

Академия наук Союза ССР
Дальневосточный филиал имени В. Л. Комарова

Инженер
А. М. ФРАКТЕР

РЕШЕНИЕ НЕКОТОРЫХ ВОПРОСОВ
БОЛЬШИХ ДЕФОРМАЦИЙ ТОНКИХ УПРУГИХ
КОНСОЛЕЙ С ТОЧКИ ЗРЕНИЯ ЭЛЕМЕНТАРНОЙ
ТЕОРИИ СОПРОТИВЛЕНИЯ МАТЕРИАЛОВ

АВТОРЕФЕРАТ ДИССЕРТАЦИИ
НА СОИСКАНИЕ УЧЁНОЙ СТЕПЕНИ
КАНДИДАТА ТЕХНИЧЕСКИХ НАУК

ВЛАДИВОСТОК
1954

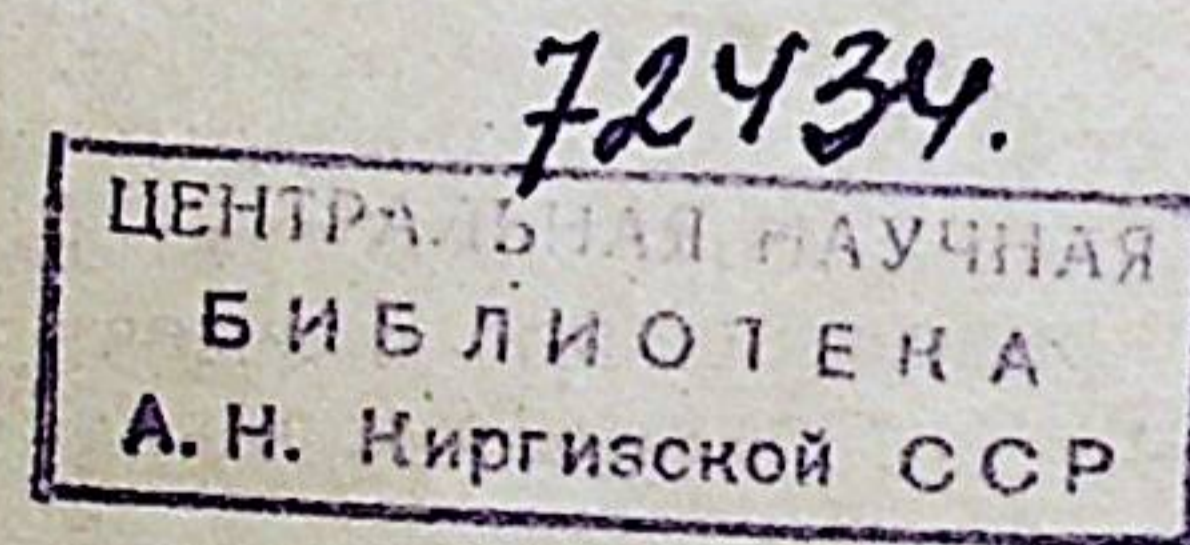
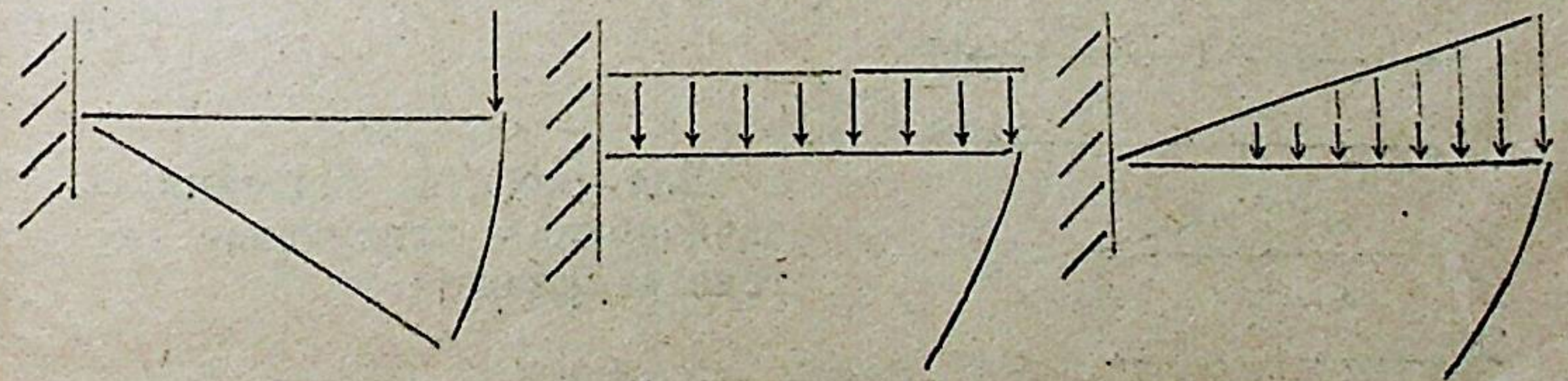
Теория больших деформаций тонких упругих деталей тщательно разработана советским ученым лауреатом Сталинской премии проф. Е. Поповым. Основная работа по теории больших деформаций явилась докторской диссертацией проф. Попова.

Отдавая должное этому капитальному труду, необходимо отметить, что пользование на практике полученными результатами представляет известные трудности для инженера. Математический аппарат выходит за пределы обычной математической подготовки инженера.

В предлагаемой работе решаются некоторые вопросы теории с точки зрения элементарной теории сопротивления материалов, причем пользование на практике конечными результатами не будет представлять сложности не только для инженера-конструктора, но и для студентов, изучающих курс сопротивления материалов.

