АКАДЕМИЯ НАУК СССР

Рукописные МАТЕРИАЛЫ ЛЕОНАРДА ЭЙЛЕРА В АРХИВЕ АКАДЕМИИ НАУК СССР

ТОМ

II

РУКОПИСНЫЕ МАТЕРИАЛЫ ЛЕОНАРДА ЭЙЛЕРА

Том II

MANUSCRIPTA EULERIANA

Tomus II

ACADEMIA SCIENTIARUM URSS

Acta Archivi. Fasciculus XX

MANUSCRIPTA EULERIANA

ARCHIVI ACADEMIAE SCIENTIARUM URSS

Tomus II

OPERA MECHANICA

Volumen 1

Edidit G. K. MIKHAILOV

In Rossicum convertit I. A. PERELMUTER

SUMPTIBUS ACADEMIAE SCIENTIARUM URSS
MOSQUAE MCMLXV LENINOPOLI

АКАДЕМИЯ НАУК СССР

Труды Архива. Выпуск 20

РУКОПИСНЫЕ МАТЕРИАЛЫ Л. ЭЙЛЕРА

В АРХИВЕ АКАДЕМИИ НАУК СССР

Том II

ТРУДЫ ПО МЕХАНИКЕ

Часть 1

Под редакцией Г. К. МИХАЙЛОВА

Переводы с латинского И. А. ПЕРЕЛЬМУТЕРА

ИЗДАТЕЛЬСТВО «НАУКА»
МОСКВА 1965 ЛЕНИНГРАД

ПРЕДИСЛОВИЕ

До недавнего времени издание научного наследия Леонарда Эйлера считалось завершенным сто лет тому назад двухтомным академическим сборником его посмертных трудов «Opera postuma mathematica et physica», подготовленным правнуками великого математика П. Н. и Н. Н. Фусами при ближайшем участии П. Л. Чебышева и единодушной поддержке физико-математического отделения Академии.

Однако проведенная за последние годы большая работа по разбору бумаг Л. Эйлера выявила множество ранее не публиковавшихся его сочинений, фрагментов и черновиков, сведения о которых успели затеряться за прошедший век. Результатом этой работы явился выпуск первого тома настоящей серии, содержащего научное описание рукописных материалов Л. Эйлера в Архиве АН СССР, подготовленное под общим руководством Г. К. Михайлова.

Предлагаемый второй том серии открывает публикацию вновь найденных рукописей Л. Эйлера. В него включен ряд юношеских сочинений Л. Эйлера по динамике точки, первоначальные наброски и черновой вариант его «Механики», мемуар об истечении жидкости из сосудов, а также некоторые другие сочинения по механике, относящиеся к концу 20-х и к началу 30-х годов XVIII в.

Выбор материала для тома произведен редактором, который проверил тексты и снабдил их лаконичным комментарием, составленным согласно традиции швейцарского собрания трудов Л. Эйлера на языке оригинала. Переводы текстов на русский язык, которые включены в подобного рода издание в виде опыта, исполнены И. А. Перельмутером.

Хотелось бы пожелать, чтобы вслед за этим томом последовало издание и остальных рукописей Л. Эйлера, перед памятью которого Академия наук остается до сих пор в долгу.

Академик *В. И. Смирнов*

Ленинград, октябрь 1964 г.

PRAEFATIO

Non ita pridem credebatur Leonhardi Euleri operum quotquot exstent editio perfecta et absoluta esse duobus voluminibus operum postumorum editis,* quae ante hos centum annos cura et consilio viri pronepotum P. H. et Nicolai Fussorum in lucem prodierunt adiuvante P. L. Tschebyschevio cum singulari totius Classis physico-mathematicae Academiae Scientiarum consensu et approbatione.

* Leonhardi Euleri Opera postuma mathematica et physica. Petropoli, 1862.

At his ultimis annis diligentiore opera in Euleri chirographis cognoscendis et ordinandis collocata perquam multa eius scripta nondum publici iuris facta, fragmenta, schedulae apparuerunt, quorum omnium memoria ipsa saeculo superiore evanuerat. Quae quidem opera eo evasit, ut primus tomus huius seriei prodiret, quo continebatur descriptio archaeographica Euleri manuscriptorum, quae in Archivo Academiae Scientiarum URSS asservantur, auspiciis G. K. Mikhailovi facta.

Quem nunc lectori offerimus tomus secundus incipit divulgationem operum Euleri nuper repertorum. Insunt autem compluria opuscula iuvenilia ad dynamicam puncti pertinentia, prima delineamenta et adversaria *Mechanicae*, tractatus de fluido e vasibus effluente, alia quaedam opera mechanica ad annos saeculi XVIII vicesimos exientes tricesimos incipientes pertinentia.

Materiae delectum editor fecit, idem textus recensuit brevique commentario instruxit, qui secundum instituta editionis operum Euleri Helveticae Latine conscriptus est. Versio Rossica, quae huic editioni amplioris lectorum gregis commodis prospicienti additur, facta est ab I. A. Perelmutero.

Vota facio, ut hunc librum sequatur editio ceterorum chirographorum Euleri, cuius sanctae memoriae Academia nostra nondum iusta persolvit.

V. I. Smirnov
Academiae Scientiarum socius ordinarius

Leninopoli, mense Octobri MCMLXIV

ВВЕДЕНИЕ

1. Значение исследований Леонарда Эйлера для развития всех областей точных наук в XVIII в. и в значительной части XIX в. исключительно по своему многообразию и глубине; научное наследие его колоссально также и по размеру: оно превышает 40 000 страниц.

Подавляющее большинство сохранившихся рукописей Л. Эйлера собрано в Архиве Академии наук СССР в Ленинграде. Их общее описание дано в первом томе настоящей серии.* Значительную часть этих рукописей представляют оригиналы сочинений, опубликованных при жизни автора. Однако еще более велико число рукописей, которые были подготовлены к печати уже после смерти Л. Эйлера или вовсе не были опубликованы.

Огромную работу по разбору архива Л. Эйлера вели в первой половине XIX в. его правнуки Павел и Николай Фусы. Завершить эту работу они мыслили подготовкой и публикацией более или менее полного собрания сочинений Л. Эйлера с включением в него всех не изданных до того времени рукописей. Старания правнуков великого математика и активная поддержка, оказанная этим начинаниям выдающимися учеными — В. Я. Буняковским, М. В. Остроградским, В. Я. Струве, П. Л. Чебышевым, — оказались, однако, недостаточными для реализации этого грандиозного плана. Даже из намеченных первых восьми томов скромного собрания «Opera minora collecta» вышли в свет только два тома, посвященные теории чисел («Commentationes arithmeticae collectae», 1849), а уже начатое печатание третьего тома с сочинениями по геометрии было приостановлено.

Попытка издать хотя бы все ранее не публиковавшиеся рукописи Л. Эйлера также не была осуществлена, и работа в этом направлении практически прекратилась со смертью непременного секретаря Петербургской Академии П. Н. Фуса, последовавшей в 1855 г. Второй том изданных в 1862 г. «Opera postuma mathematica et physica» Л. Эйлера уже содержит много досадных упущений в подготовке к печати отдельных сочинений. Отметим здесь только, что в нем, например, помещено окончание сочинения «Principia pro motu sanguinis per arterias determinando» (E. 855), начало которого, хранившееся в протокольных бумагах Архива, не было тогда обнаружено; там же помещено только начало первой главы мемуара о движении тел в движущихся трубах (E. 827) и три главы трактата о движении Луны (E. 838), тогда как на самом деле сохранилось большое количество фрагментов этих сочинений.

За прошедшие с того времени 100 лет хранившиеся в Архиве рукописи научных сочинений Л. Эйлера практически не публиковались. Внимание

* Рукописные материалы Л. Эйлера в Архиве Академии наук СССР. Том I. Научное описание. Составители: Ю. Х. Копелевич, М. В. Крутикова, Г. К. Михайлов и Н. М. Раскин. М.—Л., 1962.

было уделено в последние годы только эпистолярному наследию великого ученого.*

В настоящем томе продолжается публикация рукописей Л. Эйлера из Архива Академии наук СССР, до сих пор не видевших свет.

Согласно традиции, восходящей к Фусам и оправданной историческим значением Л. Эйлера в развитии науки, было бы желательно включить сюда все доселе не опубликованные сочинения и фрагменты трудов Л. Эйлера, равно как и варианты его опубликованных работ. Не ставя себе сразу таких широких целей, осуществление которых и в настоящее время все еще затруднительно, издатели отказались от разработки общего плана серии и ограничились отбором материала только для первого тома, включив в него бóльшую часть рукописей Л. Эйлера по механике, относящихся к концу 20-х и началу 30-х годов XVIII в. Присоединить сюда все соответствующие отрывки из первой «Записной книжки» Л. Эйлера (Т. 397) уже не представилось возможным.

2. После выхода в свет «Начал» Ньютона и создания им, Лейбницем и их последователями первых основ дифференциального и интегрального исчисления в XVIII в. началась эпоха развития приложений математического анализа к различным задачам точных наук и прежде всего к механике. Однако систематическое применение анализа в изложении механики встречало на первых порах как принципиальные трудности, так и чисто индивидуальное сопротивление ученых старшего поколения. Так, в опубликованной через 30 лет после первого издания «Начал» Ньютона фундаментальной монографии по механике — в «Форономии» Якоба Германа — мы читаем: «Насколько это было возможно, я постарался придать изложению ясность; поэтому многие доказательства, возможно, покажутся преуспевшим математикам слишком длинными. Следует, однако, учесть, что я должен был принять во внимание интересы начинающих математиков, которые не всегда могут дополнить то, что часто опускается в доказательствах из стремления к краткости и изяществу и что должно быть дополнено в уме. Между тем я не хочу отрицать и того, что, насколько это было возможно, я стремился к изяществу, и поэтому я предпочел линейные доказательства доказательствам алгебраическим, ибо я на опыте многократно убеждался в том, что рассмотрение фигур очень часто доставляет более простые и изящные доказательства и построения, чем умозрительный анализ. Я говорю „умозрительный", так как часто пользуюсь геометрическим и линейным анализом, в котором не используются алгебраические знаки, с помощью этого анализа многое можно получить более изящно, чем с помощью аналитических вычислений, хотя это бывает и не всегда. Я полагаю, что древние пользовались такого рода геометрическим анализом, насколько об этом можно судить согласно данным Эвклида и книге Аполлония „De sectione rationis", изданной славнейшим Эдмундом Галлеем. Можно только удивляться тому, сколь широко пользовался подобным анализом великий Ньютон в своих „Началах". Но при применении теорем, как в случае более подходящем, я нередко пользуюсь алгебраическим вычислением».

«Форономия» Германа является важным промежуточным звеном между «Началами» Ньютона и «Механикой» Эйлера. Вопреки своему стремлению к геометрическим методам древних, Герман сформулировал ряд аналитических закономерностей движения тел. В частности, ему при-

* См. прежде всего «Письма к ученым» Л. Эйлера, подготовленные Т. Н. Кладо, Ю. Х. Копелевич и Т. А. Лукиной (М.—Л., 1963), и два тома «Die Berliner und die Petersburger Akademie der Wissenschaften im Briefwechsel Leonhard Eulers» (Berlin, 1959—1961), изданные А. П. Юшкевичем и Э. Винтером.

надлежит четкая аналитическая формулировка принципа движения тел по произвольным кривым в сопротивляющейся среде. Говоря о работах своих предшественников, Герман писал: «К их открытиям я добавлю кое-что свое и буду исходить из простого принципа, на котором я построил почти все, что относится к действительному движению тел. Этот принцип гласит: *момент любого непрерывно действующего побуждения равносилен моменту скорости*. Никто из славнейших мужей не пользовался этим принципом в учении о движении тел в сопротивляющейся среде, насколько, по крайней мере, можно судить по их опубликованным сочинениям, хотя, исходя из этого принципа, многое можно получить более коротким и естественным путем, чем исходя из других оснований».

Под моментом непрерывно действующего побуждения здесь понимается работа действующих сил на элементе пути, а под моментом скорости — произведение из скорости на ее приращение. Далее из этой формулировки Герман получает аналитические формулы для всех рассматриваемых им случаев движения.

Вообще при изучении более сложных случаев движения Герман широко пользуется аналитической формой записи дифференциальных уравнений движения и их явным интегрированием.

Целью, которую поставил перед собой Л. Эйлер, являлась полная систематизация аналитического метода изложения механики точки и связанное с применением этого метода расширение круга задач, строгое решение которых было возможно на уровне развития основных представлений механики того времени. Осуществлено это им было в классическом трактате «Механика, или наука о движении, изложенная аналитически» (2 тома, СПб., 1736 [E. 11—12]).

3. Перечень сочинений, публикуемых в настоящем томе, с кратким археографическим описанием рукописей помещен после «Введения». Охарактеризуем эти сочинения здесь вкратце, оставляя их подробный научный разбор до другого подходящего случая.

Том открывается небольшим фрагментом «О мертвых и живых силах» (1727—1728 гг.), в котором молодой Эйлер пытался разрешить смущавший не одно поколение ученых вопрос об определении истинной меры так называемых мертвых и живых сил. Далее читатель найдет начало лекций по статике, которые подготавливались Л. Эйлером, по-видимому, в конце 20-х годов XVIII в. для немногочисленных слушателей тогдашнего академического университета. Оба эти сочинения дополняют весьма скупые высказывания Л. Эйлера по этому кругу вопросов, опубликованные также преимущественно посмертно.

Следующей группе работ предпослан составленный еще в Базеле, в период ученичества у Иоганна Бернулли, план трактата по механике точки. Далее следуют три варианта (один из которых представлен только началом) общего изложения динамики точки под действием центральных сил. Последнее из помещенных здесь сочинений — «Механика, или наука о движении» — представляет собой черновой вариант двухтомной «Механики» Л. Эйлера 1736 г. Интересно наличие в этой рукописи третьего раздела — о движении твердых тел, в котором Л. Эйлер пытался (впрочем, без особого успеха) подойти к построению динамики твердого тела. При этом он широко использовал встречающееся у него и в первом томе изданной «Механики» понятие «восстанавливающей силы».*

* В Примечании к 14-му определению главы II Л. Эйлер писал: «Использование этой восстанавливающей силы . . . будет весьма широким в последующем, когда мы будем исследовать движение тел конечной величины» (Л. Эйлер. Основы динамики точки. М.—Л., 1938, стр. 134).

Публикуемые в этой группе рукописи дают ясное представление о работе Л. Эйлера над его «Механикой» и тем самым над становлением аналитического изложения механики точки.

Последующий цикл из пяти небольших сочинений посвящен природе жидкостей и движению в них твердых тел. Несколько особняком стоит здесь первая заметка «О природе жидкостей», которая не выходит за рамки формальных умозрительных построений и относится, собственно говоря, не к механике, а к физике (или даже метафизике) жидкостей. Она помещена здесь, будучи в известной мере связана с последующим «Рассуждением о движении тел в жидкостях без учета какой-либо тяжести». Любопытна для характеристики молодого (и только молодого!) Эйлера его четкая апелляция в этой заметке к опыту как критерию правильности теоретического построения. В заключении заметки он писал: «Но все это должно быть далее проверено путем постановки опытов, так чтобы стало ясно, соответствует ли это истине или не соответствует. Таким образом будет выявлено и станет ясным, верна эта теория или нет».

Публикуемые в этом цикле незамысловатые «рассуждения» о движении тел в жидкостях посвящены по существу движению материальной точки в сопротивляющейся среде и могли бы быть помещены до чернового варианта трактата по механике точки, завершающего предыдущую группу публикуемых работ. Однако они тесно связаны между собой по форме и по содержанию, а также включают в той или иной мере — особенно первое — ссылки на физические представления о природе жидкостей, что послужило основанием для выделения их вместе в самостоятельную группу и размещения после «чисто» механической части.

Наконец, последнее из включенных в том сочинений относится к гидравлике. В нем Л. Эйлер, независимо от Даниила Бернулли, установил на основании закона живых сил начала учения об истечении жидкости из отверстий.

4. Латинские тексты Л. Эйлера подготовлены к печати в настоящем томе в полном соответствии с рукописями. При этом было проявлено стремление передать не только содержание сочинений, но и сохранить — в отличие от изданий Фусов — языковое своеобразие оригинала, характерное для юношеских рукописей Л. Эйлера. Более того, в большинстве случаев сохранены и допущенные автором в отдельных местах не свойственные классической латыни грамматические формы и синтаксические конструкции, а также анаколуфы и различные непоследовательности в правописании. Исправлению подверглись лишь явные описки. Немногочисленные конъектуры и вставки издателей помещены в квадратные скобки. Издателям же принадлежит принятая в томе пунктуация и разбивка текста на абзацы. Кроме того, в соответствии с принятой также и при издании «Полного собрания трудов» Л. Эйлера нормой, буква j заменена повсеместно на i.

Встречающиеся в тексте сокращения, как правило, развернуты, за исключением общеупотребительных. Пронумерованные Л. Эйлером разделы сочинений всюду трактуются как параграфы, независимо от того, присоединен ли к ним автором знак §.

В передаче математических формул допущена несколько бóльшая модернизация: всюду вместо черты над алгебраическими выражениями, заменяющей скобки, поставлены скобки, в знаках радикалов верхняя черта продлена на все подрадикальное выражение, вместо зачастую употреблявшегося Л. Эйлером знака $\int$ для обозначения синуса всюду внедон знак sin, для обозначения логарифма вместо l — знак lg. При подготовке формул к набору допущено также отступление в передаче класси-

ческого способа записи пропорций, в которых отыскивается последний их член; вместо схемы $A:B=C:D=\frac{BC}{A}$ принято $A:B=C:D, D=\frac{BC}{A}$. Однако следует отметить, что сохранена непривычная для современного читателя манера писать иногда в пропорции рядом с отдельными ее членами в скобках иное их выражение или обозначение. *

Что касается принципов, положенных в основу перевода на русский язык, то они определялись прежде всего наличием параллельно приводимого подлинного текста, допускающего простое наведение необходимых справок. Поэтому в русском переводе, являющемся в известной мере комментарием к оригиналу, основное внимание было уделено правильности передачи мысли автора, а отнюдь не построению русских предложений в максимальном соответствии со строем латинского языка. Живость и образность научного языка XVIII в. при этом, к сожалению, сохранить не удалось.

Издатели отказались от системы воспроизведения рисунков факсимиле, успешно примененной О. Шписом в подготовленном им первом томе переписки Иоганна Бернулли. Ввиду чернового характера большинства публикуемых материалов Л. Эйлера рисунки к тексту были построены вновь в соответствии с имеющимися в рукописях оригиналами, а в случае отсутствия последних — в соответствии со смыслом авторского текста. Ссылки на рисунки и нумерация их принадлежат издателям.

Г. К. Михайлов

PROOEMIUM

1. Leonhardi Euleri opera varietate et ingenii acumine, quod in quovis eorum magnifice elucet, plurimum contulerunt ad omnium fere scientiarum exactarum evolutionem saeculo duodevicesimo et undevicesimi parte maiore. Vere mirabilis est ipsa moles Euleri scriptorum, quippe quae supra 40 000 paginas compleat.

Pars maxima manuscriptorum Euleri conservatur Leninopoli in Archivo Academiae Scientiarum URSS. Descriptio generalis eorum in huius seriei tomo primo** exstat. Multa manuscripta typis vulgata sunt Eulero vivo, sed plurima continent opera postuma, quaedam etiam nondum edita.

Laborem ingentem inquisitionis et ordinationis manuscriptorum Euleri susceperunt priore parte saeculi undevicesimi viri pronepotes Paulus Henricus et Nicolaus Fussi. Cuius negotii tamquam summam et culmen mente conceperunt praeparationem editionis operum omnium Euleri cum vulgatorum tum nondum editorum. Attamen neque ipsorum curae neque auxilium sodalium egregiorum (Buniakovskii, Tschebyschevii, Ostrogradskii, Struvii) suffecerunt ad inceptum illud grande perficiendum. Etiam ex octo tomis editionis modestioris (*Opera minora collecta*) tantummodo prima duo volumina ad doctrinam numerorum pertinentia prelum reliquerunt (*Commentationes arithmeticae collectae*, 1849); volumen tertium ad geometriam pertinens quamquam prelo subiectum in lucem non prodiit.

* К сожалению, в корректуре обнаружилось, что все вынесенные из строк формулы набраны петитом. Не желая отложить выход книги в свет на неопределенный срок, издатели сохранили эту непривычную для читателя форму набора.

** Manuscripta Euleriana Archivi Academiae scientiarum URSS. Tomus primus. Descriptio scientifica. Ediderunt J. Ch. Kopelevič, M. V. Krutikova, G. K. Mikhailov et N. M. Raskin. 1962.

Nec magis successit conatus opera omnia nondum vulgata edendi, cum mors P. H. Fussi, secretarii perpetui Academiae Scientiarum Petropolitanae, laboribus iis finem posuisset. Atque nonnullae commentationes tomi alterius *Operum postumorum* (E. 805) variis mendis haud mediocribus laborant. Veluti pars posterior commentationis de motu sanguinis (E. 855) ibi inserta est, cum initium eius in scriniis Academiae servatum non detectum esset; ibidem tantum initium capitis primi tractatus de motu corporis in tubis mobilibus (E. 827) et tantum tria capita tractatus de motu Lunae (E. 838) collocata sunt, cum alia quoque compluria fragmenta tractatuum eorum in tabulario Academiae inessent.

Per hos ultimos centum annos scripta scientifica Euleri in Archivo servata fere non edebantur, nisi quod commercium litterarum Geometrae Celeberrimi novissime aliquatenus publici iuris factum est.*

Hic tomus continuat editionem manuscriptorum Euleri ex Archivo Academiae Scientiarum URSS nondum prelo subiectorum.

Ceterum etsi operum Eulerianorum amplitudinem et gravitatem consideranti optimum videatur vestigia a fratribus Fussis relicta sequendo quaecunque exstarent manuscripta et fragmenta potiora non omissis etiam primis rudimentis commentationum postea retractatarum et editarum hac editione complecti, neque virium nostrarum neque huius temporis esse tanta moliri re edocti sumus. Itaque ipsum consilium atque descriptionem editionis generalis elaborandam in posterum integram reservavimus, huic autem tomo satis esse duximus manuscripta seligere, quae partem maiorem operum Euleri mechanicorum e fine tertii decennii et quarti initio saeculi duodevicesimi provenientium continent. Neque tamen licuit huc omnia fragmenta convenientia in primo libro *Adversariorum mathematicorum* Euleri (T. 397) reperta adiungere.

2. *Principiis* Newtoni emissis et elementis calculi differentialis et integralis a Newtono, Leibnizio et successoribus eorum institutis aetas applicationum analysis mathematicae ad varia problemata scientiarum exactarum et primo ad mechanicam incepit. Applicatio tamen consequens analysis ad mechanicam incurrit initio cum in difficultates ad naturam rei pertinentes tum in resistentiam eruditorum in schola vetere educatorum. Ita in *Phoronomia* Iacobi Hermanni, tractatu subtili de motu corporum immerito oblivioni dato, legimus (Praefationis pag. 7): «Perspicuitati, quantum potui, litavi; propterea multae demonstrationes provectioribus Geometris nimis prolixae fortasse videbuntur, sed sciant velim tyronum quoque rationem habendam mihi fuisse, quibus non semper in potestate est ea supplendi, quae subinde ex demonstrationibus brevitatis et elegantiae gratia resecantur mente necessario supplenda. Interim diffiteri nolo me etiam, quantum potui, elegantiam sectatum esse atque propterea demonstrationes lineares algebraicis praetulisse experientia multiplici edoctum, meditationem figurarum saepissime simpliciores et elegantiores suppeditare solutiones ac constructiones quam Analysin speciosam. Speciosam dico, nam subinde utor analysi geometrica seu lineari absque symbolis algebraicis procedente, huius beneficio multa elegantius obtinentur quam calculis analyticis, etsi non semper. Eiusmodi analysi geometrica veteres usos existimo, quemadmodum ex Euclidis datis et Apollonii libello *De Sectione rationis* a Celeberrimo Edmundo Hallaeo edito non obscure colligitur; simili etiam analysi summus Newtonus ad stuporem usque usus est

* Vide praecipue Leonhardi Euleri *Litteras ad eruditos* a T. N. Klado, J. Ch. Kopelevič et T. A. Lukina ad editionem praeparatas (1963) et duo volumina *Academia Scientiarum Berolinensa et Petropolitana in commercio epistularum Leonhardi Euleri* (Berolini, 1959–1961, ediderunt A. P. Juškevič et E. Winter).

in suis *Principiis*. In applicatione vero theorematum tanquam loco magis idoneo calculo algebraico subinde utor».

At est *Phoronomia* Hermanni nequaquam levis annulus iungens *Principia* Newtoni cum *Mechanica* Euleri. Methodis geometricis veterum deditus Hermannus nihilominus exposuit analytice nonnullas leges motus corporum difficiliores. Ex. gr. attulit claram analyticam definitionem principii motus corporum super lineis curvis in medio resistente. Opera eruditorum antecedentium commemorans ita scripsit (pag. 278): «Illorum inventis nonnulla propria addam atque simplici principio insistam, cui ferme omnia, quae ad motum actualem corporum attinent, superstruxi, scilicet *momentum cuiuslibet sollicitationis indesinenter agentis aequivalere momento celeritatis.* Quo principio nemo ex laudatissimis viris usus est in doctrina motuum corporum in mediis resistentibus latorum, saltem quatenus ex publicis eorum scriptis iudicare licet, etsi hoc principio multa brevius et naturalius quam ab aliis fundamentis obtineantur».

Momentum sollicitationis indesinenter agentis hic intelligitur ut rectangulum sub recta, quae sollicitationem exponit, et elemento spatii, quod mobile sollicitatione continue urgente transmittit; momentum vero celeritatis intelligitur ut factum ex celeritate mobilis in celeritatis crescentis vel decrescentis elementum. Deinde Hermannus ex eo principio accipit formulas analyticas ad motum in omnibus casibus inveniendum.

Omnino solet Hermannus uti in investigatione problematum motus difficiliorum aequationibus differentialibus in forma analytica et integratione earum directa.

Eulerus autem sibi proposuit elaborare systema plenum mechanicae analytice expositum et adiungere nova genera problematum, quorum solutiones exactae inveniri possent ope principiorum mechanicae tum notorum. Hoc propositum est ab Eulero praeclare peractum quoad motum puncti in eius *Mechanica sive motus scientia analytice exposita* (duo volumina, Petropoli, 1736 [E. 11–12]).

3. Index commentationum huic tomo insertarum cum descriptione manuscriptorum archaeographica collocatus est post *Prooemium*. Describamus hic breviter eas commentationes explicationem earum uberiorem in aliud tempus idoneum differentes.

In initio tomi positum est fragmentum parvum *De viribus mortuis et vivis* (1727–1728), in quo Eulerus iuvenis quaestionem de mensura vera virium eruditos multarum aetatum sollicitantem solvere conatus est. Deinde initium lectionum de statica sequitur, quae ab Eulero paucorum studiosorum Academiae instituendorum causa in fine tertii decennii praeparatae esse videntur. Haec duo fragmenta supplent exigua scripta Euleri ad has quaestiones pertinentia.

Sequenti seriei commentationum praemissus est conspectus tractationis motus puncti, quem Eulerus etiam tum Iohanni Bernoullii discipulus, Basileae composuit. Deinde lector inveniet tres adumbrationes expositionis generalis dynamicae puncti viribus centralibus agitati. Extrema ex his commentationibus *Mechanica seu scientia motus* iam parum ab edita *Mechanica* Euleri (1736) differt. Notandum est inesse in hoc manuscripto initium sectionis tertiae de motu corporum rigidorum, in qua Eulerus dynamicam corporum solidorum elaborare conatus est. Hic latius utitur notione vis restituentis, quae in tomo primo *Mechanicae* editae definita est.*

Commentationes huius seriei ob oculos ponunt ipsum progressum *Me-*

* In Scholio ad Definitionem vis restituentis Eulerus scripsit: «Usus huius vis restituentis . . . erit amplissimus in sequentibus, quando motus corporum finitae magnitudinis sumus investigaturi» (Opera omnia, II-1, p. 61).

chanicae ab Eulero construendae et methodi analyticae in mechanica puncti adhibendae evolutionem.

Series sequens quinque minores commentationes de natura fluidorum et motu corporum in iis continet. Prima commentatio *De natura fluidorum* pure ratiocinativa pertinens proprie non ad mechanicam, sed ad physicam fluidi aut etiam ad metaphysicam huic tomo inserta est, quia cum sequenti *Dissertatione de motu corporum in fluidis abstrahendo ab omni gravitate* quodammodo coniuncta est. In illa commentatione Eulerus necessitatem experimenti ad theoriae veritatem aestimandam commemorat, quod Eulero iuveni (et tantum iuveni!) peculiare est. In fine commentationis legimus: «Non dubito, quin ex hac posita structura corporum multa, quae ad corporum naturam pertinent, deduci possint. Ea vero deinceps experimentis instituendis examinari debent, ut patescat, utrum cum veritate conveniant an disconveniant. Atque hoc modo efficietur et intelligetur, utrum haec theoria vera sit an secus».

Simplices dissertationes huius seriei pertinent proprie ad motum puncti in medio resistente et potuerunt collocari ante adumbrationes tractatus de motu corporis, quae priorem seriem constituunt. Tamen quoniam hae dissertationes inter se cum re tum forma arte coniunctae sunt et mentiones de proprietatibus fluidorum continent, serie propria separatae post puram mechanicam positae sunt.

Extrema commentatio huic tomo inserta pertinet ad hydraulicam. In ea Eulerus suopte ingenio pariter cum D. Bernoullio doctrinam de effluxu fluidorum ex foraminibus secundum legem virium vivarum exposuit.

4. Scripta Euleri huic tomo inserta ad editionem praeparata sunt in pleno consensu cum chirographis. Hic opera data est, ut non solum verba traderentur, sed etiam proprietas linguae autoris conservaretur, quod fratribus Fussis in eorum editione curae non fuit. Ita in plurimis casibus formae grammaticales a lingua Latina classica abhorrentes atque etiam anacoluphi et inconsequentia in orthographia servata sunt tantum mendis scripturae apertis correctis.

Paucae coniecturae et additamenta editoris uncis quadratis inclusa sunt. Ab eodem signa interpunctionis et distinctio per intervalla proveniunt. Ceterum secundum normam ab editoribus *Operum omnium* Euleri acceptam pro littera *j* ubique littera *i* substituta est. Abbreviaturae chirographorum nisi usu receptae plerumque supplentur, subsectiones omnes in manuscriptis ab Eulero enumeratae ubique ut paragraphi notantur, etiam ibi, ubi signa § desunt.

In formulis mathematicis tradendis editor paulo plus a manuscriptis recessit. Ubique scilicet pro lineis super expressiones algebraicas uncis aequipollentibus hos posuit, in signis radicis lineas horizontales super totam expressionem subradicalem prolongavit, pro signo ∫, ubi id sinum denotat, signum sin adhibuit, ad logarithmos denotandos ubique pro l signo lg usus est. Itidem recessit a modo exoleto, quo interdum Eulerus utitur, in proportionibus scribendis. Ita pro $A:B=C:D=\frac{BC}{A}$ scribimus $A:B=C:D$, $D=\frac{BC}{A}$. Tamen modus lectoribus temporis nostri insolitus in proportione iuxta singula eius membra aliae eorum expressionis aut denotationis in uncis scribendae servatus est. *

* Molestissime fortasse infelici quodam casu evenisse, ut omnes formulae interlineares minutioribus litteris componerentur. Quod mendum typothetarum culpa admissum cum in plagulis animadvertissemus, neglegere maluimus quam libri editionem in diem incertum differre.

In commentationibus Euleri in Rossicum vertendis memoria tenebamus lectorem in hoc eodem tomo exemplar Latinum habere, quo ad comparationem uti possit. Quare in expositione Rossica, quae commentarium ad textum Latinum quodammodo praebet, id potissimum egimus, ut sententias autoris recte traderemus, non ut ipsum verborum tenorem quam artissime sequeremur. Ubertatem quidem et vigorem linguae, quae erat scientiae saeculi duodevicesimi propria, servare in versione non successit.

Cum manuscripta huic tomo inserta ab autore non prelo destinata essent, editor non ex re duxit figuras inde arte phototypica referre, sicut fecit Spiessius in volumine primo *Commercii epistularum* Iohanni Bernoullii a se edito. Figurae hic ab editore denuo adumbratae sunt secundum exemplaria aut, si ea desunt, secundum sensum expositionis. Ab eodem numeratio figurarum et denotatio earum in expositione proveniunt.

G. K. Mikhailov

ПЕРЕЧЕНЬ СОЧИНЕНИЙ, ОПУБЛИКОВАННЫХ В НАСТОЯЩЕМ ТОМЕ (INDEX COMMENTATIONUM IN HOC TOMO EDITARUM)

1. De viribus mortuis et vivis (О мертвых и живых силах).

Заметка, без заглавия, с 2 рисунками в тексте.

Т. 164:* Ф. 136, оп. 1, № 190, лл. 1—3 об.**

2. Lectiones de Statica (Лекции по статике).

Сочинение, без общего заглавия, с 24 рисунками на полях.

Т. 165: Ф. 136, оп. 1, № 191, лл. 1—7 об.

3. Conspectus tractatus de motu corporum vi centrali agitatorum ex Adversariorum Mathematicorum Libro primo depromptus (План трактата о движении тел под действием центральной силы, извлеченный из первой «Записной книжки»).

Фрагмент, без заглавия, сохранился без первого листа, содержание которого восстановлено редактором.

Из Т. 397: Ф. 136, оп. 1, № 129, лл. 211—213 об.

4. Commentatio de motu corporum vi centrali agitatorum ex Adversariorum Mathematicorum Libro primo deprompta (Сочинение о движении тел под действием центральной силы, извлеченное из первой «Записной книжки»).

Сочинение, без общего заглавия; несохранившиеся рисунки восстановлены редактором.

Из Т. 397: Ф. 136, оп. 1, № 129, лл. 1—21, 22—23 об., 25—27, 29—31.

* Номера с индексом Т указывают на соответствующее описание рукописи в разделе «Описание научных трудов» первого тома настоящей серии (Рукописные материалы Л. Эйлера в Архиве Академии наук СССР, т. I: Научное описание. М.—Л., 1962, стр. 27—119).

** При обозначении шифров хранения в Архиве Академии наук СССР используются сокращения: Ф. — фонд, оп. — опись.

5. De motu corporum vi centrali solicitatorum (О движении тел под действием центральной силы).

Сочинение хранится по частям в Научной библиотеке Тартуского государственного университета (первые 2 листа), в Государственной публичной библиотеке имени М. Е. Салтыкова-Щедрина в Ленинграде (следующие 2 листа) и в Архиве Академии наук СССР (последующие 22 листа); несохранившиеся рисунки восстановлены редактором.

Библиотека Тартуского университета.
ГПБ им. Салтыкова-Щедрина, собрание Сухтелена, картон 72.
Т. 185+Т. 186: Ф. 136, оп. 1, № 201, лл. 1—22.

6. Mechanica seu scientia motus (Механика, или наука о движении).

Сочинение сохранилось в 22 фрагментах, содержащих 99 листов из первоначального числа 171; с 110 рисунками на полях.

Т. 167: Ф. 136, оп. 1, № 193, лл. 1—99 об.

7. De natura fluidorum (О природе жидкостей).

С 2 рисунками на полях.

Т. 221: Ф. 136, оп. 1, № 210, лл. 1—4 об.

8. Dissertatio de motu corporum in fluidis abstrahendo ab omni gravitate (Рассуждение о движении тел в жидкостях без учета какой-либо тяжести).

С 1 рисунком на полях.

Т. 218: Ф. 136, оп. 1, № 200, лл. 1—4 об.

9. Dissertatio de ascensu et descensu corporum rectilineo in fluidis (Рассуждение о прямолинейном подъеме и спуске тел в жидкостях).

Сочинение сохранилось в двух фрагментах, содержащих 5 листов из первоначального числа 8; с 1 рисунком на полях.

Т. 182: Ф. 136, оп. 1, № 209, лл. 5—9 об.

10. Dissertatio de motu corporum super lineis curvis in medio resistente (Рассуждение о движении тел по кривым линиям в сопротивляющейся среде).

С 2 рисунками на полях.

Т. 183: Ф. 136, оп. 1, № 202, л. 1—1 об.

11. Dissertatio de motu corporum oblique proiectorum in fluidis (Рассуждение о движении в жидкостях тел, брошенных под углом).

С 5 рисунками на полях.

Т. 184: Ф. 136, оп. 1, № 203, лл. 1—4 об.

12. De effluxu aquae ex tubis cylindricis utcunque inclinatis et inflexis (Об истечении воды из цилиндрических труб, произвольно наклоненных и изогнутых).

Сочинение сохранилось в 2 фрагментах, содержащих 16 листов из первоначального числа 18; с 6 рисунками на полях.

Т. 217: Ф. 136, оп. 1, № 208, лл. 1—16 об.

OPERA MECHANICA

[DE VIRIBUS MORTUIS ET VIVIS]

Vis omnibus corporibus insita inertiae efficit, ut motum imprimenti resistant, et inde vis requiratur ad motum imprimendum. Id, quod corporibus motum imprimere valet, vi pollere dicitur. Et hinc ex duplici, unde corpora motum trahunt, principio, duae virium classes ab Leibnizio sunt constitutae, vivarum et mortuarum. Quanquam penitius rem perscrutando omnes vires ad mortuas referri possint. Etenim in collisione corporum motus communicatio fit mutua pressione. Et complura virium mortuarum exempla ad collisionem seu impetum minimarum particularum reducuntur. Observamus autem duplici modo corpora motum acquirere, vel a potentia trahente visibili [seu] invisibili, vel a corpore iam moto impingente, unde duo resultant virium genera corporibus motum imprimere valentia.

Priori casu, ubi corpus a pressione vel tractione motum recipit, a vi mortua is proficisci dicitur. Est igitur vis mortua nil aliud quam pressio vel tractio. Exempla sunt motus generatio in corpore elastro sese expandenti opposito, motus generatio in ferro magneti vicino et omnium maxime evidens exemplum est in productione motus a gravitate. Casu posteriori, quo corpus motum ab alio impingente accipit adeoque motus a motu producitur, a vi viva ortus appellatur. Est adeo vis viva potentia corpori moto insita, quae aliis motum communicare valet, huius exempla plurima in corporum collisione observare licet.

Quaestio autem de hac materia circa id versatur, quomodo hae vires, praecipue vivae, sint mensurandae et inter se comparandae. De hac quaestione hoc discursu agere animus est et ex primis, quantum licet, principiis dimetendi modum derivare. Sed quia duo observantur virium genera, de quavis speciatim, cum vix quicquam commune habeant, agendum erit. Est autem virium vivarum et mortuarum differentia praecipua haec, quod ad motum a vi mortua accipiendum necesse sit, ut aliquandiu corpus ei subiectum sit. Requiritur adeo tempus ad motus impressionem a vi mortua. E contra vis viva motum generat momento et tempus nullum requiritur. Unde concluditur ad virium mortuarum mensuram in computum duci debere tempus, in virium vivarum mensura nullam de tempore mentionem faciendam esse. Nemo dubitabit, quin virium mensura ex effectu pleno sit aestimanda, nempe ex motu genito, sed quomodo motus genitus est mensurandus, an potentia dupla censenda est, quae duplam in corpore dato velocitatem producit, an quae quadruplam, haec omnia, ne in circulum labamur, nondum constant. Sed id tamen pro cognito accipi potest potentiam in corpore duplo eandem velocitatem generantem esse duplam. Idem enim est, ac si duobus corporibus ea velocitas est impressa, adeoque duplus effectus secutus. Ex huiusmodi effectibus ergo quantitas virium aestimari debet.

DE MENSURA VIRIUM MORTUARUM

Cum in virium mortuarum mensura tempus considerare oporteat, ad earum mensuram et comparationem necesse est nosse, an uniformiter agant an difformiter, namque vis maxima decrescens et minima crescens successu temporis aequales tandem edere valent effectus. Quocirca ad legitimam aestimationem conducit, ut effectus temporis intervallo quam minimo geniti considerentur, quippe quo momento actio vis pro uniformi haberi queat. Et propterea duas potentias aequales habeo, quae aequalibus, sed infinite parvis tempusculis effectus producunt aequales. Eodem modo potentiae inaequales ex effectu genito in dato infinite parvo tempusculo mensurantur.

Est autem haec materia de productione motus a potentiis eius modi, ut hactenus ex invictis et necessariis principiis deduci non potuerit. Unde Leibnitius eo progressus est, ut leges motus contingentes pronuntiarit, cum neutiquam ex extensionis contemplatione derivari queant. At forsitan, si corporum natura nobis propius innotesceret, accuratius philosophari liceret. Neque enim vis inertiae a quoquam, quod sciam, exposita est nec ex principiis hactenus cognitis sufficienter deducta, quam tamen essentialem corporis proprietatem autumo. Cuius explicatio sine dubio ad plurium phaenomenorum explicationem manu duceret.

Sunt autem leges, secundum quas vires mortuae corporibus motus imprimunt, sequentes.

1. Eadem potentia corpori sive moto sive quiescenti eodem tempusculo eundem velocitatis gradum imprimit.
2. Velocitates ab eadem potentia eidem corpori impressae sunt ut tempora, quibus generantur, si vel potentia sit uniformis vel tempuscula accipiantur quam minima.
3. Velocitates diversis corporibus eodem tempore et ab eadem potentia impressae sunt reciproce ut massae corporum.
4. Velocitates aequalibus corporibus a potentiis diversis eodem tempore impressae sunt ut potentiae.

Hinc habetur canon generalis: velocitates genitae sunt directe ut potentiae et tempora et reciproce ut massae.

Harum quatuor legum dependent forsitan aliae ab aliis, sed commune earum principium non nisi contingens videtur. Supra quidem modus traditus est dimetiendi potentias ex effectu, ille autem convenit cum hoc, quo potentiae sine respectu ad motum genitum comparantur ex aequilibrio desumto, quo potentia alterius dupla dicitur, quae in aequilibrio consistit cum duabus alteri aequalibus directe oppositis. Momentum connexionis horum dimetiendi modorum facile ex legibus datis deduci potest. Ex effectu autem modus potentias mensurandi ex canone generali derivatur hoc modo.

Potentiae sunt directe ut massae et velocitates genitae, reciproce autem ut tempora. Si potentiae sint uniformes, nihil refert quantitatis temporis, si difformes sint, tempora accipiantur quam minima. Effectus ergo producti ab eadem potentia eodemque tempore sunt ut facta ex massis corporum in celeritates. Cum sit spatium percursum ut celeritas ducta in tempus, loco temporis ponatur debitus valor, erit potentia directe ut massa et velocitatis quadratum, reciproce autem ut spatium percursum. Effectus ergo producti ab eadem potentia per aequale spatium sunt ut facta ex massis in velocitatum quadrata.

Circa potentias difformiter agentes difficilius videtur iudicium, at id tantum tenendum est ibi in quovis situ diverso vim mortuam esse diversam, unde in quovis loco exprimi poterit contemplando tempusculum infinite

parvum. Atque hinc dari poterit aequatio, qua relatio virium in omnibus positionibus exhibetur.

Clarissime id elastris ostendetur, in quibus vis elastica pro diversa tensione diversa est. Metior hic vim elasticam pondere, quod contrarie apllicatum elastrum in aequilibrio servare potest. Est elastris situs quidam naturalis, ad quem tendunt eo magis, quo longius ex eo removentur. Exprimam eam functione quacunque intervalli, quo a naturali situ distat. Assumo pro elastro filum spiratim contortum DE (fig. 1) ideoque instar lineae rectae extensibilis potest considerari. Sit AB huiusmodi virga elastica (fig. 2) et AB situs, ad quem perpetuo tendit. Sit AP quivis situs tensionis, in quo vis elastica exprimatur applicata PM curvae BMV. Hac data curva exprimetur velocitas corporis ab elastro propulsi hoc modo.

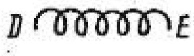


Fig. 1.

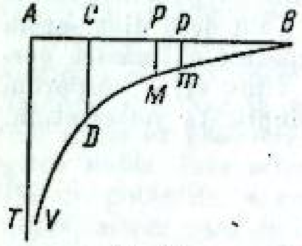


Fig. 2.

Sit AC status initialis, quo corpus primam impressionem recipit, $=b$, $AB=a$, massa corporis promovendi $=M$ et quaeratur velocitas, quam corpus habiturum est in B, ubi elastrum deserit. Pervenerit corpus in P sitque ibi velocitas $=v$, cuius incrementum per spatium Pp erit dv. Est autem ex canone generali dv ut $\frac{PM \cdot tPp}{M} = \frac{PM \cdot Pp}{Mv}$, unde $Mvdv = PM \cdot Pp$. Ergo $\frac{Mvv}{2} = \int PM \cdot Pp = DCPM$. Sit velocitas corporis in $B = c$, erit $Mcc = 2DCB$.

Diversa ergo corpora eidem elastro opposita acquirunt velocitates reciproce ut radices quadratae massarum ob spatium DCB constans.

DE MENSURA VIRIUM VIVARUM

Vis viva, ut supra definita est, est vis corpori moto insita, qua aliis corporibus motum imprimere valet, unde quantitas mensuranda est ex effectu pleno, qui produci potest. Effectus plenus est aggregatum omnium effectuum, quos corpus motum producere valet, donec ad quietem reducitur. Quiescens enim nullam amplius possidet vim quempiam effectum producendi. Quaestionis ergo cardo in eo vertitur, quomodo effectus plenus innotescat et quomodo ille sit mensurandus. Sunt duae hae quaestiones admodum difficiles. Prior enim ex motus communicatione decidenda videtur, posterioris solutio ipsius praesentis de virium vivarum mensura decisionem involvit, nam quomodo effectus plenus ex motis productis mensurabitur, cum ipsius corporis moti vis quaeratur. Quocirca totum negotium sequenti modo aggredior. Quaeram diversorum corporum velocitates, ut aequales effectus producere valeant; iis inventis nemo dubitabit, quin eorum corporum assignatis velocitatibus latorum aequalis insit vis viva.

Adeoque sequentem propositionem axiomatis loco praemitto: corpora diversa talibus velocitatibus praedita, ut idem elastrum ad eundem tensionis gradum perducere valeant, aequales habere vires vivas.

Propositio haec satis est clara, cum duo corpora aequales vires habere dicantur, quae aequales effectus producere valent. Et hic pro effectibus accipiantur tensiones elastri ad certum gradum. Ut praemissum axioma in usum venire possit, hanc addo propositionem. Elastrum ad certum gradum tensum, si dimissum, corpus propellat eique velocitatem imprimat; idem corpus eadem velocitate contra elastrum impingens illud in pristinum illum tensionis statum coget. Fluit hoc ex eo principio, quod vis mortua corpori quavis velocitate lato eodem tempore eundem velocitatis gradum imprimat seu eodem gradu augeat. Et hinc, si corporis velocitas sit negativa, i. e. contra vis mortuae directionem agat, velocitas eius minuetur eadem velocitate, qua augeretur, si secundum vis mortuae directionem moveretur.

Sint iam duorum corporum massae M et N, velocitates eorum x et y tales, ut habeant aequales vires vivas. Poterunt ea idem elastrum ad eundem tensionis gradum adigere, nempe elastrum AB in statum AC compellere, sed elastrum AB in statum AC perductum corpori M tantam velocitatem c sese expandendo imprimit, ut sit $Mcc=2DCB$. Ut ergo corpus M velocitate x latum possit elastrum AB in statum AC compellere, oportet, ut sit $Mxx=$ $=2DCB$. Et ut corpus N velocitate y idem praestet, oportet etiam, ut sit $Nyy=2DCB$. Ut igitur duo haec corpora aequales edant effectus, requiritur, ut sit $Mxx=Nyy$. Duo nempe corpora duas aequales vires vivas habebunt, si sint eorum massae ut velocitatum quadrata inverse. Cum dein diversorum corporum eadem velocitate latorum vires sint unanimiter ut massae corporum, componitur haec virium vivarum mensura: vires vivas corporum esse in ratione composita ex simplici massarum et duplicata velocitatum.

[*LECTIONES DE STATICA*]

Lectio I. Constitui in sequentibus praelectionibus explicare scientiam de motu, eius productione et accidentibus. Comprehenditur haec scientia sub voce *Mechanicae*.

Necesse autem est ante Mechanicam aliam disciplinam praemittere, *Staticam* scilicet, quae agit de potentiis, earum comparatione et aequilibrio. Namque sine hac in motus corporum explicatione minime progredi licet, cum ortus et productio motus ex natura potentiarum sit derivanda. Sunt igitur nobis duae scientiae pertractandae, Statica et Mechanica. Quarum illa de potentiis, earum comparatione et aequilibrio tanquam de causis motus, altera vero de motus productione a potentiis et alteratione tractat, nec non de vi corporibus motis insita, qua et aliis motum imprimere valent aliaque efficere, ad quae vis requiritur, quorsum recidit motus communicatio et motus corporum in fluidis.

Plurimi hodie ambas has scientias confundunt et uno nomine Mechanices designant. Quin et Varignonius in *Nova* sua *Mechanica* solam potentiarum doctrinam pertractavit. Sunt tamen, ut facile videre est, toto coelo distinctae, cum una de motu, altera de aequilibrio adeoque de quiete agat.

STATICA

Definitio Statices. *Statica est scientia potentiarum, eas inter se comparans et ad aequilibrium disponens.* In eius ergo pertractatione primo de natura potentiarum erit agendum et earum inter se comparatione. Atque secundo loco de aequilibrio, nempe quomodo variae potentiae dato corpori applicari debeant, ut corpus in quiete perseveret, seu qualis requiratur situs corporis, ut aequilibrium obtineatur. Et hinc pro variis corporum, quibus potentiae applicantur, figuris, proprietatibus aliisque conditionibus, etiam pro vario applicandi modo varia exsurgent capita in posterum pertractanda.

Fig. 1.

De potentiis in genere. *Potentia est conatus corpus oblatum versus certam plagam propellendi sive protrahendi.* Hinc duo videntur potentiarum genera, unum propellentium, alterum protrahentium. Sed hanc distinctionem in sequentibus non observabo, cum unum facillime ad alterum reducatur. Currus enim eodem modo se habet, sive ab equo protrahatur sive ab hominibus propellatur. Agit autem potentia sive trahens sive pellens secundum quandam plagam et haec dicitur eius *directio*. Et hinc dicitur potentia versus AB corpus B pellens secundum directionem AB agere, dum scilicet corpori B conatur motum imprimere in linea AB progrediundi (fig. 1). In posterum scribetur pAB pro potentia corpus in linea AB ab A movere conante, i. e. si potentia fuerit pellens, at pBA designabit potentiam corpus B ad A trahentem.

Exempla potentiarum in ipsa rerum natura existentia plurima habemus. Contemplemur omnium universalissimum maximeque obvium, nempe eam potentiam, quae efficit, ut omnia corpora deorsum descendere conentur. Videmus enim lapidem filo suspensum filum tendere et dissecto filo delabi. Hinc incidimus in hanc quaestionem, quaenam sit causa huius motus seu huius conatus descendendi. Quaestio quidem perquam difficilis est et hactenus perfecta eius solutio nondum est inventa. Interim tamen ratio esse debet, cur corpus nunc quiescens deorsum motum concipiat, atque ideo, quaequae sit, existet tamen potentia, licet insensibilis, omnia corpora ad terram vel desuper pellens vel deorsum trahens. Vis seu quantitas conatus, qua corpora tendunt deorsum, vocatur pondus, metimur enim pondera vi subiecta corpora premendi. Sed in sequentibus, ubi de potentiis agetur, semper a corporum, quae in computum ingrediuntur, pondere est abstrahendum eaque consideranda sunt ut indifferentia ad quemvis locum accedendi, nisi diserte admonuero me corpora tanquam pondere praedita contemplaturum.

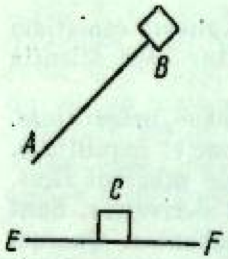


Fig. 2.

Dicuntur duae potentiae *aequales*, quae secundum eandem directionem agentes aequales edunt effectus seu aequaliter pellunt vel trahunt. Ex quo potentia quaelibet ad pondus poterit reduci eiusque quantitas absoluta cognosci, si nimirum pondus cognoscatur, quod eadem vi deorsum tendit seu subiectum obstaculum premit, ac hoc obstaculum pelleretur a potentia illa secundum directionem verticalem agente. In posterum igitur potentias hoc modo ad pondera reducam dicturus pAB aeque pellere corpus B secundum directionem AB, ac premitur planum EF deorsum a pondere incumbente quodam C (fig. 2), et huic ponderi, si innotuerit, aequalem pronunciabo vim seu potentiam AB.

Dicuntur potentiae *conspirantes*, quarum directiones coincidunt seu quae eidem corpori in eodem puncto applicatae id versus eandem plagam promovere conantur. Et hinc fluit potentiarum diversarum inter se comparatio. Dicitur potentia A aequalis duabus B et C simul, si ipsa eandem edat effectum ac duae potentiae B et C conspirantes et simul agentes. Simili modo potentia quaedam pluribus aequalis aut ad aliam datam rationem habere dicitur, ut si dicam potentiam A esse ad potentiam B ut 5 ad 7 seu $5B=7A$, si quinque potentiae singulae aequales potentiae B conspirantes et simul agentes aeque pellant obstaculum ac 7 potentiae singulae aequales ipsi A conspirantes. Hoc modo re ipsa comparatio instituitur ponderum, dicitur enim pondus duarum librarum, quod subiectum obstaculum aeque premit vel pellit ac duo unius librae simul incumbentes. Si ergo plures potentiae conspirantes applicatae fuerint, datur una *aequipollens* illis omnibus, nempe quae omnibus aequalis est et eandem cum illis directionem obtinet. Haec sunt notanda de potentiarum natura et mensura.

Pervenio igitur ad applicationem potentiarum corporibus, de illa autem hic solummodo agetur, quae corpus ex quiete non deturbat. Cum enim potentia conetur corpus movere, obstaculis remotis id ipsum movebit. Sed plures potentiae secundum diversas directiones applicatae efficere poterunt, ut corpus in nullam amplius plagam pellatur, sed quiescere perseveret, qui status est aequilibrii et de quo in praesenti tractatu de statica est agendum.

Quum autem varii applicandi modi diversitatem ratiociniis inferant, examinandum primo loco suscipio casum simplicissimum, quo omnes potentiae eidem puncto applicantur. Involvit autem et hic casus alios sub se ratione libertatis puncti, cui applicatae sunt potentiae, vel enim plane est

liberum, ut quaquaversus aeque facile moveri posset, vel eius libertas est restricta, ut v. gr. datam lineam transigere nequeat. Si punctum A adiaceat muro CD (fig. 3) in omnes plagas libere movebitur, sed per murum ipsi transitus sit interdictus.

Lectio II. Universi aequilibrii principium deducere conantur ex sequenti axiomate, cui autem haec definitio praemitti debet.

Fig. 3.

Fig. 4.

Duae potentiae *contrariae* sunt, quarum directiones quidem coincidunt, sed una corpus versus plagam pellit vel trahit ei oppositam, versus quam altera pellit vel trahit, ut potentiae AC et AB (fig. 4).

Axioma iam sic sonat.

Duae potentiae aequales et contrarie applicatae puncto aequilibrium producunt. Nempe si punctum A ad C trahatur tanta vi, quanta ad B trahitur, tum neutri cedet, sed in quiete perseverabit.

Veritas huius axiomatis per se evidens est et ulteriori probatione non indiget. Si ergo utrinque plures potentiae sed conspirantes abhibeantur, obtinebitur aequilibrium, si summa potentiarum ex una parte aequetur summae potentiarum ex altera parte.

Ex hoc quidem principio omnia in statica derivare conantur, sed tamen passim alia insuper introducunt. Quocirca in sequentibus alio utar princi-

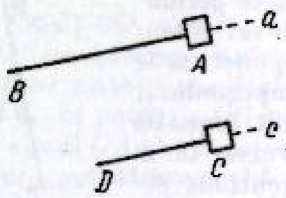


Fig. 5.

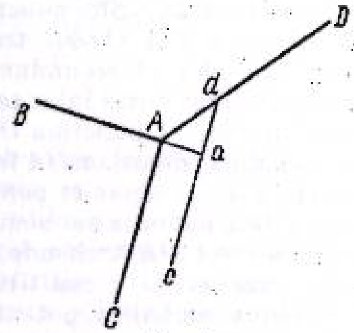


Fig. 6.

pio, magis universali et ex quo veritates staticas omnes deducam et cuius evidentia non minus facile innotescit.

Potentiae diversae aequalibus corporibus applicatae efficiunt, ut corpora aequalibus tempusculis per spatia promoveantur, quae sunt proportionalia ipsis potentiis. Sint nimirum corpora A et C aequalia iisque applicatae potentiae BA, DC, quae se habeant ut longitudines linearum BA et DC (fig. 5). Dico aequalibus tempusculis propulsa iri corpora A et C in a et c per intervalla Aa, Cc, ita ut sit $Aa : Cc = BA : DC =$ potentia BA ad potentiam DC.

Hisce positis corpus quodcunque, cui plures sunt applicatae potentiae, in aequilibrio persistet, si potentiae singulae singulatim agere ponantur, singulae per aequalia temporis intervalla, et corpus, postquam omnes egerunt, rursus in pristinum statum reducitur. Quantum enim corpus a qualibet vi ex situ suo deturbetur, ex priore propositione liquet.

Ut puncto A sint applicatae tres potentiae AB, AC, AD (fig. 6), quae se in aequilibrio conservent. Dico id hoc modo patere. Ponamus potentiam

AD solam agere per tempusculum quoddam reliquis ademtis pertrahaturque punctum A in d usque. Iam per aequale tempusculum agat potentia cd, coeteris neglectis pertrahet ea corpus in a, ut sit Ad ad $da = AD$ ad AC; exponatur enim quantitas potentiarum per lineas AD, AC, AB. Nam existente corpore in A tum potentia agebat secundum plagam AC, ergo corpus in d constitutum pertrahetur secundum plagam dc parallellam ipsi AC et aequalem. Existente iam puncto A in a agat tertia potentia aB aequali tempusculo. Quae si efficiat, ut punctum rursus in situm primum A perveniat, tres hae potentiae applicatae punctum A in aequilibrio conservabunt.

Fig. 7.

Hoc iacto principio pergo ad aequilibrium potentiarum puncto libero applicatarum; ubi primo explicabitur, quomodo potentiae se habere debeant, cum quoad directionem tum quoad quantitatem, dein de inventione unius potentiae pluribus aequipollentis agetur, eius quantitate et directione. Tandem materia problematice tractabitur, vel datis potentiis quantitate directionem vel data directione quantitatem determinando. Ubique pro vario potentiarum numero speciatim est explicandum.

Lectio III. Primo ergo quaerendum est, quomodo duae potentiae punctum, cui applicantur, in aequilibrio servare queant. Id quod in hoc Theoremate supra quidem axiomatis loco assumto, sed iam ex positis principiis demonstrando comprehenditur.

Duae potentiae aequales et directe contrariae puncto applicatae id in aequilibrio conservant.

D e m o n s t r a t i o. Sit punctum O, cui applicatae sint potentiae OA et OB trahentes vel AO et BO pellentes, aequales et secundum directiones AO, BO in linea recta constitutas inter se directe oppositae (fig. 7). Hae efficient, ut punctum O in quiete permaneat. Nam ponamus potentiam OA trahendo vel potentiam BO pellendo solam agere et perducere punctum O in o. Iam agat altera potentia per aequale tempusculum, vel AO pellendo vel OB trahendo, cum sit aequalis illi potentiae punctum in o constitutum rursus in O perducet. Adeoque ambabus potentiis agentibus simul punctum O quiescet per principium assumtum. Q. E. D.

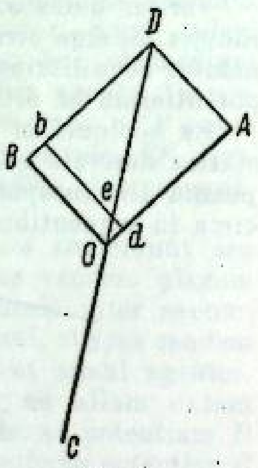


Fig. 8.

Si ergo puncto potentia sit applicata, ad id in aequilibrio conservandum necesse est aliam potentiam huic aequalem contrarie applicare.

Sint puncto O tres potentiae OA, OB, OC applicatae (fig. 8) et investigemus, quid requiratur ad aequilibrium obtinendum. Ex principio assumto patet id requiri, ut punctum O post omnium potentiarum actiones successivas et aeque diurnas rursus in locum suum O revertatur. Ponamus agere primum solam potentiam OA, quae punctum O in d pertrahat. Secundo agat sola potentia OB, quae iam abit in db ob O in d translatum, ita ut sit OB parallela et aequalis ipsi db, perducat ea punctum d in e. Cum igitur actione duarum potentiarum punctum ex O in e sit translatum, tertia residua potentia efficere debet, ut e rursus in O revertatur, quo aequilibrium obtineatur. Ducta ergo recta eO haec debet esse directio tertiae potentiae OC et tanta esse debet, ut punctum ex e in O transferre queat aequali tempore, quo potentia A ex O in d transtulit.

Quid iam circa quantitatem potentiarum et situm seu directionem observandum sit, ex figura deducamus, in qua lineae OA, OB, OC quoad situm, directionem potentiarum et quoad magnitudinem, quantitatem potentiarum repraesentent. Est bd parallela et aequalis ipsi BO. Ducatur ex B linea BD parallela lineae OA atque ex A ducatur AD parallela ipsi OB, quae modo ductum BD in D intersecet. Erit figura $BDAO$ parallelogrammum. Ergo $AO = BD$ et $AD = OB$. Sunt porro spatia Od, de, eO, per quae potentiae OA, OB, OC aequalibus temporibus punctum O transtulerunt, ut ipsae potentiae. Est ergo $Od : de = OA : OB = OA : AD$ et $Od : Oe = OA : OC$. Quia autem est $Od : de = OA : AD$ et ang $Ode =$ ang OAD, erunt ducta diagonali OD triangula Ode, OAD similia adeoque angulus $eOd = DOA$. Cadit ergo OC in diagonalem OD. Quia autem OC in recta esse debet cum Oe, iacebunt Oe et OD in directum. Atque hoc modo determinatur directio tertiae potentiae ex datis duabus constituendo parallelogrammum ducendoque diagonalem. Ob triangula similia Ode, OAD erit $Od : Oe = OA : OD$. Supra autem erat $Od : Oe = OA : OC$, unde colligitur $OC = OD$. Aequatur

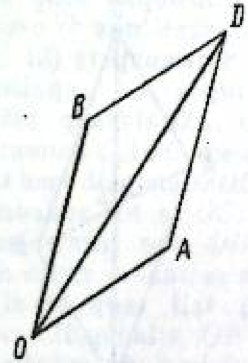


Fig. 9.

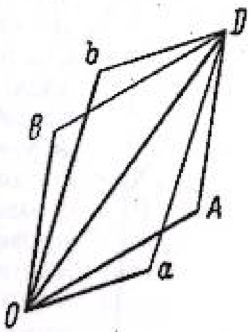


Fig. 10.

ergo OC diagonali OD. Quare, cum potentiae ponantur lineis directiones repraesentantibus proportionales, inventa est ratio et directio trium potentiarum, quae puncto applicatae aequilibrium producunt.

Lectio IV. Si potentia OC sola ageret, traheret ea punctum O versus C, agentes vero simul OA et OB actionem potentiae OC destruunt. Sed si puncto O loco duarum potentiarum OA, OB unica potentia OD applicetur, agens nempe secundum directionem OD et quantitate ei proportionalis, ea etiam actionem potentiae OC impediret aequilibriumque produceret, quia OC et OD sunt aequales et directe oppositae. Edit ergo potentia OD eundem effectum ac duae potentiae OA et OB. Datis ergo duabus potentiis eidem puncto applicatis invenietur unica potentia illis duabus aequipollens.

Sint puncto O duae potentiae OA, OB applicatae (fig. 9), hisce aequivalens erit una ea, quae secundum diagonalem OD parallelogrammi $OADB$ agit eique est proportionalis, quae nimirum se habet ad alterutram datarum OA ut OD ad OA. Cum potentia corpus, cui est applicata, moveat per lineam, quae est eius directio, potentia OD punctum O secundum OD promovebit. Quare cum duae potentiae OA, OB eundem edant effectum ac unica OD, duae illae simul agentes punctum O etiam secundum directionem OD promovebunt. Vocatur haec linea, secundum quam plures potentiae eidem corpori applicatae conantur id promovere, *media directio* seu media directio plurium potentiarum est directio potentiae unius illis omnibus aequipollens.

Vocatur inventa veritas, qua determinatur potentia duabus aliis aequipollens, *principium compositionis motus seu* rectius *compositionis potentiarum* atque id applicatur, ut plures potentiae ad pauciores reducantur ad facilitandum calculum.

Reciproce data una potentia corpori applicata ex inventis obtinebitur modus infinitis modis binas inveniendi potentias simul applicandas, quae eundem dent effectum cum unica illa data. Sit puncto O potentia OD applicata (*fig.* 10). Dico iam, si quodcunque parallelogrammum circa diagonalem OD describatur, $OADB$ vel $OaDb$ vel aliud, id quod infinitis modis fieri potest, bina latera puncto O adiacentia OA et OB vel Oa et Ob etc. semper exhibere duas potentias aequivalentes simul potentiae OD. Et hoc est *principium resolutionis motus seu* rectius *potentiarum*, cuius ope loco unius potentiae agentis duae, si id commodius fuerit, in considerationem ducuntur. Me non monente patet loco unius potentiae introduci posse quotcunque alias eundem effectum simul praestantes resolutione saepius repetita. Nempe loco potentiae OD habentur duae OA et OB, iam loco OA reperientur rursus duae itidemque loco OB et ita porro.

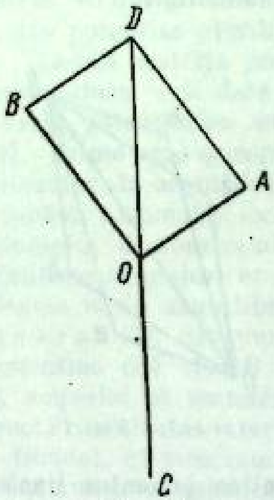


Fig. 11.

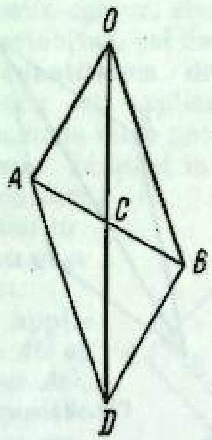


Fig. 12.

Ex demonstrata dispositione potentiarum trium puncto applicatarum, quae in aequilibrio consistunt, elicitur sequens Theorema.

Si tres potentiae OA, OB, OC puncto O applicatae aequilibrium producunt, erit quaevis potentia ut sinus anguli oppositi, nimirum erit (fig. 11) $pOA : pOB = \sin \text{ang}\, BOC : \sin \text{ang}\, AOC$ et $pOA : pOC = \sin \text{ang}\, BOC : \sin \text{ang}\, AOB$.

D e m o n s t r a t i o. Compleatur parallelogrammum $BOAD$ et ducatur diagonalis OD, erit haec OD aequalis et in directum iacens ipsi OC. Erunt ergo potentiae OA, OB, OC ut ipsae lineae OA, OB, OC (seu OD), nempe $pOA : pOB = OA : OB = OA : AD$. Sed in triangulis sunt latera ut sinus angulorum oppositorum. Est ergo in $\triangle OAD$ $OA : AD = \sin \text{ang}\, ODA : \sin \text{ang}\, AOD$. Sed $\sin \text{ang}\, ODA = \sin \text{ang}\, BOD$, quia anguli sunt aequales. Dein, cum anguli deinceps positi eundem habeant sinum, erit $\sin \text{ang}\, DOB = \sin \text{ang}\, BOC$ et $\sin \text{ang}\, AOD = \sin \text{ang}\, AOC$. Positis ergo loco $\sin \text{ang}\, ODA$ $\sin \text{ang}\, BOC$ et loco $\sin \text{ang}\, AOD$ $\sin \text{ang}\, AOC$ habebimus $OA : AD = \sin \text{ang}\, BOC : \sin \text{ang}\, AOC = OA : OB = pOA : pOB$. Dein est $pOD : pOA = OD : OA = \sin \text{ang}\, OAD : \sin \text{ang}\, ADO = \sin \text{ang}\, AOB : \sin \text{ang}\, BOC$. Sunt ergo potentiae ut sinus angulorum oppositorum. Q. E. D.

Sint puncto O duae potentiae OA, OB applicatae (fig. 12). Si iungantur puncta A, B recta AB eaque bisecta in C, ducatur OC et prolongetur in D, ut sit $CD = OC$, dico hanc OD repraesentare mediam directionem potentiarum OA et OB ut et potentiam aequipollentem.

D e m o n s t r a t i o. Ad hoc demonstrandum tantum requiritur, ut ostendatur lineam OD esse diagonalem parallelogrammi $AOBD$. Id quod facile patet, quia ambae diagonales parallelogrammi se mutuo bifariam secant. Cum adeo AB et OD se bifariam secent et ob $\triangle\triangle OCA$, DCB aequalia et similia latera AO, BD aequalia sint et parallela, erit figura $AOBD$ parallelogrammum et OD eius diagonalis. Q. E. D.

Exposito, quod requiritur ad aequilibrium trium potentiarum, et inde derivatis duarum potentiarum media directione atque potentia una illis aequipollente aggredimur casus plurium potentiarum atque circa eos mediam directionem potentiamque iis aequipollentem, nec non ad aequilibrium quid requiratur, exponemus.

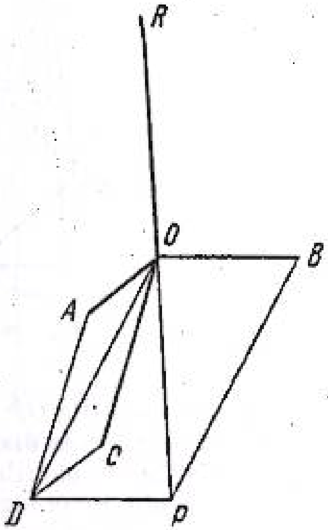


Fig. 13.

Sint puncto O applicatae tres potentiae OA, OB, OC (fig. 13) et quaeritur earum media directio potentiaque iis aequivalens. Assumam duas potentias quasvis OA, OC et compleatur parallelogrammum $OADC$ ducaturque diagonalis OD, exprimit haec diagonalis OD potentiam aequivalentem ambabus OA et OC. Loco ergo harum duarum consideretur sola OD et iam puncto O nonnisi duae erunt potentiae applicatae, nempe OD et OB, iuxta quas fiat parallelogrammum $ODPB$, cuius diagonalis OP repraesentat potentiam aequilaventem duabus OB et OD adeoque tribus OB, OC et OA. Habetur ergo media directio OP trium potentiarum OA, OB, OC, quae indicat illas tres simul agentes conari punctum O secundum directionem OP promovere, et potentia linea OP exposita eundem edet effectum ac tres OA, OB et OC.

Eodem modo, si plures tribus potentiae sint applicatae, obtinebitur media directio et potentia una omnibus aequivalens.

Iam datis tribus potentiis OA, OB, OC inveniri hinc potest quarta applicanda, quae eas in aequilibrio servat. Nam producatur linea OP versus alteram plagam in R, ut sit $OR = OP$. Dico hanc OR applicatam destructuram actiones potentiarum OA, OB, OC adeoque aequilibrium constituturam. Consistit enim ea in aequilibrio cum potentia OP, sed haec aequivalet tribus OA, OB, OC. Ergo etiam potentia OR in aequilibrio consistit cum tribus OA, OB, OC.

Simili modo, si numerus potentiarum ternario maior sit, invenietur potentia insuper applicanda aequilibrium efficiens. Investigando potentiam unicam illis omnibus aequipollentem eique aequalem directe contrarie applicando erit ea potentia ad aequilibrium requisita.

Sed extant artificia quaedam, quibus media directio et potentia omnibus aequivalens succinctius determinari potest, ex quibus unicum hoc adicere licebit, cum coetera maiorem iam in his rebus requirant notitiam, nempe de centro gravitatis.

Sint puncto O applicatae tres potentiae OA, OC, OB (fig. 14). Hoc modo facile invenietur linea media directionis et potentia iis aequivalens. Iungantur puncta A et C recta AC eaque bisecetur in M. Dein ducatur linea BM et in ea abscindatur pars MN tertia totius BM. Ducta linea ON erit ea media directio trium potentiarum et, si ea triplo augeatur seu producatur in P, ut sit OP triplo maior quam ON, exponet haec OP potentiam illis tribus aequivalentem. Ad quod demonstrandum ostendi debet hanc OP

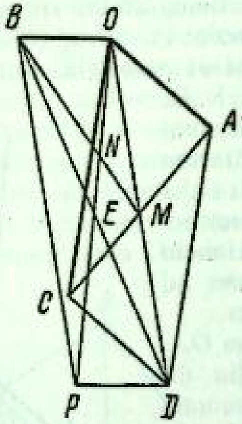


Fig. 14.

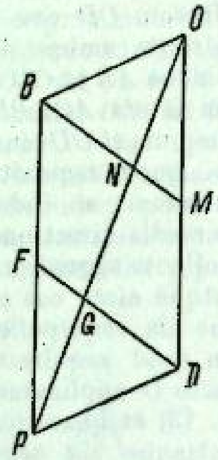


Fig. 15.

eandem esse cum illa OP in superiori figura. Compleatur parallelogrammum $OADC$, transibit eius diagonalis OD per punctum M (ex Geometria id constat). Dein facto parallelogrammo $OBPD$ demonstrari debet lineam OP superiori modo inventam ipsam esse diagonalem huius parallelogrammi seu, quod eodem redit, diagonalem OP secare lineam BM in N, ut sit MN pars tertia ipsius BM, et esse OP triplo maiorem quam ON.

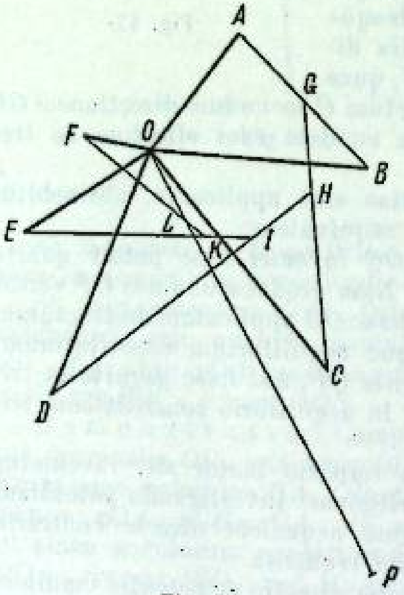


Fig. 16.

Ne multitudine linearum figura confundatur, consideremus parallelogrammum $OBPD$ seorsim (fig. 15) et bisecta OD in M ductaque BM demonstrare oportet esse MN partem tertiam ipsius BM, id quod hoc modo praesto. Ex D ducatur DF parallela ipsi BM in G secans diagonalem, erunt triangula DGP, BNO ob $OB = DP$, $GPD = BON$ et $BNO = DGP$ similia et aequalia, unde erit $DG = BN$. Est autem ob $\triangle\triangle$ OMN, ODG similia $MN : DG = OM : OD = 1 : 2$. Ergo $MN : BN = 1 : 2$ et componendo $MN : (MN + BN)(BM) = 1 : 3$. Est ergo MN pars tertia ipsius BM. Dein ob $\triangle\triangle$ similia ONM, PNB est $MN : ON = BN : PN$ seu $MN : BN = ON : PN$. Ergo componendo $MN : BM = ON : OP = 1 : 3$. Ergo OP est triplo maior quam ON. Q. E. D.

Simili modo pluribus applicatis potentiis invenitur media omnium directio, ut sint puncto O potentiae quotvis applicatae OA, OB, OC, OD, OE, OF (fig. 16). Iungantur duae OA, OB linea AB et capiatur $AG = \frac{1}{2} AB$. Erit recta OG media directio duarum potentiarum OA, OB et ea OG bis sumta exprimet potentiam ambabus OA, OB aequipollentem. Ducatur ex

G ad quamvis aliam potentiam OC recta GC capiaturque in ea $GH = \frac{1}{3} GC$. Erit, si ducatur OH, media directio trium OA, OB, OC et ea OH ter sumta hisce aequivalebit. Ulterius ab H ducatur ad D recta HD, in qua fiat $HI = \frac{1}{4} HD$. Erit OI quater replicata potentia aequivalens quatuor potentiis OA, OB, OC, OD. Porro iungatur IE et fiat $IK = \frac{1}{5} IE$. Tandem ducta KF sumatur $KL = \frac{1}{6} KF$. Si ducatur OL eaque sexies applicetur, exhibebit ea OP potentiam omnibus sex potentiis applicatis aequivalentem. Si haec potentia inventa directe contrario applicetur, haec omnes applicatas in aequilibrio servabit. Id adhuc notandum nihil interesse ordinis, qui supra in coniunctione potentiarum observetur, si puncta A et B sive quaeli-

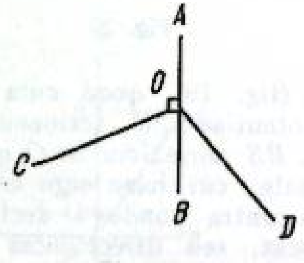


Fig. 17.

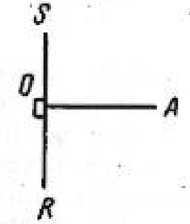


Fig. 18.

bet aliae, v. g. C et E, primo iungantur atque exinde ad quaelibet alia procedatur. Semper enim ad extremum ad eandem directionem OL pervenietur, quae secundum potentiarum numerum multiplicata semper eanden potentiam OP exhibebit.

Sed haec de potentiis puncto libero applicatis sufficiant. Pervenio iuxta ordinem institutum ad actionem potentiarum puncto non plane libero applicatarum, quod propter obstaculum alicubi positum versus plagas omnes se convertere non potest. Et de huius modi puncto quaeritur media directio, potentia pluribus aequipollens et aequilibrium.

Adiaceat parieti AB punctum O (fig. 17), quod liberum non est, quia potentias, [ut] OD, id ultra parietem trahentes sequi non potest. At potentiis, ut OC, quae id a muro amovere conantur, liberrime concedit. Quoties ergo potentiae applicatae tendunt corpus O amovere a pariete, tota disquisitio non differt ab superiori.

Si punctum O muro RS adiacens trahatur a potentia OA (fig. 18), cuius directio AO est perpendicularis ad parietem RS, liquet, quod murus corpori O transitum non praebeat, versus nullam plagam id posse promoveri. Secundum quam enim plagam id progrederetur, an secundum OS? Quare non secundum OR? Cum enim nulla sit ratio, quare potius directionem OS quam OR sequeretur, necessario corpus quiescat. Dein, ubi motus potentiae actionem sequitur, semper mobile potentiam sequitur et plagae, secundum quam trahitur, appropinquat. In utram plagam autem mobile O, sive in OR sive OS, moveretur, semper ab A removebitur, est enim linea AO, quia perpendicularis est, brevissima, quae ex A ad planum RS potest duci. Quocirca in O quiescet. Interim tamen mobile O, cum trahatur versus OA, murum transitum ipsi negantem premit idque tanta vi, quanta ad eam a potentia OA premitur. Adeoque murus RS in O pressionem potentiae OA integram sustentabit. De hoc in hac tractatione semper disquirendum erit, quantam vim obstaculum sustinere debeat.

Cum omnia corpora terrestria tendant descendere deorsum, sit O pondus aliquod, quod conetur descendere iuxta lineam verticalem OA (linea verticalis vocatur, quae directe tendit deorsum seu quae producta per centrum terrae transibit). Possumus contemplari gravitatem tanquam potentiam OA corpori O applicatam, quae id continuo deorsum pertrahere conetur. Si iam

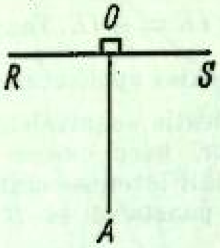


Fig. 19.

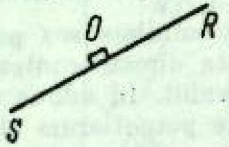


Fig. 20.

corpori O subiciatur obstaculum RS (fig. 19), quod cum AO angulos ad O rectos constituat, corpus O potentiae AO actionem sequi non potest. Consequenter ob lineam AO in RS normalem in O quiescit. Tale planum RS vocatur planum horizontale, cui haec ergo est proprietas, ut gravia ei imposita quiescant, cum e contra pondus O declivi plano RS impositum (fig. 20) neutiquam quiescat, sed directionem declinantem OS sequatur.

Cum potentia, cuius directio perpendicularis in murum [est], mobile contra eum premens mobili nullum motum imprimat, videamus, quid

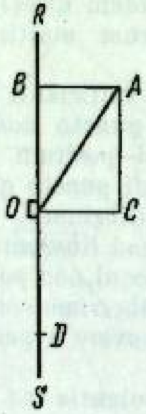


Fig. 21.

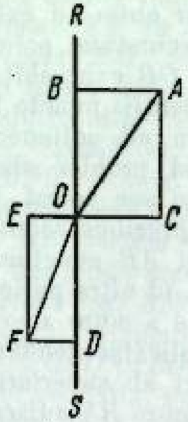


Fig. 22.

potentia obliqua OA mobili O obstaculo RS adiacenti applicata producat (fig. 21). Demittatur in RS ex A perpendicularis AB et compleatur parallelogrammum $ABOC$. Palam est potentiam OA aequivalere potentiis OB et OC. At potentia OC, quia perpendicularis in RS [est], nullum motum producet, sed efficiet, ut obstaculum RS semper a mobili O tanta vi prematur. Altera vero potentia BO nullum ab obstaculo impedimentum sentiens eodem modo corpus afficiet, ac si esset liberum.

Cum ergo sola potentia BO motum ciere possit in O, ad id in quiete conservandum tantum requiritur, ut novae cuiusdam potentiae applicatione actio huius potentiae OB destruatur, id quod fiet potentia OD illi OB aequalis et contraria. Cum autem haec nullum influxum in potentiam OC habeat,

corpus O quidem quiescet, ad nihilominus parietem vi OC premet. Cum autem non obstante hac potentia mobile O quiescat, patet, si ea diminuatur aut plane destruatur applicatione novae potentiae, tamen mobile O in quiete perstiturum. Unde patet infinitis modis statum quietis obtineri posse.

Applicetur enim insuper potentia OE (fig. 22) potentiae OC contraria, sed ea minor aut ad summum aequalis. Haec efficiet saltem, ut corpusculum O minus premat aut plane non obstaculum RS. Haec, cum quietem ipsius O non perturbet, de novo applicata una cum potentia OD actionem ipsius OA seu saltem OB destruet. At duae potentiae OE et OD simul agentes aequivalent completo parallelogrammo $OEFD$ potentia OF adeoque duae potentiae OA, OF mobili O applicatae id in quiete conservabunt. Quando potentia $OE=OC$, cum sit $OD=OB$, erit parallelogrammum $OEFD$ simile

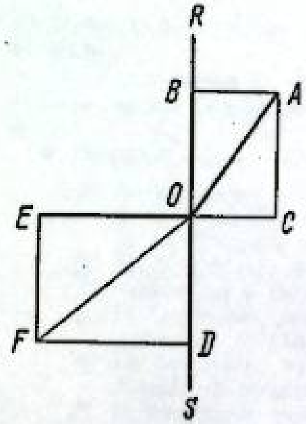


Fig. 23.

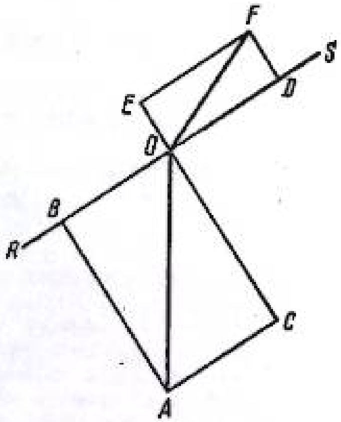


Fig. 24.

et aequale $\square ABOC$, unde $AO=OF$ et ob CE et BD lineas rectas erit AOF linea recta. Hoc ergo in casu duae potentiae OA, OF erunt aequales et directe contrariae et obstaculum, cum $OE=OC$, amplius nullam pressionem ab O sustinebit. Et hic est casus perfecti aequilibrii, qui etiam in casu libertatis ipsius O valeret, at reliqui casus tum punctum O in quiete detinerent.

Si autem potentia OE maior fieret quam OC (fig. 23), tum mobile O amplius non quiesceret. Hoc enim in casu potentia OE superaret potentiam OC adeoque punctum O versus E traheretur, quo, cum libere cedere queat, obstaculo RS saltem transitum ad C ipsi denegante etiam migraret. Quapropter non haberetur status aequibibrii seu quietis.

Sit proposita haec quaestio. Mobili O ad obstaculum RS posito applicata est potentia OA, iam mobile etiam trahitur secundum directionem OF (fig. 24). Quaeritur, quanta vi id fieri debeat, ut mobile O in quiete persistat.

S o l u t i o. Ex A demittatur perpendicularis AB et compleatur parallelogrammum $ABOC$. Cum potentiae OA aequivaleant potentiae OB, OC et OC autem nihil impediat statum quietis, saltem potentia OB destruenda est. Fiat ergo ex altera parte $OD=OB$ et ducatur perpendicularis DF datae directioni OF in F occurrens. Dico potentiam quaesitam hac OF expressam esse, nam ea aequivalet (facto parallelogrammo $ODFE$) duabus OD, OE, quarum OD ipsum OB destruit. Oportet autem, ut sit OE minor quam OC aut ad summum ipsi aequalis, id quod continget, si angulus AOF fuerit duobus rectis minor aut ad summum aequalis. Est ergo potentia applicanda OF ad applicatam OA ut lineae OF ad OA. Sed est $OF : OD = \sin D$ ad $\sin OFD$ et $OB : OA = \sin OAB : \sin OBA$. Multiplicando has rationes in se obtinebitur haec nova $(OB \cdot OF) : (OD \cdot OA) = (\sin D \cdot \sin OAB) : (\sin B \cdot \sin OFD)$. Est vero $OB = OD$ et $\sin D = \sin B$, quia anguli sunt recti. Ergo habetur $OF : OA = \sin OAB : \sin OFD = \sin AOC : \sin FOE$, ergo potentia OF ad potentiam OA ut $\sin AOC$ ad $\sin FOE$. Q. E. I.

[CONSPECTUS TRACTATUS DE MOTU CORPORUM VI CENTRALI AGITATORUM EX ADVERSARIORUM MATHEMATICORUM LIBRO PRIMO DEPROMPTUS]

[A. De motu corporum libero in quibuscunque gravitatis et medii resistentis hypothesibus.

a. De motu corporis unius seu de symtomatibus corporis unius absque relatione ad aliud.

Hic in computum venire possunt 1) vis centralis, 2) vis resistentiae, 3) linea, quam corpus describit, ubi ex datis duobus tertium semper invenire licet.

α. Methodus datis linea et vi resistentiae inveniendi vim centralem.

א. In hypothesi resistentiae nullae.
1. In distantia a centro finita.
2. In distantia a centro infinita.

ב. In hypothesi resistentiae in celeritatis ratione directe et potentiae distantiae a centro cuiusvis inverse proportionalis (1—2).

ג. In hypothesi resistentiae in quadrati celeritatis ratione directe et potentiae distantiae inverse proportionalis (1—2).

ד. In hypothesi resistentiae partim celeritati, partim eius quadrato directe et potentiae distantiae inverse proportionalis (1—2).

ה. In hypothesi resistentiae potentiae celeritatis cuiusvis directe et potentiae distantiae inverse proportionalis (1—2).

ו. In aliis resistentiae hypothesibus (1—2).

β. Methodus datis linea et vi centrali inveniendi vim resistentiae.

א. In hypothesi gravitatis uniformis (1—2).

ב. In hypothesi vis centralis distantiae a centro directe proportionalis (1—2).

ג. In hypothesi vis centralis quadrato distantiae reciproce proportionalis (1—2).

ד. In hypothesi vis centralis potentiae cuiusvis distantiae directe proportionalis (1—2).]

ה. In aliis vis centralis hypothesibus.
[1. In distantia a centro finita.
2.] Distantia existente infinita a centro.

γ. Methodus datis vi centrali et vi resistentiae inveniendi lineam, quam corpus describit, id nimirum:

א. In resistentiae hypothesi nullae seu in vacuo.
1. In distantia a centro finita.
2. In distantia a centro infinita.

ב. In resistentiae hypothesi in celeritatis ratione directe et potentiae distantiae a centro cuiusvis inverse proportionalis.
1. In distantia finita.
2. In distantia infinita.

ג. In resistentiae hypothesi in quadrati celeritatis ratione directe et potentiae distantiae cuiusvis inverse proportionalis.
1. In distantia finita.
2. In distantia infinita.

ד. In resistentiae hypothesi partim celeritati, partim eius quadrato proportionalis directe et potentiae cuiusvis distantiae a centro inverse.
1. In distantia finita.
2. In distantia infinita.

ה. In resistentiae hypothesi potentiae celeritatis cuiusvis directe et potentiae distantiae inverso [proportionalis].
1. In distantia finita.
2. In distantia infinita.
ו. In aliis resistentiae hypothesibus.

b. De motu corporum plurium seu de relatione temporum periodicorum eorum ad se invicem.

α. In hypothesi resistentiae nullae seu in vacuo.
א. In distantia a centro finita.
ב. In distantia infinita.

β. In hypothesi resistentiae celeritati proportionalis et potentiae distantiae a centro cuiusvis inversae.
א. In distantia a centro finita.
ב. In distantia infinita.

γ—ζ (א—ב). Vide ad primum α et γ [in Sectione A]; hic enim est γ, quod ibi ו, et hic א et ב, quod ibi 1 et 2.

B. De motu corporum super lineis datis incedentium in quibuscunque gravitatis et medii resistentis hypothesibus.
a. De motu corporis unius seu de symtomatibus corporis unius absque relatione ad aliud.
Huc consideranda veniunt 1) celeritas corporis, 2) vis centralis, 3) vis resistentiae et 4) linea, quam corpus describit, ubi ex datis tribus quartum semper reperire licet.

α. Methodus datis linea, vi centrali et vi resistentiae inveniendi celeritatem.
א. In hypothesi resistentiae nullae.
1. In distantia a centro existente finita.
2. In distantia infinita.
ב—ו (1—2). Ut supra.

β. Methodus datis linea, vi resistentiae et celeritate inveniendi vim centralem.
א. In hypothesi resistentiae nullae.
1. In distantia finita.
2. In distantia infinita.
ב—ו (1—2). Ut supra.

γ. Methodus datis linea, vi centrali et celeritate inveniendi vim resistentiae.
א. Vel in distantia finita.
1. In hypothesi gravitatis uniformis.
2. In hypothesi gravitatis distantiae proportionalis.
3. In hypothesi gravitatis quadrato distantiae reciproce proportionalis.
4. In hypothesi gravitatis potentiae cuiusvis distantiae proportionalis.
ב. Vel in distantia infinita.
1. In hypothesi gravitatis uniformis.
2. In aliis gravitatis hypothesibus.

δ. Methodus datis vi centrali, resistentiae et celeritate inveniendi lineam, quam corpus describere debet.
א. In hypothesi resistentiae nullae.
1. In distantia finita.
2. In distantia infinita.
ב—ו (1—2). Ut supra.

b. De motu corporum plurium seu de relatione temporum periodicorum et celeritatum eorum ad se invicem.

α. In hypothesi resistentiae nullae.
א. In distantia a centro finita.
ב. In distantia infinita.

β—ζ (א—ב). Ut supra.

Ante haec poni debet: De ascensu vel descensu rectilineo versus centrum. Hic in computum venire possunt 1) vis centralis, 2) vis resistentiae et 3) celeritas, ubi ex datis duobus tertium invenire licet.

a. Methodus datis viribus centrali et resistentiae inveniendi celeritatem.
α. Vel resistentia est nulla.
β. Vel est ut celeritas et potentia distantiae inverse.
γ. Vel ut huius quadratum et potentia distantiae inverse.
δ. Vel partim ut celeritas et ut quadratum et potentia distantiae inverse.
ε. Vel [ut] potentia celeritatis directe et potentia distantiae inverse.
ζ. In aliis medii resistentis hypothesibus.
Omnia dupliciter tractantur.

b. Methodus datis vi resistentiae et celeritate inveniendi vim centralem.
α. Vel resistentia est nulla.
β—ζ. Ut supra, quaelibet pars dupliciter.

c. Methodus datis vi centrali et celeritate inveniendi vim resistentiae.
α. Vis centralis est uniformis.
β. Vis centralis distantiae proportionalis.
γ. Vis centralis quadrato distantiae reciproce proportionalis.
δ. Vis centralis potentiae distantiae reciproce proportionalis.
ε. In aliis gravitatis hypothesibus.

[COMMENTATIO DE MOTU CORPORUM VI CENTRALI AGITATORUM EX ADVERSARIORUM MATHEMATICORUM LIBRO PRIMO DEPROMPTA

INDEX SECTIONUM

[I.] DE MOTU CORPORUM A VI QUACUNQUE CENTRALI AGITATORUM

DEFINITIONES

I. *Vis centralis est vis, quae corpora versus aliquod punctum fixum attrahit vel ab eo propellit*; si priorem edit effectum, vocatur *vis centripeta*, sin posteriorem, *vis centrifuga*.

II. *Vis mutatrix est vis, quae corporis moti celeritatem mutat*, i. e. vel adauget vel diminuit; in priore casu vocatur *vis acceleratrix*, in posteriore *retardatrix*.

NB. Haec vis solummodo celeritatem mutat determinationem motus immutatam relinquendo.

III. Si vis centralis resolvitur in suas laterales, in eam scilicet, cuius directio est tangens curvae, quam mobile describit, et in eam, cuius

directio est alteri normalis, vocatur illa *vis tangentialis*, haec autem *normalis*.

Propositio I. Si corpus describat curvam LM centro existente in C (fig. 1), erit vis centralis quantitas in L ad quantitatem vis centralis in M ut Lr ad Ms sumtis nimirum elementis Ll et Mm contemporaneis ductisque lr et ms parallelis elementis ipsis Ll et Mm contiguis.

Demonstratio. Sublata vi centripeta et ductis $l\lambda$ et $m\mu$ parallelis ipsis CL et CM describeret corpus eodem tempusculo lineolas $L\lambda$ et $M\mu$ et vis progressiva corporis in L esset ad vim progressivam in M ut $L\lambda$ ad $M\mu$. Quia autem vis centralis facit, ut describat diagonales Ll et Mm, sequitur vires istas centrales esse ut Lr et Ms. Q. E. D.

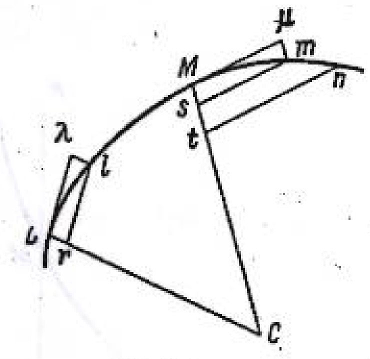


Fig. 1.

Propositio II. Assumtis elementis utcunque Ll et Mn erit vis centralis in L ad vim centralem in M ut quadratum celeritatis in L divisum per coradium in L ad quadratum celeritatis in M divisum per coradium in M.

Demonstratio. Assumto elemento Mm contemporaneo cum Ll erit vis in L ad vim in M ut Lr ad Ms. Sed $Ms : Mt = Mm^2 : Mn^2$. Ergo $Ms = \frac{Mm^2 \cdot Mt}{Mn^2}$. Sed $Mt : Mn = Mn : 2$ corad. in M. Ergo

$$Ms = \frac{Mm^2}{2 \text{ corad. in } M}.$$

Hinc vL (in posterum ita scribam loco vis centralis in L) : vM $= Lr : \frac{Mm^3}{2 \text{ corad. in } M}$. Quia autem t$Mm$ (tempus per Mm) $=$ tLl, i. e. $\frac{Mm}{cM} = \frac{Ll}{cL}$, unde $Mm = \frac{cM \cdot Ll}{cL}$ (c significat celeritatem). Unde

$$vL : vM = Lr : \frac{cM^2 \cdot Ll^2}{cL^2 \cdot 2 \text{ corad. in } M} = \frac{Lr \cdot cL^2}{Ll^2} : \frac{cM^2}{2 \text{ corad. in } M} =$$

$$= \frac{cL^2}{\text{corad. in } L} : \frac{cM^2}{\text{corad. in } M}.$$

Q. E. D.

Corollarium 1. Est ergo semper, quaenamcunque etiam fuerit vis mutatrix, vis centralis ut quadratum celeritatis applicatum ad coradium.

Corollarium 2. Si ergo corpus movetur in circulo centro virium existente in eius centro, erit vis centralis ut quadratum celeritatis.

Corollarium 3. Est ergo celeritas in subduplicata ratione virium corporis in circulo moti, generaliter autem celeritas erit in ratione subduplicata composita ex vis et coradii rationibus.

Scholium. Quod in Corollario 2 de circulo dictum est, non valet vice versa, nempe non omnis linea, quae describitur a corpore vi centrali existente ut quadratum celeritatis, est circulus. Infinitae enim sunt insuper lineae, quibus haec competit proprietas, ut coradius sit semper constans.

Si enim centrum infinite distat et corpus motum attrahitur iuxta directionum MN, erit curva AM (fig. 2) traiectoria reciproca* axes infinitos applicatis PM parallelos habens et sic construitur. Assumta $AP=\int\frac{adz}{aa+zz}$ accipiatur $PM=\int\frac{zdz}{aa+zz}$, erit quaesito satisfacta.

Fig. 2.

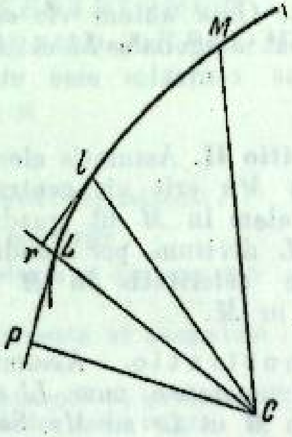


Fig. 3.

Propositio III. Corpore moto in linea LM (fig. 3) erit elementum celeritatis in L applicatum ad tempusculum, quo describitur arculus Ll, ut vis tangentialis diminuta vi retardatrice vel aucta vi acceleratrice.

Demonstratio. Elementum celeritatis applicatum ad tempusculum per Ll est ut incrementum vel decrementum celeritatis corporis perventi ad L. Idem autem incrementum vel decrementum est ut vis tangentialis aucta vel diminuta vi acceleratrice vel retardatrice respective. Ergo elementum celeritatis applicatum ad tempus per Ll est ut vis tangentialis aucta vel diminuta vi acceleratrice vel retardatrice respective. Q. E. D.

Corollarium 1. Si dicatur celeritas c, vis tangentialis T, vis acceleratrix A, quae, si fit negativa, abit in retardatricem, erit $\frac{dc}{tLl}=-T+A$. Sed $tLl=\frac{Ll}{c}$. Ergo $\frac{cdc}{Ll}=-T+A$ seu $cdc=$ $=-T\cdot Ll+A\cdot Ll$.

[Nota marginalis.] Notetur vim tangentialem semper esse negativam, si distantiae a centro crescunt, affirmativam autem, quando corpus centro appropinquat, unde ob hypothesin elementi distantiae affirmativi semper loco T $-T$ ponendum est.

Corollarium 2. Ducta lr perpendiculari in CL erit $T:v=Lr:Ll$, unde $T\cdot Ll=v\cdot Lr$. Ergo $cdc=-v\cdot Lr+A\cdot Ll$.

* Traiectoriae reciprocae vocantur curvae, quae intra datas parallelas eaedem recto et inverso situ positae et secundum parallelarum directionem hinc inde motae mutua intersectione ubique angulum eundem constituunt. Vide Euleri commentationem *Problematis traiectoriarum reciprocarum solutio* (Opera omnia, I-27). — *G. M.*

Corollarium 3. Dicto coradio z erit $cc=zv$. Ergo $cdc=\frac{zdv+vdz}{2}$. Ergo

$$\frac{zdv+vdz}{2}=-v\cdot Lr+A\cdot Ll.$$

Corollarium 4. Quia $cc=zv$, erit $v=\frac{cc}{z}$. Unde

$$cdc=\frac{-cc\cdot Lr}{z}+A\cdot Ll.$$

Corollarium 5. Ducatur CP perpendicularis in LP, tangentem in L, dicaturque $CL=y$ et $CP=p$, $lr=dx$ et $Ll=ds$. Quia $dp:dy=p:z$, erit $z=\frac{pdy}{dp}$. Ergo

$$cdc=\frac{-ccdp}{p}+Ads.$$

Corollarium 6. Quamobrem erit $pcdc+ccdp=Apds$ et $2ppcdc+$ $+2pccdp=2Appds$. Sumtis integralibus erit $ccp^2=2\int Appds$ seu $cc=\frac{2}{p^2}\int Appds$.

Corollarium 7. Quia $cc=zv$ et $z=\frac{pdy}{dp}$, erit

$$cc=\frac{vpdy}{dp}=\frac{2}{pp}\int Appds,$$

Ergo

$$v=\frac{2dp}{p^3dy}\int Appds=\frac{2}{ppz}\int Appds=\frac{2y}{p^3r}\int Appds,$$

r est radius osculi.

Scholium. In posterum igitur circa motum corporum a vi centripeta agitatorum tria in computum venire possunt: 1) linea, quam describit mobile, 2) vis centralis et 3) vis mutatrix, ex quibus semper datis duobus tertium inveniri potest. Quo itaque haec materia plenius pertractetur, semper unum horum trium pro cognito assumam et reliqua duo particulariter tractabo. Sit ergo primum data vis mutatrix, quam nunc nullam esse pono, dein eam semper pro ratione celeritatis corporis celeritatem retardare supponem, postea in eius ratione duplicata et ita porro. Eodem modo procedam assumendo vim centralem pro cognita et hac ratione nil circa hanc materiam alicuius momenti non in computum duci poterit.

[II.] DE MOTU CORPORUM VI NULLA EXISTENTE MUTATRICE

Propositio IV. Si corpus describit lineam curvam LM, erit vis centralis in quovis puncto L ut $\frac{y}{p^3r}$, i. e. reciproce ut factum ex cubo perpendicularis CP in radium osculi in L applicatum ad distantiam CL.

Demonstratio. Generaliter est $v = \frac{2y}{p^3 r}\int Appds$. Quia autem $A=0$, erit

$$\int Appds = \int 0 = \text{constanti } a.$$

Ergo $v = \frac{2ay}{p^3 r}$ seu est ut $\frac{y}{p^3 r}$. Q. E. D.

Corollarium 1. Eodem modo demonstrari posset esse ut $\frac{1}{ppz}$ seu reciproce ut solidum ex quadrato perpendicularis CP in coradium.

[Nota marginalis. Vide] Newtoni [Principia,] p. 42.*

Corollarium 2. Vel ut $\frac{dp}{p^3 dy}$.

Corollarium 3. Quia $cc = zv$ et v est ut $\frac{1}{ppz}$, erit cc ut $\frac{1}{pp}$ et c ut $\frac{1}{p}$. Est ergo semper celeritas reciproce ut perpendicularis CP ex centro in tangentem.

[Nota marginalis.] Vide Newtoni [Principia,] p. 35.

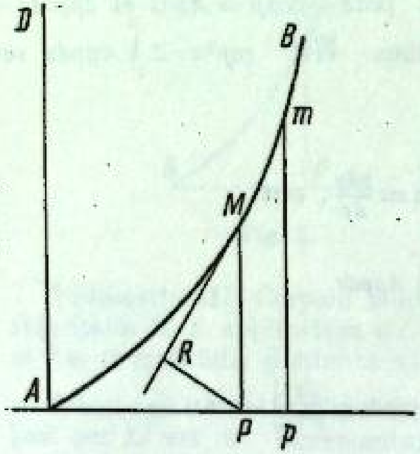


Fig. 4.

Corollarium 4. Tempus per Ll est ut $\frac{Ll}{c}$. Sed c est reciproce ut $p(CP)$. Ergo tempus per Ll est ut $Ll \cdot CP$, i. e. ut triangulum LCl. Ergo componendo tempus, intra quod arcus quivis LM describitur, est ut area LCM intercepta arcu LM et radiis CL et CM.

[Nota marginalis. Vide] Newtoni [Principia,] p. 34.

Corollarium 5. Existente centro virium infinite distante et vim suam exerente secundum applicatas PM erit tempus per quemvis arcum AM ut abscissa AP et tempus per elementum Mm ut elementum Pp abscissae AP (fig. 4).

Corollarium 6. Sumtis ergo elementis abscissae constantibus erit vis centralis ut differentio differentiale applicatae PM.

Scholium. Id, de quo nunc agitur, sponte se dividit in duas sectiones, quarum una monstrat methodum data linea, quam corpus describit, et centro invenire vim centralem, altera data vi centrali invenire traiectoriam aut lineam, quam corpus describit.

Antequam priorem partem aggrediar, praemittenda est propositio aliqua maximi momenti, cuius ope inventa vi centrali pro quavis curva data in centro unico facile determinari potest vis centripeta pro quovis alio centro, utcunque assumatur. Est autem haec.

Propositio V. Data vi centrali, qua corpus describit lineam LM circa centrum C, invenire vim centralem, qua corpus idem eandem lineam describit circa centrum c (fig. 5).

[Nota marginalis. Vide] Newtoni [Principia,] p. 43.

* Hic et in sequentibus Eulerus paginam respondentem editionis secundae *Principiorum* Newtoni (1713) indicat. — G. M.

Solutio. Vocentur vis centralis versus C V, ea versus c v et celeritas corporis in L a vi in C sollicitati C ac celeritas eiusdem in L a vi in c acti c dicanturque coradii ex L per C et c transeuntes Z et z. Erit

$$V : v = \frac{C^2}{Z} : \frac{c^2}{z} = \frac{1}{CP^2 \cdot Z} : \frac{1}{cp^2 \cdot z}.$$

Dicto radio osculi in L R erit $CP : CL = Z : R$ et $cp : cL = z : R$. Ergo $Z = \frac{R \cdot CP}{CL}$ et $z = \frac{R \cdot cp}{cL}$.

Ergo

$$V : v = \frac{CL}{CP^3 \cdot R} : \frac{cL}{cp^3 \cdot R} = \frac{CL}{CP^3} : \frac{cL}{cp^3}.$$

Ducatur CE parallela cL, erit $cp : cL = CP : CE$. Ergo $cp = \frac{cL \cdot CP}{CE}$. Consequenter

$$V : v = \frac{CL}{CP^3} : \frac{cL \cdot CE^3}{cL^3 \cdot CP^3} = \frac{CL \cdot cL^2}{CE^3}.$$

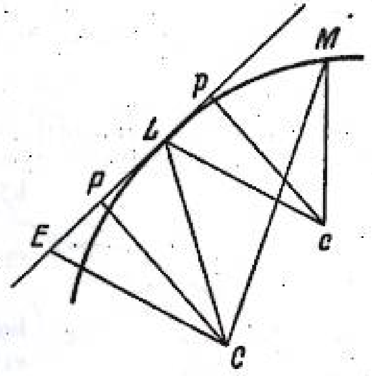


Fig. 5.

Unde dato V facile reperietur v, cum et positio puncti C et c est data. Q. E. I.

Propositio VI. Si corpus moveatur in sectione conica LM (fig. 3) vi tendente ad centrum sectionis C, determinare vim centralem.

[Nota marginalis. Vide] Newtoni [Principia,] p. 46.

Solutio. Vocatis axi maiore a, parametro b, distantia $CL = y$ et perpendiculari $CP = p$ erit ex natura sectionum conicarum

$$pp = \frac{a^3 b}{4aa + 4ab - 16yy}.$$

Unde

$$pdp = \frac{16a^3 bydy}{(4aa + 4ab - 16yy)^2}.$$

Ergo

$$\frac{pdp}{p^4 dy} = \frac{dp}{p^3 dy} = \frac{16a^3 by}{a^6 bb} = \frac{16y}{a^3 b} = \text{vi centrali.}$$

Vis ergo centralis semper est ut y, i. e. ut distantia a centro. Q. E. I.

Corollarium 1. Quia vis centralis $= \frac{16y}{a^3 b}$, erit ea affirmativa existente b affirmativo, i. e. in ellipsi erit vis centralis centripeta, in hyperbola autem mutabitur in centrifugam ob b negativum.

[Nota marginalis. Vide] Newtoni [Principia,] p. 47.

Corollarium 2. Mutata sectione conica in circulum erit vis centralis semper eadem ob $y =$ radio et celeritas corporis eadem constanter erit ob $p = y$.

Corollarium 3. Existente sectione parabola, centro infinite distante erit denuo vis centralis semper eadem.

[Nota marginalis. Vide] Newtoni [Principia,] p. 47.

Corollarium 4. Existente in sectione conica $ALBC$ centro et c foco alterutro (fig. 6) erit ducta CE parallela cL vis, qua corpus sectionem conicam describens circa centrum C revolvitur, ad vim, qua circa focum c, ut $CL \cdot cL^2$ ad CE^3. Sed vis prior est ut CL. Vocata vi posteriore V erit $CL:V = CL \cdot cL^2 : CE^3$, i. e. $1:V = cL^2:CE^3$.

Sed ex natura sectionum conicarum CE semper est semiaxis maior, i. e. constans. Adeoque V est ut $\frac{1}{cL^2}$. Ergo, si corpus sectionem conicam describit circa focum, erit vis centralis reciproce ut quadratum distantiae et haec erit centripeta existente sectione ellipsi, centrifuga autem, si hyperbola.*

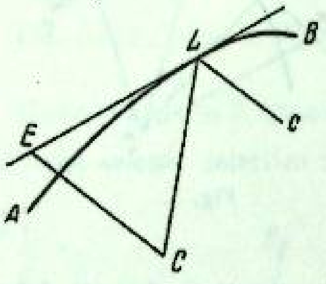


Fig. 6.

[Nota marginalis. Vide] Newtoni [Principia,] pp. 48–49.

Corollarium 5. Et vis, qua corpus parabolam describit circa focum infinite distantem, erit semper eadem.

Corollarium 6. Utcunque punctum c accipiatur, erit vocata vi tendente ad punctum c V, erit $1:V = cL^2:CE^3$. Ergo $V = \frac{CE^3}{cL^2}$.

[Nota marginalis. Vide] Newtoni [Principia,] p. 58.

Corollarium 7. Distet centrum virium infinite et vim suam exerat iuxta applicatas LQc (fig. 7). Erit vis $V = \frac{CE^3}{cL^2}$. Quia autem cL semper est infinite magna et non nisi quantitate finita augetur, pro constante accipi potest, erit adeo vis V ut CE^3. Ducatur diameter AB applicatas ipsi LQ parallelas bisecans, erit ex natura sectionum conicarum CE reciproce ut QL. Unde vis centralis V erit ut $\frac{1}{QL^3}$ seu reciproce ut QL^3.

[Nota marginalis. Vide] Newtoni [Principia,] p. 45.

Scholium. Et hac ratione etiam in aliis curvis vis centralis determinari potest. Superfluum igitur duco fore, si plura exempla subiungerem, cum aliarum curvarum nullus sit usus hac in materia, si excipias logisticam spiralem, cuius rationem vis centralis adhuc investigabo.

Propositio VII. Invenire rationem vis centripetae corporis describentis spiralem omnes radios ex centro ductos dato angulo intersecantem circa eius centrum C (fig. 8).

[Nota marginalis. Vide] Newtoni [Principia,] p. 45.

Solutio. Vocentur $CL = y$, $CP = p$. Quia ang PLC est constans, erit ratio inter y et p constans, quam dic $a:b$. Habebis ergo $ap = by$. Ergo $adp = bdy$. Unde

$$\frac{adp}{a^3p^3dy} = \frac{bdy}{b^3y^3dy} = \frac{1}{bby^3} = \text{vi centrali.}$$

Est ergo vis centripeta reciproce ut cubus distantiae CL. Q. E. I.

* Vis centralis erit centrifuga, tantummodo si corpus in hyperbola coniugata movebitur. — G. M.

Corollarium 1. Quia perpendicularis p est ut distantia y, erit celeritas corporis reciproce ut distantia a centro.

Scholium. Sufficiant haec de modo ex descripta curva vim centralem inveniendi.

Sequitur nunc, ut monstretur methodus ex data lege vis centralis curvam investigandi.

Propositio VIII. Describere curvam, quam delineat corpus a vi centrali, quae est ut quaevis potentia m distantiae $CL = y$ (fig. 3).

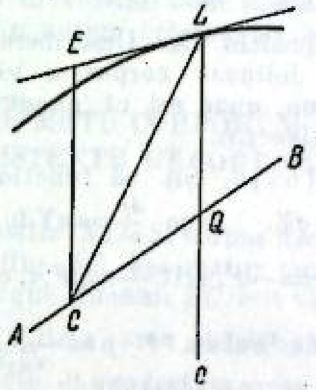


Fig. 7.

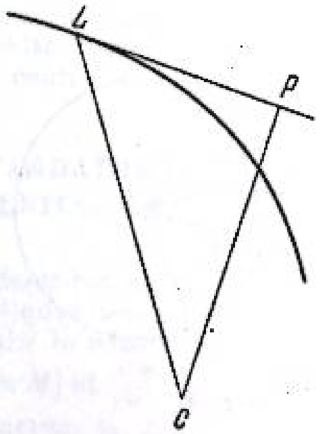


Fig. 8.

Solutio. Quia vis centralis est ut $\frac{dp}{p^3dy}$, erit $y^m = \frac{adp}{p^3dy}$. Ergo $y^m dy = \frac{adp}{p^3}$, unde $y^{m+1} = \frac{a}{pp} + b$.* Ergo $y^{m+1}pp = a + bpp$.

Quae sic construitur (fig. 9). Descripto centro C radio $AC = 1$ circulo AQ secante radium CL in Q dicatur arcus $AQ = x$. Erit $Qq = dx$. Erit ergo $CQ\,(1) : Qq\,(dx) = CL\,(y) : lr\,(ydx)$. Quia $Lr = dy$, erit $Ll = \sqrt{dy^2 + y^2dx^2}$. Est autem

$$Ll\,(\sqrt{dy^2 + y^2dx^2}) : lr\,(ydx) = CL\,(y) : CP\,(p), \quad p = \frac{yydx}{\sqrt{dy^2 + y^2dx^2}},$$

unde aequatio prior $y^{m+1}pp = a + bpp$ abit in hanc

$$\frac{y^{m+5}dx^2}{dy^2 + y^2dx^2} = a + \frac{by^4dx^2}{dy^2 + y^2dx^2}$$

seu $y^{m+5}dx^2 - by^4dx^2 - ay^2dx^2 = ady^2$. Posito loco a $-aa$ erit $-aay^2dx^2 + by^4dx^2 - y^{m+5}dx^2 = aady^2$.

Ergo

$$dx = \frac{ady}{y\sqrt{byy - y^{m+3} - aa}},$$

unde

$$x = \int \frac{ady}{y\sqrt{byy - y^{m+3} - aa}}.$$

* Hic constans a, praeut supra fuit, immutata est. — G. M.

Assumto ergo y pro lubitu poterit x determinari in y et sic determinabitur punctum L in curva quaerenda. Sic describetur curva invenienda. Q. E. I.

Corollarium 1. Potest etiam aequatio, linea [6 ab imo, p. 45], in hanc mutari

$$dx = \frac{dy}{y}\sqrt{\frac{a}{y^{m+3} - by^2 - a}}.$$

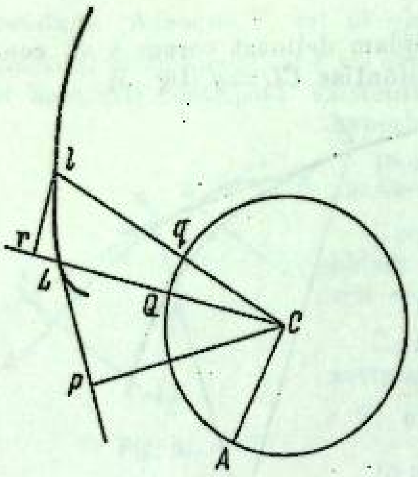


Fig. 9.

Corollarium 2. Patet ex hac aequatione $y^{m+1}p^2 = a + bp^2$, si vel $a = 0$ vel $b = \infty$, curvam esse circulum, vel etiam si $m = -1$.*

Propositio IX. Describere curvam, quam delineat corpus a vi centrali agitatum, quae est ut quaevis functio distantiae CL.

Solutio. Sit ea functio Y. Erit $\frac{dp}{p^3dy} = aY$. Ergo $\frac{dp}{p^3} = aYdy$. Vocetur $\int aYdy = -F$, erit $\frac{1}{pp} = 2F$, i. e. $1 = 2Fpp$.

Quia autem ** $p = \frac{yydx}{\sqrt{dy^2 + y^2dx^2}}$, erit $1 = 2F\frac{y^4dx^2}{dy^2 + y^2dx^2}$, unde $dy^2 = (2Fyy - 1)y^2dx^2$.

Ergo $dx = \frac{dy}{y\sqrt{2Fyy - 1}}$. Quae per quadraturas rursus ob F in y datum construi poterit. Q. E. I.

Propositio X. Data lege vis centralis centro infinite distante versus PM definire curvam, quam corpus describet (fig. 4).

Solutio. Vocata abscissa $AP = x$, applicata $PM = y$ et vis centralis, functio ipsius y, Y, quae proportionalis erit ipsi ddy, sumto dx pro constante habetur ergo $Ydx^2 = addy$. Ponatur $dx = pdy$. Quia dx constans, erit $ddx = pddy + dpdy = 0$. Ergo $ddy = \frac{-dpdy}{p}$. His valoribus pro dx et ddy substitutis habebitur

$$Yppdy^2 = \frac{-adpdy}{p},$$

i. e. $Ydy = \frac{-adp}{p^3}$. Ergo integralibus sumtis, vocato $\int Ydy = F$ erit $F = \frac{a}{pp}$.*** Quia $dx = pdy$, erit $p = \frac{dx}{dy}$, ergo $pp = \frac{dx^2}{dy^2}$. Unde $Fdx^2 = ady^2$ seu $dx = dy\sqrt{\frac{a}{F}}$. Quae poterit per quadraturas construi. Q. E. I.

Corollarium 1. $Ydx^2 = addy$ brevius adhuc reduci potest multiplicando utramque partem per dy. Erit tum $Ydydx^2 = adyddy$, integrando $Fdx^2 = ady^2$ et $dx = dy\sqrt{\frac{a}{F}}$.

* Corollarium hoc non est verum, quia si $a = 0$ seu $m = -1$, aequatio initialis mutatur. — *G. M.*

** Hic x idem est, quod in Propositione praecedente. — *G. M.*

*** Hic constans a, praeut supra fuit, immutata est. — *G. M.*

Scholium. Haec de motu curvilineo corporum a nulla vi mutatrice impeditorum sufficere possunt, cum ex hisce iam omnes quaestiones, quae circa hanc materiam formari possunt, facile dissolvi queant, constructiones ipsas trium postremorum problematum brevitatis causa omisi, facile enim per methodum construendi aequationes differentiales construuntur.

Accedo nunc ad motum corporum, ubi vis retardatrix est [ut] celeritas corporis seu dicta celeritate c, ubi A, vis mutatrix, $= -c$. Principio enim A affirmative sumtum est, scilicet pro vi acceleratrice. Hanc materiam eodem plane modo quo priorem pertractabo, nempe praemissis generalibus primo de modo inveniendi vim centralem ex orbita et centro dato, dein autem orbitam ex lege vis centralis.

[III.] DE MOTU CORPORUM VI RETARDATRICE EXISTENTE UT CORPORIS CELERITAS

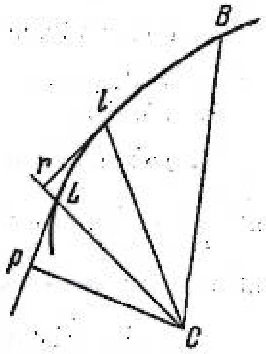


Fig. 10.

Propositio XI. Si corpus hac lege describat curvam LB (fig. 10), assumatur punctum aliquod datum B ab hocque ducatur BC, erit vis centralis in puncto quovis L (dicta area mixtilinea $BCL = M$) ut $\frac{M^2y}{p^3r}$, i. e. directe ut quadratum areae BCL ductum in distantiam a centro CL et reciproce ut cubus perpendicularis CP ductus in radium osculi.

Demonstratio. Quia est $pcdc + ccdp - Apds = 0$, erit ob $A = -c$ $pcdc + ccdp + cpds = 0$, i. e. $pdc + cdp + pds = 0$.

Ergo $pc + \int pds =$ constanti D. Est autem $cc = zv$ et $Ll(ds) : lr = LC(y) : CP(p)$, unde $pds = LC \cdot lr = 2LCl$. Unde $D - \int LC \cdot lr$ (sumto B pro puncto constante) $=$ areae $BCL = M$, ergo $pc = M$ * et

$$c = \frac{M}{p}, \quad \frac{cc}{z} = \frac{M^2}{ppz} = v.$$

Ob $p : y = z : r$ erit $z = \frac{pr}{y}$, unde $v = \frac{M^2y}{p^3r}$. Q. E. D.

Corollarium 1. Quia $dp : dy = y : r$, erit vis centralis ut $\frac{M^2dp}{p^3dy}$.

Corollarium 2. Ex demonstratione liquet celeritatem in L esse in ratione composita ex directa areae BCL et reciproca perpendiculi CP.

Corollarium 3. Tempusculum per Ll est ut $\frac{pds}{M}$, quia est ut $\frac{ds}{c}$.

* Aequatio $pc = M$ vera est, tantummodo si constante 2 in integrali praecedente omisso celeritas in B ponitur nulla. Generaliter dictis p_B et c_B valoribus perpendicularis p et celeritatis c in B debet esse $pc = p_Bc_B + 2M$. Id debent memoria tenere expositionem sequentem legentes, quia conclusiones sectionis huius partim falsae haberi possunt. — *G. M.*

Corollarium 4. Si centrum virium infinite distet et vim suam exerceat iuxta applicatas orthogonales PM, ut hoc in casu inveniatur vis centralis, vocetur $AP=x$, $PM=\mathfrak{C}$ et PR, perpendicularis in tangentem RM, $=q$ (fig. 4). Erit y constans et infinite magna. Dein M erit ut $PA=x$ et ob $y:p=\mathfrak{C}:q$ erit $p=\frac{qy}{\mathfrak{C}}$ seu ob y constantem p est ut $\frac{q}{\mathfrak{C}}$. Unde vis centralis erit ut $\frac{x^2\mathfrak{C}^3}{q^3r}$. Est autem $\mathfrak{C}:q=ds:dx$. Ergo vis est ut $\frac{x^2ds^3}{dx^3r}$.

Corollarium 5. Assumto dx pro constante erit $r=\frac{ds^3}{-dxdd\mathfrak{C}}$. Ergo vis centralis est $=-x^2dd\mathfrak{C}$, i. e. vis centralis sumto dx pro constante est ut $x^2dd\mathfrak{C}$.

Corollarium 6. Celeritas adeo, quae est ut $\frac{M}{p}$, erit ut $\frac{x}{p}$. Ob p ut $\frac{q}{\mathfrak{C}}$, ut $\frac{dx}{ds}$, erit celeritas in M ut $\frac{xds}{dx}$, i. e. sumto dx pro constante ut xds seu sumto ds pro constante ut $\frac{x}{dx}$.

Corollarium 7. Quin tempus per elementum Mm erit ut $\frac{dx}{x}$, ergo tempus per totum arcum AM erit ut logarithmus abscissae AP.

Corollarium 8. Quia vis centralis est ut $\frac{M^2y}{p^3r}$, patet vim centralem vi retardatrice existente ut celeritas esse ad vim centralem evanescente omni vi mutatrice ut $M^2:1$.

Scholium.* In investigatione ergo legis virium centralium in hac hypothesi opera haud parva evitari poterit, si quaeratur vis centralis corporis datam curvam describentis eodem modo, quo in Propositione IV ostensum est. Tum enim inventa ratio multiplicetur per M^2, erit productum ut vis centralis invenienda. Et eodem modo in hypothesi distantiae a centro infinitae ratio vis centralis per Corollarium VI Propositionis IV inventa ducatur in x^2, erit denuo productum ut vis centralis hac in hypothesi. Eodem modo celeritas reperietur, ducendo scilicet rationem celeritatis in hypothesi nullae vis mutatricis in aream M seu in hypothesi centri virium infinite distantis in x.

Opus ergo non est, ut aliquae hac de re propositiones subiungantur, sed modo corollariorum deduci poterunt.

Corollarium 9. Si corpus moveatur in sectione conica vi tendente versus centrum sectionis, erit vis ut distantia CL a centro ducta in quadratum areae BCL (fig. 10). Hinc, si corpus in B pervenerit, quiescet.

Corollarum 10. Sic, si C sit focus sectionis, erit vis ut quadratum areae BCL applicatae ad quadratum distantiae a centro CL.

Corollarium 11. Distet centrum virium infinite. Erit vis centralis existente curva AMB sectione conica ut $\square\, PA$ applicatum ad cubum applicatae PM (fig. 4).**

---

* Vide annotationem editoris praecedentem. — *G. M.*

** Ut Corollarium hoc verum sit, oportet AP diametrum sectionis conicae esse. — *G. M.*

Propositio XII. Invenire curvam BL, quam describit corpus circa centrum C vi centrali existente ut quaevis functio distantiae y, vi retardatrice existente ut celeritas corporis c (fig. 10).

Solutio. Sit functio illa Y. Erit $Y=\frac{M^2dp}{p^3dy}$. Ergo

$$M=\sqrt{\frac{p^3Ydy}{dp}}.$$

Unde [dicto $lr=dx$] $dM=-\frac{ydx}{2}=$ (sumto dp pro constante)

$$=\frac{3ppYdpdy+p^3dYdy+p^3Yddy}{2\sqrt{p^3Ydydp}}=\frac{3pYdpdy+p^2dYdy+p^2Yddy}{2\sqrt{pYdydp}}.$$

Et quia $\sqrt{yy-pp}:p=dy:dx$, ergo $dx=\frac{pdy}{\sqrt{yy-pp}}$. Ergo

$$\frac{ypdy}{\sqrt{yy-pp}}+\frac{3pYdpdy+p^2dYdy+p^2Yddy}{\sqrt{pYdydp}}=0,$$

unde

$$\frac{ydy}{\sqrt{y^2-p^2}}+\frac{3Ydpdy+pdYdy+pYddy}{\sqrt{pYdydp}}=0.$$

Quae aequatio si construatur, praebet curvam inveniendam, operosa autem eius constructio erit. Haec aequatio prodit, si dp pro constante assumitur. Assumatur nunc dy pro constante, erit

$$ydx \text{ seu } \frac{ypdy}{\sqrt{yy-pp}}+\frac{3pYdp^2+p^2dpdY-p^2Yddp}{\sqrt{\frac{pYdp^3}{dy}}}=0,$$

i. e.

$$\frac{y\sqrt{dy}}{\sqrt{y^2-p^2}}+\frac{3Ydp^2+pdpdY-pYddp}{dp\sqrt{pYdp}}=0.$$

Ex qua constructio curvae perquiri debet. Q. E. I.

Corollarium 1. Aequatio ultima ad hanc reducitur

$$\frac{ydp}{\sqrt{y^2-p^2}}+\frac{3Ydp^2+pdpdY-pYddp}{\sqrt{pYdpdy}}=0.$$

Corollarium 2. Sit $Y=M^2$. Erit $\frac{dp}{p^3dy}=$ constanti et eadem curva proveniet, ac si corpus nulla vi mutatrice existente in curva vi centrali semper eadem existente moveretur, nempe talis, in qua $ypp=a^3$, quae quoque circulo competitur, sed praeterea multis aliis.

Propositio XIII. Manente eadem lege virium mutatricium invenire curvam AM, quam corpus describit vi centrali infinite distanti iuxta PM (fig. 4).

Solutio. Vocato $AP=x$ et $PM=z$ sit vis centralis ut Z, functio ipsius z. Erit adeo $Z=x^2ddz$ sumto dx pro constante seu, ut homogeneitas servetur, $Zdx^2 = x^2 ddz$. Ergo $\frac{dx^2}{x^2} = \frac{ddz}{Z}$. Unde ex methodo construendi aequationes differentio differentiales variae effingi possunt constructiones. Q. E. I.

Corollarium 1. Sit $Z =$ constanti a. Erit $\frac{dx^2}{x^2} = \frac{ddz}{a}$. Ergo $\frac{-dx}{x} = \frac{dz}{a} - \frac{dx}{b}$. Ergo $\frac{dx}{b} - \frac{dx}{x} = \frac{dz}{a}$. Unde $\frac{x}{b} - \lg x = \frac{z}{a}$. Sit c quantitas, cuius logarithmus sit 1. Erit

$$\frac{c^{\frac{x}{b}}}{x} = c^{\frac{z}{a}} \text{ seu } c^{\frac{x}{b}} = c^{\frac{z}{a}} x \text{ seu } x = c^{\frac{ax-bz}{ab}}.$$

Corollarium 2. Sit Z ut x^2. Erit dx^2 ut ddz. Ergo $xdx = \frac{adz}{2}$ et $xx = az$, tum erit adeo curva parabola, cuius vertex A et axis AD,* unde vis centralis erit centrifuga.

[IV.] DE MOTU CORPORUM VI RETARDATRICE EXISTENTE UT QUADRATUM CELERITATIS CORPORIS

Propositio XIV. Si corpus hac conditione describat curvam BL circa centrum C, erit assumto puncto B constante et b tali quantitate, cuius logarithmus sit 1, erit vis centralis in L ut $\frac{b^{2BL}y}{p^3 r}$, i. e. vis centralis erit in ratione composita ex directa potentiae ipsius b, quam exponit duplus arcus BL, ductae in distantiam a centro et reciproca cubi perpendicularis CP ducti in radium osculi (fig. 10).

Demonstratio. Quia est $pcdc + ccdp - Apds = 0$ et $A = -cc$, erit $pcdc + ccdp + ccpds = 0$, i. e. $\frac{pdc + cdp}{cp} + ds = 0$. Ergo $\lg cp + s = a$. Ergo** $\ln cp = a - s = \operatorname{arc} BL$, unde $cp = b^{BL}$ et

$$\frac{cc}{z} = \frac{b^{2BL}}{p^2 z} = \text{vi centrali}.$$

Ergo ob $p : y = z : r$ erit vis centralis ut $\frac{b^{2BL}y}{p^3 r}$. Q. E. D.

Corollarium 1. Quia $dp : dy = y : r$, erit quoque vis centralis ut $\frac{b^{2BL}dp}{p^3 dy}$.

Corollarium 2. Ex demonstratione liquet celeritatem c esse ut $\frac{b^{BL}}{p}$.

---

* In manuscripto: *vertex E et axis EB*. Correxit *G. M.*
De motu in casibus centri virium infinite distante dicens Eulerus ubique eandem figuram amissam commemorat, sed denominationibus utitur inconsequenter, ex. gr. unum idem punctum litteris A et E signat. In editione hac denominationes omnes ad hos casus pertinentes secundum figuram 4 ab editore immutatae sunt. — *G. M.*

** Hic constans $c_B p_B$ in valore $(cp) : (c_B p_B)$ ab autore omissa est. — *G. M.*

Corollarium 3. Et tempus per Ll erit ut $\frac{p \cdot Ll}{b^{BL}}$ seu ut $\frac{\triangle LCl}{b^{BL}}$.

Corollarium 4. Si centrum virium infinite distet, erit vis centralis in M (dicta $PM = \mathfrak{C}$) ut $dd\mathfrak{C} b^{2BM}$ sumto $dx = Pp$ pro constante, nam tum $\frac{dp}{p^3 dy}$ est ut $dd\mathfrak{C}$ (fig. 4).

Corollarium 5. Celeritas erit ut $\frac{dsb^{BM}}{dx}$ et sumto dx pro constante ut $b^{BM}ds$.

Corollarium 6. Tempusculum per Mm erit ut $\frac{dx}{b^{BM}}$ et sumto dx pro constante ut $\frac{1}{b^{BM}}$.

Scholium. Pro invenienda igitur vi centrali, qua corpus curvam datam describit, opus est, ut inveniatur vis centralis, qua eam curvam describeret vi mutatrice semota, et ea tum multiplicanda est per b^{BL} in figura 10 aut in figura 4 in b^{BM}. Non opus est, ut exempla adducantur, cum facillime a quolibet solvi possint.

Accedo itaque ad inventionem orbitarum ex data lege vis centralis.

Propositio XV. Invenire curvam BL, quam describit corpus vi retardante in duplicata ratione celeritatis, vi centrali existente ut functio ipsius distantiae Y (fig. 10).

Solutio. Est ergo $Y = \frac{b^{2BL}dp}{p^3 dy}$. Ergo $\frac{Yp^3 dy}{dp} = b^{2BL}$. Unde $2BL = \lg Ydy + \lg p^3 - \lg dp$. Sumtis differentialibus, posito dp constante

$$-2ds = \frac{dYdy + Yddy}{Ydy} + \frac{3dp}{p}.$$

Quia $\sqrt{yy - pp} : y = dy : ds$, erit

$$\frac{2ydy}{\sqrt{yy - pp}} + \frac{dYdy + Yddy}{Ydy} + \frac{3dp}{p} = 0$$

seu sumto dy pro constante

$$\frac{2ydy}{\sqrt{yy - pp}} + \frac{dY}{Y} + \frac{3dp}{p} - \frac{ddp}{dp} = 0.$$

Q. E. I.

Propositio XVI. Invenire idem centro virium infinite distante.

Solutio. Vocetur $AP = x$, $PM = z$ (fig. 4) et sit vis ut functio Z ipsius z. Erit Z sumto dx pro constante $b^{2BM}ddz$ seu, ut homogeneitas impleatur, $Zdx^2 = b^{2BM}ddz$. Ergo $b^{2BM} = \frac{Zdx^2}{ddz}$. Ergo $2BM = \lg Z + \lg dx^2 - \lg ddz$. Ergo sumtis differentialibus $-2ds = \frac{dZ}{Z} - \frac{d^3z}{ddz}$. Q. E. I.

Corollarium 1. Sit Z constans. Erit $2ds = \frac{d^3z}{ddz}$.

Scholium. Haec sunt praecipua, quae hac de materia asserri possunt. Unicam adhuc sectionem apponam, quae in Physicis magnum usum praestare poterit, supponendo scilicet in ea vim retardatricem esse directe ut quadratum celeritatis et inverse ut quadratum distantiae a centro.

[V.] DE MOTU CORPORUM VI RETARDATRICE EXISTENTE UT QUADRATUM CELERITATIS APPLICATUM AD QUADRATUM DISTANTIAE A CENTRO

Propositio XVII. Corpore hac lege describente curvam LM erit vis centralis (dicta quantitate cuius logarithmus 1 b et alia data a) ut

$$\frac{b^{2a-2\int\frac{ds}{yy}}y}{p^3r}$$

dictis distantia CL a centro C y et radio osculi r et perpendiculari CP ex centro in tangentem LP p et $Ll=ds$ (fig. 3).

Demonstratio. Quia $pcdc+ccdp-Apds=0$ et $A=\frac{-cc}{yy}$, erit

$$pcdc+ccdp+\frac{ccpds}{yy}=0.$$

Diviso per ccp

$$\frac{pdc+cdp}{cp}+\frac{ds}{yy}=0.$$

Sumtis integralibus $\lg cp+\int\frac{ds}{yy}=a$. Ergo $\lg cp=a-\int\frac{ds}{yy}$. Ergo $cp=$ $=b^{a-\int\frac{ds}{yy}}$ et hinc

$$c=\frac{b^{a-\int\frac{ds}{yy}}}{p}.$$

Quare

$$\frac{cc}{z}=\frac{b^{2a-2\int\frac{ds}{yy}}}{ppz}=\frac{b^{2a-2\int\frac{ds}{yy}}y}{p^3r}=\text{vi centrali.}$$

Q. E. D.

Corollarium 1. Quia $dp:dy=y:r$, erit vis centralis quoque ut

$$\frac{b^{2a-2\int\frac{ds}{yy}}dp}{p^3dy}.$$

Corollarium 2. Et celeritas erit, ut ex demonstratione patet, ut

$$\frac{b^{a-\int\frac{ds}{yy}}}{p}.$$

Corollarium 3. Quin tempusculum per Ll erit ut

$$\frac{pds}{b^{a-\int\frac{ds}{yy}}}\quad\text{[seu ut]}\quad\frac{\triangle LCl}{b^{a-\int\frac{ds}{yy}}}.$$

Scholium. Distante hoc in casu centro virium infinite non differet tum hic casus ab eo, quem in sectione antecedenti tractavimus.

Exempla hac in hypothesi quoque ex data curva ad vim centralem perveniendi ob eandem ac in praecedenti sectione causam omitto.

Propositio XVIII. Invenire curvam, quam corpus hac conditione retardationis describit vi centrali existente ut quaevis distantiae y functio Y.

Solutio. Est ergo

$$Y=\frac{b^{2a-2\int\frac{ds}{yy}}dp}{p^3dy}.$$

Unde

$$\frac{Yp^3dy}{dp}=b^{2a-2\int\frac{ds}{yy}}.$$

Ergo

$$2a-2\int\frac{ds}{yy}=\lg Y+\lg p^3+\lg dy-\lg dp.$$

Consequenter sumtis differentialibus posito dp constante

$$\frac{-2ds}{yy}=\frac{dY}{Y}+\frac{3dp}{p}+\frac{ddy}{dy}$$

seu posito dy constante habebitur

$$\frac{-2ds}{yy}=\frac{dY}{Y}+\frac{3dp}{p}-\frac{ddp}{dp}$$

seu ob $ds=\frac{ydy}{\sqrt{yy-pp}}$

$$\frac{2dy}{y\sqrt{yy-pp}}+\frac{dY}{Y}+\frac{3dp}{p}-\frac{ddp}{dp}=0.$$

Quae aequatio ob duas tantum indeterminatas exprimit naturam curvae inveniendae. Q. E. I.

Scholium. Pauca adhuc adiungam generalia, ponendo nimirum vim retardatricem ut quaevis potentia m celeritatis corporis c.

[VI.] DE MOTU CORPORUM VI RETARDATRICE EXISTENTE UT POTENTIA CELERITATIS m

Propositio XIX. Si corpus hac retardationis lege describat curvam LM (fig. 3), erit vis centralis in L sumta a constante ut

$$\frac{y}{p^3r}\sqrt[2-m]{\left(a-\int\frac{ds}{p^{m-2}}\right)^2}.$$

Demonstratio. Quia $pcdc+ccdp-Apds=0$ et $A=-c^m$, erit $pcdc+ccdp+c^mpds=0$. Ergo $pdc+cdp+c^{m-1}pds=0$. Diviso per $c^{m-1}p^{m-1}$ erit

$$\frac{pdc + cdp}{c^{m-1}p^{m-1}} + \frac{ds}{p^{m-2}} = 0.$$

Consequenter omissis unciis, ut constantibus coefficientibus, $c^{2-m}p^{2-m} = a - \int \frac{ds}{p^{m-2}}$. Ergo

$$c^{2-m} = \frac{a - \int \frac{ds}{p^{m-2}}}{p^{2-m}}.$$

Ergo

$$c = \frac{\sqrt[2-m]{a - \int \frac{ds}{p^{m-2}}}}{p}.$$

Unde

$$\frac{cc}{z} = \frac{\sqrt[2-m]{\left(a - \int \frac{ds}{p^{m-2}}\right)^2}}{ppz} = \frac{y}{p^3 r} \sqrt[2-m]{\left(a - \int \frac{ds}{p^{m-2}}\right)^2} = \text{vi centrali.}$$

Q. E. D.

Corollarium 1. Quia $dp:dy = y:r$, erit vis centralis quoque ut

$$\frac{dp}{p^3 dy} \sqrt[2-m]{\left(a - \int \frac{ds}{p^{m-2}}\right)^2}.$$

Corollarium 2. Si centrum virium infinite distet, ut in figura 4, erit dicta $PM = z$ ob $\frac{dp}{p^3 dy}$ ut ddz (sumto Pp constante) vis centralis ut $ddz \sqrt[2-m]{\left(a - \int p^{2-m} ds\right)^2}$ et dicta $AP = x$ ob p ut $\frac{dx}{ds}$ erit vis centralis ut

$$ddz \sqrt[2-m]{\left(a - \int \frac{dx^{2-m}}{ds^{1-m}}\right)^2}.$$

Propositio XX. Invenire curvam, quam corpus assumta lege retardationis describit vi centrali data (fig. 3).

Solutio. Sit vis centralis ut Y, functio ipsius y. Erit

$$Y = \frac{dp}{p^3 dy} \sqrt[2-m]{\left(a - \int \frac{ds}{p^{m-2}}\right)^2}.$$

Ergo

$$\frac{Y p^3 dy}{dp} = \sqrt[2-m]{\left(a - \int \frac{ds}{p^{m-2}}\right)^2}.$$

Sumtis potentiis $\frac{2-m}{2}$, posito hoc brevitatis gratia $= n$, erit $2 - m = 2n$, ergo

$$\frac{Y^n p^{3n} dy^n}{dp^n} = a - \int p^{2n} ds.$$

Ergo

$$\int p^{2n} ds = a - \frac{Y^n p^{3n} dy^n}{dp^n}.$$

Sumtis differentialibus, posito dp constante erit

$$p^{2n} dp^n ds = -nY^{n-1} p^{3n} dy^n dY - 3nY^n p^{3n-1} dy^n dp - nY^n p^{3n} dy^{n-1} ddy.$$

Diviso per p^{2n} et omissa uncia n et posito loco ds $\frac{ydy}{\sqrt{yy - pp}}$ erit

$$\frac{ydp^n}{\sqrt{yy - pp}} + Y^{n-1} p^n dy^{n-1} dY + 3Y^n p^{n-1} dy^{n-1} dp + Y^n p^n dy^{n-2} ddy = 0.$$

Posito dy constante erit

$$\frac{p^{2n} dp^{2n} ds}{dy^n} = (\text{omissis unciis } n) - Y^{n-1} p^{3n} dp^n dY - 3Y^n p^{3n-1} dp^{n+1} + Y^n p^{3n} dp^{n-1} ddp,$$

diviso per $\frac{p^{2n} dp^{n-1}}{dy^{n-1}}$ et loco ds posito $\frac{ydy}{\sqrt{yy - pp}}$

$$\frac{ydp^{n+1}}{\sqrt{yy - pp}} = Y^n p^n dy^{n-1} ddp - 3Y^n p^{n-1} dp^2 dy^{n-1} - Y^{n-1} p^n dp dy^{n-1} dY.$$

Q. E. I.

Propositio XXI. Idem invenire centro virium infinite distante.

Solutio. Sit vis centralis ut Z, functio ipsius $PM = z$ (fig. 4). Erit Z ut

$$ddz \sqrt[2-m]{\left(a - \int \frac{dx^{2-m}}{ds^{1-m}}\right)^2}$$

seu, ut homogeneitas impleatur,

$$Zdx^2 = ddz \sqrt[2-m]{\left(a - \int \frac{dx^{2-m}}{ds^{1-m}}\right)^2}.$$

Sumta potentia $\frac{2-m}{2}$, quam dic n, erit

$$\frac{Z^n dx^{2n}}{ddz^n} = a - \int \frac{dx^{2n}}{ds^{2n-1}}.$$

Sumtis differentialibus et omisso coefficiente n erit

$$\frac{Z^{n-1} dx^{2n} dZ ddz^n - Z^n dx^{2n} ddz^{n-1} d^3 z}{ddz^{2n}} = -\frac{dx^{2n}}{ds^{2n-1}}.$$

Ergo

$$Z^{n-1} dZ ds^{2n-1} ddz - Z^n ds^{2n-1} d^3 z + ddz^{n+1} = 0.$$

Q. E. I.

Corollarium 1. Sit Z constans $= a$. Erit $a^n ds^{2n-1} d^3 z = ddz^{n+1}$. Posito loco $2n$ suo valore $2-m$ erit $a^{\frac{2-m}{2}} ds^{1-m} d^3 z = ddz^{\frac{4-m}{2}}$.*

Scholium. Hactenus semper vis mutatrix ut cognita assumta est. Nunc posthac ea in incognitorum numero habeatur et pro cognitis habe-

* In manuscripto: $ads^{2n-1} \ldots$ et $ads^{1-m} \ldots$ Correxit *G. M.*

antur et vis centralis et orbita curvae, ex quibus datis vim mutatricem eruemus.

Quo facto omnia hac de materia capita pertractata erunt, quemadmodum in Scholio pag. 41 haec materia divisa fuit.

[VII.] METHODUS DATIS CURVA ET VI CENTRALI INVENIENDI VIM MUTATRICEM

Propositio XXII. Si corpus describat orbitam LM (fig. 3), vi centrali vocata v et $CL=y$, $CP=p$ et coradio z erit vis mutatrix

$$A=\frac{zdv+vdz+2vdy}{2ds}$$

dicta $Ll=ds$.

D e m o n s t r a t i o. Patet ex Corollario 3 Propositionis III ponendo loco Lr et Ll valores in symbolis dy et ds.

C o r o l l a r i u m 1. Quia $z=\frac{pdy}{dp}$, ergo dz sumto dp constante $=\frac{pddy+dpdy}{dp}$. Unde

$$A=\frac{pdydv+vpddy+3vdpdy}{2dpds}.$$

C o r o l l a r i u m 2. Posito dy constante erit

$$dz=\frac{dydp^2-pdyddp}{dp^2}.$$

Ergo

$$A=\frac{pdpdydv+3vdydp^2-vpdyddp}{2dsdp^2}.$$

C o r o l l a r i u m 3. Sit vis centralis v constans. Evanescet terminus zdv et $A:v=(dz+2dy):2ds$ seu per Corollarium 1 $A:v=(pddy+$ $+3dpdy):2dpds$ seu per Corollarium 2

$$A:v=(3dydp^2-pdyddp):2dsdp^2.$$

C o r o l l a r i u m 4. Si centrum virium infinite distat (fig. 4), vocato $PM=y$ et $Mm=ds$ et coradio z erit denuo

$$A=\frac{zdv+vdz+2vdy}{2ds}.$$

C o r o l l a r i u m 5. Sit vis centralis uniformis. Erit

$$A:v=(dz+2dy):2ds.$$

C o r o l l a r i u m 6. Sit curva circulus, cuius centrum C (fig. 7). Erit coradius $z=LQ=y$ et vocato radio $CL=1$ et $CQ=x$ erit $ds=\frac{-dy}{\sqrt{1-yy}}$. Ergo

$$A:v=3dy:\frac{-2dy}{\sqrt{1-yy}}=3:\frac{-2}{\sqrt{1-yy}}=-3\sqrt{1-yy}:2.$$

Unde patet vim mutatricem esse retardatricem, quam dic R. Erit

$$R:v=3\sqrt{1-yy}:2=3CQ:2CL.\,^{*}$$

C o r o l l a r i u m 7. Patet adeo ob v et CL constantem vim retardatricem esse ut CQ.

Hoc in Corollario ratio vis retardatricis exprimitur, in praecedente autem quantitas respectu vis centralis.

C o r o l l a r i u m 8. Moveatur corpus in spirali logarithmica vi centrali existente reciproce ut quadratum distantiae. Erit $v=\frac{1}{yy}$. Ergo $dv=-\frac{2dy}{y^3}$ et $ads=dy$. Erit $p=\frac{by}{a}$ ** et $dp=\frac{bdy}{a}$. Sumto dy pro constante erit $ddp=0$. Ergo per Corollarium 2 vis mutatrix

$$A=\frac{-a}{yy}+\frac{3a}{2yy}=\frac{a}{2yy}.$$

Ergo

$$A:v=\frac{a}{2yy}:\frac{1}{yy}=a:2$$

et vis mutatrix erit semper reciproce ut quadratum distantiae.

C o r o l l a r i u m 9. Quia $z=\frac{pdy}{dp}$ et $c=\sqrt{vz}$, erit ob $z=y$ et $v=\frac{1}{yy}$ $c=\frac{1}{\sqrt{y}}$. Quia A est ut $\frac{1}{yy}$, erit vis mutatrix ut quadrato quadratum celeritatis seu est ut quadratum celeritatis et distantia coniunctim.

C o r o l l a r i u m 10. Moveatur corpus in illa curva, quam in Scholio pag. 40 descripsimus, descendatque per arcum AM (fig. 2). Erit vis mutatrix A (ob coradium constantem, quem $2a$ voco, vim enim ut ibi infinite distantem suppono) $=\frac{2adv+2vdy}{2ds}=\frac{adv+vdy}{ds}$. Sit gravitas uniformis, nempe $dv=0$. Erit $A=\frac{vdy}{ds}$, i. e.

$$A:v=dy:ds=\frac{zdz}{aa+zz}:\frac{dz}{\sqrt{aa+zz}}=z:\sqrt{aa+zz}=\frac{z}{\sqrt{aa+zz}}:1$$

significante z idem, quod ibi (pag. 40).

[VIII.] DE ASCENSU CORPORUM VEL DESCENSU RECTILINEO VERSUS CENTRUM

Propositio I. Cadat corpus ex A versus centrum C (fig. 11). Erit elementum celeritatis in M applicatum ad tempus per elementum Mm ut

---

* In formulis Corollarii huius factor 2 ab editore restitutus est. — *G. M.*

** In manuscripto: $ads=dy=bdz$. Sed, quia $p=\frac{by}{a}$, perspicuum est ex natura spiralis logarithmicae constantem $b=a\sqrt{1-a^2}$ debere esse. — *G. M.*

vis centralis aucta vel diminuta vi acceleratrice vel retardatrice seu vocatis celeritate c, $AM=x$, vi centrali v et vi mutatrice A erit $\frac{dc}{t\,Mm}=v+A$.

Demonstratio convenit cum ea, qua Propositio III Libri I demonstrata est.*

Corollarium 1. Quia $tMm=\frac{Mm}{c}=\frac{dx}{c}$, erit $\frac{cdc}{dx}=v+A$.

Ponamus (I) $A=0$, erit $cdc=vdx$.

Corollarium 2. Sit v semper eadem. Erit** $cdc=dx$, ergo $cc=x$ et $c=\sqrt{x}$. Celeritas adeo erit in subduplicata ratione spatii.

Corollarium 3. Quia tempus [per] $Mm=\frac{dx}{c}=\frac{dx}{\sqrt{x}}$, erit

Fig. 11. tempus per AM ut $\sqrt{x}$ seu tempora erunt in subduplicata ratione spatiorum descriptorum.

Corollarium 4. Unde tempora erunt ut celeritates.

Corollarium 5. Sit vis reciproce ut quadratum distantiarum. Vocata $AC=a$ erit $v=\frac{1}{(a-x)^2}$, unde $cdc=\frac{dx}{(a-x)^2}$. Ergo $cc=\frac{1}{a-x}=$ $=\frac{1}{MC}$. [Erit] ergo celeritas in subduplicata reciproca ratione distantiarum a centro.

Corollarium 6. Tempus adeo per AM erit ut $\int\sqrt{a-x}\,dx$, i. e. ut $-(a-x)^{3/2}+$ constans $a^{3/2}$. Ergo tempus per AM est ut $AC^{3/2}-MC^{3/2}$.

Ponamus (II) $A=-c$, erit $cdc+cdx=vdx$.

Corollarium 7. Sit v semper eadem. Erit $cdc+cdx=dx$, ergo $cdc=dx-cdx$. Ergo $dx=\frac{cdc}{1-c}$. Ergo $x=-c-\lg(1-c)$.

Ponamus (III) $A=-cc$, erit $cdc=vdx-ccdx$.

Corollarium 8. Sit v semper eadem. Erit $cdc=dx-ccdx$. Ergo

$$dx=\frac{cdc}{1-cc}=-\frac{1}{2}\cdot\frac{-2cdc}{1-cc},$$

unde $x=-\frac{1}{2}\lg(1-cc)$. Sit numerus, cuius logarithmus 1, $=b$. Erit

$$b^x=(1-cc)^{-1/2}=\frac{1}{\sqrt{1-cc}}.$$

Ergo $1-cc=\frac{1}{b^{2x}}$. Quare $c=\frac{\sqrt{b^{2x}-1}}{b^x}$.

* Vide p. 40. — G. M.

** Hic et in sequentibus Corollariis constantis ab autore negleguntur. — G. M.

Corollarium 9. Tempus per AM

$$=\int\frac{b^x dx}{b^{2x}-1}=-\lg(b^x-\sqrt{b^{2x}-1}).$$

Ponamus celeritatem $c=x$. Erit $xdx=vdx+Adx$ seu $x=v+A$.

Corollarium 10. Sit $A=0$. Erit vis centralis ut spatium percursum.

Corollarium 11. Et tempus per AM erit ut $\lg x$. Quae hypothesis ergo est absurda ut impossibilis. Sit enim $x=1$, erit tempus per $AM=0$. Q. E. A.

Corollarium 12. Sit v semper eadem $=b$. Erit vis mutatrix $A=x-b$ seu vis retardatrix erit ut $b-x$. Sed haec hypothesis est plane impossibilis, si ponatur $c=x$.

[IX.] DE MOTU CORPORUM SUPER SUPERFICIEBUS DATIS MOTORUM

Propositio I. Si corpus super linea AL descendit centro existente in C, erit elementum celeritatis in L applicatum ad tempus per Ll (fig. 12) ut vis tangentialis aucta vi mutatrice seu dicta velocitate c, vi tangentiali T et vi mutatrice A erit $\frac{dc}{tLl}=$ $=T+A$.

Demonstratio convenit cum demonstratione Propositionis III Libri I.*

Corollarium 1. Quia $tLl=\frac{Ll}{c}=\frac{ds}{c}$, dicto $Ll=ds$, $lr=dx$, $PL=y$, ducto arcu $[AP]$ ex A centro C et vi centrali v et $T=\frac{vdy}{ds}$, [erit] ergo $\frac{cdc}{ds}=\frac{vdy}{ds}+A$. Ergo $cdc=vdy+$ $+Ads$.

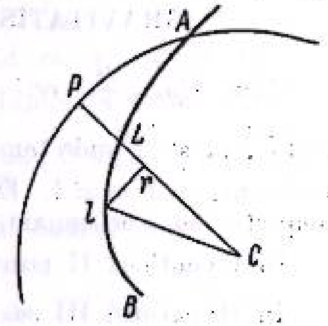


Fig. 12.

Scholium. Tria ergo hic in computum veniunt: 1) celeritas, 2) vis centralis et 3) vis mutatrix, quorum semper ex datis duobus tertium invenire licet.

Hypothesis I. Sit $A=0$ et $v=$ constanti b. Erit $cdc=bdy$.

Corollarium 1. Ergo $cc=by$, unde celeritas erit in ratione subduplicata altitudinis PL. Eandem ergo acquirit celeritatem, ac si recta per PL descendisset, et hoc semper valet existente $A=0$, utcunque sit vis centralis.

Corollarium 2. Tempusculum per Ll erit ut $\frac{ds}{\sqrt{y}}$, unde tempus

* Vide p. 40. — G. M.

per totum arcum $AL = \int \frac{ds}{\sqrt{y}}$. Data ergo aequatione ad curvam facile determinabitur tempus, quo quilibet arcus decurritur.

Corollarium 3. Ut inveniatur isochrona, sit $y = s^{2n}$. Erit tAL ut $\int \frac{ds}{s^n}$, ut s^{1-n}, ergo tempus usque ad punctum imum B ut AB^{1-n}. Quia autem hoc tempus constans est, ubicunque assumatur A, erit $n=1$ adeoque $y=s^2$, unde patet centro virium infinite distante fore curvam isochronam cycloidem.

Hypothesis II. Sit $A=0$ et $v=\frac{1}{(a-y)^2}$ (dicta $AC=a$). Erit $cdc=\frac{dy}{(a-y)^2}$, unde $cc=\frac{1}{a-y}$. Ergo $c=\frac{1}{\sqrt{a-y}}$ seu celeritas est reciproce in subduplicata ratione distantiarum a centro.

Hypothesis III. Sit $A=-cc$ et $v=$ constanti. Erit $cdc=dy-ccds$.

Hypothesis IV. Sit $A=\frac{-cc}{a-y}$ et $v=\frac{1}{(a-y)^2}$. Ergo

$$cdc=\frac{dy}{(a-y)^2}-\frac{ccds}{a-y}.$$

[X.] METHODUS INVENIENDI CURVAS ISOCHRONAS IN QUALIBET GRAVITATIS ET VIS MUTATRICIS HYPOTHESI

Quia $tLl=\frac{ds}{c}$, erit tempus per $AL=\int\frac{ds}{c}$. Sit $c=s^m$, erit $tAL=\int\frac{ds}{s^m}$, ut s^{1-m}, unde tempus per $AB=AB^{1-m}$. Hic valor, quia debet esse constans, erit $m=1$. Ergo c debet esse ut s. Hinc in Hypothesi I erit aequatio ad isochronam, ut iam inventum est, $y=s^2$.

In Hypothesi II posito loco c s [erit] $s=\frac{1}{\sqrt{a-y}}$. Ergo $ss(a-y)=1$.

In Hypothesi III $sds+ssds=dy$, unde $3ss+2s^3=by$.

Et sic in quavis hypothesi determinari poterit isochrona.

[XI.] METHODUS INVENIENDI LINEAM CELERRIMI DESCENSUS IN QUAVIS VIS CENTRALIS ET VIS MUTATRICIS HYPOTHESI

Patet ex methodo solutionis problematum de curvis maxima vel minima praerogativa gaudentibus inveniendis debere esse $c=\frac{dy}{ds}$.

Unde posito hoc valore ipsius c in Hypothesi I erit $\frac{dy^2}{ds^2}=y$. Unde centro virium distante infinite erit curva cyclois.

In Hypothesi II erit $\frac{dy}{ds}=\frac{1}{\sqrt{a-y}}$.

In Hypothesi III sumto ds pro constante erit $\frac{dyddy}{ds^2}=dy-\frac{dy^2}{ds}$. Diviso per dy et multiplicato per ds^2 erit $ddy=ds^2-dsdy$. Ergo $dy=sds-yds$. Ergo $s=-\lg(1-s+y)$.

[XII.] DE TEMPORIBUS PERIODICIS CORPORUM CIRCA CENTRUM ALIQUOD GYRANTIUM QUACUNQUE EXISTENTE VI MUTATRICE

Propositio I. Describat duo corpora circa centra C et c orbitas (fig. 13), erunt tempuscula, quibus elementa AB et ab describuntur, directe ut elementa ipsa et reciproce ut virium centripetarum et coradiorum latera quadrata seu vocatis vi centrali in A vA et vi in a va, coradio in A γA, coradio in a γa erit

$$tAB:tab=\frac{AB}{\sqrt{vA\cdot\gamma A}}:\frac{ab}{\sqrt{va\cdot\gamma a}}.$$

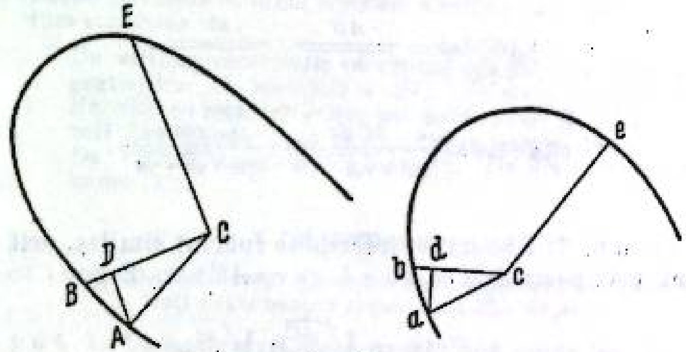


Fig. 13.

Demonstratio. Dictis celeritatibus in A et a cA et ca erit $tAB:tab=\frac{AB}{cA}:\frac{ab}{ca}$. Sed celeritates sunt in subduplicata ratione virium et coradiorum. Ergo $tAB:tab=\frac{AB}{\sqrt{vA\cdot\gamma A}}:\frac{ab}{\sqrt{va\cdot\gamma a}}$. Q. E. D.

Corollarium 1. Si vis centralis semper sit eadem, erit

$$tAB:tab=\frac{AB}{\sqrt{\gamma A}}:\frac{ab}{\sqrt{\gamma a}}.$$

Corollarium 2. Demissis ex A et a perpendiculis AD, ad et vocatis radiis osculi in A et a rA, ra erit ob $AB:AD=rA:\gamma A$ et $ab:ad=ra:\gamma a$

$$tAB:tab=\frac{AB\sqrt{AB}}{\sqrt{vA\cdot AD\cdot rA}}:\frac{ab\sqrt{ab}}{\sqrt{va\cdot ad\cdot ra}}.$$

Scholium. Ut relatio temporum per AE et ae determinetur, opus est, ut ratio temporum per AE et AB, item per ae et ab determinentur. Generaliter autem in quavis vis mutatricis hypothesi id fieri nequit. Percurrenda ergo est unaquaeque hypothesis, in qua tempora periodica determinanda proponantur.

Nos hic primarias seorsum perscrutabimur.

Hypothesis I, si vis mutatrix $A=0$.

Propositio II. Si corpora circa centra C et c arcus AE, ae descripserint, erunt tempora, quibus isti arcus describuntur, directe ut areae ACE, ace et reciproce ut facta ex perpendicularibus ex centris C, c in tangentes in A et a, in latera quadrata ex viribus centralibus in A et a et coradiis ibidem seu dictis perpendicularibus istis $\mathrm{p}A$ et $\mathrm{p}a$ erit

$$\mathrm{t}AE : \mathrm{t}ae = \frac{ACE}{\mathrm{p}A\sqrt{\mathrm{v}A\cdot\gamma A}} : \frac{ace}{\mathrm{p}a\sqrt{\mathrm{v}a\cdot\gamma a}}\,.$$

D e m o n s t r a t i o. Tempus per $AE : \mathrm{t}AB = ACE : ACB\,(AB\cdot\mathrm{p}A)$ et $\mathrm{t}ae : : \mathrm{t}ab = ace : acb\,(ab\cdot\mathrm{p}a)$. Ergo $\mathrm{t}AE = \frac{\mathrm{t}AB\cdot ACE}{AB\cdot\mathrm{p}A}$ et $\mathrm{t}ae = \frac{\mathrm{t}ab\cdot ace}{ab\cdot\mathrm{p}a}$. Ergo

$$\mathrm{t}AE : \mathrm{t}ae = \frac{\mathrm{t}AB\cdot ACE}{\mathrm{p}A\cdot AB} : \frac{\mathrm{t}ab\cdot ace}{\mathrm{p}a\cdot ab}\,.$$

Sed

$$\mathrm{t}AB : \mathrm{t}ab = \frac{AB}{\sqrt{\mathrm{v}A\cdot\gamma A}} : \frac{ab}{\sqrt{\mathrm{v}a\cdot\gamma a}}\,.$$

Ergo

$$\mathrm{t}AE : \mathrm{t}ae = \frac{ACE}{\mathrm{p}A\sqrt{\mathrm{v}A\cdot\gamma A}} : \frac{ace}{\mathrm{p}a\sqrt{\mathrm{v}a\cdot\gamma a}}\,.$$

Q. E. D.

C o r o l l a r i u m 1. Si curvae descriptae fuerint similes, erit $ACE : ace = AC^2 : ac^2$ et $\mathrm{p}A : \mathrm{p}a = AC : ac$ et $\gamma A : \gamma a = AC : ac$. Ergo

$$\mathrm{t}AE : \mathrm{t}ae = \sqrt{\frac{AC}{\mathrm{v}A}} : \sqrt{\frac{ac}{\mathrm{v}a}}\,.$$

C o r o l l a r i u m 2. Si corpora describant ellipses circa earum centra, erunt vires ut distantiae et vocentur earum axes maiores M et m, minores N et n, erunt earum areae ut MN ad mn et perpendiculares in verticibus ut $M : m$ et coradii ibidem ut $\frac{N^2}{M} : \frac{n^2}{m}$. Unde tempora periodica erunt ut

$$\frac{MN}{M\sqrt{\frac{MN^2}{M}}} : \frac{mn}{m\sqrt{\frac{mn^2}{m}}} = 1 : 1,$$

erunt ergo aequalia.

C o r o l l a r i u m 3. Describant corpora denuo ellipses circa umbilicos earum. Erunt vires reciproce ut quadrata distantiarum. Manentibus denominationibus [ut] in Corollario 2 dicantur distantiae verticum a focis F et f, erunt tempora periodica ut

$$\frac{MN}{F\sqrt{\frac{N}{MF^2}}} : \frac{mn}{f\sqrt{\frac{n^2}{mf^2}}} = M\sqrt{M} : m\sqrt{m},$$

sunt ergo tempora periodica in ratione sesquiplicata axium maiorum.

Scholium. Ex his facile colligi potest, quomodo in reliquis hypothesibus sit operandum. Non opus ergo esse censeo plura subiungere, sed hic pedem figam hac de materia verba faciens.

DE MOTU CORPORUM VI CENTRALI SOLICITATORUM

[INDEX SECTIONUM

[INTRODUCTIO PRINCIPIA OMNIUM MOTUUM A VIRIBUS CENTRIPETIS ORIUNDORUM CONTINENS]

D e f i n i t i o I

§ 1. *Vis centralis est vis, quae corpora versus aliquod punctum trahit vel ab eo propellit.* Si ea priorem edat effectum, vocatur *vis centripeta,* sin autem posteriorem, *vis centrifuga.*

C o r o l l a r i u m I

§ 2. Vis centralis corporibus uno ictu non imprimit impetum, quo verum concipiant motum versus centrum seu punctum, ad quod vis centralis tendit, sed ea uno ictu nonnisi infinitissimam corporibus imprimit impetus particulam, continuat autem et perpetim in corpora agens iis verum impetum imprimere eumque continuo agere valet.

Corollarium II

§ 3. Diviso tempore in particulas infinite parvas concipi potest vim centralem effectum suum in corpora semper nonnisi una huiusmodi particula temporis effluxa exerere atque impetum infinite exiguum iis imprimere. Hoc enim pacto idem generabitur motus, ac si indesinenter vis centralis corpora agitasset.

Corollarium III

§ 4. Si ergo vis centralis vim suam in corpus quiescens exercuerit, motu accelerato, si vis fuerit centripeta, versus centrum, sin autem centrifuga, a centro movebitur.

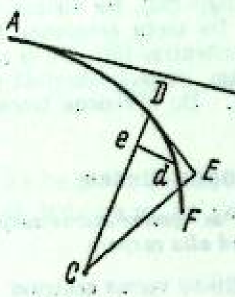


Fig. 1.

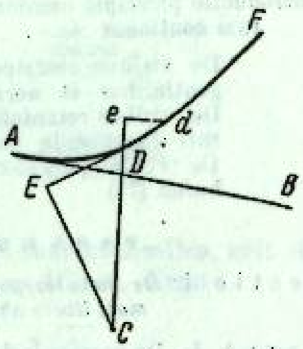


Fig. 2.

Corollarium IV

§ 5. Sit corpus in A et centrum in C imprimaturque corpori A motus versus B, vis centralis eius motum rectilineum perturbabit facietque, ut describat lineam curvam ADF, concavam quidem versus C, ut in fig. 1, si vis fuerit centripeta, convexam versus C, ut in fig. 2, si vis fuerit centrifuga.

Corollarium V

§ 6. Dematur subito vis centralis existente corpore in D, perget id in recta DE tangente curvam ADF in puncto D.

Definitio II

§ 7. Moveatur corpus in linea DF circa centrum C, versus quod corpus semper trahatur vel a quo propellatur iuxta lineam CD. Ducatur in D tangens DE et in hanc demittatur ex centro C perpendicularis CE. Cum vis centralis recta CD exponi posset, resolvi poterit in duas laterales DE et CE, illa iuxta tangentem DE agens vocatur *vis tangentialis*, altera vero secundum CE vocatur *vis normalis*.

Corollarium I.

§ 8. Corpore ergo moto in linea DF vis normalis id retrahet a recto tramite, vis tangentialis autem corporis celeritatem vel auget vel diminuit, auget quidem, si corpus a D versus F fertur, tum enim ab D versus E trahit, si autem corpus ab F ad D movetur, tum celeritatem corporis diminuit, in plagam enim retrahit corpus oppositam ei, in quam tendit. In casu priori vis tangentialis est affirmativa, in posteriori vero negativa.

