнение луча в среде, имеющей номер  $t+1$ ; решая это уравнение совместно с уравнением, определяющим поверхность, имеющую номер  $t+1$ , находят координаты точки падения на эту поверхность и вычисляют по известным формулам направляющие косинусы нормали в точке падения. Далее, перейдя по формулам Эйлера к вспомогательной системе координат, связанной со средой, имеющей номер  $t+1$ , и вычислив значения направляющих косинусов падающего луча и нормали в этой системе координат, по формулам вида (9) находим величины направляющих косинусов преломленного луча в бесконечнотонком изотропном промежутке, разделяющем среды с номерами  $t+1$  и  $t+2$ . Переходя сперва к основной системе координат, а затем вычисляя значения направляющих косинусов луча и нормали в системе координат, связанной со средой, имеющей номер  $t+2$ , и снова применяя формулы (9), (10) и (11), находят направляющие косинусы луча, распространяющегося в среде, имеющей номер  $t+2$ . Указанный прием можно применить последовательно ко всем поверхностям системы и в конечном счете определить уравнение луча в пространстве изображений.

С помощью формулы (9) для луча, выходящего из оптической системы, устанавливается следующая формула:

$$n_{s+1} \cos \bar{\alpha}_{s+1} = k_1 \cos \mu_1 + \sum_{t=2}^{t=s-1} (k_t + k'_t) \cos \bar{\mu}_t + k_s \cos \mu_s + n_1 \cos \alpha_1, \quad (12)$$

где  $n_{s+1}$  и  $n_1$  — показатели преломления в пространстве изображений и предметов, заполненных изотропной средой,  $\cos \bar{\alpha}_{s+1}$  и  $\cos \alpha_1$  — направляющие косинусы лучей в простран-

стве изображений и предметов с осью  $\overline{OX}$  основной системы координат;  $\cos \mu_1 \dots \cos \mu_t$  — направляющие косинусы нормалей в точках падения луча на поверхности, имеющие номера 1, 2, 3, и  $S$  в той же системе координат;  $k_1, k'_1, k_t, k'_t$  и  $k_s$  — величины, определяемые по формуле (10),  $k_t$  — вычисляется при преломлении луча из среды, имеющей номер  $t$ , в изотропный промежуток, а  $k'_t$  при преломлении луча из этого изотропного промежутка в среду, имеющую номер  $t+1$ .

Подобные формулы имеют место и для двух других направляющих косинусов луча. Из (12) следует, что для направляющего косинуса луча, распространяющегося в изотропном пространстве, разделяющем среды, имеющие номера  $t$  и  $t+1$ , справедлива формула

$$n_{t,t} \cos \bar{\alpha}_{t,t} = k'_{t-1} \cos \bar{\mu}_{t-1} + k_t \cos \mu_t + n_{t-1,t-1} \cos \bar{\alpha}_{t-1,t-1}, \quad (13)$$

где  $n_{t,t}$  и  $n_{t-1,t-1}$  — показатели преломления двух последовательных изотропных промежутков,  $\cos \alpha_{t,t}$ ,  $\cos \alpha_{t-1,t-1}$  — направляющие косинусы луча относительно оси  $OX$  основной системы координат в двух последовательных изотропных промежутках,  $\cos \mu_{t-1}$ ,  $\cos \mu_t$  — направляющие косинусы нормали в основной системе координат в точках падения луча на поверхности, имеющие номера  $t-1$  и  $t$ . Аналогичные формулы имеют место и для двух других направляющих косинусов.

Расчет хода луча сильно упрощается, если падающий луч нормали во всех точках падения и оптические оси всех кристаллических сред лежат в одной плоскости. Этот случай можно назвать плоской задачей.

### § 5. Определение дифференциалов величин, встречающихся при расчете хода лучей

Расчет хода луча через систему, содержащую кристаллические среды, связан с большими вычислениями, поэтому во многих случаях выгодно пользоваться вместо точных значений величин их дифференциалами.

