АКАДЕМИЯ НАУК КИРГИЗСКОЙ ССР
ОБЪЕДИНЕННЫЙ УЧЕНЫЙ СОВЕТ ПО ФИЗИКО-
МАТЕМАТИЧЕСКИМ И ТЕХНИЧЕСКИМ НАУКАМ

На правах рукописи

БАЙТЕРЕКОВ Аскарбек Байтерекович

К РАЗВИТИЮ КОНЦЕПЦИИ СКОЛЬЖЕНИЯ В ТЕОРИИ ПЛАСТИЧНОСТИ

Специальность 01.02.04. Механика деформируемого
твердого тела

Автореферат
диссертации на соискание ученой степени
кандидата технических наук

Фрунзе 1972

на правах рукописи

АКАДЕМИЯ НАУК КИРГИЗСКОЙ ССР

ОБЪЕДИНЕННЫЙ УЧЕНЫЙ СОВЕТ ПО ФИЗИКО - МАТЕМАТИЧЕСКИМ И ТЕХНИЧЕСКИМ НАУКАМ

БАЙТЕРЕКОВ
Аскарбек Байтерекович

К РАЗВИТИЮ КОНЦЕПЦИИ СКОЛЬЖЕНИЯ В ТЕОРИИ ПЛАСТИЧНОСТИ

Специальность 01.02.04. Механика деформируемого твердого тела

А в т о р е ф е р а т

диссертации на соискание ученой степени кандидата технических наук

Фрунзе - 1972

Важнейшим разделом механики сплошных сред является теория пластичности, призванная дать описание деформаций твердых тел за пределами упругости. Из-за многообразия и сложности физических явлений при неупругих деформациях в настоящее время подвергается сомнению сама возможность создания общей теории пластичности.

Существуют различные попытки построения теории пластичности. Феноменологические варианты (теории течения и деформационные теории) игнорируют физический механизм пластической деформации. Наряду с этим существуют и "физические" теории пластичности, базирующиеся на использовании основного механизма пластической деформации-скольжения. Настоящая работа примыкает к последнему направлению.

Основная идея концепции скольжения состоит в следующем. Реальный поликристаллический материал представляет собой конгломерат беспорядочно расположенных кристаллических зерен (монокристаллов). В каждом таком монокристалле пластическая деформация происходит за счет сдвига (скольжения). Причем сдвиги произойдут тогда, когда компонента касательного напряжения в плоскости скольжения (наибольшей упаковки атомов) и в направлении, где растояние между соседними атомами наименьшие, достигнет некоторой постоянной величины. В силу упругой анизотропии кристаллов распределение напряжений в беспорядочно расположенных зернах поликристаллического тела будет всегда неоднородным. Скольжение в наиболее невыгодно расположением зерне вызывает вначале только упругие деформации в окружающих зернах.

Эти деформации (напряжения) не определяются ; однако учитывается их влияние введением зависимости сопротивления сдвигу от скольжений по разным плоскостям и направлениям в расчетной модели твердого тела.

Первая попытка создании математической теории пластичности, основанной на концепции скольжения, принадлежит Батдорфу и Будянскому [I] . Для описания деформаций пластического тела ими принята следующая простейшая схема: в однородной модели поликристаллического тела в процессе пластической деформации кристаллические зерна не взаимодействуют между собой, каждый кристалл имеет одну плоскость с нормалью (n) и в ней одно направление (l) скольжения. Деформация тела в целом представляется как результат наложения (бесконечно) большего числа сдвигов для всех возможных систем скольжения nl. Составляющие этой деформации выражаются через заданную характеристическую для данного материала функцию F компоненты касательного напряжения τ_{nl} . Однако, расчеты И.Иосимуры [2] и И.Д.Рогозина [3] в рамках этой теории показали, что $F(\tau_{nl})$ не является универсальной функцией, характеризующей свойства материала, она зависит от вида напряженного состояния.

На основании несоответствия между отдельными экспериментальными данными и результатами аналитических исследований, следующих из указанных допущений Батдорфа и Будянского, авторы работ [2,3] делают поспешные выводы о неприменимости концепции скольжения вообще для описания пластических свойств тела. Реабилитация концепции скольжения дана в работах М.Я.Леонова, К.Н.Русинко и Э.И.Блинова [4-6] .