I. Постановка задачи

В классическом курсе сопротивления материалов линейная деформация изогнутой оси считается всегда только вертикальной, хотя совершенно очевидным является тот факт, что траектория любой точки изогнутой оси консоли при изгибе является криволинейной и имеет не только вертикальные, но и горизонтальные смещения.



Горизонтальные отклонения свободного конца изогнутой оси консоли имеют не только большое теоретическое значение, но и являются практически важными при решении ряда инженерных задач (рессоры, тонкие гибкие стержни в механизмах, пружины и т. д.).

При небольших изгибах горизонтальные смещения настолько малы, что вряд ли могли бы представлять интерес; однако, при значительных изгибах, каким может быть подвергнут тонкий стальной стержень, находясь еще в зоне упругости, горизонтальные смещения будут измеряться величинами того же порядка, что и вертикальные, поэтому пренебречь ими ни в коем случае нельзя.

При значительных изгибах гибкого стального стержня, необходимо пользоваться точной формулой для изогнутой оси:

$$\frac{EJy''}{(1+y'^2)^{3/2}} = M(x) \quad (1)$$

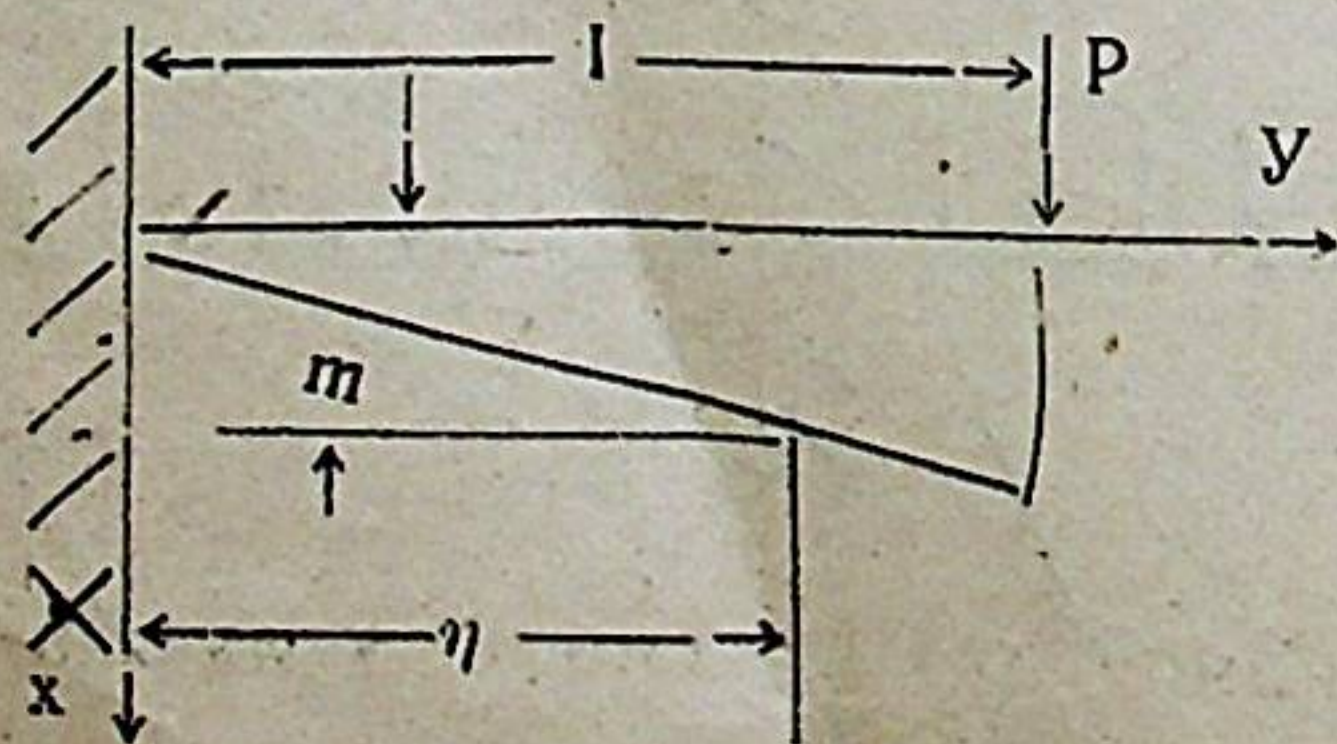
При решении задачи мы считаем стержень нерастяжимым и не учитываем сдвигов. И то и другое настолько мало для рассматриваемого случая, когда высота сечения незначительна в сравнении с длиной, при не очень малой ширине сечения, что ими, без сомнения, можно пренебречь.

Так, представим себе, что гибкий невесомый стержень, зашпеленный с одной стороны, нагружается статически любым видом нагрузки. При постепенном увеличении нагрузки от O до P , свободный конец стержня будет описывать определенную кривую, отыскание которой и представляет цель настоящей работы.

Автор прекрасно понимает, что при решении любой новой теоретической задачи подобного рода необходима тщательная экспериментальная проверка.

В автореферате дано подробное решение одной задачи и общее решение. В работе решены подробно четыре задачи и дана общая методика решения всех подобных задач.