Как и в предыдущем параграфе, между средами, имеющими номер  $t$  и  $t+1$ , мысленно вводится бесконечно тонкий изотропный промежуток. Дифференцируя формулу (12), находим для дифференциала направляющего косинуса луча, распространяющегося в указанном изотропном промежутке, следующую формулу:

$$\begin{aligned} dn_{t,t} \cos \bar{\alpha}_{t,t} + n_{t,t} d \cos \bar{\alpha}_{t,t} = & k'_{t-1} d \cos \bar{\mu}_{t-1} + dk'_{t-1} \cos \bar{\mu}_{t-1} + \\ & + k_t d \cos \bar{\mu}_t + dk_t \cos \bar{\mu}_t + dn_{t-1,t-1} \cos \bar{\alpha}_{t-1,t-1} + \\ & + n_{t-1,t-1} d \cos \alpha_{t-1,t-1}. \end{aligned} \quad (14)$$

Для вычисления  $dk_{t-1}$  дифференцируем уравнения типа (9) для трех направляющих косинусов преломленного луча по всем переменным, умножая полученные равенства соответственно на  $\cos \alpha'$ ,  $\cos \beta'$ ,  $\cos \gamma'$  и складывая их, находим после ряда преобразований значение  $dk'_{t+1}$ . Подобным же образом вычисляется величина  $dk_t$ , а затем по формулам типа (14) после необходимых их преобразований определяем дифференциалы направляющих косинусов луча в изотропном промежутке, разделяющем среды, имеющие номера  $t$  и  $t+1$ .

Величины  $d \cos \mu_t$  и  $dx_t, dy_t, dz_t$  сравнительно просто находятся из формул для расчета хода луча.

### § 6. Бесконечно тонкие астигматические пучки лучей

Формулы для определения дифференциалов координат точек падения и направляющих косинусов лучей легко применимы для вычисления положения изображений точки тонкими пучками лучей. Проведя через точку предмета в общем случае внемеридианный осевой луч пучка, совместим с ним ось  $OX$  прямоугольной системы координат, две другие оси которой направлены произвольно. Начало координат совпадает с точкой предмета. Возьмем два луча, проходящих через ту же точку и бесконечно близких к осевому лучу. Дифференциалы направляющих косинусов первого луча  $d \cos \beta_1$  и  $d \cos \gamma_1$  задаются произвольно равными  $d \cos \beta_{1,1} = 1$ ,  $d \cos \gamma_{1,1} = 0$ , а для второго луча они равны  $d \cos \beta_{1,2} = 0$ ;  $d \cos \gamma_{1,2} = 1$ . Последовательно вычисляются дифференциалы координат точек падения и направляющих косинусов лучей после каждой поверхности системы вплоть до последней. В результате вычислений окажутся известными дифференциалы координат точки падения лучей на последнюю поверхность и дифференциалы направляющих косинусов лучей в пространстве изображений:  $\overline{dx}_{p,1}$ ,  $\overline{dy}_{p,1}$ ,  $\overline{dz}_{p,1}$ ,  $d \cos \beta_{p+1,1}$  и  $d \cos \gamma_{p+1,1}$  для первого луча и  $\overline{dx}_{p,2}$ ,  $\overline{dy}_{p,2}$  и т. д. для второго луча. Все величины определяются в основной системе координат. Если перейти в пространстве изображений к вспомогательной системе координат, ось  $OX_a$  которой совмещена с основным лучом, начало координат совпадает с точкой падения основного луча на последнюю поверхность, а направ-

ления остальных осей правой прямоугольной системы координат задано произвольно, то величины отношений дифференциалов направляющих косинусов и координат имеют следующие значения:

$$Q = \frac{\partial \cos \beta_{p+1,1}}{\partial \cos \beta_{1,1}}; \quad S = \frac{\partial \cos \beta_{p+1,2}}{\partial \cos \gamma_{1,2}}; \quad (15)$$

$$\bar{Q} = \frac{\partial y_{p,1}}{\partial \cos \beta_{1,1}}; \quad \bar{S} = \frac{\partial y_{p,2}}{\partial \cos \gamma_{1,2}} \text{ и т. д.}$$

Таким образом вычисляются величины  $Q, \bar{Q}, S, \bar{S}$ , введенные в § 2. Зная эти величины, можем составить уравнения лучей элементарного пучка в пространстве изображений, если известны уравнения сопряженных лучей в пространстве предметов.