Некоторое развитие и видоизменение простейшей теории Батдорфа-Будянского дается в работах А.К.Малмейстера [7] , Т.Лина [8] и др. Эти теории исходят из условия пластичности Треска. Определенный успех в развитии концепции скольжения достигнут в работах М.Я.Леонова и Н.Ю.Швайко [9] , в которых повидимому впервые в уравнениях пластического состояния материала явно записано анизотропное изменение прочностных свойств тела (сопротивления сдвигу), возникающее в процессе пластического деформирования.

Однако еще ни в одном из выше указанных вариантов построения теории пластичности не удавалось описать поведение пластического тела единой системой уравнений.

В реферируемой работе на отдельных примерах исследуется предложенный М.Я.Леоновым возможный путь построения общей аналитической теории пластичности на основе дальнейшего развития [10-12] концепции скольжения.

Работа состоит из четырех глав.

В первой главе дается описание предложенной М.Я.Леоновым [10-12] модели пластически деформируемого твердого тела, основанной на концепции скольжения.

Согласно указанной модели, реальный поликристаллический материал, представляющий собой конгломерат беспорядочно расположенных кристаллических зерен, рассматривается как макрооднородное изотропное тело, имеющее линейные дислокации во всех плоскостях и направлениях. Плотности этих дислокаций и плотности различных включений, препятствующих перемещениям дислокаций (локальным скольжениям), считаются везде одинаковыми. В такой сплошной идеально однородной модели твердого тела скольжения в произвольном направлении в данной плоскости можно представлять как перемещения в указанном направлении непрерывно распределенных и соответственно ориентированных линейных дислокаций. Неупругая деформация является результатом перемещения этих дефектов в микроструктуре твердого тела.

В результате скольжения по плоскостям с нормалями (n), заключенными внутри конуса с телесным углом $d\Omega$, в направлениях l , заключенных внутри угла $d\omega$, произойдет сдвиг

$$d\gamma_{nl} = \varphi_{nl}\, d\Omega\, d\omega \tag{I}$$

где φ_{nl} - интенсивность скольжений в плоскостях с нормалями n в направлении l .

Компоненты пластической деформации выражаются через интенсивность скольжений формулами:

$$\gamma_{ij} = \iiiint\limits_D (l_i n_j + l_j n_i)\varphi_{nl}\, d\Omega\, d\omega, \quad \varepsilon_{ii} = \frac{1}{2}\gamma_{ii}, \quad (i,j = 1,2,3) \tag{2}$$

где $n_i, \ldots, l_j$ - проекции единичных векторов n и l на соответствующие оси ; D - область всех (положительных и отрицательных) скольжений.

Рассматриваются такие материалы, у которых возникновение пластической деформации не зависят от гидростатического давления.

Для таких материалов, изотропных в исходном состоянии, начальное условие пластичности можно представить в виде

$$\Phi(J_2, J_3) = 0, \tag{3°}$$

где J_2 и J_3 -инварианты тензора напряжений.

Инварианты $J_{2,3}$ тензора напряжений можно выразить через максимальное (τ_m) и октаэдрическое (τ_i) касательные напряжения, тогда условие (3°) можно представить иначе

$$\tau_m^0 = f(\tau_i), \tag{3}$$

где τ_m^0 максимальное касательное напряжение на пределе упругости, которое названо начальным сопротивлением пластическому сдвигу.

Ввиду того, что в пределах упругости напряжения однозначно определяются упругими деформациями, то функция $f(\tau_i)$ определяет влияние упругих деформаций на сопротивление пластическому сдвигу. Делается вывод, что влияние упругих деформаций на сопротивление сдвигу весьма существенно.

Пусть в некоторой плоскости с нормалью n и в направлении l происходит сдвиг. Компоненту касательного напряжения (τ_{nl}) в указанном направлении называют сопротивлением сдвигу (S_{nl}). В общем случае сопротивление сдвигу ($S_{\nu\lambda}$) является некоторым оператором от интенсивности скольжений (φ_{nl}). Если этот оператор задать, то получим уравнение, справедливое в области, где происходят скольжения

$$S_{\nu\lambda}\varphi_{ne} = \tau_{\nu\lambda} \quad \text{при} \quad \frac{\partial \varphi_{ne}}{\partial t} > 0, \tag{4}$$

где $\tau_{\nu\lambda}$ - компоненты касательного напряжения, являющиеся произвольно заданными функциями времени.