II. Система координат

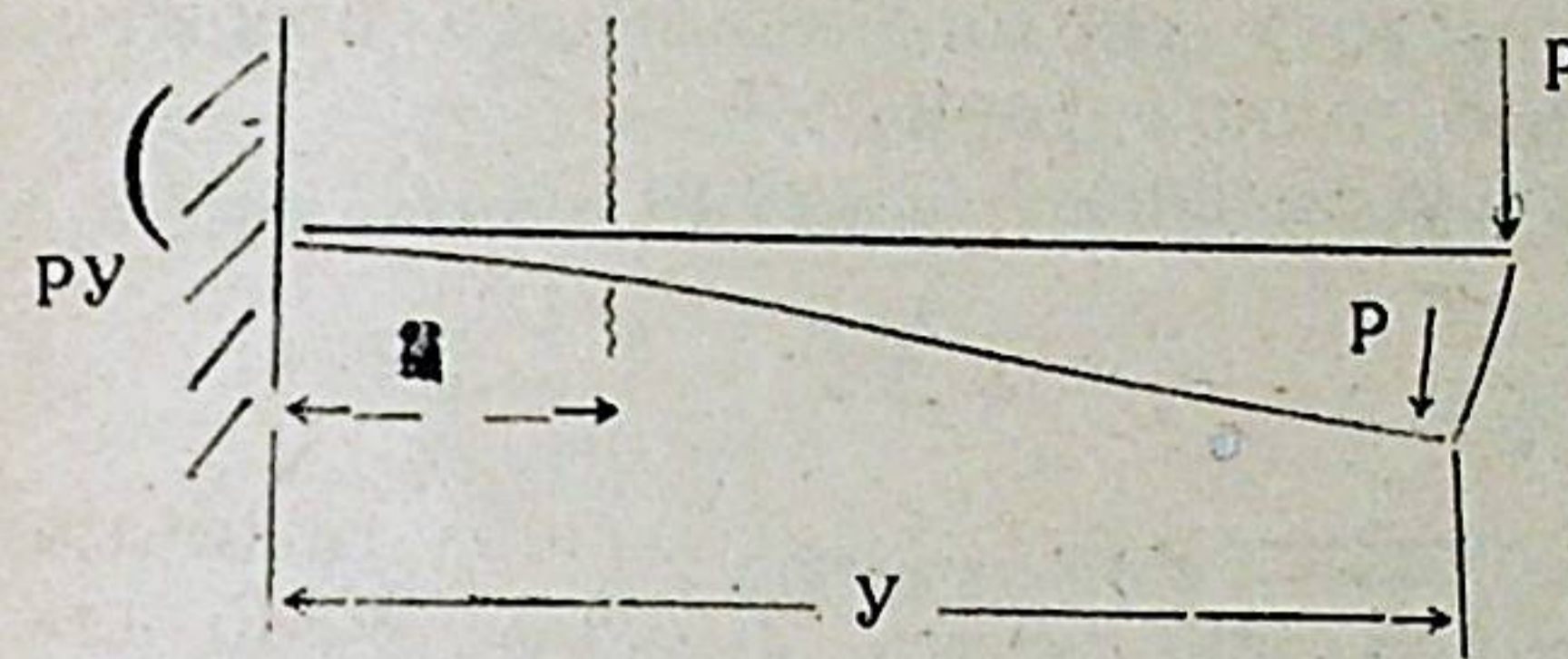


Для удобства решения задачи принята следующая система координат:

x — абсцисса края балки;
 y — ордината края балки;
 ξ — абсцисса произвольного сечения;
 η — ордината произвольного сечения.

Такая система координат позволяет получить управление траектории края балки в обычном математическом виде $y = f(x)$.

III. Составление управлений и методика решения



Ввиду того, что расстояние от силы P до зашпеления консоли — величина переменная, следовательно, и реактивный момент в заделке будет величиной также переменной, равной $P\eta$.

В выбранной системе координат, уравнение изогнутой оси имеет вид

$$\frac{EJ\xi''}{(1+\xi'^2)^{3/2}} = M(\eta) \quad (2)$$

Для решаемой задачи $M(\eta) = P(y - \eta)$

$$(3) \text{ и } \frac{EJ\xi''}{(1+\xi'^2)^{3/2}} = P(y - \eta) \quad (\text{штрих обозначает дифференцирование по } \eta)$$

Это уравнение интегрируется без особых сложностей, но только один раз. Начальные условия-нулевые в начале координат, и поэтому постоянные интегрирования отсутствуют ($c = 0$)

$$\frac{\xi'}{\sqrt{1+\xi'^2}} = \frac{P}{EJ} \left(\eta y - \frac{\eta^2}{2} \right) = f, \quad (4)$$

$$\text{откуда } \xi' = \frac{f}{\sqrt{1-f^2}}; \quad (5)$$

Из последнего равенства видно, что f — синус угла касательной к изогнутой оси.

Так как длина изогнутой оси при изгибе не меняется, то

$$\int_0^y \frac{d\eta}{\sqrt{1-f^2}} - l = 0 \quad (6)$$

То же самое получится, если использовать известную формулу анализа:

$$l = \int_0^y \sqrt{1+\xi'^2} d\eta$$

Второе необходимое уравнение получим интегрируя уравнение (5).

$$\int_0^y \frac{f}{\sqrt{1-f^2}} d\eta - x = 0 \quad (7)$$

Таким образом, мы имеем два уравнения (6) и (7), связывающие три переменных x , y и P , в которых P играет роль параметра. Исключая P , найдем зависимость между x и y . Интересно отметить, что везде роль параметра исполняет не сила P , а отношение $\frac{P}{EJ}$, которое обозначим через ρ .