Решив эти уравнения совместно с уравнением осевого луча, найдем координаты точек пересечения лучей пучка с осевым. Как известно, осевой луч пересекают лучи, расположенные в пространстве предметов в двух плоскостях. Положение точек пересечения лучей элементарного пучка определяется формулами:

$$x'_1 = \frac{\bar{Q}l_1 + \bar{S}}{\bar{Q}l_1 + \bar{S}} = \frac{\bar{R}l_1 + \bar{T}}{\bar{R}l_1 + \bar{T}}, \quad (16)$$

$$x'_2 = \frac{\bar{Q}l_2 + \bar{S}}{\bar{Q}l_2 + \bar{S}} = \frac{\bar{R}l_2 + \bar{T}}{\bar{R}l_2 + \bar{T}},$$

где  $l_1$  и  $l_2$  — корни квадратного уравнения

$$l^2(\bar{Q}R - \bar{Q}\bar{R}) + l[(\bar{R}\bar{S} - \bar{S}\bar{R}) + (\bar{T}\bar{Q} - \bar{Q}\bar{T})] + (\bar{T}\bar{S} - \bar{S}\bar{T}) = 0; \quad (17)$$

$x'$  — расстояние точки пересечения лучей пучка от точки падения на последнюю поверхность осевого луча.

Величина  $l_1$  имеет следующий геометрический смысл:

$$l = \frac{d \cos \beta_1}{d \cos \gamma_1}. \quad (18)$$

В одной точке в пространстве изображения пересекаются те лучи элементарного пучка, для которых отношение дифференциалов направляющих косинусов в пространстве предметов равно величине  $l$ , определяемой уравнением (17).

## § 7. Формулы для вычисления астигматизма в простейших случаях

Вычисление астигматизма в ряде случаев существенно упрощается. Если имеет место плоская задача, то для пучков, лежащих в плоскости, проходящей через осевой луч и перпендикулярной к плоскости, проведенной через нормали и оси кристаллов, имеет место следующее равенство:

$$\frac{n_e'^2}{n'} \frac{1}{p'} - \frac{n_e^2}{n} \frac{1}{p} = \frac{k}{r_s}, \quad (19)$$

где  $p$  и  $p'$  — расстояния вершин падающего и преломленного пучков от точки падения,  $r_s$  — радиус кривизны нормального сечения преломляющей поверхности плоскостью, перпендикулярной к оси кристалла и осевому лучу,  $k$  — величина, вычисляемая при расчете хода осевого луча.

Для пучка, лежащего в плоскости падения осевого луча, формула имеет более сложный вид. Для пучков лучей, плоскость падения которых перпендикулярна осям кристаллов, действительна совсем простая формула:

$$\frac{n_e' \cos^2 i'}{t'} - \frac{n_e \cos^2 i}{t} = \frac{n_e' \cos i' - n_e \cos i}{r_m}, \quad (20)$$

где  $i, i'$  — углы падения и преломления,  $r_m$  — радиус кривизны в нормальном сечении, совпадающем с плоскостью падения,  $t$  и  $t'$  — расстояния от точки падения вершин падающего и преломленного бесконечно тонкого пучка лучей.

Для бесконечно тонкого пучка, распространяющегося в плоскости, перпендикулярной плоскости падения осевого луча, и, следовательно, параллельной осям кристаллов, справедлива формула

$$\frac{n_o'^2}{n_e'} \frac{1}{p'} - \frac{n_o^2}{n_e} \frac{1}{p} = \frac{n_e' \cos i' - n_e \cos i}{r_s}. \quad (21)$$

Значение величин, входящих в (21), объяснено выше.

К числу простейших случаев относится распространение элементарных пучков лучей через оптическую систему, ось симметрии которой параллельна осям кристаллов, а осевой луч совпадает с осью симметрии, а также распространение элементарных пучков, осевые лучи которых совпадают с осью симметрии системы, а оси кристаллов перпендикулярны к ней.



## § 8. Численные примеры

В работе рассмотрено несколько численных примеров, часть из них имеет чисто иллюстративное значение, а часть представляет больший интерес, так как приводит к выводам, имеющим практическое значение.

К первой группе относится пример расчета внемеридианного луча через объектив, склеенный из кварцевой линзы и линзы из шпата, пример расчета бесконечно тонкого пучка лучей через ту же линзу. Осевой луч пучка — внемеридианный.

Ко второй группе можно отнести пример, в котором определяются aberrации окуляра в прямом ходе лучей по известным aberrациям в обратном ходе, исследование aberrаций прямоугольной призмы и пластинки из кристалла и, в частности, расчет ее астигматизма, формулы для расчета хода лучей в параксиальной области через кристаллические линзы, расчет поляризационных призм и исследование влияния отступлений от расчетных значений конструктивных элементов двойных поляризационных призм на угол между лучами, прошедшими через части двойной призмы.