Corollarium II

§ 9. Sumto curvae elemento Dd ducatur Cd centroque C radio Cd minori describatur arculus de alterum radium CD maiorem secans in e. Differet fore affirmativam, si CD maior fuerit quam Cd. Patet vim tangentialem maior fuerit quam CD, i. e. vis tangentialis est affirmativa, si distantia CD seu radius decrescit, sin vero crescit, erit ea negativa.

Corollarium III

§ 10. Existente ergo elemento distantiae De affirmativo erit vis tangentialis negativa, existente vero negativo erit affirmativa.

Corollarium IV

§ 11. Vis vero normalis semper erit affirmativa, si vis fuerit centripeta, negativa erit, si vis fuerit centrifuga.

Scholion

§ 12. In posterum vim centralem semper supponam centripetam, nisi directe contrarium indigitavero; seu, si elementum distantiae affirmativum assumtum fuerit, erit vis tangentialis negativa.

Corollarium V

§ 13. Applicemus symbola, sit distantia a centro seu radius $CD = y$, erit $De = dy$. Sit porro $Dd = ds$, $de = dx$ et vis centripeta $= v$, erit $dx = \sqrt{ds^2 - dy^2}$ et ob triangula Ded, DEC similia erit $Dd : de = ds : dx = CD : CE =$ vis centripeta v : vim normalem. Erit ergo vis normalis

$$= \frac{v\,dx}{ds} = \frac{v\sqrt{ds^2 - dy^2}}{ds}$$

et $Dd : De = ds : dy = CD : DE =$ vis centripeta v : vim tangentialem, quae, cum sit negativa, ob dy affirmativum erit $= \frac{-v\,dy}{ds}$.

Definitio III

§ 14. Si corpus ab A versus B tendens a vi centripeta cogatur lineam curvam ADF describere, dicitur corpus A lineam ADF *libere describere*; sed si corpus in A positum a vi centripeta versus C incitetur super superficie AB tanquam in canali moveri, dicitur corpus super linea AB *incedere* (fig. 3).

Corollarium I

§ 15. Si ergo corpus filo curvae AFB circumvoluto alligetur corpusque dimittatur lineamque ADE describat, eodem modo corpus movebitur, ac si super linea ADE tamquam in canali incessisset (fig. 4).

Corollarium II

§ 16. In posterum ergo loco tractationis de motu corporum pendulorum agam de motu corporum super lineis datis incedentium.

Definitio IV

§ 17. *Vis retardatrix seu vis resistentiae est vis, quae corporis moti celeritatem diminuit determinationem motus immutatam relinquendo.* Ex. gr., si corpus in aëre moveatur, celeritati eius semper aliquantum demitur, attamen determinatio motus non mutatur. Illud spatium, quod vi resistentiae est praeditum, *medium resistens* appellatur.

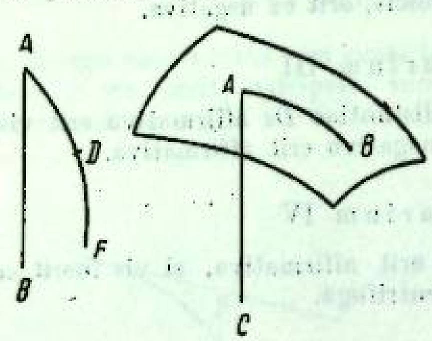


Fig. 3.

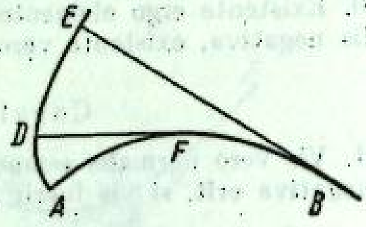


Fig. 4.

Corollarium I

§ 18. Facile ergo apparet, quid sit medium non resistens seu vacuum.

Corollarium II

§ 19. Quamvis vis resistentiae determinationem motus nihil mutet, attamen corpora in medio resistente libere alias describunt curvas quam in vacuo. Ratio facile patet, si enim de corporis celeritate aliquid detrahitur, corpus vi centrali minus resistere potest et proin curvam ab ea in vacuo discriptam differentem delineare cogitur.

Corollarium III

§ 20. Licet vis resistentiae continuo agat, nihilo minus concipi poterit, ac si vim suam nonnisi particula temporis infinite parva elapsa in corpus exerat.

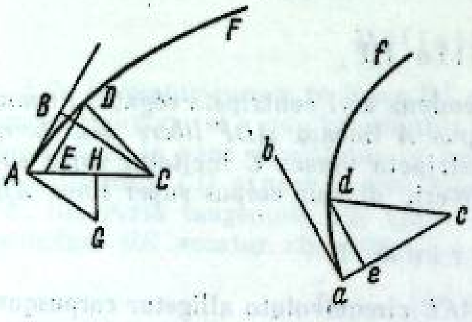


Fig. 5.

Propositio I

§ 21. Describant duo corpora circa centra virium C et c libere curvas ADF, adf in mediis utcunque resistentibus (fig. 5). Abscindantur duo harum curvarum elementa AD, ad, quae a corporibus tempusculis aequalibus percurruntur. Et ductis AC, ac ex punctis D et d ducantur in has DE et de parallelae elementis contiguis a corporibus immediate antea descriptis, quae producta erunt AB et ab. Erunt vires centrales, quibus corpora in punctis A et a versus centra C et c retrahuntur, ut sagittae AE et ae.

Demonstratio. Quia tempuscula per elementa AD, ad sunt aequalia, erunt celeritates ibi ut AD et ad. Sublata autem vi centrali moverentur haec corpora in AB et ab (§ 6). Quibus cum sint parallelae DE, de, erunt per compositionem motus vires corpora versus centra C et c trahentes, i. e. vires centrales, ut AE ad ae. Q. E. D.

Corollarium I

§ 22. Corporis ergo lineam curvam libere circa centrum virium describentis vis centralis est ut sagitta elementorum curvae synchronorum.

Propositio II

§ 23. Describentibus corporibus circa centra C et c curvis AF, af in medio utcunque resistente erunt vires centrales in A et a directe ut celeritatum in A et a quadrata et reciproce ut coradii AH, ah ibidem.

Coradius vocatur linea AH in distantia AC, quam abscindit linea GH ex centro G circuli osculatoris in A perpendicularis in distantiam AC.

Demonstratio. Assumtis elementis AD et ad synchronis ductisque ut in Propositione praecedente DE et de erunt (§ 21) vires centrales in A et a ut AE et ae. Est autem $AE:AD=AD:2AH$ et $ae:ad=$ $=ad:2ah$ ex natura circulorum curvas in A et a osculantium. Erunt ergo vires centrales in A et a ut

$$\frac{AD^2}{2AH}:\frac{ad^2}{2ah}=\frac{AD^2}{AH}:\frac{ad^2}{ah}.$$

Sed $AD:ad=$ celeritas in A ad celeritatem in a. Et consequenter vires centrales in A et a erunt ut quadrata celeritatum in A et a directe et ut coradii AH, ah inverse. Q. E. D.

Corollarium I

§ 24. Vis centralis ergo sive in una eademque curva sive in diversis libere circa centra descriptis in mediis utcunque resistentibus est ut quadratum celeritatis directe et ut coradius inverse.

Corollarium II

§ 25. Hinc quoque facile apparet, si curva convexitatem centro obvertat, vim centralem fore negativam, nempe centrifugam, ob coradium in plagam curvae ei, in qua est centrum, oppositam cadentem.

Corollarium III

§ 26. Celeritas ergo erit semper in subduplicata ratione composita ex vis centralis et coradii rationibus, in quocunque medio resistente corpus moveatur.

Corollarium IV

§ 27. Si ergo corpora moveantur in circulis centris virium existentibus in eorum centris, erunt distantiae ipsae coradii. Vires ergo centrales erunt ut quadrata celeritatum directe et ut radii circulorum reciproce in mediis utcunque resistentibus.

Corollarium V

§ 28. In uno ergo eodemque circulo erit vis centralis ut quadratum celeritatis.

Corollarium VI

§ 29. Motis corporibus in circulis, centris eorum existentibus centris virium, si fuerit vis centralis reciproce ut distantia a centro, erunt celeritates corporum aequales et inde tempora revolutionum in his circulis seu periodica erunt ut peripheriae circulorum, i. e. ut radii.

Corollarium VII

§ 30. Si autem fuerit vis centralis directe ut distantia a centro, erunt celeritates corporum in circulis diversis motorum ut radii circulorum, i. e. ut peripheriae. Ergo tempora periodica aequabuntur.

Corollarium VIII

§ 31. Si vis centralis fuerit reciproce ut quadratum distantiae, erunt celeritates corporum in subduplicata ratione radiorum reciproce. Ergo tempora periodica, quae sunt ut radii applicati ad celeritates, erunt in ratione sesquiplicata radiorum.

Corollarium IX

§ 32. Sint radii circulorum R et r sintque vires centrales ut potentiae m distantiarum, i. e. in circulis ut R^m et r^m. Erunt celeritates ut $R^{\frac{m+1}{2}}$ et $r^{\frac{m+1}{2}}$, tempora ergo periodica ut $R^{\frac{1-m}{2}}$ et $r^{\frac{1-m}{2}}$.

Corollarium X

§ 33. Quomodocunque se habuerit vis centralis, modo sit in aequalibus distantiis a centris eadem, erunt celeritates corporum in eodem circulo ubique eaedem et hinc motus uniformis. Ergo tempora periodica erunt ut radii applicati ad celeritates, i. e. celeritates erunt ut radii applicati ad tempora periodica. Et hinc vires centrales, quae sunt ut [quadrata] celeritatum directe et radii inverse, erunt ut radii directe et quadrata temporum periodicorum inverse.

In hac autem hypothesi motus uniformis* medium resistens esse nequit. Nam, quia celeritas corporis mutatur tum a vi tangentiali (§ 8) tum a medio resistente (§ 17), vis autem tangentialis hic est nulla, quia distantia est in circulum normalis, ergo, quia celeritas nunquam mutatur, oportet, ut sit medium resistens quoque nullum.

Corollarium XI

§ 34. Mittamus circulum et reversamur ad generalia. Et inveniemus triangula AGH, CBA similia. Nam ang $B = AHG$, quia sunt recti; dein AG est parallela CB, quia ambae sunt in AB normales. Erit ergo coradius AH ad radium osculi AG ut BC ad CA. Erit ergo $AH = \frac{BC \cdot AG}{CA}$. Vis ergo centralis sive in eadem sive in diversis curvis (dicta celeritate c) erit ut $\frac{cc \cdot AC}{BC \cdot AG}$.

* Nota haec ad Corollaria VI—X pertinet. — *G. M.*

Corollarium XII

§ 35. Sit $CA = y$, $CB = p$. Erit $AG = \frac{ydy}{dp}$, nam est $dp : dy = y :$ radium osculi AG. Ergo vis centralis erit ut $\frac{ccdp}{pdy}$.

Corollarium XIII

§ 36. Quia vis centralis est ad normalem [ut] $AC : CB = AG : AH$, ergo

$$\text{vis normalis} = \frac{\text{vi centrali} \cdot AH}{AG},$$

erit ergo ut $\frac{cc}{AG}$, i. e. vis normalis erit ut quadratum celeritatis directe et ut radius osculi AG inverse. Quia $AG = \frac{ydy}{dp}$, erit vis normalis ut $\frac{ccdp}{ydy}$.

Corollarium XIV

§ 37. Quia vis centralis est ad tangentialem ut $AC : AB = AG : GH$, subradium, erit

$$\text{vis tangentialis} = \frac{\text{vi centrali} \cdot GH}{AG},$$

erit ergo ut $\frac{cc \cdot GH}{AH \cdot AG}$, i. e. vis tangentialis erit ut quadratum celeritatis et subradius directe atque ut coradius et radius osculi inverse. Quia $AG = \frac{ydy}{dp}$, erit $AH = \frac{pdy}{dp}$ et

$$GH = \frac{dy\sqrt{yy - pp}}{dp}.$$

Vis ergo tangentialis erit ut

$$\frac{ccdp\sqrt{yy - pp}}{pydy}$$

seu (quia dy est affirmativum) erit per § 10 ea

$$= \frac{ccdp\sqrt{yy - pp}}{pydy}.$$

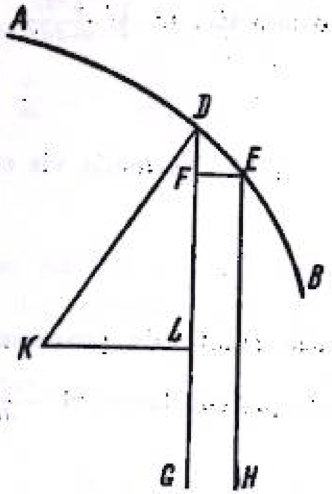


Fig. 6.

Corollarium XV

§ 38. Distet centrum virium infinite et describat corpus lineam ADB libere (fig. 6). Assumto elemento DE et ductis versus centrum parallelis DG, EH ducatur EF perpendicularis in has parallelas sitque DK radius osculi et ex K demittatur in DG perpendicularis $K[L]$. Erit DL coradius. Vis ergo centralis in D erit ut quadratum celeritatis applicatum ad DL (§ 23).

Corollarium XVI

§ 39. Dictis $DF=dy$, $EF=dx$ et $DE=\sqrt{dx^2+dy^2}=ds$ et sumto dx pro constante erit $DK=\frac{ds^3}{-dxddy}$ et ob $DE(ds):EF(dx)=DK:DL$ erit $DL=\frac{ds^2}{-ddy}$.

Sit celeritas $=c$. Erit vis centralis ut $\frac{-ccddy}{ds^2}$, si dx sumatur pro constante. Sin vero ds pro constante sumatur, erit $DK=\frac{dsdy}{ddx}$ et ob similitudinem triangulorum DFE, DLK erit $DL=\frac{dxdy}{ddx}$. Vis ergo centralis erit ut $\frac{ccddx}{dxdy}$. Nulla autem accepta constante erit

$$DK=\frac{ds^2dy}{dsddx-dxdds}$$

et

$$DL=\frac{dsdydx}{dsddx-dxdds}.$$

Et proinde vis centralis erit ut

$$\frac{ccdsddx-ccdxdds}{dsdydx}.$$

Corollarium XVII

§ 40. Si ergo vis centralis fuerit constans, erit celeritas in subduplicata ratione coradii, i. e. ut $\sqrt{\frac{dsdydx}{dsddx-dxdds}}$ seu, si dx sumatur pro constante, ut $\sqrt{\frac{dsdy}{-dds}}$, sin vero ds sumatur pro constante, ut $\sqrt{\frac{dydx}{ddx}}$.

Corollarium XVIII

§ 41. Normalis vis erit (§ 36) [ut] $\frac{cc}{DK}$, i. e. ut

$$\frac{ccdsddx-ccdxdds}{ds^2dy}$$

seu sumto dx pro constante ut $\frac{-ccdds}{ds^2dy}$ seu ut $\frac{-ccddy}{ds^3}$, sumto autem ds pro constante ut $\frac{ccddx}{dy}$.

Corollarium XIX

§ 42. Vis tangentialis est (§ 37) ut $\frac{cc\cdot KL}{DK\cdot DL}$. Quia $KL:DL=dy:dx$, erit vis tangentialis ut

$$\frac{ccdsddx-ccdxdds}{ds^2dx}$$

seu, quia dy affirmative est assumtum, ut

$$\frac{ccdxdds-ccdsddx}{ds^2dx}.$$

Sit dx constans, erit ea ut $\frac{ccdds}{ds^2}$. Sit autem ds constans, erit ea ut $\frac{-ccddx}{dx}$.

Propositio III

§ 43. Corpore moto in linea curva DF circa centrum C, sive id fiat libere sive incedendo super ea, et assumto elemento Dd erit elementum celeritatis divisum per tempusculum, quo Dd describitur, ut vis tangentialis diminuta vi resistentiae (fig. 1).

Demonstratio. Elementum celeritatis applicatum ad tempusculum per Dd est ut incrementum vel decrementum celeritatis per Dd. Idem autem incrementum vel decrementum oritur a vi tangentiali et a vi resistentiae (§§ 8, 17), nempe tangentialis celeritatem auget, si est affirmativa, i. e. si distantiae a centro decrescunt, et vis resistentiae celeritatem diminuit. Ergo incrementum vel decrementum celeritatis per Dd, hoc est elementum celeritatis divisum per tempusculum per Dd, erit ut vis tangentialis diminuta vi resistentiae. Q. E. D.

[Nota marginalis.] Vis celeritatem augens vel minuens vocatur *vis acceleratrix*, sive ea a vi centrali seu a resistentia seu ab utraque proficiscitur, nec est confundenda cum vi centrali acceleratrici, de qua iam fuse dictum est. Haec vis acceleratrix est ex effectu aestimanda, i. e. ex elemento celeritatis applicato ad tempus, in quo generatur.

Corollarium I

§ 44. Dictis celeritate c, $CD=y$, $de=dx$, vi resistentiae R et vi centrali v erit $De=dy$. Ergo vis tangentialis $=\frac{-vdy}{ds}$ (§ 13) ($ds=\sqrt{dx^2+dy^2}=Dd$). Sit porro tempusculum per $Dd=dt$. Erit $\frac{dc}{dt}=-\frac{vdy}{ds}-R$.

Corollarium II

§ 45. Quia $dt=\frac{ds}{c}$, erit $\frac{cdc}{ds}=-\frac{vdy}{ds}-R$ seu $cdc+vdy+Rds=0$. Et hoc verum est, sive corpus moveatur libere sive incedat super DF Nunc coniungamus hanc Propositionem cum Propositione II, ut inveniamus symtomata motuum libere peractorum.

Corollarium III

§ 46. Sit coradius $=z$. Erit $cc=zv$ (§ 23) et $cdc=\frac{zdv+vdz}{2}$. Ergo $zdv+vdz+2vdy+2Rds=0$. Et hinc erit

$$R=\frac{zdv+vdz+2vdy}{-2ds}.$$

Corollarium IV

§ 47. Si fuerit vis centralis constans, erit $dv=0$. Unde $vdz+2vdy+2Rds=0$ et $R=\frac{vdz+2vdy}{-2ds}$. Si praeterea resistentia fuerit nulla, erit $dz=-2dy$. Unde $z=a-2y$. Si vocetur CE (perpendiculum ex centro C in tangentem DE) p, erit $z=\frac{pdy}{dp}=a-2y$. Ergo $pdy=adp-2ydp$. Unde $pdy+2ydp=adp$ et $ppdy+2ypdp=apdp$. Integrando habebitur $2ppy=app+b$. Et hanc habebit proprietatem curva a corpore in medio non resistente in uniformi gravitatis hypothesi descripta.

Corollarium V

§ 48. Quia $cc=zv$, erit $v=\frac{cc}{z}$. Ergo $cdc+\frac{ccdy}{z}+Rds=0$, i. e. $czdc+ccdy+Rzds=0$. Sit $CE=p$. Erit $z=\frac{pdy}{dp}$. Ergo

$$\frac{cpdydc}{dp}+ccdy+\frac{Rpdyds}{dp}=0.$$

Ergo diviso per dy et multiplicato per dp habebitur $cpdc+ccdp+Rpds=0$.

Corollarium VI

§ 49. Quia $pcdc+ccdp+Rpds=0$, multiplicetur per p, erit $ppcdc+ccpdp+Rppds=0$. Ergo $ppcc+2\int Rppds=0$. Si $R=0$, erit $ppcc=\text{const.}$ Ergo celeritas erit reciproce ut perpendicularis ex centro in tangentem in medio non resistente.

Corollarium VII

§ 50. Quia $ppcc+2\int Rppds=0$, ob $cc=zv$ erit $ppzv+2\int Rppds=0$. Unde $v=\frac{2}{ppz}\int -Rppds$. Quia $z=\frac{pdy}{dp}$, erit $v=\frac{2dp}{p^3dy}\int -Rppds$ seu dicto radio osculi r ob $y:p=r:z$ erit $z=\frac{pr}{y}$ et

$$v=\frac{2y}{p^3r}\int -Rppds.$$

Si $R=0$, erit vis centralis ut $\frac{y}{p^3r}$ in medio non resistente.

Corollarium VIII

§ 51. In Corollario V inventum est $cpdc+ccdp+Rpds=0$. Quia $p:y=dx:ds$, erit $p=\frac{ydx}{ds}$ et sumto dx pro constante erit

$$dp=\frac{dydsdx-ydxdds}{ds^2}.$$

Unde

$$\frac{cydxdc}{ds}+\frac{ccdydsdx-ccydxdds}{ds^2}+Rydx=0,$$

id est

$$cydsdc+ccdyds-ccydds+Ryds^2=0.$$

Supponamus iam centrum esse infinite distans, erit $y=\infty$. Unde terminus $ccdyds$ evanescet ob reliquos infinities maiores et habebitur $cdsdc+Rds^2=ccdds$ seu $Rds^2=ccdds-cdsdc$, i. e.

$$\frac{-Rdx^2}{ds}=\frac{cds^2dc-ccddsds}{ds^4}dx^2.$$

Ergo

$$\frac{ccdx^2}{2ds^2}=\int\frac{-Rdx^2}{ds}.$$

Consequenter ob $cc=vz$ et $z=\frac{pdy}{dp}$ erit

$$v=\frac{-2dsdds}{dydx^2}\int\frac{-Rdx^2}{ds}=\frac{2ddy}{dx^2}\int\frac{Rdx^2}{ds}$$

seu est ut $ddy\int\frac{Rdx^2}{ds}$ [et], si $R=0$, ut ddy.

Scholion

§ 52. Haec sunt principia omnium motuum a viribus centripetis oriundorum sive corporum libere curvas describentium sive super lineis datis incedentium, sive motus corporis unius sive plurium invicem relatorum, sive in vacuo sive in medio resistente. Pro istis divisionibus divido hunc tractatum primum in duas partes, quarum prior agit de motu corporum libere curvas describentium, altera autem de motu corporum super lineis datis incedentium. Dein utramque partem subdivido rursus in duas partes pro ratione motus unius corporis et motuum plurium corporum invicem relatorum.

PARS I. DE MOTU CORPORUM LIBERO

SECTIO I. *DE MOTU CORPORIS UNIUS SEU DE SYMTOMATIBUS CORPORIS MOTI LIBERE ABSQUE RESPECTU AD ALIA CORPORA*

Caput I. DE ASCENSU VEL DESCENSU RECTILINEO VERSUS CENTRUM

Propositio I

§ 1. Si corpus moveatur in recta AC existente centro virium in C (fig. 7) et dicantur ut supra $CD = y$ eiusque elemento $Dd = dy$, celeritate in D c, vi centrali v et vi resistentiae ibidem R, erit $cdc + vdy + Rdy = 0$.

Fig. 7.

Demonstratio. Per § 45 Fundamentalium * est $cdc + vdy + Rds = 0$. Sed ds ibi erat elementum lineae a corpore descriptae, hic ergo, cum linea isthaec ipsa eadem sit cum distantia $CD = y$, erit $ds = dy$. Unde erit hic $cdc + vdy + Rdy = 0$. Q. E. D.

Corollarium I

§ 2. In Propositione supponitur corpus ascendere de centro, nam dy supponuntur affirmativae et consequenter distantiae $CD = y$ crescentes. Si ergo corpus descendat, loco dy ponendum est $-dy$ ** in termino vdy, non autem in termino Rdy, cum hic dy non consideretur ut elementum distantiae a centro, sed ut elementum lineae iam descriptae. Et proveniet $cdc = vdy - Rdy$ pro corporibus descendentibus.

Corollarium II

§ 3. Descendat corpus descensumque adoriatur in A voceturque $AD = x$ et $Dd = dx$. Erit ergo $cdc = vdx - Rdx$.

Corollarium III

§ 4. Tempusculum per elementum Dd est $\frac{dx}{c} = \frac{dc}{v - R}$. Unde tempus per totum spatium AD $= \int \frac{dx}{c} = \int \frac{dc}{v - R}$.

Corollarium IV

§ 5. Ascendat corpus ascensumque incipiat in puncto B dictoque $BD = x$ erit $Dd = dx$. Ergo $cdc + vdx + Rdx = 0$.

Corollarium V

§ 6. Tempusculum per elementum Dd erit $= \frac{dx}{c} = \frac{-dc}{v + R}$. Unde totum tempus per $BD = \int \frac{dx}{c} = \int \frac{-dc}{v + R}$.

* Vide p. 71. — *G. M.*
** Hic dy ponitur denuo affirmativum. — *G. M.*

Scholion I

§ 7. In posterum ergo, cum ingens sit discrimen inter corporum ascensum et descensum, de quolibet seorsum tractabitur.

Scholion II

§ 8. Tria hic in computum veniunt in aequatione pro descensu corporum seu ascensu rectilineo, celeritas scilicet, vis centralis et vis resistentiae, ubi ex datis duobus tertium reperire licet. In tres igitur partes hoc caput commode dividi poterit, quarum prima exhibebit methodum datis vi centrali et vi resistentiae inveniendi celeritatem, secunda vero datis vi resistentiae et celeritate inveniendi vim centralem et tertia denique methodum inveniendi ex datis vi centrali et celeritate vim resistentiae. Quarum partium quaelibet pro ascensu vel descensu dupliciter pertractabitur.

Subsectio I. *METHODUS DATIS VIRIBUS CUM GRAVITATIS TUM RESISTENTIAE INVENIENDI CELERITATEM CORPORIS DESCENDENTIS RECTE VERSUS CENTRUM*

Hypothesis I, ubi supponitur vis resistentiae nulla

Propositio II

§ 9. Descendat corpus ex A cum quavis celeritate in medio non resistente seu vacuo perveneritque ad D. Erit dicta $AD = x$ $cdc = vdx$.

Demonstratio. Per § 3 est $cdc = vdx - Rdx$. Sed per Hypothesin est resistentia $R = 0$. Erit ergo $cdc = vdx$. Q. E. D.

Ponamus (I) vim centralem esse uniformem, i. e. $v = a$.

Corollarium I

§ 10. Erit ergo $cdc = adx$ et facta summatione erit $cc = 2ax \pm b$, unde $c = \sqrt{2ax \pm b}$. Hinc patet, ne celeritas in initio descensus A fiat imaginaria, b fore affirmativam. Loco eius ponatur bb et erit $c = \sqrt{2ax + bb}$.

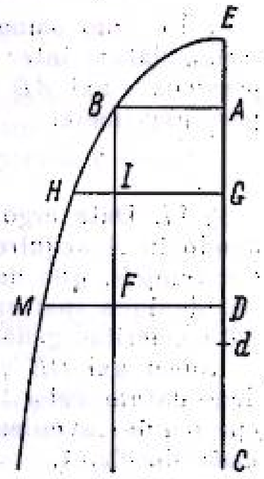


Fig. 8.

Corollarium II

§ 11. Descripta ergo super ADC tanquam axi parabola (parameter $= 2a$) EBM, applicata AB existente $= b$ (fig. 8) exponent huius curvae applicatae DM celeritates corporis in locis respondentibus D. Celeritas ergo in A erit ut $AB = b$. Idem ergo est, ac si corpus ex E cecidisset nullo inibi accepto impulsu praeter gravitatem.

Corollarium III

§ 12. Tempusculum per elementum Dd erit ut idem elementum divisum per celeritatem, cum motus per Dd uniformis considerari possit, erit ergo ut

$$\frac{dx}{c} = \frac{dx}{\sqrt{2ax + bb}}.$$

Ergo totum tempus per AD erit ut $\frac{1}{a}\sqrt{2ax+bb} \pm$ const. Ut inveniamus constantem hanc, ponatur $x=0$ et erit tempus quoque $=0$. Ergo $\frac{b}{a} \pm \text{const}=0$. Constans ergo haec erit $-\frac{b}{a}$. Unde tempus per AD erit ut $\frac{\sqrt{2ax+bb}-b}{a}$, i. e. ob a constans ut $\sqrt{2ax+bb}-b$.

Corollarium IV

§ 13. Cum sit $DM=c=\sqrt{2ax+bb}$ et $AB=b$, si ducatur BF parallela axi AD, erit $FM=\sqrt{2ax+bb}-b$. Tempus ergo, quo corpus ex A descendendo ad D pervenit, est ut FM.

Corollarium V

§ 14. Si ergo corpus ex E descenderit, erit tempus, quo perveniet ad D, ut ipsa applicata DM seu ut celeritas scilicet, cum corpus in initio descensus nullam celeritatem habuerit. Ergo et tempus et celeritas erunt in subduplicata ratione spatii, ex quo ceciderit corpus.

Corollarium VI

§ 15. Tempus ergo, quo corpus ex A cum celeritate AB descendendo ad D pervenit, erit ut celeritas in D minuta celeritate in initio descensus.

Corollarium VII

§ 16. Cum omnes parabolae sint tales, ut applicatae aequalium abscissarum datam inter se obtineant rationem, manifestum est quamcunque parabolam axi AD et vertice E descriptam celeritates corporis ut et tempora exprimere.

Corollarium VIII

§ 17. Data ergo celeritate initiali in A, ea nempe, quam ex E descendendo in A acquireret, facile celeritas quovis tempore seu spatio exacto, seu tempus, quo datum spatium describitur seu celeritas data generatur, seu denique spatium dato tempore descriptum, sive in quo percurrendo data celeritas generatur, hoc modo facile, inquam, determinabuntur.

Super axi DE vertice E, dato scilicet puncto, ex quo in A descendens datam velocitatem in A acquirit, construatur parabola EBM. Huius ope omnia invenientur per Corollaria praecedentia, ut sequentia problemata docebunt.

Problema I

§ 18. Data celeritate initiali in A, scilicet AB, quam ex EA cadendo acquireret, invenire eius celeritatem, cum pervenerit ad D, et tempus, quod consumitur ab A ad D perveniendo.

Solutio. Celeritas in D erit ad celeritatem initialem in A seu ad celeritatem in quovis alio dato loco G ut DM ad AB seu GH (§ 11). Et tempus, quo ab A ad D pervenitur, erit ad tempus, quo ad G pervenitur, ut FM ad IH (§ 13). Q. E. I.

Corollarium I

§ 19. Sit parameter parabolae $=1$, $AE=a$, $AG=b$ et $AD=x$. Erit $GH=\sqrt{a+b}$, $AB=\sqrt{a}$, $IH=\sqrt{a+b}-\sqrt{a}$, $DM=\sqrt{a+x}$ et $FM==\sqrt{a+x}-\sqrt{a}$. Erit ergo celeritas in D ad celeritatem in G ut $\sqrt{a+x}:\sqrt{a+b}$ et tempus AD : tempus $AG=(\sqrt{a+x}-\sqrt{a}):(\sqrt{a+b}-\sqrt{a})$.

Exemplum. Sit $AE=a=1$, $AG=b=\frac{7}{9}$, $AD=x=3$. Erit celeritas in D ad celeritatem in G ut $2:\frac{4}{3}$, ut $3:2$. Et tempus per AD ad tempus per AG ut $1:\frac{1}{3}$, ut $3:1$.

Corollarium II

§ 20. Sit corporis celeritas initialis nulla seu, quod eodem redit, descendat corpus ex E. Erit $a=0$ et $EG=b$ et $ED=x$. Erit ergo celeritas in D ad celeritatem in G ut $\sqrt{x}$ ad $\sqrt{b}$ et tempus per ED ad tempus per EG ut $\sqrt{x}$ ad $\sqrt{b}$, i. e. tempora erunt ut celeritates.

Exemplum. Sit $EG=1$ et $ED=4$. Erit celeritas in D ad celeritatem in G ut 2 ad 1 et in eadem ratione erunt tempora descensuum per ED et EG.

Problema II

§ 21. Datis celeritate initiali in A et celeritate, quam acquiret in D, invenire cum lineam AD tum tempus, quo haec AD cadendo percurritur.

Solutio. Assumta prolubitu altitudine AG exponet applicata in G, nempe GH, celeritatem corporis in G pervenientis (§ 11). Inveniatur applicata DM, quae se habeat ad GH ut celeritas corporis data in locum quaesitum pervenientis ad celeritatem in G. Erit punctum D locus quaesitus (§ 11) et FM erit ad IH ut tempus, quo ad D pervenit corpus, ad tempus, quo ad G pervenit (§ 13). Q. E. I.

Problema III

§ 22. Data celeritate initiali in A invenire spatium AD, quod dato tempore percurritur, ut et celeritatem acquisitam in D.

Solutio. Assumta altitudine data AG et ducta applicata GH explicabit GH celeritatem in G et IH tempus, quod perveniendo ex A ad D consumitur (§§ 11, 13). Assumatur FM, quae se habeat ad IH ut tempus datum ad tempus per AG. Erit D locus quaesitus et DM ad GH ut celeritas quaesita ad celeritatem in G (§ cit.). Q. E. I.

Corollarium I

§ 23. Sit parameter parabolae $=1$, $AE=a$, $AG=b$, $AD=x$, ratio temporum per AG et $AD=m:n$. Erit $AB=\sqrt{a}$, $GH=\sqrt{a+b}$, $IH==\sqrt{a+b}-\sqrt{a}$ et $DM=\sqrt{a+x}$ et $FM=\sqrt{a+x}-\sqrt{a}$. Erit ergo $(\sqrt{a+b}-\sqrt{a}):(\sqrt{a+x}-\sqrt{a})=m:n$.

Ergo
$$n\sqrt{a+b}-n\sqrt{a}=m\sqrt{a+x}-m\sqrt{a},$$
unde
$$\sqrt{a+x}=\frac{n\sqrt{a+b}+(m-n)\sqrt{a}}{m}.$$

Sumtis quadratis
$$a+x=\frac{2nna+nnb+mma-2mna+(2mn-2nn)\sqrt{aa+ab}}{mm},$$

Unde
$$x=\frac{2nna+nnb-2mna+(2mn-2nn)\sqrt{aa+ab}}{mm}.$$

Corollarium II

§ 24. Descendat corpus ex E. Erit $EA=a=0$ et $EG=b$ et $ED=x$. Ergo $x=\frac{nnb}{mm}$. Erit nimirum ut quadratum temporis per EG ad quadratum temporis per ED ut EG ad ED.

Problema IV

§ 25. Cadente corpore ex A in D cum ea celeritate in A, quam acquireret cadendo ex E, invenire lineam rectam, quam eodem tempore, quo ex A in D cadit, uniformi motu describere potest, ea nimirum celeritate, quam in D acquisiverat.

Solutio. Sit parameter parabolae $=2a$, $AE=c$. Erit celeritas in D $=DM=\sqrt{2a(AD+c)}$ et tempus per AD $=\frac{FM}{a}$ (§ 12). Spatium ergo, quod hoc tempore cum celeritate DM describitur, erit ut $\frac{DM\cdot FM}{a}$. Sed, quia $DM=\sqrt{2a(AD+c)}$ et $AB=\sqrt{2ac}$, erit $FM=DM-AB=$ $=\sqrt{2a+(AD+c)}-\sqrt{2ac}$. Unde spatium quaesitum, quod vocabo x, erit
$$=\frac{2a(AD+c)-2a\sqrt{c(AD+c)}}{a}=2AD+2c-2\sqrt{c\cdot AD+cc},$$
Ergo $x=2AD+2c-2\sqrt{c\cdot AD+cc}$. Q. E. I.

Corollarium I

§ 26. Quia $DE=AD+c$, erit $x=2DE-2\sqrt{c\cdot DE}$.

Corollarium II

§ 27. Descendat corpus ex E. Erit linea, quam corpus celeritate, quam in D acquisivit, tempore, quo ex E in D pervenit, percurrit $=2DE$ ob $c=0$, i. e. duplum lineae DE describeret celeritate uniformi cadendo ex ED acquisita.

Problema V

§ 28. Descendente corpore ex A definire tempora, quibus aequalia spatia AB, BC, CD etc. percurruntur, ut et celeritates in B, C, D etc. (fig. 9).

Solutio. Tempus per AB est ut BE et tempus per BC ut FH et tempus per CD ut GI (§ 13) existente nempe $AEFG$ parabola, cuius axis AB. Sit ergo $AB=a$ et parameter parabolae $=1$. Erit $AC=2a$, $AD=3a$ etc., $BE=\sqrt{a}$, $CF=\sqrt{2a}$, $DG=\sqrt{3a}$ etc. Ergo, cum hae applicatae sint ut celeritates, erunt celeritates in A, B, C et D etc. ut $\sqrt{0}$, $\sqrt{1}$, $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$ etc. Quod erat unum.

Dein, quia $BE=\sqrt{a}$, erit $HF=\sqrt{2a}-\sqrt{a}$ et $IG=\sqrt{3a}-\sqrt{2a}$ etc. Unde tempora, quibus AB, BC, CD aequales altitudines cadendo describuntur, erunt ut $\sqrt{1}:(\sqrt{2}-\sqrt{1}):(\sqrt{3}-\sqrt{2})$ etc. Quod erat alterum.

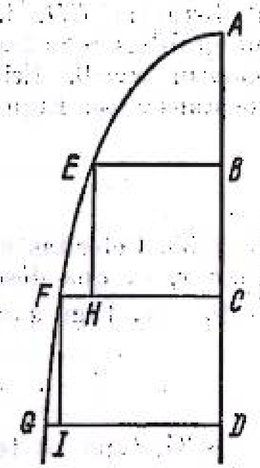


Fig. 9.

Corollarium I

§ 29. Augmenta celeritatum, cum sint in B ut BE, nempe celeritas in A est 0 et in B est ut BE, augmentum ergo celeritatis in B, i. e. celeritas in B diminuta celeritate in A, erit ut BE. Dein augmentum celeritatis in C seu celeritas in C minuta celeritate in B erit ut HF et augmentum celeritatis in D ut IG. Augmenta ergo ista celeritatum erunt ut tempora, quibus altitudines AB, BC, CD absolvuntur. Et hoc valet, utcunque portiones AB, BC, CD inaequales sint acceptae.

Problema VI

§ 30. Invenire spatia AB, BC et CD, quae corpus cadendo ex A temporibus aequalibus describit, et celeritates in B, C et D.

Solutio. Quia tempora sunt aequalia, erunt BE, FH, GI aequalia. Sit parameter parabolae $=1$, $BE=FH=GI=a$. Erunt $AB=aa$, dein $FC=2a$, unde $AC=4aa$. Ergo $BC=3aa$. Proin $DG=3a$ et $AD=9aa$. Ergo $CD=5aa$. Sunt ergo AB, BC, CD etc. ut 1, 3, 5 etc. secundum numeros impares. Q. E. unum.

Quia celeritates sunt ut applicatae parabolae (§ 11), erunt celeritates in punctis B, C, D etc. ut $BE\ (a):CF\ (2a):DG\ (3a)$ etc., i. e. ut 1, 2, 3, 4, 5 etc. iuxta progressionem numerorum naturalium. Q. E. alterum.

Scholion I

§ 31. Possent adhuc quam plurima problemata subiungi descensum corporum versus centrum concernentia, sed haec, quae apposui, sufficere possunt, cum ope parabolarum, quemadmodum iam satis monstratum est, omnia facillime possint solvi. Sit ergo satis dictum de descensu rectilineo in vacui et vis centralis uniformis hypothesi.

Accedamus igitur ad descensum gravium in vacuo itidem, sed in vis centralis pro ratione distantiarum a centro attrahentis hypothesi.

Ponamus (II) vim centralem proportionalem distantiae a centro.

Propositio III

§ 32. Descendat in hac hypothesi corpus ex A cum quavis celeritate versus centrum C perveneritque ad D. Dictis celeritate in D c, $AD=x$, $AC=a$ et celeritate in A b erit $cc=2ax-xx+bb$ (fig. 6).

Demonstratio. Per § 9 est $cdc=vdx$. Sed per hypothesin est v ut distantia CD, i. e. ut $a-x$. Erit ergo $cdc=adx-xdx$ et sumtis integralibus $cc=2ax-xx+\text{const}$. Ut inveniamus constantem addendam, ponatur $x=0$. Erit $cc=\text{const}$. Sed tum c debet esse $=b$. Erit ergo constans $=bb$. Ergo $cc=2ax-xx+bb$. Q. E. D.

Corollarium I

§ 33. Celeritas ergo c erit $=\sqrt{2ax-xx+bb}$ et data celeritate c altitudo x, ex qua descendit, facile reperitur, quoque nempe erit $xx=2ax+$ $+bb-cc$. Ergo $x=a\pm\sqrt{aa+bb-cc}$.

Corollarium II

§ 34. Cum sit tempusculum per Dd ut $\frac{Dd}{c}$, i. e. ut $\frac{dx}{c}$, erit hoc tempusculum

$$\frac{dx}{\sqrt{2ax-xx+bb}}.$$

Totum ergo tempus per AD erit ut

$$\int\frac{dx}{\sqrt{2ax-xx+bb}}.$$

Corollarium III

§ 35. Sit celeritas corporis initialis nulla, i. e. $b=0$. Erit celeritas in D $c=\sqrt{2ax-xx}$ et $x=a\pm\sqrt{aa-cc}$.

Corollarium IV

§ 36. Et tempus per AD erit ut $\int\frac{dx}{\sqrt{2ax-xx}}$.

Corollarium V

§ 37. Cum sit celeritas in D ut $\sqrt{2ax-xx+bb}$ (§ 33), sitque celeritas b in A talis, quam acquireret corpus, si ex E in A caderet. Centro C virium radio CE describatur circulus $EBMFmbe$ (fig. 10) ductaque applicata DM erit ea $\sqrt{2ax-xx+bb}$ vocatis ut ante $AD=x$, $AC=a$, existente applicata in A $AB=b$. Erunt ergo applicatae circuli DM celeritatibus proportionales.

Corollarium VI

§ 38. Hinc ergo patet corpus, cum pervenerit ad centrum C, eodem modo in recta EC producta ultra centrum moveri a centro, quo antea ad centrum accesserat, nempe in punctis d cum D aequaliter a C distantibus corpori eadem erit celeritas ac in D; perveniet ergo usque in e et rursus ad centrum C accedet pervenietque in E, inde rursus migrabit in e et sic continuabit motum suum oscillatorium in infinitum, nisi aliunde impediatur.

Corollarium VII

§ 39. Maxima celeritas corporis erit in centro C, ubi et minimum est celeritatis incrementum, maximum vero celeritatis incrementum est in ipso motus initio, in E scilicet.

Corollarium VIII

§ 40. Ut loco celeritatis initialis in A in computum ducamus altitudinem EA, per quam cadendo corpus acquirere potest eam celeritatem, sit $AE=e$. Erit $a+e=\sqrt{aa+bb}$, unde $b=\sqrt{2ae+ee}$. Erit ergo

$$c=\sqrt{2ax-xx+2ae+ee}$$

et

$$x=a\pm\sqrt{aa+2ae+ee-cc}.$$

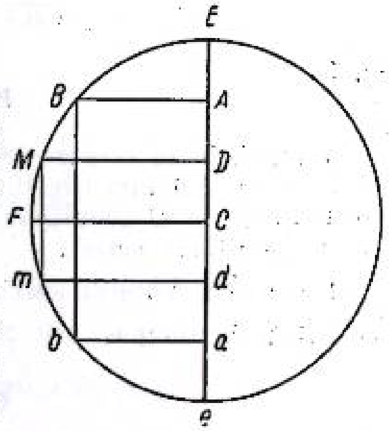


Fig. 10.

Corollarium IX

§ 41. Quo facilius exprimamus tempus, quo ex A ad quemvis locum D pervenit, inveniamus tempus per ED, unde facile tempus EA computari et dein abs tempore per ED abstrahi poterit, quo reperiatur tempus per DA.

Descendat ergo corpus ex E. Erit $CE=a$, $ED=x$ et tempus descensus per $ED=\int\frac{dx}{\sqrt{2ax-xx}}$. Sed

$$\int\frac{adx}{\sqrt{2ax-xx}}=\text{arcui } EBM.$$

Ergo tempus descensus per ED erit $=\frac{EBM}{a}$ seu ob a constantem erit ut EBM.

Corollarium X

§ 42. Descendente ergo corpore ex A cum celeritate acquisita cadendo per EA erit tempus descensus per $AD=\frac{BM}{CE}$ seu ut BM.

Problema VII

§ 43. Data ratione celeritatum in A et D invenire radium circuli CE seu punctum E, ex quo corpus descendens in punctis A et D celeritates acquirat datam rationem inter se habentes.

Solutio. Sit ratio celeritatum in D et A data $m:1$. Erit $DM = m\cdot AB$ (§ 37). Ut reperiatur AB, constat ex natura circuli esse

$$AC^2+AB^2=CD^2+DM^2=CD^2+mm\cdot AB^2.$$

Ergo

$$AB^2=\frac{AC^2-CD^2}{mm-1} \quad \text{et} \quad AB=\sqrt{\frac{AC^2-CD^2}{mm-1}}.$$

Ergo

$$CE=\sqrt{AC^2+AB^2}=\sqrt{\frac{mm\cdot AC^2-CD^2}{mm-1}}.$$

Q. E. I.

Problema VIII

§ 44. Cadente corpore ex A per altitudinem AD celeritate acquisita cadendo ex EA invenire lineam, quam corpus celeritate uniformi, ea scilicet, quam in D acquisierat, eodem tempore ac altitudinem AD descripserat, describere potest.

Solutio. Vocetur spatium quaesitum z. Cum sit spatium = facto ex celeritate in tempus, erit $z=\frac{DM\cdot BM}{CE}$. Q. E. I.

Corollarium I

§ 45. Linea ergo, quam corpus eodem tempore, quo ex E in C descendere potest, celeritate in centro C acquisita describere potest, erit = arcui EMF, quartae peripheriae parti, seu quam proxime $=\frac{22}{14}CE$.*

Ponamus (III) vim centralem reciproce proportionalem quadrato distantiarum a centro.

Propositio IV

§ 46. Descendat in hac hypothesi corpus ex A cum quavis celeritate in D versus centrum C (fig. 6). Erit dictis celeritate in $D=c$, $AD=x$, $AC=a$ et celeritate in $A=b$, erit, inquam, $(a-x)cc=abb-x(bb-aa)$.

Demonstratio. Per § 9 est $cdc=vdx$. Sed v est per hypothesin reciproce ut quadratum distantiae DC a centro C, DC autem $=a-x$. Erit ergo, quo homogeneitas observetur, $cdc=\frac{a^3dx}{2(a-x)^2}$. Facta integratione habebitur $cc=\frac{a^3}{a-x}+\text{const}$. Ut reperiatur constans ista, fiat $x=0$. Erit $cc=aa+\text{const}=bb$. Constans ergo haec est $=bb-aa$. Unde $cc=-aa+bb+\frac{a^3}{a-x}$. Ergo $(a-x)cc=abb-x(bb-aa)$. Q. E. D.

Corollarium I

§ 47. Celeritas c erit adeo $=\sqrt{\frac{abb+aax-bbx}{a-x}}$ et data celeritate c reperietur $x=\frac{acc-abb}{cc+aa-bb}$.

* In manuscripto: $\frac{22}{7}CE$. Correxit G. M.

Corollarium II

§ 48. Cum sit tempusculum per $Dd=\frac{Dd}{c}$, erit supposito loco c valore [in] paragrapho praecedente invento tempusculum per Dd

$$=\frac{dx\sqrt{a-x}}{\sqrt{abb+aax-bbx}}.$$

Totum ergo tempus per altitudinem AD erit

$$=\int\frac{dx\sqrt{a-x}}{\sqrt{abb+aax-bbx}}.$$

Corollarium III

§ 49. Sit celeritas corporis in initio A nulla. Erit $b=0$ adeoque $c=a\sqrt{\frac{x}{a-x}}$ et $x=\frac{acc}{cc+aa}$ seu $c=\frac{ax}{\sqrt{ax-xx}}$.

Corollarium IV

§ 50. Posito $b=0$ erit tempus descensus per altitudinem AD

$$=\int\frac{dx}{a}\sqrt{\frac{a-x}{x}}=\frac{1}{a}\int\frac{adx-xdx}{\sqrt{ax-xx}}=$$

$$=\frac{1}{a}\int\frac{\frac{1}{2}adx-xdx}{\sqrt{ax-xx}}+\frac{1}{a}\int\frac{\frac{1}{2}adx}{\sqrt{ax-xx}}=\frac{\sqrt{ax-xx}}{a}+\frac{1}{a}\int\frac{\frac{1}{2}adx}{\sqrt{ax-xx}}.$$

Inventio ergo temporum descensus dependet a rectificatione circuli seu a cycloide.

Corollarium V

§ 51. Descendat corpus ex E versus centrum C (fig. 11) celeritate initiali existente nulla et vocentur $EC=a$, $ED=x$ et celeritate in D

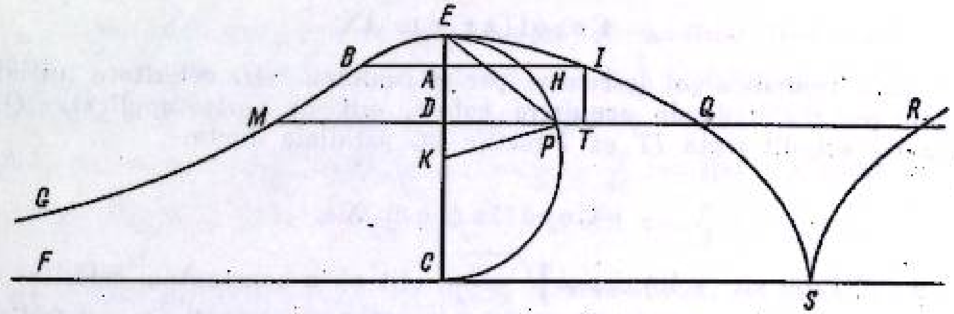


Fig. 11.

acquisita c. Cum sit $c=\frac{ax}{\sqrt{ax-xx}}$, construatur super EC curva $EBMG$ talis, ut applicata DM sit $=\frac{ax}{\sqrt{ax-xx}}$. Sic autem commode construi poterit. In altera parte super EC diametro construatur semicirculus EPC. Ductaque DP fiat $DP(\sqrt{ax-xx}):EP(\sqrt{ax})=EP(\sqrt{ax}):DM$. Erit punctum M in curva quaesita, cuius applicatae DM expriment celeritates corporis ex E cadentis et in D pervenientis.

Corollarium VI

§ 52. Huius curvae applicata CF in centro virium C erit eius assymtotus. Obvertit equidem axi EC concavitatem* ab initio E, sed habet punctum flexus, ubi abscissa $=\frac{1}{4}EC$. Celeritatum ergo incrementa sumtis elementis abscissarum aequalibus initio usque ad quartam distantiae CE partem decrescunt, postmodum autem crescunt, donec celeritas in ipso centro C fiat infinita.

Corollarium VII

§ 53. Ut tempora commode exprimamus, super assymtoto FC producta circulo generatore CPE construatur cyclois $EIQSR$. Erit ducta applicata

$$DPQ=(DP)\sqrt{ax-xx}+(EHP)\int\frac{\frac{1}{2}a\,dx}{\sqrt{ax-xx}}.$$

Adeoque tempus descensus per ED erit $=\frac{DQ}{a}$ seu ob a constantem ut DQ.

Corollarium VIII

§ 54. Corpus ergo cum pervenerit ad centrum C, statim rursus revertitur et redit ad punctum E, unde rursus descendit et sic in infinitum, ita ut celeritas corporis sive descendentis sive ascendentis in puncto eodem D semper sit eadem. Id quod hinc patet, quod DP producta cycloidi in punctis infinitis Q, R etc. occurrat, unde concludendum corpus non solum fore in D tempore DQ elapso, sed quoque tempore DR aliisque infinitis elapsis. Non autem ultra centrum C unquam pervenit, quia cycloidis ultra assymtoto FS nulla extat pars.

Corollarium IX

§ 55. Tempus ergo descensus per altitudinem AD celeritate initiali, quam per EA cadendo acquirere potest, erit ut portio applicatae QT, quam abscindit recta IT ex I rectae EC parallela ducta.

Corollarium X

§ 56. Cum sit (§ 49) $c=a\sqrt{\frac{x}{a-x}}$, erit ob a constantem celeritas in quovis loco D in ratione composita ex directa subduplicata altitudinis transmissae ED et reciproca quoque subduplicata distantiae CD a centro, i. e. erit

$$AB:DM=\sqrt{\frac{AE}{AC}}:\sqrt{\frac{DE}{DC}}.$$

* In manuscripto: *convexitatem*. Correxit *G. M.*

Problema IX

§ 57. Data ratione celeritatum in punctis A et D corporis descendentis invenire punctum E seu initium descensus, ex quo corpus demissum in punctis A et D acquirat celeritates datam rationem inter se habentes.

Solutio. Sit data celeritatum in A et D ratio $=1:m$. Erit (§§ 51, 56)

$$AB:DM=1:m=\sqrt{\frac{AE}{AC}}:\sqrt{\frac{DE}{DC}}.$$

Ergo $1:mm=\frac{AE}{AC}:\frac{DE}{DC}$, sed $AE=CE-AC$ et $DE=CE-DC$. Ergo

$$mm\cdot DC\cdot CE-mm\cdot DC\cdot AC=AC\cdot CE-AC\cdot DC.$$

Unde $CE=\frac{(mm-1)\cdot DC\cdot AC}{mm\cdot DC-AC}$. Q. E. I.

Problema X

§ 58. Cadente corpore ex A per altitudinem AD celeritate acquisita cadendo ex EA invenire lineam, quam corpus celeritate uniformi, ea scilicet, quam in D acquisierat, eodem tempore, quo altitudinem AD descripserat, describere potest.

Solutio. Sit spatium quaesitum z. Cum sit spatium $=$ facto ex tempore in celeritatem et celeritas cum sit $=DM$ et tempus $=\frac{QT}{CE}$ (§§ 51, 53, 55), erit $z=\frac{DM\cdot QT}{CE}$. Q. E. I.

Corollarium I

§ 59. Si ergo corpus ex E descenderit celeritate initiali nulla, erit spatium illud, quod uniformi celeritate, quam in D acquisierat, percurrere potest tempore eodem, quo ex ED descenderat, erit, inquam, illud spatium $=\frac{DM\cdot DQ}{CE}$.

Corollarium II

§ 60. Cadat punctum D in punctum K medium lineae EC. Erit $EK=\frac{a}{2}$ et DM evadet $=a$, DQ autem $=\frac{a}{2}+\frac{1}{4}$ peripheriae circuli, cuius diameter $=a$. Sit ratio diametri ad peripheriam $=q:p$. Erit haec quarta peripheriae pars $=\frac{ap}{4q}$. Erit adeo $z=\frac{a}{2}+\frac{ap}{4q}$ seu ipsi applicatae cycloidali in centro K. Posito loco $q:p$ 7:21, erit $z=\frac{a}{2}+\frac{11a}{14}=\frac{9a}{7}$.

Ponamus (IV) **generaliter vim centralem proportionalem cuivis functioni distantiarum a centro.**

Propositio V

§ 61. Sit centrum virium C atque attractionis vis in quavis a centro distantia CA ut applicata AH curvae FHQ (fig. 12). Cadat corpus ex E cum celeritate in E nulla. Ducta applicata EF constructaque super E curva EBM

talis, ut eius applicatae cuiusvis AB quadratum sit ut area respondens $EAHF$, exprimont huius curvae EBM applicatae AB celeritates corporis cadentis in A.

Demonstratio. Per § 9 est (dictis celeritate c, vi centrali v et altitudine $EA=x$) $cdc=vdx$. Ergo $\frac{cc}{2}=\int vdx$. Sed hic est $AH=v$. Ergo $\int vdx=EAHF=\frac{cc}{2}$ et proportionale quadrato lineae AB (per hypothesin). Ergo cc est ut AB^2, unde et celeritas corporis pervenientis in A erit ut applicata AB. Q. E. D.

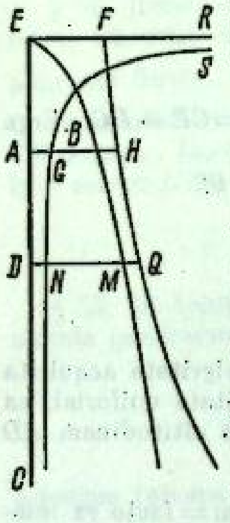


Fig. 12.

Corollarium I

§ 62. Tempus descensus per altitudinem EA est $=\int\frac{dx}{c}$. Quia autem $AB=c$, construatur curva SGN talis, ut ductis applicatis AG sit rectangulum applicatarum BA et GA respondentium, quod vocetur A, semper constans. Erit ergo $AG=\frac{A}{c}$, i. e. ut $\frac{1}{c}$. Et area $EAGSR$ erit $=A\int\frac{dx}{c}$, i. e. ut $\int\frac{dx}{c}$. Exprimet ergo haec area tempus descensus per altitudinem EA. Absolute loquendo autem tempus erit ut $\frac{\text{area } AGSRE}{A}$, quia est $=\int\frac{dx}{c}$.

Corollarium II

§ 63. Et tempus, quo altitudo quaevis AD transmittitur, erit ut area $ADNG$, nam tempus per altitudinem ED est ut area $ADNGSR$ et tempus descensus per EA ut $EAGSR$. Tempus ergo per AD est ut harum arearum differentia $ADNG$. Absolute autem aequabitur $\frac{\text{areae } ADNG}{A}$.

Corollarium III

§ 64. Si curvae FHQ vires centrales exhibentis punctum F cum puncto E confundatur, erit vis centralis in E nulla. Corpus ergo ibi locatum nulla celeritate praeditum nunquam movebitur, sed in aeternum ibi quiescet, cum nulla adsit vis, quae ei motum imprimat. Quod hinc manifestum esse quoque potest, quod tum curva EBM non fiat in puncto E in CE normalis et consequenter curvae temporum SG area $EAGSR$ semper sit infinite grandis, quae tempus descensus per EA repraesentare debet, quod indicat corpus nunquam in A perventurum.

Corollarium IV

§ 65. Semper ergo linea celeritatum EBM talis esse debet, ut eius tangens in vertice E sit in rectam EA normalis. Sin enim id non fiat, corpus ex E nunquam discedet. Linea ergo EBM recta esse nequaquam poterit aut talis, quae cum EA angulum constituit obliquum, multo minus linea AE ipsa curvae tangens esse poterit.

Scholion

§ 66. Problemata inventionem celeritatum, temporum et spatiorum percursorum concernentia ope harum curvarum sine magno labore solvi poterunt. Quam plurima generaliter, quamcunque lineam FHQ delineaveris, solvi poterunt; nonnulla autem non generaliter quidem, sed in qualibet substitutione curvae cuiusvis notae loco curvae FHQ generalis. Cuiusmodi sunt ex. gr. data ratione celeritatum in punctis A et D corporis descendentis vel data ratione temporum elapsorum, quibus ad puncta A et D pervenit, invenire punctum initii descensus E, quae quidem generaliter geometrice solvi non possunt, sed assumta pro curva FHQ aequatione solutio facilis evadit.

Corollarium V

§ 67. Num corpus, cum ad centrum pervenerit, rursus revertatur vel autem ultra centrum progrediatur, ex situ lineae SGN seu EBM patebit. Si enim haec curva ultra centrum C partes habebit, corpus ultra centrum quoque migrabit, sin vero minus, corpus redibit in partes, ex quibus venerat.

Problema XI

§ 68. Cadente corpore ex A per altitudinem AD celeritate acquisita cadendo per EA invenire longitudinem lineae, quam corpus celeritate uniformi, ea scilicet, quam in D acquisierat, percurrere potest tempore eodem, quo ex A in D cadit.

Solutio. Sit linea quaesita $=z$. Cum sit spatium aequale facto ex celeritate in tempus, erit $z=\frac{DM\cdot ADNG}{A}$ (§ 63). Est autem $A=$ constanti rectangulo ordinatarum respondentium, i. e. $\square BAG$ vel MDN. Ponamus loco A ergo $DM\cdot DN$. Erit $z=\frac{ADNG}{DN}$. Q. E. I.

Corollarium I

§ 69. Cadat corpus ex E celeritate scilicet initiali nulla. Erit linea $z=\frac{EDNSR}{DN}$.

Scholion

§ 70. Hactenus vis centralis considerata est generalissime ponendo eam proportionalem applicatis curvae cuiusvis. Ponamus eam iam reciproce proportionalem, ut rem aliquatenus specialius tractemus, potentiae distantiarum a centro cuivis, cuius scilicet exponens sit m. Hancque hypothesin applicemus ad praecedentia generalia.

Propositio VI

§ 71. Descendat in hac hypothesi corpus versus centrum C perveneritque ad D initio descensus sumente in A, ubi celeritas sit $=b$. Erit (dictis $AC=a$, celeritate in $D=c$, $CD=y$) $ccy^{m-1}=a^{m+1}+bby^{m-1}-aay^{m-1}$.

Demonstratio. Sit $AD = a - y = x$. Erit $y = a - x$. Erit $cdc = vdx$ (§ 9). Est autem vis centralis v ut $\frac{1}{(a-x)^m}$. Erit ergo $cdc = \frac{dx}{(a-x)^m}$ et facta integratione

$$\frac{cc}{2} = \frac{1}{(m-1)(a-x)^{m-1}} + \text{const}$$

seu observata homogeneitate

$$cc = \frac{a^{m+1}}{(a-x)^{m-1}} + \text{const.}$$

Ut inveniamus quantitatem constantis addendae, ponatur $x = 0$. Erit $cc = aa + \text{const}$. Ibi autem est $c = b$, i. e. $cc = bb$, unde $aa + \text{const} = bb$. Constans ergo addenda erit $bb - aa$. Unde erit

$$cc = \frac{a^{m+1}}{(a-x)^{m-1}} + bb - aa.$$

Posito loco $a - x$ suo valore assumto y erit

$$cc = \frac{a^{m+1}}{y^{m-1}} + bb - aa$$

seu

$$ccy^{m-1} = a^{m+1} + bby^{m-1} - aay^{m-1}.$$

Q. E. D.

Corollarium I

§ 72. Sit corporis celeritas initialis $b = 0$ seu descendat corpus ex puncto E. Erit $EC = a$. Ergo $ccy^{m-1} = a^{m+1} - aay^{m-1}$. Quae erit aequatio ad curvam EBM existente $CD = y$ et $DM = c$.

Corollarium II

§ 73. Hinc patet, si m fuerit numerus par, curvae EBM ultra centrum C nullas fore partes. Etenim tum erit $m - 1$ numerus impar, adeoque posito loco $+y$ $-y$ in aequatione ad curvam EBM in paragrapho praecedente mutabitur illa in hanc $-ccy^{m-1} = a^{m+1} + aay^{m-1}$. Unde clarum est ob radices hac in aequatione imaginarias nullam habere hanc curvam partem ultra centrum C. Corpus ergo, cum cadendo ad centrum C pervenerit, rursus in ea linea, qua descenderat, ascendet a centro, tum scilicet, si m fuerit numerus par, quod quoque deprehendimus [in] § 54, ubi loco m positum fuit 2.

Corollarium III

§ 74. Sin vero m numerus fuerit impar, erit $m - 1$ par. Sive ergo y sumatur affirmative sive negative, aequatio ad curvam EBM non mutabitur, quod indicio est curvam hanc ultra centrum C partem habere similem et aequalem ei, quae hic cis centrum est, scilicet portioni EBM. Unde patet, corpus, cum ad centrum C pervenerit, perrexurum ultra centrum eadem in aequalibus a centro distantiis celeritate.

Corollarium IV

§ 75. Idem quoque valet de numeris fractis. Si enim $m - 1$ fuerit fractio, cuius numerator (reducta scilicet fractione ad simplicissimam formam) est numerus impar, corpus non ultra centrum migrabit, sin vero sit numerus par, corpus centrum transibit. Ratio eadem est fere quae supra et facile patet aequatione curvae EBM in § 72 ad hanc formam reducta $y^{m-1} = \frac{a^{m+1}}{aa+cc}$. Sit enim $m - 1 = \frac{p}{q}$. Erit $y^p = \left(\frac{a^{m+1}}{aa+cc}\right)^q$. Unde patet, si p sit numerus par, curvam habituram, sin vero impar, curvam EBM non habituram partem trans centrum C.

Corollarium V

§ 76. Ut inveniamus quoque lineam temporum NGS, quia est $DN =$ $=$ constanti spatio A diviso per $DM = c$, est autem (§ 72)

$$cc = \frac{a^{m+1} - aay^{m-1}}{y^{m-1}}.$$

Ergo

$$c = \frac{\sqrt{a^{m+1} - aay^{m-1}}}{y^{\frac{m-1}{2}}} = a\sqrt{\frac{a^{m-1} - y^{m-1}}{y^{m-1}}}.$$

Ergo DN, quam vocabo t, erit

$$= \frac{A}{c} = \frac{A}{a}\sqrt{\frac{y^{m-1}}{a^{m-1} - y^{m-1}}}.$$

Spatium ergo $DNSRE$ erit

$$= -\frac{A}{a}\int dy\sqrt{\frac{y^{m-1}}{a^{m-1} - y^{m-1}}},$$

quia est $dx = -dy$. Tempus ergo descensus per ED erit ut

$$\int -dy\sqrt{\frac{y^{m-1}}{a^{m-1} - y^{m-1}}}.$$

Corollarium VI

§ 77. Formula haec tempus exprimens differentialis ad integrabilem reduci nequit nec generaliter nec in ulla loco m hypothesi, nisi si $m = 3$, i. e. si centrum attrahit pro ratione reciproca cubi distantiae. Erit enim tum tempus descensus per ED

$$= \frac{1}{a}\int \frac{-ydy}{\sqrt{aa - yy}} = \frac{\sqrt{aa - yy}}{a}.*$$

Erit ergo tempus descensus per ED descripto ex centro C et radio $CE = a$ circulo EBF (fig. 10) ut applicata DM in D.

* In manuscripto formula haec factorem $\frac{1}{a}$ non continet. Correxit G. M.

Hypothesis II, in qua vis resistentiae celeritati corporis proportionalis ponitur et vis centralis ubique constans

Propositio VII*

§ 78. Descendente iuxta hanc hypothesin corpore ex A cum quavis celeritate versus centrum infinite distans erit, cum corpus ad locum quemvis D pervenerit, dictis $AD=x$, celeritate in D c, vi centrali constante g, celeritate corporis (cuius vis resistens est aequalis vi centrali g) e et functione ipsius x densitatem exprimente P, densitate in A A, erit tum, inquam,

$$cdc=gdx-\frac{Pgcdx}{Ae}.$$

Demonstratio. Per § 3 est $cdc=gdx-Rdx$. Sed per hypothesin est $R:g=cP:eA$. Ergo $R=\frac{cgP}{eA}$. Ergo $cdc=gdx-\frac{gPcdx}{Ae}$. Q. E. D.

Corollarium I

§ 79. Nonnisi duae ergo variabiles quantitates, c scilicet [et] x, aequationem istam ingrediuntur, cum vim resistentiae R cum gravitate comparaverim et P in x detur.

Scholion

§ 80. Quo igitur hanc materiam rite pertractem, supponam primo densitatem medii ubivis eandem. Dein rem generaliter pertractabo.

Ponamus (I) densitatem corporis ubivis eandem.

Propositio VIII

§ 81. Descendat corpus ex A perveneritque ad D. Erit manentibus denominationibus (§ 78) $cdc=gdx-\frac{gcdx}{e}$.

Demonstratio. Est per § 78 $cdc=gdx-\frac{Pgcdx}{Ae}$. Densitate autem manente invariata erit $P=A$. His positis in aequatione habebitur haec $cdc=gdx-\frac{gcdx}{e}$. Q. E. D.

Corollarium I

§ 82. Ut aequationem hancce integremus, dividatur utrinque per $g-\frac{gc}{e}$. Habebitur $\frac{ecdc}{ge-gc}=dx$ et sumtis integralibus

$$\frac{ee-ec-ee\lg(e-c)}{g}=x+\text{const.}$$

* Propositio haec in manuscripto multis cum mendis et correctionibus scripta est. — G. M.

Corollarium II

§ 83. Sit celeritas corporis initialis b. Erit posito $x=0$, $c=b$, unde

$$\frac{ee-eb-ee\lg(e-b)}{g}=\text{const.}$$

Erit ergo hoc valore loco constantis addendae substituto

$$\frac{ee-ec-ee\lg(e-c)}{g}=x+\frac{ee-eb-ee\lg(e-b)}{g}$$

seu

$$\frac{gx}{e}=b-c+e\lg(e-b)-e\lg(e-c).$$

Corollarium III

§ 84. Sit celeritas corporis initialis $b=0$. Erit

$$\frac{gx}{e}=e\lg e-e\lg(e-c)-c.$$

Corollarium IV

§ 85. Cum nihil intersit, sive c et e data quantitate multiplicentur seu dividantur sive non, etenim non nisi ratio linearum c in diversis altitudinibus x requiritur, multiplicetur ergo et c et e per constantem datam $\sqrt{\frac{g}{e}}$, ut $\frac{g}{e}$ abeat et ita g non in computum ducatur, et habebitur

$$x=e\lg e-e\lg(e-c)-c.$$

Corollarium V

§ 86. Data ergo e ope logarithmicae haec curva facile construi poterit. Nempe cadat corpus in linea ED initium descensus in E incipiente (fig. 13). Lineae ED iungatur normalis $EC=e$ huicque normalis CS, super qua assymtoto parametro quovis $=b$ construatur logarithmica HQE per punctum E transiens. Sumatur $CF=$ parametro $=b$ ducaturque recta FE, cui per punctum C ducatur parallela CRG. Assumta EP utcunque $=c$ ductaque PQ parallela ED logarithmicae occurrenti in Q et ducta applicata SQ, quae producta, si opus sit, occurrat rectae CG in R, erit $SQ=$ $=CP=e-c$. Ergo $CS=b\lg e-$ $-b\lg(e-c)$ et ob

$$CF\,(b):CE\,(e)=$$
$$=CS\,[b\lg e-b\lg(e-c)]:SR$$

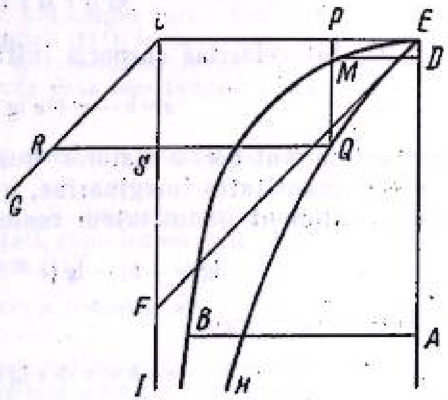


Fig. 13.

erit $SR=e\lg e-e\lg(e-c)$. Ab hac si dematur $EP=c$, remanebit altitudo ED, cui celeritas respondens erit c. Sumta ergo $PM=SR-EP$ erit M in curva EMB, cuius applicatae BA, MD exponunt celeritates corporis cadentis in punctis A et D.

Corollarium VI

§ 87. Ex hac constructione patet assymtoton logarithmicae IF fore quoque assymtoton curvae celeritatum EMB. Nunquam ergo corpus descendens celeritatem potest acquirere aequalem celeritati e.

Quo rarius ergo seu quo minus resistens est medium, in quo corpus cadit, eo maiorem celeritatem potest acquirere et, quo magis corpori resistitur, eo minor est celeritas, quam acquirere potest.

Corollarium VII

§ 88. Si ergo corpori celeritatem initialem aequalem vel maiorem celeritate e attribuimus, non poterimus, ut hactenus fecimus, eam considerare unquam ex tanta vel tanta altitudine cadendo acquisitam. Aliam ergo monstremus viam talis motus symtomata eruendi oportet.

Corollarium VIII

§ 89. Quod attinet ad primum, quo celeritas initialis aequalis ponitur celeritati e, i. e. vi centrali vis resistentiae, patet tunc fore motum corporis uniformem, nempe corpus cadet motu non accelerato.

Corollarium IX

§ 90. Hinc ergo constat modus inveniendi celeritatem e in medio quantumvis resistente, etsi id palpando fiat. Imprimatur scilicet corpori cadenti celeritas tanta initialis, ut corporis motus fiat uniformis, erit celeritas corporis tum celeritas e.

Corollarium X

§ 91. Si corporis celeritas initialis maior fuerit quam e, corpus motu retardato, ut facile patet, descendet, nam vis resistentiae tunc maior erit vi centrali. Qua ratione autem celeritates descrescant, sequente modo apparebit.

Corollarium XI

§ 92. Sit celeritas corporis initialis b. Erit (§ 83, 85)

$$x=b-c+e\lg(e-b)-e\lg(e-c).$$

Cum autem sint b et c maiores quam e, erunt logarithmi quantitatum $e-b$ et $e-c$ quantitates imaginariae, quilibet scilicet in se spectatus, sed ambae simul conficient quantitatem realem. Est enim

$$\lg(e-b)-\lg(e-c)=\lg(b-e)-\lg(c-e).$$

Habebimus ergo

$$x=b-c+e\lg(b-e)-e\lg(c-e).$$

MECHANICA SEU SCIENTIA MOTUS

[INDEX CAPITUM ET ARGUMENTUM]

INTRODUCTIO

§ 1. *Motus*, circa quem Mechanica versatur, *est mutatio situs*; pertinet is ad *corpora* et propterea, quando ea situm mutant, *moveri* dicuntur. Situs vero est proprie relatio corporis ad alia corpora. Quamobrem motus est tantum relativum quoddam, quia ad alia corpora respicit. Si ergo unicum existeret corpus, id neque moveri neque quiescere dici posset, cum idea situs nullis existentibus corporibus locum obtinere nequeat.

Attamen, quia infinitatem spatii, quod nunc mundum continet, mente concipere difficillimum est, limites nobis imaginamur corporeos et quae corpora respectu eorum situm suum mutare videntur, ea moveri, quae autem eundem servant situm, ea *quiescere* dicuntur. Concipimus ergo loca fixa, ad quae situm eiusque mutationem referimus. Unde fit, ut duorum corporum alterum quiescere, alterum moveri dicere possimus. Cum tamen, si ea sola existerent, motus, si situm inter se mutarent, tam ad unum quam alterum pertineret.

§ 2. Quando corpus movetur, viam aliquam describit, quae dicitur *spatium*. Eius quantitatem, quia est magnitudo, ad quantitates cognitas referimus iisque mensuramus, ut corpus motum spatium tot vel tot pedum descripsisse dicimus.

§ 3. Ad spatium descriptum, ut clarius, quae in motu sint, percipiamus, adiungimus *tempus*, quo illud spatium fuit descriptum, quanquam notionem temporis ex ipso motu acquisivimus. Si enim nullus esset motus et tempus simul esset sublatum. Tempus mensuramus notis temporis intervallis: minutis, horis, diebus etc.

§ 4. Corpus, quod aequalibus temporis intervallis aequalia absolvit spatia, *aequabiliter* moveri dicitur motusque eius vocatur *aequabilis*. In motu ergo aequabili spatia descripta sunt ut tempora seu spatia ea eandem inter se habent rationem, quam habent tempora, quibus erant confecta. Motus vero *inaequabilis* est, quando corpus aequalibus temporibus inaequalia absolvit spatia.

§ 5. Si duorum corporum motu aequabili latorum unum eodem tempore maius conficit spatium quam alterum, id celerius moveri dicitur. Atque si eodem tempore duplo, triplo etc. maius describit spatium, id inde duplo vel triplo celerius movetur. Ex quo intelligi potest, quid vox abstracta *celeritas* significet. Corpus enim, quod duplum spatium eodem tempore absolvit duplam celeritatem habere dicitur. Metimur celeritatem ex celeritatibus motuum cognitorum vel ex quantitate spatii dato tempore descripti.

§ 6. Duorum ergo corporum motu aequabili incedentium celeritates sunt ut spatia eodem tempore descripta. Percurrat eorum alterum spatium S, dum alterum spatium s absolvit; erit celeritas illius ad celeritatem huius ut S ad s. Si vero corpus A tempore T absolvat spatium S, aliud vero B tempore t spatium s, erit illius celeritas C ad huius celeritatem c in ratione

composita ex directa spatiorum S ad s et inversa temporum T ad t. Nam, quia corpus B tempore t spatium s percurrit, percurret idem tempore T spatium $\frac{Ts}{t}$ (§ 4). Corpus vero A eodem tempore T spatium S absolvit. Quare, cum celeritates sint ut spatia eodem tempore descripta, erit celeritas corporis A ad celeritatem corporis B, id est C ad c, ut S ad $\frac{Ts}{t}$. Unde habetur

$$C:c=\frac{S}{T}:\frac{s}{t}.$$

§ 7. Ex hoc Theoremate alia fluunt. Nimirum spatia a duobus corporibus descripta esse in ratione composita celeritatum et temporum. Quia enim $C:c=\frac{S}{T}$ ad $\frac{s}{t}$, erit $S:s=CT:ct$. Hinc erit etiam

$$T:t=\frac{S}{C}:\frac{s}{c}$$

seu tempora sunt in ratione composita ex directa spatiorum et inversa celeritatum.

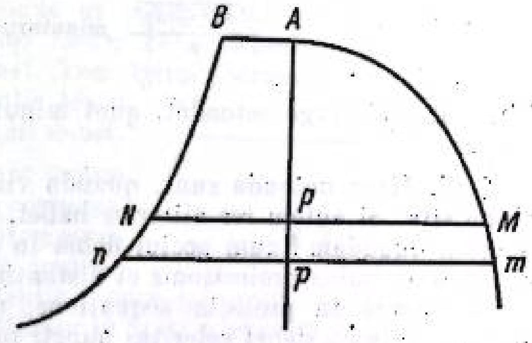


Fig. 1.

§ 8. Metiri etiam solent celeritates absolute ex quantitate spatii dato tempore descripti, ut dicant corpus tanta moveri celeritate, qua possit tempore quodam certo, v. g. unius minuti, spatium tot vel tot pedum absolvere.

§ 9. Haec, quae de motu dicta sunt, pertinent proprie ad corpora infinite parva seu puncta. Nam qui motus insit in corporibus magnitudinem habentibus, tam facile dici non potest, cum diversae partes diversas habere possint celeritates. Tamen motus corporum magnitudine praeditorum ex motu punctorum definitur investigando, qualem quaeque eius particula habeat motum.

§ 10. In motu puncti praeter quantitatem spatii, temporis et celeritatis considerari debet, quale sit *spatium descriptum*. Est id linea, quae est vel recta vel curva. Ea igitur in quovis casu, ut motus perfecte cognoscatur, determinari debet per aequationes, quibus lineae exprimi solent.

§ 11. Praeterea, si motus non est aequabilis, sed si corpus sive punctum, quale primo concipi convenit, in diversis locis diversas habeat celeritates, quanta eius sit in quovis loco viae suae percursae celeritas determinari debet. Celeritates hae lineis exprimi possunt, quae vel tantum rationes celeritatum exprimunt vel celeritates absolute determinant. Id quod hoc fit modo, linea celeritatem repraesentans ubique tanta accipitur, ut ea celeritate, quam denotat, tempore quodam fixo, v. g. minuto secundo, percurri possit. Occurrent infra alii modi celeritates exprimendi.

§ 12. Sit via descripta linea curva AM ad axem AP relata (fig. 1). Ut motus perfecte repraesentetur, fiat ad eundem axem alia curva BN, cuius applicata quaevis PN aequalis sit spatio, quod corpus celeritate, quam in puncto respondente M habet, minuto secundo percurrere posset. Hac igitur cognita curva cognoscitur corporis celeritas in singulis curvae AM punctis. Ista curva BN vocatur *scala celeritatum*.

§ 13. Ex his nunc omnia, quae de motu quaeri possunt, inveniuntur, ut requiratur tempus, quo curvae portio AM describitur. Dicatur abscissa communis $AP=x$, applicata $PM=y$ et applicata celeritatem in M significans $PN=v$. Erunt his in situm proximum promotis $Ap=x+dx$, $pm=y+dy$ et $pn=v+dv$. Nunc, quia pn saltem quantitate infinite parva a PN differt, concipi potest elementum Mm motu aequabili, nempe celeritate PN percursum. Cum autem hac celeritate linea PN minuto secundo percurratur, elementum Mm eadem celeritate absolvetur tempore $\frac{Mm}{PN}$ minut. secund. Est vero $Mm=\sqrt{dx^2+dy^2}$. Quamobrem tempus per Mm est

$$\frac{\sqrt{dx^2+dy^2}}{v} \text{ minutorum secundorum.}$$

Eius integrale ergo ostendet, quot minutis secundis totus arcus AM absolvatur.

§ 14. Haec notanda sunt, quando via a puncto descripta est in eodem plano sita. Si autem res aliter se habet, ut via ea non sit in eodem plano, planum quoddam fixum accipi debet in eoque describi viae proiectio. Tum et naturam huius proiectionis et distantiam cuiusque viae puncti a respondente puncto in proiecta aequatione, ut moris est, determinari oportet; ad quae adiungi debet celeritas puncti in quovis loco similiter in aequationem introducenda. Quibus omnia, quae ad motum pertinent, definientur.

§ 15. A motu puncti progrediemur ad motus linearum, superficierum et corporum, idque de singulis tripliciter. Primo ea ut rigida figuramque suam non mutantia considerabimus, deinde, si sint flexibilia, i. e. si figuram non vero magnitudinem mutare possunt, quae ad motum spectant, investigabimus. Et tertio, si sint extensibilia seu si et figuram et magnitudinem mutare possint, motum tractabimus. De his omnibus ita agi convenit, ut ante omnia via mobilisque situs et figura in quoque loco commode aequationibus denotetur, tum vero celeritas cuiusque puncti in quoque loco determinetur.

§ 16. Haec sunt, quae ad motum in se spectatum pertinent. *Mechanica* vero praecipue productionem et immutationem motus contemplatur. Causae motum producentes et immutantes sunt *potentiae*, de quibus in *Statica* est expositum. Eae in corpora agentes motum iis imprimunt vel motum iam conceptum immutant, si obstacula, quae actionem earum prohibent, tollantur. Motus corporum quoque produci possunt et immutari ab aliis corporibus occurrentibus, sed haec actio corporum etiam ex potentiis derivari potest, ut in sequentibus videre licebit. In corporibus enim motis potentia quaedam inest, qua agere possunt in alia sibi occurrentia.

Quamobrem hunc tractatum in duas partes dividimus, in quarum priore de motu a potentiis producto, in posteriore vero de motu a corporibus motis orto tractabitur.

[PARS PRIMA. DE MOTU A POTENTIIS PRODUCTO]

. . . . *

[§ 2. . . . Quia po]tentia aequivalens in aequilibrio producendo eundem praestat effectum, perspicuum est eam aequaliter ac eas plures, quibus aequivalet in corpus agere, adeoque et eundem motum producet. Fieri autem potest, ut postquam corpus locum suum deseruit, potentia, quae aequivalens erat, talis esse desinat. Tum igitur iterum aequivalentem inveniri oportet. Id quod in singulis locis, quae corpus successive occupat, fieri debet.

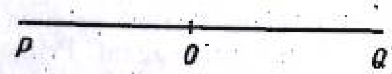


Fig. 2.

§ 3. De potentiis notanda sunt earum directio et quantitas. Directione cognoscitur, in quam plagam ea corpus promovere conatur. Sublatis igitur omnibus impedimentis dubium non est, quin potentia corpus secundum suam directionem promoveat. De quantitate potentiarum in Statica expositum est. Nimirum duae potentiae A et B dicuntur esse in ratione m ad n, si potentia A n-vicibus puncto O in directione OP et potentia B eidem puncto O in directione opposita OQ m-vicibus applicatis punctum O in quiete persistat (fig. 2). Quomodo effectus potentiarum inaequalium inter se differant, in sequentibus inquiretur.

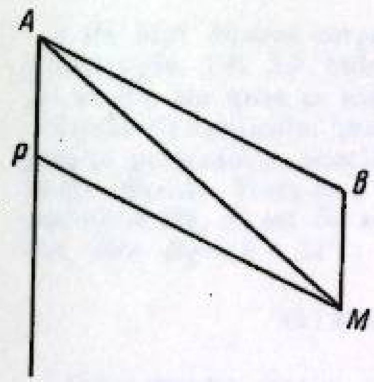


Fig. 3.

§ 4. Potentia vel ad idem punctum semper est directa vel eius directio variat pro diversis locis, quae corpus occupat. Eius quantitas quoque vel semper est eadem vel est variabilis. Et haec variabilitas vel a loco corporis vel a celeritate pendet. Hae distinctiones potentiarum probe sunt notandae, nam in sequentibus subdivisiones inde formabuntur. Potentiae, quarum actiones non pendent a celeritate corporis patientis, vocentur *absolutae*, quae vero aliter agunt, si corpus alia feratur celeritate, *relativae* vocentur.**

§ 5. Si actio potentiae a celeritate corporis pendeat, quaeratur potentia absoluta illi aequivalens, i. e. talis, quae tantum in quiescens ageret, quanta relativa in motum agit. Et loco relativae substituatur absoluta inventa, quo facto invenietur effectus in corpus.

* In manuscripto hic plagulae octava deest. — *G. M.*

** Primum in chirographo vires absolutae nominabantur purae, vires vero relativae — impurae. Postea Eulerus utramque nominationem tantum hic immutavit. Quae emendatio ab editore illata est ubique. — *G. M.*

§ 6. Dato autem effectu potentiae absolutae in corpus quiescens sequenti modo invenietur effectus in motum. Valeat potentia quaedam corpus A quiescens tempusculo infinite parvo ex A in P transferre (fig. 3). Nunc vero habeat corpus A celeritatem z secundum directionem AB. Quaeritur, quomodo eadem potentia eodem tempusculo motum corporis perturbabit.

Quia potentia aeque in motum corpus ac in quiescens agere ponitur, concipiatur corpus A motum suum amisisse seu id super plano positum, quod motum habet aequalem et contrarium ei, quem habet corpus. Transferetur id igitur in P. Restituto autem motu perveniat id interea in B motu ante concepto, quamobrem post hoc tempusculum non in P, sed in M reperietur ducta recta PM parallela et aequali rectae AB. Quoniam enim planum in partes contrarias motum concipiebatur, ut corpus in locum debitum restituatur, oportet plano motum ei, quem ante habere ponebatur, contrarium tribuere. Hoc modo punctum P in M transferetur. Quamobrem corpus A interea diagonalem AM descripsisse putandum est, a potentia ergo angulo BAM a sua semita deflectere coactum est et celeritatem acquisivit, quae se habet ad pristinam ut AM ad AB.

§ 7. Hanc Partem primam dividere maxime convenit secundum obiecta, in quae potentiae agant. Primo ponemus obiectum potentiarum esse punctum, tum lineam, superficiem et corpus, ad quae adiungi debet status varius linearum, superficierum et corporum, an sint rigidae, an flexiles, an extensiles. De quibus omnibus Parte prima explicari oportet, de his autem singulis dupliciter; nam primo obiecta libera, quae quaquaversus moveri possunt, considerabuntur et postea, si non quaquaversus incedere possunt, sed super via vel prorsus fixa vel ex parte saltem determinata progredi coguntur.

SECTIO PRIMA. *DE MOTU A POTENTIIS IN PUNCTUM LIBERUM AGENTIBUS PRODUCTO*

§ 8. Hic, qualis motus a potentiis in punctum liberum agentibus generetur, exponendum est. Occurrunt autem hic quatuor quaestiones. Primo, quomodo idem punctum ab eadem potentia afficiatur pro diversis, quas id habere potest, celeritatibus? Secundo, quomodo se habeant actiones diversarum potentiarum in idem punctum? Tertio, quales sint effectus vel eiusdem vel diversarum potentiarum in puncta diversa? Et quarto, quales sint effectus diversis tempusculis producti? Haec enim puncta, quae hic consideramus, etsi sint infinite parva, tamen diversae quantitatis esse possunt, ita ut unum alterius sit duplum, triplum aliamve ad id habeat rationem.

§ 9. Quod ad primam attinet quaestionem, de ea iam [in] § 6 explicatum est. Pendet ea a natura potentiae agentis, utrum ea absoluta sit necne seu utrum ea aequaliter agat in corpus quacunque celeritate latum an vero eius actio alia sit, si corpus aliam habuerit celeritatem. In hoc posteriori casu substituatur loco. .

. . . . *

§ 16. Sint duobus corpusculis A et B ut libet inaequalibus potentiae quaecunque, illi AP, huic BQ applicatae (fig. 4). Quaeritur ratio spatiorum Aa et Bb, per quae ea eodem tempore promoventur. Concipiatur puncto B potentia Bq applicata, quae sit ad AP ut punctum B ad A. Constat ex paragrapho praecedente punctum B ab hac potentia Bq protractum iri in β, ut sit $B\beta = Aa$. Porro ex § 14 est $B\beta$, effectus potentiae Bq, ad Bb, effectum potentiae BQ, ut est Bq ad BQ. Sed quia $B\beta = Aa$, erit $Aa : Bb = Bq : BQ$. Est vero $Bq = (B \cdot AP) : A$. Ergo

$$Aa : Bb = (B \cdot AP) : (A \cdot BQ) = \frac{AP}{A} : \frac{BQ}{B}.$$

Consequenter spatia, per quae duo corpuscula quaecunque a potentiis quibuscunque temporibus aequalibus promoventur, sunt in ratione composita ex directa potentiarum et reciproca corpusculorum.

§ 17. Quanquam corpusculi A, dum a potentia AB sollicitatum describit rectam AB (fig. 5), celeritas continuo crescit nullumque elementum quantumvis parvum Pp assignari potest, quod A motu aequabili describat, tamen motus per spatiola infinite parva aequabilis censetur, quia incrementum celeritatis quoque infinite parvum esse solet. Hanc ob rem potentiae non ut continue agentes, sed interruptim corpori, dum in quaeque elementa ingreditur, subito aliquid celeritatis alligantes considerantur.

* In manuscripto hic plagulae quadrans deest. — *G. M.*

§ 18. Ponamus potentias esse absolutas, i. e. tales, quae tantum agunt in corpus motum quantum in quiescens. Huius modi potentia igitur efficiet, ut corpus aequalibus tempusculis praeter spatia motu iam concepto describenda insuper certum spatium absolvat. Ut si corpus A a potentia AB sollicitatum pervenerit in P, ubi habeat celeritatem, qua tempusculo dato in p perveniret (fig. 6). Quia autem potentia adhuc agit, describet insuper spatiolum $p\pi$, quod in singulis tempusculis dato aequalibus idem est. Cum autem in motu aequabili spatia sint ut celeritates, temporibus existentibus aequalibus erunt in nostro casu celeritates denovo accedentes in quoque tempusculo constantes. Quocirca celeritas duplo tempusculo accedens est dupla et generaliter incrementa celeritatum sunt ut tempora. Ponitur autem hic corpus in directione potentiae moveri et potentia ubique constans et absoluta.

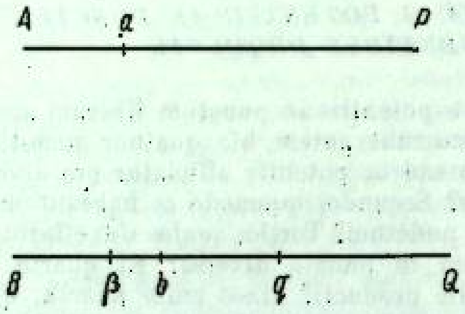


Fig. 4.

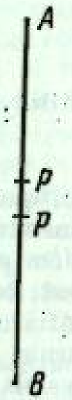


Fig. 5.

Fig. 6.

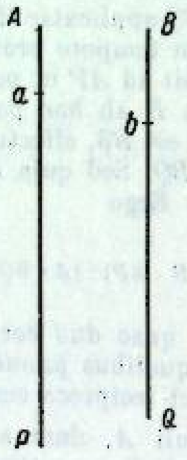


Fig. 7.

Fig. 8.

§ 19. Sint duo puncta A et B iisque applicatae potentiae AP et BQ, quae valeant ea tempusculo dt in a et b protrahere (fig. 7). Iam si A et B habeant quascunque celeritates secundum AP et BQ respective, erunt incrementa celeritatum inter se ut Aa ad Bb, i. e. ut $\frac{AP}{A} : \frac{BQ}{B}$; seu incrementum celeritatis puncti A tempusculo dt acquisitum est ut $\frac{AP}{A}$. Porro, si tempora sunt inaequalia, quia tum incrementa celeritatum sunt ut tempora, habebimus hanc legem *incrementum celeritatis esse directe ut tempusculum et potentiam atque ut corpus ipsum inverse.*

§ 20. Corpus igitur motum iam habens secundum directionem AB a potentia AB dato tempusculo dt certum quoddam incrementum celeritatis nanciscetur, quod idem est semper, quaecunque fuerit corporis A celeritas. Ex hoc quoque intelligitur, si celeritas ea fuerit negativa, tum eam tantundem diminui. Nam si habeat celeritatem secundum AC (fig. 8), quo casu ea est negativa, celeritas eius a potentia diminuetur, idque tantum, quantum ante augebatur.

§ 21. Vidimus ergo, quid corpus sive iam motum sive quiescens patiatur a potentia, cuius directio cum directione motus, si quem habet, coincidit. Nempe eius directio non mutatur, verum tantum celeritas. Nunc, si motus corporis et potentia in id agens diversas habeant directiones, quomodo motus perturbetur, disquirendum est. Ad hoc primum considerare iuvat casum, quo directio potentiae ad directionem motus est perpendicularis. Ad hunc enim cum priore, quo directiones coincidunt, coniunctum omnes reliqui reducentur.

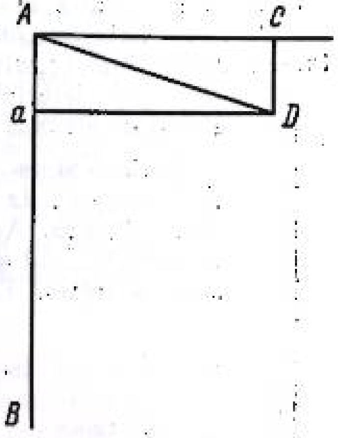


Fig. 9.

§ 22. Moveatur corpus A in directione AC celeritate, qua tempusculo dt ex A in C perveniat (fig. 9). Agat autem interea in id potentia AB angulum rectum cum AC constituens. Sit haec potentia tanta, ut corpus A, si quiesceret, tempusculo dt in a perduceret. Imprimet ei gradum celeritatis infinite parvum, quia actio potentiae infinite exiguum tempus dt durat. Ponimus vero celeritatem corporis secundum AC esse finitam. Quamobrem AC erit infinities maior quam Aa. Sed ex § 6 describet corpus A a potentia AB . . .

. . . . *

§ 26. Quando directio potentiae cum directione corporis moti semper congruit, tum id lineam rectam describet, de quo primo loco explicabitur. Si directiones non semper congruunt, corpus describet lineam curvam, quae qualis sit, erit investiganda. Hanc tractationem in partes discerpet diversitas potentiarum earumque numerus. Eae enim vel absolutae sunt vel relativae eaeque vel ad idem punctum fixum tendunt vel ad variabile. Ex his varietatibus igitur divisio in capita sumetur.

Caput I. DE MOTU PUNCTI A POTENTIIS ABSOLUTIS TRACTI RECTILINEO

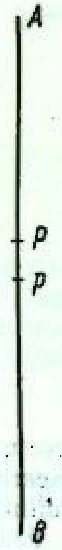
§ 27. Si corpusculum in A quiescens a potentia AB sollicitetur, motum acquiret secundum directionem AB (fig. 10). Quantum id in quovis puncto P habeat celeritatem sumus indagaturi. Sit potentia *uniformis*, i. e. habeat

---

* In manuscripto hic plagulae octava deest. — *G. M.*

ea in corpusculum, ubicunque id reperiatur, eandem vim; eaque denotetur litera p, corpusculum vero ipsum seu eius massa litera A. Pervenerit id in locum quemcunque P, ubi habeat celeritatem z, perveniatque tempusculo infinite parvo dt in p. Sit porro spatium descriptum $AP = x$; erit eius elementum $Pp = dx$. Quia potentia in corpusculum indesinenter agere ponitur, augebit ea celeritatem corpusculi, dum per Pp transit, ita ut celeritas in p sit $z + dz$. Adeoque incrementum celeritatis per $Pp = dz$. Sed per paragraphum 19 est incrementum celeritatis directe ut tempusculum et potentia coniunctim et ut corpus ipsum inverse. Ex quo erit dz ut $pdt : A$. Ponatur $dz = mpdt : A$.

§ 28. Constat ex § 7 [Introductionis] tempora esse ut spatia descripta directe et celeritates inverse in motu aequabili. Possumus autem motum per Pp ut aequabilem contemplari, nam quamquam motus is sit acceleratus, tamen augmentum celeritatis est infinite parvum. Ponere igitur licet spatium Pp descriptum celeritate z. Unde habebitur dt ut $dx : z$. Ponatur $dt = ndx : z$.



§ 29. Valore hoc loco dt substituto resultat haec aequatio $dz = mnpdx : Az$ seu $Azdz = mnpdx$, quae integrata dat $Azz = 2mnpx$. Additione constantis opus non est, nam facto $x = 0$ evanescit z. Id quod indicat celeritatem in A esse nullam, ut posuimus initio. Est igitur

$$z = \sqrt{\frac{2mnpx}{A}}$$

seu ob $\frac{2mnp}{A}$ constans celeritates sunt in subduplicata ratione spatiorum percursorum.

§ 30. Casus hic apprime convenit lapsui corporum in nostris Terrae regionibus. Corpora enim omnia quasi a potentiis trahuntur deorsum et re ipsa remotis obstaculis deorsum recta labuntur. Praeterea haec vis ubique est eadem ad sensum, unde potentia ea erit uniformis. Colligi ergo licet lapsum gravium eodem, quo invenimus, modo fieri celeritatesque esse ut radices quadratas spatiorum lapsu descriptorum.

Fig. 10.

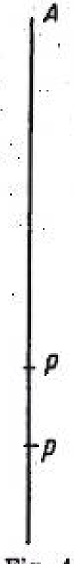
§ 31. Docet experientia vires, quae quaeque corpora tendunt deorsum, esse ipsis corporibus proportionales. Quocirca si pluria inaequalia corpora cadant, quia in omnibus potentia p ad massam A eandem habet rationem, perspicuum esse singula ex eadem lapsa altitudine x aequales acquirere celeritates. Nam etsi corpora in aequalium gravitatum specificarum inaequales ex eadem altitudine cadentia acquirunt celeritates, id oritur ab aëre. In vacuo autem aurum et plumam aequaliter descendere iam dudum observatum est.

§ 32. Quia facile concipimus quantitatem celeritatum corporum ex quaque altitudine cadentium, nam quantae eae sint, postea clarius explicabitur, mensurabimus posthac omnes celeritates ex altitudinibus, quibus corpora cadentia celeritates iis aequales adipiscuntur, ita ut dicturi simus celeritatem esse tantam, quanta lapsu gravis ex certa quadam altitudine acquiri potest. Hoc modo loco celeritatis introducetur linea determinata, quod magis erit commodum.

§ 33. Praeterea, ut omnes motus cum motu corporum labentium comparemus, potentias quasvis ex vi gravitatis aestimabimus. Scilicet sem-

per rationem adhibebimus, quam habet potentia in corpus agens ad vim gravitatis eiusdem corporis, si in nostris collocaretur regionibus.

§ 34. Ut haec clarius percipiantur, habeat corpus A, quod spatium AP descripsit (fig. 11), in P celeritatem tantam, quanta ex altitudine v cadendo corpus grave apud nos acquireret. Erit eius celeritas ipsa ut $\sqrt{v}$, quia celeritates sunt in subduplicata ratione altitudinum, ex quibus cadendo acquiruntur. Sollicitetur nunc corpus in P a potentia secundum directionem AP agente, quae sit ad vim gravitatis eiusdem corporis A, si circa terram esset positum, ut p ad 1. Progrediatur corpus ex P per elementum Pp, quod sit dx.



Manifestum est, si potentia id sollicitans esset vi gravitatis aequalis, i. e. si esset $p = 1$, tum fore eius celeritatem in p tantam, quanta ex altitudine $v + dx$ acquiritur. Unde foret eius celeritas ut $\sqrt{v + dx}$. Quamobrem incrementum celeritatis foret $dx : 2\sqrt{v}$. Hoc oriretur a potentia aequali vi gravitatis $= 1$. Iam videamus, quid potentia ipsa p efficiat. Sit altitudo generans celeritatem, quam corpus in p a potentia p sollicitatum habebit, $v + dv$; erit incrementum celeritatis ut $dv : 2\sqrt{v}$. Sed incrementa celeritatum sunt ut potentiae sollicitantes, si tempusculum et corpus maneant eadem, ut noster est casus. Erit igitur $\frac{dx}{2\sqrt{v}} : \frac{dv}{2\sqrt{v}} = 1 : p$ et hinc $dv = pdx$.

§ 35. Est ergo altitudo generans celeritatem aequalem ei, quam nostrum corpus in p habebit, $= v + pdx$, cum celeritas in P habuerit altitudinem generantem v. Est itaque incrementum altitudinis celeritatem in P generantis, dum id a potentia p sollicitatum per elementum $Pp = dx$ transit, $= pdx$; seu id incrementum altitudinis aequatur facto ex potentia in elementum percursum, si vis gravitatis unitate designetur. Hoc modo absolutam et determinatam obtinebimus celeritatum mensuram, unde et talis mensura temporum deducetur.

Fig. 11.

§ 36. Assumamus initio positum casum, quo potentia erat uniformis, sed hoc tractemus modo. Quia est $dv = pdx$, propter p constantem habebitur $v = px$, ubi est $AP = x$ et corpus in A quievisse ponitur. Celeritas ergo ipsa est ut $\sqrt{px}$. Quia vero celeritas nonnisi relative determinari potest ex quantitate spatii dato tempore percursi adeoque absolutum valorem in se non habet, celeritatem semper aequalem ponemus radici quadratae ex altitudine eam producente. Erit igitur hic celeritas $= \sqrt{v} = \sqrt{px}$.

§ 37. Tempusculum per elementum Pp est ut idem elementum applicatum ad celeritatem, erit ergo ut $dx : \sqrt{px}$. Ponam id $= ndx : \sqrt{px}$ et quaeram valorem literae n, quo, si in data quadam cognita mensura exhibeatur, proveniat numerus minutorum secundorum in tempore invento contentorum. Exponentur autem semper x aliaeque longitudines in partibus millesimis pedis Rhenani.

Notandum vero est n esse numerum constantem et valorem pro uno casu inventum eundem pro omnibus valere. Quaeramus ergo eum ex lapsu gravium, casu nobis maxime noto.

§ 38. Tempus ergo ipsum, cum elementum sit $ndx : \sqrt{px}$, per spatium AP erit $= 2n\sqrt{x : p}$, quae expressio numerum minutorum secundorum indicare debet, si x in particulis millesimis pedis Rhenani mensuretur.

Sit potentia p aequalis vi gravitatis, $=1$. Erit tempus lapsus per AP $=2n\sqrt{x}$. Sed per experimenta inventum est grave descendens recta deorsum minuto secundo conficere altitudinem 15 625 partium millesimarum pedis Rhenani. Quamobrem, si loco x ponatur 15625, oportet, ut $2n\sqrt{x}$ sit $=1$, quo unum minutum secundum indicet. Erit ergo $n=\frac{1}{250}$.

§ 39. Omne ergo elementum seu differentiale temporis, quod constat ex elemento spatii per radicem quadratam ex altitudine generanti celeritatem diviso, multiplicetur per $\frac{1}{250}$ seu per 250 dividatur. Quo facto integrale ostendet, quot minutis secundis spatium sit absolutum; spatium autem percursum vel lineas ab eo pendentes in scrupulis, ut iam monitum est, pedis Rhenani designare necesse est.

§ 40. Colligemus in summam, quae hactenus de descensu sunt allata. Describat corpus A a potentia p sollicitatum spatium x. Corpus autem ex quiete ex A egressum sit et conatus eius versus P (fig. 12) ponitur ad conatum eiusdem, si circa terram versaretur, descendendi rationem habere ut p ad 1. Quem ad modum potentias omnes in posterum metiemur. His ita se habentibus altitudo celeritatem apud nos generans aequalem ei, quam hoc corpus in P habet, inventa est aequalis px. Et tempus, quo ex A in P pervenit, $=\frac{1}{125}\sqrt{x:p}$ minut. secund.

§ 41. Ut innotescat, quanta sit celeritas lapsu acquisita, videamus, quantum spatium corpus tali celeritate latum dato tempore percurrere possit. Sumamus celeritatem ex altitudine px genitam et tempus unius minuti secundi. Sit spatium, quod interea describitur, $=S$. Manifestum est (ex § 39) $\frac{S}{250\cdot\sqrt{px}}$ exprimere tempus in minutis secundis. Ergo $\frac{S}{250\sqrt{px}}=1$ et $S=250\sqrt{px}$.

Celeritas ergo in P tanta est, qua possit minuto secundo spatium $250\sqrt{px}$ percurrere.

Fig. 12. . . . . * Fig. 13.

[De motu corporis in ratione quacunque multiplicata distantiarum a centro attracti]

§ 58. Quando corpus ad [centrum] C usque pervenerit (fig. 13), quis deinceps eius sit motus iis casibus, quibus n est numerus par, difficilior est inquisitio propter formulam potentiam exponentem instituto minus respondentem. Nam, si quaeratur motus corporis ultra C in P, oportet, ut in P potentia ad C tendat tantum quantum in Q posito $CP=CQ$. Quare, cum directio potentiae hic sit contraria nimirum sursum trahens, necesse est, ut ea sit negativa. Est vero $CP=-x$. Erit igitur vis in $P=(-x)^n:c^n$. Haec vero, si n est numerus par, non fit negativa ideoque ad propositum inveniendum est inepta.

§ 59. Hoc incommodum, si n est numerus impar, non adest. Nam tum $(-x)^n:c^n$ re vera fit negativum. Atque inde concluditur corpus ad C perveniens ultra in P transire atque motu eodem modo retardato ferri,

* In manuscripto hic plagula dimidia deest. — G. M.

quo ante versus C accelerabatur, ita ut in a sumto $Ca=CA$ eius celeritas nulla sit. Si autem n sit numerus par, cum potentia in P non talis exhibeatur, qualis deberet, disquisitionem in sequentibus, ubi de motibus curvilineis agetur, instituemus. Ibi enim hoc incommodum locum non habebit.

§ 60. Restaret adhuc casus unicus, si potentiae fuerint reciproce ut distantiae a puncto fixo C, qui peculiarem requirit tractationem propter logarithmos in ea occurrentes. Sed, quia scientiam logarithmorum cognitam habere oportet eum, qui haec aggressurus est, ad alia pergimus.

Sit corpus A idque trahatur deorsum ad C (fig. 14), potentia vero in corpus agens sit ut libet variabilis ex curva DM cognoscenda. Videlicet potentia in corpus in P positum agens sit ut applicata PM curvae DM. Requiritur celeritas corporis in singulis punctis P.

§ 61. Sumatur recta AB potentiam denotans aequalem vi gravitatis dicaturque $AB=c$. Pervenerit corpus in locum quemvis P sitque $AP=x$, trahetur ibi a potentia, quae est ad vim gravitatis ut PM ad AB. Si igitur ponatur $PM=y$ et vis gravitatis dicatur 1, erit potentia in P agens $=y:c$. Sit praeterea altitudo celeritatis in P genitrix $=v$. Perveniat corpus puncto temporis in p, erit $Pp=dx$ et altitudo celeritatem generans in $p=v+dv$. His positis erit $dv=ydx:c$ atque $cv=\int ydx=$ areae $ADMP$.

Construatur igitur curva AN, cuius applicata PN ducta in AD aequalis sit $ADMP$. Erit ubique $PN=v$.

§ 62. Ex cognita celeritate in quovis loco facile erit tempus, quo quaevis spatii portio describitur, definire. Id saltem notari convenit, si prima curvae DM applicata AD fuerit $=0$, corpus A ex A nunquam exiturum, quod in A a nulla potentia sollicitetur; et hanc ob causam tempus per quodvis spatium AP fore infinitum. Quia autem $dv=ydx:c$, si in A sit $y=0$, erit ibi $dv:dx=0:c$, ex quo apparet tum ipsam AP fore tangentem curvae AN. Quocirca, si detur curva AN ex eaque *scala potentiarum* DM quaeratur, ne casus sit totus opinabilis nullumque unquam motum producat, oportet, ut curva AN cum AP in A angulum constituat finitae magnitudinis.

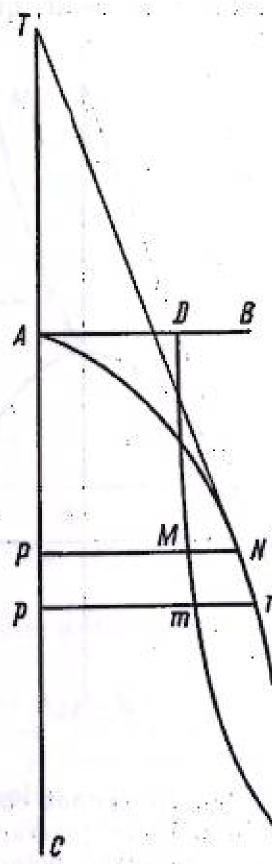


Fig. 14.

§ 63. Data vero curva AN celeritates repraesentante altera DM seu scala potentiarum sequenti modo ex ea construetur. Quia est $dv=ydx:c$, erit $y=cdv:dx$. Ducatur TN tangens curvam AN in N, quae rectae AP productae occurrat in T. Erit $PN:PT=dv:dx$. Quamobrem habetur $y=PM=c(PN:PT)$. Fiat igitur ut PT ad PN ita $AB(c)$ ad quartam, quae erit applicata PM curvae quaesitae DM. Haec igitur hoc modo construitur.

§ 64. Detur *scala temporum* AQ, cuius singulae applicatae PQ repraesentent tempus, quo spatia AP describuntur (fig. 15). Sit nempe

$PQ=\int\frac{dx}{\sqrt{v}}=t$. Manentibus reliquis, quibus ante usi sumus, denominationibus, erit $dt=\frac{dx}{\sqrt{v}}$ adeoque $v=\frac{dx^2}{dt^2}$. Ducatur ex Q tangens QT. Erit $dt:dx=PQ:PT$. Ergo erit

$$v=\frac{PT^2}{PQ^2}=PN.$$

Hoc modo invenitur curva AN ex eaque per paragraphum praecedentem scala potentiarum. Ne quem turbet, quod in $PT^2:PQ^2$ nulla insit dimensio. Id ex eo venit, quod t non integram habet dimensionem. Posset ad hoc vitandum poni

$$t=\int\frac{dx\sqrt{a}}{\sqrt{v}}$$

foretque $v=\frac{adx^2}{dt^2}$ seu $PN=\frac{a\cdot PT^2}{PQ^2}$, ubi a quantitatem quancunque constantem denotare potest.

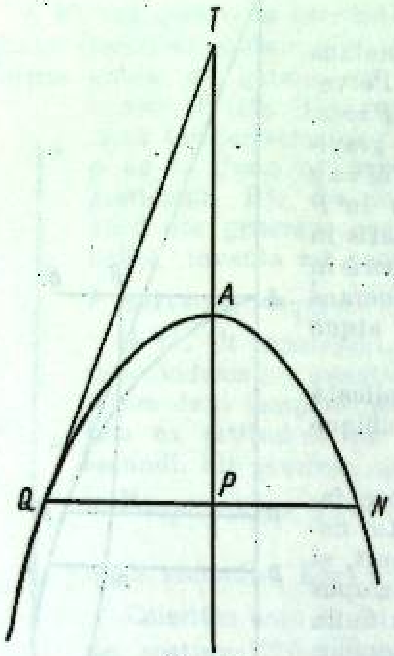


Fig. 15.

§ 65. Hactenus unicus descensus seorsum fuit consideratus. Nunc plures descensus inter se comparabimus. Quando scala potentiarum quidem est data, nihil res habet difficultatis, ex ea enim omnia, quae ad plures descensus pertinent, deducuntur.

Nunc vero alias quaestiones pertractabimus, quaenam sit scala potentiarum, ut in pluribus descensibus celeritates in fine eorum datam habeant inter se relationem. Nec non quaeretur scala potentiarum, ut tempora plurium descensuum, quorum initia sunt diversa, sed terminus idem, propositam teneant legem.

§ 66. Descendat corpus ex puncto quocunque P rectae AC ad C usque et sit altitudo generans celeritatem in C aequalis applicatae PN (fig. 16). Requiritur scala potentiarum istud praestans. Sit DME scala quaesita et denotet AB potentiam vi gravitatis aequalem. Manifestum est ex antecedentibus corporis ex P descendentis celeritatem in C esse genitam ex altitudine $=\frac{\text{areae } CPME}{AB}=PN$. Data igitur curva CN invenietur altera DME.* Sit $CP=x$, $PN=z$, $PM=y$ et $AB=e$. Erit $\int ydx=ez$. Ergo $ydx=edz$ seu $y=edz:dx$. Ducatur ex N tangens NT. Erit $PT:PN=dx:dz$. Ergo $y=e(PN:PT)$. Consequenter omnes applicatae PM ex hac analogia inveniuntur $PT:PN=AB:PM$. Scala haec DME efficiet, ut corpus ex P in C descendens habeat in C celeritatem, quae ex altitudine PN acquiritur.

* In manuscripto: BME. Correxit G. M.

§ 67. Si ratio detur, quam tempora diversorum descensuum ad punctum fixum usque inter se tenere debent, atque inde scalam potentiarum inveniri oporteat, quaestio est difficillima et longe aliam requirit tractationem atque praecedens. Nam ex curva, cuius applicatae singulorum descensuum tempora integra denotant (ut ex curva CN, si applicatae PN exponant tempora, quibus spatia PC percurruntur) scalam potentiarum nullo modo construi posse arbitror.* Attamen multi sunt casus particulares, ad quos nova quaedam methodus in sequentibus explicanda aditum aperit.

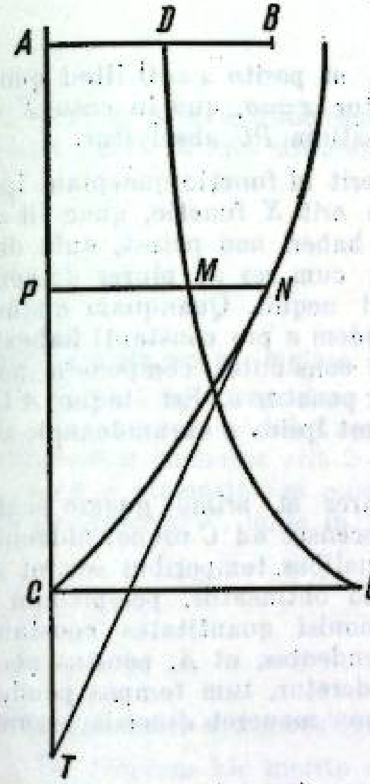


Fig. 16.

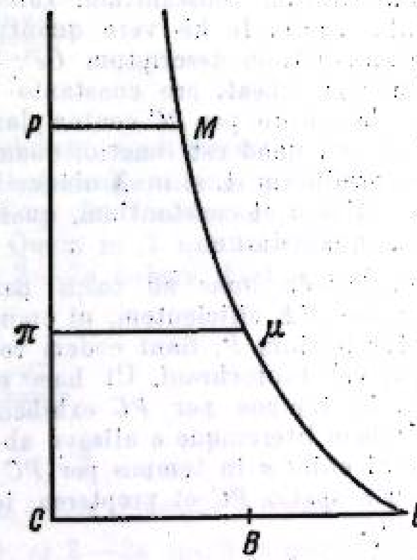


Fig. 17.

§ 68. Quaecunque sit lex temporum, denotet curva $M\mu E$ scalam potentiarum. Sit C punctum fixum fiatque descensus ex puncto quocunque P (fig. 17). Vocetur $CP=a$ et area $CEMP=A$. Ponatur corpus ex P ad punctum quodvis π pervenisse ducaturque applicata $\pi\mu$. Sit $C\pi=x$ et area $CE\mu\pi=X$. Denotet porro CB potentiam vi gravitatis aequalem dicaturque $CB=e$.

Erit ergo celeritas, quam corpus in π habet, genita ex altitudine

$$PM\mu\pi:CB^{**}=\frac{A-X}{e},$$

* Ad scalam potentiarum $f(L)$ datis temporibus descensuum $T(L)$ corporis massae m ex altitudine L inveniendam aequationem

$$T(L)=\int_0^L\frac{dx}{\sqrt{\frac{2}{m}\int_x^L fdx}},$$

quae ut aequatio Abeliana generalior considerari potest, solvere necesse est. — G. M.

** In manuscripto: CP. Correxit G. M.

unde erit celeritas in $\pi = \sqrt{\frac{A-X}{e}}$. Consequenter tempus, quo spatium $C\pi$ describitur, erit

$$=\int \frac{dx\sqrt{e}}{\sqrt{A-X}}.$$

Quod integrale ea augeri debet constanti, ut posito $x=0$ illud quoque evanescat. Si deinde in eo integrali ponatur $x=a$, quo in casu X abibit in A, habebitur tempus, quo totum spatium PC absolvitur.

§ 69. Cum X designet spatium $CE\mu\pi$, erit id functio quaepiam ipsius x et quantitatum constantium. Talis vero erit X functio, quae fit $=0$, si ponatur $x=0$. In his vero quantitas a haberi non potest, quia denotat totum spatium descriptum CP, quod, cum res ad plures descensus accommodari debeat, pro constante haberi nequit. Quanquam quamdiu unicum descensum per PC contemplamur, idem a pro constanti habeatur. Ex X autem, quod est functio, quam x et constantes componere ponuntur, determinatur A, si in X ubique loco x ponatur a. Est itaque A talis functio ipsius a et constantium, qualis X est ipsius x earumdemque constantium quantitatum.

§ 70. Accedo nunc ad casus particulares et primo quaero scalam potentiarum ME efficientem, ut omnes descensus ad C usque, ubicunque accipiatur initium P, fiant eodem vel aequalibus temporibus seu ut sint isochroni vel tautochroni. Ut haec conditio obtineatur, perspicuum est in formula tempus per PC exhibente nonnisi quantitates constantes inesse debere literamque a aliasve ab ea pendentes, ut A, penitus abesse debere. Si enim a in tempus per PC ingrederetur, tum tempus penderet ab a seu a spatio PC et propterea idem non maneret diversis assumtis spatiis PC.

§ 71. Formula, qua tempus πC denotatur, ita debet esse comparata (§ 68), ut facto $x=0$ ea tota evanescat. Quamobrem necesse est, ut ea habeat factorem x vel potentiam eius, cuius exponens sit numerus affirmativus, vel si ea in seriem convertatur, si opus est infinitam, quo simplices habeantur termini, necesse est, ut in singulis terminis insit x aut potentia quaedam eius habens exponentem affirmativum. Hoc enim modo fiet, ut posito $x=0$ totum tempus evanescat. Haec conditio non solum ad nostrum casum pertinet, sed adesse debet semper, ad quemcunque casum fiat accommodatio.

§ 72. Praeterea casus noster requirit, ut ex hac tempus exprimente formula, si ponatur $x=a$, prorsus a abeat. Propterea in singulis terminis seriei tempus per $C\pi$ praebentis, a tot habere debet dimensiones negativas, quot x habet affirmativas.

. . . . *

§ 76. Quaeratur scala potentiarum efficiens, ut tempora descensuum ad C sint inter se ut dignitates quaepiam spatiorum seu ut tempus per PC sit ut PC^n vel a^n. Necesse est ergo, ut in quolibet seriei tempus per πC exprimentis termino a et x constituant n dimensiones. Ea igitur series erit huiusmodi

$$\alpha a^{n-f} x^f + \beta a^{n-g} x^g + \text{etc.}$$

* In manuscripto hic plagulae octava deest. — *G. M.*

Ex quo intelligitur formulam tempus per πC denotantem habere debere n dimensiones ab a et x contentas.

§ 77. Cum igitur in

$$\int \frac{dx\sqrt{e}}{\sqrt{A-X}}$$

sint ipsarum a et x dimensiones numero n, idem dimensionum numerus reperiri debet in eius differentiali

$$\frac{dx\sqrt{e}}{\sqrt{A-X}}$$

computato dx unam implere dimensionem. Quamobrem in denominatore $\sqrt{A-X}$, cum in numeratore una sit dimensio, numerus dimensionum ab a et x completarum debet esse $1-n$. Et idcirco in $A-X$ eiusmodi dimensionum numerus erit $2-2n$. Quum in X non inesse possit a, oportet in eo x dimensionum numerum $2-2n$ habere. Fiat ergo $X=mx^{2-2n}$. Eritque $A=ma^{2-2n}$, unde in

$$\frac{dx\sqrt{e}}{\sqrt{A-X}}$$

a et x habebunt n dimensiones. Sic igitur quaestio solvetur.

§ 78. Dubium hic merito orietur, si $2-2n$ fuerit numerus negativus. Nam, cum X sit $=mx^{2-2n}$ atque posito $x=0$ etiam X evanescere debeat, huic conditioni, si $2-2n$ est numerus negativus vel $=0$, aequatio $X=mx^{2-2n}$ non satisfiet. In his vero casibus non debet X poni $=mx^{2-2n}$, sed constans debet adiungi faciens, ut X fiat $=0$, si ponatur $x=0$. Erit igitur $X=mx^{2-2n}-m0^{2-2n}$. Nec vero hic valor alteri conditioni adversatur, qua $A-X$ $2-2n$ dimensiones habere debet. Erit enim $A=ma^{2-2n}-m0^{2-2n}$ et hanc ob rem $A-X=ma^{2-2n}-mx^{2-2n}$ ut ante.

§ 79. Habemus igitur hanc aequationem $X=mx^{2-2n}$ vel, si opus est, $=mx^{2-2n}-m0^{2-2n}=$ areae $CE\mu\pi$. Dicatur ut ante $\pi\mu=y$. Erit $mx^{2-2n}-m0^{2-2n}=X=\int ydx$. Ergo $(2-2n)mx^{1-2n}=y$.

Hic loco m constans quantitas poni potest tot dimensionum, ut homogeneitas observetur. Potest ad m adiungi $2-2n$ utpote constans, habebitur ergo pro curva quaesita $M\mu E$ haec aequatio $y=b^{2n}x^{1-2n}$.

§ 80. Inveniamus nunc omnes possibiles scalas potentiarum, quae faciant, ut corpus dictum spatium AC vel eodem tempore percurrat vel ut in C eundem celeritatis gradum assequatur.

Sit primum propositum posterius dataque sit scala potentiarum BMD (fig. 18) atque oporteat inveniri omnes alias ut $(B)(M)(D)$, quibus corpus per AC sollicitatum in C eandem acquirat celeritatem. Quia celeritas in C debetur altitudini $=$ areae $ABDC$ divisae per constantem e (§ 61), intelligitur omnes curvas inveniendas $(B)(M)(D)$ eiusmodi esse debere, ut area $A(B)(D)C$ aequalis sit areae $ABDC$.

§ 81. Poterunt igitur arearum $ABDC$, $A(B)(D)C$ portiones quaecunque $ABMP$, $A(B)(M)P$ magnitudinis esse diversae, dummodo areae eae integrae sint aequales. Praetereaque perspicuum est omnes portiones $A(B)(M)P$ quoque evanescere debere, si ponatur $AP=0$, quia corporis in A celeritas nulla ponitur. Construatur igitur curva quaecunque ANC super AC in A et C rectae AC insistens. Metiaturque ubique applicata PN vel functio eius quaepiam differentiam inter areas $ABMP$ et $A(B)(M)P$. Quia igitur applicata PN in A et C evanescit, erit area $A(B)(M)P$, si P in A incidat, $=0$. Atque incidente P in C erit area $ABDC=A(B)(D)C$, uti requirebatur.

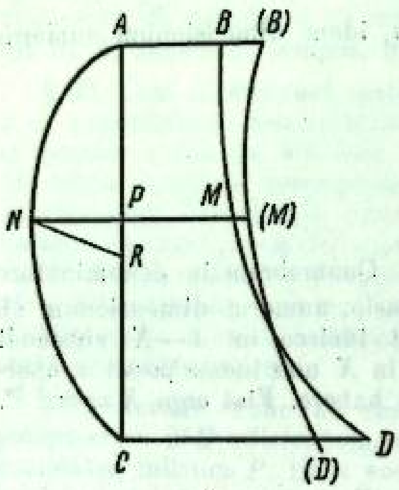


Fig. 18.

§ 82. Sit $AP=x$, $PM=y$, $P(M)=Y$ et $PN=z$. Erit $ABMP=\int ydx$ et $A(B)(M)P=\int Ydx$. Dicatur ea ipsius PN functio, quae metiri debet differentiam inter $\int ydx$ et $\int Ydx$, Z. Haec vero functio Z debet hanc habere proprietatem, ut evanescat, si fiat $z=0$, cuius rei ratio ex paragrapho praecedente intelligi potest. Habemus ergo hanc aequationem $\int Ydx=\int ydx+Z$, unde oritur $Ydx=ydx+dZ$. Sit $dZ=pdz$. Hic loco Z introducitur p, quae designare potest functionem quamcunque ipsius z. Nam, quicquid sit p, poterit $\int pdz$ reddi evanescens, si ponitur $z=0$.

§ 83. Ex aequatione $Ydx=ydx+pdz$ habetur igitur $Y=y+\frac{pdz}{dx}$. Cum igitur data sit curva BMD atque curva ANC pro lubitu possit accipi, ex his duabus datis facili negotio construitur curva quaesita $(B)(M)(D)$. Si ponatur $p=z$, habebitur $Y=y+\frac{zdz}{dx}$. Denotat autem $\frac{zdz}{dx}$ subnormalem in puncto N, nempe PR. Unde erit $Y=y+PR$ seu $P(M)=PM+PR$ adeoque $M(M)=PR$. Quando PR versus C cadit, ut affirmativi valoris aestimari debet, quando vero versus A cadit, ut negativi vel vicissim.

. . . . *

[De scalis potentiarum, quibus efficitur, ut corpus eodem tempore spatium AC absolvat]

§ 88. Quemadmodum initium abscissarum in A ponebatur, poterit quoque in C accipi, quod interdum necessarium esse potest. Sit igitur $CP=v$, $AC=a$. Erit $x=a-v$. Quia $\int ydx$ significat spatium $APMB$, idem spatium per v debet denotari. Dicatur totum spatium $ABDC=B$. Cum sit $\int ydv=$ spatio $PMDC$, erit $APMB=B-\int ydv$. Quamobrem loco $\int ydx$ substitui debet $B-\int ydv$, habebitur igitur

* In manuscripto hic plagulae octava deest. — G. M.

$$\left[\sqrt{\int Ydx}=\right] R=\frac{be\sqrt{B-\int ydv}}{be+t\sqrt{B-\int ydv}}.*$$

Unde ut ante emergit

$$Y=\frac{2RdR}{dx}=\frac{-2RdR}{dv}.$$

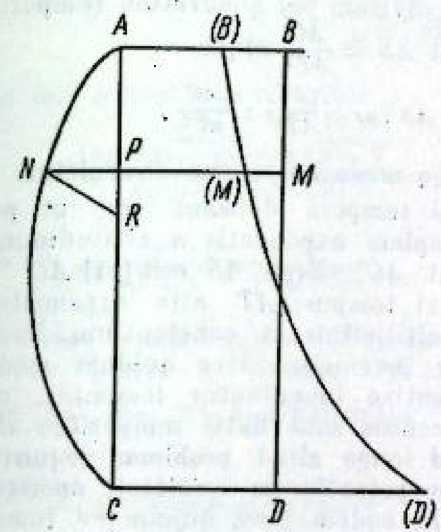


Fig. 19.

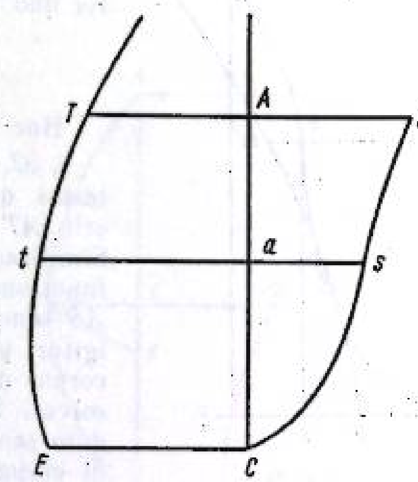


Fig. 20.

§ 89. Sit curva data BMD linea recta parallela ipsi AC ad distantiam $AB=h$ (fig. 19). Erit $y=h$. Consequenter $\int ydv=hv$ atque $B=ah$. Erit igitur

$$R=\frac{be\sqrt{h(a-v)}}{be+t\sqrt{h(a-v)}}$$

et differentiando

$$dR=\frac{-bbechdv-2behdt(a-v)\sqrt{h(a-v)}}{2[be+t\sqrt{h(a-v)}]^2\sqrt{h(a-v)}}$$

atque

$$\frac{-2RdR}{dv}=\frac{b^3e^3hdv+2b^2e^2hdt(a-v)\sqrt{h(a-v)}}{[be+t\sqrt{h(a-v)}]^3dv}.$$

Id quod aequale est ipsi Y.

§ 90. Facta est [in] § 67 mentio problematis huius: quomodo ex data lege temporum, quibus corpus diversas altitudines percurrens ad punctum infimum perveniat, inveniri conveniat scalam potentiarum. Ut contineat eam legem curva TtE ita, ut corpus ex A descendens in C pertingat tempore ut AT, ex a vero in C perveniat tempore ut at (fig. 20). Quo hoc problema ad casus ante tractatos accommodetur, quaeratur pro quo-

* Hic t, subnormalis PR curvae ANC (cf. fig. 18), differentiam temporum descensus per AC exponit (cf. § 81). — G. M.

vis descensu AC potentia quaedam AS talis, ut toto spatio AC in corpus agens id tempore proposito AT in C perducat.

§ 91. In quolibet igitur descensu videndum est, quanta potentia uniformi corpus sollicitari oporteat, ut tempore dato spatium absolvat. Sic, ut spatium aC tempore at absolvatur, opus est potentia as. Hoc modo formabitur curva CsS ita ex data EtT oriunda. Cum potentia uniformiter agente tempus sit (§ 38) ut radix quadrata ex spatio descripto applicato ad potentiam, erit potentia ut spatium descriptum divisum per quadratum temporis. Ex quo erit $AS = \frac{AC}{AT^2}$ atque

$$AS : as = \frac{AC}{AT^2} : \frac{aC}{aT^2}.$$

Hoc ergo modo curva SsC invenietur.

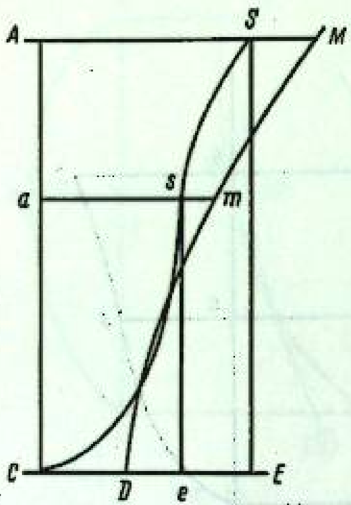


Fig. 21.

§ 92. Si tempora debeant esse ut potestas quaepiam exponentis n altitudinum, erit AT ut AC^n. Ergo AS erit [ut] AC^{1-2n}. Similiter, si tempus AT alia exprimatur functione altitudinis et constantium, linea AS semper invenietur. Hoc quidem modo igitur potentiae inveniuntur facientes, ut corpus descensus suos datis temporibus absolvat. Sed longe aliud problema requirit, dum scalam potentiarum desiderat; oportet, ut corpus in eodem loco, quicunque fuerit descensus, ab eadem semper potentia sollicitetur.

§ 93. Huiusmodi scala ut inveniatur, quaeratur potentiae AS uniformi seu scalae SE aequivalens quaedam (§ 89) MmD, qua nimirum corpus eodem tempore ex A in C perducitur, quae autem huius esse debet indolis, ut portio eius Dm aequivaleat potentiae uniformi as seu scalae se (fig. 21). Hanc igitur proprietatem si curva MmD habuerit, ut singulae eius portiones eundem praestent effectum ac potentiae uniformiter agentes ante definitae, erit ea quaesita scala potentiarum.

§ 94. Cum igitur res sit ad casum § 89 deducta, sit AB potentia uniformiter per AC agens functio quaecunque altitudinis AC. Dicatur ea ut ibi h reliquaque ut ibi maneant. Requiritur autem, ut curva quaesita $(D)(M)(B)$ eadem sit, quaecunque sumatur altitudo $AC = a$ indeque pendens AB (fig. 22). Hoc ut efficiatur, oportet aequationem inter CP et $P(M)$ esse eiusmodi, ut literae a vel h tanquam ab altitudine AC pendentes in eam prorsus non ingrediantur. Hoc enim modo fit, ut aequatio pro curva $(D)(M)(B)$ eadem semper resultet pro quacunque altitudine AC. Ea igitur curva quaestioni satisfaciet.

§ 95. Est in § 89 haec aequatio $Y = \frac{-2RdR}{dv}$. Nequit autem ad $Y = P(M)$ determinandum litera a concurrere vel ab ea pendentes aliae, ut h. Quamobrem in $2RdR$ non potest inesse a et propterea in integrali RR vel a prorsus quoque non inest vel saltem tanquam constans adhaerere potest, ut differentiatione abeat. Quia autem R talis esse debet functio ipsius v et constantium, quae evanescat, si ponatur $v = a$, necessario a in R inesse debet. Id quod vero eo debet esse modo, ut differentiato RR a ex computo evanescat.

§ 96. Pono igitur ob istas rationes $R^2 = A - V$, ubi V designat functionem quampiam ipsius v et constantium, quas inter a hoc loco numerari non convenit. A vero ex V datur, si in V loco v ponatur a. Ex quo fit, ut facto $v = a$ RR evanescat et differentiato $A - V$ prodeat $-dV$, quod ab a prorsus non pendet. Atque ita utrique propositae conditioni satisfiat.

§ 97. Cum itaque sit $RR = A - V$, erit $R = \sqrt{A - V}$. Sed per § 89 est

$$R = \frac{be\sqrt{h(a-v)}}{be + t\sqrt{h(a-v)}} = \sqrt{A - V}.$$

Ex hac aequatione reperitur

$$t = \frac{be\sqrt{h(a-v)} - be\sqrt{A-V}}{\sqrt{h(a-v)(A-V)}} =$$

$$= \frac{be}{\sqrt{A-V}} - \frac{be}{\sqrt{h(a-v)}}.$$

Est vero t subnormalis PR in curva ANC, quare, si dicatur $PN = z$, erit $t = \frac{zdz}{dv}$. Ex qua habebitur

$$zdz = \frac{bedv}{\sqrt{A-V}} - \frac{bedv}{\sqrt{h(a-v)}}.$$

Ergo

$$\frac{1}{2}zz = be\int\frac{dv}{\sqrt{A-V}} + \frac{2be}{h}\sqrt{h(a-v)} + C.$$

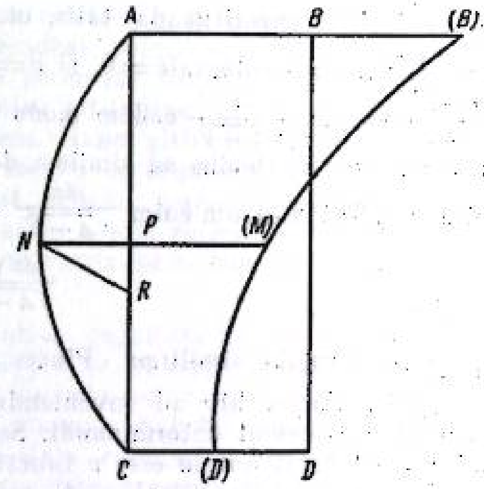


Fig. 22.

§ 98. Constans C talis esse debet, ut posito $v = 0$ fiat $z = 0$, quia curva ANC in C cum AC concurrere debet.* Debet ergo esse

$$C = -\frac{2be}{h}\sqrt{ha}.$$

Similiter integrale alterius membri $\frac{bedv}{\sqrt{A-V}}$ tali constante augeri debet. Praeterea, quia curva ANC in A quoque axi AC occurrere debet, oportet esse $z = 0$, si ponitur $x = a$. Hoc ut obtineatur, conveniens pro V functio debet assumi. Ex hoc enim solo V, quod quaerimus, determinari debet.

§ 99. Cum igitur nostra aequatio definiens zz talis esse debeat, ut posito $v = a$ ea evanescat, posterius autem membrum

$$-\int\frac{bedv}{\sqrt{h(a-v)}}$$

* In manuscripto: *potest*. Correxit *G. M.*

debita, ut dictum, constante auctum det, si ponatur $v=a$, $-\frac{2be}{h}\sqrt{ha}$, necesse est, ut prius membrum

$$\int\frac{bedv}{\sqrt{A-V}}$$

itidem convenienti constante auctum, si ponatur $v=a$, praebeat $+\frac{2be}{h}\sqrt{ha}$, quo illud $-\frac{2be}{h}\sqrt{ha}$ destruatur. Atque, ut requiritur, casu $v=a$ fiat $zz=0$.

§ 100. Quaeri ergo debet functio ex v et constantibus excepto a constans ipsi V substituenda talis, ut, si $\frac{bedv}{\sqrt{A-V}}$ integretur constansque addatur faciens integrale $=0$, si $v=0$, tum posito $v=a$ illud abeat in $\frac{2be\sqrt{ha}}{h}$ vel, ut $\frac{dv}{\sqrt{A-V}}$ eodem modo tractatum praebeat, $\frac{2\sqrt{ha}}{h}$ seu $2\sqrt{a:h}$. Haec igitur methodus ad similem deducit solutionem ac primum adhibita (cf. § 68). Nostrum enim $\frac{dv}{\sqrt{A-V}}$ eodem modo tractari oportet ac ibi

$$\frac{dx\sqrt{e}}{\sqrt{A-X}},$$

quae est formula simillima. Plures ergo quam ibi casus non eruentur.

§ 101. Posset hic ad inveniendum V series pro eo assumi, in qua coefficientes essent determinandi. Sed consultius esse duco v in V determinare. Debebit autem esse v functio ipsius V et constantium praeter a et A, in qua, si ponatur $V=A$, prodeat a. Hanc ob rem ponere licet $v=\alpha V+\beta V^2+\gamma V^3+$ etc., ex quo erit $a=\alpha A+\beta A^2+\gamma A^3+$ etc. Sed haec series non semper convenit. Ex casu proposito diiudicari oportet, quales ipsius V potentiae adhiberi debeant.

§ 102. Ad hoc viam monstrasse sufficiet. Si ponatur $dv=\alpha V^m dV$, habebit elementum $\frac{dv}{\sqrt{A-V}}$ hanc proprietatem, ut, si integretur constansque addatur faciens integrale $=0$, si $V=0$, deindeque ponatur $V=A$ (quae conditiones idem praebent ac ante expositae $v=0$ et $v=a$), tum habeatur

$$2\frac{2\cdot4\cdot6\ldots2m}{3\cdot5\cdot7\ldots(2m+1)}\alpha A^{m+\frac{1}{2}}.$$

Ex hoc nunc facile est quasvis formulas loco v assumtas tractare. Hic cum aliis, quot opus est, terminus aequalis poni debet $\sqrt{a:h}$. Determinatisque coefficientibus α, β etc., postquam h in a et a in A expressa fuerint, invenietur curva quaesita, cuius aequatio est $Y=dV:dv$.

Caput II. DE MOTU PUNCTI RECTILINEO ACCEDENTE POTENTIA RELATIVA

§ 103. In hoc Capite vel potentia relativa sola vel cum absoluta coniuncta considerabitur, quatenus eius directio cum directione corporis congruit. Pono primum corpus a sola potentia relativa sollicitari, quo casu et celeritas corporis in quovis loco et tempus, quo quodque spa-

tium absolvitur, investigari debet. Aliaeque quaestiones sequentur, quae in capite praecedente de potentiis absolutis erant propositae. Simili modo versabimur in potentia relativa cum absoluta coniuncta tractanda.

§ 104. Quemadmodum potentias relativas ad absolutas reduci oporteat, ostensum est [in] § 5. Cum enim potentia relativa in corpus motum aliter agat ac in quiescens, quaeri debet potentia absoluta relativae corpore datum celeritatis gradum tenente aequivalens. Id quod ex lege potentiae relativae, secundum quam a celeritate pendet, colligetur. Potentia vero relativa quoque est duplex, vel uniformis vel variabilis, illa, si eius actio solum a celeritate corporis pendet, haec, si simul a loco quomodocunque determinatur.

§ 105. Si corpus, in quod potentia relativa agit, quamcunque habeat celeritatem, a qua actio potentiae pendeat, poterit assignari gradus celeritatis, quem si corpus haberet, vis potentiae aequalis foret vi gravitatis. Celeritas haec repraesentatur altitudine, ex qua grave libere cadens eam acquirit celeritatem. Hanc altitudinem, cum, quanta sit vis relativa, ostendat, vocabo in sequentibus *intensitatem potentiae.* Quae si ubique est eadem, potentia relativa erit uniformis, quia hoc modo eius actio a sola celeritate determinatur. Si vero intensitas varia est in variis locis, tum potentia erit variabilis.

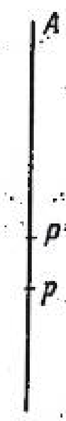


Fig. 23.

§ 106. Praeter intensitatem potentiae cognitam habere oportet *legem potentiae,* secundum quam pro variis corporis celeritatibus variat. Ex hac enim apparebit, quando potentia dupla erit vel tripla vis gravitatis vel aliam quamvis habebit rationem. Id quod ex lege potentiae et intensitate coniunctis apparebit. Lex haec est ratio, quae est inter functiones quasdam celeritatum; ea ergo est simplex, si actiones potentiae sint ut celeritates, duplicata vero, si eae sint ut quadrata celeritatum, et ita de aliis.

§ 107. Est adhuc alia distinctio potentiarum relativarum, quae quidem communis est cum absolutis, in *accelerantes* et *retardantes.* Accelerans est potentia, quae celeritatem corporis auget, retardans vero, quae diminuit. Illa si in spatio quodam inest, vocatur id spatium *promovens.* Spatium autem, quod potentiam retardantem relativam continet, appellatur *resistens* nec non *medium resistens.* Utriusque par est ratio, potentia et accelerans et retardans refertur ad vim gravitatis. Illa quidem ad casum, quo vis gravitatis corpus descendens accelerat, illa ad eum casum, quo vis gravitatis corpus ascendens retardat.

§ 108. Pono itaque primum praeter vim relativam solam agentem eam esse uniformem, i. e. intensitatem eius ubique esse eandem. Sit hoc modo corpus seu potius punctum sollicitatum A, quod moveatur in linea AP (fig. 23). Potentia quidem sit accelerans et celeritas corporis, cui respondens vis relativa, aequalis est gravitati seu intensitas exponatur altitudine c. Descripserit corpus iam spatium $AP=x$, in cuius initio A celeritas corporis respondeat altitudini b, ea vero, quam in P habet, altitudini v. Et propterea pergente corpore in p per $Pp=dx$ celeritati in p respondebit altitudo $v+dv$.

§ 109. Praeterea lex, qua potentia agit, sit ratio quaecunque multiplicata, cuius exponens $=n$. Erit igitur vis, qua corpus in P sollicitatur, ad vim gravitatis ut v^n ad c^n. Posita ergo vi gravitatis 1 erit potentia in P agens $=v^n:c^n$. Quocirca (§§ 34, 35) erit $dv=v^n dx:c^n$ atque $dx=$

$=c^n dv : v^n$. Ex qua invenitur $x = C - c^n : (n-1)v^{n-1}$. Si $x=0$, tum erit $v=b$. Consequenter est $C = c^n : (n-1)b^{n-1}$. Ergo

$$x = \frac{c^n v^{n-1} - c^n b^{n-1}}{(n-1) b^{n-1} v^{n-1}} = \frac{c^n}{n-1}(b^{1-n} - v^{1-n}).$$

Ex qua deducitur haec

$$v = b \sqrt[n-1]{\frac{c^n}{c^n - (n-1) b^{n-1} x}}.$$

§ 110. Tempus, quo spatium AP absolvitur, invenitur ex tempusculo spatioli Pp, quod est $dx : \sqrt{v}$. Id quod loco v valore invento substituto abit in

$$\frac{dx \sqrt[2n-2]{c^n - (n-1) b^{n-1} x}}{\sqrt[2n-2]{b^{n-1} c^n}}.$$

Tempus ergo ipsum, quod exponitur per huius integrale, est

$$b^{-\frac{1}{2}} c^{\frac{-n}{2n-2}} \int dx \, [c^n - (n-1) b^{n-1} x]^{\frac{1}{2n-2}}.$$

Formula haec integrationem admittit, ea ergo peracta invenitur tempus per AP

$$= \frac{C - 2[c^n - (n-1) b^{n-1} x]^{\frac{2n-1}{2n-2}}}{(2n-1) b^{n-\frac{1}{2}} c^{\frac{n}{2n-2}}}.$$

Quia tempus debet esse $=0$, si $x=0$, debet esse $C = 2c^{\frac{2nn-n}{2n-2}}$. Propterea tempus per spatium AP

$$= \frac{2c^{\frac{2nn-n}{2n-2}} - 2[c^n - (n-1) b^{n-1} x]^{\frac{2n-1}{2n-2}}}{(2n-1) b^{n-\frac{1}{2}} c^{\frac{n}{2n-2}}}.$$

Quantitas haec, si per 250 dividatur atque b, c et x in partibus millesimis pedis Rhenani dentur, ostendet (§ 39) numerum minutorum secundorum temporis quaesiti.

§ 111. Si vis, ut modo erat accelerans assumta, ponatur retardans, iisdem manentibus nominibus invenitur $dv = -v^n dx : c^n$ et $dx = -c^n dv : v^n$. Unde eodem quo ante modo oritur

$$x = \frac{c^n b^{n-1} - c^n v^{n-1}}{(n-1) b^{n-1} v^{n-1}}$$

atque ex hac

$$v = b \sqrt[n-1]{\frac{c^n}{c^n + (n-1) b^{n-1} x}}.$$

Tempus autem, quo corpus spatium AP motu retardato percurrit, invenitur esse

$$= \frac{2[c^n + (n-1) b^{n-1} x]^{\frac{2n-1}{2n-2}} - 2c^{\frac{2nn-n}{2n-2}}}{(2n-1) b^{n-\frac{1}{2}} c^{\frac{n}{2n-2}}}.$$

Calculum, quia priori omnino similis est, omitto.

§ 112. Ex utroque et accelerationis et retardationis casu perspicuum est corpus, si initio quiescere ponatur, nullum unquam motum adeptarum. Si enim sit $b=0$, nullam usquam habebit celeritatem adeoque in loco suo semper perseverabit. Idem vero facile intelligitur accidere oportere semper, si potentia agens a sola celerítate pendeat, ea enim celeritate $=0$ est quoque 0, nulla ergo vis adest, quae corpus ex loco suo propellat. Excipiendi autem sunt casus, quibus vel $n=0$ vel numerus negativus. Quo posteriori casu vis in corpus quiescens agens esset infinita.

§ 113. Sit igitur, ut appareat, quid his in casibus eveniat, $n = -m$ et $b=0$. Invenitur casu accelerationis

$$v = \sqrt[-m-1]{\frac{0^{-m-1} c^{-m}}{c^{-m} + (m+1) 0^{-m-1} x}} = \sqrt[m+1]{(m+1) c^m x}.$$

In retardatione corpus similiter, sed in partem contrariam movebitur. Si $m=0$ adeoque et $n=0$, erit $v=x$. Hoc ergo casu aeque ac a gravitate afficietur.

Idem valet, si non solum n est numerus negativus, sed et $n-1$, dummodo ergo sit $n<1$ seu $-m<+1$. Tempus autem, quo hoc casu spatium x percurritur, est

$$= \frac{2c^{\frac{-2mm-m}{2m+2}} - 2[c^{-m} + (m+1) 0^{-m-1} x]^{\frac{2m+1}{2m+2}}}{-(2m+1) 0^{-m-\frac{1}{2}} c^{\frac{m}{2m+2}}} =$$

$$= \frac{2(m+1)^{\frac{2m+1}{2m+2}} 0^{\frac{-2m-1}{2}} x^{\frac{2m+1}{2m+2}}}{(2m+1) 0^{\frac{-2m-1}{2}} c^{\frac{m}{2m+2}}} = \frac{2}{2m+1} \sqrt[2m+2]{\frac{(m+1)^{2m+1} x^{2m+1}}{c^m}}.$$

[Tempus hoc] fit infinitum, si fuerit $n = \frac{1}{2}$.

§ 114. Perspicitur praeterea in casu accelerationis corpus non ultra certum terminum pervenire posse. Si enim sumatur

$$x = \frac{c^n}{(n-1) b^{n-1}},$$

ibi celeritas erit infinita. Si x maior capiatur, fiet celeritas imaginaria, id quod indicat eo corpus nunquam pertingere posse. Datum vero locum cum attigerit, retro, unde venerat, revertetur iisdem in quolibet loco celeritatibus. Tempus autem, quo hunc limitem ex A attingit, est

$$= \frac{2c^n}{(2n-1) b^n} \sqrt{b}.$$

§ 115. In casu retardationis, si celeritas initialis sit infinita seu $b = \infty$, invenietur

$$v = \sqrt[n-1]{\frac{b^{n-1} c^n}{(n-1) b^{n-1} x}} = \sqrt[n-1]{\frac{c^n}{(n-1) x}}.$$

Tempus vero, quo hac posita conditione spatium x percurritur, est

$$=\frac{2\,(n-1)^{\frac{2n-1}{2n-2}}x^{\frac{2n-1}{2n-2}}}{(2n-1)\,c^{\frac{n}{2n-2}}}=\frac{2}{2n-1}\sqrt[2n-2]{\frac{(n-1)^{2n-1}x^{2n-1}}{c^{n}}}.$$

§ 116. Retento casu retardationis, sed quacunque assumta celeritate initiali investigemus, ubi celeritas fiat $=0$. Inventa est [in] § 111 haec aequatio

$$x=\frac{c^nb^{n-1}-c^nv^{n-1}}{(n-1)\,b^{n-1}v^{n-1}}.$$

Erit ergo celeritas corporis $=0$, postquam percurrit spatium

$$=\frac{c^nb^{n-1}-c^n0^{n-1}}{(n-1)\,b^{n-1}0^{n-1}}.$$

Hoc spatium ergo erit infinitum, quoties $n>1$, finitum vero semper, si $n<1$. Sit ergo $n=1-m$, erit spatium, quo percurso ad quietem reducitur corpus,

$$=\frac{c^{1-m}}{mb^{-m}}=\frac{b^m}{mc^{m-1}}$$

et tempus, quo hoc spatium absolvitur, est

$$=\frac{2b^{m-1}}{(2m-1)\,c^{m-1}}\sqrt{b}.$$

§ 117. Lex potentiae, quae distinguit et quasi limes est harum legum seu valorum ipsius n, qui tantum inter se differunt, est ratio simplex, qua $n=1$. Motus, qui hoc casu producitur, non continetur in iam tractatis, sed pecu[liariter ..]

. . . . *

[Caput III. DE MOTU PUNCTI CURVILINEO A POTENTIIS ABSOLUTIS SOLLICITATI]

. . . .

[§ 176. ...]ac si corpus in tangente motu rectilineo moveretur. Sit igitur celeritas corporis in M secundum T directa tanta, quanta ex altitudine v generari potest, et vis tangentialis secundum MT agens sit ad vim gravitatis ut q ad 1. Erit, dum corpus per $Mm=ds$ progreditur, $dv=qds$. Si vis tangentialis fuerit motui contraria, fiet q negativum eritque $dv=-qds$. Actio haec vis tangentialis non mutatur saltem in instanti, quantacunque affuerit vis normalis.

§ 177. Vis normalis celeritatem corporis non afficit, sed solum directionem immutat atque efficit, ut id non in linea recta, sed curva progrediatur. Curvedinem vero ex circuli aeque curvi radio metiri solemus, qui vocatur *radius osculi* vel *curvedinis*. Investigemus ergo radium curvedinis, quam vis normalis producit. Habeat corpus in M celeritatem iuxta $M\mu$ normalem ad MP ex altitudine v genitam eaque progrediatur tempusculo infinite parvo in μ (fig. 24). Ponatur $M\mu=ds$. Sit vis normalis ad vim gravitatis ut p ad 1 protraheretque ea corpus ex M, si quiesceret, eodem tempusculo in r. Erit altitudo generans celeritatem, quam in r habebit, $=p\cdot Mr$. Hac celeritate, quia potentia interea uniformis haberi potest, corpus eodem tempusculo poterit percurrere spatium $2Mr$. Erit igitur hoc tempusculum $=\frac{2Mr}{\sqrt{Mr\cdot p}}$. Huic tempusculo aequale est tempusculum, quo corpus motu insito elementum $M\mu$ percurrit, quod est $\frac{ds}{\sqrt{v}}$. Est igitur $\frac{2Mr}{\sqrt{p\cdot Mr}}=\frac{ds}{\sqrt{v}}$ et $2\sqrt{Mr}=ds\sqrt{\frac{p}{v}}$ atque $Mr=\frac{pds^2}{4v}$.

§ 178. Agente ergo hac potentia normali corpus post dictum tempusculum non in μ, sed in m reperietur ducta μm parallela ipsi MP et rm parallela ipsi $M\mu$ (§ 22). Quapropter via corporis censenda est arcus circuli, cuius diameter in MP incidit, quia MP perpendicularis est ad tangentem curvae, quam corpus describit, et qui transit per punctum m. Concipiatur ducta chorda Mm, quae non differet ab ipso arcu Mm. Erit $Mr:Mm=Mm$: diametrum circuli aeque curvi. Dicatur eius radius r. Erit $2r=\frac{Mm^2}{Mr}$. Deinde, quia $Mrm\mu$ est parallelogrammum rectangulum, in quo Mr est infinities minor quam $M\mu$, nam haec celeritate finita eodem tempore describitur, quo eius Mr duplum celeritate infinite parva, erit $Mm=M\mu=ds$. Et hanc ob rem habebitur $2r=\frac{4vds^2}{pds^2}$ seu $r=\frac{2v}{p}$. Actio haec potentiae normalis non immutatur in instanti saltem, quantacunque vis tangentialis interea simul egerit (§ 25).

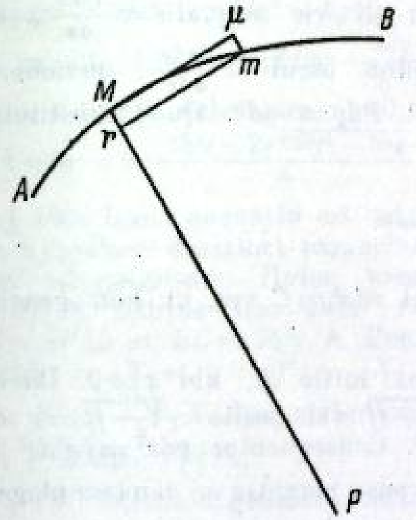


Fig. 24.

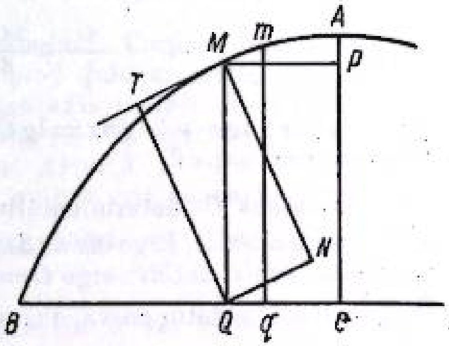


Fig. 25.

§ 179. Tendat potentia ubique ad eandem plagam et corpus proiectum ab ea agitatum describat lineam curvam BMA (fig. 25). Quae qualis sit et quomodo corpus in ea moveatur, sum investigaturus. Ducatur ex initio B recta BC angulum rectum faciens cum directionibus potentiae. Eaque assumatur pro axe, in quo abscissa BQ sit x et applicata $QM=y$. Habeat corpus in M celeritatem ex altitudine v acquisitam trahaturque versus Q potentia, quae sit ad vim gravitatis ut P ad 1, pendeatque P utcunque a situ puncti M. Sit porro celeritas in B ex altitudine b acquisita et sinus anguli, quem curva in B cum BC constituit, sit ad sinum totum ut f ad 1.

§ 180. Promota applicata in situm proximum mq erit $Qq=dx$, $rm=$ $=dy$, $Mm=\sqrt{dx^2+dy^2}$. Sit vero $\sqrt{dx^2+dy^2}=ds$ brevitatis causa. Iam

* In manuscripto hic duae plagulae desunt. — *G. M.*

potentia P resolvatur in laterales secundum MN normalem in curvam et MT tangentem agentes. Erit $MQ:MN$ (completo parallelogrammo $MTQN$) $= P$: vim normalem et $MQ:MT = P$: vim tangentialem. Est vero $MQ:MN = Mm:Mr = ds:dx$ et $MQ:MT = Mm:rm = ds:dy$. Est igitur vis normalis $= \frac{Pdx}{ds}$ et tangentialis $= \frac{Pdy}{ds}$.

§ 181. Quia motus corporis versus A tendit, vis vero tangentialis versus MT trahit, erit ea contraria motui eumque retardabit. Quare, si celeritas in m sit ex altitudine $v + dv$ acquisita, erit

$$dv = \frac{-Pdy}{ds}\, ds = -Pdy.$$

Atque dicto radio osculi in M r, cum sit vis normalis $= \frac{Pdx}{ds}$, erit $r = \frac{2vds}{Pdx}$. Ponatur ds constans, erit radius osculi $= \frac{dsdy}{ddx}$, quamobrem $Pdxdy = 2\, vddx$. Ex illa aequatione est $Pdy = -dv$. Quod substitutum in hac dabit $dxdv + 2\, vddx = 0$ vel

$$\frac{dv}{v} + \frac{2ddx}{dx} = 0.$$

Unde oritur $\lg v + 2 \lg dx = \lg C$ vel $vdx^2 = C$ vel, ut homogeneitas conservetur, $vdx^2 = Cds^2$.

§ 182. Constans C determinabitur ex initio B, ubi $x = 0$. Ibi erit $v = b$ et $dy:ds = f:1$. Ergo $dx = ds\sqrt{1-ff}$ vel posito $\sqrt{1-ff} = g$ erit $dx = gds$, unde $bg^2ds^2 = Cds^2$, ergo $C = bg^2$. Consequenter $vdx^2 = bg^2ds^2$ vel $v = \frac{bg^2ds^2}{dx^2}$. Hinc, si detur curva, quam corpus a potentia ad eandem plagam, nempe secundum applicatas tendente sollicitatum describit, cognoscetur celeritas in loco quovis, etiamsi ipsa vis non cognoscatur. Est vero celeritas ipsa ut

$$\sqrt{\frac{bg^2ds^2}{dx^2}},$$

i. e. ut $\frac{ds}{dx}$. Hinc perspicuum est celeritatem fore minimam in A, ubi tangens parallela est axi BC.

§ 183. Valor pro v inventus $\frac{bg^2ds^2}{dx^2}$ substituatur in aequatione $2\, vddx = Pdxdy$, habebitur $2bg^2ds^2ddx = Pdx^3dy$. Ex qua aequatione, si loco P ponatur valor in x et y, prout determinata est, invenietur aequatio pro curva, quam corpus describit. Quae porro, si cognita fuerit, innotescet simul, quanta sit corporis in quovis loco celeritas.

§ 184. Ex aequatione $v = \frac{bg^2ds^2}{dx^2}$ facile innotescit tempus, quo corpus arcum BM descripsit. Est enim eius elementum $\frac{ds}{\sqrt{v}}$ aequale $\frac{dx}{g\sqrt{b}}$. Huius integrale $\frac{x}{g\sqrt{b}}$ dabit tempus quaesitum. Ex hoc apparet tempora per arcus diversos esse inter se ut abscissas respondentes et in diversis pro-

iectionibus tempora, quibus arcus quicunque describuntur, esse in ratione composita ex directa abscissarum respondentium et reciproca celeritatum initialium et sinuum angulorum, quos directiones motus initiales cum directionibus potentiarum constituunt.

Corpus ergo in axe motum aequabiliter celeritate ex altitudine bgg acquisita ubique respondebit corpori describenti curvam. Similiter, si corpus proiectum in recta uniformiter progrederetur celeritate ex b acquisita, easdem applicatas simul attingeret.

§ 185. Sit potentia P constans, qualis est gravitas, ponaturque ea h dicta vi gravitatis 1. Habebitur ergo aequatio $2bg^2ds^2ddx = hdx^3dy$, quae reducetur ad hanc $\frac{2bg^2ds^2ddx}{dx^3} = hdy$, cuius integralis est $\frac{-bg^2ds^2}{dx^2} + C = hy$. Si $y = 0$, tum est $dx = gds$. Ergo $C = b$. Consequenter $bdx^2 - bg^2ds^2 = hydx^2 = bdx^2 - bg^2dx^2 - bg^2dy^2$. Haec dat $dx\sqrt{bf^2 - hy} = gdy\sqrt{b}$ propter $1 - gg = ff$. Unde est $dx = \frac{gdy\sqrt{b}}{\sqrt{bf^2 - hy}}$ porroque* $x = \frac{C - 2g\sqrt{b^2f^2 - bhy}}{h}$. Quia, si $y = 0$, debet esse $x = 0$, erit $C = 2bfg$.

Unde $x = \frac{2bfg - 2g\sqrt{b^2f^2 - bhy}}{h}$ vel $hx^2 = 4bfgx - 4bggy$.

§ 186. Haec aequatio est ad parabolam. Corpus ergo proiectum in hac hypothesi describet parabolam, quod quidem multo facilius iam dudum est ostensum. Huius parabolae axis incidit in applicatam, ubi $y = bf^2:h$, eritque hoc casu $x = 2bfg:h$. Si igitur AC sit axis, erit $AC = bf^2:h$ et $BC = 2bfg:h$. Ponatur $AP = X$ et $PM = Y$. Erit $X = 2bfg:h - Y$ et $y = bf^2:h - X$. Ex quibus erit aequatio inter X et Y haec $Y^2 = \frac{4bgg}{h} X$. Parameter ergo parabolae est $4bgg:h$ et distantia foci a vertice $bgg:h$.

§ 187. Altitudo generans celeritatem in M est $bg^2ds^2:dx^2$. Haec vero expressio est $= b - hy$. Quia vero $y = \frac{bf^2}{h} - X$, erit

$$v = b - bf^2 + hX = bg^2 + hX.$$

Distantia puncti M a foco est $bgg:h + X$. Si ergo fuerit potentia aequalis vi gravitatis seu $h = 1$, erit $v =$ distantiae a foco. Corpus ergo grave proiectum describet parabolam et celeritas in quovis loco tanta erit, quanta ex altitudine, quae aequalis est distantiae corporis a foco parabolae, acquiri potest.

§ 188. Si curva BMA, quam corpus describit, fuerit data una cum celeritate initiali in B, quae sit ex altitudine, poterit determinari potentia in quovis loco corpus versus axem trahens faciensque, ut id propositam curvam describat. Est enim (§ 183) $P = \frac{2bg^2ds^2ddx}{dx^3dy}$ vel, quia radius osculi $r = \frac{dsdy}{ddx}$, erit $P = \frac{2bg^2ds^3}{rdx^3}$. Ex aequatione data ergo reperietur, quid sit P.

Denotat g cosinum anguli, quem curva in B cum axe constituit, qui si fuerit rectus, debet esse P infinities minor quam vis gravitatis, celeritas autem ipsa ubique erit 0. Hic ergo casus est imaginarius.

* In sequente calculo §§ 185—187 factor $1:h$ pro valoribus x ab Eulero in manuscripto omissus hic ab editore restituitur. — *G. M.*

§ 189. Fieri tamen potest, si fuerit b ∞, verum motum corpori inesse posse. Id quod fiet, si bg^2 sit quantitas finita.

Sit curva proposita BMA quadrans circuli, si celeritas in vertice A ex altitudine c genita. Est vero (§ 182) $v=\frac{bg^2ds^2}{dx^2}$, in A vero est $dx=ds$, quare erit $c=bg^2$ et propterea $P=\frac{2cds^3}{rdx^3}$. Sit radius circuli $=a$. Erit $r=a$ et $yy=2ax-xx$ atque $ds=\frac{adx}{\sqrt{2ax-xx}}$. Unde

$$P=\frac{2a^2c}{(2ax-xx)\sqrt{2ax-xx}}=\frac{2aac}{y^3}.$$

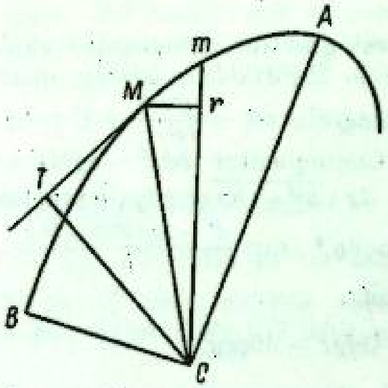


Fig. 26.

Debet ergo potentia esse reciproce ut cubus applicatae atque $v=\frac{aac}{yy}$.

§ 190. Tendat nunc potentia ad punctum fixum C corpusque proiectum atque ab ea potentia sollicitatum describat lineam curvam BMA (fig. 26). Sit id in loco quocunque M voceturque eius ab C distantia y et vis, qua in M ad C trahitur, P posita vi gravitatis 1. Ducatur in M tangens MT in eamque demittatur ex C perpendiculum CT, quod dicatur p. Erit $MT=\sqrt{yy-pp}$, quae brevitatis causa sit t. Erit vis normalis $=\frac{Pp}{y}$ et vis tangentialis $=\frac{Pt}{y}$.

§ 191. Sit in M celeritas ex altitudine v genita et in m ex altitudine $v+dv$ radiusque osculi in M sit r. Ducta Cm erit $y+dy$ vel ex M in Cm ducto perpendiculo Mr erit $mr=dy$ et propter triangula CMT, Mmr similia erit $Mr=\frac{pdy}{t}$ atque $Mm=\frac{ydy}{t}$. Cum iam vis tangentialis sit contraria motui corporis, erit (§ 176) $dv=-\frac{Pt}{y}\frac{ydy}{t}=-Pdy$ et (§ 178) $r=\frac{2vy}{Pp}$. Est vero radius osculi $r=\frac{ydy}{dp}$. Quare erit $\frac{ydy}{dp}=\frac{2vy}{Pp}$ vel $Ppdy==2vdp$.

§ 192. Ex harum duarum aequatio prior est $Pdy=-dv$, quod substitutum in posteriore dabit $2vdp+pdv=0$ vel $ppv=C$. Sit, ubi est $p=f$, ibi $v=b$, id quod accidere ponamus in puncto B. Erit $C=bff$, erit ergo $ppv=bff$ et $v=\frac{bff}{pp}$. Si proportiones solum sequi velimus, quia bff est constans, erit v reciproce ut p^2, ergo $\sqrt{v}$ vel celeritas corporis in quovis loco reciproce est ut p, i. e. ut perpendiculum ex puncto fixo C in tangentem demissum. Hac ratione ex data curva, quam corpus circa punctum fixum tanquam centrum describit, innotescet celeritas in quovis loco vel potius ratio, quam celeritates in diversis punctis inter se tenent.

§ 193. Tempus, quo arcus BM absolvitur, quod sit T, invenietur ex cognita celeritate. Elementum temporis seu tempus [per] Mm est

$$\frac{Mm}{\sqrt{v}}=\frac{pydy}{tf\sqrt{b}}=\frac{y\cdot Mr}{f\sqrt{b}},$$

quia $Mr=\frac{pdy}{t}$. Est ergo elementum temporis $dT=\frac{2\cdot MCm}{f\sqrt{b}}$. Ergo integrum tempus, quo arcus BM percurritur, est $=\frac{2\cdot \text{areae } BCM}{f\sqrt{b}}$. Tempora igitur, si ad rationem tantum respiciamus, sunt ut areae circa centrum C resectae. Rectae ex C ad peripheriam curvae ductae, ut CM, vocantur *radii vectores*. Quamobrem tempora dicuntur esse in ratione spatiorum, quae a radio vectore sunt percursa.

§ 194. Aequatio [in] § 191 inventa $Ppdy=2vdp$, si loco v ponatur eius valor $\frac{bff}{pp}$, abibit in hanc $Ppdy=\frac{2bffdp}{pp}$ vel $Pp^3dy=2bffdp$. Ex qua aequatione, si detur P in y vel p vel utraque, prout fuerit propositum, invenietur aequatio ad curvam quaesitam. Et contra, si curva fuerit data una cum puncto, ad quod potentiae tendere debeant, reperietur potentia in quovis loco efficiens, ut corpus eam describat, erit nimirum $P=\frac{2bffdp}{p^3dy}$, ubi bff definitur ex data celeritate in dato loco curvae.

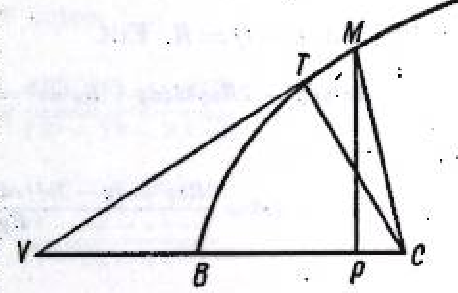


Fig. 27.