В начальном состоянии тело считается изотропным, удовлетворяющим условию

$$\varphi_{ne}\big|_{t=0} = 0. \tag{5}$$

Если через D обозначена область, в которой в данный момент происходит скольжение, а через Γ - ее граница, то считается, что на этой границе скорости скольжений непрерывно, т.е.

$$\partial \varphi_{ne}/\partial t\big|_{\Gamma} = 0. \tag{6}$$

Это утверждение является следствием постулата непрерывности [II] и при известном операторе позволяет определить область скольжения.

На основании введенных выше понятий дана [I2] математическая формулировка основной задачи теории пластичности: нужно найти такой оператор $S_{\nu\lambda}$, при котором интенсивность скольжений (φ_{ne}), определенная из условий (4) - (6), дает по формулам вида (2) зависимости между компонентами тензора напряжений и деформаций, наблюдаемые в экспериментах. Решение этой задачи повидимому возможно только путем постепенного подбора оператора $S_{\nu\lambda}$.

Как отмечено выше, сопротивление сдвигу представляет собой некоторый оператор от интенсивности скольжений (φ_{ne}), интегральный по переменным n и ℓ ; он должен также содержать и операции дифференцирования по времени (t), поскольку вид диаграммы "напряжение-деформация" зависит от скорости нагружения. Кроме того, как установлено выше (см.формулы (3^0)-(3)), сопротивление сдвигу должно зависеть от упругих деформаций, т.е. явно зависеть от компонент тензора напряжений.

В настоящей работе рассматриваются, в основном, малые пластические деформации и только такие материалы, которые удовлетворяют постулату антиизотропии М.Я.Леонова [II] : при однократном цикле нагружения изменение сопротивления сдвигу не зависят от последовательности скольжений.

Сопротивление сдвигу, удовлетворяющее указанному постулату, представляется [I2] в виде:

$$S_{\nu\lambda}\varphi_{ne} = \Psi_0 + \Psi_1\gamma_{\nu\lambda} + \Psi_2 L_{\nu\lambda}\varphi_{ne},$$
$$L_{\nu\lambda}\varphi_{ne} = a\varphi_{ne} + b\int_{\omega_1}^{\omega_2}\varphi_{ne}\cos\omega_{e\lambda}\, d\omega_{e\lambda} \quad (\omega_{e\lambda} = \widehat{e\lambda}), \tag{7}$$

где $\Psi_{0,1,2}$ - функции аргументов, не зависящих от ν и λ ; $\omega_{1,2}$ - границы веера направлений скольжения в плоскости с нормалью ν ; a, b - постоянные материала.

В операторе $L_{\nu\lambda}\varphi_{ne}$ слагаемое $a\varphi_{ne}$ дает упрочнение в той плоскости и направлении (разупрочнение в противоположном направлении), в котором произошло скольжение, а слагаемое $b\int_{\omega_1}^{\omega_2}\varphi_{ne}\cos\omega_{e\lambda}\, d\omega_{e\lambda}$ учитывает изменение сопротивления сдвигу в плоскости скольжения. Второй член выражения (7) ($\Psi_2 \gamma_{\nu\lambda}$) отражает влияние скольжений в произвольной плоскости и направлении на сопротивления сдвигу во всех остальных.

В исследованиях К.Н.Русинко и Э.И.Блинова [4-6] описанием пластических деформаций при произвольном нагружении показана эффективность решения указанной основной задачи теории пластичности в рамках данной модели. Эти авторы ставили перед собой цель описать пластические свойства тела при наименьшем количестве введенных постоянных (τ_K, τ_P, a, b и др.) материала. Поэтому рассматривались только частные случаи: или $a = 0$ или $b = 0$.