Часть формул, упомянутых в данном параграфе, была, конечно, известна ранее из работ других авторов, они выведены вновь в этой работе иным способом с целью показать общность и применимость к решению конкретных задач методов, развитых в предыдущих параграфах.

## § 9. Aberrации оптических систем (общие соображения и способ исследования)

Четыре функции четырех аргументов, называемые aberrациями оптической системы, имеющей ось симметрии, определяются следующим образом:

$$\begin{aligned} \delta y' &= y' - \beta_o y_1; \\ \delta z' &= z' - \beta_o z_1; \\ \delta m' &= m' - \beta_b m_1; \\ \delta M' &= M' - \beta_b M_1, \end{aligned} \quad (22)$$

$y', z', m', M'$  — координаты точек пересечения луча с плоскостью изображения и выходного зрачка;  $y_1, z_1, m_1, M_1$  — координаты точек пересечения того же луча с плоскостью предмета и входного зрачка;  $\beta_o$  и  $\beta_b$  — линейные увеличения (масштаб изображения), с которыми изображаются плоскости предмета и входного зрачка.

В качестве аргументов этих функций могут быть выбраны любые четыре величины, определяющие положение луча относительно оптической системы, например, величины  $y_1, z_1, m_1, M_1$  или  $y', z', m', M'$  или  $m_1, y_1, M_1', z_1$  и т. д. Обычно аргументы выбираются так, чтобы при совмещении луча с осью системы значения аргументов стремились к нулю. Aberrации системы зависят также от ряда параметров — конструктивных элементов системы. Изучение зависимости aberrации от параметров представляет самую трудную часть вычислительной оптики.

Известно несколько способов исследования aberrаций:

1. Метод точного определения aberrаций на основании расчета хода лучей и последующее исследование влияния изменения параметров на aberrации и составление интерполяционных формул. Способ пользуется большим распространением в вычислительной практике ввиду его большой общности и применимости для расчета и исследования почти всех оптических систем. Метод, несмотря на это, теоретически почти не изучен, хотя он безусловно имеет большое будущее, так как вполне применим для расчетов с помощью быстродействующих машин.

2. Исследование свойств лучей бесконечно близких к данному. Этот метод сводится к вычислению производных или дифференциалов от aberrаций по аргументам.

3. Метод разложения aberrаций в ряды по аргументам.

Первый метод в работе не рассматривается, так как до настоящего времени автором не получены существенные результаты.

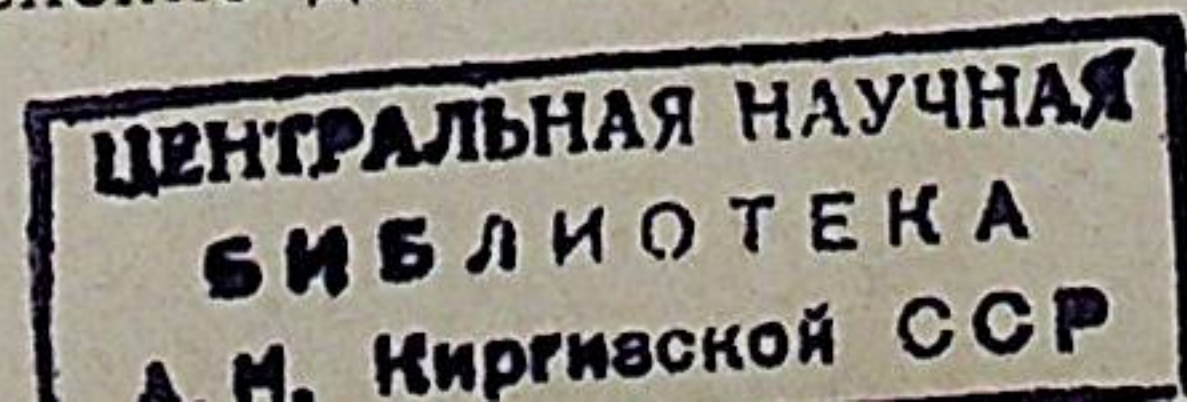
Второму методу уделено значительное внимание; выведены формулы для вычисления производной от величины aberrации по координатам  $y_1$  и  $z_1$ , имеющим следующий вид:

$$\frac{\partial \delta y'}{\partial y_1} = -\beta \left\{ \frac{\partial \left[ \frac{\delta y'}{x' - S'} + \cos \beta' - \frac{1}{\beta_o} \frac{n_1}{n'} \cos \beta_1 \right]}{\partial \left[ \frac{\delta y'}{x' - S'} + \cos \beta' \right]} \right\}. \quad (23)$$