При этом обозначении управления в развернутом виде будут выглядеть следующим образом:

$$\int_0^y \frac{d\eta}{\sqrt{1 - \left[P \left(\eta y - \frac{\eta^2}{2} \right) \right]^2}} - l = 0 \quad (6')$$

$$\int_0^y \frac{P \left(\eta y - \frac{\eta^2}{2} \right) d\eta}{\sqrt{1 - \left[P \left(\eta y - \frac{\eta^2}{2} \right) \right]^2}} - x = 0 \quad (7')$$

Физический смысл этого довольно интересен. Тот факт, что величины P и EJ всюду фигурируют лишь в виде отношения $\frac{P}{EJ}$, указывает, что искомая траектория не зависит от жесткости балки.

Обозначим левые части уравнений (6') и (7') соответственно через F и φ .

Тогда нашу систему можно записать в виде

$$\begin{aligned} F(y, \rho) &= 0 \\ \varphi(x, y, \rho) &= 0 \end{aligned}$$

Этой системе удовлетворяет тройка значений

$$x = 0, y = l, \rho = 0$$

Это очевидно физически и легко проверяется математически.

Для того, чтобы система двух уравнений с аналитическими правыми частями определяла в окрестности точки $x = 0, \rho = 0, y = l$ величины y и ρ , как аналитические функции x , достаточно, чтобы якобиан

$$\begin{vmatrix} F_{1y} & F_{1\rho} \\ \varphi_y & \varphi_\rho \end{vmatrix} \quad \text{в этой точке} \neq 0$$

Если это условие окажется выполненным, то коэффициенты разложения y и ρ в ряды по степеням x в окрестностях $x = 0$ можно искать, последовательно дифференцируя уравнения F и φ и подставляя в них значения $x = 0, y = l, \rho = 0$.

IV. Предварительный анализ

В диссертации произведен подробный предварительный анализ и доказаны следующие положения:

1) Четность y , т. е. разложение только по четным степеням x . Это очевидно, т. к. кривая должна быть симметричной относительно оси y .

2) Нечетность ρ — с изменением знака x , меняется знак нагрузки, а величина сохраняется.

3) Траектории концов всех консолей разной длины, нагруженных одним видом нагрузки, геометрически подобны.

4) Окончательно доказывается, что ряд имеет вид

$$y = l + a_2 \frac{x^2}{l} + a_4 \frac{x^4}{l^3} + \dots \quad (8)$$

V. Математическое решение поставленной задачи

Прежде, чем приступить к решению, необходимо проверить выполнение условия.

$$\begin{vmatrix} F_y & F_p \\ \Phi_y & \Phi_p \end{vmatrix} \neq 0$$

Дифференцируя по y и по p уравнения (6) и (7) и подставляя значения $x=0$, $y=1$ и $p=0$, имеем для рассматриваемого примера

$$F_y = 1; F_p = 0 \quad \Phi_y = 0 \quad \Phi_p = \frac{1}{3} l^3$$

$$\text{т. е. } \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} l^3 \end{vmatrix} \frac{l^3}{3} \neq 0$$

Теоретически говоря, можно найти любое число членов, дифференцируя надлежащее число раз, но, во-первых, это трудно, а во-вторых, не нужно, что подтверждает эксперимент.

Для вычисления производимых y' p', запишем вообще формулы одного, двух, трех и т. д. кратного дифференцирования произвольной функции $F(y,p)=0$ по x , где y и p функции от x .

$$(9) \quad 1) F_y Y' + F_p P' = 0$$

$$(10) \quad 2) F_y Y'' + F_p P'' + F_{yy} Y'^2 + F_{pp} P'^2 + 2 F_{yp} Y'P' = 0$$

и т. д.

Эти формулы в равной степени относятся как к F , так и к Φ .

Необходимо только помнить, что в формуле первого дифференцирования в функции Φ слева будет еще 1, полученная от дифференцирования x .

F_y , F_p , Φ_y , Φ_p нами уже вычислены.

Определим y' и p' , подставляя в формулу первого дифференцирования значения $p=0$, $y=1$, $x=0$.

Для функции F имеем:

$$\begin{aligned} 1. \quad & y' + 0 = 0 & y' &= 0 \\ \text{для } \Phi & 0 + \frac{l^3}{3} p' = 1 & p' &= \frac{3}{l^3} \end{aligned}$$

Определим необходимые члены для определения p'' и y'' .

После подстановки $p=0$, $y=1$, $x=0$, получим:

$$F_{yy} = 0 \quad F_{yp} = 0 \quad F_{pp} = \frac{2}{15} l^5 \quad \Phi_{yy} = 0, \quad \Phi_{yp} = l^2, \quad \Phi_{pp} = 0.$$

Подставляя в уравнение (10) имеем: $P'' = 0$, $Y'' = \frac{-6}{5} \cdot \frac{1}{l}$.

Если ограничиться только вторым членом, то уравнение траектории края консоли будет иметь простой вид.

Подставляя в уравнение (8), значение $a_2 = \frac{y''}{2!} = -\frac{3}{5l}$ получаем $y = 1 - \frac{3}{5} \frac{x^2}{l}$ (11), или, перенося начало координат на свободный конец консоли, имеем $y = \frac{3}{5} \frac{x^2}{l}$ (11') и в единичном масштабе ($l=1$) $y = \frac{3}{5} x^2$ (11'')

Насколько это справедливо, т. е. до каких пределов можно будет пользоваться этой формулой, покажет эксперимент. Точно таким же путем в работе определен коэффициент a_4

$$a_4 = -\frac{36}{175 l^3}$$

Уравнение искомой траектории, при переносе начала координат на свободный конец консоли с учетом четвертого члена ряда:

$$y = \frac{3}{5} \frac{x^2}{l} + \frac{36}{175} \frac{x^4}{l^3} \quad (12)$$

Сделаем оценку четвертого члена

$$\frac{12}{35} \left(\frac{x}{l}\right)^2 \approx \frac{1}{3} \left(\frac{x}{l}\right)^2$$

Даже для таких значительных относительных прогибов, как $\frac{1}{4}$, четвертый член будет составлять около 2%.

