АКАДЕМИЯ НАУК СССР
Дальневосточный филиал им. В. Л. Комарова

На правах рукописи.

Инженер А. М. ФРАКТЕР

ОПРЕДЕЛЕНИЕ ТРАЕКТОРИИ КРАЯ ГИБКОЙ УПРУГОЙ КОНСОЛИ

Автореферат
диссертации на соискание ученой степени
кандидата технических наук

г. Владивосток
1955 год

А-Д

Диссертационная работа выполнена
при Благовещенском сельскохозяйственном институте

ОПРЕДЕЛЕНИЕ ТРАЕКТОРИИ КРАЯ ГИБКОЙ УПРУГОЙ КОНСОЛИ

В диссертации дается метод определения в явном виде траектории края гибкой упругой консоли при следующих условиях:

1. Рассматриваются консоли только с прямолинейной осью.
2. Консоли имеют постоянную по длине жесткость.
3. Сечения стержней симметричны.
4. Произвольная нагрузка действует всегда в плоскости главной оси, вызывая только плоский изгиб в направлении наименьшей жесткости.
5. При решении задач стержень считается нерастяжимым и не учитывается влияние сдвигов на перемещение оси.
6. Нагрузка при сколько угодно больших изгибах перемещается поступательно.

Диссертация состоит из введения и трех глав.

Во введении дается обзор литературы и история вопроса, которая вкратце сводится к следующему:

1. Решение поставленной задачи в параметрическом виде

$$x = f_1(P) \text{ и } y = f_2(P)$$

выполнено с помощью эллиптических интегралов профессором Е. П. Поповым. Применяя это решение, можно получить места положения точек края консоли только для сосредоточенных нагрузок.

2. Используя метод последовательных приближений Пикара, П. И. Семенов получил для одного вида нагрузки уравнение траектории края консоли в виде медленно сходящихся знакопеременных рядов:

$$x = f_1(P) \text{ и } y = f_2(P)$$

3. Уравнения траектории для распределенных нагрузок никем не получены.

4. В ряде задач техники необходимо иметь уравнения в явном виде для траектории края консоли, получение которых из уравнений Е. П. Попова и П. И. Семенова практически невозможно.

I

В первой главе излагается разработанный автором диссертации метод решения задачи применительно к сосредоточенным загружениям консоли. При этом рассмотрены две задачи.

Существо метода видно из решения приведенного ниже примера. Рассмотрим прямолинейную консоль, загруженную поперечной сосредоточенной силой на конце. Консоль ориентируем в прямоугольных координатных осях с началом координат в защемлении.

При этом обозначим:

- x — абсцисса края балки,
- y — ордината края балки,
- ξ — абсцисса произвольного сечения,
- η — ордината произвольного сечения.

В выбранной системе координат уравнение изогнутой оси имеет вид:

$$\frac{EI\xi''}{(1+\xi'^2)^{3/2}} = M(\eta). \qquad (1)$$

Для решаемой задачи имеем:

$$\frac{EI\xi''}{(1+\xi'^2)^{3/2}} = P(y-\eta). \qquad (2)$$

Проинтегрируем уравнение (2):

$$\frac{\xi'}{\sqrt{1+\xi'^2}} = \frac{P}{EI}\left(y\eta - \frac{\eta^2}{2}\right) = f, \qquad (3)$$

откуда

$$\xi' = \frac{f}{\sqrt{1-f^2}}. \qquad (4)$$

Из уравнения (4) видно, что f — синус угла касательной к изогутой оси. Так как при принятых условиях длина изогнутой оси при изгибе не меняется, то получим:

$$\int_0^y \frac{d\eta}{\sqrt{1-f^2}} - l = 0. \qquad (5)$$

Интегрируя (4) имеем:

$$\int_0^y \frac{f d\eta}{\sqrt{1-f^2}} - x = 0. \qquad (6)$$

Таким образом, мы имеем два уравнения (5) и (6), связывающие 3 переменных x, y и P, в которых P играет роль параметра. Исключая P, найдём зависимость между x и y. Интересно отметить, что везде роль параметра исполняет не сила P, а отношение $\frac{P}{EI}$, которое обозначим через p.

Обозначим левые части уравнений (5) и (6) соответственно через F и Ф, тогда систему можно записать следующим образом:

$$F(y, p) = 0;$$
$$\Phi(x, y, p) = 0.$$

Этой системе удовлетворяет тройка значений:

$$x=0;\ y=l,\ p=0.$$

Это очевидно физически и легко проверяется аналитически. Для того, чтобы система двух уравнений с аналитическими правыми частями определяла в окрестности точки $x=0$, $y=l$, $p=0$ величины y и p как аналитические функции достаточно, чтобы якобиан

$$\begin{vmatrix} F_y & \Phi_y \\ F_p & \Phi_p \end{vmatrix} \qquad (7)$$

в этой точке не равнялся нулю.