Во второй главе предполагается, что в модели пластически деформируемого твердого тела веер скольжений в любой момент времени содержит в себе все веера скольжений в предшествующие моменты и скорость интенсивности скольжений сохраняет знак. Для такого "монотонного" нагружения деформации не зависят от истории нагружения и имеет место монотонная деформация.

Для простоты исследования, поворотом координатных осей можно всегда добиться, что $\tau_{xz} = \tau_{yz} = 0$, $\sigma_x = \sigma_y$ и напряжение σ_z главное, а оси ox и oy наклонены под углом 45^0 к двум другим главным направлениям. При этом максимальное касательное напряжение будет:

$$\tau_m = \tau_{xy} \quad \text{при} \quad \tau_{xy} \geq |\sigma_z'|, \ \sigma_z' = \sigma_z - \frac{1}{2}(\sigma_x + \sigma_y) \tag{8}$$

Пусть $l(\omega)$ направление скольжения в плоскости, имеющей нормаль $n(\alpha, \beta, \omega)$, и в этой плоскости происходит скольжения в области

$$\omega_1(\alpha,\beta) \leq \omega \leq \omega_2(\alpha,\beta) \quad (\alpha = \widehat{zn}, \ \beta = \widehat{n_{xoy} n}, \ \omega = \widehat{l_{0n} l}) \tag{9}$$

Причем при монотонной деформации функции $\omega_{1,2}(\alpha,\beta)$, определяющие границы направлений скольжений, является монотонно растущим. Тогда для монотонной пластической деформации задача определения связи между напряжениями и деформациями сводится к определению трех неизвестных функций $\varphi(\alpha,\beta,\omega)$, $\omega_{1,2}(\alpha,\beta)$ из уравнения:

$$a\varphi(\alpha,\beta,\omega) + 2b\int_{\omega_1}^{\omega_2}\varphi(\alpha,\beta,\omega_0)\cos(\omega_0-\omega)\,d\omega_0 = -\lambda_0 + \lambda_1 \sin 2\alpha\cos\omega + \lambda_2 \sin\alpha(\sin\omega\cos 2\beta - \cos\omega\cos\alpha\sin 2\beta), \tag{I0}$$

являющегоося следствием (4), и условия (6), т.е.

$$\varphi(\alpha,\beta,\omega_{1,2}) = 0, \tag{II}$$

где

$$\lambda_0 = \Psi_0/\Psi_2, \ \lambda_1 = (\sigma_z' - 3\Psi_1\varepsilon_z)/(2\Psi_2), \ \lambda_2 = (\tau_{xy} - \Psi_1\gamma_{xy})/\Psi_2. \tag{I2}$$

Система (I0), (II) является полной для определения указанных выше трех функций. Уравнение (I0) решается сведением к системе алгебраических уравнений. При найденных $\varphi(\alpha,\beta,\omega)$ и $\omega_{1,2}(\alpha,\beta)$ зависимость между напряжениями и деформациями, исходя из формул (2) и (I2), определяется:

$$\gamma_{xy} = F(u)\left[I_1(u,\delta_{12}) - 2\delta_{12} I_2(u,\delta_{12})\right]\Psi_0/\Psi_2,$$

$$\varepsilon_z = F(u)\, I_2(u,\delta_{12})\, \Psi_0/\Psi_2,$$

$$\tau_{xy} = F(u)\{1 + c[I_1(u,\delta_{12}) - 2\delta_{12} I_2(u,\delta_{12})]\}\Psi_0, \qquad (13)$$

$$\sigma_z' = F(u)[2\delta_{12} + 3c\, I_2(u,\delta_{12})]\Psi_0,$$

$$F(u) = [1 + \frac{b}{a}(2u - \sin 2u)]/\cos u, \quad c = \Psi_1/\Psi_2,$$

где u, δ_{12} - параметры, задавая которые, можем определить зависимости между напряжениями и деформациями ; $I_{1,2}(u,\delta_{12})$ - функции, определяемые из кубатурных формул, (ради экономии места здесь не приведены).