Это показывает, что почти без исключения, во всех случаях практики можно для данной нагрузки пользоваться формулой

$$y = 0,6 \frac{x^2}{l}$$

VI. Экспериментальная часть

Нами была взята для эксперимента стальная линейка с сечением $(2 \times 0,1)$ см².

Линейка наглухо крепилась в прессе в вертикальном положении. Длина рабочей консоли (1) была взята равной 50 см.

Линейка крепилась вертикально для того, чтобы она не давала начальных прогибов под действием собственного веса. К свободному концу линейки припаивалось ушко для карандаша, очень тонко заточенного.

Рядом с линейкой, перпендикулярно к карандашу, по отвесу крепилась наглухо чертежная доска с листом ватмана, на котором с максимально возможной точностью была вычерчена по точкам кривая (17).

$$y = \frac{3}{5} \cdot \frac{x^2}{l} \text{ или при значении } l = 50 \text{ см.}$$

$$y = \frac{3}{250}x^2 \text{ (смотри приложенную таблицу),}$$

Нагрузка на линейку передавалась с помощью нити, перекинутой через блок, причем блок все время передвигался для того, чтобы нить находилась всегда в горизонтальном состоянии. Для прогибов близких к $\frac{1}{5}l$ не удавалось зафиксировать почти никаких расхождений и только при прогибах больших $\frac{1}{5}l$, кривая, вычерчиваемая карандашом, начала давать очень незначительные отклонения от теоретической кривой.

Такое испытание было проведено неоднократно и всегда давало одинаковые результаты.

При вычислении четвертого члена ряда, была вычерчена кривая (12) для той же линейки ($l = 50$ см)

$$y = \frac{3}{250}x^2 + \frac{36}{175} \frac{x^4}{125000} \text{ (см. таблицу).}$$

В этом случае больших расхождений не было заметно и при прогибах близких к $\frac{1}{2}l$.

Только при прогибах близких к $\frac{3}{5}l$ начали наблюдаться заметные расхождения.

Описанные выше эксперименты проводились не только с одной линейкой, а с множеством стальных линеек и гибких стержней.

Точность проверялась множество раз с помощью щупов. Всегда получались точные результаты.

Данные для построения кривой по точкам

$$y = \frac{3}{250}x^2 + \frac{36}{175 \cdot 125 \cdot 10^3}x^4$$

X	y от 2-го члена	y от 4-го члена	y суммарное	Значение y в ‰ от X	Относи- тельный прогиб	Зна- чение 4-го члена в ‰ ко 2му
1	2	3	4	5	6	7
0	0	0	0	0	0	0
0,5	0,003	—	0,003	0,6	1/100	
1,0	0,012	—	0,012	1,2	1/50	
1,5	0,027	—	0,027	1,8		
2	0,048	—	0,048	2,4	1/25	
3	0,108	—	0,108	3,6		
4	0,192	—	0,192	4,8	1/12,5	
5	0,3	0,001	0,301	6,0	1/10	0,33
6	0,452	0,0025	0,4545	7,5		
7	0,588	0,0031	0,5911	8,5		
8	0,768	0,0068	0,7748	9,6		
9	0,972	0,009	0,981	10,9		1,0
10	1,2	0,016	1,216	12,16	1/5	1,33
11	1,455	0,023	1,478	13,4		
12	1,728	0,032	1,76	14,7		
13	2,0028	0,047	2,0498	15,8		
14	2,352	0,063	2,415	17,2		
15	2,7	0,083	2,783	18,33		
16	3,072	0,105	3,177	19,9		
17	3,448	0,136	3,584	21,2	1/3	4,0
18	3,888	0,174	4,062	22,3		
19	4,332	0,2158	4,5478	23,9		
20	4,8	0,256	5,056	25,3	2/5	5,33
21	5,292	0,31	5,602	25,66		
22	5,808	0,3737	6,1817	28,1		
23	6,348	0,447	6,795	29,5		
24	6,9012	0,53	7,43	31,		
25	7,5	0,64	8,14	32,56	1/2	8,5

VII. В диссертации точно таким же методом решаются консоли с другими типами нагрузки (равномерно распределенной, треугольной, парой сил). В приложенной таблице сведены все полученные результаты.

VIII. Метод определения траекторий края консолей гибких упругих стержней

В работе доказывается, что указанный выше метод применим для любого вида нагрузки, т. к. Якобиан

$$\begin{vmatrix} F_y & \Phi_y \\ F_p & \Phi_p \end{vmatrix} \neq 0, \text{ во всех случаях.}$$

Для любой нагрузки, исходные уравнения (6) и (7) справедливы. Как показал эксперимент практически достаточно знать только коэффициент a_2 ряда.

Основным в работе является получение формулы для мгновенного определения коэффициента a_2 , т. е. получения траектории края консоли при любой нагрузке.