Если это условие окажется выполненным, то коэффициенты разложения в ряд y и p по степеням x в окрестностях точки $x=0$ можно искать, последовательно дифференцируя уравнения (5) и (6) и подставляя в них значения $x=0$, $y=l$, $p=0$. До решения системы (5), (6) в работе произведен подробный предварительный анализ и доказаны следующие положения:

1. Чётность y, т. е. разложение только по чётным степеням x.

2. Нечётность p.

3. Траектории концов всех консолей разной длины, нагруженных одним видом нагрузки, геометрически подобны.

4. Доказывается, что ряд будет иметь вид

$$y=l+a_2^0\frac{x^2}{l}+a_4^0\frac{x^4}{l^3}+\ldots$$

Вычисляем якобиан (7). Он отличен от нуля, следовательно можно найти

$$y_0';\ y_0'';\ y_0'''\ldots\quad p_0';\ p_0'';\ p_0'''\ldots$$

Для вычисления производных $y'\ldots\ p'\ldots$ необходимо записать общие формулы одно-, двух-, трех- и т. д. кратного дифференцирования произвольной функции $F(y, p)$ по x, где y и p функции от x:

1) $F_y y'+F_p p'=0 \qquad (8)$

2) $F_y y''+F_p p''+F_{yy}y'^2+F_{pp}p'^2+2F_{yp}y'p'=0 \quad (9)$ и т. д.

Дифференцируя уравнения (5) и (6) по y и p надлежащее количество раз и подставляя в них тройки значений, получим траектории края консоли с любым количеством членов.

Для рассматриваемого примера траектория края при переносе начала координат на свободный конец с учетом двух членов ряда имеет вид:

$$y=\frac{3}{5}\frac{x^2}{l}+\frac{36}{175}\frac{x^4}{l^3}\,. \qquad (10)$$

II

Во второй главе рассматривается ряд задач при загружении консоли различными распределенными нагрузками. При этом доказывается, что предложенный метод применим для произвольной распределенной нагрузки, зависящей от одного параметра.

Здесь же дается простой метод определения коэффициента a_2 и решаются задачи с помощью упрощенной формулы:

$$a_2=-\frac{\int\limits_0^y\left[\int\limits_0^\eta M_1(\eta)d\eta\right]^2 d\eta}{2\left\{\int\limits_0^y\left[\int\limits_0^\eta M_1(\eta)d\eta\right]d\eta\right\}^2}\,, \qquad (11)$$

где M_1 — момент от единичной нагрузки (вся нагрузка, действующая на консоль, независимо от ее вида, принимается равной единице; в конце необходимо осуществить подстановку $y=l$).

Покажем это на рассмотрении примера изгиба консоли, находящейся под действием поперечной равномерно распределенной вдоль оси консоли нагрузки. При этом числитель формулы (11) вычисляется следующим образом:

$$q=\frac{1}{y};\quad M_1(\eta)=\frac{y}{2}+\frac{\eta^2}{2y}-\eta\,;$$

$$\int_0^{\eta} M_1(\eta) = \frac{y\eta}{2} + \frac{\eta^3}{6y} - \frac{\eta^2}{2} \text{ и т. д.}$$

Точно также вычисляется знаменатель формулы (11). После замены $y = l$ получается

$$a_2 = -\frac{4}{7l}.$$

Траектория края с учетом только первого члена ряда имеет вид:

$$y = l - \frac{4}{7}\frac{x^2}{l}$$

а с переносом начала координат на свободный конец консоли:

$$y = \frac{4}{7}\frac{x^2}{l}$$

В этой же главе приводятся решения задач по определению траектории края упругой гибкой консоли при различных ее загружениях. Решение уравнений (5) и (6) при этом удалось представить и в параметрическом виде

$$x = f_1(p) \text{ и } y = f_2(p).$$

III.

В третьей главе приводятся результаты как аналитической, так и экспериментальной проверки точности проведенных решений.

При этом оказалось, что решения получены в виде быстро сходящихся рядов. Как видно из приведенной ниже таблицы, для практических целей достаточно в большинстве случаев учитывать лишь один член ряда.

ТАБЛИЦА.

Относительный прогиб	Процент ошибки при учете одного члена ряда	двух членов ряда	трех членов ряда
1/10—1/8	0	0	0
1/5 —1/4	2	0	0
1/3	4	0	0
1/2	—	0	0
0,55	—	1	0
3/5	—	4	1
0,7	—	7	2,5

Аналитическое исследование также показало, что на результаты проведенных решений задач в явном виде $y = f(x)$ практически не оказывают влияния как трансформация распределенной нагрузки в процессе изгиба, так и собственный вес тонких стержней.

Разработанный метод позволяет устанавливать траекторию и для любого промежуточного сечения при любых загружениях консоли как сосредоточенными силами, так и произвольной распределенной нагрузкой.

В диссертации это обобщение метода проиллюстрировано рядом конкретных примеров, имеющих самостоятельный интерес для инженерной практики.

БД 24329 г. Владивосток, типография ДВПИ. Заказ 335. Тираж 180