§ 195. Aequatio, quae hoc modo ad curvam invenitur a corpore pro lubitu proiecto et a vi data P ubique sollicitato [descriptam], est inter distantiam corporis a centro y et inter perpendiculum ad tangentem ex cento p. Cum vero ut plurimum difficile sit hinc iudicare, qualis sit curva, utrum algebraica an transcendens, reducam aequationem hanc generalem ad aequationem inter coordinatas orthogonales, quem ad modum curvae exprimi solent. Ponam vero axem rectam CB ex centro C ad punctum B ductam, quia in B celeritas corporis et perpendiculum ex C in tangentem in B datur.

§ 196. Producatur tangens MT, quoad axem CB in V secat, et ex M demittatur applicata MP, quae sit z, atque abscissa $CP=x$ (fig. 27). Erit subtangens $PV=\frac{-zdx}{dz}$ atque $CV=\frac{xdz-zdx}{dz}$. Porro est

$$MV=\sqrt{z^2+\frac{z^2dx^2}{dz^2}}=\frac{z}{dz}\sqrt{dx^2+dz^2}.$$

Est vero

$$MV\left(\frac{z}{dz}\sqrt{dx^2+dz^2}\right):MP\,(z)=CV\left(\frac{xdz-zdx}{dz}\right):CT\,(p).$$

Quapropter erit

$$p=\frac{xdz-zdx}{\sqrt{dx^2+dz^2}}\quad\text{et}\quad y=\sqrt{x^2+z^2}.$$

Commodius erit aequationem inter y et x investigare, ne $\sqrt{x^2+z^2}$ calculum turbet. Eritque ob $z=\sqrt{yy-xx}$

$$p=\frac{(xdy-ydx)\sqrt{y}}{\sqrt{ydx^2+ydy^2-2xdxdy}}.$$

§ 197. Habemus ex praemissis aequationem naturam curvae continentem hanc $Pp^3dy = 2bffdp$. Pendeat P prorsus ab y et constantibus, ita ut potentia, quae corpus ad punctum C pellit, ex distantia a C determinetur. Sitque $\int Pdy = Q$ fiatque $Q = 0$, si $y = BC = a$. Erit ergo Q functio ipsius y. Est vero superiore aequatione integrata

$$\int Pdy = C - \frac{bff}{pp} = Q.$$

Quia nunc, si $Q = 0$ seu $y = a$, fit $p = f$, erit $C = b$. Quamobrem habetur haec aequatio $bpp - bff = Qpp$, ex qua loco p valore suo substituto orietur

$$(b - Q)\, y\, (xdy - ydx)^2 = bff\,(ydx^2 + ydy^2 - 2xdxdy).$$

§ 198. Sit $b - Q = R$. Erit

$$Rx^2ydy^2 - 2Rxy^2dxdy + Ry^3dx^2 = bffydx^2 + bffydy^2 - 2bffxdxdy.$$

Ergo

$$dx^2 = \frac{2Rxy^2dxdy - 2bffxdxdy + bffydy^2 - Rx^2ydy^2}{Ry^3 - bffy}$$

et

$$dx = \frac{Rxy^2dy - bffxdy \pm fdy\sqrt{(yy - xx)(bRyy - bbff)}}{Ry^3 - bffy} =$$

$$= \frac{xdy\sqrt{Ryy - bff} \pm fdy\sqrt{b(yy - xx)}}{y\sqrt{Ryy - bff}}.$$

Unde resultat haec aequatio

$$\frac{ydx - xdy}{\sqrt{yy - xx}} = \frac{\pm fdy\sqrt{b}}{\sqrt{Ryy - bff}}.$$

Hinc locus invenitur, ubi radius CM est in curvam perpendicularis; accidit, ubi $dy = 0$ seu $Ryy = bff$.

§ 199. Haec aequatio nunc facile ad aliam reducitur, in qua indeterminatae sunt a se invicem separatae. Ponatur tandum $x = uy$. Erit $\sqrt{yy - xx} = y\sqrt{1 - uu}$ et $ydx - xdy = yydu$. Consequenter habebitur haec aequatio

$$\frac{du}{\sqrt{1 - uu}} = \frac{\pm fdy\sqrt{b}}{y\sqrt{Ryy - bff}}.$$

Quia hic R a solo y pendere ponitur, indeterminatae non amplius sunt permixtae. Quamobrem, si R determinatur, innotescet, utrum curva sit algebraica an vero non. Algebraica vero erit, si sit

$$\int \frac{fdy\sqrt{b}}{y\sqrt{Ryy - bff}}$$

arcus circuli commensurabilis cum arcu circuli, qui per $\int \frac{du}{\sqrt{1 - uu}}$ exprimitur.

[Nota marginalis.] Area vero BCM

$$= \int \frac{\pm fydy\sqrt{b}}{2\sqrt{Ryy - bff}} = \int \frac{y\,(ydx - xdy)}{2\sqrt{yy - xx}},$$

tempus ergo, quo BM describitur, est $= \int \frac{ydy}{\sqrt{Ryy - bff}}$.*

§ 200. Toties igitur algebraica erit curva, quoties $\frac{fdy\sqrt{b}}{y\sqrt{Ryy - bff}}$ ad hanc formam reduci potest $\frac{AdY}{\sqrt{B^2 - Y^2}}$. Erit autem

$$\int \frac{AdY}{\sqrt{B^2 - Y^2}} = \frac{A}{2\sqrt{-1}} \lg \frac{\sqrt{B^2 - Y^2} + Y\sqrt{-1}}{\sqrt{B^2 - Y^2} - Y\sqrt{-1}}$$

et

$$\int \frac{du}{\sqrt{1 - uu}} = \frac{1}{2\sqrt{-1}} \lg \frac{\sqrt{1 - uu} + u\sqrt{-1}}{\sqrt{1 - uu} - u\sqrt{-1}}.$$

Haec integralia, cum debeant esse aequalia, habebitur adiecta constante haec aequatio

$$\left(\frac{\sqrt{B^2 - Y^2} + Y\sqrt{-1}}{\sqrt{B^2 - Y^2} - Y\sqrt{-1}}\right)^A = \frac{\sqrt{1 - uu} + u\sqrt{-1}}{\sqrt{1 - uu} - u\sqrt{-1}}\, C.$$

Eritque

$$u = \frac{\left(\sqrt{B^2 - Y^2} + Y\sqrt{-1}\right)^A - C\left(\sqrt{B^2 - Y^2} - Y\sqrt{-1}\right)^A}{2B^A\sqrt{-C}}.$$

Hic vero C huius modi debet habere formam, v. g.

$$\frac{\sqrt{1 - gg} + g\sqrt{-1}}{\sqrt{1 - gg} - g\sqrt{-1}} = C.$$

§ 201. Sit $C = \left(\frac{\sqrt{B^2 - E^2} + E\sqrt{-1}}{\sqrt{B^2 - E^2} - E\sqrt{-1}}\right)^A$, quo ex calculo imaginaria sponte excedant. Erit

$$u = \frac{\left(\sqrt{B^2 - E^2} - E\sqrt{-1}\right)^A \left(\sqrt{B^2 - Y^2} + Y\sqrt{-1}\right)^A}{2B^{2A}\sqrt{-1}} -$$

$$- \frac{\left(\sqrt{B^2 - E^2} + E\sqrt{-1}\right)^A \left(\sqrt{B^2 - Y^2} - Y\sqrt{-1}\right)^A}{2B^{2A}\sqrt{-1}}$$

* In his formulis in manuscripto signa integrationis omissa sunt. Correxit *G. M.*

Apparet hinc, quoties A fuerit numerus rationalis, tum aequationem ab imaginariis liberari posse, quod quidem eo operosius erit, quo maioribus constet numeris A. Ponamus $A=1$. Erit

$$u=\frac{2Y\sqrt{B^2-E^2}-2E\sqrt{B^2-Y^2}}{2B^2}$$

seu

$$B^2u=Y\sqrt{B^2-E^2}-E\sqrt{B^2-Y^2}.$$

§ 202. Hac ratione pro quovis casu invenietur aequatio inter u et y, in qua si loco u ponatur $x:y$, habebitur aequatio inter x et y, prout desideratur, nimirum

$$x=\frac{(\sqrt{B^2-E^2}-E\sqrt{-1})^A(\sqrt{B^2-Y^2}+Y\sqrt{-1})^A y}{2B^{2A}\sqrt{-1}}-$$
$$-\frac{(\sqrt{B^2-E^2}+E\sqrt{-1})^A(\sqrt{B^2-Y^2}-Y\sqrt{-1})^A y}{2B^{2A}\sqrt{-1}}.$$

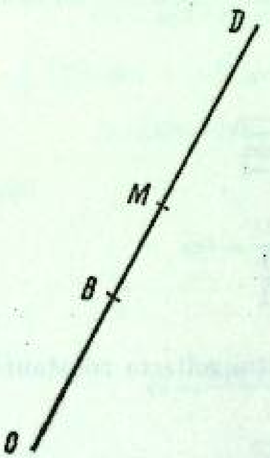


Fig. 28.

Consultius est, antequam haec aequatio reducatur, ex conditionibus datis determinare, quid sit constans E. Haec vero determinabitur ex hac conditione, quod si fiat $x=a$, etiam fiat $y=a$. Hoc modo aequatio simplicior reddetur faciliorque reductu.

§ 203. Pro celeritate in quovis loco vel in quavis a centro distantia determinanda habetur haec aequatio $dv=-Pdy$, unde $v=C-\int Pdy$. Positum vero est $\int Pdy=Q$ atque Q evanescit, si $y=a$. Debet vero esse $v=b$, si $y=a$, quia tum corpus in B extat, ubi eius celeritas tanta esse ponebatur. Erit igitur $C=b$ atque $v=b-Q=R$ (§ 198), ex qua aequatione apparet corpus in iisdem a centro [distantiis] eandem habere celeritatem, quae pendet a celeritate, quam in distantia a [a] centro C habet, neque ad directionem, secundum quam initio proiciebatur, attendendum esse.

§ 204. Si igitur corpus in linea recta DC ad centrum C ab eadem potentia P sollicitatum moveatur (fig. 28) atque in B sumta $BC=a$ celeritas fuerit ex altitudine b acquisita, erit in quovis loco M, si $CM=y$, celeritas aequalis ei, quam, si lineam curvam describeret, in eadem a centro distantia y haberet. Ex his punctum D inveniri poterit, in quo celeritas est nulla; erit videlicet ibi, ubi est $b=Q$. Ergo, cum sit Q functio ipsius y, quaeratur ex hac aequatione y et valor resultans dabit longitudinem CD. Altitudo haec CD dicatur semper K.

§ 205. Accedamus ad casus particulares et ponamus primo vim P ubique esse eandem, nempe $=h$. Erit $\int Pdy=hy-ha=Q$ atque $R=b+ha-hy$. Consequenter

$$\frac{du}{\sqrt{1-uu}}=\frac{\pm fdy\sqrt{b}}{y\sqrt{byy+hayy-hy^3-bff}}.$$

Curva descripta erit normalis in radium vectorem, ubi est $dy=0$ adeoque ubi $byy+hayy-hy^3-bff=0$, in qua aequatione, quot insunt radices reales, in totidem a C distantiis radius vector erit maximum vel minimum.

Sit in ipso puncto B curva ad BC normalis. Erit $f=a$ adeoque $byy+hayy-hy^3-baa=0$. Haec dabit aequationes $y-a=0$, $by+ba-hyy=0$ et harum posterior has

$$y=\frac{b+\sqrt{bb+4abh}}{2h} \text{ et } y=\frac{b-\sqrt{bb+4abh}}{2h}.$$

Accidit ergo in tribus distantiis.

§ 206. Maneat $f=a$. Erit

$$\frac{du}{\sqrt{1-uu}}=\frac{\pm ady\sqrt{b}}{y\sqrt{(y-a)(by+ba-hyy)}}.$$

Haec aequatio algebraica esse nequit, quia posterius membrum non talem, qualem assignavimus, habet formam, tamen per quadraturas facile construitur. Posterior vero aequatio etiamsi videatur ob factum $f=a$ particularior priore, tamen omnes curvas sub se comprehendit, quas corpus in hac hypothesi describere potest. Semper enim erit locus, quo radius vector ad curvam est normalis, isque ergo in B poterit accipi. Erit hic $K=a+\frac{b}{h}$. Tempus vero, quo arcus BM absolvitur, est

$$=\int\frac{ydy}{\sqrt{(y-a)(ab+by-hyy)}}$$

. . . . *

[De motu corporis in ratione distantiarum a centro directe attracti]

§ 211. Tempus, quo totus ellipsis perimeter absolvitur, est aequale duplae ellipsis areae divisae per $a\sqrt{b}$ (§ 193 et ob $f=a$). Si nunc diversae ellipses circa centra talem habentia vim attractivam describantur, erit tempus, quo una absolvitur, ut factum ex axibus coniugatis divisum per $a\sqrt{b}$, i. e. ut $\sqrt{h}$.** Quare, si h fuerit in omnibus centris eadem, erunt omnia tempora periodica inter se aequalia. Idem locum habet, si plura corpora circa idem centrum revolvantur, cuius attractiones sunt ut distantiae.

§ 212. Sint nunc potentiae P reciproce ut quadrata distantiarum, qui est casus maxime celebris. Erit $P=h^2:y^2$ et $Q=\frac{hh}{a}-\frac{hh}{y}$ atque $R=\frac{aby-hhy+ahh}{ay}$. Erit igitur

$$\frac{du}{\sqrt{1-uu}}=\frac{\pm fdy\sqrt{ab}}{y\sqrt{aby^2-hhy^2+ahhy-abff}}.$$

---

* In manuscripto hic plagulae octava deest. — *G. M.*
** Hic h denotat constantem in aequatione $P=y:h$. — *G. M.*

Erit ergo curva in radium normalis, ubi est

$$y = \frac{ahh \pm \sqrt{a^2h^4 - 4abffhh + 4aabbff}}{2hh - 2ab}.$$

Quia f non maior esse potest quam a, hic valor nunquam fieri potest imaginarius. Sit igitur in B curva normalis ad BC. Erit $f = a$ atque

$$y = \frac{ahh \pm (ahh - 2aab)}{2hh - 2ab} = +a \text{ vel } \frac{aab}{hh - ab}.$$

§ 213. Posito igitur $f = a$ erit

$$\frac{du}{\sqrt{1-uu}} = \frac{\pm ady\sqrt{ab}}{y\sqrt{aby^2 - hhy^2 + ahhy - a^3b}}.$$

Ponatur $y = \frac{1}{p}$. Erit

$$\frac{du}{\sqrt{1-uu}} = \frac{\mp adp\sqrt{ab}}{\sqrt{ab - hh + ahhp - a^3bpp}}.$$

Ponatur $p = \frac{q}{a\sqrt{ab}} + \frac{hh}{2a^2b}$. Erit

$$\frac{du}{\sqrt{1-uu}} = \frac{\pm dq}{\sqrt{\frac{(2ab - hh)^2}{4ab} - qq}}.$$

. . . .

Quae posterior fractio comparata cum $\frac{AdY}{\sqrt{B^2 - Y^2}}$ dabit $A = 1$ (signum enim $+$ solum adhibeamus) et $Y = q$ et $B = \frac{2ab - hh}{2\sqrt{ab}}$.

§ 214. Si fit $x = a$, fiet quoque $y = a$. Si autem est $y = a$, erit $p = \frac{1}{a}$ et $q = \frac{2ab - hh}{2\sqrt{ab}} = B = Y$. Ex § 202 aequatione ergo invenietur constans E. Habebitur vero aequatio haec

$$2B^2\sqrt{-1} = B\sqrt{-1}\left(\sqrt{B^2 - E^2} - E\sqrt{-1}\right) + B\sqrt{-1}\left(\sqrt{B^2 - E^2} + E\sqrt{-1}\right)$$

vel $B = \sqrt{B^2 - E^2}$ seu $E = 0$. Quo invento reperietur aequatio

$$\frac{2B^2x\sqrt{-1}}{y} = B\sqrt{B^2 - Y^2} + BY\sqrt{-1} - B\sqrt{B^2 - Y^2} + BY\sqrt{-1} = 2BY\sqrt{-1}$$

vel $Bx = Yy = qy$. Est vero $q = \frac{2aab - hhy}{2y\sqrt{ab}}$. Ergo $2abx - hhx = 2aab - hhy$.

§ 215. Est autem $y = \sqrt{xx + zz}$. Quapropter $2aab - 2abx + hhx = hh\sqrt{xx + zz}$ et sumtis quadratis

$$4a^4b^2 - 8a^3b^2x + 4a^2bh^2x + 4a^2b^2x^2 - 4abh^2x^2 = h^4zz.$$

Ponatur

$$x = t + \frac{2a^2b - ah^2}{2ab - 2h^2}$$

et habebitur aequatio haec

. . . .

$$h^4z^2 = \frac{a^3bh^4}{hh - ab} + (4aabb - 4abhh)\,tt.$$

Haec aequatio, si $hh > ab$, est ad ellipsin, si vero $hh < ab$, ad hyperbolam, si $hh = 2ab$, ad circulum, si $hh = ab$, ad parabolam. Eius abscissae t a centro in alterutro axe sunt sumtae, semiaxes vero sunt $\frac{ahh}{2hh - 2ab}$ et $a\sqrt{\frac{ab}{hh - ab}}$. Ratio ergo axium est ut hh ad $2\sqrt{ab(hh - ab)}$. Haec ratio, quia $hh > ab$, semper est maioris inaequalitatis, praeter casum, quo $hh = 2ab$, ubi est ratio aequalitatis.

§ 216. Semidistantia focorum est

$$a\sqrt{\frac{h^4}{4(hh - ab)^2} - \frac{ab}{hh - ab}} = \frac{ahh - 2aab}{2hh - 2ab},$$

quae est ea ipsa fractio, quae ipsi t adiuncta dat x. Cum igitur t in centro incipiant, erit initium abscissarum x in foco. Quamobrem in hac hypothesi corpus ellipsin describet, cuius alteruter focus est in centro C, ad quod potentiae tendunt. Atque distantia K, quae est $= \frac{ahh}{hh - ab}$, erit propterea aequalis toti axi transverso.

§ 217. Tempus, quo tota ellipsis describitur, est $=$ duplae areae ellipsis applicatae ad $a\sqrt{b}$. Quare, cum areae diversarum ellipsium sint ut facta ex axibus coniugatis, erit tempus, quo tota ellipsis describitur, respectu ad tempora alia periodica in tali hypothesi habito ut $\frac{aahh\sqrt{ab}}{2a(hh - ab)^{3/2}\sqrt{b}}$, i. e. ut $\frac{ahh\sqrt{a}}{(hh - ab)^{3/2}}$. Quia axis transversus est $K = \frac{ahh}{hh - ab}$, erit $hh - ab = ahh : K$. Ergo tempus est ut $\frac{K\sqrt{K}}{h}$. Si igitur plura corpora circa idem centrum C revolvantur, ubi h est constans, erunt tempora periodica inter se in ratione sesquiplicata axium transversorum.

§ 218. Sint potentiae ad C trahentes in ratione quacunque multiplicata distantiarum, ut sit $P = y^n : h^n$. Erit

$$Q = \frac{y^{n+1} - a^{n+1}}{(n+1)h^n} \text{ et } R = \frac{(n+1)bh^n + a^{n+1} - y^{n+1}}{(n+1)h^n}.$$

Quum autem fiat $y = K$, si fiat $R = 0$, erit $K = \sqrt[n+1]{(n+1)bh^n + a^{n+1}}$. Aequatio vero ad curvam haec erit

$$\frac{du}{\sqrt{1-uu}} = \frac{\pm f dy \sqrt{(n+1)bh^n}}{y\sqrt{(n+1)bh^n y^2 + a^{n+1}y^2 - y^{n+3} - (n+1)bffh^n}} =$$

$$= \frac{\pm f dy \sqrt{K^{n+1} - a^{n+1}}}{y\sqrt{K^{n+1}y^2 - y^{n+3} - K^{n+1}ff + a^{n+1}ff}}.$$

. . . . *

[De motu corporis ad duo centra virium, quorum singulorum vires sunt distantiis ab ipsis proportionales, attracti]

§ 253. Sit igitur vis, qua M ad C trahitur, ad vim gravitatis ut CM ad lineam constantem a et vis, qua M ad D trahitur, ad vim gravitatis ut DM ad constantem b. Erit $\frac{CM}{AM} = a$ et $\frac{DM}{BM} = b$ (fig. 29)** posita

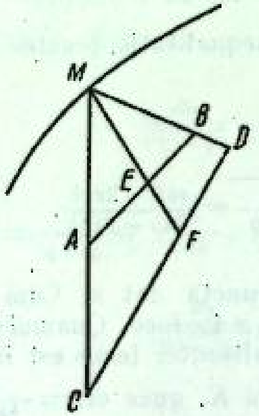


Fig. 29.

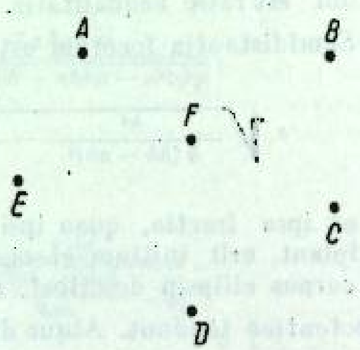


Fig. 30.

vi gravitatis 1. Quamobrem est $CF : DF = a : b$. Unde constat F esse centrum gravitatis duorum corporum in C et D positorum, quorum massae sunt ut $\frac{1}{a}$ et $\frac{1}{b}$. Est vero $\frac{1}{a}$ id, per quod CM multiplicari debet, ut prodeat vis, qua M ad C trahitur vel, ut appellare licet, eius vis intensitas, et $\frac{1}{b}$ est intensitas vis, qua M ad D trahitur. Hae ergo duae potentiae idem efficiunt, quod una tendens ad centrum gravitatis corporum in illarum centris positorum, quaeque sunt respective ut intensitates earum potentiarum.

§ 254. Vis autem, qua M ad F trahitur, exprimitur per $2ME$. Est vero

$$\sin CMF : \sin CMD = MB : 2ME = (CF \cdot MD) : (CD \cdot MF).^{***}$$

Ergo

$$ME : MF = (CD \cdot MB) : 2(CF \cdot MD).$$

* In manuscripto hic plagula sesquioctava deest. — *G. M.*
** Figura in manuscripto deest. Delineavit *G. M.*
*** In manuscripto pro $\sin CMF$, $\sin CMD$ etc. legitur $sCMF$, $sCMD$ etc. — *G. M.*

At vero est

$$(CF + DF)(CD) : CF = (a + b) : a.$$

Ergo

$$ME : MF = (a + b)MB : (2a \cdot MD)$$

et

$$2ME = \frac{(a+b)MF \cdot MB}{a \cdot MD} = \frac{(a+b)MF}{ab} = MF\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right).$$

Vis igitur, qua M ad F trahitur, est directe ut distantia MF et intensitas eius aequatur summae intensitatum potentiarum, qua M ad C et D sollicitabatur.

§ 255. Eodem modo res se habet, si quotcunque fuerint centra virium A, B, C, D, E, quae ad se trahant in ratione distantiarum. Poterit enim unum assignari punctum F (fig. 30), in quo constituta vis itidem in ratione distantiarum ad se trahens eundem praestat effectum ac proposita A, B, C, D, E simul. Punctum vero F erit centrum gravitatis corporum in A, B, C, D et E positorum, quorum pondera sunt inter se ut intensitates potentiarum ex iis punctis respective exercitarum. Intensitas vero potentiae ad F tendentis erit aequalis summae intensitatum omnium potentiarum propositarum. Corpus igitur proiectum et attractum ab omnibus potentiis datis ellipsin describet, cuius centrum est in F eaque tota in eodem plano erit sita.

§ 256. Progredior igitur ad reliquos casus, quibus vires centripetae non sunt ut distantiae, quarumque si plures fuerint, unicum centrum virium aequivalens inveniri nequit. Fieri in iis potest, ut orbita a corpore descripta non sit in eodem plano, quia vis omnibus aequivalens extra planum, in quo iam movetur, cadere potest. Tamen, si omnia centra virium in eodem plano fuerint posita et corpus proiciatur in recta, quae in eodem plano sit, perspicuum est totam, quam corpus describet, curvam in eodem plano fore sitam.

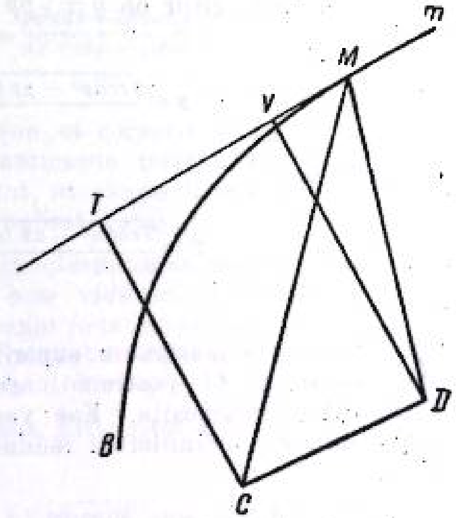


Fig. 31.

§ 257. Sint duo centra virium C et D, quae in ratione quacunque distantiarum trahant. Corpus autem ita proiciatur, ut in eodem sit plano cum punctis C et D. Tota eius orbita in eodem plano erit, sit ea BM (fig. 31). Pervenerit corpus in M, ubi eius celeritas sit ex altitudine v acquisita. Progrediatur id per elementum $Mm = ds$ sitque in m celeritas ex altitudine $v + dv$ genita. Vocetur $CM = y$, $DM = Y$. Ducatur tangens in M in eamque ex C et D demittantur perpendicula CT et DV. Horum sit $CT = p$, $DV = \pi$. Ponatur brevitatis gratia $MT = q = \sqrt{yy - pp}$ et $MV = \rho = \sqrt{YY - \pi\pi}$. Sit porro radius osculi in $M = r$ et $CD = c$.

§ 258. Erit igitur $TV = q - \rho$ et $DV - CT = \pi - p$. Ergo habetur

$$cc = qq - 2q\rho + \rho\rho + pp - 2p\pi + \pi\pi = yy + YY - 2q\rho - 2p\pi.$$

Deinde ex $\triangle CMT$ erit $ds = \frac{ydy}{q}$ et ex triangulo DVM $ds = \frac{YdY}{\rho}$. Est ergo $\frac{ydy}{q} = \frac{YdY}{\rho}$. Postremo ex y et p habetur $r = \frac{ydy}{dp}$ et ex Y et π habetur $r = \frac{YdY}{d\pi}$, unde resultat $\frac{ydy}{dp} = \frac{YdY}{d\pi}$. Prima harum trium aequationum differentiata dat $ydy + YdY = qdp + \rho dq + pd\pi + \pi dp$. Ex prima aequatione, antequam differentiatur, invenitur $\rho = q - \sqrt{cc - (p-\pi)^2}$ et ex duabus reliquis $\rho = \frac{qd\pi}{dp}$. Unde habebitur

$$q = \frac{dp\sqrt{cc - (p-\pi)^2}}{dp - d\pi} \quad \text{et} \quad \rho = \frac{d\pi\sqrt{cc - (p-\pi)^2}}{dp - d\pi}.$$

§ 259. Erit igitur ob $y = \sqrt{pp + qq}$ substituto loco q valore invento

$$y = \frac{\sqrt{ccdp^2 + pp\,(dp - d\pi)^2 - (p-\pi)^2 dp^2}}{dp - d\pi}$$

et similiter

$$Y = \frac{\sqrt{ccd\pi^2 + \pi\pi\,(dp - d\pi)^2 - (p-\pi)^2 d\pi^2}}{dp - d\pi}$$

Ope harum aequationum superfluae indeterminatae ex calculo eliminari possunt, ut postremo aequatio reperiatur ex duabus tantum variabilibus composita. Eae vero retineri debent in calculo, quae et aequationem concinniorem reddunt et faciliorem constructionem suppeditant.

§ 260. Sit vis, qua corpus in M ad C trahitur, $= P$ et vis, qua M ad alterum D trahitur, $= Q$. Resolvatur utraque in duas laterales, normalem et tangentialem. Erit normalis a potentia P orta $= \frac{Pp}{y}$ et normalis a potentia Q orta $= \frac{Q\pi}{Y}$. Quae cum sint conspirantes, erit tota vis normalis ab utraque potentia producta $= \frac{Pp}{y} + \frac{Q\pi}{Y}$. Est vero per § 178 vis normalis ad vim gravitatis ut dupla altitudo generans celeritatem corporis ad radium osculi curvae. Erit igitur posita vi gravitatis $= 1$ $\frac{Pp}{y} + \frac{Q\pi}{Y} = \frac{2v}{r}$ adeoque $v = \frac{Ppr}{2y} + \frac{Q\pi r}{2Y}$.

Quia vero est $r = \frac{ydy}{dp} = \frac{YdY}{d\pi}$, erit $v = \frac{Ppdy}{2dp} + \frac{Q\pi dY}{2d\pi}$.

§ 261. Vis tangentialis a potentia P ad C tendente orta est $= \frac{Pq}{y}$ et vis tangentialis a potentia Q ad D tendente orta est $= \frac{Q\rho}{Y}$. Quae cum sint conspirantes, erit tota vis tangentialis $= \frac{Pq}{y} + \frac{Q\rho}{Y}$. Haec vero vis, quia et y et Y crescere ponuntur, est motui contraria. Erit ergo (§ 176)

$$dv = -\frac{Pqds}{y} - \frac{Q\rho ds}{Y}.$$

Est autem $ds = \frac{ydy}{q} = \frac{YdY}{\rho}$. Quamobrem habetur $dv = -Pdy - QdY$. Haec aequatio, quia P est functio quaedam ipsius y et Q functio ipsius Y, potest integrari vel saltem construi per quadraturas et habebitur

$$v = C - \int Pdy - \int QdY.$$

Constans C ex data corporis in dato loco celeritate debet determinari.

§ 262. Ex his duabus aequationibus inventis duae potentiae P et Q determinari possunt. Invenietur autem

$$P = \frac{\pi d\rho dv + 2vd\rho d\pi}{dy\,(pd\pi - \pi dp)} \quad \text{et} \quad Q = \frac{pd\pi dv + 2vd\pi dp}{dY\,(\pi dp - pd\pi)}.$$

Ex his apparet, si detur curva quaecunque et corporis in ea moti celeritas in singulis locis, insuper duo quaecunque puncta, inveniri posse vires ad ea puncta tendentes, quae faciant, ut corpus libere eam curvam describat et in singulis locis celeritates habeat datas.

§ 263. Cum in calculo duae tantum indeterminatae retineri debeant, maxime consultum concinnitati calculi esse videtur, si tantum y et Y retineantur. Nam, quia P et Q sunt harum functiones, eae ex computo generaliter eliminari non possunt. Determinentur ergo p, q, π et ρ in y et Y, ad quae adiungo ds et r, quia ds et r ex y et Y facile possunt inveniri et tam ad y quam ad Y pertinent. Erit igitur $q = \frac{ydy}{ds}$, $\rho = \frac{YdY}{ds}$ et propterea

$$p = \frac{y\sqrt{ds^2 - dy^2}}{ds} \quad \text{et} \quad \pi = \frac{Y\sqrt{ds^2 - dY^2}}{ds}.$$

Atque

$$dp = \frac{ydy}{r} \quad \text{et} \quad d\pi = \frac{YdY}{r}.$$

Item ex his

$$dq = ds - \frac{y\sqrt{ds^2 - dy^2}}{r}$$

et

$$d\rho = ds - \frac{Y\sqrt{ds^2 - dY^2}}{r}.$$

§ 264. Si in aequatione $cc = (q - \rho)^2 + (p - \pi)^2$ loco p, π, q et ρ valores inventi substituantur, invenietur ex aequatione resultante ds, nimirum erit

$$ds^2 = \frac{4yY\,(ccdydY + yYdy^2 + yYdY^2 - yydydY - YYdydY)}{2ccyy + 2ccYY + 2y^2Y^2 - c^4 - y^4 - Y^4}.$$

Deinde ex cognito elemento curvae invenietur radius osculi r in meris y et Y cum suis differentialibus. Est enim $r = \frac{ydy}{dp}$ et $p = \frac{y\sqrt{ds^2 - dy^2}}{ds}$. Hic si ponatur ds constans, erit

$$dp = \frac{ds^2dy - dy^3 - yddy}{ds\sqrt{ds^2 - dy^2}}.$$

Quapropter habebitur

$$r = \frac{yds\sqrt{ds^2 - dy^2}}{ds^2 - dy^2 - yddy} = \frac{Yds\sqrt{ds^2 - dY^2}}{ds^2 - dY^2 - YddY}.$$

§ 265. Iam supra deduximus esse $v = C - \int Pdy - \int QdY$. Sed in § 260 invenimus

$$v = \frac{Ppr}{2y} + \frac{Q\pi r}{2Y}.$$

Habemus ergo hanc aequationem

$$2C - 2\int Pdy - 2\int QdY = \frac{Ppr}{y} + \frac{Q\pi r}{Y},$$

ex qua natura curvae, quam corpus describit, inveniri debet. Quia vero

$$p = \frac{y\sqrt{ds^2 - dy^2}}{ds} \quad \text{et} \quad \pi = \frac{Y\sqrt{ds^2 - dY^2}}{ds},$$

erit

$$2C - 2\int Pdy - 2\int QdY = \frac{Pr\sqrt{ds^2 - dy^2} + Qr\sqrt{ds^2 - dY^2}}{ds},$$

ex qua habetur

$$r = \frac{2Cds - 2ds\int Pdy - 2ds\int QdY}{P\sqrt{ds^2 - dy^2} + Q\sqrt{ds^2 - dY^2}}.$$

Inventa vero est etiam [in] paragrapho praecedente r, qui duo valores coniuncti dabunt aequationem pro curva quaesita.

§ 266. Si detur curva, quam corpus describere debet, et vis altera P ad punctum datum C tendens, inveniri poterit altera vis Q ad datum punctum D tendens faciens, ut corpus curvam datam describat. Ponatur enim, cum curva sit data, $\frac{pr}{2y} = x$ et $\frac{\pi r}{2Y} = z$. Erit $v = Px + Qz$. Ergo

$$dv = Pdx + xdP + Qdz + zdQ = -Pdy - QdY$$

vel

$$dQ + Q\frac{dY + dz}{z} + \frac{Pdy + xdP + Pdx}{z} = 0.$$

Multiplicetur haec per $e^{\int\frac{dY + dz}{z}}$. Erit

$$e^{\int\frac{dY+dz}{z}} Q = D - \int \frac{e^{\int\frac{dY+dz}{z}}(Pdy + xdP + Pdx)}{z},$$

ubi D ex iis, quae data sunt, determinari potest.

§ 267. Ponamus alterum centrum D in infinitum esse positum, ut c sit ∞. Erit MD semper parallela ipsi CD (fig. 32). Ducatur perpendi-

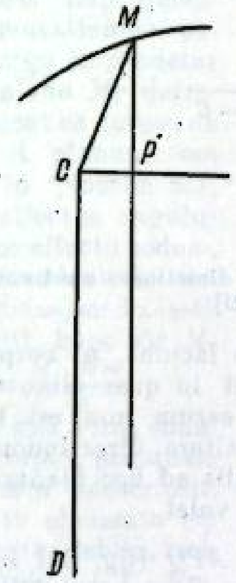


Fig. 32.

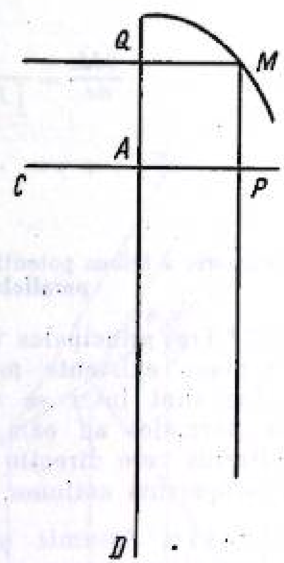


Fig. 33.

cularis CP ad CD et vocetur $PM = z$. Erit $Y = c + z$, $dY = dz$. Et designet Q functionem ipsius z. Erit

$$ds = \frac{\sqrt{yydy^2 + yydz^2 - 2yzdydz}}{\sqrt{yy - zz}}$$

et

$$r = \frac{ds\sqrt{ds^2 - dz^2}}{-ddz}$$

posito dz constante. Per alteram vero aequationem (§ 265) erit

$$r = \frac{2Cds - 2ds\int Pdy - 2ds\int Qdz}{P\sqrt{ds^2 - dy^2} + Q\sqrt{ds^2 - dz^2}}$$

atque habebitur haec aequatio

$$\frac{2ddz}{\sqrt{ds^2 - dz^2}} = \frac{P\sqrt{ds^2 - dy^2} + Q\sqrt{ds^2 - dz^2}}{\int Pdy + \int Qdz - C}.$$

§ 268. Abeat nunc punctum C quoque in infinitum, sed positum sit in recta PA in infinitum producta (fig. 33). Erunt rectae MC parallelae ipsi PC. Secent eae rectam DA in Q. Erit $MQ = AP$. Sit $MQ = AP = x$ et ut ante $MP = z$. Trahetur ergo corpus in M ad Q et P, ad illud vi P et ad hoc vi Q. Erit $y = \infty + x$ et $dy = dx$. Hoc substituto habebitur pro curva quaesita haec aequatio

$$\frac{2ddz}{\sqrt{ds^2 - dz^2}} = \frac{P\sqrt{ds^2 - dx^2} + Q\sqrt{ds^2 - dz^2}}{\int Pdz + \int Qdz - C}.$$

Est vero $dx = \sqrt{ds^2 - dz^2}$ et $dz = \sqrt{ds^2 - dx^2}$. Consequenter oritur aequatio

$$\frac{2ddz}{dx} = \frac{Pdz + Qdx}{\int Pdx + \int Qdz - C}.$$

. . . . *

[De motu corporis a tribus potentiis, quarum directiones sunt coordinatis parallelae, sollicitati]

[**Theorema.**** Tres principales vires, quae faciunt, ut corpus in curva non in eodem plano existente moveatur, et in quas aliae vires resolvi debent, singulae sunt inter se normales; earum una est tangentialis, reliquae duae normales ad eam, quarum altera directionem habent in dato plano, alterius vero directio est normalis ad hoc planum harumque virium nulla reliquarum actiones immutare valet.

Demonstratio. Assumto plano fixo APQ (fig. 34) in eoque axe AP sit Mm elementum a corpore descriptum. Ex punctis M et m in planum fixum demittantur perpendicula MQ et mq et ex punctis Q et q perpendicula in axem QP, qp. Iam si corpus a nulla vi sollicitaretur, in recta Mm producta progrederetur celeritate, quam habuit in Mm; aequali ergo tempusculo, quo Mm percurrit, perveniet in n, descripto elemento mn aequali et in directum posito elemento Mm. Quare demisso quoque ex n in planum APQ perpendiculo nr erunt elementa Qq et qr inter se quoque aequalia et in directum posita; hanc ob rem perpendiculum $r\pi$ ex r in axem AP demissum abscindet elementum $p\pi = Pp$.

Sit celeritas, qua corpus elementum Mm describit, debito altitudini v et consideretur primo vis tangentialis, quae directionem habet iuxta mn et tota in alteranda celeritate absumitur. Ponatur haec vis tangentialis T existente vi gravitatis $= 1$, erit $dv = T \cdot Mm$ et elementum mn absolvitur celeritate debita altitudini $v + dv$.

Deinde in plano Mr concipiatur vis directionem habens ms normalem ad corporis directionem Mm. Haec ergo efficiet, ut corpus ab mn declinet et in $m\nu$ elemento in eodem plano Mr posito progrediatur. Sit haec vis $= N$ et, cum radius osculi elementorum Mm et $m\nu$ demisso ex ν in mn perpendiculo $\nu\varepsilon$ sit $= \frac{m\nu^2}{\nu\varepsilon}$, erit $\frac{2v \cdot \nu\varepsilon}{m\nu^2} = N$. Est vero $\frac{\nu\varepsilon}{m\nu}$ sinus an-

* In manuscripto hic plagulae quinque octavae desunt. — *G. M.*
** Fragmentum hoc ex Euleri *Mechanica* (Opera omnia, II-1, pp.279—281) depromptum hic, ut expositio sequens clara sit, ab editore additum est. — *G. M.*

guli $nm\nu$. Quamobrem erit

$$2v \sin nm\nu = N \cdot m\nu = N \cdot Mm$$

ideoque

$$\sin nm\nu = \frac{N \cdot Mm}{2v}.$$

Tertia vis sit normalis ad utramque expositarum mn et ms, ita ut eius directio mt sit normalis in planum Mr. Haec igitur vis neque praecedentium actiones impediet, neque ab ipsis impedimentum seu immutationem patietur. Tota ergo impendetur ad corpus a plano Mr detrahendum; deducat ea corpus ex ν in μ, ita ut planum $\nu m\mu$ sit normale in planum Mr, eritque eius effectus angulus $\nu m\mu$. Hoc igitur effectu eodem, quo circa praecedentem vim normalem fecimus, modo aestimato, si fuerit haec vis M, erit $\sin \nu m\mu = \frac{M \cdot Mm}{2v}$.

Tres ergo hae vires simul efficiant, ut corpus, postquam elementum Mm descripsit, progrediatur in elemento $m\mu$ aucta celeritate debita, scilicet altitudini $v + T \cdot Mm$. Quaecunque autem aliae vires corpus sollicitent, eae omnes resolvi possunt in huiusmodi tres, quarum directiones sunt mn, ms, mt. Quarum effectus in corpus cum determinaverimus, simul quarumcunque virium effectus cognoscentur. Q. E. D.]

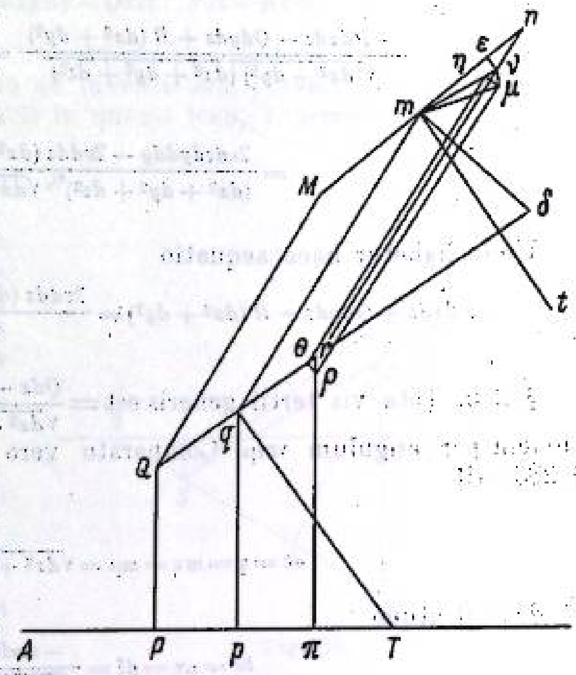


Fig. 34.

§ 284. Tota vis secundi generis angulum $nm\nu$* generans est

$$= \frac{-Pdxdz - Qdydz + Rdx^2 + Rdy^2}{\sqrt{(dx^2 + dy^2)(dx^2 + dy^2 + dz^2)}}.$$

Angulus vero $nm\nu$, si cum angulo bac paragraphi praecedentis comparetur, dat

$$ac = \varphi = m\nu = \sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2} + \frac{dzddz(dx^2 + dy^2) - dz^2dyddy}{(dx^2 + dy^2)\sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2}}$$

* In manuscripto: $nm\mu$. Correxit *G. M.*

et

$$ab - ac = d\chi = mn - m\nu = \frac{-dzddz(dx^2+dy^2) + dz^2dyddy}{(dx^2+dy^2)\sqrt{dx^2+dy^2+dz^2}}$$

atque

$$bc = d\xi = n\nu = \frac{dzdyddy - ddz(dx^2+dy^2)}{dx^2+dy^2}.$$

Erit igitur tota vis hunc angulum generans

$$\frac{-Pdxdz - Qdydz + R(dx^2+dy^2)}{\sqrt{(dx^2+dy^2)}(dx^2+dy^2+dz^2)} = \frac{2v\sqrt{d\xi^2 - d\chi^2}}{\varphi\varphi} =$$

$$= \frac{2vdzdyddy - 2vddz(dx^2+dy^2)}{(dx^2+dy^2+dz^2)^{3/2}\sqrt{dx^2+dy^2}}$$

Unde habetur haec aequatio

$$Pdxdz + Qdydz - R(dx^2+dy^2) = \frac{2vddz(dx^2+dy^2) - 2vdzdyddy}{dx^2+dy^2+dz^2}.$$

§ 285. Tota vis tertii generis est $= \frac{Qdx - Pdy}{\sqrt{dx^2+dy^2}}$, quae producit deviationem per angulum $\nu m\mu$. Comparato vero angulo $\nu m\mu$ cum angulo a § 283 erit

$$ac = \varphi = m\eta = m\mu = \sqrt{dx^2+dy^2+dz^2}$$

et $d\chi = 0$ atque

$$bc = \mu\eta = d\xi = \frac{-dxddy}{\sqrt{dx^2+dy^2}}.$$

Propterea erit

$$\frac{Qdx - Pdy}{\sqrt{dx^2+dy^2}} = \frac{2v\sqrt{d\xi^2 - d\chi^2}}{\varphi\varphi} = \frac{-2vdxddy}{(dx^2+dy^2+dz^2)\sqrt{dx^2+dy^2}}.$$

Habetur ergo

$$Qdx - Pdy = \frac{-2vdxddy}{dx^2+dy^2+dz^2}.$$

§ 286. Ex hac extrema aequatione deducetur

$$\frac{-2vdzdyddy}{dx^2+dy^2+dz^2} = Qdzdy - \frac{Pdy^2dz}{dx}.$$

Hoc in aequatione finali § 284 substitutum dabit

$$Pdxdz + \frac{Pdy^2dz}{dx} - R(dx^2+dy^2) = \frac{2vddz(dx^2+dy^2)}{dx^2+dy^2+dz^2},$$

ex qua prodit

$$Pdz - Rdx = \frac{2vdxddz}{dx^2+dy^2+dz^2}.$$

Ex hac igitur coniuncta cum priori

$$Pdy - Qdx = \frac{2vdxddy}{dx^2+dy^2+dz^2}$$

invenitur

$$ddy : ddz = (Pdy - Qdx) : (Pdz - Rdx).$$

§ 287. Exposito modo, quo ad inventionem curvae, quam corpus describit, pervenitur et celeritatis in quovis loco, superest definire, in quo plano corpus in singulis momentis moveatur et quomodo planum hoc mutetur. Concipiatur planum, in quo sita sint tria corporis loca M, m et μ. Intersecet id planum APQ in recta RS applicatae PQ in R occurrente (fig. 35).*

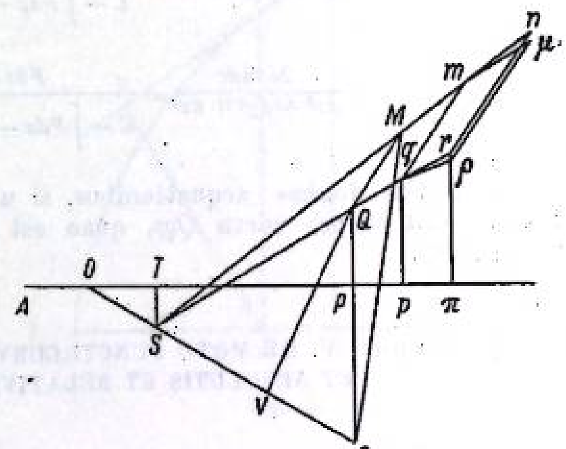


Fig. 35.

Erit $QR = \frac{zddy}{ddz}$ et $PR = \frac{zddy - yddz}{ddz}$. Tangens anguli $POS = \frac{dzddy - dyddz}{dxddz}$ et tangens anguli, quem planum RSM cum plano APQ conficit

$$= \frac{\sqrt{dx^2ddz^2 + (dzddy - dyddz)^2}}{dxddz}.$$

§ 288. Quia vero est $ddy : ddz = (Pdy - Qdx) : (Pdz - Rdx)$, erit in nostro casu

$$QR = \frac{Pzdy - Qzdx}{Pdz - Rdx},$$

tangens anguli POS

$$= \frac{dy}{dx} + \frac{Pdydz - Qdxdz}{Pdzdx - Rdx^2} = \frac{Rdy - Qdz}{Pdz - Rdx}.$$

Hoc igitur modo ea, quae generaliter differentialia secundi ordinis requirunt, per sola differentialia primi gradus idem obtinetur.

* Figura haec in manuscripto absens ex Euleri *Mechanica* (Opera omnia, II-1, p. 284, fig. 76) deprompta est. Calculus in §§ 287 et 288 secundum hanc figuram ab editore correctus est. — *G. M.*

Si fuerit $dz=adx+bdy$, erit curva, quam corpus describit, semper in eodem plano. Habebitur autem $1:b=(Pdy-Qdx):(Pdz-Rdx)$ vel $bPdy-bQdx=Pdz-Rdx$ atque $R=aP+bQ$.

Haec ergo si fuerit ratio trium potentiarum, corpus semper in eodem plano manebit.

§ 289. Inventa est [in] § 282 haec aequatio

$$v=C-\int Pdx-\int Qdy-\int Rdz.$$

Hoc substituto loco v valore in utraque aequatione § 286 habebuntur

$$\frac{2dxddy}{dx^2+dy^2+dz^2}=\frac{Pdy-Qdx}{C-\int Pdx-\int Qdy-\int Rdz}$$

et

$$\frac{2dxddz}{dx^2+dy^2+dz^2}=\frac{Pdz-Rdx}{C-\int Pdx-\int Qdy-\int Rdz}.$$

Ex quibus duabus aequationibus, si una, in quam non ingreditur z, elicitur, erit ea pro curva $Qq\mathfrak{p}$, quae est proiectio curvae descriptae in plano APQ.

Caput IV. DE MOTU PUNCTI CURVILINEO A POTENTIIS ET ABSOLUTIS ET RELATIVIS SOLLICITATI

§ 290. Definivimus vim relativam ita, ut ea sit vis in corpora agens eorum celeritatibus vel augendis vel diminuendis a celeritate pendens. Pendentia haec a celeritate ex eo venit, quod huius modi potentiae diversimode agant, si corpora aliter ipsis cedunt vel contranituntur. Hinc colligitur, si directio potentiae in corporis moti directionem fuerit normalis, quia tum corpus neque cedit neque contranititur potentiae, vim relativam locum habere non posse. Cum igitur omnes potentiae in normales et tangentiales resolvi queant, sequitur potentias relativas tantum ad potentias tangentiales pertinere posse. Ita ut potentiae relativae, quas considerabimus, semper sint tangentiales.

§ 291. Sit intensitas potentiae relativae seu altitudo generans celeritatem, quam si corpus haberet, actio potentiae aequalis foret vi gravitatis, $=q$, quae constans est, si potentia relativa est uniformis, variabilis autem vel a loco, in quo corpus versatur, pendens, si ea fuerit variabilis. Exponatur lex potentiae relativae functione quacunque celeritatum sitque haec functio, si celeritas est ex altitudine q acquisita, Q et, si celeritas fuerit $\sqrt{v}$, tum sit $=V$. Hic V talis est functio ipsius v, qualis Q est ipsius q.

§ 292. Describat corpus seu potius punctum curvam AM (fig. 36) et, cum pervenerit in M, sit eius celeritas ex altitudine v genita. Vis autem relativa secundum tangentem MT agens talis sit, qualis [in] paragrapho praecedente est exposita. Erit ea ergo ad vim gravitatis ut V ad Q atque

ipsa aequalis $V:Q$ posita vi gravitatis $=1$. Perspicuum est, si sola potentia relativa ageret, corpus ex tangente MT, in qua moveri conatur, non depulsum iri, sed ab ea tantum celeritatem mutari. In linea recta propterea progrederetur.

§ 293. Quia autem hic motus curvilineos contemplari instituimus, necesse est adiunctam esse vim absolutam. Sit vis normalis ex ea orta $=N$ et tangentialis $=T$. Hanc igitur solam potentia relativa vel auget vel diminuit. Vocetur radius osculi MR in M r et elementum $Mm=ds$, quod dum corpus percurrit, acquirit celeritatem ex altitudine $v+dv$ genitam.

Erit (§ 178) $N=\frac{2v}{r}$ et posita et vi tangentiali T et relativa $V:Q$ accelerante erit (§ 176) $dv=Tds+Vds:Q$. Si utraque sit retardans, erit $dv=-Tds-Vds:Q$. Retardantes nimirum signo $-$ sunt afficiendae.

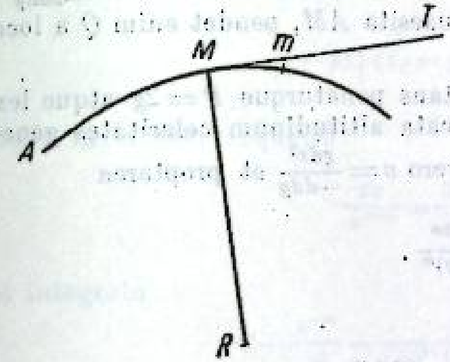


Fig. 36.

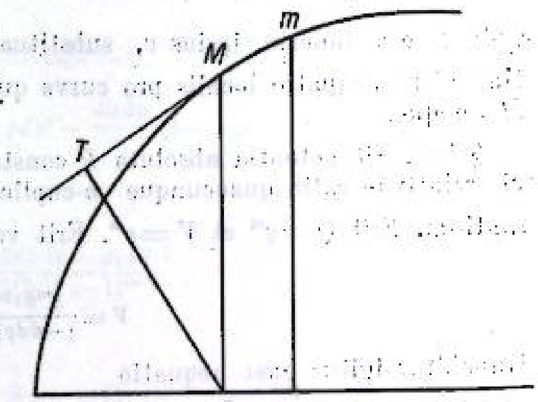


Fig. 37.

§ 294. Tendat vis absoluta ad centrum virium infinite distans. Ducatur recta AP (fig. 37), ad quam directiones eius potentiae sint perpendiculares. Describat corpus curvam AM et, dum est in M, sit celeritas ex altitudine v genita, in m ex altitudine $v+dv$. Sit $Mm=ds$, perpendicularis ex M in AP puta $MP=y$. Erit $mp=y+dy$. Sit vis absoluta, qua corpus in M iuxta MP trahitur, $=P$. Potentia relativa vero sit $=V:Q$, ut iam posuimus.

§ 295. In M ducatur tangens MT et ex P in eam perpendicularis PT. Sit $Pp=dx$. Erit $PT=\frac{ydx}{ds}$ et $MT=\frac{ydy}{ds}$. Resolvatur potentia P in normalem et tangentialem. Erit normalis iuxta TP agens $=\frac{Pdx}{ds}$ et tangentialis iuxta MT agens $=\frac{Pdy}{ds}$. Posito radio osculi in M r erit $\frac{Pdx}{ds}=\frac{2v}{r}$. Vis tangentialis $\frac{Pdy}{ds}$, quia ab M ad T trahit, est retardans, potentia relativa vero $V:Q$ sit accelerans. Erit ergo $dv=-Pdy+Vds:Q$. Si potentia relativa fuerit retardans, erit $dv=-Pdy-Vds:Q$.

§ 296. Ex priore aequatione est $v=\frac{Prdx}{2ds}$. Sumatur dx constans, erit $r=\frac{ds^3}{-dxddy}$. Est vero $ds=\sqrt{dx^2+dy^2}$. Erit itaque $v=\frac{Pds^2}{-2ddy}$ et

$$dv = \frac{-dPds^2ddy - 2Pdsddydds + Pds^2d^3y}{2ddy^2} = \frac{-dPds^2ddy - 2Pdyddy^2 + Pds^2d^3y}{2ddy^2}$$

ob $dsdds = dyddy$.

[**Nota marginalis.**] Ergo elementum temporis

$$\frac{ds}{\sqrt{v}} = \frac{\sqrt{-2ddy}}{\sqrt{P}}.$$

Quia vero est $dv = -Pdy \pm Vds : Q$, prout potentia relativa vel accelerans vel retardans est, erit

$$\pm Vds : Q = \frac{-dPds^2ddy + Pds^2d^3y}{2ddy^2}.$$

Quia V est functio ipsius v, substituatur in ea loco v valor $\frac{Pds^2}{-2ddy}$. Habebitur aequatio localis pro curva quaesita AM, pendet enim Q a loco M quoque.

§ 297. Sit potentia absoluta P constans ponaturque $P = 2g$ atque lex vis relativae ratio quaecunque m-cuplicata altitudinum celeritates generantium. Erit $Q = q^m$ et $V = v^m$. Erit vero $v = \frac{gds^2}{-ddy}$ et propterea

$$V = \frac{g^m ds^{2m}}{(-ddy)^m}.$$

Habebitur igitur haec aequatio

$$\pm \frac{g^m ds^{2m+1}}{q^m (-ddy)^m} = \frac{gds^2d^3y}{ddy^2}$$

vel

$$\pm \frac{g^{m-1} ds^{2m-1}}{q^m (-ddy)^{m-2}} = d^3y.$$

§ 298. Accommodemus haec ad nostras regiones. Erit $P = 1$ et $g = \frac{1}{2}$.

[**Nota marginalis.**] Melius est servare g generaliter.

Sit vis relativa uniformis vel $q = c$ eaque retardans valebit signum —. His positis habebitur aequatio haec

$$\frac{-2ds^{2m-1}}{(2c)^m (-ddy)^{m-2}} = d^3y.$$

Ponatur $dy = pds$. Erit $dx = ds\sqrt{1-pp}$ et

$$ddx = 0 = \frac{dds - ppdds - pdpds}{\sqrt{1-pp}}.$$

Erit ergo

$$dds = \frac{pdpds}{1-pp} = \frac{dyddy}{ds} = pddy.$$

Erit igitur $ddy = \frac{dpds}{1-pp}$ et

$$d^3y = \frac{dsddp - ppdsddp + dpdds - ppdpdds - 2pdp^2ds}{(1-pp)^2} = \frac{dsddp - ppdsddp - pdp^2ds*}{(1-pp)^2}$$

substituto pro dds. Ex his oritur aequatio haec

$$\frac{dsddp - ppdsddp - pdp^2ds}{(1-pp)^2} = \frac{-2ds^{2m-1}(1-pp)^{m-2}}{(2c)^m(-dpds)^{m-2}}$$

vel

$$pdp^2 - ddp(1-pp) = \frac{2ds^m(1-pp)^m}{(2c)^m(-dp)^{m-2}}.$$

Ponatur porro $ds = udp$. Erit ob $ddx = 0$

$$(1-pp)\,ddp = pdp^2 - \frac{dudp}{u}(1-pp).$$

Unde invenietur aequatio

$$\frac{du}{u^{m+1}} = \frac{2dp(1-pp)^{m-1}}{(2c)^m(-1)^{m-2}}$$

et integrata

$$C - \frac{u^{-m}}{m} = \frac{2}{(2c)^m(-1)^{m-2}} \int dp\,(1-pp)^{m-1}$$

vel

$$C - \frac{1}{mu^m} = \frac{-2}{(2c)^m} \int dp\,(pp-1)^{m-1}.$$

§ 299. Aliter aequatio quaesita

$$\frac{-2ds^{2m-1}}{(2c)^m(-ddy)^{m-2}} = d^3y$$

reduci potest et facilior invenietur constructio. Ponatur $dy = \frac{dx}{p}$. Erit $ddy = \frac{-dpdx}{pp}$ et

$$d^3y = \frac{-pdxddp + 2dp^2dx}{p^3}.$$

Est vero $ds = \frac{dx}{p}\sqrt{1+pp}$. His substitutis aequatio proposita abit in hanc

$$\frac{-2dx^{m+1}(1+pp)^{\frac{2m-1}{2}}}{(2c)^m dp^{m-2}} = -pdxddp + 2dp^2dx.$$

* Ob errorem in hac formula ab Eulero admissum calculus sequens paragraphi huius falsus est. — *G. M.*

Ponatur porro $dx = udp$. Erit $ddp = \frac{-dudp}{u}$. Orietur haec aequatio

$$\frac{-2dp\,(1+pp)^{\frac{2m-1}{2}}}{(2c)^m} = \frac{pdu+2udp}{u^{m+1}}.$$

Dividatur per p^{2m+1} alterum membrum, fiet integrabile eritque

$$-2\int \frac{dp\,(1+pp)^{\frac{2m-1}{2}}}{p^{2m+1}} = D - \frac{(2c)^m}{mp^{2m}u^m}$$

et ex hac

$$u = \frac{2c}{pp\left[mD+2m\int \frac{dp\,(1+pp)^{\frac{2m-1}{2}}}{p^{2m+1}}\right]^{\frac{1}{m}}}.$$

§ 300. Nunc igitur erit

$$dx = \frac{2cdp}{pp\left[mD+2m\int \frac{dp\,(1+pp)^{\frac{2m-1}{2}}}{p^{2m+1}}\right]^{\frac{1}{m}}}$$

et

$$x = \int \frac{2cdp}{pp\left[mD+2m\int \frac{dp\,(1+pp)^{\frac{2m-1}{2}}}{p^{2m+1}}\right]^{\frac{1}{m}}},$$

item

$$dy = \frac{dx}{p} = \frac{2cdp}{p^3\left[mD+2m\int \frac{dp\,(1+pp)^{\frac{2m-1}{2}}}{p^{2m+1}}\right]^{\frac{1}{m}}}$$

et

$$y = \int \frac{2cdp}{p^3\left[mD+2m\int \frac{dp\,(1+pp)^{\frac{2m-1}{2}}}{p^{2m+1}}\right]^{\frac{1}{m}}}.$$

Fiat $p = \frac{1}{t}$. Erit

$$x = \int \frac{-2cdt}{\left[mD-2m\int dt\,(1+tt)^{\frac{2m-1}{2}}\right]^{\frac{1}{m}}}$$

et

$$y = \int \frac{-2ctdt}{\left[mD-2m\int dt\,(1+tt)^{\frac{2m-1}{2}}\right]^{\frac{1}{m}}}.$$

Oritur hinc, cum et x et y dentur in t, constructio curvae quaesitae per quadraturas.

§ 301. Erat in § 297 $v = \frac{gds^2}{-ddy}$. Nunc vero posuimus $g = \frac{1}{2}$. Est ergo $v = \frac{ds^2}{-2ddy}$. Substitutis valoribus loco ds et ddy, quos [in] paragrapho praecedente fecimus, erit

$$v = \frac{c\,(1+tt)}{\left[mD-2m\int dt\,(1+tt)^{\frac{2m-1}{2}}\right]^{\frac{1}{m}}}.$$

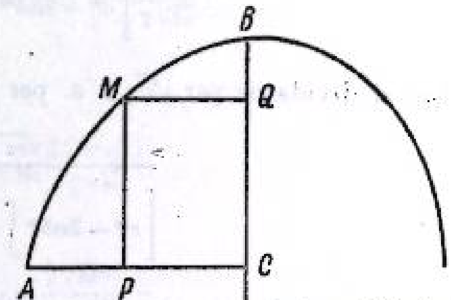


Fig. 38.

Sit B punctum curvae, quam corpus describit, summum (fig. 38). Erit ibi $dy = 0$ adeoque $\frac{1}{p}$ vel $t = 0$. Sit celeritas, quam corpus in B habet, genita ex altitudine b. Sumatur integrale huius $dt\,(1+tt)^{\frac{2m-1}{2}}$ ita, ut posito $t = 0$ fiat id quoque $= 0$. Erit ergo facto $t = 0$ $v = b = \frac{c}{(mD)^{\frac{1}{m}}}$. Consequenter erit $mD = \frac{c^m}{b^m}$ et

$$v = \frac{bc\,(1+tt)}{\left[c^m-2mb^m\int dt\,(1+tt)^{\frac{2m-1}{2}}\right]^{\frac{1}{m}}}.$$

§ 302. Ducatur ex B verticalis BC et ex M in eam demittatur perpendiculum MQ. Vocetur $BQ = X$ et $MQ = Y$. Erit $dx = -dY$ et $dy = -dX$. Positoque pro mD valore $\frac{c^m}{b^m}$ habebitur

$$dX = \frac{2bctdt}{\left[c^m-2mb^m\int dt\,(1+tt)^{\frac{2m-1}{2}}\right]^{\frac{1}{m}}}$$

atque

$$dY = \frac{2bcdt}{\left[c^m-2mb^m\int dt\,(1+tt)^{\frac{2m-1}{2}}\right]^{\frac{1}{m}}}.$$

Horum integralia si ita capiantur, ut fiant $=0$, si ponitur $t=0$, reperiuntur veri pro X et Y valores.

§ 303. Facile est ex hisce ostendere, quomodo curva fiat parabola, si vis relativa evanescat. Evanescens erit potentia relativa, si fuerit tam parva, ut corpus infinitam habere debeat celeritatem, quo resistentia aequalis sit vi gravitatis. Si igitur sit $c=\infty$, erit vis relativa $=0$. Ponatur ergo $c=\infty$. Evanescet

$$2mb^m \int dt\,(1+tt)^{\frac{2m-1}{2}}$$

prae c^m et habebitur $v=b(1+tt)$ et $dX=2btdt$ atque $dY=2bdt$. Erit igitur $X=btt$ et $Y=2bt$. Ergo $t=Y:2b$ et $X=Y^2:4b$ vel $Y^2=4bX$ et $v=b+X$, plane ut iam ex Capite praecedente elucet.

§ 304. Est hic elementum curvae

$$ds=\frac{2bcdt\sqrt{1+tt}}{\left[c^m-2mb^m\int dt\,(1+tt)^{\frac{2m-1}{2}}\right]^{\frac{1}{m}}}.$$

Hoc si dividatur per $\sqrt{v}$, i. e. per

$$\frac{\sqrt{bc\,(1+tt)}}{\left[c^m-2mb^m\int dt\,(1+tt)^{\frac{2m-1}{2}}\right]^{\frac{1}{2m}}},$$

habebitur elementum temporis, quo arcus MB ascendendo est percursus. Erit autem hoc temporis elementum

$$\frac{2dt\sqrt{bc}}{\left[c^m-2mb^m\int dt\,(1+tt)^{\frac{2m-1}{2}}\right]^{\frac{1}{2m}}}.$$

Est vero

$$\left[c^m-2mb^m\int dt\,(1+tt)^{\frac{2m-1}{2}}\right]^{\frac{1}{2m}}=\sqrt{\frac{2bcdt}{dY}}$$

atque $t=\frac{dX}{dY}$. Posito dY constante erit $dt=\frac{ddX}{dY}$. Unde invenitur elementum temporis $=\sqrt{2ddX}$ vel, si ponatur $ddX=ZdY^2$, hoc $dY\sqrt{2Z}$.

§ 305. Accedamus ad casus speciales et sit $m=\frac{1}{2}$ vel vis relativa resistens sit in ratione simplici celeritatum. Erit

$$dX=\frac{2bctdt}{\left[c^{\frac{1}{2}}-b^{\frac{1}{2}}\int dt\,(1+tt)^0\right]^2}=\frac{2bctdt}{(\sqrt{c}-t\sqrt{b})^2}$$

atque

$$dY=\frac{2bcdt}{(\sqrt{c}-t\sqrt{b})^2}.$$

Hinc erit

$$Y=\frac{2bt\sqrt{bc}}{\sqrt{bc}-bt}.$$

Quia vero est $t=\frac{dX}{dY}$, erit

$$Y=\frac{2bdX\sqrt{bc}}{dY\sqrt{bc}-bdX}$$

seu

$$YdY\sqrt{bc}-bYdX=2bdX\sqrt{bc}$$

atque

$$bdX=\frac{YdY\sqrt{bc}}{Y+2\sqrt{bc}}=dY\sqrt{bc}-\frac{2bcdY}{Y+2\sqrt{bc}}.\text{*}$$

Ex qua integrando invenitur

$$bX=Y\sqrt{bc}-2bc\lg\frac{2\sqrt{bc}+Y}{2\sqrt{bc}}$$

et

$$X=Y\sqrt{\frac{c}{b}}-2c\lg\frac{2\sqrt{bc}+Y}{2\sqrt{bc}}$$

§ 306. Sit $m=1$ vel vis relativa resistens in ratione duplicata celeritatum. Erit

$$dX=\frac{2bctdt}{c-2b\int dt\sqrt{1+tt}}$$

et

$$dY=\frac{2bcdt}{c-2b\int dt\sqrt{1+tt}}$$

atque

$$ds=\sqrt{dX^2+dY^2}=\frac{2bcdt\sqrt{1+tt}}{c-2b\int dt\sqrt{1+tt}}.$$

Sit $\int dt\sqrt{1+tt}=L$ atque L talis sit functio ipsius t, ut fiat $=0$, si $t=0$. Erit $ds=\frac{2bcdL}{c-2bL}$. Ergo est

$$s=-c\lg\frac{c-2bL}{c}=c\lg\frac{c}{c-2bL}.$$

* Formula haec et duae sequentes ab editore correctae sunt. — *G. M.*

Unde fiet $e^{\frac{t}{c}} = \frac{c}{c-2bL}$ et $c-2bL = ce^{-\frac{t}{c}}$. Hinc oritur $dY = 2be^{\frac{t}{c}}dt$ et

$$t = \int\left(dY : 2be^{\frac{t}{c}}\right).$$

Est vero etiam $t = \frac{dX}{dY}$. Ergo

$$\frac{dX}{dY} = \int \frac{dY}{2be^{\frac{t}{c}}}.$$

§ 307. Ut haec magis evolvamus, oportet inquirere in $\int dt\sqrt{1+tt}$. Est vero hoc integrale ita, ut fiat $=0$, si $t=0$, sic expressum

$$\frac{t\sqrt{1+tt} - \lg(\sqrt{1+tt}-t)}{2}.$$

Hoc invento habebitur

$$dY = \frac{2bcdt}{c - bt\sqrt{1+tt} + b\lg(\sqrt{1+tt}-t)}$$

et

$$dX = \frac{2bctdt}{c - bt\sqrt{1+tt} + b\lg(\sqrt{1+tt}-t)}.$$

Ad maiorem simplicitatem aequationes has reducere natura rei non permittere videtur. Attamen, si sumatur t valde parvum, multo breviores evadent illae aequationes. Erit enim $\sqrt{1+tt}=1$ et $\lg(\sqrt{1+tt}-t) = -t$. Unde $dX = \frac{2bctdt}{c-2bt}$ et $dY = \frac{2bcdt}{c-2bt}$. Ergo

$$Y = -c\lg\frac{c-2bt}{c} = c\lg\frac{c}{c-2bt},$$

ex qua prodit

$$t = \frac{ce^{\frac{Y}{c}} - c}{2be^{\frac{Y}{c}}} = \frac{dX}{dY}.$$

§ 308. Ex hac aequatione erit

$$2bdX = cdY - ce^{-\frac{Y}{c}}dY.$$

Quae integrata dabit hanc

$$2bX = cY + cce^{-\frac{Y}{c}} - cc \quad\text{vel}\quad -\frac{Y}{c} = \lg\frac{cc+2bX-cY}{cc}.$$

Ergo

$$Y = c\lg\frac{cc}{cc+2bX-cY}.$$

Haec vero aequatio est ad curvam tum solum, quando t est valde parvum. Si autem t valde parvum est, tum est $Y=2bt$. Ergo et Y debet esse valde parvum. Propterea erit

$$e^{-\frac{Y}{c}} = 1 - \frac{Y}{c} + \frac{Y^2}{2c^2} - \frac{Y^3}{6c^3}.$$

Ergo

$$2bX = \frac{Y^2}{2} - \frac{Y^3}{6c}.$$

Quae aequatio dabit curvae portionem prope verticem B positam.

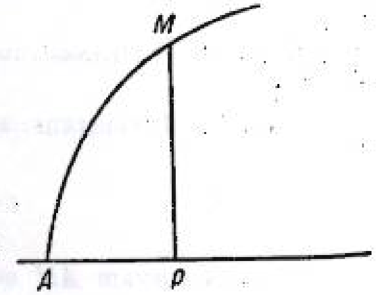


Fig. 39.

§ 309. Sit nunc curva AM (fig. 39), quam corpus describit, data una cum vi absoluta P trahente versus MP et requiratur potentia relativa faciens, ut corpus curvam propositam describat. Cum in potentia relativa duo sint observanda, lex et intensitas, horum alterutrum datum quoque esse potest, nisi tantum quaeratur potentia accelerans vel retardans a potentia relativa orta, quae exprimitur fractione $V:Q$. Sit igitur lex data idque ratio m-cuplicata celeritatum. Erit $V=v^m$ et $Q=q^m$. Oportet ergo invenire intensitatem potentiae huius relativae q in quolibet loco M.

§ 310. Posito ut ante $AP=x$, $PM=y$ et $\sqrt{dx^2+dy^2}=ds$ est

$$\pm Vds : Q = \frac{-dPds^2ddy + Pds^2d^3y}{2ddy^2}$$

posito dx constante. Est vero $v = \frac{Pds^2}{-2ddy}$. Ergo

$$V = v^m = \frac{P^m ds^{2m}}{(-2ddy)^m}.$$

Quia porro est $Q=q^m$, erit

$$\pm\frac{P^m ds^{2m-1}}{q^m(-2ddy)^m} = \frac{-dPddy + Pd^3y}{2ddy^2}.$$

Ergo

$$q^m = \frac{\pm P^m ds^{2m-1}}{2(Pd^3y - dPddy)(-2ddy)^{m-2}}$$

atque

$$q = \frac{Pds^2}{-2ddy}\sqrt[m]{\frac{\pm 4ddy^2}{2ds(Pd^3y - dPddy)}}.$$

Ex hac ergo aequatione invenitur intensitas seu altitudo generans celeritatem, quam si corpus in M haberet, potentia relativa aeque in id ageret ac vis gravitatis.

[N o t a m a r g i n a l i s.] Si sumatur haec aequatio

$$q^m = \frac{P^m ds^{2m-1}}{2(Pd^3y - dPddy)(-2ddy)^{m-2}},$$

sequitur, si fit q^m affirmativum, potentiam esse accelerantem, si negativum, retardantem.

§ 311. Sit P constans $= 2g$. Erit $dP = 0$ et propterea

$$q = \frac{gds^2}{-ddy}\sqrt[m]{\frac{\pm ddy^2}{gdsd^3y}}.$$

Ponamus curvam AM esse circulum, cuius radius $= a$. Erit

$$y = \sqrt{2ax - xx}, \quad dy = \frac{adx - xdx}{\sqrt{2ax - xx}}, \quad ddy = \frac{-aadx^2}{(2ax - xx)^{3/2}}\ *$$

et

$$d^3y = \frac{3a^3dx^3 - 3aaxdx^3}{(2ax - xx)^{5/2}}.$$

Est vero $ds = \frac{adx}{\sqrt{2ax - xx}}$. Unde invenitur

$$q = g\sqrt{2ax - xx}\sqrt[m]{\frac{\pm a}{3g(a - x)}} = gy\sqrt[m]{\frac{\pm a}{3g(a - x)}}.$$

Erit autem in M

$$v = \frac{gds^2}{-ddy} = g\sqrt{2ax - xx} = gy.$$

§ 312. Si fuerit lex potentiae relativae ratio duplicata celeritatum, erit $m = 1$ et

$$q = \frac{\pm agy}{3g(a - x)} = \frac{\pm ay}{3(a - x)}.$$

Signorum $\pm$ superius locum tenet, si potentia fuerit accelerans, inferius, si retardans. Hinc intelligitur, ubi est $x = a$, fore $q = \infty$ vel infinitam esse debere celeritatem corporis, ut potentia relativa aequivaleat gravitati. Erit igitur ibi potentia relativa infinite parva vel evanescens. Si potentia est accelerans, erit $q = \frac{ay}{3(a - x)}$, si retardans, est $q = \frac{-ay}{3(a - x)}$. Si igitur $x < a$, erit accelerans, sin $x > a$, erit retardans.**

---

* Formula haec et sequentes (§§ 311 et 312) ab editore correctae sunt. — *G. M.*

** In manuscripto ob errores in calculo: *Si igitur* $x < \frac{1}{2}a$, *erit accelerans, sin* $x > \frac{1}{2}a$, *erit retardans.* Correxit *G. M.*

§ 313. Maneat vis relativa universaliter expressa, cui respondet vis tangentialis $V : Q$. Directiones vero potentiae absolutae nunc tendant ad fixum quodpiam punctum C (fig. 40). Describat corpus curvam AM sitque corporis, dum est in M, celeritas genita ex altitudine v. Ducta CM sit $= y$ et vis absoluta in M agens $= P$, radius osculi in $M = r$. Ducatur

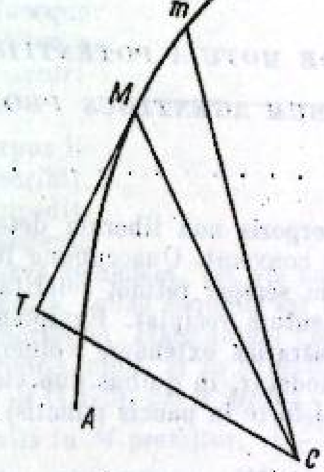


Fig. 40.

tangens MT et ex C in eam perpendiculum CT demittatur. Erit dicto elemento $Mm = ds$

$$CT = \frac{y\sqrt{ds^2 - dy^2}}{ds} \quad \text{et} \quad MT = \frac{ydy}{ds}.$$

Ponatur vero $CT = p$. Erit

$$p^2ds^2 = yyds^2 - yydy^2 \quad \text{et} \quad ds = \frac{ydy}{\sqrt{yy - pp}}.$$

§ 314. Potentia P resolvatur in laterales, tangentialem iuxta MT et normalem iuxta TC agentes. Erit tangentialis vis $= \frac{Pdy}{ds} = \frac{P\sqrt{yy - pp}}{y}$. Diminuit haec celeritatem corporis. Ponatur ea ergo $= \frac{-P\sqrt{yy - pp}}{y}$. Huic adiungenda est vis relativa $\pm V : Q$. Quamobrem erit vis celeritatem augens

$$= \frac{-P\sqrt{yy - pp}}{y} \pm V : Q.$$

Ergo per § 176 erit

$$dv = \frac{-Pds\sqrt{yy - pp}}{y} \pm Vds : Q = -Pdy \pm Vydy : (Q\sqrt{yy - pp}).$$

Vis autem normalis est $= \frac{Pp}{y}$. Hinc per § 178 habebitur

$$\frac{Pp}{y} = \frac{2v}{r} = \frac{2vdp}{ydy}$$

propter $r = \frac{ydy}{dp}$. Est igitur $Ppdy = 2vdp$.

. . . . *

---

* In manuscripto hic plagula dimidia deest. — *G. M.*

[SECTIO SECUNDA. *DE MOTU A POTENTIIS IN PUNCTUM NON LIBERUM AGENTIBUS PRODUCTO*]

. . . .

§ 331. Ad motum corporis non liberum determinandum praecipue ad sequens axioma attendi convenit. Quaecunque fuerit linea, in qua corpus incedere cogitur, eandem semper retinet celeritatem, nisi a potentiis eius augmentum vel decrementum recipiat. Excipienda quidem essent multa, si ad omnes lineas arbitrarias extendere voluerimus. Sufficit, ut tantum lineis continuis accommodetur, in quibus duo elementa nunquam angulum finitum constituunt (nisi forte in paucis punctis) et hoc sensu nihil prorsus erit excipiendum.

§ 332. Si enim concedamus, quod afferi posset, motum corporis, ubi in linea recta fieri non potest, resolvi debere in duos alios, quorum alter secundum directionem viae describendae, alter secundum eidem normalem tendit atque horum posteriorem, quia ei obstaculum directe contrarium est, reici debere retento solo priore. Hoc, inquam, concesso tamen in curva continua celeritas corporis decrescere non potest. Animum autem hic abducimus ab omni resistentia, quae a frictione oriri potest.

§ 333. Ut planum fiat celeritatem corporis incedentis super linea curva non diminui, etiamsi ea pars celeritatis, quae directe est sita contra elementum curvae sequens, amittetur. Sit AB (fig. 41) elementum curvae, in quo corpus actum movetur celeritate c, in B autem deflectere cogatur in lineam BC, quae angulum infinite parvum comprehendit cum AB producta, huiusque anguli sinus sit dz posito sinu toto 1. Sumatur BD in AB producta $= 1$ et compleatur rectangulum $BCDE$. Erit $DC = BE = dz$.

§ 334. Celeritas corporis a, qua in BD progredi tendit, resolvatur in duas laterales, quarum altera in directione BC, altera in directione BE est posita. Erit celeritas in BC

$$= a\sqrt{1-dz^2} = a - \frac{adz^2}{2}.$$

Decrementum ergo celeritatis est $\frac{adz^2}{2}$, quod aequivalet differentiali secundi gradus. Eius ergo integrale erit differentiale primi gradus. Ex quo intelligitur decrementum celeritatis, postquam corpus infinita elementa descripserit vel arcum curvae finitae magnitudinis, fore infinite parvam. Reici igitur id potest et propterea tuto concludi corpus describens lineam curvam, cuius duo quaecunque elementa angulum infinite parum a duobus rectis discrepantem continent, celeritate aequabili moveri, nisi videlicet a potentiis celeritas immutatur.

§ 335. Si ergo corpus in canali quocunque AMB (fig. 42) movetur neque id a potentiis sollicitatur, aequabili motu in eo movebitur. Sit corpus in M eiusque celeritas ex altitudine v genita. Quia propter legem motus generalem corpus quodcunque motum in linea recta moveri conatur, in M conabitur secundum tangentem MT progredi. Hic igitur conatus, quia impeditur a firmitate canalis, premet latus canalis superius seu convexum idque tanta vi premet, quanta requiritur, si corpus libere moveretur ad id in curva linea retinendum. Haecque vis, quam canalis patitur a corpore, vocatur *vis centrifuga*.

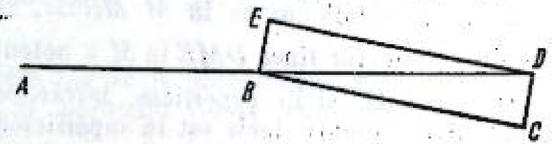


Fig. 41.

§ 336. Si autem corpus libere curvam lineam describit, vis seu potentia, quae impedit, quominus corpus in tangente progrediatur, sed in curva remaneat, est vis normalis (§ 178). Canalis ergo in M premitur a potentia, quae aequalis est vi normali in M, si corpus curvam AMB libere describeret. Haec autem vis normalis est ad vim gravitatis seu pondus corporis moti, si in superficie terrae collocaretur, ut $2v$ ad radium osculi in M (§ 178). Sit is $MR = r$ et pondus corporis moti 1. Erit potentia, qua canalis in M premitur, $= \frac{2v}{r}$. Vis haec est normalis in curvam agitque secundum directionem MV.

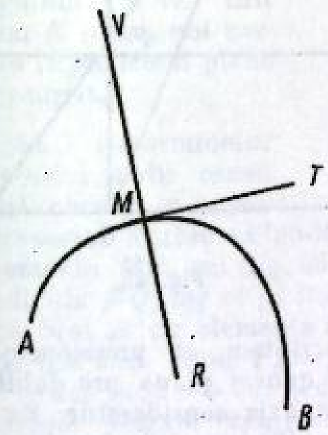


Fig. 42.

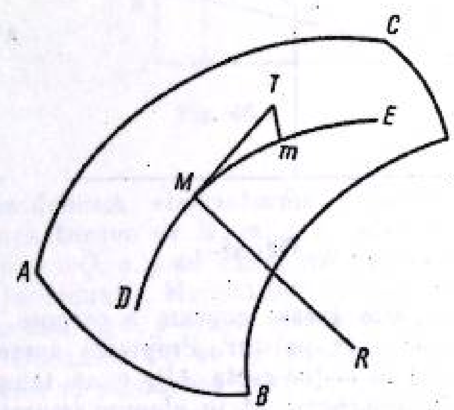


Fig. 43.

§ 337. Cogatur iam non amplius corpus in data via moveri, sed tantum data sit superficies, in qua semper retineatur.

Repraesentetur ea superficies per ABC (fig. 43) describeritque corpus iam curvam DM in ea superficie, similiter intelligitur motum corporis super hac superficie, si a nullis potentiis agitetur, esse aequabilem. Sed videndum est, qualem curvam in data superficie descripturum sit. Ducatur in M tangens MT curvam descriptam. Perspicuum est corpus, si libere moveretur, ex M in hac tangente MT progressurum esse.

§ 338. Quoniam autem corpus in superficie proposita manere cogitur, resolvatur motus eius secundum MT directus in duos, quorum unus in ipsam superficiem incidit quoque progredi potest corpus, alter vero directionem habeat perpendicularem ad superficiem, qui in actum deduci non potest, sed amittitur. Hanc ob rem ad directionem, iuxta quam corpus ex M sit progressurum, demittatur ex T in superficiem normalis Tm. Linea igitur Mm erit elementum a corpore describendum. Ex hoc cognoscitur, quia planum $DMTm$, in quo sita sunt duo elementa proxima, est perpendiculare in superficiem datam, corpus in ea lineam descripturum, quae est brevissima inter suos terminos.

§ 339. Corpus ergo in linea DME movebitur tanquam in canali et propterea etiam pressio aderit in canalem secundum directionem radii osculi. Sit radius osculi curvae in M $MR=r$, celeritas corporis ex altitudine v genita. Premetur linea DME in M a potentia, quae est $=\frac{2v}{r}$ posito pondere corporis moti, si in superficie terrae poneretur, 1. Quia autem curvae planum in singulis locis est in superficiem normale, incidet radius osculi curvae in normalem in superficiem. Quamobrem superficies premetur in M secundum normalem in eam atque vi $\frac{2v}{r}$.

§ 340. Convenit haec, quia quae ad solida spectant minus sunt nota, ulterius persequi atque ex aequatione naturam superficiei exponente determinare ipsam curvam a corpore descriptam et pressionem, quam ea superficies patitur. Propterea assumto quovis plano pro lubitu APQ (fig. 44) in eoque recta AP, quae tanquam axis consideretur. Ex puncto quovis superficiei M in planum assumtum APQ demittatur perpendicularis MQ et ex Q perpendicularis QP in axem AP. Vocentur $AP=x$, $PQ=y$, $QM=z$. Sitque aequatio naturam superficiei complectens haec $Pdx=Qdy+Rdz$, ex qua, quae huc spectant, derivari oportet.

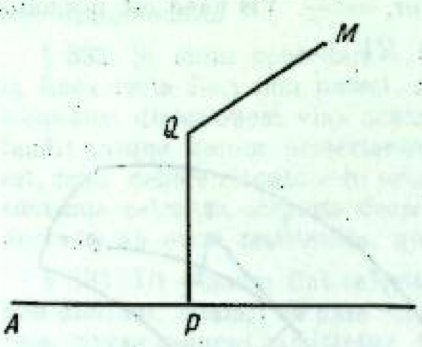


Fig. 44.

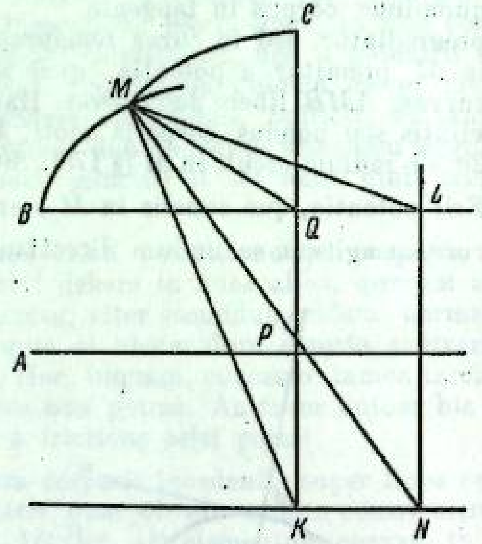


Fig. 45.

§ 341. Cum radius osculi curvae, quam corpus describit, incidat in normalem in superficiem, determinemus ante omnia positionem huius normalis. Consideremus primum sectionem superficiei plano per M transeunte et normali in planum APQ et secante planum assumtum APQ recta BQ (fig. 45). Sectio ea sit curva BM, cuius aequatio habetur, si in generali pro superficie $Pdx=Qdy+Rdz$ ponatur $PQ=y$ constans seu $dy=0$. Erit ergo aequatio pro BM haec $Pdx=Rdz$. Ex qua invenitur subnormalis $QL=\frac{zdz}{dx}=\frac{Pz}{R}$. Si nunc per L ducatur perpendicularis [LN] ad QL, erunt omnes rectae ex M ad LM* ductae normales in curvam BM.

* In manuscripto: QL. Correxit G. M.

§ 342. Secetur iam superficies plano normali in planum APQ transeunte per M et occurrente plano APQ in recta PQ. Sectio sit CM et aequatio pro ea habebitur, si in aequatione $Pdx=Qdy+Rdz$ ponatur $AP=x$ constans vel $dx=0$. Erit ergo haec aequatio $0=Qdy+Rdz$ pro curva CM. Subnormalis $\frac{zdz}{dy}$ ergo est $=\frac{-Qz}{R}$. Signum negationis indicat eam versus P cadere. Sit ea QK. Erit $QK=\frac{Qz}{R}$. Ad QK per K ducatur perpendicularis KN. Omnes rectae ex M ad KN ductae erunt in curvam CM normales.

§ 343. Secet recta KN priorem LN in N ducaturque MN. Erit haec MN et in curvam BM et in CM normalis. Quare, cum curvae BM et CM sitae sint in superficie proposita, normalis autem in superficiem normalis quoque sit in omnes sectiones eiusdem superficiei, sequitur MN esse normalem quaesitam superficiei in M. Ea ergo invenitur, si sumatur $QL=\frac{Pz}{R}$ et $QK=\frac{Qz}{R}$ compleaturque rectangulum $QKNL$. Erit punctum N locus, ubi normalis in superficiem plano APQ occurrit.

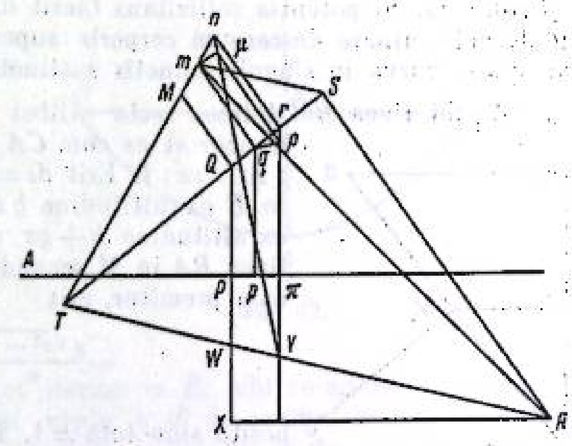


Fig. 46.

§ 344. Determinetur nunc positio radii osculi cuiusque curvae in superficie proposita ductae ex positione duorum elementorum. Sunto igitur duo elementa Mm, $m\mu$ (fig. 46) ducanturque ex M, m, μ in planum APQ perpendicula MQ, mq et $\mu\rho$ itemque ex Q, q, ρ ad axem AP normales QP, qp et $\rho\pi$. Sint autem elementa Pp, $p\pi$ aequalia. Manentibus ut ante $AP=x$, $PQ=y$, $QM=z$ erunt $Pp=p\pi=dx$, $pq=y+dy$, $\pi\rho=y+2dy+ddy$, $qm=z+dz$, $\rho\mu=z+2dz+ddz$. Ducantur Qq et $q\rho$ producaturque Qq in utramque plagam occurrens rectae $\pi\rho$ productae in r. Erit $Qq=qr$. Ex r erigatur ad planum APQ normalis rn occurrens elemento Mm utrinque similiter producto in n. Erit $Mm=mn$. Habebitur autem

$$Qq=\sqrt{dx^2+dy^2}=qr,\quad q\rho=\sqrt{dx^2+dy^2}+\frac{dyddy}{\sqrt{dx^2+dy^2}},\quad Mm=\sqrt{dx^2+dy^2+dz^2}=mn$$

et

$$m\mu=\sqrt{dx^2+dy^2+dz^2}+\frac{dyddy+dzddz}{\sqrt{dx^2+dy^2+dz^2}}.$$

§ 345. Ducatur in plano Qm normalis mS ad elementum Mm occurrens elemento Qq producto in S. Erit

$$qS=\frac{(z+dz)\,dz}{\sqrt{dx^2+dy^2}}.$$

Per S ad qS ducatur ad angulum rectum recta SR. Erunt omnes rectae ex m ad SR ductae in elementum Mm perpendiculares. Sed radius osculi curvae $Mm\mu$ ex m ductus normalis est in Mm et iacet in plano eodem, in quo posita sunt elementa Mm et $m\mu$. Quamobrem ad radii osculi positionem inveniendam determinabimus planum, in quo sita sunt elementa Mm et $m\mu$.

. . . . *

[Caput I. DE MOTU PUNCTI SUPER LINEA DATA A POTENTIIS ABSOLUTIS SOLLICITATI]

. . . .

[Problema. Si potentia sollicitans fuerit uniformis et ubique deorsum tendat, determinare descensum corporis super data curva atque pressionem, quam curva in singulis punctis sustinet.]

§ 362. Sit linea BMA linea recta utlibet inclinata ad CA (fig. 47). Concurrat ea cum CA in A sitque $CA=a$ et $AB:AC=\alpha:1$. Erit $ds=\alpha dx$.** Manente celeritate in B ex altitudine b acquisita erit celeritas in M ex altitudine $b+gx$ genita. Pressio autem, qua linea BA in M secundum MS perpendicularem eam premitur, erit

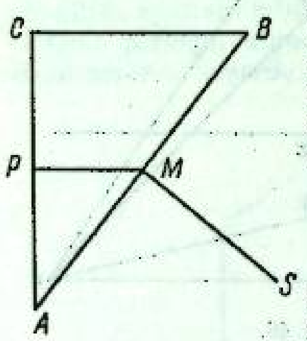


Fig. 47.

$$=\frac{g\sqrt{\alpha^2-1}}{\alpha}=g\sin\text{ang}\,A$$

posito sinu toto $=1$. Tempus, quo BM absolvitur, est

$$=\int\frac{\alpha dx}{\sqrt{b+gx}}=\frac{2\alpha\sqrt{b+gx}-2\alpha\sqrt{b}}{g}.$$

Tempus ergo, quo tota linea BA absolvitur, est

$$=\frac{2\alpha\sqrt{b+ga}-2\alpha\sqrt{b}}{g}.$$

§ 363. Si esset $\alpha=1$, incideret linea BA in CA. Corpus in CA descenderet libere, quia directio potentiae incidit in AC, celeritate initiali in C genita ex altitudine b. Comparemus igitur hos duos motus in CA et BA inter se. Manifestum est primo celeritates in P et M inter se aequari. Tempus autem per CP esse ad tempus per BM ut 1 ad α, i. e. ut AC ad AB seu ut cosinus anguli A ad sinum totum.

§ 364. Si celeritas initialis fuerit nulla seu $b=0$, corpus ex quiete ex B exiens describet lineam BA eritque celeritas in quovis puncto M genita ex altitudine gx, i. e. $g\cdot CP$. Tempus vero, quo ex B in A pervenit, est

* In manuscripto hic plagula dimidia deest. — G. M.

** Hic $BM=s$, $CP=x$, potentia sollicitans $=g$ existente vi gravitatis $=1$. — G. M.

$$=\frac{2\alpha\sqrt{ga}}{g}=\frac{2\alpha\sqrt{a}}{\sqrt{g}}$$

Tempus ergo est directe ut radix quadrata ex altitudine verticali CA et reciproce ut cosinus anguli A et radix quadrata ex potentia sollicitante coniunctim. Si ergo potentia sollicitans sit eadem in diversis descensibus super recta inclinata et angulus inclinationis idem, tempora descensuum sunt in ratione subduplicata viarum descriptarum.

§ 365. Sit linea BMA rursus curva quaecunque (fig. 48) et potentia in M agens $=p$, omnia ut [in] § 356. Sit vero celeritas in B nulla seu $b=0$. Erit celeritas in M tanta, quanta acquiritur ex altitudine $\int pdx$. In A igitur habebit certum gradum celeritatis. Hac celeritate si corpus retro

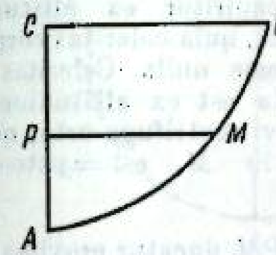


Fig. 48.

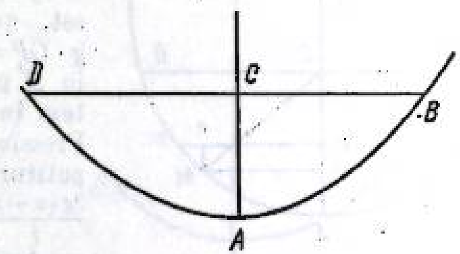


Fig. 49.

ex A ad B moveatur, perveniet iterum in B, ubi celeritas eius evanescet. Ascensus enim eodem fit modo quo descensus, in singulis enim punctis M corpus ascendens eandem habet celeritatem, quam ibidem descendens habuit.

§ 366. Si p vel constans fuerit vel tantum ab altitudine x pendeat, iam notatum est celeritatem corporis in singulis curvae locis non a curva, sed tantum ab altitudine pendere. Eadem igitur ratio est ascensus.

Corpus ex A certa quadam celeritate in curva quacunque ascendens ad eandem pertingit altitudinem, quaecunque etiam fuerit curva. Hanc ob rem corpus, quod curvam BA descendendo ex quiete descripsit et celeritate in A acquisita in alia quacunque AD (fig. 49) ascendat, pertinget ad D, punctum aequo altum ac B. In singulis praeterea punctis utriusque curvae AD, AB aeque altis aequales habebit celeritates.

§ 367. Corpus ergo, quod in D perveniens totum suum motum amisit, descendet rursus in curva DA et ex A ascendet in AB amittetque in B perveniens iterum totam suam celeritatem, consequenter iterum ex B descendet ut initio. Hoc igitur modo corpus hos alternos descensus et ascensus perpetuo continuabit, semper enim ad B et D usque perveniet.

Huius modi motus reciproci vocantur *oscillationes*. Est vero oscillatio motus corporis ex quiete moti donec rursus ad quietem pervenit. Ita motus corporis BAD est oscillatio.*

* Eulerus hoc loco determinat oscillationem tamquam unum tantummodo itum, sed in quibusdam aliis locis tamquam coniunctionem itus et reditus, qua determinatione utitur in textu edito *Mechanicae* (Opera omnia, II-2, p. 62). Textus sequens ab editore ita emendatus est, ut, quo expositioni uniformitas adderetur, in sequentibus quaeque oscillatio significet unum itum. — G. M.

§ 368. Sit potentia sollicitans constans seu $p=g$ et curva proposita, in qua corpus movetur, circulus $FBAD$, cuius centrum E et radius $=f$ (fig. 50). Ducatur diameter FA parallela directioni potentiae. Absolvat corpus oscillationem per arcum BAD. Erunt puncta B et D aeque alta et propterea recta BD erit perpendicularis ad AF. Sit $AC=a$. Quia arcus AB aequalis est et similis arcui AD, erit tempus oscillationis vel motus per BAD duplum temporis, quo arcus BA vel ascendendo vel descendendo describitur. Investigemus ergo ascensum per arcum AB. Sit corpus in M. Ducatur ad AF normalis MP. Dicatur $AP=x$. Erit $CP=a-x$ et $PM=\sqrt{2fx-xx}$.

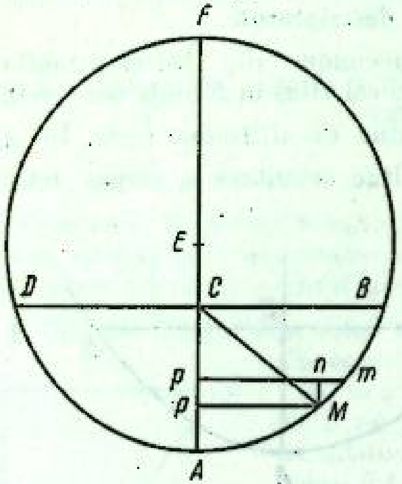


Fig. 50.

§ 369. Celeritas corporis in M tanta est, quanta acquiritur ex altitudine $g\cdot CP=g(a-x)$, quia celeritas corporis in B ponitur esse nulla. Celeritas autem in A genita est ex altitudine ga. Pressio ergo ex vi centrifuga orta, quam patitur curva in M, est = potentiae $\frac{2g(a-x)}{f}$.

Applicatae PM ducatur proxima pm. Erit $Pp=dx$ et

$$Mm=\frac{fdx}{\sqrt{2fx-xx}} \quad\text{et}\quad mn=\frac{fdx-xdx}{\sqrt{2fx-xx}}.$$

Pressio vero ab actione potentiae g orta est ad ipsam potentiam g ut mn ad Mm, i. e. ut $f-x$ ad f. Ea ergo pressio est $=\frac{g(f-x)}{f}$. Tota ergo vis, qua curva BA in M premitur, est $=\frac{g(2a+f-3x)}{f}$ eaque tendit secundum MS normalem in curvam.

§ 370. Ad tempus ascensus per arcum AMB inveniendum sumatur tempusculum per Mm, quod est

$$\frac{fdx}{\sqrt{g(a-x)(2fx-xx)}}.$$

Huius integrale dabit tempus, quo arcus AM absolvitur. Si per series integretur fiatque hoc modo

$$\frac{fdx}{\sqrt{g(2f-x)}}(ax-xx)^{-1/2},$$

ita ut $(ax-xx)^{-1/2}$ per seriem infinitam exprimatur, erunt duo termini primi seriei hi

$$\frac{\text{arc }AB}{\sqrt{ag}}+\frac{(\text{arc }AB-CB)f}{2a\sqrt{ag}}+\text{etc.}$$

Haec series, si AB fuerit valde parvus, vehementer convergit, ita ut sufficiat hos duos sumsisse terminos.

§ 371. Si arcus AB prorsus evanescit, tempus tamen per arcum infinite parvum non erit nullum. Nam tum x pro f evanescit eritque elementum temporis $=\frac{dx\sqrt{f}}{\sqrt{2g(ax-xx)}}$. Est vero $\int\frac{adx}{2\sqrt{ax-xx}}$ arcus circuli, cuius diameter est a et sinus versus x. Si fiat $x=a$, erit $\int\frac{adx}{2\sqrt{ax-xx}}=$ semiperipheriae circuli diametri a. Sit radius ad peripheriam ut 1 ad π. Erit $\frac{\pi}{2}=\int\frac{dx}{\sqrt{ax-xx}}$. Ergo tempus, quo acrus AB absolvitur, est $=\pi\sqrt{f}:2\sqrt{2g}$.

§ 372. Erit ergo tempus unius oscillationis per BAD, si quidem fuerit hic arcus infinite parvus, $=\pi\sqrt{f}:\sqrt{2g}$. Ex hoc perspicitur oscillatio-

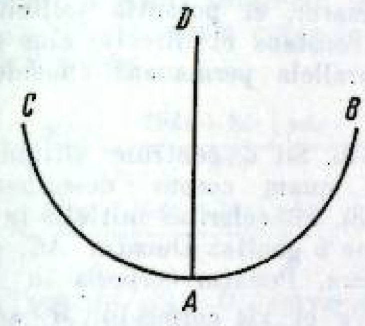


Fig. 51.

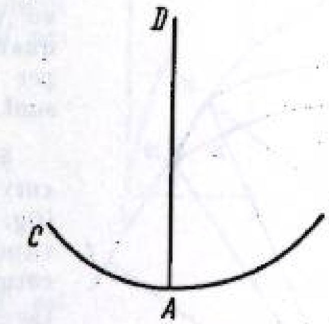


Fig. 52.

nes infinite parvas in arcubus circuli factas absolvi temporibus, quae sunt in subduplicata ratione composita ex directa radiorum eorum arcuum et inversa potentiarum sollicitantium. Si f in partibus millesimis pedis Rhenani exprimitur, dabit $\frac{\pi\sqrt{f}}{250\sqrt{2g}}$ numerum minutorum secundorum, quibus oscillatio absolvitur. Ut ergo tempus oscillationis sit unum minutum secundum, erit

$$f=\frac{125\,000g}{\pi\pi}=12\,665g \text{ scrupulorum pedis Rhenani.*}$$

§ 373. Cum arcus huius modi oscillationibus descripti debeant esse infinite parvi, quae hic de circulis dicta sunt, ad omnes curvas accommodari possunt. Arcus enim minimi cuiusque curvae pro arcubus circularibus haberi possunt, quorum semidiametri sunt radii osculi in iis locis.

Si igitur fuerit curva quaecunque BAC (fig. 51), in qua corpus oscillationes suas perficiat, sit punctum infimum A ibique radius osculi $=r$, potentia absoluta $=g$ parallela verticali AD sintque oscillationes infinite parvae, erit tempus unius oscillationis $=\frac{\pi\sqrt{r}}{\sqrt{2g}}$.

§ 374. Si curva BAC (fig. 52), quae una oscillatione absolvitur, non fuerit una continua curva, sed arcus AB et AC sint portiones diversarum curvarum. Sitque A punctum, in quo conveniunt, infimum. Ponatur BAC esse arcus infinite parvus, arcus AB radius osculi $=r$ in AD incidens, cui directiones potentiae g sunt parallelae. Similiter radius osculi arcus CA sit $=\rho$. Erit tempus, quo arcus BA absolvitur, $=\frac{\pi\sqrt{r}}{2\sqrt{2g}}$

* In manuscripto: 3166 g. Cf. annotationem editoris praecedentem. Correxit G. M.

et tempus, quo arcus AC absolvitur, est $=\frac{\pi\sqrt{p}}{2\sqrt{2g}}$. Ergo tempus unius oscillationis est

$$=\frac{\pi(\sqrt{r}+\sqrt{p})}{2\sqrt{2g}}.$$

§ 375. Quae hic de oscillationibus infinite parvis tradita sunt, non solum ad casum hunc pertinent, quo potentia absoluta est constans eiusque directiones parallelae, sed ea latissime patent ad varietatem quamcunque potentiae tam quantitatis quam directionis. Nam, quia arcus una oscillatione descriptus est infinite parvus, dum corpus in eo versatur, et potentia sollicitans tanquam constans et directio eius sibi semper parallela permanens considerari possunt.

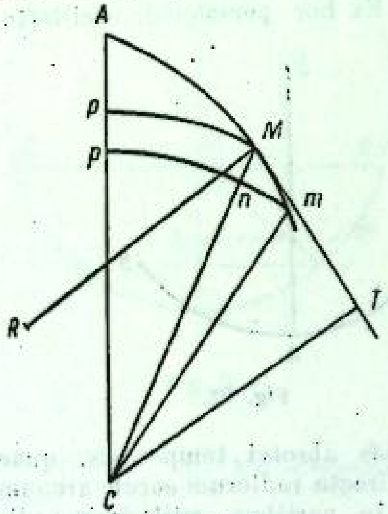


Fig. 53.

§ 376. Sit C centrum virium et AM curva, quam corpus describere debet (fig. 53). Sit celeritas initialis in A ex altitudine b genita. Ducatur AC, quae vocetur $=a$. Ponatur corporis in M celeritas $=\sqrt{v}$ et vis corpus in M ad C trahens $=p$. Sint $CM=y$, arcus $AM=s$. Puncto M sumatur proximum m. Erit $Mm=ds$, $Cm=y+dy$. Ergo $Mn=-dy=Pp$ ductis arcubus MP, mp. Porro ducatur tangens MT et ex C in eam perpendicularis CT demittatur. Erit $CM:MT=Mm:Mn=ds:(-dy)$.

§ 377. Vis secundum CM agens p resolvatur in laterales, tangentialem et normalem. Erit tangentialis secundum MT agens $=\frac{-pdy}{ds}$. Haec vero celeritatem corporis auget, dum elementum Mm percurrit. Erit vero $dv=-pdy$. Ergo $v=C-\int pdy$. Si p tantum a y vel distantia corporis a C pendet, etiam $\int pdy$ a solo y pendet. Quamobrem celeritas corporis in M seu in distantia y a C cognoscitur ex sola distantia neque ad id opus est, ut curva ipsa sit determinata. Consequenter corpus in M eandem habet celeritatem, quam in P haberet, si per AP libere cecidisset celeritate initiali ibi ex b acquisita.

§ 378. Si dicatur $AP=x$, erit $y=a-x$ et $dy=-dx$. Ergo est $pdy=-pdx$. Quamobrem erit $v=C+\int pdx$. Sumatur integrale ipsius pdx ita, ut fiat $=0$, si est $x=0$. Quia in hoc casu habetur $v=b$, erit $C=b$ et propterea $v=b+\int pdx$. Quaeratur nunc, quanta sit pressio, quam curva in M sustinet secundum directionem normalem in curvam MR. Premitur autem primo curva a vi normali, quae est

$$=\frac{p\cdot CT}{CM}=\frac{p\cdot mn}{Mm}=\frac{p\sqrt{ds^2-dy^2}}{ds}$$

et eius directio est secundum MR. Dicatur $CT=z$. Erit pressio in M $=\frac{pz}{y}=\frac{pz}{a-x}$.

§ 379. Praeterea curva in M pressionem a vi centrifuga [sustinet]. Quae vero, quia curva ponitur esse convexa versus AC, est priori pressioni directe contraria eamque ergo diminuit. Radius osculi MR est $=\frac{ydy}{dz}$, vis autem centrifuga est

$$=\frac{2v}{\text{radius osculi}}=\frac{2vdz}{ydy}=\frac{2bdz+2dz\int pdx}{ydy}.$$

Haec pressio a priori subtracta relinquit pressionem veram, quam curva in M patitur. Ea ergo est

$$=\frac{pz}{a-x}-\frac{2bdz+2dz\int pdx}{ydy}=$$

$$=\frac{pzdx+2bdz+2dz\int pdx}{(a-x)\,dx}.$$

Si haec pressio est $=0$, curva AM est eadem, quae libere describitur.

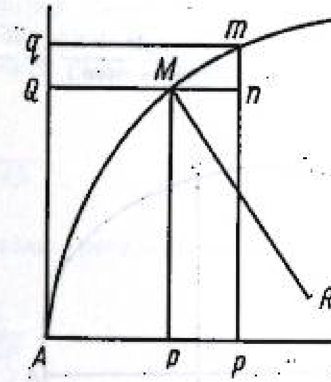


Fig. 54.

§ 380. Consideremus nunc potentias, quae corpus sollicitare possunt, generalissime.

Moveatur corpus in curva AM (fig. 54). Ductis duabus normalibus AP, AQ sollicitetur corpus ubique a duabus potentiis, altera ad rectam AP tendente, altera ad AQ. Sit corpus in M, ubi eius celeritas sit genita ex altitudine v. Demittantur ex M in AP et AQ perpendiculares MP, MQ sintque $AP=MQ=x$, $PM=AQ=y$. Ponatur vis, qua corpus in M ad P trahitur, $=P$ et vis, qua ibidem ad Q trahitur, $=Q$ posita vi gravitatis $=1$.

§ 381. Assumto elemento Mm ductisque mp, mq erit $Pp=Mn=dx$, $Qq=mn=dy$ et $Mm=\sqrt{dx^2+dy^2}$. Resolvatur utraque potentia in laterales, tangentialem et normalem. Erit tangentialis ex P orta $=\frac{Pdy}{\sqrt{dx^2+dy^2}}$ eaque, quae ex Q oritur, $=\frac{Qdx}{\sqrt{dx^2+dy^2}}$. Harum utraque motui est contraria. Quare potentia corpus per Mm motum accelerans est $=\frac{-Pdy-Qdx}{\sqrt{dx^2+dy^2}}$. Est igitur (§ 176) $dv=-Pdy-Qdx$ atque

$$v=C-\int Pdy-\int Qdx.$$

§ 382. Videamus nunc, quanta vi curva in M premitur secundum normalem MR.

Premitur primo secundum hanc directionem a vi normali P orta, quae est $=\frac{Pdx}{\sqrt{dx^2+dy^2}}$. Deinde premitur a vi normali ex Q orta, quae est $=\frac{Qdy}{\sqrt{dx^2+dy^2}}$, sed ab hac secundum directionem contrariam ipsi MR. Tertio vis centrifuga quoque est huic directioni contraria. Ea vero est $=\frac{2v}{\text{radius osculi}}$. Est vero sumta $\sqrt{dx^2+dy^2}$ constante radius osculi $=\frac{dy\sqrt{dx^2+dy^2}}{ddx}$. Est igitur

$$\frac{2v}{\text{radius osculi}}=\frac{2Cddx-2ddx\int Pdy-2ddx\int Qdx}{dy\sqrt{dx^2+dy^2}}.$$

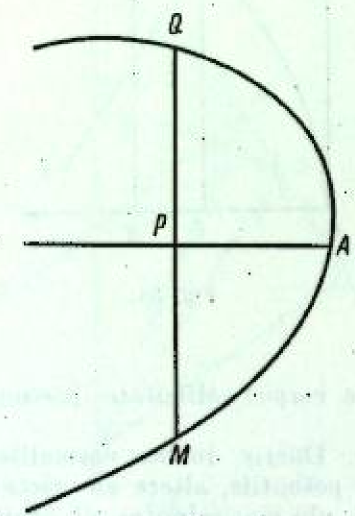


Fig. 55.

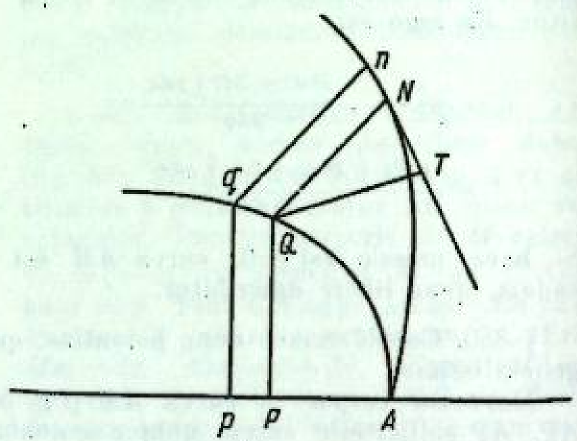


Fig. 56.

§ 383. Tota propterea vis, qua curva secundum MR premitur, est

$$=\frac{Pdxdy-Qdy^2-2Cddx+2ddx\int Pdy+2ddx\int Qdx}{dy\sqrt{dx^2+dy^2}}.$$

Simili modo totum negotium absolvi potest, si curva proposita non tota est in eodem plano sita et si praeterea directiones potentiarum non sunt in eodem plano. Hoc casu curva ad tres coordinatas refertur orthogonales atque corpus ubique tanquam a tribus potentiis sollicitatum consideratur, quarum directiones sint coordinatis parallelae, uti [in] § 273 factum est.

§ 384. Casum, de quo modo mentionem feci, quo curva, quam corpus describit, non est in eo plano, in quo sitae sunt directiones potentiae sollicitantis, hic fusius non attingo, nisi quando directiones potentiae sibi semper sunt parallelae. Hac ratione multos evito molestos calculos et, qui viderit, quomodo hic casus tractari debeat, reliquos ipse supplere poterit, si opus fuerit. Hunc vero casum prae reliquis in sequentibus tractabo, quia multa praeclara ad eum spectant.

§ 385. Sint directiones potentiae omnes verticales et repraesentet curva AQ (fig. 55) proiectionem curvae, in qua corpus movetur, in plano

horizontali. Deinde altera curva AM sit eiusmodi, ut eius quaelibet applicata PM in Q verticaliter erecta pertingat ad ipsam viam describendam. Huius vero curvae AM applicata in A sit aequalis 0, ita ut corpus in loco infimo reperiatur, quando est in A. Vocentur $AP=x$, $PQ=y$, $PM=z$. Celeritas corporis in A tanta sit, quanta ex altitudine b acquiritur. Cum vero corpus super Q pervenerit, habeat celeritatem ex altitudine v genitam.

§ 386. Sit AN ipsa curva, quam corpus describit (fig. 56). Erit $NQ=z$. Sollicitetur corpus in N a potentia p secundum directionem NQ. Erit sumto loco proximo n vis tangentialis secundum tangentem NT agens

$$=\frac{pdz}{\sqrt{dx^2+dy^2+dz^2}}.$$

Vis vero normalis, quae secundum parallelam perpendiculi QT in tangentem agit, est

$$=\frac{p\sqrt{dx^2+dy^2}}{\sqrt{dx^2+dy^2+dz^2}}.$$

Posita altitudine generante celeritatem in n $=v+dv$, quia vis tangentialis celeritatem corporis per Nn transeuntis diminuit, erit $dv=-pdz$ (§ 176) atque $v=C-\int pdz$. Fiat $\int pdz=0$, si $z=0$. Erit $C=b$ atque $v=b-\int pdz$.

§ 387. Si p vel constans est vel a sola altitudine $NQ=z$ pendet, celeritas corporis ipsa a sola elevatione corporis super plano horizontali pendet, i. e. a solo z. Nihil ergo curva AQ ad celeritatem corporis immutandam facit. Sit p constans vel $p=g$. Erit $v=b-gz$. Tempus hinc, quo corpus curvam AN absolvit, est

$$=\int\frac{\sqrt{dx^2+dy^2+dz^2}}{\sqrt{b-gz}}.$$

Eo usque autem corpus ascendere potest super horizonte APQ, donec sit $b=gz$ vel $z=\frac{1}{g}b$.

§ 388. Curva AN in N premitur a duabus potentiis, quarum altera est potentia normalis, quae est

$$=\frac{p\sqrt{dx^2+dy^2}}{\sqrt{dx^2+dy^2+dz^2}}.$$

Huius directio est normalis in curvam AN, quae sita est in plano QNT, haeque trahitur deorsum secundum parallelam ipsi TQ. Altera vis est centrifuga, qua curva premitur secundum directionem oppositam ei, quam habet radius osculi, quae [in] § 348 est determinata. Eius quantitas est

$$=\frac{2v}{\text{radius osculi}}=\frac{2\sqrt{b-\int pdz}}{\text{radius osculi}}=$$

$$=\frac{2\sqrt{b-\int pdz}\;\sqrt{dx^2ddy^2+dx^2ddz^2+(dyddz-dzddy)^2}}{(dx^2+dy^2+dz^2)^{3/2}}.$$

Quemadmodum in § 352 radius osculi est inventus.

§ 389. Quod attinet ad ipsum motum corporis super huiusmodi curva, id ad motum super via in eodem plano posita reducitur. Sumatur super plano horizontali linea recta AQ (fig. 57), quae aequalis sit curvae in figura antecedente AQ et QN verticalis aequalis $=z$. Dicatur $AQ=t$. Erit $dt=\sqrt{dx^2+dy^2}$. Concipiatur corpus moveri super hac NA ita, ut celeritas in A sit $=\sqrt{b}$. Erit celeritas in $N=\sqrt{b-gz}$ et tempus per NA

$$=\int\frac{\sqrt{dx^2+dy^2+dz^2}}{\sqrt{b-gz}}.$$

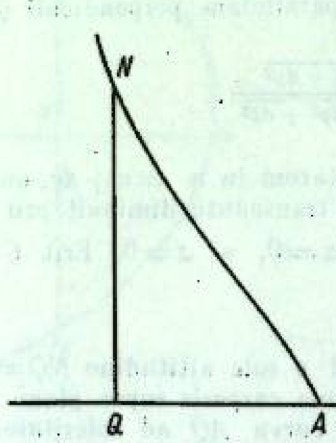


Fig. 57.

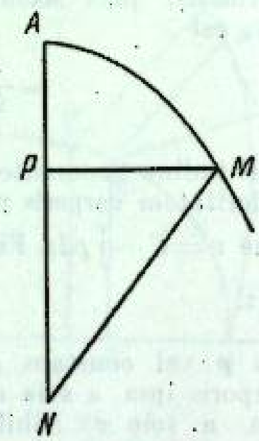


Fig. 58.

Motus ergo per NA est idem, si AQ recta sit sive sit incurvata, pressio vero immutatur.

§ 390. Accedo nunc ad huius capitis partem alteram iam tractatae inversam, qua requiritur curva, super qua corpus moveri debeat talis, ut motus super ea datam habeat proprietatem. Haec proprietas, quae proponitur, triplicis esse potest generis. Ad primum genus eae pertinent quaestiones, quibus pressio in curvam datam legem habere debet, ad secundum eae, quae in celeritatibus quandam proprietatem requirunt, et ad tertium eae quaestiones, quibus tempus determinatae durationis esse oportet. Quaestiones duorum primorum generum nihil in se habent difficultatis. Ea igitur breviter sumus percursuri.

§ 391. Oporteat determinari curvam AM (fig. 58), super qua corpus incedens eam premat data potentia. Sit potentia sollicitans constans $=g$ eiusque directio semper parallela axi AP. Sit $AP=x$, $PM=y$. Sit corporis celeritas in $A=0$, erit in $M=\sqrt{gx}$. Ducatur normalis MN debeatque curva in M secundum MN premi vi, quae est $=q$. Premitur vero secundum MN vi ex potentia g orta, quae est $=\frac{gdy}{\sqrt{dx^2+dy^2}}$. Huic contraria est, quae a vi centrifuga oritur, quae est

$$=\frac{2gx}{\text{radius osculi}}=\frac{-2gxdxddy}{(dx^2+dy^2)^{3/2}}$$

sumto dx constante. Erit ergo

$$q=\frac{gdx^2dy+gdy^3+2gxdxddy}{(dx^2+dy^2)^{3/2}}.$$

§ 392. Si ponatur $\sqrt{dx^2+dy^2}=ds$ atque ponatur ds constans, erit radius osculi $=\frac{dsdx}{-ddy}$. Erit igitur

$$q=\frac{gdydx+2gxddy}{dsdx}.$$

Est vero $dy=\sqrt{ds^2-dx^2}$ et $ddy=\frac{-dxddx}{\sqrt{ds^2-dx^2}}$.

Ergo est

$$q=\frac{gds^2dx-gdx^3-2gxdxddx}{dsdx\sqrt{ds^2-dx^2}}$$

[seu]

$$q=\frac{gds^2-gdx^2-2gxddx}{ds\sqrt{ds^2-dx^2}}.$$

Ponatur q constans $=c$, ut prodeat curva, quae ubique aequaliter premitur. Erit $cds\sqrt{ds^2-dx^2}=gds^2-gdx^2-2gxddx$. Sit $ds=zdx$. Erit $zddx+dxdz=0$ vel $ddx=\frac{-dxdz}{z}$. Ergo habetur $czdx\sqrt{zz-1}=gz^2dx-$ $-gdx+\frac{2gxdz}{z}$ seu

$$cdx=\frac{gdx\sqrt{zz-1}}{z}+\frac{2gxdz}{zz\sqrt{zz-1}}.$$

§ 393. Ponatur $\frac{\sqrt{zz-1}}{z}=t$. Erit $dt=\frac{dz}{zz\sqrt{zz-1}}$. Ergo $cdx=gtdx+2gxdt$ atque $\frac{dx}{x}=\frac{2gdt}{c-gt}$. Unde habetur $x(c-gt)^2=C^2$. Sed

$$t=\frac{\sqrt{zz-1}}{z}=\frac{dy}{ds}.$$

Ergo

$$c\sqrt{x}-\frac{gdy\sqrt{x}}{ds}=C=g\sqrt{a}.$$

Ergo $ds^2(c\sqrt{x}-g\sqrt{a})^2=ggxdy^2$ atque

$$dy=\frac{dx\,(c\sqrt{x}-g\sqrt{a})}{\sqrt{ggx-(c\sqrt{x}-g\sqrt{a})^2}}.$$

Si $c=g$, aequatio denuo potest integrari proditque

$$y+C=\frac{2x-2\sqrt{ax}-2a}{5}\sqrt{\frac{2\sqrt{x}-\sqrt{a}}{\sqrt{a}}}.^{*}$$

* Formula haec ab editore correcta est. — G. M.

Hic $\sqrt{a}$ etiam negative potest accipi, nam prorsus est quantitas arbitraria.

. . . . *

[Problema.** Trahente uniformi potentia ubique verticaliter deorsum invenire curvam AM, super qua corpus celeritate data q a puncto fixo C recedat (fig. 59).

Solutio. Sit potentia sollicitans $= g$ et celeritas corporis initialis in A debita altitudini gc sumaturque $AQ = c$. Positis $QP = x$, $PM = y$, $CP = t$, $CM = z$, $AM = s$ erit celeritas in M debita altitudini gx. Ducatur linea recta CD et radiis CA, CM, Cm describantur circuli AB, MN, mn, qui secant CD in B, N et n. Quia autem motus per AM respondere debet motui per BN, concipiatur corpus motum super BN celeritate debita altitudini datae q; debebit tempus per Nn aequari tempori per Mm, unde habebitur

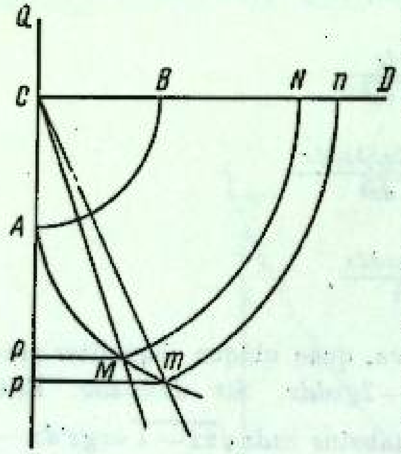


Fig. 59.

$$\frac{dz}{\sqrt{q}} = \frac{ds}{\sqrt{gx}}$$

seu $ds\sqrt{q} = dz\sqrt{gx}$.

Sit q constans $= cg$. Pono autem celeritatem initialem congruentem cum celeritate descensus, ut curva in A tangat verticalem AP et corpus primo principio recta descendat. Hoc ergo casu habebitur pro curva quaesita aequatio $ds\sqrt{c} = dz\sqrt{x}$.

Ponatur $x = t + c$, ut punctum A in C incidat.]

§ 398. Aequatio ergo $ds\sqrt{c} = dz\sqrt{x}$ seu $cds^2 = tdz^2 + cdz^2$ abibit in hanc

$$tdz^2 + cdz^2 = \frac{cz^2dt^2 + cz^2dz^2 - 2cztdzdt}{z^2 - t^2},$$

ex qua oritur

$$z^2tdz^2 - t^3dz^2 = c(-tdz + zdt)^2.$$

Est ergo

$$-tdz + zdt = dz\sqrt{\frac{(z^2 - t^2)t}{c}}.$$

Ponatur $t = uz$. Erit $dt = udz + zdu$ atque

$$zzdu = zdz\sqrt{\frac{uz(1 - uu)}{c}},$$

quae aequatio reducitur ad hanc

$$\frac{du\sqrt{c}}{\sqrt{u - u^3}} = \frac{dz}{\sqrt{z}}.$$

* In manuscripto hic plagulae octava deest. — *G. M.*

** Fragmentum hoc, ut expositio sequens clara sit, ab editore additum est. Cf. Euleri *Mechanicam*, t. II, Propositiones 28—30 (Opera omnia, II-2). — *G. M.*

Quia igitur in hac aequatione indeterminatae sunt separatae, ea potest construi atque ita habebitur curva quaesita.

§ 399. Si punctum C fuerit infinite distans, erit $a = \infty$ et $z = a + x$ vel $dz = dx$ (fig. 60). His positis habebitur aequatio $ds\sqrt{q} = dx\sqrt{gx}$, quae, si q a solo x pendet, semper potest construi. Nam erit $dx^2 + dy^2 = \frac{gxdx^2}{q}$ atque $dy = dx\sqrt{\frac{gx - q}{q}}$, in qua indeterminatae sunt separatae, quia

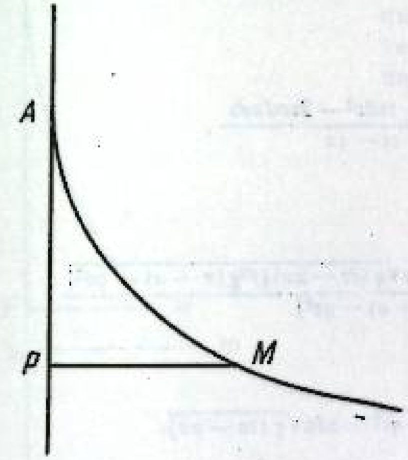


Fig. 60.

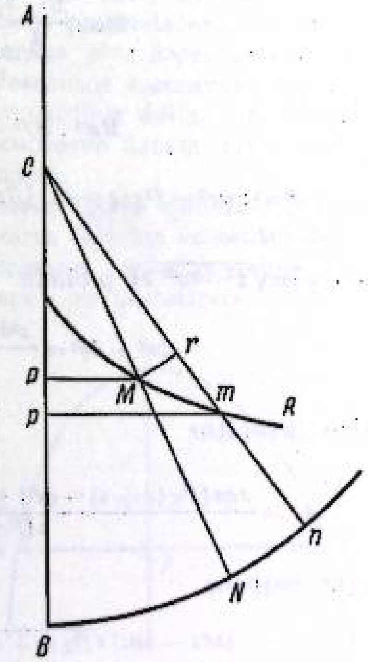


Fig. 61.

q est functio ipsius x. Si q ponatur constans $= bg$, habebit curva quaesita eam proprietatem, ut corpus super ea aequabiliter descendat. Aequatio pro ea erit

$$dy = dx\sqrt{\frac{x - b}{b}}.$$

Ergo

$$y = \frac{2(x - b)^{3/2}}{3\sqrt{b}},$$

quae est ad parabolam cubicalem Neilianam.

§ 400. Simili modo alterum solvitur problema, quo motus circa datum punctum gyratorius est datus. Sit punctum fixum C, curva quaesita MR, cuius elementum est Mm (fig. 61). Ducantur ad axem CB parallelum directioni potentiarum perpendiculares MP, mp. Radio CB arbitrario describatur circulus BN, qui a ductis CM, Cm secatur in N et n. Sit altitudo q generans celeritatem, qua mobile elementum Nn eodem tempore describit, quo elementum Mm absolvitur. Sit $CB = f$, $CP = x$, $PM = y$, $CM = z = \sqrt{x^2 + y^2}$. Posita potentia $= g$ sit altitudo generans celeritatem corporis in $M = g(x + a)$ sumaturque $AC = a$. Erit celeritas in $A = 0$.

§ 401. Quia Mm celeritate $\sqrt{(x+a)g}$ eodem tempore describitur, quo elementum Nn celeritate $\sqrt{q}$, erit

$$Mm : Nn = \sqrt{g(x+a)} : \sqrt{q}.$$

Est vero $Nn : Mr = f : z$. Ergo

$$Mm : \frac{Mr \cdot f}{z} = \sqrt{g(x+a)} : \sqrt{q}$$

et

$$Mm^2 : Mr^2 = f^2 g(x+a) : (qz^2)$$

atque

$$Mm^2 : mr^2 = f^2 g(x+a) : [f^2 g(x+a) - qz^2] = (dx^2 + dy^2) : dz^2.$$

Est vero $y = \sqrt{z^2 - x^2}$ et proinde

$$dx^2 + dy^2 = \frac{z^2dx^2 + zzdz^2 - 2zxdxdz}{zz - xx},$$

ex quibus invenitur

$$dx = \frac{xdz[f^2g(x+a) - qz^2] \pm zdz\sqrt{q(zz-xx)[f^2g(x+a) - qz^2]}}{z[f^2g(x+a) - qz^2]}$$

ex hacque sequens

$$(zdx - xdz)\sqrt{f^2g(x+a) - qz^2} = zdz\sqrt{q(zz-xx)}.$$

Haec facta substitutione $x = tz$ abit in hanc

$$dt\sqrt{ffg(tz+a) - qzz} = dz\sqrt{q(1-tt)}.$$

§ 402. Sit puncti C distantia infinita. Erit $x = z = \infty$ et circulus BN abit in rectam horizontalem eritque $Nn = Mr = dy$. Sit $AP = x + a = u$ (fig. 62). Mutabitur superia analogia

$$Mm : Nn = \sqrt{g(x+a)} : \sqrt{q}$$

in hanc

$$\sqrt{du^2 + dy^2} : dy = \sqrt{gu} : \sqrt{q}.$$

Habetur ergo aequatio

$$qdu^2 + qdy^2 = gudy^2$$

ex hacque ista

$$dy = \frac{du\sqrt{q}}{\sqrt{gu - q}}.$$

Quae, quoties q ab u pendet, potest construi. Sit q constans $= bg$. Habebitur

$$dy = \frac{du\sqrt{b}}{\sqrt{u - b}}$$

atque

$$y = 2\sqrt{bu - bb},$$

quae aequatio est pro parabola Apolloniana, super qua ergo corpus descendens aequabiliter secundum horizontem progreditur. Est ipsa curva, quam corpus proiectum libere describit.

§ 403. Tertium genus, de quo hic agi convenit, est earum quaestionum, quibus tempora datam habere debent proprietatem. Harum duplex esse potest ratio. Nam vel unicus descensus sive ascensus consideratur, in quo tempus proponitur, vel plures descensus ascensusve super eadem curva considerantur, qui absolvantur temporibus datis, i. e. ut tempora, quibus diversi absolvuntur descensus ascensusve datam inter se habeant relationem.

Prioris igitur generis quaestiones, quae circa unicum versantur descensum vel ascensum, primum sumus tractaturi deinceps vero posterioris.

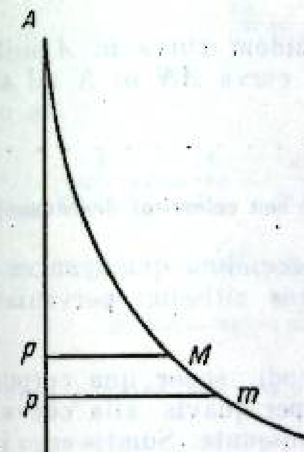


Fig. 62.

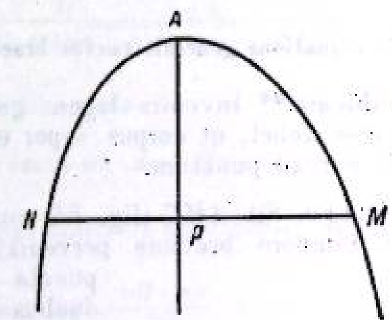


Fig. 63.

§ 404. Quaeratur curva AM talis (fig. 63), ut corpus super ea incedens a potentiis quibuscunque absolutis sollicitatum arcus AM percurrat temporibus applicatis PN curvae datae AN respondentibus proportionalibus. Dicatur $AP = x$, $PN = t$, $PM = y$. Sit altitudo generans celeritatem, quam corpus habet in M v, quae dabitur in x et y. Cum tempus per AM debeat esse proportionale ipsi t, ponatur id aequale ipsi $t : \sqrt{f}$ propter uniformitatem. Est vero elementum temporis per AM

$$= \frac{\sqrt{dx^2 + dy^2}}{\sqrt{v}}.$$

Hoc ergo aequale est ponendum $dt : \sqrt{f}$. Quamobrem habebitur aequatio $fdx^2 + fdy^2 = vdt^2$. Quia curva AN datur, dabitur t in x. Ponatur ergo $dt = qdx$. Habebitur $fdy^2 = dx^2(q^2v - f)$ atque

$$dy = dx\sqrt{\frac{q^2v - f}{f}}.$$

§ 405. Sit potentia sollicitans uniformis $= g$ eiusque directio ubique parallela axi AP. Erit posita celeritate in $A = 0$ $v = gx$. His positis erit

$$dy = dx\sqrt{\frac{gq^2x - f}{f}}$$

et

$$y = \int dx\sqrt{\frac{gq^2x - f}{f}}.$$

Haberi autem potest hoc integrale, quia q in x dari ponitur. Atque hoc modo invenietur curva quaesita AM. Integrale autem

$$\int dx\sqrt{\frac{gq^2x - f}{f}}$$

ita debet accipi, ut fiat $=0$, si $x=0$. Si quidem curva in A initium habere debet, ne casus fiat impossibilis, debet curva AN in N ad axem esse perpendicularis.

. . . . *

[De aequatione generali curvae brachystochronae seu celerrimi descensus]

[Problema.** Invenire legem generalem, secundum quam curva disposita esse debet, ut corpus super ea descendens citissime perveniat ad quodvis curvae punctum.

Solutio. Sit AMC (fig. 64) curva huiusmodi, super qua corpus ex A ad C tempore breviore perveniat quam super quavis alia curva per puncta A et C transeunte. Sumtis ergo in ea duobus quibusque punctis M et μ curva inter ea intercepta ita debet esse comparata, ut corpus in motu suo per AMC arcum inter M et μ interceptum breviore tempore absolvat quam quemvis alium, si esset interceptus. Sint nunc puncta M et μ proxima iuncta duobus elementis Mm, $m\mu$ et debebit tempus per $Mm\mu$ esse minimum seu per regulas methodi maximorum et minimorum aequale tempori per elementa proxima Mn, $n\mu$. Ducantur ad axem AP applicatae MP, mp, $\mu\pi$ sumtisque elementis Pp, $p\pi$ inter ea aequalibus seu quoque $MG = mH$ et pm, si opus est, ad n producta erit mn infinite parvum respectu elementorum Mm et $m\mu$. Debebit ergo esse

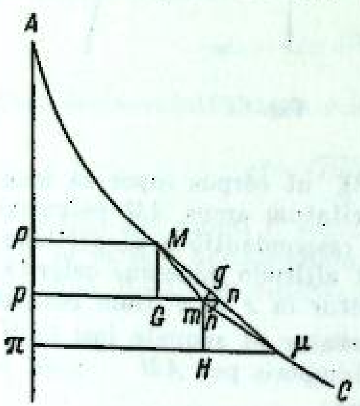


Fig. 64.

$$t\, Mm + t\, m\mu = t\, Mn + t\, n\mu.$$

Sit celeritas, quam corpus in M habet, debita altitudini v, qua ergo tam elementum Mm quam Mn percurret. Celeritas autem, quam in m habebit, debita sit altitudini $v + du$ et celeritas, quam in n habebit,

* In manuscripto hic plagulae quinque octavae desunt. — *G. M.*

** Fragmentum hoc ex Euleri *Mechanica* (Opera omnia, II-2, pp. 160—161) depromptum hic, ut expositio sequens clara sit, ab editore additum est. — *G. M.*

debita sit altitudini $v + du + ddw$; illa autem celeritate percurret elementum $m\mu$, hac vero elementum $n\mu$. Hinc ergo habebitur ista aequatio

$$\frac{Mm}{\sqrt{v}} + \frac{m\mu}{\sqrt{v+du}} = \frac{Mn}{\sqrt{v}} + \frac{n\mu}{\sqrt{v+du+ddw}},$$

est vero

$$\frac{1}{\sqrt{v+du+ddw}} = \frac{1}{\sqrt{v+du}} - \frac{ddw}{2(v+du)\sqrt{v+du}},$$

unde ductis centris M et μ arculis mg et nh erit

$$\frac{ng}{\sqrt{v}} = \frac{mh}{\sqrt{v+du}} + \frac{n\mu \cdot ddw}{2(v+du)\sqrt{v+du}}.$$

Porro est

$$\frac{1}{\sqrt{v+du}} = \frac{1}{\sqrt{v}} - \frac{du}{2v\sqrt{v}} \quad \text{et} \quad \frac{1}{(v+du)\sqrt{v+du}} = \frac{1}{v\sqrt{v}} - \frac{3du}{2v^2\sqrt{v}}.$$

Quibus, neglectis negligendis, substitutis oritur

$$2v(mh - ng) = mh \cdot du - n\mu \cdot ddw = mh \cdot du - Mm \cdot ddw.$$

Est vero propter triangula similia nmg, mMG et nmh, μmH, ut sequitur,

$$ng : mn = mG : mM \quad \text{seu} \quad ng = \frac{mG \cdot mn}{Mm}$$

et

$$mh : mn = \mu H : m\mu \quad \text{seu} \quad mh = \frac{\mu H \cdot mn}{m\mu}.$$

Quamobrem erit

$$2v\left(\frac{\mu H}{m\mu} - \frac{mG}{Mm}\right) = \frac{mG \cdot du}{Mm} - \frac{Mm \cdot ddw}{mn} = 2v \operatorname{diff} \frac{mG}{Mm}.$$

Quae aequatio est homogenea et determinat naturam curvae AMC *brachystochronae* vocatae, super qua corpus tempore brevissimo ex A ad C pervenit. Q. E. I.]

§ 426.* Sit nunc vis sollicitans quaecunque. Concipiatur ea resoluta in duas, quarum altera secundum axem AP sit directa, altera ad eum normalis. Sit illa in $M = P$, haec $= Q$. His positis erit $du = P \cdot MG + Q \cdot mG$ et $du + ddw = P \cdot MG + Q \cdot nG$. Fiet igitur $ddw = Q \cdot mn$. His substitutis in aequatione § 423 habebitur

$$2v\left(\frac{\mu H}{m\mu} - \frac{mG}{Mm}\right) = \frac{mG\,(P \cdot MG + Q \cdot mG)}{Mm} - Q \cdot Mm = \frac{P \cdot MG \cdot mG - Q \cdot MG^2}{Mm}.$$

* Denotationes in § 426 in consensu cum figura 64 ab editore correctae sunt. — *G. M.*

§ 427. Manentibus iam factis denominationibus $AP=x$, $PM=y$ erit

$$2v\left(\frac{dsddy-dydds}{ds^2}\right)=\frac{Pdxdy-Qdx^2}{ds}.$$

Est vero $dv=Pdx+Qdy$. Quare erit

$$v=\int Pdx+\int Qdy.$$

Est vero $ds=\sqrt{dx^2+dy^2}$ et propterea ob dx constans

$$dds=\frac{dyddy}{\sqrt{dx^2+dy^2}}.$$

His positis abibit superior aequatio in hanc

$$\frac{2dx^2ddy}{dx^2+dy^2}\left(\int Pdx+\int Qdy\right)=Pdxdy-Qdx^2$$

vel

$$\frac{2dxddy}{dx^2+dy^2}=\frac{Pdy-Qdx}{\int Pdx+\int Qdy}.$$

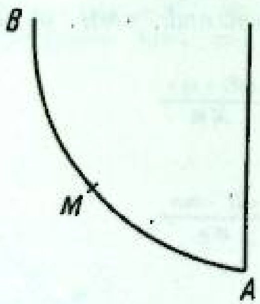


Fig. 65.

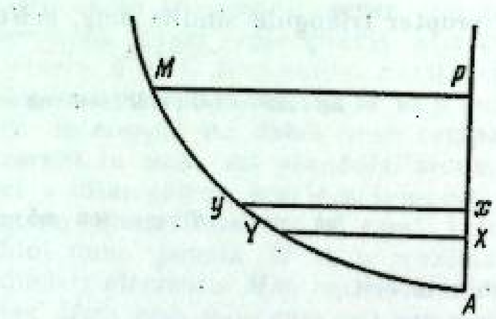


Fig. 66.

§ 428. Progredior ad alteram partem quaestionum, quae de temporibus proponi possunt, quibus plures descensus vel ascensus super eadem curva vel integrae oscillationes temporibus datam inter se relationem habentibus absolvi debent.

Et primo sequentem tractabo quaestionem, qua requiritur curva BMA (fig. 65), super qua corpus descendens perveniat ad punctum A tempore, quod dato modo pendeat ab initio descensus M, seu ut tempora descensuum usque ad A quandam rationem datam habeant arcuum descriptorum.

§ 429. Sit potentia sollicitans uniformis $=g$ eiusque directio semper parallela rectae AP (fig. 66). Proponaturque inveni[enda] curva AYM, super qua corpus descendens, descensus initio facto ex puncto quocunque M, perveniat ad A tempore, quod exprimitur functione quacunque arcus AM vel sagittae AP vel quomodocunque ex positione puncti M determinatur. Sit $AP=a$ denotetque F tempus descensus ex M in A. Est autem F functio quaecunque ipsius a et constantium.

§ 430. In arcu MA sumatur elementum quodcunque Yy ductisque applicatis YX et yx dicatur $AX=x$, $XY=y$ et arcus $AY=s$. Erit $Yy=ds=\sqrt{dx^2+dy^2}$. Celeritas corporis elementum Yy describentis est genita ex altitudine $g(a-x)$. Quamobrem tempusculum, quo elementum Yy absolvitur, est $\frac{ds}{\sqrt{g(a-x)}}$. Huius integrale ita sumtum, ut fiat $=0$, si $x=0$, dabit tempus, quo arcus AY percurritur. Si itaque in eo ponatur $x=a$, habebitur tempus, quo arcus integer MYA absolvitur. Id igitur, quod prodit, aequale poni debet ipsi F et ex eo invenietur aequatio naturam curvae AYM exprimens.

§ 431. Requiritur ergo talis inter s et x aequatio, ut integrale ipsius $\frac{ds}{\sqrt{g(a-x)}}$ dictis conditionibus satisfaciat. In aequatione autem inter s et x nec litera a nec aliae ab ea pendentes inesse possunt, quia a pendet ab initio descensus, quod variabile ponitur. Debet igitur s in x et literis prorsus constantibus definiri. Sit F ut dignitas quaecunque ipsius a, v. g. fa^n, et videamus, qualis s ipsius x debeat esse functio.

§ 432. Cum in integrali

$$\int\frac{ds}{\sqrt{g(a-x)}},$$

si ponatur $x=a$, prodire debeat fa^n seu functio ipsius a dimensionum n, oportet

$$\int\frac{ds}{\sqrt{g(a-x)}}$$

esse functionem ipsius a et x dimensionum n. Tot igitur quoque dimensiones constituere debent a et x et dx in differentiali $\frac{ds}{\sqrt{g(a-x)}}$. Ponatur $ds=Pdx$. Debebit P esse functio ipsius a et x dimensionum $n-\frac{1}{2}$. Sed a in P inesse non potest. Erit ergo $P=bx^{n-\frac{1}{2}}$.

§ 433. Habemus ergo aequationem pro curva quaesita hanc $ds=bx^{n-\frac{1}{2}}dx$, quae integrata dat $s=bx^{n+\frac{1}{2}}$ ponendo b loco $\frac{b}{n+\frac{1}{2}}$. Haec igitur curva eam habebit proprietatem, ut corpus super ea descendendo arcum quemcunque MA describat tempore, quod est ut dignitas exponentis n altitudinis AP. Si ergo $n=0$, erit $s=\sqrt{bx}$ curvaque cyclois, super qua omnes descensus fiunt eodem tempore.

§ 434. Descendat corpus ex Y. Erit tempus descensus usque in A ut x^n. Est vero x ut $s^{\frac{2}{2n+1}}$. Ergo x^n est ut $s^{\frac{2n}{2n+1}}$. Tempus ergo descensus per YA est ut $s^{\frac{2n}{2n+1}}$. Ponatur $\frac{2n}{2n+1}=m$. Erit $n=\frac{m}{2-2m}$ et $s=bx^{\frac{1}{2-2m}}$.

Curva hac aequatione contenta igitur hanc habebit proprietatem, ut tempora descensuum per arcus quoscunque sint ut dignitates exponentis m

arcuum descriptorum. Plura huc pertinentia ex Capite I [Sectionis primae] accommodari possunt.

§ 435. Tendat potentia sollicitans ad punctum fixum C et requiratur curva MYA (fig. 67), super qua omnes descensus datam inter se relationem teneant. Per puncta C et A ducatur recta CA, quae tanquam axis sit curvae quaesitae. Sit AM arcus quicunque descensus descriptus et in eo Yy elementum infinite parvum. Centro C ducantur arcus circuli MP, YX et yx. Dicantur $AP=a$, $AX=x$, arcus $AY=s$. Sit potentia in Y agens $=P$. Sit celeritas in Y genita ex altitudine v et in y ex $v+dv$.

§ 436. Erit ergo $Yy=ds$ et $Yz=dx$ atque vis tangentialis ex

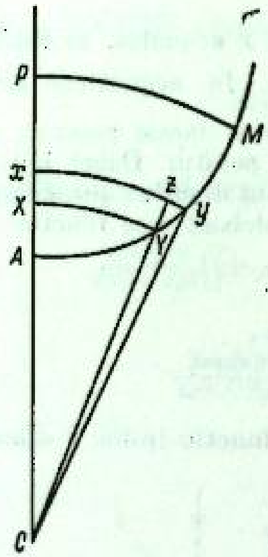


Fig. 67.

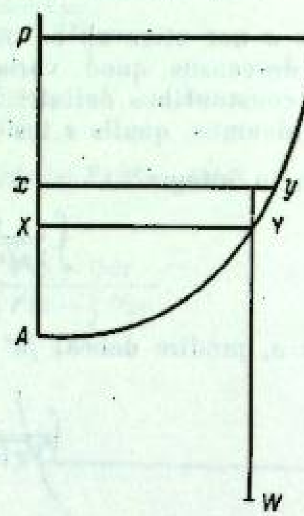


Fig. 68.

P orta $=\frac{Pdx}{ds}$. Quae ducta in ds dat $-dv$. Erit ergo $dv=-Pdx$. Sit integrale huius $\int Pdx$ ita sumtum, ut fiat $=0$, si $x=0$, hoc Q. Erit Q functio ipsius x et constantium. Abeat ea, si $x=a$ ponatur, in B. Erit $v=B-Q$. Ergo tempusculum per Yy est $=\frac{ds}{\sqrt{B-Q}}$. Huius integrale ita sumtum, ut fiat $=0$, si $x=0$ vel si $Q=0$, hanc debet habere proprietatem, ut posito $x=a$ vel, quod idem est, $Q=B$ prodeat quantitas data.

§ 437. Oporteat efficere, ut omnes descensus ex M in A usque fiant temporibus aequalibus, ubicunque sumatur M. Necesse est, ut in expressione temporis descensus per MA non reperiatur a neque B, quod ab a pendet. Ad hoc requiritur ratiocinio eodem, quo [in] § 432, adhibito, ut sit $ds=bdQ:\sqrt{Q}$ denotante b quantitatem constantem.* Erit ergo $s=\sqrt{bQ}$ et $Q=s^2:b$. Porroque $dQ=2sds:b=Pdx$. Est ergo $sds=bPdx$ aequatio pro tautochrona pro hac hypothesi potentiae sollicitantis.

§ 438. Trahatur nunc corpus descendens super curva MYA (fig. 68) a duabus potentiis quibuscunque, qui est casus universalissimus. Sollicitetur scilicet in Y a duabus potentiis P et Q, quarum altera P secundum directionem YX perpendicularem ad axem AP, altera Q secundum directionem YW ad illam perpendicularem agat. Sit $AP=a$, $AX=x$; $YX=y$ et $AY=s$, celeritas in Y genita ex altitudine v. Erit $dv=-Pdy-Qdx$. Sit integrale huius $\int Pdy+Qdx=R$ fiatque $R=0$, si $x=0$. Mutetur R in B, si fiat $x=a$. Erit $v=B-R$.

* Littera b Eulerus hic constantem arbitrariam denotat immutatque valorem eius in calculo (vide § 439 quoque). — G. M.

§ 439. Tempus ergo per elementum Yy est $=\frac{ds}{\sqrt{B-R}}$. Si iam quaeratur, qualis esse debeat curva AYM, ut omnes descensus per MA sumto M ubicunque absolvantur temporibus aequalibus, oportet esse $ds=bdR:\sqrt{R}$. Ex hac aequatione reperitur $s=b\sqrt{R}$ et $ss=bR$. Porroque $sds==bdR=bPdy+bQdx$. Quae aequatio dabit curvam tautochronam pro ista potentiarum sollicitantium hypothesi universalissima.

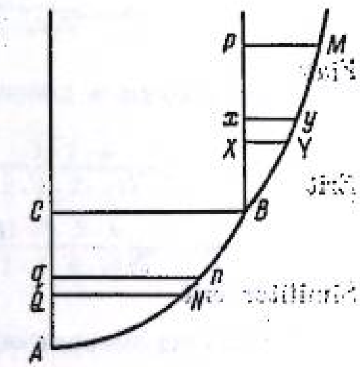


Fig. 69.

§ 440. Hactenus curvas tautochronas determinavimus, quae sunt curvae continuae. Nunc vero, quomodo duae diversae curvae iungi debeant, ut descensus omnes sint isochroni, videamus. Data sit curva inferior AB (fig. 69) et requiratur superior ei iungenda BM, ut omnes descensus per MBA, ubicunque M in curva BM accipiatur, sint isochroni.

Sit potentia sollicitans uniformis $=g$ et parallela axi AC. Ponantur $BP=a$, $AC=c$. Ductis applicatis QN, XY sint $AQ=t$, $AN=r$, $BX=x$ et $BY=s$.

§ 441. Tempusculum, quo elementum Nn percurritur, est $=\frac{dr}{\sqrt{g(a+c-t)}}$. Huius integrale ita sumtum, ut fiat $=0$, si $t=0$, posito $t=c$ dabit totum tempus descensus per BNA expressum functione quadam constantium et a. Sit haec functio F. Tempus, quo elementum Yy percurritur, est $\frac{ds}{\sqrt{g(a-x)}}$. Huius integrale ita sumtum, ut sit $=0$, si $x=0$, si in eo ponatur $x=a$, ita debet esse comparatum, ut, si addatur ad F, in aggregato non amplius reperiatur a.

§ 442. Habeat F sequentem formam

$$(k+\alpha a+\beta a^2+\gamma a^3+\delta a^4+\text{etc.}+\zeta\sqrt{a}+\eta a\sqrt{a}+\theta a^2\sqrt{a}+\iota a^3\sqrt{a}+\text{etc.}):\sqrt{g}.$$

Oportet autem

$$\int\frac{ds}{\sqrt{g(a-x)}}+F$$

esse constans, nempe $=\frac{k}{\sqrt{g}}$, quia posito $a=0$ $\int\frac{ds}{\sqrt{g(a-x)}}$ evanescit. Ergo $\int\frac{ds}{\sqrt{g(a-x)}}$ debet omnes terminos in F tollere praeter $\frac{k}{\sqrt{g}}$. Sit

$$ds=-Adx\sqrt{x}-Bxdx\sqrt{x}-Cx^2dx\sqrt{x}-\text{etc.}-Edx-Fxdx-Gx^2dx-Hx^3dx-\text{etc.}$$

Fiat iam

$$\int \frac{Adx\sqrt{x}}{\sqrt{a-x}} = \alpha a.$$

Est vero

$$\int \frac{Adx\sqrt{x}}{\sqrt{a-x}} = \frac{1}{2} Aa\sqrt{-1}\,\lg(-1).$$

Erit ergo

$$A = \frac{2 \cdot \alpha}{1 \cdot \sqrt{-1}\,\lg(-1)}.$$

Fiat

$$\int \frac{Bxdx\sqrt{x}}{\sqrt{a-x}} = \beta a^2.$$

Erit

$$B = \frac{2 \cdot 4 \cdot \beta}{1 \cdot 3 \cdot \sqrt{-1}\,\lg(-1)}.$$

Similiter erit

$$C = \frac{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot \gamma}{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \sqrt{-1}\,\lg(-1)} \quad \text{etc.}$$

§ 443. Fiat porro

$$\int \frac{Edx}{\sqrt{a-x}} = \zeta\sqrt{a}.$$

Est vero

$$\int \frac{Edx}{\sqrt{a-x}} = 2E\sqrt{a}.$$

Ergo $E = \frac{\zeta}{2}$. Fiat

$$\int \frac{Fxdx}{\sqrt{a-x}} = \eta a\sqrt{a}.$$

Erit $F = \frac{3}{2} \cdot \frac{\eta}{2}$. Similiter erit $G = \frac{3 \cdot 5}{2 \cdot 4} \cdot \frac{\vartheta}{2}$. Hoc modo omnes termini, in quibus inest a, sese destruent eritque tempus totius descensus independens ab a, quemadmodum requirebatur. Curva igitur quaesita BYM hanc habebit aequationem

$$ds = -\frac{dx\sqrt{x}}{\sqrt{-1}\,\lg(-1)}\left(\frac{2}{1}\alpha + \frac{2 \cdot 4}{1 \cdot 3}\beta x + \frac{2 \cdot 4 \cdot 6}{1 \cdot 3 \cdot 5}\gamma x^2 + \text{etc.}\right) -$$

$$-\frac{dx}{2}\left(\zeta + \frac{3}{2}\eta x + \frac{3 \cdot 5}{2 \cdot 4}\vartheta x^2 + \frac{3 \cdot 5 \cdot 7}{2 \cdot 4 \cdot 6}\iota x^3 + \text{etc.}\right).$$

§ 444. Sit AB linea recta quomodocunque inclinata ad horizontem. Ponatur $dr = hdt$. Erit tempus, quo arcus AN describitur,

$$= \int \frac{hdt}{\sqrt{g(a+c-t)}} = C - \frac{2h\sqrt{a+c-t}}{\sqrt{g}} = \frac{2h\sqrt{a+c} - 2h\sqrt{a+c-t}}{\sqrt{g}}.$$

Posito $t = c$ habebitur tempus, quo arcus AB absolvitur,

$$= \frac{2h\sqrt{a+c} - 2h\sqrt{a}}{\sqrt{g}}.$$

Est vero

$$\sqrt{a+c} = \sqrt{c} + \frac{1 \cdot a}{2 \cdot 1 \cdot \sqrt{c}} - \frac{1 \cdot 1 \cdot a^2}{4 \cdot 1 \cdot 2 \cdot c\sqrt{c}} +$$

$$+ \frac{1 \cdot 1 \cdot 3 \cdot a^3}{8 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot c^2\sqrt{c}} - \frac{1 \cdot 1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot a^4}{16 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot c^3\sqrt{c}} + \text{etc.}$$

§ 445. His cum generali ipsius F forma assumta comparatis erit

$$k = 2h\sqrt{c}, \quad \alpha = +\frac{1 \cdot h}{1 \cdot 1 \cdot \sqrt{c}}, \quad \beta = -\frac{1 \cdot 1 \cdot h}{2 \cdot 1 \cdot 2 \cdot c\sqrt{c}},$$

$$\gamma = +\frac{1 \cdot 1 \cdot 3 \cdot h}{4 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot c^2\sqrt{c}}, \quad \delta = -\frac{1 \cdot 1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot h}{8 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot c^3\sqrt{c}} \quad \text{etc.}$$

atque $\zeta = -2h$, $\eta = 0$, $\vartheta = 0$ etc. Ex his invenitur aequatio pro curva BYM sequens

$$ds = -\frac{hdx\sqrt{x}}{\lg(-1)\sqrt{-1}}\left(\frac{2 \cdot 1}{1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot \sqrt{c}} - \frac{2 \cdot 4 \cdot 1 \cdot 1 \cdot x}{1 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 2 \cdot c\sqrt{c}} + \right.$$

$$\left. + \frac{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 3 \cdot x^2}{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot c^2\sqrt{c}} - \frac{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot x^3}{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot c^3\sqrt{c}} + \text{etc.}\right) + hdx =$$

$$= hdx - \frac{2hdx\sqrt{x}}{\sqrt{-c}\,\lg(-1)}\left(1 - \frac{x}{3c} + \frac{x^2}{5c^2} - \frac{x^3}{7c^3} + \frac{x^4}{9c^4} - \frac{x^5}{11c^5} + \text{etc.}\right).$$

. . . . *

[Problema.** In hypothesi gravitatis uniformis deorsum tendentis si detur curva quaecunque AM (fig. 70), invenire curvam AN eiusmodi, ut oscillationes, quae peraguntur super curva composita MAN, sint omnes inter se isochronae.

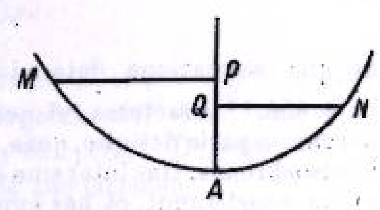


Fig. 70.

Solutio. Sit datae curvae AM abscissa $AP = u$, arcus respondens $AM = t$; dabitur ob curvam datam aequatio inter u et t. Deinde in curva quaesita AN ponatur abscissa $AQ = x$ et arcus $AN = s$. Iam in oscillatione quacunque sit celeritas in puncto A debita altitudini b eritque tempus per MAN

$$= \int \frac{dt}{\sqrt{b-u}} + \int \frac{ds}{\sqrt{b-x}}.$$

* In manuscripto hic plagulae quadrans deest. — *G. M.*
** Fragmentum hoc ex Euleri *Mechanica* (Opera omnia, II-2, pp. 206—207) depromptum hic, ut expositio sequens clara sit, ab editore additum est. — *G. M.*

Atque, si in hac expressione ponatur $u=b$ et $x=b$, prodibit tempus unius oscillationis,* quod cum debeat esse constans, ex formula id exprimente litera b prorsus evanescere debet. Ponatur

$$dt=\frac{du\sqrt{f}}{\sqrt{u}}+Pdu \quad\text{et}\quad ds=\frac{dx\sqrt{h}}{\sqrt{x}}-Qdx,$$

eritque tempus unius oscillationis*

$$\int\frac{du\sqrt{f}}{\sqrt{bu-u^2}}+\int\frac{dx\sqrt{h}}{\sqrt{bx-x^2}}+\int\frac{Pdu}{\sqrt{b-u}}-\int\frac{Qdx}{\sqrt{b-x}},$$

postquam positum est $u=b$ et $x=b$. Huius autem expressionis duo priores termini iam ita sunt comparati, ut b ex iis evanescat facto $u=b$ et $x=b$; dant nimirum $\pi\sqrt{f}+\pi\sqrt{h}$ denotante π peripheriam circuli diametri $=1$. Quare, si posteriores termini ita fuerint comparati, ut sese destruant facto $u=b$ et $x=b$, habebitur id, quod quaeritur; at P et Q tales, necesse est, sint quantitates, quae b non involvant, quia in aequationes curvarum ingrediuntur. At erit

$$\int\frac{Pdu}{\sqrt{b-u}}-\int\frac{Qdx}{\sqrt{b-x}}=0$$

facto $u=b$ et $x=b$, si Q talis fuerit functio ipsius x, qualis P est ipsius u. Seu, cum nihil impediat, quo minus poni possit $x=u$, fiat $x=u$ oportebitque esse $Q=P$. Datur vero P ex aequatione curvae AM datae, quippe est

$$P=\frac{dt}{du}-\frac{\sqrt{f}}{\sqrt{u}}.$$

Quocirca pro curva quaesita haec habebitur aequatio

$$ds=\frac{du\sqrt{h}}{\sqrt{u}}-dt+\frac{du\sqrt{f}}{\sqrt{u}}$$

seu

$$s+t=2\sqrt{hu}+2\sqrt{fu},$$

ex qua aequatione determinatur natura curvae quaesitae AN. Q. E. I.]

§ 454.** Praeterea, si neutra curva detur, facillime est innumerabilia curvarum paria definire, quae, ut convenit, iunctae oscillationes efficiant omnes isochronas. Has inter sine dubio erunt interdum duae, quae curvam continuam constituunt, et has cum paucis investigaturus. Si curvae MA et NA sunt partes eiusdem curvae continuae (fig. 71), prodibit aequatio pro curva AN, si in aequatione pro AM tantum ponatur t negative sumtum manente x. Quare, ut curvae AM et AN sint continuae, necesse est, ut, si in aequatione

$$dt=\frac{\sqrt{f}\,dx}{\sqrt{x}}+Pdx,$$

* Editio princeps: *Semioscillationis*. Vide annotationem editoris, p. 159. — *G. M.*

** Denotationes in §§ 454—457 in consensu cum fragmento supra addito ab editore correctae sunt. — *G. M.*

ponatur dt negativum seu $=-ds$, prodeat aequatio

$$ds=\frac{\sqrt{h}\,dx}{\sqrt{x}}-Pdx.$$

§ 455. Ad hoc conficiendum assumo novam indeterminatam z, in qua x, t et s et P dari debent, idque ita, ut sumto z affirmativo curvae AM punctum M inveniatur, si vero negativum, punctum N. Quia x pro utroque puncto M et N eadem manet, debebit talis esse functio ipsius z, quae eadem manet, si z affirmative sive negative sumatur, cuius modi functionem appello parem. Porro t est functio talis ipsius z, quae posito $-z$ loco z abit in $-s$.

§ 456. Aequationes ergo

$$dt=\frac{\sqrt{f}\,dx}{\sqrt{x}}+Pdx \quad\text{et}\quad ds=\frac{\sqrt{h}\,dx}{\sqrt{x}}-Pdx$$

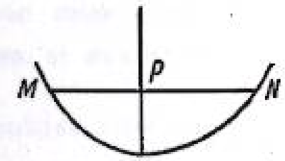


Fig. 71.

[integratae dabunt]*

$$t=2\sqrt{fx}+R \quad\text{et}\quad s=2\sqrt{hx}-R$$

posito R pro $\int Pdx$. Haec vero debet ex illa prodire, si ibi ponatur $-z$ loco z. Ea vero facta hac substitione transit in hanc $-s=2\sqrt{fx}+(R)$. Pono (R) pro functione resultante, si in R $-z$ loco z ponatur. Debet ergo

$$(R)+2\sqrt{fx}=R-2\sqrt{hx}$$

esse atque

$$R-(R)=2(\sqrt{f}+\sqrt{h})\sqrt{x}.$$

§ 457. Quaeritur ergo, qualis R debeat esse functio ipsius z, ut

$$R-(R)=2(\sqrt{f}+\sqrt{h})\sqrt{x}.$$

Ponatur $R=F+G$, ubi F est functio par et G impar ipsius z. Erit $(R)=F-G$ adeoque $2G=2(\sqrt{f}+\sqrt{h})\sqrt{x}$. Ergo $G=(\sqrt{f}+\sqrt{h})\sqrt{x}$. Ponatur $G=(\sqrt{f}+\sqrt{h})z$. Erit $x=zz$ functio par, ut oportet. Debetque F esse functio par ipsius $\sqrt{x}$. Quamobrem habebimus aequationem

$$t=2\sqrt{fx}+(\sqrt{f}+\sqrt{h})\sqrt{x}+F.$$

Ponatur $3\sqrt{f}+\sqrt{h}=\sqrt{k}$. Erit $t=\sqrt{kx}+F$. Quae dat curvam MAN continuam, super qua omnes oscillationes fiunt aequalibus temporibus, ubi F est functio par ipsius $\sqrt{x}$.

* In manuscripto locus hic ab autore immutabatur, sed correctiones non ad finem perductae sunt. — *G. M.*

Caput II. DE MOTU PUNCTI SUPER LINEA DATA A POTENTIIS ABSOLUTIS ET RELATIVIS SIMUL SOLLICITATI

§ 458. Hoc Caput, in quo punctum tanquam in canali incedere ponitur, dividemus ut antecedens in duas partes; in quarum priori inquiretur in motum puncti super quacunque linea data, in posteriori vero ipsas investigabimus curvas, super quibus corporis seu puncti incedentis motus datam habet proprietatem. Cum vero haec tractatio per se sit perplexior, neque eos casus, quibus curva non est in eodem plano posita, neque eos, quibus potentia absoluta est variabilis, sumus exposituri.

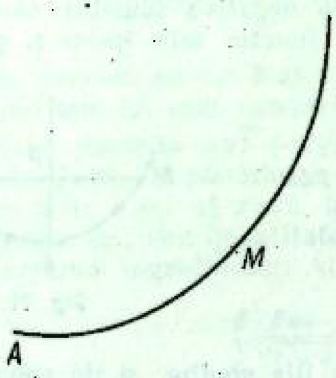


Fig. 72.

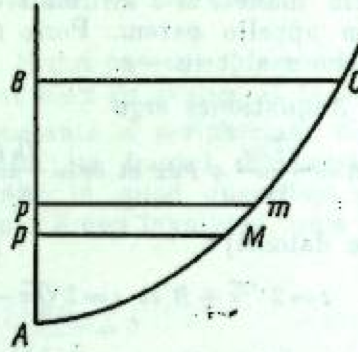


Fig. 73.

§ 459. Semper igitur nobis erit linea, super qua corpus movetur, in eodem plano semperque potentia absoluta sollicitans uniformis, nempe g, eiusque directio ubique et sibi et plano, in quo sita est linea, parallela. Nam ex iis, quae iam exposita sunt, non erit difficile hanc tractationem ad quoslibet casus hic omissos extendere, sed devenietur ad prolixissimos calculos et interdum vix resolubiles.

§ 460. Potentiam relativam hic eodem modo, quo [in] § 119 feci, in calculum introduco. Duae scilicet res de ea sunt considerandae, lex et intensitas. Corpore igitur moto super quacunque curva AM (fig. 72) sit intensitas in loco M quocunque q seu q denotat altitudinem celeritatem generantem, quam si corpus in M haberet, vis relativa aequalis foret vi gravitatis. Legem vis relativae exprimat V, quae est functio quaecunque ipsius v, altitudinis generantis celeritatem in M. Abeat V, si loco v ponatur q, in Q.

§ 461. In paragrapho 292 ostensum est potentiam relativam semper effectum potentiae tangentialis exerere augendo tantum vel diminuendo celeritatem corporis. Et hanc ob rem in nostro casu pressio in latera canalis a potentia relativa non immutatur, sed ut in praecedente Capite a vi centrifuga et potentia absoluta est derivanda. Porro potentia relativa vel est accelerans vel retardans. In quorum utrolibet casu ea est negativa eius in altero casu.