В конце второй главы рассмотрена задача, для так называемого напряженного состояния "почти чистый сдвиг". Таким напряженным состоянием названо получающееся из рассмотренного выше пространственного состояния когда выполняется условие $|\sigma_z'| \ll \tau_{xy}$. Зависимости между напряжениями и деформациями определяются по формулам (13), а функции $I_{1,2}(u,\delta_{12})$ значительно упрощаются и ниже приведены ввиде квадратур:

$$I_1(u,\delta_{12}) = 2\int_0^u \frac{2\Omega - \sin 2\Omega}{F^2(u)\cos\Omega}\sqrt{\frac{F(\Omega)}{F(u)}}\, K(k)\, d\Omega,$$

$$(14)$$

$$I_2(u,\delta_{12}) = \int_0^u \frac{2\Omega - \sin 2\Omega}{F^2(u)\cos\Omega}\, F'(\Omega)\left[4\delta_{12}\frac{1-F}{F^{3/2}} - J(\Omega)\right] d\Omega,$$

$$J(\Omega) = \sqrt{F}\left[F(2z,k_1) - 2E(2z,k_1) + 2\sqrt{1-k_1^2\sin^2 2z}\,\mathrm{tg}\, z\right], \quad F = \frac{F(\Omega)}{F(u)},$$

$$k^2 = \frac{1}{4F^3}(1+2F^3-3F^2), \quad k_1^2 = \frac{1}{4F}(1+2F), \quad \mathrm{tg}\, z = \sqrt{(1-F^2)/F}, \qquad (15)$$

где $K(k)$ - полный эллиптический интеграл I рода ; $F(k,z)$, $E(k,z)$ - неполные эллиптические интегралы I и II рода соответственно.

Эти функции табулированы.

Основным звеном в предложенном развитии концепции скольжения явилось решение задачи о пластическом сдвиге, которое приводится в третьей главе. Эффективность полученного решения сравнима с результатом, найденным М.Я.Леоновым [10] при рассмотрении более простой задачи-одноосного растяжения. Зависимость между напряжением и деформацией так же как при одноосном растяжении определяется параметрически из следующих уравнений:

$$\gamma_{xy} = F(u)\, I(u)\,\Psi_0/(a\Psi_2), \quad \tau_{xy} = F(u)\left[1 + \frac{c}{a} I(u)\right]\Psi_0, \qquad (16)$$

где u - параметр, $I(u)$ - определяемая из квадратурной формулы функция, которая табулирована.

Исследование области, где в данный момент происходит скольжения, показывает, что имеет место следующие случаи.

I. Когда $F(u) \le 2$, функция $I(u)$ определяется из формулы:

$$I(u)=2\int_0^u \frac{2\Omega-\sin 2\Omega}{F^2(u)\cos\Omega}\sqrt{\frac{F(\Omega)}{F(u)}}\,F'(\Omega)K(k)\,d\Omega, \qquad (I7)$$

где $K(k)$ – полный эллиптический интеграл I рода.

2. В случае, когда $F(u)>2$ функция $I(u)$ будет:

$$I(u)=4\sqrt{2}\int_0^{u_1}\frac{(2\Omega-\sin 2\Omega)F^2(\Omega)F'(\Omega)K(k_2)\,d\Omega}{F^4(u)\cos\Omega\sqrt{1-3F^2+(1-F^2)\sqrt{1-4F^2}}}+$$

$$+2\int_{u_1}^{u}\frac{2\Omega-\sin 2\Omega}{F^2(u)\cos\Omega}\sqrt{\frac{F(\Omega)}{F(u)}}\,F'(\Omega)K(k)\,d\Omega, \qquad (I8)$$

$$k_2^2=(1-2F^2-\sqrt{1-4F^2})(1-\sqrt{1-4F^2})/[(1-2F^2+\sqrt{1-4F^2})(1+\sqrt{1-4F^2})],$$

где u_1 – является положительным корнем следующего уравнения:

$$F(u_1)=1/2F(u).$$

В конце третьей главы в качестве примера рассматривается знакопеременное кручение тонкостенной трубки. Полученные аналитические соотношения в общем виде отражают эффект Баушингера.

Следует отметить, что в рамках рассматриваемой теории в работе [4] была решена задача о знакопеременном кручении, причем для простоты исследования положено, что $b=0$ и решение дается приближенно, разложением в ряд исходных соотношений по малым параметрам. Конечные соотношения получены сравнительно громоздкими и мало эффективны для вычислений. В отличие от этой работы, как видно выше, в этой главе дано более общее, простое и точное решение.