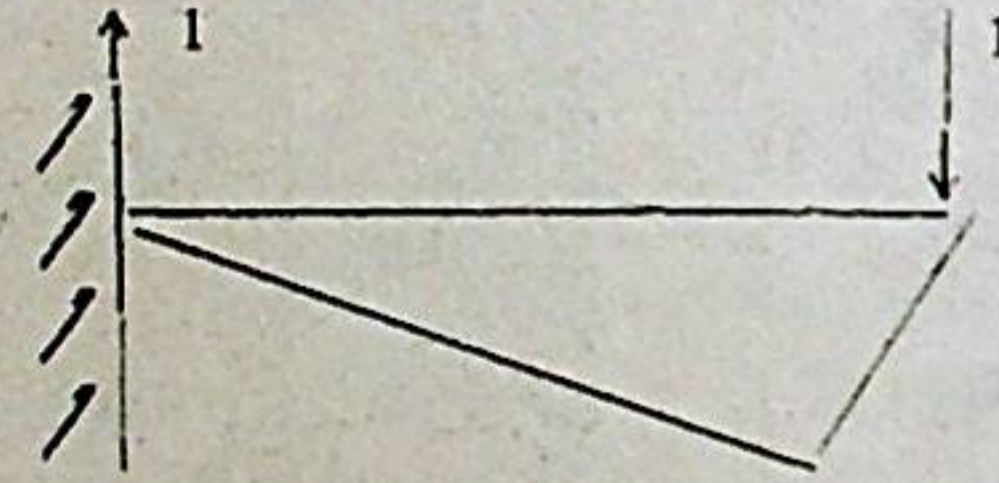
$$a_2 = \frac{\int_0^y \left[\int_0^\eta M_1(\eta_1) d\eta_1 \right] d\eta}{2 \left\{ \int_0^y \left[\int_0^\eta M_1(\eta_1) d\eta_1 \right] d\eta \right\}^2} \quad (13)$$

где $M_1(\eta_1)$ — изгибающий момент от так называемой единичной нагрузки (вся нагрузка, действующая на консоль, независимо от ее вида принимается равной единице).

Помним, что начало координат взято в защемлении, произвольные постоянные отсутствуют ($c=0$).

И, наконец, т. к. разложение в ряд происходит вокруг точки ($y=1$), то в конце необходимо осуществить эту подстановку.

Покажем на нескольких примерах, как просто пользоваться полученным результатом:

1)  $M_1(\eta) = y - \eta$

$$\int_0^\eta M_1(\eta) d\eta = \left(y\eta - \frac{\eta^2}{2} \right)$$

$$\left[\int_0^\eta M_1(\eta) d\eta \right]^2 = y^2 \eta^2 - y\eta^3 + \frac{\eta^4}{4}$$

Интегрируем в пределах $(0-y)$ и сразу осуществляем подстановку $y=1$

Числитель равен $\frac{2}{15} l^5$

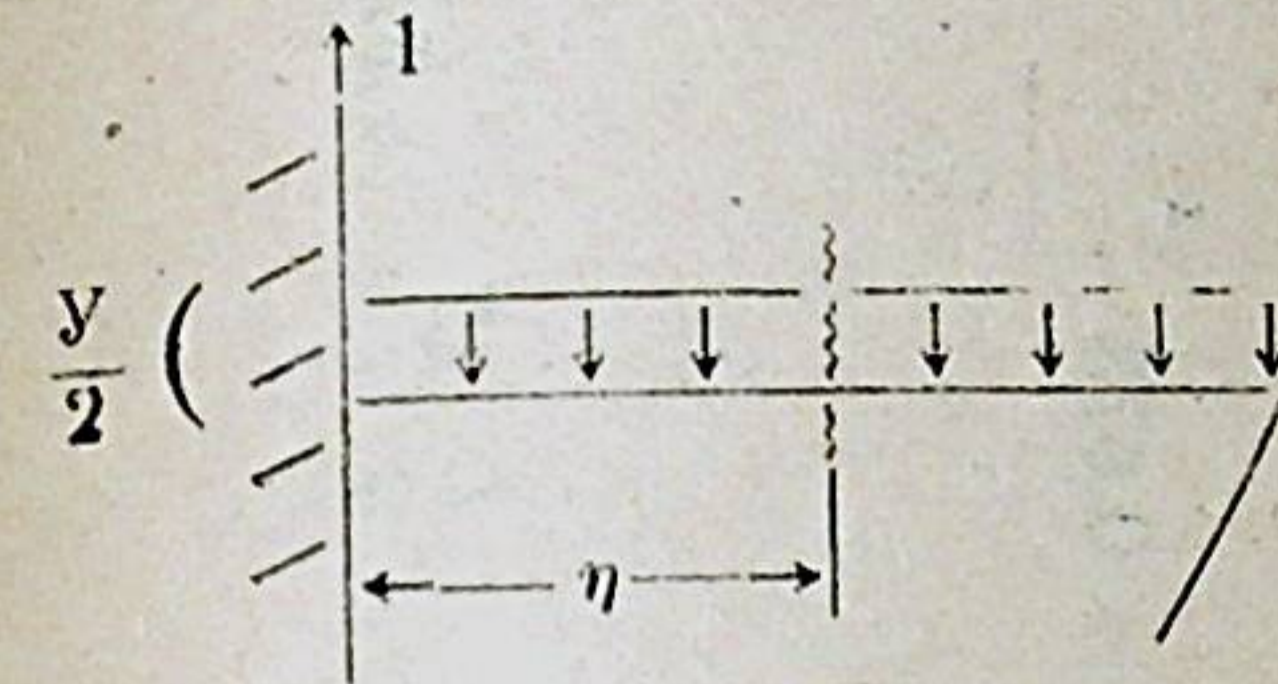
Вычисляем знаменатель ($y=1$)

$$\int_0^1 \left(y\eta - \frac{\eta^2}{2} \right) d\eta = \frac{l^3}{3}$$

$$a_2 = - \frac{\frac{2}{15} l^5}{2 \left(\frac{l^3}{3} \right)^2} = - \frac{3}{5l}$$