. . . . *

§ 470. Exemplis hunc descensum inveniendi modum non illustro, sed progredior ad ascensus, ubi praecipue de oscillationibus corporum super datis curvis agetur. Manentibus prioribus hypothesibus sit curva AMC (fig. 73), in cuius loco infimo A celeritas corporis sit ex altitudine b ge-

* In manuscripto hic plagulae quadrans deest. — *G. M.*

nita, in M ex altitudine v et in C nulla. Sit vis relativa semper retardans et arcus AMC ascensu descriptus. Erit, dum corpus elementum Mm describit, et vis absoluta g et relativa $\frac{V}{Q}$ contraria. Quare dictis $AP=x$, $AM=s$ erit $dv=-gdx-\frac{Vds}{Q}$.

§ 471. Si arcus AMC fuerit descensu descriptus, ita tamen ut celeritas, quando in A pervenit, sit ex altitudine b genita, erit, dum elementum mM percurrit, vis absoluta promovens, relativa vero retardans. Quare, si concipiamus corpus eodem modo ascendere, quo descendit, ita ut in singulis curvae punctis ascendens eandem habeat celeritatem, quam habet descendens corpus, erit, dum elementum Mm describit, vis absoluta retardans et relativa promovens. Quocirca habebitur haec aequatio $dv=-gdx+\frac{Vds}{Q}$. Ex quo apparet discrimen esse inter descensum et ascensum, si potentia relativa affuerit, cum tamen, si sola absoluta sollicitet, descensus et ascensus sint aequales.

§ 472. Sit, ut curva talis accipiatur, quae admittat celeritatis determinationem, $\frac{ds}{Q}=fdx$. Erit $dv=-gdx-fVdx$ pro ascensu et $dv=-gdx+$ $+fVdx$ pro descensu. Ergo $dx=\frac{dv}{fV-g}$ calculo ad descensum accommodato. Ex hacque

$$x=C+\int\frac{dv}{fV-g}.$$

Sit $\int\frac{dv}{fV-g}=0$, si $v=0$, ponaturque $AB=a$. Erit

$$x=a+\int\frac{dv}{fV-g}$$

atque

$$ds=fQdx=\frac{fQdv}{fV-g}.$$

Quia Q in x vel s dari ponitur, poterit Q etiam in v dari et propterea ds in meris v. Elementum temporis ergo

$$\frac{fQdv}{(fV-g)\sqrt{v}}$$

ex solis v et constantibus constabit ideoque tempus inveniri poterit.

§ 473. Sit lex potentiae relativae ratio simplex celeritatum. Erit $V=\sqrt{v}$ et $Q=\sqrt{q}$. Sit porro q constans $=c$. Erit

$$x=a+\int\frac{dv}{f\sqrt{v}-g}=a+\frac{2\sqrt{v}}{f}+\frac{2g}{ff}\lg\frac{g-f\sqrt{v}}{g}.$$

Quia, si $x=0$, est $v=b$, erit

$$a+\frac{2\sqrt{b}}{f}+\frac{2g}{ff}\lg\frac{g-f\sqrt{b}}{g}=0$$

seu

$$a=\frac{-2\sqrt{b}}{f}-\frac{2g}{ff}\lg\frac{g-f\sqrt{b}}{g}.$$

Erit vero elementum temporis $=\frac{fdv\sqrt{c}}{fv-g\sqrt{v}}$. Tempus ergo per arcum AM erit

$$=C+2\sqrt{c}\lg(f\sqrt{v}-g)=2\sqrt{c}\lg\frac{g-f\sqrt{v}}{g-f\sqrt{b}},$$

ut, si $v=b$, tempus sit $=0$. Fiat $v=0$, ut habeamus totum descensus tempus. Erit id

$$=2\sqrt{c}\lg\frac{g}{g-f\sqrt{b}}=\frac{aff\sqrt{c}+2f\sqrt{bc}}{g}.$$

Super recta inclinata est enim $ds=fdx\sqrt{c}$ et $s=fx\sqrt{c}$. Posito $-f$ loco f habebuntur omnia haec pro ascensu.

§ 474. Alter est casus, quo aequatio

$$dv=-gdx\pm\frac{Vds}{Q}$$

integrationem admittit, si ea fuerit homogenea. Sit $V=v^n$. Erit $Q=q^n$. Ponaturque

$$\frac{ds}{q^n}=fx^{-n}dx.$$

Habebitur

$$dv=-gdx\pm fv^nx^{-n}dx$$

vel

$$x^ndv+gx^ndx=\pm fv^ndx.$$

In qua aequatione indeterminatae v et x ubique eundem dimensionum numerum constituunt. Ponatur $v=zx$. Erit $dv=zdx+xdz$ atque

$$x^nzdx+x^{n+1}dz+gx^ndx=\pm fz^nx^ndx$$

seu

$$zdx+xdz+gdx=\pm fz^ndx.$$

Unde erit

$$\frac{dx}{x}=\frac{-dz}{g+z\mp fz^n}$$

porroque

$$\lg x=C-\int\frac{dz}{g+z\mp fz^n}.$$

Si hoc integrale ita sumatur, ut facto $z=0$ fiat $=0$, erit

$$\lg\frac{a}{x}=\int\frac{dz}{g+z\mp fz^n},$$

quia, si $z=0$, est $v=0$ et $x=a$.

§ 475. Quia $z=\frac{v}{x}$, erit integrale

$$\int\frac{dz}{g+z\mp fz^n}$$

ita comparatum, ut constet ex v et x idque ita, ut sit functio ipsarum x et v nullius dimensionis. Cum vero etiam $\lg\frac{a}{x}$ sit functio ipsarum a et x nullius dimensionis, erit tota aequatio integralis eiusmodi, ut a, x et v in ea ubique eundem dimensionum numerum constituant. Determinata igitur ex ea v erit v aequalis functioni cuidam ipsarum x et a unius dimensionis reliquis literis constantibus f et g tanquam numeris terminos afficientibus. Si ergo $x=0$, erit $v=\alpha a=b$. Quamobrem altitudo generans celeritatem in loco infimo A est semper ut altitudo ipsa, ex qua corpus est lapsum vel ad quam ascensu pervenit.

§ 476. Elementum temporis est $\frac{ds}{\sqrt{v}}$. Est vero $ds=fq^nx^{-n}dx$. Sit $q=cx^m$. Erit $ds=fc^nx^{mn-n}dx$. Ergo elementum temporis est

$$\frac{fc^nx^{mn-n}dx}{\sqrt{v}}.$$

Quae expressio est functio ipsarum a et x dimensionum $mn-n+\frac{1}{2}$. Eius ergo integrale ita sumtum, ut fiat $=0$, si $x=0$, quod dat tempus per AM, erit similis functio, in qua a et x dimensiones $mn-n+\frac{1}{2}$ constituunt. Si ergo fiat $a=x$, quo totum tempus per AC invenitur, prodibit expressio huius formae $\alpha a^{mn-n+\frac{1}{2}}$. Tempus ergo, quo quicunque arcus AC descensu vel ascensu describitur, est ut $AB^{mn-n+\frac{1}{2}}$.

§ 477. Curva vero ipsa hanc habens proprietatem est $ds=fc^nx^{mn-n}dx$ seu

$$s=\frac{fc^nx^{mn-n+1}}{mn-n+1}$$

existente lege potentiae relativae ratione n-cuplicata altitudinum celeritates generantium et intensitate altitudine cx^m.

Ut omnes descensus vel ascensus absolvantur aequalibus temporibus, debet esse $mn-n+\frac{1}{2}=0$ seu $n=\frac{1}{2-2m}$. Si intensitas sit constans seu $m=0$, erit $n=\frac{1}{2}$ atque $s=2f\sqrt{cx}$. Quae est aequatio pro cycloide, super qua omnes descensus ascensusve aequalibus absolvuntur temporibus, si potentia relativa fuerit in ratione celeritatum eiusque intensitas constans.

. . . . *

§ 486. Expositis his casibus, quibus motus corporis determinari possunt progredior ad tertium genus, quod quicquam definiri potest. Quod ea omnia in se complectitur, quando est $V=v$ seu vis relativae lex est ratio duplicata celeritatum. Hoc casu, quaecunque fuerit curva, super qua corpus

* In manuscripto hic plagulae quadrans deest. — G. M.

movetur, et quaecunque intensitas vis relativae, semper motus potest determinari. In hac tractatione vim absolutam non constantem accipiemus, sed, quia pendere solet ab intensitate, quam variabilem ponimus, eam variabilem quoque ponemus.

§ 487. Sit itaque curva, super qua corpus descendit, AM, axis AP, cui semper parallela sit directio potentiae absolutae (fig. 74). Ponatur $AP=x$, $AM=s$. Erit $Pp=dx$, $Mm=ds$. Potentia absoluta in M sit $=p$ deorsum trahens. Intensitas vis relativae sit altitudo q. Literae hae p et q significant quascunque functiones ipsius x et constantium. Posita ergo vi relativa accelerante erit $dv=pdx+vds:q$. Est v altitudo generans celeritatem, quam in M corpus habet. Si vis relativa fuerit retardans, erit $dv=pdx-vds:q$.

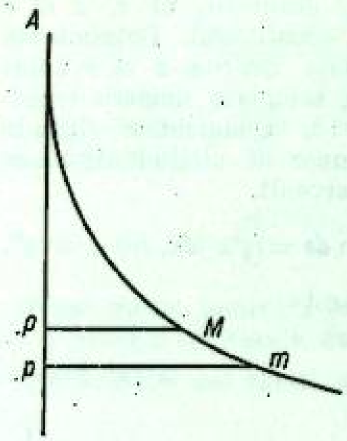


Fig. 74.

§ 488. Quia in his aequationibus altera indeterminata v unicam tantum habet dimensionem, reliquae enim x, s, p et q pro unica indeterminata habentur, omnes enim ab x pendent, eae aequationes poterunt integrari. Earum prior abit in hanc $dv-\frac{vds}{q}=pdx$. Multiplicetur haec in $e^{-\int\frac{ds}{q}}$. Evadet haec integrabilis atque integrale erit

$$e^{-\int\frac{ds}{q}}v=\int e^{-\int\frac{ds}{q}}pdx+C.$$

Constans talis debet addi, ut posito $x=0$ fiat $v=0$, si quidem corpus in A celeritatem nullam habuisse ponatur. Si retardans sit vis relativa habebitur

$$e^{\int\frac{ds}{q}}v=\int e^{\int\frac{ds}{q}}pdx+C.$$

§ 489. Sit intensitas constans atque etiam vis absoluta. Quapropter ponatur $p=g$, $q=c$. Erit pro accelerante vi relativa

$$e^{-\frac{s}{c}}v=g\int e^{-\frac{s}{c}}dx+C$$

et pro retardante

$$e^{\frac{s}{c}}v=g\int e^{\frac{s}{c}}dx+C.$$

Cum igitur, quaecunque fuerit curva, super qua corpus movetur, semper celeritas possit inveniri, invenientur quoque reliqua, quae ab ea pendent, nimirum tempus descensus, pressio secundum directionem radii osculi in curvam.

§ 490. Accommodemus hanc tractationem ad doctrinam de oscillationibus. Sit curva quaecunque AMC (fig. 75), super qua corpus dimidiam oscillationem vel ascendendo vel descendendo perficiat. Sit celeri-

tas eius in puncto infimo A altitudine b genita. Ponamus ad omnem ambiguitatem evitandam vim relativam esse retardantem. Sit C punctum, in quo celeritas corporis est$=0$. Vocentur $AP=x$, $AM=s$, celeritas in M ex altitudine v genita, potentia absoluta in M deorsum trahens $=p$, intensitas vis relativae$=q$. Erit vis relativa tota in M secundum tangentem agens $=\frac{v}{q}$.

§ 491. Absolvatur arcus AMC descensu. Debebit ob rationes § 471 allegatas vis absoluta ut retardans considerari, vis relativa vero ut accelerans, quia scilicet in descensu vis relativa contraria est vi absolutae.

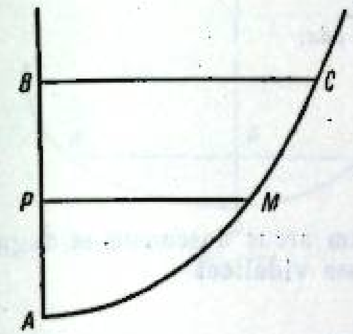


Fig. 75.

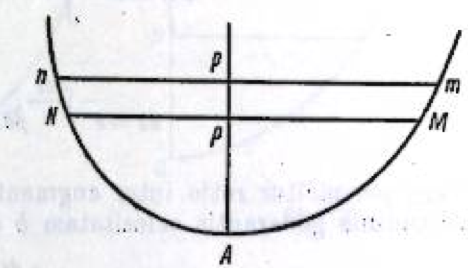


Fig. 76.

Erit ergo $dv=-pdx+\frac{v}{q}ds$ vel $dv-\frac{vds}{q}=-pdx$. Multiplicetur haec aequatio in $e^{-\int\frac{ds}{q}}$, in quo $\int\frac{ds}{q}$ ita debet sumi, ut posito $s=0$ fiat $\int\frac{ds}{q}=0$. Habebitur

$$e^{-\int\frac{ds}{q}}\left(dv-\frac{vds}{q}\right)=-e^{-\int\frac{ds}{q}}pdx,$$

cuius integralis est

$$e^{-\int\frac{ds}{q}}v=C-\int e^{-\int\frac{ds}{q}}pdx.$$

Hoc posterius integrale quoque ita sit sumtum, ut fiat$=0$, si x vel $s=0$. Quia autem, si s vel $x=0$, fit $v=b$, ponatur x vel $s=0$ et $v=b$. Erit $b=C$. Ergo

$$v=e^{\int\frac{ds}{q}}b-e^{\int\frac{ds}{q}}\int e^{-\int\frac{ds}{q}}pdx.$$

§ 492. Si velimus totum arcum descensus AMC invenire, oportet ponere $v=0$ eritque

$$b=\int e^{-\int\frac{ds}{q}}pdx.$$

Quare ad arcum descensus super quacunque curva data inveniendum ex data celeritate in loco infimo sequenti uti convenit modo. Sit curva data AM (fig. 76). Construatur alia AN, cuius applicata PN sit

$=\int e^{-\int\frac{ds}{q}}pdx$. In hac quaeratur locus, in quo applicata sit $=b$. Sit is locus in N, nempe $PN=b$. Producatur NP in M. Erit M punctum, in quo celeritas est $=0$, seu AM erit totus arcus descensus.

§ 493. Videamus nunc, quanto maior sit arcus descensus, si celeritas in A maior assumatur. Sit propterea altitudo generans celeritatem in A nunc $=b+db$ et, cum antea initium descensus fuerit in M, sit nunc in m. Posito $AP=x$, $AM=s$ erit $Pp=dx$, $Mm=ds$. Ex priori vero constructione curvae AN erit $pn=b+db$. Est vero

$$PN=b=\int e^{-\int\frac{ds}{q}}pdx.$$

Erit

$$db=e^{-\int\frac{ds}{q}}pdx.$$

Hinc ergo perspicitur ratio inter augmentum arcus descensus et augmentum altitudinis generantis celeritatem b esse videlicet

$$Pp:db=e^{-\int\frac{ds}{q}}:p.$$

§ 494. In descensu per CMA erit alicubi punctum O, in quo corpus habet celeritatem maiorem quam in quovis alio loco. Id erit ibi, ubi est $dv=0$. Hoc posito in aequatione canonica habebitur $pdx=\frac{vds}{q}$ seu $v=\frac{pqdx}{ds}$. Est vero

$$v=e^{\int\frac{ds}{q}}b-e^{\int\frac{ds}{q}}\int e^{-\int\frac{ds}{q}}pdx.$$

Ergo punctum, in quo corpus habebit maximam celeritatem, est in eo loco, qui invenitur ex hac aequatione

$$e^{\int-\frac{ds}{q}}pqdx=bds-ds\int e^{-\int\frac{ds}{q}}pdx$$

vel

$$b=\frac{e^{\int-\frac{ds}{q}}pqdx}{ds}+\int e^{-\int\frac{ds}{q}}pdx.$$

Si ergo construatur curva AN talis (fig. 77), ut sit semper eius applicata

$$PN=\frac{e^{\int-\frac{ds}{q}}pqdx}{ds}+\int e^{-\int\frac{ds}{q}}pdx,$$

in ea curva is quaerendus est locus, in quo applicata PN est $=b$. Tum ea producta in M dabit locum M in curva descensu descripta, in quo celeritas est maxima.

§ 495. Similis est ratio ascensus. Sit curva amc (fig. 78), super qua corpus ascendat, diversa, si placet, a priori curva descensus. Sit celeritas in puncto infimo a ex altitudine b acquisita, abscissa $ap=X$, curva $am=S$, vis absoluta in m agens $=P$, intensitas vis relativae in $m=Q$, celeritas in m tanta, quanta ex altitudine U acquiri potest. Erit $dU=-PdX-UdS:Q$ vel $dU+UdS:Q=-PdX$. Haec multiplicata

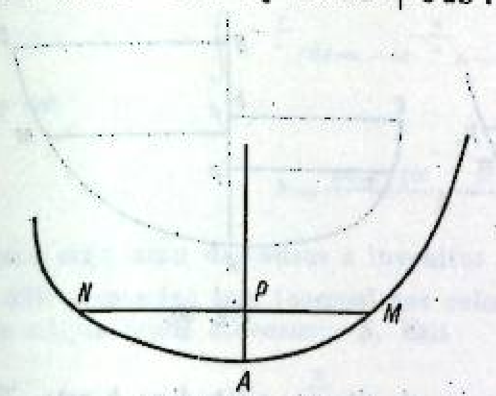


Fig. 77.

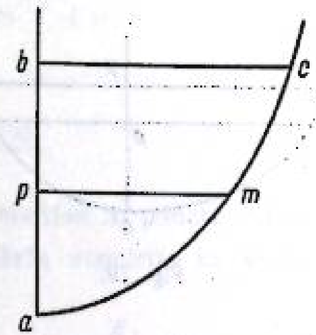


Fig. 78.

in $e^{\int\frac{dS}{Q}}$ erit integrabilis. Integrale quippe erit

$$e^{\int\frac{dS}{Q}}U=C-\int e^{\int\frac{dS}{Q}}PdX.$$

Si integralia $\int\frac{dS}{Q}$ et $\int e^{\int\frac{dS}{Q}}PdX$ ita sumantur, ut posito X vel $S=0$, ea fiant $=0$, erit $C=b$ et

$$U=e^{-\int\frac{dS}{Q}}b-e^{-\int\frac{dS}{Q}}\int e^{\int\frac{dS}{Q}}PdX.$$

§ 496. Ponamus $U=0$, quo totum arcum ascensus inveniamus. Erit

$$b=\int e^{\int\frac{dS}{Q}}PdX.$$

Quare construatur curva an (fig. 79) talis, ut eius applicata pn sit

$$=\int e^{\int\frac{dS}{Q}}PdX.$$

In hac curva quaeratur applicata, quae sit aequalis ipsi b. Haec sit ipsa pn. Ea producta in m dabit integrum arcum ascensus am. Si celeritas initialis aliquantulum maior accipiatur, ita ut celeritas in a sit genita ex altitudine $b+db$, erit $\pi\nu=b+db$. Erit ergo

$$db=e^{\int\frac{dS}{Q}}PdX$$

existente $p\pi = dX$ et $m\mu = dS$. Hoc ergo modo invenitur incrementum arcus ascensus, si celeritas initialis augmentum accipiat.

§ 497. Coniunctis curvis ascensus et descensus in A axibus coincidentibus erit aggregatum ex descensu per AMC et ascensu per Amc

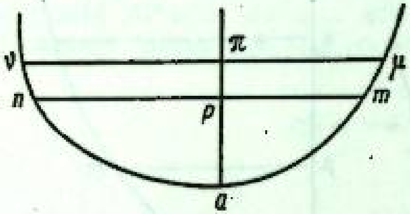


Fig. 79.

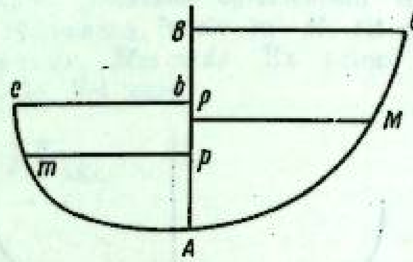


Fig. 80.

(fig. 80) una oscillatio. Celeritas in A sit ex altitudine b orta. Totus descensus arcus AMC habetur, si sumatur

$$b = \int e^{-\int \frac{ds}{q}} pdx.$$

Totus arcus ascensus* Amc habebitur, si sumatur

$$b = \int e^{\int \frac{dS}{Q}} PdX.$$

Erit ergo

$$\int e^{-\int \frac{ds}{q}} pdx = \int e^{\int \frac{dS}{Q}} PdX.$$

Quamobrem dato arcu descensus invenitur arcus ascensus et contra.
Sit $AM = s$ quicunque arcus descensus et $Am = S$ respondens arcus ascensus. Erit semper

$$e^{-\int \frac{ds}{q}} pdx = e^{\int \frac{dS}{Q}} PdX.$$

§ 498. Ad haec melius exponenda afferre lubet exemplum quoddam. Sit $P = p = g$ seu vis absoluta uniformis, porro $Q = q = c$ atque curva MAm cyclois. Fit ergo et ascensus et descensus in semicycloide. Sit AM cyclois, $AP = x$, $AM = s$ (fig. 81), celeritas in A ex altitudine b genita. Sit AM totus arcus descensus. Erit

$$b = \int e^{-\frac{s}{c}} gdx.$$

* In manuscripto: *descensus*. Correxit *G. M.*

Est vero ex natura cycloidis $ss = 2fx$. Ergo $dx = \frac{sds}{f}$. Quamobrem est.

$$b = \frac{g}{f} \int e^{-\frac{s}{c}} sds.$$

Est vero

$$\int e^{-\frac{s}{c}} sds = -ce^{-\frac{s}{c}} s - cce^{-\frac{s}{c}} + cc.$$

Quare est

$$b = \frac{gcc - gce^{-\frac{s}{c}}(c+s)}{f}.$$

Dato ergo arcu descensus s invenitur celeritas in puncto infimo.

§ 499. Ascendat iam [corpus] hac celeritate acquisita in aequali cycloide sitque arcus ascensus $= S$. Erit

$$b = \frac{gcc - gce^{\frac{S}{c}}(c-S)}{f}.$$

Hac aequatione cum illa comparata habebitur

$$e^{\frac{S+s}{c}} = \frac{c+s}{c-S}.$$

Post ascensum [corpus] rursus descendat, erit arcus descensus S, et tum denuo ascendat voceturque hic ascensus arcus (s). Erit

$$e^{\frac{S+(s)}{c}} = \frac{c+S}{c-(s)}.$$

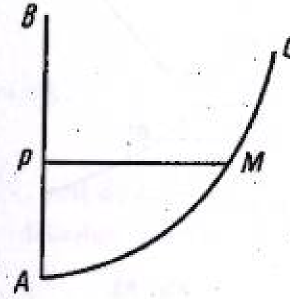


Fig. 81.

Hoc itaque modo post quotcunque oscillationes invenitur altitudo, ad quam postea [corpus] ascendere valebit. Perpetuo enim corpus de motu suo amittet atque in sequenti oscillatione minorem percurret arcum quam in oscillatione praecedente.

§ 500. Si c fuerit valde magnum, quemadmodum accidere solet, si corpora graviora in fluidis rarissimis moventur, erit

$$e^{-\frac{s}{c}} = 1 - \frac{s}{c}$$

vel ad summum

$$1 - \frac{s}{c} + \frac{ss}{2cc}$$

quam proxime. Hoc ergo in casu celeritas exprimi potest algebraice. Erit enim

$$v = \left(1 + \frac{s}{c}\right)b - \left(1 + \frac{s}{c}\right)\frac{g}{f}\left(\frac{ss}{2} - \frac{s^3}{3c}\right).$$

Ergo, si ponatur $v = 0$, erit

$$\frac{ss}{2} - \frac{s^3}{3c} = \frac{bf}{g}.$$

Porro, si arcus descensus sit $=s$ et ascensus $=S$, erit

$$\frac{c+S+s}{c}+\frac{(S+s)^2}{2cc}=\frac{c+s}{c-S}$$

seu

$$s=\frac{cS+SS}{c-S}=S+\frac{2SS}{c}$$

propter S valde parvum ratione c. Erit quoque $S=s-\frac{2ss}{c}$.

§ 501. Hactenus, super data curva quales corpus habeat motus, vidimus. Nunc proposita quadam proprietate motus investigabimus curvam, super qua proprietas ea locum habeat. Tractationem hanc, ut in Capite praecedente factum est, dividemus. Scilicet primo eas curvas quaeremus, quae datam ubique pressionem a corpore super iis moto patiantur, secundo eas, super quibus corpus motum ubique datam celeritatis legem tenet, tertioque eas curvas, super quibus motum corpus in temporibus praescriptam regulam servet. Praeterea hic de duabus curvis altera descensus, altera ascensus coniunctim est agendum, quia ascensus non est similis descensui.

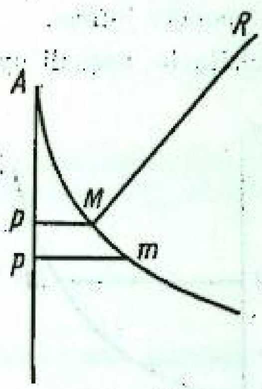


Fig. 82.

§ 502. Posita vi gravitatis $=1$ sit potentia absoluta aequabilis et deorsum tendens $=g$. Intensitas vis relativae sit etiam constans $=c$ et lex eius sit potentia exponentis n altitudinis celeritatem generantis. Descendat corpus super curva AM, cuius axis AP est verticalis (fig. 82). Sit $AP=x$, $PM=y$, $AM=s$, celeritas in M ex altitudine v genita. Erit $dv=gdx-v^n ds:c^n$ posita vi relativa retardante. Quaeramus, qualis sit curva AM, quae aequaliter ubique premitur a corpore descendente, nempe vi $=h$. Posito ergo radio osculi $MR=r$ erit $h=\frac{gdy}{ds}+\frac{2v}{r}$. Est vero posito dx constante radius osculi $=\frac{ds^3}{-dxddy}$. Propterea

$$r=\frac{ds^3}{dxddy},$$

quia in oppositam partem MR cadere ponimus.

§ 503. Habetur itaque

$$h=\frac{gdy}{ds}+\frac{2vdxddy}{ds^3}$$

vel

$$v=\frac{hds^3-gdyds^2}{2dxddy}.$$

Sumto huius differentiali, ut habeatur dv, hisque valoribus in aequatione $dv=gdx-v^n ds:c^n$ substitutis loco v et dv habebitur aequatio pro curva quaesita inter x, y et s. Habetur nimirum

$$dv=\frac{3hdydsddy^2-3gdy^2ddy^2-gdx^2ddy^2-hds^3d^3y+gdyds^2d^3y}{2dxddy^2}=$$

$$=gdx-\frac{(hds-gdy)^n ds^{2n+1}}{(2c)^n dx^n ddy^n}.$$

Quae abit in hanc

$$\frac{(hds-gdy)^n ds^{2n}}{2^{n-1}c^n dx^{n-1}ddy^{n-2}}=3gdsddy^2-3hdyddy^2+hds^2d^3y-gdydsd^3y.$$

§ 504. Resistat vis relativa in ratione duplicata celeritatum. Erit $n=1$. Hoc igitur casu habetur pro curva aequabiliter pressa haec aequatio

$$(hds-gdy)\,ds^2ddy=3cgdsddy^2-3chdyddy^2-chds^2d^3y+cgdydsd^3y$$

vel haec

$$ds^2ddy=\frac{3cgdsddy^2-3chdyddy^2}{hds-gdy}-cdsd^3y.$$

Si in hac aequatione ponantur $ds=\frac{pdp}{t}$ et $dy=\frac{dp}{t}$, erit $dx=\frac{dp}{t}\sqrt{pp-1}$, cuius differentialia omnium graduum sunt $=0$. Hisque valoribus in aequatione substitutis prodibit*

$$ppdp\,(1-pp)\,(hp-g):c=$$

$$=6gpptdp-3hp^3tdp+gtdp+gpdt-4hptdp-hppdt+hp^4dt-gp^3dt,$$

quae, quia t plures una dimensiones nusquam habet, poterit construi et propterea curva quaesita saltem per quadraturas potest confici.

§ 505. Secunda pars huius alterius istius Capitis sectionis est, qua celeritatis lex quaepiam praescribitur. Sit igitur altitudo generans celeritatem in $M=P$, ubi P pendet quomodocunque vel ab altitudine AP vel a horizontali MP, prout proponitur. Erit igitur $v=P$ et $dv=dP$. Quibus in aequatione substitutis prodibit aequatio inter x et y haec $dP=gdx-\frac{P^n ds}{c^n}$ ideoque pro curva quaesita.

. . . . **

[De convenientia inter curvas tautochronas sola vi gravitatis agente et inter has accedente vi relativa, cuius lex est ratio duplicata celeritatum]

§ 542. Convenientia hic quaedam notanda est inter curvas tautochronas sola vi absoluta agente et inter has accedente vi relativa. Sit tautochrona in illo casu AM (fig. 83) [posita vi gravitatis $=1$] voceturque $AP=t$, $AM=r$. Tautochrona vero agente vi relativa sit am, in qua

* In manuscripto formula haec constantem c non continet. Correxit *G. M.*
** In manuscripto hic plagula sesquioctava deest. — *G. M.*

sit $ap=x$, $am=s$, in qua descensus fieri pono. Poterit haec curva am facile ex illa AM construi hoc modo. Sumatur

$$ds : e^{\frac{s}{2c}} = dr \text{ seu } 2c\left(1 - e^{-\frac{s}{2c}}\right) = r$$

atque $g\int e^{-\frac{s}{c}}\,dx = t$.* Erit am etiam tautochrona. Ex quo sit $s = 2c\lg\frac{2c}{2c-r}$ et $x = \int\frac{4ccdt}{g(2c-r)^2}$.

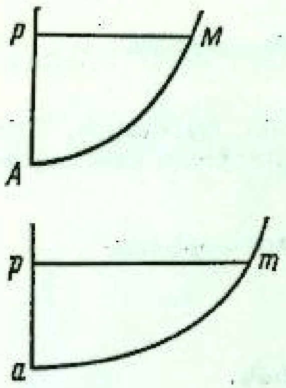


Fig. 83.

Cum igitur supra [in] § 454 et sequentibus infinitas invenire docuerimus tautochronas in vacuo, ex iis omnibus hoc modo construentur curvae similiter tautochronae in hypothesi potentiae relativae.

§ 543. De his duabus curvis praeterea notandum est, quod qualiscunque altera AM fuerit, tamen tempus descensus super utraque, si celeritates in A et a fuerint aequales, fore idem. Quamobrem non tantum tautochronae hoc modo reperiuntur pro potentiae relativae casu $n=1$, sed praeterea omnia, quae ad tempora attinent. Inventa enim curva, quae satisfacit in vacuo loco a potentiis absolutis, statim ope datae constructionis obtinetur in hypothesi resistentiae. Tandem, quamvis hic de descensibus tantum est sermo, tamen aeque ad ascensus pertinet. Curvae enim am alter ramus trans a, si quem habet, est pro ascensu et respondet ascensui super ramo etiam altero curvae AM.

Caput III. DE MOTU PUNCTI SUPER DATA SUPERFICIE A POTENTIIS TAM ABSOLUTIS QUAM RELATIVIS SOLLICITATI

§ 544. Si nulla adest vis, quae corporis motum alterat, tum corpus data celeritate super quacunque superficie proiectum motu aequabili in ea progredietur et describet lineam, quae est brevissima inter suos terminos, quemadmodum in introductione ad hanc Sectionem (§ 338) ostensum est. Si igitur superficies proposita plana fuerit, via puncto descripta erit linea recta. Si autem sit superficies sphaerica, corpus progredietur in eius circulo quodam maximo.

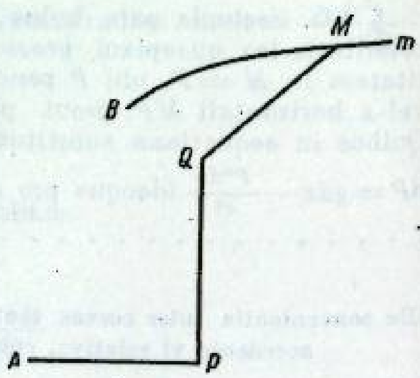


Fig. 84.

§ 545. Sit punctum M in superficie proposita atque BM (fig. 84) curva a mobili iam descripta a vi quacunque sollicitato. Demittatur ex M in datum planum APQ perpendicularis MQ et ex Q ad axem prolubitu assumtum AP normalis QP. Sit A initium abscissarum. Ponatur, ut [in] § 340 factum est, $AP=x$, $PQ=y$ et $QM=z$ sitque natura superficiei exposita hac aequatione $Pdx=Qdy+Rdz$.

* Hic c denotat intensitatem constantem potentiae relativae et g denotat vim absolutam. — *G. M.*

§ 546. Vim quamcunque in corpus M agentem resolvere convenit in tres vires partiales. Quarum prima habeat directionem tangentis curvae, quam mobile describit, quam vocabo tangentialem. Secundae directio sit perpendicularis ad superficiem in M. Tertia vero sit ad utramque harum perpendicularis. Quid singulae hae vires efficiant, facile perspicitur. Prima enim tangentialis directionem corporis non immutat, sed tantum celeritatem vel auget vel minuit. Haec igitur, si sola ageret, corpus nihilominus super superficie lineam describeret brevissimam.

§ 547. Secunda potentia prorsus corporis motum non afficit, qui in superficiem est normalis, verum pressionem, quam superficies a corpore sustinet, vel auget vel minuit. Tertia tandem potentia directionem motus immutat facitque, ut corpus non amplius in linea brevissima progrediatur, sed ab ea declinet. Motum igitur corporis super superficie quacunque proposita investigaturi duas tantum potentias, tangentialem et tertiam, quae ad illam atque normalem in superficiem est perpendicularis, considerabimus. De pressione enim, quam superficies patitur, non opus est agere.

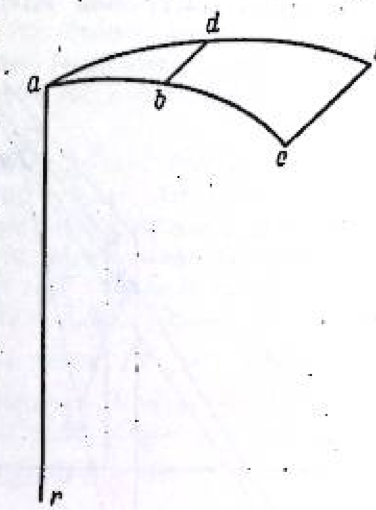


Fig. 85.

§ 548. Sit celeritas corporis in M ex altitudine v genita atque vis tangentialis sit ad vim gravitatis ut T ad 1, quam pono accelerantem. Elemento temporis progrediatur corpus ex M in m (fig. 84). Erit $Mm = \sqrt{dx^2+dy^2+dz^2}$. Erit igitur $dv = T\sqrt{dx^2+dy^2+dz^2}$. Sit etiam vis normalis, ea scilicet, quae et ad tangentialem et normalem in superficiem est perpendicularis, $=N$, huiusque quaeramus effectum in mutando corporis motu.

Describat corpus absente hac vi arculum circularem abc, elementum scilicet lineae brevissimae, cuius radius sit $ar=r$ (fig. 85). Concipiamus arcum abc bisectum in b, ita ut sit $ab=bc$.

§ 549.* Posito igitur abc arcu lineae brevissimae sit $abcr$ planum,[1] in quo hic arcus est situs. Quod igitur planum erit normale in superficiem propositam atque ar erit in eam normalis. Vis igitur N aget perpendiculariter in hoc planum. Faciat ea, ut corpus in linea ade moveatur. Erunt bd et ce perpendiculares in planum abc. Invenietur autem $\frac{ab}{\sqrt{v}} = \frac{2\sqrt{bd}}{\sqrt{N}}$ eritque $bd = \frac{N\cdot ab^2}{4v}$. Atque, quia $ac=2ab$, habebitur $ce=4bd=\frac{N\cdot ab^2}{v}$.

. . . . **

§ 554. Tres igitur habemus aequationes ad determinandam et ipsam curvam, quam corpus super superficie data describit, et celeritatem in loco quovis. Harum prima est ipsa aequatio naturam superficiei exponens

$$Pdx = Qdy + Rdz.$$

* Paragraphus hic ab Eulero exstinctus est. — *G. M.*
** In manuscripto hic plagulae octava deest. — *G. M.*

Secunda est, quae ex vi tangentiali est inventa,

$$dv = T\sqrt{dx^2+dy^2+dz^2}$$

atque tertia, quam debit vis normalis,

$$N(dx^2+dy^2+dz^2)^{3/2}\sqrt{P^2+Q^2+R^2} =$$
$$= 2Pvdyddz - 2Pvdzddy + 2Qvdxddz - 2Rvdxddy.^*$$

Ex harum posteriorum altera celeritas definitur seu v determinatur, altera vero cum prima coniuncta determinabit ipsam lineam, a corpore super data superficie descriptam.

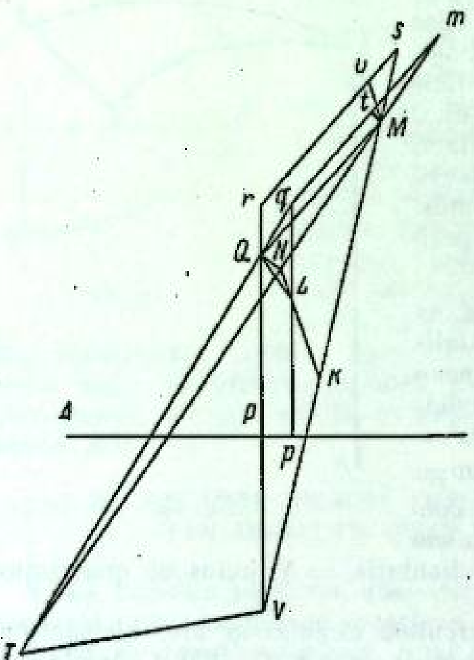


Fig. 86.

§ 555. Quaeramus nunc resolutionem cuiusque vis in huiusmodi tangentialem et normalem. Sit primo potentiae corpus sollicitantis directio recta QM (fig. 86) seu coordinata z eiusque quantitas ponatur $=A$. Describat corpus elemento temporis spatiolum Mm. Ductisque coordinatis iuxta iam praeceptum modum MQ, mq, QP et qp ad axem AP, ubi est $AP=x$, $PQ=y$, $QM=z$, erit $Qq = \sqrt{dx^2+dy^2} = Mt$ atque $Mm = \sqrt{dx^2+dy^2+dz^2}$. Ducatur tangens mMT elemento qQ producto in T occurrens. Erit

$$QT = \frac{z\sqrt{dx^2+dy^2}}{dz}$$

atque planum MQT erit in planum APQ normale. Ducatur ex Q in TM perpendiculum QN. Erit

$$MN = \frac{zdz}{\sqrt{dx^2+dy^2+dz^2}}$$

et

$$QN = \frac{z\sqrt{dx^2+dy^2}}{\sqrt{dx^2+dy^2+dz^2}}.$$

§ 556. Vis A secundum QM agens resolvatur in laterales secundum MN et QN agentes. Erit illa

$$= \frac{Adz}{\sqrt{dx^2+dy^2+dz^2}},$$

* Cf. Euleri *Mechanicam*, t. II, § 851 (Opera omnia, II-2, pp. 432—434). — *G. M.*

quae est vis tangentialis retardans. Quamobrem pro T poni debet

$$\frac{-Adz}{\sqrt{dx^2+dy^2+dz^2}}.$$

Altera vis secundum QN agens est

$$= \frac{A\sqrt{dx^2+dy^2}}{\sqrt{dx^2+dy^2+dz^2}}.$$

Haec potest resolvi iterum in duas, quarum alterius directio est perpendicularis in planum tangens, altera vero ad tangentialem normalis et in ipso plano tangente est posita. Ad hoc opus est habere positionem plani tangentis.

§ 557. Recta MT posita est in plano tangente. Quare aliam adhuc lineam quaeramus itidem in plano tangente sitam. Ad hoc in recta PQ sumatur elementum Qr erigaturque usque ad superficiem perpendicularis rs. Erit recta sM producta quoque in plano tangente. Occurrat ea applicatae QP productae in V. Erit $QM:QV = sv:vM = dz:dy$ posito $dx=0$. At facto $dx=0$ erit $0=Qdy+Rdz$. Quare habetur $dz:dy = -Q:R$, unde $QV = \frac{-Rz}{Q}$. Ducta recta TV erit TMV planum tangens. In hoc demittatur ex Q perpendiculum QL ducendo NK ad TM perpendicularem atque ex Q in NK demittendo perpendiculum QL.

§ 558. Vis ergo normalis in plano tangente sita est

$$= \frac{A\sqrt{dx^2+dy^2}}{\sqrt{dx^2+dy^2+dz^2}}\cdot\frac{NL}{QN}.$$

Est vero $\frac{QL}{QN}$ sinus anguli QNL, cuius ergo cosinus erit $\frac{NL}{QN}$. At angulus QNL est angulus, quem planum TQM cum plano TMV constituit. Inclinationem ergo horum duorum planum investigari oportet.

Sit sinus anguli $QTM=m$, sinus anguli $QTV=n$. Erit sinus anguli inclinationis QNL

$$= \frac{n}{\sqrt{m^2+nn(1-mm)}}.$$

Est vero

$$m = \frac{tm}{Mm} = \frac{dz}{\sqrt{dx^2+dy^2+dz^2}}$$

atque

$$n = \frac{-Rdxdz}{\sqrt{(dx^2+dy^2)(Q^2dx^2+P^2dx^2)}} = \frac{-Rdz}{\sqrt{(dx^2+dy^2)(P^2+Q^2)}},$$

unde sinus QNL

$$= \frac{-R\sqrt{dx^2+dy^2+dz^2}}{\sqrt{(dx^2+dy^2)(P^2+Q^2+R^2)}}.$$

§ 559. Cosinus ergo anguli QNL, i. e. $\frac{NL}{QN}$

$$=\frac{\sqrt{P^2dx^2+P^2dy^2+Q^2dx^2+Q^2dy^2-R^2dz^2}}{\sqrt{(dx^2+dy^2)(P^2+Q^2+R^2)}}.$$

Posito vero $Pdx-Qdy$ loco Rdz prodibit

$$\frac{NL}{QN}=\frac{Pdy+Qdx}{\sqrt{(dx^2+dy^2)(P^2+Q^2+R^2)}}.$$

Ex quo habebitur vis normalis in plano tangente sita et a vi A secundum MQ agente orta

$$=\frac{A(Pdy+Qdx)}{\sqrt{(dx^2+dy^2+dz^2)(P^2+Q^2+R^2)}}.$$

Ab eadem vi autem vis tangentialis orta est

$$=\frac{-Adz}{\sqrt{dx^2+dy^2+dz^2}}.$$

§ 560. Simili modo, si corpus in M trahatur a vi B secundum directionem QP agentem, erit vis tangentialis ex ea orta

$$=\frac{-Bdy}{\sqrt{dx^2+dy^2+dz^2}}$$

atque vis normalis

$$=\frac{B(Pdz+Rdx)}{\sqrt{(dx^2+dy^2+dz^2)(P^2+Q^2+R^2)}}.$$

Si etiam corpus sollicitetur a vi C secundum PA agente, erit vis tangentialis inde orta

$$=\frac{-Cdz}{\sqrt{dx^2+dy^2+dz^2}}$$

atque vis normalis

$$=\frac{C(Qdz-Rdy)}{\sqrt{(dx^2+dy^2+dz^2)(P^2+Q^2+R^2)}}.$$

Si ergo hae tres vires A, B et C simul agerent, foret vis tangentialis ex iis orta

$$=\frac{-Adz-Bdy-Cdx}{\sqrt{dx^2+dy^2+dz^2}}$$

atque vis normalis

$$=\frac{APdy+AQdx+BPdz+BRdx+CQdz-CRdy}{\sqrt{(dx^2+dy^2+dz^2)(P^2+Q^2+R^2)}}.$$

§ 561. Formulae hae latissime patent ad easque omnes plane vires, a quibus corpus sollicitari poni potest, modo sint absolutae, ad eas reduci possunt. Quaecunque enim vis corpus M sollicitare ponatur, semper tres vires in expositis tribus directionibus sitae inveniri possunt ei aequivalentes. Praeterea litterae A, B, C non sunt constantes, sed quantitates utcunque variabiles denotare possunt. Quocirca, sive corpus M ad centrum fixum sive ad variabile sive ad plura utlibet attrahatur, semper erit casus formularum nostrarum.

§ 562. Maxima hac universalitate missa, ne tractatio nimis extendatur, tantum gravitatem uniformem, qualis est in nostris regionibus, considerabo. Erit ergo $B=0$, $C=0$ at $A=1$ posito plano ABQ horizontali. Posito ergo

$$T=\frac{-dz}{\sqrt{dx^2+dy^2+dz^2}}$$

et

$$N=\frac{Pdy+Qdx}{\sqrt{(dx^2+dy^2+dz^2)(P^2+Q^2+R^2)}}$$

prodibunt istae aequationes $dv=-dz$ et

$$(Pdy+Qdx)(dx^2+dy^2+dz^2)=$$
$$=2Pvdyddz-2Pvdzddy+2Qvdxddz-2Rvdxddy.$$

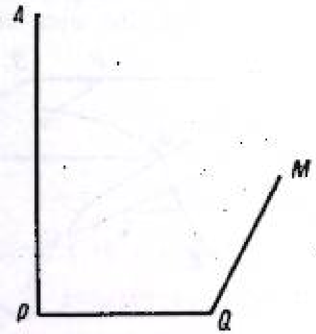


Fig. 87.

Si motus fiat in inferiore superficie parte infra APQ, erit $dv=dz$ et

$$(Pdy+Qdx)(dx^2+dy^2+dz^2)=2Pvdzddy-2Pvdyddz-2Qvdxddz+2Rvdxddy.$$

§ 563. Consideremus potius motum in inferiori parte, qua motus tanquam acceleratus repraesentatur ob crescentes z. Erit $v=b+z$ atque

$$(Pdy+Qdx)(dx^2+dy^2+dz^2)=2(b+z)(Pdzddy-Pdyddz-Qdxddz+Rdxddy).$$

Ex illa aequatione cognoscitur celeritas corporis in loco quovis semitae descriptae. Ex hac vero cum aequatione $Pdx=Qdy+Rdz$ coniuncta determinatur ipsa via, quam corpus super data superficie percurrit. Aequatio autem altera mutatur in hanc

$$\frac{dx^2+dy^2+dz^2}{2(b+z)}=\frac{(Pdz+Rdx)ddy}{Pdy+Qdx}-ddz.$$

§ 564. Consultius autem erit axem AP accipere verticalem ex A descendentem (fig. 87). Agit ergo tantum vis C, quae erit $=-1$, quia C secundum PA trahere ponitur. Atque erit $A=0$ et $B=0$. Unde provenit

$$T=\frac{dz}{\sqrt{dx^2+dy^2+dz^2}}$$

et

$$N=\frac{Rdy-Qdz}{\sqrt{(dx^2+dy^2+dz^2)(P^2+Q^2+R^2)}}.$$

His loco T et N substitutis habebuntur hae aequationes $dv = dx$ et

$$(Rdy - Qdz)(dx^2 + dy^2 + dz^2) = 2Pvdyddz - 2Pvdzddy + 2Qvdxddz - 2Rvdxddy.$$

Aequatio haec eliminata littera P abit in hanc

$$\frac{dx}{2v} = \frac{-Rddy + Qddz}{Rdy - Qdz} + \frac{dyddy + dzddz}{dx^2 + dy^2 + dz^2}.$$

Ex priore vero aequatione habetur $v = b + x$.

§ 565. Proiectio curvae descriptae in quovis plano ex his aequationibus potest inveniri. Si desideretur proiectio in plano APQ seu curva, quae a perpendiculis ex curva descripta in hoc planum demissis delineatur, tum opus est, ut ex duabus aequationibus una conficiatur, in qua desit z. Proiectio in plano ad axem AP normali habebitur, si eliminetur x. In plano autem secante normaliter planum APQ in linea AP prodibit proiectio eliminata littera y.

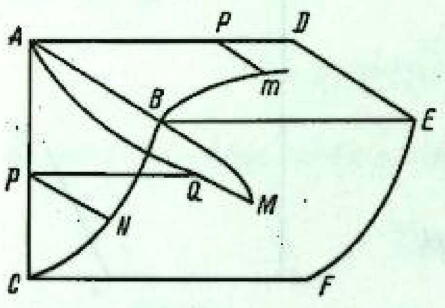


Fig. 88.

§ 566. Consideremus primaria corporum solidorum genera. Et primo sit superficies proposita cylindrica iacens horizontaliter $BCFE$ (fig. 88). Axis verticalis sit AP et curva descripta in superficie sit BM. Ductis $MQ = z$ et $QP = y$ erit PN, perpendicularis in AC, $= QM$. Eritque $Pdx = Rdz$ atque $Q = 0$. Nam semper eadem est aequatio inter x et z, quantacunque sit y. Proveniet igitur ista aequatio

$$\frac{dx}{2(b+x)} = \frac{-ddy}{dy} + \frac{dyddy + dzddz}{dx^2 + dy^2 + dz^2},$$

cuius integralis est

$$\frac{1}{2}\lg(b+x) = \lg\sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2} - \lg dy + \frac{1}{2}\lg f$$

seu

$$\frac{\sqrt{f}}{\sqrt{b+x}} = \frac{dy}{\sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2}}.$$

§ 567. Ex hac aequatione facile invenitur tempus, quo linea BM est descripta. Nam elementum temporis est

$$\frac{\sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2}}{\sqrt{b+x}},$$

quod ex illa aequatione aequale est $\frac{dy}{\sqrt{f}}$. Totum ergo tempus est $= \frac{y}{\sqrt{f}}$.*

* In manuscripto: $\frac{y}{f}$. Correxit G. M.

seu corpus eodem tempore lineam BM absolvit, quo mobile rectam PQ motum celeritate ex altitudine f genita.

Proprietas haec facile sine hac methodo cognoscitur. Nam resolvatur celeritas, quam corpus in B habuit, in duas laterales, alteram deorsum, alteram horizontaliter secundum BE. Patet illam una cum vi gravitatis tantum descendere, hanc vero uniformiter secundum BE progredi. Quare etiam arcus BN eodem absolveretur tempore, si celeritas initialis in B esset $= \sqrt{b-f}$.

§ 568. Huius curvae BM proiectio repraesentatur in plano $ABED$ linea Bm, in qua est $Ap = y$ et $pm = z$. Alia habetur in plano $ACFD$, nempe AQ, in qua est $AP = x$ et $PQ = y$, ut iam est positum. Si ergo proiectio Bm desideratur, aequatio debet inveniri, in qua deest x, si vero proiectio AQ, tum aequatione est opus, in qua non est z. Utrumque facile obtinebitur coniungendis aequationibus

$$\frac{\sqrt{f}}{\sqrt{b+x}} = \frac{dy}{\sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2}}$$

et $Pdx = Rdz$.

§ 569. Quia superficies data esse ponitur, poterit x in z atque z in x et constantibus dari. Sit igitur $x = \int \frac{Rdz}{P}$, ubi $\frac{R}{P}$ functionem ipsius z denotet. Prodibit aequatio, in qua non erit x, adeoque pro proiectione Bm, nempe $\left(\text{posito } Z \text{ pro } \frac{R}{P}\right)$

$$\frac{\sqrt{f}}{\sqrt{b + \int Zdz}} = \frac{dy}{\sqrt{ZZdz^2 + dy^2 + dz^2}}$$

seu

$$fdz^2(1 + ZZ) = dy^2\left(b - f + \int Zdz\right)$$

ideoque

$$dy = \frac{dz\sqrt{f(1+ZZ)}}{\sqrt{b - f + \int Zdz}}.$$

Simili modo pro proiectione AQ invenitur ista aequatio

$$dy = \frac{dx\sqrt{f(1+XX)}}{\sqrt{b - f + x}}.$$

Hic est $X = \frac{P}{R}$ atque in x dari ponitur.

§ 570. Sit superficies cylinder ordinarius, cuius basis est circulus radii a centrum in A habens. Erit $xx + zz = aa$ seu $x = \sqrt{aa - zz}$. Erit ob $xdx = -zdz$ $P = x$ et $R = -z$. Unde

$$Z = \frac{R}{P} = \frac{-z}{\sqrt{aa - zz}}.$$

Fiet igitur $\int Zdz=\sqrt{aa-zz}$ et propterea pro proiectione Bm prodit aequatio haec

$$dy=\frac{dz\sqrt{faa:(aa-zz)}}{\sqrt{b-f+\sqrt{aa-zz}}}=\frac{adz\sqrt{f}}{\sqrt{(aa-zz)(h+\sqrt{aa-zz})}}$$

posito h pro $b-f$. At pro proiectione AQ invenietur ob $z=\sqrt{aa-xx}$ et $X=\frac{-x}{\sqrt{aa-xx}}$ ista aequatio

$$dy=\frac{adx\sqrt{f}}{\sqrt{(aa-xx)(h+x)}}.$$

Utriusque constructio per quadraturas habetur.

§ 571. Insistat iam superficies cylindrica verticaliter $BCED$ (fig. 89) sitque curva in ea descripta BM. Erit $Qdy+Rdz=0$. Est adeoque $P=0$ et $Q:R=-dz:dy$. Aequatio igitur § 564 transibit in istam

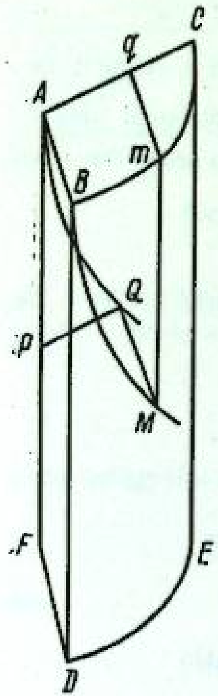


Fig. 89.

$$\frac{dx}{2(b+x)}=\frac{dyddy+dzddz}{-dy^2-dz^2}+\frac{dyddy+dzddz}{dx^2+dy^2+dz^2},$$

cuius integralis est

$$\frac{1}{2}\lg(b+x)=\lg\frac{\sqrt{dx^2+dy^2+dz^2}}{\sqrt{dy^2+dz^2}}+\frac{1}{2}\lg f$$

seu

$$\frac{\sqrt{f}}{\sqrt{b+x}}=\frac{\sqrt{dy^2+dz^2}}{\sqrt{dx^2+dy^2+dz^2}}.$$

Tempus, quo arcus BM absolvitur, est

$$=\frac{\int\sqrt{dy^2+dz^2}}{\sqrt{f}}=\frac{Bm}{\sqrt{f}}$$

sumto $Aq=PQ$ seu $qm=QM$. Eodem ergo tempore absolvitur, quo arcus Bm motu uniformi, celeritate scilicet $\sqrt{f}$. Est etiam hoc tempus

$$=\int\frac{dx}{\sqrt{b-f+x}},$$

i. e. tempori descensus liberi per $AP=x$ celeritate initiali $=\sqrt{b-f}$.

§ 572. Ad ipsam curvam BM determinandam non est opus proiectiones adhibere. Sed, cum superficies cylindrica quaevis possit planam evolutione mutari, qualis sit curva BM in hoc plano, investigabimus. Erit igitur abscissa portio curvae Bm, quam vocabimus t, applicata vero erit mM seu $AP=x$. Habetur ergo $dt=\sqrt{dy^2+dz^2}$. Substituto igitur in aequatione

$$\frac{\sqrt{f}}{\sqrt{b+x}}=\frac{\sqrt{dy^2+dz^2}}{\sqrt{dx^2+dy^2+dz^2}}$$

loco $\sqrt{dy^2+dz^2}$ valore dt prodibit

$$\frac{\sqrt{f}}{\sqrt{b+x}}=\frac{dt}{\sqrt{dx^2+dt^2}}$$

seu

$$fdx^2=(b-f+x)\,dt^2=(h+x)\,dt^2$$

posito h pro $b-f$. Integrata hac aequatione provenit $t=2\sqrt{f(h+x)}$, ex qua apparet curvam BM fore parabolam.

§ 573. Facilis admodum est inventio curvae descriptae in superficiebus cylindricis neque ad eam tantus apparatus ex natura solidorum desumtus fuisset necessarius. Nam omnia, quae ad hanc motus investigationem pertinent, obtineri possunt sola resolutione motus in directe descendentem et horizontalem, quorum ille a vi gravitatis augetur, hic vero immutatus relinquitur. Haec vero facilitas hac cylindricarum superficierum proprietate nititur, quod possint in planas mutari. Eandem hanc proprietatem vero etiam superficies conicae habent et propterea sine formulis nostris motus super illis sine difficultate cognoscitur.

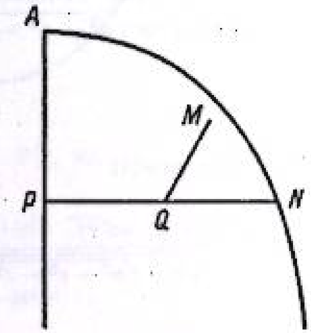


Fig. 90.

§ 574. Praetermissis ergo ob hanc rationem corporibus conicis progredior ad solida rotunda motumque corporum super eorum superficiebus explicandum. Sit solidum propositum genitum conversione curvae AN circa axem AP et punctum M in superficie (fig. 90). Erit sectio PMN perpendicularis ad axem AP circulus, cuius radius PN est, itaque $PQ^2+QM^2=y^2+z^2=PN^2$. Quia vero curva APN est data, erit PN functio quaedam ipsius $AP=x$. Sit ea $\sqrt{2\int Pdx}$. Erit $Pdx=ydy+zdz$. His cum aequatione generali comparatis erit $Q=y$ et $R=z$.

§ 575. Altitudine v generante celeritatem in M posita $=b+x$ erit

$$\frac{dx}{2(b+x)}=\frac{-zddy+yddz}{zdy-ydz}+\frac{dyddy+dzddz}{dx^2+dy^2+dz^2}.$$

Huius aequationis integralis est

$$\frac{1}{2}\lg(b+x)=\lg C-\lg(zdy-ydz)+\lg\sqrt{dx^2+dy^2+dz^2}$$

seu

$$\frac{f\sqrt{f}}{\sqrt{b+x}}=\frac{zdy-ydz}{\sqrt{dx^2+dy^2+dz^2}}.$$

Si constans f foret $=0$, tum esset $zdy=ydz$ seu $y=nz$. Ex quo consequitur corpus tum in sectione verticali per verticem A facta moveri. Scilicet hoc accidere debet, quando vel corpus ex quiete delabi incipit vel cum celeritate talem directionem habente. Vel quoties semita corporis per verticem transit, toties motus sit in eodem plano.

§ 576. Sit curva AN circulus seu superficies proposita sphaerica, cuius radius $=a$. Erit $PN=\sqrt{a^2-x^2}$.* Hinc habetur $2\int Pdx=a^2-x^2$ et $P=-x$. Quamobrem oritur aequatio $-xdx=ydy+zdz$ vel integralis $a^2=x^2+y^2+z^2$, quae coniuncta cum hac

$$\frac{f\sqrt{f}}{\sqrt{b+x}}=\frac{zdy-ydz}{\sqrt{dx^2+dy^2+dz^2}}$$

determinabit curvam a corpore in superficie sphaerica descriptam. Quaeratur eius proiectio in plano horizontali, oportebit eliminare x. Est vero $x=\sqrt{a^2-y^2-z^2}$ et

$$dx=\frac{-ydy-zdz}{\sqrt{a^2-y^2-z^2}}.$$

Unde prodit

$$\frac{f\sqrt{f}}{\sqrt{b+\sqrt{a^2-y^2-z^2}}}=\frac{(zdy-ydz)\sqrt{a^2-y^2-z^2}}{\sqrt{a^2dy^2+a^2dz^2-z^2dy^2-y^2dz^2+2yzdydz}}=$$

$$=\frac{(zdy-ydz)\sqrt{a^2-y^2-z^2}}{\sqrt{a^2dy^2+a^2dz^2-(zdy-ydz)^2}}.$$

§ 577. Aequatio haec reducta dabit hanc

$$a^2f^3(dy^2+dz^2)-f^3(zdy-ydz)^2=b(zdy-ydz)^2(a^2-y^2-z^2)+$$

$$+(zdy-ydz)^2(a^2-y^2-z^2)^{3/2}$$

seu

$$a^2f^3(dy^2+dz^2)=(zdy-ydz)^2\left[f^3+a^2b-by^2-bz^2+(a^2-y^2-z^2)^{3/2}\right].$$

Aequatio haec, quanquam prorsus intractabilis videtur, fit tamen separabilis ope harum substitutionum. Fiat $yy+zz=tt$ at $dy^2+dz^2=ds^2$, erit

$$zdy-ydz=t\sqrt{ds^2-dt^2}.$$

His substitutis provenit ista aequatio

$$ds=dt\sqrt{\frac{tt(a^2-tt)^{3/2}+f^3tt+a^2bt^2-bt^4}{tt(a^2-tt)^{3/2}+f^3tt+a^2bt^2-bt^4-a^2f^3}},$$

* In manuscripto: $AN=\ldots$ Correxit G. M.

quae hoc modo ad proiectionem pertinet. Sit $ap=y$, $pm=z$ et bm proiectio (fig. 91). Erit subtensa $am=t$ et arcus $bm=s$. Data vero aequatione inter am et bm ipsa curva poterit construi.

§ 578. Ducatur tangens mt in eamque demittatur ex vertice a perpendiculum at sitque $mt=w$. Erit $ds=tdt:w$. Quo substituto prodibit

$$tt(aa-tt)^{3/2}+f^3tt+a^2btt-bt^4-a^2f^3=w^2(aa-tt)^{3/2}+f^3w^2+a^2bw^2-bt^2w^2.$$

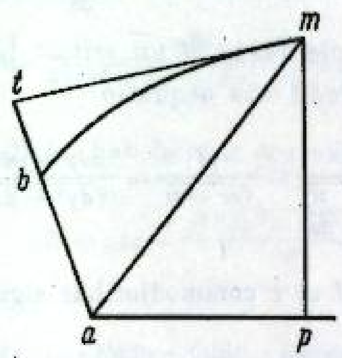


Fig. 91.

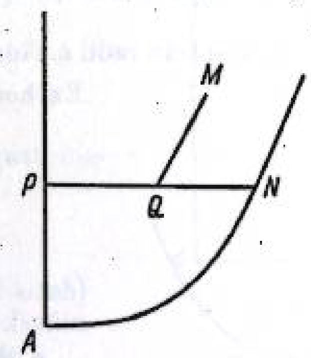


Fig. 92.

Vel vocetur $at=p$, erit $w^2=tt-pp$. Quo substituto oritur ista aequatio

$$a^2f^3=p^2(a^2-tt)^{3/2}+f^3p^2+a^2bp^2-bt^2p^2.$$

Fiat $f^3+aab=aac$. Erit

$$p=\frac{aa\sqrt{c-b}}{\sqrt{(a^2-t^2)^{3/2}+a^2c-bt^2}},$$

ex qua aequatione adhuc facilius curvae quaesitae proiectio cognosci et construi potest.

§ 579. Non multum differt ab hoc inventio motus, si superficies proposita consideretur inversa, ut vertex A curvae generatricis AN sit in puncto infimo (fig. 92). Hoc enim in casu oportuisset pro C non ponere -1 sed $+1$. Haec vero mutatio nil aliud immutat, nisi quod pro v non $b+x$, sed $b-x$ scribi debeat. Etenim $zdy-ydz$, si loco eius $ydz-zdy$ scriberetur, tamen ex eo nullum oritur discrimen. In nostro autem superficiei sphaericae casu tantum pro $(a^2-t^2)^{3/2}$ scribi oportet $-(a^2-t^2)^{3/2}$. Habebitur ergo sequens pro proiectione in plano horizontali aequatio

$$p=\frac{a^2\sqrt{c-b}}{\sqrt{a^2c-bt^2-(a^2-t^2)^{3/2}}}.$$

§ 580. Casus hic est notandus, quo celeritas est infinite parva respectu radii sphaerae AC (fig. 93). Hocque casu motus fit in spatio infinite propinquo vertici imo A atque superficies, in qua fit motus, tanquam planum potest considerari. Propterea y et z evanescent prae a. Habebiturque loco $\sqrt{b+\sqrt{a^2-y^2-z^2}}$ posito $\sqrt{v}$ mox definienda haec aequatio

$$\frac{f\sqrt{f}}{\sqrt{v}}=\frac{zdy-ydz}{\sqrt{dy^2+dz^2}}.$$

Sit M locus corporis celeritasque eius tanta, ut eo in A perveniente fiat $=\sqrt{c}$. Est vero $PM=\sqrt{y^2+z^2}=t$. Unde fiet $AP=\frac{tt}{2a}$ ob PM infinite parvum respectu radii a. Adeoque celeritas in M $\sqrt{v}$ erit $=\sqrt{c-\frac{tt}{2a}}$. Ex hocque prodit ista aequatio

$$\frac{f\sqrt{f}}{\sqrt{c-\frac{tt}{2a}}}=\frac{ff}{\sqrt{cc-tt}}=\frac{zdy-ydz}{\sqrt{dy^2+dz^2}}$$

(datis literis f et c commodioribus significationibus).

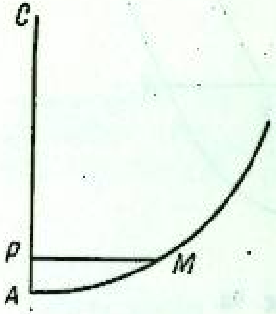


Fig. 93.

§ 581. Substituantur loco $zdy-ydz$ et $\sqrt{dy^2+dz^2}$ valores supra dati $t\sqrt{ds^2-dt^2}$ et ds. Prodibit haec auquatio

$$\frac{ff}{\sqrt{cc-tt}}=\frac{t\sqrt{ds^2-dt^2}}{ds}.$$

Ponatur etiam perpendiculum in proiectione in tangentem $at=p$ (vide fig. 91 ad § 577). Erit

$$ds=\frac{tdt}{\sqrt{tt-pp}}\quad\text{et}\quad\sqrt{ds^2-dt^2}=\frac{pdt}{\sqrt{tt-pp}}.$$

Quamobrem orietur pro proiectione aequatio haec $\frac{ff}{\sqrt{cc-tt}}=p$, ex qua aequatione apparet curvam esse ellipsin, cuius centrum est in a. Ipsa autem curva a corpore descripta, quia tanquam in plano sita potest considerari, cum proiectione congruit. Quare corpus movebitur in ellipsi, cuius centrum est in axe AC.

§ 582. In hoc Capite non solum est constitutum motum corporis super superficiebus a potentiis absolutis, sed etiam ab relativis sollicitati explicare, quia consideratio superficierum per se est tam difficilis, ut non liceat ad nimis particularia descendere, ut in praecedentibus fecimus. In hac igitur altera parte considerem corpus non tantum a potentia absoluta, sed etiam a relativa sollicitatum. Non multum hac nova consideratione formulae traditae immutantur, sola enim vis tangentialis ab ea afficitur debetque vel maior vel minor accipi, prout vis relativa vel accelerans vel retardans ponitur.

§ 583. Consideremus rem ut in § 564, nempe sit $AP=x$, $PQ=y$, $QM=z$ (fig. 94) interque has sit haec aequatio $Pdx=Qdy+Rdz$. Celeritas in M sit ex altitudine v genita. Quanquam vero hic pro potentia absoluta non nisi vim gravitatis contemplabimur, tamen, quia adest vis

relativa, non ponemus $C=-1$, sed $C=-g$, quia a potentia relativa ipsa absoluta solet maior vel minor reddi. Sit intensitas vis relativae constans atque altitudine c exposita. Lex eius sit ratio quaecunque multiplicata ipsius v atque ponamus eam retardantem. Prodibit igitur vis tangentialis

$$=\frac{gdx}{\sqrt{dx^2+dy^2+dz^2}}-\frac{v^n}{c^n}$$

atque vis normalis

$$N=\frac{gRdy-gQdz}{\sqrt{(dx^2+dy^2+dz^2)(P^2+Q^2+R^2)}}.$$

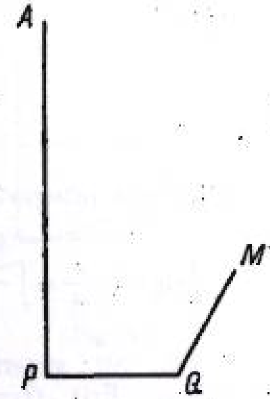


Fig. 94.

§ 584. Hinc habebuntur sequentes aequationes

$$dv=gdx-\frac{v^n\sqrt{dx^2+dy^2+dz^2}}{c^n}$$

atque

$$\frac{gdx}{2v}=\frac{-Rddy+Qddz}{Rdy-Qdz}+\frac{dyddy+dzddz}{dx^2+dy^2+dz^2},$$

ex quibus una cum aequatione naturam superficiei exprimente $Pdx=Qdy+Rdz$ corporis celeritas in loco quovis atque ipsa curva ab eo in superficie descripta determinabuntur. Ponamus autem $n=1$, quia in aliis casibus vix quicquam poterit definiri. Erit

$$dv=gdx-\frac{v\sqrt{dx^2+dy^2+dz^2}}{c}$$

manentibus reliquis aequationibus.

§ 585. Ex ista aequatione fluit

$$\frac{gdx}{2v}=\frac{dv}{2v}+\frac{\sqrt{dx^2+dy^2+dz^2}}{2c},$$

quod substitutum in aequatione a vi normali facta prodibit

$$\frac{dv}{2v}+\frac{\sqrt{dx^2+dy^2+dz^2}}{2c}=\frac{-Rddy+Qddz}{Rdy-Qdz}+\frac{dyddy+dzddz}{dx^2+dy^2+dz^2}.$$

Est vero $\sqrt{dx^2+dy^2+dz^2}$ elementum curvae a mobili in superficie descriptum, ponatur id $=ds$. Erit

$$\frac{dv}{2v}+\frac{ds}{2c}=\frac{-Rddy+Qddz}{Rdy-Qdz}+\frac{dds}{ds}.$$

Aequationis vero alterius $dv = gdx - \frac{vds}{c}$ integralis erit

$$e^{\frac{s}{c}}v = g\int e^{\frac{s}{c}}dx$$

ex eaque

$$v = \frac{g\int e^{\frac{s}{c}}dx}{e^{\frac{s}{c}}} = ge^{\frac{-s}{c}}\int e^{\frac{s}{c}}dx.$$

Illa vero integrata dat

$$\frac{1}{2}\lg v + \frac{s}{2c} = \int\frac{-Rddy + Qddz}{Rdy - Qdz} + \lg ds + \text{const} = \frac{1}{2}\lg g + \frac{1}{2}\lg\int e^{\frac{s}{c}}dx.$$

§ 586. Sit superficies cylindrica iacens horizontaliter, ut in § 566 posuimus. Erit $Q=0$ et $Pdx = Rdz$. Hoc posito in inventa aequatione erit

$$\frac{1}{2}\lg g\int e^{\frac{s}{c}}dx = -\lg dy + \lg ds + \frac{1}{2}\lg f$$

seu

$$g\int e^{\frac{s}{c}}dx = \frac{fds^2}{dy^2} \quad \text{vel} \quad \int e^{\frac{s}{c}}dx = \frac{hds^2}{dy^2},$$

quae cum hac $Pdx = Rdz$ coniuncta dabit curvam quaesitam in superficie. Eius vero aequationis differentialem assumere convenit

$$e^{\frac{s}{c}}dx = \frac{2hdydsdds - 2hds^2ddy}{dy^3}$$

vel eliminata s differentiatione post sumtos logarithmos hanc

$$\frac{\sqrt{dx^2+dy^2+dz^2}}{c} = \frac{-3ddy}{dy} + \frac{dyddz^2 + dydzd^3z - dzddyddz - dx^2d^3y - dz^2d^3y}{dydzddz - dx^2ddy - dz^2ddy}.$$

§ 587. Ponatur arcus $BN = t$ sumto $NM = y$ et quaeramus aequationem inter BN et NM,* quae erit aequatio ordinaria pro curva descripta BM superficie cylindrica in plana evoluta. Erit igitur $dx^2 + dz^2 = dt^2$. Propterea obtinebitur ista aequatio

$$\frac{\sqrt{dy^2+dt^2}}{c} = \frac{-3ddy}{dy} + \frac{dyddt^2 + dydtd^3t - dtddyddt - dt^2d^3y}{dydtddt - dt^2ddy},$$

in qua quidem dx est constans. Sed ope aequationum $dx^2 + dz^2 = dt^2$ et $Pdx = Rdz$ differentiale constans aliud introduci potest.

* Vide fig. 88, p. 200. — *G. M.*

§ 588. Aliter totum negotium potest absolvi, ita ut nequidem ad differentialia secundi gradus perveniatur. Dicatur curva $BM = s$. Invenietur statim aequatio inter t, y et s, quae ad curvam cognoscendam sufficet. Hoc modo ex aequatione $Pdx = Rdz$ determinabitur z in x. Deinde ex aequatione $dx^2 + dz^2 = dt^2$ invenietur x in t atque dx poterit exprimi per Mdt existente M functione ipsius t. Habebitur igitur

$$\int e^{\frac{s}{c}}Mdt = \frac{hds^2}{dy^2}.$$

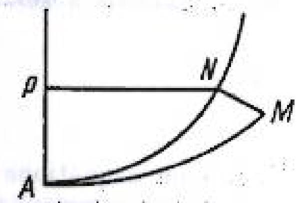


Fig. 95.

Est vero in hac aequatione $dt^2 + dy^2 = ds^2$. Commode ergo y eliminatur et remanet aequatio inter s et t

$$\int e^{\frac{s}{c}}Mdt = \frac{hds^2}{ds^2 - dt^2}.$$

§ 589. Sit basis cylindricae superficiei cyclois APN (fig. 95), cuius vertex A in infimo loco est sumtus, et propterea g oportet accipere negativum. Erit ergo $AN = t = \sqrt{ax}$ seu $x = \frac{tt}{a}$ atque $dx = \frac{2tdt}{a}$. Hinc $M = \frac{2t}{a}$. Aequatio autem ipsa pro curva AM abit in hanc

$$\int e^{\frac{s}{c}}tdt = \frac{bhds^2}{ds^2 - dt^2}.$$

Quae differentiata posito dt constante fit

$$e^{\frac{s}{c}}tdt = \frac{-2bhdt^2dsdds}{(ds^2 - dt^2)^2}$$

atque sumendis logarithmis

$$\frac{s}{c} + \lg t = \lg(-2bhdtdsdds) - 2\lg(ds^2 - dt^2).$$

Quae differentiata posito $\sqrt{dt^2+dy^2}$ loco ds abit in

$$\frac{\sqrt{dt^2+dy^2}}{c} + \frac{dt}{t} = \frac{dyd^3y + ddy^2}{dyddy} - \frac{4ddy}{dy} = \frac{dyd^3y - 3ddy^2}{dyddy}.$$

§ 590. Pro corporibus rotundis perpendiculariter horizonti insistentibus est $Q = y$ et $R = z$. Abit igitur

$$\int\frac{-Rddy + Qddz}{Rdy - Qdz}$$

in $-\lg(ydz-zdy)$. Habemus ergo pro curva quaesita ea, quam corpus super proposita superficie describit, ista aequatio

$$\lg ds-\lg(ydz-zdy)=\lg\mathrm{const}+\frac{1}{2}\lg\int e^{\frac{s}{c}}dx$$

seu in numeris absolutis haec

$$\frac{aabds^2}{(ydz-zdy)^2}=\int e^{\frac{s}{c}}dx.$$

Haec cum aequatione $Pdx=ydy+zdz$ coniuncta determinabit proiectionem curvae quamcunque.

§ 591. Ponatur, ut in § 577, $yy+zz=tt$, $dy^2+dz^2=du^2$. Erit $ds^2=$ $=du^2+dx^2$ et $zdy-ydz=t\sqrt{du^2-dt^2}$. Quia autem est $2\int Pdx=$ $=y^2+z^2=t^2$, erit x functio quaedam ipsius t. Ponatur $x=\int Tdt$. Erit $ds=\sqrt{du^2+T^2dt^2}$ et $s=\int\sqrt{du^2+T^2dt^2}$. His substitutis abibit superior aequatio in hanc

$$\frac{aabdu^2+aabT^2dt^2}{ttdu^2-ttdt^2}=\int e^{\frac{\int\sqrt{du^2+T^2dt^2}}{c}}Tdt.$$

Aequatio haec nonnisi duas involvit indeterminatas. Curva ergo ex hac determinatur atque proiectio in plano horizontali inter z et y invenitur.

§ 592. Si superficies proposita fuerit sphaerica radii $=a$, erit $tt=$ $=2ax-xx$ seu $x=a-\sqrt{aa-tt}$. Hinc erit $dx=\frac{tdt}{\sqrt{a^2-tt}}$. Habetur ergo

$$T=\frac{t}{\sqrt{a^2-t^2}}.$$

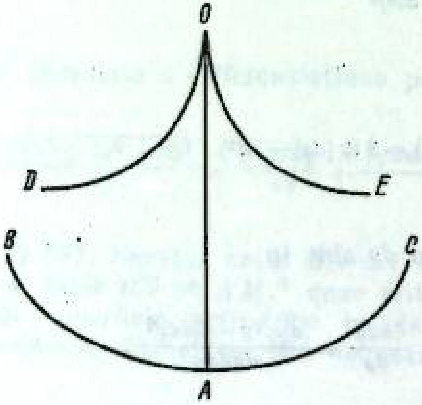


Fig. 96.

Ponamus oscillationes esse infinite parvas. Evanescet t prae a eritque $T=\frac{t}{a}$. Hinc tamen aequatio non multum redditur tractabilior. Ceterum, quia haec curva in eodem plano est posita, facilius hoc modo invenitur, si quaeratur curva, quam corpus circa centrum virium in ratione directa distantiarum attrahens describit accedente vi relativa in ratione duplicata celeritatum retardante.

§ 593. Tandem hic notare convenit, quomodo huiusmodi motus in superficiebus datis possint machina effici. Notum est omnes motus super

data curva posse exhiberi ope pendulorum, si ea suspendantur inter laminas incurvatas OD, OE (fig. 96) evolutam curvae percurrendae BAC repraesentantes. Simili modo, si non tantum laminae lineas denotent, sed si forment superficiem conicam, quae prodit conversione curvae DO circa axem AO,* pendulum OA tum utcunque proiectum describet curvam in superficie conversione curvae BA circa axem OA orta positam. Atque hac ratione quaelibet superficies habet respondentem evolutam superficiem, cuius ope pendulum in illa moveri cogitur.

* In manuscripto: AD. Correxit G. M.

SECTIO III. *DE MOTU CORPORUM RIGIDORUM A POTENTIIS UTCUNQUE SOLLICITATORUM* *

§ 594. *Corpora rigida* hic nobis denotant determinatae magnitudinis corpora, quae figuram suam, quomodocunque a potentiis sollicitentur, non immutant. Ad motum horum corporum definiendum oportet, ut cuiuspiam in iis sumti puncti motus determinetur atque simul situs ipsius corporis in quovis istius puncti loco. De eius puncti motu eadem omnia sunt observanda, quae in praecedentibus sunt praecepta. Circa situm ipsius corporis considerandus est motus rotatorius eius circa punctum atque etiam vis, quae corporis partes dissolvere conatur.

§ 595. Quod attinet ad puncti illius motum, demonstrabimus corpus liberum a potentiis sollicitatum semper ita moveri, ut centrum eius gravitatis eundem habeat motum, quem habiturum esset, si tota corporis massa in eo foret concentrata et omnes potentiae ibidem applicatae. Hanc ob rem motum centri gravitatis considerabimus ad motum ipsius corporis inveniendum. Tum contemplabimur idem gravitatis centrum tanquam fixum et motum corporis circa illud rotatorium indagabimus. His ergo duobus motibus coniungendis obtinebitur verus ipsius corporis motus.

§ 596. Nisi singulae corporis partes essent coniunctae, unaquaeque eo ferretur motu, quem vel iam accepit vel qui ipsi a potentiis imprimitur. Si iam omnium particularum motus forent aequales et directiones parallelas habentes, perspicuum est integrum corpus eundem habiturum esse motum, quem habet unaquaeque eius particula, neque partium nexum ullam sustenturum vim eas divellere conantem. At si singularum particularum motus non conspirent, eae a se invicem dissolverentur, nisi, ut ponimus, firmo vinculo essent coniunctae. In hoc ergo casu, quem totum corpus habiturum sit motum, investigari oportet.

§ 597. Ad hoc efficiendum pono singulas particulas revera esse a se invicem dissolutas, saltem ad minimum temporis intervallum, et perspicio, quo interea quaelibet particula feratur. Tum concipio adesse vim, quae omnes particulas rursus colligat et in pristinam formam restituat. Ex quo statu cum priore collato apparebit, quantum motum quaelibet particula habeat eoque ulterius progredi conabitur. Deinde iterum eas dissolutas facio et, quo singulae tum motu insito tum actione potentiarum moveantur, considero atque ut ante vim eas restituentem accedere pono. Hacque contemplatione per totum motum repetita prodibit integri corporis totus motus.

* Primo Eulerus Sectioni huic inscriptionem dedit *De motu virgae rigidae a potentiis utcunque sollicitatae*, quam postea immutabit. — *G. M.*

§ 598. *Vim* hanc *restituentem* eiusque actionem accuratius perpendere oportet. Sint duo corpora aequalia A et B (fig. 97) virga rigida vi inertiae destituta coniuncta, quam virgam, quamvis non sit extensilis, concipiamus liberrime per tempusculum quam minimum extendi posse vel contrahi. Sit corpori A motus impressus, quo tempusculo isto moveri potest per spatium Aa. Alterum vero corpus B habeat motum, quo spatium Bb interea absolvit. Integrum ergo corpus AB pervenit interim in situm ab, qui etiam ipsi foret naturalis, si virgae ab longitudo aequalis esset longitudini AB.

§ 599. At si fuerit $ab > AB$, concipere licet virgam subito acquirere vim sese contrahendi in naturalem longitudinem. Quanta ea sit, hic non est opus considerare. Id tamen perspicuum est, quia corpora sunt aequalia et virga se in utraque parte aequaliter contrahere ponenda est, corpora quoque per aequalia spatia transferri, nempe corpus A per $a\alpha$ et B per $b\beta$, ita ut sit $a\alpha = b\beta$ et $\alpha\beta = AB$. Quamobrem corpus A non in a sed α et B in β interea processerunt atque tota moles AB in situm $\alpha\beta$ pervenit.

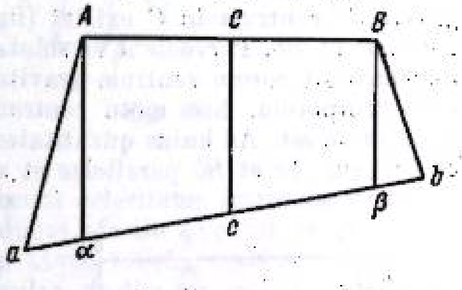


Fig. 97.

Vis, quam virga AB hoc motu per $A\alpha$ et $B\beta$ sustinet, ne disrumpatur, invenitur hoc modo. Quaeratur potentia, quae corpora ex a et b eodem tempore in α et β traducere potest, quo per Aa et Bb moventur. Haec aequipollebit contractioni virgae atque est ipsa vis, quam virga sustinet.

§ 600. Si corpora A et B fuerint inaequalia, omnia manent ut ante, nisi quod ea corpora a vi virgae contractiva non per aequalia spatiola $a\alpha$ et $b\beta$ transferantur. Vis tamen contractiva virgae in utraque parte aequalis consideranda est. Quare, cum maius corpus ab eadem vi per minus spatium transferatur quam minus idque in ratione inversa corporum, erit $a\alpha : b\beta = B : A$. Consequenter, si fuerit $\alpha\beta = AB$, erit $\alpha\beta$ situs, in quem AB post datum tempusculum pervenit. Quare data corporum ratione et excessu lineae ab supra AB reperietur situs quaesitus $\alpha\beta$.

§ 601. Quia est $a\alpha : b\beta = B : A$, erit centrum gravitatis corporum in a et b positorum idem, quod eorundem in α et β. Nam sumto c pro centro gravitatis erit $ac : bc = B : A$. Erit ergo etiam $\alpha c : \beta c = B : A$. Quamobrem a vi restituente centrum gravitatis corporum non mutatur. Centrum igitur corporum A et B gravitatis C interea per lineam Cc processit eiusque motus idem est, sive corpora A et B sint a se invicem dissoluta sive, ut ponimus, virga rigida coniuncta.

. . . . *

§ 606. Expositis principiis, quibus ad examinandos motus corporum rigidorum utemur, exponere convenit, quemadmodum hanc sectionem sumus distributuri.

Primum in hoc differt motus corporum compositorum a motu puncti, quod in illis diversae partes diversimode possint moveri, etiamsi a nullis potentiis sollicitentur, cum tamen punctum hoc in casu non possit, nisi vel quiescere vel uniformiter in directum moveri. Hanc ob rem dupliciter istud argumentum debet tractari, primo de motu corporum a nullis potentiis agitatorum et deinde, si sollicitentur a potentiis.

* In manuscripto hic plagulae octava deest. — *G. M.*

§ 607. Alia considerationis varietas ex eo oritur, quo corpora rigida vel libere moveri possunt vel secus, qui casus posterior etiam pluribus modis esse potest diversus, prout libertas corporum restricta ponitur. Quae vero quot modis variari possit, tum, quando de ea sumus acturi, investigabimus.

Apparet ergo, quibus de rebus in hac sectione sit exponendum. Id adhuc animadvertendum est hic nullas potentias alias praeter puras seu absolutas nos esse consideraturos, cum quae potentiae relativae in rerum natura reperiantur, pro figura corporum mutari soleant, ita ut de iis nil tradi possit, nisi prius modus agendi sit cognitus.

Caput I. DE MOTU CORPORUM RIGIDORUM LIBERORUM A NULLIS POTENTIIS SOLLICITATORUM

§ 608. Sint duo corpora A et B virga AB iuncta, quorum commune gravitatis centrum in C existat (fig. 98). Habeat horum A celeritatem ut Aa et B ut Bb. Pervenient ea soluta iunctura eodem tempore in a et b hocque loco sit eorum centrum gravitatis c. Quod, cum non mutetur restitutione corporum, hoc motu centrum gravitatis C rectam Cc descripsisse censendum est. Ad huius quantitatem indagandam ducantur ex C rectae Cd et Ce ipsis Aa et Bb parallelae et aequales iungaturque de, quae transibit per c. Similia enim erunt triangula adc, bec ob ad et be aequales et parallelas ipsis AC et BC. Unde $ac : bc = ad : be = AC : BC$.*

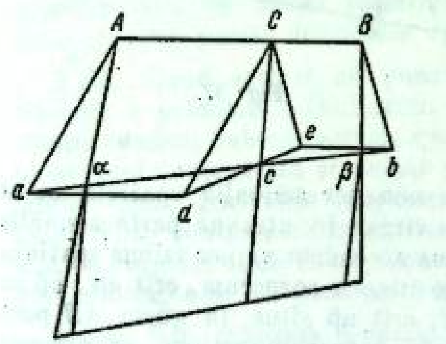


Fig. 98.

§ 609. Quamobrem ad centri gravitatis C celeritatem Cc inveniendam puncto C applicatae concipi debent rectae Cd et Ce celeritatibus Aa et Bb respective aequales et parallelae. Atque in d et e ponantur esse collocata corpora A et B horumque quaeratur centrum gravitatis, quod erit c, et ducatur recta Cc. Haec exponet celeritatem centri gravitatis et simul directionem. Nam propter superiora triangula similia erit $dc : ce = ad : be = AC : BC$. Adeoque c erit centrum gravitatis corporum A et B in d et e constitutorum.

§ 610. Restituentibus se corporibus pervenient in α et β manente eorum centro gravitatis communi c. Apparet hinc, si statim ab initio corpora A et B celeritates habuerint ut $A\alpha$ et $B\beta$, motum centri gravitatis exinde eundem natum fuisse atque etiam Cc provenire applicandis $A\alpha$ et $B\beta$ in C et similiter centro gravitatis designando. Habebunt autem post restitutionem in α et β corpora A et B motus secundum $A\alpha$ et $B\beta$ progredientes. Quare et postea centrum gravitatis motum suum retinebit. Celeritate igitur centri gravitatis c inventa id aequaliter et in directum perpetuo progredietur.

§ 611. Simili modo ostendi potest, si plura fuerint corpora motus quoscunque habentes, centrum eorum gravitatis moveri uniformiter in directum eiusque motum et directionem inveniri, si in eo applicatae concipiantur rectae parallelae et aequales iis, quibus singulorum corporum motus repraesentantur atque in finibus harum rectarum ipsa corpora respectiva posita,

* In manuscripto: $Ac : bc = \ldots$ Correxit G. M.

quorum deinde centrum gravitatis determinari oportet. Hoc facto recta iungens haec duo gravitatis centra repraesentabit motum centri gravitatis, nempe directionem atque celeritatem.

§ 612. Resolutio singulorum motuum in binos iuxta datas directiones tendentes centri gravitatis motus inventionem faciliorem reddet. Sint tria corpora A, B et C (fig. 99) virga rigida connexa, quae habeant motus ut Aa, Bb et Cc. Resolvantur hi in verticales $A\alpha$, $B\beta$, $C\gamma$ et horizontales αa, βb et γc. Erit centri gravitatis G motus verticalis

$$GK = \frac{A \cdot A\alpha + B \cdot B\beta + C \cdot C\gamma}{A + B + C}$$

et horizontalis

$$Kg = \frac{A \cdot \alpha a + B \cdot \beta b - C \cdot \gamma c}{A + B + C},$$

ex quibus componitur motus Gg verus centri gravitatis. Sequitur haec regula ex centri gravitatis proprietate notissima.

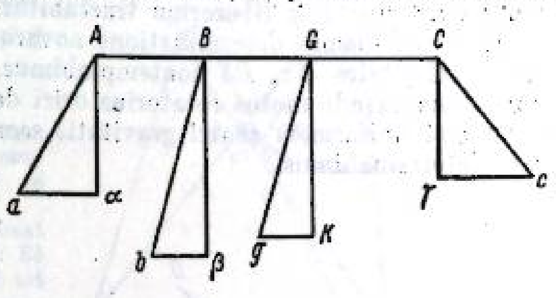


Fig. 99.

§ 613. Si omnes corporis partes habeant celeritates impressas aequales et secundum directiones inter se parallelas, facile apparet et gravitatis centrum eundem habiturum esse motum atque totius corporis motum fore eidem conformem. Nam etiam si singulae particulae essent dissolutae, tamen tota massa eundem habitura esset motum, ac si firmiter sint coniunctae. Quamobrem corpora, quae semel motum huiusmodi parallelum acceperunt, perpetuo eundem retinere debent et singulae particulae eodem uniformiter in directum progredientur.

. . . . *

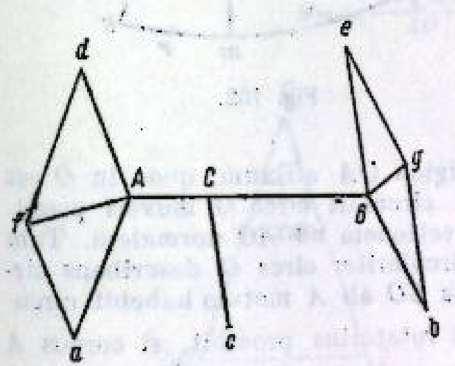


Fig. 100.

§ 618. Datis igitur corporibus quotcunque A, B cum suis celeritatibus per lineas Aa, Bb repraesentatis (fig. 100) inventa sit celeritas centri gravitatis eorum C linea Cc exposita. Iam, ut hoc centrum gravitatis C quiescat, impressae concipiantur singulis corporibus A, B celeritates novae Ad, Be aequales ipsi Cc eique parallelae et contrariae. Hoc facto aliae prodibunt corporum celeritates, nempe corporis A celeritas erit Af diagonalis parallelogrammi ex Ad et Aa confecti. Similiter Bg erit celeritas corporis B.

§ 619. Ad motum igitur rotatorium circa centrum gravitatis C sufficit celeritates Af et Bg considerasse. At ad motum rotatorium producendum, quia centrum C quiescit, ea tantum pars cuiusvis celeritatis Af et Bg facit, quae est ad rectam AC vel BC perpendicularis. Resolutis igitur celeritatibus Af et Bg in laterales, quarum alterae sint ad rectas AC et BC normales, alterae in ipsis earundem directionibus, sufficit tantum celeritates normales contemplari.

§ 620. Si ponamus centrum gravitatis C non esse liberum, sed fixum, ita ut corpus alium non habere possit motum nisi circa illud rotatorium,

* In manuscripto hic plagulae octava deest. — G. M.

perspicuum est corpus eundem esse habiturum motum rotatorium circa C ac in casu, quo C est liberum. Adeoque corpora A et B cum celeritatibus Aa et Bb eundem producent motum rotatorium centro gravitatis C fixo, quem producerent celeritatibus Af et Bg gravitatis centro libero posito.

§ 621. Quamobrem, ut ea, quae sumus tradituri, latius pateant, investigabimus motus corporum rotatorios circa puncta quaecunque fixa, quanquam haec tractatio locum suum habere debeat demum in sequentibus, ubi de motu corporum non liberorum tractabitur. Hoc igitur praemisso non amplius opus habemus determinatione novarum celeritatum, [ut in] § 618, sed ipsas celeritates Aa, Bb contemplabimur, centro gravitatis fixo posito, quia idem exinde motus rotatorius oriri debet. Hocque modo motum rotatorium et uniformem centri gravitatis seorsim et independenter a se invicem determinabimus.

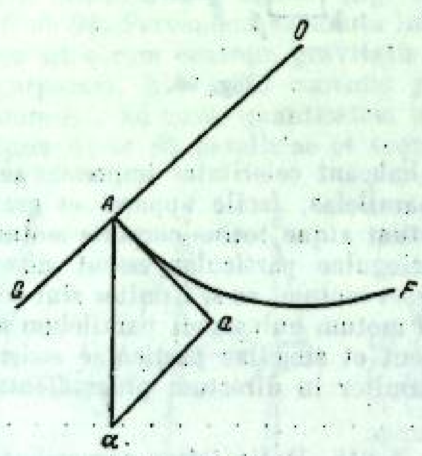


Fig. 101.

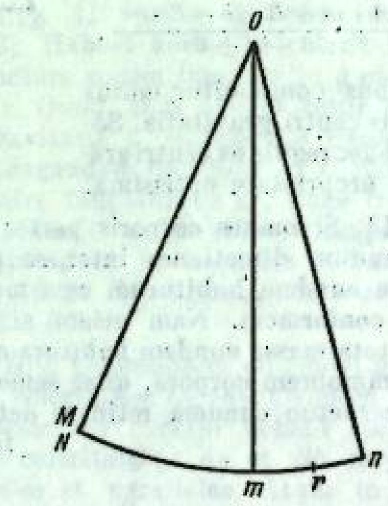


Fig. 102.

§ 622. Sit unicum corpus A virga rigida OA affixum, quae in O est fixa (fig. 101), ut non aliter nisi motu circulari circa O moveri possit. Habeat A celeritatem Aa secundum directionem ad AO normalem. Tum corpus A eadem celeritate revolvetur circulariter circa O describens circulum AF. Punctum vero G in distantia GO ab A motum habebit circularem celeritatis $\frac{OG \cdot Aa}{AO}$. Idem motus rotatorius prodibit, si corpus A habeat celeritatem aliam $A\alpha$, tantam tamen, ut, si resolvatur in normalem ad AO et cum ea coincidentem, celeritas normalis aequalis sit Aa.

[Nota marginalis. Sit (fig. 102)]

$$Mr = \frac{M \cdot Mm + N \cdot Nn}{M + N}.$$

Ergo corpus $(M+N)$ celeritate Mr ad radium MO motum eundem praestat effectum ac M celeritate Mm et N celeritate Nn utrumque in eadem distantia OM simul moti.

§ 623. Sint duo corpora A et B virga rigida AB iuncta atque insuper cum puncto fixo O virgis etiam rigidis OA, OB connexa (fig. 103); ita ut utrumque corpus aliter moveri nequeat, nisi circulariter circa O.

Habeat A celeritatem impressam ut Aa et B ut Bb. Pervenient ambo, si virga AB esset soluta, eodem tempore in a et b. Tum vero virga iterum accedat et se in statum naturalem restituat, qua actione corpora in (A) et (B) reducantur. Erit ob $(A)O = AO$, $(B)O = BO$ et $(A)(B) = AB$ ang $AO(A) =$ ang $BO(B)$. Et propterea motus rotatorius puncti cuiusdam G pro arbitrio assumti fiet celeritate $\frac{A(A) \cdot OG}{AO}$ vel $\frac{B(B) \cdot OG}{BO}$.

[Nota marginalis.] Postquam corpora A et B libere se circa O converterunt, tum angulus $(A)O(B)$ se restitui ponendus est (fig. 104).

[Nota marginalis.] Habeat corpus A motum Aa et B motum Bb (fig. 105). Ut sint in quiete, oportet sit $A \cdot AO \cdot Aa = B \cdot Bb \cdot BO$. Nam contrahente se virga ab vi p erit vis a ad A trahens ut $p \cos \text{ang}\, oaA$, id est ut $p \sin Oab$, ut $p \cdot OB$, et vis b ad B trahens est $p \cdot OA$. Quo ergo a et b in A et B reducantur, oportet sit

$$\frac{OB}{A} : \frac{AO}{B} = Aa : Bb,$$

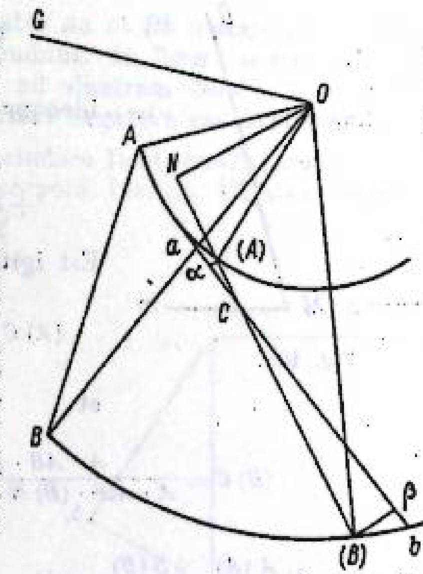


Fig. 103.

i. e. $A \cdot Aa \cdot AO = B \cdot Bb \cdot BO$.

[Nota marginalis.] Loco A celeritate Aa moti poni potest M (fig. 106), si est

$$Mm = \frac{Aa \cdot MO}{AO} \quad \text{et} \quad M = \frac{A \cdot AO^2}{OM^2}.$$

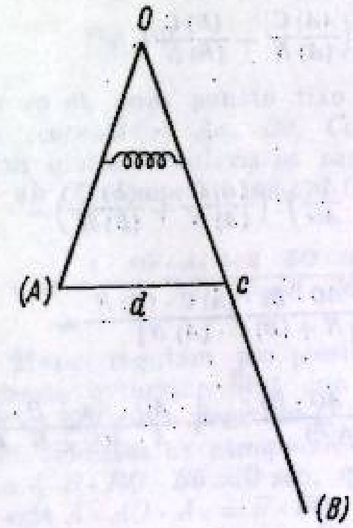


Fig. 104.

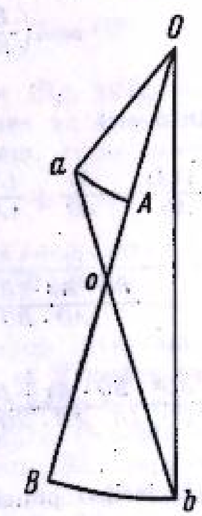


Fig. 105.

§ 628.* Est autem $A(A) = Aa + (A)a$ et $B(B) = Bb - (B)b$. Atque ex paragrapho 605, qui ad eandem fere figuram refertur, est

* In manuscripto paragraphus hic, qui § 623 continuo sequitur, numero 628 falso signatus est. — *G. M.*

$(A)a = \frac{AO\cdot(A)\alpha}{(A)N}$ et $(B)b = \frac{BO\cdot(B)\beta}{(B)N}$.* At est $(A)\alpha : (B)\beta = (A)C : (B)C$. Ponatur $(A)\alpha = m\cdot(A)C$. Erit et $(B)\beta = m\cdot(B)C$. Est autem

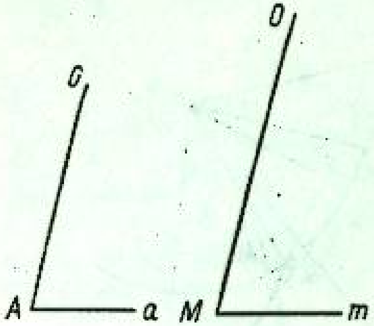


Fig. 106.

$$(A)C:(B)C = \frac{(A)N}{A\cdot AO^2} : \frac{(B)N}{B\cdot BO^2}$$

ideoque componendo

$$AB:(A)C = [A\cdot AO^2\cdot(B)N + B\cdot BO^2\cdot(A)N] : [B\cdot BO^2\cdot(A)N].$$

Est igitur

$$(A)C = \frac{B\cdot AB\cdot BO^2\cdot(A)N}{A\cdot AO^2\cdot(B)N + B\cdot BO^2\cdot(A)N}$$

et

$$(B)C = \frac{A\cdot AB\cdot AO^2\cdot(B)N}{A\cdot AO^2\cdot(B)N+B\cdot BO^2\cdot(A)N}.$$

Quare, cum sit $\frac{A(A)}{AO} = \frac{B(B)}{BO}$, erit

$$\frac{Aa}{AO} + \frac{m\cdot(A)C}{(A)N} = \frac{Bb}{BO} - \frac{m\cdot(B)C}{(B)N}.$$

§ 629. Hinc invenitur

$$m = \left(\frac{Bb}{BO} - \frac{Aa}{AO}\right) : \left(\frac{(A)C}{(A)N} + \frac{(B)C}{(B)N}\right).$$

Hoc substituto erit

$$\frac{A(A)}{AO} = \frac{Aa}{AO} + \frac{(A)C}{(A)N}\left(\frac{Bb}{BO}-\frac{Aa}{AO}\right):\left(\frac{(A)C}{(A)N}+\frac{(B)C}{(B)N}\right) =$$

$$= \frac{BO\cdot Aa\cdot(B)C\cdot(A)N + AO\cdot Bb\cdot(A)C\cdot(B)N}{AO\cdot BO\cdot[(A)C\cdot(B)N+(B)C\cdot(A)N]} =$$

$$= \frac{A\cdot AB\cdot AO^2\cdot BO\cdot Aa + B\cdot AB\cdot BO^2\cdot AO\cdot Bb}{AO\cdot BO\cdot(B\cdot AB\cdot BO^2 + A\cdot AB\cdot AO^2)} = \frac{A\cdot AO\cdot Aa + B\cdot BO\cdot Bb}{A\cdot AO^2+B\cdot BO^2}.$$

Hincque celeritas puncti G

$$= OG\,\frac{A\cdot AO\cdot Aa + B\cdot BO\cdot Bb}{A\cdot AO^2+B\cdot BO^2}.$$

* Perpendiculum ON ex O in lineam rectam $(A)(B)$ productam demissum est. — G. M.

§ 630. Celeritas igitur, qua fit motus rotatorius, tantum ab corporum massis eorumque distantiis a puncto fixo O et celeritatibus impressis pendet. Non hic in computum venit ipsa corporum distantia neque inclinatio radiorum mutua.

Praeterea notandum est celeritates Aa et Bb mutare posse signa, prout in eundem vel contrarios sensus tendunt. In figura nostra ambo habent signum $+$, quia ambo a sinistra ad dextram tendunt. Si alterum ad sinistram conaretur, tum eius celeritas negative est exprimenda.

§ 631. Ex hac forma facile concludere licet, qualis proditura sit celeritas circularis, si plura duobus corpora fuerint. Ut sint corpora A, B,

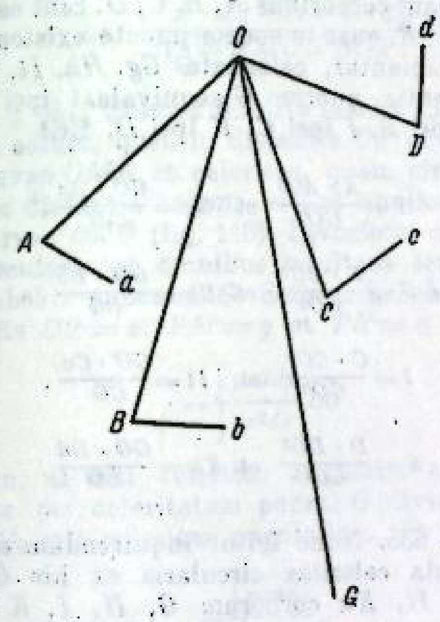


Fig. 107.

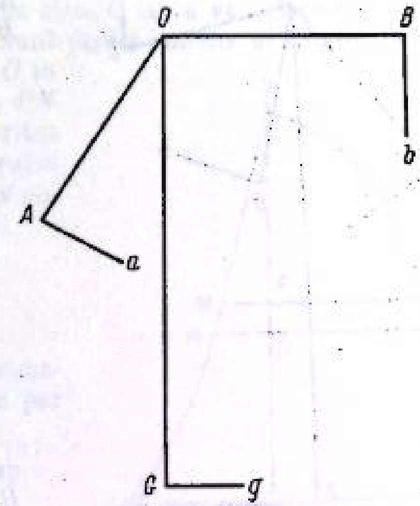


Fig. 108.

C, D inter se et cum puncto fixo O connexa (fig. 107), quae habeant celeritates respectivas Aa, Bb, Cc, Dd omnes ad dextram tendentes. Hinc orietur motus circularis in eandem plagam, cuius celeritas in distantia OG ab O, nempe in puncto G, erit

$$= OG\,\frac{A\cdot AO\cdot Aa + B\cdot BO\cdot Bb + C\cdot CO\cdot Cc + D\cdot DO\cdot Dd}{A\cdot AO^2+B\cdot BO^2+C\cdot CO^2+D\cdot DO^2}.$$

§ 632. Hanc regulam pro pluribus corporibus inventam veram esse sequenti modo evincitur. Sint duo corpora A et B motus habentes circulares Aa et Bb circa punctum O (fig. 108), quorum alter alterum destruat, ita ut celeritas ex utroque resultans sit nulla. Debebit esse ex § 629 $A\cdot AO\cdot Aa + B\cdot BO\cdot Bb = 0$ seu, quia in figura Bb negative iam est expressa, erit $A\cdot AO\cdot Aa = B\cdot BO\cdot Bb$. Si igitur aliud quodcunque corpus C habeat celeritatem Cc circa O tantam, ut sit $C\cdot CO\cdot Cc = A\cdot AO\cdot Aa$, etiam hic motus destruetur a motu B, ex quo concluditur corpora A et C celeritatem Aa et Cc habentia aequalibus viribus circa O rotari.

§ 633. Si igitur fuerit $A\cdot AO\cdot Aa = G\cdot GO\cdot Gg$, corpora A et G pari efficacitate circa O circumvolventur, quamvis non eadem celeritate circulari moveantur. Si autem efficiatur, ut aequalibus celeritatibus circularibus ferrentur, id quod evenit, si est $AO : Aa = GO : Gg$, tum prorsus pro aequivalentibus haberi poterunt, quia non solum circulari motu, sed etiam efficacia congruunt. Poterit igitur quovis casu loco corporis A substitui G. At esse debet $Gg = \frac{GO \cdot Aa}{AO}$ et $G = \frac{A \cdot AO \cdot Aa}{GO \cdot Gg} = \frac{A \cdot AO^2}{GO^2}$.

§ 634. Sint corpora quotcunque A, B, C, D celeritates circa O habentes Aa, Bb, Cc, Dd (fig. 109) et quaeratur celeritas circularis ex omnibus coniunctis resultans seu celeritas, quam habiturum est punctum G in distantia OG. Quaerantur corpora in G applicanda cum celeritatibus, quae singula aequivaleant corporibus A, B, C, D. Sint ea G, H, I, K, quae in eodem puncto existentia concipiantur, celeritates Gg, Hh, Ii, Kk habentia, quorum G aequivaleat ipsi A, H ipsi B, I ipsi C, K ipsi D. Erit

$$G = \frac{A \cdot AO^2}{GO^2} \quad \text{et} \quad Gg = \frac{GO \cdot Aa}{AO},$$

$$H = \frac{B \cdot BO^2}{GO^2} \quad \text{et} \quad Hh = \frac{GO \cdot Bb}{BO},$$

$$I = \frac{C \cdot CO^2}{GO^2} \quad \text{et} \quad Ii = \frac{GO \cdot Cc}{CO},$$

$$K = \frac{D \cdot DO^2}{GO^2} \quad \text{et} \quad Kk = \frac{GO \cdot Dd}{DO}.$$

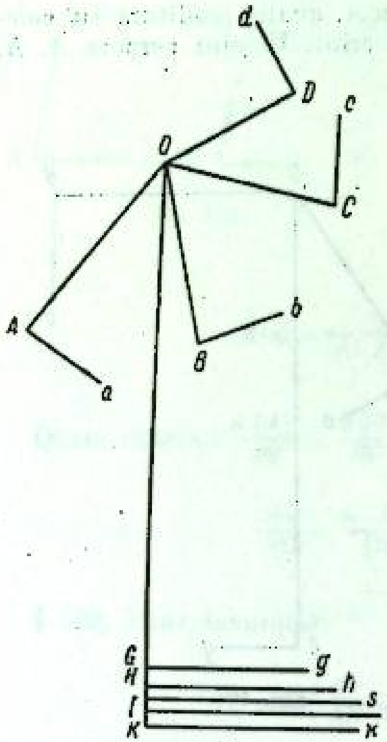


Fig. 109.

§ 635. Nunc igitur inquirendum est, quanta celeritas circularis ex his Gg, Hh, Ii, Kk corporum G, H, I, K in eodem puncto sitorum resultet. Concipiantur ea primo libera pervenientque eodem tempore in g, h, i, k, quo cum pervenerint, restituant se. Congregabuntur ergo in communi centro gravitatis s. Unde omnia corpora in g iuncta pervenire existimanda sunt in s. Est autem ex natura centri gravitatis

$$Gs = \frac{G \cdot Gg + H \cdot Hh + I \cdot Ii + K \cdot Kk}{G + H + I + K} = \text{celeritati puncti } G.$$

Substitutis autem loco G, H etc. et Gg, Hh etc. debitis valoribus proveniet celeritas puncti G

$$= GO \frac{A \cdot AO \cdot Aa + B \cdot BO \cdot Bb + C \cdot CO \cdot Cc + D \cdot DO \cdot Dd}{A \cdot AO^2 + B \cdot BO^2 + C \cdot CO^2 + D \cdot DO^2},$$

ut iam ante suspicati sumus.

§ 636. Hanc ob rem, si in G applicetur corpus $= G + H + I + K$, i. e.

$$= \frac{A \cdot AO^2 + B \cdot BO^2 + C \cdot CO^2 + D \cdot DO^2}{GO^2},$$

celeritate Gs inventa [in] paragrapho praecendente, id prorsus aequivalebit corporibus A, B, C, D cum suis celeritatibus Aa, Bb, Cc, Dd circa O rotantibus. Quia autem longitudo OG est arbitraria, poterit inveniri, quanta esse debeat, ut summa corporum $G + H + I + K$ aequalis sit summae $A + B + C + D$. Erit scilicet

$$GO = \sqrt{\frac{A \cdot AO^2 + B \cdot BO^2 + C \cdot CO^2 + D \cdot DO^2}{A + B + C + D}}$$

atque celeritas in puncto G, i. e.

$$Gs = \frac{A \cdot AO \cdot Aa + B \cdot BO \cdot Bb + C \cdot CO \cdot Cc + D \cdot DO \cdot Dd}{\sqrt{(A + B + C + D)(A \cdot AO^2 + B \cdot BO^2 + C \cdot CO^2 + D \cdot DO^2)}}.$$

§ 637. Si nunc infinita fuerint corpora circa O mota et invicem connexa, sit eorum, quae in distantia OP ab O sunt posita, massa ut applicata PM curvae OMB et celeritas, quam circa O in hac distantia habent, sit ut applicata PN curvae ONC (fig. 110). Invenietur celeritas circularis ex omnibus resultans seu quam habebit punctum G. Scilicet habebitur positis $OP = x$, $PM = y$ et $PN = u$ ea

$$= \frac{\int yxudx}{\int yx^2dx} GO$$

seu, si ipsa celeritas angularis exprimatur per celeritatem puncti G divisam per OG, erit celeritas angularis

$$= \frac{\int yxudx}{\int yx^2dx}.$$

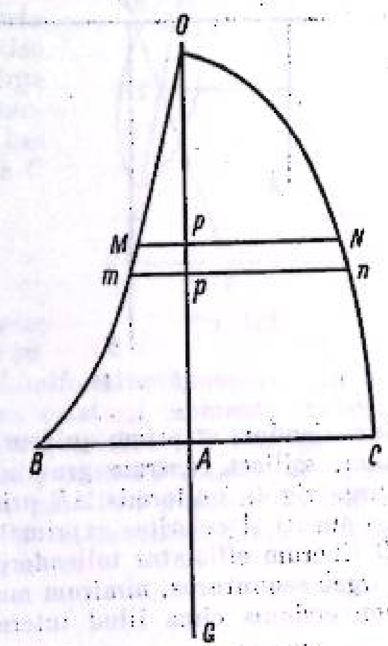


Fig. 110.

§ 638. Ex hoc Theoremate pro omnibus corporibus motus rotatorii circa punctum possunt determinari. Quanquam enim in figura lineam tantum rectam consideravimus, tamen facillime ad quasvis figuras accommodatur. Namque nihil interest, quem inter se situm partes teneant, quia sola a polo distantia in calculum ingreditur. Ideoque in puncto P congregata possunt considerari omnia corpuscula a puncto O intervallo OP distantia horumque aggregatum applicata PM exprimitur. Praeterea celeritas omnium particularum istarum linea PN exposita est, etsi enim omnes ab O aequidistantes particulae non aequales habeant celeritates, tamen communis celeritas rotatoria facile invenitur.

§ 639. Deinde etiam non solum motus gyratorius, qui fit in eodem plano circa punctum, in dicto Theoremate continetur, sed etiam motus omnes conversiones circa axem fixum.

Etenim, si sit axis OQ, circa quem volvuntur corpora OA, PB et QC (fig. 111), clarum est unius cuiusque horum corporum vim circa axem se circumagendi prorsus non a loco in axe pendere, sed a sola distantia. Hanc ob rem in nostro casu idem oritur motus circularis, ac si O, P et Q in uno coniungantur puncto.

§ 640. Regula autem supra data in symbolis verbis prolata haec est. Celeritas motus circa axem angularis habetur dividendo summam factorum ex corporibus in distantias ab axe insuperque celeritates respondentes per summam factorum ex corporibus singulis in quadrata distantiarum suarum ab axe. Pro celeritate vero assumi tantum debet ea, cuius directio est posita in plano ad axem normali et quae etiam perpendicularis est ad rectam corpus cum axe coniungentem. Si igitur corporum celeritates alias habuerint directiones, ex iis haec requisita resolutione derivetur atque sola consideretur.

§ 641. Exposita lege, secundum quam corpora tam circa punctum quam circa axem rotantur, revertamur ad motum liberum corporum rigidorum

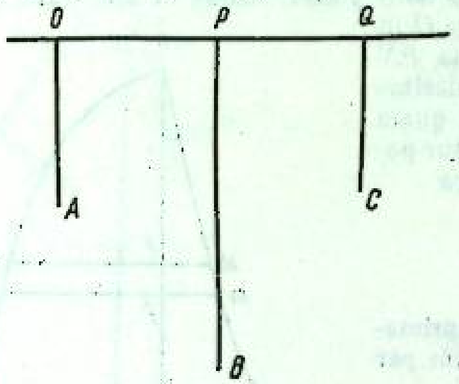


Fig. 111.

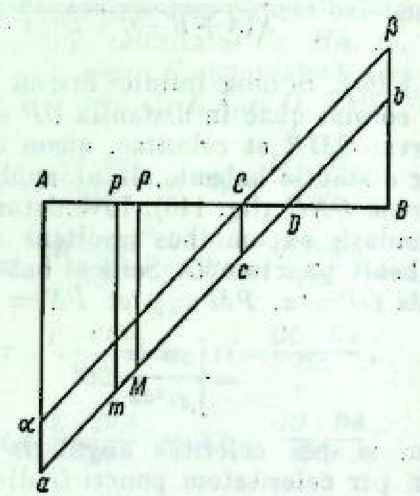


Fig. 112.

inveniendum et primo quidem eorum, quae inter progrediendum circa punctum, scilicet centrum gravitatis, convertuntur, non vero circa axem. Sit virga rigida uniformis AB primo circa punctum D motum habens tantum, ut puncti A celeritas exprimatur recta Aa (fig. 112). Tum subito punctum D liberum efficiatur tollendo clavum, quo id retinebatur. Quaeritur motus virgae sequuturus, nimirum motus progressivus centri gravitatis C et motus conversionis circa illud interea.

§ 642. Ducta recta aDb * distantia eius a recta AB in quovis puncto dabit celeritatem respondentis puncti in virga AB, scilicet recta PM exprimet celeritatem puncti P. Ad motum igitur centri gravitatis C inveniendum oportet omnes rectas PM in puncto C applicatas considerare in earumque altero termino ipsa corpuscula seu elementa virgae respondentia. Tum eorum his in locis positorum centrum gravitatis debet investigari, cuius a puncto C distantia dabit celeritatem ipsius centri gravitatis C. Sit $AB=a$, $AD=b$, $Aa=c$ et $AP=x$. Erit $DP=b-x$. Erit $PM=\frac{c(b-x)}{b}$. Igitur elementi transpositi $Pp=dx$ a C distantia erit $\frac{c(b-x)}{b}$ horumque omnium in AP contentorum centri gravitatis a C distantia erit

$$=\frac{c\int dx\,(b-x)}{bx}=c-\frac{cx}{2b}.$$

* In manuscripto: aDB. Correxit G. M.

§ 642a.* Ponatur, ut distantia centri gravitatis totius virgae AB modo dicto transpositae a C proveniat $x=a$. Habebitur $\frac{2bc-ac}{2b}$, cui aequalis est linea Cc, quae igitur exprimit motum centri gravitatis. Centrum gravitatis ergo uniformiter movebitur secundum Cc celeritate $c\left(\frac{2b-a}{2b}\right)$. Ex quo apparet, si punctum D fuerit in ipso centro gravitatis C, celeritatem eius evanescere adeoque virgam aeque rotari circa C liberum ac fixum, id quod ex principiis allatis accidere debet. Nam omne corpus circa centrum gravitatis rotans motum retinet eundem, etsi sit prorsus liberum.

§ 643. Motus vero gyratorius circa centrum gravitatis C, quem virga interim habebit, invenietur, si toti virgae motus ei, quem centrum gravitatis habet, aequalis et contrarius impressus concipiatur. A quavis ergo celeritate subtrahi debet celeritas Cc, id quo fiet ducenda per C recta $\alpha C\beta$ ipsi ab parallela, cuius distantiae ab AB dabunt celeritates respondentium in virga elementorum circa C. Hae igitur cum sint distantiis a C proportionales, virgae singula puncta has celeritates retinebunt eaque gyrabitur circa C ita, ut extremitas A habeat celeritatem

$$A\alpha=c-\frac{2bc-ac}{2b}=\frac{ac}{2b}.$$

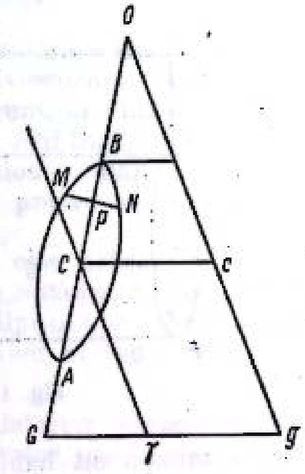


Fig. 113.

§ 644. Simili modo, si corpus cuiusvis figurae BMA gyretur circa polum O (fig. 113) atque subito filum BO resecetur, centrum gravitatis C uniformiter movebitur in directum celeritate Cc, quam in extremo motus rotatorii momento habuit.

Nam ducatur recta OC et ad eam applicata quaelibet MN orthogonalis. Dicatur $OP=x$, $MN=y$. Erit celeritas, qua punctum P rotatur, ut x, sit ea nx. Huicque aequalis erit celeritas, quam quodlibet punctum in applicata MN habebit, saltem cuius directio ad OC est normalis. Hanc ob rem celeritas centri gravitatis ex his omnibus orta est

$$=\frac{\int nxydx}{\int ydx}.$$

At est $OC=\frac{\int xydx}{\int ydx}$. Ergo celeritas puncti C est $n\cdot OC$, i. e. eadem, quam ex motu rotatorio retinuit.

§ 645. Concipiatur iam singulis punctis corporis $AMBN$ celeritas aequalis ei, quam habet centrum gravitatis C, et directe contraria imprimi. Quiescet punctum C atque circa id integrum corpus rotabitur. Habuerit ante punctum G celeritatem Gg, nunc subtracta celeritate Cc remanebit $G\gamma$ et recta γC celeritates repraesentabit, nempe puncti cuiusvis distantia a C erit celeritatem rotatoriam ut GC ad $G\gamma$. Hic igitur motus circa C perseverabit, scilicet motus hic angularis circa C celeritas erit ut $G\gamma : GC$. Est vero $G\gamma : GC = Gg : OG$. Aeque celeriter igitur corpus circa C gyrabitur, ac ante movebatur circa O.

* In manucripto pro numero 643 falso repetitur numerus 642. — G. M.

§ 646. Elegans igitur hoc habemus Theorema pro motu, quem corpus circa punctum fixum rotans, si subito liberum reddatur, tum habiturum sit, inveniendo, scilicet *centrum gravitatis corporis eam celeritatem, quam habuit, dum liberum fiebat, retinebit eaque uniformiter in directum moveri perget, interea vero corpus circa centrum gravitatis circumvertetur idque tanta celeritate, quanta ante circa punctum fixum movebatur.* Quamobrem tempora periodica circa punctum fixum et circa centrum gravitatis sunt aequalia.

§ 647. Atque etiam ex his colligitur, si corpus *CDEF* (fig. 114) revolvatur circa axem fixum *AB* idque subito liberum efficiatur, qualem tum

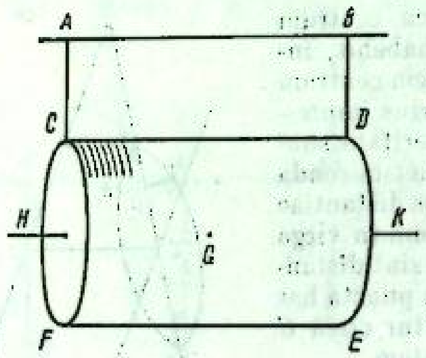


Fig. 114.

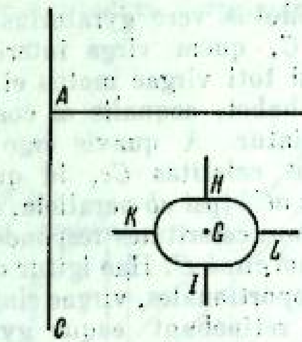


Fig. 115.

corpus motum sit habiturum. Etenim centrum gravitatis *G* uniformiter movebitur in directum celeritate, quam momento, quo ab axe *AB* rescindebatur, habuit. Ita autem movebitur, ut etiam recta *HK*, quae per *G* transit et parallela est axi *AB*, etiam motu sibi parallelo in directum progrediatur. Interea vero totum corpus circa *HK* revolvetur aequabiliter motu rotatorio aequali ei, quem antea circa *AB* habuerat. Scilicet tempus revolutionis circa *HK* aequale erit tempori revolutionis, quod ante circa *AB* habuit.

§ 648. Praeterea intelligitur, si corpus *HKLI* (fig. 115) circa duos axes *AB* et *AC* fixos revolvatur subitoque sibi ipsum relinquatur, centrum gravitatis *G* ea celeritate, quam eo ipso momento habuit, uniformiter in directum esse progressurum atque interea duplicem etiam motum rotatorium habiturum, alterum circa axem *HI* per *G* transeuntem semper axi *AC* parallelum, cuius tempus periodicum aequale erit tempori periodico circa *AC*, alterum circa axem *KL* etiam per *G* transeuntem semperque parallelum axi *AB*, circa quem revolutiones eodem quoque tempore absolvet, quo ante circa *AB*.

DE NATURA FLUIDORUM

§ 1. Quid sit fluidum et quomodo a corporibus solidis differat, quaestio est, ad quam diversi rerum naturalium scrutatores diversimode responderunt. Alii differentiam inter solida et fluida in hoc posuerunt, ut fluidorum particulas minimas in perpetua agitatione esse dicerent. Alii fluidum ita definiverunt, ut sit corpus, cuius partes cuicunque pressione cedunt et cedendo facillime inter se moventur. Congruit utique haec proprietas fluidis, sed tamen rem nondum perfecerunt.

Ostendi oportet, quomodo corpus constitutum esse debeat, ut partes eius pressioni cedant et ut cedendo facillime inter se moveantur. Hoc cognoscere convenit, ut distinctam fluidi notionem adipiscamur. Quas igitur fluidorum observamus proprietates, eas contemplabor et inde, qualis sit fluidorum structura, derivare conabor.

§ 2. Cum fluidorum naturam et structuram detegere propositum sit, optime, ut mihi videtur, id efficietur, si in id inquiratur, quo fluida a solidis differunt. Differentia autem corporum vel in diversa particularum componentium qualitate vel in diversa compositionis ratione ponenda esse videtur. Et hinc sequitur nos naturam corporis perfecte cognoscere, si et particularum componentium qualitatem et modum compositionis percipimus. Ut ergo naturam fluidorum cognoscamus, investigari oportet, quomodo ex partibus suis fluidum sit compositum et quales eius particulae sint.

Non autem hic ultimas particulas intelligi volo, quae ulterius dividi nequeant, sed eas solummodo, ad quas ipsa divisione pervenire possumus; harum enim proprietatem cognovisse ad institutum sufficit.

§ 3. Quod ad rationem compositionis attinet, duplici modo partes componentes ad integrum constituendum concurrere possunt. Nam vel hae partes sunt invicem connexae, ut altera alteri quasi infixa adhaereat, vel eae partes sunt omnes liberae neque invicem conglutinatae, ut facillime a se invicem separari queant. Primum locum habet in corporibus solidis, ut cuique perspicuum est. Alterum vero ad fluida pertinere omnes, quos de fluidis nobis formavimus conceptus, id asserunt. Hanc enim fluidorum praecipue habemus notionem, ut corpori transeunti facillime cedat, id quod, si particulae essent altera alteri annexae, neutiquam accidere posset. Haec contemplatio ideam suppeditat corporis perfecte fluidi; nam utut particulae non prorsus sint a se invicem seiunctae, dummodo corpori incurrenti transitum quamvis difficiliorem praebeant, tamen in fluidis habentur. Ex quo gradus fluiditatis oriuntur, ut, quo facilius fluidum transitum corpori permittit, eo dicatur esse fluidius. Quod autem hic de transitu difficiliori adiunxi, non eam resistentiam fluidi intelligi volo, quae oritur ab allisione corporis in fluidi partes, sed quae a tenacitate oritur seu partium mutua cohaesione.

§ 4. Hoc autem solum, quod particulae componentes sint dissolutae, naturam fluidi nondum constituit. Acervus enim arenae, farinae vel pulveris, etsi particulae inter se non cohaereant, corpus tamen fluidum non efficiunt. Aliud ergo insuper requiritur ad fluidum constituendum, quod in ipsarum particularum minimarum natura positum esse debet. Particulae hae sunt vel durae vel molles. Illae mihi sunt tales, quae figuram suam ne a vi infinita quidem sollicitatae immutant, molles autem, quae vi vel minima urgente figuram suam immutant vique urgenti penitus cedunt. Dantur vero etiam, si non omnes ad hanc classem pertinent, quae sunt mediae naturae et quae neque vi infinitae resistere neque minimae cedere valent, ut aliae magis ad durorum, aliae ad mollium naturam accedant. Et hinc fit, ut illae durae, hae molles appellentur. Quae autem duritiei et mollitiei naturam plene habent, ut perfecte durae et perfecte molles vocentur.

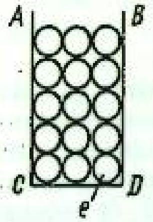


Fig. 1.

Ad quam igitur classem corporis perfecte fluidi, huius enim praecipue notitiam indagamus, particulae pertineant, investigandum est.

§ 5. Primo id recte concludi videtur esse perfecte fluidi particulas vel perfecte molles vel perfecte duras, corporis autem non perfecte fluidi particulas ad harum alterutram classem proxime saltem accedere. Sed particulae durae perfecte fluido nequaquam videntur tribui posse. Videmus enim fluida gravia vasi inclusa perinde latera vasis premere ac fundum, si sint ad eandem altitudinem, id quod, si particulae essent durae, nequaquam evenire posset. Sit enim fluidum grave vasi $ACDB$ inclusum (fig. 1), quod pono particulis duris constare. Sintque eae particulae verticaliter sibi invicem superimpositae, perspicuum est infimas particulas, ut e, fundum tantummodo premere propter pondus columnae incumbentis, latera vero, quia particulae e figuram suam mutare non conantur, nullam pressionem sustinere.

Sed dixerit quispiam particulas has verticaliter sibi invicem non incumbere et tum latera vasis etiam premi. Hoc utique verum est, hoc modo effici, ut latera quoque premantur. Sed videamus, quanta sit ea pressio, an pressioni in fundum sit aequalis. Prematur particula D ad latus BD a columna KE, cuius pondus exprimatur linea EF (fig. 2). Ducatur per punctum contactus particularum D et E recta in superficies normalis EG in eamque ex F demittatur perpendicularis FI. Exprimet recta EI vim, quam particula D a columna EK sustinet. Hac vero non tota latus premit. Sed ducatur horizontalis DH et ex G in eam perpendicularis GH, exprimit ratio $DG : DH$ * rationem vis particulae D integrae ad partem, qua in latus agit. Sit igitur pondus columnae EK P, erit vis particulae $D = EI \cdot P : EF$. Porro ut $DG : DH = EF : FI = EI \cdot P : EF$ ad vim in latus, quae ergo erit $= EI \cdot FI \cdot P : EF^2$, quae vi, qua basis premitur, nunquam potest esse aequalis eo, quod $EI \cdot FI$ non solum non aequalis ipsi EF^2 esse, sed nequidem dimidium eius excedere potest.

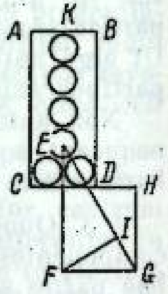


Fig. 2.

§ 6. Ex hisce sequitur particulas fluidum componentes non posse esse duras. Relinquitur ergo id, ut sint molles. Quomodo ex hac theoria omnes, quas fluidorum cognoscimus, proprietates deduci possint, in sequentibus monstrabo. Nunc vero, quam fluidorum erui, notitiam distinctius quodammodo persequar et qualem corporum non perfecte fluidorum notitiam haberi conveniat ex iis, quae de perfecte fluido tradidi, eliciam.

* In manuscripto: $DH : DG$. Correxit $G. M.$

§ 7. Perfecti itaque fluidi hanc adepti sumus notitiam, primo, ut sit ex particulis perfecte mollibus compositum et ut hae particulae sint dissolutae neque altera alteri ullo modo adhaereat. Hinc quoque frictio, quam particulae inter se motae altera ab altera sustinere possunt, prorsus est excludenda. Si harum conditionum contrariae locum habeant, manifestum est corpus tum fore tale, ut perfecte fluido directe sit oppositum, erit igitur perfecte durum. Ad corpus ergo perfecte durum requiritur, ut particulae, ex quibus constat, sint perfecte durae seu tales, quae figuram suam quacunque vi ursae prorsus non immutant, deinde, ut hae particulae vehementissime sint inter se connexae neque ab ulla vi a se invicem seiungi queant.

§ 8. Cum autem corpori perfecte fluido tribuamus particulas perfecte molles, haec occurrere potest dubitatio, an igitur eae particulae non possint esse elasticae?

Observamus enim pluria fluida et praecipue aërem esse elasticum, quae proprietas a nulla alia re ortum habere potest, nisi a particulis, ex quibus constat elasticis. Ad hoc respondeo particulas minimas fluidum componentes non solum posse esse elasticas, sed fortasse omnes esse perfecta elasticitate praeditas. Neque enim elasticitas et mollities inter se pugnant, sed quae particula mollis est, potest simul esse elastica. Duplici enim modo corpus potest esse elasticum, vel conatur figura sua immutata in pristinam figuram se restituere, etsi volumen eius neque auctum fuerit neque imminutum, vel in eo saltem elasticitas consistit, ut nonnisi volumine minuto sive, si fuerit condensatum, pristinum volumen recuperare conetur.

Hi duo casus elasticitatis probe sunt a se invicem distinguendi. Prior elasticitas cum mollitie nequaquam consistere potest, corporis enim perfecte mollis haec est proprietas, ut facillime quamvis figuram recipiat neque pristinam recuperare conetur, quod illi elasticitatis casui directe contrarium est. Alter vero casus elasticitatis cum mollitie utique consistere potest, ea enim se non exerit, nisi corpus in minus spatium fuerit redactum, diversissimas autem corpus figuras recipere potest, utut volumen eius non immutetur. Et hanc elasticitatem aëris fereque omnium fluidorum particulae habere videntur. Id quod ex eo colligitur, quod vel prorsus non se comprimi patiantur vel compressa se restituere conentur.

§ 9. Duplici ergo modo accidere potest, ut corpus aliquod non sit perfecte fluidum. Primo, si particulae minimae non sint perfecte molles, secundo, si particulae invicem cohaereant, et tertio, si utrumque adsit, ut neque particulae perfecte sint molles neque prorsus a se invicem separatae. Cum corpus perfecte fluidum vix sit in mundo, necesse est, ut corpora, quae in fluidis habemus, aliquo trium allatorum defectuum laborent, alia quidem magis, alia minus. Atque hinc corpus eo erit fluidius, quo minus erit vitium, quod in eo inest.

Quod autem vitium cuique fluido in hoc mundo insit quantumque sit, inde colligi posset, si, qui effectus ex quovis defectu oriantur, investigaretur, tum vero experimenta instituerentur, ex quibus palam fiat, quomodo et quantum fluidum propositum a perfecto aberret.

§ 10. Si particulae fluidum componentes fuerint perfecte molles, nihil interest, quantae eae sint particulae, nam, cum ad figuram quamcunque recipiendam sint aptae, etiam, quousque lubuerit, eae ulterius divisae concipi possunt, eodem ergo redit, ac si eae particulae re ipsa essent infinite parvae, quia vis minima, si opus est, eas eo reducere valet. Quum igitur quantitas molecularum perfecte fluidi in considerationem non ingrediatur, tota fluidi massa, si perfecta fuerit, nihil aliud est, nisi corpus perfecte molle. At vero, si minimae particulae non fuerint perfecte molles, sed vi iis aliam figuram imprimere conanti resistant, tum utique ad earum particularum quantitatem attendendum est, praecipue, cum vasibus angustissimis fluidum est inclusum.

§ 11. Natura autem corporis perfecte mollis haec est, quod eousque vi urgenti cedat, dum eius vi non amplius sit subiectum. Neque vero talis naturae concipi debet, quasi puncto temporis potentiae sollicitanti prorsus cedat, sed tempus pendet ex quantitate potentiae et massa corporis perfecte mollis atque ex his cognitis supputari potest. Ad nihil autem aliud vis potentiae corpus perfecte molle sollicitantis impenditur, nisi ad motum cessionis generandum. A data enim potentia dato tempore in datum corpus agente certa quaedam quantitas motus produci debet ob vim inertiae superandam. Sin autem corpus non perfecte fuerit molle, praeter vim inertiae adhuc alia res adest, quae potentiae obsistit, et inde oritur, quod difficulter corpus figuram suam mutet. Huc accedere potest vis elastica, quam habere potest ad sese in pristinum statum restituendum.

§ 12. Cum perfecte fluidum constet ex particulis perfecte mollibus hocque modo sit compositum, ut earum alia alii non sit iuncta, in eam incidi cogitationem, num forte corporis non perfecte mollis particulae ultimae sint quoque perfecte molles, sed tantummodo ratione compositionis a perfecte mollibus corporibus differant. Quae sententia mihi ex eo probari videtur, quod omnia corpora, ni fallor, vel ope ignis vel menstruorum in formam fluidam reduci possint. Ignis vero et menstrua ipsas particulas, ex quibus corpora sunt composita, non immutent, sed tantum rationem compositionis.
Unde sequi videtur omnium corporum particulas esse perfecte molles, discrimen autem eorum positum esse in ratione compositionis, ut ea eo magis ad fluidorum similitudinem accedant, quo minus eae particulae sint invicem iunctae, atque eo magis dura sint, quo vehementius particulae hae fuerint inter se connexae. Quomodo autem sint connexae de eo nondum mihi penitus constat. Sed videtur alia esse connexio partium in aliis corporibus, ideo quod ad alia in fluida convertenda aliis opus est dissolventibus. In fluida autem convertuntur dissolvendis vinculis, quae partes connexas tenuerant. Quare, cum res dissolventes sint diversae, et modus compositionis seu connexionis diversus esse videtur.

§ 13. Non dubito, quin ex hac posita structura corporum multa, quae ad corporum naturam pertinent, deduci possint. Ea vero deinceps experimentis instituendis examinari debent, ut patescat, utrum cum veritate conveniant an disconveniant. Atque hoc modo efficietur et intelligetur, utrum haec theoria vera sit an secus.

DISSERTATIO DE MOTU CORPORUM IN FLUIDIS ABSTRAHENDO AB OMNI GRAVITATE

§ I. Cum corpus in fluido movetur, impingit id continuo in fluidi particulas easque removere debet, ut ipsi transitus pateat, hac igitur allisione et communicatione motus cum particulis fluidi corpus de sua velocitate quicquam amittat adeoque motus decrementa patiatur, necesse est. E contrario, si corpus quiescit aut tardius movetur, fluidum vero velocius insequitur, impetum fluidi particulae in corpus faciunt eiusque motum accelerant, quamdiu ipso fluido corpus tardius moveatur.

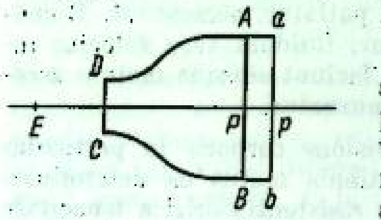
§ II. Quum igitur haec resistentia ab allisione corporis in particulas fluidi dependeat, ope regularum communicationis motus ea determinari poterit. Potest quidem praeter allisionem alia resistentia oriri a tenacitate et cohaesione partium fluidi oriunda, sed de hac resistentia hic agere animus non est, sed eam solum, quae a collisione oritur, his dessertationibus persequuturus sum. Oportet autem ad applicationem regularum communicationis motus, ut antea definiatur, utrum ultimae fluidi particulae elasticae an vero non?

§ III. Cum multae sint rationes et pro et contra utramque hypothesin, quid ex quaque sequatur, hic investigare constitui, ut inde per experimenta definire liceat conditionem minimarum fluidorum particularum.
Ne autem regulas communicationis motus in collisione corporum tam elasticorum quam non elasticorum aliunde petere opus sit, hic ex Hugenio eas describam. Insequatur corpus A velocitate a corpus B latum velocitate b et fiat collisio. Erit in casu corporum elasticorum velocitas corporis A post collisionem $=\frac{Aa+2Bb-Ba}{A+B}$, corporis vero B velocitas post collisionem erit $=\frac{Bb+2Aa-Ab}{A+B}$. At in casu corporum elasticitate omni destitutorum erit utriusque corporis post conflictum velocitas $=\frac{Aa+Bb}{A+B}$.

§ IV. Est autem etiam differentia observanda in fluido, si illud sit compressum, sin vero secus. Si fluidum fuerit compressum, i. e. si partes fluidi superiores premant inferiores, minimae particulae ita seiungi nequeunt, ut spatium inane inter se relinquant, verum continuo sese mutuo contingere debent. Hoc ergo in casu corpus motum fluidi particulis maiorem ac ipsum habet, velocitatem imprimere nequit, alioquin enim inter particulas fluidi et coprus vacuum relinqui deberet, id quod ob statum compressionis accidere nequit. Si fluidum non fuerit compressum, indifferens id erit ad spatium vacuum admittendum sive prohibendum.

§ V. Quatuor itaque erunt casus differentes pro binis his fluidorum differentiis. Primo enim fluidum non compressum et non elasticum concipi potest, secundo compressum at vero non elasticum, tertio non compressum, sed elasticum et quarto fluidum esse potest elasticum simul et compressum. Hanc fluidorum differentiam Neutonum in suis *Principiis* probe observasse et egregie ad explicandum motum solidorum in fluidis applicasse video. Tota autem discrepantia, quae a diversa fluidi tum quoad compressionem, tum quoad elasticitatem structura oritur, nonnisi in coefficientibus numeralibus consistit, ut quo loco uno in casu duplum inventum sit, ibi in alio simplum vel quadruplum inveniatur.

§ VI. Exordiar a fluido non compresso neque elastico. Moveatur [corpus] in huiusmodi fluido sitque eius superficies, qua in fluidum impingit, plana. Sit $ABCD$ corpus motum (vide figuram), AB eius superficies, qua in fluidum impingit. Inceperit illud motum in E velocitate, quae acquiritur cadendo ex altitudine k, perveneritque in P. Sit $PE = x$, superficies $AB = bb$, moles corporis $= abb$ et eius densitas se habeat ad densitatem fluidi ut m ad n. Sit corpus in procinctu per elementum $Pp = dx$ progrediundi, ut igitur elementum fluidi $ABba$ abigat, necesse est.



§ VII. Quum fluidum omni elasticitate supponatur destitutum idque sit in quiete, post collisionem utrumque eandem habebit velocitatem. Ut regulas communicationis motus applicemus, erit A corpus motum adeoque $= abbm$, velocitas eius tanta sit, quae acquiritur ex altitudine v, erit $a = \sqrt{v}$, corpus B erit elementum fluidi $ABba$ adeoque $B = bbndx$, eius vero velocitas est nulla. Corporis ergo utriusque post collisionem velocitas erit $\frac{abbm\sqrt{v}}{abbm + bbndx} = \frac{am\sqrt{v}}{am + ndx}$. Sed corporis velocitas ante collisionem erat $= \sqrt{v}$ adeoque de sua velocitate amisit $\frac{ndx\sqrt{v}}{am + ndx}$. Hoc ergo aequabitur differentiali ipsius velocitatis $\sqrt{v}$, i. e. $\frac{dv}{2\sqrt{v}}$. Unde haec obtinetur aequatio

$$\frac{-ndx\sqrt{v}}{am} = \frac{dv}{2\sqrt{v}}.$$

§ VIII. Haec aequatio si reducatur, mutatur in hanc $-2nvdx = madv$. Adeoque $-2ndx = \frac{madv}{v}$, cuius integralis aequatio erit $2nx = A - ma \lg v$. Determinabitur A ex eo, quod existente $x = 0$ v debeat esse k, consequenter erit $A = ma \lg k$. Quamobrem haec oritur aequatio $2nx = ma \lg k - ma \lg v$, ex qua definiri poterit spatium x percurrendum, ut corpus habeat datum velocitatis gradum, sumendo pro $\lg k$ et $\lg v$ logarithmos hyperbolicos.

§ IX. Cum sphaerica superficies dimidiam patiatur resistentiam eius, quam circulus maximus patitur,* si fuerit bb circulus maximus et abb exprimat capacitatem sphaerae, oportebit loco a ponere $2a$. Et haec aequatio exprimet motum sphaerae $nx = ma \lg k - ma \lg v$. Quum autem a sint duae tertiae diametri partes, si ponatur diameter $= c$, erit $a = \frac{2c}{3}$. Consequenter haec habebitur aequatio $3nx = 2mc \lg k - 2mc \lg v$. Unde patet vias, quas diversae sphaerae eiusdem densitatis in eodem fluido

* Vide Propositionem XXXIV Libri II *Principiorum* Newtoni (1726). — *G. M.*

percurrere debent, ut similes velocitatum initialium partes amittant, esse ut diametros idque in omni medio.

§ X. Si quaeratur, quot suorum diametrorum globus percurrere debeat, ut dimidium celeritatis amittat, erit ergo $\sqrt{v} = \frac{1}{2}\sqrt{k}$. Ergo $4v = k$, consequenter $3nx = 2mc \lg 4 = 2mc \cdot 1{,}386294361$ seu $x = \frac{mc}{n}\, 0{,}924196241$. Data ergo ratione n ad m numerus diametrorum innotescit. Sit $n = m$, consequenter globus eiusdem cum fluido densitatis per diametri suae partem $\frac{924\,196\,241}{1\,000\,000\,000}$ percurrere debebit, ut dimidiam velocitatem amittat.

§ XI. Ex dato autem spatio x velocitas seu v hoc modo invenietur. Sumantur numeri et habebitur haec aequatio $e^{\frac{2nx}{ma}} = \frac{k}{v}$. Consequenter erit $v = \frac{k}{e^{\frac{2nx}{ma}}}$, ubi e designat numerum, cuius logarithmus hyperbolicus est $= 1$. Est ergo $e = 2{,}7182818$.* Poterit ergo hoc modo v ope logarithmorum inveniri. Applicetur hoc ad globos et erit $a = \frac{4c}{3}$, consequenter $v = \frac{k}{e^{\frac{3nx}{2mc}}}$.

Sit $m = n$ et $x = 6c$, erit $v = \frac{k}{e^9} = \frac{k}{8103}$, partem ergo velocitatis nonagesimam retinebit.

§ XII. Alio modo per seriem velocitas v exprimi poterit, erit nempe

$$v = k - \frac{2nk}{1 \cdot ma}x + \frac{4n^2k}{1 \cdot 2 \cdot m^2a^2}x^2 - \frac{8n^3k}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot m^3a^3}x^3 + \frac{16n^4k}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot m^4a^4}x^4 - \text{etc.}$$

Ponatur loco a $\frac{4c}{3}$, ut pro globis series valeat, et invenietur

$$v = k\left(1 - \frac{3nx}{2^1 \cdot 1 \cdot mc} + \frac{9n^2x^2}{2^2 \cdot 1 \cdot 2 \cdot m^2c^2} - \frac{3^3n^3x^3}{2^3 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot m^3c^3} + \right.$$
$$\left. + \frac{3^4n^4x^4}{2^4 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot m^4c^4} - \text{etc.}\right),$$

quae series autem evadit divergens, quoties nx maior evadit quam mc, quibus ergo in casibus nullius erit usus.

§ XIII. Sed definienda sunt tempora, quibus vel dati velocitatum gradus amittuntur vel data spatia absolvuntur. Elementum temporis est $\frac{dx}{\sqrt{v}}$, cuius integrale quaeritur. [In] § VII haec inventa fuit aequatio $\frac{-ndx\sqrt{v}}{am} = \frac{dv}{2\sqrt{v}}$, consequenter $\frac{dx}{\sqrt{v}} = \frac{-amdv}{2nv\sqrt{v}}$. Consequenter $\int \frac{dx}{\sqrt{v}} = \frac{am}{n\sqrt{v}} - \frac{am}{n\sqrt{k}}$. Tempus ergo, quo corpus velocitatem $\sqrt{v}$ acquirit, erit

* In manuscripto: 2,7182817. Correxit *G. M.*

ut $\frac{am}{n}\left(\frac{\sqrt{k}-\sqrt{v}}{\sqrt{vk}}\right)$, qui valor si dividatur per 250 dat numerum minutorum secundorum, si k et v et a in millesimis pedis Rhenani exprimuntur, ut ergo sit tempus $=\frac{am}{250n}\left(\frac{\sqrt{k}-\sqrt{v}}{\sqrt{vk}}\right)$ minut. secund.

XIV. Tempus ergo, quo corpus sphaericum diametri c de sua velocitate $\sqrt{k}$ tantum amittit, ut habeat $\sqrt{v}$, erit $\frac{mc}{187n}\left(\frac{\sqrt{k}-\sqrt{v}}{\sqrt{vk}}\right)$ minut. secund. Tempus ergo, quo globus dimidium velocitatis perdit, erit $=\frac{mc}{187n\sqrt{k}}$ minut. secund. Tempora ergo, quibus a globis eiusdem densitatis in eodem fluido similes velocitatum gradus amittuntur, sunt directe ut diametri et inverse ut velocitates initiales. Poterit tempus generaliter etiam in spatiis x determinari. Cum sit $v=\frac{k}{e^{\frac{2nx}{ma}}}$ adeoque $\sqrt{v}=\frac{\sqrt{k}}{e^{\frac{nx}{ma}}}$, quocirca hoc valore loco $\sqrt{v}$ substituto invenietur tempus, quo spatium x percurritur, $=\frac{ma}{250n}\frac{e^{\frac{nx}{ma}}-1}{\sqrt{k}}$ minut. secund., pro globis erit $=\frac{mc}{187n\sqrt{k}}\left(e^{\frac{3nx}{4mc}}-1\right)$ minut. secund.

§ XV. Quum particulae fluidi hic assumantur omnis elateris expertes, corpus fluidi particulis maiorem velocitatem non imprimit atque ipsum habet. Consequenter nusquam ob motum corporis vacuum inter particulas oriri potest. Quamobrem idem hic motus obtinebit, si fluidum fuerit compressum, nam ob compressionem id tantum evitari debet, ut omnes partes contiguae maneant. Quare quae hactenus de motu corporum in fluidis non elasticis dicta sunt, aeque valent de fluido compresso et de non compresso.

§ XVI. Pergo itaque ad motum corporum in fluidis elasticis, i. e. ex particulis minimis perfecte elasticis constantibus, et primum fluidum ut non compressum contemplabor, ubi motus continget quemadmodum ex regulis communicationis motus in collisione corporum perfecte durorum derivatur. Maneant itaque eaedem denominationes ac supra, nempe altitudo generans velocitatem initialem sit $=k$, planum fluidum percutiens sit bb, moles corporis sit abb et ratio huius densitatis ad fluidi densitatem sit m ad n, spatium percursum sit x et velocitas in fine spatii x tanta, quanta ex altitudine v acquiri potest.

§ XVII. Dum ergo corpus per elementum $Pp=dx$ progredi tendit, fit collisio cum strato fluidi $ABba$. Decrementum ergo velocitatis per hoc spatium ob celeritatem totalem $=\sqrt{v}$ erit $\frac{-dv}{2\sqrt{v}}$. At idem ex regulis communicationis eruitur hoc modo. Corpus A repraesentat hic massa corporis $ambb$ et huius velocitatem exprimit $\sqrt{v}$. Dein corpus B exprimitur strato fluidi, quod est $=nbbdx$, quod ut quiescens consideratur. Corporis ergo post conflictum velocitas erit $=\frac{ambb\sqrt{v}-nbbdx\sqrt{v}}{ambb+nbbdx}$ et strati fluidi velocitas erit $=\frac{2ambb\sqrt{v}}{ambb+nbbdx}=2\sqrt{v}$, dupla ergo velocitate id stratum propellitur eius, quam ipsum corpus habet. Decrementum ergo velocitatis corporis erit $=\frac{2nbbdx\sqrt{v}}{ambb}=\frac{2ndx\sqrt{v}}{ma}$, id quod aequari debet ipsi $\frac{-dv}{2\sqrt{v}}$. Quare haec formabitur aequatio

$$\frac{2ndx\sqrt{v}}{ma}=\frac{-dv}{2\sqrt{v}}.$$

§ XVIII. Haec aequatio ergo abit in hanc $4ndx=\frac{-madv}{v}$, quae aequatio ab superiori (§ VIII), quae pro motu corporis in fluido non elastico inventa est, nonnisi in eo differt, quod ibi habeatur $2ndx$, hic autem $4ndx$. Quae ergo illinc derivata fuere, huic motui applicari poterunt, si ibi ubivis loco a $\frac{a}{2}$ vel loco n $2n$ substituatur. Non ergo fusius huic medio immoror.

§ XIX. Quum in hac collisione corporis cum fluido fluidi particulis duplo maior velocitas imprimatur, necesse est, ut inter corpus et fluidum post conflictum vacuum relinquatur. Fluidum enim duplo velocius cedit, ac corpus movetur. Motus ergo, qui pro fluido elastico non compresso inventus est, minime valebit et satisfaciet motui in fluido elastico compresso, hoc enim vacuum nusquam admittere potest. Efficiendum ergo est, ut corpus fluidi particulis maiorem velocitatem non imprimat, sed aequalem ei, quam ipsum habet. At huic adiungendum est, quod ex natura elasticitatis particularum consequitur, quantitatem vis vivae in conflictu non immutari.

§ XX. Exponat ergo z altitudinem generantem velocitatem, quam et corpus post conflictum retinet et elemento fluidi $nbbdx$ communicat. Quum ergo summa virium vivarum in conflictu servari debeat, haec habebitur aequatio $mabbv=mabbz+nbbzdx$, ut ergo sit $z=\frac{mav}{ma+ndx}$. Consequenter decrementum vis vivae in corpore est ut $v-z$, i. e. $\frac{nvdx}{ma+ndx}=\frac{nvdx}{ma}$, id quod aequale esse debet elemento altitudinis v. Manente enim corpore vires vivae sunt ut altitudines generatrices velocitates. Haec ergo habetur aequatio $\frac{nvdx}{ma}=-dv$.

§ XXI. Quare haec obtinetur aequatio $ndx=\frac{-madv}{v}$, circa quam notandum est, quod a priori pro motu in medio elastico non compresso inventa in eo differat, quod ibi sit $4ndx$ et hic habeatur ndx unitate affectum, differt ergo in eo ab aequatione motum in medio non elastico exprimente, quod ibi sit $2ndx$ et hic saltem ndx, ut adeo aequatio motui in medio non elastico inserviens medium obtineat inter aequationes motui in fluidis elasticis compressis et non compressis inservientes.

§ XXII. Ut igitur, quae deducere hinc animus est, ubique applicari queant, assumam hanc aequationem $indx=\frac{-madv}{v}$, in qua i vel 1 vel 2 vel 4 significare potest. Si fuerit $i=1$, valebit aequatio pro fluido elastico compresso, sin $i=2$, pro fluido non elastico et, si fit $i=4$, habebitur aequatio motum in fluido elastico non compresso exhibens.

DISSERTATIO DE ASCENSU ET DESCENSU CORPORUM RECTILINEO IN FLUIDIS

§ I. Exposito motu corporum in fluidis abstrahendo a gravitate * progredior ad explicandum motum corporum in fluidis admissa gravitate atque hac dissertatione casum simplicissimum, quo recta corpora ascendunt vel descendunt, evolvam, easdem distinctiones circa fluida servans, quas ante feceram, nempe in compressa et non compressa, elastica et non elastica, idque eum in finem ut ex experimentis in datis fluidis institutis, concludere liceat, quomodo fluidum sit constitutum, an eius particulae sint elasticae an vero non. Quod ad alteram distinctionem attinet, compressionis statum, omnia fluida tanquam compressa ob gravitatem, qua particulae superiores in inferiores agunt, considerari debebunt atque adeo casus, quo i aequatur 4 ex hoc negotio expellendus est.

§ II. Cum corpus descendit in fluido, perpetuo gravitatis actiones recipit, quibus velocitas augetur, at a resistentia fluidi eius velocitas minuitur. Quare verum incrementum velocitatis ex illo incremento et hoc decremento invicem comparatis aestimari debet. Si incrementum a gravitate aequetur decremento a resistentia, velocitas nullum incrementum accipiet adeoque motus erit uniformis. Cum resistentiae quantitas a velocitate dependeat, erit quidam velocitatis gradus, qui, si ab initio corpori imprimatur, efficiet, ut corpus uniformi motu descendat. Si minor velocitas initialis corpori imprimatur aut nulla, motu descendet accelerato, sin maior, motu retardato.

§ III. Adordior a motu uniformi et investigabo illum velocitatis gradum, ut corpus eo latum motu descendat uniformi in dato fluido. Sit ut in Dissertatione praecedente planum, quo corpus in fluidum iniit, $=bb$ et moles corporis $=abb$, eius gravitas specifica ut m et ea fluidi ut n. Sit velocitas quaesita tanta, quanta ex altitudine q acquiri potest. Pervenerit corpus in P et progrediatur in instanti in p usque (vide figuram). Quo motus iste sit uniformis, oportet, ut incrementum velocitatis per Pp a gravitate oriundum adaequet decrementum a resistentia productum.

§ IV. Si resistentia esset nulla, corpus per Pp id acquireret velocitatis augmentum, ut in p eius velocitas tanta sit, quanta acquiri posset ex altitudine $q+Pp$, dicto $Pp=dx$ ex altitudine $q+dx$, ut ergo sit dx elementum altitudinis velocitatem generantis. Si gravitas evanesceret et resistentia sola ageret, foret decrementum altitudinis velocitatem producentis per Pp (§ XXII Dissertationis praecedentis) ** $=\frac{inqdx}{ma}$ posito loco $v\,q$. Agentibus autem et gravitate et resistentia, ut motus oriatur uniformis, oportebit, ut sit $\frac{inqdx}{ma}=dx$. Consequenter $q=\frac{ma}{in}$. Pro globis, si diameter ponatur $=c$, esset $q=\frac{4mc}{3in}$.

§ V. Res ita se haberet, si corpora in fluidis eodem modo gravitarent ac in vacuo. Sed cum res secus se habeat, in id respiciendum erit, constat ex hydrostaticis, corpus fluido immersum tanta vi tendere deorsum, quae se habet ad gravitatem in vacuo ut excessus densitatis corporis super densitatem fluidi ad densitatem corporis.

. . . . *

§ XXIII. Ut ex dato tempore altitudo, ex qua corpus interea cecidit, innotescat, expressio est quaerenda pro x in t et datis. Resumatur ergo aequatio [in] § XIX inventa

$$t=\frac{m\sqrt{a}}{125\sqrt{(m-n)in}}\Bigg[\lg\sqrt{(m-n)a}-\sqrt{ink})-$$

$$-\lg\left(\sqrt{(m-n)ae^{\frac{inx}{ma}}}-\sqrt{ink+(m-n)a\left(e^{\frac{inx}{ma}}-1\right)}\right)\Bigg].$$

Ponatur

$$\frac{125t\sqrt{(m-n)in}}{m\sqrt{a}}=z$$

sumanturque numeri, habebitur haec aequatio

$$e^z=\frac{\sqrt{(m-n)a}-\sqrt{ink}}{\sqrt{(m-n)ae^{\frac{inx}{ma}}}-\sqrt{ink+(m-n)a\left(e^{\frac{inx}{ma}}-1\right)}}.$$

Quae si reducatur, ut $e^{\frac{inx}{ma}}$ in unico termino supersit, et dein rursus sumantur logarithmi haec invenietur aequatio

$$x=\frac{2ma}{in}\lg\{(m-n)a+ink-2\sqrt{(m-n)aink}-e^{2z}[ink-a(m-n)]\}-$$

$$-\frac{2ma}{in}\lg(\sqrt{(m-n)a}-\sqrt{ink})-\frac{2ma}{in}\lg 2-\frac{2ma}{in}\lg\sqrt{(m-n)a}-\frac{250t\sqrt{(m-n)a}}{\sqrt{in}}.$$

§ XXIV. Si ad sphaeras id applicandum sit, erit

$$z=\frac{125t\sqrt{3in(m-n)}}{2m\sqrt{c}}.$$

* Vide Dissertationem praecedentem, pp. 229–233. — *G. M.*

** Vide p. 233. — *G. M.*

* In manuscripto hic plagulae tres octavae desunt. — *G. M.*

Consequenter

$$x = \frac{8mc}{3in} \lg\{4(m-n)c + 3ink - 4\sqrt{3cink(m-n)} - e^{2z}[3ink - 4c(m-n)]\} -$$

$$- \frac{8mc}{3in} \lg(2\sqrt{3c(m-n)} - 3\sqrt{ink}) - \frac{8mc}{3in}\lg 2 -$$

$$- \frac{8mc}{3in} \lg \sqrt{\frac{(m-n)\cdot 4c}{3}} - \frac{500t\sqrt{(m-n)c}}{\sqrt{3in}}.$$

Ex quibus aequationibus, si k, a et c in partibus millesimis pedis Rhenani exprimantur et t in minutis secundis, reperietur x in partibus millesimis pedis Rhenani. Aequatio autem haec alterius reducta dabit hanc

$$x = \frac{8mc}{3in} \lg\{4c(m-n) + 3ink - 4\sqrt{3inkc(m-n)} - e^{2z}[3ink - 4c(m-n)]\} -$$

$$- \frac{8mc}{3in} \lg(2\sqrt{c(m-n)} - \sqrt{3ink}) - \frac{8mc}{3in}\lg 2\sqrt{(m-n)c} -$$

$$- \frac{8mc}{3in}\lg 2 - \frac{500t\sqrt{(m-n)c}}{\sqrt{3in}},$$

qui logarithmi ex tabulis logarithmorum hyperbolicorum excerpi debent.

§ XXV. Fiat descensus ex quiete, erit $k=0$, consequenter erit

$$x = \frac{2ma}{in}\lg(e^{2z}+1) - \frac{2ma}{in}\lg 2 - \frac{250t\sqrt{(m-n)a}}{\sqrt{in}} \text{ scrup. pedis Rhenani.}$$

Pro globis erit haec aequatio

$$x = \frac{8mc}{3in}\lg(e^{2z}+1) - \frac{8mc}{3in}\lg 2 - \frac{500t\sqrt{(m-n)c}}{\sqrt{3in}}.$$

Est autem hic $z = \frac{125t\sqrt{3in(m-n)}}{2m\sqrt{c}}$, qui valor substitui debet in exponente e^{2z}. Denotat autem e, uti et supra, numerum, cuius logarithmus est $=1$, qui adeo est 2,7182818.*

§ XXVI. Si supponamus altitudinem tantam esse, ut celeritas finalis confundatur cum velocitate, quam acquirere potest, maxima seu qua uniformi motu descendit, evanescet in $e^{2z}+1$ unitas prae e^{2z}, ut habeatur

$$\lg e^{2z} = 2z = \frac{250t\sqrt{(m-n)in}}{m\sqrt{a}},$$

unde haec obtinebitur aequatio

$$x = \frac{250t\sqrt{(m-n)a}}{\sqrt{in}} - \frac{2ma}{in}\lg 2 = \frac{250t\sqrt{(m-n)a}}{\sqrt{in}} - \frac{ma}{in}\, 1{,}38629436.$$

* In manuscripto: 2,7182817. Correxit *G. M.*

Pro sphaera diametri c scrupulorum erit

$$x = \frac{500t\sqrt{(m-n)c}}{\sqrt{3in}} - \frac{mc}{in}\cdot 1{,}84839248.$$

§ XXVII. Hoc modo exprimitur altitudo, si $k=0$ seu si initium motus fiat ex quiete. Sin vero aliqua sit velocitas initialis, haec invenitur aequatio

$$x = \frac{250t\sqrt{(m-n)a}}{\sqrt{in}} - \frac{2ma}{in}[\lg\sqrt{(m-n)a} - \lg(\sqrt{(m-n)a} + \sqrt{ink}) + \lg 2]$$

et pro globis habebitur

$$x = \frac{500t\sqrt{(m-n)c}}{\sqrt{3in}} - \frac{8mc}{3in}[\lg 2\sqrt{(m-n)c} - \lg(2\sqrt{(m-n)c} + \sqrt{3ink}) + \lg 2] \text{ scrup.}$$

Atque hinc ex dato tempore altitudo facile inveniri poterit.

§ XXVIII. Progredior exposito descensu rectilineo ad ascensus rectilinei explicationem, quae quidem ex hactenus dictis paucis immutatis facile colligi potest. Quemadmodum enim antea vis gravitatis et resistentiae contrariae fuerant, hic sunt directe conspirantes. Quamobrem in aequatione fundamentali [in] § IX inventa $dv = \frac{(m-n)dx}{m} - \frac{invdx}{ma}$ loco ipsius $+\frac{(m-n)dx}{m}$ poni nostro in casu debet $\frac{(-m+n)dx}{m}$ ob vim gravitatis motum retardantis eritque igitur

$$dv = \frac{-dx(m-n)}{m} - \frac{invdx}{ma} \quad \text{seu} \quad dx = \frac{-madv}{(m-n)a + inv}.$$

Consequenter $x = A - \frac{ma}{in}\lg[(m-n)a + inv]$.

§ XXIX. Determinata constante A ex eo, quod corpus ascendens habeat velocitatem initialem ex altitudine k acquisitam, erit

$$x = \frac{ma}{in}\lg\frac{ma - na + ink}{ma - na + inv}.$$

Hinc poterit deduci, quousque corpus sit ascensurum. Ponatur enim $v=0$, erit ea altitudo

$$x = \frac{ma}{in}\lg\frac{ma - na + ink}{ma - na}.$$

Pro globis erit

$$x = \frac{4mc}{3in}\lg\frac{4mc - 4nc + 3ink}{4mc - 4nc + 3inv}$$

et speciatim illa altitudo, ad quam pertingere potest,

$$=\frac{4mc}{3in}\lg\frac{4mc-4nc+3ink}{4mc-4nc}.$$

§ XXX. Ut data altitudine x inveniatur altitudo velocitati debita v, sumatur haec aequatio

$$\frac{inx}{ma}+\lg(ma-na+inv)=\lg(ma-na+ink).$$

Sumtis numeris erit

$$ma-na+inv=\frac{ma-na+ink}{e^{\frac{inx}{ma}}},$$

consequenter

$$v=\frac{ma-na+ink}{ine^{\frac{inx}{ma}}}+\frac{-ma+na}{in}=\frac{ink-e^{\frac{inx}{ma}}(ma-na)+ma-na}{ine^{\frac{inx}{ma}}}=$$

$$=\frac{ink-a(m-n)\left(e^{\frac{inx}{ma}}-1\right)}{ine^{\frac{inx}{ma}}}.$$

Pro globis ergo erit

$$v=\frac{3ink-4c(m-n)\left(e^{\frac{3inx}{4mc}}-1\right)}{3ine^{\frac{3inx}{4mc}}}.$$

§ XXXI. Elementum temporis est

$$\frac{dx}{\sqrt{v}}=\frac{-madv}{[(m-n)a+inv]\sqrt{v}}.$$

Hoc ut integretur, ponatur $\sqrt{v}=s$, erit $v=ss$ et $dv=2sds$, unde erit

$$\frac{dx}{\sqrt{v}}=\frac{-2mads}{(m-n)a+inss}=\frac{-2ma}{in}\cdot\frac{ds}{\frac{(m-n)a}{in}+ss}.$$

Huius elementi integratio ergo dependet a quadratura circuli. Posito enim $\frac{(m-n)a}{in}=ff$ erit $\int\frac{ffds}{ff+ss}$ arcus circuli, cuius radius est $=f$ et tangens $=s$. Dicto ergo hoc arcu P erit

$$dt=\frac{dx}{\sqrt{v}}=\frac{-2ma}{inff}\cdot\frac{ffds}{ff+ss}=\frac{-2m}{m-n}dP.$$

Peracta integratione erit $t=A-\frac{2mP}{m-n}$. Vocetur ille arcus circuli B, cuius radius manet f et tangens est $=\sqrt{k}$, erit $t=\frac{2mB-2mP}{m-n}$. In minutis secundis si tempus desideretur, erit $t=\frac{mB-mP}{125(m-n)}$ minut. secund. At longitudines in scrupulis pedis Rhenani exprimi debent.

§ XXXII. Ut hanc aequationem ad usum reducam, effici debet, ut ex tabulis tangentium vulgaribus totum negotium absolvi possit. Sit igitur radius circuli $=1$. Tangens sumatur in tabulis $=\frac{\sqrt{k}}{f}$ et angulus respondens quaeratur, cuius numerus graduum sit $=N$, erit $B=\frac{6283fN}{360\,000}$. Similiter quaeratur angulus respondens tangenti $\frac{\sqrt{v}}{f}$ eiusque numerus graduum dicatur V eritque $P=\frac{6283fV}{360\,000}$. Consequenter haec habetur aequatio

$$t=\frac{m}{125(m-n)}\cdot\frac{6283fN-6283fV}{360\,000}=\frac{6283mf}{45\,000\,000(m-n)}(N-V)\ \text{minut. secund.}$$

Si pro sphaeris tempus desideratur, loco a in expressione ipsius f poni debet $\frac{4c}{3}$, ut sit $f=2\sqrt{\frac{(m-n)c}{3in}}$, ubi c designat diametrum globi in scrupulis pedis Rhenani.