Эти формулы позволяют на основании расчета хода пучка лучей, вершина которого лежит в точке с координатой  $y_1$ , вычислить производные от aberrаций по этой координате, а затем вычислить с точностью до величин второго порядка малости по сравнению с  $\Delta y_1$  значения aberrаций в близких точках.

Производные вида  $\frac{\partial \delta y'}{\partial y_1}$ , как это показано в работе, находят применение для вычисления aberrаций системы, состоя-

16127



щей из двух частей по известной аберрации каждой части. Например, имеет место следующая формула:

$$\delta y' = \delta y_1 \left( \beta_2 + \frac{\partial \delta y_2}{\partial y_2} \right) + \delta y_2, \quad (24)$$

где  $\delta y'$ ,  $\delta y_1$  и  $\delta y_2$  — соответственно аберрации всей системы ее первой и второй части, а  $\beta_2$  — линейное увеличение второй части системы. Выведены формулы для вычисления аберрации телескопической системы по известным аберрациям объектива для прямого хода лучей и аберрациям окуляра для обратного хода, а также формулы для вычисления аберраций для обратного хода лучей по аберрациям для прямого хода лучей.

Третьему методу уделено в диссертации большое внимание.

Работа по разложению аберраций в ряды ведется на протяжении 150 лет. Совокупность членов одного и того же порядка относительно аргументов разложения образует область аберраций данного порядка. Коэффициенты при членах данного порядка называются коэффициентами аберраций этого порядка. Сущность теории аберраций определенного порядка сводится к выводу выражений коэффициентов аберраций в зависимости от параметров оптической системы и к исследованию их свойств. В таком объеме задача решена для аберраций третьего порядка. Для аберраций более высоких порядков получены многочисленными авторами выражения для коэффициентов аберраций. Свойства этих коэффициентов мало исследованы.

В диссертации основное внимание уделено изучению свойств коэффициентов высших порядков.

### § 10. Способ вывода формул для коэффициентов аберраций пятого и более высоких порядков

В диссертации доказываем, что коэффициенты аберраций порядка  $2t+1$  сложной оптической системы могут быть определены, если известны все коэффициенты аберраций вплоть до порядка  $2t+1$  для каждой поверхности в отдельности. Этот факт был известен еще Керберу. Новое доказательство построено на следующей формуле, вытекающей непосредственно из определения аберрации

$$n' \alpha' \delta y' = \sum_{k=1}^{k=p} n_k \alpha_k \delta y_k, \quad (25)$$

где  $n_k$  — показатель преломления в пространстве перед поверхностью, имеющий номер  $k$ ,  $\alpha_k$  — угол первого параксиального луча с оптической осью системы в том же пространстве;  $\delta y_k$  — аберрация, вносимая поверхностью номер  $k$ .

Аберрация  $\delta y_k$  должна быть вычислена точно для того луча, для которого определяется аберрация всей системы, т. е. координаты  $y_k$ ,  $z_k$ ,  $m_k$  и  $M_k$ , для которых вычисляется  $\delta y_k$ , должны равняться значениям координат точек пересечения действительного луча с плоскостью изображения и зрачка в пространстве перед поверхностью, имеющей номер  $k$ , но так как эти величины не известны, то формула не может найти непосредственное применение. Легко можно доказать, что для вычисления коэффициентов порядка  $2t+1$  достаточно знать величины  $y_k$ ,  $z_k$ ,  $m_k$  и  $M_k$  с точностью до порядка  $2t-1$ .

Формула (25) легко распространяется на системы, содержащие одноосные кристаллы.

Аберрации одной поверхности вычисляются из следующих очевидных соотношений.