Четвертая глава посвящена, в основном, вопросу подбора параметров материала. Для решения этого вопроса вначале использованы экспериментальные диаграммы на чистое кручение и одноосное растяжение тонкостенной трубки. Затем полученные результаты были сопоставлены с экспериментальными данными при сложном нагружении.

Особое место уделено установлению границ применимости соотношений деформационной теории пластичности при сложном нагружении, в частности при нагружении по двузвенной траектории.

В условиях монотонности деформаций зависимость между напряжениями и деформациями определяются соотношениями типа деформационной теории пластичности, т.е. соотношениями (I3). В этом случае угол ($\varkappa$) между вектором напряжений и касательной к траектории нагружения в любой произвольный момент времени меньше некоторого предельного угла ($\varkappa^*$), который определяется из следующей формулы

$$\operatorname{tg}\varkappa^*=2\tau_m/(d\tau_m/du), \qquad (I9)$$

где u – введенный выше параметр; τ_m – максимальное касательное напряжение.

Результаты вычислений сопоставлены с экспериментальными данными [I3] для алюминиевых сплавов ДI6, АК6 и хорошо согласуются с ними. Показано, что допускаемые указанными условиями отклонения от пропорционального нагружения соответствуют эксперименту.

Основные результаты работы докладывались и обсуждались на семинарах секторов теории упругости и прочности Института физики и математики АН Кирг.ССР и опубликованы в работах [I4-I5].

ЛИТЕРАТУРА

I. Батдорф С.Б., Будянский Б. Математическая теория пластичности, основанная на концепции скольжения. Сб. переводов "Механика", № I, 1962.

2. Иосимару Иосимура. Замечания к теории скольжения Батдорфа и Будянского, Сб. переводов "Механика", № 2, 1960.

3. Рогозин И.Д. О теории скольжения, Динамика сплошной среды, вып.IУ СО АН СССР, 1970.

4. Леонов М.Я., Русинко К.Н. Аналитическое исследование эффекта Баушингера, при кручении, Сб. Деформация неупругого тела, ИЗД. "Илим", Фрунзе, 1970.

5. Русинко К.Н. Некоторые вопросы деформации пластичных и хрупких тел, диссертация на соискание ученой степени доктора физ.-мат. наук, Фрунзе, 1971.

6. Блинов Э.И. Пластическая деформация при произвольном нагружении упрочняющегося тела, диссертация на соискание ученой степени кандидата физ.-мат. наук, Фрунзе, 1972.

7. Малмейстер А.К. Упругость и неупругость бетона, Издат. АН Латв.ССР, Рига, 1957.

8. Лин Т. Вариант теории скольжения, Сб. "Механика", № 3. 1956.

9. Леонов М.Я., Швайко Н.Ю. Сложная плоская деформация, ДАН СССР, т.159, 5, 1964.

IO. Леонов М.Я. Элементы математической теории пластичности, Изв. АН Кирг.ССР, № 3, 1970.

II. Леонов М.Я. Основные постулаты теории пластичности, ДАН СССР, 199, № I, 1971.

I2. Леонов М.Я. Элементы аналитической теории пластичности, ДАН СССР, 205, № 2, 1972.

I3. Рычков Б.А. Теоретическое экспериментальное исследование деформации алюминиевых сплавов при некоторых сложных нагружениях, диссертация на соискание ученой степени кандидата технических наук, Фрунзе, 1970.

I4. Байтереков А.Б. Почти чистый пластический сдвиг, Изв. АН Кирг.ССР, № 2, 1972.

I5. Леонов М.Я., Байтереков А.Б. Деформация при пластическом сдвиге, Изв. АН Кирг.ССР, № 3, 1972.

ПОДПИСАНО В ПЕЧАТЬ 27/XII 1972 Г. ФОРМАТ
БУМАГИ 60×90 1/16. ОБЪЕМ 1,12 П. Л.
Д—01626 ЗАКАЗ 2912 ТИРАЖ 200 ЭКЗ.
г. Фрунзе, тип. АН Киргиз. ССР,
ул. Пушкина, 144