§ XXXIII. Tempus totius ascensus, donec motus eius penitus consumitur, habebitur ponendo $v=0$ adeoque erit $V=0$. Erit itaque tempus quaesitum

$$=\frac{6283mfN}{45\,000\,000(m-n)}=\frac{mfN}{7162(m-n)}\ \text{minut. secund.}$$

Quum N sit numerus graduum anguli, cuius tangens est $=\frac{\sqrt{k}}{f}=$ $=\frac{\sqrt{ink}}{\sqrt{(m-n)a}}$, patet, si fuerit altitudo k tanta, ut potentia $\sqrt{\frac{ink}{(m-n)a}}$ pro infinito haberi queat respectu ad 1 habito, non differet hoc in casu angulus N a recto, ut itaque sine ullo sensibili errore loco N poni queat 90 et erit his in casibus tempus totius ascensus

$$=\frac{6283mf}{500\,000(m-n)}=\frac{6283m\sqrt{a}}{500\,000\sqrt{in(m-n)}}\ \text{minut. secund.}$$

In qua expressione velocitas non in computum venit, unde concludendum est, si velocitates initiales tantae fuerint, ut sine sensibili errore $\frac{ink}{(m-n)a}$ pro infinito respectu ipsius 1 haberi queat, tunc, quantacunque velocitas initialis terminum dictum superans imprimatur, tempora ascensuum sensibiliter non variari.

§ XXXIV. Si ergo ex bombardis vi maxima globi ferrei verticaliter sursum exploduntur in aëre, videamus, an illorum velocitas, qua egre diuntur, tanta sit, ut $\sqrt{\frac{ink}{(m-n)a}}$ possit haberi pro tangente 90°. Experimento observatum est globum ferreum diametri circiter 250 scrupulorum eiaculatum sursum vi maxima tempore 45 secundorum elapso cecidisse,* unde concludendum est egressum illum fuisse velocitate acquisita ad minimum ex altitudine 5000 pedum, ut ergo sit $k:c=20\,000:1$. Est autem gravitas specifica ferri ad aëris ut 7000 : 1, unde erit

$$\sqrt{\frac{3ink}{4(m-n)c}}=\sqrt{\frac{60\,000i}{28\,000}}=\sqrt{\frac{15i}{7}}.$$

Per experimenta autem deprehendi esse $i=1$, ut adeo haec altitudo sit circiter $\frac{3}{2}$, cuius tangentis arcus minime pro 90° haberi potest.

§ XXXV. Pro bombardis ergo nequaquam ultima aequatio inventa accipi potest, sed ea, cui inest N, applicari debebit et pro quovis casu definiri N numerus graduum arcus respondentis tangenti $\frac{\sqrt{k}}{f}$, ubi est $f=2\sqrt{\frac{(m-n)c}{3in}}$, et erit tempus ascensus $=\frac{mfN}{7162(m-n)}$ minut. secund.

Sin autem tanta vi globi in aqua aut alio graviori fluido sursum proiciantur, ubique pro N 90 poni poterit et erit tempus, quod globus in ascensu insumit, $=\frac{12\,566\,m\sqrt{c}}{500\,000\sqrt{3in(m-n)}}$ minut. secund. Quia enim gravitas specifica ferri est ad gravitatem specificam aquae ut 8 : 1 quam proxime et si sit $k=1000c$, saltem erit $\sqrt{\frac{3ink}{4c(m-n)}}=\sqrt{\frac{3000}{28}}=10$, cuius arcus iam plus quam 89° continet.

§ XXXVI. Sed saepius usu veniet ex dato tempore definire altitudinem, quam descripsit corpus, vel ex data altitudine tempus. Loco ergo altitudinis x velocitatem initialem producentis in computum ducam altitudinem, ad quam corpus pertingit, quam dicam q. Erit ex § XXIX

$$q=\frac{ma}{in}\lg\frac{(m-n)a+ink}{ma-na},$$

unde erit

$$k=\frac{a(m-n)}{in}\left(e^{\frac{inq}{ma}}-1\right).$$

Erit ergo

$$\frac{\sqrt{k}}{f}=\sqrt{e^{\frac{inq}{ma}}-1},$$

qui numerus si habeatur, quaeritur in tabulis arcus ipsi tanquam tangenti considerato conveniens, cuius graduum numerus si dicatur N, erit tempus

* Vide commentationem Euleri E. 853 *Meditatio in experimenta explosione tormentorum nuper instituta* (Opera omnia, II-14). — *G. M.*

$$t=\frac{mN\sqrt{(m-n)a}}{7162(m-n)\sqrt{in}}=\frac{mN\sqrt{a}}{7162\sqrt{in(m-n)}}\ \text{minut. secund.}$$

Pro globis erit tangens $=\sqrt{e^{\frac{3inq}{4mc}}-1}$ et tempus

$$t=\frac{mN\sqrt{c}}{3581\sqrt{3in(m-n)}}\ \text{secund.}$$

§ XXXVII. Ut ex dato tempore altitudo q inveniatur, quaeratur $\frac{7162t\sqrt{in(m-n)}}{m\sqrt{a}}$ eiusque numerus denotet gradus in circulo et respondens tangens dicatur T. Erit

$$T=\sqrt{e^{\frac{inq}{ma}}-1},$$

consequenter

$$\lg(TT+1)=\frac{inq}{ma}.$$

Consequenter

$$q=\frac{ma}{in}\lg(TT+1).$$

Pro globis designabit T tangentem arcus graduum $=\frac{3581t\sqrt{3in(m-n)}}{m\sqrt{c}}$ et erit

$$q=\frac{4mc}{3in}\lg(TT+1)\ \text{scrup.}$$

Pro tangente T poni debet numerus ipsi conveniens, si radius sit $=1$.

§ XXXVIII. Si simul ascensus et descensus consideretur atque vel ex toto tempore altitudo vel ex altitudine utrumque tempus desideretur, hoc modo negotium conficietur.

Quod ad posterius attinet, ad definitionem temporis et ascensus et descensus ex data altitudine determinabitur id conficiendo tempora [in] § XX et § XXXVI inventa in unam summam et habebitur tempus ascensus et descensus simul. Dicto hoc tempore t erit

$$t=\frac{mN\sqrt{a}}{7162\sqrt{in(m-n)}}-\frac{m\sqrt{a}}{125\sqrt{in(m-n)}}\lg\left(\sqrt{e^{\frac{inq}{ma}}}-\sqrt{e^{\frac{inq}{ma}}-1}\right)=$$

$$=\frac{m\sqrt{a}}{895\,300\sqrt{in(m-n)}}\left[125N-7162\lg\left(\sqrt{e^{\frac{inq}{ma}}}-\sqrt{e^{\frac{inq}{ma}}-1}\right)\right]\ \text{minut. secund.}$$

Pro globis invenietur

$$t=\frac{m\sqrt{c}}{447\,650\sqrt{3in}\,(m-n)}\left[125N-7162\lg\left(\sqrt{e^{\frac{3inq}{4mc}}}-\sqrt{e^{\frac{3inq}{4mc}}-1}\right)\right]\text{ minut. secund.}$$

§ XXXIX. Si altitudo q tanta fuit, ut $e^{\frac{inq}{ma}}$ pro infinities maiore numero haberi queat quam 1, erit $N=90$ et

$$\lg\left(\sqrt{e^{\frac{inq}{ma}}}-\sqrt{e^{\frac{inq}{ma}}-1}\right)=-\frac{inq}{2ma}-\lg 2.$$

Consequenter haec obtinebitur aequatio

$$t=\frac{m\sqrt{a}}{895\,300\sqrt{in}\,(m-n)}\left(11\,250+\frac{3581inq}{ma}+7162\lg 2\right)=$$

$$=\frac{m\sqrt{a}}{895\,300\sqrt{in}\,(m-n)}\left(16\,214+\frac{3581inq}{ma}\right)\text{ minut. secund.}$$

Pro globis erit

$$t=\frac{m\sqrt{c}}{447\,650\sqrt{3in}(m-n)}\left(16\,214+\frac{2686inq}{mc}\right)=$$

$$=\frac{m\sqrt{c}}{166\sqrt{3in}\,(m-n)}\left(6+\frac{inq}{mc}\right)\text{ minut. secund.}$$

quam proxime.

§ XL. Quomodo ex priore aequatione generaliore aequatio altitudinem q exhibens erui queat, non video ob arcum N tangentis $\sqrt{e^{\frac{inq}{ma}}-1}$ et ob logarithmum quantitatis similis transcendentalis.

Pro exemplis ergo huc pertinentibus valor ipsius q aliter quam tentando vel approximando exhiberi nequit.

At si possit pro N scribi 90, ut et logarithmus evanescat, facile patet fore

$$\frac{3581inq}{ma}+16\,214=\frac{895\,300t\sqrt{in}\,(m-n)}{m\sqrt{a}}.$$

Consequenter erit

$$q=\frac{250t\sqrt{a}\,(m-n)}{\sqrt{in}}-\frac{16\,214ma}{3581in}\text{ scrup.}$$

atque pro globis erit

$$q=\frac{500t\sqrt{c}\,(m-n)}{\sqrt{3in}}-\frac{64\,856mc}{10\,743in}\text{ scrup.}$$

seu simplicius

$$q=\frac{500t\sqrt{c}\,(m-n)}{\sqrt{3in}}-\frac{6mc}{in}\text{ scrup.}$$

DISSERTATIO DE MOTU CORPORUM SUPER LINEIS CURVIS IN MEDIO RESISTENTE

§ I. Moveatur coprus in fluido dato, cuius densitas sit ad corporis densitatem ut n ad m, sitque corpus cylindrus alterutram suam basin antevertens eaque resistentiam recipiens. Sit eius altitudo $= a$. Assumo autem cylindrum, cum ex eius motu cognito facile sit theoriam alius figurae corporibus applicare. Incedat corpus super curva AM perveneritque in M (fig. 1). Oportebit, quantum corpus velocitatis incrementum recipiat, interea dum per elementum Mm pergit, determinare.

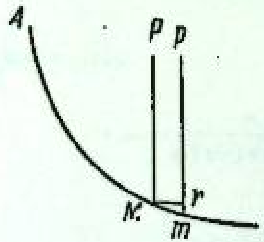


Fig. 1.

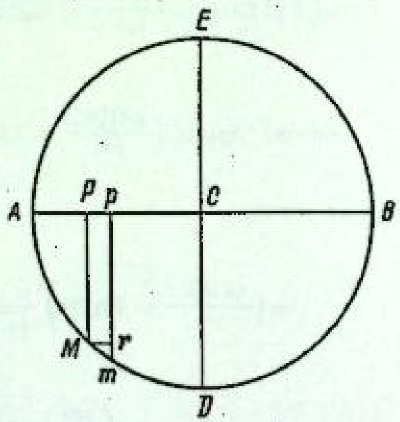


Fig. 2.

§ II. Sit velocitas, quam corpus in M habet, tanta, quanta acquiri potest ex altitudine v. Ex puncto M eique proximo m erigantur verticales MP, mp, secundum quas definietur, quantum corpus descenderit. Dicatur $Mm = ds$ et ex M ducatur horizonti parallela Mr dicanturque $Mr = dx$ et $rm = dy$. Exprimet rm, quantum corpus descenderit, cuique adeo, nisi resistentiam corpus pateretur, aequaretur elementum dv. At vero, dum corpus per elementum Mm progreditur in fluido velocitate, quae acquiritur ex altitudine v, amittit de debita altitudine v hoc elementum $\frac{nvds}{ma}$. Sed, cum corpus non toto pondere gravitet in fluido, etiamsi fluidum non resisteret, tamen descensu per dy nonnisi esset $dv = \frac{(m-n)\,dy}{m}$, adveniat iam insuper resistentia et erit

$$dv = \frac{(m-n)\,dy}{m} - \frac{nvds}{ma}$$

sive $madv + nvds = (m-n)\,ady$.

§ III. Aequatio inventa duobus modis in usum vocari potest. Vel inde data aequatione curvae lex velocitatum determinari potest vel

data lege velocitatum ad naturam curvae perveniri potest. Persequa primo illum usum, quo ex nota curvae natura velocitas corporis supe ea incedentis cognoscitur.

Proponatur circulus et determinetur motus corporis circulum descri bentis. Sit circulus $AMDB$, quem describat corpus pendulum (fig. 2) Ducatur diameter horizontalis ACB et verticalis ECD. Sit radius huiu circuli $= b$, $PM = y$, $AP = x$, erit $Mr = dx$, $rm = dy$ et $ds = \sqrt{dx^2 + dy^2}$ Est autem ex circuli natura $yy = 2bx - xx$ et $y : b = dx : ds$. Est auten ob $x = b \pm \sqrt{bb - yy}$ $dx = \frac{ydy}{\sqrt{bb-yy}}$. Ergo $ds = \frac{bdy}{\sqrt{bb-yy}}$.

§ IV. Si loco ds hic valor subrogatur, obtinetur haec aequatio

$$madv + \frac{nbvdy}{\sqrt{bb-yy}} = (m-n)\,ady.$$

Ut haec aequatio melius tractari possit, reducatur ad rationalitaten ponendo $\sqrt{bb-yy} = (b-y)\,p$. Erit $b + y = bpp - ypp$, ergo $y = \frac{bpp-b}{pp+1}$ e $\sqrt{bb-yy} = \frac{2bp}{pp+1}$ et $dy = \frac{4bpdp}{(pp+1)^2}$.* Ergo

$$madv + \frac{2nbvdp}{pp+1} = \frac{4\,(m-n)\,abpdp}{(pp+1)^2}$$

seu

$$madv\,(pp+1)^2 + 2nbvdp\,(pp+1) = 4\,(m-n)\,abpdp.$$

---

* Hanc et sequentes duas formulas correxit *G. M.*

DISSERTATIO DE MOTU CORPORUM OBLIQUE PROIECTORUM IN FLUIDIS

§ I. Si gravia perpendiculariter ad horizontem proiciuntur, in linea recta vel sursum vel deorsum moventur. Sin autem ea oblique sub quodam cum horizonte angulo acuto proiciuntur, non amplius in linea recta pergunt, sed lineam curvam describent eamque, quemadmodum Galilaeus ostendit, parabolam in vacuo puta. In fluido enim resistente aliter res se habet et curva non amplius est parabola, sed linea transcendens. Cuius modi curvas in quocunque medio resistente Vir Celeberrimus Iac. Hermannus in *Phoronomia* construit et Vir Celeberrimus Ioh. Bernoullius in *Actis Eruditorum* dedit.

§ II. Quum autem hic mihi propositum sit motum quoad tempora et velocitates praecipue in dato fluido et dato angulo proiectionis ut et data velocitate initiali ortum determinare, opus erit, ut mea quoque methodo curvam proiectionis inveniam propter absoluta et tempora et velocitates et loca corporis, quae inde hauriri debent.

Duplici hic quoque modo corporis motus spectari debet, vel eius ascensus vel descensus, aliter enim res se habet cum ascensu quam cum descensu. Quum ibi gravitas et resistentia medii conspirent ad motum corporis retardandum, at in descensu gravitas accelerat, resistentia autem diminuit, unde, prout quaeque praevalet alteri, ita corpus vel accelerato vel retardato motu descendit.

§ III. Considerabo primum descensum corporis in linea curva. Sit A locus corporis supremus, ubi eius directio est horizontalis secundum tangentem AP (fig. 1). Sit eius velocitas in A tanta, quanta acquiritur lapsu ex altitudine k. Si nulla esset gravitas, corpus pergeret in linea recta AP, sed ob gravitatem cogetur describere curvam AM. Pervenerit corpus in M, ducatur ex M normalis MP in horizontalem AP dicanturque $AP=x$, $PM=y$. Velocitas corporis in M tanta sit, quanta acquiri potest ex altitudine v. Sit gravitas specifica medii ad gravitatem corporis ut n ad m. Corpus semper plana parte bb fluidum normaliter feriat sitque abb volumen corporis et $abbm$ massa.

§ IV. Progrediatur corpus in instanti ex M in m. Ducantur mp et Mr respective parallelae lineis PM et Pp, erunt $Pp=Mr=dx$ et $mr=dy$. Dicatur $Mm(\sqrt{dx^2+dy^2})=ds$ et erit altitudo velocitati, quam corpus in m habebit debita $v+dv$. Constat in vacuo fore $dv=rm=dy$, at in fluido non solum celeritas minuitur, sed etiam gravitas, ut abstrahendo a resistentia conatus deorsum corporis sit ut $\frac{(m-n)}{m}$, cum antea fuerat ut 1, esset ergo $dv=\frac{dy(m-n)}{m}$. Abstrahendo autem a gravitate esset $dv=\frac{-invds}{ma}$ per ea, quae in prima Dissertatione tradita sunt* (ubi i

* Vide p. 233. — G. M.

denotare potest vel 1 vel 2, prout medium vel elasticum vel molle fuerit). Unde ergo et gravitate et resistentia simul agente haec constatur aequatio

$$dv=\frac{dy(m-n)}{m}-\frac{invds}{ma}.$$

§ V. Haec aequatio autem nondum sufficit ad naturam curvae cognoscendam neque velocitatem in singulis locis, cum naturam curvae supponat. Quare insuper alia aequatio est quaerenda ex eo deducenda, quod haec curva a corpore libere describatur. Quae enim inventa est, aequatio etiam valet pro motu corporum super curvis datis. Ut autem corpus lineam curvam libere describat, oportet, ut eius vis centrifuga et gravitas se in aequilibrio semper servent. Si enim alterutra praevaleret corpus a semita aberraret et vi praevalenti cederet.

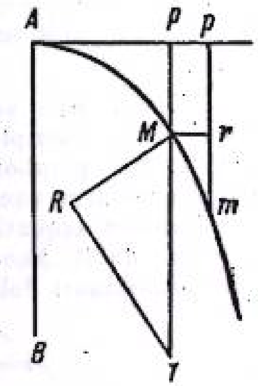


Fig. 1.

§ VI. Quum autem vis centrifuga et vis gravitatis non sint directe contrariae, sed vis centrifuga secundum perpendicularem ad curvam agat et vis gravitatis ad horizontem tendat, illa resolvi debet in duas laterales, quarum altera directe sursus tendat atque adeo directe contraria sit vi gravitatis, altera autem, ne motum corporis perturbet, secundum tangentem curvae agere debebit. Sit itaque MR* ad curvam normalis, illa resolvatur in MT verticalem et TR tangentialem, ut se habeat $MR:MT=dx:ds$ et debebit vis verticalis MT aequipollere vi gravitatis.

§ VII. Sit pondus corporis in vacuo $=p$, erit $\frac{(m-n)p}{m}$ eius pondus in fluido. Ratio autem vis centrifugae ad pondus p ex Hugenii opusculis posthumis determinabitur considerando elementum Mm ut arculum circularem, cuius radius erit radius osculi, qui dicatur r. Pondus ergo p se habebit ad vim centrifugam, ut dimidius radius r ad altitudinem velocitatem producere valentem v, ut ergo ea sit $=\frac{2vp}{r}$. Haec autem secundum normalem MR agit. Fiat itaque ut $dx:ds=\frac{2vp}{r}:\frac{2vpds}{rdx}$. Exprimet haec portionem vis centrifugae directe contrariam vi gravitatis, quae est $=\frac{(m-n)p}{m}$. Quocirca sequens obtinebitur aequatio $2vds=\frac{(m-n)rdx}{m}$, unde $v=\frac{(m-n)rdx}{2mds}$.

§ VIII. Assumatur elementum dx pro constante et erit radius osculi $r=\frac{ds^3}{dxddy}$. Valore hoc in aequatione modo inventa $v=\frac{(m-n)rdx}{2mds}$ substituto obtinetur haec aequatio

$$v=\frac{(m-n)ds^2}{2mddy}=\frac{(m-n)(dx^2+dy^2)}{2mddy}.$$

* In manuscripto: NR. Correxit G. M.

Consequenter erit

$$dv=\frac{(m-n)}{2m}\left(2dy-\frac{ds^2d^3y}{ddy^2}\right)=\frac{(m-n)\,dy}{m}-\frac{(m-n)\,ds^2d^3y}{2mddy^2}.$$

Valoribus his loco v et dv in aequatione § IV

$$dv=\frac{(m-n)\,dy}{m}-\frac{invds}{ma}$$

[substitutis] prodibit aequatio ab v libera naturam curvae exprimens haec

$$\frac{(m-n)\,ds^2d^3y}{2mddy^2}=\frac{(m-n)\,inds^3}{2mmaddy},$$

quae reducta abit in hanc $mad^3y=indsddy$, unde indoles curvae erui debet.

§ IX. Ex hac aequatione sequitur, si corpora in vacuo moveantur, fore curvam descriptam parabolam, quemadmodum notissimum est. Quomodo autem parabolae aequatio ex inventa eruenda sit, hic habe. Si medium ponatur vacuum seu infinite rarum, erit $n=0$. Consequenter haec habetur aequatio $d^3y=0$, quae integrata non omissa constante homogenea dabit hanc $ddy=adx^2$, ubi constans a ex velocitate initiali data determinari debet. Cum enim sit

$$v=\frac{(m-n)\,rdx}{2mds}=(\text{ob } n=0)\ \frac{rdx}{2ds}=\frac{ds^2}{2ddy},$$

erit substituto loco ddy adx^2 $v=\frac{ds^2}{2adx^2}$. Initio autem motus est $v=k$ et $ds=dx$, ergo habetur $k=\frac{1}{2a}$ adeoque $a=\frac{1}{2k}$, unde haec habetur $2kddy=dx^2$ et ulterius integrando $2kdy=xdx$ et tandem $xx=4ky$.

§ X. Ut posthac motum proiectorum in mediis resistentibus cum motu in vacuo melius comparare possim, paucis hic motum in vacuo persequi non abs re erit. Aequatio inventa $xx=4ky$ est ad parabolam, cuius vertex est in A eiusque axis verticalis AB et parameter $=4k$. Parameter ergo parabolae a corpore proiecto descriptae aequatur quadruplo altitudinis generantis velocitatem, quam habet corpus, cum est in vertice parabolae, seu corporis in vertice celeritas tanta erit, quanta acquiritur lapsu ex altitudine aequali distantiae foci a vertice parabolae. Et generaliter velocitas corporis in quovis loco parabolae tanta est, quanta acquiri potest lapsu ex altitudine aequali distantiae loci a foco. Est enim

$$v=\frac{ds^2}{2adx^2}=\frac{kds^2}{dx^2}.$$

sed est $ds^2=dx^2\left(1+\frac{xx}{4kk}\right)$, unde

$$v=k\left(\frac{4kk+xx}{4kk}\right)=\frac{4kk+xx}{4k}=k+y,$$

sed $y+k$, ut constat ex conicis, exprimit distantiam puncti curvae a foco.

§ XI. Potest hinc inveniri data velocitate, qua globus ex B in dato cum horizonte angulo DBC proicitur, vertex parabolae et axis et parameter. Sit A vertex et AC axis, F focus, BC horizon et BD tangens curvae in B (fig. 2), erit $AD=AC$. Quum detur velocitas initialis in B, sit altitudo eam producere potens $=f$, erit $BF=f$. Dicatur $AC=x$, $BC=y$, erit $AF=\frac{yy}{4x}$ et $BF=f=x+\frac{yy}{4x}$. Quum detur angulus CBD, sit sinus totus ad tangentem eius anguli ut $a:b$, erit $y:2x=a:b$, ergo $y=\frac{2ax}{b}$. Erit ergo $f=x+\frac{aax}{bb}$ adeoque altitudo verticis super horizonte erit

$$x=\frac{bbf}{aa+bb}.$$

Cum sit $(aa+bb):bb=BD^2:CD^2$, erit altitudo verticis supra horizontem AC ad altitudinem debitam velocitati initiali f in ratione duplicata si-

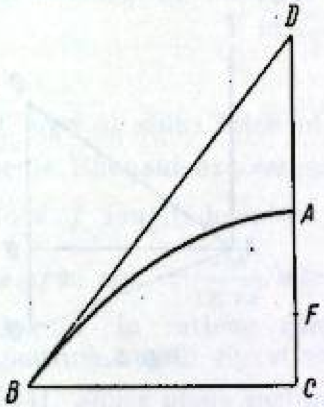


Fig. 2.

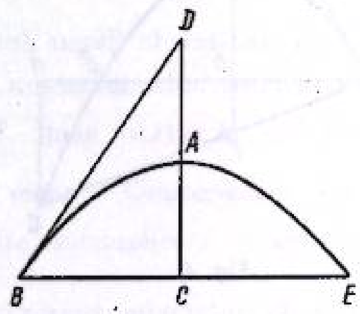


Fig. 3.

nus anguli inclinationis CBD ad sinum totum et $BC:2AC=a:b$, i. e. ut sinus totus ad tangentem anguli inclinationis, et distantia foci a vertice $AF=\frac{yy}{4x}$ erit $=\frac{aaf}{aa+bb}$. Erit ergo distantia foci a vertice seu quarta parametri pars ad altitudinem generantem velocitatem initialem in ratione duplicata cosinus anguli inclinationis ad sinum totum.

§ XII. Potest hinc facile inveniri longitudo iactus tam super planis horizontalibus quam inclinatis propter situm verticis et parametrum inventum. Sit BE planum horizontale et BAE* parabola descripta (fig. 3); CBD** sit angulus inclinationis talis, ut sinus totus sit ad eius tangentem ut $a:b$, sitque f altitudo generans velocitatem initialem in B. Erit $BC=\frac{2abf}{aa+bb}$, consequenter $BE=2BC=\frac{4abf}{aa+bb}$. Fiat ergo ut quadratum sinus totius ad factum ex sinu anguli inclinationis in eiusdem cosinum ita $4f$ ad quartam, quae designabit longitudinem iactus BE. Hinc deducitur, ut longitudo iactus sit maxima, requiri, ut sit $a=b$, consequenter angulus CBD semirectus.

* In manuscripto: BAC. Correxit G. M.
** In manuscripto: CBE. Correxit G. M.

§ XIII. Sit planum inclinatum BG cum horizontali BE constituens angulum GBE (fig. 4), cuius tangens se habeat ad sinum totum ut c ad a. Reperietur ex conicis fore

$$BG = 4f\frac{(b+c)\sqrt{aa+cc}}{aa+bb}.$$

Hoc modo ergo ex tabulis tangentium obtinebitur BG. Inferatur ut quadratum secantis anguli inclinationis CBD ad factum ex summa tangentium anguli inclinationis CBD et anguli, quem planum inclinatum cum horizonte constituit, CBF in secantem anguli CBF ita $4f$ ad BG et sic habebitur BG.

§ XIV. Investigetur angulus proiectionis CBD, quo iactus BG sit longissimus. Sumatur b pro variabili et aequetur differentiale ipsius BG

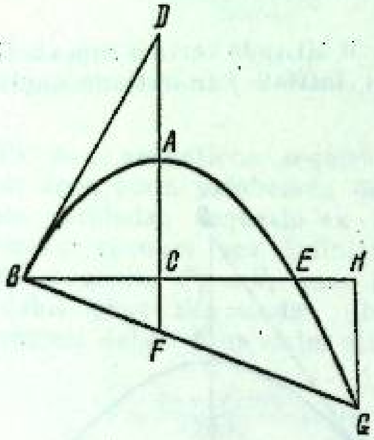


Fig. 4.

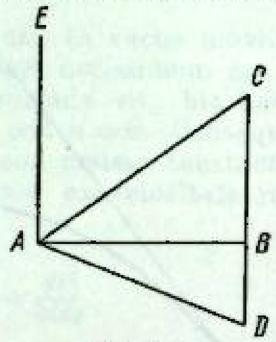


Fig. 5.

nihilo et habebitur $aa-bb-2bc=0$, ergo $aa+cc=bb+2bc+cc$. Consequenter $\sqrt{aa+cc}=b+c$. Unde sequens fluit constructio. Sit AB linea horizontalis, AE verticalis, AD planum inclinatum angulum DAB cum horizonte constituens, AC directio proiectionis quaesita (fig. 5). Ducatur verticalis DC et sumatur AB pro sinu toto a, erit $BC=b$ et $BD=c$ et $AD=\sqrt{aa+cc}$. Oportet ergo, ut sit $BC+BD$, i. e. $DC=AD$. Ergo angulus $DAC=ACD=CAE$, quare directio proiectionis AC angulum DAE, quem planum inclinatum cum verticali constituit, bisecare debet.

§ XV. Pergo ad tempora determinanda, inspiciatur figura § III. Quaeratur tempus, quo corpus a vertice parabolae A ad locum quemvis M pervenit data abscissa AP. Dictis $AP=x$, $PM=y$ erit $xx=4ky$. Ergo $rm=dy=\frac{xdx}{2k}$ et $Mm=\frac{dx}{2k}\sqrt{4kk+xx}$. Tempusculum autem per Mm $=\frac{dx}{2k}\sqrt{\frac{4kk+xx}{v}}$. Sed $v=\frac{4kk+xx}{4k}$. Ergo hoc tempusculum erit $\frac{dx}{\sqrt{k}}$, cuius integrale exprimit tempus, quo arcus AM traicitur, nempe $\frac{x}{\sqrt{k}}$. Et expressis x et k in scrupulis pedis Rhenani erit tempus $=\frac{x}{250\sqrt{k}}$ minut. secund.

Eodem ergo modo fit motus ad horizontem relatus, ac si corpus eadem celeritate initiali horizontem uniformiter describeret.

§ XVI. Inventa est [in] § XII longitudo iactus super plano horizontali ex data velocitate initiali et angulo elevationis (vide fig. § XII) CBD. Dicta est altitudo velocitati initiali debita f et tangens anguli elevationis b existente sinu toto a et erat longitudo iactus $BE=\frac{4abf}{aa+bb}$. Quum motus corporis in parabola ad horizontem relatus idem sit, ac si corpus in horizonte velocitate, quam habet in vertice parabolae, incederet. Velocitas autem in vertice tanta est, quanta acquiritur lapsu ex altitudine $\frac{aaf}{aa+bb}$, unde tempus erit

$$=\frac{4abf\sqrt{aa+bb}}{(aa+bb)\,a\sqrt{f}}=\frac{4b\sqrt{f}}{\sqrt{aa+bb}}$$

seu expressa f in scrupulis pedis Rhenani erit tempus proiectionis

$$=\frac{2b\sqrt{f}}{125\sqrt{aa+bb}} \text{ minut. secund.}$$

Fiat ergo ut sinus totus ad sinum anguli elevationis ita $\frac{2\sqrt{f}}{125}$ in scrupulis pedis Rhenani expressum ad numerum minutorum secundorum. Vel detur loco f longitudo iactus BE, quae dicatur h, erit $f=\frac{(aa+bb)h}{4ab}$, unde tempus erit $=\frac{\sqrt{bh}}{125\sqrt{a}}$ minut. secund. Consequenter erunt tempora proiectionum in ratione composita subduplicata longitudinum iactus et tangentium anguli elevationis.

§ XVII. Super plano inclinato si corpus proiciatur et quaeratur tempus, quo planum attinget. Sit tangens anguli inclinationis plani ad horizontem $=c$ sinu toto extante $=a$ $\left(\text{vide fig. § XIII, ubi } BG \text{ est longitudo iactus} =4f\frac{(b+c)\sqrt{aa+cc}}{aa+bb}\right)$, hinc quaeratur longitudo iactus horizontalis BH demissa perpendiculari GH in horizontem. Fiat ut

$$BF\left(\sqrt{aa+cc}\right) : BC\,(a) = BG\left(4f\frac{(b+c)\sqrt{aa+cc}}{aa+bb}\right) : BH,^{*}$$

quae ergo erit $\frac{4af(b+c)}{aa+bb}$. Unde tempus proiectionis erit

$$=\frac{BH^{*}\cdot\sqrt{aa+bb}}{a\sqrt{f}}=\frac{(4b+4c)\sqrt{f}}{\sqrt{aa+bb}}$$

seu expressa f in partibus millesimis pedis Rhenani erit hoc tempus $=\frac{(2b+2c)\sqrt{f}}{125\sqrt{aa+bb}}$.

* In manuscripto: GH. Correxit G. M.

Fiat ergo ut secans anguli elevationis ad summam tangentium angulorum elevationis et inclinationis plani ita $\frac{2\sqrt{f}}{125}$ in scrupulis Rhenanis expressum ad numerum minutorum quaesitum.

§ XVIII. Introducatur loco velocitatis initialis longitudo iactus BG, quae dicatur $=h$, erit

$$f=\frac{h\,(aa+bb)}{(4b+4c)\sqrt{aa+cc}}.$$

Consequenter tempus proiectionis erit $=\frac{2\sqrt{h\,(b+c)}}{\sqrt[4]{aa+cc}}$ et expressa h in scrupulis erit tempus in minutis secundis expressum

$$=\frac{\sqrt{bh+ch}}{125\sqrt[4]{aa+cc}} \text{ minut. secund.}$$

Ex hisce, quae expositae hic sunt, propositionibus circa motum proiectorum in vacuo omnia, quae circa iactus globorum ex tormentis explosorum eorumque tempora et velocitates proponi possunt, solvi poterunt. Et cum quinque sint res, (I) angulus elevationis tormenti cum horizonte, (II) angulus plani cum horizonte, (III) velocitas initialis, (IV) longitudo iactus et (V) tempus, poterunt semper datis tribus duo reliqua inveniri.

---

*DE EFFLUXU AQUAE EX TUBIS CYLINDRICIS UTCUNQUE INCLINATIS ET * INFLEXIS*

§ I. Quae hucusque contemplati sumus vasa, e quibus aqua effluat, eiusmodi omnia fuere, ut circa axem verticalem quaquaversus aequaliter fuerint diffusa. Iam [contemplemur], qua lege aqua erumpat ex tubis vel inclinatis ad horizontem vel inflexis aut incurvatis. Quod quidem attinet ad inclinatos tubos, facile posse colligi videtur ex notis de descensu super plano inclinato principiis aquam inde effluxuram ea prorsus velocitate, qua ex tubo verticali eiusdem altitudinis, cuiusque foramen ad basin eandem habet [rationem].

Ne autem temere quid admittere videar, tubos inclinatos et nostrae theoriae subiciam.

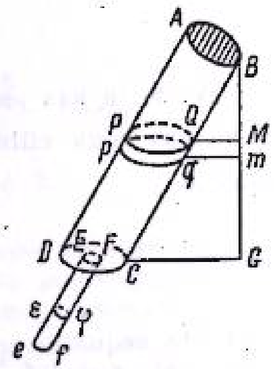


Fig. 1.

§ II. Sit itaque tubus inclinatus cylindricus $ABCD$ (fig. 1). Sit eius sectio recta AB, sectio autem horizontalis fundum DC, quod lumine EF quoque elliptico sit pertusum. Sit vena effluens $EFfe$, eius sectio recta $\varepsilon\varphi$. Ducatur verticalis BG et horizontalis CG, ut habeatur angulus inclinationis BCG et ratio sinus totius BC ad sinum anguli inclinationis BG, quam dic α ad β.

Sit ratio sectionis cylindri rectae AB ad sectionem venae rectam $\varepsilon\varphi$ seu, quod eodem recidit, ratio sectionis cylindri horizontalis DC ad aream luminis bb ad cc. Absolute vero bb] assumam pro area sectionis horizontalis et cc pro lumine. Saltim in calculo, in ultima enim aequatione nil praeter rationem remanebit. Sit $PDCQ$ aqua in tubo residua eiusque altitudo GM. Fac BC longitudinem tubi $=a$, $QC=t$. Erit $BG=\frac{\beta a}{\alpha}$ et $GM=\frac{\beta t}{\alpha}$. Decrescat in instanti aqua in tubo elemento $PpqQ$, quod interea effluxit in $EefF$. Erit adeo $Pp=Qq=-dt$, erit $Mm=$ $=-\frac{\beta dt}{\alpha}$.

§ III. Habebitur itaque vis viva interim de novo generata isto descensu elementari ducendo quamlibet guttulam in altitudinem, qua humilior est facta, nempe in $-\frac{\beta dt}{\alpha}$. Quum vero tota aqua aequabiliter descendat, tota massa, quae est $\frac{\beta bbt}{\alpha}$, ducenda est in $-\frac{\beta dt}{\alpha}$ et habebitur $-\frac{\beta\beta bbtdt}{\alpha\alpha}$, elementum vis vivae. Incrementum autem vis vivae hoc instanti ex assumta, qua aqua descendit, velocitate definietur. Sit alti-

* In manuscripto: *EX*. Correxit *G. M.*

tudo generans velocitatem, qua aqua descendit in tubo, v. Erit vis viva aquae $PDCQ = \frac{\beta bbtv}{a}$ adeoque incrementum vis vivae in tubo seu elementum, quo aquae $pDCq$ vis viva eam aquae $PDCQ$ superat, $\frac{\beta bbtdv + \beta bbvdt}{a}$, cui adici debet vis viva, quae interea extra tubum est genita, nempe venae $EefF$ vis viva. Est illa aequalis elemento $PpqQ = -\frac{\beta bbdt}{a}$. Fertur vero velocitate, quae se habet ad velocitatem, qua aqua descendit, ut bb ad cc. Erit ergo altitudo generans eam velocitatem $\frac{b^4v}{c^4}$. Unde resultat vis viva venae interea effluentis $-\frac{\beta b^6vdt}{ac^4}$.

Quare ista constatur aequatio

$$-\frac{\beta\beta bbtdt}{aa} = \frac{\beta bbtdv}{a} + \frac{\beta bbvdt}{a} - \frac{\beta b^6vdt}{ac^4}.$$

Dividendo utrinque [per] $\frac{\beta bb}{a}$ et ponendo, ut nostri est moris, $\frac{b^4}{c^4} - 1 = n$ habebitur ista aequatio

$$-\frac{\beta tdt}{a} = tdv - nvdt.$$

§ IV. Si in ista aequatione introducatur altitudo z generans velocitatem, qua aqua effluit ex foramine, nempe loco v $\frac{c^4z}{b^4}$, habebitur ista aequatic

$$-\frac{\beta b^4tdt}{a} = c^4tdz - nc^4zdt.$$

Si ista aequatio comparetur cum ea, quae pro cylindris erectis inventa erat, reperietur in nostro casu aquam ea velocitate effluxuram, qua effluit ex tubo altitudinis BG et in quo amplitudo se habet ad lumen itidem ut bb ad cc. Scilicet ad altitudines aquae in tubis his aequales aqua aequali effluit velocitate, quemadmodum quidem praevidere facile erat.

§ V. Hinc quoque tempora exinanitionum tuborum inclinatorum deducere in promtu est. Sit tubus inclinatus $ABCD$ huicque aequalis et aeque amplus $FGIH$ (fig. 2), cuius fundum pertusum sit foramine, quod se habeat ad foramen in tubo inclinato ut BE ad BC, ut venae effluentes eiusdem sint crassitudinis.

Sumatur pars tubi erecti $KLIH$ altitudinis $KH = BE$. Ex isto aqua effluens ubique eam habebit velocitatem, quam habet aqua effluens ex inclinato, ubi aqua in tubo eiusdem fuerit altitudinis. Cum ergo venae sint aequales, erunt tempora exinanitionum tuborum ut aqua in quolibet contenta. Aqua vero in utroque est ut BC ad KH.

Tempus ergo effluxus aquae ex tubo inclinato AC se habebit ad tempus effluxus ex tubo erecto eiusdem altitudinis KI ut BC ad KH, i. e. ut BC ad BE. Tempus autem effluxus ex tubo FI se habet ad tempus ex tubo KI ut $\sqrt{FH}$ ad $\sqrt{KH}$, i. e. ut $\sqrt{BC}$ ad $\sqrt{BE}$. Ergo componendo erit tempus effluxus ex tubo inclinato ad tempus effluxus ex tubo eodem

erecto ut $\sqrt{BC}$ ad $\sqrt{BE}$, i. e. sunt in ratione subduplicata sinus totius ad sinum anguli inclinationis.

Consequenter tempus evacuationis tubi inclinati est reciproce ut radix quadrata sinus anguli inclinationis.

§ VI. Eodem modo res se habebit cum tubis inclinatis, quorum bases DC cum lateribus angulum rectum aut alium constituunt quemcunque (fig. 3), si nimirum amplitudo tubi AB perquam fuerit exigua respectu altitudinis BH. Quomodocunque enim tubus inclinetur, vena effluens eiusdem erit crassitudinis. Idcirco igitur eundem praestabit ista basis effectum ac horizontalis cum foramine proportionali.

De industria autem adieci, si amplitudo tubi perexigua fuerit respectu altitudinis BH. Quum enim in casu basis non horizontalis aqua ex tubo omnis nunquam effluat, sed cavitas FCG perpetuo plena perseveret, nisi ista aqua rationem perexiguam habuerit ad aquam universam, propositio consistere nequit. In his ergo et similibus

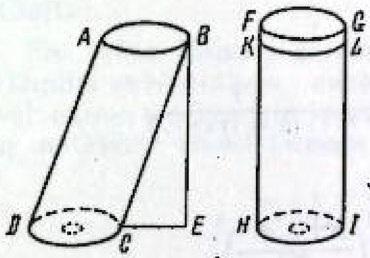


Fig. 2.

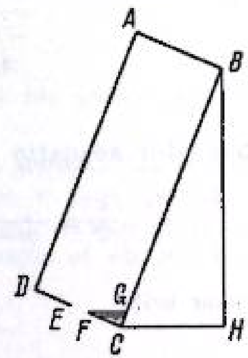


Fig. 3.

casibus, si rem exacte definire volueris, in id probe attendendum est, quantum aquae cessante effluxu restet. Illa aqua in computum duci nunquam debet, sed ad instar solidi ad vas pertinentis spectari.

. . . . *

[§ XVIII. ...] Quod incrementum aequale erit ponendum ei, quod [in] § XVI inventum erat, nempe $-bbtdt$. Obtinebitur igitur ista aequatio

$$bbtdv + bbvdt - b^6vdt : c^4 = -bbtdt.$$

Quae aequatio si dividatur per bb et $b^4 : c^4 - 1$ aequale ponatur brevitatis ergo n, habebitur

$$tdv + tdt = nvdt.$$

§ XIX. Ut iam ista aequatio reducatur atque integrabilis reddatur, poterit ea in aliam commutari, in qua indeterminatae sunt separabiles, atque tum ad logarithmos primo et ab his dein ad aequationem algebraicam perveniri. Istud autem obtinebitur ponendo $v = tp$, quemadmodum Celeberrimus D. Bernoullius primus monstravit. Deinde autem hoc modo reducetur ea ad algebraicam. Collocentur ii termini, in quibus v et t simul existunt, ex una parte $tdt = nvdt - tdv$. Dividatur utrinque per t^{n+1}, habebitur ista aequatio, in qua utrumque membrum erit integrabile,

* In manuscripto hic plagulae quadrans deest. — *G. M.*

$$\frac{dt}{t^n} = \frac{nvdt - tdv}{t^{n+1}},$$

quae integrata dat hanc

$$\frac{-1}{(n-1)\,t^{n-1}} = \frac{-v}{t^n} + A.$$

Significat A constantem, quae addi vel demi debet, ut aequatio, quae est universalior, ad nostrum casum reducatur. Comprehendit enim ea sub se generaliter velocitates aquae in cylindro descendentis, quacunque velocitate in AB descensum inchoaverit.

§ XX. Si iam in nostro casu descensus in AB a quiete incepisse consideretur, pro A ponendus erit talis valor, ut posito $t=a$ tum v fiat $=0$. Quocirca erit

$$A = \frac{-1}{(n-1)\,a^{n-1}},$$

ut ita ista habeatur aequatio

$$\frac{v}{t^n} = \frac{1}{(n-1)\,t^{n-1}} - \frac{1}{(n-1)\,a^{n-1}}.$$

Consequenter erit

$$v = \frac{t}{n-1}\left(\frac{a^{n-1} - t^{n-1}}{a^{n-1}}\right).$$

Ex qua aequatione velocitas aquae, quousque ea cunque descenderit, facile erui atque inveniri poterit, scilicet altitudo, ex quo grave cadendo acquirit velocitatem quaesitam.

§ XXI. Atque istud in omnibus casibus cuiusvis foraminis facile reperietur praeter unicum hunc casum, ubi est $n=1$ seu $b^4 = 2c^4$, qui aliquanto plus difficultatis involvere videtur. Quippe in qua substitutione ista resultat aequatio

$$[v] = \frac{t}{0}\left(\frac{a^0 - t^0}{a^0}\right),$$

ex qua plane nihil concludi potest.

Confugiendum ergo erit pro isto casu ad differentialem $tdt = nvdt - tdv$, quae in istam abit, ponendo $n=1$, $tdt = vdt - tdv$ et dividendo per tt in hanc a logarithmis dependentem

$$\frac{dt}{t} = \frac{vdt - tdv}{tt}.$$

Quae ergo integrata supposita hyperbolae quadratura abit in istam $\lg t = -\frac{v}{t} + A$. Ut posito $t=a$ fiat $v=0$, loco A subrogandus erit iste valor $\lg a$.

Erit ergo $\lg t = \lg a - \frac{v}{t}$ seu $\lg a - \lg t = \frac{v}{t}$ denique $v = t\lg a - t\lg t$.

§ XXII. Circa istam velocitatum determinationem hoc imprimis est notatu dignum, quod pro qualibet substitutione loco n facta, i. e. pro singulis foraminibus, aequatio inventa quoad ordinem immutetur, ut pro alio foramine simplicissima algebraica, pro aliis maxime compositae plurimarum dimensionum, pro isto autem foramine, quod se habet ad basin cylindri ut 1 ad $\sqrt{2}$, nequidem algebraica, sed exponentialis reperiatur aequatio.

§ XXIII. Cognita velocitate, qua aqua in tubo seu cylindro descendit, innotescet inde quoque velocitas, qua aqua ex vase exilit, seu altitudo, quam vocavi z, ex qua grave acquirit cadendo velocitatem aequalem ei, qua aqua ex vase erumpit. Nimirum, cum sit $z = b^4 v : c^4 = (n+1)v$, erit

$$z = \frac{n+1}{n-1}\, t\, \frac{a^{n-1} - t^{n-1}}{a^{n-1}}.$$

Unde deduci potest velocitas, qua aqua in quovis cylindro cuiusvis foraminis effluit.

§ XXIV. Pro valore ipsius z autem tres aequationes generales assumi debent pro triplici substitutione, quae loco n fieri potest. Est enim n vel maius vel minus vel aequale ipsi unitati. Primo obtinente aequatio superior non mutabitur quoad formam adeoque et obtinebit hic

$$z = \frac{n+1}{n-1}\, t\, \frac{a^{n-1} - t^{n-1}}{a^{n-1}}.$$

Sin vero secundo n minus fuerit quam 1, habebitur ista pro illis casibus aequatio

$$z = \frac{1+n}{1-n}\, t\, \frac{-t^{1-n} + a^{1-n}}{t^{1-n}} = \frac{1+n}{1-n}\, t^n(-t^{1-n} + a^{1-n}) = \frac{1+n}{1-n}(-t + a^{1-n}t^n).$$

Sin denique fuerit $n=1$, ex § XXI invenietur ista aequatio $z = 2t(\lg a - \lg t)$.

§ XXV. Cum sit t semper minor quam a, ponatur $t = qa$, nempe q designabit rationem ipsius t ad a. Ideoque semper erit $q < 1$. Ideo autem facio istam substitutionem, quod t nonnisi respectu ipsius a dari queat. Facta nunc ista substitutione erit pro primo genere

$$z = \frac{n+1}{n-1}\, a\,(q - q^n),$$

pro secundo genere, si $n < 1$,

$$z = \frac{1+n}{1-n}\, a\,(q^n - q).$$

Si tertio fuerit $n=1$, reperietur $z = -2aq\lg q$. Ubi, si pro q substituantur numeri, pro $\lg q$ sumi debent illorum logarithmi hyperbolici sive illi, quibus vulgo utimur, Vlaquii multiplicandi sunt per hunc numerum 2,302587123917691,* ceu a me ex calculo exactissimo instituto inventum est.

* Hic numerus 2, 302585093 esse debet. — *G. M.*

§ XXVI. Quum hactenus nonnisi duo isti casus, ubi foramen fundum exhaurit et ubi illud infinite est parvum, feliciter sint considerati, et nostram aequationem hisce casibus applicabo et, quomodo effluxus ibi se habeat, ex ea deducam.

Ut ponam primo foramen aequale basi cylindri, ponendum est in secunda aequatione pro n 0. Eritque $z=1(a-t)=a-t$. Unde palam est aquam ea semper velocitate effluere, quantam habet grave, cum ex altitudine $a-t$, i. e. ex ea altitudine, ex qua aqua iam cecidit, descendit. Unde patet aquam hoc foramine effluere seu potius delabi ad instar corporis solidi. Id quod egregie non solum cum experimentis, verum quoque cum omnium, quantum scio, sententiis convenit.

§ XXVII. Alter est casus, qui notatu dignus est, quando foramen infinite exiguum respectu amplitudinis tubi existit. Ut huic aequationem generalem applicem, ponendum erit $n=\infty$. Quae substitutio antequam fiat, necesse est, ut aequatio trium inventarum [in] § XXV prima ad logarithmos reducatur. Quo facto habebitur ista

$$\lg z=\lg(n+1)-\lg(n-1)+\lg a+\lg q+\lg(1-q^{n-1}).$$

Quod vero sit

$$\lg(1-q^{n-1})=\lg(1-q)+\lg(q^{n-2}+1\cdot q^{n-3}+1^2\cdot q^{n-4}+\text{etc.})$$

atque hoc in casu $q=1$, vas enim perpetuo repletum manebit ob foramen atque idcirco effluxum aquae infinite parvum. Erit $\lg(q^{n-2}+1\cdot q^{n-3}+$ $+\text{etc.})$, huius seriei termini omnes inter se aequales et cum illorum numerus sit $n-1$, erit

$$\lg(q^{n-2}+1\cdot q^{n-3}+\text{etc.})=\lg(n-1)\,q^{n-2}=\lg(n-1)+(n-2)\lg q.$$

Unde integra aequatio abit in hanc:

$$\lg z=\lg(n+1)+\lg a+\lg q+\lg(1-q)+(n-2)\lg q.$$

Quia autem $q=1$, evanescent termini $\lg q$ et $(n-2)\lg q$. Atque $\lg(n+1)+\lg(1-q)$* evanescet, quoque cum illius logarithmus est ∞, huius autem $-\infty$. Ut ita remaneat $\lg z=\lg a$, i. e. $z=a$.

Id quod indicat celeritatem semper esse tantam, ac si ex altitudine tubi delapsum fuisset libere, seu tantam, ut ad altitudinem aquae rursus ascendere posset.

§ XXVIII. Hoc ergo in casu aqua actutum ab initio tanta velocitate effluit, qua posset ad altitudinem aquae ascendere. In reliquis casibus omnibus celeritas in primo effluxus initio est nulla, posito enim $t=a$ seu $q=1$ resultat $z=0$.

Quod licet cum experientia minus conspirare videatur, nequaquam theoriam labefactare valet, quum enim in theoria aqua in infinitum, i. e. in guttulas infinite parvas divisa supponatur. Explicatio illius dubii hinc facile petitur. Aquae enim, cuius guttae non infinite sunt exiguae, sed alicuius non contemnendae molis, primo instanti guttula, ea autem infinite parva, ubique a quiete motum inchoavet atque adeo a foramine recta humi decideret, licet quidem foraminis directio non deorsum spectet. Quod vero aqua non dividi in infinitum queat, prima illa guttula decidere statim nequit ob cohaesionem atque connexionem cum sequente

* In manuscripto: $\lg(n+1)+\lg 1$. Correxit *G. M.*

aqua. Quae guttula ergo cum expectet, donec notabilis gutta expellatur, ab aqua sequente motum recipiat, necesse est.

§ XXIX. Proinde, si pro t cyphra ponatur, resultat $z=0$. Quocirca et ultima gutta ex vase motum a quiete incipere debet, praeter unicum illum casum, ubi foramen totum exhaurit fundum. Quo in casu celeritas ibi est omnium maxima, quippe qua aqua ad altitudinem totius vasis assurgere posset.

Cum igitur ita res se habeat cum aquae effluxu, ut prima ultimaque velocitas sint nihil, necesse est, ut alicubi sit velocitas aquae effluentis maxima, quam itaque ac ubi ea est, hic determinabo.

§ XXX. Ut maxima velocitas definiatur, necesse est, ut aequatio exprimens valorem ipsius z differentietur supposita z constante. Unde eruetur valor ipsius t seu q, id quod indigitat locum maximae velocitatis.

In prima aequatione, ubi $n>1$,

$$z=\frac{n+1}{n-1}\,a\,(q-q^n)$$

reperietur

$$1=nq^{n-1}\quad\text{seu}\quad q=\frac{1}{n^{\frac{1}{n-1}}}.$$

Adeoque

$$t=\frac{a}{n^{\frac{1}{n-1}}}.$$

Ipsa autem

$$z=\frac{(n+1)\,a}{\sqrt[n-1]{n^n}}.$$

In casu secundo, ubi $n<1$, est

$$z=\frac{1+n}{1-n}\,a\,(q^n-q).$$

Quo in casu maxima erit velocitas, quando est $q=\sqrt[1-n]{n}$ atque adeo $t=a\sqrt[1-n]{n}$. Proinde ergo

$$z=(1+n)a\sqrt[1-n]{n^n}.$$

In casu denique tertio, ubi $n=1$, atque $z=-2aq\lg q$. Locus, ubi celeritas est maxima, hoc in casu erit ibi, ubi est $q=\frac{1}{g}$, g significat numerum, cuius logarithmus est unitas. Erit igitur $z=\frac{2a}{g}$. Numerus autem g, cuius logarithmus unitas est, inventus est a me aequalis 2,7182818* deficiente aut abundante ne millionesima particula. Quare est

* In manuscripto: 2,7182817. Hic et in duabus sequentibus formulis numerum hunc correxit *G. M.*

$$q = \frac{10\,000\,000}{27\,182\,818} \quad \text{et} \quad z = \frac{20\,000\,000\,a}{27\,182\,818}.$$

§ XXXI. Ut ista, quae circa maximas velocitates ex mea theoria deducta sint, experientia confirmare liceat, oportet, ut ad id adhibeantur cylindri, quorum quidem fundus est integer, verum cylindrus ad fundum foramine horizontali pertusus, ut aqua exinde secundum directionem horizonti parallelam [effluat]. Quo facto ex amplitudine iactus de velocitate aquae erumpentis concludi poterit atque adeo de maxima velocitate quoque. Quantus ergo sit iactus nota velocitate, qua aqua erumpit, ex notis principiis facile determinabitur.

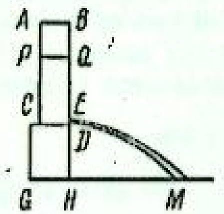


Fig. 4.

§ XXXII. Sit itaque cylindrus $ABDC$ foramine DE pertusus, insistat ille scamno $CGHD$ sitque GHM planum horizontale (fig. 4). Descenderit aqua in tubo in PQ usque, describatque aqua effluens parabolam EM. Sit $AC = a$, $PC = t$ et altitudo generans velocitatem, qua aqua effluit, sit z. Sit praeterea altitudo scamni $HD = e$. Erit DH axis parabolae atque z erit distantia foci a vertice D et consequenter parameter erit $4z$. Erit itaque ex natura parabolae $HM = 2\sqrt{ez}$. Est ergo longitudo iactus HM in subduplicata altitudinis z ratione, i. e. in simplici velocitatis, qua aqua effluit. Quare linea HM inservire potest pro mensura velocitatum.

§ XXXIII. Si iam pro z substituatur valor inventus [in] § XXX, habebitur iactus longissimus. Primo casu, ubi $n > 1$, inventum erat

$$z = \frac{(n+1)\,a}{\sqrt[n-1]{n^n}},$$

quo valore substituto invenietur

$$HM = 2\sqrt{\frac{(n+1)\,ae}{n^{\frac{n}{n-1}}}}.$$

In casibus reliquis, ubi $n = 1$ vel < 1, istud experimentum aegre institueretur propter foramen nimis amplum, quod cylindri lateribus vix incideretur. Nihilominus experimentum succedet, si loco cylindri sumatur parallelipipedum, ex cuius latere quocunque facile frustum cuiusvis magnitudinis exscinditur. In casu ergo $n < 1$ reperietur

$$HM = 2\sqrt{(1+n)\,ae^{\sqrt[1-n]{n^n}}},$$

atque in casu $n = 1$ erit

$$HM = \frac{2000}{1160}\sqrt{ae}.^{*}$$

---

* In manuscripto in denominatore numerus 1165 est. Correxit *G. M.*

§ XXXIV. Quod insuper de maximis velocitatibus notandum est, eas alicubi habere minimum. Quum enim velocitas maxima in utroque casu foraminis et infinite parvi et fundo aequalis tanta est, ut possit ad altitudinem tubi ea ascendere, reliquis in casubus autem minor, planum est fore casum, quo maxima velocitas sit minima omnium velocitatum maximarum in reliquis omnibus casubus. Ad hanc inveniendam observandum est esse semper in maximae velocitatis hypothesi $z = \frac{1+n}{n}t$, est enim

$$t = \frac{a}{\sqrt[n-1]{n}}.$$

Facta differentiatione, posita z constante, n et t vero variabilibus habebitur

$$0 = \frac{dt + ndt + tdn}{n} - \frac{tdn + ntdn}{nn}.$$

Ergo

$$dt\,(n + nn) = tdn = \frac{adn}{\sqrt[n-1]{n}}.$$

Erit autem

$$\lg t = \lg a - \frac{1}{n-1}\lg n,$$

unde

$$dt = \frac{adn \lg n}{(n-1)^2\sqrt[n-1]{n}} - \frac{adn}{(n-1)\,n\sqrt[n-1]{n}},$$

quo valore substituto in aequatione inventa reperietur

$$\frac{n \lg n}{(n-1)^2} = \frac{2n}{nn-1},$$

i. e. $2n - 2 = (n+1)\lg n$.

Ex qua aequatione erui debet valor ipsius n, ad id, ut obtineatur ratio foraminis ad basin cylindri, ubi velocitas maxima est minimum quoddam. Exinde vero, cum nulla arte radix inveniri posset, palpando res est peragenda idque felici cum successu, patet enim n esse 1. Hoc enim in casu obtinetur iterum $n = 1$, id quod indicio est casum quaesitum minimi esse illum ipsum casum, de quo iam plura attuli, nempe ubi cc est ad bb ut 1 ad $\sqrt{2}$.

§ XXXV. Pergo iam ad id, quod hac in materia summum est et ex quo integra haec theoria vires suas atque excellentiam consequitur, nempe ad calculum temporum effluxuum aquae ex tubis. Etenim ex supputatis temporibus accuratissime theoriam cum experientia conferre illiusque adeo veritatem atque genuinitatem tanquam ad lapidem Lydium explorare licet.

Ut igitur tempora effluxuum rite determinem, ea ad fixum aliquod tempus atque notum referri oportet; pro hoc assumo tempus descensus gravis ex altitudine tubi a atque investigabo rationem temporum effluxuum ad tempus istius descensus per a.

Proinde, cum grave tempore unius minuti secundi descendat ex altitudine 15 637 scrupulorum seu partium millesimarum pedis Rhenani, poterit data tubi altitudine in huiusmodi mensura etiam tempus absolute indigitari.

§ XXXVI. Ut autem legitimam rationem inter duo ista tempora inveniam ex datis spatiis et velocitatibus, oportet, ut utrobique eandem pro tempore mensuram assumam. Assumo igitur pro tempore spatium applicatum ad celeritatem, unde pro tempore descensus gravis ex altitudine a reperietur $2\sqrt{a}$.

Sit a iam data in millesimis pedis Rhenani. Cum tempora sint in ratione subduplicata altitudinum, erit tempus descensus gravis ex altitudine $a\sqrt{\frac{a}{15\,637}}$, i. e. $\frac{\sqrt{a}}{125}$ minutorum secundorum. Erit itaque ratio $2\sqrt{a}$ ad $\frac{\sqrt{a}}{125}$ ut 250 ad 1. Potero idcirco tempora invenienda dividere per 250, quo facto habiturus sum numerum minutorum secundorum pro tempore effluxus.

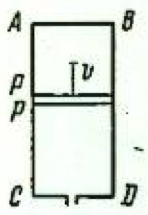


Fig. 5.

§ XXXVII. Investigemus ergo tempus descensus aquae in tubo (fig. 5)* $ABDC$ ex A in P. Habetur velocitas aquae, qua in tubo descendit in quovis loco P, nempe radix quadrata ex altitudine v. Erit ergo tempusculum per elementum Pp

$$= \frac{-dt}{\sqrt{v}} = \frac{-dt\sqrt{(n-1)\,a^{n-1}}}{\sqrt{t\,(a^{n-1}-t^{n-1})}}$$

pro illis casibus, ubi $n > 1$. Si n fuerit minus quam 1, ista habebitur formula pro tempusculo per elementum Pp

$$\frac{-dt\sqrt{(1-n)\,t^{1-n}}}{\sqrt{t\,(a^{1-n}-t^{1-n})}}.$$

Pro unico residuo casu, ubi $n=1$, tempus, uti mihi quidem videtur, haberi nequit.**

§ XXXVIII. Prior tempusculi per Pp expressio est

$$\frac{-dt\sqrt{(n-1)\,a^{n-1}}}{\sqrt{t\,(a^{n-1}-t^{n-1})}},$$

quod si integretur, repraesentabit tempus effluxus aquae in tubo in P usque.

Absolute autem ista quantitas integrari nequit. Quare contenti esse debemus tempora effluxuum saltem per series exhibuisse.

Ad formulam simpliciorem reddendam pono $t=pp$ adeoque $\sqrt{t}=p$ et $\frac{dt}{\sqrt{t}}=2dp$. Unde habetur pro tempore descensus per AP

$$\sqrt{(n-1)\,a^{n-1}}\int\frac{-2dp}{\sqrt{a^{n-1}-p^{2n-2}}}=2\sqrt{(n-1)\,a^{n-1}}\int -dp\,(a^{n-1}-p^{2n-2})^{-1/2}.$$

* In manuscripto figura haec ab editore delineata deest. — G. M.

** Cf. § LIII. — G. M.

Quae potentia si methodo Wallisiana in seriem convertatur, habebitur quivis terminus integrabilis. Peracta ergo integratione et loco pp restituto valore t, habebitur pro tempore descensus ex altitudine AP ista series

$$A-2\sqrt{(n-1)\,t}\left(1+\frac{1\cdot t^{n-1}}{2\cdot 1\cdot(2n-1)\,a^{n-1}}+\frac{1\cdot 3\cdot t^{2n-2}}{4\cdot 1\cdot 2\cdot(4n-3)\,a^{2n-2}}+\right.$$
$$\left.+\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot t^{3n-3}}{8\cdot 1\cdot 2\cdot 3\cdot(6n-5)\,a^{3n-3}}+\text{etc.}\right),$$

in qua lex progressionis ex sola inspectione facile patet.

§ XXXIX. Restat adhuc determinanda constans A. Id quod ex eo efficietur, quod existente $t=a$ tum tempus debeat evanescere. Erit itaque

$$A=2\sqrt{(n-1)\,a}\left(1+\frac{1}{2\cdot 1\cdot(2n-1)}+\frac{1\cdot 3}{4\cdot 1\cdot 2\cdot(4n-3)}+\right.$$
$$\left.+\frac{1\cdot 3\cdot 5}{8\cdot 1\cdot 2\cdot 3\cdot(6n-5)}+\text{etc.}\right).$$

Unde tempus lapsus gravis ex altitudine a se habebit ad tempus descensus aquae in tubo ex A in P ut $2\sqrt{a}$ ad

$$2\sqrt{n-1}\left(a^{1/2}-t^{1/2}+\frac{1\cdot\left(a^{n-\frac{1}{2}}-t^{n-\frac{1}{2}}\right)}{2\cdot 1\cdot(2n-1)\,a^{n-1}}+\frac{1\cdot 3\cdot\left(a^{2n-\frac{3}{2}}-t^{2n-\frac{3}{2}}\right)}{4\cdot 1\cdot 2\cdot(4n-3)\,a^{2n-2}}+\right.$$
$$\left.+\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot\left(a^{3n-\frac{5}{2}}-t^{3n-\frac{5}{2}}\right)}{8\cdot 1\cdot 2\cdot 3\cdot(6n-5)\,a^{3n-3}}+\text{etc.}\right).$$

Expressis autem a et t in millesimis pedis Rhenani habebitur tempus descensus aquae in tubo in P usque tot minutorum secundorum

$$\frac{\sqrt{n-1}}{125}\left(a^{1/2}-t^{1/2}+\frac{1\cdot\left(a^{n-\frac{1}{2}}-t^{n-\frac{1}{2}}\right)}{2\cdot 1\cdot(2n-1)\,a^{n-1}}+\frac{1\cdot 3\cdot\left(a^{2n-\frac{3}{2}}-t^{2n-\frac{3}{2}}\right)}{4\cdot 1\cdot 2\cdot(4n-3)\,a^{2n-2}}+\right.$$
$$\left.+\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot\left(a^{3n-\frac{5}{2}}-t^{3n-\frac{5}{2}}\right)}{8\cdot 1\cdot 2\cdot 3\cdot(6n-5)\,a^{3n-3}}+\text{etc.}\right).$$

§ XL. Si loco t subrogetur qa, reperitur pro tempore descensus aquae in P minutorum secundorum

$$\frac{\sqrt{(n-1)\,a}}{125}\left(1-q^{1/2}+\frac{1\cdot\left(1-q^{n-\frac{1}{2}}\right)}{2\cdot 1\cdot(2n-1)}+\frac{1\cdot 3\cdot\left(1-q^{2n-\frac{3}{2}}\right)}{4\cdot 1\cdot 2\cdot(4n-3)}+\text{etc.}\right).$$

Si in ista expressione ponatur $q=0$, habebitur totum exinanitionis tempus, scilicet minutorum secundorum

$$\frac{\sqrt{(n-1)a}}{125}\left(1+\frac{1}{2\cdot 1\cdot(2n-1)}+\frac{1\cdot 3}{4\cdot 1\cdot 2\cdot(4n-3)}+\frac{1\cdot 3\cdot 5}{8\cdot 1\cdot 2\cdot 3\cdot(6n-5)}+\text{etc.}\right).$$

Hinc apparet manentibus q et n, id est et ratione foraminis ad basin et altitudinis aquae residuae ad integram vasis altitudinem, tempora descensuum per similes altitudines esse in ratione subduplicata altitudinum tuborum, in qua ratione quoque erunt tempora integrarum exinanitionum, si saltem foramina ad bases eandem servent rationem.

§ XLI. Liceat iam ex ista inventa tempora exprimente formula quaedam deducere corollaria. Quae quidem rigore geometrico a vero aberrant, verum tamen in praxi et experimentis ad instar certissimorum spectari possunt. Inde enim ea derivo, quod pono foramen tam exiguum, ut n in tantum excrescat, ut in inventa serie termini praeter primum omnes praeter alicuius momenti errorem negligi possint. Hisce ergo in casubus habebitur numerus minutorum secundorum, quibus aqua in P descendit,

$$\frac{\sqrt{n-1}}{125}(\sqrt{a}-\sqrt{t}).$$

Variante itaque t erunt tempora ut $\sqrt{a}-\sqrt{t}$ manente n, atque tempus totius effluxus se habebit ad tempus descensus in P usque ut $\sqrt{a}$ ad $\sqrt{a}-\sqrt{t}$. Si fuerit $t=\frac{1}{2}a$, erit tempus totius exinanitionis ad tempus dimidiae duntaxat ut $\sqrt{2}$ ad $\sqrt{2}-1$, i. e. quam proxime ut 17 ad 5.

§ XLII. Ubi celeritas aquae erumpentis maxima est, inventa fuit

$$t=\frac{a}{n^{\frac{1}{n-1}}}.$$

Erit igitur tempus effluxus aquae, donec effluat velocitate maxima, minutorum secundorum

$$\frac{\sqrt{(n-1)a}}{125}\left(1-\frac{1}{\sqrt{n^{\frac{1}{n-1}}}}\right).$$

Unde in quovis casu, ubi n coeteros seriei terminos respectu primi evanescentes reddit, tempus usque ad maximam velocitatem supputare licet. Verum ista nonnisi eis in casubus applicari volo, ubi n perquam est magnum, et n eo maior esse debet, quo exactius tempus exhibere volueris.

§ XLIII. Altera formula tempus descensus aquae usque ad altitudinem t [exprimens] erat

$$\frac{-dt\sqrt{(1-n)t^{1-n}}}{\sqrt{t}(a^{1-n}-t^{1-n})}.$$

Si ista formula tractetur, ut altera reperietur pro tempore descensus quaesiti,

$$A-\frac{2\sqrt{(1-n)t^{2-n}}}{\sqrt{a^{1-n}}}\left(\frac{1}{2-n}+\frac{1\cdot t^{1-n}}{2\cdot 1\cdot(4-3n)a^{1-n}}+\frac{1\cdot 3\cdot t^{2-2n}}{4\cdot 1\cdot 2\cdot(6-5n)a^{2-2n}}+\text{etc.}\right).$$

Constans ergo A erit

$$2\sqrt{(1-n)a}\left(\frac{1}{2-n}+\frac{1}{2\cdot 1\cdot(4-3n)}+\frac{1\cdot 3}{4\cdot 1\cdot 2\cdot(6-5n)}+\right.$$
$$\left.+\frac{1\cdot 3\cdot 5}{8\cdot 1\cdot 2\cdot 3\cdot(8-7n)}+\text{etc.}\right).$$

Qui valor quoque exprimit tempus totius aquae effluxus ex vase cylindrico. Ut adeo exposita a in millesimis pedis Rhenani tempus totius exinanitionis sit minutorum secundorum

$$\frac{\sqrt{(1-n)a}}{125}\left(\frac{1}{2-n}+\frac{1}{2\cdot 1\cdot(4-3n)}+\frac{1\cdot 3}{4\cdot 1\cdot 2\cdot(6-5n)}+\text{etc.}\right).$$

§ XLIV. Si iam ponamus $n=0$, ut inveniamus tempus effluxus aquae, quando integer cylindri fundus adimitur, habebimus pro temporis huius ratione ad tempus descensus gravis ex eadem altitudine hanc rationem

$$\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2\cdot 1\cdot 4}+\frac{1\cdot 3}{4\cdot 1\cdot 2\cdot 6}+\frac{1\cdot 3\cdot 5}{8\cdot 1\cdot 2\cdot 3\cdot 8}+\text{etc.}\right) \text{ ad } 1.$$

Quae ratio est aequalitatis, series quippe subdupla est huius

$$1+\frac{1}{2\cdot 1\cdot 2}+\frac{1\cdot 3}{4\cdot 1\cdot 2\cdot 3}+\frac{1\cdot 3\cdot 5}{8\cdot 1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}+\text{etc.},$$

quae aequalis est 2.

Unde apparet aquam ex cylindro, cum integra basis demitur, ad instar corporis solidi delapsuram.

§ XLV. Poterit alio insuper modo ad seriem exprimentem tempus perveniri, hoc modo. In paragrapho XXXVIII erat quantitas integranda haec

$$2\sqrt{(n-1)a^{n-1}}\int\frac{-dp}{\sqrt{a^{n-1}-p^{2n-2}}}.$$

Si ponatur in ea $p^{n-1}=r$, erit $p=r^{\frac{1}{n-1}}$ adeoque

$$dp=\frac{1}{n-1}r^{\frac{2-n}{n-1}}dr.$$

Unde formula integranda [erit]

$$2\sqrt{\frac{a^{n-1}}{n-1}}\int\frac{-r^{\frac{2-n}{n-1}}dr}{\sqrt{a^{n-1}-rr}}.$$

Hic si ponatur

$$\sqrt{a^{n-1}-rr}=a^{\frac{n-1}{2}}-rs,$$

ut irrationalitas evanescat, habebitur tunc binomium quoddam ad potestatem elevatam. Quod in seriem ope interpolationum Wallisii convetsum atque in differentialem quantitatem ductum integrari poterit, ut habeatur series tempus exprimens. Eam autem in generali extensione sumtam, ubi ad tempus cuiusvis effluxus applicari potest, hic ob prolixitatem eius omitto. Applicatam vero eam ad tempus totius effluxus hic habe

$$2\sqrt{(n-1)a}\,\sqrt[n-1]{2}\Big(1-\frac{1}{(n-1)\cdot 1\cdot(2n-1)}+$$

$$+\frac{1\cdot n}{(n-1)^2\cdot 1\cdot 2\cdot(4n-3)}-\frac{1\cdot n\,(2n-1)}{(n-1)^3\cdot 1\cdot 2\cdot 3\cdot(6n-5)}+\text{etc.}\Big),$$

in qua serie signa $+$ et $-$ alternantur.

§ XLVI. Haec ergo series multo magis convergit ac superior duas ob rationes. Primo quod termini alternativi signo $-$ sunt affecti, quo efficitur, ut quod unus terminus ponit, alter rursus tollat. Altera ratio est, quod n sit in denominatore duarum dimensionum hic, cum in superiore saltim fuerit unius. Atque hanc ob rationem, potiori iure loco totius seriei primum duntaxat terminum assumere licet, modo n alicuius notabilis magnitudinis exstet.

§ XLVII. Tempus autem absolutum exposita a in partibus millesimis pedis Rhenani erit tot

$$\frac{\sqrt{(n-1)a}}{125}\sqrt[n-1]{2}\Big(1-\frac{1}{(n-1)\cdot 1\cdot(2n-1)}+\frac{1\cdot n}{(n-1)^2\cdot 1\cdot 2\cdot(4n-3)}-$$

$$-\frac{1\cdot n(2n-1)}{(n-1)^3\cdot 1\cdot 2\cdot 3\cdot(6n-5)}+\text{etc.}\Big)\ \text{minutorum secundorum.}$$

Si iam velimus ob n notabilis quantitatis terminos praeter primum omnes negligere, erit tempus evacuationis cylindri

$$\frac{\sqrt{(n-1)a}}{125}\sqrt[n-1]{2}.$$

Quod vero n exprimat rationem quadruplicatam fere diametri foraminis ad basis diametrum, ratione ista vel tantillum excrescente n in immen-

sum confestim excrescat, ut adeo loco $n-1$ absque sensibili errore assumere liceat. [Erit]

$$\frac{\sqrt{na}}{125}\sqrt[n-1]{2}$$

et, cum sit $n=\frac{b^4}{c^4}-1$, poterit et $\frac{b^4}{c^4}$ scribi loco n, ut exprimi queat tempus [per]

$$\frac{bb}{cc\cdot 125}\sqrt{a}\,\sqrt[n-1]{2}$$

seu tantum per

$$\frac{bb}{125cc}\sqrt{a},$$

cum $\sqrt[n-1]{2}$ ab unitate non multum differat.

§ XLVIII. Ad duas istas tempus exprimentes series lubet adhuc tertiam adicere. In § XLV quantitas exprimens indefinite tempus descensus aquae in cylindro ad hanc fuerat reducta

$$2\sqrt{\frac{a^{n-1}}{n-1}}\int\frac{-r^{\frac{2-n}{n-1}}dr}{\sqrt{a^{n-1}-rr}}.$$

Si ponatur $a^{n-1}-rr=ss$, facesset haec formula in istam

$$2\sqrt{\frac{a^{n-1}}{n-1}}\int ds\,(a^{n-1}-ss)^{\frac{3-2n}{n-1}}.$$

Haec potentia si denuo in seriem convertitur integratioque peragitur atque loco s atque dein r valores in t subrogantur, hanc nobis suppeditabit seriem tempus indefinitum exprimens, nempe descensum aquae in cylindro ad altitudinem t usque. Haec, inquam, invenietur series

$$2\sqrt{\frac{a\,(a^{n-1}-t^{n-1})}{(n-1)\,a^{n-1}}}\Big(1+\frac{2n-3}{(2n-2)\cdot 3\cdot 1}\Big(\frac{a^{n-1}-t^{n-1}}{a^{n-1}}\Big)+\frac{(2n-3)\,(4n-5)}{(2n-2)^2\cdot 5\cdot 1\cdot 2}\times$$

$$\times\Big(\frac{a^{n-1}-t^{n-1}}{a^{n-1}}\Big)^2+\frac{(2n-3)\,(4n-5)\,(6n-7)}{(2n-2)^3\cdot 7\cdot 1\cdot 2\cdot 3}\Big(\frac{a^{n-1}-t^{n-1}}{a^{n-1}}\Big)^3+\text{etc.}\Big).$$

§ XLIX. Haec itaque series prae aliis hoc habet, quod in certis casibus cesset esse infinita et determinetur. Id quod contingit, si fuerit n vel $\frac{3}{2}$ vel $\frac{5}{4}$, $\frac{7}{6}$, $\frac{9}{8}$ etc., i. e. si n fuerit fractio, cuius numerator est numerus impar et denominator unitate minor. His ergo in substitutionibus tempus absolute definire licet.

§ L.* Ut habeamus integrum evacuationis tempus, ponamus $t=0$; habebitur tempus istud in minutis secundis, si a exprimitur in partibus millesimis pedis Rhenani. Nempe tot erit illud tempus secundorum

* §§ L—LIX in manuscripto per errorem ut §§ LX—LXIX denotati sunt. Corr透exit *G. M.*

$$\frac{1}{125}\sqrt{\frac{a}{n-1}}\left(1+\frac{2n-3}{(2n-2)\cdot 3\cdot 1}+\frac{(2n-3)(4n-5)}{(2n-2)^2\cdot 5\cdot 1\cdot 2}+\right.$$

$$\left.+\frac{(2n-3)(4n-5)(6n-7)}{(2n-2)^3\cdot 7\cdot 1\cdot 2\cdot 3}+\text{etc.}\right).$$

Licet autem ista series non multum sit convergens, usum in temporibus supputandis praestat nullum prorsus. Unice autem eum in finem subicere lubuit, quod omnes integrationis absolutae temporis exhibeat.

§ LI. Istae series obtinent, quando fuerit $n>1$. Sin contrarium acciderit, ut sit $n<1$, in istam inventa series abibit

$$2\sqrt{\frac{a\,(a^{1-n}-t^{1-n})}{(1-n)\,t^{1-n}}}\left(1-\frac{3-2n}{(2-2n)\cdot 3\cdot 1}\left(\frac{a^{1-n}-t^{1-n}}{t^{1-n}}\right)+\text{etc.}\right).$$

Atque ista posito $t=0$ mutabitur in aliam, ubi quivis terminus est infinitus, ex qua adeo concludi nihil potest.

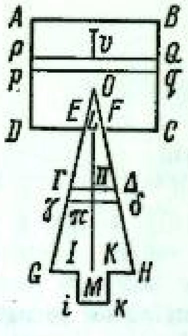


Fig. 6.

§ LII. Ex ista serie commode tempus ab initio effluxus usque ad effluxum maxima velocitate, [definiendum est], cum enim tum sit

$$t^{n-1}=\frac{a^{n-1}}{n}.$$

Si iste valor loco t^{n-1} subrogetur, invenietur iste numerus minutorum secundorum exposita a, ut fas est,

$$\frac{1}{125}\sqrt{\frac{a}{n}}\left(1+\frac{2n-3}{2n\cdot 3\cdot 1}+\frac{(2n-3)(4n-5)}{4nn\cdot 5\cdot 1\cdot 2}+\text{etc.}\right).$$

§ LIII. Hucusque determinata sunt tempora effluxus aquae, ubi n vel excedit unitatem vel ea minor est. Nulla autem formularum illarum poterit applicari ad casum, ubi $n=1$. Cum enim illo in casu sit $v=$ $=t\,(\lg a-\lg t)$, erit tempus

$$\int\frac{dt}{\sqrt{t\,(\lg a-\lg t)}}.$$

Huius summam exprimi posse inveni ista serie

$$2\sqrt{a\,(\lg a-\lg t)}\left(1-\frac{\lg a-\lg t}{2\cdot 3\cdot 1}+\frac{(\lg a-\lg t)^2}{4\cdot 5\cdot 1\cdot 2}-\frac{(\lg a-\lg t)^3}{8\cdot 7\cdot 1\cdot 2\cdot 3}+\text{etc.}\right).$$

§ LIV. Exposito effluxu aquae ex tubis cylindricis progredior hac in materia ulterius atque explicandum suscipio effluxum aquae, iterum quidem ex cylindris, sed quibus in fundo annexus est insuper alius tubus cuiusvis formae, sive cylindricus sive conicus convergens sive divergens. Possem adicere curvilineos, sed hosce non attingam hac vice.

Quando autem de huiusmodi vasis celeritates et tempora determinaturus sum, id obtinebit nonnisi, quandiu superior cylindrus aquam continet seu quandiu tubus annexus repletus existit. Quum vero tubus superior exinanitus fuerit atque annexus depleri incipiat, celeritates tunc atque tempora exhibere hoc opus hic labor est propter perplexas admodum aequationes differentiales neque integrationem neque alias tractationes admittentes.

§ LV. Sit itaque tubus cylindricus $ABCD$, huius basi CD infixus sit tubus $EGHF$, huiusque fundus GH sit perforatus foramine IK, e quo aqua effluat (fig. 6). Postquam tubus ab initio in AB usque repletus apertus fuit, descenderit aqua in PQ usque. Determinanda erit velocitas, qua superficies aquae PQ subsidet atque inde ea, qua aqua e foramine IK erumpit. Ad istud obtinendum sit altitudo aquae in cylindro ab initio $AD=a$, amplitudo cylindri $AB=b$, cuius adeo quadratum bb exprimit basin eius. Sit porro variabilis altitudo fluidi $DP=t$, $EF=c$, $GH=e$ atque diameter foraminis $IK=f$, nec non altitudo tubi annexi $LM=k$. Descendat superficies aquae PQ in pq. Erit $Pp=-dt$. Effluet interea columnula $IikK$ aequalis columnulae seu strato $PQqp$.

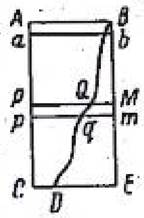


Fig. 7.

§ LVI. Determinandum iam ante omnia est elementum vis vivae, quod aqua lapsu ex altitudine Pp acquisivit. Facile quidem patet eam haberi, si unaquaeque particula aquae multiplicetur in altitudinem illam, ex qua interea, dum suprema superficies PQ ex Pp cecedit, descendit. Sunt enim in lapsu corporum vires vivae acquisitae aequales massae corporis in altitudinem decursam. Quemadmodum autem istud de novo acquisitum elementum commodo in cuiusvis figurae vase exprimendum sit, sequens non inelegans et hac in materia miros praestans usus inveni Theorema. Quod Clarissimus D. Bernoullius, statim atque viderit, propria demonstratione ex natura centri gravitatis petita munivit quamque coram Illustrissimo Consessu* nuper exposuit. Meam autem demonstrationem hic in medium proferam.

§ LVII. Theorema autem sic se habet.

Sit (fig. 7) vas cuiusvis figurae rotatione figurae $ABQDC$ circa axin AC genitum seu, ut se ad cuiusque modi vasa non rotunda Theorema extendat, exprimant quadrata applicatarum curvae BQD amplitudines vasis in altitudinibus correspondentibus. Sit vas in AB usque repletum descendatque aqua per Aa. Dico isto descensu acquiri vim vivam aequalem ei, quam acquirit aqua in cylindro eiusdem altitudinis $ABEC$, cuius basis aequalis est quadrato AB, ex eadem altitudine Aa cadendo.

Ad hoc demonstrandum concipiamus quodvis stratum $PQqp$. Erit eius strati vis viva acquisita aequalis facto in altitudinem, ex qua interea cadit, dum suprema elemento Aa depressior fit. Quum autem velocitates, qua aqua in isto tubo descendit, sint reciproce ut amplitudines, erunt et elementa altitudinum, ex qua una quaeque superficies descendit, in eadem ratione. Quia igitur AB per Aa descendit, fiat ut PQ^2 ad AB^2 ut Aa ad quartam, quae erit altitudo, ex qua stratum $PQqp$ descendit, nempe $\frac{Aa\cdot AB^2}{PQ^2}$. Quae altitudo, si ducatur in stratum ipsum $PQ^2\cdot Pp$, habebitur vis viva strati $PQqp$ isto momento acquisita, nempe $Aa\cdot Pp\cdot AB^2$.

§ LVIII. Istam expressionem intuenti statim patebit eam exprimere vim vivam strati cylindrici $PMmp$ ex Aa delapsi. Quia $AB^2=PM^2$ adeo-

* In consessu Conferentiae Academiae Scientiarum Petropolitanae. — G. M.

que $Pp \cdot AB^2 =$ ipsi strato cylincrico $PMmp$. Quia ergo uniuscuiusvis strati vis viva acquisita aequalis est vi vivae strati cylindrici respondentis ex altitudine Aa delapsi, erit collectim summa omnium virium vivarum aquae in vase $ABQDC$ contentarum, i. e. vis viva totius aquae acquisita descensu supremae superficiei per Aa, aequalis summae omnium virium in cylindro $ABEC$ contentarum, id est vi toti aquae in cylindro contentae, quam acquisivit lapsu ex Aa.

§ LIX. Est autem ista vis viva aquae in cylindro ob eandem ubique aquae descendentis velocitatem aequalis massae aquae in elementum Aa, i. e. facto $AB^2 \cdot AC \cdot Aa$. Exprimet et istud factum vim vivam, quam aqua in vase $ABQDC$ acquirit, dum suprema superficies AB elemento Aa humilior fit.

Si in isto facto AC consideratur ut altitudo decursa, erit $AB^2 \cdot Aa$ massa. Quocirca eadem acquiritur vis viva in vase AD cum ea, quam acquirit stratum $ABba$ supremum crassitudinis Aa labendo ex altitudine vasis AC. Atque hoc modo Clarissimus D. Bernoullius Theorema efferebat.

§ LX. Ut istud meae rei accommodem, resumatur prior figura (fig. 6). Eritque vis viva aquae acquisita subsidente suprema superficie altitudine Pp per demonstrata aequalis facto ex PQ^2 in $(PD + LM)$ in Pp, i. e. in symbolis $-bbtdt - bbkdt$. Iam alia methodo idem elementum vis vivae eruatur, nempe ex consideratione velocitatis, qua aqua subsidet. Descendat aqua PQ velocitate aequali ei, quam acquirit grave lapsu ex altitudine v. Poterit integra vis viva totius aquae in vase contentae exhiberi, unde deinceps quoque incrementum instantaneum. Vis viva aquae in cylindro $PDCQ$ quidem facile habebitur, quod velocitas aquae ubique in eo sit eadem. Exprimetur nimirum ea facto ex massa bbt in altitudinem generantem eius velocitatem v, i. e. $bbtv$.

§ LXI. Vis viva autem aquae in tubo annexo $EFHG$ contentae ope summationis erui debet, scilicet summando vires vivas cuiusvis strati. Sit quodvis stratum $\Gamma\Delta\delta\gamma$, cuius vis viva est quaerenda. Concurrant lineae GE, HF productae in O, ex quo puncto verticalis OLM est demissa. Sit $O\Pi = x$, $\Gamma\Delta = y$, $OL = g$. Erit $OM = (g + k)$ et $\Pi\pi = dx$. Erit propter similia triangula $O\Gamma\Delta$, OGH

$$O\Pi(x) : \Gamma\Delta(y) = OM\ (g + k) : GH\ (e),$$

unde ista obtinetur aequatio

$$(gy + ky) = ex,$$

Stratum ergo $\Gamma\Delta\delta\gamma$ erit

$$yydx = \frac{eedx\, xx}{(g + k)^2}.$$

Sit eius velocitas generata ex altitudine α. Erit $bb\sqrt{v} = yy\sqrt{\alpha}$, eo quod velocitates sint reciproce ut tubi amplitudines, $\sqrt{v}$ vero et $\sqrt{\alpha}$ exprimant velocitates. Erit ergo $\alpha = \frac{b^4 v}{y^4}$. Ista altitudo, si ducatur in elementum seu stratum $\frac{eexxdx}{(g + k)^2}$, dabit vim vivam strati, nempe

$$\frac{b^4 eexxvdx}{y^4 (g + k)^2} = \frac{b^4 vdx\,(g + k)^2}{eexx}.$$

Cuius integrale

$$A - \frac{b^4 v\,(g + k)^2}{eex}$$

exprimet vim vivam aquae in cono $O\Gamma\Delta$ contentae.

§ LXII. Ad nostrum vero negotium requiritur vis viva aquae $EFHG$ figuram coni truncati referentis. Quae obtinebitur adimendo vim vivam coni OEF de cono OGH. Prior vis erit ponendo loco x g

$$A - \frac{b^4 v\,(g + k)^2}{eeg},$$

altera vero coni OGH habebitur ponendo loco x $g + k$

$$A - \frac{b^4 v\,(g + k)}{ee},$$

a qua si dematur prior, relinquetur

$$\frac{b^4 v\,(g + k)}{ee} \frac{k}{g} = \frac{b^4 kv\,(g + k)}{eeg},$$

quae est expressio vis vivae aquae in tubo annexo. Ad extirpandam vero literam g vocetur in auxilium similitudo $\Delta\Delta\ OEF$, OGH, quae dabit $g : c = (g + k) : e$. Unde elicitur $\frac{g + k}{g} = \frac{e}{c}$. Hoc valore subrogato habebitur vis viva aquae in tubo annexo $\frac{b^4 kv}{ce}$.

§ LXIII. Est itaque vis viva universae in vase aquae aequalis aggregato $bbtv + \frac{b^4 k}{ce} v$.

Postquam iam aqua descendit per elementum Pp pervenitque in situm $pDEGIikKHFCq$, tunc vis viva erit aequalis vi vivae aquae in vase atque vi vivae columnulae expulsae $IikK$. Illa vis viva erit prior $bbtv + \frac{b^4 k}{ce} v$ plus eius elemento seu differentiali, nempe

$$bbtv + \frac{b^4 k}{ce} v + bbtdv + bbvdt + \frac{b^4 k}{ce} dv.$$

Vis vero viva aquae expulsae erit, cum ea sit $-bbdt$ atque altitudo generans eius velocitatem $\frac{b^4}{f^4} v$, $-b^6 vdt : f^4$. Ut itaque sit vis viva totalis post descensum per Pp

$$bbtv + \frac{b^4 kv}{ce} + bbtdv + bbvdt + \frac{b^4 kdv}{ce} - \frac{b^6 vdt}{f^4}.$$

a qua si subducatur vis viva immediate ante, remanebit incrementum momentaneum

$$bbtdv + bbvdt + \frac{b^4kdv}{ce} - \frac{b^6vdt}{f^4}.$$

Id quod aequari debet ei, quod supra [in] § LX inventum est, nempe ipsi $-bbtdt - bbkdt$, unde ista habebitur aequatio

$$-bbtdt - bbkdt = bbtdv + bbvdt + \frac{b^4kdv}{ce} - \frac{b^6vdt}{f^4},$$

quae divisa per bb dat hanc

$$\frac{b^4vdt}{f^4} - tdt - kdt - tdv - vdt - \frac{bbkdv}{ce} = 0.$$

§ LXIV. Scribatur brevitatis ergo loco $\frac{b^4}{f^4} - 1$ n et loco $\frac{bb}{ce}$ m. In hanc abibit aequatio

$$nvdt - mkdv - tdt - kdt - tdv = 0.$$

Quae aequatio est comprehensa in illis formulis generalibus, quas Celeberrimus Hermannus generaliter integrare docuit. Ut omnes termini quoad variabiles quantitates homogenei reddantur, fiat ista substitutio $v = z - k\frac{m-1}{n}$ et $t = x - mk$ et obtinebitur ista aequatio $nzdx - xdz = xdx$. Ut ista aequatio integretur, dividatur utrobique per x^{n+1} et reddetur utrumque membrum absolute integrabile

$$\frac{nzdx - xdz}{x^{n+1}} = \frac{dx}{x^n}.$$

Cuius integralis

$$A - \frac{z}{x^n} = \frac{-1}{(n-1)\,x^{n-1}},$$

ubi A designat constantem vel addendam vel subtrahendam in sequentibus determinandam. Facta multiplicatione per $(n-1)x^n$ erit haec equatio

$$(n-1)\,Ax^n + x = (n-1)\,z.$$

§ LXV. Loco x et z restitutis prioribus literis t et v, scilicet loco x $(t+mk)$ et loco z $\left(v + k\frac{m-1}{n}\right)$, habebimus hanc aequationem

$$(n-1)\,A\,(t+mk)^n + t + mk = (n-1)\left(v + k\frac{m-1}{n}\right).$$

Ut constantis A valor obtineatur, quaeratur ille ex aequatione, quae resultat ponendo $t = a$ et $v = 0$, in descensus enim initio velocitas est nihil, et reperietur

$$A = \frac{(n-1)\,k\frac{m-1}{n} - a - mk}{(n-1)\,(a+mk)^n} = \frac{-a - k\frac{m+n-1}{n}}{(n-1)\,(a+mk)^n}.$$

Unde eruetur

$$v = \frac{\left(t + k\frac{m+n-1}{n}\right)(a+mk)^n - \left(a + k\frac{m+n-1}{n}\right)(t+mk)^n}{(n-1)\,(a+mk)^n}.$$

§ LXVI. Multa curiosa ex ista aequatione possunt deduci corollaria. Nonnisi hic quaedam attingam. Ante omnia notandum est effluxum aquae fore eundem manentibus saltem a, k, n et m, hisce quatuor, cum tamen sex datae in computum veniant a, b, c, e, f, k. Quare manentibus a et k absolute iisdem semper idem erit effluxus, modo rationes $b:f$ et $bb:ce$ eaedem maneant, nempe ratio foraminis ad cylindri amplitudinem atque ratio amplitudinis bb ad amplitudinem ce, quae media proportionalis inter ambas bases coni truncati annexi [est]. Etsi ergo conus truncatus invertatur, ut deorsum convergat, manente foramine aqua eodem modo effluet.

§ LXVII. Si foramen ff adaequet amplitudinem cylindri bb, ut sit $n = 0$, erit $(a+mk)^n$ et $(t+mk)^n$ unitati aequalis adeoque

$$v = \frac{t + k\frac{m+n-1}{n} - a - k\frac{m+n-1}{n}}{-1} = a - t,^*$$

i. e. aqua ubique eam habebit velocitatem, quam acquirit grave cadendo ex altitudine, e qua aqua descendit, atque adeo aqua eodem modo effluet seu potius delabetur ad instar corporis solidi, quantumvis exiguum quoque foramen seu transitus in fundo cylindri fuerit.

§ LXVIII. Non autem dubito, quin futurum sit, ut, si tubus annexus nimium dilatetur, aqua tubum annexum non attingendo libere ex cylindro effluat eodem modo, ac si nullus tubus esset annexus. Quod autem theoriam nequaquam labefactare valet, cum enim pro principio assumtum fuerit aquam ubique lateribus tubi adhaerere et ubique eam continuam servari: Theoria necessario locum, ubi principium, obtinebit. Quando vero ob causas apud explicationem principii allatas circa principium exceptio fit, eo etiam theoria se non extendit.

§ LXIX. Sit iam foramen infinite parvum adeoque n infinitum. Quo fiet, ut $(t+mk)^n$ respectu ipsius $(a+mk)^n$ evanescat. Licet enim t non minor fiat quam a, tamen aqua infinite parva altitudine descendisse considerari debet, ut itaque $(a+mk)$ et $(t+mk)$ infinite parvum differant. Hoc vero cum sit, $(a+mk)^n$ infinities erit maior quam $(t+mk)^n$. Etenim x^n evanescit respectu $(x+dx)^n$, si n sit infinitum, ubi facile patet binomium ad potestatem n elevando, ubi quivis terminus primo x^n ad sensum est aequalis, numerus vero terminorum infinitus est. Erit ergo

$$v = \frac{t+k}{n-1}$$

---

* Formula haec ab Eulero accepta falsa est ob errorem in transitu ad limitem. Ex formulis § LXV, si $n \to 0$, re vera sequitur

$$v = (a-t) - k\,(m-1)\lg\frac{a+mk}{t+mk}.$$

Idem facile accipitur ex aequatione differentiali initiali (§ LXIV).
Sequens quoque sententia in fine paragraphi huius sane falsa est. — *G. M.*

et sumendo z altitudinem generantem velocitatem, qua aqua effluit, erit

$$z = \frac{n+1}{n+1}(t+k) = t+k.$$

*Quare aqua effluet ea velocitate, qua posset ad altitudinem cylindri cum vase annexo assurgere.**

§ LXX. Restat, ut ad similitudinem tractationis cylindrorum solorum investigem locum, ubi velocitas maxima est, ut et velocitatem maximam ipsam. Ad quod efficiendum differentianda est aequatio inventa et deponendum $= 0$. Quo facto reperietur ista aequatio

$$t = \frac{(a+mk)^{\frac{n}{n-1}}}{[na+k(m+n-1)]^{\frac{1}{n-1}}} - mk.$$

Unde habetur altitudo aquae in cylindro, ubi aqua maxima velocitate erumpit. Altitudo vero v generans velocitatem maximam ipsam reperitur substituendo loco t valorem inventum

$$v = \frac{1}{n}\sqrt[n-1]{\frac{(a+mk)^n}{na+k(m+n-1)}} - k\frac{m-1}{n}.$$

Unde altitudo generans velocitatem, qua aqua effluit, maximam z erit

$$= \frac{n+1}{n}\sqrt[n-1]{\frac{(a+mk)^n}{na+k(m+n-1)}} - k\frac{(m-1)(n+1)}{n}.$$

Si hic ponitur $n = \infty$, ut habeatur velocitas, qua aqua effluit in vase, si foramen fuerit infinite parvum, ibi enim quaevis velocitas est maxima, cum semper aqua eadem effluat velocitate, erit $\frac{n+1}{n} = 1$, $\sqrt[n-1]{na+k(m+n-1)} = 1$ adeoque $z = a+mk-mk+k = a+k$, i. e. aqua effluet celeritate, quanta acquiritur lapsu ex altitudine aquae.

§ LXXI. Quod ad tempora effluxuum aquae ex huiusmodi vasis attinet, ea determinare quidem multo difficilius est quam in solis cylindris, cum hic elementum temporis non possit in seriem resolvi, cuius termini singuli sint integrabiles. Quamobrem unusquisque terminus denuo in seriem erit convertendus, ut hoc modo tempus per infinitas series exprimendum sit. Est autem elementum temporis

$$\frac{-dt}{\sqrt{v}} = \frac{-dt\sqrt{(n-1)(a+mk)^n}}{\sqrt{\left(t+k\frac{m+n-1}{n}\right)(a+mk)^n - \left(a+k\frac{m+n-1}{n}\right)(t+mk)^n}}.$$

Ponatur brevitatis ergo $(t+mk) = x$ et $(a+mk) = g$ atque

* Ratiocinationes Euleri hic non strictae sunt, ut saepe in transitu ad limitem (cf. § XXVII). Illae perduxerunt autorem ad solutionem veram ea causa primo, quod haec solutio tempore Euleri iam nota erat. Inexactitudo similis invenitur quoque in fine paragraphi sequentis. — *G. M.*

$$k\frac{(m-1)(n-1)}{n} = h.$$

Erit

$$\frac{-dt}{\sqrt{v}} = \frac{-dx\sqrt{(n-1)g^n}}{\sqrt{g^n x - g^n h - g x^n + h x^n}} = \frac{-dx\sqrt{(n-1)g^n}}{\sqrt{g^n(x-h) - x^n(g-h)}}.$$

§ LXXII. Erit igitur tempus descensus aquae in cylindro usque ad altitudinem t

$$A - \int \frac{dx\sqrt{(n-1)g^n}}{\sqrt{(x-h)g^n - x^n(g-h)}}.$$

Est vero

$$\int \frac{dx\sqrt{(n-1)g^n}}{\sqrt{(x-h)g^n - x^n(g-h)}} = \sqrt{(n-1)g^n}\int dx\,[(x-h)g^n - x^n(g-h)]^{-\frac{1}{2}}.$$

Ista autem formula integranda in seriem per interpolationes Wallisii conversa hanc dat

$$dx\left(\frac{1}{g^{\frac{n}{2}}\sqrt{x-h}} + \frac{1\cdot(g-h)x^n}{2\cdot 1\cdot g^{\frac{3n}{2}}(x-h)\sqrt{x-h}} + \frac{1\cdot 3\cdot(g-h)^2 x^{2n}}{4\cdot 1\cdot 2\cdot g^{\frac{5n}{2}}(x-h)^2\sqrt{x-h}} + \text{etc.}\right).$$

Est autem

$$\int \frac{dx}{g^{\frac{n}{2}}\sqrt{x-h}} = \frac{2\sqrt{x-h}}{g^{\frac{n}{2}}}$$

atque

$$\frac{1\cdot(g-h)}{2\cdot 1\cdot g^{\frac{3n}{2}}}\int \frac{x^n dx}{(x-h)\sqrt{x-h}} = \frac{1\cdot(g-h)}{2\cdot 1\cdot g^{\frac{3n}{2}}\sqrt{x-h}} \text{ in } \left(\frac{x^n}{n-\frac{1}{2}} + \frac{nhx^{n-1}}{\left(n-\frac{1}{2}\right)\left(n-\frac{3}{2}\right)} + \right.$$

$$\left. + \frac{n(n-1)hhx^{n-2}}{\left(n-\frac{1}{2}\right)\left(n-\frac{3}{2}\right)\left(n-\frac{5}{2}\right)} + \text{etc.}\right).$$

Deinde

$$\frac{1\cdot 3\cdot(g-h)^2}{4\cdot 1\cdot 2\cdot g^{\frac{5n}{2}}}\int \frac{x^{2n}dx}{(x-h)^2\sqrt{x-h}} = \frac{1\cdot 3\cdot(g-h)^2}{4\cdot 1\cdot 2\cdot g^{\frac{5n}{2}}(x-h)\sqrt{x-h}} \text{ in}$$

$$\left(\frac{x^{2n}}{2n-\frac{3}{2}} + \frac{2nhx^{2n-1}}{\left(2n-\frac{3}{2}\right)\left(2n-\frac{5}{2}\right)} + \frac{2n(2n-1)hhx^{2n-2}}{\left(2n-\frac{3}{2}\right)\left(2n-\frac{5}{2}\right)\left(2n-\frac{7}{2}\right)} + \text{etc.}\right).$$

§ LXXIII. Est igitur summa ipsius

$$\frac{dx\sqrt{(n-1)g^n}}{\sqrt{(x-h)g^n - x^n(g-h)}}$$

$$\begin{aligned}=\sqrt{\frac{n-1}{x-h}}\ \text{in}\ \Big\{&2x-2h+\frac{1\cdot(g-h)}{2\cdot1\cdot g^n}\left(\frac{x^n}{n-\frac12}+\frac{nhx^{n-1}}{\left(n-\frac12\right)\left(n-\frac32\right)}+\right.\\ &\left.+\frac{n(n-1)hhx^{n-2}}{\left(n-\frac12\right)\left(n-\frac32\right)\left(n-\frac52\right)}+\text{etc.}\right)+\frac{1\cdot3\cdot(g-h)^2}{4\cdot1\cdot2\cdot g^{2n}(x-h)}\left(\frac{x^{2n}}{2n-\frac32}+\right.\\ &\left.+\frac{2nhx^{2n-1}}{\left(2n-\frac32\right)\left(2n-\frac52\right)}+\frac{2n(2n-1)hhx^{2n-2}}{\left(2n-\frac32\right)\left(2n-\frac52\right)\left(2n-\frac72\right)}+\text{etc.}\right)+\\ &+\frac{1\cdot3\cdot5\cdot(g-h)^3}{8\cdot1\cdot2\cdot3\cdot g^{3n}(x-h)^2}\left(\frac{x^{3n}}{3n-\frac52}+\frac{3nhx^{3n-1}}{\left(3n-\frac52\right)\left(3n-\frac72\right)}+\right.\\ &\left.+\frac{3n(3n-1)hhx^{3n-2}}{\left(3n-\frac52\right)\left(3n-\frac72\right)\left(3n-\frac92\right)}+\text{etc.}\right)+\text{etc.}\Big\}.\end{aligned}$$

§ LXXIV. Applicando ad nostrum negotium inventam seriem reperietur facta legitima substitutione loco x et g positoque $t=a$, reperietur constans A addenda aequalis huic seriei

$$\begin{aligned}\sqrt{(n-1)\left(a+k\frac{m+n-1}{n}\right)}\ \text{in}\ \Big\{&2+\frac{1}{2\cdot1}\left(\frac{1}{n-\frac12}+\frac{nh}{\left(n-\frac12\right)\left(n-\frac32\right)(a+mk)}+\right.\\ &\left.+\frac{n(n-1)hh}{\left(n-\frac12\right)\left(n-\frac32\right)\left(n-\frac52\right)(a+mk)^2}+\text{etc.}\right)+\frac{1\cdot3}{4\cdot1\cdot2}\left(\frac{1}{2n-\frac32}+\right.\\ &\left.+\frac{2nh}{\left(2n-\frac32\right)\left(2n-\frac52\right)(a+mk)}+\frac{2n(2n-1)hh}{\left(2n-\frac32\right)\left(2n-\frac52\right)\left(2n-\frac72\right)(a+mk)^2}+\text{etc.}\right)\end{aligned}$$

et ita porro in infinitum.

A quo valore si subtrahitur ista series orta ponendo $t=0$, relinquetur tempus totius cylindri evacuationis

$$\begin{aligned}\sqrt{(n-1)\left(k\frac{m+n-1}{n}\right)}\Big\{&2+\frac{1\cdot\left(a+k\frac{m+n-1}{n}\right)}{2\cdot1\cdot\left(k\frac{m+n-1}{n}\right)(a+mk)^n}\left(\frac{(mk)^n}{n-\frac12}+\right.\\ &\left.+\frac{nh(mk)^{n-1}}{\left(n-\frac12\right)\left(n-\frac32\right)}+\frac{n(n-1)hh(mk)^{n-2}}{\left(n-\frac12\right)\left(n-\frac32\right)\left(n-\frac52\right)}+\text{etc.}\right)+\\ &+\frac{1\cdot3\cdot\left(a+k\frac{m+n-1}{n}\right)^2}{4\cdot1\cdot2\left(k\frac{m+n-1}{n}\right)^2(a+mk)^{2n}}\left(\frac{(mk)^{2n}}{2n-\frac32}+\frac{2nh(mk)^{2n-1}}{\left(2n-\frac32\right)\left(2n-\frac52\right)}+\text{etc.}\right)+\text{etc.}\Big\}.\end{aligned}$$

Ex quibus seriebus in quolibet casu speciali determinabitur quam proxime tempus exinanitionis cylindri idque in minutis secundis, si determinatis a et k in millesimis pedis Rhenani numerus inventus dividitur per 250.

§ LXXV. Fundamentum autem harum seriérum, quo

$$\int\frac{x^n dx}{(x-h)\sqrt{x-h}}$$

et generaliter

$$\int\frac{x^n dx}{(x-h)^r\sqrt{x-h}}$$

in serie erat expressa, hinc est petitum. Manifestum est summam huius differentialis

$$\frac{x^n dx}{(x-h)^r\sqrt{x-h}}$$

exprimi fractione, cuius denominator est $(x-h)^{r-1}\sqrt{x-h}$, numeratorem vero serie aliqua, in qua ipsius x maxima dimensio est potestatis n, reliquae minores. Ponendo ergo loco numeratoris hanc seriem $\alpha x^n+\beta hx^{n-1}+\gamma hhx^{n-2}$ etc. et differentiando tunc fractionem omnibusque terminis praeter $x^n dx$ deletis invenientur coefficientes α, β, γ etc. Scilicet summa

$$\frac{x^n dx}{(x-h)^r\sqrt{x-h}}$$

erit aequalis

$$\frac{1}{(x-h)^{r-1}\sqrt{x-h}}\left(\frac{1\cdot x^n}{n-r+\frac12}+\frac{nhx^{n-1}}{\left(n-r+\frac12\right)\left(n-r-\frac12\right)}+\right.$$
$$\left.+\frac{n(n-1)hhx^{n-2}}{\left(n-r+\frac12\right)\left(n-r-\frac12\right)\left(n-r-\frac32\right)}+\text{etc.}\right).$$

§ LXXVI. Non praeterire possum singularem huiusmodi serierum proprietatem, quae observatur, si $x=h$, ut tum series per h^n dividi queat. Habetur enim deleto h^n ista series

$$\frac{1}{n-r+\frac12}+\frac{n}{\left(n-r+\frac12\right)\left(n-r-\frac12\right)}+\frac{n(n-1)}{\left(n-r+\frac12\right)\left(n-r-\frac12\right)\left(n-r-\frac32\right)}+\text{etc.}$$

Cuius seriei summa, utcunque n mutetur, semper constans manet, quippe quae aequetur ipsi

$$\frac{1}{\frac12-r}\quad\text{seu}\quad\frac{2}{1-2r}.$$

Videlicet in hoc casu, ubi $r=1$, aequatur ista series

$$\frac{1}{n-\frac{1}{2}}+\frac{n}{\left(n-\frac{1}{2}\right)\left(n-\frac{3}{2}\right)}+\frac{n(n-1)}{\left(n-\frac{1}{2}\right)\left(n-\frac{3}{2}\right)\left(n-\frac{5}{2}\right)}+\text{etc.}$$

negativo binario, -2, quicunque numerus loco n subrogetur.

Si loco n numerus integer substituitur, series terminabitur, sin secus, erit ea infinita. Si n fuerit fractio, cuius denominator 2, seriei ultra certum limitem termini singuli evadunt infiniti, nihilo tamen secius eius summa cognita est.

§ LXXVII. Potest insuper tempus effluxus aquae aliter exprimi, si termini illi, qui absolute integrabiles non sunt, ope interpolationis in series convertantur. Erit enim hoc modo

$$\int\frac{x^n dx}{(x-h)^r\sqrt{x-h}}=2\sqrt{x}\left(\frac{x^{n-r}}{2n-2r+1}+\frac{(2r+1)hx^{n-r-1}}{2\cdot 1\cdot(2n-2r-1)}+\right.$$

$$\left.+\frac{(2r+1)(2r+3)hhx^{n-r-2}}{4\cdot 1\cdot 2\cdot(2n-2r-3)}+\text{etc.}\right)=2x^{n-r}\sqrt{x}\left(\frac{1}{2n-2r+1}+\right.$$

$$\left.+\frac{(2r+1)h}{2\cdot 1\cdot(2n-2r-1)x}+\frac{(2r+1)(2r+3)hh}{4\cdot 1\cdot 2\cdot(2n-2r-3)xx}+\text{etc.}\right).$$

Adhibendo ergo ista series invenietur

$$\sqrt{n-1}\int dx\left(\frac{1}{\sqrt{x-h}}+\text{etc.}\right)=2\sqrt{(n-1)(x-h)}+x^n\sqrt{(n-1)x}\ \text{in}$$

$$\left\{\frac{1\cdot(g-h)}{1\cdot 1\cdot g^n x}\left(\frac{1}{2n-1}+\frac{3\cdot h}{2\cdot 1\cdot(2n-3)x}+\frac{3\cdot 5\cdot hh}{4\cdot 1\cdot 2\cdot(2n-5)xx}+\text{etc.}\right)+\right.$$

$$+\frac{1\cdot 3\cdot(g-h)^2x^{n-2}}{2\cdot 1\cdot 2\cdot g^{2n}}\left(\frac{1}{4n-3}+\frac{5\cdot h}{2\cdot 1\cdot(4n-5)x}+\frac{5\cdot 7\cdot hh}{4\cdot 1\cdot 2\cdot(4n-7)xx}+\text{etc.}\right)+$$

$$+\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot(g-h)^3x^{2n-3}}{4\cdot 1\cdot 2\cdot 3\cdot g^{3n}}\left(\frac{1}{6n-5}+\frac{7\cdot h}{2\cdot 1\cdot(6n-7)x}+\right.$$

$$\left.\left.+\frac{7\cdot 9\cdot hh}{4\cdot 1\cdot 2\cdot(6n-9)xx}+\text{etc.}\right)+\text{etc.}\right\}.$$

§ LXXVIII. Subrogetur loco g et x $a+mk$ et loco $g-h$ hic valor $a+k\frac{m+n-1}{n}$, ut obtineatur constans A addenda. Erit ergo illa

$$2\sqrt{(n-1)\left(a+k\frac{m+n-1}{n}\right)}+2\sqrt{(n-1)(a+mk)}\ \text{in}$$

$$\left\{\frac{1\cdot\left(a+k\frac{m+n-1}{n}\right)}{2\cdot 1\cdot(a+mk)}\left(\frac{1}{2n-1}+\frac{3\cdot h}{2\cdot 1\cdot(2n-3)(a+mk)}+\right.\right.$$

$$\left.+\frac{3\cdot 5\cdot hh}{4\cdot 1\cdot 2\cdot(2n-5)(a+mk)^2}+\text{etc.}\right)+\frac{1\cdot 3\cdot\left(a+k\frac{m+n-1}{n}\right)^2}{4\cdot 1\cdot 2\cdot(a+mk)^2}\times$$

$$\times\left(\frac{1}{4n-3}+\frac{5\cdot h}{2\cdot 1\cdot(4n-5)(a+mk)}+\frac{5\cdot 7\cdot hh}{4\cdot 1\cdot 2\cdot(4n-7)(a+mk)^2}+\text{etc.}\right)+$$

$$+\frac{1\cdot 3\cdot 5\left(a+k\frac{m+n-1}{n}\right)^3}{8\cdot 1\cdot 2\cdot 3\cdot(a+mk)^3}\times$$

$$\left.\times\left(\frac{1}{6n-5}+\frac{7\cdot h}{2\cdot 1\cdot(6n-7)(a+mk)}+\frac{7\cdot 9\cdot hh}{4\cdot 1\cdot 2\cdot(6n-9)(a+mk)^2}+\text{etc.}+\text{etc.}\right)\right\}.$$

Altera vero series, quae ab ista subtrahi debet ad obtinendum tempus integrae evacuationis, est haec

$$2\sqrt{(n-1)k\frac{m+n-1}{n}}+2\sqrt{(n-1)mk}\ \text{in}$$

$$\left\{\frac{1\cdot\left(a+k\frac{m+n-1}{n}\right)(mk)^{n-1}}{2\cdot 1\cdot(a+mk)^n}\left(\frac{1}{2n-1}+\frac{3\cdot(m-1)(n-1)}{2\cdot mn\cdot 1\cdot(2n-3)}+\right.\right.$$

$$\left.+\frac{3\cdot 5\cdot(m-1)^2(n-1)^2}{4\cdot mmnn\cdot 1\cdot 2\cdot(2n-5)}+\text{etc.}\right)+\frac{1\cdot 3\cdot\left(a+k\frac{m+n-1}{n}\right)^2(mk)^{2n-2}}{4\cdot 1\cdot 2\cdot(a+km)^{2n}}\times$$

$$\times\left(\frac{1}{4n-3}+\frac{5\cdot(m-1)(n-1)}{2\cdot mn\cdot 1\cdot(4n-5)}+\frac{5\cdot 7\cdot(m-1)^2(n-1)^2}{4\cdot mmnn\cdot 1\cdot 2\cdot(4n-7)}+\text{etc.}\right)+$$

$$+\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot\left(a+k\frac{m+n-1}{n}\right)^3(mk)^{3n-3}}{8\cdot 1\cdot 2\cdot 3\cdot(a+mk)^{3n}}\times$$

$$\left.\times\left(\frac{1}{6n-5}+\frac{7\cdot(m-1)(n-1)}{2\cdot mn\cdot 1\cdot(6n-7)}+\frac{7\cdot 9\cdot(m-1)^2(n-1)^2}{4\cdot mmnn\cdot 1\cdot 2\cdot(6n-9)}+\text{etc.}\right)+\text{etc.}\right\}.$$

§ LXXIX. Si istae series ad exempla singularia applicantur, obtinebitur tempus totius evacuationis cylindri. Idque si lubuerit in secundis minutis exhibere, id fiet, si expressis a et k in scrupulis Rhenanis numerus inventus per 250 dividatur.

Hoc vero monendum est circa applicationem huiusmodi serierum ad casus singulares. Terminos in istis duabus seriebus correspondentes simul esse sumendos, v. g. eos, quorum denominator est $4n-3$ simul, ne id accidat, quod hac in materia effugiendum est, nempe ut termini quidam in infinitum abeant, quando denominator evanescit.

§ LXXX.* Tentemus rem alio modo et videamus, num series pro temporibus commoda erui queat. Elementum temporis est

$$\frac{-dt\sqrt{(n-1)(a+mk)^n}}{\sqrt{\left(t+k\frac{m+n-1}{n}\right)(a+mk)^n-\left(a+k\frac{m+n-1}{n}\right)(t+mk)^n}}.$$

* In expositionem §§ LXXX et LXXXI nonnullae correctiones ab editore interponendae erant, quia chirographum hic indiligenter scriptum est. — *G. M.*

Fiat $a+mk=g$, $k\frac{m+n-1}{n}=h$ et $k\frac{(m-1)(n-1)}{n}=e$. Ponaturque brevitatis ergo loco mk simpliciter k et dicatur elementum temporis dT. Erit

$$dT=\frac{-dt\sqrt{(n-1)g^n}}{\sqrt{tg^n+hg^n-(t+k)^n(a+h)}}.$$

Sit $a+h=i$ et $t+h=x$. Erit $t+k=x+k-h=x+e$. Et sumtis quadratis erit

$$g^n x dT^2 - i dT^2 (x+e)^n = (n-1) g^n dx^2.$$

Si aequatio differentietur ponendo dx pro constante, erit

$$2g^n x ddT + g^n dT dx = 2i ddT (x+e)^n + n i dT (x+e)^{n-1} dx.$$

§ LXXXI. Ponatur methodo Illustrissimi Leibnitii in *Actis Eruditorum*

$$T = A + \frac{\alpha x}{1} + \frac{\beta xx}{2} + \frac{\gamma x^3}{3} + \frac{\delta x^4}{4} + \frac{\varepsilon x^5}{5} + \text{etc.}$$

Erit

$$dT = \alpha dx + \beta x dx + \gamma x^2 dx + \delta x^3 dx + \varepsilon x^4 dx + \text{etc.}$$

Unde

$$\begin{aligned}\frac{dT^2}{dx^2} = \alpha\alpha + 2\alpha\beta x + 2\alpha\gamma x^2 + 2\alpha\delta x^3 + 2\alpha\varepsilon x^4 + \text{etc.}\\ + \beta\beta x^2 + 2\beta\gamma x^3 + 2\beta\delta x^4 + \text{etc.}\\ + \gamma\gamma x^4 + \text{etc.}\end{aligned}$$

Si istae series loco $\frac{dT^2}{dx^2}$ in aequatione subrogentur atque inde α, β, γ etc. determinentur, habebitur series simplex temporibus inserviens. Aequatio ista est autem

$$\frac{dT^2}{dx^2}\left[g^n x - i(x+e)^n\right] = (n-1) g^n.$$

Est autem

$$(x+e)^n = e^n + \frac{n}{1}e^{n-1}x + \frac{n(n-1)}{1\cdot 2}e^{n-2}x^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{1\cdot 2\cdot 3}e^{n-3}x^3 + \text{etc.}$$

Unde reperietur

$$\alpha = \sqrt{\frac{(1-n)g^n}{ie^n}}, \quad \beta = \alpha\frac{g^n - nie^{n-1}}{2ie^n},$$

$$\gamma = \frac{\beta g^n}{ie^n} - \frac{\beta\beta}{2\alpha} - \frac{n\beta}{1\cdot e} - \frac{n(n-1)\alpha}{1\cdot 2\cdot 2e^2} \quad \text{etc.}$$

ПЕРЕВОДЫ

О МЕРТВЫХ И ЖИВЫХ СИЛАХ

Благодаря присущей всем телам силе инерции тела сопротивляются тому, что придает им движение, и поэтому для придания движения требуется сила. Если нечто способно придавать телам движение, то говорят, что оно обладает силой. И отсюда, в соответствии с двояким источником, из которого тела черпают движение, Лейбниц установил два класса сил: силы живые и мертвые. Впрочем, если рассмотреть этот вопрос глубже, то все силы могут быть отнесены к мертвым. Ведь при соударении тел сообщение движения происходит от взаимного давления. Точно так же многие примеры мертвых сил сводятся к соударению или натиску мельчайших частиц. Но мы наблюдаем, что тела приобретают движение двояким путем: либо от влекущей силы, видимой или невидимой, либо от уже движущегося ударяющего тела. Отсюда и выявляются два рода сил, способных придавать телам движение.

В первом случае, когда тело получает движение от давления или тяги, говорят, что это движение производится мертвой силой. Итак, мертвая сила есть не что иное, как давление или тяга. Примером служит возникновение движения в теле, поставленном перед разжимающейся пружиной, возникновение движения в железе вблизи магнита и самый очевидный из всех пример движения, производимого действием тяжести. Во втором случае, когда тело приобретает движение от другого ударяющего тела, т. е. движение производится движением, говорят, что оно возникает от живой силы. Итак, живая сила есть сила, присущая движущемуся телу, благодаря которой оно может сообщить движение другим телам. Многочисленные примеры этого можно наблюдать при соударении тел.

Вопрос же здесь состоит в том, каким образом следует измерять или сравнивать между собой эти силы, особенно живые. Я намереваюсь заняться в данном исследовании этим вопросом и, насколько это возможно, вывести способ измерения из исходных начал. Но поскольку наблюдаются два рода сил, нужно говорить о каждом из них отдельно, ибо они едва ли имеют что-либо общее между собой. Главнейшее же различие между живыми и мертвыми силами состоит в том, что для приобретения движения от мертвой силы необходимо, чтобы тело подвергалось ее действию в течение некоторого времени, так что для придания движения мертвой силой требуется время; живая же сила, наоборот, порождает движение мгновенно, и времени для этого не требуется. Отсюда вытекает, что для измерения мертвых сил нужно принимать в расчет время; при измерении же живых сил не следует и упоминать о времени. Никто не станет сомневаться, что мера живых сил должна оцениваться по полному действию, а именно по порожденному движению. Но каким образом следует измерять порожденное движение? Считать ли двойной ту силу, которая вызывает в данном теле двойную скорость, или ту, которая вызывает четверную? На все эти вопросы нет еще ответа, не приводящего к порочному кругу. Но одно может быть принято за известное: сила, порождающая в двойном теле ту же скорость, является двойной. Ведь это то же самое, как если бы эта скорость была сообщена двум телам, так как при этом достигается двойное действие. По такого рода действиям должна, следовательно, оцениваться величина сил.

ОБ ИЗМЕРЕНИИ МЕРТВЫХ СИЛ

Поскольку при измерении мертвых сил нужно принимать во внимание время, для их измерения и сравнения необходимо знать, действуют ли они единообразно или нет, ибо весьма большая убывающая сила и весьма малая возрастающая с течением времени могут, в конце концов, произвести одинаковое действие. Поэтому для правильной оценки нужно, чтобы рассматривалось действие за возможно меньший интервал времени, а именно за момент, для которого действие силы может быть принято единообразным. Вследствие этого я принимаю за равные такие две силы, которые за равные, но бесконечно малые промежуточки времени производят равное действие. Таким же образом измеряются неравные силы по действию, порожденному за данный бесконечно малый промежуточек времени.

Однако вопрос о возникновении движения под действием сил таков, что до сих пор не удалось разрешить его исходя из непоколебимых и необходимых начал. А Лейбниц пришел даже к тому, что объявил законы движения лишь относительными, ибо они никоим образом не могут быть выведены из рассмотрения пространства. Но, может быть, если мы ближе узнáем природу тел, наши философские рассуждения будут более точны. Ведь сила инерции еще никем, насколько мне известно, не была объяснена и не была достаточно обоснована при помощи уже познанных начал, но я считаю ее существенным свойством тела, объяснение которого несомненно привело бы к объяснению многих явлений.

Законы, по которым мертвые силы придают телам движение, таковы:

1. Одна и та же сила сообщает телу, движущемуся или покоящемуся, за одинаковые промежуточки времени одинаковые степени скорости.

2. Скорости, сообщенные одной и той же силой одному и тому же телу, пропорциональны временам, за которые они порождаются, при условии, что либо эта сила единообразна, либо промежуточки времени взяты наименьшими.

3. Скорости, сообщенные различным телам за одинаковое время одной и той же силой, обратно пропорциональны массам тел.

4. Скорости, сообщенные одинаковым телам различными силами за одно и то же время, пропорциональны этим силам.

Отсюда следует общее правило: порожденные скорости прямо пропорциональны силам и временам и обратно пропорциональны массам.

Из этих четырех законов одни, возможно, зависят от других, но общее их начало представляется лишь относительным. Выше изложен способ измерения сил по действию, но этот способ совпадает с тем, с помощью которого силы сравниваются при равновесии, без учета порожденного движения; тогда сила называется двойной по отношению к другой силе, если первая находится в равновесии с двумя ей прямо противоположными и равными последней силами. Объединяющее начало этих двух способов измерения легко может быть получено из данных законов. По действию же способ измерения сил может быть выведен из общего правила следующим образом.

Силы прямо пропорциональны массам и порожденным скоростям и обратно пропорциональны временам. Если силы единообразны, количе-

ство времени не имеет значения, а в противоположном случае времена принимаются наименьшими. Итак, действия, произведенные одной и той же силой за одинаковое время, пропорциональны произведениям масс тел на скорости. Поскольку пройденный путь пропорционален скорости, умноженной на время, возьмем вместо времени соответствующую величину; тогда сила будет прямо пропорциональна массе и квадрату скорости и обратно пропорциональна пройденному пути. Следовательно, действия, произведенные одной и той же силой на равных путях, прямо пропорциональны произведениям масс на квадраты скоростей.

Рис. 1.

О силах, действующих не единообразно, судить, очевидно, труднее. При этом следует иметь в виду, что здесь различным положениям будет соответствовать различная мертвая сила, так что она может быть выражена в каком-либо месте, лишь если считать промежуточек времени бесконечно малым. Отсюда можно получить уравнение, дающее отношение сил во всех положениях.

Наиболее ясно это можно показать на пружинах, для которых упругая сила при различном растяжении различна. Я меряю здесь упругую силу весом, который может сохранить пружину в равновесии, будучи приложен в противоположную силе сторону. Пружинам свойственно некоторое естественное положение, стремление к которому увеличивается по мере отклонения от него. Выразим упругую силу какой-либо функцией расстояния, на которое пружина отклонена от естественного положения. Я беру в качестве пружины свитую в спираль нить DE (рис. 1), которая может рассматриваться как растягивающаяся прямая линия. Пусть AB будет такого рода упругий стержень и AB (рис. 2) — положение, к которому он постоянно стремится. Пусть AP — какое-либо положение сжатой пружины, при котором упругая сила выражается аппликатой PM кривой BMV. При помощи этой кривой скорость тела, толкаемого пружиной, будет выражена следующим образом.

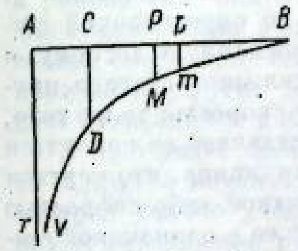


Рис. 2.

Пусть AC — начальное положение, в котором тело получило первый толчок, $AC=b$, $AB=a$, масса продвигаемого тела равна M, и надо найти скорость, которую тело будет иметь в B, где оно покидает пружину. Пусть тело дошло до P и скорость его там равна v, а приращение скорости на пути Pp пусть будет равно dv. Согласно общему правилу, dv будет пропорционально $\frac{PM \cdot tPp}{M}=\frac{PM \cdot Pp}{Mv}$, откуда $Mvdv=PM \cdot Pp$. Следовательно, $\frac{Mvv}{2}=\int PM \cdot Pp=DCPM$. Пусть в B скорость тела равна c, тогда $Mcc=2DCB$.

Следовательно, различные тела под действием одной и той же пружины приобретут скорости, обратно пропорциональные квадратному корню из масс, поскольку площадь DCB постоянна.

ОБ ИЗМЕРЕНИИ ЖИВЫХ СИЛ

Живая сила, как это было определено выше, есть присущая движущемуся телу сила, благодаря которой оно в состоянии придать движение другим телам. Поэтому ее величина должна измеряться полным действием, которое может быть произведено. Полное действие есть совокупность всех действий, которые может произвести движущееся тело до тех пор, пока не придет в состояние покоя, ибо покоящееся тело не обладает больше силой производить какое-либо действие. Следовательно, сущность вопроса состоит в том, как распознать это полное действие и каким образом его измерить. Оба эти вопроса представляют значительную трудность. С первым, как кажется, можно покончить исходя из передачи движения; решение же второго упирается в саму поставленную задачу об измерении живых сил, ибо каким же образом можно измерить полное действие по произведенным движениям, если нужно найти силу самого движущегося тела. Поэтому я подойду к делу следующим образом. Найду скорости различных тел, могущих произвести одинаковые действия, и когда они будут найдены, никто не будет сомневаться, что этим телам, движущимся с найденными скоростями, присуща одинаковая живая сила.

В качестве аксиомы я предпосылаю следующее предложение: различные тела, наделенные такими скоростями, что они могут довести одну и ту же пружину до одинаковой степени натяжения, имеют одинаковые живые силы.

Это предложение достаточно ясно, ибо два тела называют имеющими одинаковые силы, если они могут произвести одинаковые действия. А здесь за действие принимается натяжение пружины до определенной степени. Для того чтобы можно было применить предпосланную аксиому, я добавляю следующее предложение. Сжатая до определенной степени пружина, если ее отпустить, толкает тело и придает ему скорость; то же тело, если оно с той же скоростью ударяет пружину, заставляет ее вернуться в прежнее состояние сжатия. Это вытекает из того принципа, что мертвая сила за одно и то же время придает движимому с какой-либо скоростью телу одну и ту же степень скорости или увеличивает ее в одинаковой степени. И поэтому, если бы скорость тела была отрицательной, т. е. действовала бы против направления мертвой силы, то эта скорость уменьшилась бы настолько, насколько она возросла бы, если бы тело двигалось вдоль направления мертвой силы.

Пусть массы двух тел будут M и N, а их скорости x и y таковы, что они имеют одинаковые живые силы. Тела эти смогут довести одну и ту же пружину до одинаковой степени сжатия, а именно сжать пружину AB до положения AC. Но пружина AB, приведенная в положение AC, разжимаясь, придает телу M такую скорость c, что $Mcc=2DCB$. Следовательно, для того чтобы тело M, движимое со скоростью x, могло привести пружину AB в положение AC, нужно иметь $Mxx=2DCB$; а для того чтобы тело N со скоростью y совершило то же самое, нужно иметь $Nyy=2DCB$. Итак, для того чтобы оба эти тела произвели одинаковое действие, требуется иметь $Mxx=Nyy$, так что два тела будут иметь одинаковые живые силы, если их массы будут обратно пропорциональны квадратам скоростей. Поскольку, далее, силы различных тел, несомых с одной и той же скоростью, безусловно пропорциональны массам тел, отсюда слагается следующая мера живых сил: живые силы тел пропорциональны массам и квадратам скоростей.

ЛЕКЦИИ ПО СТАТИКЕ

Лекция I. Я решил в последующих лекциях изложить науку о движении, о том, как оно производится и каковы его признаки. Эта наука называется *механикой*.

Механике, впрочем, необходимо предпослать другую дисциплину, а именно *статику*, которая рассматривает силы, их сравнение и равновесие. Ведь без статики невозможно добиться ни малейшего успеха в объяснении движения тел, ибо происхождение и производство движения следует выводить из природы сил. Итак, нам нужно рассмотреть две науки: статику и механику. В первой из них говорится о силах, их сравнении и равновесии как о причинах движения, а во второй — о производстве движения силами и его изменении, а также о силе, присущей движущимся телам, благодаря которой они могут придать движение другим телам и произвести другие действия, порождаемые силой. Сюда относится передача движения и движение тел в жидкостях.

В настоящее время многие объединяют обе эти науки и называют и то и другое механикой. Даже Вариньон в своей «Новой механике» рассмотрел только учение о силах. Между тем, нетрудно видеть, что эти науки совершенно различны, поскольку в одной говорится о движении, а в другой — о равновесии, т. е. о покое.

СТАТИКА

Определение статики. *Статика есть наука о силах, сравнивающая их между собой и располагающая их в равновесии.* Итак, при ее изложении надо будет, во-первых, рассмотреть природу сил и их сравнение между собой. Во-вторых, надо рассмотреть равновесие, а именно, каким образом различные силы должны быть приложены к данному телу, чтобы тело оставалось в состоянии покоя, или какое требуется положение тела, чтобы было равновесие. Отсюда, в соответствии с различными формами тел, к которым прикладываются силы, их свойствами и другими условиями, а также в соответствии с различным способом приложения сил, возникнут различные главы, которые мы изложим в дальнейшем.

О силах вообще. *Сила есть стремление толкать или тянуть рассматриваемое тело в определенную сторону.* Отсюда видно, что имеются силы двоякого рода: толкающие и тянущие. Но в дальнейшем я не буду принимать во внимание это разделение, поскольку один род сил очень легко приводится к другому. Ведь коляска движется одинаковым образом, независимо от того, тянет ли ее лошадь или толкают люди. Как тянущая, так и толкающая сила действует в определенную сторону, которая называется ее *направлением*. И поэтому о силе, толкающей тело B вдоль AB, говорят, что она действует по направлению AB, т. е. стремится придать телу B движение вдоль линии AB (рис. 1). В дальнейшем будем писать рAB для силы, стремящейся двигать тело по линии AB от A, т. е. для силы толкающей, а рBA будет означать силу, тянущую тело B к A.

В самой природе мы имеем множество примеров сил. Рассмотрим самый универсальный и наиболее очевидный пример, а именно ту силу, благодаря которой все тела стремятся упасть вниз. Ведь мы видим, что камень, висящий на нити, натягивает ее, а если ее разорвать, то падает. В связи с этим мы сталкиваемся с вопросом о том, какова причина этого движения или этого стремления падать вниз. Вопрос этот очень сложен, и до сих пор еще не найдено его окончательное решение. Между тем, должна же быть какая-то причина того, что тело, в настоящий момент покоящееся, воспринимает движение вниз, и поэтому существует все же какая-то сила, хотя и невоспринимаемая, которая либо толкает сверху все тела к Земле, либо тянет их вниз. Усилие, или количество стремления, с которым тела устремляются вниз, называется весом, ибо мы измеряем веса силой давления на нижележащие тела. Но в дальнейшем там, где будет говориться о силах, надо будет всегда отвлекаться от веса тел, принимаемых в расчет, и считать, что эти тела могут одинаковым образом приближаться к любому месту, если только я не сделаю определенного указания, что буду рассматривать тела, наделенные весом.

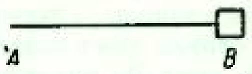


Рис. 1.

Две силы называются *равными*, если они имеют одно и то же направление и производят одинаковое действие, иными словами, если они одинаковым образом толкают или тянут. Поэтому каждая сила может быть сведена к весу, и ее абсолютное количество может быть познано, а именно, если будет познан вес, который стремится вниз или давит на нижележащее препятствие с тем же усилием, с которым это препятствие толкалось бы данной силой, действующей в вертикальном направлении. Итак, в дальнейшем я буду приводить силы к весам таким образом. Как сказано, если сила рAB толкает тело B по направлению AB так же, как некоторый, лежащий на плоскости EF вес C давит вниз на эту плоскость (рис. 2), то я назову силу рAB равной этому весу, если он будет известен.

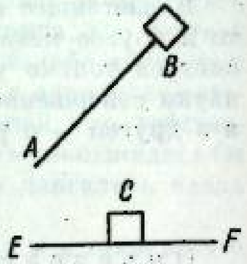


Рис. 2.

Силы называются *согласующимися*, если их направления совпадают, или если они, будучи приложены к одному телу в одной и той же точке, стремятся продвигать тело в одном направлении. И отсюда вытекает сравнение различных сил между собой. Сила A называется равной двум силам B и C одновременно, если она производит то же действие, которое две согласующиеся силы B и C производят, действуя совместно. Подобным же образом мы говорим, что некоторая сила равна многим силам или находится к ним в каком-либо другом данном отношении. Так, если я говорю, что сила A относится к силе B, как 5 к 7, или $5B = 7A$, то это значит, что пять сил, каждая из которых равна силе B, будучи согласующимися и действуя одновременно, толкают препятствие точно так же, как семь согласующихся сил, каждая из которых равна A. В самом деле, таким образом происходит сравнение весов. Ведь мы называем двухфунтовым такой вес, который давит или толкает нижележащее препятствие точно так же, как два веса по одному фунту, оказывающие давление совместно. Итак, если приложены многие согласующиеся силы, то дается одна сила, их *равнодействующая*, а именно та, которая равна всем этим

силам и имеет такое же направление, как и они. Вот что нужно сказать о природе и измерении сил.

Итак, я перехожу к вопросу о приложении сил к телам, но здесь будет говориться только о такой силе, которая не выводит тело из состояния покоя. Ведь если сила стремится привести тело в движение, она сделает это после того, как препятствия будут устранены. Но многие силы, приложенные в различных направлениях, могут привести к тому, что тело не будет двигаться ни в какую сторону и будет оставаться в покое, а это состояние есть состояние равновесия. Об этом-то состоянии и следует говорить в настоящем трактате о статике.

Поскольку различные способы приложения приводят к разным способам вычисления, я в первую очередь буду исследовать простейший случай, при котором все силы приложены к одной и той же точке. Но и этот случай заключает в себе несколько других, в зависимости от того, насколько свободна точка, к которой приложены силы, является ли она


Рис. 3.

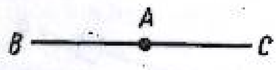


Рис. 4.

вполне свободной и способной одинаково легко двигаться в любую сторону или свобода ее ограничена (например, она не может пересечь данную линию). Если точка A прилегает к стене CD (рис. 3), она будет свободно двигаться во все стороны, но проход через стену для нее недоступен.

Лекция II. Принцип всеобщего равновесия пытаются вывести из следующей аксиомы, которой, впрочем, надо предпослать такое определение.

Две силы являются *противоположными*, если их направления совпадают, но одна сила толкает или тянет тело в сторону, противоположную той, в которую толкает или тянет тело другая сила, как например силы AC и AB (рис. 4).

Аксиома же гласит следующее.

Две равные и противоположные силы, приложенные к точке, производят равновесие. А именно, если точка A влекома к C с такой же силой, с какой она влекома к B, она не уступит ни той и ни другой силе и будет оставаться в покое.

Истинность этой аксиомы очевидна и не нуждается в дальнейшей проверке. Если же с обеих сторон будут приложены многие согласующиеся силы, то равновесие возникнет в том случае, если сумма сил, приложенных с одной стороны, будет равна сумме сил, приложенных с другой стороны.

Из этого принципа пытаются вывести в статике все, однако же повсюду вводят, помимо него, еще нечто другое. Поэтому в дальнейшем я буду исходить из другого, более общего принципа, из которого я выведу все правила статики и очевидность которого постигается не менее легко.

Различные силы, приложенные к одинаковым телам, приводят к тому, что тела за равные промежуточки времени продвигаются на расстояния, пропорциональные самим силам. А именно, пусть тела A и C будут равны, и пусть к ним будут приложены силы BA и DC, которые относятся между собой так же, как длины линий BA и DC (рис. 5). Я утверждаю, что за равные промежуточки времени тела A и C будут продвинуты в a и c

на расстояния Aa, Cc, так что $Aa : Cc = BA : DC$, что равно отношению силы BA к силе DC.

При этом любое тело, к которому приложены многие силы, будет оставаться в равновесии, если положить, что отдельные силы действуют по отдельности, каждая в течение равного промежутка времени, и тело, после того как все силы закончат свое действие, возвращается обратно в свое прежнее положение. О том же, насколько тело выводится из своего положения любой силой, можно судить на основании предыдущего предложения.

Так, пусть к точке A будут приложены три силы AB, AC, AD (рис. 6), приводящие вместе с равновесию. Я утверждаю, что это обнаруживается следующим образом. Положим, что сила AD действует одна в течение некоторого промежуточка времени, тогда как остальные силы устранены, и пусть точка A будет продвинута в d. Затем пусть в течение равного

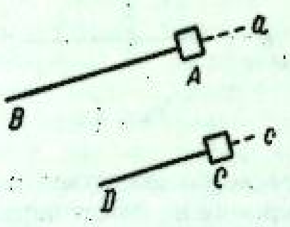


Рис. 5.

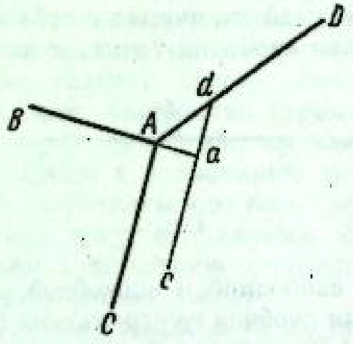


Рис. 6.

промежуточка времени действует сила cd, которая, если прочими силами пренебречь, продвинет тело в a, так что $Ad : da = AD : AC$. Ведь величина сил выражена линиями AD, AC, AB. Ибо, если бы тело было в A, сила действовала бы по направлению AC, а следовательно, тело, помещенное в d, будет продвинуто вдоль направления dc, параллельного и равного AC. Пусть теперь, когда точка A находится в a, будет действовать в течение равного промежуточка времени третья сила aB. Если она приведет к тому, что точка вновь придет в свое первое положение A, то три приложенные силы оставят точку A в равновесии.

Установив этот принцип, я перехожу к равновесию сил, приложенных к свободной точке. Здесь сначала будет показано, каковы должны быть силы как по их направлению, так и по величине, затем будет говориться об отыскании одной силы, являющейся равнодействующей многих сил, о ее величине и направлении. Во всех этих задачах будет рассматриваться либо определение направления по заданной величине сил, либо — величины по заданному направлению. Объяснение повсюду надлежит проводить отдельно, соответственно различному числу сил.

Лекция III. Итак, сначала надо исследовать, каким образом две силы могут сохранять в равновесии точку, к которой они приложены. Это содержится в следующей теореме, которую мы выше привели в качестве аксиомы, но которую теперь можно доказать, исходя из принятых принципов.

Две силы, равные и прямо противоположные, будучи приложены к точке, сохраняют ее в равновесии.

Доказательство. Пусть к точке O приложены влекущие силы OA и OB или толкающие силы AO и BO, равные и друг другу прямо противоположные, действующие вдоль направлений AO, BO, образующих

одну прямую линию (рис. 7). В результате их действия точка O будет оставаться в покое. Ибо положим, что влекущая сила OA или толкающая сила BO действует одна и приводит точку O в o. Пусть теперь в течение равного промежуточка времени действует другая сила: либо толкающая AO, либо влекущая OB; поскольку она равна предыдущей силе, то она приведет точку, расположенную в o, снова в O. Следовательно, если будут действовать обе силы, то в соответствии с принятым принципом точка O будет находиться в покое, что и требовалось доказать.

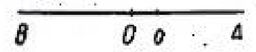


Рис. 7.

Следовательно, если к точке приложена сила, то, для того чтобы она оставалась в равновесии, необходимо, чтобы с противоположной стороны была приложена другая сила, равная предыдущей.

Пусть к точке O приложены три силы OA, OB, OC (рис. 8); исследуем, что требуется для сохранения равновесия. Как явствует из принятого принципа, для этого требуется, чтобы точка O после последовательных и одинаково длительных воздействий всех сил вновь возвратилась на свое место в O. Положим, что сначала действует только одна сила OA, которая приведет точку O в d. Второй пусть действует одна сила OB, которая теперь переходит в db, поскольку O перенесено в d, так что OB параллельна и равна силе db; пусть она приведет точку d в e. Итак, поскольку действием двух сил точка из O перенесена в e, то, для того чтобы сохранялось равновесие, остающаяся третья сила должна повлечь возвращение e вновь в O. Если провести прямую eO, то она должна дать направление третьей силы OC, которая должна быть такова, чтобы она смогла перевести точку из e в O за то же время, за которое сила A перевела ее из O в d.

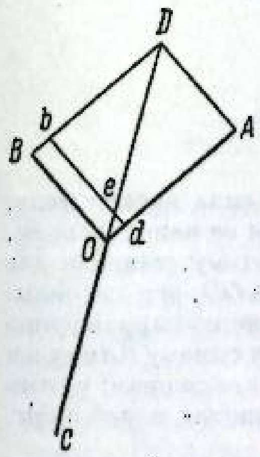


Рис. 8.

То, что следует усмотреть относительно величины сил, их положения или направления, мы выведем из рисунка, на котором линии OA, OB, OC представляют своим положением направление сил, а своим размером величину сил. Линия bd параллельна и равна BO. Проведем из B линию BD, параллельную линии OA, а из A проведем AD, параллельную OB, которая пересечет только что проведенную BD в D. Фигура $BDAO$ будет параллелограммом. Следовательно, $AO = BD$ и $AD = OB$. Далее, расстояния Od, de, eO, на которые силы OA, OB, OC за равные времена передвинули точку O, относятся между собой, как сами силы. Следовательно, $Od : de = OA : OB = OA : AD$ и $Od : Oe = OA : OC$. Поскольку же $Od : de = OA : AD$ и $\angle Ode = \angle OAD$, то, проведя диагональ OD, получим подобные треугольники Ode, OAD, а также угол $eOd = DOA$. Следовательно, OC падает на диагональ OD. Поскольку же OC должно составлять одну прямую с Oe, то Oe и OD лягут на одну прямую. Таким образом, с помощью построения параллелограмма и проведения диагонали по данным двум силам определяется направление третьей. Вследствие подобия треугольников Ode и OAD получим $Od : Oe = OA : OD$. Ранее же было $Od : Oe = OA : OC$, откуда следует $OC = OD$. Следовательно, OC равно диагонали OD. Поэтому, так как силы полагаются пропорциональными линиям, представляющим направления, найдено отношение и направление трех сил, которые, будучи приложены к точке, производят равновесие.

Лекция IV. Если бы сила OC действовала одна, она увлекла бы точку O по направлению к C, но OA и OB, действуя одновременно, уничтожают действие силы OC. Если же к точке O вместо двух сил OA, OB приложить одну силу OD, действующую по направлению линии OD и пропорциональную ей по величине, то она также воспрепятствует действию силы OC и приведет к равновесию, поскольку OC и OD равны и прямо противоположны. Следовательно, сила OD производит то же действие, которое производят две силы OA и OB. Таким образом, если даны две силы, приложенные к одной и той же точке, то найдется одна сила, являющаяся равнодействующей им обеим.

Пусть к точке O будут приложены две силы OA, OB (рис. 9), их равнодействующей будет сила, которая действует по диагонали OD параллелограмма $OADB$ и ей пропорциональна, т. е. относится к какой-либо из

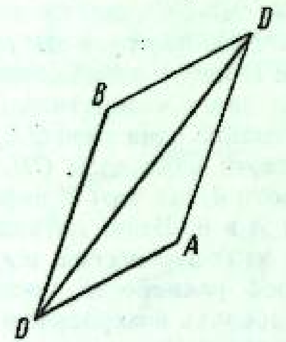


Рис. 9.

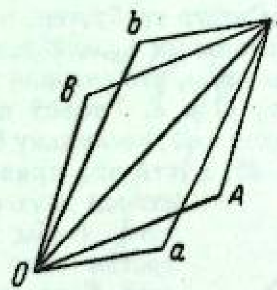


Рис. 10.

данных сил, например OA, как OD к OA. Поскольку сила движет тело, к которому она приложена, по линии, которая является ее направлением, сила OD продвинет точку O по направлению OD. Поэтому, так как две силы OA, OB производят то же действие, что и одна сила OD, эти две силы, действуя одновременно, будут продвигать точку O также по направлению OD. Эта линия, по которой многие силы, приложенные к одному и тому же телу, стремятся его продвинуть, называется *средним направлением*; иными словами, среднее направление многих сил есть направление одной силы, являющейся равнодействующей всех этих сил.

Найденное правило, согласно которому определяется сила, являющаяся равнодействующей двух других, называется *принципом сложения движения или*, вернее, *сложения сил*; этот принцип применяется для того, чтобы большое число сил свести к немногим силам и тем самым облегчить вычисление.

И, наоборот, если дана одна сила, приложенная к телу, из найденного мы узнаем, как бесчисленным множеством способов находить две такие силы, которые, будучи приложены одновременно, производят то же действие, что и данная одна сила. Пусть к точке O будет приложена сила OD (рис. 10). Я утверждаю, что если вокруг диагонали OD будет описан какой-либо параллелограмм $OADB$ или $OaDb$, или другой (описать параллелограмм можно бесконечным числом способов), то обе стороны, прилежащие к точке O, — OA и OB или Oa и Ob и т. д. — всегда представляют две силы, совместно производящие такое же действие, что и сила OD. А это и есть *принцип разложения движения или*, вернее, *сил*, с помощью которого вместо одной действующей силы могут быть привлечены к рассмотрению две силы, если это окажется более удобным. И без

моего указания ясно, что вместо одной силы путем постоянно повторяющегося разложения может быть введено любое число сил, совместно производящих то же действие. Так, вместо силы OD получаем две, OA и OB; вместо OA опять находим две; также и вместо OB и т. д.

Из показанного расположения трех приложенных к точке сил, которые находятся в равновесии, вытекает следующая теорема.

Если три силы OA, OB, OC, приложенные к точке O, производят равновесие, любая сила будет пропорциональна синусу противолежащего угла, а именно (рис. 11): $pOA : pOB = \sin \angle BOC : \sin \angle AOC$ и $pOA : pOC = \sin \angle BOC : \sin \angle AOB$.

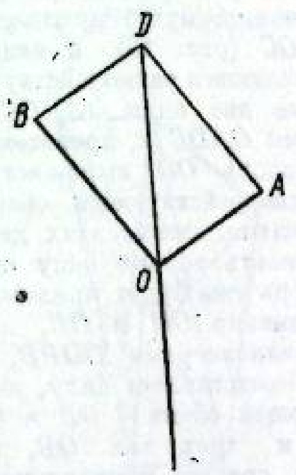


Рис. 11.

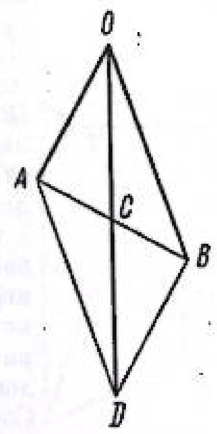


Рис. 12.

Доказательство. Построим параллелограмм $BOAD$ и проведем диагональ OD. Тогда OD будет равна OC и будет лежать с ней на одной прямой. Следовательно, силы OA, OB, OC будут пропорциональны самим линиям OA, OB, OC (или OD), а именно $pOA : pOB = OA : OB = OA : AD$. Но в треугольниках стороны пропорциональны синусам противолежащих углов. Следовательно, в треугольнике OAD $OA : AD = \sin \angle ODA : \sin \angle AOD$. Но $\sin \angle ODA = \sin \angle BOD$, поскольку эти углы равны. Далее, поскольку смежные углы имеют один и тот же синус, $\sin \angle DOB = \sin \angle BOC$ и $\sin \angle AOD = \sin \angle AOC$. Следовательно, положив $\sin \angle BOC$ вместо $\sin \angle ODA$ и $\sin \angle AOC$ вместо $\sin \angle AOD$, получим $OA : AD = \sin \angle BOC : \sin \angle AOC = OA : OB = pOA : pOB$. Далее, $pOD : pOA = OD : OA = \sin \angle OAD : \sin \angle ADO = \sin \angle AOB : \sin \angle BOC$. Следовательно, силы пропорциональны синусам противолежащих углов, что и требовалось доказать.

Пусть к точке O будут приложены две силы OA и OB (рис. 12). Если соединить точки A, B прямой AB, разделенной пополам в C, провести OC и продолжить ее до D, так чтобы $CD = OC$, то я утверждаю, что прямая OD представит среднее направление сил OA и OB, а также равнодействующую силу.

Доказательство. Для того чтобы доказать это, необходимо только одно, а именно, чтобы было показано, что линия OD является диагональю параллелограмма $AOBD$. А это легко обнаруживается, поскольку обе диагонали параллелограмма делят друг друга пополам. Итак, поскольку AB и OD делят друг друга пополам, а вследствие равенства и подобия треугольников OCA и DCB стороны AO и BD равны и параллельны, фигура $AOBD$ будет параллелограммом, а OD его диагональю, что и требовалось доказать.

Изложив то, что требуется для равновесия трех сил, и выведя отсюда среднее направление двух сил и одну силу, являющуюся их равнодействующей, мы подходим к случаям многих сил и применительно к этим случаям найдем среднее направление и равнодействующую силу, а также то, что требуется для равновесия.

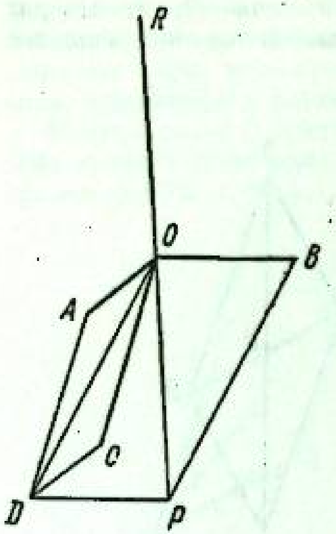


Рис. 13.

Пусть к точке O будут приложены три силы OA, OB, OC (рис. 13), и надо найти их среднее направление и равнодействующую силу. Возьмем любые две силы OA, OC, построим параллелограмм $OADC$ и проведем диагональ OD. Эта диагональ OD выражает силу, являющуюся равнодействующей обеих — OA и OC. Следовательно, вместо этих двух сил будем рассматривать только одну силу OD, и к точке O теперь уже будут приложены только две силы, а именно OD и OB, по которым построим параллелограмм $ODPB$, диагональ которого OP представляет силу, являющуюся равнодействующей обеих — OB и OD, а следовательно, и трех сил OB, OC и OA. Следовательно, среднее направление трех сил OA, OB, OC есть OP, и это указывает на то, что эти три силы, действующие одновременно, пытаются продвинуть точку O вдоль направления OP, а сила, представленная линией OP, производит то же действие, что и три силы OA, OB и OC.

Если приложено больше трех сил, то подобным же образом будут получены среднее направление и одна сила, являющаяся равнодействующей всех этих сил.

Если даны три силы OA, OB, OC, то отсюда можно найти четвертую силу, которая, будучи приложена, удержит их в равновесии. Продолжим линию OP в другую сторону к точке R так, чтобы $OR=OP$. Я утверждаю, что приложенная сила OR уничтожит действие сил OA, OB, OC, а следовательно, установит равновесие. Ведь она находится в равновесии с силой OP, а OP является равнодействующей трех сил OA, OB, OC. Следовательно, сила OR находится в равновесии с тремя силами OA, OB, OC.

Подобным же образом, если число сил будет больше трех, можно найти силу, которая, будучи сверх того приложена, приведет к равновесию. Для этого надо найти одну силу, являющуюся равнодействующей всех этих сил, и приложить в прямо противоположную сторону равную ей силу; последняя и будет той, которая требуется для равновесия.

Существуют некоторые приемы, с помощью которых можно более кратким путем определить среднее направление и силу, являющуюся равнодействующей всех заданных, но из них можно будет применить только следующий, поскольку прочие требуют бóльших познаний в этом деле, в частности относительно центра тяжести.

Пусть к точке O будут приложены три силы OA, OC, OB (рис. 14). Следующим способом легко найти линию среднего направления и равнодействующую этих сил. Соединим точки A и C прямой AC и разделим ее на две равные части в M. Затем проведем линию BM и отрежем на ней MN — третью часть всей BM. Если провести линию ON, то она будет средним направлением трех сил, и если она будет в три раза увеличена, или продлена до P, так чтобы OP было в три раза больше ON, то OP представит силу, являющуюся равнодействующей этих трех сил. Для доказательства нужно установить, что эта линия OP одинакова с OP на предыдущем рисунке. Построим параллелограмм $OADC$, его диагональ OD пройдет через точку M (это известно из геометрии). Далее, построив параллелограмм $OBPD$, нужно доказать, что найденная вышеизложенным

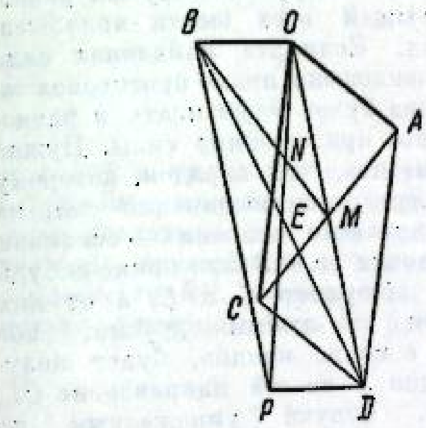


Рис. 14.

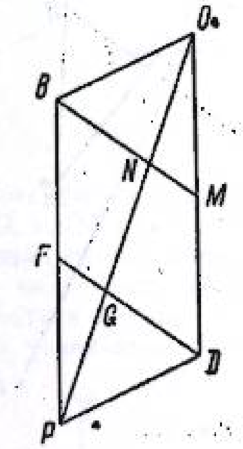


Рис. 15.

способом линия OP является диагональю этого параллелограмма (или, что сводится к тому же, диагональ OP пересекает линию BM в N так, что MN является третьей частью BM) и OP в три раза больше ON.

Для того чтобы не вносить путаницу в рисунок множеством линий, рассмотрим параллелограмм $OBPD$ отдельно (рис. 15). Разделим OD пополам в M и проведем BM. Нужно доказать, что MN есть третья часть линии BM, что я сделаю следующим образом. Из D проведем DF, параллельную BM и пересекающую диагональ в точке G; тогда треугольники DGP, BNO будут подобны и равны, поскольку $OB=DP$, $GPD=BON$ и $BNO=DGP$, откуда $DG=BN$. Но вследствие подобия треугольников OMN, ODG $MN:DG=OM:OD=1:2$. Следовательно, $MN:BN=1:2$ и, складывая, $MN:(MN+BN)(BM)=1:3$. Итак, MN есть третья часть BM. Далее, вследствие подобия треугольников ONM, PNB имеем $MN:ON=BN:PN$ или $MN:BN=ON:PN$. Следовательно, складывая, получим $MN:BM=ON:OP=1:3$. Итак, OP в три раза больше ON, что и требовалось доказать.

Подобным же образом находится среднее направление всех сил и тогда, когда приложено много сил. Так, пусть к точке O будет приложено любое количество сил OA, OB, OC, OD, OE, OF (рис. 16). Соединим две из них OA и OB линией AB и возьмем $AG=\frac{1}{2}AB$. Прямая OG будет средним направлением двух сил OA и OB, а линия OG, взятая дважды, выразит силу, являющуюся равнодействующей обеих сил OA и OB. Проведем из G к любой другой силе OC прямую GC и возьмем на ней $GH=\frac{1}{3}GC$. Проведя OH, получим среднее направление трех сил OA, OB, OC; трижды взятая OH будет их равнодействующей. Далее, из H проведем к D прямую HD, на которой пусть $HI=\frac{1}{4}HD$. Тогда OI, повторенная четыре раза, будет равнодействующей четырех сил OA, OB, OC, OD. Затем проведем IE, и пусть $IK=\frac{1}{5}IE$. Наконец, проведем KF и возьмем $KL=\frac{1}{6}KF$. Если провести OL и приложить ее шесть раз, то OP представит силу, являющуюся равнодействующей всех шести приложенных сил. Если эта найденная сила будет приложена прямо противоположно, то она будет удерживать в равновесии все приложенные силы. Нужно еще отметить, что порядок, которому мы следуем при соединении сил, не имеет никакого значения — соединим ли мы точки A и B или какие-нибудь другие, например C и E, а от них перейдем к любым другим, ибо всегда, в конце концов, будет получено одно и то же направление OL, которое, будучи умноженным на число сил, всегда представит одну и ту же силу OP.

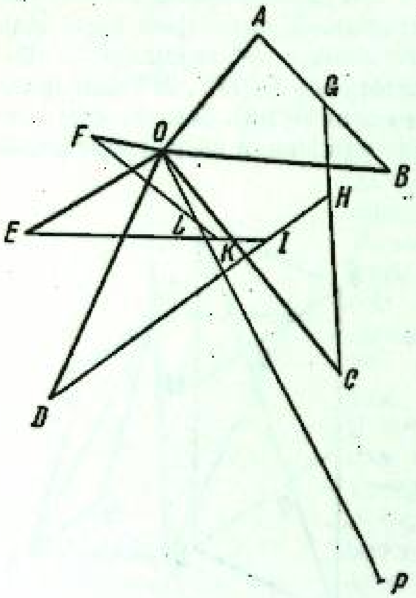


Рис. 16.

Относительно сил, приложенных к свободной точке, пусть будет достаточно сказанного. Перехожу в соответствии с установленным порядком к действию сил, приложенных к не вполне свободной точке, которая из-за препятствия, где-либо расположенного, не может поворачиваться во все стороны. Для такого рода точки требуется найти среднее направление, силу, равнодействующую многим, и равновесие.

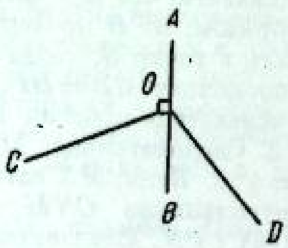


Рис. 17.

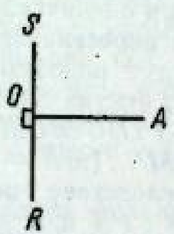


Рис. 18.

Пусть к стене AB прилегает точка O (рис. 17), которая не является свободной, так как она не может следовать силам типа OD, влекущим ее по ту сторону стены. Но таким силам, как OC, которые стремятся отодвинуть ее от стены, она совершенно свободно уступает. Следовательно, во всех случаях, когда приложенные силы стремятся отодвинуть тело O от стены, все исследование не отличается от предыдущего.

Если точку O, прилежащую к стене RS, тянет сила OA (рис. 18), направление которой AO перпендикулярно к стене RS, то очевидно, что тело O, поскольку стена не дает ему прохода, не может двигаться ни

в какую сторону. По какому направлению оно будет двигаться? По направлению OS? Но почему же не по OR? Итак, поскольку нет никакого основания к тому, чтобы тело продвигалось скорее вдоль OS, чем вдоль OR, то неизбежно тело будет находиться в состоянии покоя. Далее, там, где движение следует за действием силы, движущееся тело всегда следует

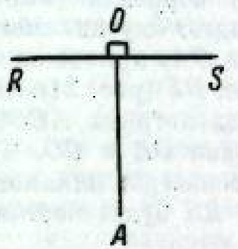


Рис. 19.

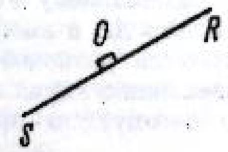


Рис. 20.

за силой и приближается к стороне, в которую оно увлекается. Но по какому бы направлению ни двигалось тело O, по OS или по OR, оно всегда будет удаляться от A, ибо линия AO, поскольку она перпендикулярна, является кратчайшей из линий, которые могут быть проведены из A к плоскости RS. Поэтому тело будет покоиться в точке O. Между тем, однако, движимое тело O, поскольку оно увлекается по направлению

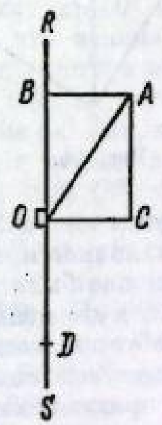


Рис. 21.

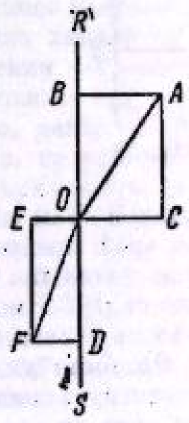


Рис. 22.

OA, давит на стену, не дающую ему прохода, и притом с таким усилием, с каким оно прижимается к стене силой OA. Следовательно, стена RS в точке O будет выдерживать полное давление силы OA. В последующем рассмотрении надо будет всякий раз исследовать, какую силу должно испытывать препятствие.

Так как все земные тела стремятся опускаться вниз, то пусть O будет некоторым весом, который стремится опуститься вниз вдоль вертикальной линии OA (вертикальной называется линия, которая стремится прямо вниз или которая при продолжении пройдет через центр Земли). Мы можем рассматривать тяжесть как силу OA, приложенную к телу O, которая непрерывно стремится увлечь тело вниз. Если под телом O будет помещено препятствие RS (рис. 19), образующее в O прямые углы с AO, тело O не сможет следовать за действием силы AO. Соответственно, вследствие нормальности линии AO к RS, тело будет покоиться в точке O. Такая плоскость RS называется горизонтальной плоскостью. Она обладает тем свойством, что тяжелые тела, помещенные на ней, покоятся, тогда как, с другой стороны, вес O, помещенный на наклонной плоскости RS (рис. 20), отнюдь не будет находиться в состоянии покоя, но будет следовать наклонному направлению OS.

Поскольку сила, направление которой перпендикулярно к стене, прижимая движущееся тело к стене, не придает ему никакого движения, рассмотрим, что произведет наклонная сила OA, приложенная к движущемуся телу O, прилегающему к препятствию RS (рис. 21). Опустим из A на RS перпендикуляр AB и построим параллелограмм $ABOC$. Очевидно, что сила OA является равнодействующей сил OB и OC. Но сила OC, поскольку она перпендикулярна к RS, не произведет никакого движения, а приведет лишь к тому, что препятствие RS будет постоянно подвергаться давлению такой силы со стороны движущегося тела O. Другая же сила BO, для которой препятствие вовсе не является помехой, будет действовать на тело точно так же, как если бы оно было свободным.

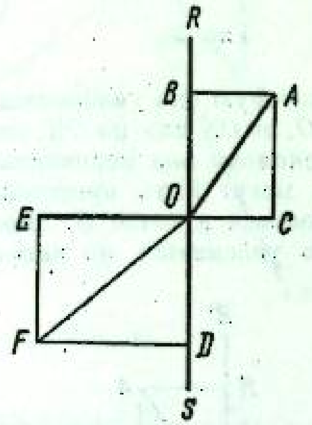


Рис. 23.

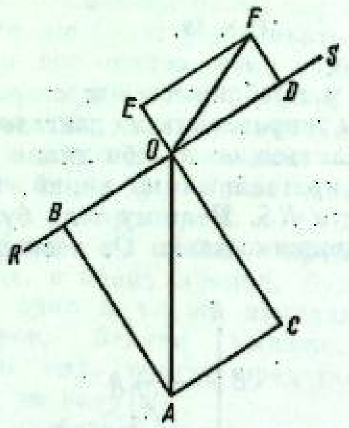


Рис. 24.

Так как только сила BO может приводить O в движение, то, для того чтобы тело оставалось в состоянии покоя, требуется только, чтобы действие этой силы OB было уничтожено приложением какой-либо новой силы. Это будет достигнуто силой OD, равной и противоположной силе OB. Поскольку же эта сила не оказывает никакого воздействия на силу OC, тело O будет покоиться, но, тем не менее, будет давить на стену с силой OC. Поскольку же при отсутствии этой силы движущееся тело O покоится, ясно, что если она будет уменьшена или вовсе уничтожена приложением новой силы, то движущееся тело O все же будет оставаться в состоянии покоя. Отсюда ясно, что состояние равновесия может быть достигнуто бесчисленными способами.

Действительно, приложим еще вдобавок силу OE (рис. 22), противоположную силе OC, но меньшую, чем она, или в крайнем случае равную ей. Эта сила приведет во всяком случае к тому, что тельце O будет давить меньше или вовсе не будет давить на препятствие RS. Поскольку эта сила не выводит O из покоя, то, будучи приложенной вновь вместе с силой OD, она уничтожит действие силы OA или во всяком случае действие силы OB. А две силы OE и OD, действуя одновременно, являются равнодействующими по отношению к силе OF, получаемой из построения параллелограмма $OEFD$. Таким образом, две силы OA, OF, будучи приложены к движимому телу O, будут сохранять его в покое. Когда

сила $OE = OC$, то, поскольку $OD = OB$, параллелограмм $OEFD$ будет подобен и равен параллелограмму $ABOC$, откуда $AO = OF$, а поскольку CE и BD являются прямыми линиями, AOF также будет прямой линией. Следовательно, в этом случае две силы OA, OF будут равны и прямо противоположны, и так как $OE = OC$, то препятствие не будет более испытывать никакого давления от O. Это — случай совершенного равновесия, которое имело бы место даже при том условии, если бы точка O была свободна, но и в остальных случаях точка O оставалась бы в покое.

Если же сила OE стала бы больше OC (рис. 23), то движимое тело O не покоилось бы более. Ведь в этом случае сила OE превосходила бы силу OC, и таким образом точка O увлекалась бы по направлению к E, куда бы она и передвигалась, поскольку она может двигаться свободно, так как препятствие RS преграждает ей доступ только к C. Поэтому не было бы состояния равновесия или покоя.