Искомая траектория $y = 1 - \frac{3}{5l} x^2$ или переносим начало координат на свободный конец консоли

$$y = \frac{3}{5} \frac{x^2}{l}$$



$$M_1(\eta) = \frac{y}{2} + \frac{\eta^2}{2y} - \eta$$

$$\int_0^\eta M_1(\eta) d\eta = \frac{y\eta}{2} + \frac{\eta^3}{6y} - \frac{\eta^2}{2}$$

$$\left[\int_0^\eta M_1(\eta) d\eta \right]^2 = \frac{y^2 \eta^2}{4} + \frac{\eta^6}{36y^2} + \frac{\eta^4}{4} + \frac{\eta^4}{6} - \frac{y\eta^3}{2} - \frac{\eta^5}{6y}$$

Интегрируем в пределах $(0-y)$ и подставляем $y=1$

$$a_2 = \frac{-l^5 \left(\frac{1}{12} + \frac{1}{7.36l} + \frac{1}{20} + \frac{1}{36} - \frac{1}{8} - \frac{1}{36} \right)}{2l^6 \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{24} - \frac{1}{6} \right)^2} = - \frac{4}{7l}$$

Траектория $y = 1 - \frac{4}{7} \frac{x^2}{l}$ и с переносом начала координат на свободный конец