1. Координаты точки падения на поверхность можно выразить как через величины, расположенные в пространстве перед поверхностью, так и через величины, лежащие в пространстве за поверхностью. Оба выражения должны быть равны, причем первое выражение не зависит от аберраций, вносимых поверхностью, а второе выражение от них зависит. Найденное таким образом уравнение позволяет сравнительно просто найти разложение в ряд величины

$$\varepsilon = \frac{x' \delta y'_k - s' \delta m'_k}{x' - s'},$$

где  $\delta y'_k$  и  $\delta m'_k$  аберрации для плоскости изображения и зрачка, вносимые поверхностью, имеющей номер « $k$ », а  $s'$  и  $x'$  — расстояние плоскости изображения и выходного зрачка от этой поверхности. Величина  $\varepsilon$  зависит от величины  $C = \frac{\delta m' - \delta y'}{x' - s'}$ .

Второе уравнение, позволяющее найти разложение в ряду величины  $C = \frac{\delta m' - \delta y'}{x' - s'}$ , находится из закона преломления (9). Выражая направляющие косинусы падающего луча и нормали в точке падения через величины, расположенные в пространстве перед поверхностью и поэтому не зависящие от аберраций, вносимых ею, подставим их в уравнение (9). Направляющие косинусы преломленного луча определим через величины,

расположенные в пространстве после поверхности и вследствие этого зависящие от ее аберраций. После преобразования найдем уравнение для вычисления величины  $C$ .

Очевидно, что аберрации  $\delta y_k^{(2t+1)}$  и  $\delta m_k^{(2t+1)}$  равны:

$$\begin{aligned} \delta y_k^{(2t+1)} &= \varepsilon^{(2t+1)} + s' C^{(2t+1)}, \\ \delta z_k^{(2t+1)} &= \varepsilon^{(2t+1)} + x' C^{(2t+1)}. \end{aligned} \quad (26)$$

Указанные соотношения справедливы как для оптических систем из изотропных сред, так и из анизотропных (одноосных кристаллов).

До конца в диссертации выполнен вывод формул для аберраций третьего порядка оптической системы, имеющей ось симметрии и состоящей из изотропных сред и одноосных кристаллов. Коэффициенты аберраций пятого порядка вычислены только для оптических систем, имеющих ось симметрии и состоящих из изотропных сред.

Некоторые заключения и следствия на основании проведенных исследований можно сделать о свойствах коэффициентов любых порядков.

## § 11. Основные следствия из теории аберраций

Выражения для коэффициентов аберраций громоздки и не наглядны, поэтому они в автореферате не приводятся. Ниже формулирован ряд следствий, вытекающих из выполненных исследований.

1. Если уравнения преломляющих поверхностей представлены в виде

$$x_k = a_{1,k}(y^2 + z^2) + a_{2,k}(y^2 + z^2)^2 \dots + a_{p,k}(y^2 + z^2)^p + \dots,$$

то коэффициенты аберраций порядка  $2t+1$  зависят от коэффициентов уравнения поверхности  $a_{1,k}$ ;  $a_{2,k}$  ...  $a_{t+1,k}$  и не зависят от коэффициентов более высокого порядка.

2. По крайней мере в часть коэффициентов аберраций порядка  $2t+1$  коэффициенты уравнения поверхностей  $a_{t+1,k}$  входят в виде одинаковых линейных многочленов, или многочленов, отличающихся постоянными множителями,

$$b_1 a_{t+1,1} + b_2 a_{t+1,2} \dots + b_u a_{t+1,u},$$

где  $k$  — номер поверхности,  
 $u$  — число поверхностей в системе,  
 $b_k$  — постоянное число.

3. Если предположить, что в результате приравнивания коэффициентов аберраций до порядка  $2t+1$  заданным числом, получается система совместных определенных уравнений относительно параметров системы, то число параметров должно быть не менее

$$N_1 = \frac{(t+1)^2(t+7) + 5t - 7}{6}.$$

4. Если система состоит из  $S$  преломляющих несферических поверхностей, то в силу пунктов 1, 2 и 3 для исправления аберраций вплоть до порядка  $2t+1$  необходимо, чтобы  $S$  удовлетворяло неравенству

$$(t+2)S - \left[ p - 1 + \frac{t^2(t+6) + 5t - 12}{6} \right] > \frac{(t+1)(t+4)}{2}.$$

Неравенство является необходимым, но недостаточным условием;  $p$  — равно числу дополнительных условий, которым должна удовлетворять оптическая система. В число этих условий входят: требования к фокусному расстоянию, увеличению и длине системы, требования к хроматическим аберрациям и т. д.