Пусть будет поставлен следующий вопрос. К движимому телу O, помещенному на препятствие RS, приложена сила OA, и тело увлекается также по направлению OF (рис. 24). Требуется найти, с какой силой должно увлекаться тело O по этому направлению для того, чтобы оно оставалось в покое.

Р е ш е н и е. Опустим из A перпендикуляр AB и построим параллелограмм $ABOC$. Поскольку сила OA является равнодействующей сил OB, OC, а OC нисколько не нарушает состояние покоя, надо уничтожить только силу OB. Следовательно, пусть, с другой стороны, $OD = OB$. Проведем перпендикуляр DF, встречающий данное направление OF в точке F. Я утверждаю, что искомая сила выражена линией OF, поскольку она является равнодействующей (из построения параллелограмма $ODFE$) двух сил OD, OE, из которых OD уничтожает OB. Необходимо, чтобы OE была меньше OC или, по крайней мере, равна ей. Это случится, если угол AOF будет меньше двух прямых или, по крайней мере, равен им. Следовательно, сила OF, которую нужно приложить, относится к приложенной силе OA, как линии OF и OA. Но $OF : OD = \sin D : \sin OFD$ и $OB : OA = \sin OAB : \sin OBA$. Перемножив эти пропорции между собой, получим новую пропорцию: $(OB \cdot OF) : (OD \cdot OA) = (\sin D \cdot \sin OAB) : (\sin B \cdot \sin OFD)$. Но $OB = OD$ и $\sin D = \sin B$, поскольку эти углы являются прямыми. Следовательно, $OF : OA = \sin OAB : \sin OFD = \sin AOC : \sin FOE$. Следовательно, сила OF относится к силе OA, как $\sin AOC$ к $\sin FOE$, что и требовалось найти.

ПЛАН ТРАКТАТА О ДВИЖЕНИИ ТЕЛ ПОД ДЕЙСТВИЕМ ЦЕНТРАЛЬНОЙ СИЛЫ, ИЗВЛЕЧЕННЫЙ ИЗ ПЕРВОЙ «ЗАПИСНОЙ КНИЖКИ»

A. О свободном движении тел в произвольных предположениях о тяжести и сопротивляющейся среде.

a. О движении одного тела или о признаках одного тела независимо от его отношения к другому.

Здесь в расчет могут войти 1) центральная сила, 2) сила сопротивления, 3) линия, которую описывает тело, причем из двух данных всегда можно найти третье.

α. Метод нахождения центральной силы по данным линии и силе сопротивления.

א. В предположении об отсутствии сопротивления.
1. На конечном расстоянии от центра.
2. На бесконечном расстоянии от центра.

ב. В предположении, что сопротивление прямо пропорционально скорости и обратно пропорционально некоторой степени расстояния от центра (1—2).

ג. В предположении, что сопротивление прямо пропорционально квадрату скорости и обратно пропорционально степени расстояния (1—2).

ד. В предположении, что сопротивление прямо пропорционально частично скорости, частично ее квадрату и обратно пропорционально степени расстояния (1—2).

ה. В предположении, что сопротивление прямо пропорционально некоторой степени скорости и обратно пропорционально степени расстояния (1—2).

ו. В других предположениях о сопротивлении (1—2).

β. Метод нахождения силы сопротивления по данным линии и центральной силе.

א. В предположении о единообразной тяжести (1—2).

ב. В предположении, что центральная сила прямо пропорциональна расстоянию от центра (1—2).

ג. В предположении, что центральная сила обратно пропорциональна квадрату расстояния (1—2).

ד. В предположении, что центральная сила прямо пропорциональна некоторой степени расстояния (1—2).

ה. В других предположениях о центральной силе.
1. На конечном расстоянии от центра.
2. При бесконечном удалении от центра.

γ. Метод нахождения линии, которую описывает тело, по данным центральной силе и силе сопротивления, а именно:

א. В предположении об отсутствии сопротивления или в пустоте.
1. На конечном расстоянии от центра.
2. На бесконечном расстоянии от центра.

ב. В предположении, что сопротивление прямо пропорционально скорости и обратно пропорционально некоторой степени расстояния от центра.

1. На конечном расстоянии.
2. На бесконечном расстоянии.

ג. В предположении, что сопротивление прямо пропорционально квадрату скорости и обратно пропорционально некоторой степени расстояния.
1. На конечном расстоянии.
2. На бесконечном расстоянии.

ד. В предположении, что сопротивление прямо пропорционально частью скорости, частью ее квадрату и обратно пропорционально некоторой степени расстояния от центра.
1. На конечном расстоянии.
2. На бесконечном расстоянии.

ה. В предположении, что сопротивление прямо пропорционально некоторой степени скорости и обратно пропорционально степени расстояния.
1. На конечном расстоянии.
2. На бесконечном расстоянии.

ו. В других предположениях о сопротивлении.

b. О движении многих тел или об отношении периодов этих движений между собой.

α. В предположении об отсутствии сопротивления или в пустоте.

א. На конечном расстоянии от центра.

ב. На бесконечном расстоянии.

β. В предположении, что сопротивление прямо пропорционально скорости и обратно пропорционально некоторой степени расстояния от центра.

א. На конечном расстоянии от центра.

ב. На бесконечном расстоянии.

γ—ζ (א—ב). Смотри α и γ в разделе A, ибо здесь γ есть то, что там было ג, и здесь א и ב суть то, что было там 1 и 2.

B. О движении тел, перемещающихся по заданным линиям, в любых предположениях о тяжести и сопротивляющейся среде.

a. О движении одного тела или о признаках одного тела независимо от его отношения к другому.

Здесь следует рассматривать 1) скорость тела, 2) центральную силу, 3) силу сопротивления и 4) линию, которую описывает тело, причем из трех данных можно найти четвертое.

α. Метод нахождения скорости по данным линии, центральной силе и силе сопротивления.

א. В предположении об отсутствии сопротивления.
1. На конечном расстоянии от центра.
2. На бесконечном расстоянии.

ב—ו (1—2). Как выше.

β. Метод нахождения центральной силы по данным линии, силе сопротивления и скорости.

א. В предположении об отсутствии сопротивления.
1. На конечном расстоянии.
2. На бесконечном расстоянии.

ב—ו (1—2). Как выше.

γ. Метод нахождения силы сопротивления по данным линии, центральной силе и скорости.

א. Либо на конечном расстоянии.
1. В предположении об единообразной тяжести.
2. В предположении, что тяжесть пропорциональна расстоянию.
3. В предположении, что тяжесть обратно пропорциональна квадрату расстояния.
4. В предположении, что тяжесть пропорциональна некоторой степени расстояния.

ב. Либо на бесконечном расстоянии.
1. В предположении о единообразной тяжести.
2. В других предположениях о тяжести.

δ. Метод нахождения линии, которую должно описывать тело, по данным центральной силе, силе сопротивления и скорости.

א. В предположении об отсутствии сопротивления.
1. На конечном расстоянии.
2. На бесконечном расстоянии.

ב—ו (1—2). Как выше.

b. О движении многих тел или об отношении их периодов и скоростей между собой.

α. В предположении об отсутствии сопротивления.

א. На конечном расстоянии от центра.
ב. На бесконечном расстоянии.

β—ζ (א—ב). Как выше.

Перед этим следует поместить раздел о прямолинейном подъеме или спуске к центру.

Здесь могут идти в расчет 1) центральная сила, 2) сила сопротивления и 3) скорость, причем из двух данных можно найти третье.

a. Метод нахождения скорости по данным центральной силе и силе сопротивления.

α. Либо сопротивление отсутствует.
β. Либо пропорционально скорости и обратно пропорционально степени расстояния.
γ. Либо пропорционально ее квадрату и обратно пропорционально степени расстояния.
δ. Либо пропорционально частью скорости и ее квадрату и обратно пропорционально степени расстояния.
ε. Либо прямо пропорционально степени скорости и обратно пропорционально степени расстояния.
ζ. В других предположениях о сопротивляющейся среде.
Все рассматривается двояко.

b. Метод нахождения центральной силы по данным силе сопротивления и скорости.

α. Либо сопротивление отсутствует.
β—ζ. Как выше, каждая часть — двояко.

c. Метод нахождения силы сопротивления по данным центральной силе и скорости.

α. Центральная сила единообразна.
β. Центральная сила пропорциональна расстоянию.
γ. Центральная сила обратно пропорциональна квадрату расстояния.
δ. Центральная сила обратно пропорциональна степени расстояния.
ε. В других предположениях о тяжести.

СОЧИНЕНИЕ О ДВИЖЕНИИ ТЕЛ ПОД ДЕЙСТВИЕМ ЦЕНТРАЛЬНОЙ СИЛЫ, ИЗВЛЕЧЕННОЕ ИЗ ПЕРВОЙ «ЗАПИСНОЙ КНИЖКИ»

СОДЕРЖАНИЕ

I. О ДВИЖЕНИИ ТЕЛ ПОД ДЕЙСТВИЕМ ПРОИЗВОЛЬНОЙ ЦЕНТРАЛЬНОЙ СИЛЫ

ОПРЕДЕЛЕНИЯ

I. *Центральной силой является сила, которая притягивает тела к какой-либо неподвижной точке или отталкивает их от нее*; если она производит первое действие, то она называется *центростремительной силой*, а если второе, то — *центробежной*.

II. *Изменяющей силой является сила, которая изменяет скорость движущегося тела*, т. е. либо увеличивает ее, либо уменьшает; в первом случае она называется *ускоряющей силой*, во втором — *замедляющей*.

NB. Эта сила изменяет только скорость, оставляя неизменным направление движения.

III. Если центральную силу разложить на ее боковые составляющие, а именно: на силу, направлением которой служит касательная к кривой, описываемой движущимся телом, и на силу, направление которой нормально к первому, то первая сила называется *тангенциальной силой*, а вторая — *нормальной*.

Предложение I. Если тело описывает кривую LM (рис. 1), а центр находится в C, то величина центральной силы в L будет относиться к величине центральной силы в M, как Lr к Ms; при этом элементы Ll и Mm берутся за одно и то же время, а lr и ms проводятся параллельно элементам, смежным с Ll и Mm.

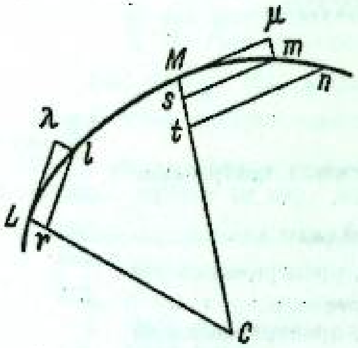


Рис. 1.

Доказательство. Если бы была устранена центростремительная сила и были проведены $l\lambda$ и $m\mu$, параллельные CL и CM, то тело описало бы за тот же промежуточек времени отрезочки $L\lambda$ и $M\mu$, а продвигающая сила тела в L относилась бы к продвигающей силе в M, как $L\lambda$ к $M\mu$. Но так как под действием центральной силы тело описывает диагонали Ll и Mm, то отсюда следует, что эти центральные силы пропорциональны Lr и Ms, что и требовалось доказать.

Предложение II. Каким бы образом ни были взяты элементы Ll и Mn, центральная сила в L будет относиться к центральной силе в M, как квадрат скорости в L, деленный на корадиус в L, к квадрату скорости в M, деленному на корадиус в M.

Доказательство. Если элемент Mm будет относиться к тому же времени, что и Ll, то сила в L будет относиться к силе в M, как Lr к Ms. Но $Ms : Mt = Mm^2 : Mn^2$. Следовательно, $Ms = \frac{Mm^2 \cdot Mt}{Mn^2}$. Но $Mt : Mn = Mn : 2\,\text{corad. in } M$. Таким образом,

$$Ms = \frac{Mm^2}{2\,\text{corad. in } M}.$$

Отсюда vL (в дальнейшем я буду так обозначать центральную силу в L) $: vM = Lr : \frac{Mm^2}{2\,\text{corad. in } M}$. Поскольку же $\mathfrak{t}Mm$ (время, соответствующее Mm) $= \mathfrak{t}Ll$, т. е. $\frac{Mm}{cM} = \frac{Ll}{cL}$, то отсюда $Mm = \frac{cM \cdot Ll}{cL}$ (c обозначает скорость). Отсюда

$$vL : vM = Lr : \frac{cM^2 \cdot Ll^2}{cL^2 \cdot 2\,\text{corad. in } M} = \frac{Lr \cdot cL^2}{Ll^2} : \frac{cM^2}{2\text{corad. in } M} =$$

$$= \frac{cL^2}{\text{corad. in } L} : \frac{cM^2}{\text{corad. in } M},$$

что и требовалось доказать.

Следствие 1. Итак, всегда, какой бы ни была изменяющая сила, центральная сила пропорциональна квадрату скорости, отнесенному к корадиусу.

Следствие 2. Следовательно, если тело движется по окружности, центр которой совпадает с центром сил, то центральная сила будет пропорциональна квадрату скорости.

Следствие 3. Следовательно, скорость пропорциональна корню квадратному из сил тела, движущегося по окружности. Вообще же скорость будет пропорциональна корню квадратному из произведения силы на корадиус.

Примечание. Сказанное в следствии 2 об окружности не допускает обратной формулировки; а именно: не всякая линия, которую описывает

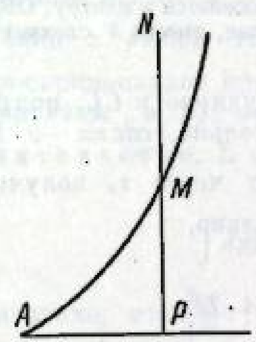


Рис. 2.

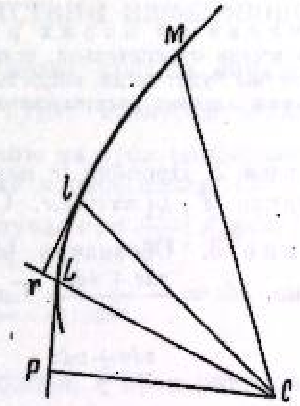


Рис. 3.

тело под действием центральной силы, пропорциональной квадрату скорости, является окружностью. Ибо существует сверх того еще бесчисленное множество линий, обладающих тем свойством, что их корадиус всегда постоянен.

Ведь если центр бесконечно удален и движущееся тело притягивается вдоль направления MN, то кривая AM (рис. 2) будет взаимной траекторией,* имеющей бесконечное число осей, параллельных аппликатам PM, и она строится так. Взяв $AP = \int \frac{a\,dz}{aa + zz}$, примем $PM = \int \frac{z\,dz}{aa + zz}$, что удовлетворит искомому.

Предложение III. Если тело движется по линии LM (рис. 3), то элемент скорости в L, отнесенный к промежуточному времени, за который описывается дужка Ll, будет пропорционален тангенциальной силе, уменьшенной на замедляющую силу или увеличенной на ускоряющую силу.

---

* Взаимными траекториями называются линии, которые, будучи помещены между двумя параллельными прямыми и перемещаемы вместе со своим зеркальным отображением в прямой, равноотстоящей от заданных параллельных, вдоль их направления, образуют семейство кривых, сохраняющих постоянный угол при взаимном пересечении. См. сочинение Л. Эйлера «Problematis traiectoriarum reciprocarum solutio» (Opera omnia, I-27). — *Г. М.*

Доказательство. Элемент скорости, отнесенный к промежуточку времени, соответствующему Ll, пропорционален увеличению или уменьшению скорости тела, подошедшего к L. А это увеличение или уменьшение пропорционально тангенциальной силе, увеличенной или уменьшенной соответственно на ускоряющую или на замедляющую силу. Следовательно, элемент скорости, отнесенный ко времени, соответствующему Ll, пропорционален тангенциальной силе, увеличенной или уменьшенной соответственно на ускоряющую или на замедляющую силу, что и требовалось доказать.

Следствие 1. Если скорость обозначить через c, тангенциальную силу через T, ускоряющую силу, которая, будучи отрицательной, переходит в замедляющую силу, через A, то $\frac{dc}{tLl} = -T + A$. Но $tLl = \frac{Ll}{c}$. Следовательно, $\frac{cdc}{Ll} = -T + A$, или $cdc = -T\cdot Ll + A\cdot Ll$.

Примечание на полях рукописи. Следует заметить, что тангенциальная сила всегда отрицательна, если расстояния от центра увеличиваются, положительной же она будет тогда, когда тело приближается к центру. Отсюда, так как по предположению элемент расстояния положителен, вместо T следует всегда полагать $-T$.

Следствие 2. Проведя lr перпендикулярно к CL, получим $T:v = Lr:Ll$, откуда $T\cdot Ll = v\cdot Lr$. Следовательно, $cdc = -v\cdot Lr + A\cdot Ll$.

Следствие 3. Обозначив корадиус через z, получим $cc = zv$. Следовательно, $cdc = \frac{zdv + vdz}{2}$. Следовательно,

$$\frac{zdv + vdz}{2} = -v\cdot Lr + A\cdot Ll.$$

Следствие 4. Поскольку $cc = zv$, то $v = \frac{cc}{z}$. Отсюда

$$cdc = \frac{-cc\cdot Lr}{z} + A\cdot Ll.$$

Следствие 5. Проведем CP перпендикулярно к касательной LP в L и обозначим $CL = y$, $CP = p$, $lr = dx$ и $Ll = ds$. Поскольку $dp:dy = p:z$, то $z = \frac{pdy}{dp}$. Следовательно,

$$cdc = \frac{-ccdp}{p} + Ads.$$

Следствие 6. Поэтому $pcdc + ccdp = Apds$ и $2ppcdc + 2pccdp = 2Appds$. Взяв интегралы, получим $ccp^2 = 2\int Appds$, или $cc = \frac{2}{p^2}\int Appds$.

Следствие 7. Поскольку $cc = zv$ и $z = \frac{pdy}{dp}$, то

$$cc = \frac{vpdy}{dp} = \frac{2}{pp}\int Appds.$$

Следовательно,

$$v = \frac{2dp}{p^3dy}\int Appds = \frac{2}{ppz}\int Appds = \frac{2y}{p^3r}\int Appds,$$

где r есть радиус кривизны.

Примечание. Итак, в дальнейшем при рассмотрении движения тел под действием центростремительной силы в расчет могут входить три объекта: 1) линия, которую описывает движущееся тело, 2) центральная сила и 3) изменяющая сила, из которых по двум заданным здесь всегда можно найти третий. Таким образом, для более полного рассмотрения этого вопроса я всегда буду принимать одно из трех за известное, а остальные два буду рассматривать по отдельности. Итак, пусть будет дана изменяющая сила, которую я полагаю сначала отсутствующей, затем буду полагать уменьшающей скорость пропорционально скорости тела, потом — пропорциональной квадрату скорости и т. д. Точно так же я буду поступать, принимая центральную силу за известную, и таким образом при рассмотрении этого вопроса может быть принято в расчет все сколько-нибудь существенное.

II. О ДВИЖЕНИИ ТЕЛ В ОТСУТСТВИИ ИЗМЕНЯЮЩЕЙ СИЛЫ

Предложение IV. Если тело описывает кривую линию LM, то центральная сила в любой точке L будет пропорциональна $\frac{y}{p^3r}$, т. е. обратно пропорциональна произведению из куба перпендикуляра CP на радиус кривизны в L, отнесенный к расстоянию CL.

Доказательство. В общем случае $v = \frac{2y}{p^3r}\int Appds$. Поскольку же $A = 0$, то

$$\int Appds = \int 0 = a = \text{const}.$$

Следовательно, $v = \frac{2ay}{p^3r}$; иначе говоря, v пропорционально $\frac{y}{p^3r}$, что и требовалось доказать.

Следствие 1. Таким же образом можно доказать, что v пропорционально $\frac{1}{ppz}$ или обратно пропорционально объему из квадрата перпендикуляра CP на корадиус.

Примечание на полях рукописи. См. «Начала» Ньютона, стр. 83.*

Следствие 2. Либо пропорционально $\frac{dp}{p^3dy}$.

Следствие 3. Поскольку $cc = zv$ и v пропорционально $\frac{1}{ppz}$, то cc будет пропорционально $\frac{1}{pp}$ и c пропорционально $\frac{1}{p}$. Следовательно, скорость всегда обратно пропорциональна перпендикуляру CP из центра на касательную.

Примечание на полях рукописи. См. «Начала» Ньютона, стр. 74.

Следствие 4. Время, соответствующее Ll, пропорционально $\frac{Ll}{c}$. Но c обратно пропорционально p (CP). Следовательно, время, соответствующее Ll, пропорционально $Ll\cdot CP$, т. е. треугольнику LCl. Таким образом, складывая, найдем, что время, за которое описывается какая-либо дуга LM, пропорционально площади LCM, заключенной между дугой LM и радиусами CL и CM.

* Здесь и далее Л. Эйлер ссылается на 2-е издание «Начал» Ньютона (1713). В русском переводе даны ссылки на соответствующие страницы русского перевода 3-го издания «Начал» (в т. 7 «Собрания трудов» А. Н. Крылова, 1936). — *Г. М.*

Примечание на полях рукописи. См. «Начала» Ньютона, стр. 73.

Следствие 5. Если центр сил расположен на бесконечном расстоянии и его сила распространяется вдоль аппликат PM (рис. 4), то время, соответствующее какой-либо дуге AM, будет пропорционально абсциссе AP, а время, соответствующее элементу Mm, — элементу Pp абсциссы AP.

Следствие 6. Итак, если взять элементы абсциссы постоянными, то центральная сила будет пропорциональна второму дифференциалу аппликаты PM.

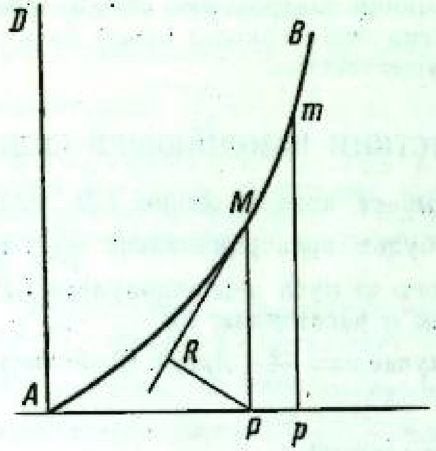


Рис. 4.

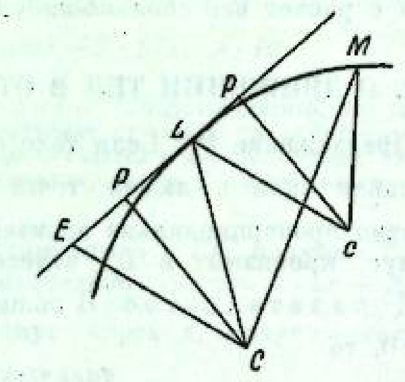


Рис. 5.

Примечание. То, о чем здесь говорится, само собой распадается на два раздела, в одном из которых указывается метод нахождения центральной силы по заданной линии, описываемой телом, и центру, а в другом — траектории, или линии, описываемой телом, по заданной центральной силе.

Изложению первой части следует предпослать одно чрезвычайно важное предложение, с помощью которого для произвольной заданной кривой по найденной центральной силе в одном центре можно легко определить центростремительную силу применительно к любому другому центру, как бы он ни был взят. Предложение же это таково.

Предложение V. По заданной центральной силе, под действием которой тело описывает линию LM вокруг центра C, найти центральную силу, под действием которой это же тело описывает ту же линию вокруг центра c (рис. 5).

Примечание на полях рукописи. См. «Начала» Ньютона, стр. 84.

Решение. Обозначим центральную силу, направленную к C, через V, направленную к c, через v, скорость тела в L под действием силы в C через C, а скорость его в L под действием силы в c через c; обозначим также корадиусы, проходящие из L к C и c, через Z и z. Тогда

$$V:v=\frac{C^2}{Z}:\frac{c^2}{z}=\frac{1}{CP^2\cdot Z}:\frac{1}{cp^2\cdot z}.$$

Обозначив радиус кривизны в L через R, получим $CP:CL=Z:R$ и $cp:cL=z:R$. Следовательно, $Z=\frac{R\cdot CP}{CL}$ и $z=\frac{R\cdot cp}{cL}$.

Следовательно,

$$V:v=\frac{CL}{CP^3\cdot R}:\frac{cL}{cp^3\cdot R}=\frac{CL}{CP^3}:\frac{cL}{cp^3}.$$

Проведем CE, параллельную cL. Тогда $cp:cL=CP:CE$. Таким образом, $cp=\frac{cL\cdot CP}{CE}$. Следовательно,

$$V:v=\frac{CL}{CP^3}:\frac{cL\cdot CE^3}{cL^3\cdot CP^3}=\frac{CL\cdot cL^2}{CE^3}.$$

Отсюда по данному V легко найти v, так как задано положение точек C и c, что и требовалось найти.

Предложение VI. Определить центральную силу, если тело движется по коническому сечению LM (рис. 3) под действием силы, направляющей его к центру сечения C.

Примечание на полях рукописи. См. «Начала» Ньютона, стр. 88.

Решение. Обозначив большую ось через a, параметр через b, расстояние $CL=y$, а перпендикуляр $CP=p$, получим из природы конических сечений

$$pp=\frac{a^3b}{4aa+4ab-16yy}.$$

Отсюда

$$pdp=\frac{16a^3bydy}{(4aa+4ab-16yy)^2}.$$

Следовательно,

$$\frac{pdp}{p^4dy}=\frac{dp}{p^3dy}=\frac{16a^3by}{a^6bb}=\frac{16y}{a^3b}=\text{центральной силе.}$$

Следовательно, центральная сила всегда пропорциональна y, т. е. расстоянию от центра, что и требовалось найти.

Следствие 1. Поскольку центральная сила равна $\frac{16y}{a^3b}$, она будет положительной, если b положительно, т. е. в эллипсе центральная сила будет центростремительной, а в гиперболе она превратится в центробежную, так как b отрицательно.

Примечание на полях рукописи. См. «Начала» Ньютона, стр. 90.

Следствие 2. Если коническое сечение перейдет в окружность, то центральная сила всегда будет одна и та же, так как y равно радиусу, а скорость тела будет постоянна, так как $p=y$.

Следствие 3. Если сечение будет параболой с бесконечно удаленным центром, то центральная сила опять будет всегда одна и та же.

Примечание на полях рукописи. См. «Начала» Ньютона, стр. 90.

Следствие 4. Если в коническом сечении ALB центр C, а c — один из фокусов (рис. 6), то сила, которой тело, описывающее коническое сечение, вращается вокруг центра C, будет относиться к силе, под действием которой оно вращается вокруг фокуса c, как $CL\cdot cL^2$ к CE^3, причем CE проведено параллельно cL. Но первая сила пропорциональна CL. Обозначив вторую силу через V, получим $CL:V=CL\cdot cL^2:CE^3$, т. е. $1:V=cL^2:CE^3$.

Но, согласно природе конических сечений, CE всегда является большей полуосью, т. е. постоянной, а поэтому V пропорционально $\frac{1}{cL^2}$. Следовательно, если тело описывает коническое сечение вокруг фокуса, то центральная сила будет обратно пропорциональна квадрату расстояния; она будет центростремительной, если сечение будет эллипсом, и центробежной, если оно будет гиперболой.*

Примечание на полях рукописи. См. «Начала» Ньютона, стр. 91—93.

Следствие 5. И сила, под действием которой тело описывает параболу вокруг бесконечно удаленного фокуса, будет всегда одинаковой.

Следствие 6. Как бы ни была взята точка c, если обозначить силу, увлекающую к точке c, через V, то $1:V=cL^2:CE^3$. Следовательно, $V=\frac{CE^3}{cL^2}$.

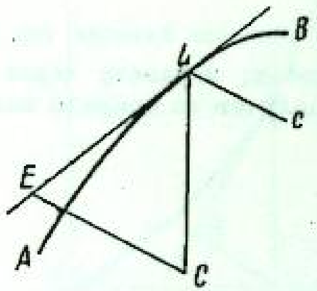


Рис. 6.

Примечание на полях рукописи. См. «Начала» Ньютона, стр. 105.

Следствие 7. Пусть центр сил будет бесконечно удален, и пусть он проявляет свою силу вдоль аппликат $LQ\,c$ (рис. 7). Тогда сила $V=\frac{CE^3}{cL^2}$. Поскольку же расстояние cL всегда бесконечно велико и увеличивается только на конечное количество, то оно может быть принято за постоянную, и сила V будет, следовательно, пропорциональна CE^3. Проведем диаметр AB, делящий пополам аппликаты, параллельные LQ; согласно природе конических сечений, CE будет обратно пропорционально QL. Отсюда центральная сила V будет пропорциональна $\frac{1}{QL^3}$ или обратно пропорциональна QL^3.

Примечание на полях рукописи. См. «Начала» Ньютона, стр. 87.

Примечание. Таким образом можно определить центральную силу также и для других кривых. Поэтому я считаю излишним присоединять большое число примеров, ибо при рассмотрении этого вопроса не надо обращаться ни к каким другим кривым, кроме логистической спирали, для которой я рассмотрю зависимость центральной силы далее.

Предложение VII. Найти зависимость центростремительной силы тела, которое описывает спираль вокруг ее центра C, пересекающую все радиусы, проведенные из центра, под данным углом (рис. 8).

Примечание на полях рукописи. См. «Начала» Ньютона, стр. 87.

Решение. Обозначим $CL=y$, $CP=p$. Поскольку угол PLC постоянен, отношение y к p будет постоянным, и мы обозначим его через $a:b$. Следовательно, будем иметь $ap=by$. Итак, $adp=bdy$. Отсюда

$$\frac{adp}{a^3p^3dy}=\frac{bdy}{b^3y^3dy}=\frac{1}{bby^3}=\text{центральной силе.}$$

* Центральная сила будет центробежной только в случае, если тело будет двигаться по сопряженной гиперболе. — *Г. М.*

Следовательно, центростремительная сила обратно пропорциональна кубу расстояния CL, что и требовалось найти.

Следствие 1. Поскольку перпендикуляр p пропорционален расстоянию y, скорость тела будет обратно пропорциональна расстоянию от центра.

Примечание. О способе нахождения центральной силы по описанной кривой пусть будет достаточно сказанного.

Теперь следует указать метод отыскания кривой по заданному закону центральной силы.

Предложение VIII. Описать кривую, которую очерчивает тело под действием центральной силы, пропорциональной произвольной степени m расстояния $CL=y$ (рис. 3).

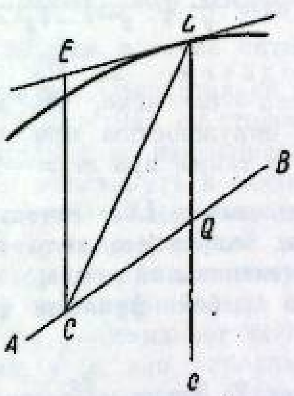


Рис. 7.

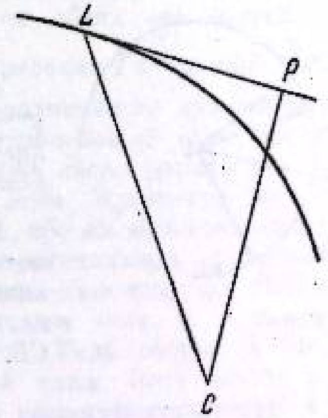


Рис. 8.

Решение. Поскольку центральная сила пропорциональна $\frac{dp}{p^3dy}$, то $y^m=\frac{adp}{p^3dy}$. Следовательно, $y^m dy=\frac{adp}{p^3}$, откуда, заменяя постоянную, $y^{m+1}=\frac{a}{pp}+b$. Следовательно, $y^{m+1}pp=a+bpp$.

Кривая строится так (рис. 9). Описав из центра C радиусом $AC=1$ окружность AQ, пересекающую радиус CL в Q, обозначим дугу AQ через x. Тогда $Qq=dx$. Следовательно, $CQ\,(1):Qq\,(dx)=CL\,(y):lr\,(ydx)$. Поскольку $Lr=dy$, то $Ll=\sqrt{dy^2+y^2dx^2}$. Но

$$Ll\,(\sqrt{dy^2+y^2dx^2}):lr\,(ydx)=CL\,(y):CP\,(p),\quad p=\frac{yydx}{\sqrt{dy^2+y^2dx^2}},$$

вследствие чего первое уравнение $y^{m+1}pp=a+bpp$ переходит в

$$\frac{y^{m+5}dx^2}{dy^2+y^2dx^2}=a+\frac{by^4dx^2}{dy^2+y^2dx^2},$$

или $y^{m+5}dx^2-by^4dx^2-ay^2dx^2=ady^2$. Положив $-aa$ вместо a, получим $-aay^2dx^2+by^4dx^2-y^{m+5}dx^2=aady^2$.

Следовательно,

$$dx=\frac{ady}{y\sqrt{byy-y^{m+3}-aa}},$$

откуда

$$x=\int\frac{ady}{y\sqrt{byy-y^{m+3}-aa}}.$$

Следовательно, если y будет взято произвольно, x можно будет определить через y. Так будет определена точка L на искомой кривой, и так описывается кривая, которую нужно найти, что и требовалось.

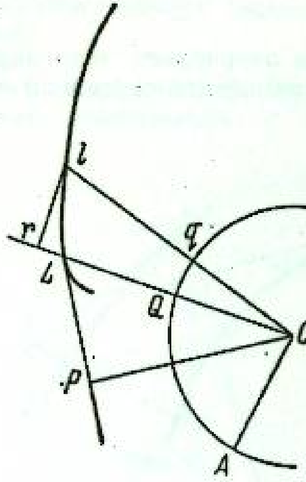


Рис. 9.

Следствие 1. Уравнение на стр. 311 (2-я строка снизу) может быть также превращено в

$$dx=\frac{dy}{y}\sqrt{\frac{a}{y^{m+3}-by^2-a}}.$$

Следствие 2. Из уравнения $y^{m+1}p^2=a+bp^2$ ясно, что кривая является окружностью при $a=0$ или $b=\infty$, а также при $m=-1$.*

Предложение IX. Описать кривую, которую очерчивает тело под действием центральной силы, пропорциональной любой функции расстояния CL.

Решение. Пусть эта функция будет Y. Тогда $\frac{dp}{p^3dy}=aY$. Следовательно, $\frac{dp}{p^3}=aYdy$. Обозначим $\int aYdy=-F$, тогда $\frac{1}{pp}=2F$, т. е. $1=2Fpp$.

Поскольку же $p=\frac{yydx}{\sqrt{dy^2+y^2dx^2}}$,** то $1=2F\frac{y^4dx^2}{dy^2+y^2dx^2}$, откуда $dy^2=(2Fyy-1)y^2dx^2$.

Следовательно, $dx=\frac{dy}{y\sqrt{2Fyy-1}}$. Поскольку F дано через y, кривая опять может быть построена при помощи квадратур, что и требовалось найти.

Предложение X. По данному закону центральной силы определить кривую, которую опишет тело в случае бесконечно удаленного вдоль PM центра (рис. 4).

Решение. Обозначив абсциссу $AP=x$, аппликату $PM=y$ и центральную силу, являющуюся функцией от y, через Y (а она будет пропорциональна ddy) и приняв dx за постоянную, получим $Ydx^2=addy$. Положим $dx=pdy$. Поскольку dx — постоянная, то $ddx=pddy+$

* Следствие это неверно, так как при $a=0$ и при $m=-1$ исходное уравнение меняется. — *Г. М.*

** Здесь x отсчитывается, как и в предыдущем предложении. — *Г. М.*

$+dpdy=0$. Следовательно, $ddy=-\frac{dpdy}{p}$. Подставив эти величины вместо dx и ddy, получим

$$Yppdy^2=\frac{-adpdy}{p},$$

т. е. $Ydy=\frac{-adp}{p^3}$. Следовательно, взяв интегралы и обозначив $\int Ydy=F$, получим, изменяя постоянную, $F=\frac{a}{pp}$. Поскольку $dx=pdy$, то $p=\frac{dx}{dy}$; следовательно, $pp=\frac{dx^2}{dy^2}$. Отсюда $Fdx^2=ady^2$ или $dx=dy\sqrt{\frac{a}{F}}$. Кривая может быть построена с помощью квадратур, что и требовалось найти.

Следствие 1. Уравнение $Ydx^2=addy$ может быть быстрее приведено к этому виду умножением обеих его частей на dy. Тогда $Ydydx^2=adyddy$, а после интегрирования $Fdx^2=ady^2$ и $dx=dy\sqrt{\frac{a}{F}}$.

Примечание. Относительно криволинейного движения тел, не встречающих препятствия со стороны изменяющей силы, достаточно сказанного, поскольку из изложенного уже легко решить все вопросы, которые могут возникнуть в связи с этим. Краткости ради я опустил построения в трех последних задачах, ибо их легко выполнить при помощи метода построения решений дифференциальных уравнений.

Перехожу теперь к такому движению тел, при котором замедляющая сила пропорциональна скорости тела, т. е. изменяющая сила $A=-c$, где c обозначает скорость. Ведь сперва A было взято положительным, т. е. для ускоряющей силы. Этот вопрос я буду рассматривать точно таким же образом, как и предыдущий, а именно, предпослав общие положения, сначала рассмотрю способы нахождения центральной силы по орбите и данному центру, а затем способы нахождения орбиты по закону центральной силы.

III. О ДВИЖЕНИИ ТЕЛ ПРИ ЗАМЕДЛЯЮЩЕЙ СИЛЕ, ПРОПОРЦИОНАЛЬНОЙ СКОРОСТИ ТЕЛА

Предложение XI. Пусть тело по этому закону описывает кривую LB (рис. 10). Возьмем какую-либо заданную точку B и от нее проведем BC. Тогда центральная сила в любой точке L (обозначим смешаннолинейную площадь $BCL=M$) будет пропорциональна $\frac{M^2y}{p^3r}$, т. е. прямо пропорциональна квадрату площади BCL, умноженному на расстояние CL от центра, и обратно пропорциональна кубу перпендикуляра CP, умноженному на радиус кривизны.

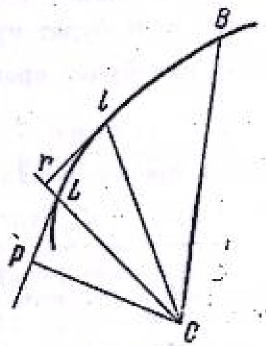


Рис. 10.

Доказательство. Так как $pcdc+ccdp-Apds=0$, то, поскольку $A=-c$, $pcdc+ccdp+cpds=0$, т. е. $pdc+cdp+pds=0$. Следовательно, $pc+\int pds=D=\text{const}$. Но $cc=$

$= zv$ и $Ll\,(ds) : lr = LC\,(y) : CP\,(p)$, откуда $pds = LC \cdot lr = 2LCl$. Отсюда, взяв B за постоянную точку, получим $D - \int LC \cdot lr =$ площади $BCL = M$ и, следовательно, $pc = M$ * и

$$c = \frac{M}{p}, \quad \frac{cc}{z} = \frac{M^2}{ppz} = v.$$

Поскольку $p : y = z : r$, получим $z = \frac{pr}{y}$, откуда $v = \frac{M^2 y}{p^3 r}$, что и требовалось доказать.

Следствие 1. Поскольку $dp : dy = y : r$, центральная сила будет пропорциональна $\frac{M^2 dp}{p^3 dy}$.

Следствие 2. Из доказательства явствует, что скорость в L прямо пропорциональна площади BCL и обратно пропорциональна перпендикуляру CP.

Следствие 3. Промежуточек времени, соответствующий Ll, пропорционален $\frac{pds}{M}$, так как он пропорционален $\frac{ds}{c}$.

Следствие 4. Если центр сил бесконечно удален и проявляет свою силу вдоль прямоугольных аппликат PM, то, для того чтобы в этом случае найти центральную силу, обозначим $AP = x$, $PM = \mathfrak{C}$ и PR, перпендикуляр к касательной RM, через q (рис. 4). Тогда y будет величиной постоянной и бесконечно большой. Далее, M будет пропорционально $PA = x$, и поскольку $y : p = \mathfrak{C} : q$, то $p = \frac{qy}{\mathfrak{C}}$; иначе говоря, поскольку y постоянная, p пропорционально $\frac{q}{\mathfrak{C}}$. Отсюда центральная сила будет пропорциональна $\frac{x^2 \mathfrak{C}^3}{q^3 r}$. Но $\mathfrak{C} : q = ds : dx$. Следовательно, сила пропорциональна $\frac{x^2 ds^3}{dx^3 r}$.

Следствие 5. Приняв dx за постоянную, получим $r = \frac{ds^3}{-dx dd\mathfrak{C}}$. Следовательно, центральная сила равна $-x^2 dd\mathfrak{C}$, т. е., если dx принято за постоянную, центральная сила пропорциональна $x^2 dd\mathfrak{C}$.

Следствие 6. Итак, скорость, пропорциональная $\frac{M}{p}$, будет пропорциональна $\frac{x}{p}$. Поскольку p пропорционально $\frac{q}{\mathfrak{C}}$ и $\frac{dx}{ds}$, скорость в M будет пропорциональна $\frac{xds}{dx}$, т. е., если dx принято за постоянную, скорость в M будет пропорциональна xds; если же ds принято за постоянную, она будет пропорциональна $\frac{x}{dx}$.

Следствие 7. Поскольку время, соответствующее элементу Mm, будет пропорционально $\frac{dx}{x}$, то, следовательно, время, соответствующее всей дуге AM, будет пропорционально логарифму абсциссы AP.

* Уравнение $pc = M$ верно, лишь если опустить постоянную 2 в предыдущем интеграле и положить скорость в B равной нулю. Вообще говоря, мы должны получить $pc = p_B c_B + 2M$, где через p_B и c_B обозначены величины перпендикуляра p и скорости c в B. Это надо иметь в виду при чтении последующего, так как выводы этого раздела частично ошибочны. — *Г. М.*

Следствие 8. Так как центральная сила пропорциональна $\frac{M^2 y}{p^3 r}$, то ясно, что центральная сила при замедляющей силе, пропорциональной скорости, относится к центральной силе при исчезновении всякой изменяющей силы, как $M^2 : 1$.

Примечание.* Следовательно, при отыскании закона центральных сил в этом предположении можно избежать немалого труда, если отыскивать центральную силу тела, описывающего данную кривую таким же образом, как показано в предложении IV. Ибо, после того как найденное отношение будет умножено на M^2, произведение будет пропорционально искомой центральной силе. И таким же образом в предположении бесконечного расстояния от центра зависимость центральной силы, найденная согласно следствию 6 предложения IV, должна быть умножена на x^2; произведение опять будет пропорционально центральной силе в этом предположении. Таким же образом будет найдена скорость, а именно путем умножения зависимости скорости в предположении отсутствия изменяющей силы на площадь M или в предположении бесконечного удаления центра сил на x.

Итак, нет необходимости присоединять еще какие-либо предложения относительно этого предмета, ибо все можно будет вывести при помощи следствий.

Следствие 9. Если тело движется по коническому сечению под действием силы, устремляющей к центру сечения, то сила будет пропорциональна расстоянию CL от центра, умноженному на квадрат площади BCL (рис. 10). Отсюда следует, что, если тело дойдет до B, оно будет находиться там в покое.

Следствие 10. Так, если C — фокус сечения, сила будет пропорциональна квадрату площади BCL, отнесенной к квадрату расстояния CL от центра.

Следствие 11. Пусть центр сил будет бесконечно удален. Тогда центральная сила, если кривая AMB является коническим сечением, будет пропорциональна квадрату PA, отнесенному к кубу аппликаты PM (рис. 4).**

Предложение XII. Найти кривую BL, которую описывает тело вокруг центра C при центральной силе, пропорциональной какой-либо функции расстояния y, и при замедляющей силе, пропорциональной скорости тела c (рис. 10).

Решение. Пусть упомянутая функция будет Y. Тогда $Y = \frac{M^2 dp}{p^3 dy}$. Следовательно,

$$M = \sqrt{\frac{p^3 Y dy}{dp}}.$$

Приняв $lr = dx$, отсюда получим $dM = \frac{-ydx}{2}$, что равно (если принять dp за постоянную)

$$\frac{3ppYdpdy + p^3 dYdy + p^3 Yddy}{2\sqrt{p^3 Ydydp}} = \frac{3pYdpdy + p^2 dYdy + p^2 Yddy}{2\sqrt{pYdydp}}.$$

* См. предыдущее примечание. — *Г. М.*

** Следствие это верно лишь в предположении, что AP является диаметром конического сечения. — *Г. М.*

И так как $\sqrt{yy-pp} : p = dy : dx$, то $dx = \frac{pdy}{\sqrt{yy-pp}}$. Следовательно,

$$\frac{ypdy}{\sqrt{yy-pp}} + \frac{3pYdpdy + p^2dYdy + p^2Yddy}{\sqrt{pYdydp}} = 0,$$

откуда

$$\frac{ydy}{\sqrt{y^2-p^2}} + \frac{3Ydpdy + pdYdy + pYddy}{\sqrt{pYdydp}} = 0.$$

Это уравнение, если его построить, представляет искомую кривую, но его построение будет весьма сложным. Полученное уравнение возникает, если dp принимается за постоянную. Приняв теперь за постоянную dy, получим

$$ydx \text{ или } \frac{ypdy}{\sqrt{yy-pp}} + \frac{3pYdp^2 + p^2dpdY - p^2Yddp}{\sqrt{\frac{pYdp^3}{dy}}} = 0,$$

т. е.

$$\frac{y\sqrt{dy}}{\sqrt{y^2-p^2}} + \frac{3Ydp^2 + pdpdY - pYddp}{dp\sqrt{pYdp}} = 0.$$

Из этого уравнения должно быть определено построение кривой, что и требовалось найти.

Следствие 1. Последнее уравнение приводится к следующему виду:

$$\frac{ydp}{\sqrt{y^2-p^2}} + \frac{3Ydp^2 + pdpdY - pYddp}{\sqrt{pYdpdy}} = 0.$$

Следствие 2. Пусть $Y = M^2$. Тогда $\frac{dp}{p^3dy} = \text{const}$, и кривая окажется такой же, как если бы тело двигалось по кривой в отсутствии изменяющей силы под действием всегда одинаковой центральной силы, а именно окажется такой, при которой $ypp = a^3$, что включает как круг, так и многое другое.

Предложение XIII. При том же законе изменяющих сил найти кривую AM, которую описывает тело под действием центральной силы, бесконечно удаленной вдоль PM (рис. 4).

Решение. Обозначим $AP = x$ и $PM = z$; пусть центральная сила будет пропорциональна функции Z от z. Таким образом, $Z = x^2ddz$, где dx принято за постоянную, или, обеспечивая однородность, $Zdx^2 = x^2ddz$. Следовательно, $\frac{dx^2}{x^2} = \frac{ddz}{Z}$. Отсюда при помощи метода решения дифференциальных уравнений второго порядка могут быть представлены различные построения, что и требовалось найти.

Следствие 1. Пусть $Z = \text{const} = a$. Тогда $\frac{dx^2}{x^2} = \frac{ddz}{a}$. Следовательно, $\frac{-dx}{x} = \frac{dz}{a} - \frac{dx}{b}$. Следовательно, $\frac{dx}{b} - \frac{dx}{x} = \frac{dz}{a}$. Отсюда $\frac{x}{b} - \lg x = \frac{z}{a}$. Пусть c будет величиною, логарифм которой равен 1. Тогда

$$\frac{c^{\frac{x}{b}}}{x} = c^{\frac{z}{a}}, \text{ или } c^{\frac{x}{b}} = c^{\frac{z}{a}}x, \text{ или } x = c^{\frac{ax-bz}{ab}}.$$

Следствие 2. Пусть Z пропорционально x^2. Тогда dx^2 будет пропорционально ddz. Следовательно, $xdx = \frac{adz}{2}$ и $xx = az$; таким образом, кривая будет параболой с вершиной A и осью AD. Отсюда следует, что центральная сила будет центробежной.

IV. О ДВИЖЕНИИ ТЕЛ ПРИ ЗАМЕДЛЯЮЩЕЙ СИЛЕ, ПРОПОРЦИОНАЛЬНОЙ КВАДРАТУ СКОРОСТИ ТЕЛА

Предложение XIV. Если тело при этом условии описывает кривую BL вокруг центра C и если принять точку B за постоянную, а b за такую величину, логарифм которой есть 1, то центральная сила в L будет пропорциональна $\frac{b^{2BL}y}{p^3r}$, т. е. центральная сила будет прямо пропорциональна b в степени, которую представляет двойная дуга BL, умноженному на расстояние от центра, и обратно пропорциональна кубу перпендикуляра CP, умноженному на радиус кривизны (рис. 10).

Доказательство. Так как $pcdc + ccdp - Apds = 0$ и $A = -cc$, то $pcdc + ccdp + ccpds = 0$, т. е. $\frac{pdc + cdp}{cp} + ds = 0$. Следовательно, $\lg cp + s = a$. Итак, * $\lg cp = a - s = \text{arc } BL$. Отсюда $cp = b^{BL}$ и

$$\frac{cc}{z} = \frac{b^{2BL}}{p^2z} = \text{центральной силе.}$$

Таким образом, поскольку $p : y = z : r$, центральная сила будет пропорциональна $\frac{b^{2BL}y}{p^3r}$, что и требовалось доказать.

Следствие 1. Так как $dp : dy = y : r$, центральная сила будет также пропорциональна $\frac{b^{2BL}dp}{p^3dy}$.

Следствие 2. Из доказательства ясно, что скорость c пропорциональна $\frac{b^{BL}}{p}$.

Следствие 3. И время, соответствующее Ll, будет пропорционально $\frac{p \cdot Ll}{b^{BL}}$ или пропорционально $\frac{\triangle LCl}{b^{BL}}$.

Следствие 4. Если центр сил бесконечно удален, центральная сила в M (обозначим $PM = \mathfrak{C}$) будет пропорциональна $dd\mathfrak{C}b^{2BM}$ при условии, что $dx = Pp$ принято за постоянную, ибо тогда $\frac{dp}{p^3dy}$ пропорционально $dd\mathfrak{C}$ (рис. 4).

Следствие 5. Скорость будет пропорциональна $\frac{dsb^{BM}}{dx}$ и, если принять dx за постоянную, пропорциональна $b^{BM}ds$.

* Эйлер опускает здесь постоянную c_Bp_B в выражении $(cp) : (c_Bp_B)$. — *Г. М.*

Следствие 6. Промежуточек времени, соответствующий Mm, будет пропорционален $\frac{dx}{b^{BM}}$ и, если принять dx за постоянную, пропорционален $\frac{1}{b^{BM}}$.

Примечание. Итак, для нахождения центральной силы, под действием которой тело описывает данную кривую, необходимо найти центральную силу, под действием которой тело описало бы эту кривую при отсутствии изменяющей силы, а затем умножить ее на b^{BL} (рис. 10) или на b^{BM} (рис. 4). Приводить примеры нет необходимости, так как они могут быть очень легко решены кем угодно.

Поэтому я перехожу к нахождению орбит по данному закону центральной силы.

Предложение XV. Найти кривую BL, которую описывает тело при замедляющей силе, пропорциональной квадрату скорости, и центральной силе, пропорциональной функции Y расстояния (рис. 10).

Решение. Итак, $Y=\frac{b^{2BL}dp}{p^3dy}$. Следовательно, $\frac{Yp^3dy}{dp}=b^{2BL}$. Отсюда $2BL=\lg Ydy+\lg p^3-\lg dp$. Дифференцируя и принимая dp за постоянную, получим

$$-2ds=\frac{dYdy+Yddy}{Ydy}+\frac{3dp}{p}.$$

Так как $\sqrt{yy-pp}:y=dy:ds$, то

$$\frac{2ydy}{\sqrt{yy-pp}}+\frac{dYdy+Yddy}{Ydy}+\frac{3dp}{p}=0$$

или, если принять dy за постоянную,

$$\frac{2ydy}{\sqrt{yy-pp}}+\frac{dY}{y}+\frac{3dp}{p}-\frac{ddp}{dp}=0,$$

что и требовалось найти.

Предложение XVI. Найти то же при бесконечном удалении центра сил.

Решение. Обозначим $AP=x$, $PM=z$ (рис. 4), и пусть сила будет пропорциональна функции Z от z. Приняв dx за постоянную, получим $Z=b^{2BM}ddz$ или при соблюдении однородности $Zdx^2=b^{2BM}ddz$. Следовательно, $b^{2BM}=\frac{Zdx^2}{ddz}$. Значит, $2BM=\lg Z+\lg dx^2-\lg ddz$. Следовательно, дифференцируя, получим $-2ds=\frac{dZ}{Z}-\frac{d^3z}{ddz}$, что и требовалось найти.

Следствие 1. Пусть Z будет постоянной. Тогда $2ds=\frac{d^3z}{ddz}$.

Примечание. Это является наиболее важным из того, что можно сказать по данному вопросу.

Прибавлю еще один раздел, который может оказаться очень полезным для физики. В нем я положу, что замедляющая сила прямо пропорциональна квадрату скорости и обратно пропорциональна квадрату расстояния от центра.

V. О ДВИЖЕНИИ ТЕЛ ПРИ ЗАМЕДЛЯЮЩЕЙ СИЛЕ, ПРОПОРЦИОНАЛЬНОЙ КВАДРАТУ СКОРОСТИ, ОТНЕСЕННОМУ К КВАДРАТУ РАССТОЯНИЯ ОТ ЦЕНТРА

Предложение XVII. Если тело по этому закону описывает кривую LM, то центральная сила будет пропорциональна (если величину, логарифм которой есть 1, обозначить через b, а другую заданную величину — через a)

$$\frac{b^{2a-2\int\frac{ds}{yy}}y}{p^3r},$$

где расстояние CL от центра C обозначено через y, радиус кривизны через r, перпендикуляр CP из центра на касательную LP через p и $Ll=ds$ (рис. 3).

Доказательство. Так как $pcdc+ccdp-Apds=0$ и $A=\frac{-cc}{yy}$, то

$$pcdc+ccdp+\frac{ccpds}{yy}=0.$$

Разделив на ccp, получим

$$\frac{pdc+cdp}{cp}+\frac{ds}{yy}=0.$$

Интегрируя, будем иметь $\lg cp+\int\frac{ds}{yy}=a$. Следовательно, $\lg cp=a-\int\frac{ds}{yy}$. Значит, $cp=b^{a-\int\frac{ds}{yy}}$, и отсюда

$$c=\frac{b^{a-\int\frac{ds}{yy}}}{p}.$$

Поэтому

$$\frac{cc}{z}=\frac{b^{2a-2\int\frac{ds}{yy}}}{ppz}=\frac{b^{2a-2\int\frac{ds}{yy}}y}{p^3r}=\text{центральной силе},$$

что и требовалось доказать.

Следствие 1. Так как $dp:dy=y:r$, центральная сила будет также пропорциональна

$$\frac{b^{2a-2\int\frac{ds}{yy}}dp}{p^3dy}.$$

Следствие 2. И скорость будет, как явствует из доказательства, пропорциональна

$$\frac{b^{a-\int\frac{ds}{yy}}}{p}.$$

Следствие 3. И промежуточек времени, соответствующий Ll, будет пропорционален

$$\frac{pds}{b^{a-\int\frac{ds}{yy}}}, \text{ или } \frac{\triangle LCl}{b^{a-\int\frac{ds}{yy}}}.$$

Примечание. Если в этом случае центр сил будет бесконечно удален, то тогда этот случай не будет отличаться от того, который мы рассматривали в предыдущем разделе.

Примеры нахождения центральной силы по данной кривой в этом предположении я также опускаю по той же причине, что и в предыдущем разделе.

Предложение XVIII. Найти кривую, которую описывает тело при этом условии замедления под действием центральной силы, пропорциональной какой-либо функции Y расстояния y.

Решение. Итак,

$$Y=\frac{b^{2a-2\int\frac{ds}{yy}}dp}{p^3dy}.$$

Отсюда

$$\frac{Yp^3dy}{dp}=b^{2a-2\int\frac{ds}{yy}}.$$

Следовательно,

$$2a-2\int\frac{ds}{yy}=\lg Y+\lg p^3+\lg dy-\lg dp.$$

Соответственно, дифференцируя и принимая dp за постоянную, получим

$$\frac{-2ds}{yy}=\frac{dY}{Y}+\frac{3dp}{p}+\frac{ddy}{dy}$$

или, принимая dy за постоянную, будем иметь

$$\frac{-2ds}{yy}=\frac{dY}{Y}+\frac{3dp}{p}-\frac{ddp}{dp}$$

или, поскольку $ds=\frac{ydy}{\sqrt{yy-pp}}$,

$$\frac{2dy}{y\sqrt{yy-pp}}+\frac{dY}{Y}+\frac{3dp}{p}-\frac{ddp}{dp}=0.$$

Это уравнение, так как в него входят только две неизвестные выражает природу искомой кривой, что и требовалось найти.

Примечание. Присоединю еще немногие общие соображения. А именно положу, что замедляющая сила пропорциональна какой-либо степени m скорости c тела.

VI. О ДВИЖЕНИИ ТЕЛ ПРИ ЗАМЕДЛЯЮЩЕЙ СИЛЕ, ПРОПОРЦИОНАЛЬНОЙ СКОРОСТИ В СТЕПЕНИ m

Предложение XIX. Если тело при этом законе замедления описывает кривую LM (рис. 3), то центральная сила в L будет пропорциональна, если a принять за постоянную,

$$\frac{y}{p^3r}\sqrt[2-m]{\left(a-\int\frac{ds}{p^{m-2}}\right)^2}.$$

Доказательство. Поскольку $pcdc+ccdp-Apds=0$ и $A=-c^m$, то $pcdc+ccdp+c^mpds=0$. Следовательно, $pdc+cdp+c^{m-1}pds=0$. Разделив на $c^{m-1}p^{m-1}$, получим

$$\frac{pdc+cdp}{c^{m-1}p^{m-1}}+\frac{ds}{p^{m-2}}=0.$$

Следовательно, опуская несущественное, как например постоянные коэффициенты, получим $c^{2-m}p^{2-m}=a-\int\frac{ds}{p^{m-2}}$. Итак,

$$c^{2-m}=\frac{a-\int\frac{ds}{p^{m-2}}}{p^{2-m}}.$$

Таким образом,

$$c=\frac{\sqrt[2-m]{a-\int\frac{ds}{p^{m-2}}}}{p}.$$

Отсюда

$$\frac{cc}{z}=\frac{\sqrt[2-m]{\left(a-\int\frac{ds}{p^{m-2}}\right)^2}}{ppz}=\frac{y}{p^3r}\sqrt[2-m]{\left(a-\int\frac{ds}{p^{m-2}}\right)^2}=\text{центральной силе},$$

что и требовалось доказать.

Следствие 1. Так как $dp:dy=y:r$, центральная сила будет также пропорциональна

$$\frac{dp}{p^3dy}\sqrt[2-m]{\left(a-\int\frac{ds}{p^{m-2}}\right)^2}.$$

Следствие 2. Если центр сил бесконечно удален, как на рис. 4, то, поскольку $\frac{dp}{p^3dy}$ пропорционально ddz, центральная сила будет пропорциональна $ddz\sqrt[2-m]{\left(a-\int p^{2-m}ds\right)^2}$, где $z=PM$, а Pp принято за постоянную; поскольку p пропорционально $\frac{dx}{ds}$, где $x=AP$, центральная сила будет пропорциональна

$$ddz\sqrt[2-m]{\left(a-\int\frac{dx^{2-m}}{ds^{1-m}}\right)^2}.$$

Предложение XX. По данной центральной силе найти кривую, которую описывает тело при принятом законе замедления (рис. 3).

Решение. Пусть центральная сила будет пропорциональна функции Y от y. Тогда

$$Y=\frac{dp}{p^3dy}\sqrt[2-m]{\left(a-\int\frac{ds}{p^{m-2}}\right)^2}.$$

Следовательно,

$$\frac{Yp^3dy}{dp}=\sqrt[2-m]{\left(a-\int\frac{ds}{p^{m-2}}\right)^2}.$$

Возведя в степень $\frac{2-m}{2}$, положив ее ради краткости равной n, так что $2-m=2n$, получим, следовательно,

$$\frac{Y^np^{3n}dy^n}{dp^n}=a-\int p^{2n}ds.$$

Следовательно,

$$\int p^{2n}ds=a-\frac{Y^np^{3n}dy^n}{dp^n}.$$

Дифференцируя и полагая dp постоянным, получим

$$p^{2n}dp^nds=-nY^{n-1}p^{3n}dy^ndY-3nY^np^{3n-1}dy^ndp-nY^np^{3n}dy^{n-1}ddy.$$

Разделив на p^{2n}, опустив n в силу несущественности и положив $\frac{ydy}{\sqrt{yy-pp}}$ вместо ds, получим

$$\frac{ydp^n}{\sqrt{yy-pp}}+Y^{n-1}p^ndy^{n-1}dY+3Y^np^{n-1}dy^{n-1}dp+Y^np^ndy^{n-2}ddy=0.$$

Положив dy постоянным и опустив n как несущественное, получим

$$\frac{p^{2n}dp^{2n}ds}{dy^n}=-Y^{n-1}p^{3n}dp^ndY-3Y^np^{3n-1}dp^{n+1}+Y^np^{3n}dp^{n-1}ddp$$

и, разделив на $\frac{p^{2n}dp^{n-1}}{dy^{n-1}}$ и положив $\frac{ydy}{\sqrt{yy-pp}}$ вместо ds,

$$\frac{ydp^{n+1}}{\sqrt{yy-pp}}=Y^np^ndy^{n-1}ddp-3Y^np^{n-1}dp^2dy^{n-1}-Y^{n-1}p^ndpdy^{n-1}dY,$$

что и требовалось найти.

Предложение XXI. Найти то же при бесконечно удаленном центре сил.

Решение. Пусть центральная сила будет пропорциональна функции Z от $PM=z$ (рис. 4). Z будет пропорционально

$$ddz\sqrt[2-m]{\left(a-\int\frac{dx^{2-m}}{ds^{1-m}}\right)^2}$$

или для соблюдения однородности

$$Zdx^2=ddz\sqrt[2-m]{\left(a-\int\frac{dx^{2-m}}{ds^{1-m}}\right)^2}.$$

Возведя в степень $\frac{2-m}{2}$, которую назовем n, получим

$$\frac{Z^ndx^{2n}}{ddz^n}=a-\int\frac{dx^{2n}}{ds^{2n-1}}.$$

Дифференцируя и опуская коэффициент n, получим

$$\frac{Z^{n-1}dx^{2n}dZddz^n-Z^ndx^{2n}ddz^{n-1}d^3z}{ddz^{2n}}=-\frac{dx^{2n}}{ds^{2n-1}}.$$

Следовательно,

$$Z^{n-1}dZds^{2n-1}ddz-Z^nds^{2n-1}d^3z+ddz^{n+1}=0,$$

что и требовалось найти.

Следствие 1. Пусть $Z=a=\text{const}$. Тогда $a^nds^{2n-1}d^3z=ddz^{n+1}$. Положив вместо $2n$ его значение $2-m$, получим $a^{\frac{2-m}{2}}ds^{1-m}d^3z=ddz^{\frac{4-m}{2}}$.

Примечание. До сих пор изменяющая сила всегда принималась как известная. Теперь и в дальнейшем пусть она будет в числе неизвестных величин, а в качестве известных пусть считаются центральная сила и орбита кривой, по которым будем отыскивать изменяющую силу.

После того как это будет сделано, все главы, по которым эта тема была разделена в примечании на стр. 307, окажутся рассмотренными.

VII. МЕТОД НАХОЖДЕНИЯ ИЗМЕНЯЮЩЕЙ СИЛЫ ПО ЗАДАННОЙ КРИВОЙ И ЦЕНТРАЛЬНОЙ СИЛЕ

Предложение XXII. Если тело описывает орбиту LM (рис. 3), то, обозначив центральную силу через v, $CL=y$, $CP=p$, $Ll=ds$ и корадиус через z, получим, что изменяющая сила

$$A=\frac{zdv+vdz+2vdy}{2ds}.$$

Доказательство. Это явствует из следствия 3 предложения III, если положить там вместо Lr и Ll их значение в символах dy и ds.

Следствие 1. Так как $z=\frac{pdy}{dp}$, то, если принять dp за постоянную, $dz=\frac{pddy+dpdy}{dp}$. Отсюда

$$A=\frac{pdydv+vpddy+3vdpdy}{2dpds}.$$

Следствие 2. Приняв dy за постоянную, получим

$$dz=\frac{dydp^2-pdyddp}{dp^2}.$$

Следовательно,

$$A=\frac{pdpdydv+3vdydp^2-vpdyddp}{2dsdp^2}.$$

Следствие 3. Пусть центральная сила v будет постоянной. Тогда член zdv исчезнет и $A:v=(dz+2dy):2ds$ или, согласно следствию 1, $A:v=(pddy+3dpdy):2dpds$ или, согласно следствию 2,

$$A:v=(3dydp^2-pdyddp):2dsdp^2.$$

Следствие 4. Если центр сил бесконечно удален (рис. 4), то, положив $PM=y$, $Mm=ds$ и корадиус $=z$, получим опять

$$A=\frac{zdv+vdz+2vdy}{2ds}.$$

Следствие 5. Пусть центральная сила будет единообразной. Тогда

$$A:v=(dz+2dy):2ds.$$

Следствие 6. Пусть кривая будет окружностью, центр которой C (рис. 7). Тогда корадиус $z=LQ=y$. Приняв радиус CL за 1 и $CQ=x$, получим $ds=\frac{-dy}{\sqrt{1-yy}}$. Следовательно,

$$A:v=3dy:\frac{-2dy}{\sqrt{1-yy}}=3:\frac{-2}{\sqrt{1-yy}}=-3\sqrt{1-yy}:2.$$

Отсюда явствует, что изменяющая сила, которую я обозначу через R, является замедляющей. Тогда

$$R:v=3\sqrt{1-yy}:2=3CQ:2CL.$$

Следствие 7. Таким образом, ясно, что, поскольку v и CL — величины постоянные, замедляющая сила пропорциональна CQ. В этом следствии выражается отношение замедляющей силы, а в предыдущем — ее величина в сравнении с центральной силой.

Следствие 8. Пусть тело движется по логарифмической спирали под действием центральной силы, обратно пропорциональной квадрату расстояния. Тогда $v=\frac{1}{yy}$. Следовательно, $dv=\frac{-2dy}{y^3}$ и $ads=dy$. Тогда $p=\frac{by}{a}$ * и $dp=\frac{bdy}{a}$. Приняв dy за постоянную, будем иметь $ddp=0$. Итак, согласно следствию 2, изменяющая сила

$$A=\frac{-a}{yy}+\frac{3a}{2yy}=\frac{a}{2yy}.$$

Следовательно,

$$A:v=\frac{a}{2yy}:\frac{1}{yy}=a:2,$$

и изменяющая сила будет всегда обратно пропорциональна квадрату расстояния.

* Из свойств логарифмической спирали следует, что $b=a\sqrt{1-a^2}$. — Г. М.

Следствие 9. Так как $z=\frac{pdy}{dp}$ и $c=\sqrt{vz}$, то, поскольку $z=y$ и $v=\frac{1}{yy}$, $c=\frac{1}{\sqrt{y}}$. Так как A пропорционально $\frac{1}{yy}$, изменяющая сила будет пропорциональна квадрату квадрата скорости или пропорциональна совокупно квадрату скорости и расстоянию.

Следствие 10. Пусть тело движется по той кривой, которую мы описали в примечании на стр. 305, и пусть оно опускается по дуге AM (рис. 2). Изменяющая сила A, которую я полагаю, как и там, бесконечно удаленной, равна $\frac{2adv+2vdy}{2ds}=\frac{adv+vdy}{ds}$, поскольку корадиус, который я обозначаю через $2a$, постоянен. Пусть тяжесть будет единообразной, а именно $dv=0$. Тогда $A=\frac{vdy}{ds}$, т. е.

$$A:v=dy:ds=\frac{zdz}{aa+zz}:\frac{dz}{\sqrt{aa+zz}}=z:\sqrt{aa+zz}=\frac{z}{\sqrt{aa+zz}}:1,$$

где z обозначает то же, что и на стр. 305.

VIII. О ПРЯМОЛИНЕЙНОМ ПОДЪЕМЕ ИЛИ СПУСКЕ ТЕЛ К ЦЕНТРУ

Предложение I. Пусть тело падает из A к центру C (рис. 11). Элемент скорости в M, отнесенный ко времени, соответствующему элементу Mm, будет пропорционален центральной силе, увеличенной или уменьшенной на ускоряющую или на замедляющую силу. Обозначив скорость через c, $AM=x$, центральную силу через v и изменяющую силу через A, получим $\frac{dc}{tMm}=v+A$.

Доказательство совпадает с тем, которым было доказано выше предложение III (стр. 305—306).

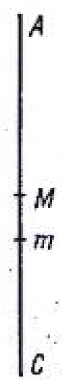


Рис. 11.

Следствие 1. Так как $tMm=\frac{Mm}{c}=\frac{dx}{c}$, то $\frac{cdc}{dx}=v+A$.

I. Положим $A=0$, тогда $cdc=vdx$.

Следствие 2. Пусть v будет всегда одним и тем же. Тогда * $cdc=dx$; следовательно, $cc=x$ и $c=\sqrt{x}$. Таким образом, скорость будет пропорциональна корню квадратному из расстояния.

Следствие 3. Так как время, соответствующее Mm, равно $\frac{dx}{c}=\frac{dx}{\sqrt{x}}$, то время, соответствующее AM, будет пропорционально $\sqrt{x}$, т. е. времена будут пропорциональны корням квадратным из описанных расстояний.

Следствие 4. Отсюда времена будут пропорциональны скоростям.

Следствие 5. Пусть сила будет обратно пропорциональна квадрату расстояний. Обозначив $AC=a$, получим $v=\frac{1}{(a-x)^2}$, откуда

* Здесь и в дальнейших следствиях Эйлер пренебрегает постоянными коэффициентами и опускает их. — Г. М.

$cdc = \frac{dx}{(a-x)^2}$. Следовательно, $cc = \frac{1}{a-x} = \frac{1}{MC}$. Итак, скорость будет обратно пропорциональна корням квадратным из расстояний от центра.

Следствие 6. Таким образом, время, соответствующее AM, будет пропорционально $\int \sqrt{a-x}\,dx$, т. е. $-(a-x)^{3/2}+$ постоянная $a^{3/2}$. Следовательно, время, соответствующее AM, пропорционально $AC^{3/2} - MC^{3/2}$.

II. Положим $A = -c$, тогда $cdc + cdx = vdx$.

Следствие 7. Пусть v будет всегда одним и тем же. Тогда $cdc + cdx = dx$; следовательно, $cdc = dx - cdx$. Итак $dx = \frac{cdc}{1-c}$. Следовательно, $x = -c - \lg(1-c)$.

III. Положим $A = -cc$, тогда $cdc = vdx - ccdx$.

Следствие 8. Пусть v будет всегда одним и тем же. Тогда $cdc = dx - ccdx$. Следовательно,

$$dx = \frac{cdc}{1-cc} = -\frac{1}{2}\cdot\frac{-2cdc}{1-cc},$$

откуда $x = -\frac{1}{2}\lg(1-cc)$. Пусть число, логарифм которого есть 1, будет b. Тогда

$$b^x = (1-cc)^{-1/2} = \frac{1}{\sqrt{1-cc}}.$$

Следовательно, $1 - cc = \frac{1}{b^{2x}}$. Поэтому $c = \frac{\sqrt{b^{2x}-1}}{b^x}$.

Следствие 9. Время, соответствующее AM, равно

$$\int \frac{b^x dx}{\sqrt{b^{2x}-1}} = -\lg\left(b^x - \sqrt{b^{2x}-1}\right).$$

Положим, что скорость c равна x. Тогда $xdx = vdx + Adx$ или $x = v + A$.

Следствие 10. Пусть $A = 0$. Тогда центральная сила будет пропорциональна пройденному расстоянию.

Следствие 11. И время, соответствующее AM, будет пропорционально $\lg x$. Следовательно, это предположение абсурдно, как невозможное. Ибо пусть $x = 1$, тогда время, соответствующее AM, равно нулю, что является абсурдным.

Следствие 12. Пусть v будет всегда одним и тем же и равным b. Тогда изменяющая сила $A = x - b$, т. е. замедляющая сила будет пропорциональна $b - x$. Но это предположение совершенно невозможно, если положить $c = x$.

IX. О ДВИЖЕНИИ ТЕЛ, ДВИЖУЩИХСЯ ПО ЗАДАННЫМ ПОВЕРХНОСТЯМ

Предложение I. Если тело опускается по линии AL, а центр находится в C, то элемент скорости в L, отнесенный ко времени, соответствующему Ll (рис. 12), будет пропорционален тангенциальной силе, увеличенной на изменяющую силу, или, если обозначить скорость через c, тангенциальную силу через T и изменяющую силу через A, то $\frac{dc}{tLl} = T + A$.

Доказательство совпадает с вышеприведенным доказательством предложения III (стр. 305—306).

Следствие 1. Так как $tLl = \frac{Ll}{c} = \frac{ds}{c}$, то, обозначив $Ll = ds$, $lr = dx$, $PL = y$ (причем дуга AP проведена из A с центром в C), центральную силу через v и $T = \frac{vdy}{ds}$, получим, следовательно, $\frac{cdc}{ds} = \frac{vdy}{ds} + A$. Следовательно, $cdc = vdy + Ads$.

Примечание. Таким образом, здесь входят в расчет три величины: 1) скорость, 2) центральная сила и 3) изменяющая сила, причем из двух данных здесь всегда можно найти третье.

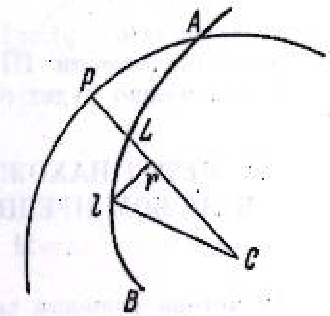


Рис. 12.

Предположение I. Пусть $A = 0$ и $v = b = \text{const}$. Тогда $cdc = bdy$.

Следствие 1. Итак $cc = by$, откуда скорость будет пропорциональна корню квадратному из высоты PL. Таким образом, тело достигает такой же скорости, как если бы оно опускалось прямо по PL, и это всегда справедливо при $A = 0$, какова бы ни была центральная сила.

Следствие 2. Промежуточек времени, соответствующий Ll, будет пропорционален $\frac{ds}{\sqrt{y}}$, откуда время, соответствующее всей дуге AL, равно $\int \frac{ds}{\sqrt{y}}$. Следовательно, если дано уравнение кривой, то легко будет определить время, за которое описывается какая угодно дуга.

Следствие 3. Для того чтобы найти изохрону, положим $y = s^{2n}$. Тогда tAL пропорционально $\int \frac{ds}{s^n}$ или s^{1-n}; следовательно, время движения вплоть до самой нижней точки B пропорционально AB^{1-n}. Но, так как это время является постоянным, где бы ни было взято A, то $n = 1$, и, таким образом, $y = s^2$, откуда явствует, что при бесконечно удаленном центре сил изохронная кривая будет циклоидой.

Предположение II. Пусть $A = 0$ и $v = \frac{1}{(a-y)^2}$, где $AC = a$. Тогда $cdc = \frac{dy}{(a-y)^2}$, откуда $cc = \frac{1}{a-y}$. Следовательно, $c = \frac{1}{\sqrt{(a-y)}}$, т. е. скорость обратно пропорциональна корням квадратным из расстояний от центра.

Предположение III. Пусть $A = -cc$ и $v = \text{const}$. Тогда $cdc = dy - ccds$.

Предположение IV. Пусть $A = \frac{-cc}{a-y}$ и $v = \frac{1}{(a-y)^2}$. Следовательно,

$$cdc = \frac{dy}{(a-y)^2} - \frac{ccds}{a-y}.$$

X. МЕТОД НАХОЖДЕНИЯ ИЗОХРОННЫХ КРИВЫХ В ПРОИЗВОЛЬНОМ ПРЕДПОЛОЖЕНИИ О ТЯЖЕСТИ И ИЗМЕНЯЮЩЕЙ СИЛЕ

Так как $tLl=\frac{ds}{c}$, то время, соответствующее AL, равно $\int\frac{ds}{c}$. Пусть $c=s^m$, тогда $tAL=\int\frac{ds}{s^m}$, т. е. пропорционально s^{1-m}, откуда время, соответствующее AB, пропорционально AB^{1-m}. Так как это значение должно быть постоянным, то $m=1$. Следовательно, c должно быть пропорционально s. Отсюда уравнение для изохроны в предположении I будет, как уже найдено, $y=s^2$.

Положив в предположении II s вместо c, получим $s=\frac{1}{\sqrt{a-y}}$. Следовательно, $ss(a-y)=1$.

В предположении III $sds+ssds=dy$, откуда $3ss+2s^3=by$.

И так можно будет определить изохрону в любом предположении.

XI. МЕТОД НАХОЖДЕНИЯ ЛИНИИ СКОРЕЙШЕГО СПУСКА В ЛЮБОМ ПРЕДПОЛОЖЕНИИ О ЦЕНТРАЛЬНОЙ СИЛЕ И ИЗМЕНЯЮЩЕЙ СИЛЕ

Из метода решения задач, связанных с нахождением кривых, обладающих наибольшими или наименьшими особыми свойствами, явствует, что $c=\frac{dy}{ds}$.

Отсюда, положив это значение c в предположении I, получим $\frac{dy^2}{ds^2}=y$. Отсюда при бесконечно удаленном центре сил кривая будет циклоидой.

В предположении II будет $\frac{dy}{ds}=\frac{1}{\sqrt{a-y}}$.

В предположении III, приняв ds за постоянную, получим $\frac{dyddy}{ds^2}=dy-\frac{dy^2}{ds}$. Разделив на dy и умножив на ds^2, получим $ddy=ds^2-dsdy$; следовательно, $dy=sds-yds$. Таким образом, $s=-\lg(1-s+y)$.

XII. О ПЕРИОДАХ ВРАЩЕНИЯ ТЕЛ ВОКРУГ КАКОГО-ЛИБО ЦЕНТРА ПРИ ПРОИЗВОЛЬНОЙ ИЗМЕНЯЮЩЕЙ СИЛЕ

Предложение I. Пусть два тела описывают вокруг центров C и c орбиты (рис. 13); промежуточки времени, за которые описываются элементы AB и ab, будут прямо пропорциональны самим элементам и обратно пропорциональны корням квадратным из произведения центростремительных сил и корадиусов, т. е., обозначив центральную силу в A через νA, силу в a через νa, корадиус в A через γA, корадиус в a через γa, получим

$$tAB:tab=\frac{AB}{\sqrt{\nu A\cdot\gamma A}}:\frac{ab}{\sqrt{\nu a\cdot\gamma a}}.$$

Доказательство. Обозначив скорости в A и a через cA и ca, получим $tAB:tab=\frac{AB}{cA}:\frac{ab}{ca}$. Но скорости пропорциональны корням квадратным из сил и корадиусов. Следовательно, $tAB:tab=\frac{AB}{\sqrt{\nu A\cdot\gamma A}}:\frac{ab}{\sqrt{\nu a\cdot\gamma a}}$, что и требовалось доказать.

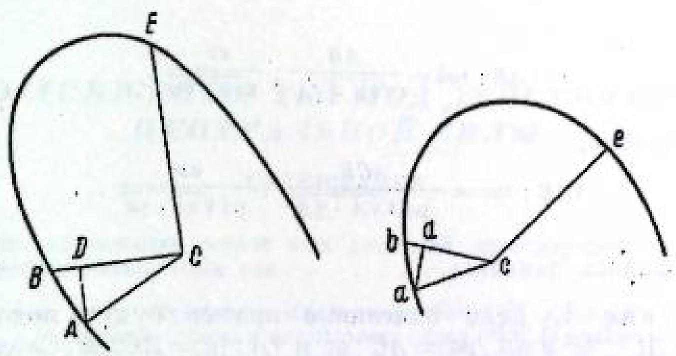


Рис. 13.

Следствие 1. Если центральная сила всегда одна и та же, то

$$tAB:tab=\frac{AB}{\sqrt{\gamma A}}:\frac{ab}{\sqrt{\gamma a}}.$$

Следствие 2. Если опустить из A и a перпендикуляры AD, ad и обозначить радиусы кривизны в A и a через rA, ra, то, поскольку $AB:AD=rA:\gamma A$ и $ab:ad=ra:\gamma a$, будем иметь

$$tAB:tab=\frac{AB\sqrt{AB}}{\sqrt{\nu A\cdot AD\cdot rA}}:\frac{ab\sqrt{ab}}{\sqrt{\nu a\cdot ad\cdot ra}}.$$

Примечание. Для того чтобы определить соотношение времен, соответствующих AE и ae, необходимо определить отношение времен, соответствующих AE и AB, а также соответствующих ae и ab. Но в общем виде для любого предположения об изменяющей силе это сделать невозможно. Следовательно, надо бегло рассмотреть каждое предположение, в котором предлагается определить периоды.

Здесь мы исследуем отдельно наиболее важные из этих предположений.

Предположение I, если изменяющая сила $A=0$.

Предложение II. Если тела опишут вокруг центров C и c дуги AE, ae, то времена, за которые описываются эти дуги, будут прямо пропорциональны площадям ACE, ace и обратно пропорциональны произведениям из перпендикуляров, проведенных из центров C, c на касательные в A и a, на корни квадратные из центральных сил в A и a и корадиусов там же, т. е., обозначив эти перпендикуляры через pA и pa, получим

$$tAE:tae=\frac{ACE}{pA\sqrt{\nu A\cdot\gamma A}}:\frac{ace}{pa\sqrt{\nu a\cdot\gamma a}}.$$

Доказательство. Отношение времен $tAE : tAB = ACE : ACB$, где $ACB = AB \cdot pA$, и $tae : tab = ace : acb$, где $acb = ab \cdot pa$. Следовательно, $tAE = \frac{tAB \cdot ACE}{AB \cdot pA}$ и $tae = \frac{tab \cdot ace}{ab \cdot pa}$. Итак,

$$tAE : tae = \frac{tAB \cdot ACE}{pA \cdot AB} : \frac{tab \cdot ace}{pa \cdot ab},$$

Но

$$tAB : tab = \frac{AB}{\sqrt{\nu A \cdot \gamma A}} : \frac{ab}{\sqrt{\nu a \cdot \gamma a}},$$

Следовательно,

$$tAE : tae = \frac{ACE}{pA\sqrt{\nu A \cdot \gamma A}} : \frac{ace}{pa\sqrt{\nu a \cdot \gamma a}},$$

что и требовалось доказать.

Следствие 1. Если описанные кривые будут подобными, то $ACE : ace = AC^2 : ac^2$ и $pA : pa = AC : ac$ и $\gamma A : \gamma a = AC : ac$. Следовательно,

$$tAE : tae = \sqrt{\frac{AC}{\nu A}} : \sqrt{\frac{ac}{\nu a}}.$$

Следствие 2. Если тела описывают эллипсы вокруг их центров, силы будут пропорциональны расстояниям; обозначим большие оси эллипсов через M и m, а малые через N и n; площади эллипсов будут относиться, как $MN : mn$, перпендикуляры в вершинах, как $M : m$, корадиусы, как $\frac{N^2}{M} : \frac{n^2}{m}$. Отсюда получим, что периоды будут относиться, как

$$\frac{MN}{M\sqrt{\frac{MN^2}{M}}} : \frac{mn}{m\sqrt{\frac{mn^2}{m}}} = 1 : 1;$$

следовательно, они будут равными.

Следствие 3. Пусть тела описывают эллипсы теперь вокруг их фокусов. Силы будут обратно пропорциональны квадратам расстояний. Если оставить такие же обозначения, что и в следствии 2, обозначить расстояния вершин от фокусов F и f, то периоды будут пропорциональны

$$\frac{MN}{F\sqrt{\frac{N^2}{MF^2}}} : \frac{mn}{f\sqrt{\frac{n^2}{mf^2}}} = M\sqrt{M} : m\sqrt{m};$$

следовательно, периоды пропорциональны большим осям в степени $1^1/_2$.

Примечание. Из изложенного легко можно заключить, каким образом надлежит действовать в других предположениях. Поэтому я считаю ненужным добавлять что-либо еще и закончу здесь изложение этого вопроса.

О ДВИЖЕНИИ ТЕЛ ПОД ДЕЙСТВИЕМ ЦЕНТРАЛЬНОЙ СИЛЫ

СОДЕРЖАНИЕ

ВВЕДЕНИЕ, СОДЕРЖАЩЕЕ НАЧАЛА ВСЕХ ДВИЖЕНИЙ, ПРОИСХОДЯЩИХ ОТ ЦЕНТРОСТРЕМИТЕЛЬНЫХ СИЛ

Определение I

§ 1. *Центральной силой является сила, которая увлекает тела по направлению к некоторой точке или отталкивает их от нее.* Если она оказывает первое действие, то называется *центростремительной силой*, если же второе — *центробежной силой*.

Следствие I

§ 2. Центральная сила одним ударом не придает телам стремления, благодаря которому они восприняли бы подлинное движение по направлению к центру или к точке, к которой влечет центральная сила. Одним ударом она придает телам лишь бесконечно малую частицу стремления, но, продолжая постоянно оказывать действие на тела, может придавать им подлинное стремление и непрерывно его увеличивать.

Следствие II

§ 3. Разделив время на бесконечно малые частицы, можно принять, что центральная сила оказывает свое действие на тела всякий раз, как только истечет такая частица времени, причем придает им бесконечно малое стремление. Ведь таким образом будет порождено такое же движение, как если бы центральная сила воздействовала на тела непрерывно.

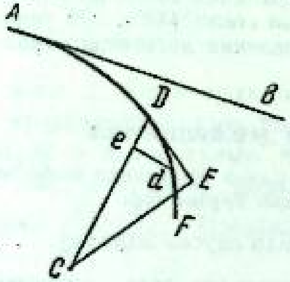


Рис. 1.

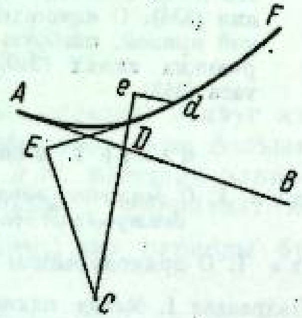


Рис. 2.

Следствие III

§ 4. Следовательно, если центральная сила будет оказывать свое действие на покоющееся тело, то оно будет двигаться ускоренно по направлению к центру при центростремительной силе и от центра — при центробежной силе.

Следствие IV

§ 5. Пусть тело будет в A и центр в C, и пусть телу A будет придано движение по направлению к B. Центральная сила нарушит его прямолинейное движение и приведет к тому, что тело опишет кривую линию ADF, вогнутую по направлению к C, как на рис. 1, если сила будет центростремительной, и выпуклую по направлению к C, как на рис. 2, если сила будет центробежной.

Следствие V

§ 6. Если тогда, когда тело будет в D, центральная сила вдруг исчезнет, то тело будет продолжать движение по прямой DE, касательной к кривой ADF в точке D.

Определение II

§ 7. Пусть тело движется по линии DF вокруг центра C, к которому тело постоянно притягивается или от которого отталкивается вдоль линии CD. Проведем в D касательную DE и на нее опустим из центра C перпендикуляр CE. Так как центральная сила может быть выражена прямой CD, ее можно будет разложить на две боковые: DE и CE. Первая, действующая вдоль касательной DE, называется *тангенциальной силой*, вторая же, действующая вдоль CE, называется *нормальной силой*.

Следствие I

§ 8. Итак, если тело движется по линии DF, нормальная сила совлекает его с прямого пути, а тангенциальная сила либо увеличивает, либо уменьшает скорость тела; она увеличивает скорость, если тело движется от D по направлению к F, ибо тогда она влечет от D по направлению к E. Если же тело движется от F к D, то она уменьшает скорость тела, ибо она увлекает тело в сторону, противоположную той, в которую тело стремится. В первом случае тангенциальная сила положительна, во втором отрицательна.

Следствие II

§ 9. Взяв элемент кривой Dd, проведем Cd и из центра C меньшим радиусом Cd опишем дужку de, пересекающую другой, больший радиус CD в e. Линия de не будет отличаться от прямой. Пусть тело движется от D по направлению к F; ясно, что тангенциальная сила будет положительной, если CD будет больше чем Cd, и отрицательной, если Cd будет больше чем CD, т. е. тангенциальная сила является положительной, если расстояние CD или радиус уменьшается; если же увеличивается, то она будет отрицательной.

Следствие III

§ 10. Следовательно, если элемент расстояния De положителен, то тангенциальная сила будет отрицательной; если же он отрицателен, то сила будет положительной.

Следствие IV

§ 11. Но нормальная сила всегда будет положительной, если сила будет центростремительной, и отрицательной, если сила будет центробежной.

Примечание

§ 12. В дальнейшем я буду всегда полагать центральную силу центростремительной, если я прямо не оговорю противоположное. Иными словами, если элемент расстояния будет принят положительным, тангенциальная сила будет отрицательной.

Следствие V

§ 13. Применим символы. Пусть расстояние от центра или радиус $CD=y$, тогда $De=dy$. Пусть далее $Dd=ds$, $de=dx$ и центростремительная сила равна v. Тогда $dx=\sqrt{ds^2-dy^2}$, и вследствие подобия треугольников

Ded, DEC будем иметь $Dd : de = ds : dx = CD : CE$, что равно отношению центростремительной силы v к нормальной силе. Таким образом, нормальная сила будет равна

$$\frac{v\,dx}{ds} = \frac{v\sqrt{ds^2 - dy^2}}{ds},$$

а $Dd : De = ds : dy = CD : DE$, что равно отношению центростремительной силы v к тангенциальной силе, которая равна $\frac{-v\,dy}{ds}$, поскольку она отрицательна, а dy положительно (рис. 1).

Определение III

§ 14. Если тело, стремящееся из A в B, под действием центростремительной силы описывает кривую линию ADF, то говорят, что тело A *свободно описывает* линию ADF; но если тело, помещенное в A, под действием центростремительной силы движется к C по поверхности AB, как в канале, то говорят, что тело *перемещается* по линии AB (рис. 3).

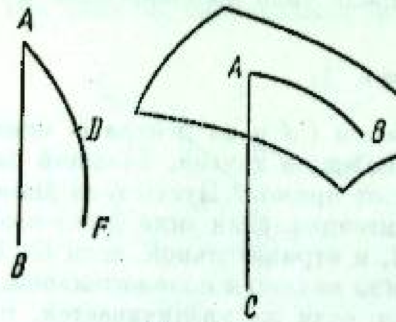


Рис. 3.

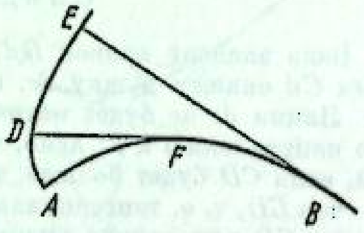


Рис. 4.

Следствие I

§ 15. Итак, если тело будет привязано к нити, огибающей кривую AFB, а затем отпущено и опишет линию ADE, то оно будет двигаться таким же образом, как если бы оно перемещалось по линии ADE, как в канале (рис. 4).

Следствие II

§ 16. Итак, в дальнейшем я вместо рассмотрения движения подвешенных тел буду говорить о движении тел, перемещающихся по заданным линиям.

Определение IV

§ 17. *Сила замедляющая, или сила сопротивления, есть сила, которая уменьшает скорость движущегося тела, оставляя неизменным направление движения.* Так, например, если тело движется в воздухе, то от его скорости постоянно отнимается какая-то часть, но направление движения не меняется. Пространство, наделенное силой сопротивления, называется *сопротивляющейся средой*.

Следствие I

§ 18. Итак, отсюда легко заключить, что является несопротивляющейся средой, или пустотой.

Следствие II

§ 19. Хотя сила сопротивления нисколько не меняет направления движения, тем не менее тела в сопротивляющейся среде свободно описывают кривые, отличные от описываемых в пустоте. Причину этого легко понять, ибо если нечто отнимается от скорости тела, тело оказывает меньшее сопротивление центральной силе и потому вынуждено описать кривую, отличающуюся от описываемой в пустоте.

Следствие III

§ 20. Хотя сила сопротивления действует непрерывно, тем не менее можно будет представить дело так, как будто она оказывает свое действие на тело в бесконечно малые частицы времени.

Предложение I

§ 21. Пусть два тела свободно описывают вокруг центров сил C и c кривые ADF, adf в как угодно сопротивляющихся средах (рис. 5). Выделим два элемента этих кривых AD, ad, которые описываются телами в равные промежуточки времени. Проведем AC, ac и из точек D и d проведем к ним DE и de, параллельные смежным элементам, описанным телами непосредственно до этого, которые будучи продолжены, составят AB и ab. Центральные силы, которыми тела притягиваются в точках A и a к центрам C и c, будут пропорциональны стрелкам AE и ae.

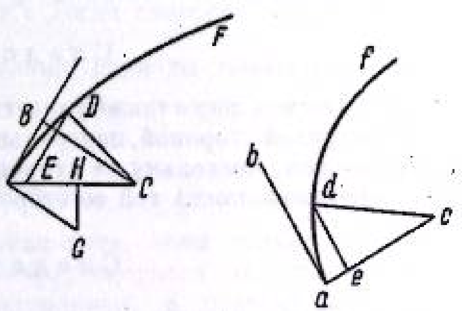


Рис. 5.

Доказательство. Так как промежуточки времени, соответствующие элементам AD, ad равны, то скорости будут там пропорциональны AD и ad. Если бы центральная сила была устранена, эти тела двигались бы по AB и ab (§ 6). Поскольку же им будут параллельны DE, de, то вследствие сложения движения силы, тянущие тела к центрам C и c, т. е. центральные силы, будут относиться, как $AE : ae$, что и требовалось доказать.

Следствие I

§ 22. Итак, центральная сила тела, свободно описывающего кривую линию вокруг центра сил, пропорциональна стрелке синхронных элементов кривой.

Предложение II

§ 23. Пусть тела описывают вокруг центров C и c кривые AF, af в как угодно сопротивляющейся среде; центральные силы в A и a будут прямо пропорциональны квадратам скоростей в A и a и обратно пропорциональны корадиусам AH, ah там же.

Корадиусом называется линия AH на прямой AC, которую отрезает линия GH, проведенная перпендикулярно к AC из центра G соприкасающейся окружности в A.

Доказательство. Приняв, что элементы AD и ad являются синхронными, и проведя, как в предшествующем предложении, DE и de, получим (§ 21), что центральные силы в A и a будут пропорциональны AE и ae. Но из природы окружностей, соприкасающихся с кривыми в A и a, имеем $AE:AD=AD:2AH$ и $ae:ad=ad:2ah$. Итак, центральные силы в A и a будут относиться, как

$$\frac{AD^2}{2AH}:\frac{ad^2}{2ah}=\frac{AD^2}{AH}:\frac{ad^2}{ah}.$$

Но AD относится к ad, как скорость в A к скорости в a. И, следовательно, центральные силы в A и a будут прямо пропорциональны квадратам скоростей в A и a и обратно пропорциональны корадиусам AH, ah, что и требовалось доказать.

Следствие I

§ 24. Итак, центральная сила либо на одной и той же кривой, либо на различных кривых, свободно описанных вокруг центров, в как угодно сопротивляющейся среде прямо пропорциональна квадрату скорости и обратно пропорциональна корадиусу.

Следствие II

§ 25. Отсюда легко также увидеть, что, если кривая обращена к центру своей выпуклой стороной, центральная сила будет отрицательной, а именно центробежной, поскольку та сторона кривой, к которой относится корадиус, противоположна той ее стороне, в которой находится центр.

Следствие III

§ 26. Итак, скорость будет всегда пропорциональна корням квадратным из произведения центральной силы на корадиус, в какой бы сопротивляющейся среде ни двигалось тело.

Следствие IV

§ 27. Следовательно, если тела будут двигаться по окружности, причем центры сил будут находиться в их центрах, расстояния будут корадиусами. Следовательно, центральные силы будут прямо пропорциональны квадратам скоростей и обратно пропорциональны радиусам окружностей в любой как угодно сопротивляющейся среде.

Следствие V

§ 28. Итак, для одной и той же окружности центральная сила будет пропорциональна квадрату скорости.

Следствие VI

§ 29. Если тела приведены в движение по окружностям, центры которых являются центрами сил, и центральная сила обратно пропорциональна расстоянию от центра, то скорости тел будут равными, и поэтому времена обращений по этим окружностям, или периоды, будут пропорциональны длинам окружностей, т. е. пропорциональны радиусам.

Следствие VII

§ 30. Если же центральная сила будет прямо пропорциональна расстоянию от центра, скорости тел, приведенных в движение по различным окружностям, будут пропорциональны радиусам, т. е. длинам окружностей. Следовательно, периоды обращения будут равны между собой.

Следствие VIII

§ 31. Если центральная сила будет обратно пропорциональна квадрату расстояния, скорости тел будут обратно пропорциональны корням квадратным из радиусов. Следовательно, периоды обращений, которые пропорциональны радиусам, умноженным на скорости, будут пропорциональны радиусам в степени $1^1/_2$.

Следствие IX

§ 32. Пусть радиусы окружностей будут R и r, и пусть центральные силы будут пропорциональны расстояниям в степени m, т. е. для окружностей пропорциональны R^m и r^m. Тогда скорости будут пропорциональны $R^{\frac{m+1}{2}}$ и $r^{\frac{m+1}{2}}$, а следовательно, периоды обращения будут пропорциональны $R^{\frac{1-m}{2}}$ и $r^{\frac{1-m}{2}}$.

Следствие X

§ 33. Какова бы ни была центральная сила, если только она одинакова на равных расстояниях от центра, скорости тел на одной и той же окружности повсюду будут одинаковы, и поэтому движение будет равномерным. Следовательно, периоды обращения будут пропорциональны радиусам, отнесенным к скорости, т. е. скорости будут пропорциональны радиусам, отнесенным к периодам обращения. И поэтому центральные силы, которые прямо пропорциональны квадратам скоростей и обратно пропорциональны радиусам, будут прямо пропорциональны радиусам и обратно пропорциональны квадратам периодов обращения.

Но в этом предположении о равномерном движении * среда не может быть сопротивляющейся. Ибо скорость тела меняется в зависимости как от тангенциальной силы (§ 8), так и от сопротивляющейся среды (§ 17), а тангенциальная сила здесь равна нулю, так как расстояние [от центра сил] нормально к окружности, и, следовательно, раз скорость никогда не меняется, то не может быть никакой сопротивляющейся среды.

Следствие XI

§ 34. Оставим окружность и возвратимся к общим рассуждениям. Найдем подобные треугольники AGH, CBA. Ведь угол B равен углу AHG, так как они прямые; далее, AG параллельна CB, так как обе они нормальны к AB. Следовательно, корадиус AH будет относиться

---

* Это замечание относится к следствиям VI—X. — *Г. М.*

к радиусу кривизны AG, как BC к CA. Итак, $AH=\frac{BC\cdot AG}{CA}$. Следовательно, центральная сила на одной и той же, либо на разных кривых будет пропорциональна $\frac{cc\cdot AC}{BC\cdot AG}$, где скорость обозначена через c.

Следствие XII

§ 35. Пусть $CA=y$, $CB=p$. Тогда $AG=\frac{ydy}{dp}$, ибо $dp:dy=y:$ радиус кривизны AG. Итак, центральная сила будет пропорциональна $\frac{ccdp}{pdy}$.

Следствие XIII

§ 36. Поскольку центральная сила относится к нормальной, как $AC:CB=AG:AH$, то, следовательно,

$$\text{нормальная сила}=\frac{\text{центральная сила}\cdot AH}{AG}.$$

Следовательно, она будет пропорциональна $\frac{cc}{AG}$, т. е. нормальная сила будет прямо пропорциональна квадрату скорости и обратно пропорциональна радиусу кривизны AG. Поскольку $AG=\frac{ydy}{dp}$, нормальная сила будет пропорциональна $\frac{ccdp}{ydy}$.

Следствие XIV

§ 37. Так как центральная сила относится к тангенциальной, как $AC:AB=AG:GH$, где GH — субрадиус, то

$$\text{тангенциальная сила}=\frac{\text{центральная сила}\cdot GH}{AG}.$$

Следовательно, она будет пропорциональна $\frac{cc\cdot GH}{AH\cdot AG}$, т. е. тангенциальная сила будет прямо пропорциональна квадрату скорости и субрадиусу и обратно пропорциональна корадиусу и радиусу кривизны. Поскольку $AG=\frac{ydy}{dp}$, то $AH=\frac{pdy}{dp}$ и

$$GH=\frac{dy\sqrt{yy-pp}}{dp}.$$

Итак, тангенциальная сила будет пропорциональна

$$\frac{ccdp\sqrt{yy-pp}}{pydy}$$

или, поскольку dy — величина положительная, то, согласно § 10, тангенциальная сила будет

$$-\frac{ccdp\sqrt{yy-pp}}{pydy}.$$

Следствие XV

§ 38. Пусть центр сил бесконечно удален, и тело свободно описывает линию ADB (рис. 6). Взяв элемент DE и проведя к центру параллельные DG, EH, проведем EF, перпендикулярную к этим параллельным линиям; пусть DK будет радиусом кривизны, из K опустим на DG перпендикуляр KL. Тогда DL будет корадиусом. Следовательно, центральная сила в D будет пропорциональна квадрату скорости, отнесенному к DL (§ 23).

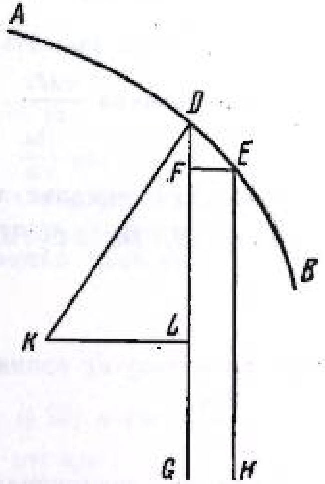


Рис. 6.

Следствие XVI

§ 39. Обозначим DF через dy, EF через dx и $DE=\sqrt{dx^2+dy^2}=ds$; принимая dx за постоянную, получим $DK=\frac{ds^3}{-dxddy}$, и поскольку $DE\,(ds):EF\,(dx)=DK:DL$, то $DL=\frac{ds^2}{-ddy}$.

Пусть скорость равна c. Тогда центральная сила будет пропорциональна $\frac{-ccddy}{ds^2}$, если принять dx за постоянную. Если же принять за постоянную ds, то $DK=\frac{dsdy}{ddx}$, и вследствие подобия треугольников DFE, DLK будем иметь $DL=\frac{dxdy}{ddx}$. Следовательно, центральная сила будет пропорциональна $\frac{ccddx}{dxdy}$. Если же не принимать никакой величины за постоянную, то

$$DK=\frac{ds^2dy}{dsddx-dxdds}$$

и

$$DL=\frac{dsdydx}{dsddx-dxdds}.$$

Поэтому центральная сила будет пропорциональна

$$\frac{ccdsddx-ccdxdds}{dsdydx}.$$

Следствие XVII

§ 40. Итак, если центральная сила будет постоянной, скорость будет пропорциональна корню квадратному из корадиуса, т. е. пропорциональна $\sqrt{\frac{dsdydx}{dsddx-dxdds}}$ или $\sqrt{\frac{dsdy}{-dds}}$, если принять dx за постоянную, а если принять за постоянную ds, то скорость пропорциональна $\sqrt{\frac{dydx}{ddx}}$.

Следствие XVIII

§ 41. Нормальная сила будет пропорциональна (§ 36) $\frac{cc}{DK}$, т. е.

$$\frac{ccdsddx - ccdxdds}{ds^2dy}$$

или, если принять за постоянную dx, пропорциональна $\frac{-ccdds}{ds^2dy}$ или $\frac{-ccddy}{ds^3}$, а если принять ds за постоянную, то нормальная сила будет пропорциональна $\frac{ccddx}{dy}$.

Следствие XIX

§ 42. Тангенциальная сила пропорциональна (§ 37) $\frac{cc \cdot KL}{DK \cdot DL}$. Поскольку $KL : DL = dy : dx$, тангенциальная сила будет пропорциональна

$$\frac{ccdsddx - ccdxdds}{ds^2dx}$$

или, поскольку dy принято положительным, она будет пропорциональна

$$\frac{ccdxdds - ccdsddx}{ds^2dx}.$$

Если dx — постоянная, то тангенциальная сила будет пропорциональна $\frac{ccdds}{ds^2}$. Если же постоянной будет ds, тангенциальная сила будет пропорциональна $\frac{-ccddx}{dx}$.

Предложение III

§ 43. Если тело движется по кривой линии DF вокруг центра C, происходит ли это движение свободно или тело перемещается по заданной кривой, и если взять элемент Dd, то элемент скорости, деленный на промежуточек времени, за который описывается Dd, будет пропорционален тангенциальной силе, уменьшенной на силу сопротивления (рис. 1).

Доказательство. Элемент скорости, отнесенный к промежуточку времени, соответствующему Dd, пропорционален приращению или уменьшению скорости, соответствующему Dd. А это приращение или уменьшение порождается тангенциальной силой и силой сопротивления (§§ 8, 17), а именно, тангенциальная сила увеличивает скорость, если она положительная, т. е. если расстояния от центра уменьшаются, а сила сопротивления уменьшает скорость. Следовательно, увеличение или уменьшение скорости вдоль Dd, т. е. элемент скорости, деленный на промежуточек времени, соответствующий Dd, будет пропорционален тангенциальной силе, уменьшенной на силу сопротивления, что и требовалось доказать.

Примечание на полях рукописи. Сила, увеличивающая или уменьшающая скорость, называется *ускоряющей силой*, происходит ли она от центральной силы или от сопротивления или от их обеих; и ее не следует смешивать с центральной ускоряющей силой, о которой уже говорилось подробно. Эту ускоряющую силу следует измерять исходя из ее действия, т. е. исходя из элемента скорости, отнесенного ко времени, за которое он порождается.

Следствие I

§ 44. Обозначим скорость через c, $CD = y$, $de = dx$, силу сопротивления через R и центральную силу через v. Тогда $De = dy$. Следовательно, тангенциальная сила равна $\frac{-vdy}{ds}$ (§ 13), где $ds = \sqrt{dx^2 + dy^2} = Dd$. Пусть, далее, промежуточек времени, соответствующий Dd, будет равен dt. Тогда $\frac{dc}{dt} = -\frac{vdy}{ds} - R$.

Следствие II

§ 45. Поскольку $dt = \frac{ds}{c}$, будем иметь $\frac{cdc}{ds} = -\frac{vdy}{ds} - R$, или $cdc + vdy + Rds = 0$. И это верно независимо от того, движется ли тело свободно или оно перемещается по DF. Теперь соединим это предложение с предложением II, чтобы найти признаки движений, совершенных свободно.

Следствие III

§ 46. Пусть корадиус равен z. Тогда $cc = zv$ (§ 23) и $cdc = \frac{zdv + vdz}{2}$. Следовательно, $zdv + vdz + 2vdy + 2Rds = 0$. И отсюда

$$R = \frac{zdv + vdz + 2vdy}{-2ds}.$$

Следствие IV

§ 47. Если центральная сила будет постоянной, то $dv = 0$. Отсюда $vdz + 2vdy + 2Rds = 0$ и $R = \frac{vdz + 2vdy}{-2ds}$. Если, кроме того, не будет никакого сопротивления, то $dz = -2dy$. Отсюда $z = a - 2y$. Если обозначить через p перпендикуляр CE из центра C на касательную DE, то $z = \frac{pdy}{dp} = a - 2y$. Следовательно, $pdy = adp - 2ydp$. Отсюда $pdy + 2ydp = adp$ и $ppdy + 2ypdp = apdp$. Интегрируя, получим $2ppy = app + b$. И этим свойством будет обладать кривая, описанная телом в несопротивляющейся среде в предположении единообразного тяготения.

Следствие V

§ 48. Так как $cc = zv$, то $v = \frac{cc}{z}$. Итак, $cdc + \frac{ccdy}{z} + Rds = 0$, т. е. $czdc + ccdy + Rzds = 0$. Пусть $CE = p$. Тогда $z = \frac{pdy}{dp}$. Значит

$$\frac{cpdydc}{dp} + ccdy + \frac{Rpdyds}{dp} = 0.$$

Следовательно, разделив на dy и умножив на dp, получим $cpdc + ccdp + Rpds = 0$.

Следствие VI

§ 49. Поскольку $pcdc + ccdp + Rpds = 0$, то, умножая на p, получим $ppcdc + ccpdp + Rppds = 0$. Следовательно, $ppcc + 2\int Rppds = 0$. Если $R = 0$, то $ppcc = \mathrm{const}$. Таким образом, в несопротивляющейся среде скорость будет обратно пропорциональна перпендикуляру, опущенному из центра на касательную.

Следствие VII

§ 50. Поскольку $ppcc + 2\int Rppds = 0$ и $cc = zv$, то $ppzv + 2\int Rppds = 0$. Отсюда $v = \frac{2}{ppz}\int -Rppds$. Так как $z = \frac{pdy}{dp}$, то $v = \frac{2dp}{p^3dy}\int -Rppds$ или, обозначив радиус кривизны через r, поскольку $y : p = r : z$, будем иметь $z = \frac{pr}{y}$ и

$$v = \frac{2y}{p^3r}\int -Rppds.$$

Если $R = 0$, то центральная сила в несопротивляющейся среде будет пропорциональна $\frac{y}{p^3r}$.

Следствие VIII

§ 51. В следствии V найдено $cpdc + ccdp + Rpds = 0$. Поскольку $p : y = dx : ds$, то $p = \frac{ydx}{ds}$ и, приняв dx за постоянную, получим

$$dp = \frac{dydsdx - ydxdds}{ds^2}.$$

Отсюда

$$\frac{cydxdc}{ds} + \frac{ccdydsdx - ccydxdds}{ds^2} + Rydx = 0,$$

т. е.

$$cydsdc + ccdyds - ccydds + Ryds^2 = 0.$$

Предположим, что центр бесконечно удален; тогда $y = \infty$. Отсюда следует, что член $ccdyds$ исчезает по причине того, что остальные члены бесконечно больше его, и будем иметь $cdsdc + Rds^2 = ccdds$, или $Rds^2 = ccdds - cdsdc$, т. е.

$$\frac{-Rdx^2}{ds} = \frac{cds^2dc - ccddsds}{ds^4}dx^2.$$

Поэтому

$$\frac{ccdx^2}{2ds^2} = \int\frac{-Rdx^2}{ds}.$$

Следовательно, поскольку $cc = vz$ и $z = \frac{pdy}{dp}$, имеем

$$v = \frac{-2dsdds}{dydx^2}\int\frac{-Rdx^2}{ds} = \frac{2ddy}{dx^2}\int\frac{Rdx^2}{ds};$$

иными словами, v пропорционально $ddy\int\frac{Rdx^2}{ds}$, а если $R = 0$, то пропорционально ddy.

Примечание

§ 52. Таковы начала всех движений, производимых центростремительными силами, будь то движения тел, свободно описывающих кривые, или перемещающихся по заданным линиям, будь то движение одного тела или движения многих тел, взаимно связанных, будь то в пустоте или в сопротивляющейся среде. В соответствии с этими разделениями я делю этот трактат сначала на две части, в первой из которых говорится о движении тел, свободно описывающих кривые, а во второй — о движении тел, перемещающихся по заданным линиям. Далее, обе эти части я вновь подразделяю на две части, сообразно тому, будет ли говориться о движении одного тела или о движениях многих взаимно связанных тел.

ЧАСТЬ I. О СВОБОДНОМ ДВИЖЕНИИ ТЕЛ

РАЗДЕЛ I. *О ДВИЖЕНИИ ОДНОГО ТЕЛА, ИЛИ О ПРИЗНАКАХ СВОБОДНО ДВИЖУЩЕГОСЯ ТЕЛА БЕЗ УЧЕТА ДРУГИХ ТЕЛ*

Глава I. О ПРЯМОЛИНЕЙНОМ ПОДЪЕМЕ ИЛИ СПУСКЕ К ЦЕНТРУ

Предложение I

§ 1. Пусть тело движется по прямой AC, причем центр сил находится в C (рис. 7). Если мы обозначим, как выше, CD через y, его элемент Dd через dy, скорость в D через c, центральную силу через v и силу сопротивления там же через R, то $cdc = vdy + Rdy = 0$.

Доказательство. Согласно § 45 «Введения», $cdc + vdy + Rds = 0$. Но ds там было элементом линии, описанной телом. Здесь же, поскольку линия эта совпадает с расстоянием $CD = y$, будем иметь $ds = dy$. Отсюда здесь $cdc + vdy + Rdy = 0$, что и требовалось доказать.

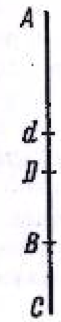


Рис. 7.

Следствие I

§ 2. В предложении принимается, что тело поднимается от центра, ибо dy полагаются положительными и, следовательно, расстояния $CD = y$ растущими. Итак, если тело опускается, то вместо dy надо положить $-dy$* в члене vdy, но не в члене Rdy, так как здесь dy рассматривается не как элемент расстояния от центра, а как элемент уже описанной линии. И получим для опускающихся тел $cdc = vdy - Rdy$.

* Оставляя dy положительным. — *Г. М.*

Следствие II

§ 3. Пусть тело опускается и достигнет точки A; обозначим $AD=x$ и $Dd=dx$. Следовательно, $cdc=vdx-Rdx$.

Следствие III

§ 4. Промежуточек времени, соответствующий Dd, равен $\frac{dx}{c}=\frac{dc}{v-R}$. Отсюда время, соответствующее всему пути AD, равно $\int\frac{dx}{c}=\int\frac{dc}{v-R}$.

Следствие IV

§ 5. Пусть тело поднимается, и пусть оно начинает подъем в точке B; обозначив BD через x, получим $Dd=dx$. Следовательно, $cdc+vdx+ +Rdx=0$.

Следствие V

§ 6. Промежуточек времени, соответствующий элементу Dd, будет равен $\frac{dx}{c}=\frac{-dc}{v+R}$. Отсюда все время, соответствующее BD, равно $\int\frac{dx}{c}=\int\frac{-dc}{v+R}$.

Примечание I

§ 7. В дальнейшем, поскольку различие между подъемом и спуском тел очень велико, о каждом из них будет говориться отдельно.

Примечание II

§ 8. В уравнении для прямолинейного спуска или подъема тел входят в расчет три величины, а именно: скорость, центральная сила и сила сопротивления, причем из двух данных можно найти третье. Таким образом, эту главу удобно будет разделить на три части, в первой из которых будет изложен метод нахождения скорости по данной центральной силе и силе сопротивления, во второй — нахождение центральной силы по данной силе сопротивления и скорости, и в третьей, наконец, — метод нахождения силы сопротивления по данной центральной силе и скорости. В каждой из этих частей все это будет рассматриваться двояко — для подъема и для спуска.

Подраздел I. *МЕТОД НАХОЖДЕНИЯ СКОРОСТИ ТЕЛА, ОПУСКАЮЩЕГОСЯ ПРЯМО К ЦЕНТРУ, ПО ЗАДАННЫМ СИЛАМ ТЯЖЕСТИ И СОПРОТИВЛЕНИЯ*

Предположение I. Сила сопротивления отсутствует

Предложение II

§ 9. Пусть тело опускается из A с любой скоростью в несопротивляющейся среде или пустоте, и пусть оно дойдет до D. Обозначив AD через x, получим $cdc=vdx$.

Доказательство. Согласно § 3, $cdc=vdx-Rdx$. Но по предположению сопротивление $R=0$. Следовательно, $cdc=vdx$, что и требовалось доказать.

I. Положим, что центральная сила единообразна, т. е. $v=a$.

Следствие I

§ 10. Итак, $cdc=adx$; произведя интегрирование, получим $cc=2ax\pm b$, откуда $c=\sqrt{2ax\pm b}$. Как явствует отсюда, для того чтобы скорость в начале спуска A не была мнимой, b должно быть положительным. Подставим вместо него bb, тогда $c=\sqrt{2ax+bb}$.

Следствие II

§ 11. Если описать над ADC как над осью параболу EBM с параметром $2a$ при аппликате AB, равной b (рис. 8), то аппликаты DM этой кривой выразят скорости тела в соответствующих местах D. Следовательно, скорость в A будет пропорциональна $AB=b$. Она является такой же, какой она была бы в том случае, если бы тело падало из E, не испытывая никакого воздействия, кроме тяжести.

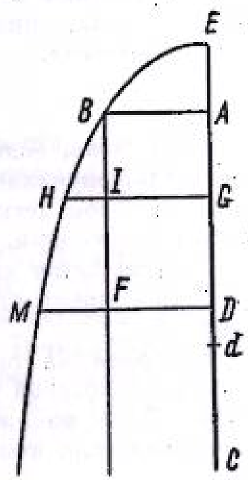


Рис. 8.

Следствие III

§ 12. Промежуточек времени, соответствующий элементу Dd, будет пропорционален этому элементу, деленному на скорость, так как движение по Dd можно рассматривать как равномерное. Следовательно, он будет пропорционален

$$\frac{dx}{c}=\frac{dx}{\sqrt{2ax+bb}}.$$

Таким образом, все время, соответствующее AD, будет пропорционально $\frac{1}{a}\sqrt{2ax+bb}\pm\text{const}$. Для того чтобы найти постоянную, положим $x=0$, и время будет также равно нулю. Итак, $\frac{b}{a}\pm\text{const}=0$. Следовательно, эта постоянная будет $-\frac{b}{a}$. Отсюда время, соответствующее AD, будет пропорционально $\frac{\sqrt{2ax+bb}-b}{a}$, т. е., поскольку a — постоянная, пропорционально $\sqrt{2ax+bb}-b$.

Следствие IV

§ 13. Поскольку $DM=c=\sqrt{2ax+bb}$ и $AB=b$, то, проведя линию BF, параллельную оси AD, получим $FM=\sqrt{2ax+bb}-b$. Следовательно, время, за которое тело, опускаясь из A, доходит до D, пропорционально FM.

Следствие V

§ 14. Итак, если тело опускается из E, время, за которое оно дойдет до D, будет пропорционально аппликате DM, т. е. скорости [в D], если тело в начале спуска не имело никакой скорости. Таким образом, и время и скорость будут пропорциональны корням квадратным из пути, пройденного телом при падении.

Следствие VI

§ 15. Следовательно, время, за которое тело, опускаясь из A со скоростью AB, доходит до D, будет пропорционально скорости в D, уменьшенной на скорость в начале спуска.

Следствие VII

§ 16. Поскольку все параболы таковы, что аппликаты равных абсцисс сохраняют между собой данное отношение, то очевидно, что любая парабола, описанная на оси AD с вершиной E, выразит скорости тела и времени.

Следствие VIII

§ 17. Итак, если дана начальная скорость в A, а именно та, которую тело, опускаясь из E, получило бы в A, то я утверждаю, что этим способом легко будут определены скорость в любое время и на любом расстоянии, время, за которое описывается данное расстояние или порождается данная скорость, и, наконец, расстояние, описанное за данное время или при прохождении которого порождается данная скорость.

Построим на оси DE с вершиной в E, т. е. в данной точке, опускаясь из которой к A, тело получает в A данную скорость, параболу EBM. С ее помощью будет найдено все на основе предшествующих следствий, как покажут приведенные ниже задачи.

Задача I

§ 18. По данной начальной скорости в A, т. е. AB, которую тело получило бы при падении из EA, найти скорость тела, когда оно дойдет до D, и время, которое используется для прохождения от A до D.

Решение. Скорость в D будет относиться к начальной скорости в A или к скорости в любом другом данном месте G, как DM к AB или GH (§ 11). И время, за которое тело проходит от A до D, будет относиться ко времени, за которое тело доходит до G, как FM к IH (§ 13), что и требовалось найти.

Следствие I

§ 19. Пусть параметр параболы равен 1, $AE=a$, $AG=b$ и $AD=x$. Тогда $GH=\sqrt{a+b}$, $AB=\sqrt{a}$, $IH=\sqrt{a+b}-\sqrt{a}$, $DM=\sqrt{a+x}$ и $FM=\sqrt{a+x}-\sqrt{a}$. Таким образом, скорость в D будет относиться к скорости в G, как $\sqrt{a+x}$ к $\sqrt{a+b}$, и время AD : время $AG=(\sqrt{a+x}-\sqrt{a}):(\sqrt{a+b}-\sqrt{a})$.

Пример. Пусть $AE=a=1$, $AG=b=\frac{7}{9}$, $AD=x=3$. Скорость в D будет относиться к скорости в G, как $2:4/3$, или $3:2$. А время, соответствующее AD, будет относиться ко времени, соответствующему AG, как $1:{}^1/_3$, или $3:1$.

Следствие II

§ 20. Пусть тело не имеет начальной скорости, или, что то же самое, пусть тело опускается из E. Тогда $a=0$, $EG=b$ и $ED=x$. Таким образом, скорость в D будет относиться к скорости в G, как $\sqrt{x}$ к $\sqrt{b}$, и время, соответствующее ED, ко времени, соответствующему EG, как $\sqrt{x}$ к $\sqrt{b}$, т. е. времена будут пропорциональны скоростям.

Пример. Пусть $EG=1$ и $ED=4$. Скорость в D будет относиться к скорости в G, как $2:1$, и в таком же отношении будут находиться времена спусков по ED и EG.

Задача II

§ 21. По данной начальной скорости в A и скорости, которую тело получит в D, найти как линию AD, так и время, за которое тело, падая, проходит линию AD.

Решение. Возьмем произвольную высоту AG; аппликата в G, а именно GH, выразит скорость тела, достигающего G (§ 11). Найдем аппликату DM, которая пусть относится к GH, как заданная скорость тела, подходящего к искомому месту, к скорости в G. Точка D будет искомым местом (§ 11), и FM будет относиться к IH, как время, за которое тело доходит до D, ко времени, за которое тело доходит до G (§ 13), что и требовалось найти.

Задача III

§ 22. По данной начальной скорости в A найти расстояние AD, которое проходится за данное время, а также скорость, достигаемую в D.

Решение. Возьмем данную высоту AG и проведем аппликату GH; GH выразит скорость в G, а IH — время, которое используется для прохождения из A в D (§§ 11, 13). Возьмем линию FM, которая пусть относится к IH, как заданное время ко времени, соответствующему AG. D будет искомым местом, и DM будет относиться к GH, как искомая скорость к скорости в G (цитированный параграф), что и требовалось найти.

Следствие I

§ 23. Пусть параметр параболы равен 1, $AE=a$, $AG=b$, $AD=x$, отношение времен, соответствующих AG и AD, пусть будет $m:n$. Тогда $AB=\sqrt{a}$, $GH=\sqrt{a+b}$, $IH=\sqrt{a+b}-\sqrt{a}$ и $DM=\sqrt{a+x}$, $FM=\sqrt{a+x}-\sqrt{a}$. Таким образом, $(\sqrt{a+b}-\sqrt{a}):(\sqrt{a+x}-\sqrt{a})=m:n$.

Следовательно,

$$n\sqrt{a+b}-n\sqrt{a}=m\sqrt{a+x}-m\sqrt{a},$$

откуда

$$\sqrt{a+x}=\frac{n\sqrt{a+b}+(m-n)\sqrt{a}}{m}.$$

Возведя в квадрат, получим

$$a+x=\frac{2nna+nnb+mma-2mna+(2mn-2nn)\sqrt{aa+ab}}{mm}.$$

Отсюда

$$x=\frac{2nna+nnb-2mna+(2mn-2nn)\sqrt{aa+ab}}{mm}.$$

Следствие II

§ 24. Пусть тело опускается из E. Тогда $EA=a=0$, $EG=b$ и $ED=x$. Следовательно, $x=\frac{nnb}{mm}$. Итак, отношение квадрата времени, соответствующего EG, к квадрату времени, соответствующему ED, равно отношению EG к ED.

Задача IV

§ 25. Пусть тело падает из A в D с той скоростью в A, которую оно получило бы при падении из E; найти прямую линию, которую тело может описать равномерным движением со скоростью, достигнутой в D за время, равное времени падения из A в D.

Решение. Пусть параметр параболы будет равен $2a$, $AE=c$. Тогда скорость в D будет равна $DM=\sqrt{2a(AD+c)}$, и время, соответствующее AD, будет равно $\frac{FM}{a}$ (§ 12). Следовательно, расстояние, которое описывается за это время со скоростью DM, будет пропорционально $\frac{DM\cdot FM}{a}$. Но поскольку $DM=\sqrt{2a(AD+c)}$ и $AB=\sqrt{2ac}$, то $FM=DM-AB=\sqrt{2a(AD+c)}-\sqrt{2ac}$. Отсюда найдем, что искомое расстояние, которое я назову x, будет равно

$$\frac{2a(AD+c)-2a\sqrt{c(AD+c)}}{a}=2AD+2c-2\sqrt{c\cdot AD+cc}.$$

Следовательно, $x=2AD+2c-2\sqrt{c\cdot AD+cc}$, что и требовалось найти.

Следствие I

§ 26. Поскольку $DE=AD+c$, то $x=2DE-2\sqrt{c\cdot DE}$.

Следствие II

§ 27. Пусть тело опускается из E. Линия, которую тело проходит со скоростью, достигнутой в D, за время, за которое оно продвигается из E в D, равна $2DE$, поскольку $c=0$, т. е. тело описало бы с равномерной скоростью, достигнутой при падении из ED, двойную линию DE.

Задача V

§ 28. Пусть тело опускается из A; определить времена, за которые проходятся равные расстояния AB, BC, CD и т. д., а также скорости в B, C, D и т. д. (рис. 9).

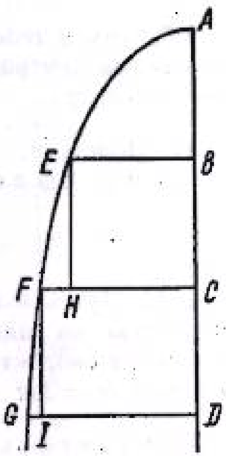


Рис. 9.

Решение. Время, соответствующее AB, пропорционально BE, время, соответствующее BC, пропорционально FH, и время, соответствующее CD, пропорционально GI (§ 13), причем $AEFG$ есть парабола с осью AB. Итак, пусть $AB=a$ и параметр параболы равен 1. Тогда $AC=2a$, $AD=3a$ и т. д., $BE=\sqrt{a}$, $CF=\sqrt{2a}$, $DG=\sqrt{3a}$ и т. д. Следовательно, поскольку эти аппликаты пропорциональны скоростям, скорости в A, B, C и D и т. д. будут пропорциональны $\sqrt{0}$, $\sqrt{1}$, $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$ и т. д., что было первым.

Далее, поскольку $BE=\sqrt{a}$, то $HF=\sqrt{2a}-\sqrt{a}$ и $IG=\sqrt{3a}-\sqrt{2a}$ и т. д. Отсюда времена, за которые описываются падением равные высоты AB, BC, CD, будут пропорциональны $\sqrt{1}:(\sqrt{2}-\sqrt{1}):(\sqrt{3}-\sqrt{2})$ и т. д., что было вторым.

Следствие I

§ 29. Поскольку скорость в A равна нулю, а в B пропорциональна BE, приращение скорости в B, т. е. скорость в B, уменьшенная на скорость в A, будет пропорционально BE. Далее, приращение скорости в C, т. е. скорость в C, уменьшенная на скорость в B, будет пропорционально HF, а приращение скорости в D пропорционально IG. Итак, эти приращения скоростей будут пропорциональны временам, за которые описываются высоты AB, BC, CD. И это остается справедливым, сколь бы неравными ни выбирались отрезки AB, BC, CD.

Задача VI

§ 30. Найти расстояния AB, BC и CD, которые тело описывает при падении из A за равные времена, а также скорости в B, C и D.

Решение. Поскольку времена равны, то BE, FH, GI будут равными. Пусть параметр параболы будет равен 1, $BE=FH=GI=a$. Тогда $AB=aa$, далее $FC=2a$, откуда $AC=4aa$. Следовательно, $BC=3aa$. Соответственно $DG=3a$ и $AD=9aa$. Следовательно, $CD=5aa$. Итак, AB, BC, CD и т. д. пропорциональны 1, 3, 5 и т. д. (в порядке нечетных чисел), что было первым.

Поскольку скорости пропорциональны аппликатам параболы (§ 11), то скорости в точках B, C, D и т. д. будут пропорциональны $BE(a)$, $CF(2a)$, $DG(3a)$ и т. д., т. е. пропорциональны 1, 2, 3, 4, 5 и т. д. (согласно натуральному ряду чисел), что было вторым.

Примечание I

§ 31. Сюда можно было бы прибавить весьма большое число задач, касающихся спуска тел к центру, но достаточно и тех, которые я привел, так как с помощью парабол, как уже ясно показано, все задачи могут быть решены очень легко. Итак, относительно прямолинейного спуска в предположении пустоты и однородной центральной силы достаточно сказанного.

Обратимся теперь к спуску тяжелых тел также в пустоте, но в предположении центральной силы, притягивающей в зависимости от расстояния до центра.

II. Положим, что **центральная сила пропорциональна расстоянию от центра.**

Предложение III

§ 32. Пусть в этом предположении тело опускается из A с любой скоростью по направлению к центру C, и пусть оно дойдет до D. Обозначив скорость в D через c, $AD=x$, $AC=a$ и скорость в A через b, получим $cc=2ax-xx+bb$ (рис. 6).

Доказательство. Согласно § 9, $cdc=vdx$. Но по предположению v пропорционально расстоянию CD, т. е. пропорционально $a-x$. Следовательно, $cdc=adx-xdx$, и после интегрирования $cc=2ax-xx+\mathrm{const}$. Для нахождения прибавляемой постоянной положим $x=0$. Тогда $cc=\mathrm{const}$. Но при этом c должно быть равно b. Следовательно, постоянная равна bb. Итак, $cc=2ax-xx+bb$, что и требовалось доказать.

Следствие I

§ 33. Итак, скорость c будет равна $\sqrt{2ax-xx+bb}$, а по данной скорости c легко найти высоту x, с которой опускается тело, а именно $xx=2ax+bb-cc$. Следовательно, $x=a\pm\sqrt{aa+bb-cc}$.

Следствие II

§ 34. Так как промежуточек времени, соответствующий Dd, пропорционален $\frac{Dd}{c}$, т. е. пропорционален $\frac{dx}{c}$, то этот промежуточек времени равен

$$\frac{dx}{\sqrt{2ax-xx+bb}}.$$

Следовательно, все время, соответствующее AD, будет пропорционально

$$\int\frac{dx}{\sqrt{2ax-xx+bb}}.$$

Следствие III

§ 35. Пусть тело не имеет начальной скорости, т. е. $b=0$. Тогда скорость в D $c=\sqrt{2ax-xx}$ и $x=a\pm\sqrt{aa-cc}$.

Следствие IV

§ 36. И время, соответствующее AD, пропорционально $\int\frac{dx}{\sqrt{2ax-xx}}$.

Следствие V

§ 37. Скорость в D пропорциональна $\sqrt{2ax-xx+bb}$ (§ 33). Пусть скорость b в точке A такова, какую достигло бы тело, падая в A из E. Опишем вокруг центра сил C радиусом CE окружность $EBMFmbe$ (рис. 10); проведем аппликату DM, и она будет равна $\sqrt{2ax-xx+bb}$, если мы обозначим, как прежде, $AD=x$ и $AC=a$, тогда как аппликата в A $AB=b$. Итак, аппликаты окружности DM пропорциональны скоростям.

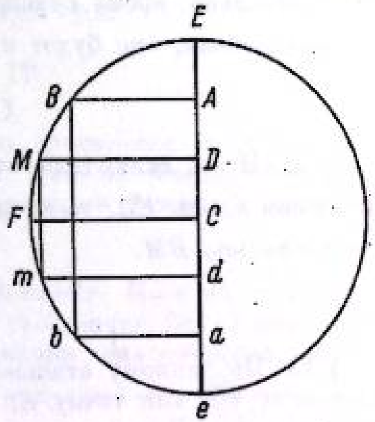


Рис. 10.

Следствие VI

§ 38. Итак, отсюда ясно, что тело, когда оно дойдет до центра C, будет двигаться от центра в другую сторону по продолжению прямой EC точно таким же образом, каким оно раньше двигалось к центру, а именно: в точках d, отстоящих от C на таком же расстоянии, что и D, тело будет иметь такую же скорость, как и в D. Таким образом, тело придет в e и будет двигаться назад к центру C, дойдет до E и оттуда вновь отправится в e, и так оно будет продолжать свое колебательное движение до бесконечности, если только где-либо не встретит препятствия.

Следствие VII

§ 39. Наибольшей скорость тела будет в центре C, где приращение скорости будет наименьшим; а наибольшее приращение скорости имеет место в самом начале движения, т. е. в E.

Следствие VIII

§ 40. Для того чтобы вместо начальной скорости в A ввести в расчет высоту EA, падая с которой тело может достичь этой скорости, обозначим $AE=e$. Тогда $a+e=\sqrt{aa+bb}$, откуда $b=\sqrt{2ae+ee}$. Следовательно,

$$c=\sqrt{2ax-xx+2ae+ee}$$

и

$$x=a\pm\sqrt{aa+2ae+ee-cc}.$$

Следствие IX

§ 41. Для того чтобы нам было легче выразить время, за которое тело приходит из A в любое место D, найдем время, соответствующее ED, откуда можно легко вычислить время, соответствующее EA, и затем, вычтя его из времени, соответствующего ED, найти время, соответствующее DA.

Итак, пусть тело опускается из E. Тогда $CE=a$, $ED=x$ и время спуска по ED равно $\int\frac{dx}{\sqrt{2ax-xx}}$. Но

$$\int\frac{a\,dx}{\sqrt{2ax-xx}}=\text{arc } EBM.$$

Следовательно, время спуска по ED будет равно $\frac{EBM}{a}$ или, поскольку a — постоянная, оно будет пропорционально EBM.

Следствие X

§ 42. Итак, если тело опускается из A со скоростью, достигнутой падением вдоль EA, то время спуска по AD будет равно $\frac{BM}{CE}$ или пропорционально BM.

Задача VII

§ 43. По данному отношению скоростей в A и D найти радиус окружности CE или точку E, опускаясь из которой тело получило бы в точках A и D скорости, имеющие между собой данное отношение.

Решение. Пусть дано отношение скоростей в D и A, а именно $m:1$. Тогда $DM=m\cdot AB$ (§ 37). Найдем AB. Из природы круга известно, что

$$AC^2+AB^2=CD^2+DM^2=CD^2+mm\cdot AB^2.$$

Следовательно,

$$AB^2=\frac{AC^2-CD^2}{mm-1}\quad\text{и}\quad AB=\sqrt{\frac{AC^2-CD^2}{mm-1}}.$$

Таким образом,

$$CE=\sqrt{AC^2+AB^2}=\sqrt{\frac{mm\cdot AC^2-CD^2}{mm-1}},$$

что и требовалось найти.

Задача VIII

§ 44. Пусть тело падает из A вдоль высоты AD со скоростью, достигнутой падением из EA; найти линию, которую может описать тело с равномерной скоростью, а именно с той, которую оно достигло в D, за то же время, за которое оно описало высоту AD.

Решение. Обозначим искомый путь через z. Так как путь равен произведению из скорости на время, то $z=\frac{DM\cdot BM}{CE}$, что и требовалось найти.

Следствие I

§ 45. Итак, линия, которую тело может описать за то же время, за которое оно может опуститься из E в C, со скоростью, достигнутой в центре C, равна дуге EMF, четвертой части окружности, или приближенно $^{22}/_{14}\,CE$.

III. Положим, что **центральная сила обратно пропорциональна квадрату расстояний от центра.**

Предложение IV

§ 46. Пусть в этом предположении тело опускается из A с любой скоростью в D по направлению к центру C (рис. 6). Тогда, обозначив скорость в D через c, $AD=x$, $AC=a$ и скорость в A через b, получим $(a-x)cc=abb-x(bb-aa)$.

Доказательство. Согласно § 9, $cdc=vdx$. Но v по предположению обратно пропорционально квадрату расстояния DC от центра C, а $DC=a-x$. Следовательно, при сохранении однородности, $cdc=\frac{a^3dx}{2(a-x)^2}$. Производя интегрирование, получим $cc=\frac{a^3}{a-x}+\text{const}$. Для нахождения этой постоянной положим $x=0$. Тогда $cc=aa+\text{const}=bb$. Следовательно, эта постоянная равна $bb-aa$. Отсюда $cc=-aa+bb+\frac{a^3}{a-x}$. Следовательно, $(a-x)cc=abb-x(bb-aa)$, что и требовалось доказать.

Следствие I

§ 47. Таким образом, скорость $c=\sqrt{\frac{abb+aax-bbx}{a-x}}$, и по данной скорости c найдем $x=\frac{acc-abb}{cc+aa-bb}$.

Следствие II

§. 48. Так как промежуточек времени, соответствующий Dd, равен $\frac{Dd}{c}$, то, подставив вместо c величину, найденную в предыдущем параграфе, получим для промежуточка времени, соответствующего Dd, величину

$$\frac{dx\sqrt{a-x}}{\sqrt{abb+aax-bbx}}.$$

Следовательно, все время, соответствующее высоте AD, будет равно

$$\int \frac{dx\sqrt{a-x}}{\sqrt{abb+aax-bbx}}.$$

Следствие III

§ 49. Пусть тело в начале A не имеет никакой скорости. Тогда $b=0$. Таким образом, $c=a\sqrt{\frac{x}{a-x}}$ и $x=\frac{acc}{cc+aa}$, или $c=\frac{ax}{\sqrt{ax-xx}}$.

Следствие IV

§ 50. Время спуска вдоль высоты AD в предположении, что $b=0$, равно

$$\int \frac{dx}{a}\sqrt{\frac{a-x}{x}}=\frac{1}{a}\int\frac{adx-xdx}{\sqrt{ax-xx}}=$$

$$=\frac{1}{a}\int\frac{\frac{1}{2}adx-xdx}{\sqrt{ax-xx}}+\frac{1}{a}\int\frac{\frac{1}{2}adx}{\sqrt{ax-xx}}=\frac{\sqrt{ax-xx}}{a}+\frac{1}{a}\int\frac{\frac{1}{2}adx}{\sqrt{ax-xx}}.$$

Следовательно, нахождение времен спуска зависит от спрямления окружности или от циклоиды.

Следствие V

§ 51. Пусть тело опускается из E к центру C без начальной скорости (рис. 11); обозначим $EC=a$, $ED=x$ и скорость, достигнутую

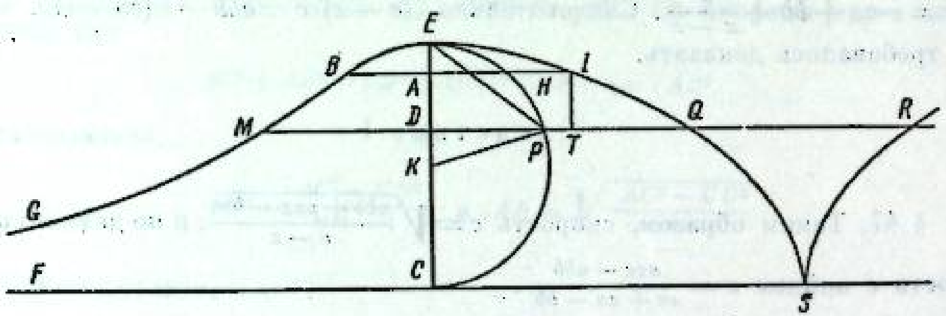


Рис. 11.

в D, через c. Поскольку $c=\frac{ax}{\sqrt{ax-xx}}$, построим на EC такую кривую $EBMG$, чтобы аппликата $DM=\frac{ax}{\sqrt{ax-xx}}$. Ее удобно построить таким образом. На другой стороне на диаметре EC построим полуокружность EPC. Проведем DP, и пусть $DP(\sqrt{ax-xx}):EP(\sqrt{ax})=EP(\sqrt{ax}):DM$. Точка M будет находиться на искомой кривой, аппликаты которой DM выразят скорости тела, падающего из E и приходящего в D.

Следствие VI

§ 52. Аппликата CF этой кривой в центре сил C будет ее асимптотой. Ведь она обращена, начиная от E, своей вогнутостью к оси EC; но имеет точку перегиба там, где абсцисса равна $^1/_4 EC$. Итак, если элементы абсцисс взяты равными, приращения скоростей от начала и на протяжении четверти расстояния CE уменьшаются, а затем увеличиваются, пока скорость в самом центре C не станет бесконечной.

Следствие VII

§ 53. Для того чтобы надлежащим образом выразить времена, над продолженной асимптотой FC построим циклоиду $EIQSR$ при образующей окружности CPE. Проведенная аппликата

$$DPQ=(DP)\sqrt{ax-xx}+(EHP)\int\frac{\frac{1}{2}adx}{\sqrt{ax-xx}}.$$

Таким образом, время спуска вдоль ED будет равно $\frac{DQ}{a}$ или, поскольку a — постоянная, пропорционально DQ.

Следствие VIII

§ 54. Итак, когда тело придет к центру C, оно тотчас же направляется назад и возвращается к точке E, откуда оно вновь опускается, и так до бесконечности, причем таким образом, что скорость опускающегося и поднимающегося тела в одной и той же точке D всегда одинакова. Это ясно из того, что продолжение DP встречается с циклоидой в бесконечном числе точек Q, R и т. д., откуда следует заключить, что тело будет в D не только по прошествии времени DQ, но также по прошествии времени DR и бесконечного числа других времен. Но тело никогда не проникнет за центр C, так как за асимптотой FS нет никакой части циклоиды.

Следствие IX

§ 55. Итак, время спуска с высоты AD с начальной скоростью, которая может быть достигнута падением вдоль EA, будет пропорционально части аппликаты QT, которую отрезает прямая IT, проведенная из I параллельно прямой EC.

Следствие X

§ 56. Поскольку, согласно § 49, $c=a\sqrt{\frac{x}{a-x}}$, то в силу того, что a — постоянная, скорость в любом месте D будет прямо пропорциональна корню квадратному из пройденной высоты ED и обратно пропорциональна также корню квадратному из расстояния CD от центра, т. е.

$$AB:DM=\sqrt{\frac{AE}{AC}}:\sqrt{\frac{DE}{DC}}.$$

Задача IX

§ 57. По данному отношению скоростей опускающегося тела в точках A и D найти точку E или начало спуска, опускаясь из которого тело в точках A и D достигает скоростей, имеющих между собой данное отношение.

Решение. Пусть будет дано отношение $1:m$ скоростей в A и D. Тогда (§§ 51, 56)

$$AB:DM = 1:m = \sqrt{\frac{AE}{AC}} : \sqrt{\frac{DE}{DC}}.$$

Следовательно, $1:mm = \frac{AE}{AC} : \frac{DE}{DC}$, но $AE = CE - AC$ и $DE = CE - DC$. Значит,

$$mm \cdot DC \cdot CE - mm \cdot DC \cdot AC = AC \cdot CE - AC \cdot DC.$$

Отсюда $CE = \frac{(mm-1) \cdot DC \cdot AC}{mm \cdot DC - AC}$, что и требовалось найти.

Задача X

§ 58. Тело падает из A вдоль высоты AD со скоростью, достигнутой падением вдоль EA; найти линию, которую тело может описать с равномерной скоростью, а именно такой, которую оно достигло в D, за то же время, за которое оно описало высоту AD.

Решение. Пусть искомый путь будет z. Так как путь равен произведению времени на скорость и так как скорость равна DM, а время равно $\frac{QT}{CE}$ (§§ 51, 53, 55), то $z = \frac{DM \cdot QT}{CE}$, что и требовалось найти.

Следствие I

§ 59. Итак, если тело будет опускаться из E без начальной скорости, то путь, который может быть описан с равномерной скоростью, достигнутой телом в D, за то же время, за которое оно опустилось вдоль ED, будет равен $\frac{DM \cdot DQ}{CE}$.

Следствие II

§ 60. Пусть точка D совпадает со средней точкой K линии EC. Тогда $EK = \frac{a}{2}$, и оказывается, что $DM = a$, а $DQ = \frac{a}{2} + \frac{1}{4}$ окружности, диаметр которой равен a. Пусть отношение диаметра к окружности будет $q:p$. Тогда четвертая часть окружности будет равна $\frac{ap}{4q}$. Таким образом, $z = \frac{a}{2} + \frac{ap}{4q}$, т. е. путь равен аппликате циклоиды в центре K. Подставив вместо $q:p$ $7:22$, получим $z = \frac{a}{2} + \frac{11a}{14} = \frac{9a}{7}$.

IV. Положим, что **центральная сила вообще пропорциональна какой-либо функции расстояний от центра.**

Предложение V

§ 61. Пусть центр сил будет C и сила притяжения на любом расстоянии CA от центра будет пропорциональна аппликате AH кривой FHQ (рис. 12). Пусть тело падает из E, не имея в E никакой скорости. Проведя аппликату EF, построим над E кривую EBM так, чтобы квадрат ее любой аппликаты AB был пропорционален соответствующей площади $EAHF$; аппликаты AB этой кривой EBM выразят скорости падающего тела в A.

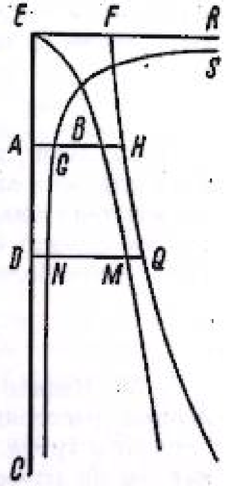


Рис. 12.

Доказательство. Обозначив скорость через c, центральную силу через v и высоту $EA = x$; согласно § 9, получим $cdc = vdx$. Итак, $\frac{cc}{2} = \int vdx$. Но здесь $AH = v$. Следовательно, интеграл $\int vdx = EAHF = \frac{cc}{2}$ и пропорционален квадрату линии AB (по предположению). Следовательно, cc пропорционально AB^2, откуда и скорость тела, достигающего A, будет пропорциональна аппликате AB, что и требовалось доказать.

Следствие I

§ 62. Время спуска с высоты EA равно $\int \frac{dx}{c}$. Поскольку $AB = c$, построим такую кривую SGN, чтобы, проведя аппликаты AG, мы получали неизменно постоянный прямоугольник, образуемый соответствующими аппликатами BA и GA, который обозначим через A.* Итак, аппликата $AG = \frac{A}{c}$, т. е. пропорциональна $\frac{1}{c}$. Площадь $EAGSR$ будет равна $A\int \frac{dx}{c}$, т. е. пропорциональна $\int \frac{dx}{c}$. Таким образом, эта площадь выразит время спуска с высоты EA. Строго говоря, время будет пропорционально величине $\frac{\text{площадь } AGSRE}{A}$, поскольку она равна $\int \frac{dx}{c}$.

Следствие II

§ 63. И время, за которое проходится любая высота AD, будет пропорционально площади $ADNG$, ибо время, соответствующее высоте ED, пропорционально площади $ADNGSR$, а время спуска по EA пропорционально $EAGSR$. Следовательно, время, соответствующее AD, пропорционально разности этих площадей $ADNG$; в точности же оно будет равно величине $\frac{\text{площадь } ADNG}{A}$.

* Таким образом, произведение аппликат $BA \cdot GA = A = \text{const.}$ — Г. М.

Следствие III

§ 64. Если точка F кривой FHQ, выражающей центральные силы, совпадает с точкой E, центральная сила в E будет равна нулю. Следовательно, помещенное там, не наделенное никакой скоростью тело никогда не будет двигаться, но вечно будет пребывать там в покое, так как нет никакой силы, которая могла бы придать ему движение. Отсюда можно также понять, что тогда кривая EBM не будет в точке E нормальной к CE и, следовательно, площадь $EAGSR$ кривой времен SG, которая должна представлять время спуска вдоль EA, всегда будет бесконечно большой. Это означает, что тело никогда не придет в A.

Следствие IV

§ 65. Итак, линия скорости EBM всегда должна быть такой, чтобы ее касательная в вершине E была нормалью к прямой EA, ибо в противном случае тело никогда не сдвинется из E. Следовательно, линия EBM никак не сможет быть прямой или такой, которая образует с EA острый угол, и тем более сама линия AE не сможет быть касательной к кривой.

Примечание

§ 66. Задачи, относящиеся к нахождению скоростей, времен и пройденных расстояний, могут быть решены при помощи этих кривых без большого труда. Очень многие задачи могут быть решены в общем виде, как бы ни начертить линию FHQ; некоторые же — не в общем виде, но при любой подстановке произвольной известной кривой вместо общей кривой FHQ. Примеры задач последнего рода таковы: по данному отношению скоростей опускающегося тела в точках A и D или по данному отношению протекающих времен, за которые тело доходит до точек A и D, найти точку начала спуска E; эти задачи не могут быть решены геометрически в общем виде, но, если для кривой FHQ будет взято уравнение, решение оказывается легким.

Следствие V

§ 67. Возвратится ли тело назад, после того как дойдет до центра, или будет продвигаться по ту сторону центра, — это станет ясно из положения линии SGN или EBM. Ибо, если эта кривая будет иметь части по ту сторону центра C, тело будет также двигаться по ту сторону центра; в противном же случае тело возвратится в сторону, из которой оно пришло.

Задача XI

§ 68. Тело падает из A вдоль AD со скоростью, достигаемой падением по EA; найти длину линии, которую тело может описать с равномерной скоростью, а именно с той, которую оно достигло в D, за то же время, за которое оно падает из A в D.

Решение. Пусть искомая линия будет z. Так как путь равен произведению из скорости на время, то $z=\frac{DM\cdot ADNG}{A}$ (§ 63). Но A равно постоянному прямоугольнику соответствующих ординат, т. е. прямоугольнику BAG или MDN. Итак, положим $DM\cdot DN$ вместо A. Тогда $z=\frac{ADNG}{DN}$, что и требовалось найти.

Следствие I

§ 69. Пусть тело падает из E, т. е. без начальной скорости. Тогда $z=\frac{EDNSR}{DN}$.

Примечание

§ 70. До сих пор центральная сила рассматривалась в самом общем виде как пропорциональная аппликатам произвольной кривой. Положим теперь, чтобы рассмотреть дело более конкретно, что центральная сила обратно пропорциональна какой-либо степени расстояний от центра, показатель которой m. И это предположение применим к предшествующим общим выводам.

Предложение VI

§ 71. Пусть в этом предположении тело опускается к центру C и дойдет до D; пусть началом спуска служит A, где скорость тела равна b. Обозначив $AC=a$, скорость в D через c, $CD=y$, получим $ccy^{m-1}=a^{m+1}=bby^{m-1}-aay^{m-1}$.

Доказательство. Пусть $AD=a-y=x$. Тогда $y=a-x$. Имеем $cdc=vdx$ (§ 9). Но центральная сила v пропорциональна $\frac{1}{(a-x)^m}$. Следовательно, $cdc=\frac{dx}{(a-x)^m}$, и, произведя интегрирование, получим

$$\frac{cc}{2}=\frac{1}{(m-1)(a-x)^{m-1}}+\mathrm{const}$$

или, сохраняя однородность,

$$cc=\frac{a^{m+1}}{(a-x)^{m-1}}+\mathrm{const}.$$

Для нахождения прибавляемой постоянной положим $x=0$. Тогда $cc=aa+\mathrm{const}$. Но здесь $c=b$, т. е. $cc=bb$, откуда $aa+\mathrm{const}=bb$. Итак, прибавляемая постоянная равна $bb-aa$. Отсюда

$$cc=\frac{a^{m+1}}{(a-x)^{m-1}}+bb-aa.$$

Положив вместо $a-x$ принятую величину y, получим

$$cc=\frac{a^{m+1}}{y^{m-1}}+bb-aa$$

или

$$ccy^{m-1}=a^{m+1}+bby^{m-1}-aay^{m-1},$$

что и требовалось доказать.

Следствие I

§ 72. Пусть начальная скорость тела $b=0$, или пусть тело опускается из точки E. Тогда $EC=a$. Следовательно, $ccy^{m-1}=a^{m+1}-aay^{m-1}$. Это уравнение будет уравнением кривой EBM, где $CD=y$ и $DM=c$.

Следствие II

§ 73. Отсюда видно, что если m будет числом четным, никакие части кривой EBM не будут по ту сторону центра C. Ведь тогда $m-1$ будет числом нечетным, и поэтому, если положить $-y$ вместо $+y$ в уравнении кривой EBM предыдущего параграфа, то это уравнение изменится в $-ccy^{m-1}=a^{m+1}+aay^{m-1}$. Отсюда ясно, что вследствие мнимости корней в данном уравнении эта кривая не будет иметь никакой части по ту сторону центра C. Следовательно, тело, достигнув при падении центра C, будет подниматься от центра назад по той же линии, по которой оно опускалось; так будет, если m будет числом четным, что мы обнаружили также в § 54, где вместо m мы полагали 2.

Следствие III

§ 74. Если же m будет числом нечетным, то $m-1$ будет четным. Следовательно, независимо от того, будет ли взято y положительным или отрицательным, уравнение кривой EBM не изменится, а это показывает, что эта кривая имеет по ту сторону центра C часть, подобную и равную той, которая расположена здесь по эту сторону от центра, т. е. часть, подобную и равную части EBM. Отсюда ясно, что тело, дойдя до центра C, будет двигаться по ту сторону центра с одинаковыми скоростями на равных расстояниях от центра.

Следствие IV

§ 75. Это же верно и по отношению к дробным числам. Ибо если $m-1$ будет дробью, числитель которой (предполагается, что дробь приведена к простейшей форме) — число нечетное, тело не продвинется по ту сторону от центра; если же числитель — число четное, тело пересечет центр. Вычисление здесь будет почти таким же, как и прежде; оно становится совершенно очевидным, если привести уравнение кривой EBM из § 72 к такой форме: $y^{m-1}=\frac{a^{m+1}}{aa+cc}$. Ибо пусть $m-1=\frac{p}{q}$. Тогда $y^p=\left(\frac{a^{m+1}}{aa+cc}\right)^q$. Отсюда ясно, что если p — число четное, кривая EBM будет иметь часть по ту сторону центра C; если же p — число нечетное, то кривая не будет иметь такой части.

Следствие V

§ 76. Найдем также линию времен NGS. DN равно постоянному пути A, деленному на $DM=c$,

$$cc=\frac{a^{m+1}-aay^{m-1}}{y^{m-1}}.$$

Следовательно,

$$c=\frac{\sqrt{a^{m+1}-aay^{m-1}}}{y^{\frac{m-1}{2}}}=a\sqrt{\frac{a^{m-1}-y^{m-1}}{y^{m-1}}}.$$

Таким образом, линия DN, которую я обозначу через t, будет равна

$$\frac{A}{c}=\frac{A}{a}\sqrt{\frac{y^{m-1}}{a^{m-1}-y^{m-1}}}.$$

Следовательно, площадь $DNSRE$ будет равна

$$-\frac{A}{a}\int dy\sqrt{\frac{y^{m-1}}{a^{m-1}-y^{m-1}}},$$

поскольку $dx=-dy$. Итак, время спуска по ED будет пропорционально

$$\int -dy\sqrt{\frac{y^{m-1}}{a^{m-1}-y^{m-1}}}.$$

Следствие VI

§ 77. Полученная дифференциальная формула, выражающая время, не может быть проинтегрирована ни в общем виде, ни в каком-либо предположении о m, кроме случая $m=3$, т. е. когда центр притягивает обратно пропорционально кубу расстояния, ибо в этом случае время спуска вдоль ED равно

$$\frac{1}{a}\int\frac{-ydy}{\sqrt{aa-yy}}=\frac{\sqrt{aa-yy}}{a}.$$

Таким образом, время спуска вдоль ED будет пропорционально аппликате DM в D окружности EBF, описанной из центра C радиусом $CE=a$ (рис. 9).

Предположение II. Сила сопротивления пропорциональна скорости тела, а центральная сила всюду постоянна

Предложение VII

§ 78. Пусть в соответствии с принятым предположением тело опускается из A (рис. 6) с какой-либо скоростью к бесконечно удаленному центру; когда тело подойдет к какому-либо месту D, то, обозначив $AD=x$, скорость в D через c, постоянную центральную силу через g, скорость тела, при которой сила сопротивления равна центральной силе g, через e, и функцию от x, выражающую плотность, через P, а плотность в A через A, я утверждаю, что получим

$$cdc=gdx-\frac{Pgcdx}{Ae}.$$

Доказательство. Согласно § 3, $cdc = gdx - Rdx$. Но по предположению $R:g = cP:eA$. Следовательно, $R = \frac{cgP}{eA}$. Таким образом, $cdc = gdx - \frac{gPcdx}{Ae}$, что и требовалось доказать.

Следствие I

§ 79. Итак, в это уравнение входят только две переменные величины, а именно c и x, поскольку я сравниваю силу сопротивления R с тяжестью, а P выражено через x.

Примечание

§ 80. Для того чтобы рассмотреть этот вопрос должным образом, положу сначала, что плотность среды повсюду одинакова. Затем я рассмотрю этот вопрос в общем виде.

I. Положим, что плотность среды всюду одинакова.

Предложение VIII

§ 81. Пусть тело опускается из A и дойдет до D. Оставив обозначения прежними (§ 78), получим $cdc = gdx - \frac{gcdx}{e}$.

Доказательство. Согласно § 78, имеем $cdc = gdx - \frac{Pgcdx}{Ae}$. Поскольку плотность остается неизменной, $P = A$. Подставив это в уравнение, получим $cdc = gdx - \frac{gcdx}{e}$, что и требовалось доказать.

Следствие I

§ 82. Для интегрирования этого уравнения разделим обе его части на $g - \frac{gc}{e}$. Получим $\frac{ecdc}{ge-gc} = dx$ и после интегрирования

$$\frac{ee - ec - ee \lg(e-c)}{g} = x + \text{const}.$$

Следствие II

§ 83. Пусть начальная скорость тела будет b. Положив $x = 0$, получим $c = b$, откуда

$$\frac{ee - eb - ee \lg(e-b)}{g} = \text{const}.$$

Таким образом, подставив это значение вместо прибавляемой постоянной, получим

$$\frac{ee - ec - ee \lg(e-c)}{g} = x + \frac{ee - eb - ee \lg(e-b)}{g}$$

или

$$\frac{gx}{e} = b - c + e \lg(e-b) - e \lg(e-c).$$

Следствие III

§ 84. Пусть начальная скорость тела $b = 0$. Тогда

$$\frac{gx}{e} = e \lg e - e \lg(e-c) - c.$$

Следствие IV

§ 85. Поскольку не имеет никакого значения, будут ли умножены или разделены c и e на какую-либо данную величину или нет, ибо здесь отыскивается только отношение линий c на разных высотах x, умножим и c и e на постоянную $\sqrt{\frac{g}{e}}$, чтобы удалить $\frac{g}{e}$ и таким образом не вводить g в расчеты; получим

$$x = e \lg e - e \lg(e-c) - c.$$

Следствие V

§ 86. Таким образом, если задано e, эту кривую можно будет легко построить с помощью логарифмической кривой. В самом деле, пусть тело падает вдоль линии ED, начав падение в E (рис. 13). К линии ED присоединим нормаль $EC = e$, а к EC — нормаль CS, над которой как над асимптотой построим при произвольном параметре b логарифмическую кривую HQE, проходящую через точку E. Возьмем CF равным параметру b и проведем прямую FE, к которой через точку C проведем параллельную CRG. Взяв каким-либо образом $EP = c$, проведя PQ, параллельную ED и встречающуюся с логарифмической кривой в Q, и проведя аппликату SQ, которая, будучи продолженной, если это нужно, встречается с прямой CG в R, получим $SQ = CP = e - c$. Следовательно, $CS = b \lg e - b \lg(e-c)$ и так как

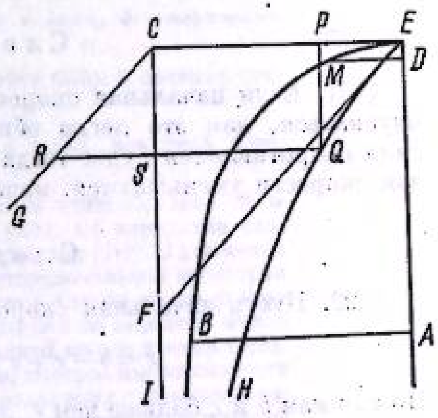


Рис. 13.

$$CF(b) : CE(e) = CS\ [b \lg e - b \lg(e-c)] : SR,$$

то $SR = e \lg e - e \lg(e-c)$. Если отсюда вычесть $EP = c$, то останется высота ED, которой будет соответствовать скорость c. Итак, если взять $PM = SR - EP$, то M будет на кривой EBM, аппликаты которой BA, MD выражают скорости падающего тела в точках A и D.

Следствие VI

§ 87. Из этого построения видно, что асимптота логарифмической кривой IF будет также асимптотой кривой скоростей EMB. Таким образом, опускающееся тело никогда не сможет достичь скорости, равной скорости e.

Следовательно, чем более разреженной или чем менее сопротивляющейся является среда, в которой падает тело, тем большей скорости может оно достигнуть, а чем большее сопротивление оказывается телу, тем меньше скорость, которой оно может достигнуть.

Следствие VII

§ 88. Итак, если мы придаем телу начальную скорость, равную скорости e или бо́льшую этой скорости, то мы никогда не сможем, как мы делали это до сих пор, рассматривать ее как достигнутую при падении с той или иной высоты. Следовательно, мы должны указать другой путь выявления признаков этого движения.

Следствие VIII

§ 89. Что касается первого случая, при котором начальная скорость полагается равной скорости e, т. е. сила сопротивления полагается равной центральной силе, то ясно, что тогда движение тела будет равномерным, ибо тело будет падать неускоренным движением.

Следствие IX

§ 90. Таким образом, отсюда выявляется способ нахождения скорости e в среде как угодно сопротивляющейся, хотя это и осуществляется путем подбора. А именно, пусть падающему телу будет придана такая начальная скорость, чтобы движение тела было равномерным; скорость тела тогда будет скоростью e.

Следствие X

§ 91. Если начальная скорость тела будет больше чем e, тело будет опускаться, как это легко обнаружить, замедленным движением, ибо сила сопротивления будет тогда больше центральной силы. Каким образом скорости уменьшаются, можно выявить следующим путем.

Следствие XI

§ 92. Пусть начальная скорость тела будет b. Тогда (§§ 83, 85)

$$x = b - c + e \lg(e - b) - e \lg(e - c).$$

Но так как b и c больше чем e, логарифмы величин $e-b$ и $e-c$ будут мнимыми (разумеется, каждый в отдельности), но оба вместе составят действительную величину, ибо

$$\lg(e - b) - \lg(e - c) = \lg(b - e) - \lg(c - e).$$

Таким образом, получим

$$x = b - c + e \lg(b - e) - e \lg(c - e).$$

МЕХАНИКА, ИЛИ НАУКА О ДВИЖЕНИИ

СОДЕРЖАНИЕ

ВВЕДЕНИЕ

§ 1. *Движение*, которым занимается механика, *есть перемена положений*; оно свойственно *телам*, и поэтому, когда они меняют положение, мы говорим, что они *движутся*. Положение же, собственно, есть отношение тела к другим телам. Поэтому движение представляет собой лишь нечто относительное, ибо оно совершается по отношению к другим телам. Итак, если бы существовало только одно тело, то о нем нельзя было бы говорить ни как о движущемся, ни как о находящемся в покое, поскольку сама идея положения при отсутствии других тел не могла бы возникнуть.

Однако, поскольку в высшей степени сложно постичь умом бесконечность пространства, объемлющего теперь мироздание, мы в своем воображении создаем некие телесные пределы, и те тела, которые по отношению к ним представляются меняющими свое положение, мы называем движущимися, а те тела, которые сохраняют одно и то же положение, мы называем *покоящимися*. Итак, мы представляем себе некие неизменные места, к которым мы относим положение и его изменение. Поэтому мы можем говорить об одном из двух тел, что оно покоится, а о другом, что оно движется. Ведь если бы, кроме этих двух тел, не существовало никаких других, то в тех случаях, когда они меняют свое положение одно относительно другого, в качестве движущегося можно было бы рассматривать как одно, так и другое тело.

§ 2. Когда тело движется, оно описывает в пространстве некоторый *путь*. Поскольку путь может быть измерен, мы соотносим его с известными величинами и при их помощи проводим измерение; так мы говорим, что движущееся тело описало путь во столько-то футов.

§ 3. Чтобы отчетливее понять то, что заключается в движении, мы присоединяем к описанному пути *время*, в течение которого этот путь описан, несмотря на то что идею времени мы извлекли из самого движения. Ведь если бы не было никакого движения, то и время было бы устранено. Время мы измеряем исходя из известных промежутков времени: минут, часов, дней и т. д.

§ 4. О теле, которое в равные промежутки времени проходит равные пути, мы говорим, что оно движется *равномерно*, и его движение называем *равномерным*. Итак, при равномерном движении описанные пути пропорциональны временам; иначе говоря, эти пути относятся друг к другу так же, как времена, в которые они были пройдены. *Неравномерное* же движение есть такое, при котором тело в равные промежутки времени проходит неравные пути.

§ 5. Если из двух тел, движущихся равномерно, одно тело проходит за то же время больший путь, чем другое, то мы говорим, что оно движется быстрее. Если же оно проходит за то же время в два, три и т. д.

раз больший путь, то оно движется в два или три раза быстрее. Из этого можно понять, что означает абстрактное понятие *скорость*; ибо о теле, которое проходит за одинаковое время двойной путь, мы говорим, что оно имеет двойную скорость. Скорость измеряется на основе скоростей известных движений или из величины пути, описанного за данное время.

§ 6. Итак, скорости двух тел, движущихся равномерно, пропорциональны путям, описанным ими за одно и то же время. Пусть одно из них пробежит путь S за то время, пока другое проходит путь s; скорость первого будет относиться к скорости последнего как S к s. Если же тело A за время T проходит путь S, а другое тело B за время t проходит путь s, то отношение скорости первого тела C к скорости второго c будет слагаться из прямого отношения путей S к s и обратного отношения времен T к t. Так как тело B за время t пробегает путь s, то оно пробежит за время T путь $\frac{Ts}{t}$ (§ 4). Тело же A за то же время T проходит путь S. По этой причине, так как скорости относятся как пути, описанные за одинаковое время, то скорость тела A будет относиться к скорости тела B, т. е. C будет относиться к c так, как S к $\frac{Ts}{t}$. Отсюда

$$C:c=\frac{S}{T}:\frac{s}{t}.$$

§ 7. Из этой теоремы вытекают другие. Несомненно, что пути, описанные двумя телами, находятся в сложном отношении скоростей и времен. Так как $C:c=\frac{S}{T}:\frac{s}{t}$, то $S:s=CT:ct$. Отсюда

$$T:t=\frac{S}{C}:\frac{s}{c};$$

иначе говоря, времена находятся между собой в отношении, которое слагается из прямого отношения путей и обратного отношения скоростей.

§ 8. Абсолютно же скорости измеряются обычно из величины пути, описанного за данное время. Так, говорят, что тело движется с такой скоростью, с какой оно могло бы за некое определенное время, например за время одной минуты, пройти путь во столько-то футов.

§ 9. То, что было сказано о движении, относится, собственно, к бесконечно малым телам или точкам. Ибо не так легко сказать, каково движение тел, обладающих величиной; ведь различные их части могут иметь различную скорость. Движение тел, обладающих величиной, определяется из движения точек путем исследования движения каждой частицы тела.

§ 10. Рассматривая движение точки, кроме величины пути, времени и скорости, дóлжно принять во внимание и то, что представляет собой *описанный путь*. Он является линией, которая может быть либо прямой, либо кривой. Для полного познания движения эта линия в каждом случае должна быть определена с помощью уравнений, которыми обычно выражаются линии.

§ 11. Далее, если движение неравномерно и если тело, либо точка, что следует сначала установить, в разных местах имеет разные скорости, то необходимо определить, какова скорость в каждом месте пройденного пути. Эти скорости могут быть выражены линиями, которые либо выражают только отношения скоростей, либо определяют скорости абсолютно. Последнее достигается следующим образом: линия, представляющая

скорость, повсюду берется такой длины, чтобы с той скоростью, которую она обозначает, она могла быть пройдена за некоторое определенное время, например за одну секунду. Ниже встретятся другие способы выражения скоростей.

§ 12. Пусть описанный путь будет кривой линией AM, отнесенной к оси AP (рис. 1). Для того чтобы полностью представить движение, отнесем к этой же оси другую кривую BN, любая аппликата которой PN пусть будет равна пути, который тело могло бы пробежать за одну секунду со скоростью, соответствующей точке M. Итак, если известна эта кривая, то становится известной скорость тела в отдельных точках кривой AM. Кривая BN называется *шкалой скоростей*.