$$y = \frac{4}{7} \frac{x^2}{l}$$

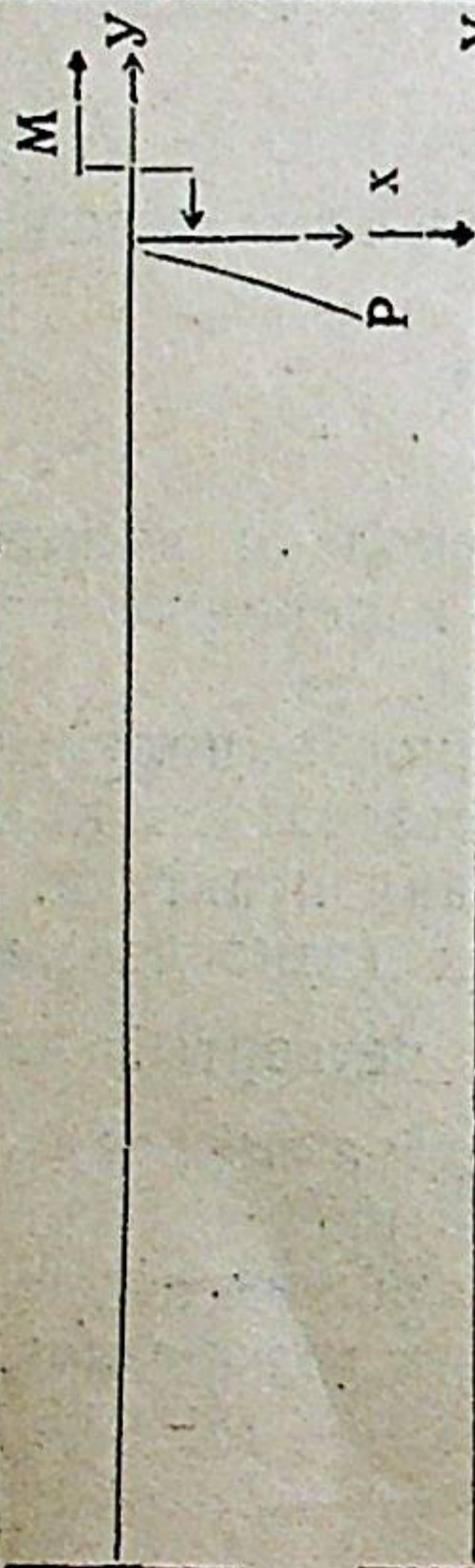
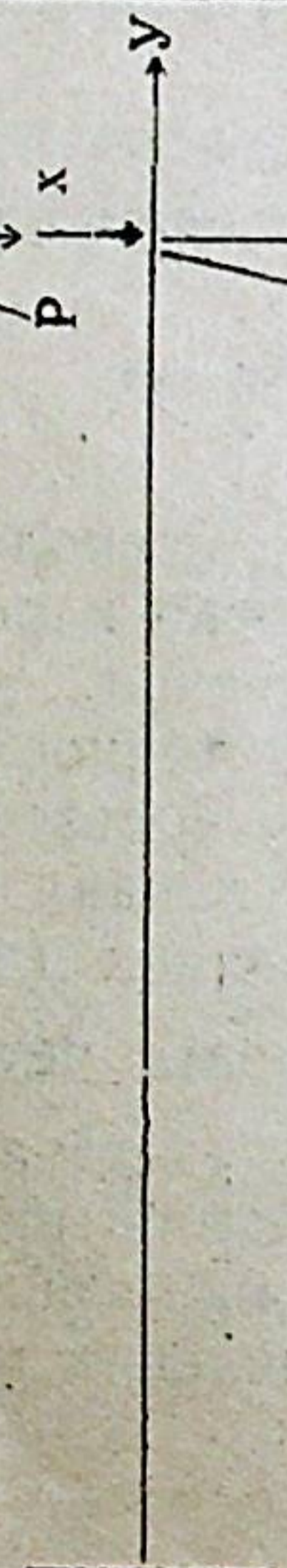
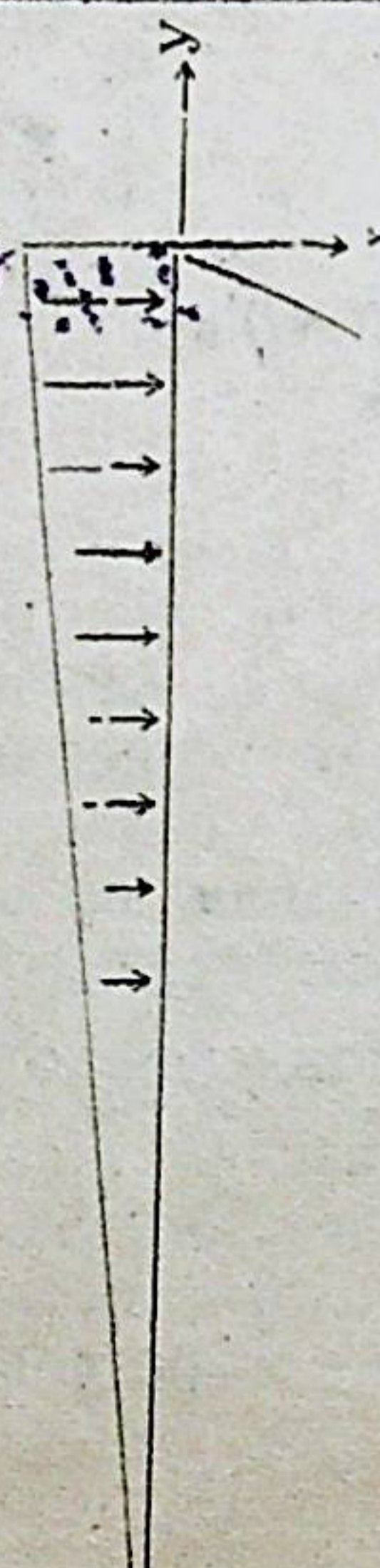
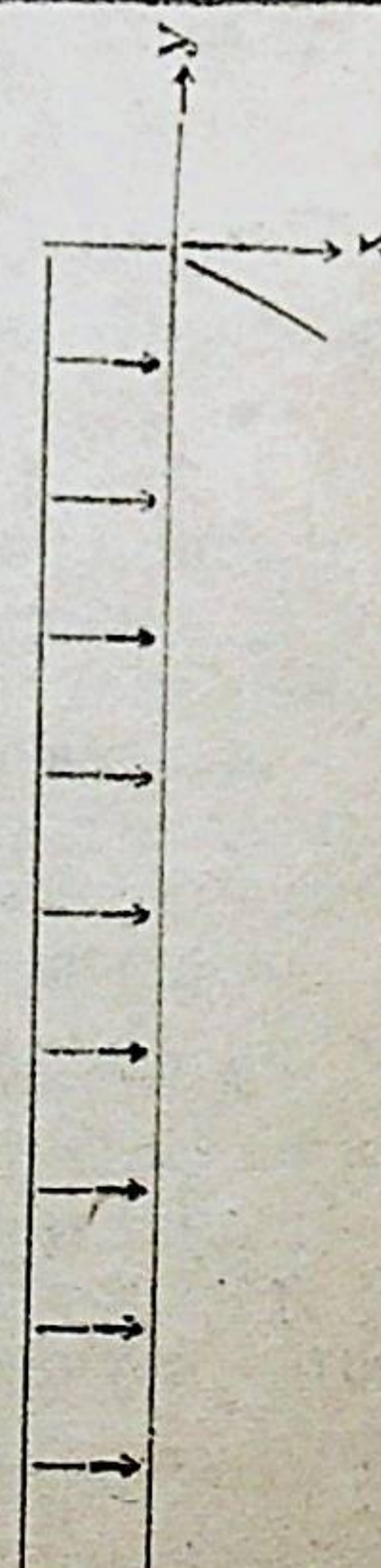
В диссертации сделано еще несколько примеров. Все они решаются очень просто, быстро и решение их требует знаний элементарного интегрирования.

Как показывает эксперимент, точность полученных результатов настолько велика, что пользоваться ими можно, почти без исключения, во всех случаях практики.

Только в исключительных задачах (относительный прогиб более $\frac{1}{5}$) придется отыскивать четвертый член ряда, что подробно показано в работе, (задача первая).

Полученные результаты настолько просты, что ими без труда могут пользоваться не только инженеры, но и студенты, изучающие курс сопротивления материалов.

Таблица результатов

Схема нагрузки	Уравнение траектории край консоли
	$y = \frac{2}{3} \frac{x^2}{l} \approx 0,67 \frac{x^2}{l}$
	$y = \frac{3}{5} \frac{x^2}{l} = 0,60 \frac{x^2}{l}$
	$y \approx 0,573 \frac{x^2}{l}$
	$y = \frac{4}{7} \frac{x^2}{l} \approx 0,571 \frac{x^2}{l}$

72434.

ЦЕНТРАЛЬНАЯ НАУЧНАЯ
БИБЛИОТЕКА
А. Н. Киргизской ССР

BE06905

Подписано к печати 19.11.1954 г.

Тираж 130

г. Благовещенск, тип. «Амурская правда». Заказ № 6654 т