5. Если значения аберраций порядка  $2t+1$ , возникающие на отдельных поверхностях системы, малы, то для того, чтобы аберрации порядка  $2t+1$  всей системы были тоже малы, достаточно, чтобы аберрации более низких порядков, возникающие как при преломлении каждой поверхностью, так и в пространстве перед каждой поверхностью, были малы. Например, если малы аберрации пятого порядка, возникающие на отдельных поверхностях оптической системы, то для того, чтобы были малы аберрации пятого порядка всей системы, достаточно, чтобы были малы аберрации третьего порядка на каждой поверхности и аберрации третьего порядка системы, предшествующей любой поверхности.

6. Число коэффициентов пятого порядка в разложении аберраций пятого порядка по величинам  $M_1$ ,  $m_1$ ,  $y_1$  и  $z_1$  равно 12, но между тремя парами коэффициентов существует зависимость вида

$$L_k^{(5)} = a L_m^{(5)} + C,$$

где  $L_k^{(5)}$  и  $L_m^{(5)}$  — два коэффициента пятого порядка в разложении аберрации по аргументам  $y_1$ ,  $z_1$ ,  $m_1$  и  $M_1$ ,  $a$  — постоянное число;  $C$  — функция коэффициентов аберраций третьего порядка всей системы.

Предположение, выдвинутое в пункте 3 и в равной мере относящееся к пункту 4, нуждается, конечно, в строгом доказательстве, дать которое автор диссертации не может. Практически при расчете оптической системы, когда составляются линейные интерполяционные уравнения, выражающие зависимость изменения aberrаций от малых изменений параметров, численно проверяется совместность полученных уравнений. Соображения, изложенные в пунктах 3 и 4, подвергаются при расчете системы таким образом численной проверке и не могут поэтому привести к грубым ошибкам.

Пункт пятый уточняет и исправляет правило, обычно приписываемое М. Береку и утверждающее, что aberrации высоких порядков оптической системы малы тогда, когда малы aberrации третьих порядков для каждой из поверхностей системы.

Пункт шестой хорошо объясняет, почему число коэффициентов aberrаций в разложении по величинам  $y_1, z_1, m_1$  больше, чем в разложении по аргументам Зейделя-Шварцшильда.

## § 12. Заключение

Ряд предложений теории aberrаций, высказанных в работе, не может считаться математически строго доказанным. В вычислительной оптике вопросы строгости доказательства должны ставиться несколько иначе, чем это обычно делается в математике по следующей причине. Любое утверждение, полученное с помощью нестрогих рассуждений, проверяется точно непосредственным тригонометрическим расчетом. В строгих доказательствах нуждаются те утверждения, которые используются для вычисления величин и которые не могут быть проверены точным методом.

Применяемое в работе сравнительно часто выражение «исправить aberrации» следует понимать не как указание на то, что следует стремиться к коэффициентам aberrации, равным нулю, а как указание на то, что коэффициенты aberrаций должны иметь целесообразно выбранные значения. Выбирая надлежащим образом значения коэффициентов низшего порядка применительно к некоторым определенным и трудно поддающимся уменьшению значениям коэффициентов высшего порядка, можно добиться достаточно малых значений результирующей aberrации.

Содержание диссертации опубликовано в следующих статьях:

1. Гальперн Д. Ю. Геометрическая оптика в анизотропных средах с одной осью симметрии (одноосные кристаллы). ЖТФ, т. XXIV, 7, 1954, стр. 1298.
2. Гальперн Д. Ю. О приложении теории aberrаций высших порядков к расчету оптических систем. ЖОиС, т. III, 5, 1957, стр. 514.
3. Гальперн Д. Ю. Дифференциальные законы геометрической оптики, как следствие теории эйконолов. ЖТФ, т. XV, 6, 1945, стр. 375.
4. Гальперн Д. Ю. Применение дифференциальных законов геометрической оптики к расчету оптических систем. Журн. «Оптико-механическая промышленность», 1946, №№ 5—6.
5. Гальперн Д. Ю. Расчет бесконечно тонких пучков: Труды ГОИ, т. XXVI, вып. 52, 1959, стр. 13.

Корректор А. Н. Иткина

Подп. к печати 15.11.60 г. М 22088. Объем 1,5 п. л. Тираж 150. Зак. 353.  
Тип. ГОИ.