§ 13. Из этого мы находим теперь все, что нужно установить о движении, для того чтобы отыскать время, за которое описывается часть кривой AM. Обозначим общую абсциссу AP через x, аппликату PM через y и аппликату PN, выражающую скорость в точке M, через v. При продвижении в ближайшее положение получим $Ap=x+dx$, $pm=y+dy$ и $pn=v+dv$. Теперь, поскольку pn отличается от PN во всяком случае лишь на бесконечно малую величину, можно допустить, что элемент Mm пробегается равномерным движением, а именно со скоростью PN. Поскольку линия PN была бы пройдена с этой скоростью за одну секунду, элемент Mm будет пройден с этой же скоростью за время $\frac{Mm}{PN}$ секунд. Но $Mm=\sqrt{dx^2+dy^2}$. Поэтому время, соответствующее элементу Mm, равно

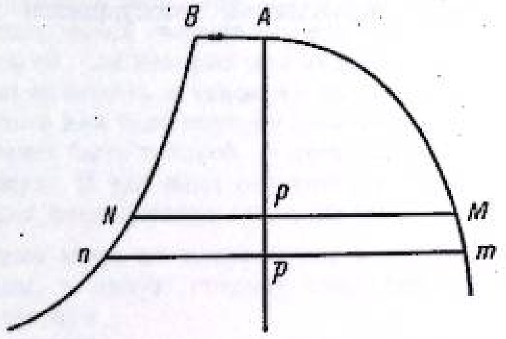


Рис. 1.

$$\frac{\sqrt{dx^2+dy^2}}{v} \text{ секунд.}$$

Интеграл этого выражения покажет, за сколько секунд может быть пройдена вся кривая AM.

§ 14. Вышесказанное относится к тем случаям, когда путь, описанный точкой, целиком расположен в одной плоскости. В противном случае, т. е. если этот путь находится не в одной плоскости, должна быть принята некая определенная плоскость, на которую наносится проекция пути. Затем и природу этой проекции и расстояние каждой точки пути от соответствующей точки пути на проекции следует определять, как и обычно, с помощью уравнения; к этому надо прибавить скорость точки в каждом месте, которую подобным же образом следует вводить в уравнение. Этим определяется все, что относится к движению.

§ 15. От движения точки мы перейдем к движениям линий, поверхностей и тел, причем рассматривать их будем трояким образом. Сначала мы будем рассматривать их как твердые и не меняющие свою форму, затем мы будем исследовать их движения, рассматривая их как гибкие, т. е. меняющие свою форму, но не величину. В-третьих, мы будем исследовать их движение, принимая их за растяжимые, т. е. меняющие и форму и величину. При этом прежде всего следует надлежащим образом определить с помощью уравнений путь, положение движущегося тела и форму в каждом месте, а затем скорость каждой точки в каждом месте.

§ 16. Вышесказанное относится к движению, которое рассматривается само по себе. *Механика* же рассматривает преимущественно производство и изменение движения. Причинами, производящими и изменяющими движение, являются *силы*, о которых сказано в *статике*. Воздействуя на тела, эти силы, если устраняются препятствия, мешающие их действию, либо придают телам движение, либо изменяют ранее воспринятое движение. Движения тел могут быть также произведены и изменены другими встречными телами, но это действие тел может быть опять-таки выведено из сил, как это будет ясно из дальнейшего. Ведь в движущихся телах имеется некоторая сила, которой они могут воздействовать на другие тела, встречающиеся на их пути.

По этой причине мы делим этот трактат на две части; в первой части будет говориться о движении, производимом силами, а во второй — о движении, порождаемом движущимися телами.

ЧАСТЬ ПЕРВАЯ. О ДВИЖЕНИИ, ПРОИЗВОДИМОМ СИЛАМИ

§ 2. . . Поскольку равнодействующая сила, приводящая к равновесию, производит то же действие, становится очевидным, что она воздействует на тело так же, как многие силы, для которых она является равнодействующей. Поэтому она будет производить и такое же движение. Может, однако, случиться, что, после того как тело покинет свое место, сила, бывшая равнодействующей, перестанет быть таковой. В этом случае надо будет вновь найти равнодействующую. И так надо поступать в каждом отдельном месте, которое тело будет последовательно занимать.

§ 3. Относительно сил необходимо знать их направление и величину. Установив направление, мы узнаем, в какую сторону сила стремится продвинуть тело. Нет сомнения, что при устранении всех помех сила продвинет тело вдоль своего направления. О величине сил сказано в статике. О двух силах A и B говорят, что они находятся между собой в отношении m к n, если точка O пребывает в состоянии покоя в том случае, когда сила A приложена к точке O в направлении OP n раз, а сила B — к этой же точке O в противоположном направлении OQ m раз (рис. 2). Каким образом различаются между собой действия неравных сил, будет исследовано в дальнейшем.

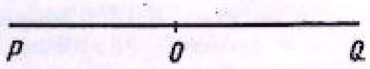


Рис. 2.

§ 4. Сила либо постоянно направлена к одной и той же точке, либо направление ее меняется сообразно с различными местами, которые занимает тело. Величина силы также либо всегда одинакова, либо переменна. И эта изменчивость зависит или от места, занимаемого телом, или от его скорости. На эти различия сил надо непременно обратить внимание, так как в дальнейшем они послужат основой для подразделения этого сочинения на отдельные части. Если действие сил не зависит от скорости тела, испытывающего это действие, то такие силы называются *абсолютными*, а те силы, которые воздействуют по-разному, в зависимости от того, с какой скоростью движется тело, называются *относительными*.

§ 5. Допустим, что действие силы зависит от скорости тела, и найдем равнодействующую ей абсолютную силу, т. е. такую, которая так же действовала бы на покоящееся тело, как относительная сила действует на движущееся тело. Подставив вместо относительной силы найденную абсолютную, найдем действие силы на тело.

§ 6. Установив действие абсолютной силы на покоящееся тело, следующим образом найдем действие ее на движущееся тело. Пусть некоторая сила может передвинуть покоящееся тело A за бесконечно малый промежуток времени из точки A в точку P (рис. 3). Пусть теперь тело A имеет скорость z по направлению AB. Спрашивается, каким образом та же сила нарушит движение тела за этот же промежуточек времени.

Поскольку допускается, что сила действует на движущееся тело так же, как на покоящееся, представим себе, что тело A утратило свое движение или что оно помещено на плоскости, которая имеет движение, равное движению тела, но по направлению противоположное ему. Итак, тело будет перенесено в точку P. Если бы движение было восстановлено, то тело тем временем перешло бы ранее воспринятым движением в точку B, вследствие чего по прошествии этого промежуточка времени тело находилось бы не в P, а в M, при условии, что прямая PM параллельна и равна прямой AB. Поскольку же плоскость рассматривалась движущейся в противоположную сторону, то для того чтобы тело было вновь помещено на должное место, надо придать плоскости движение, противоположное тому, которое, как мы полагали, она имела прежде. Таким образом, точка P будет перенесена в M. Поэтому следует считать, что тело A тем временем описало диагональ AM и, следовательно, под действием силы должно было отклониться от своей дорожки на угол BAM; скорость, которую оно при этом получило, относится к прежней скорости, как AM к AB.

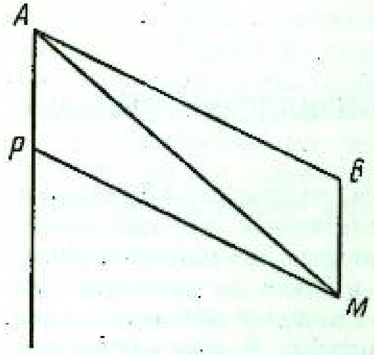


Рис. 3.

§ 7. Эту первую часть правильнее всего разделить сообразно тем объектам, на которые действуют силы. Сначала мы положим, что объектом сил является точка, затем — линия, поверхность и тело; при этом надо учесть различные состояния линий, поверхностей и тел, а именно: являются ли они твердыми, гибкими или растяжимыми. Обо всем этом следует говорить в первой части, а отдельные объекты рассматривать двояко; сначала мы будем рассматривать их как свободные объекты, которые могут двигаться в любом направлении, затем — как такие объекты, которые не могут двигаться в любом направлении, но вынуждены продвигаться по пути, который предопределен либо полностью, либо, по крайней мере, отчасти.

РАЗДЕЛ I. *О ДВИЖЕНИИ, ПРОИЗВОДИМОМ СИЛАМИ, ДЕЙСТВУЮЩИМИ НА СВОБОДНУЮ ТОЧКУ*

§ 8. Здесь должно быть показано, какое движение порождается силами, действующими на свободную точку. В этой связи возникает четыре вопроса. Во-первых: какому действию подвергается одна и та же точка от одной и той же силы при различных скоростях, которые может иметь тело? Во-вторых: в каком отношении находятся действия различных сил на одну и ту же точку? В-третьих: каковы действия либо одной и той же силы, либо различных сил на различные точки? И в-четвертых: каковы действия, порождаемые за различные промежуточки времени? Ведь точки, которые мы здесь рассматриваем, хотя и являются бесконечно малыми, но, тем не менее, могут иметь различную величину, так что одна из них может быть в два или в три раза больше другой, либо находиться к ней в каком-либо другом отношении.

§ 9. Что касается первого вопроса, то о нем уже говорилось в § 6. Решение этого вопроса зависит от того, какова природа действующей силы: является ли сила абсолютной или нет; иначе говоря, действует ли сила на тело одинаково, независимо от скорости движения тела, или действие силы различно при различных скоростях. В этом последнем случае поставим вместо. . .

. . . .

§ 16. Пусть к двум произвольным неравным тельцам A и B будут приложены какие-либо силы: к первому — AP, ко второму — BQ (рис. 4). Требуется найти отношение путей Aa и Bb, которые проходятся этими тельцами за одно и то же время. Представим себе, что к точке B приложена сила Bq, которая относится к силе AP, как точка B к A. Как явствует из предыдущего параграфа, точка B силою Bq передвинется в β, так что $B\beta = Aa$. Далее, из § 14 получаем, что $B\beta$, результат действия силы Bq, относится к Bb, результату действия силы BQ, как Bq к BQ. А поскольку $B\beta = Aa$, то $Aa : Bb = Bq : BQ$. Но $Bq = (B \cdot AP) : A$. Таким образом,

$$Aa : Bb = (B \cdot AP) : (A \cdot BQ) = \frac{AP}{A} : \frac{BQ}{B}.$$

Следовательно, пути, проходимые двумя какими-либо тельцами под действием каких-либо сил в равные времена, находятся в прямом отношении сил и обратном отношении телец.

§ 17. Хотя скорость тельца A, в то время как оно под действием силы AB описывает прямую AB (рис. 5), непрерывно возрастает, и нельзя выделить никакой сколь угодно малый элемент Pp, который бы A описывало равномерным движением, тем не менее движение на протяжении бесконечно малых отрезков путей рассматривается как равномерное, так как приращение скорости является обычно также бесконечно малым. По этой причине силы рассматриваются не как непрерывно действующие, но как придающие телу вдруг, в каждый момент, когда тело входит на отдельный элемент пути, некоторую долю скорости.

§ 18. Положим, что силы являются абсолютными, т. е. такими, которые оказывают на движущееся тело такое же действие, как и на покоящееся. Благодаря такого рода силе, тело в равные времена, кроме пути, который оно должно было бы пройти ранее воспринятым движением, проходит дополнительно еще некоторый определенный путь. Пусть тело A, приведенное в движение силой AB, достигнет точки P, где оно имеет

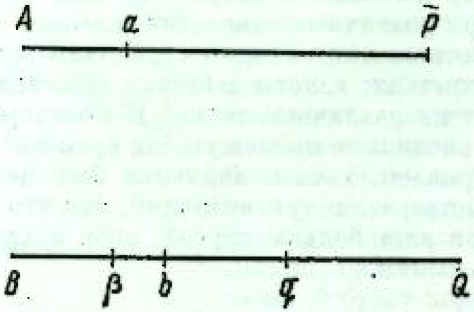


Рис. 4.

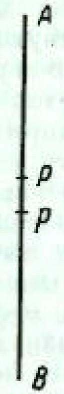


Рис. 5.

скорость, с которой оно могло бы в данный промежуточек времени достигнуть p (рис. 6). Поскольку же сила все еще действует, тело опишет, сверх того, отрезочек пути $p\pi$, который для отдельных промежуточков времени, равных данному, одинаков. Так как при равномерном движении пути пропорциональны скоростям, то в нашем случае добавляющиеся в каждый промежуточек времени скорости, если времена равны между собой, одинаковы. Поэтому скорость, добавляющаяся за двойной промежуточек времени, является двойной, и вообще приращения скоростей пропорциональны временам. Здесь мы полагаем, что тело движется в направлении силы и сила повсюду постоянна и абсолютна.

§ 19. Пусть имеются две точки A и B, и пусть к ним приложены силы AP и BQ, которые могли бы продвинуть эти точки за промежуточек времени dt в a и b (рис. 7). Если A и B имеют некоторые скорости соответственно вдоль AP и BQ, то приращения скоростей будут относиться друг к другу, как Aa и Bb, т. е. как $\frac{AP}{A}:\frac{BQ}{B}$; иначе говоря, приращение скорости точки A, достигаемое за промежуточек времени dt, пропорционально $\frac{AP}{A}$. Далее, если времена не равны между собой, то, поскольку в этом случае приращения скоростей пропорциональны временам, мы получим следующий закон: *приращение скорости прямо пропорционально промежуточку времени и силе и обратно пропорционально самому телу.*

§ 20. Итак, тело, уже движущееся вдоль направления AB, получит от силы AB за данный промежуточек времени dt некоторое определенное

приращение скорости, которое всегда одинаково, какова бы ни была скорость тела A. Отсюда можно также заключить, что в случае, если эта скорость отрицательна, она на столько же уменьшится. Ибо, если бы тело имело скорость вдоль AC (рис. 8), т. е. она была бы отрицательна, скорость тела благодаря силе уменьшилась бы, причем настолько, насколько она раньше увеличилась.

§ 21. Итак, мы видели, какому воздействию подвергается тело, либо уже движущееся, либо покоящееся, от силы, направление которой совпадает с направлением движения, если тело движется; а именно, направление движения остается неизменным, изменяется же только скорость. Теперь надо исследовать, каким образом будет нарушено движение в случае, если движение тела и сила, действующая на тело, имеют разные на-

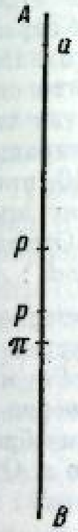


Рис. 6.

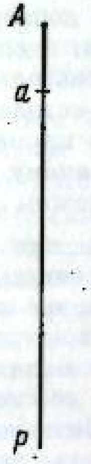


Рис. 7.

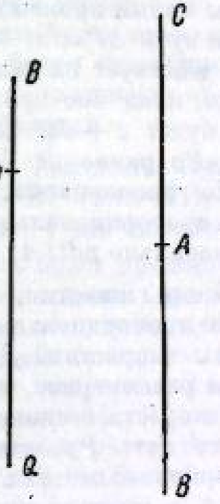


Рис. 8.

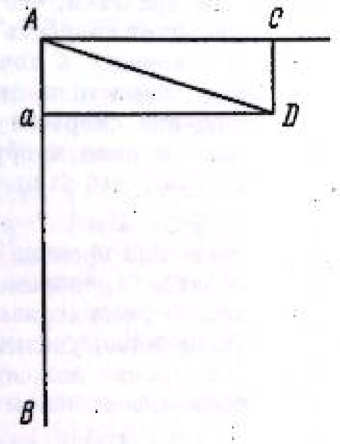


Рис. 9.

правления. Для этого будет полезным в первую очередь рассмотреть тот случай, в котором направление силы перпендикулярно к направлению движения. Ведь к этому случаю в соединении с предыдущим, при котором направления совпадают, сводятся остальные случаи.

§ 22. Пусть тело A движется в направлении AC со скоростью, с которой это тело за промежуточек времени dt пришло бы из A в C (рис. 9). Пусть тем временем на тело действует сила AB, образующая прямой угол с AC. Пусть эта сила такова, что она переместила бы тело A, если бы оно находилось в покое, за промежуточек времени dt в точку a. Сила придаст телу бесконечно малую степень скорости, так как действие силы длится исчезающе малое время dt. Мы же полагаем, что скорость движения тела по прямой AC является конечной. Поэтому AC будет в бесконечное число раз больше, чем Aa. Но, согласно § 6, тело A под действием силы AB опишет. . . . .

§ 26. Когда направление силы постоянно совпадает с направлением движения тела, тело опишет прямую линию; об этом случае будет говориться в первую очередь. Если эти направления не всегда совпадают, тело опишет кривую линию, причем надлежит исследовать, какова эта линия.

Различие сил и их число принимаются за основу при делении этого сочинения на части. Ведь силы могут быть либо абсолютными, либо относительными, они могут быть направлены к одной неизменной или к переменной точке. Исходя из этих различий произведем деление на главы.

Глава I. О ПРЯМОЛИНЕЙНОМ ДВИЖЕНИИ ТОЧКИ, ВЛЕКОМОЙ АБСОЛЮТНЫМИ СИЛАМИ

§ 27. Если тельце, покоящееся в A, находится под действием силы AB, то оно придет в движение вдоль направления AB (рис. 10). Найдем, какую скорость будет иметь тельце в каждой точке P. Пусть сила будет *единообразной*, т. е. оказывает одинаковое воздействие на тело, где бы оно ни находилось. Обозначим это воздействие буквой p, само же тельце или его массу — буквой A. Пусть тело придет в какое-либо место P, где будет иметь скорость z, и за бесконечно малый промежуточек времени dt перейдет в p. Пусть, далее, описанный путь $AP=x$; его элемент $Pp=dx$. Поскольку мы полагаем, что сила действует на тельце непрерывно, то она увеличит скорость тельца, пока оно проходит вдоль Pp, так что его скорость в точке p будет $z+dz$. Следовательно, приращение скорости на отрезке Pp равно dz. Но, согласно § 19, приращение скорости прямо пропорционально промежуточку времени и силе и обратно пропорционально самому телу. Отсюда следует, что dz пропорционально $pdt:A$. Положим $dz=mpdt:A$.

Рис. 10.

§ 28. Из § 7 «Введения» известно, что при равномерном движении времена прямо пропорциональны описанным путям и обратно пропорциональны скоростям. Движение вдоль Pp мы можем рассматривать как равномерное, ибо хотя это движение и ускоренное, увеличение скорости бесконечно мало. Таким образом, можно положить, что путь Pp описан со скоростью z. Отсюда имеем, что dt пропорционально $dx:z$. Положим $dt=ndx:z$.

§ 29. Подставив эту величину вместо dt, получим уравнение $dz=mnpdx:Az$ или $Azdz=mnpdx$, которое после интегрирования дает $Azz=2mnpx$. В прибавлении постоянной нет необходимости, так как z исчезает при $x=0$. А это показывает, что в точке A нет никакой скорости, как мы вначале и положили. Итак

$$z=\sqrt{\frac{2mnpx}{A}},$$

либо, поскольку $\frac{2mnp}{A}$ есть постоянная, скорости относятся друг к другу, как корни квадратные из пройденных путей.

§ 30. Именно таким случаем является падение тел в наших областях Земли. Ибо все тела как бы влекомы силами вниз, а при устранении препятствий они действительно падают вниз по прямой. Кроме того, это воздействие повсюду ощущается одинаковым, и сила, следовательно, является единообразной. Итак, можно заключить, что падение тяжелых тел совершается таким образом, как мы рассмотрели, и что скорости при падении тел прямо пропорциональны корням квадратным из путей, описанных при падении.

§ 31. Опыт показывает, что усилия, с которыми тела стремятся вниз, всегда пропорциональны самим телам. Если падает несколько неравных тел, то, поскольку у всех тел отношение силы p к массе A одинаково, становится очевидным, что отдельные тела, падающие с одной и той же высоты x, получают равные скорости. Причиной того, что тела, обладающие различным удельным весом, падая с одинаковой высоты, получают различные скорости, является воздух. Уже давно было замечено, что в пустоте золото и пух падают одинаково.

§ 32. Поскольку мы легко разобрались с величиной скорости тел, падающих с какой-либо высоты, и впоследствии будет яснее определено, каковы эти скорости, мы будем отныне при измерении всех скоростей исходить из высот, падая с которых тела достигают скоростей, равных этим скоростям. Мы будем говорить, что тело движется с такой скоростью, которая может быть достигнута при падении тяжелого тела с какой-либо определенной высоты. Таким образом, вместо скорости будет введена определенная линия, что представляется более удобным.

§ 33. Кроме того, чтобы можно было сравнивать все движения с движением падающих тел, мы будем оценивать любые силы исходя из силы тяжести. А именно, мы будем постоянно использовать отношение силы, действующей на тело, к силе тяжести этого же тела, если бы оно находилось в наших областях.

§ 34. Для того чтобы изложение стало более ясным, пусть тело A, описавшее путь AP (рис. 11), имеет в точке P такую скорость, какую достигает у нас тяжелое тело при падении с высоты v. Сама его скорость будет пропорциональна $\sqrt{v}$, поскольку скорости находятся в отношении корней квадратных из высот, при падении с которых они достигаются. Пусть теперь тело подвергнется в точке P действию силы, направленной вдоль AP, которая относится к силе тяжести этого же тела A, если оно находится вблизи Земли, как $p:1$. Пусть тело из точки P пройдет вдоль элемента Pp, который равен dx.

Совершенно ясно, что если бы сила, приводящая в движение тело, была равна силе тяжести, т. е. если бы было $p=1$, скорость тела в точке p была бы такой, какая достигается при падении с высоты $v+dx$. Таким образом, скорость тела была бы пропорциональна $\sqrt{v+dx}$. Поэтому приращение скорости было бы равно $dx:2\sqrt{v}$. Это имело бы место, если бы сила была равна силе тяжести, т. е. 1. Теперь рассмотрим, что производит сама сила p. Пусть высота, порождающая скорость, которую тело будет иметь в точке p под действием силы p, есть $v+dv$; приращение скорости будет пропорционально $dv:2\sqrt{v}$. Но приращения скоростей пропорциональны действующим силам, если промежуточек времени и тело остаются неизменными, как это имеет место в нашем случае. Следовательно, $\frac{dx}{2\sqrt{v}}:\frac{dv}{2\sqrt{v}}=1:p$, и отсюда $dv=pdx$.

Рис. 11.

§ 35. Таким образом, высота, порождающая скорость, равную той, какую наше тело будет иметь в точке p, есть $v+pdx$, так как скорости в точке P соответствует высота v. Итак, приращение высоты, порождающей скорость в точке P, за время прохождения тела под действием силы p вдоль элемента $Pp=dx$ равно pdx; иначе говоря, это приращение высоты равно произведению силы на пройденный элемент, если силу тяжести обозначить через единицу. Таким образом, мы получим абсолютную и определенную меру скоростей, откуда будет выведена и соответствующая мера времени.

§ 36. Обратимся к изложенному вначале случаю, когда сила была единообразной, и рассмотрим его следующим образом. Поскольку $dv = pdx$, то в силу постоянства p получим $v = px$, где $AP = x$, и предполагается, что тело в точке A находилось в состоянии покоя. Итак, сама скорость пропорциональна $\sqrt{px}$. Поскольку же скорость может быть определена только относительно, исходя из пути, пройденного за данное время, и, следовательно, не заключает в себе абсолютной величины, то мы положим, что скорость всегда равна корню квадратному из высоты, порождающей эту скорость. Итак, скорость здесь будет равна $\sqrt{v} = \sqrt{px}$.

§ 37. Промежуточек времени, соответствующий элементу Pp, пропорционален этому элементу, отнесенному к скорости, а именно пропорционален $dx : \sqrt{px}$. Положим, что он равен $ndx : \sqrt{px}$, и найдем значение буквы n, так чтобы, пользуясь некоторой данной известной мерой, мы смогли узнать число секунд, содержащихся в найденном промежутке времени. Величина x и другие длины будут всегда выражаться в тысячных частях рейнского фута.


Рис. 12.

Следует отметить, что n является числом постоянным и величина его, найденная для одного случая, остается верной для всех других случаев. Разыщем эту величину из рассмотрения падения тяжелых тел — случая, нам наиболее известного.

§ 38. Итак, поскольку элемент равен $ndx : \sqrt{px}$, время, соответствующее пути AP, будет равно $2n\sqrt{x : p}$, причем это выражение должно указывать число секунд, если x измерить в тысячных частях рейнского фута. Пусть сила p будет равна силе тяжести, т. е. 1. Время падения вдоль AP будет равно $2n\sqrt{x}$. Но путем опытов установлено, что тяжесть, падающая вниз по прямой, за секунду проходит высоту в 15 625 тысячных частей рейнского фута.* Поэтому выражение $2n\sqrt{x}$, если вместо x подставить 15 625, должно стать равным 1, чтобы оно обозначало одну секунду. Следовательно, $n = {}^1/_{250}$.

§ 39. Пусть каждый элемент или дифференциал времени, состоящий из элемента пути, деленного на корень квадратный из высоты, порождающей скорость, будет умножен на $^1/_{250}$ или разделен на 250. После этого интеграл покажет, во сколько секунд был пройден путь; пройденный же путь или зависящие от него линии следует обозначать, как уже было указано, в скрупулах рейнского фута.

§ 40. Соберем все то, что было приведено до сих пор о падении. Пусть тело A под действием силы p опишет путь x. Положим, что тело выйдет из состояния покоя в точке A и что стремление тела к точке P (рис. 12) относится к стремлению этого же тела вниз, если оно находится вблизи Земли, как $p : 1$. Таким образом мы будем впредь измерять все силы. Найдено, что в этих условиях высота, порождающая у нас скорость, равную той, какую это тело имеет в точке P, равна px. И время, за которое тело проходит из A в P, равно $^1/_{125}\sqrt{x : p}$ секунд.

§ 41. Для того чтобы стало известным, какова скорость, достигаемая при падении, мы рассмотрим путь, который может пробежать тело с такой скоростью за данное время. Возьмем скорость, порождаемую высотой px,

* Рейнский фут равен 0.31384 м. Следовательно, приведенное значение высоты соответствует ускорению силы тяжести $g = 9.808$ м/сек.^{2} — *Г. М.*

и время в одну секунду. Пусть путь, который тело описывает за это время, будет равен S. Из § 39 известно, что $\frac{S}{250\sqrt{px}}$ выражает время в секундах. Итак, $\frac{S}{250\sqrt{px}} = 1$ и $S = 250\sqrt{px}$.

Следовательно, скорость в точке P будет такой, с какой тело может пройти за секунду путь $250\sqrt{px}$.

. . . .

О движении тела, притягиваемого пропорционально некоторой степени расстояния от центра

§ 58. Дальнейшее движение тела, после того как оно подойдет к центру C (рис. 13), в тех случаях, где n — число четное, является более трудным для исследования, поскольку формула, выражающая силу, не соответствует тому, что было принято. Ведь если исследуется движение тела за C в P, необходимо, чтобы в точке P сила так же интенсивно устремляла тело по направлению к C, как в Q при $CP = CQ$. Поэтому, так как направление силы здесь противоположно и увлекает несомненно вверх, сила должна быть отрицательной. Но $CP = -x$. Следовательно, сила в точке P равна $(-x)^n : c^n$. А если n является числом четным, это выражение не будет отрицательным, вследствие чего оно непригодно для решения поставленной задачи.

§ 59. Это затруднение отсутствует, если n — число нечетное. Ведь в этом случае выражение $(-x)^n : c^n$ действительно является отрицательным. Исходя из него можно заключить, что тело, подошедшее к точке C, направляется далее к P; при этом движение его в такой же мере замедляется, в какой оно раньше по направлению к C ускорялось, вследствие чего в a, при $Ca = CA$, скорость тела равна нулю. Для случая, когда n является числом четным и сила в P не будет такой, какой она должна была бы быть, мы произведем исследование в дальнейшем, где будет говориться о криволинейных движениях. Там это неудобство не будет иметь места.

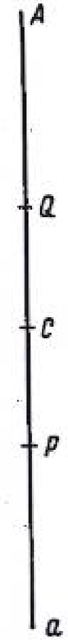


Рис. 13.

§ 60. Остается лишь один случай, когда силы обратно пропорциональны расстояниям от неподвижной точки C, который требует особого рассмотрения, поскольку здесь приходится прибегать к логарифмам. Но так как лицу, которое обратится к изучению этой задачи, надлежит быть знакомым с логарифмами, мы переходим к другому.

Пусть будет дано тело A, увлекаемое вниз к точке C (рис. 14), и сила, действующая на тело, изменяется как угодно и познается из кривой DM. А именно, пусть сила, действующая на тело, расположенное в точке P, будет пропорциональна аппликате PM кривой DM. Требуется узнать скорость тела в отдельных точках P.

§ 61. Возьмем прямую AB, выражающую силу, равную силе тяжести, и введем обозначение $AB = c$. Пусть тело придет в некоторое место P, где оно будет подвергаться воздействию силы, которая относится к силе тяжести, как PM к AB, и пусть $AP = x$. Итак, если положить $PM = y$ и силу тяжести обозначить через 1, то сила, действующая в точке P, будет равна $y : e$. Пусть, далее, высота, порождающая скорость в точке P, будет равна v. Пусть тело за мгновение перейдет в p, причем $Pp = dx$, а высота, порождающая скорость в p, равна $v + dv$. При этом $dv = ydx : e$ и $ev = \int ydx =$ площади $ADMP$.

Итак, построим кривую AN, аппликата которой PN, умноженная на AD, равна $ADMP$. При этом повсюду $PN = v$.

§ 62. Зная скорость в любом месте, мы легко определим время, за которое описывается любая часть пути. Во всяком случае надо отметить следующее: если первая аппликата AD кривой DM будет равна нулю, тело A никогда не выйдет из A, так как в A на него не действует никакая сила; по этой причине время, соответствующее какому-либо пути AP, будет бесконечным. Так как $dv = ydx : e$, то, если $y = 0$ в A, мы

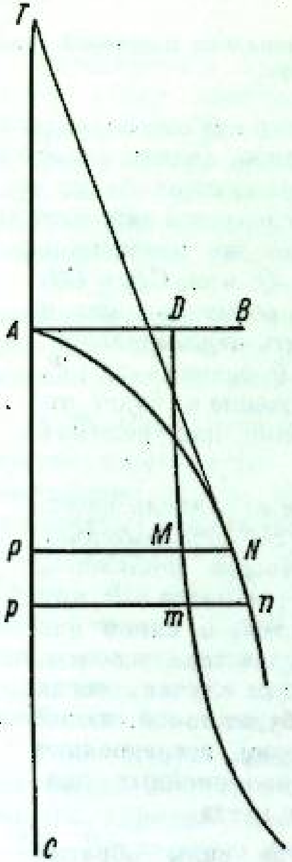


Рис. 14.

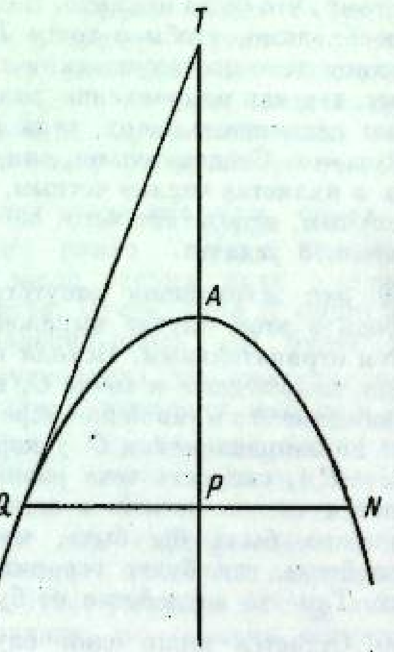


Рис. 15.

получим там $dv : dx = 0 : e$, откуда становится ясным, что в этом случае прямая AP будет касательной к кривой AN. Поэтому, если дана кривая AN и по ней требуется найти *шкалу сил* DM, то, для того чтобы случай не оказался только воображаемым и чтобы возникло какое-либо движение, кривая AN должна образовывать с AP в точке A угол конечной величины.

§ 63. Если дана кривая AN, представляющая скорости, то шкала сил DM будет построена из нее следующим образом. Так как $dv = ydx : e$, то $y = edv : dx$. Проведем касательную TN к кривой AN в точке N, которая встречается с продолжением прямой AP в точке T. Тогда $PN : PT = dv : dx$. По этой причине будем иметь $y = PM = e(PN : PT)$. Итак, пусть PT относится к PN, как $AB(e)$ относится к четвертой величине, которая

и будет аппликатой PM искомой кривой DM. Таким образом, следовательно, последняя и строится.

§ 64. Пусть будет дана *шкала времен* AQ, отдельные аппликаты которой PQ представляют время, за которое описываются пути AP (рис. 15), а именно, пусть $PQ = \int \frac{dx}{\sqrt{v}} = t$. Оставив все прочие обозначения прежними, получим $dt = \frac{dx}{\sqrt{v}}$ и $v = \frac{dx^2}{dt^2}$. Проведем из Q касательную QT. Тогда $dt : dx = PQ : PT$. Следовательно,

$$v = \frac{PT^2}{PQ^2} = PN.$$

Таким образом найдем кривую AN, а из нее, согласно предыдущему параграфу, — шкалу сил. Нас не должно беспокоить то обстоятельство, что $PT^2 : PQ^2$ не имеет никакой размерности. Это проистекает в силу того, что t не имеет целой размерности. Для того чтобы избежать этого, можно было бы положить

$$t = \int \frac{dx\sqrt{a}}{\sqrt{v}},$$

и тогда $v = \frac{adx^2}{dt^2}$ или $PN = \frac{a \cdot PT^2}{PQ^2}$, где a может обозначать любую постоянную величину.

§ 65. До сих пор нами рассматривался один отдельно взятый спуск вниз. Теперь мы будем сравнивать между собой несколько спусков. Поскольку дана какая-либо шкала сил, то это не вызовет никаких затруднений, так как из нее можно вывести все, что относится ко многим спускам.

Теперь мы обратимся к другим вопросам, а именно: какой должна быть шкала сил, чтобы скорости в конце нескольких спусков имели между собой данное отношение. Мы попытаемся также найти такую шкалу сил, чтобы времена нескольких спусков, начала которых различны, а конец один и тот же, находились в соответствии с заданным законом.

§ 66. Пусть тело опустится из какой-либо точки P прямой AC в точку C, и пусть высота, порождающая скорость в C, будет равна аппликате PN (рис. 16). Требуется найти шкалу сил, которой бы это соответствовало. Пусть DME будет искомой шкалой, и пусть AB обозначает силу, равную силе тяжести. Из предыдущего становится ясным, что тело, опускающееся из P, будет иметь в C скорость, порождаемую из высоты, равной отношению $\frac{\text{площадь } CPME}{AB} = PN$. Итак, если дана кривая CN, то можно найти кривую DME. Пусть $CP = x$, $PN = z$, $PM = y$ и $AB = e$. Тогда $\int ydx = ez$. Следовательно, $ydx = edz$ или $y = edz : dx$. Проведем из N касательную NT. Тогда $PT : PN = dx : dz$. Следовательно, $y = e(PN : PT)$. В соответствии с этим все аппликаты PM можно найти из пропорции $PT : PN = AB : PM$. Шкала DME покажет, что тело, опускающееся из P в C, имеет в C скорость, которая достигается из высоты PN.

§ 67. Если задано отношение времен различных спусков до неподвижной точки и отсюда надо найти шкалу сил, то эта задача является весьма трудной и требует совершенно иного подхода, нежели предыдущая. Ибо, по моему мнению, из кривой, аппликаты которой обозначают полные времена отдельных нисхождений (например, из

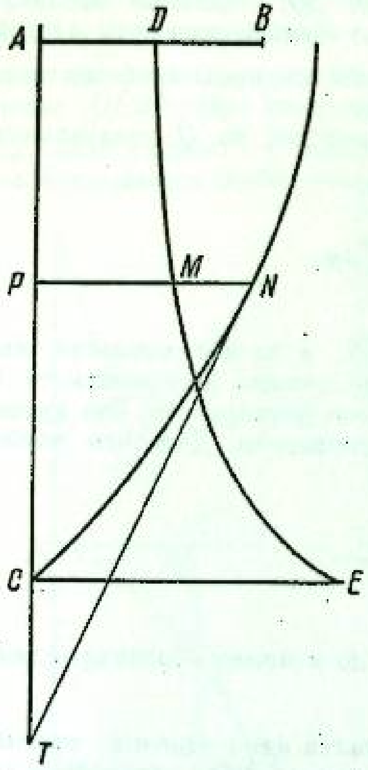


Рис. 16.

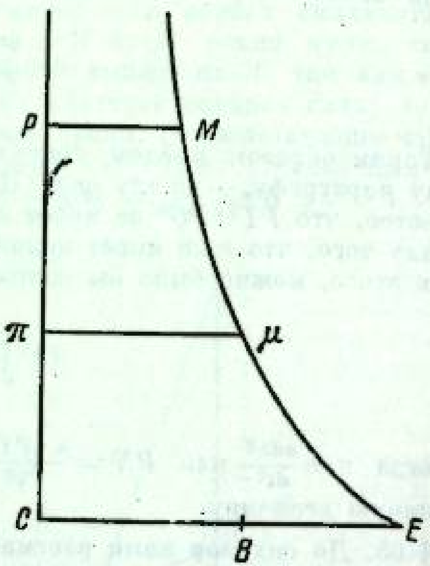


Рис. 17.

кривой CN, если бы аппликаты PN выражали времена, за которые пробегаются пути PC), никоим образом нельзя построить шкалу сил.* Тем не менее существует много частных случаев, подход к которым открывает некоторый новый метод, который будет объяснен в дальнейшем.

§ 68. Каков бы ни был закон времен, пусть кривая $M\mu E$ обозначает шкалу сил. Пусть C — неподвижная точка, и пусть спуск происходит из какой-либо точки P (рис. 17). Обозначим CP через a, а площадь $CEMP$ через A. Положим, что тело прошло из P в некоторую точку π, и проведем аппликату $\pi\mu$. Пусть $C\pi = x$ и площадь $CE\mu\pi = X$. Пусть, далее, CB выражает силу, равную силе тяжести, и введем обозначение $CB = e$.

* Определение шкалы сил $f(L)$ по заданным временам $T(L)$ спуска тела массы m с высоты L сводится к решению уравнения

$$T(L) = \int_0^L \frac{dx}{\sqrt{\frac{2}{m}\int_x^L f\,dx}},$$

которое может рассматриваться как обобщенное уравнение типа Абеля. — *Г. М.*

Следовательно, скорость, которую тело имеет в π, будет порождаться высотой

$$PM\mu\pi : CB = \frac{A-X}{e}.$$

Отсюда скорость в π равна $\sqrt{\frac{A-X}{e}}$. Следовательно, время, за которое описывается путь $C\pi$, будет равно

$$\int \frac{dx\sqrt{e}}{\sqrt{A-X}}.$$

К этому интегралу надо прибавить такую постоянную, чтобы при $x=0$ он также исчезал. Если, далее, положить, что в этом интеграле $x=a$, в каковом случае X перейдет в A, то будем иметь время, за которое описывается путь PC.

§ 69. Так как X обозначает пространство $CE\mu\pi$, то X будет некоторой функцией от x, которая становится равной нулю при $x=0$, и от постоянных величин. К этим величинам не может относиться величина a, так как она обозначает весь описанный путь CP, который не может считаться постоянным, поскольку изложенное должно применяться к различным спускам. Однако до тех пор, пока рассматривается один отдельный спуск вдоль PC, величина a считается постоянной. Из X, т. е. из функции, которую, как мы приняли, составляют x и постоянные величины, можно определить A, если в X повсюду вместо x положить a. Таким образом, A является такой функцией от a и постоянных, какой является X относительно x и тех же постоянных величин.

§ 70. Теперь я перехожу к частным случаям и в первую очередь попытаюсь найти такую шкалу сил ME, чтобы все нисхождения до C, где бы мы ни приняли начало P, происходили за одно и то же или за равные времена, т. е. чтобы они являлись изохронными или таутохронными. Совершенно очевидно, что это условие имеет место только в случае, если в формулу, выражающую время движения вдоль PC, входят лишь постоянные величины, а буква a и другие от нее зависящие величины, как например A, не входят. Ведь если бы a входило во время движения вдоль PC, то это время зависело бы от a или от пути PC, и поэтому оно не оставалось бы одинаковым при различных путях PC.

§ 71. Формула, которая выражает время, соответствующее πC, должна быть составлена таким образом (§ 68), чтобы при $x=0$ она полностью исчезала. Поэтому необходимо, чтобы она имела в качестве множителя x или его степень, показатель которой был бы числом положительным, либо, если она будет обращена в ряд, в случае необходимости бесконечный, который содержит простые члены, то в отдельные члены обязательно должна входить величина x или некоторая ее степень, имеющая положительный показатель. Благодаря этому при $x=0$ время полностью исчезнет. Это условие распространяется не только на наш случай, но оно должно иметь место всегда, к какому бы случаю мы ни обратились.

§ 72. Кроме того, наш случай требует, чтобы при $x=a$ в формуле, выражающей время, a обязательно отсутствовало. Поэтому в отдельные члены ряда, выражающего время движения вдоль $C\pi$, a должно входить в отрицательных степенях с показателем, равным положительному показателю при x.

. . . .

§ 76. Найдем шкалу сил, при которой времена спусков к C относились бы друг к другу так же, как некоторые степени путей, т. е. чтобы время движения вдоль PC было пропорционально PC^n или a^n. Итак, необходимо, чтобы в любом члене ряда, выражающего время движения вдоль πC, a и x вместе входили бы в степени n. Следовательно, этот ряд будет такого рода:

$$\alpha a^{n-f}x^f + \beta a^{n-g}x^g + \ldots$$

Отсюда можно понять, что в формуле, выражающей время движения вдоль πC, a и x должны иметь степень n.

§ 77. Итак, поскольку в

$$\int \frac{dx\sqrt{e}}{\sqrt{A-X}}$$

a и x входят в степени n, в той же степени должны они входить в дифференциал

$$\frac{dx\sqrt{e}}{\sqrt{A-X}},$$

причем dx имеет одно измерение. По этой причине, поскольку числитель имеет одно измерение, знаменатель $\sqrt{A-X}$ должен представлять собой степень $1-n$ от a и x, и поэтому $A-X$ будет представлять собой степень $2-2n$. Поскольку a не может входить в X, то при x должен здесь быть показатель $2-2n$. Пусть $X=mx^{2-2n}$. Тогда $A=ma^{2-2n}$, откуда следует, что

$$\frac{dx\sqrt{e}}{\sqrt{A-X}}$$

содержит a и x в степени n. Так решается этот вопрос.

§ 78. Здесь возникает вполне обоснованное сомнение, если $2-2n$ будет числом отрицательным. Ведь $X=mx^{2-2n}$, вместе с тем X должно исчезать при $x=0$. Уравнение же $X=mx^{2-2n}$ не удовлетворяет этому условию, если $2-2n$ есть число отрицательное или равное нулю. В этих случаях не следует полагать, что X равно mx^{2-2n}, а нужно прибавлять постоянную, которая обращала бы X в нуль при $x=0$. Итак, $X=mx^{2-2n}-m0^{2-2n}$. Эта величина не противоречит другому условию, согласно которому $A-X$ должно представлять степень $2-2n$. Ведь $A=ma^{2-n}-m0^{2-2n}$, а по этой причине $A-X=ma^{2-2n}-mx^{2-2n}$, как и раньше.

§ 79. Итак, мы имеем уравнение $X=mx^{2-2n}$ или при необходимости $X=mx^{2-2n}-m0^{2-2n}=$ площади $CE\mu\pi$. Пусть, как и раньше, $\pi\mu=y$.

Тогда $mx^{2-2n}-m0^{2-2n}=X=\int y\,dx$. Следовательно, $(2-2n)mx^{1-2n}=y$.

Здесь вместо m можно принять постоянную, имеющую размерность, которая необходима для сохранения однородности. К m можно присоединить и $2-2n$, поскольку это постоянная, и мы получим для искомой кривой $M\mu E$ уравнение $y=b^{2n}x^{1-2n}$.

§ 80. Найдем теперь все возможные шкалы сил, при которых тело либо проходит данное расстояние AC за одно и то же время, либо достигает в точке C одной и той же степени скорости.

Рассмотрим сначала последний случай. Пусть будет дана шкала сил BMD (рис. 18) и требуется найти все прочие шкалы сил $(B)(M)(D)$, при которых тело, приведенное в движение вдоль AC, в точке C достигает одной и той же скорости. Поскольку скорость в точке C соответствует высоте, равной площади $ABDC$, поделенной на постоянную e (§ 61), то можно заключить, что все кривые $(B)(M)(D)$, которые нужно отыскать, должны быть такими, чтобы площадь $A(B)(D)C$ была равна площади $ABDC$.

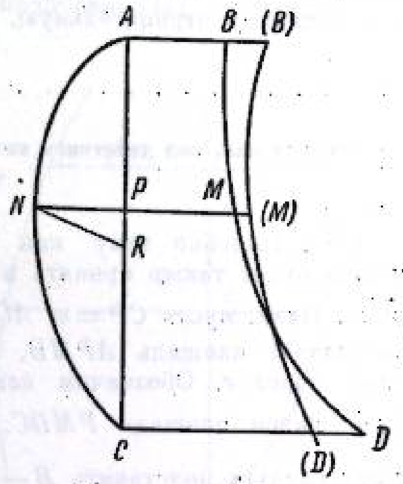


Рис. 18.

§ 81. Итак, отдельные части $ABMP$, $A(B)(M)P$ площадей $ABDC$, $A(B)(D)C$ могут иметь различную величину, лишь бы взятые целиком площади эти были равны между собой. Кроме того, совершенно ясно, что все части $A(B)(M)P$ должны исчезать при $AP=0$, так как мы полагаем, что в точке A тело не имеет скорости. Построим какую-либо кривую ANC на AC, опирающуюся на точки A и C прямой AC. Пусть аппликата PN или какая-либо ее функция измеряют повсюду разность между площадями $ABMP$ и $A(B)(M)P$. Итак, поскольку аппликата PN в точках A и C исчезает, площадь $A(B)(M)P$ при совпадении P с A будет равна нулю. Если же P совпадает с C, площадь $ABDC$ будет равна $A(B)(D)C$, что и требовалось найти.

§ 82. Пусть $AP=x$, $PM=y$, $P(M)=Y$ и $PN=z$. Тогда $ABMP=\int y\,dx$ и $A(B)(M)P=\int Y\,dx$. Обозначим функцию от PN, которая должна измерять разность между $\int y\,dx$ и $\int Y\,dx$, через Z. Эта функция Z должна обладать той особенностью, чтобы при $z=0$ она исчезала, причину чего можно уяснить из предыдущего параграфа. Итак, мы имеем следующее уравнение: $\int Y\,dx=\int y\,dx+Z$; отсюда вытекает $Y\,dx=y\,dx+dZ$. Пусть $dZ=p\,dz$. Здесь вместо Z вводится p, которое может обозначать любую функцию от z. Ведь, каково бы ни было p, выражение $\int p\,dz$ может исчезнуть, если положить $z=0$.

§ 83. Из уравнения $Y\,dx=y\,dx+p\,dz$ получаем, таким образом, $Y=y+\frac{p\,dz}{dx}$. Итак, поскольку дана кривая BMD, а кривая ANC может быть взята произвольным образом, то по этим двум кривым легко построить искомую кривую $(B)(M)(D)$. Если положить $p=z$, то получим $Y=y+\frac{zdz}{dz}$. Но $\frac{zdz}{dz}$ обозначает поднормаль в точке N, а именно PR. Отсюда $Y=y+PR$, или $P(M)=PM+PR$, а также $M(M)=PR$. Когда поднормаль PR падает по направлению к C, ее следует определять как положительную величину, а когда она падает по направлению к A, — как величину отрицательную, или наоборот.

. . . .

О шкалах сил, под действием которых тело описывает отрезок AC за одно и то же время

§ 88. Подобно тому как начало абсцисс принималось в A, его можно будет также принять в точке C, что порой может быть необходимо. Итак, пусть $CP=v$, $AC=a$. Тогда $x=a-v$. Поскольку $\int ydx$ обозначает площадь $APMB$, эта же площадь должна быть выражена через v. Обозначим всю площадь $ABDC$ через B. Поскольку $\int ydv$ равен площади $PMDC$, то $APMB=B-\int ydv$. Поэтому вместо $\int ydx$ следует подставить $B-\int ydv$, и, таким образом, получим

$$\left[\sqrt{\int Ydx}=\right]R=\frac{be\sqrt{B-\int ydv}}{be+t\sqrt{B-\int ydv}}.^{*}$$

Отсюда, как и раньше, вытекает

$$Y=\frac{2RdR}{dx}=\frac{-2RdR}{dv}.$$

§ 89. Пусть данная кривая BMD будет прямой линией, параллельной AC и расположенной от AC на расстоянии $AB=h$ (рис. 19). Тогда $y=h$. Следовательно, $\int ydv=hv$ и $B=ah$. Итак,

$$R=\frac{be\sqrt{h(a-v)}}{be+t\sqrt{h(a-v)}}$$

и после дифференцирования

$$dR=\frac{-bbeehdv-2behdt(a-v)\sqrt{h(a-v)}}{2\left[be+t\sqrt{h(a-v)}\right]^{2}\sqrt{h(a-v)}},$$

а далее

$$\frac{-2RdR}{dv}=\frac{b^{3}e^{3}hdv+2b^{2}e^{2}hdt(a-v)\sqrt{h(a-v)}}{\left[be+t\sqrt{h(a-v)}\right]^{3}dv}.$$

* Здесь t — поднормаль PR кривой ANC (ср. рис. 18); она выражает теперь разность времен спуска вдоль AC (ср. § 81). — *Г.М.*

Последнее равно величине Y.

§ 90. В § 67 было упомянуто о следующей задаче: каким образом следует находить шкалу сил из данного закона времен, в течение которых тело, пробегая с разных высот, достигает самой нижней точки. Этот закон должен быть выражен кривой TtE так, чтобы тело, опускаясь из A, достигало C за время, пропорциональное AT, а опускаясь из a, достигало C за время, пропорциональное at (рис. 20).

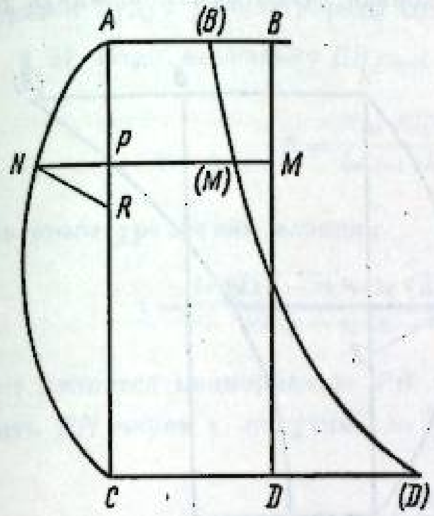


Рис. 19.

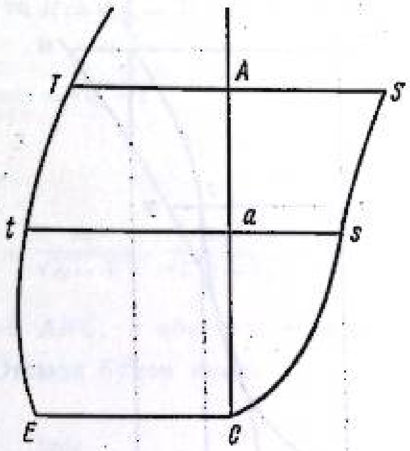


Рис. 20.

Для того чтобы применить эту задачу к ранее рассмотренным случаям, найдем для каждого спуска AC такую силу AS, которая, действуя на тело на протяжении всего пути AC, привела бы его за данное время AT в C.

§ 91. Итак, при каждом спуске надо рассматривать, какова величина той единообразной силы, которая должна действовать на тело, чтобы оно прошло путь за данное время. Так, для того чтобы тело прошло путь aC за время at, необходима сила as. Кривая CsS может быть построена из данной EtT следующим образом. Поскольку при единообразно действующей силе время (§ 38) пропорционально корню квадратному из описанного пути, отнесенного к силе, то сила будет пропорциональна описанному пути, деленному на квадрат времени. Из этого следует $AS=\frac{AC}{AT^{2}}$ и

$$AS:as=\frac{AC}{AT^{2}}:\frac{aC}{aT^{2}}.$$

Таким образом находится кривая SsC.

§ 92. Если времена должны быть пропорциональны некоторой степени высот с показателем n, то AT будет пропорционально AC^{n}. Таким образом, AS будет пропорционально AC^{1-2n}. Подобным же образом всегда будет найдена линия AS и в том случае, если время AT выражается другой функцией высоты и постоянных. Итак, этим путем мы находим силы, под действием которых тело совершает свои спуски за данные времена. Совершенно иной задачей является отыскание шкалы сил, когда необходимо, чтобы тело при любом спуске в одном и том же месте всегда подвергалось действию одной и той же силы.

§ 93. Для того чтобы найти такую шкалу, надо определить равнодействующую MmD (§ 89) единообразной силе AS или шкале SE, под действием которой тело необходимо переводится за одно и то же время из A в C и которая должна обладать тем свойством, чтобы ее часть Dm была равнодействующей по отношению к единообразной силе as или шкале se (рис. 21). Итак, если кривая MmD будет обладать тем

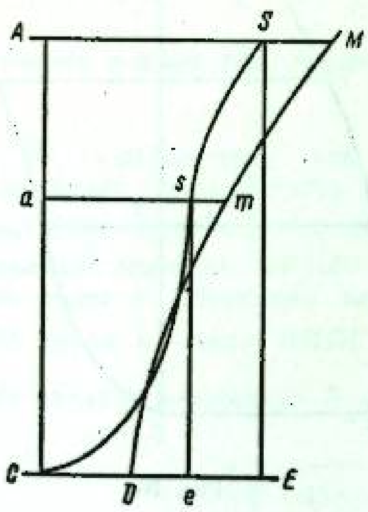


Рис. 21.

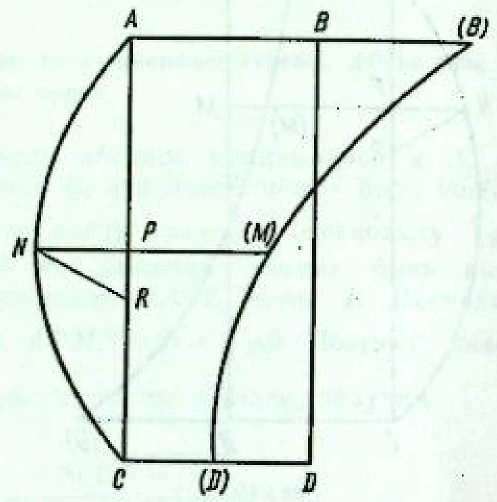


Рис. 22.

свойством, что отдельные ее части производят такое же действие, что и определенные ранее единообразно действующие силы, то эта кривая и явится шкалой сил.

§ 94. Итак, поскольку дело сведено к случаю, изложенному в § 89, пусть единообразно действующая на AC сила AB будет некоторой функцией высоты AC. Обозначим ее, как и там, через h, а остальные обозначения оставим прежними. Требуется, чтобы искомая кривая $(D)(M)(B)$ оставалась одинаковой, какова бы ни была высота $AC=a$ и зависящая от нее AB (рис. 22). Для того чтобы это имело место, уравнение между CP и $P(M)$ должно быть таким, чтобы буквы a или h, как зависящие от высоты AC, совершенно в него не входили. Таким образом, уравнение для кривой $(D)(M)(B)$ будет постоянно оставаться одинаковым для любой высоты AC. Следовательно, такая кривая удовлетворит поставленным требованиям.

§ 95. В § 89 имеется уравнение $Y=\frac{-2RdR}{dv}$. Буква a, а также другие, зависящие от нее, как h, не могут быть использованы для определения $Y=P(M)$. Поэтому в $2RdR$ не может входить a, и по этой причине величина a в интеграле RR либо также безусловно отсутствует, либо в крайнем случае может быть присоединена в качестве постоянной, исключаемой при дифференцировании. Но поскольку R должно быть такой функцией от v и постоянных, которая бы исчезала при $v=a$, то a обязательно должна входить в R. При этом

величина a после дифференцирования RR непременно должна исчезнуть из результата вычисления.

§ 96. Итак, в силу этого я полагаю, что $R^2=A-V$, где V обозначает некоторую функцию от v и постоянных, к которым здесь не следует причислять a. Величина же A получается из V, если в V вместо v положить a. Благодаря этому RR исчезает при $v=a$, а дифференцирование $A-V$ дает $-dV$, которое безусловно не зависит от a. Таким образом будут удовлетворены оба поставленных условия.

§ 97. Итак, поскольку $RR=A-V$, то $R=\sqrt{A-V}$. Но, согласно § 89,

$$R=\frac{be\sqrt{h(a-v)}}{be+t\sqrt{h(a-v)}}=\sqrt{A-V}.$$

Из этого уравнения находим

$$t=\frac{be\sqrt{h(a-v)}-be\sqrt{A-V}}{\sqrt{h(a-v)(A-V)}}=\frac{be}{\sqrt{A-V}}-\frac{be}{\sqrt{h(a-v)}}.$$

А t является поднормалью PR кривой ANC, и поэтому, если обозначить PN через z, получим $t=\frac{zdz}{dv}$. Отсюда будем иметь

$$zdz=\frac{bedv}{\sqrt{A-V}}-\frac{bedv}{\sqrt{h(a-v)}}.$$

Следовательно,

$$\frac{1}{2}zz=be\int\frac{dv}{\sqrt{A-V}}+\frac{2be}{h}\sqrt{h(a-v)}+C.$$

§ 98. Постоянная C должна быть такой, чтобы при $v=0$ было $z=0$, поскольку кривая ANC в точке C должна совпасть с AC. Следовательно,

$$C=-\frac{2be}{h}\sqrt{ha}.$$

Подобным же образом такую постоянную следует прибавить к интегралу члена $\frac{bedv}{\sqrt{A-V}}$. Кроме того, поскольку кривая ANC в точке A должна также пересечься с осью AC, при $x=a$ должно быть $z=0$. Для того чтобы это случилось, для V следует принять соответствующую функцию. Ведь то, что мы стремимся найти, должно быть определено из одного только V.

§ 99. Итак, поскольку наше уравнение, определяющее zz, должно быть таково, чтобы при $v=a$ оно исчезало, а второй его член

$$-\int\frac{bedv}{\sqrt{h(a-v)}},$$

увеличенный, как было сказано, соответствующей постоянной, при $v=a$ даст $-\frac{2be}{h}\sqrt{ha}$, то необходимо, чтобы первый его член

$$\int \frac{bedv}{\sqrt{A-V}}$$

подобным же образом увеличенный соответствующей постоянной, при $v=a$ давал $+\frac{2be}{h}\sqrt{ha}$, чем устранялась бы величина $-\frac{2be}{h}\sqrt{ha}$. В случае $v=a$, как это и требуется, будем иметь $zz=0$.

§ 100. Итак, надо найти функцию от v и постоянных, за исключением a, которую можно было бы постоянно подставлять вместо V и которая была бы такой, чтобы выражение $\frac{bedv}{\sqrt{A-V}}$, проинтегрированное и увеличенное за счет постоянной, превращающей интеграл в нуль при $v=0$, при $v=a$ переходило в $\frac{2be\sqrt{ha}}{h}$ или чтобы выражение $\frac{dv}{\sqrt{A-V}}$, трактованное таким же образом, давало $\frac{2\sqrt{ha}}{h}$ или $2\sqrt{a:h}$. Таким образом, этот метод приводит к решению, сходному с тем, к которому привел метод, примененный сначала (ср. § 68). Ведь наше выражение $\frac{dv}{\sqrt{A-V}}$ должно рассматриваться таким же образом, как там рассматривалось весьма сходное выражение

$$\frac{dx\sqrt{e}}{\sqrt{A-X}};$$

Следовательно, мы не извлечем здесь большего числа случаев, чем там.

§ 101. Для нахождения V здесь можно было бы взять ряд, коэффициенты которого подлежат определению. Я считаю, однако, более разумным определить v через V. При этом v должно быть такой функцией от V и постоянных, за исключением a и A, чтобы при $V=A$ мы получали a. Поэтому можно положить $v=\alpha V+\beta V^2+\gamma V^3+\ldots$, отсюда получим $a=\alpha A+\beta A^2+\gamma A^3+\ldots$ Однако этот ряд не всегда сходится. Для каждого предложенного случая следует определять, какие степени V должны быть приняты.

§ 102. Здесь будет достаточно указать путь к решению. Если положить $dv=\alpha V^m dV$, то элемент $\frac{dv}{\sqrt{A-V}}$ будет обладать следующим свойством. Если он будет проинтегрирован и к нему будет прибавлена постоянная, обращающая интеграл в 0 при $V=0$, и если затем положить $V=A$ (эти условия дают то же, что и ранее приведенные: $v=0$ и $v=a$), то мы получим

$$2\,\frac{2\cdot 4\cdot 6\ldots 2m}{3\cdot 5\cdot 7\ldots(2m+1)}\,\alpha A^{m+1/2}.$$

Исходя из этого теперь будет легко исследовать любые выражения, принятые для v. Следует положить, что этот член вместе с другими, взятыми в необходимом числе, равен $\sqrt{a:h}$. Определив коэффициенты α, β и т. д. и выразив h через a и a через A, найдем искомую кривую, уравнение которой $Y=dV:dv$.

Глава II. О ПРЯМОЛИНЕЙНОМ ДВИЖЕНИИ ТОЧКИ ПРИ ПРИЛОЖЕНИИ ОТНОСИТЕЛЬНОЙ СИЛЫ

§ 103. В этой главе будет рассмотрена относительная сила, либо взятая отдельно, либо в соединении с абсолютной силой, причем будет предполагаться, что направление ее совпадает с направлением тела. Сначала я полагаю, что на тело действует одна только относительная сила; для этого случая надо найти скорость тела в каждом месте и время, за которое проходится каждый отрезок пути. Затем последуют и другие вопросы, которые были поставлены в предыдущей главе об абсолютных силах. Подобным же образом мы будем исследовать относительную силу в соединении с абсолютной.

§ 104. В § 5 было показано, каким образом относительные силы следует приводить к абсолютным. Поскольку относительная сила воздействует на движущееся тело иначе, чем на покоящееся, следует найти абсолютную силу, которая была бы равнодействующей относительной силе при сохранении телом данной степени скорости. Это можно вывести из закона относительной силы, в соответствии с которым она зависит от скорости. Относительная сила может быть двоякой — либо единообразной, либо переменной; единообразной она будет в том случае, если ее действие зависит только от скорости тела, переменной, если ее действие каким-либо образом одновременно зависит и от места.

§ 105. Если тело, на которое действует относительная сила, имеет какую-либо скорость, от которой зависит действие силы, то можно определить степень скорости, которую должно иметь тело, чтобы действие этой силы было бы равно действию силы тяжести. Эта скорость выражается высотой, при свободном падении с которой тяжелое тело достигает такой скорости. Эту высоту, поскольку она показывает, сколь велика относительная сила, я буду в дальнейшем называть *интенсивностью силы*. Если она повсюду одинакова, относительная сила будет единообразной, ибо в этом случае действие силы определяется только скоростью. Если же интенсивность различна в различных местах, сила будет переменной.

§ 106. Кроме интенсивности силы, следует также знать и *закон силы*, в соответствии с которым она меняется при различных скоростях тела. Ибо из него становится ясным, когда сила будет в два или в три раза больше силы тяжести или будет иметь какое-либо иное отношение. Это можно будет определить, одновременно учитывая как закон силы, так и интенсивность. Указанный закон является отношением, в котором находятся друг к другу некоторые функции скоростей. Это отношение, следовательно, является простым, если действия силы пропорциональны скоростям, и двойным, если они пропорциональны квадратам скоростей, и т. д.

§ 107. Относительные силы, подобно абсолютным, могут быть подразделены на *ускоряющие* и *замедляющие*. Ускоряющей является сила, которая увеличивает скорость тела, замедляющей же, — которая ее уменьшает. Если на каком-либо пути имеется ускоряющая сила, то этот путь называется *продвигающим*. Путь же, который содержит замедляющую относительную силу, называется *сопротивляющимся* или *сопротивляющейся средой*. Отношение обеих сил одинаково; как ускоряющая, так и замедляющая сила приводится к силе тяжести: одна к случаю, при котором сила тяжести ускоряет движение падающего тела, другая — к тому случаю, при котором сила тяжести замедляет движение подымающегося тела.

§ 108. Сначала я полагаю, что на тело воздействует одна лишь относительная сила, которая к тому же является единообразной, т. е. повсюду имеет одинаковую интенсивность. Пусть телом или, вернее, точкой, приведенной таким образом в движение вдоль линии AP, будет A (рис. 23). Пусть сила будет ускоряющей и скорость тела, которой соответствует относительная сила, равная тяжести, или интенсивность, выражается высотой c. Допустим, что тело уже описало путь $AP = x$, в начале A которого скорость тела соответствует высоте b, а в P — высоте v. Поэтому, когда тело пройдет вдоль $Pp = dx$ в p, скорости в p будет соответствовать высота $v + dv$.

§ 109. Пусть, кроме того, закон, по которому действует сила, представляется некоторой степенью, показатель которой равен n. Таким образом, сила, действию которой тело подвергается в P, будет относиться к силе тяжести, как v^n к c^n. Положив силу тяжести равной 1, получим, что действующая в P сила равна $v^n : c^n$. Поэтому (§§ 34, 35) $dv = v^n dx : c^n$ и $dx = c^n dv : v^n$. Отсюда находим $x = C - c^n : (n-1) v^{n-1}$. Если $x = 0$, то $v = b$. Следовательно, $C = c^n : (n-1) b^{n-1}$. Итак,

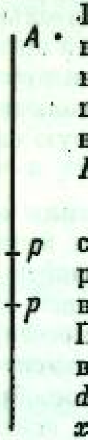


Рис. 23.

$$x = \frac{c^n v^{n-1} - c^n b^{n-1}}{(n-1) b^{n-1} v^{n-1}} = \frac{c^n}{n-1} (b^{1-n} - v^{1-n}).$$

Отсюда выводим

$$v = b \sqrt[n-1]{\frac{c^n}{c^n - (n-1) b^{n-1} x}}.$$

§ 110. Время, за которое тело проходит путь AP, можно найти из промежуточка времени, соответствующего отрезочку Pp, который равен $dx : \sqrt{v}$. Подставив сюда вместо v найденную величину, получим

$$\frac{dx \sqrt[2n-2]{c^n - (n-1) b^{n-1} x}}{\sqrt[2n-2]{b^{n-1} c^n}}.$$

Таким образом, само время, которое выражается через интеграл, равно

$$b^{-\frac{1}{2}} c^{\frac{-n}{2n-2}} \int dx \, [c^n - (n-1) b^{n-1} x]^{\frac{1}{2n-2}}.$$

Эта формула допускает интегрирование, произведя которое найдем, что время, соответствующее AP, равно

$$\frac{C - 2 [c^n - (n-1) b^{n-1} x]^{\frac{2n-1}{2n-2}}}{(2n-1) b^{n-\frac{1}{2}} c^{\frac{n}{2n-2}}}.$$

Поскольку время должно быть равно нулю при $x = 0$, то $C = 2c^{\frac{2nn-n}{2n-2}}$. Поэтому время, соответствующее AP, равно

$$\frac{2c^{\frac{2nn-n}{2n-2}} - 2 [c^n - (n-1) b^{n-1} x]^{\frac{2n-1}{2n-2}}}{(2n-1) b^{n-\frac{1}{2}} c^{\frac{n}{2n-2}}}.$$

Если разделить эту величину на 250 и выразить b, c и x в тысячных частях рейнского фута, то мы получим (§ 39) искомое время в секундах.

§ 111. Если мы положим, что сила, которую мы только что рассматривали как ускоряющую, является замедляющей, то, сохранив прежние обозначения, найдем $dv = -v^n dx : c^n$ и $dx = -c^n dv : v^n$. Отсюда таким же образом, как и прежде, возникает

$$x = \frac{c^n b^{n-1} - c^n v^{n-1}}{(n-1) b^{n-1} v^{n-1}}$$

и далее

$$v = b \sqrt[n-1]{\frac{c^n}{c^n + (n-1) b^{n-1} x}}.$$

Время же, за которое тело пробегает замедленным движением путь AP, составляет

$$\frac{2 [c^n + (n-1) b^{n-1} x]^{\frac{2n-1}{2n-2}} - 2c^{\frac{2nn-n}{2n-2}}}{(2n-1) b^{n-\frac{1}{2}} c^{\frac{n}{2n-2}}}.$$

Я опускаю вычисление, поскольку оно полностью сходно с предыдущим.

§ 112. Из обоих случаев — ускорения и замедления — с очевидностью вытекает, что если считать тело находящимся вначале в покое, то оно и в дальнейшем никогда не будет двигаться. Ведь, если $b = 0$, то тело нигде не будет иметь никакой скорости и, следовательно, будет постоянно оставаться на своем месте. Легко понять, что то же самое должно всегда происходить, если действующая сила зависит только от скорости, ибо при скорости, равной нулю, сила также равна нулю, а следовательно, отсутствует сила, которая бы сдвинула тело с его места. Отсюда следует, однако, исключить те случаи, при которых $n = 0$ или является числом отрицательным. В последнем случае сила, действующая на покоящееся тело, была бы бесконечной.

§ 113. Для того чтобы выяснить, что́ возникает в этих случаях, положим $n = -m$ и $b = 0$. В случае ускорения находим

$$v = \sqrt[-m-1]{\frac{0^{-m-1} c^{-m}}{c^{-m} + (m+1) 0^{-m-1} x}} = \sqrt[m+1]{(m+1) c^m x}.$$

При замедлении тело будет двигаться подобным же образом, но в противоположную сторону. Если $m=0$, а также и $n=0$, то $v=x$. Таким образом, в этом случае тело будет подвергаться воздействию, как и от силы тяжести.

Это справедливо и тогда, когда отрицательным числом является не только n, но и $n-1$, т. е. пока $n<1$, или $-m<+1$. В этом случае время, за которое пробегается путь x, равно

$$\frac{2c^{\frac{-2mm-m}{2m+2}}-2\left[c^{-m}+(m+1)\,0^{-m-1}x\right]^{\frac{2m+1}{2m+2}}}{-(2m+1)\,0^{-m-\frac{1}{2}}c^{\frac{m}{2m+2}}}=$$

$$=\frac{2\,(m+1)^{\frac{2m+1}{2m+2}}0^{\frac{-2m-1}{2}}x^{\frac{2m+1}{2m+2}}}{(2m+1)\,0^{\frac{-2m-1}{2}}c^{\frac{m}{2m+2}}}=\frac{2}{2m+1}\sqrt[2m+2]{\frac{(m+1)^{2m+1}x^{2m+1}}{c^m}}.$$

Время это будет бесконечным, если $n={}^1/_2$.

§ 114. Кроме того, становится ясным, что в случае ускорения тело не может перейти через определенный предел. Ведь если положить

$$x=\frac{c^n}{(n-1)\,b^{n-1}},$$

то скорость здесь будет бесконечной. Если же взять x еще бóльшим, то скорость здесь будет мнимой, а это указывает, что тело никогда не сможет сюда проникнуть. После того как тело достигнет этого места, оно начнет возвращаться оттуда, причем скорости будут в каждом месте оставаться прежними. Время же, за которое тело достигнет из A этого предела, равно

$$\frac{2c^n}{(2n-1)\,b^n}\sqrt{b}.$$

§ 115. В случае замедления, если начальная скорость будет бесконечной или $b=\infty$, находим,

$$v=\sqrt[n-1]{\frac{b^{n-1}c^n}{(n-1)\,b^{n-1}x}}=\sqrt[n-1]{\frac{c^n}{(n-1)\,x}}.$$

Время же, за которое при данном условии пробегается путь x, равно

$$\frac{2\,(n-1)^{\frac{2n-1}{2n-2}}x^{\frac{2n-1}{2n-2}}}{(2n-1)\,c^{\frac{n}{2n-2}}}=\frac{2}{2n-1}\sqrt[2n-2]{\frac{(n-1)^{2n-1}x^{2n-1}}{c^n}}.$$

§ 116. Обратимся вновь к случаю замедления и попытаемся, приняв некоторую начальную скорость, найти, где скорость будет равна нулю. В § 111 было найдено уравнение

$$x=\frac{c^nb^{n-1}-c^nv^{n-1}}{(n-1)\,b^{n-1}v^{n-1}}.$$

Итак, скорость тела будет равна нулю, после того как оно пройдет путь, равный

$$\frac{c^nb^{n-1}-c^n0^{n-1}}{(n-1)\,b^{n-1}0^{n-1}}.$$

Этот путь будет бесконечным всякий раз, когда $n>1$, и всегда конечным, если $n<1$. Пусть $n=1-m$; тогда путь, пробежав который тело придет в состояние покоя, будет равен

$$\frac{c^{1-m}}{mb^{-m}}=\frac{b^m}{mc^{m-1}},$$

а время, в течение которого проходится этот путь, составляет

$$\frac{2b^{m-1}}{(2m-1)\,c^{m-1}}\sqrt{b}.$$

§ 117. Закон силы, который разделяет и служит как бы пределом по отношению к этим законам или величинам самого n, столь различающимся между собой, является простым отношением, при котором $n=1$. Движение, которое возникает в этом случае, не содержится уже и выше рассмотренном, но...

. . . .

Глава III. О КРИВОЛИНЕЙНОМ ДВИЖЕНИИ ТОЧКИ ПОД ДЕЙСТВИЕМ АБСОЛЮТНЫХ СИЛ

. . . .

§ 176. ...как если бы тело двигалось по касательным прямолинейным движениям. Итак, пусть скорость тела в M, направленная вдоль T, будет такой, какая может быть порождена с высоты v, и тангенциальная сила, действующая вдоль MT, пусть относится к силе тяжести, как $q:1$. В то время как тело продвинется вдоль $Mm=ds$, $dv=qds$. Если тангенциальная сила будет направлена против движения, то q будет отрицательным и $dv=-qds$. Это действие тангенциальной силы не изменяется, по крайней мере мгновенно, какова бы ни была по величине нормальная сила.

§ 177. Нормальная сила не придает телу скорости, а только изменяет направление; под ее воздействием тело движется не по прямой линии, а по кривой. Степень же кривизны мы обычно измеряем по радиусу также искривленной окружности, который называется *радиусом кривизны* или *искривленности*. Итак, найдем радиус кривизны, которую производит нормальная сила. Пусть тело имеет в M скорость вдоль $M\mu$ по нормали к MP, порождаемую из высоты v, и пусть оно с этой скоростью пройдет за бесконечно малый промежуточек времени в μ (рис. 24). Положим $M\mu=ds$. Пусть нормальная сила относится к силе тяжести, как $p:1$; эта сила продвинула бы тело из M, если бы оно находилось там в состоянии покоя, за тот же промежуточек времени в r. Высота, порождающая скорость в r, будет равна $p\cdot Mr$. Поскольку сила может считаться единообразной, тело с этой скоростью за тот же промежуточек времени может пройти путь $2Mr$. Таким образом, этот промежуточек времени равен $\frac{2Mr}{\sqrt{Mr\cdot p}}$. Этому промежуточку времени равен тот промежуточек, за который тело сообщенным ему движением проходит элемент $M\mu$ и который равен $\frac{ds}{\sqrt{v}}$. Следовательно,

$$\frac{2Mr}{\sqrt{p\cdot Mr}}=\frac{ds}{\sqrt{v}},\quad 2\sqrt{Mr}=ds\sqrt{\frac{p}{v}}\ \text{и}\ Mr=\frac{pds^2}{4v}.$$

§ 178. Следовательно, под действием этой нормальной силы тело через указанный промежуточек времени окажется не в μ, а в m, причем μm по построению параллельно MP и rm параллельно $M\mu$ (§ 22). Поэтому путь тела следует считать дугой окружности, проходящей через точку m, диаметр которой совпадает с MP, так как MP является перпендикуляром к касательной к описываемой телом кривой. Представим себе хорду Mm, которая не отличается от дуги Mm. Тогда отношение $Mr:Mm$ будет равно отношению Mm к диаметру окружности той же кривизны, радиус которой обозначим через r. Получим $2r=\frac{Mm^2}{Mr}$. Далее, поскольку $Mrm\mu$ является прямоугольным параллелограммом, в котором Mr в бесконечное число раз меньше чем $M\mu$, ибо $M\mu$ описывается с конечной скоростью за то же время, за которое удвоенное Mr описывается с бесконечно малой скоростью, то $Mm=M\mu=ds$. В силу этого будем иметь $2r=\frac{4vds^2}{pds^2}$ или $r=\frac{2v}{p}$. Это действие нормальной силы не изменяется, по крайней мере мгновенно, какова бы ни была величина действующей одновременно с ней тангенциальной силы (§ 25).

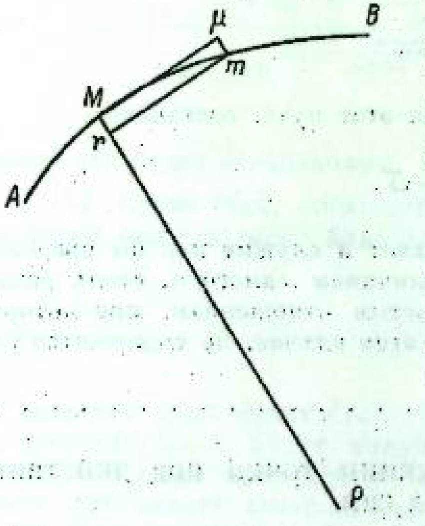


Рис. 24.

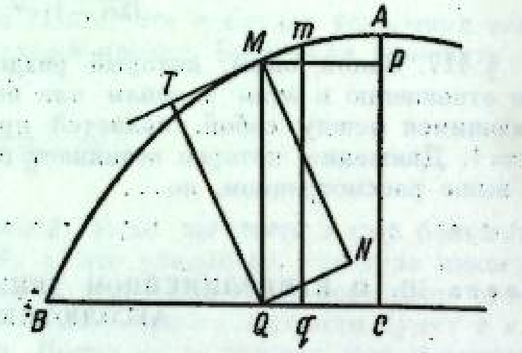


Рис. 25.

§ 179. Пусть сила имеет одно и то же направление, и пусть приводимое ею в движение брошенное тело опишет кривую линию BMA (рис. 25). Я рассмотрю, какова эта кривая и каким образом движется по ней тело. Проведем из начала B прямую BC, образующую прямой угол с направлением сил. Примем эту прямую за ось, на которой

абсциссу BQ обозначим через x и аппликату QM через y. Пусть тело имеет в M скорость, достигаемую из высоты v, и пусть оно увлекается по направлению к Q силой, которая относится к силе тяжести, как $P:1$; причем P каким-либо образом зависит от положения точки M. Пусть, далее, скорость в B достигается из высоты b, а синус угла, который кривая образует в точке B с BC, относится к полному синусу, как $f:1$.

§ 180. Проведя аппликату в ближайшее положение mq, получим $Qq=dx$, $rm=dy$, $Mm=\sqrt{dx^2+dy^2}$. Пусть для краткости $\sqrt{dx^2+dy^2}=ds$. Разложим силу P на составляющие, действующие вдоль нормали MN к кривой и вдоль касательной MT. Тогда отношение $MQ:MN$ (если достроить параллелограмм $MTQN$) будет равно отношению P к нормальной силе, а отношение $MQ:MT$ будет равно отношению P к тангенциальной силе. Но $MQ:MN=Mm:Mr=ds:dx$ и $MQ:MT=Mm:rm=ds:dy$. Следовательно, нормальная сила равна $\frac{Pdx}{ds}$, а тангенциальная равна $\frac{Pdy}{ds}$.

§ 181. Поскольку тело стремится двигаться к A, а тангенциальная сила увлекает вдоль MT, сила эта будет направлена против движения и будет его замедлять. Поэтому, если в m будет скорость, достигаемая из высоты $v+dv$, то

$$dv=-\frac{Pdy}{ds}\,ds=-Pdy.$$

Обозначив радиус кривизны в M через r, получим, что $r=\frac{2vds}{Pdx}$, так как нормальная сила равна $\frac{Pdx}{ds}$. Примем ds за постоянную, тогда радиус кривизны равен $\frac{dsdy}{ddx}$, а поэтому $Pdxdy=2vddx$. Из первого уравнения $Pdy=-dv$. Подставив это во второе уравнение, получим $dxdv+2vddx=0$ или

$$\frac{dv}{v}+\frac{2ddx}{dx}=0.$$

Отсюда следует $\lg v+2\lg dx=\lg C$ или $vdx^2=C$, или, ради сохранения однородности, $vdx^2=Cds^2$.

§ 182. Постоянная C определится из начала B, где $x=0$. Здесь $v=b$ и $dy:ds=f:1$. Следовательно, $dx=ds\sqrt{1-ff}$ или, положив $\sqrt{1-ff}=g$, $dx=gds$, откуда $bg^2ds^2=Cds^2$ и $C=bg^2$. Следовательно, $vdx^2=bg^2ds^2$, или $v=\frac{bg^2ds^2}{dx^2}$. Таким образом, если дана кривая, которую описывает тело под действием силы, направленной в одну и ту же сторону, а именно вдоль аппликат, то становится известной скорость в любом месте, даже если сама сила неизвестна. Ведь скорость пропорциональна

$$\sqrt{\frac{bg^2ds^2}{dx^2}},$$

т. е. пропорциональна $\frac{ds}{dx}$. Отсюда очевидно, что скорость будет наименьшей в точке A, где касательная параллельна оси BC.

§ 183. Подставив в уравнение $2vddx = Pdxdy$ величину $\frac{bg^2ds^2}{dx^2}$, найденную для v, получим $2bg^2ds^2ddx = Pdx^3dy$. Из этого уравнения, если вместо P поставим соответствующую заданную зависимость от x и y, найдем уравнение для кривой, которую описывает тело. Если же это будет известно, то можно будет одновременно узнать, какова скорость тела в любом месте.

§ 184. Из уравнения $v=\frac{bg^2ds^2}{dx^2}$ легко определить время, за которое тело описывает дугу BM. Элемент его $\frac{ds}{\sqrt{v}}$ равен $\frac{dx}{g\sqrt{b}}$. Интеграл его $\frac{x}{g\sqrt{b}}$ даст искомое время. Отсюда становится ясным, что времена, отвечающие различным дугам, относятся между собой, как соответствующие абсциссы, а при различных бросаниях отношение времен, за которые описываются какие-либо дуги, будет слагаться из прямого отношения соответствующих абсцисс и обратного отношения начальных скоростей и синусов углов, образуемых начальными направлениями движения с направлением сил.

Таким образом, тело, равномерно движущееся по оси со скоростью, достигаемой из высоты bgg, повсюду будет соответствовать телу, описывающему кривую. Подобным же образом, если бы брошенное тело равномерно двигалось по прямой со скоростью, приобретаемой из b, оно достигало бы в то же время тех же аппликат.

§ 185. Пусть сила P будет постоянной, каковой является тяжесть, и обозначим эту силу через h, а силу тяжести через 1. Будем иметь уравнение $2bg^2ds^2ddx = hdx^3dy$, которое приводится к уравнению $\frac{2bg^2ds^2ddx}{dx^3} = hdy$, интеграл которого есть $\frac{-bg^2ds^2}{dx^2}+C=hy$. Если $y=0$, то $dx=gds$. Таким образом, $C=b$. Следовательно, $bdx^2-bg^2ds^2 = hydx^2 = bdx^2-bg^2dx^2-bg^2dy^2$. Это дает $dx\sqrt{bf^2-hy}=gdy\sqrt{b}$, поскольку $1-gg=ff$. Отсюда $dx=\frac{gdy\sqrt{b}}{\sqrt{bf^2-hy}}$ и далее $x=\frac{C-2g\sqrt{b^2f^2-bhy}}{h}$. Так как при $y=0$ должно быть $x=0$, то $C=2bfg$.

Отсюда $x=\frac{2bfg-2g\sqrt{b^2f^2-bhy}}{h}$, либо $hx^2=4bfgx-4bggy$.

§ 186. Это уравнение относится к параболе. Следовательно, в сделанном предположении брошенное тело опишет параболу, что было уже ранее показано гораздо более простым способом. Ось этой параболы совпадает с аппликатой там, где $y=bf^2:h$, а при этом $x=2bfg:h$. Итак, если AC является осью, то $AC=bf^2:h$ и $BC=2bfg:h$. Положим $AP=X$ и $PM=Y$. Тогда $x=2bfg:h-Y$ и $y=bf^2:h-X$. Отсюда следует уравнение $Y^2=\frac{4bgg}{h}X$ между X и Y. Следовательно, параметр параболы есть $4bgg:h$, а расстояние от фокуса до вершины составляет $bgg:h$.

§ 187. Высота, порождающая скорость в M, равна $bg^2ds^2:dx^2$. А это выражение равно $b-hy$. Поскольку же $y=\frac{bf^2}{h}-X$, то

$$v=b-bf^2+hX=bg^2+hX.$$

Расстояние точки M от фокуса составляет $bgg:h+X$. Следовательно, если сила будет равна силе тяжести, или $h=1$, то v будет равно расстоянию от фокуса. Итак, брошенное тяжелое тело опишет параболу, и скорость в каждом месте будет такой, какая может быть достигнута из высоты, равной расстоянию тела от фокуса параболы.

§ 188. Если будет задана кривая BMA, которую описывает тело, а также начальная скорость в B, порождаемая из некоторой высоты, то можно будет в любом месте определить силу, увлекающую тело по направлению к оси так, чтобы тело описывало предложенную кривую. Ведь (§ 183) $P=\frac{2bg^2ds^2ddx}{dx^3dy}$ или, поскольку радиус кривизны $r=\frac{dsdy}{ddx}$, $P=\frac{2bg^2ds^3}{rdx^3}$. Таким образом, из данного уравнения можно найти P.

Пусть g обозначает косинус угла, который кривая образует с осью в B. Если он прямой, то P должно быть бесконечно меньше, чем сила тяжести, а скорость повсюду должна быть равна нулю. Случай этот является, следовательно, лишь воображаемым.

§ 189. Может, однако, произойти, что при $b=\infty$ тело будет обладать истинным движением. Это произойдет в том случае, если bg^2 будет величиной конечной.

Пусть указанная кривая BMA будет четвертью окружности, а скорость в вершине A порождается из высоты c. Поскольку (§ 182) $v=\frac{bg^2ds^2}{dx^2}$, а в A $dx=ds$, то $c=bg^2$, и поэтому $P=\frac{2cds^3}{rdx^3}$. Пусть радиус круга будет равен a. Тогда $r=a$ и $yy=2ax-xx$, а $ds=\frac{adx}{\sqrt{2ax-xx}}$. Отсюда

$$P=\frac{2a^2c}{(2ax-xx)\sqrt{2ax-xx}}=\frac{2aac}{y^3}.$$

Следовательно, сила должна быть обратно пропорциональна кубу аппликаты и $v=\frac{aac}{yy}$.

§ 190. Пусть теперь сила будет направлена к неподвижной точке C, а брошенное тело, приводимое в движение этой силой, опишет кривую линию BMA (рис. 26). Пусть тело находится в каком-либо месте M; обозначим расстояние этого места от C через y, а силу, которая увлекает тело в M к C, через P, полагая силу тяжести равной 1. Проведем в M касательную MT и опустим на нее из C перпендикуляр CT, который обозначим через p. Тогда $MT=\sqrt{yy-pp}$; обозначим эту величину ради краткости через t. Нормальная сила будет равна $\frac{Pp}{y}$, а тангенциальная сила равна $\frac{Pt}{y}$.

§ 191. Пусть скорость в M порождается из высоты v, а в m из высоты $v+dv$, и пусть радиус кривизны в M будет r. Проведя Cm, получим $y+dy$, либо, опуская из точки M на Cm перпендикуляр Mr, получим $mr=dy$, а вследствие подобия треугольников CMT и Mmr получим $Mr=\frac{pdy}{t}$ и $Mm=\frac{ydy}{t}$. Поскольку тангенциальная сила направлена против движения тела, то (§ 176) $dv=\frac{Pt}{y}\frac{ydy}{t}=-Pdy$ и (§ 178)

$r=\frac{2vy}{Pp}$. Но радиус кривизны $r=\frac{ydy}{dp}$. Поэтому $\frac{ydy}{dp}=\frac{2vy}{Pp}$, или $Ppdy=2vdp$.

§ 192. Первое из этих двух уравнений дает $Pdy=-dv$. Подставив это во второе уравнение, получим $2vdp+pdv=0$ или $ppv=C$. Пусть $v=b$ там, где $p=f$. Положим, что это имеет место в точке B. Тогда $C=bff$, а следовательно, $ppv=bff$ и $v=\frac{bff}{pp}$. Если мы хотим исходить только из пропорций, то, поскольку bff является постоянной, v будет обратно пропорционально p^2, а $\sqrt{v}$, или скорость тела в любом месте, будет обратно пропорциональна p, т. е. перпендикуляру, опущенному из неподвижной точки C на касательную. Таким образом, по данной кривой, которую тело описывает вокруг неподвижной точки как центра, можно узнать скорость в любом месте или, вернее, отношение, в котором находятся между собой скорости в различных точках.

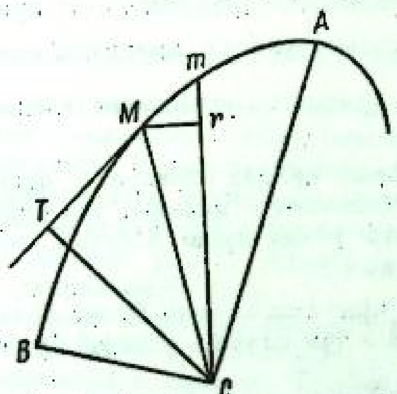


Рис. 26.

§ 193. Время, за которое описывается дуга BM и которое пусть будет T, найдем по известной скорости. Элемент времени или время, соответствующее Mm, составит

$$\frac{Mm}{\sqrt{v}}=\frac{pydy}{tf\sqrt{b}}=\frac{y\cdot Mr}{f\sqrt{b}},$$

поскольку $Mr=\frac{pdy}{t}$. Таким образом, элемент времени $dT=\frac{2\cdot MCm}{f\sqrt{b}}$. Следовательно, полное время, за которое пробегается дуга BM, равно $\frac{2\cdot \text{площадь } BCM}{f\sqrt{b}}$. Таким образом, времена, если мы принимаем во внимание только отношения, пропорциональны площадям, отсекаемым вокруг центра C. Прямые, проведенные из C на саму кривую, подобно CM, называются *радиусами-векторами*. Поэтому говорят, что времена относятся между собой как пространства, пробегаемые радиусом-вектором.

§ 194. Если в уравнении $Ppdy=2vdp$, найденном в § 191, вместо v положить его величину $\frac{bff}{pp}$, то оно перейдет в $Ppdy=\frac{2bffdp}{pp}$, или $Pp^3dy=2bffdp$. Из этого уравнения, если P будет дано через y или p или через то и другое, смотря по тому, как будет предложено, найдем уравнение искомой кривой. И, наоборот, если будет задана кривая, а также точка, к которой должны быть направлены силы, то найдем в каждом месте силу, под действием которой тело описывает эту кривую, а именно $P=\frac{2bffdp}{p^3dy}$, где bff определяется по данной скорости в данном месте кривой.

§ 195. Уравнение, найденное таким образом для кривой, описываемой как угодно брошенным и повсюду находящимся под воздействием данной силы P телом, есть уравнение, связывающее расстояние тела

от центра y и перпендикуляр к касательной из центра p. Поскольку же отсюда большей частью трудно сделать вывод о том, какова эта кривая, является ли она алгебраической или трансцендентной, я приведу это общее уравнение к уравнению в прямоугольных координатах, в которых обычно выражают кривые. Проведем прямую ось CB из центра C к точке B, поскольку даны скорость тела в B и перпендикуляр из C на касательную в точке B.

§ 196. Продолжим касательную MT до ее пересечения в точке V с осью CB и опустим из точки M аппликату MP, которая пусть будет z, а абсцисса $CP=x$ (рис. 27). Тогда подкасательная $PV=\frac{-zdx}{dz}$ и $CV=\frac{xdz-zdx}{dz}$. Далее,

$$MV=\sqrt{z^2+\frac{z^2dx^2}{dz^2}}=\frac{z}{dz}\sqrt{dx^2+dz^2}.$$

Но $MV:MP=CV:CT$, т. е.

$$\frac{z}{dz}\sqrt{dx^2+dz^2}:z=\frac{xdz-zdx}{dz}:p.$$

Поэтому

$$p=\frac{xdz-zdx}{\sqrt{dx^2+dz^2}} \quad \text{и} \quad y=\sqrt{x^2+z^2}.$$

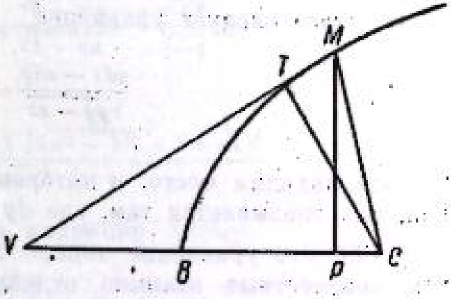


Рис. 27.

Для того чтобы выражение $\sqrt{x^2+z^2}$ не запутало вычисления, удобнее исследовать уравнение между y и x. Поскольку $z=\sqrt{yy-xx}$, то

$$p=\frac{(xdy-ydx)\sqrt{y}}{\sqrt{ydx^2+ydy^2-2xdxdy}}.$$

§ 197. Из предыдущего мы имеем уравнение $Pp^3dy=2bffdp$, заключающее в себе природу кривой. Пусть P всецело зависит от y и постоянных, так что силу, которая толкает тело к точке C, можно определить по расстоянию от C. Пусть $\int Pdy=Q$ и $Q=0$ при $y=BC=a$. Таким образом, Q будет функцией от y. Но интегрирование предыдущего уравнения даст

$$\int Pdy=C-\frac{bff}{pp}=Q.$$

Поскольку теперь $p=f$ при $Q=0$, или $y=a$, то $C=b$. Поэтому получаем уравнение $bpp-bff=Qpp$, из которого при подстановке вместо p его значения возникнет уравнение

$$(b-Q)\,y\,(xdy-ydx)^2=bff\,(ydx^2+ydy^2-2xdxdy).$$

§ 198. Пусть $b-Q=R$. Тогда

$$Rx^2ydy^2-2Rxy^2dxdy+Ry^3dx^2=bffydx^2+bffydy^2-2bffxdxdy.$$

Следовательно,

$$dx^2=\frac{2Rxy^2dxdy-2bffxdxdy+bffydy^2-Rx^2ydy^2}{Ry^3-bffy}$$

и

$$dx=\frac{Rxy^2dy-bffxdy\pm fdy\sqrt{(yy-xx)(bRyy-bbff)}}{Ry^3-bffy}=$$

$$=\frac{xdy\sqrt{Ryy-bff}\pm fdy\sqrt{b(yy-xx)}}{y\sqrt{Ryy-bff}}.$$

Из этого следует уравнение

$$\frac{ydx-xdy}{\sqrt{yy-xx}}=\frac{\pm fdy\sqrt{b}}{\sqrt{Ryy-bff}}.$$

Отсюда находим место, в котором радиус CM перпендикулярен к кривой; оно оказывается там, где $dy=0$, или $Ryy=bff$.

§ 199. Это уравнение теперь легко приводится к другому, в котором неизвестные взаимно отделены. В конце концов положим, что $x=uy$. Тогда $\sqrt{yy-xx}=y\sqrt{1-uu}$ и $ydx-xdy=yydu$. Следовательно, будем иметь уравнение

$$\frac{du}{\sqrt{1-uu}}=\frac{\pm fdy\sqrt{b}}{y\sqrt{Ryy-bff}}.$$

Поскольку здесь положено, что R зависит только от y, то неизвестные более не будут смешаны. Поэтому, если R будет определено, станет известным, является ли кривая алгебраической или нет. Алгебраической же она будет в том случае, если

$$\int\frac{fdy\sqrt{b}}{y\sqrt{Ryy-bff}}$$

будет дугой окружности, соизмеримой с дугой окружности, которая выражается через $\int\frac{du}{\sqrt{1-uu}}$.

Примечание на полях рукописи. Площадь же BCM равна

$$\int\frac{\pm fydy\sqrt{b}}{2\sqrt{Ryy-bff}}=\int\frac{y(ydx-xdy)}{2\sqrt{yy-xx}}.$$

Следовательно, время, за которое описывается BM, составляет $\int\frac{ydy}{\sqrt{Ryy-bff}}$.

§ 200. Итак, кривая будет алгебраической всякий раз, когда $\frac{fdy\sqrt{b}}{y\sqrt{Ryy-bff}}$ сможет быть приведено к форме $\frac{AdY}{\sqrt{B^2-Y^2}}$. Но

$$\int\frac{AdY}{\sqrt{B^2-Y^2}}=\frac{A}{2\sqrt{-1}}\lg\frac{\sqrt{B^2-Y^2}+Y\sqrt{-1}}{\sqrt{B^2-Y^2}-Y\sqrt{-1}}$$

и

$$\int\frac{du}{\sqrt{1-uu}}=\frac{1}{2\sqrt{-1}}\lg\frac{\sqrt{1-uu}+u\sqrt{-1}}{\sqrt{1-uu}-u\sqrt{-1}}.$$

Поскольку эти интегралы должны быть равны, то, прибавив постоянную, получим уравнение

$$\left(\frac{\sqrt{B^2-Y^2}+Y\sqrt{-1}}{\sqrt{B^2-Y^2}-Y\sqrt{-1}}\right)^A=\frac{\sqrt{1-uu}+u\sqrt{-1}}{\sqrt{1-uu}-u\sqrt{-1}}C.$$

Тогда

$$u=\frac{(\sqrt{B^2-Y^2}+Y\sqrt{-1})^A-C(\sqrt{B^2-Y^2}-Y\sqrt{-1})^A}{2B^A\sqrt{-C}}.$$

А C здесь должно иметь такого рода, например, форму:

$$\frac{\sqrt{1-gg}+g\sqrt{-1}}{\sqrt{1-gg}-g\sqrt{-1}}=C.$$

§ 201. Пусть $C=\left(\frac{\sqrt{B^2-E^2}+E\sqrt{-1}}{\sqrt{B^2-E^2}-E\sqrt{-1}}\right)^A$. При этом из расчета сами собой исчезнут мнимые величины. Получим

$$u=\frac{(\sqrt{B^2-E^2}-E\sqrt{-1})^A(\sqrt{B^2-Y^2}+Y\sqrt{-1})^A}{2B^{2A}\sqrt{-1}}-$$
$$-\frac{(\sqrt{B^2-E^2}+E\sqrt{-1})^A(\sqrt{B^2-Y^2}-Y\sqrt{-1})^A}{2B^{2A}\sqrt{-1}}.$$

Отсюда явствует, что всякий раз, когда A будет числом рациональным, уравнение сможет быть освобождено от мнимых величин, что, однако, будет тем сложнее, чем большим будет становиться число A. Положим $A=1$. Тогда

$$u=\frac{2Y\sqrt{B^2-E^2}-2E\sqrt{B^2-Y^2}}{2B^2},$$

или

$$B^2u=Y\sqrt{B^2-E^2}-E\sqrt{B^2-Y^2}.$$

§ 202. Таким путем для каждого случая можно найти уравнение, связывающее u и y. Если в этом уравнении вместо u положить $x:y$, то получим уравнение между x и y в соответствии с тем, что требуется. А именно

$$x=\frac{(\sqrt{B^2-E^2}-E\sqrt{-1})^A(\sqrt{B^2-Y^2}+Y\sqrt{-1})^Ay}{2B^{2A}\sqrt{-1}}-$$
$$-\frac{(\sqrt{B^2-E^2}+E\sqrt{-1})^A(\sqrt{B^2-Y^2}-Y\sqrt{-1})^Ay}{2B^{2A}\sqrt{-1}}.$$

Предусмотрительнее было бы, прежде чем приводить это уравнение, определить из заданных условий, какова постоянная E. А она будет определена из того условия, что при $x=a$ также и $y=a$. Таким образом, уравнение станет более простым и более удобным для приведения.

§ 203. Для определения скорости в любом месте, или на любом удалении от центра, имеется уравнение $dv=-Pdy$, откуда $v=C-\int Pdy$. Но было принято, что $\int Pdy=Q$ и Q исчезает при $y=a$. Если же $y=a$, то должно быть $v=b$, поскольку при этом тело находится в B, где, как мы положили, тело имеет такую скорость. Следовательно, $C=b$ и $v=b-Q=R$ (§ 198). Из этого уравнения явствует, что на одинаковых расстояниях от центра тело имеет одинаковую скорость, которая зависит от скорости тела на расстоянии a от центра C; при этом не следует принимать во внимание направление, по которому тело было сначала брошено.

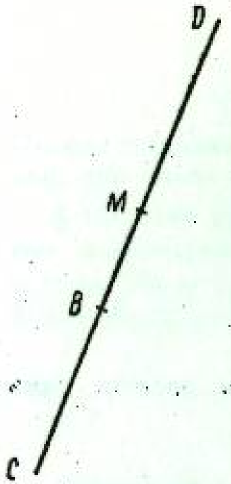


Рис. 28.

§ 204. Итак, если тело под действием одной и той же силы P будет двигаться по прямой линии DC к центру C (рис. 28) и в точке B, при $BC=a$, оно будет иметь скорость, достигаемую из высоты b, то в любом месте M, при $CM=y$, скорость тела будет равна той, которую бы оно имело, описывая кривую линию, на том же расстоянии y от центра. Исходя из этого можно найти точку D, в которой скорость обращается в нуль; очевидно, эта точка будет там, где $b=Q$. Следовательно, поскольку Q является функцией от y, из этого уравнения найдется y, и полученная величина даст расстояние CD. Эта высота CD будет постоянно обозначаться через K.

§ 205. Обратимся к частным случаям и положим сначала, что сила P повсюду одинакова, а именно равна h. Тогда $\int Pdy=hy-ha=Q$ и $R=b+ha-hy$. Следовательно,

$$\frac{du}{\sqrt{1-uu}}=\frac{\pm f dy\sqrt{b}}{y\sqrt{byy+hayy-hy^3-bff}}.$$

Описанная кривая будет нормальна к радиусу-вектору там, где $dy=0$, и значит там, где $byy+hayy-hy^3-bff=0$. Сколько действительных корней имеется в этом уравнении, на таком же число расстояний от C радиус-вектор будет иметь максимум или минимум.

Пусть кривая будет нормальна к BC в самой точке B. Тогда $f=a$ и, значит, $byy+hayy-hy^3-baa=0$. Это уравнение приводит к уравнениям: $y-a=0$, $by+ba-hyy=0$, второе из которых дает

$$y=\frac{b+\sqrt{bb+4abh}}{2h} \quad \text{и} \quad y=\frac{b-\sqrt{bb+4abh}}{2h}.$$

Следовательно, это случается на трех расстояниях.

§ 206. Пусть по-прежнему $f=a$. Тогда

$$\frac{du}{\sqrt{1-uu}}=\frac{\pm a dy\sqrt{b}}{y\sqrt{(y-a)(by+ba-hyy)}}.$$

Это уравнение не может быть алгебраическим, поскольку второй член имеет не такую форму, какую мы назначили; однако оно легко разрешается с помощью квадратур. Хотя последнее уравнение и кажется, вследствие того что $f=a$, более частным, чем первое, тем не менее оно содержит в себе все кривые, которые тело может описать в этом предположении. Ведь всегда будет иметься место, где радиус-вектор нормален к кривой, и его можно принять в B. Здесь $K=a+\frac{b}{h}$. Время же, за которое совершается движение вдоль дуги BM, равно

$$\int\frac{ydy}{\sqrt{(y-a)(ab+by-hyy)}}.$$

. . . .

О движении тела, притягиваемого пропорционально расстоянию от центра

§ 211. Время, за которое описывается весь периметр эллипса, равно удвоенной площади эллипса, деленной на $a\sqrt{b}$ (согласно § 193 и поскольку $f=a$). Если теперь различные эллипсы будут описаны вокруг центров, имеющих такую силу притяжения, то время, за которое описывается один эллипс, будет пропорционально произведению сопряженных осей, деленному на $a\sqrt{b}$, т. е. пропорционально $\sqrt{h}$.* Поэтому, если h будет одинаково во всех центрах, то все периоды будут равны между собой. Это же имеет место, если многие тела вращаются вокруг одного и того же центра, притяжение которого пропорционально расстояниям.

§ 212. Пусть теперь силы P будут обратно пропорциональны квадратам расстояний — этот случай является наиболее известным. Тогда $P=h^2:y^2$, $Q=\frac{hh}{a}-\frac{hh}{y}$ и $R=\frac{aby-hhy+ahh}{ay}$. Таким образом,

$$\frac{du}{\sqrt{1-uu}}=\frac{\pm f dy\sqrt{ab}}{y\sqrt{aby^2-hhy^2+ahhy-abff}}.$$

Следовательно, кривая будет нормальна к радиусу там, где

$$y=\frac{ahh\pm\sqrt{a^2h^4-4abffhh+4aabbff}}{2hh-2ab}.$$

Поскольку f не может быть больше, чем a, эта величина никогда не может быть мнимой. Итак, пусть в B кривая будет нормальна к BC. Тогда $f=a$ и

*Здесь h — постоянная в зависимости $P=y:h$ силы P от расстояния y.—*Г. М.*

$$y = \frac{ahh \pm (ahh - 2aab)}{2hh - 2ab} = +a \text{ или } \frac{aab}{hh - ab}.$$

§ 213. Таким образом, положив $f = a$, получим

$$\frac{du}{\sqrt{1 - uu}} = \frac{\pm ady\sqrt{ab}}{y\sqrt{aby^2 - hhy^2 + ahhy - a^3b}}.$$

Положим $y = \frac{1}{p}$. Тогда

$$\frac{du}{\sqrt{1 - uu}} = \frac{\mp adp\sqrt{ab}}{\sqrt{ab - hh + ahhp - a^3bpp}}.$$

Положим $p = \frac{q}{a\sqrt{ab}} + \frac{hh}{2a^2b}$. Тогда

$$\frac{du}{\sqrt{1 - uu}} = \frac{\pm dq}{\sqrt{\frac{(2ab - hh)^2}{4ab} - qq}}.$$

Последняя дробь, сопоставленная с $\frac{AdY}{\sqrt{B^2 - Y^2}}$, даст $A = 1$ (будем употреблять только знак $+$), $Y = q$ и $B = \frac{2ab - hh}{2\sqrt{ab}}$.

§ 214. Если $x = a$, то также $y = a$. Если же $y = a$, то $p = \frac{1}{a}$ и $q = \frac{2ab - hh}{2\sqrt{ab}} = B = Y$. Из уравнения § 202 найдем, следовательно, постоянную E. Будем иметь уравнение

$$2B^2\sqrt{-1} = B\sqrt{-1}\left(\sqrt{B^2 - E^2} - E\sqrt{-1}\right) + B\sqrt{-1}\left(\sqrt{B^2 - E^2} + E\sqrt{-1}\right),$$

или $B = \sqrt{B^2 - E^2}$, либо $E = 0$. Найдя это, получим уравнение

$$\frac{2B^2x\sqrt{-1}}{y} = B\sqrt{B^2 - Y^2} + BY\sqrt{-1} - B\sqrt{B^2 - Y^2} + BY\sqrt{-1} = 2BY\sqrt{-1},$$

или $Bx = Yy = qy$. Но $q = \frac{2aab - hhy}{2y\sqrt{ab}}$. Следовательно, $2abx - hhx = 2aab - hhy$.

§ 215. Но $y = \sqrt{xx + zz}$. Поэтому $2aab - 2abx + hhx = hh\sqrt{xx + zz}$ и, возводя в квадрат, получим

$$4a^4b^2 - 8a^3b^2x + 4a^2bh^2x + 4a^2b^2x^2 - 4abh^2x^2 = h^4zz.$$

Положим

$$x = t + \frac{2a^2b - ah^2}{2ab - 2h^2}$$

и получим уравнение

$$h^4z^2 = \frac{a^3bh^4}{hh - ab} + (4aabb - 4abhh)\,tt.$$

Это уравнение, если $hh > ab$, относится к эллипсу, если $hh < ab$ — к гиперболе, если же $hh = 2ab$ — к окружности, а если $hh = ab$ — к параболе. Абсциссы t, взятые от центра на какой-либо из двух осей, являются полуосями $\frac{ahh}{2hh - 2ab}$ и $a\sqrt{\frac{ab}{hh - ab}}$. Следовательно, оси относятся между собой, как $hh : 2\sqrt{ab(hh - ab)}$. Это отношение, поскольку $hh > ab$, всегда больше единицы, за исключением случая $hh = 2ab$, когда это отношение обращается в равенство.

§ 216. Половина расстояния между фокусами равна

$$a\sqrt{\frac{h^4}{4(hh - ab)^2} - \frac{ab}{hh - ab}} = \frac{ahh - 2aab}{2hh - 2ab},$$

что является той самой дробью, прибавление которой к t дает x. Итак, поскольку t отсчитывается из центра, начало абсцисс x будет находиться в фокусе. Поэтому в принятом предположении тело опишет эллипс, один из фокусов которого находится в центре C, к которому направлены силы. Расстояние K, которое составляет $\frac{ahh}{hh - ab}$, будет поэтому равно всей продольной оси.

§ 217. Время, в которое описывается весь эллипс, равно удвоенной площади эллипса, отнесенной к $a\sqrt{b}$. Поскольку, кроме того, площади различных эллипсов пропорциональны произведениям сопряженных осей, то, приняв во внимание другие периоды, которые имеют место в таком предположении, получим, что время, за которое описывается весь эллипс, пропорционально $\frac{aahh\sqrt{ab}}{2a(hh - ab)^{3/2}\sqrt{b}}$, т. е. $\frac{ahh\sqrt{a}}{(hh - ab)^{3/2}}$. Поскольку продольная ось $K = \frac{ahh}{hh - ab}$, то $hh - ab = ahh : K$. Следовательно, время пропорционально $\frac{K\sqrt{K}}{h}$. Итак, если несколько тел вращаются вокруг одного и того же центра C, где h есть постоянная, то периоды будут находиться между собой в отношении полуторной степени продольных осей.

§ 218. Пусть силы, влекущие к C, относятся как некоторые степени расстояний, так что $P = y^n : h^n$. Тогда

$$Q = \frac{y^{n+1} - a^{n+1}}{(n + 1)h^n} \quad \text{и} \quad R = \frac{(n + 1)bh^n + a^{n+1} - y^{n+1}}{(n + 1)h^n}.$$

Поскольку же $y = K$ при $R = 0$, то $K = \sqrt[n+1]{(n + 1)bh^n + a^{n+1}}$.

Уравнение же для кривой будет

$$\frac{du}{\sqrt{1 - uu}} = \frac{\pm fdy\sqrt{(n + 1)bh^n}}{y\sqrt{(n + 1)bh^ny^2 + a^{n+1}y^2 - y^{n+3} - (n + 1)bffh^n}} =$$

$$=\frac{\pm f dy \sqrt{K^{n+1}-a^{n+1}}}{y\sqrt{K^{n+1}y^2-y^{n+3}-K^{n+1}ff+a^{n+1}ff}}.$$

. . . .

О движении тела, притягиваемого к двум центрам сил, силы каждого из которых пропорциональны расстояниям от него

§ 253. Итак, пусть сила, которая влечет M к C, относится к силе тяжести, как CM к постоянной линии a, а сила, которая влечет M к D, пусть относится к силе тяжести, как DM к постоянной b. Тогда $\frac{CM}{AM}=a$ и $\frac{DM}{BM}=b$ (рис. 29), причем сила тяжести положена равной 1.

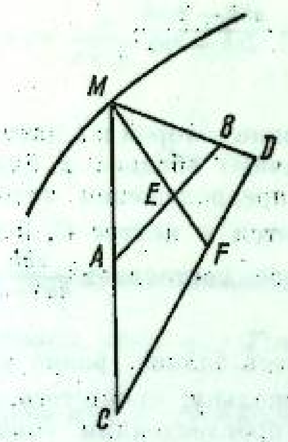


Рис. 29.

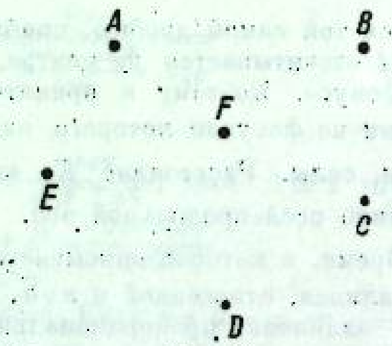


Рис. 30.

Поэтому $CF:DF=a:b$. Отсюда ясно, что F является центром тяжести двух тел, расположенных в C и D, массы которых пропорциональны $\frac{1}{a}$ и $\frac{1}{b}$. На величину $\frac{1}{a}$, которую можно назвать интенсивностью силы, должно быть умножено CM, чтобы была получена сама сила, влекущая M к C, а $\frac{1}{b}$ является интенсивностью силы, влекущей M к D. Итак, обе эти силы своим действием приводят к тому же результату, который достигается действием одной силы, направленной к центру тяжести тел, помещенных в их центрах, и соответственно пропорциональных интенсивностям этих сил.

§ 254. Сила же, которая влечет M к F, выражается через $2ME$. Но

$$\sin CMF : \sin CMD = MB : 2ME = (CF\cdot MD):(CD\cdot MF).$$

Следовательно,

$$ME:MF=(CD\cdot MB):2(CF\cdot MD).$$

С другой стороны,

$$(CF+DF)\ (\text{т. е. } CD):CF=(a+b):a.$$

Следовательно,

$$ME:MF=(a+b)MB:(2a\cdot MD)$$

и

$$2ME=\frac{(a+b)MF\cdot MB}{a\cdot MD}=\frac{(a+b)MF}{ab}=MF\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right).$$

Таким образом, сила, которая влечет M к F, прямо пропорциональна расстоянию MF, и ее интенсивность равна сумме интенсивностей сил, действовавших на M по направлению к C и D.

§ 255. Таким же образом обстоит дело, если дано любое количество центров сил A, B, C, D, E, которые притягивают к себе пропорционально расстояниям. Ведь можно будет выделить одну точку F (рис. 30), в которой сила, притягивающая к себе также пропорционально расстояниям, будет производить такое же действие, что и упомянутые силы A, B, C, D, E, вместе взятые. Точка F будет центром тяжести тел, расположенных в A, B, C, D и E, веса которых относятся между собой, как интенсивности сил, которые соответственно исходят из этих точек. А интенсивность силы, направленной к F, будет равна сумме интенсивностей всех упомянутых сил. Итак, тело, брошенное и притягиваемое всеми данными силами, опишет эллипс, центр которого находится в F, и он весь будет находиться в одной плоскости.

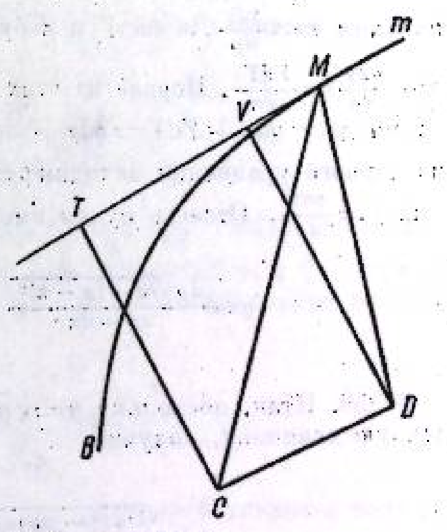


Рис. 31.

§ 256. Перехожу к остальным случаям, когда центростремительные силы не пропорциональны расстояниям и когда не может быть найден какой-либо один равнодействующий центр сил, если таких сил несколько. В этих случаях может оказаться, что орбита, описанная телом, не будет расположена в одной плоскости, поскольку равнодействующая всех сил может выйти за пределы плоскости, по которой тело уже движется. Однако, если все центры сил будут расположены в одной плоскости и тело будет брошено по прямой, которая находится в той же плоскости, то ясно, что вся кривая, которую опишет тело, будет расположена в этой же плоскости.

§ 257. Пусть будут даны два центра сил C и D, которые притягивают к себе в каком-либо отношении расстояний. А тело пусть будет брошено так, чтобы оно находилось в одной плоскости с точками C и D. Вся его орбита BM (рис. 31) будет расположена в той же плоскости. Пусть тело придет в M, где его скорость будет достигаться из высоты v. Пусть тело продвинется на элемент $Mm=ds$, и пусть его скорость в m будет порождаться из высоты $v+dv$. Назовем $CM=y$, $DM=Y$. Проведем касательную к M и опустим на нее из точек C и D перпендикуляры CT и DV. Пусть $CT=p$, $DV=\pi$. Положим ради краткости $MT=q=\sqrt{yy-pp}$ и $MV=\rho=\sqrt{YY-\pi\pi}$. Пусть, далее, радиус кривизны в M есть r и $CD=c$.

§ 258. Итак, $TV=q-\rho$ и $DV-CT=\pi-p$. Следовательно,

$$cc=qq-2q\rho+\rho\rho+pp-2p\pi+\pi\pi=yy+YY-2q\rho-2p\pi.$$

Далее, из треугольника CMT получим $ds=\frac{ydy}{q}$, а из треугольника DVM получим $ds=\frac{YdY}{\rho}$. Таким образом, $\frac{ydy}{q}=\frac{YdY}{\rho}$. Наконец, из y и p получим $r=\frac{ydy}{dp}$, а из Y и π будем иметь $r=\frac{YdY}{d\pi}$, откуда следует, что $\frac{ydy}{dp}=\frac{YdY}{d\pi}$. Первое из этих трех уравнений после дифференцирования даст $ydy+YdY=qd\rho+\rho dq+pd\pi+\pi dp$. До дифференцирования из первого уравнения находим $\rho=q-\sqrt{cc-(p-\pi)^2}$, а из двух остальных $\rho=\frac{qd\pi}{dp}$. Отсюда будем иметь

$$q=\frac{dp\sqrt{cc-(p-\pi)^2}}{dp-d\pi} \text{ и } \rho=\frac{d\pi\sqrt{cc-(p-\pi)^2}}{dp-d\pi}.$$

§ 259. Итак, поскольку $y=\sqrt{pp+qq}$, то, подставив вместо q найденную величину, получим

$$y=\frac{\sqrt{ccdp^2+pp\,(dp-d\pi)^2-(p-\pi)^2\,dp^2}}{dp-d\pi}$$

и подобным же образом

$$Y=\frac{\sqrt{ccd\pi^2+\pi\pi\,(dp-d\pi)^2-(p-\pi)^2\,d\pi^2}}{dp-d\pi}.$$

С помощью этих уравнений из расчета могут быть удалены излишние неизвестные, так чтобы, наконец, было получено уравнение, составленное только из двух переменных. Но две переменные величины должны остаться в расчете; они и само уравнение делают более стройным и его разрешение более легким.

§ 260. Пусть сила, которая увлекает тело в M к C, равна P, а сила, которая увлекает M к другому центру D, пусть равна Q. Разложим и ту и другую силу на две составляющие — нормальную и тангенциальную. Нормальная сила, происходящая от P, будет равна $\frac{Pp}{y}$, а нормальная сила, происходящая от Q, будет равна $\frac{Q\pi}{Y}$. Поскольку эти силы — согласующиеся, то вся нормальная сила, произведенная обеими силами, будет равна $\frac{Pp}{y}+\frac{Q\pi}{Y}$. Но, согласно § 178, нормальная сила относится к силе тяжести, как удвоенная высота, порождающая скорость тела, к радиусу кривизны кривой. Таким образом, положив, что сила тяжести равна 1, получим $\frac{Pp}{y}+\frac{Q\pi}{Y}=\frac{2v}{r}$ и $v=\frac{Ppr}{2y}+\frac{Q\pi r}{2Y}$.

Поскольку же $r=\frac{ydy}{dp}=\frac{YdY}{d\pi}$, то $v=\frac{Ppdy}{2dp}+\frac{Q\pi dY}{2d\pi}$.

§ 261. Тангенциальная сила, происходящая от силы P, направленной к C, равна $\frac{Pq}{y}$, а тангенциальная сила, происходящая от силы Q, направленной к D, равна $\frac{Q\rho}{Y}$. Поскольку эти силы — согласующиеся, то вся тангенциальная сила равна $\frac{Pq}{y}+\frac{Q\rho}{Y}$. А эта сила, поскольку мы полагаем, что y и Y возрастают, направлена против движения. Следовательно, (§ 176)

$$dv=-\frac{Pqds}{y}-\frac{Q\rho ds}{Y}.$$

Но $ds=\frac{ydy}{q}=\frac{YdY}{\rho}$. Поэтому имеем $dv=-Pdy-QdY$. Это уравнение, поскольку P является некоторой функцией от y, а Q — функцией от Y, может быть проинтегрировано или по крайней мере разрешено с помощью квадратур; получим

$$v=C-\int Pdy-\int QdY.$$

Постоянная C должна быть определена из данной скорости тела в заданном месте.

§ 262. Из двух найденных уравнений могут быть определены две силы P и Q. Найдем

$$P=\frac{\pi dpdv+2vdpd\pi}{dy\,(pd\pi-\pi dp)} \text{ и } Q=\frac{pd\pi dv+2vd\pi dp}{dY\,(\pi dp-pd\pi)}.$$

Отсюда следует, что если заданы какая-либо кривая, скорость движущегося по ней тела в отдельных местах и, сверх того, две какие-либо точки, то можно найти силы, направленные к этим точкам, под действием которых тело свободно описывает эту кривую и в отдельных местах имеет заданные скорости.

§ 263. Поскольку в расчете должны оставаться только две неизвестные величины, то представляется наиболее выгодным для стройности расчета, если в нем останутся только y и Y. Так как P и Q являются функциями этих величин, то они в общем случае не могут быть удалены из расчета. Итак, определим p, q, π, ρ через y и Y, к чему я прибавляю ds и r, поскольку ds и r легко могут быть найдены по y и Y и относятся как к y, так и к Y. Итак, $q=\frac{ydy}{ds}$, $\rho=\frac{YdY}{ds}$, а поэтому

$$p=\frac{y\sqrt{ds^2-dy^2}}{ds} \text{ и } \pi=\frac{Y\sqrt{ds^2-dY^2}}{ds}.$$

Также

$$dp=\frac{ydy}{r} \quad \text{и} \quad d\pi=\frac{YdY}{r}.$$

Отсюда

$$dq=ds-\frac{y\sqrt{ds^2-dy^2}}{r}$$

и

$$d\rho=ds-\frac{Y\sqrt{ds^2-dY^2}}{r}.$$

§ 264. Если в уравнении $cc=(q-\rho)^2+(p-\pi)^2$ вместо p, π, q и ρ подставить найденные величины, то из полученного уравнения найдем ds, а именно

$$ds^2=\frac{4yY\,(ccdydY+yYdy^2+yYdY^2-yydydY-YYdydY)}{2ccyy+2ccYY+2y^2Y^2-c^4-y^4-Y^4}.$$

Затем по известному элементу кривой найдем радиус кривизны r только через y и Y с их дифференциалами. Но $r=\frac{ydy}{dp}$ и $p=\frac{y\sqrt{ds^2-dy^2}}{ds}$. Если положить здесь ds постоянным, то

$$dp=\frac{ds^2dy-dy^3-ydyddy}{ds\sqrt{ds^2-dy^2}}.$$

Поэтому будем иметь

$$r=\frac{yds\sqrt{ds^2-dy^2}}{ds^2-dy^2-yddy}=\frac{Yds\sqrt{ds^2-dY^2}}{ds^2-dY^2-YddY}.$$

§ 265. Выше мы уже вывели, что $v=C-\int Pdy-\int QdY$. Но в § 260 мы нашли, что

$$v=\frac{Ppr}{2y}+\frac{Q\pi r}{2Y}.$$

Следовательно, мы имеем уравнение

$$2C-2\int Pdy-2\int QdY=\frac{Ppr}{y}+\frac{Q\pi r}{Y},$$

из которого должна быть найдена природа кривой, которую описывает тело. Поскольку же

$$p=\frac{y\sqrt{ds^2-dy^2}}{ds} \quad \text{и} \quad \pi=\frac{Y\sqrt{ds^2-dY^2}}{ds},$$

то

$$2C-2\int Pdy-2\int QdY=\frac{Pr\sqrt{ds^2-dy^2}+Qr\sqrt{ds^2-dY^2}}{ds}.$$

Из этого уравнения имеем

$$r=\frac{2Cds-2ds\int Pdy-2ds\int QdY}{P\sqrt{ds^2-dy^2}+Q\sqrt{ds^2-dY^2}}.$$

Но r найдено еще в предыдущем параграфе. Две эти величины в совокупности дадут уравнение для искомой кривой.

§ 266. Если дана кривая, которую должно описать тело, и одна из двух сил P, направленная к данной точке C, то можно будет найти и другую силу Q, направленную к данной точке D, под действием

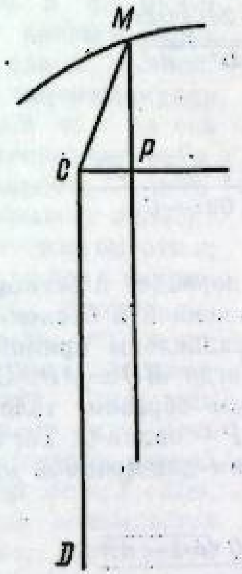


Рис. 32.

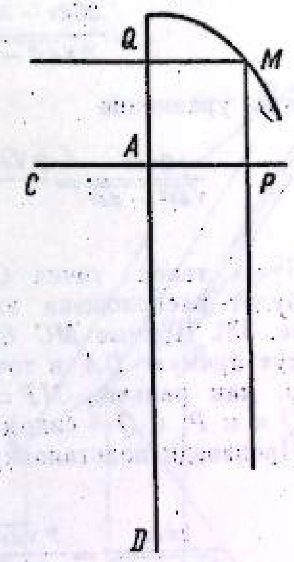


Рис. 33.

которой тело описывает данную кривую. Поскольку кривая дана, положим, что $\frac{pr}{2y}=x$ и $\frac{\pi r}{2Y}=z$. Тогда $v=Px+Qz$. Следовательно,

$$dv=Pdx+xdP+Qdz+zdQ=-Pdy-QdY,$$

или

$$dQ+Q\frac{dY+dz}{z}+\frac{Pdy+xdP+Pdx}{z}=0.$$

Умножим это на $e^{\int\frac{dY+dz}{z}}$. Тогда

$$e^{\int\frac{dY+dz}{z}}Q=D-\int\frac{e^{\int\frac{dY+dz}{z}}(Pdy+xdP+Pdx)}{z},$$

где D может быть определено из того, что задано.

§ 267. Положим, что один из двух центров D перенесен в бесконечность так, что c есть ∞. При этом MD всегда параллельно CD (рис. 32). Проведем перпендикуляр CP к CD и обозначим PM через z. Тогда $Y=C+z$, $dY=dz$. Пусть Q будет обозначать функцию от z.

Тогда

$$ds = \frac{\sqrt{yydy^2 + yydz^2 - 2yzdydz}}{\sqrt{yy - zz}}$$

и

$$r = \frac{ds\sqrt{ds^2 - dz^2}}{-ddz}$$

при условии, что dz принято за постоянную. С помощью же другого уравнения (§ 265) получим

$$r = \frac{2Cds - 2ds\int Pdy - 2ds\int Qdz}{P\sqrt{ds^2 - dy^2} + Q\sqrt{ds^2 - dz^2}}$$

и будем иметь уравнение

$$\frac{2ddz}{\sqrt{ds^2 - dz^2}} = \frac{P\sqrt{ds^2 - dy^2} + Q\sqrt{ds^2 - dz^2}}{\int Pdy + \int Qdz - C}.$$

§ 268. Пусть теперь точка C также перейдет в бесконечность, но пусть она будет расположена на продолженной в бесконечность прямой PA (рис. 33). Прямые MC будут параллельны прямой PC. Пусть они пересекут прямую DA в точке Q. Тогда $MQ = AP$. Пусть $MQ = AP = x$ и, как раньше, $MP = z$. Таким образом, тело в M будет влекомо к Q и к P: к Q — силой P, а к P — силой Q. Тогда $y = \infty + x$ и $dy = dx$. Произведя подстановку, получим для искомой кривой уравнение

$$\frac{2ddz}{\sqrt{ds^2 - dz^2}} = \frac{P\sqrt{ds^2 - dx^2} + Q\sqrt{ds^2 - dz^2}}{\int Pdx + \int Qdz - C}.$$

Но $dx = \sqrt{ds^2 - dz^2}$ и $dz = \sqrt{ds^2 - dx^2}$. Следовательно, возникает уравнение

$$\frac{2ddz}{dx} = \frac{Pdz + Qdx}{\int Pdx + \int Qdz - C}.$$

. . . .

О движении тела под действием трех сил, направления которых параллельны координатам

[Теорема.* Три основные силы, под действием которых тело движется по кривой, находящейся не в одной и той же плоскости, и на которые должны быть разложены другие силы, взаимно перпендикулярны между собой. Одна из них — тангенциальная, а остальные нормальны к ней; из последних одна направлена в заданной плоскости, а направление другой перпендикулярно к этой плоскости. Ни одна из этих сил не может изменять действие остальных.

* Приводимый отрывок взят из «Механики» Эйлера (Opera omnia, II-1, pp. 279—281) и включен сюда для связности изложения. — *Г. М.*

Доказательство. Возьмем неподвижную плоскость APQ (рис. 34) с осью AP, и пусть Mm будет элементом, который описан телом. Опустим из точек M и m перпендикуляры MQ и mq на неподвижную плоскость, а из точек Q и q — перпендикуляры QP, qp на ось. Если бы на тело не действовали никакие силы, то оно продвинулось бы вдоль продолжения прямой Mm со скоростью, которую оно имело на Mm; за промежуточек времени, равный тому, за который оно прошло Mm, оно пройдет в n, описав элемент mn, равный и совпадающий по направлению с элементом Mm. Поэтому, если опустить из n перпендикуляр nr на плоскость APQ, элементы Qq и qr будут между собой равны и будут лежать на одной прямой; в силу этого перпендикуляр $r\pi$, опущенный из r на ось AP, отрежет элемент $p\pi = Pp$.

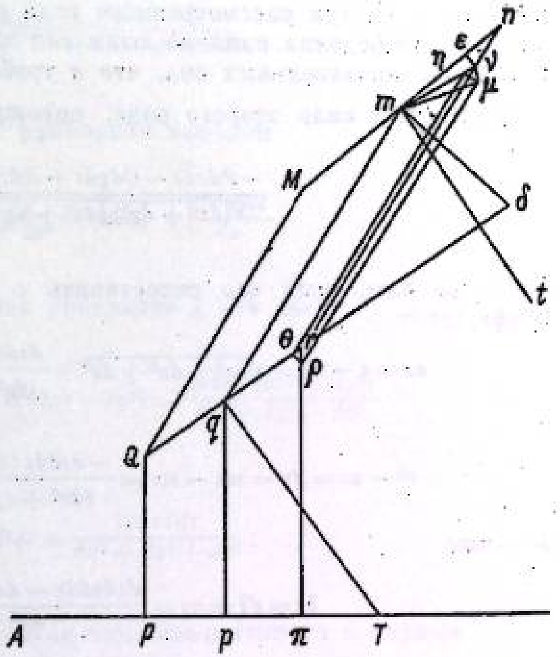


Рис. 34.

Пусть скорость, с которой тело описывает элемент Mm, достигается из высоты v; рассмотрим сначала тангенциальную силу, которая направлена вдоль mn и целиком расходуется на изменение скорости. Пусть эта тангенциальная сила есть T, при силе тяжести, равной единице; тогда $dv = T \cdot Mm$, а элемент mn описывается со скоростью, достигаемой из высоты $v + dv$.

Рассмотрим, далее, силу в плоскости Mr, имеющую направление ms, перпендикулярное к направлению тела Mm. Эта сила, следовательно, действует так, что тело отклоняется от mn и продвигается вдоль элемента $m\nu$, расположенного в той же плоскости Mr. Пусть эта сила равна N; поскольку радиус кривизны элементов Mm и $m\nu$ равен $\frac{m\nu^2}{\nu\varepsilon}$, где $\nu\varepsilon$ есть перпендикуляр, опущенный из ν на mn, то $\frac{2v \cdot \nu\varepsilon}{m\nu^2} = N$. Но $\frac{\nu\varepsilon}{m\nu}$ есть синус угла $nm\nu$. Поэтому

$$2v \sin nm\nu = N \cdot m\nu = N \cdot Mm$$

и, следовательно,

$$\sin nm\nu = \frac{N \cdot Mm}{2v}.$$

Пусть третья сила будет перпендикулярна к обеим рассмотренным mn и ms, так что ее направление mt перпендикулярно к плоскости Mr. Таким образом, эта сила не препятствует действию предыдущих, которые в свою очередь не препятствуют ей и не подвергают никакому изменению. Следовательно, вся она издерживается на то, чтобы тело отклонилось от плоскости Mr; пусть она переводит тело из ν в μ, так чтобы плоскость $\nu m\mu$ была перпендикулярна к плоскости Mr, и под ее действием образуется угол $\nu m\mu$. Определив это действие тем же способом, который мы применили по отношению к предыдущей нормальной силе, найдем, что если эта сила будет M, то $\sin \nu m\mu = \frac{M \cdot Mm}{2v}$.

Итак, под одновременным действием этих трех сил тело, после того как оно опишет элемент Mm, продвинется по элементу $m\mu$, увеличив, разумеется, скорость до скорости, достигаемой из высоты $v + T \cdot Mm$. Какие бы другие силы ни действовали на тело, все они могут быть разложены на три рассмотренного рода силы, направленные вдоль mn, ms и mt. Определив влияние этих сил на тело, мы тем самым узнаем и влияние произвольных сил, что и требовалось доказать].

§ 284. Вся сила второго рода, порождающая угол $nm\nu$, составляет

$$\frac{-Pdxdz - Qdydz + Rdx^2 + Rdy^2}{\sqrt{(dx^2+dy^2)(dx^2+dy^2+dz^2)}}.$$

Угол же $nm\nu$, если его сопоставить с углом bac предыдущего пара графа, дает

$$ac = \varphi = m\nu = \sqrt{dx^2+dy^2+dz^2} + \frac{dzddz\,(dx^2+dy^2) - dz^2dyddy}{(dx^2+dy^2)\sqrt{dx^2+dy^2+dz^2}}$$

и

$$ab - ac = d\chi = mn - m\nu = \frac{-dzddz\,(dx^2+dy^2) + dz^2dyddy}{(dx^2+dy^2)\sqrt{dx^2+dy^2+dz^2}},$$

а также

$$bc = d\xi = n\nu = \frac{dzdyddy - ddz\,(dx^2+dy^2)}{dx^2+dy^2}.$$

Таким образом, вся сила, порождающая этот угол, равна

$$\frac{-Pdxdz - Qdydz + R\,(dx^2+dy^2)}{\sqrt{(dx^2+dy^2)(dx^2+dy^2+dz^2)}} = \frac{2v\sqrt{d\xi^2 - d\chi^2}}{\varphi\varphi} =$$

$$= \frac{2vdzdyddy - 2vddz\,(dx^2+dy^2)}{(dx^2+dy^2+dz^2)^{3/2}\sqrt{dx^2+dy^2}}.$$

Отсюда получим уравнение

$$Pdxdz + Qdydz - R\,(dx^2+dy^2) = \frac{2vddz\,(dx^2+dy^2) - 2vdzdyddy}{dx^2+dy^2+dz^2}.$$

§ 285. Вся сила третьего рода равна $\frac{Qdx - Pdy}{\sqrt{dx^2+dy^2}}$; она производит отклонение на угол $\nu m\mu$. Сопоставив угол $\nu m\mu$ с углом при a в § 283, получим

$$ac = \varphi = m\eta = m\mu = \sqrt{dx^2+dy^2+dz^2}$$

и $d\chi = 0$, а также

$$bc = \mu\eta = d\xi = \frac{-dxddy}{\sqrt{dx^2+dy^2}}.$$

Поэтому

$$\frac{Qdx - Pdy}{\sqrt{dx^2+dy^2}} = \frac{2v\sqrt{d\xi^2 - d\chi^2}}{\varphi\varphi} = \frac{-2vdxddy}{(dx^2+dy^2+dz^2)\sqrt{dx^2+dy^2}}.$$

Следовательно,

$$Qdx - Pdy = \frac{-2vdxddy}{dx^2+dy^2+dz^2}.$$

§ 286. Из этого последнего уравнения выводем

$$\frac{-2vdzdyddy}{dx^2+dy^2+dz^2} = Qdzdy - \frac{Pdy^2dz}{dx}.$$

Подстановка этого в последнее уравнение § 284 даст

$$Pdxdz + \frac{Pdy^2dz}{dx} - R\,(dx^2+dy^2) = \frac{2vddz\,(dx^2+dy^2)}{dx^2+dy^2+dz^2},$$

откуда вытекает

$$Pdz - Rdx = \frac{2vdxddz}{dx^2+dy^2+dz^2}.$$

Таким образом, из этого уравнения, соединенного с первым

$$Pdy - Qdx = \frac{2vdxddy}{dx^2+dy^2+dz^2},$$

находим

$$ddy : ddz = (Pdy - Qdx) : (Pdz - Rdx).$$

§ 287. Изложенным способом, с помощью которого мы пришли к нахождению кривой, описываемой телом, и скорости в любом месте, нам остается еще определить, в какой плоскости движется тело в отдельные моменты и как меняется эта плоскость. Представим себе плоскость, на которой расположены три места тела: M, m и μ. Пусть она пересечет плоскость APQ по прямой RS, встречающей аппликату PQ в R (рис. 35). Тогда $QR = \frac{zddy}{ddz}$ и $PR = \frac{zddy - yddz}{ddz}$. Тангенс угла POS равен $\frac{dzddy - dyddz}{dxddz}$, а тангенс угла, который образует плоскость RSM с плоскостью APQ, равен

$$\frac{\sqrt{dx^2ddz^2 + (dzddy - dyddz)^2}}{dxddy}.$$

§ 288. Поскольку $ddy:ddz=(Pdy-Qdx):(Pdz-Rdx)$, то в нашем случае

$$QR=\frac{Pzdy-Qzdx}{Pdz-Rdx},$$

тангенс угла POS равен

$$\frac{dy}{dx}+\frac{Pdydz-Qdxdz}{Pdzdx-Rdx^2}=\frac{Rdy-Qdz}{Pdz-Rdx}.$$

Итак, то, что обычно отыскивается посредством дифференциалов второго порядка, мы получаем этим способом при помощи одних только дифференциалов первого порядка.

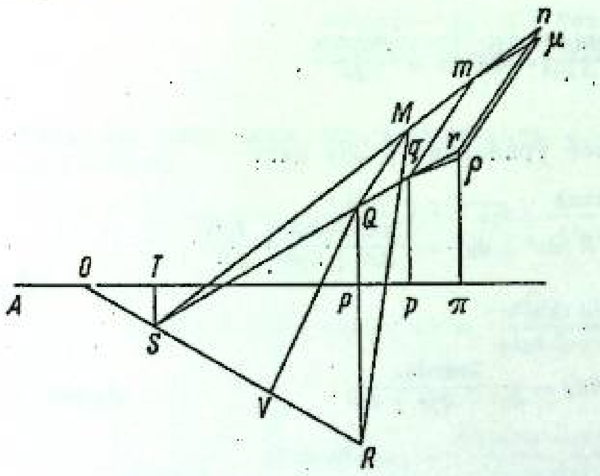


Рис. 35.

Если $dz=adx+bdy$, то кривая, которую описывает тело, будет постоянно находиться в одной и той же плоскости. Но $1:b=(Pdy-Qdx):(Pdz-Rdx)$, или $bPdy-bQdx=Pdz-Rdx$, и $R=aP+bQ$.

Следовательно, если отношение между тремя силами будет таково, то тело будет всегда оставаться в одной и той же плоскости.

§ 289. В § 282 было найдено уравнение

$$v=C-\int Pdx-\int Qdy-\int Rdz.$$

Подставив эту величину вместо v в оба уравнения § 286, будем иметь

$$\frac{2dxddy}{dx^2+dy^2+dz^2}=\frac{Pdy-Qdx}{C-\int Pdx-\int Qdy-\int Rdz}$$

и

$$\frac{2dxddz}{dx^2+dy^2+dz^2}=\frac{Pdz-Rdx}{C-\int Pdx-\int Qdy-\int Rdz}.$$

Если из этих двух уравнений взять то, в которое не входит z, то оно послужит для определения кривой $Qq\rho$, которая представляет собой проекцию описанной кривой на плоскость APQ.

Глава IV. О КРИВОЛИНЕЙНОМ ДВИЖЕНИИ ТОЧКИ ПОД ДЕЙСТВИЕМ АБСОЛЮТНЫХ И ОТНОСИТЕЛЬНЫХ СИЛ

§ 290. Мы определили относительную силу как силу, зависящую от скорости, которая действует на тела, ускоряя или замедляя их движение. Эта зависимость от скорости проистекает от того, что такого рода силы действуют одним образом, когда тела им уступают, и другим образом, когда тела оказывают им сопротивление. Отсюда следует вывод, что относительная сила не может иметь места, если направление силы будет перпендикулярно к направлению движения тела, поскольку тогда тело и не уступает силе и не противодействует ей. Итак, поскольку все силы могут быть разложены на нормальные и тангенциальные, то, следовательно, относительные силы могут принадлежать только к силам тангенциальным. Таким образом, относительные силы, которые мы будем рассматривать, всегда будут тангенциальными.

§ 291. Пусть интенсивность относительной силы или высота, порождающая скорость, которую должно было бы иметь тело, если бы действие силы было равно силе тяжести, будет равна q. Эта величина является постоянной, если относительная сила единообразна, и переменной или зависящей от места, в котором находится тело, если относительная сила переменна. Пусть закон относительной силы выражается некоторой функцией скоростей, и пусть эта функция равна Q, если скорость достигается из высоты q, а если же скорость равна $\sqrt{v}$, то пусть эта функция будет V. Здесь V является такой же функцией от v, какой Q является от q.

§ 292. Пусть тело или, вернее, точка опишет кривую AM (рис. 36), и пусть тогда, когда она придет в M, скорость ее будет порождаться из высоты v. А относительная сила, действующая вдоль касательной MT, пусть будет такой же, какая была описана в предыдущем параграфе. Следовательно, она будет относиться к силе тяжести, как V к Q, и будет равна $V:Q$, если мы примем, что сила тяжести равна единице. Очевидно, что если бы действовала одна только относительная сила, то тело не было бы смещено с касательной MT, по которой оно начало свое движение, а под действием этой силы менялась бы только скорость. Поэтому тело двигалось бы по прямой линии.

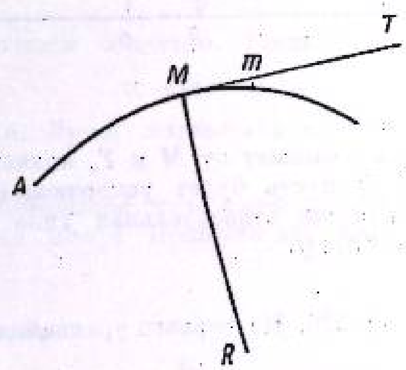


Рис. 36.

§ 293. Поскольку, однако, мы здесь намереваемся рассматривать криволинейные движения, то необходимо, чтобы была присоединена абсолютная сила. Пусть нормальная сила, от нее происходящая, равна N, а тангенциальная равна T. Только последняя из них, таким образом, либо увеличивается, либо уменьшается под действием относительной силы. Обозначим радиус кривизны MR в M через r, а элемент Mm через ds. Пока тело пробегает этот элемент, оно достигает скорости, порождаемой из высоты $v+dv$.

Тогда (§ 178) $N=\frac{2v}{r}$. Положив, что тангенциальная сила T и относительная сила $V:Q$ являются ускоряющими, получим (§ 176) $dv=$

$=Tds+Vds:Q$. Если же обе они будут замедляющими, то $dv=-Tds-$ $-Vds:Q$. Замедляющие силы должны, конечно, наделяться знаком минус.

§ 294. Пусть абсолютная сила будет направлена к бесконечно удаленному центру сил. Проведем прямую AP (рис. 37) так, чтобы направления силы были к ней перпендикулярны. Пусть тело опишет кривую AM, а его скорость, пока оно находится в M, будет порождаться из высоты v, а в точке m — из высоты $v+dv$. Пусть $Mm=ds$, а перпендикуляр из M на AP $MP=y$. Тогда $mp=y+dy$. Пусть абсолютная сила, которая увлекает тело в точке M вдоль MP, равна P. Относительная же сила равна $V:Q$, как мы уже положили.

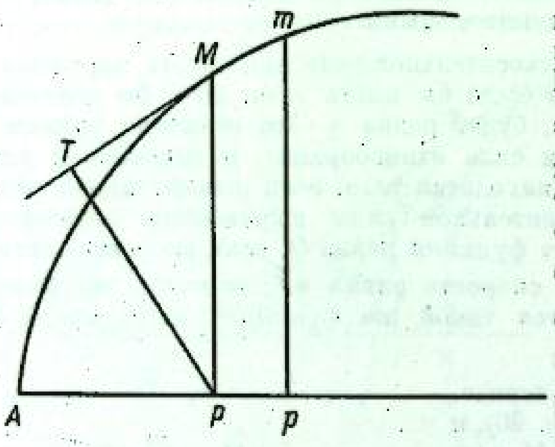


Рис. 37.

§ 295. Проведем в точке M касательную MT и опустим на нее из P перпендикуляр PT. Пусть $Pp=dx$. Тогда $PT=$ $=\frac{ydx}{ds}$ и $MT=\frac{ydy}{ds}$. Разложим силу P на нормальную и тангенциальную. Нормальная сила, действующая вдоль TP, будет равна $\frac{Pdx}{ds}$, а тангенциальная сила, действующая вдоль MT, $\frac{Pdy}{ds}$. Положив, что радиус кривизны в M есть r, получим $\frac{Pdx}{ds}=\frac{2v}{r}$. Тангенциальная сила $\frac{Pdy}{ds}$, поскольку она увлекает от M к T, является замедляющей, а относительная сила $V:Q$ пусть будет ускоряющей. Следовательно, $dv=-Pdy+Vds:Q$. Если же относительная сила будет замедляющей, то $dv=-Pdy-$ $-Vds:Q$.

§ 296. Из первого уравнения $v=\frac{Prdx}{2ds}$. Принимая dx за постоянную, получим $r=\frac{ds^3}{-dxddy}$. Но $ds=\sqrt{dx^2+dy^2}$. Таким образом, $v=\frac{Pds^2}{-2ddy}$ и

$$dv=\frac{-dPds^2ddy-2Pdsddydds+Pds^2d^3y}{2ddy^2}=\frac{-dPds^2ddy-2Pdyddy^2+Pds^2d^3y}{2ddy^2},$$

поскольку $dsdds=dyddy$.

Примечание на полях рукописи. Следовательно, элемент времени

$$\frac{ds}{\sqrt{v}}=\frac{\sqrt{-2ddy}}{\sqrt{P}}.$$

Поскольку же $dv=-Pdy\pm Vds:Q$, в зависимости от того, является ли относительная сила ускоряющей или замедляющей, то

$$\pm Vds:Q=\frac{-dPds^2ddy+Pds^2d^3y}{2ddy^2}.$$

Поскольку V является функцией от v, подставим в нее вместо v величину $\frac{Pds^2}{-2ddy}$. Получим локальное уравнение для искомой кривой AM; ведь Q также зависит от места M.

§ 297. Пусть абсолютная сила P будет постоянной, и положим $P=2g$. Пусть закон относительной силы будет некоторой m-й степенью высот, порождающих скорости. Тогда $Q=q^m$ и $V=v^m$. Но $v=\frac{gds^2}{-ddy}$, и поэтому

$$V=\frac{g^m ds^{2m}}{(-ddy)^m}.$$

Итак, будем иметь уравнение

$$\pm\frac{g^m ds^{2m+1}}{q^m(-ddy)^m}=\frac{gds^2d^3y}{ddy^2},$$

или

$$\pm\frac{g^{m-1}ds^{2m-1}}{q^m(-ddy)^{m-2}}=d^3y.$$

§ 298. Приспособим изложенное к нашим областям. Тогда $P=1$ и $g=1/2$.

Примечание на полях рукописи. Лучше сохранить g в общем виде.

Пусть относительная сила будет единообразной, т. е. $q=c$, и пусть она будет замедляющей, приобретая знак минус. Положив это, получим уравнение

$$\frac{-2ds^{2m-1}}{(2c)^m(-ddy)^{m-2}}=d^3y.$$

Положим $dy=pds$. Тогда $dx=ds\sqrt{1-pp}$ и

$$ddx=0=\frac{dds-ppdds-pdpds}{\sqrt{1-pp}}.$$

Следовательно, будем иметь

$$dds=\frac{pdpds}{1-pp}=\frac{dyddy}{ds}=pddy.$$

Таким образом, $ddy=\frac{dpds}{1-pp}$ и

$$d^3y = \frac{dsddp - ppdsddp + dpdds - ppdpdds - 2pdp^2ds}{(1-pp)^2} = \frac{dsddp - ppdsddp - pdp^2ds}{(1-pp)^2}\ *$$

после подстановки значения dds. Отсюда возникает уравнение

$$\frac{dsddp - ppdsddp - pdp^2ds}{(1-pp)^2} = \frac{-2ds^{2m-1}(1-pp)^{m-2}}{(2c)^m(-dpds)^{m-2}},$$

или

$$pdp^2 - ddp\,(1-pp) = \frac{2ds^m(1-pp)^m}{(2c)^m(-dp)^{m-2}}.$$

Положим, далее, $ds = udp$. Поскольку $ddx = 0$, то

$$(1-pp)\,ddp = pdp^2 - \frac{dudp}{u}(1-pp).$$

Отсюда найдем уравнение

$$\frac{du}{u^{m+1}} = \frac{2dp\,(1-pp)^{m-1}}{(2c)^m(-1)^{m-2}}$$

и, проинтегрировав его, получим

$$C - \frac{u^{-m}}{m} = \frac{2}{(2c)^m(-1)^{m-2}}\int dp\,(1-pp)^{m-1},$$

или

$$C - \frac{1}{mu^m} = \frac{-2}{(2c)^m}\int dp\,(pp-1)^{m-1}.$$

§ 299. Искомое уравнение

$$\frac{-2ds^{2m-1}}{(2c)^m(-ddy)^{m-2}} = d^3y$$

может быть выведено другим способом, и тогда будет найдено более легкое построение. Положим $dy = \frac{dx}{p}$. Тогда $ddy = \frac{-dpdx}{pp}$ и

$$d^3y = \frac{-pdxddp + 2dp^2dx}{p^3}.$$

Но $ds = \frac{dx}{p}\sqrt{1+pp}$. При этой подстановке данное уравнение перейдет в следующее:

$$\frac{-2dx^{m+1}(1+pp)^{\frac{2m-1}{2}}}{(2c)^m\,dp^{m-2}} = -pdxddp + 2dp^2dx.$$

* Вследствие допущенной в этой формуле Эйлером описки последующие результаты этого параграфа неверны. — *Г. М.*

Положим, далее, $dx = udp$. Тогда $ddp = \frac{-dudp}{u}$. Возникает уравнение

$$\frac{-2dp\,(1+pp)^{\frac{2m-1}{2}}}{(2c)^m} = \frac{pdu + 2udp}{u^{m+1}}.$$

После деления второго члена на p^{2m+1} он станет интегрируемым, и

$$-2\int\frac{dp\,(1+pp)^{\frac{2m-1}{2}}}{p^{2m+1}} = D - \frac{(2c)^m}{mp^{2m}u^m},$$

а из этого

$$u = \frac{2c}{pp\left[mD + 2m\int\frac{dp\,(1+pp)^{\frac{2m-1}{2}}}{p^{2m+1}}\right]^{1/m}}.$$

§ 300. Итак, теперь

$$dx = \frac{2cdp}{pp\left[mD + 2m\int\frac{dp\,(1+pp)^{\frac{2m-1}{2}}}{p^{2m+1}}\right]^{1/m}}$$

и

$$x = \int\frac{2cdp}{pp\left[mD + 2m\int\frac{dp\,(1+pp)^{\frac{2m-1}{2}}}{p^{2m+1}}\right]^{1/m}},$$

а также

$$dy = \frac{dx}{p} = \frac{2cdp}{p^3\left[mD + 2m\int\frac{dp\,(1+pp)^{\frac{2m-1}{2}}}{p^{2m+1}}\right]^{1/m}}$$

и

$$y = \int\frac{2cdp}{p^3\left[mD + 2m\int\frac{dp\,(1+pp)^{\frac{2m-1}{2}}}{p^{2m+1}}\right]^{1/m}}.$$

Пусть $p = \frac{1}{t}$. Тогда

$$x = \int\frac{-2cdt}{\left[mD - 2m\int dt\,(1+tt)^{\frac{2m-1}{2}}\right]^{1/m}}$$

и

$$y = \int\frac{-2ctdt}{\left[mD - 2m\int dt\,(1+tt)^{\frac{2m-1}{2}}\right]^{1/m}}.$$

Отсюда, поскольку и x и y заданы через t, становится возможным построение искомой кривой посредством квадратур.

§ 301. В § 297 было $v=\frac{gds^2}{-ddy}$. Теперь же мы положили $g=1/2$. Следовательно, $v=\frac{ds^2}{-2ddy}$. Подставив вместо ds и ddy величины, которые мы подставляли в предыдущем параграфе, получим

$$v=\frac{c(1+tt)}{\left[mD-2m\int dt\,(1+tt)^{\frac{2m-1}{2}}\right]^{1/m}}.$$

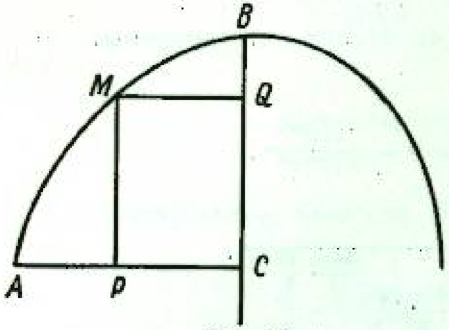


Рис. 38.

Пусть B будет высшая точка кривой, которую описывает тело (рис. 38). Там $dy=0$, и поэтому $\frac{1}{p}$, или t, равно нулю. Пусть тело имеет в B скорость, порождаемую из высоты b. Возьмем интеграл от $dt\,(1+tt)^{\frac{2m-1}{2}}$ так, чтобы при $t=0$ он также становился равным нулю. Следовательно, при $t=0$ $v=b=\frac{c}{(mD)^{1/m}}$. Соответственно $mD=\frac{c^m}{b^m}$ и

$$v=\frac{bc(1+tt)}{\left[c^m-2mb^m\int dt\,(1+tt)^{\frac{2m-1}{2}}\right]^{1/m}}.$$

§ 302. Проведем из B вертикаль BC и опустим на нее из M перпендикуляр MQ. Обозначим BQ через X и MQ через Y. Тогда $dx=-dY$ и $dy=-dX$. Положив вместо mD величину $\frac{c^m}{b^m}$, будем иметь

$$dX=\frac{2bctdt}{\left[c^m-2mb^m\int dt\,(1+tt)^{\frac{2m-1}{2}}\right]^{1/m}},$$

а также

$$dY=\frac{2bcdt}{\left[c^m-2mb^m\int dt\,(1+tt)^{\frac{2m-1}{2}}\right]^{1/m}}.$$

Если эти интегралы будут взяты так, чтобы они становились равными нулю при $t=0$, то тем самым будут найдены истинные значения X и Y.

§ 303. Исходя из этого легко показать, каким образом кривая становится параболой, если исчезает относительная сила. Относительная сила будет исчезающей, если она окажется столь малой, что тело должно будет иметь бесконечную скорость для того, чтобы сопротивление было равно силе тяжести. Итак, если $c=\infty$, то относительная сила будет равна нулю. Положим $c=\infty$. Тогда

$$2mb^m\int dt\,(1+tt)^{\frac{2m-1}{2}}$$

исчезает в сравнении с c^m, и будем иметь $v=b(1+tt)$ и $dX=2btdt$, а также $dY=2bdt$. Таким образом, $X=btt$ и $Y=2bt$. Следовательно, $t=Y:2b$ и $X=Y^2:4b$, или $Y^2=4bX$, и $v=b+X$, совершенно так же, как это явствовало уже из предыдущей главы.

§ 304. Здесь элемент кривой

$$ds=\frac{2bcdt\sqrt{1+tt}}{\left[c^m-2mb^m\int dt\,(1+tt)^{\frac{2m-1}{2}}\right]^{1/m}}.$$

Если разделить его на $\sqrt{v}$, т. е. на

$$\frac{\sqrt{bc}\,(1+tt)}{\left[c^m-2mb^m\int dt\,(1+tt)^{\frac{2m-1}{2}}\right]^{1/2m}},$$

то будем иметь элемент времени, за который происходит восхождение по дуге MB. Этот элемент времени составляет

$$\frac{2dt\sqrt{bc}}{\left[c^m-2mb^m\int dt\,(1+tt)^{\frac{2m-1}{2}}\right]^{1/2m}}.$$

Но

$$\left[c^m-2mb^m\int dt\,(1+tt)^{\frac{2m-1}{2}}\right]^{1/2m}=\sqrt{\frac{2bcdt}{dY}}$$

и $t=\frac{dX}{dY}$. Приняв dY за постоянную, получим $dt=\frac{ddX}{dY}$. Отсюда находим, что элемент времени равен $\sqrt{2ddX}$ или, если положить $ddX=ZdY^2$, $dY\sqrt{2Z}$.

§ 305. Обратимся к частным случаям, и пусть $m=1/2$, т. е. относительная сила является замедляющей пропорционально скоростям. Тогда

$$dX=\frac{2bctdt}{\left[c^{1/2}-b^{1/2}\int dt\,(1+tt)^0\right]^2}=\frac{2bctdt}{(\sqrt{c}-t\sqrt{b})^2}$$

и

$$dY=\frac{2bcdt}{(\sqrt{c}-t\sqrt{b})^2}.$$

Отсюда

$$Y=\frac{2bt\sqrt{bc}}{\sqrt{bc}-bt}.$$

Поскольку $t=\frac{dX}{dY}$, то

$$Y=\frac{2bdX\sqrt{bc}}{dY\sqrt{bc}-bdX},$$

или

$$YdY\sqrt{bc}-bYdX=2bdX\sqrt{bc},$$

а также

$$bdX=\frac{YdY\sqrt{bc}}{Y+2\sqrt{bc}}=dY\sqrt{bc}-\frac{2bcdY}{Y+2\sqrt{bc}}.$$

Из этого путем интегрирования найдем

$$bX=Y\sqrt{bc}-2bc\lg\frac{2\sqrt{bc}+Y}{2\sqrt{bc}}$$

и

$$X=Y\sqrt{\frac{c}{b}}-2c\lg\frac{2\sqrt{bc}+Y}{2\sqrt{bc}}.$$

§ 306. Пусть $m=1$, т. е. относительная сила является замедляющей пропорционально квадрату скоростей. Тогда

$$dX=\frac{2bctdt}{c-2b\int dt\sqrt{1+tt}}$$

и

$$dY=\frac{2bcdt}{c-2b\int dt\sqrt{1+tt}},$$

а также

$$ds=\sqrt{dX^2+dY^2}=\frac{2bcdt\sqrt{1+tt}}{c-2b\int dt\sqrt{1+tt}}.$$

Пусть $\int dt\sqrt{1+tt}=L$, и пусть L будет такой функцией от t, чтобы она обращалась в нуль при $t=0$. Тогда $ds=\frac{2bcdL}{c-2bL}$. Следовательно,

$$s=-c\lg\frac{c-2bL}{c}=c\lg\frac{c}{c-2bL}.$$

Значит, $e^{\frac{s}{c}}=\frac{c}{c-2bL}$ и $c-2bL=ce^{-\frac{s}{c}}$. Отсюда вытекает $dY=2be^{\frac{s}{c}}dt$ и

$$t=\int\left(dY:2be^{\frac{s}{c}}\right).$$

Но ведь $t=\frac{dX}{dY}$. Следовательно,

$$\frac{dX}{dY}=\int\frac{dY}{2be^{\frac{s}{c}}}.$$

§ 307. Для того чтобы раскрыть это полнее, мы должны рассмотреть выражение $\int dt\sqrt{1+tt}$. Но этот интеграл станет равным нулю при $t=0$, если он будет выражен следующим образом:

$$\frac{t\sqrt{1+tt}-\lg(\sqrt{1+tt}-t)}{2}.$$

Найдя это, получим

$$dY=\frac{2bcdt}{c-bt\sqrt{1+tt}+b\lg(\sqrt{1+tt}-t)}$$

и

$$dX=\frac{2bctdt}{c-bt\sqrt{1+tt}+b\lg(\sqrt{1+tt}-t)}.$$

Существо дела, очевидно, не позволяет привести эти уравнения к более простому виду. Однако, если t взять чрезвычайно малым, то эти уравнения станут гораздо более короткими. Ведь тогда $\sqrt{1+tt}=1$ и $\lg(\sqrt{1+tt}-t)=-t$. Отсюда $dX=\frac{2bctdt}{c-2bt}$ и $dY=\frac{2bcdt}{c-2bt}$. Следовательно,

$$Y=-c\lg\frac{c-2bt}{c}=c\lg\frac{c}{c-2bt}.$$

Из этого вытекает

$$t=\frac{ce^{\frac{Y}{c}}-c}{2be^{\frac{Y}{c}}}=\frac{dX}{dY}.$$

§ 308. Из этого уравнения получим

$$2bdX=cdY-ce^{\frac{-Y}{c}}dY.$$

После интегрирования оно даст

$$2bX=cY+cce^{\frac{-Y}{c}}-cc,\ \text{или}\ \frac{-Y}{c}=\lg\frac{cc+2bX-cY}{cc}.$$

Следовательно,

$$Y=c\lg\frac{cc}{cc+2bX-cY}.$$

Это уравнение относится к кривой только тогда, когда t чрезвычайно мало. Если же t чрезвычайно мало, то $Y=2bt$. Следовательно, и Y должно быть чрезвычайно мало. Поэтому

$$e^{\frac{-Y}{c}}=1-\frac{Y}{c}+\frac{Y^2}{2c^2}-\frac{Y^3}{6c^3}.$$

Следовательно,

$$2bX=\frac{Y^2}{2}-\frac{Y^3}{6c}.$$

Это уравнение дает отрезок кривой, расположенный возле вершины B.

§ 309. Пусть теперь будет дана кривая AM (рис. 39), которую описывает тело, а также абсолютная сила P, влекущая тело вдоль MP, и требуется узнать относительную силу, под действием которой тело описывает заданную кривую. Поскольку в относительной силе следует учитывать два ее свойства — закон и интенсивность, то одно из них может также быть задано, если требуется узнать только ускоряющую или замедляющую силу, происходящую от относительной силы, которая выражается дробью $V:Q$. Пусть, таким образом, закон будет дан в виде m-й степени скоростей. Тогда $V=v^m$ и $Q=q^m$. Следовательно, надлежит найти интенсивность этой относительной силы q в любом месте M.

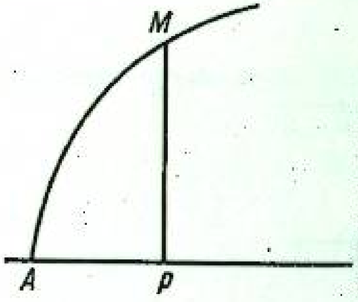


Рис. 39.

§ 310. Положив, как раньше, $AP=x$, $PM=y$ и $\sqrt{dx^2+dy^2}=ds$, получим, принимая dx за постоянную,

$$\pm Vds:Q=\frac{-dPds^2ddy+Pds^2d^3y}{2ddy^2}.$$

Но $v=\frac{Pds^2}{-2ddy}$. Следовательно,

$$V=v^m=\frac{P^mds^{2m}}{(-2ddy)^m}.$$

Далее, поскольку $Q=q^m$, то

$$\pm\frac{P^mds^{2m-1}}{q^m(-2ddy)^m}=\frac{-dPddy+Pd^3y}{2ddy^2}.$$

Следовательно,

$$q^m=\frac{\pm P^mds^{2m-1}}{2(Pd^3y-dPddy)(-2ddy)^{m-2}}$$

и

$$q=\frac{Pds^2}{-2ddy}\sqrt[m]{\frac{\pm 4ddy^2}{2ds(Pd^3y-dPddy)}}.$$

Таким образом, из этого уравнения мы находим интенсивность или высоту, порождающую скорость, которую тело должно иметь в M, чтобы относительная сила воздействовала на него так же, как сила тяжести.

Примечание на полях рукописи. Если взять уравнение

$$q^m=\frac{P^mds^{2m-1}}{2(Pd^3y-dPddy)(-2ddy)^{m-2}},$$

то отсюда следует, что в том случае, когда q^m положительно, сила является ускоряющей, а если q^m отрицательно, то сила является замедляющей.

§ 311. Пусть P будет величиной постоянной, равной $2g$. Тогда $dP=0$, и поэтому

$$q=\frac{gds^2}{-ddy}\sqrt[m]{\frac{\pm ddy^2}{gdsd^3y}}.$$

Положим, что кривая AM есть окружность, радиус которой равен a. Тогда

$$y=\sqrt{2ax-xx},\quad dy=\frac{adx-xdx}{\sqrt{2ax-xx}},$$

$$ddy=\frac{-aadx^2}{(2ax-xx)^{3/2}}$$

и

$$d^3y=\frac{3a^3dx^3-3aaxdx^3}{(2ax-xx)^{5/2}}.$$

Но $ds=\frac{adx}{\sqrt{2ax-xx}}$. Отсюда находим

$$q=g\sqrt{2ax-xx}\sqrt[m]{\frac{\pm a}{3g(a-x)}}=gy\sqrt[m]{\frac{\pm a}{3g(a-x)}}.$$

В точке M будем иметь

$$v=\frac{gds^2}{-ddy}=g\sqrt{2ax-xx}=gy.$$

§ 312. Если законом относительной силы будет пропорциональность квадрату скоростей, то $m=1$ и

$$q=\frac{\pm agy}{3g(a-x)}=\frac{\pm ay}{3(a-x)}.$$

Из знаков $\pm$ верхний будет иметь место в случае, если сила будет ускоряющей, а нижний, если сила замедляющая. Отсюда можно понять, что там, где $x=a$, q обращается в ∞, иначе говоря, скорость тела там должна быть бесконечной, чтобы относительная сила стала равна силе тяжести. Таким образом, относительная сила будет там бесконечно малой или исчезнет. Если сила ускоряющая, то $q=\frac{ay}{3(a-x)}$, если же сила замедляющая, то $q=\frac{-ay}{3(a-x)}$. Итак, если $x<a$, то сила будет ускоряющей, если же $x>a$, она будет замедляющей.

§ 313. Пусть относительная сила останется выраженной в общем виде и ей соответствует тангенциальная сила $V:Q$. Направления же абсолютной силы пусть будут теперь обращены к некоторой неподвижной точке C (рис. 40). Пусть тело опишет кривую AM, и пусть оно имеет, находясь в M, скорость, порождаемую из высоты v. Проведем CM, и пусть $CM=y$, а абсолютная сила, действующая в M, будет равна P, радиус кривизны в M равен r. Проведем касательную MT и из C опустим на нее перпендикуляр CT. Обозначив элемент Mm через ds, получим

$$CT=\frac{y\sqrt{ds^2-dy^2}}{ds} \quad \text{и} \quad MT_{,}=\frac{ydy}{ds}.$$

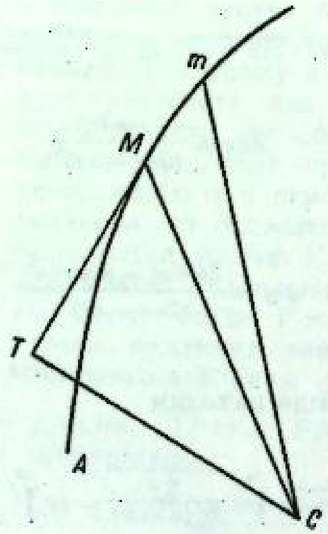


Рис. 40.

Положим $CT=p$. Тогда

$$p^2ds^2=yyds^2-yydy^2 \quad \text{и} \quad ds=\frac{ydy}{\sqrt{yy-pp}}.$$

§ 314. Разложим силу P на составляющие — тангенциальную, действующую вдоль MT, и нормальную, действующую вдоль TC. Тангенциальная сила будет равна $\frac{Pdy}{ds}=\frac{P\sqrt{yy-pp}}{y}$. Она уменьшает скорость тела. Следовательно, положим, что она равна $\frac{-P\sqrt{yy-pp}}{y}$. К ней следует прибавить относительную силу $\pm V:Q$. По этой причине сила, увеличивающая скорость, будет равна

$$\frac{-P\sqrt{yy-pp}}{y}\pm V:Q.$$

Следовательно, согласно § 176,

$$dv=\frac{-Pds\sqrt{yy-pp}}{y}\pm Vds:Q=-Pdy\pm Vydy:(Q\sqrt{yy-pp}).$$

Нормальная же сила равна $\frac{Pp}{y}$. Отсюда, согласно § 178, будем иметь

$$\frac{Pp}{y}=\frac{2v}{r}=\frac{2vdp}{ydy},$$

поскольку $r=\frac{ydy}{dp}$. Таким образом, $Ppdy=2vdp$.

РАЗДЕЛ II. *О ДВИЖЕНИИ, ПРОИЗВОДИМОМ СИЛАМИ, ДЕЙСТВУЮЩИМИ НА НЕСВОБОДНУЮ ТОЧКУ*

§ 331. Для того чтобы определить несвободное движение тела, надо прежде всего обратиться к следующей аксиоме. Какой бы ни была линия, по которой тело вынуждено двигаться, оно всегда сохраняет одну и ту же скорость, если только скорость не увеличивается и не уменьшается под действием сил. Из этого правила было бы много исключений, если бы мы захотели его применять по отношению ко всем произвольным линиям. Достаточно будет применять его только к непрерывным линиям, у которых два элемента никогда не образуют конечного угла (разве, может быть, в немногих точках); при таком понимании из этого правила не следует никаких исключений.

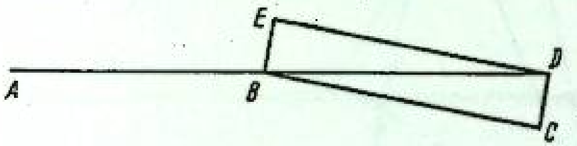


Рис. 41.

§ 332. Примем то, что здесь можно было бы привести в возражение, а именно, что движение тела там, где оно не может происходить по прямой линии, должно быть разложено на два других движения: одно — по направлению описываемого пути, а другое — по нормали к этому направлению, из которых второе, поскольку оно является прямым препятствием для первого, следует отбросить, сохранив только первое. Но даже и при этих условиях я утверждаю, что скорость тела не может уменьшиться на непрерывной кривой. Здесь мы, разумеется, полностью отвлекаемся от какого-либо сопротивления, которое может возникнуть от трения.

§ 333. Постараемся показать, что скорость тела, движущегося по кривой линии, не уменьшается даже в том случае, если теряется та часть скорости, которая направлена прямо против следующего элемента кривой. Пусть AB (рис. 41) будет элемент кривой, на которой приведенное в движение тело движется со скоростью c, а в B тело пусть будет принуждено отклониться на линию BC, которая образует с продолжением AB бесконечно малый угол, синус которого обозначим через dz при полном синусе, равном 1. Примем, что отрезок BD на продолжении AB равен 1, и построим прямоугольник $BCDE$. Тогда $DC = BE = dz$.

§ 334. Разложим скорость тела a, с которой оно стремится двигаться вдоль BD, на две составляющие, одна из которых направлена по BC, а другая — по BE. На BC скорость будет равна

$$a\sqrt{1-dz^2} = a - \frac{adz^2}{2}.$$

Итак, уменьшение скорости выражается величиной $\frac{adz^2}{2}$, которая равнозначна дифференциалу второй степени. Ее интеграл, следовательно, будет дифференциалом первой степени. Из этого можно понять, что уменьшение скорости, после того как тело опишет много элементов или дугу кривой конечной величины, будет бесконечно малым. Таким образом, оно может быть отброшено, и поэтому можно с полным основанием заключить, что тело, описывающее кривую линию, два каких-либо элемента которой образуют угол, бесконечно мало отличающийся от двух прямых, совершает равномерное движение, если только скорость не изменится под действием сил.

§ 335. Следовательно, если тело движется по какому-либо каналу AMB (рис. 42) и не испытывает действия сил, то его движение будет равномерным. Пусть тело находится в M и имеет скорость, порождаемую из высоты v. Поскольку в силу общего закона движения любое движущееся тело стремится двигаться по прямой линии, то в точке M оно будет стремиться двигаться по касательной MT. В результате этого стремления, которому препятствует твердый канал, на верхнюю или выгнутую стенку канала будет оказываться давление, причем с такой силой, какая требуется для того, чтобы удержать свободно движущееся по кривой линии тело. Эта сила, с которой тело воздействует на канал, называется *центробежной силой*.

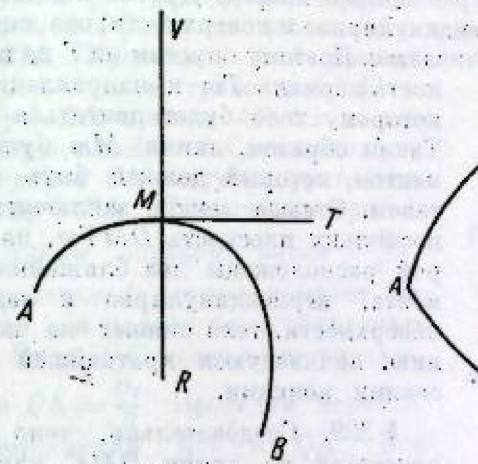


Рис. 42.

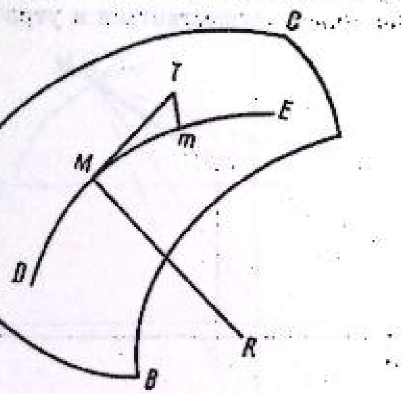


Рис. 43.

§ 336. Если же тело свободно описывает кривую линию, то усилие, или сила, которая препятствует тому, чтобы тело двигалось по касательной, и удерживает тело на кривой, является нормальной силой (§ 178). Таким образом, на канал в M действует сила, равная такой нормальной силе в M, которая возникает, если тело свободно описывает кривую AMB. А эта нормальная сила относится к силе тяжести или весу движущегося тела, если оно находится на поверхности Земли, как $2v$ относится к радиусу кривизны в M (§ 178). Пусть этот радиус $MR = r$, а вес движущегося тела равен 1. Тогда сила, действующая на канал в M, будет равна $\frac{2v}{r}$. Эта сила нормальна к кривой и действует по направлению MV.

§ 337. Пусть теперь тело более не принуждается к движению по заданному пути, а задана только поверхность, на которой оно должно постоянно оставаться.

Представим эту поверхность в виде ABC (рис. 43) и допустим, что тело уже описало на этой поверхности кривую DM. Подобным же образом можно понять, что движение тела на этой поверхности, если оно не подвергается воздействию никаких сил, является равномерным. Рассмотрим, какую кривую опишет тело на данной поверхности. Проведем в M касательную MT к описанной кривой. Совершенно очевидно, что тело, если бы оно двигалось свободно, перемещалось бы из точки M по касательной MT.

§ 338. Поскольку же тело вынуждено оставаться на предложенной поверхности, разложим его движение, направленное вдоль MT, на два движения. Одно из них пусть совершается по самой поверхности, и именно этим движением тело может перемещаться вперед. Другое же движение пусть имеет направление, перпендикулярное к поверхности; это движение не может осуществиться и утрачивается. Поэтому опустим из T на поверхность нормаль Tm к направлению, по которому тело будет двигаться из M. Таким образом, линия Mm будет элементом, который должен быть описан телом. Отсюда можно заключить, что, поскольку плоскость $DMTm$, на которой расположены два ближайших элемента, перпендикулярна к заданной поверхности, тело опишет на ней линию, являющуюся кратчайшей между своими концами.

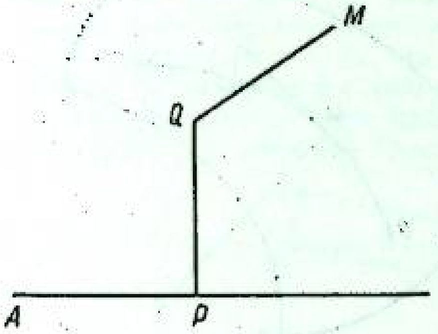


Рис. 44.

§ 339. Следовательно, тело будет двигаться по линии DME, как в канале, и поэтому будет иметь место давление на канал вдоль направления радиуса кривизны. Пусть радиус кривизны кривой в M будет $MR=r$, а тело имеет скорость, порождаемую из высоты v. Линия DME будет испытывать в M давление силы, равной $\frac{2v}{r}$, при условии, что вес движущегося тела, если оно находится на поверхности Земли, равен 1. Поскольку же плоскость кривой в каждом отдельном месте нормальна к поверхности, то и радиус кривизны кривой совпадает с нормалью к поверхности. Поэтому давление на поверхность в M будет оказываться по направлению нормали к ней силой $\frac{2v}{r}$.

§ 340. Поскольку то, что относится к пространству, является менее известным, следует продолжить исследование и из уравнения, выражающего природу поверхности, определить кривую, описанную телом, и давление, которое испытывает эта поверхность. Поэтому возьмем произвольную плоскость APQ (рис. 44) и на ней прямую AP, которую мы будем рассматривать как ось. Из какой-либо точки M поверхности опустим на принятую плоскость APQ перпендикуляр MQ и из Q перпендикуляр QP на ось AP. Обозначим $AP=x$, $PQ=y$, $QM=z$. Пусть уравнение, содержащее природу поверхности, будет таково: $Pdx=Qdy+Rdz$. Из него следует вывести то, что относится к интересующим нас здесь вопросам.

§ 341. Так как радиус кривизны кривой, которую описывает тело, совпадает с нормалью к поверхности, определим прежде всего положение этой нормали. Рассмотрим сначала сечение поверхности плоскостью, проходящей через M, нормальной к плоскости APQ и пересекающей принятую плоскость APQ по прямой BQ (рис. 45). Пусть это сечение будет кривой BM, уравнение которой мы получим, если в общем уравнении для поверхности $Pdx=Qdy+Rdz$ примем $PQ=y$ за постоянную, или $dy=0$. Следовательно, уравнение для BM будет $Pdx=Rdz$. Из него мы находим поднормаль $QL=\frac{zdz}{dx}=\frac{Pz}{R}$. Если теперь через L провести перпендикуляр LN к QL, то все прямые, проведенные из M к LN, будут нормальны к кривой BM.

§ 342. Рассечем теперь поверхность плоскостью, нормальной к плоскости APQ, проходящей через M и пересекающей плоскость APQ по прямой PQ. Пусть сечение будет CM. Уравнение этой кривой получим, если в уравнении $Pdx=Qdy+Rdz$ примем $AP=x$ за постоянную, или $dx=0$. Следовательно, для кривой CM получим уравнение $0=Qdy+Rdz$. Поднормаль кривой $\frac{zdz}{dy}$, таким образом, равна $\frac{-Qz}{R}$. Отрицательный знак указывает на то, что она падает по направлению к P. Пусть QK будет поднормалью. Тогда $QK=\frac{Qz}{R}$. Проведем через K перпендикуляр KN к QK. Все прямые, проведенные из M к KN, будут нормальны к кривой CM.

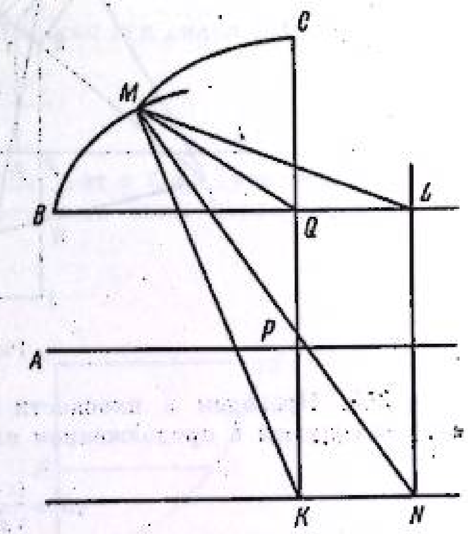


Рис. 45.

§ 343. Пусть прямая KN пересечет первую прямую LN в N, и проведем MN. Прямая MN будет нормальна и к кривой BM и к CM. Поскольку кривые BM и CM расположены на рассматриваемой поверхности, а нормаль к поверхности является нормалью также и ко всем сечениям этой же поверхности, то отсюда следует, что MN является искомой нормалью к поверхности в M. Мы найдем ее, если примем $QL=\frac{Pz}{R}$ и $QK=\frac{Qz}{R}$ и достроим прямоугольник $QKNL$. Точка N будет местом, где нормаль к поверхности встречается с плоскостью APQ.

§ 344. Определим теперь положение радиуса кривизны любой кривой, проведенной на указанной поверхности, по положению двух элементов. Итак, пусть будут даны два элемента Mm, $m\mu$ (рис. 46); проведем перпендикуляры MQ, mq и $\mu\rho$ из M, m, μ на плоскость APQ, а также нормали Qp, $q\rho$ и $\rho\pi$ из Q, q, ρ на ось AP. Пусть элементы Pp, $p\pi$ будут равны. Сохранив обозначения $AP=x$, $PQ=y$, $QM=z$, получим $Pp=p\pi=dx$, $pq=y+dy$, $\pi\rho=y+2dy+ddy$, $qm=z+dz$, $\rho\mu=z+2dz+ddz$. Проведем Qq и $q\rho$ и продолжим Qq в обе стороны; пусть в точке r продолжение Qq встретится с продолжением прямой $\pi\rho$. Тогда $Qq=qr$. Из r проведем к плоскости APQ нормаль rn, встречающуюся в n с продолженным подобным же образом в обе стороны элементом Mm. Тогда $Mm=mn$. Вместе с тем

$$Qq=\sqrt{dx^2+dy^2}=qr,\quad q\rho=\sqrt{dx^2+dy^2}+\frac{dy\,ddy}{\sqrt{dx^2+dy^2}},$$

$$Mm=\sqrt{dx^2+dy^2+dz^2}=mn$$

и

$$m\mu=\sqrt{dx^2+dy^2+dz^2}+\frac{dy\,ddy+dz\,ddz}{\sqrt{dx^2+dy^2+dz^2}}.$$

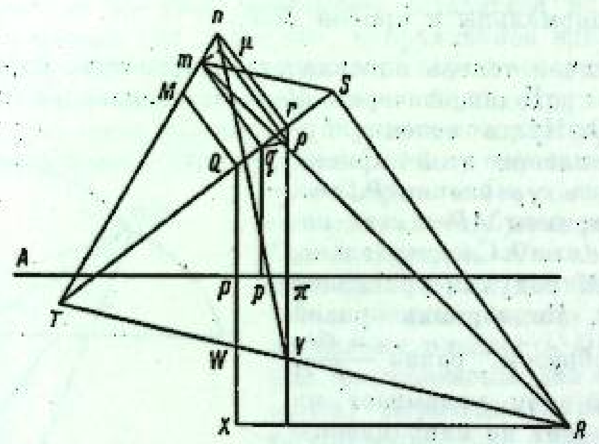


Рис. 46.

§ 345. Проведем в плоскости Qm нормаль mS к элементу Mm, встречающуюся с продолжением элемента Qq в S. Тогда

$$qS=\frac{(z+dz)\,dz}{\sqrt{dx^2+dy^2}}.$$

Проведем через S под прямым углом к qS прямую SR. Все прямые, проведенные из m к SR, будут перпендикулярны к элементу Mm. А радиус кривизны кривой $Mm\mu$, проведенный из m, является нормалью к Mm и лежит в той же плоскости, в которой расположены элементы Mm и $m\mu$. Поэтому, для того чтобы найти положение радиуса кривизны, мы определим плоскость, в которой расположены элементы Mm и $m\mu$.

. . . .

Глава I. О ДВИЖЕНИИ ТОЧКИ ПО ЗАДАННОЙ ЛИНИИ ПОД ДЕЙСТВИЕМ АБСОЛЮТНЫХ СИЛ

. . . .

[Задача. Определить падение тела по заданной кривой и движение, которое испытывает в отдельных точках кривая, если действующая сила будет единообразной и повсюду направленной вниз.]

§ 362. Пусть линия BMA будет прямой линией, любым образом наклоненной к CA (рис. 47). Пусть она встретится с CA в A, и пусть

$CA=a$ и $AB:AC=\alpha:1$. Тогда $ds=\alpha dx$.* Если в B скорость по-прежнему достигается из высоты b, то в M скорость будет такой, какая порождается из высоты $b+gx$. А давление, которому линия BA подвергается в M по перпендикулярному к ней направлению MS, будет равно

$$\frac{g\sqrt{\alpha^2-1}}{\alpha}=g\sin\operatorname{ang}A$$

при условии, что полный синус равен 1. Время, за которое описывается BM, составит

$$\int\frac{\alpha dx}{\sqrt{b+gx}}=\frac{2\alpha\sqrt{b+gx}-2\alpha\sqrt{b}}{g}.$$

Следовательно, время, за которое описывается вся линия BA, составит

$$\frac{2\alpha\sqrt{b+ga}-2\alpha\sqrt{b}}{g}.$$

§ 363. Если $\alpha=1$, то линия BA совпадает с CA. Тело будет свободно опускаться по CA, так как направление силы совпадает с AC,

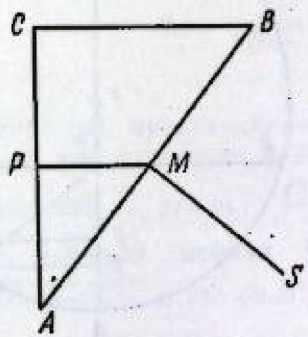


Рис. 47.

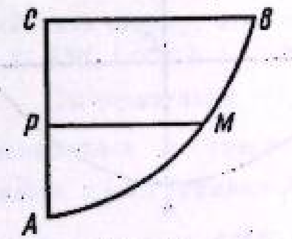


Рис. 48.

а начальная скорость в C есть скорость, порождаемая из высоты b. Итак, сравним между собой эти два движения — по CA и BA. Очевидно, во-первых, что скорости в P и в M равны между собой. А время, соответствующее CP, относится ко времени, соответствующему BM, как $1:\alpha$, т. е. как AC к AB, или как косинус угла A к полному синусу.

§ 364. Если начальная скорость будет равна нулю, т. е. $b=0$, то тело, выйдя из состояния покоя в точке B, опишет линию BA, и скорость в любой точке M будет скоростью, порождаемой из высоты gx, т. е. $g\cdot CP$. Время же, за которое тело проходит из B в A, составит

$$\frac{2\alpha\sqrt{ga}}{g}=\frac{2\alpha\sqrt{a}}{\sqrt{g}}.$$

---

* Здесь $BM=s$, $CP=x$, движущая сила равна g, а сила тяжести принята за единицу. — *Г. М.*

Итак, время прямо пропорционально корню квадратному из вертикальной высоты CA и обратно пропорционально косинусу угла A и корню квадратному из движущей силы. Следовательно, если движущая сила будет одинаковой при различных спусках по наклонной прямой и угол наклона также будет одинаковым, то времена спусков будут относиться между собой, как квадратные корни из описанных путей.

§ 365. Пусть линия BMA вновь будет произвольной кривой (рис. 48), а сила, действующая в M, будет равна p — все, как в § 356. Скорость же в B пусть будет равна нулю, или $b=0$. Скорость в M будет такой, какая достигается из высоты $\int pdx$. Таким образом, в A тело будет иметь определенную степень скорости. Если тело с этой скоростью будет двигаться назад от A к B, то оно дойдет вновь до B, где скорость его исчезнет. Ведь подъем совершается таким же образом, что и спуск, так как в отдельных точках M поднимающееся тело имеет ту же скорость, какую имеет в этих точках опускающееся тело.

§ 366. Если p будет величиной постоянной или будет зависеть только от высоты x, то, как уже было отмечено, скорость тела в отдельных местах кривой будет зависеть не от кривой, а только от высоты. Следовательно, таким же образом обстоит дело и с подъемом.

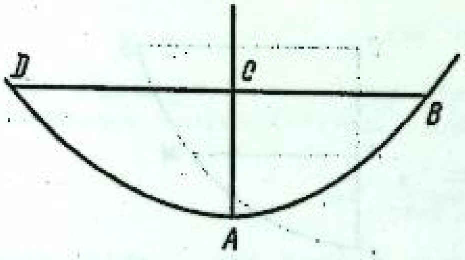


Рис. 49.

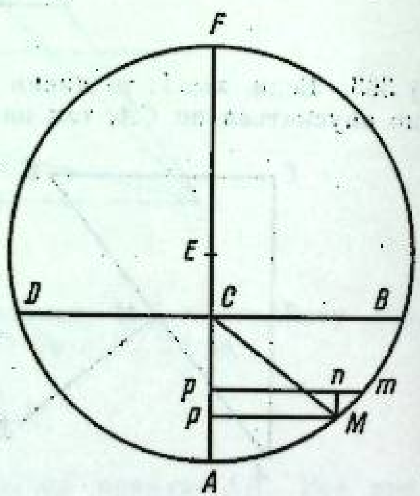


Рис. 50.

Тело, поднимающееся из A по какой-либо кривой с некоторой определенной скоростью, достигнет одной и той же высоты, какова бы ни была эта кривая. Поэтому тело, которое, выйдя из состояния покоя, описало нисходящим движением кривую BA и скоростью, достигнутой в A, поднимается по другой какой-либо кривой AD (рис. 49), дойдет в своем движении до точки D, которая находится на той же высоте, что и B. Кроме того, в отдельных находящихся на одинаковой высоте точках обеих кривых AD и AB тело будет иметь одинаковые скорости.

§ 367. Итак, тело, которое, дойдя до D, потеряло все свое движение, будет опускаться назад по кривой DA и в A начнет подниматься по AB, а дойдя до B, вновь потеряет всю свою скорость и, следовательно, вновь будет опускаться из точки B. Таким образом тело будет непрерывно продолжать эти переменные спуски и подъемы, ибо оно всегда будет доходить до B и D.

Такого рода попеременные движения называются *колебаниями*. Колебание представляет собой движение тела, выведенного из состояния покоя, до тех пор пока оно вновь не придет в состояние покоя. Итак, движение тела BAD является колебанием.

§ 368. Пусть движущая сила будет величиной постоянной, или $p=g$, а рассматриваемая кривая, по которой движется тело, пусть будет окружностью $FBAD$, центр которой E, а радиус равен f (рис. 50). Проведем диаметр FA, параллельный направлению силы. Пусть тело совершит колебание по дуге BAD. Точки B и D будут находиться на одинаковой высоте, и поэтому прямая BD будет перпендикуляром к AF. Пусть $AC=a$. Поскольку дуга AB равна и подобна дуге AD, время колебания, или время движения по BAD, будет в два раза больше, чем время, за которое восходящим или нисходящим движением описывается дуга BA. Итак, исследуем подъем по дуге AB. Пусть тело находится в M. Проведем нормаль MP к AF. Назовем $AP=x$. Тогда $CP=a-x$ и $PM=\sqrt{2fx-xx}$.

§ 369. Скорость тела в M достигается из высоты $g\cdot CP=g(a-x)$, поскольку скорость тела в B, как мы полагаем, равна нулю. А в A тело имеет скорость, порождаемую из высоты ga. Следовательно, испытываемое кривой в M давление, происходящее от центробежной силы, равно $\frac{2g(a-x)}{f}$.

Проведем ближайшую к PM аппликату pm. Тогда $Pp=dx$,

$$Mm=\frac{fdx}{\sqrt{2fx-xx}} \text{ и } mn=\frac{fdx-xdx}{\sqrt{2fx-xx}}.$$

Давление же, происходящее от действия силы g, относится к самой силе g, как mn относится к Mm, т. е. как $f-x$ к f. Следовательно, это давление равно $\frac{g(f-x)}{f}$. Следовательно, вся сила, давление которой кривая BA испытывает в точке M, составляет $\frac{g(2a+f-3x)}{f}$, и эта сила направлена вдоль нормали MS к кривой.

§ 370. Для отыскания времени подъема по дуге AMB возьмем промежуток времени, соответствующий Mm, который равен

$$\frac{fdx}{\sqrt{g(a-x)(2fx-xx)}}.$$

Интеграл этого выражения дает время, за которое описывается дуга AM. Если это выражение будет проинтегрировано с помощью рядов таким образом, что в

$$\frac{fdx}{\sqrt{g(2f-x)}}(ax-xx)^{-1/2}$$

член $(ax-xx)^{-1/2}$ будет выражен посредством бесконечного ряда, то два первых члена искомого ряда дадут

$$\frac{\text{arc } AB}{\sqrt{ag}}+\frac{(\text{arc } AB-CB)f}{2a\sqrt{ag}}+\ldots$$

Этот ряд, если AB будет очень мало, быстро сходится, так что достаточно будет взять эти два члена.

§ 371. Если даже дуга AB полностью исчезнет, тем не менее время, соответствующее бесконечно малой дуге, не будет равно нулю. Ибо тогда x будет исчезать в сравнении с f, и элемент времени будет равен $\frac{dx\sqrt{f}}{\sqrt{2g(ax-xx)}}$. Но $\int\frac{adx}{2\sqrt{ax-xx}}$ есть дуга окружности, диаметр которой равен a, а синус-версус равен x. Если $x=a$, то $\int\frac{adx}{2\sqrt{ax-xx}}$ будет равен половине окружности диаметра a. Пусть радиус относится к окружности,

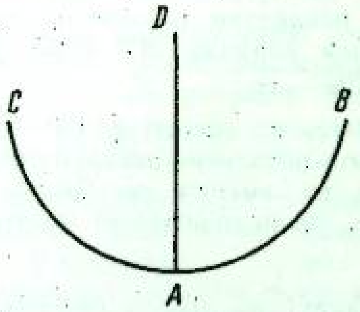


Рис. 51.

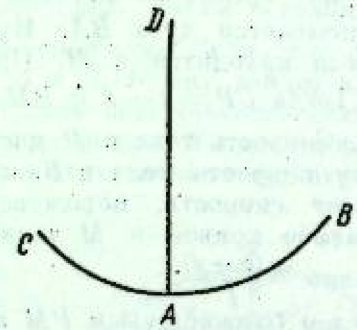


Рис. 52.

как $1:\pi$. Тогда $\frac{\pi}{2}=\int\frac{dx}{\sqrt{ax-xx}}$. Таким образом, время, за которое описывается дуга AB, равно $\pi\sqrt{f}:2\sqrt{2g}$.

§ 372. Итак, время одного колебания по BAD, если эта дуга является бесконечно малой, равно $\pi\sqrt{f}:\sqrt{2g}$. Из этого видно, что бесконечно малые колебания, совершаемые по дугам окружности, описываются за времена, пропорциональные корню квадратному из отношения радиусов этих дуг к движущим силам. Если выразить f в тысячных частях рейнского фута, то $\frac{\pi\sqrt{f}}{250\sqrt{2g}}$ даст число секунд, в течение которых совершается колебание. Следовательно, для того чтобы время колебания было равно одной секунде, должно быть

$$f=\frac{125\,000g}{\pi\pi}=12\,665g \text{ скрупулов рейнского фута.}$$

§ 373. Так как дуги, описанные такого рода колебаниями, должны быть бесконечно малыми, то сказанное здесь об окружностях может быть применено ко всем кривым. Ведь самые малые дуги любой кривой можно считать круговыми дугами, полудиаметры которых являются радиусами кривизны в этих местах.

Итак, пусть будет дана какая-либо кривая BAC (рис. 51), по которой тело совершает свои колебания. Пусть нижняя точка этой кривой есть A, радиус кривизны там равен r, абсолютная сила, параллельная вертикали AD, равна g, и пусть колебания будут бесконечно малыми. Тогда время одного колебания будет равно $\frac{\pi\sqrt{r}}{\sqrt{2g}}$.

§ 374. Пусть кривая BAC (рис. 52), которая описывается одним колебанием, не будет одной непрерывной кривой, а дуги AB и AC будут частями различных кривых, причем точка A, в которой они сходятся, будет самой нижней. Положим, что дуга BAC является бесконечно малой, и пусть радиус кривизны r дуги AB попадает на прямую AD, которая параллельна направлениям силы g. Подобным же образом пусть радиус кривизны дуги CA будет равен ρ. Время, за которое описывается дуга BA, будет равно $\frac{\pi\sqrt{r}}{2\sqrt{2g}}$, а время, за которое описывается дуга AC, равно $\frac{\pi\sqrt{\rho}}{2\sqrt{2g}}$. Следовательно, время одного колебания равно

$$\frac{\pi(\sqrt{r}+\sqrt{\rho})}{2\sqrt{2g}}.$$

§ 375. То, что здесь сообщено о бесконечно малых колебаниях, относится не только к тому случаю, при котором абсолютная сила есть величина постоянная и ее направления являются параллельными; все это будет правильно при любых изменениях величины и направления силы.

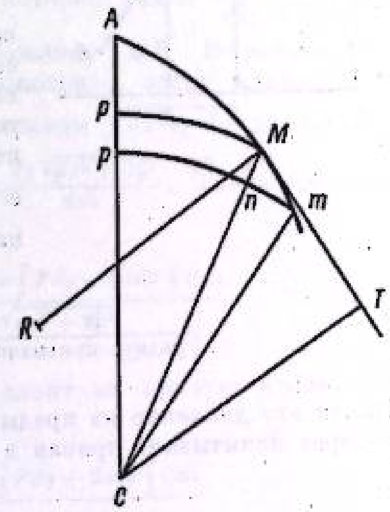


Рис. 53.

Ведь поскольку дуга, описываемая одним колебанием, является бесконечно малой, то на то время, пока тело на ней пребывает, движущая сила может рассматриваться как постоянная, а ее направление — как остающееся постоянно себе параллельным.

§ 376. Пусть C будет центром сил и AM — кривая, которую должно описать тело (рис. 53). Пусть начальная скорость в A порождается из высоты b. Проведем AC и обозначим $AC=a$. Положим, что скорость тела в M равна $\sqrt{v}$ и сила, влекущая тело в M к C, равна p. Пусть $CM=y$, дуга $AM=s$. Возьмем точку m, ближайшую к M. Тогда $Mm=ds$, $Cm=y+dy$. Следовательно, проведя дуги MP, mp, получим $Mn=-dy=Pp$. Далее, проведем касательную MT и из C опустим на нее перпендикуляр CT. Тогда $CM:MT=Mm:Mn=ds:(-dy)$.

§ 377. Разложим силу p, действующую вдоль CM, на тангенциальную и нормальную составляющие. Тангенциальная сила, действующая вдоль MT, будет равна $\frac{-pdy}{ds}$. Эта сила увеличивает скорость тела, пока оно пробегает элемент Mm. Но $dv=-pdy$. Следовательно, $v=C-\int pdy$. Если p зависит только от y, или от расстояния тела до C, то и $\int pdy$ также зависит только от y. Поэтому скорость тела в M, т. е. на расстоянии y от C, мы узнаем по одному только расстоянию, и нет необходимости, чтобы для этого была определена сама кривая. Соответственно тело имеет в M ту же скорость, какую оно имело бы в P; если бы оно свободно падало вдоль AP с начальной скоростью, достигаемой из b.

§ 378. Если обозначить AP через x, то $y=a-x$ и $dy=-dx$. Следовательно, $pdy=-pdx$. Поэтому $v=C+\int pdx$. Возьмем интеграл от pdx так, чтобы при $x=0$ он становился равным нулю. Поскольку в этом случае мы имеем $v=b$, то $C=b$, и поэтому $v=b+\int pdx$. Найдем теперь, какое давление испытывает кривая в M по направлению нормали MR к кривой. Прежде всего кривая испытывает давление от нормальной силы, которая равна

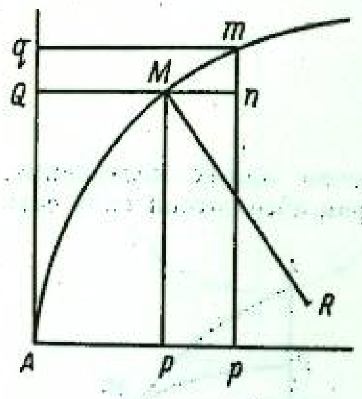


Рис. 54.

$$\frac{p\cdot CT}{CM}=\frac{p\cdot mn}{Mm}=\frac{p\sqrt{ds^2-dy^2}}{ds}$$

и направлена вдоль MR. Обозначим CT через z. Тогда давление в M будет равно $\frac{pz}{y}=\frac{pz}{a-x}$.

§ 379. Кроме того, кривая испытывает в M давление от центробежной силы. Поскольку мы полагаем, что кривая является выпуклой относительно AC, то это давление прямо противоположно первому и, следовательно, уменьшает его. Радиус кривизны MR равен $\frac{ydy}{dz}$, а центробежная сила равна

$$\frac{2v}{\text{радиус кривизны}}=\frac{2vdz}{ydy}=\frac{2bdz+2dz\int pdx}{ydy}.$$

Вычтя это давление из предыдущего, мы получим истинное давление, которое испытывает кривая в M. Оно равно

$$\frac{pz}{a-x}-\frac{2bdz+2dz\int pdx}{ydy}=\frac{pzdx+2bdz+2dz\int pdx}{(a-x)\,dx}.$$

Если это давление равно нулю, то кривая AM является такой же, какая описывается при свободном движении.

§ 380. Рассмотрим теперь в самом общем виде те силы, которые могут воздействовать на тело.

Пусть тело движется по кривой AM (рис. 54). Проведем две нормали AP, AQ, и пусть на тело повсюду действуют две силы, одна из которых направлена к прямой AP, а другая — к AQ. Пусть тело находится в M, где его скорость порождается из высоты v. Опустим из M на AP и AQ перпендикуляры MP, MQ, и пусть $AP=MQ=x$, $PM=AQ=y$. Положим, что сила, которая влечет тело в точке M к P, равна P, а сила, которая влечет там же к Q, равна Q при условии, что сила тяжести равна 1.

§ 381. Взяв элемент Mm и проведя mp, mq, получим $Pp=Mn=dx$, $Qq=mn=dy$ и $Mm=\sqrt{dx^2+dy^2}$. Разложим обе силы на тангенциаль-

ную и нормальную составляющие. Тангенциальная сила, происходящая от P, равна $\frac{Pdy}{\sqrt{dx^2+dy^2}}$, а та, которая происходит от Q, равна $\frac{Qdx}{\sqrt{dx^2+dy^2}}$. Обе эти силы по направлению противоположны движению. Поэтому сила, ускоряющая тело, движущееся по Mm, равна $\frac{-Pdy-Qdx}{\sqrt{dx^2+dy^2}}$. Таким образом (§ 176), $dv=-Pdy-Qdx$ и

$$v=C-\int Pdy-\int Qdx.$$

§ 382. Посмотрим теперь, сколь большая сила давит на кривую в точке M вдоль нормали MR.

Во-первых, вдоль этого направления на кривую давит нормальная сила, происходящая от P, которая равна $\frac{Pdx}{\sqrt{dx^2+dy^2}}$. Затем на нее давит нормальная сила, происходящая от Q, которая равна $\frac{Qdy}{\sqrt{dx^2+dy^2}}$, но действует по направлению, противоположному MR. В-третьих, центробежная сила, которая также противоположна этому направлению и равна $\frac{2v}{\text{радиус кривизны}}$. Но если мы примем $\sqrt{dx^2+dy^2}$ за постоянную, то радиус кривизны будет равен $\frac{dy\sqrt{dx^2+dy^2}}{ddx}$. Таким образом,

$$\frac{2v}{\text{радиус кривизны}}=\frac{2Cddx-2ddx\int Pdy-2ddx\int Qdx}{dy\sqrt{dx^2+dy^2}}.$$

§ 383. Поэтому вся сила, которая давит на кривую вдоль MR, равна

$$\frac{Pdxdy-Qdy^2-2Cddx+2ddx\int Pdy+2ddx\int Qdx}{dy\sqrt{dx^2+dy^2}}.$$

Подобным же образом можно полностью разрешить задачу и в том случае, если указанная кривая не находится целиком в одной плоскости и если, кроме того, направления сил не находятся в той же плоскости. В этом случае следует отнести кривую к трем прямоугольным координатам и рассматривать тело повсюду как приводимое в движение тремя силами, направления которых параллельны координатам, как мы и поступили в § 273.

§ 384. Я не буду подробнее останавливаться на только что упомянутом мною случае, при котором описываемая телом кривая не находится в той плоскости, в которой расположены направления движущей силы; исключение я сделаю лишь для того более частного случая, при котором направления силы всегда параллельны друг другу. Таким путем я избегаю многих обременительных расчетов, а тот, кто поймет, как следует разбирать этот случай, сумеет сам, если будет необходимо, добавить остальные. В последующем изложении я буду рассматривать этот случай подробнее всех остальных, поскольку в нем заключено много интересного.

§ 385. Пусть все направления силы будут вертикальными и кривая AQ (рис. 55) представит проекцию кривой, по которой движется тело, на горизонтальной плоскости. Пусть, далее, другая кривая AM будет такова, что любая ее аппликата PM, поднятая вертикально в Q, достигает самого описываемого пути. Аппликата же кривой AM в A пусть будет равна нулю, так чтобы тело, когда оно оказывается в A, находилось в самом нижнем месте. Обозначим $AP = x$, $PQ = y$, $PM = z$. Пусть скорость тела в A будет такой, какая достигается из высоты b. Когда же тело пройдет над Q, пусть оно имеет скорость, порождаемую из высоты v.

§ 386. Пусть AN будет кривой, которую описывает тело (рис. 56). Тогда $NQ = z$. Пусть сила p гонит тело в точке N по направлению NQ.

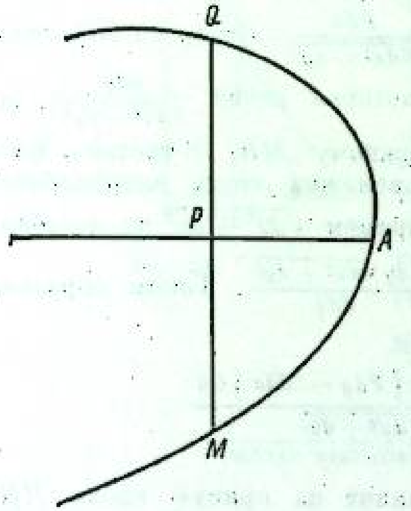


Рис. 55.

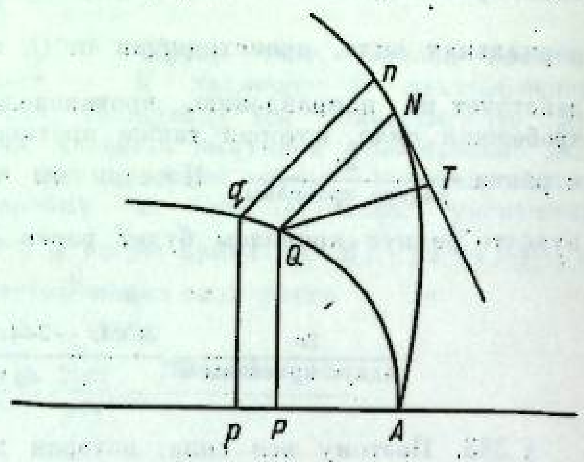


Рис. 56.

Взяв ближайшее место n, получим тангенциальную силу, действующую вдоль касательной NT,

$$\frac{pdz}{\sqrt{dx^2+dy^2+dz^2}}.$$

Нормальная же сила, действующая по направлению, параллельному перпендикуляру QT к касательной, равна

$$\frac{p\sqrt{dx^2+dy^2}}{\sqrt{dx^2+dy^2+dz^2}}.$$

Положим, что высота, порождающая скорость в n, равна $v+dv$. Поскольку тангенциальная сила уменьшает скорость тела, проходящего по Nn, получим $dv = -pdz$ (§ 176) и $v = C - \int pdz$. Пусть $\int pdz = 0$ при $z = 0$. Тогда $C = b$ и $v = b - \int pdz$.

§ 387. Если p есть величина постоянная или зависит только от высоты $NQ = z$, то скорость тела зависит только от превышения тела

над горизонтальной плоскостью, т. е. только от z. Следовательно, кривая AQ нисколько не может изменить скорости тела. Пусть p будет величиной постоянной, или пусть $p = g$. Тогда $v = b - gz$. Отсюда время, за которое тело описывает кривую AN, равно

$$\int\frac{\sqrt{dx^2+dy^2+dz^2}}{\sqrt{b-gz}}.$$

При этом тело может подниматься над горизонтальной плоскостью APQ до тех пор, пока не станет $b = gz$ или $z = \frac{1}{g}b$.

§ 388. Кривая AN испытывает в N давление от двух сил, одна из которых является нормальной силой и равна

$$\frac{p\sqrt{dx^2+dy^2}}{\sqrt{dx^2+dy^2+dz^2}}.$$

Ее направление нормально к кривой AN, которая расположена в плоскости QNT, и она увлекает тело вниз по направлению, параллельному TQ. Другая сила является центробежной; она оказывает давление на кривую по направлению, противоположному тому, которое имеет радиус кривизны и которое было определено в § 348. Величина центробежной силы равна

$$\frac{2v}{\text{радиус кривизны}} = \frac{2\sqrt{b-\int pdz}}{\text{радиус кривизны}} =$$
$$= \frac{2\sqrt{b-\int pdz}\,\sqrt{dx^2ddy^2+dx^2ddz^2+(dyddz-dzddy)^2}}{(dx^2+dy^2+dz^2)^{3/2}}.$$

Точно так же радиус кривизны был найден в § 352.

§ 389. Что касается движения тела по такого рода кривой, то оно может быть сведено к движению по пути, расположенному в одной плоскости. Возьмем на горизонтальной плоскости прямую линию AQ которая пусть будет равна кривой AQ, изображенной на предшествующем рисунке, и вертикаль QN, равную z. Обозначим $AQ = t$. Тогда $dt = \sqrt{dx^2+dy^2}$. Представим себе, что тело движется по NA так, что его скорость в A равна $\sqrt{b}$. Тогда скорость в точке N будет равна $\sqrt{b-gz}$, а время, соответствующее NA, будет равно

$$\int\frac{\sqrt{dx^2+dy^2+dz^2}}{\sqrt{b-gz}}.$$

Следовательно, движение по NA остается одинаковым независимо от того, является ли линия AQ прямой или она искривлена; давление же изменяется.

§ 390. Я перехожу теперь ко второй части этой главы, в которой ставятся задачи, обратные уже рассмотренным. Здесь будет разыскиваться такая кривая, при движении тела по которой движение имело бы заданные свойства. Эти свойства, приписываемые движению, могут быть тройкого рода. К первому роду относятся те задачи, в которых давление на кривую должно подчиняться данному закону, ко второму — те, которые требуют какого-либо свойства скоростей, и к третьему — задачи, в которых времена должны иметь определенную длительность. Задачи двух первых родов не заключают в себе никаких трудностей. Поэтому мы их коснемся лишь вкратце.

§ 391. Пусть будет необходимо определить кривую AM (рис. 58), на которую перемещающееся по ней тело давит с заданной силой. Пусть движущая сила будет постоянной, равной g, и направление ее всегда параллельно оси AP. Пусть $AP=x$, $PM=y$. Если скорость тела в A равна нулю, в M она будет равна $\sqrt{gx}$. Проведем нормаль MN, и пусть кривая в точке M должна испытывать давление вдоль MN

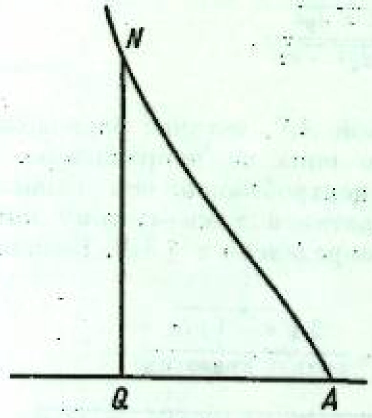


Рис. 57.

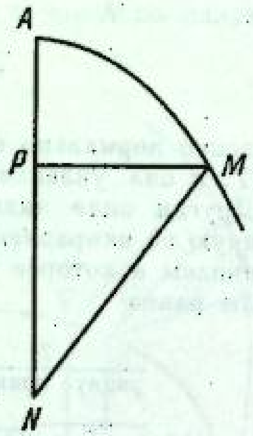


Рис. 58.

с силой, равной q. Но вдоль MN кривая испытывает давление, происходящее от силы g, которое равно $\frac{gdy}{\sqrt{dx^2+dy^2}}$. Этому воздействию противоположно по направлению другое, происходящее от центробежной силы и равное

$$\frac{2gx}{\text{радиус кривизны}}=\frac{-2gxdxddy}{(dx^2+dy^2)^{3/2}},$$

если принять dx за постоянную. Тогда

$$q=\frac{gdx^2dy+gdy^3+2gxdxddy}{(dx^2+dy^2)^{3/2}}.$$

§ 392. Если положить, что $\sqrt{dx^2+dy^2}=ds$ и что ds есть постоянная, то радиус кривизны будет равен $\frac{dsdx}{-ddy}$. Итак,

$$q=\frac{gdydx+2gxddy}{dsdx}.$$

Но $dy=\sqrt{ds^2-dx^2}$ и $ddy=\frac{-dxddx}{\sqrt{ds^2-dx^2}}$.

Следовательно,

$$q=\frac{gds^2dx-gdx^3-2gxdxddx}{dsdx\sqrt{ds^2-dx^2}},$$

или

$$q=\frac{gds^2-gdx^2-2gxddx}{ds\sqrt{ds^2-dx^2}}.$$

Положим, что q есть постоянная, равная c, так чтобы была получена кривая, которая повсюду испытывает одинаковое давление. Тогда $cds\sqrt{ds^2-dx^2}=gds^2-gdx^2-2gxddx$. Пусть $ds=zdx$. Тогда $zddx+dxdz=0$, или $ddx=\frac{-dxdz}{z}$. Следовательно, имеем $czdx\sqrt{zz-1}=gz^2dx-gdx+\frac{2gxdz}{z}$, или

$$cdx=\frac{gdx\sqrt{zz-1}}{z}+\frac{2gxdz}{zz\sqrt{zz-1}}.$$

§ 393. Положим $\frac{\sqrt{zz-1}}{z}=t$. Тогда $dt=\frac{dz}{zz\sqrt{zz-1}}$. Следовательно, $cdx=gtdx+2gxdt$ и $\frac{dx}{x}=\frac{2gdt}{c-gt}$. Отсюда имеем $x(c-gt)^2=C^2$. Но

$$t=\frac{\sqrt{zz-1}}{z}=\frac{dy}{ds}.$$

Следовательно,

$$c\sqrt{x}-\frac{gdy\sqrt{x}}{ds}=C=g\sqrt{a}.$$

Следовательно, $ds^2(c\sqrt{x}-g\sqrt{a})^2=ggxdy^2$ и

$$dy=\frac{dx\,(c\sqrt{x}-g\sqrt{a})}{\sqrt{ggx-(c\sqrt{x}-g\sqrt{a})^2}}.$$

Если $c=g$, то уравнение вновь может быть проинтегрировано и даст

$$y+C=\frac{(2x-2\sqrt{ax}-2a)}{5}\sqrt{\frac{2\sqrt{x}-\sqrt{a}}{\sqrt{a}}}.$$

Здесь $\sqrt{a}$ может быть взят даже с отрицательным знаком, ибо это безусловно величина произвольная.

. . . .

[Задача.* Найти кривую AM, двигаясь по которой под действием направленной всюду вертикально вниз единообразной силы тело удалялось бы с заданной скоростью q от неподвижной точки C (рис. 59).

* Этот отрывок добавлен редактором. Ср.: «Механика», т. II. Предложения 28—30. — *Г. М.*

Решение. Пусть движущая сила равна g и начальная скорость тела в A соответствует высоте gc. Отложим $AQ=c$. Пусть $QP=x$, $PM=y$, $CP=t$, $CM=z$, $AM=s$. Тогда скорость в M будет соответствовать высоте gx. Проведем прямую линию CD и опишем радиусами CA, CM, Cm окружности AB, MN, mn, которые пересекают CD в B, N и n. Поскольку движение вдоль AM должно соответствовать движению вдоль BN, представим себе тело, движущееся по BN со скоростью, соответствующей заданной высоте q. Время, соответствую-

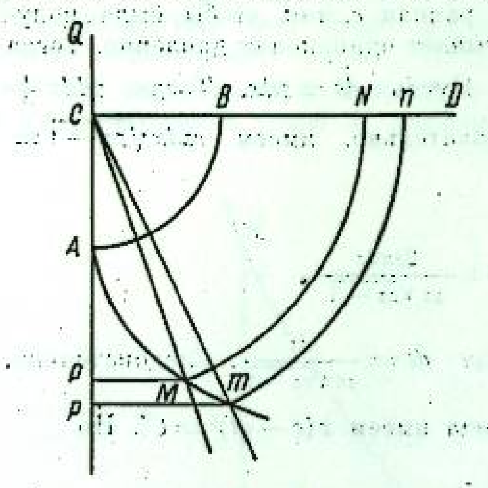


Рис. 59.

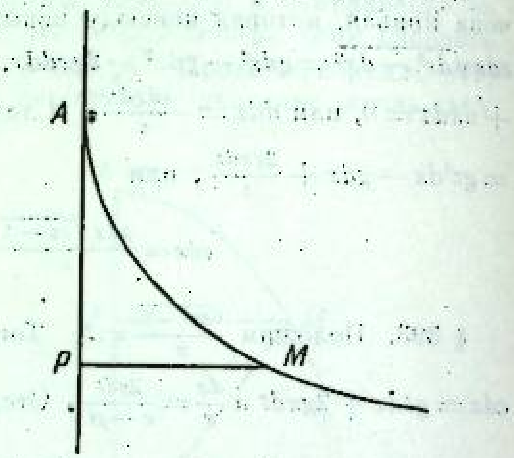


Рис. 60.

щее Nn, должно быть равно времени, соответствующему Mm. Отсюда имеем

$$\frac{dz}{\sqrt{q}}=\frac{ds}{\sqrt{gx}},$$

или $ds\sqrt{q}=dz\sqrt{gx}$.

Пусть q будет постоянной, равной cg. Я полагаю, что начальная скорость совпадает со скоростью падения, так что кривая касается в A вертикали AP, и тело в начальный момент падает по прямой. В этом случае мы имеем, следовательно, для искомой кривой уравнение $ds\sqrt{c}=dz\sqrt{x}$.

Положим $x=t+c$, так что точка A попадает в C.]

§ 398. Итак, уравнение $ds\sqrt{c}=dz\sqrt{x}$, или $cds^2=tdz^2+cdz^2$, перейдет в

$$tdz^2+cdz^2=\frac{cz^2dt^2+cz^2dz^2-2cztdzdt}{z^2-t^2}.$$

Отсюда возникает уравнение

$$z^2tdz^2-t^3dz^2=c\,(-tdz+zdt)^2.$$

Следовательно,

$$-tdz+zdt=dz\sqrt{\frac{(z^2-t^2)\,t}{c}}.$$

Положим $t=uz$. Тогда $dt=udz+zdu$ и

$$zzdu=zdz\sqrt{\frac{uz\,(1-uu)}{c}},$$

а это уравнение сводится к следующему:

$$\frac{du\sqrt{c}}{\sqrt{u-u^3}}=\frac{dz}{\sqrt{z}}.$$

Поскольку в этом уравнении неизвестные отделены друг от друга, оно может быть разрешено, и таким путем мы получим искомую кривую.

§ 399. Если точка C будет бесконечно удаленной, то $a=\infty$ и $z=a+x$, или $dz=dx$ (рис. 60). Положив это, получим уравнение $ds\sqrt{q}=dx\sqrt{gx}$, которое всегда может быть разрешено, если q зависит только от x. Ведь $dx^2+dy^2=\frac{gxdx^2}{q}$ и $dy=dx\sqrt{\frac{gx-q}{q}}$, а здесь переменные отделены, так как q является функцией от x. Если мы положим, что q есть постоянная, равная bg, то искомая кривая будет иметь такое свойство, что тело будет по ней равномерно опускаться. Уравнение кривой будет

$$dy=dx\sqrt{\frac{x-b}{b}}.$$

Следовательно,

$$y=\frac{2\,(x-b)^{3/2}}{3\sqrt{b}}.$$

Это уравнение относится к кубической параболе Нейля.

§ 400. Подобным же образом может быть решена вторая задача, в которой задано вращательное движение вокруг данной точки. Обозначим неподвижную точку через C, искомую кривую через MR, а ее элемент через Mm (рис. 61). Проведем к оси CB, параллельной направлению сил, перпендикуляры MP, mp. Произвольным радиусом CB опишем окружность BN, которая пересекается с CM и Cm в N и n. Пусть q будет высотой, порождающей скорость, с которой движущееся тело описывает элемент Nn за то же время, за которое описывается элемент Mm. Пусть $CB=f$, $CP=x$, $PM=y$, $CM=z=\sqrt{x^2+y^2}$. Положим, что сила равна g, и пусть высота, порождающая скорость тела в M, равна $g(x+a)$; примем $AC=a$. Тогда скорость в A будет равна нулю.

§ 401. Поскольку Mm описывается со скоростью $\sqrt{(x+a)g}$ за то же время, за которое элемент Nn описывается со скоростью $\sqrt{q}$, то

$$Mm:Nn=\sqrt{g\,(x+a)}:\sqrt{q}.$$

Но $Nn:Mr=f:z$. Следовательно,

$$Mm:\frac{Mr\cdot f}{z}=\sqrt{g\,(x+a)}:\sqrt{q}$$

и

$$Mm^2:Mr^2=f^2g\,(x+a):(qz^2).$$

а также

$$Mm^2:mr^2=f^2g\,(x+a):[f^2g\,(x+a)-qz^2]=(dx^2+dy^2):dz^2.$$

Но $y=\sqrt{z^2-x^2}$, и поэтому

$$dx^2+dy^2=\frac{z^2dx^2+zzdz^2-2zxdxdz}{zz-xx}.$$

откуда найдем

$$dx = \frac{xdz\,[f^2g\,(x+a) - qz^2] \pm zdz\sqrt{q\,(zz - xx)\,[f^2g\,(x+a) - qz^2]}}{z\,[f^2g\,(x+a) - qz^2]},$$

а из этого следует

$$(zdx - xdz)\sqrt{f^2g\,(x+a) - qz^2} = zdz\sqrt{q\,(zz - xx)}.$$

Произведя подстановку $x = tz$, получим

$$dt\sqrt{ffg\,(tz+a) - qzz} = dz\sqrt{q\,(1 - tt)}.$$

§ 402. Пусть расстояние до точки C будет бесконечным. Тогда $x = z = \infty$; и окружность BN переходит в горизонтальную прямую,

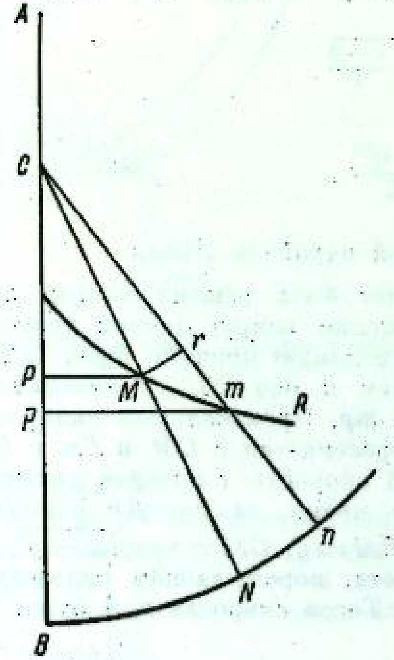


Рис. 61.

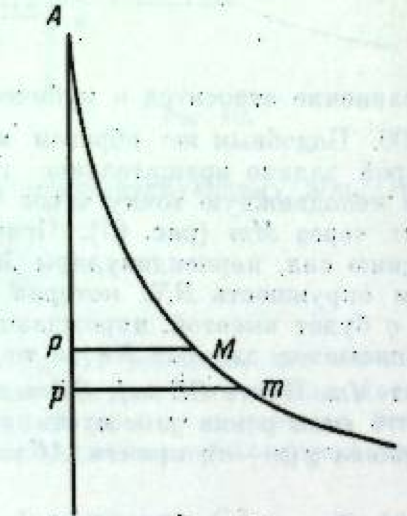


Рис. 62.

а $Nn = Mr = dy$. Пусть $AP = x + a = u$ (рис. 62). Предшествующая пропорция

$$Mm : Nn = \sqrt{g\,(x+a)} : \sqrt{q}$$

изменится так:

$$\sqrt{du^2 + dy^2} : dy = \sqrt{gu} : \sqrt{q}.$$

Следовательно, имеем уравнение

$$qdu^2 + qdy^2 = gudy^2,$$

а из него

$$dy = \frac{du\sqrt{q}}{\sqrt{gu - q}}.$$

Это уравнение может быть разрешено всякий раз, когда q зависит от u. Пусть q будет постоянной, равной bg. Получим

$$dy = \frac{du\sqrt{b}}{\sqrt{u - b}}$$

и

$$y = 2\sqrt{bu - bb},$$

а это уравнение относится к параболе Аполлония. Следовательно, тело, опускающееся по такой параболе, равномерно продвигается вдоль горизонта. Эта парабола является кривой, которую описывает свободно брошенное тело.

§ 403. Третий род задач, о котором здесь следует говорить, — это задачи, в которых времена должны иметь данные свойства. Такие задачи могут быть двоякого типа. В одних рассматривается только один спуск или подъем, для которого дается время; в других случаях рассматривается несколько спусков или подъемов по одной и той же кривой, которые осуществляются в заданные времена, т. е. времена, за которые осуществляются различные спуски или подъемы, должны иметь между собой данное отношение.

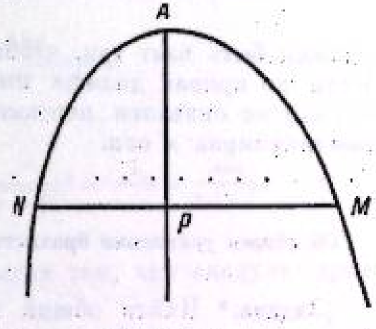


Рис. 63.

Итак, сначала мы рассмотрим задачи первого рода, в которых идет речь только об одном спуске или подъеме, а затем мы обратимся к задачам второго рода.

§ 404. Найдем такую кривую AM (рис. 63), чтобы продвигающееся по ней под действием каких-либо абсолютных сил тело пробегало дуги AM за времена, пропорциональные соответствующим аппликатам PN данной кривой AN. Обозначим AP через x, PN через t, PM через y. Пусть высота, порождающая скорость, которую тело имеет в M, будет равна v и выражается через x и y. Поскольку время, соответствующее AM, должно быть пропорционально t, положим ради однородности, что оно равно $t : \sqrt{f}$. Но элемент времени, соответствующий AM, равен

$$\frac{\sqrt{dx^2 + dy^2}}{\sqrt{v}}.$$

Следует положить, что он равен $dt : \sqrt{f}$. Поэтому будем иметь уравнение $fdx^2 + fdy^2 = vdt^2$. Поскольку кривая AN задана, то t будет дано через x. Итак, положим $dt = qdx$. Тогда $fdy^2 = dx^2(q^2v - f)$ и

$$dy = dx\sqrt{\frac{q^2v - f}{f}}.$$

§ 405. Пусть движущая сила будет однообразной, равной g, а ее направление пусть всюду будет параллельно оси AP. Положив, что скорость в A равна нулю, получим $v=gx$. При этом

$$dy = dx\sqrt{\frac{gq^2x-f}{f}}$$

и

$$y=\int dx\sqrt{\frac{gq^2x-f}{f}}.$$

А этот интеграл можно взять, так как мы полагаем, что q выражено через x. Таким способом можно найти искомую кривую AM. Интеграл

$$\int dx\sqrt{\frac{gq^2x-f}{f}}$$

должен быть взят так, чтобы он становился равным нулю при $x=0$. Если же кривая должна иметь начало в A, то, для того чтобы этот случай не оказался невозможным, кривая AN должна быть в N перпендикулярна к оси.

. . . .

Об общем уравнении брахистохронной кривой, или кривой наибыстрейшего спуска

[Задача.* Найти общий закон, по которому должна быть расположена кривая, чтобы опускающееся по ней тело доходило наиболее быстро до любой точки кривой.

Решение. Пусть AMC (рис. 64) будет кривой такого рода, по которой тело доходит из A в C за более короткое время, нежели по какой-либо другой кривой, проходящей через точки A и C. Возьмем на кривой две произвольные точки M и μ. Заключенная между ними кривая должна быть такова, чтобы тело в своем движении по AMC проходило дугу, заключенную между M и μ за более короткое время, нежели какую-либо другую дугу между этими точками. Пусть теперь точки M и μ будут ближайшими точками, соединенными двумя элементами Mm, $m\mu$. Время, соответствующее $Mm\mu$, должно] быть наименьшим или, согласно правилам метода наибольших и наименьших, должно быть равно времени, соответствующему ближайшим элементам Mn и $n\mu$. Проведем к оси AP аппликаты MP, mp, $\mu\pi$, возьмем элементы Pp, $p\pi$ равными между собой, т. е. $MG=mH$, и продолжим, если это нужно, pm до n; тогда mn будет бесконечно малым в сравнении с элементами Mm и $m\mu$. Итак, должно быть

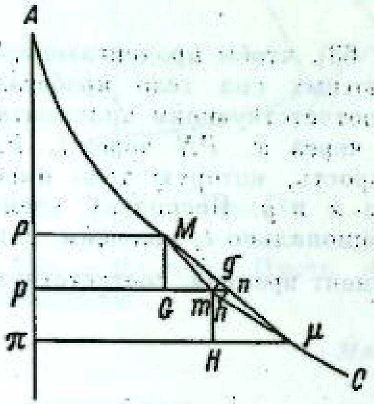


Рис. 64.

$$\mathrm{t}Mm+\mathrm{t}m\mu=\mathrm{t}Mn+\mathrm{t}n\mu.$$

* Приводимый отрывок взят из «Механики» Л. Эйлера (Opera omnia, II-2, pp. 160—161) и включен сюда для связности изложения. — Г. М.

Пусть скорость, которую тело имеет в M, соответствует высоте v, и с этой скоростью тело пробегает как элемент Mm, так и Mn. Скорость же, которую оно имеет в m, пусть соответствует высоте $v+du$, а скорость, которую оно имеет в n, — высоте $v+du+ddw$; с первой из этих скоростей тело пробегает элемент $m\mu$, а со второй — элемент $n\mu$. Отсюда, следовательно, имеем уравнение

$$\frac{Mm}{\sqrt{v}}+\frac{m\mu}{\sqrt{v+du}}=\frac{Mn}{\sqrt{v}}+\frac{n\mu}{\sqrt{v+du+ddw}}.$$

Но

$$\frac{1}{\sqrt{v+du+ddw}}=\frac{1}{\sqrt{v+du}}-\frac{ddw}{2(v+du)\sqrt{v+du}},$$

откуда, проведя дуги mg и nh с центрами в M и μ, получим

$$\frac{ng}{\sqrt{v}}=\frac{mh}{\sqrt{v+du}}+\frac{n\mu\cdot ddw}{2(v+du)\sqrt{v+du}}.$$

Далее

$$\frac{1}{\sqrt{v+du}}=\frac{1}{\sqrt{v}}-\frac{du}{2v\sqrt{v}} \text{ и } \frac{1}{(v+du)\sqrt{v+du}}=\frac{1}{v\sqrt{v}}-\frac{3du}{2v^2\sqrt{v}}.$$

Подставляя это в предыдущее и пренебрегая тем, чем следует пренебречь, получим уравнение

$$2v(mh-ng)=mh\cdot du-n\mu\cdot ddw=mh\cdot du-Mm\cdot ddw.$$

Но вследствие подобия треугольников nmg, mMG и nmh, μmH имеем следующее:

$$ng:mn=mG:mM, \text{ или } ng=\frac{mG\cdot mn}{Mm},$$

и

$$mh:mn=\mu H:m\mu, \text{ или } mh=\frac{\mu H\cdot mn}{m\mu}.$$

Поэтому

$$2v\left(\frac{\mu H}{m\mu}-\frac{mG}{Mm}\right)=\frac{mG\cdot du}{Mm}-\frac{Mm\cdot ddw}{mn}=2v\,\mathrm{diff}\,\frac{mG}{Mm}.$$

Это уравнение является однородным и определяет природу кривой AMC, называемой *брахистохроной*, по которой тело доходит из A в C наиболее быстро, что и требовалось найти.]

§ 426. Пусть теперь движущая сила будет произвольной. Представим себе, что она разложена на две силы, одна из которых направлена вдоль оси AP, а другая — по нормали к ней. Пусть первая из них в M будет равна P, а вторая равна Q. Положив это, получим $du=P\cdot MG+Q\cdot mG$ и $du+ddw=P\cdot MG+Q\cdot nG$. Итак, $ddw=Q\cdot mn$. Подставляя это в уравнение § 423, получим

$$2v\left(\frac{\mu H}{m\mu}-\frac{mG}{Mm}\right)=\frac{mG(P\cdot MG+Q\cdot mG)}{Mm}-Q\cdot Mm=\frac{P\cdot MG\cdot mG-Q\cdot MG^2}{Mm}.$$

§ 427. Оставляя прежние обозначения $AP=x$, $PM=y$, получим

$$2v\left(\frac{dsddy-dydds}{ds^2}\right)=\frac{Pdxdy-Qdx^2}{ds}.$$

Но $dv=Pdx+Qdy$. В силу этого

$$v=\int Pdx+\int Qdy.$$

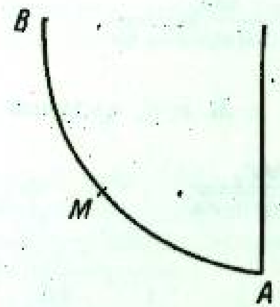


Рис. 65.

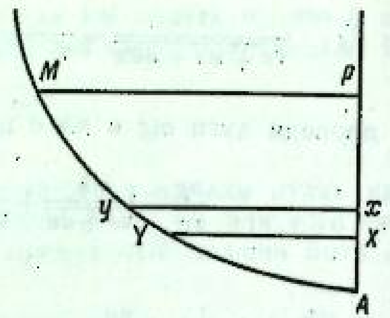


Рис. 66.

Но $ds=\sqrt{dx^2+dy^2}$, и поэтому, поскольку dx есть постоянная,

$$dds=\frac{dyddy}{\sqrt{dx^2+dy^2}}.$$

При этом предыдущее уравнение перейдет в

$$\frac{2dx^2ddy}{dx^2+dy^2}\left(\int Pdx+\int Qdy\right)=Pdxdy-Qdx^2,$$

или

$$\frac{2dxddy}{dx^2+dy^2}=\frac{Pdy-Qdx}{\int Pdx+\int Qdy}.$$

§ 428. Перехожу ко второй части задач, которые могут быть поставлены относительно времен, а именно к таким задачам, в которых несколько спусков или подъемов по одной и той же кривой, или же полные колебания, должны совершаться за времена, имеющие между собой данное отношение.

Прежде всего я рассмотрю задачу следующего содержания: требуется найти кривую BMA (рис. 65), спускаясь по которой тело дойдет до точки A за время, которое данным образом зависит от начала спуска M; иначе говоря, времена спусков по кривой до A должны некоторым заданным образом зависеть от описанных дуг.

§ 429. Пусть единообразная движущая сила будет равна g, а ее направление всегда параллельно прямой AP (рис. 66). Положим, что требуется найти кривую AYM, спускаясь по которой тело, начавшее свой спуск в какой-либо точке M, дойдет до A за время, которое

выражается какой-либо функцией дуги AM или стрелки AP, или вообще определяется каким-нибудь образом по положению точки M. Пусть $AP=a$, а F обозначает время спуска из M в A. При этом F является некоторой функцией от a и постоянных.

§ 430. На дуге MA возьмем какой-либо элемент Yy, проведем аппликаты YX и yx, введем обозначения $AX=x$, $XY=y$, дуга $AY=s$. Тогда $Yy=ds=\sqrt{dx^2+dy^2}$. Скорость тела, описывающего элемент Yy, порождается из высоты $g(a-x)$. Поэтому промежуточек времени, за который описывается элемент Yy, есть $\frac{ds}{\sqrt{g(a-x)}}$. Интеграл от этого выражения, взятый так, чтобы он становился равным нулю при $x=0$, даст время, за которое пробегается дуга AY. Таким образом, если в нем положить $x=a$, то получим время, за которое описывается вся дуга MYA. То, что мы получим, следует положить равным F, и отсюда найдется уравнение, выражающее природу кривой AYM.

§ 431. Итак, требуется найти такое уравнение между s и x, чтобы интеграл от $\frac{ds}{\sqrt{g(a-x)}}$ удовлетворил указанным условиям. В уравнение между s и x не должны входить ни буква a, ни другие величины, зависящие от нее, поскольку a зависит от начала спуска, которое принято переменным. Итак, s должно быть определено через x и буквы, безусловно постоянные. Пусть F будет некоторой степенью a, например fa^n, и посмотрим, какой функцией от x должно быть s.

§ 432. Поскольку интеграл

$$\int\frac{ds}{\sqrt{g(a-x)}}$$

при $x=a$ должен дать fa^n, т. е. функцию степени n от a, то

$$\int\frac{ds}{\sqrt{g(a-x)}}$$

должен быть функцией от a и x степени n. В этой же степени a, x и dx должны входить в дифференциал $\frac{ds}{\sqrt{g(a-x)}}$.

Положим $ds=Pdx$. P должно быть функцией от a и x степени $n-\frac{1}{2}$. Но a не может содержаться в P. Следовательно, $P=bx^{n-1/2}$.

§ 433. Итак, мы имеем для искомой кривой уравнение $ds=bx^{n-1/2}dx$, которое после интегрирования даст $s=bx^{n+1/2}$, если положить b вместо $\frac{b}{n+\frac{1}{2}}$. Следовательно, кривая будет иметь такое свойство, что тело, спускающееся по ней, будет описывать некоторую дугу MA за время, пропорциональное степени высоты AP с показателем n. Таким образом, если $n=0$, то $s=\sqrt{bx}$, и кривая будет циклоидой, все спуски по которой совершаются за одно и то же время.

§ 434. Пусть тело опускается из Y. Время спуска до A будет пропорционально x^n. Но x пропорционально $s^{\frac{2}{2n+1}}$. Таким образом, x^n

пропорционально $s^{\frac{2n}{2n+1}}$. Следовательно, время спуска по YA пропорционально $s^{\frac{2n}{2n+1}}$. Положим $\frac{2n}{2n+1}=m$. Тогда $n=\frac{m}{2-2m}$ и $s=bx^{\frac{1}{2-2m}}$.

Итак, кривая, удовлетворяющая этому уравнению, будет иметь такое свойство, что времена спусков по каким-либо дугам пропорциональны степени описанных дуг с показателем m. Многое, относящееся сюда, можно почерпнуть в главе I первого раздела.

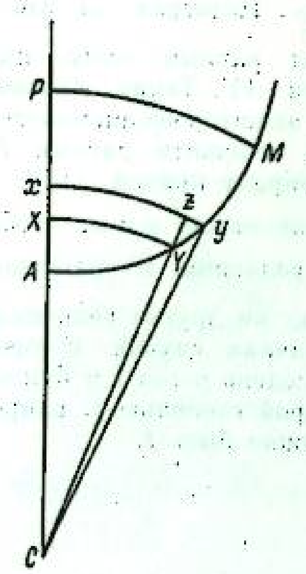


Рис. 67.

§ 435. Пусть движущая сила будет направлена к неподвижной точке C. Найдем кривую MYA (рис. 67), все спуски по которой сохраняют между собой заданное отношение. Проведем через точки C и A прямую CA, которая будет как бы осью искомой кривой. Пусть AM будет какой-либо дугой, описанной при спуске, и Yy — бесконечно малым элементом на ней. Взяв центр C, проведем дуги окружности MP, YX и yx. Введем обозначения $AP=a$, $AX=x$, дуга $AY=s$. Пусть сила, действующая в Y, равна P. Пусть скорость в Y порождается из высоты v, а в y — из $v+dv$.

§ 436. Итак, $Yy=ds$ и $Yz=dx$, а тангенциальная сила, происходящая от P, равна $\frac{Pdx}{ds}$. Будучи умножена на ds, она дает $-dv$. Следовательно, $dv=-Pdx$. Пусть интеграл Q от Pdx будет взят так, что он станет равным нулю при $x=0$. Тогда Q будет функцией от x и постоянных. Пусть она переходит в B при $x=a$. Тогда $v=B-Q$. Следовательно, промежуточек времени, соответствующий Yy, равен $\frac{ds}{\sqrt{B-Q}}$. Интеграл этого выражения, взятый так, чтобы он становился равным нулю при $x=0$, или при $Q=0$, должен быть таков, чтобы при $x=a$, либо, что то же самое, при $Q=B$ появлялась заданная величина.

§ 437. Пусть надлежит показать, что все спуски из M в A происходят за равные времена, где бы мы ни взяли M. Необходимо, чтобы в выражение времени спуска по MA не входило ни a, ни B, которое зависит от a. Для этого требуется, чтобы, применив то же вычисление, что и в § 432, мы получили $ds=bdQ:\sqrt{Q}$, где b обозначает постоянную.* Следовательно, $s=\sqrt{bQ}$ и $Q=s^2:b$. Далее $dQ=2sds:b=Pdx$.

Следовательно, $sds=bPdx$ является уравнением для таутохроны при принятом здесь предположении о движущей силе.

§ 438. Пусть теперь тело, спускающееся по кривой MYA (рис. 68), увлекается двумя какими-либо силами — этот случай является наиболее общим. Пусть в точке Y тело подвергается действию двух сил

* Буквой b Эйлер обозначает здесь произвольную постоянную, меняя ее значение в процессе выкладок (см. также § 439). — *Г. М.*

P и Q, одна из которых P пусть действует по направлению YX, перпендикулярному к оси AP, а другая — по направлению YW, перпендикулярному к направлению первой. Пусть $AP=a$, $AX=x$, $YX=y$, $AY=s$, и скорость в Y порождается из высоты v. Тогда $dv=-Pdy-Qdx$. Пусть интеграл от $Pdy+Qdx$ есть R и $R=0$ при $x=0$, причем R обращается в B при $x=a$. Тогда $v=B-R$.

§ 439. Следовательно, время, соответствующее элементу Yy, равно $\frac{ds}{\sqrt{B-R}}$. Если требуется найти, какой должна быть кривая AYM, чтобы все спуски по MA, где бы ни была взята точка M, совершались за равные времена, то необходимо, чтобы $ds=bdR:\sqrt{R}$. Из этого уравнения находим $s=b\sqrt{R}$ и $ss=bR$. Далее $sds=bdR=bPdy+bQdx$. Это уравнение даст таутохронную кривую при принятом здесь наиболее общем предположении о движущих силах.

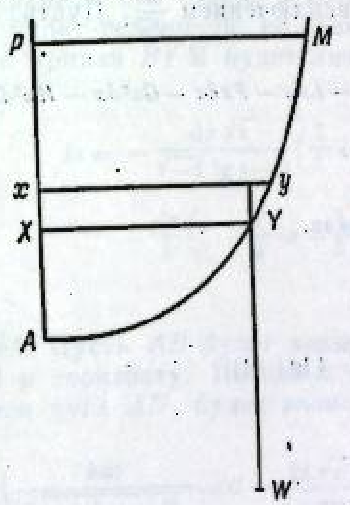


Рис. 68.

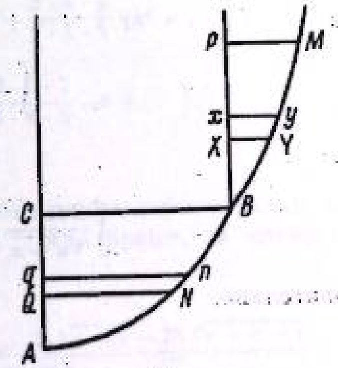


Рис. 69.

§ 440. До сих пор мы определяли таутохронные кривые, которые являются непрерывными кривыми. Теперь же мы рассмотрим, каким образом должны быть соединены две различные кривые, чтобы все спуски были изохронными. Пусть будет дана нижняя кривая AB (рис. 69) и требуется найти верхнюю кривую BM, при присоединении которой все спуски по MBA, где бы ни взять на кривой BM точку M, были бы изохронными.

Пусть единообразная движущая сила равна g и параллельна оси AC. Положим $BP=a$, $AC=c$. Проведем аппликаты QN, XY, и пусть $AQ=t$, $AN=r$, $BX=x$ и $BY=s$.

§ 441. Промежуточек времени, за который пробегается элемент Nn, равен $\frac{dr}{\sqrt{g(a+c-t)}}$. Интеграл этого выражения, взятый так, чтобы он становился равным нулю, если $t=0$, при $t=c$ даст полное время спуска по BNA, выраженное некоторой функцией постоянных и a. Пусть эта функция будет F. Время, за которое пробегается элемент Yy, равно $\frac{ds}{\sqrt{g(a-x)}}$. Интеграл этого выражения, взятый так, чтобы он становился равным нулю при $x=0$, должен быть при $x=a$ таков, чтобы при сложении его с F в сумме более не содержалось a.

§ 442. Пусть F имеет следующую форму:

$$(k + \alpha a + \beta a^2 + \gamma a^3 + \delta a^4 + \ldots + \zeta\sqrt{a} + \eta a\sqrt{a} + \vartheta a^2\sqrt{a} + \iota a^3\sqrt{a} + \ldots) : \sqrt{g}.$$

Но выражение

$$\int \frac{ds}{\sqrt{g(a-x)}} + F$$

должно быть постоянным, а именно равным $\frac{k}{\sqrt{g}}$, поскольку при $a=0$ выражение $\int \frac{ds}{\sqrt{g(a-x)}}$ обращается в нуль. Следовательно, $\int \frac{ds}{\sqrt{g(a-x)}}$ должен устранять все члены в F, за исключением $\frac{k}{\sqrt{g}}$. Пусть

$$ds = -Adx\sqrt{x} - Bxdx\sqrt{x} - Cx^2dx\sqrt{x} - \ldots - Edx - Fxdx - Gx^2dx - Hx^3dx - \ldots.$$

Тогда

$$\int \frac{Adx\sqrt{x}}{\sqrt{a-x}} = \alpha a.$$

Но

$$\int \frac{Adx\sqrt{x}}{\sqrt{a-x}} = \frac{1}{2} Aa\sqrt{-1}\lg(-1).$$

Следовательно,

$$A = \frac{2\cdot\alpha}{1\cdot\sqrt{-1}\lg(-1)}.$$

Пусть

$$\int \frac{Bxdx\sqrt{x}}{\sqrt{a-x}} = \beta a^2.$$

Тогда

$$B = \frac{2\cdot 4\cdot\beta}{1\cdot 3\cdot\sqrt{-1}\lg(-1)}.$$

Подобным же образом

$$C = \frac{2\cdot 4\cdot 6\cdot\gamma}{1\cdot 3\cdot 5\cdot\sqrt{-1}\lg(-1)} \text{ и т. д.}$$

§ 443. Пусть, далее,

$$\int \frac{Edx}{\sqrt{a-x}} = \zeta\sqrt{a}.$$

Но

$$\int \frac{Edx}{\sqrt{a-x}} = 2E\sqrt{a}.$$

Следовательно, $E = \frac{\zeta}{2}$. Пусть

$$\int \frac{Fxdx}{\sqrt{a-x}} = \eta a\sqrt{a}.$$

Тогда $F = \frac{3}{2}\cdot\frac{\eta}{2}$. Подобным же образом $G = \frac{3\cdot 5}{2\cdot 4}\cdot\frac{\vartheta}{2}$. Таким путем будут устранены все члены, в которых присутствует a, и время полного спуска будет величиной, не зависящей от a, что и требовалось. Итак, искомая кривая BYM будет иметь следующее уравнение:

$$ds = -\frac{dx\sqrt{x}}{\sqrt{-1}\lg(-1)}\left(\frac{2}{1}\alpha + \frac{2\cdot 4}{1\cdot 3}\beta x + \frac{2\cdot 4\cdot 6}{1\cdot 3\cdot 5}\gamma x^2 + \ldots\right) - \frac{dx}{2}\left(\zeta + \frac{3}{2}\eta x + \frac{3\cdot 5}{2\cdot 4}\vartheta x^2 + \frac{3\cdot 5\cdot 7}{2\cdot 4\cdot 6}\iota x^3 + \ldots\right).$$

§ 444. Пусть AB будет прямой линией, каким-либо образом наклоненной к горизонту. Положим $dr = hdt$. Тогда время, за которое описывается дуга AN, будет равно

$$\int \frac{hdt}{\sqrt{g(a+c-t)}} = C - \frac{2h\sqrt{a+c-t}}{\sqrt{g}} = \frac{2h\sqrt{a+c} - 2h\sqrt{a+c-t}}{\sqrt{g}}.$$

Положив $t=c$, получим время, за которое описывается дуга AB,

$$\frac{2h\sqrt{a+c} - 2h\sqrt{a}}{\sqrt{g}}.$$

Но

$$\sqrt{a+c} = \sqrt{c} + \frac{1\cdot a}{2\cdot 1\cdot\sqrt{c}} - \frac{1\cdot 1\cdot a^2}{4\cdot 1\cdot 2\cdot c\sqrt{c}} + \frac{1\cdot 1\cdot 3\cdot a^3}{8\cdot 1\cdot 2\cdot 3\cdot c^2\sqrt{c}} - \frac{1\cdot 1\cdot 3\cdot 5\cdot a^4}{16\cdot 1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot c^3\sqrt{c}} + \ldots$$

§ 445. Сопоставив это с принятой общей формой для F, получим

$$k = 2h\sqrt{c},\quad \alpha = +\frac{1\cdot h}{1\cdot 1\cdot\sqrt{c}},\quad \beta = -\frac{1\cdot 1\cdot h}{2\cdot 1\cdot 2\cdot c\sqrt{c}},$$

$$\gamma = +\frac{1\cdot 1\cdot 3\cdot h}{4\cdot 1\cdot 2\cdot 3\cdot c^2\sqrt{c}},\quad \delta = -\frac{1\cdot 1\cdot 3\cdot 5\cdot h}{8\cdot 1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot c^3\sqrt{c}} \text{ и т. д.,}$$

а также $\zeta = -2h$, $\eta = 0$, $\vartheta = 0$ и т. д. Отсюда найдется следующее уравнение для кривой BYM:

$$ds = -\frac{hdx\sqrt{x}}{\lg(-1)\sqrt{-1}}\left(\frac{2\cdot 1}{1\cdot 1\cdot 1\cdot\sqrt{c}} - \frac{2\cdot 4\cdot 1\cdot 1\cdot x}{1\cdot 3\cdot 2\cdot 1\cdot 2\cdot c\sqrt{c}} + \right.$$

$$\left. + \frac{2\cdot 4\cdot 6\cdot 1\cdot 1\cdot 3\cdot x^2}{1\cdot 3\cdot 5\cdot 4\cdot 1\cdot 2\cdot 3\cdot c^2\sqrt{c}} - \frac{2\cdot 4\cdot 6\cdot 8\cdot 1\cdot 1\cdot 3\cdot 5\cdot x^3}{1\cdot 3\cdot 5\cdot 7\cdot 8\cdot 1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot c^3\sqrt{c}} + \ldots\right) + hdx =$$

$$= hdx - \frac{2hdx\sqrt{x}}{\sqrt{-c}\lg(-1)}\left(1 - \frac{x}{3c} + \frac{x^2}{5c^2} - \frac{x^3}{7c^3} + \frac{x^4}{9c^4} - \frac{x^5}{11c^5} + \ldots\right).$$

. . . .

[Задача.* В предположении единообразной, направленной вниз тяжести найти по заданной кривой AM (рис. 70) такую кривую AN, чтобы все колебания, совершаемые на составной кривой MAN, были бы изохронными между собой.

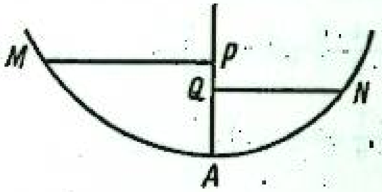


Рис. 70.

Решение. Пусть на заданной кривой AM абсцисса $AP = u$, соответствующая дуга $AM = t$; поскольку кривая задана, то задано и уравнение между u и t. Положим, далее, что на искомой кривой AN абсцисса $AQ = x$ и дуга $AN = s$. Пусть при любом колебании скорость в точке A соответствует высоте b; время, соответствующее MAN, равно

$$\int\frac{dt}{\sqrt{b-u}} + \int\frac{ds}{\sqrt{b-x}}.$$

Если в этом выражении положить $u = b$ и $x = b$, то получим время одного колебания; поскольку оно должно быть постоянным, то из формулы, его выражающей, должна безусловно исчезнуть буква b. Положим

$$dt = \frac{du\sqrt{f}}{\sqrt{u}} + Pdu \quad \text{и} \quad ds = \frac{dx\sqrt{h}}{\sqrt{x}} - Qdx;$$

тогда время одного колебания составит

$$\int\frac{du\sqrt{f}}{\sqrt{bu-u^2}} + \int\frac{dx\sqrt{h}}{\sqrt{bx-x^2}} + \int\frac{Pdu}{\sqrt{b-u}} - \int\frac{Qdx}{\sqrt{b-x}},$$

после того как положим $u = b$ и $x = b$. Два первых члена этого выражения составлены так, что при $u = b$ и $x = b$ из них исчезает b; они дают $\pi\sqrt{f} + \pi\sqrt{h}$, где π обозначает окружность круга с диаметром, равным 1. Поэтому, если последние члены будут составлены так, что они будут уничтожать друг друга при $u = b$ и $x = b$, то получим искомое; но необходимо, чтобы P и Q были такими величинами, которые не исключают b, ибо они входят в уравнение кривой. Но

$$\int\frac{Pdu}{\sqrt{b-u}} - \int\frac{Qdx}{\sqrt{b-x}} = 0$$

при $u = b$ и $x = b$, если Q будет такой функцией от x, какой P является от u. Или, поскольку ничто не препятствует тому, чтобы положить $x = u$, то пусть $x = u$, и тогда необходимо $Q = P$. Значение же P дается из уравнения заданной кривой AM, ибо

$$P = \frac{dt}{du} - \frac{\sqrt{f}}{\sqrt{u}}.$$

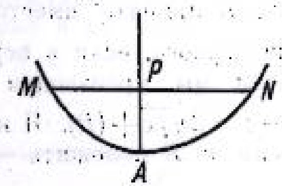


Рис. 71.

Поэтому для искомой кривой получим уравнение

$$ds = \frac{du\sqrt{h}}{\sqrt{u}} - dt + \frac{du\sqrt{f}}{\sqrt{u}}$$

или

$$s + t = 2\sqrt{hu} + 2\sqrt{fu};$$

из этого уравнения определяется природа искомой кривой AN, что и требовалось найти.]

§ 454. Кроме того, если не дана ни одна кривая, чрезвычайно легко определить бесчисленные пары кривых, которые, будучи надлежащим образом соединены, делают все колебания изохронными. Среди них, без сомнения, встречаются иногда и такие пары, которые образуют непрерывную кривую, их я и подвергну краткому исследованию. Пусть кривые MA и NA будут частями одной и той же непрерывной кривой (рис. 71); в этом случае мы получим уравнение для кривой AN, если только в уравнении для AM положим, что t — величина отрицательная, а x остается неизменным. Поэтому кривые AM и AN неизбежно будут непрерывными в том случае, если, приняв в уравнении

$$dt = \frac{\sqrt{f}\,dx}{\sqrt{x}} + Pdx,$$

dt за величину отрицательную или равную $-ds$, получим уравнение

$$ds = \frac{\sqrt{h}\,dx}{\sqrt{x}} - Pdx.$$

§ 455. Для того чтобы это произвести, я принимаю новую неизвестную z, через которую должны быть выражены x, t, s и P, причем таким образом, чтобы, принимая z положительным, можно было найти точку N. Поскольку x остается одним и тем же для обеих точек M и N, функция от z должна быть такой, которая остается одинаковой независимо от того, положительной или отрицательной величиной является z. Такого рода функцию я называю четной. Далее, t является такой функцией от z, которая при подстановке $-z$ вместо z переходит в $-s$.

* Приводимый отрывок взят из «Механики» Л. Эйлера (Opera omnia, II-2, pp. 206—207) и включен сюда для связности изложения. — Г. М.

§ 456. Итак, уравнения

$$dt=\frac{\sqrt{f}\,dx}{\sqrt{x}}+P\,dx \quad \text{и} \quad ds=\frac{\sqrt{h}\,dx}{\sqrt{x}}-P\,dx$$

после интегрирования дадут

$$t=2\sqrt{fx}+R \quad \text{и} \quad s=2\sqrt{hx}-R,$$

где R принято вместо $\int P\,dx$. Второе уравнение должно возникнуть из первого, если в первом положить $-z$ вместо z. Первое уравнение, если мы произведем эту подстановку, переходит в следующее: $-s=2\sqrt{fx}+(R)$. Я принимаю (R) в качестве функции, возникающей, если в R положить $-z$ вместо z. Следовательно, должно быть

$$(R)+2\sqrt{fx}=R-2\sqrt{hx}$$

и

$$R-(R)=2(\sqrt{f}+\sqrt{h})\sqrt{x}.$$

§ 457. Итак, надо найти, какой функцией от z должно быть R, чтобы

$$R-(R)=2(\sqrt{f}+\sqrt{h})\sqrt{x}.$$

Положим $R=F+G$, где F является четной функцией, а G — нечетной от z. Тогда $(R)=F-G$, и поэтому $2G=2(\sqrt{f}+\sqrt{h})\sqrt{x}$. Следовательно, $G=(\sqrt{f}+\sqrt{h})\sqrt{x}$. Положим $G=(\sqrt{f}+\sqrt{h})z$. Тогда $x=zz$ является четной функцией, как и следует. Также и F должно быть четной функцией от $\sqrt{x}$. Поэтому мы получим уравнение

$$t=2\sqrt{fx}+(\sqrt{f}+\sqrt{h})\sqrt{x}+F.$$

Положим $3\sqrt{f}+\sqrt{h}=\sqrt{k}$. Тогда $t=\sqrt{kx}+F$. Это уравнение дает непрерывную кривую MAN, все колебания по которой совершаются за равные времена, когда F является четной функцией от $\sqrt{x}$.

Глава II. О ДВИЖЕНИИ ТОЧКИ ПО ЗАДАННОЙ ЛИНИИ ПРИ ОДНОВРЕМЕННОМ ДЕЙСТВИИ АБСОЛЮТНЫХ И ОТНОСИТЕЛЬНЫХ СИЛ

§ 458. Эту главу, в которой рассматривается точка, движущаяся как бы по каналу, мы разделим, как и предыдущую, на две части; в первой из них мы будем исследовать движение точки по какой-либо заданной линии, а во второй мы будем отыскивать кривые, движение по которым тела или точки имеет заданное свойство. Поскольку это исследование и само по себе является более сложным и запутанным, мы не будем здесь касаться ни тех случаев, где кривая не расположена в одной плоскости, ни тех, где абсолютная сила является переменной.

§ 459. Таким образом, линия, по которой движется тело, всегда будет у нас расположена в одной плоскости, абсолютная движущая сила всегда будет единообразной и равной g, а ее направление повсюду будет оставаться параллельным самому себе и плоскости, в которой расположена линия. Ведь на основании того, что уже изложено, будет нетрудно распространить этот способ исследования на любые опущенные здесь случаи, но при этом мы будем сталкиваться с чрезвычайно длинными вычислениями, порой едва разрешимыми.

§ 460. Относительную силу я введу здесь в вычисление таким же образом, как я это сделал в § 119. Конечно, применительно к ней следует принимать во внимание два свойства: закон и интенсивность.

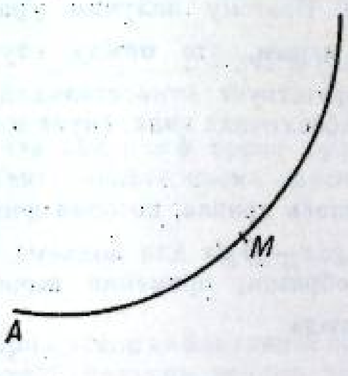


Рис. 72.

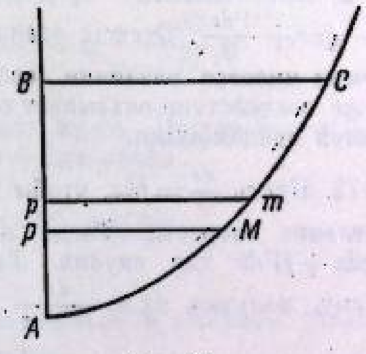


Рис. 73.

Итак, пусть тело движется по какой-либо кривой AM (рис. 72) и интенсивность в каком-либо месте M будет q, т. е. q обозначает высоту, порождающую скорость, которую должно иметь тело в M, чтобы относительная сила была равна силе тяжести. Пусть закон относительной силы выражается через V, причем V есть некоторая функция от высоты v, порождающей скорость в M. Пусть V переходит в Q, если вместо v положить q.

§ 461. В § 292 было показано, что относительная сила всегда производит действие тангенциальной силы, лишь увеличивая или уменьшая скорость тела. И поэтому в нашем случае давление на стенки канала не изменяется под действием относительной силы, но, как и в предыдущей главе, его следует выводить из центробежной и абсолютной сил. Далее, относительная сила является либо ускоряющей, либо замедляющей. В каждом из этих случаев относительная сила отрицательна в сравнении с таковой в другом случае.

. . . .

§ 470. Я не иллюстрирую примерами этот способ нахождения спуска, а перехожу к рассуждению о подъемах, где пойдет речь главным образом о колебаниях тел на заданных кривых. Пусть будет дана, при сохранении прежних предположений, кривая AMC (рис. 73), в самом нижнем месте которой A скорость тела порождается из высоты b, в M — из высоты v, а в C — равна нулю. Пусть относительная сила всегда будет замедляющей, и пусть дуга AMC будет описана восходящим движением. Пока тело описывает элемент Mm, и абсолютная сила g и относительная $\frac{V}{Q}$ будут противоположны. Поэтому, обозначив AP через x, AM через s, получим $dv = -gdx - \frac{V\,ds}{Q}$.

§ 471. Если дуга AMC будет описана нисходящим движением, причем так, чтобы тело, когда оно приходит в A, имело скорость, порождаемую из высоты b, то пока тело проходит элемент mM, абсолютная сила будет продвигающей, а относительная — замедляющей. Поэтому, если принять, что тело поднимается таким же образом, каким оно опускалось, а именно так, что в отдельных точках кривой поднимающееся тело имеет ту же скорость, которую имеет опускающееся тело, то абсолютная сила, пока тело описывает элемент Mm, будет замедляющей, а относительная — продвигающей. Поэтому получим уравнение $dv = -gdx + \frac{V\,ds}{Q}$. Отсюда становится ясным, что между спуском и подъемом имеется различие, если присутствует относительная сила; если же воздействие оказывает только абсолютная сила, спуск и подъем являются одинаковыми.

§ 472. Пусть $\frac{ds}{Q} = fdx$, чтобы получилась кривая, которая допускает определение скорости. Тогда $dv = -gdx - fVdx$ для подъема и $dv = -gdx + fVdx$ для спуска. Таким образом, применив вычисление к спуску, получим $dx = \frac{dv}{fV - g}$. И отсюда

$$x = C + \int \frac{dv}{fV - g}.$$

Пусть $\int \frac{dv}{fV - g} = 0$ при $v = 0$, и положим $AB = a$. Тогда

$$x = a + \int \frac{dv}{fV - g},$$

а также

$$ds = fQdx = \frac{fQdv}{fV - g}.$$

Поскольку мы полагаем, что Q задается через x или s, Q сможет быть задано также через v, и поэтому ds сможет быть задано через одно только v. Следовательно, элемент времени

$$\frac{fQdv}{(fV - g)\sqrt{v}}$$

будет содержать только v и постоянные, и поэтому время сможет быть найдено.

§ 473. Пусть закон относительной силы будет простым отношением скоростей. Тогда $V = \sqrt{v}$ и $Q = \sqrt{q}$. Пусть, далее, q будет постоянной, равной c. Тогда

$$x = a + \int \frac{dv}{f\sqrt{v} - g} = a + \frac{2\sqrt{v}}{f} + \frac{2g}{ff} \lg \frac{g - f\sqrt{v}}{g}.$$

Поскольку при $x = 0$ имеем $v = b$, то

$$a + \frac{2\sqrt{b}}{f} + \frac{2g}{ff} \lg \frac{g - f\sqrt{b}}{g} = 0,$$

или

$$a = \frac{-2\sqrt{b}}{f} - \frac{2g}{ff} \lg \frac{g - f\sqrt{b}}{g},$$

а элемент времени будет равен $\frac{fdv\sqrt{c}}{fv - g\sqrt{v}}$. Следовательно, время, соответствующее дуге AM, будет равно

$$C + 2\sqrt{c}\lg(f\sqrt{v} - g) = 2\sqrt{c}\lg \frac{g - f\sqrt{v}}{g - f\sqrt{b}},$$

так что при $v = b$ время будет равно нулю. Положим $v = 0$, чтобы получить полное время спуска. Оно будет равно

$$2\sqrt{c}\lg \frac{g}{g - f\sqrt{b}} = \frac{aff\sqrt{c} + 2f\sqrt{bc}}{g}.$$

При спуске по наклонной прямой $ds = fdx\sqrt{c}$ и $s = fx\sqrt{c}$. Положив $-f$ вместо f, получим все это для подъема.

§ 474. Вторым случаем является такой, при котором уравнение

$$dv = -gdx \pm \frac{V\,ds}{Q}$$

допускает интегрирование, будучи однородным. Пусть $V = v^n$. Тогда $Q = q^n$. Положим

$$\frac{ds}{q^n} = fx^{-n}dx.$$

Будем иметь

$$dv = -gdx \pm fv^n x^{-n} dx,$$

или

$$x^n dv + gx^n dx = \pm f v^n dx.$$

В этом уравнении неизвестные v и x повсюду будут выступать в одной и той же степени. Положим $v = zx$. Тогда $dv = zdx + xdz$ и

$$x^n z dx + x^{n+1} dz + gx^n dx = \pm f z^n x^n dx,$$

или

$$zdx + xdz + gdx = \pm f z^n dx.$$

Отсюда получим

$$\frac{dx}{x} = \frac{-dz}{g + z \mp fz^n}$$

и далее

$$\lg x = C - \int \frac{dz}{g + z \mp fz^n}.$$

Если этот интеграл будет взят так, что при $z=0$ он станет равным нулю, то

$$\lg\frac{a}{x}=\int\frac{dz}{g+z\mp fz^n},$$

поскольку при $z=0$ имеем $v=0$ и $x=a$.

§ 475. Так как $z=\frac{v}{x}$, то интеграл

$$\int\frac{dz}{g+z\mp fz^n}$$

будет составлен таким образом, что он будет состоять из v и x и притом явится функцией нулевой степени от x и v. Поскольку же $\lg\frac{a}{x}$ является функцией нулевой степени от a и x, то все уравнение, вытекающее из интеграла, будет таково, что a, x и v будут выступать в нем везде в одинаковой степени. Итак, после того как мы определим из него v, v будет равно некоторой функции от x и a в первой степени, в то время как остальные постоянные буквы f и g явятся как бы числами, входящими в отдельные члены. Следовательно, если $x=0$, то $v=\alpha a=b$. Поэтому высота, порождающая скорость в самом нижнем месте A, всегда пропорциональна высоте, с которой тело опустилось или которую оно достигнет при подъеме.

§ 476. Элемент времени равен $\frac{ds}{\sqrt{v}}$. Но $ds=fq^nx^{-n}dx$. Пусть $q=cx^m$. Тогда $ds=fc^nx^{mn-n}dx$. Следовательно, элемент времени равен

$$\frac{fc^nx^{mn-n}\,dx}{\sqrt{v}}.$$

Это выражение является функцией от a и x степени $mn-n+\frac{1}{2}$. Следовательно, его интеграл, взятый так, чтобы он обращался в нуль при $x=0$, что дает время, соответствующее AM, будет подобной функцией, в которой a и x выступают в степени $mn-n+\frac{1}{2}$. Итак, если $a=x$, и при этом будет найдено полное время, соответствующее AC, то получим выражение вида $\alpha a^{mn-n+\frac{1}{2}}$. Следовательно, время, за которое нисходящим или восходящим движением описывается какая-либо дуга AC, пропорционально $AB^{mn-n+1/2}$.

§ 477. Сама же кривая, имеющая такое свойство, есть $ds=fc^nx^{mn-n}dx$, или

$$s=\frac{fc^nx^{mn-n+1}}{mn-n+1},$$

поскольку закон относительной силы является n-й степенью высот, порождающих скорости, а интенсивность — высотой cx^m.

Для того чтобы все спуски или подъемы совершались за равные времена, должно быть $mn-n+\frac{1}{2}=0$ или $n=\frac{1}{2-2m}$. Если интен-

сивность есть величина постоянная, или $m=0$, то $n=\frac{1}{2}$, а $s=2f\sqrt{cx}$. Это уравнение относится к циклоиде, все спуски и подъемы по которой совершаются за равные времена, если относительная сила пропорциональна скоростям, а ее интенсивность постоянна.

. . . .

§ 486. Изложив эти случаи, в которых движения тел могут быть определены, я перехожу к третьему роду, когда движения также могут быть определены. Он заключает в себе все то, когда $V=v$, или закон относительной силы представляет собой пропорциональность квадрату скоростей. В этом случае движение всегда может быть определено, какова бы ни была кривая, по которой движется тело, и какова бы ни была интенсивность относительной силы. В этом рассмотрении мы примем, что абсолютная сила не является постоянной; поскольку же она обычно зависит от интенсивности, которую мы полагаем переменной, мы также и ее положим переменной.

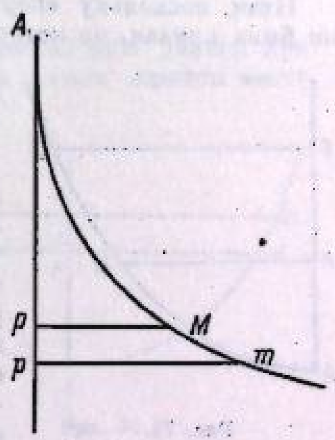


Рис. 74.

§ 487. Итак, пусть кривая, по которой опускается тело, будет AM, а ось — AP, и ей пусть будет всегда параллельно направление абсолютной силы (рис. 74). Положим $AP=x$, $AM=s$. Тогда $Pp=dx$, $Mm=ds$. Пусть абсолютная сила в M будет равна p и увлекает вниз. Пусть интенсивность относительной силы будет высотой q. Буквы p и q обозначают некоторые функции от x и постоянных. Таким образом, положив относительную силу ускоряющей, получим $dv=pdx+vds:q$; v является высотой, порождающей скорость, которую тело имеет в M. Если относительная сила будет замедляющей, то $dv=pdx-$ $-vds:q$.

§ 488. Поскольку в этих уравнениях вторая неизвестная v выступает только в первой степени, а остальные x, s, p и q считаются за одну неизвестную, ибо все они зависят от x, эти уравнения могут быть проинтегрированы. Первое из них переходит в $dv-\frac{vds}{q}=pdx$. Умножим его на $e^{-\int\frac{ds}{q}}$. Оно станет интегрируемым, и интеграл его будет

$$e^{-\int\frac{ds}{q}}v=\int e^{-\int\frac{ds}{q}}pdx+C.$$

К нему должна быть добавлена такая постоянная, чтобы при $x=0$ было бы $v=0$, если мы полагаем, что тело в A не имеет никакой скорости. Если относительная сила будет замедляющей, будем иметь

$$e^{\int\frac{ds}{q}}v=\int e^{\int\frac{ds}{q}}pdx+C.$$

§ 489. Пусть интенсивность будет постоянной, равно как и абсолютная сила. Поэтому положим $p=g$, $q=c$. Тогда для ускоряющей относительной силы

$$e^{-\frac{s}{c}}v=g\int e^{-\frac{s}{c}}dx+C,$$

а для замедляющей

$$e^{\frac{s}{c}}v=g\int e^{\frac{s}{c}}dx+C.$$

Итак, поскольку скорость всегда может быть найдена, какова бы ни была кривая, по которой движется тело, будет найдено и все прочее, зависящее от скорости, а именно время спуска и давление на кривую по направлению радиуса кривизны.

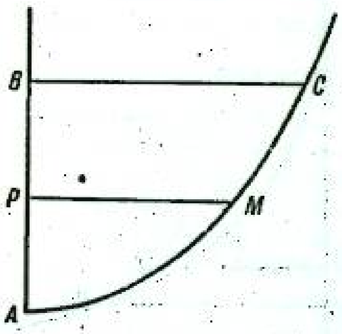


Рис. 75.

§ 490. Применим этот способ рассмотрения к учению о колебаниях. Пусть будет дана некоторая кривая AMC (рис. 75), на которой тело совершает половину колебания, двигаясь или вверх или вниз. Пусть его скорость в самой нижней точке A порождается из высоты b. Для того чтобы избежать какой бы то ни было двусмысленности, положим, что относительная сила является замедляющей. Пусть C будет точкой, скорость тела в которой равна нулю. Введем обозначения $AP=x$, $AM=s$. Пусть скорость в M порождается из высоты v, абсолютная сила в M, увлекающая тело вниз, равна p, а интенсивность относительной силы равна q. Тогда вся относительная сила, действующая в M по направлению касательной, будет равна $\frac{v}{q}$.

§ 491. Пусть дуга AMC будет описана нисходящим движением. По причинам, приведенным в § 471, абсолютная сила должна рассматриваться как замедляющая, относительная сила — как ускоряющая, поскольку при спуске относительная сила противоположна абсолютной силе. Следовательно, $dv=-pdx+\frac{v}{q}ds$, или $dv-\frac{vds}{q}=-pdx$. Умножим это уравнение на $e^{-\int\frac{ds}{q}}$, где $\int\frac{ds}{q}$ должен быть взят так, чтобы при $s=0$ иметь $\int\frac{ds}{q}=0$. Получим

$$e^{-\int\frac{ds}{q}}\left(dv-\frac{vds}{q}\right)=-e^{-\int\frac{ds}{q}}pdx.$$

Интеграл этого выражения есть

$$e^{-\int\frac{ds}{q}}v=C-\int e^{-\int\frac{ds}{q}}pdx.$$

Этот последний интеграл пусть также будет взят так, чтобы он становился равным нулю, если x или $s=0$. Поскольку же в том случае, если s или $x=0$, $v=b$, положим, что x или $s=0$, а $v=b$. Тогда $b=C$. Следовательно,

$$v=e^{\int\frac{ds}{q}}b-e^{\int\frac{ds}{q}}\int e^{-\int\frac{ds}{q}}pdx.$$

§ 492. Если мы хотим найти всю дугу спуска AMC, необходимо положить $v=0$, и тогда

$$b=\int e^{-\int\frac{ds}{q}}pdx.$$

Поэтому для нахождения дуги спуска по какой-либо данной кривой, если исходить из заданной скорости в самом нижнем месте, следует воспользоваться следующим способом. Пусть будет дана кривая AM (рис. 76). Построим другую кривую AN, аппликата которой PN пусть будет равна $\int e^{-\int\frac{ds}{q}}pdx$. Найдем на ней место, в котором аппликата будет равна b. Пусть это место будет в N, а именно, пусть $PN=b$. Продолжим NP до M. Тогда M будет точкой, в которой скорость равна нулю, или AM будет всей дугой спуска.

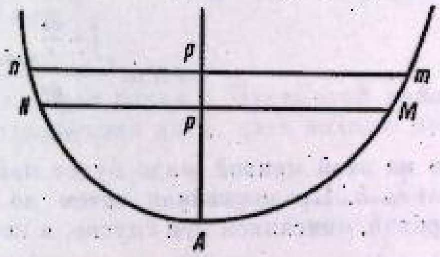


Рис. 76.

§ 493. Рассмотрим теперь, насколько большей будет дуга спуска, если скорость в A будет взята большей. Пусть поэтому высота, порождающая скорость в A, будет теперь равна $b+db$, и если раньше начало спуска было в M, пусть теперь оно будет в m. Положим $AP=x$, $AM=s$, тогда $Pp=dx$, $Mm=ds$. Из первого построения кривой AN получим $pn=b+db$. Но

$$PN=b=\int e^{-\int\frac{ds}{q}}pdx.$$

Тогда

$$db=e^{-\int\frac{ds}{q}}pdx.$$

Отсюда, конечно, ясно, что отношение между увеличением дуги спуска и увеличением высоты b, порождающей скорость, составляет

$$Pp:db=e^{-\int\frac{ds}{q}}:p.$$

§ 494. При спуске по CMA где-либо будет точка O, в которой тело имеет скорость бóльшую, чем в любом другом месте. Она будет там, где $dv=0$. Положив это в каноническом уравнении, получим $pdx=\frac{vds}{q}$, или $v=\frac{pqdx}{ds}$. Но

$$v=e^{\int\frac{ds}{q}}b-e^{\int\frac{ds}{q}}\int e^{-\int\frac{ds}{q}}pdx.$$

Следовательно, точка, в которой тело будет иметь наибольшую скорость, находится в том месте, которое определится из уравнения

$$e^{\int-\frac{ds}{q}}pqdx=bds-ds\int e^{-\int\frac{ds}{q}}pdx,$$

или

$$b=\frac{e^{\int-\frac{ds}{q}}pqdx}{ds}+\int e^{-\int\frac{ds}{q}}pdx.$$

Следовательно, если построить такую кривую AN (рис. 77), чтобы всегда ее аппликата

$$PN=\frac{e^{\int-\frac{ds}{q}}pqdx}{ds}+\int e^{-\int\frac{ds}{q}}pdx,$$

то на этой кривой надо будет найти место, в котором аппликата PN равна b. Продолженная затем до M, эта аппликата даст место M на кривой, описанной при спуске, в котором скорость является наибольшей.

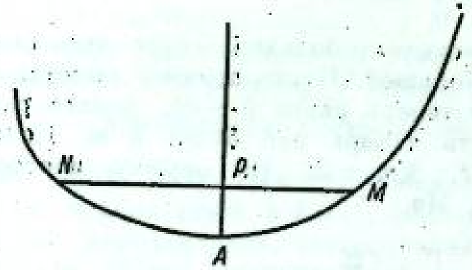


Рис. 77.

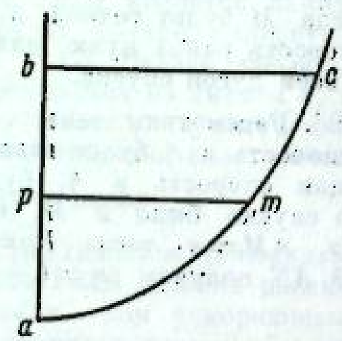


Рис. 78.

§ 495. Подобным же образом обстоит дело и с подъемом. Пусть, если угодно, кривая amc (рис. 78), по которой поднимается тело, отличается от первой кривой — кривой спуска. Пусть скорость в самой нижней точке a достигается из высоты b, абсцисса $ap=X$, кривая $am=S$, абсолютная сила, действующая в m, равна P, интенсивность относительной силы в m равна Q, а скорость в m такая, какая может быть достигнута из высоты U. Тогда $dU=-PdX-UdS:Q$, или $dU+UdS:Q=-PdX$. Умножим это уравнение на $e^{\int\frac{dS}{Q}}$. Оно станет интегрируемым. Интеграл, конечно, будет

$$e^{\int\frac{dS}{Q}}U=C-\int e^{\int\frac{dS}{Q}}PdX.$$

Если интегралы $\int\frac{dS}{Q}$ и $\int e^{\int\frac{dS}{Q}}PdX$ будут взяты так, что при X или $S=0$ они становятся равными нулю, то $C=b$ и

$$U=e^{-\int\frac{dS}{Q}}b-e^{-\int\frac{dS}{Q}}\int e^{\int\frac{dS}{Q}}PdX.$$

§ 496. Положим $U=0$, чтобы найти всю дугу подъема. Тогда

$$b=\int e^{\int\frac{dS}{Q}}PdX.$$

Поэтому построим такую кривую an (рис. 79), чтобы ее аппликата pn была равна

$$\int e^{\int\frac{dS}{Q}}PdX.$$

На этой кривой найдем аппликату, которая равна b. Пусть этой аппликатой будет pn. Эта аппликата, продолженная до m, даст полную дугу

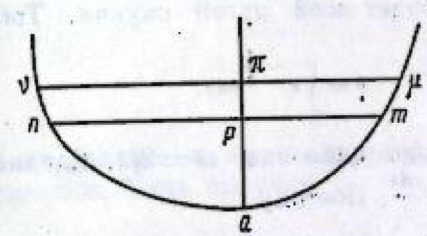


Рис. 79.

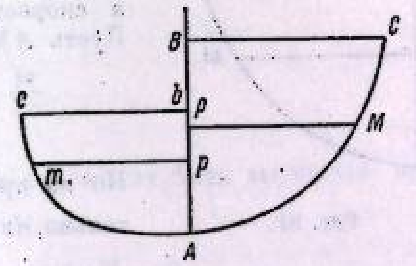


Рис. 80.

подъема am. Если начальная скорость будет взята чуть большей, так что скорость в a будет порождаться из высоты $b+db$, то $\pi\nu=b+db$. Следовательно,

$$db=e^{\int\frac{dS}{Q}}PdX,$$

если $p\pi=dX$ и $m\mu=dS$. Таким путем мы находим увеличение дуги подъема, возникающее при увеличении начальной скорости.

§ 497. Если соединить кривые подъема и спуска в A так, чтобы оси совпали, то сумма из спуска по AMC и подъема по Amc (рис. 80) составит одно колебание. Пусть скорость в A происходит из высоты b. Всю дугу спуска AMC получим, если примем

$$b=\int e^{-\int\frac{ds}{q}}pdx.$$

Всю дугу подъема Amc получим, если примем

$$b=\int e^{\int\frac{dS}{Q}}PdX.$$

Следовательно,

$$\int e^{-\int\frac{ds}{q}}pdx=\int e^{\int\frac{dS}{Q}}PdX.$$

В силу этого по заданной дуге спуска найдем дугу подъема и наоборот.

Пусть $AM=s$ будет некоторой дугой спуска и $Am=S$ — соответствующей дугой подъема. При этом всегда

$$e^{-\int\frac{ds}{q}}pdx=e^{\int\frac{dS}{Q}}PdX.$$

§ 498. Для того чтобы объяснить это лучше, желательно привести некоторый пример. Пусть $P=p=g$, или абсолютная сила будет единообразной; пусть, далее, $Q=q=c$, а кривая MAm — циклоида. Таким образом, и подъем и спуск происходят по полуциклоиде. Пусть AM будет циклоидой, $AP=x$, $AM=s$ (рис. 81), а скорость в A порождается из высоты b. Пусть AM будет всей дугой спуска. Тогда

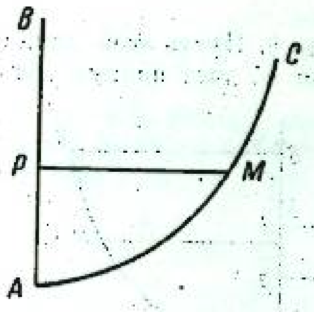


Рис. 81.

$$b=\int e^{-\frac{s}{c}}gdx.$$

Но из природы циклоиды $ss=2fx$. Следовательно, $dx=\frac{sds}{f}$. Поэтому

$$b=\frac{g}{f}\int e^{-\frac{s}{c}}sds.$$

Но

$$\int e^{-\frac{s}{c}}sds=-ce^{-\frac{s}{c}}s-cce^{-\frac{s}{c}}+cc.$$

Поэтому

$$b=\frac{gcc-gce^{-\frac{s}{c}}(c+s)}{f}.$$

Таким образом, по заданной дуге спуска s найдем скорость в самой нижней точке.

§ 499. Пусть тело поднимается приобретенной скоростью по равной циклоиде, и пусть дуга подъема будет равна S. Тогда

$$b=\frac{gcc-gce^{\frac{S}{c}}(c-S)}{f}.$$

Сопоставив это уравнение с предыдущим, получим

$$e^{\frac{S+s}{c}}=\frac{c+s}{c-S}.$$

Пусть после подъема тело снова опустится, дуга спуска будет равна S, а затем пусть оно вновь поднимется. Обозначим эту дугу подъема через (s). Тогда

$$e^{\frac{S+(s)}{c}}=\frac{c+S}{c-(s)}.$$

Таким способом после любого количества колебаний найдем высоту, до которой затем сможет подняться тело. Ведь тело будет постоянно терять нечто от своего движения и при следующем колебании будет описывать меньшую дугу, чем при предыдущем колебании.

§ 500. Если c будет чрезвычайно большим, что обычно происходит в тех случаях, когда более тяжелые тела движутся в весьма разреженных жидкостях, то приближенно

$$e^{-\frac{s}{c}}=1-\frac{s}{c}$$

или

$$1-\frac{s}{c}+\frac{ss}{2cc}.$$

Следовательно, в этом случае скорость может быть выражена алгебраически. Ведь получим

$$v=\left(1+\frac{s}{c}\right)b-\left(1+\frac{s}{c}\right)\frac{g}{f}\left(\frac{ss}{2}-\frac{s^3}{3c}\right).$$

Значит, если положить $v=0$, то

$$\frac{ss}{2}-\frac{s^3}{3c}=\frac{bf}{g}.$$

Далее, если дуга спуска будет равна s, а подъема — S, то

$$\frac{c+S+s}{c}+\frac{(S+s)^2}{2cc}=\frac{c+s}{c-S}$$

или

$$s=\frac{cS+SS}{c-S}=S+\frac{2SS}{c},$$

поскольку S весьма мало в сравнении с c. Также $S=s-\frac{2ss}{c}$.

§ 501. До сих пор мы рассматривали, какие движения может иметь тело на данной кривой. Теперь мы будем, исходя из какого-либо предложенного свойства движения, отыскивать кривую, для которой имеет место это свойство. Это исследование мы разделим на части так же, как это было сделано в предыдущей главе. А именно, сначала мы будем отыскивать кривые, которые везде испытывают заданное давление со стороны движущегося по ним тела; во-вторых, мы будем отыскивать кривые, двигаясь по которым тело везде сохраняет заданный закон скорости; и, в-третьих, бы будем отыскивать кривые, двигаясь по которым тело подчиняется предписанному правилу в отношении времен. Кроме того, здесь надо одновременно говорить о двух кривых: о кривой спуска и о кривой подъема, так как подъем не подобен спуску.

§ 502. Положим, что сила тяжести равна 1. Пусть абсолютная сила будет равномерной, направленной вниз и равной g, а интенсивность относительной силы будет также постоянной, равной c, закон же ее будет степенью высоты, порождающей скорость, с показателем n. Пусть тело опускается по кривой AM, ось которой AP вертикальна (рис. 82), $AP=x$, $PM=y$, $AM=s$, а скорость в M порождается из высоты v. Тогда $dv=gdx-v^n ds:c^n$; если относительную силу считать замедляющей. Найдем, какова кривая AM, на которую опускающееся тело оказывает везде одинаковое давление с силой h. Положив, что радиус кривизны $MR=r$, получим $h=\frac{gdy}{ds}+\frac{2v}{r}$. Но если принять dx за постоянную, то радиус кривизны равен $\frac{ds^3}{-dx\,ddy}$. Поэтому

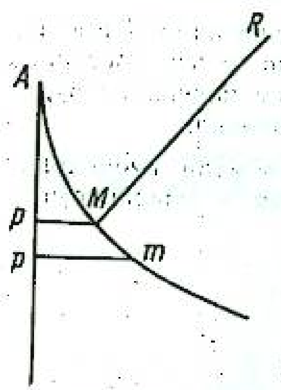


Рис. 82.

$$r=\frac{ds^3}{dx\,ddy},$$

так как мы полагаем, что MR падает в противоположную сторону.

§ 503. Итак, имеем

$$h=\frac{gdy}{ds}+\frac{2vdx\,ddy}{ds^3},$$

или

$$v=\frac{hds^3-gdyds^2}{2dx\,ddy}.$$

Продифференцировав это выражение, чтобы получить dv, и подставив эти величины в уравнение $dv=gdx-v^n ds:c^n$ вместо v и dv, получим уравнение для искомой кривой, содержащее x, y и s. Разумеется, будем иметь

$$dv=\frac{3hdydsddy^2-3gdy^2ddy^2-gdx^2ddy^2-hds^3d^3y+gdyds^2d^3y}{2dx\,ddy^2}=$$
$$=gdx-\frac{(hds-gdy)^n ds^{2n+1}}{(2c)^n dx^n ddy^n}.$$

Это переходит в

$$\frac{(hds-gdy)^n ds^{2n}}{2^{n-1}c^n dx^{n-1}ddy^{n-2}}=3gdsddy^2-3hdyddy^2+hds^2d^3y-gdydsd^3y.$$

§ 504. Пусть относительная сила оказывает сопротивление пропорционально квадрату скоростей. Тогда $n=1$. Итак, в этом случае мы имеем для кривой, находящейся под равномерным давлением, либо уравнение

$$(hds-gdy)\,ds^2ddy=3cgdsddy^2-3chdyddy^2-chds^2d^3y+cgdydsd^3y,$$

либо

$$ds^2ddy=\frac{3cgdsddy^2-3chdyddy^2}{hds-gdy}-cdsd^3y.$$

Если в этом уравнении положить $ds=\frac{pdp}{t}$ и $dy=\frac{dp}{t}$, то $dx=\frac{dp}{t}\sqrt{pp-1}$, а дифференциалы этого выражения любого порядка равны нулю. Подставив эти величины в уравнение, получим

$$ppdp\,(1-pp)\,(hp-g):c=$$
$$=6gpptdp-3hp^3tdp+gtdp+gpdt-4hptdp-hppdt+hp^4dt-gp^3dt.$$

Это уравнение может быть решено, поскольку t нигде не имеет степени, большей единицы. И поэтому искомая кривая может быть найдена, по крайней мере, с помощью квадратур.

§ 505. Вторая часть второго раздела этой главы рассматривает случаи, в которых заранее дается некоторый закон скорости. Итак, пусть высота, порождающая скорость в M, будет равна P, где P каким-либо образом зависит либо от высоты AP, либо от горизонтали MP, смотря по тому, что заранее дается. Итак, $v=P$ и $dv=dP$. Подстановка этого в уравнение дает уравнение $dP=gdx-\frac{P^n ds}{c^n}$ между x и y и тем самым дает уравнение искомой кривой.

. . . .

О соответствии между таутохронными кривыми при действии одной силы тяжести и таутохронными кривыми при присоединении относительной силы, закон которой есть отношение квадратов скоростей

§ 542. Здесь следует отметить некоторое соответствие между таутохронными кривыми при действии одной абсолютной силы и таутохронными кривыми при присоединении относительной силы. Пусть в первом случае при силе тяжести, равной 1, таутохрона будет AM (рис. 83), и обозначим $AP=t$, $AM=r$. Таутохрона же при действии относительной силы пусть будет am, и на ней $ap=x$, $am=s$. Положим, что по этой кривой происходит спуск. Кривая am легко может быть построена из первой кривой AM следующим образом. Примем

$$ds:e^{\frac{s}{2c}}=dr \quad \text{или} \quad 2c\left(1-e^{-\frac{s}{2c}}\right)=r,$$

и $g\int e^{-\frac{s}{c}}dx = t$.* Ведь am будет также таутохронной. Отсюда $s = 2c \lg \frac{2c}{2c-r}$ и $x = \int \frac{4ccdt}{g(2c-r)^2}$.

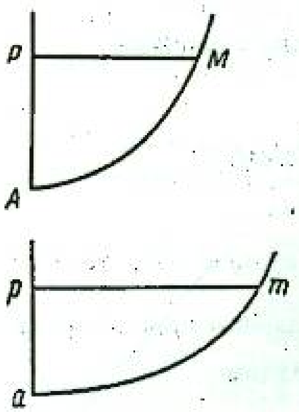


Рис. 83.

Поскольку выше, в § 454 и следующих, мы показали, как находить бесчисленные таутохроны в пустоте, то из них всех можно построить этим способом также таутохронные кривые в предположении относительной силы.

§ 543. Кроме того, по поводу обеих этих кривых следует заметить, что какова бы ни была кривая AM, время спуска по обеим кривым, если скорости в A и в a равны, будет одинаковым. Поэтому таким способом мы находим для относительной силы в случае $n=1$ не только таутохроны, но также все, что относится к временам. Ибо, найдя кривую, которая возникает под действием абсолютных сил в пустоте, мы с помощью данного построения тотчас получим кривую, возникающую в предположении сопротивления. Наконец, хотя здесь речь идет только о спусках, тем не менее все это относится равным образом и к подъемам. Ведь вторая ветвь кривой am по другую сторону от a, если кривая ее имеет, служит для подъема и соответствует подъему по второй ветви кривой AM.

Глава III. О ДВИЖЕНИИ ТОЧКИ ПО ЗАДАННОЙ ПОВЕРХНОСТИ ПОД ДЕЙСТВИЕМ КАК АБСОЛЮТНЫХ, ТАК И ОТНОСИТЕЛЬНЫХ СИЛ

§ 544. Если нет никакой силы, которая изменяет движение тела, то тело, брошенное с данной скоростью на какой-либо поверхности, будет двигаться по ней равномерно и опишет линию, которая является кратчайшей между своими концами, как это было показано во введении к этому разделу (§ 338). Таким образом, если данная поверхность будет плоской, путь, описанный точкой, будет прямой линией. Если же поверхность будет шаровидной, тело будет продвигаться по какому-либо большому ее кругу.

§ 545. Пусть точка M находится на предложенной поверхности (рис. 84), и пусть BM будет кривой, уже описанной движущимся телом под действием некоторой силы. Опустим из M на данную плоскость APQ перпендикуляр MQ и из Q опустим на произвольную ось AP нормаль QP. Пусть A будет началом абсцисс. Положим, как это было сделано в § 340, $AP=x$, $PQ=y$ и $QM=z$, и пусть природа поверхности будет выражена уравнением $Pdx = Qdy + Rdz$.

§ 546. Любую силу, действующую на тело M, следует разложить на три составляющие силы. Пусть первая из них имеет направление касательной к кривой, которую описывает движущееся тело; я буду называть ее тангенциальной. Второе направление пусть будет перпендикулярно к поверхности в M. Третье же пусть будет перпендикулярно к обоим предыдущим. Легко увидеть, к какому результату приводит каждая сила в отдельности. Первая из них — тангенциальная — не изменяет направления тела, а лишь увеличивает или уменьшает скорость. Таким образом, если бы действовала только она, то тело тем не менее описало бы на поверхности кратчайшую линию.

* Здесь c — постоянная интенсивность относительной силы и g — абсолютная сила. — *Г. М.*

§ 547. Вторая сила не оказывает вовсе никакого действия на движение тела, так как она направлена по нормали к поверхности; она лишь увеличивает или уменьшает давление, которое поверхность испытывает от тела. Наконец, третья сила изменяет направление движения и приводит к тому, что тело не движется более по кратчайшей линии, а отклоняется от нее. Исследуя движение тела по какой-либо данной поверхности, мы будем рассматривать только две силы: тангенциальную и третью, перпендикулярную к тангенциальной силе и к нормали к поверхности. О давлении же, которое испытывает поверхность, говорить нет необходимости.

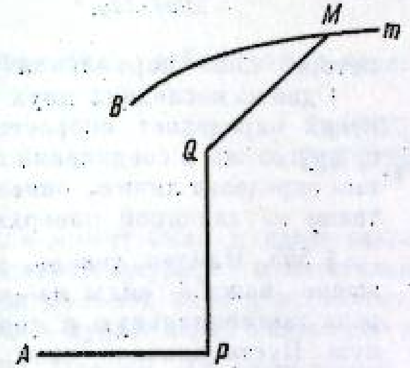


Рис. 84.

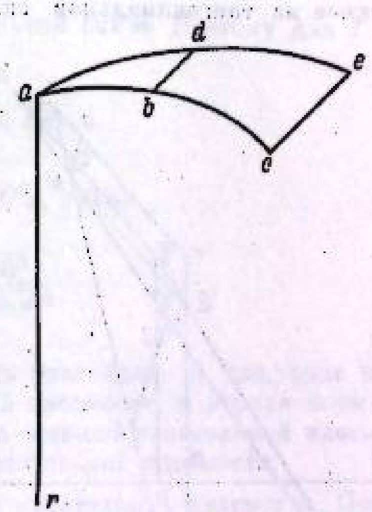


Рис. 85.

§ 548. Пусть скорость тела в M порождается из высоты v, а тангенциальная сила, которую я полагаю ускоряющей, относится к силе тяжести, как $T:1$. Пусть тело за элемент времени пройдет из M в m (рис. 84). Тогда $Mm = \sqrt{dx^2+dy^2+dz^2}$. Таким образом, $dv = T\sqrt{dx^2+dy^2+dz^2}$. Пусть нормальная сила, а именно та, которая перпендикулярна к тангенциальной силе и к нормали к поверхности, будет равна N. Найдем, к какому результату приводит эта сила, изменяя движение тела.

Пусть тело описывает в отсутствии этой силы дугу окружности abc, являющуюся элементом кратчайшей линии, радиус которой $ar=r$ (рис. 85). Примем, что дуга abc разделена в b так, что $ab=bc$.

§ 549. Итак положим, что abc является дугой кратчайшей линии, и пусть $abcr$ будет плоскостью, в которой расположена эта дуга. Эта плоскость будет нормальна к предложенной поверхности, и ar будет к ней нормальна. Итак, пусть сила N действует перпендикулярно к этой плоскости. Пусть в результате ее действия тело продвигается по линии ade. Тогда bd и ce будут перпендикулярами к плоскости abc. Но мы найдем $\frac{ab}{\sqrt{v}} = \frac{2\sqrt{bd}}{\sqrt{N}}$ и получим $bd = \frac{N\cdot ab^2}{4v}$.

И поскольку $ac=2ab$, будем иметь $ce = 4bd\,\frac{N\cdot ab^2}{v}$.

. . . .

§ 554. Итак, мы имеем три уравнения для определения и самой кривой, которую описывает тело на данной поверхности, и скорости в любом месте. Первое из них есть уравнение

$$Pdx = Qdy + Rdz,$$

выражающее природу поверхности. Вторым является уравнение

$$dv = T\sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2},$$

найденное из тангенциальной силы, а третьим является уравнение

$$N(dx^2 + dy^2 + dz^2)^{3/2}\sqrt{P^2 + Q^2 + R^2} = 2Pvdyddz - 2Pvdzddy + 2Qvdxddz - 2Rvdxddy, *$$

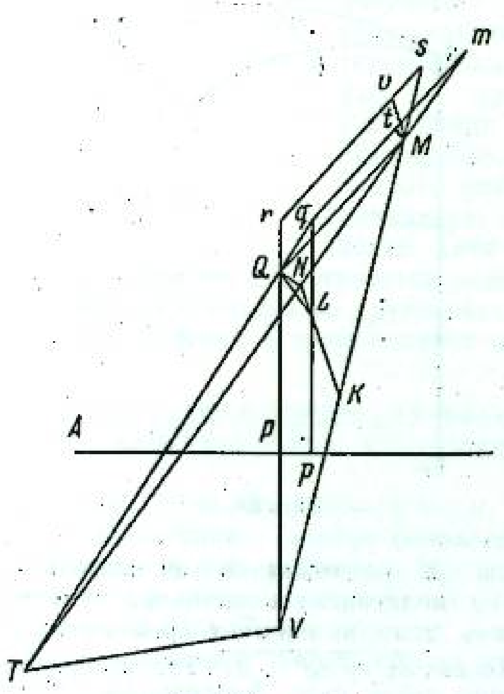


Рис. 86.

которое дала нормальная сила.

Одно из последних двух уравнений определяет скорость или v, другое же в соединении с первым определит линию, описанную телом на заданной поверхности.

§ 555. Найдем теперь разложение каждой силы на такого рода тангенциальную и нормальную. Пусть сначала сила, движущая тело, направлена по прямой QM (рис. 86), т. е. по координате z, и положим, что ее величина равна A. Пусть тело опишет за элемент времени отрезочек пути Mm. Проведя, согласно уже указанному способу, координаты MQ, mq, QP и qp к оси AP, где $AP = x$, $PQ = y$, $QM = z$, получим $Qq = \sqrt{dx^2 + dy^2} = Mt$ и $Mm = \sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2}$. Проведем касательную mMT, встречающуюся в T с продолжением элемента qQ. Тогда

$$QT = \frac{z\sqrt{dx^2 + dy^2}}{dz},$$

а плоскость MQT будет нормальна к плоскости APQ. Проведем из Q к TM перпендикуляр QN. Тогда

$$MN = \frac{zdz}{\sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2}}$$

* Ср.: L. Euler. Mechanica sive motus scientia, t. II, § 851 (Opera omnia, II-2, pp. 432—434). — Г. М.

и

$$QN = \frac{z\sqrt{dx^2 + dy^2}}{\sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2}}.$$

§ 556. Разложим силу A, действующую по направлению QM, на составляющие, действующие вдоль MN и QN. Первая из них будет равна

$$\frac{Adz}{\sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2}};$$

она является замедляющей тангенциальной силой. Поэтому для T следует принять

$$\frac{-Adz}{\sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2}}.$$

Вторая сила, действующая вдоль QN, равна

$$\frac{A\sqrt{dx^2 + dy^2}}{\sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2}}.$$

Эта сила может быть в свою очередь разложена на две, одна из которых перпендикулярна к касательной плоскости, а другая нормальна к тангенциальной силе и расположена в самой касательной плоскости. Для этого нужно знать положение касательной плоскости.

§ 557. Прямая MT расположена в касательной плоскости. Поэтому найдем еще другую линию, также расположенную в касательной плоскости. Для этого на прямой PQ возьмем элемент Qr и восстановим вплоть до поверхности перпендикуляр rs. Продолженная прямая sM будет также расположена в касательной плоскости. Пусть она встретится с продолжением аппликаты QP в V. Тогда $QM : QV = sv : vM = dz : dy$ при условии, что $dx = 0$. А при $dx = 0$ имеем $0 = Qdy + Rdz$. Поэтому $dz : dy = -Q : R$, откуда $QV = \frac{-Rz}{Q}$. Проведя прямую TV, получим касательную плоскость TMV. Опустим на нее из Q перпендикуляр QL, проведя перпендикуляр NK к TM и опустив из Q на NK перпендикуляр QL.

§ 558. Итак, нормальная сила, расположенная в касательной плоскости, равна

$$\frac{A\sqrt{dx^2 + dy^2}}{\sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2}} \cdot \frac{NL}{QN}.$$

Но $\frac{QL}{QN}$ есть синус угла QNL, косинус которого равен $\frac{NL}{QN}$. Угол QNL является углом, который плоскость TQM образует с плоскостью TMV. Следовательно, нужно определить наклон этих двух плоскостей.

Пусть синус угла QTM равен m, синус угла QTV равен n. Тогда синус угла наклона QNL будет равен

$$\frac{n}{\sqrt{m^2 + nn(1 - mm)}}.$$

Но

$$m = \frac{tm}{Mm} = \frac{dz}{\sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2}}$$

и

$$n = \frac{-Rdxdz}{\sqrt{(dx^2+dy^2)(Q^2dx^2+P^2dx^2)}} = \frac{-Rdz}{\sqrt{(dx^2+dy^2)(P^2+Q^2)}};$$

отсюда синус QML равен

$$\frac{-R\sqrt{dx^2+dy^2+dz^2}}{\sqrt{(dx^2+dy^2)(P^2+Q^2+R^2)}}.$$

§ 559. Следовательно, косинус угла QNL, т. е. $\frac{NL}{QN}$, равен

$$\frac{\sqrt{P^2dx^2+P^2dy^2+Q^2dx^2+Q^2dy^2-R^2dz^2}}{\sqrt{(dx^2+dy^2)(P^2+Q^2+R^2)}}.$$

Положив $Pdx - Qdy$ вместо Rdz, получим

$$\frac{NL}{QN} = \frac{Pdy+Qdx}{\sqrt{(dx^2+dy^2)(P^2+Q^2+R^2)}}.$$

Отсюда получим, что нормальная сила, расположенная в касательной плоскости и происходящая от силы A, действующей вдоль MQ, равна

$$\frac{A(Pdy+Qdx)}{\sqrt{(dx^2+dy^2+dz^2)(P^2+Q^2+R^2)}}.$$

От этой же силы происходит тангенциальная сила

$$\frac{-Adz}{\sqrt{dx^2+dy^2+dz^2}}.$$

§ 560. Подобным же образом, если тело в M приводится в движение силой B, действующей вдоль QP, то проходящая от нее тангенциальная сила равна

$$\frac{-Bdy}{\sqrt{dx^2+dy^2+dz^2}},$$

а нормальная сила равна

$$\frac{B(Pdz+Rdx)}{\sqrt{(dx^2+dy^2+dz^2)(P^2+Q^2+R^2)}}.$$

Если же тело приводится в движение силой, действующей вдоль PA, то происходящая отсюда тангенциальная сила равна

$$\frac{-Cdx}{\sqrt{dx^2+dy^2+dz^2}},$$

а нормальная сила равна

$$\frac{C(Qdz-Rdy)}{\sqrt{(dx^2+dy^2+dz^2)(P^2+Q^2+R^2)}}.$$

Следовательно, если бы эти три силы A, B и C действовали одновременно, то происходящая от них тангенциальная сила была бы равна

$$\frac{-Adz-Bdy-Cdx}{\sqrt{dx^2+dy^2+dz^2}},$$

а нормальная сила равна

$$\frac{APdy+AQdx+BPdz+BRdx+CQdz-CRdy}{\sqrt{(dx^2+dy^2+dz^2)(P^2+Q^2+R^2)}}.$$

§ 561. Эти формулы имеют чрезвычайно широкое применение; они безусловно могут быть применены ко всем тем силам, относительно которых мы можем положить, что они приводят в движение тело, если только это абсолютные силы. Ведь какую бы мы ни выбрали силу, движущую тело M, всегда могут быть найдены равнодействующие ей три силы, расположенные в трех описанных направлениях. Кроме того, буквы A, B, C не являются постоянными, они могут обозначать произвольные переменные величины. Поэтому, будет ли тело M притягиваться к неподвижному центру, к переменному центру или к сколь угодно многим центрам, во всех этих случаях могут быть применены наши формулы.

§ 562. Отказавшись от этой чрезмерной универсальности, чтобы не растягивать слишком исследования, я рассмотрю только единообразную силу тяжести, которая имеет место в наших областях. Итак, если положить, что плоскость APQ горизонтальна, то $B=0$, $C=0$ и $A=1$. Положим

$$T = \frac{-dz}{\sqrt{dx^2+dy^2+dz^2}}$$

и

$$N = \frac{Pdy+Qdx}{\sqrt{(dx^2+dy^2+dz^2)(P^2+Q^2+R^2)}}.$$

Тогда появятся уравнения $dv = -dz$ и

$$(Pdy+Qdx)(dx^2+dy^2+dz^2) = 2Pvdyddz - 2Pvdzddy + 2Qvdxddz - 2Rvdxddy.$$

Если движение будет происходить по нижней части поверхности ниже APQ, то $dv = dz$ и

$$(Pdy+Qdx)(dx^2+dy^2+dz^2) = 2Pvdzddy - 2Pvdyddz - 2Qvdxddz + 2Rvdxddy.$$

§ 563. Рассмотрим подробнее движение по нижней части, которое представляется как бы ускоренным благодаря растущим z. Тогда $v = b + z$ и

$$(Pdy+Qdx)(dx^2+dy^2+dz^2) = 2(b+z)(Pdzddy - Pdyddz - Qdxddz + Rdxddy).$$

Из первого уравнения определится скорость тела в любом месте описанного пути, а из последнего уравнения, соединенного с уравнением $Pdx = Qdy + Rdz$, определится сам путь, который тело пробегает по данной поверхности. Второе уравнение преобразуется в

$$\frac{dx^2+dy^2+dz^2}{2(b+z)} = \frac{(Pdz+Rdx)\,ddy}{Pdy+Qdx} - ddz.$$

§ 564. Более разумным будет принять ось AP вертикальной и опускающейся из A (рис. 87). Пусть действует только сила C, которая равна -1, так как мы полагаем, что C увлекает вдоль PA. Тогда $A=0$ и $B=0$. Отсюда появляется

$$T=\frac{dx}{\sqrt{dx^2+dy^2+dz^2}}$$

и

$$N=\frac{Rdy-Qdz}{\sqrt{(dx^2+dy^2+dz^2)(P^2+Q^2+R^2)}}.$$

Подставив эти выражения вместо T и N, будем иметь уравнения $dv=dx$ и

$$(Rdy-Qdz)(dx^2+dy^2+dz^2)=2Pvdyddz-2Pvdzddy+2Qvdxddz-2Rvdxddy.$$

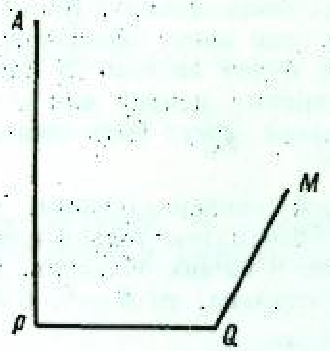


Рис. 87.

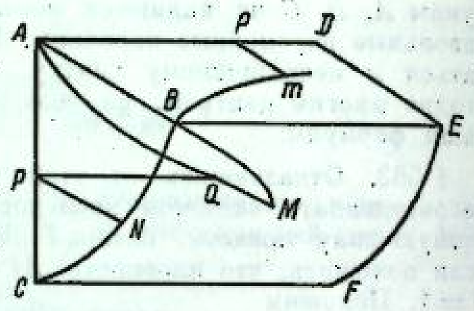


Рис. 88.

Последнее уравнение после исключения буквы P переходит в

$$\frac{dx}{2v}=\frac{-Rddy+Qddz}{Rdy-Qdz}+\frac{dyddy+dzddz}{dx^2+dy^2+dz^2}.$$

Из первого же уравнения имеем $v=b+x$.

§ 565. Из этих уравнений можно найти проекцию описанной кривой на любой плоскости. Если надо найти проекцию на плоскости APQ, иначе говоря кривую, которая очерчивается перпендикулярами, опущенными из описанной кривой на эту плоскость, то тогда необходимо из двух уравнений составить одно, в котором отсутствует z. Проекцию на плоскости, нормальной к оси AP, получим, если исключим x, а проекцию на плоскости, пересекающей нормальную плоскость APQ по линии AP, получим, если исключим букву y.

§ 566. Рассмотрим основные виды пространственных тел. Сначала пусть будет дана горизонтально лежащая цилиндрическая поверхность $BCFE$ (рис. 88). Пусть вертикальная ось будет AP, а кривая, описанная на поверхности, BM. Проведем $MQ=z$, $QP=y$, перпендикуляр PN к AC будет равен QM. Тогда $Pdx=Rdz$ и $Q=0$, ибо уравнение между x и z всегда остается одинаковым, какова бы ни была величина y. Итак, появляется уравнение

$$\frac{dx}{2(b+x)}=\frac{-ddy}{dy}+\frac{dyddy+dzddz}{dx^2+dy^2+dz^2},$$

интеграл которого

$$\frac{1}{2}\lg(b+x)=\lg\sqrt{dx^2+dy^2+dz^2}-\lg dy+\frac{1}{2}\lg f,$$

или

$$\frac{\sqrt{f}}{\sqrt{b+x}}=\frac{dy}{\sqrt{dx^2+dy^2+dz^2}}.$$

§ 567. Из этого уравнения легко найти время, за которое описывается линия BM, ибо элемент времени составляет

$$\frac{\sqrt{dx^2+dy^2+dz^2}}{\sqrt{b+x}},$$

что, согласно последнему уравнению, равно $\frac{dy}{\sqrt{f}}$. Следовательно, полное время равно $\frac{y}{\sqrt{f}}$; иначе говоря, тело описывает линию BM за то же время, за которое тело описывает прямую PQ, двигаясь со скоростью, порождаемой из высоты f.

Это свойство можно легко распознать и не прибегая к данному методу. Разложим скорость, которую тело имело в B, на две составляющие: одну — направленную вниз, другую — направленную горизонтально вдоль BE. Совершенно очевидно, что первая из них вместе с силой тяжести только опускает, а вторая равномерно продвигает тело вдоль BE. Поэтому дуга BN была бы описана за то же время, если бы начальная скорость в B была равна $\sqrt{b-f}$.

§ 568. Проекция кривой BM представляется в плоскости $ABED$ линией Bm, на которой $Ap=y$ и $pm=z$. Другую проекцию имеем на плоскости $ACFD$, а именно AQ, на которой $AP=x$ и $PQ=y$, как было уже принято. Если требуется определить проекцию Bm, то следует найти уравнение, в котором отсутствует x; если же требуется определить проекцию AQ, то необходимо уравнение, в котором отсутствует z. И то и другое легко получить, соединив уравнения

$$\frac{\sqrt{f}}{\sqrt{b+x}}=\frac{dy}{\sqrt{dx^2+dy^2+dz^2}}$$

и $Pdx=Rdz$.

§ 569. Поскольку принимается, что поверхность задана, то x может быть задано через z, и z — через x и постоянные. Итак, пусть $x=\int\frac{Rdz}{P}$, где $\frac{R}{P}$ обозначает функцию от z. Получим уравнение, в котором отсутствует x, т. е. уравнение для проекции Bm, а именно, положив Z вместо $\frac{R}{P}$,

$$\frac{\sqrt{f}}{\sqrt{b+\int Zdz}}=\frac{dy}{\sqrt{ZZdz^2+dy^2+dz^2}},$$

или

$$fdz^2(1+ZZ)=dy^2\left(b-f+\int Zdz\right).$$

а поэтому

$$dy=\frac{dz\sqrt{f(1+ZZ)}}{\sqrt{b-f+\int Zdz}}.$$

Подобным же образом для проекции AQ находим уравнение

$$dy=\frac{dx\sqrt{f(1+XX)}}{\sqrt{b-f+x}}.$$

Здесь $X=\frac{P}{R}$, и мы полагаем, что оно может быть выражено через x.

§ 570. Пусть поверхность будет обычным цилиндром, основанием которого является окружность радиуса a, имеющая центр в A. Тогда $xx+zz=aa$, или $x=\sqrt{aa-zz}$. Поскольку $xdx=-zdz$, то $P=x$ и $R=-z$. Отсюда

$$Z=\frac{R}{P}=\frac{-z}{\sqrt{aa-zz}}.$$

Итак, $\int Zdz=\sqrt{aa-zz}$, и поэтому для проекции Bm получим уравнение

$$dy=\frac{dz\sqrt{faa:(aa-zz)}}{\sqrt{b-f+\sqrt{aa-zz}}}=\frac{adz\sqrt{f}}{\sqrt{(aa-zz)(h+\sqrt{aa-zz})}},$$

где положено h вместо $b-f$. Для проекции AQ, поскольку $z=\sqrt{aa-xx}$ и $X=\frac{-x}{\sqrt{aa-xx}}$, находим уравнение

$$dy=\frac{adx\sqrt{f}}{\sqrt{(aa-xx)(h+x)}}.$$

И то и другое уравнение разрешается в квадратурах.

§ 571. Пусть теперь цилиндрическая поверхность $BCED$ (рис. 89) вертикальна и на ней описана кривая BM. Тогда $Qdy+Rdz=0$. Поэтому $P=0$ и $Q:R=-dz:dy$. Итак, уравнение § 564 перейдет в следующее:

$$\frac{dx}{2(b+x)}=\frac{dyddy+dzddz}{-dy^2-dz^2}+\frac{dyddy+dzddz}{dx^2+dy^2+dz^2},$$

интеграл которого

$$\frac{1}{2}\lg(b+x)=\lg\frac{\sqrt{dx^2+dy^2+dz^2}}{\sqrt{dy^2+dz^2}}+\frac{1}{2}\lg f,$$

или

$$\frac{\sqrt{f}}{\sqrt{b+x}}=\frac{\sqrt{dy^2+dz^2}}{\sqrt{dx^2+dy^2+dz^2}}.$$

Время, за которое описывается дуга BM, равно

$$\frac{\int\sqrt{dy^2+dz^2}}{\sqrt{f}}=\frac{Bm}{\sqrt{f}},$$

где принято $Aq=PQ$, или $qm=QM$. Итак, она описывается за то же время, за которое дуга Bm описывается равномерным движением со скоростью $\sqrt{f}$. Это время равно также

$$\int\frac{dx}{\sqrt{b-f+x}},$$

т. е. времени свободного спуска по $AP=x$ с начальной скоростью $\sqrt{b-f}$.

§ 572. Для определения самой кривой BM нет необходимости применять проекции. Но поскольку любая цилиндрическая поверхность может путем развертывания перейти в плоскую, рассмотрим, какой будет кривая BM на этой плоскости. Итак, абсцисса будет частью кривой Bm, которую мы назовем t, аппликата же будет mM, или $AP=x$. Следовательно, имеем $dt=\sqrt{dy^2+dz^2}$. Подставив в уравнение

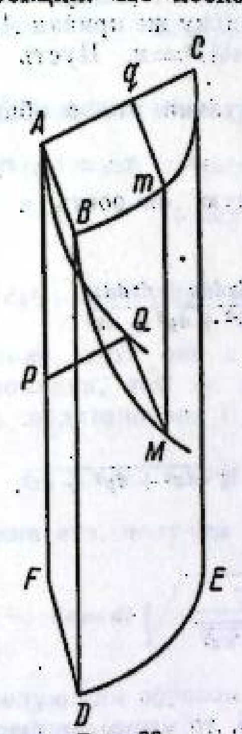


Рис. 89.

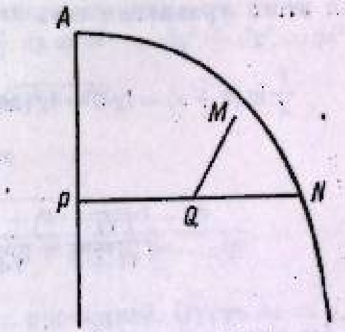


Рис. 90.

$$\frac{\sqrt{f}}{\sqrt{b+x}}=\frac{\sqrt{dy^2+dz^2}}{\sqrt{dx^2+dy^2+dz^2}}$$

вместо $\sqrt{dy^2+dz^2}$ величину dt, получим

$$\frac{\sqrt{f}}{\sqrt{b+x}}=\frac{dt}{\sqrt{dx^2+dt^2}},$$

или

$$fdx^2=(b-f+x)\,dt^2=(h+x)\,dt^2,$$

где вместо $b-f$ положено h. Проинтегрировав это уравнение, получим $t=2\sqrt{f}\,(h+x)$. Отсюда становится ясным, что кривая BM будет параболой.

§ 573. Отыскание кривой, описанной на цилиндрических поверхностях, является весьма легким, и для этого нет необходимости пользоваться таким аппаратом, почерпнутым из природы пространственных тел. Ведь все, что относится к этому исследованию движения, может быть получено путем простого разложения движения на нисходящее по прямой и горизонтальное, первое из которых ускоряется силой тяжести, а второе остается неизменным. Эта легкость основана на том свойстве цилиндрических поверхностей, что они могут быть преобразованы в плоские. Этим же свойством обладают конические поверхности, и поэтому движение по ним легко может быть установлено без наших формул.

§ 574. По этой причине я не буду касаться конических тел, а перейду к телам вращения и к исследованию движения тел на этих поверхностях. Пусть будет дано тело, порожденное вращением кривой AN вокруг оси AP, и точка M на поверхности (рис. 90). Перпендикулярное к оси AP сечение PMN будет кругом, радиус которого PN, так что $PQ^2+QM^2=y^2+z^2=PN^2$. Поскольку же кривая APN задана, то PN будет некоторой функцией от $AP=x$. Пусть она будет $\sqrt{2\int Pdx}$. Тогда $Pdx=ydy+zdz$. Сопоставив это с общим уравнением, получим $Q=y$ и $R=z$.

§ 575. Положив высоту v, порождающую скорость в M, равной $b+x$, получим

$$\frac{dx}{2(b+x)}=\frac{-zddy+yddz}{zdy-ydz}+\frac{dyddy+dzddz}{dx^2+dy^2+dz^2}.$$

Интеграл этого уравнения есть

$$\frac{1}{2}\lg(b+x)=\lg C-\lg(zdy-ydz)+\lg\sqrt{dx^2+dy^2+dz^2},$$

или

$$\frac{f\sqrt{f}}{\sqrt{b+x}}=\frac{zdy-ydz}{\sqrt{dx^2+dy^2+dz^2}}.$$

Если бы постоянная f была равна нулю, то мы имели бы $zdy=ydz$, или $y=nz$. Отсюда следует, что тело в этом случае двигалось бы по вертикальному сечению, проведенному через вершину A. А именно, это должно происходить всякий раз, либо когда тело начинает падать вниз, выходя из состояния покоя, либо когда оно движется со скоростью, имеющей такое направление. Иначе говоря, всегда, когда путь тела проходит через вершину, движение будет происходить в одной и той же плоскости.

§ 576. Пусть кривая AN будет окружностью, или пусть предложенная поверхность будет сферой, радиус которой равен a. Тогда $PN=\sqrt{a^2-x^2}$. Отсюда будем иметь $2\int Pdx=a^2-x^2$ и $P=-x$. Поэтому возникает уравнение $-xdx=ydy+zdz$ или интеграл $a^2=x^2+y^2+z^2$, который, будучи соединен с уравнением

$$\frac{f\sqrt{f}}{\sqrt{b+x}}=\frac{zdy-ydz}{\sqrt{dx^2+dy^2+dz^2}},$$

определит кривую, описанную телом на сферической поверхности. Если потребуется найти ее проекцию на горизонтальной плоскости, надо будет исключить x. Но $x=\sqrt{a^2-y^2-z^2}$ и

$$dx=\frac{-ydy-zdz}{\sqrt{a^2-y^2-z^2}}.$$

Отсюда вытекает

$$\frac{f\sqrt{f}}{\sqrt{b+\sqrt{a^2-y^2-z^2}}}=\frac{(zdy-ydz)\sqrt{a^2-y^2-z^2}}{\sqrt{a^2dy^2+a^2dz^2-z^2dy^2-y^2dz^2+2yzdydz}}=$$

$$=\frac{(zdy-ydz)\sqrt{a^2-y^2-z^2}}{\sqrt{a^2dy^2+a^2dz^2-(zdy-ydz)^2}}.$$

§ 577. Упрощение этого уравнения дает

$$a^2f^3(dy^2+dz^2)-f^3(zdy-ydz)^2=b(zdy-ydz)^2(a^2-y^2-z^2)+$$
$$+(zdy-ydz)^2(a^2-y^2-z^2)^{3/2},$$

или

$$a^2f^3(dy^2+dz^2)=(zdy-ydz)^2\left[f^3+a^2b-by^2-bz^2+(a^2-y^2-z^2)^{3/2}\right].$$

Это уравнение, хотя оно и представляется совершенно недоступным для исследования, тем не менее становится разделимым с помощью следующих подстановок. Пусть $yy+zz=tt$ и $dy^2+dz^2=ds^2$. Тогда

$$zdy-ydz=t\sqrt{ds^2-dt^2}.$$

Подставив это, получим уравнение

$$ds=dt\sqrt{\frac{tt(a^2-tt)^{3/2}+f^3tt+a^2bt^2-bt^4}{tt(a^2-tt)^{3/2}+f^3tt+a^2bt^2-bt^4-a^2f^3}},$$

которое следующим образом связано с проекцией. Пусть $ap=y$, $pm=z$, а bm — проекция (рис. 91). Тогда линия $am=t$ и дуга $bm=s$. А если дано уравнение, связывающее am и bm, то может быть построена и сама кривая.

§ 578. Проведем касательную mt и опустим на нее из вершины a перпендикуляр at, и пусть $mt=w$. Тогда $ds=tdt:w$. Подставив это, получим

$$tt(aa-tt)^{3/2}+f^3tt+a^2btt-bt^4-a^2f^3=w^2(aa-tt)^{3/2}+f^3w^2+a^2bw^2-bt^2w^2.$$

Обозначив $at=p$, получим $w^2=tt-pp$. И после подстановки получится уравнение

$$a^2f^3=p^2(a^2-tt)^{3/2}+f^3p^2+a^2bp^2-bt^2p^2.$$

Пусть $f^3+aab=aac$. Тогда

$$p=\frac{aa\sqrt{c-b}}{\sqrt{(a^2-t^2)^{3/2}+a^2c-bt^2}}.$$

Из этого уравнения еще легче определить и построить проекцию самой кривой.

§ 579. От изложенного немногим отличается определение движения в случае, когда предложенная поверхность рассматривается как перевернутая, так что вершина A образующей кривой AN находится в самой нижней точке (рис. 92). В этом случае для C следовало бы положить не -1, а $+1$. А это изменение не меняет ничего, кроме того, что вместо v должно быть написано не $b+x$, а $b-x$. Ведь если написать $zdy-ydz$ вместо $ydz-zdy$, то из этого не возникает никакого различия. В нашем же случае сферической поверхности надо только

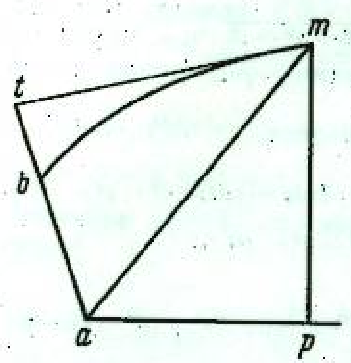


Рис. 91.

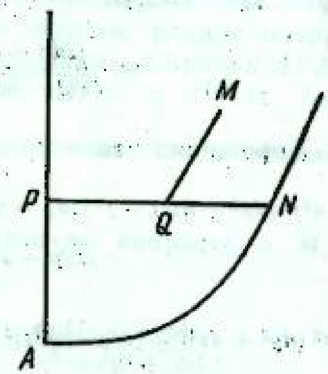


Рис. 92.

вместо $(a^2-t^2)^{3/2}$ написать $-(a^2-t^2)^{3/2}$. Тогда получим для проекции на горизонтальной плоскости следующее уравнение:

$$p=\frac{a^2\sqrt{c-b}}{\sqrt{a^2c-bt^2-(a^2-t^2)^{3/2}}}.$$

§ 580. Надо отметить тот случай, при котором скорость бесконечно мала в сравнении с радиусом шара AC (рис. 93). В этом случае движение происходит по пути, бесконечно близкому к нижней вершине A, и поверхность, по которой происходит движение, может рассматриваться как плоскость. Поэтому y и z будут исчезающе малы по сравнению с a. Положив $\sqrt{v}$ вместо $\sqrt{b+\sqrt{a^2-y^2-z^2}}$, получим уравнение

$$\frac{f\sqrt{f}}{\sqrt{v}}=\frac{zdy-ydz}{\sqrt{dy^2+dz^2}},$$

которое мы должны будем затем разрешить. Пусть местом тела является M, и пусть его скорость такова, что, приходя в A, она становится равной $\sqrt{c}$. Но $PM=\sqrt{y^2+z^2}=t$. Отсюда $AP=\frac{tt}{2a}$, поскольку PM бесконечно мало в сравнении с радиусом a. Поэтому скорость $\sqrt{v}$ в M равна $\sqrt{c-\frac{tt}{2a}}$. Отсюда возникает уравнение

$$\frac{f\sqrt{f}}{\sqrt{c-\frac{tt}{2a}}}=\frac{ff}{\sqrt{cc-tt}}=\frac{zdy-ydz}{\sqrt{dy^2+dz^2}},$$

где буквам f и c во втором выражении приданы более удобные значения.

§ 581. Подставим вместо $zdy-ydz$ и $\sqrt{dy^2+dz^2}$ данные выше величины $t\sqrt{ds^2-dt^2}$ и ds. Тогда появится уравнение

$$\frac{ff}{\sqrt{cc-tt}}=\frac{t\sqrt{ds^2-dt^2}}{ds}.$$

Положим также, что на проекции перпендикуляр к касательной $at=p$ (см. рис. 91 к § 577). Тогда

$$ds=\frac{tdt}{\sqrt{tt-pp}} \quad \text{и} \quad \sqrt{ds^2-dt^2}=\frac{pdt}{\sqrt{tt-pp}}.$$

Поэтому для проекции возникает уравнение $\frac{ff}{\sqrt{cc-tt}}=p$. Из этого уравнения ясно, что кривая является эллипсом, центр которого нахо-

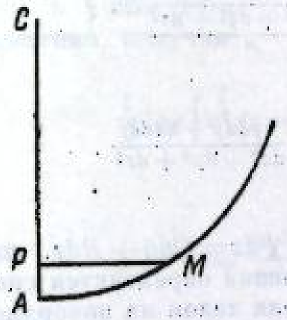


Рис. 93.

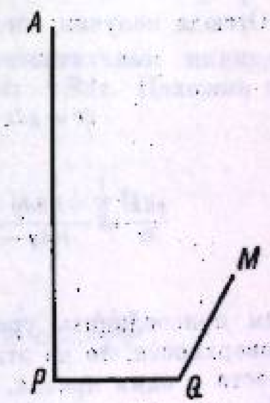


Рис. 94.

дится в a. Сама же кривая, описанная телом, поскольку ее можно рассматривать как расположенную в плоскости, совпадает с проекцией. Поэтому тело будет двигаться по эллипсу, центр которого расположен на оси AC.

§ 582. В этой главе мы решили исследовать не только такое движение тела по поверхностям, которое порождается абсолютными силами, но и такое, которое порождается относительными силами, поскольку рассмотрение поверхностей само по себе является настолько сложным, что нельзя обращаться к слишком уж частным случаям, как мы это делали в предыдущем. Итак, в этой второй части мы будем рассматривать тело, подвергающееся воздействию как абсолютной, так и относительной силы. Это новое рассмотрение не вызовет значительного изменения сообщенных формул, ибо оно затронет одну только тангенциальную силу, которую надо будет брать либо большей, либо меньшей в зависимости от того, полагаем ли мы относительную силу ускоряющей или замедляющей.

§ 583. Проведем рассмотрение, как в § 564, а именно, пусть $AP=x$, $PQ=y$, $QM=z$ (рис. 94), и пусть они связаны уравнением $Pdx=Qdy+$ $+Rdz$. Пусть скорость в M порождается из высоты v. Хотя здесь в качестве абсолютной силы мы будем рассматривать только силу тяжести, тем не менее, поскольку имеется и относительная сила, мы будем полагать, что $C = -g$, а не $C = -1$, так как под влиянием относительной силы сама абсолютная сила обычно становится либо большей, либо меньшей. Пусть интенсивность относительной силы будет постоянна и представляется высотой c. Пусть ее законом будет некоторая степень v. Мы положим также, что она является замедляющей. Итак, получим тангенциальную силу

$$\frac{gdx}{\sqrt{dx^2+dy^2+dz^2}} - \frac{v^n}{c^n}$$

и нормальную силу

$$N = \frac{gRdy - gQdz}{\sqrt{(dx^2+dy^2+dz^2)(P^2+Q^2+R^2)}}.$$

§ 584. Отсюда получим следующие уравнения:

$$dv = gdx - \frac{v^n\sqrt{dx^2+dy^2+dz^2}}{c^n}$$

и

$$\frac{gdx}{2v} = \frac{-Rddy+Qddz}{Rdy-Qdz} + \frac{dyddy+dzddz}{dx^2+dy^2+dz^2}.$$

Если к ним присоединить уравнение $Pdx = Qdy + Rdz$, выражающее природу поверхности, то из этих уравнений определятся скорость тела в любом месте и сама кривая, описанная телом на поверхности. Положим $n = 1$, поскольку в других случаях едва ли что-нибудь можно будет определить. Тогда

$$dv = gdx - \frac{v\sqrt{dx^2+dy^2+dz^2}}{c},$$

а остальные уравнения остаются неизменными.

§ 585. Из этого уравнения вытекает

$$\frac{gdx}{2v} = \frac{dv}{2v} + \frac{\sqrt{dx^2+dy^2+dz^2}}{2c}.$$

Подставив это в уравнение для нормальной силы, получим

$$\frac{dv}{2v} + \frac{\sqrt{dx^2+dy^2+dz^2}}{2c} = \frac{-Rddy+Qddz}{Rdy-Qdz} + \frac{dyddy+dzddz}{dx^2+dy^2+dz^2}.$$

Но $\sqrt{dx^2+dy^2+dz^2}$ есть элемент кривой, описанный движущимся телом на поверхности. Положим, что он равен ds. Тогда

$$\frac{dv}{2v} + \frac{ds}{2c} = \frac{-Rddy+Qddz}{Rdy-Qdz} + \frac{dds}{ds}.$$

Интеграл же второго уравнения $dv = gdx - \frac{vds}{c}$ есть

$$e^{\frac{s}{c}} v = g\int e^{\frac{s}{c}} dx,$$

и отсюда

$$v = \frac{g\int e^{\frac{s}{c}} dx}{e^{\frac{s}{c}}} = ge^{-\frac{s}{c}}\int e^{\frac{s}{c}} dx.$$

Интегрирование же первого дает

$$\frac{1}{2}\lg v + \frac{s}{2c} = \int\frac{-Rddy+Qddz}{Rdy-Qdz} + \lg ds + \text{const} = \frac{1}{2}\lg g + \frac{1}{2}\lg\int e^{\frac{s}{c}} dx.$$

§ 586. Пусть поверхность будет горизонтальным цилиндром, как мы полагали в § 566. Тогда $Q = 0$ и $Pdx = Rdz$. Положив это в найденном уравнении, получим

$$\frac{1}{2}\lg g\int e^{\frac{s}{c}} dx = -\lg dy + \lg ds + \frac{1}{2}\lg f.$$

или

$$g\int e^{\frac{s}{c}} dx = \frac{fds^2}{dy^2}, \quad \text{или} \quad \int e^{\frac{s}{c}} dx = \frac{hds^2}{dy^2}.$$

Последнее, соединенное с уравнением $Pdx = Rdz$, даст искомую кривую на поверхности. Возьмем дифференциал этого уравнения

$$e^{\frac{s}{c}} dx = \frac{2hdydsdds - 2hds^2ddy}{dy^3},$$

или, исключив s путем дифференцирования, после того как будут взяты логарифмы, получим

$$\frac{\sqrt{dx^2+dy^2+dz^2}}{c} = \frac{-3ddy}{dy} + \frac{dyddz^2 + dydzd^3z - dzddyddz - dx^2d^3y - dz^2d^3y}{dydzddz - dx^2ddy - dz^2ddy}.$$

(см. рис. 88 на стр. 484),
§ 587. Положим, что дуга $BN = t$ при $NM = y$ которое будет обычным
и найдем уравнение, связывающее BN и NM, если цилиндрическая поверх-
уравнением для описанной кривой BM, $dx^2 + dz^2 = dt^2$. Поэтому получим
ность развернута в плоскую. Итак,
уравнение

$$\frac{\sqrt{dy^2+dt^2}}{c} = \frac{-3ddy}{dy} + \frac{dyddt^2 + dydtd^3t - dtddyddt - dt^2d^3y}{dydtddt - dt^2ddy},$$

в котором dx является постоянной. А с помощью уравнений $dx^2 + dz^2 =$
$= dt^2$ и $Pdx = Rdz$ может быть введен другой постоянный дифференциал.

§ 588. Эта задача может быть полностью решена иначе, даже без обращения к дифференциалам второго порядка. Пусть кривая BM обозначена через s. Тогда сразу же найдем уравнение между t, y и s, которого будет достаточно для определения кривой. Таким образом, z будет определено из уравнения $Pdx = Rdz$ через x. Затем из уравнения $dx^2 + dz^2 = dt^2$ выразим x через t, а dx может быть выражено как Mdt, где M является функцией от t. Итак, будем иметь

$$\int e^{\frac{s}{c}} Mdt = \frac{hds^2}{dy^2}.$$

Но в этом уравнении $dt^2 + dy^2 = ds^2$. Следовательно, y легко исключается, и остается уравнение, связывающее s и t,

$$\int e^{\frac{s}{c}} Mdt = \frac{hds^2}{ds^2 - dt^2}.$$

§ 589. Пусть основанием цилиндрической поверхности будет циклоида APN (рис. 95), вершина которой A взята в самом нижнем месте, и поэтому g должно иметь отрицательный знак. Следовательно, $AN = t = \sqrt{ax}$, или $x = \frac{tt}{a}$, и $dx = \frac{2tdt}{a}$. Отсюда $M = \frac{2t}{a}$. Уравнение же для кривой AM переходит в

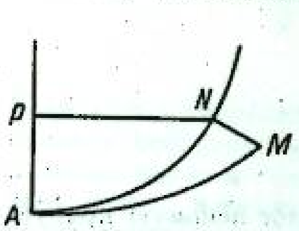


Рис. 95.

$$\int e^{\frac{s}{c}} tdt = \frac{bhds^2}{ds^2 - dt^2}.$$

Это уравнение после дифференцирования, если dt будет положено постоянным, даст

$$e^{\frac{s}{c}} tdt = \frac{-2bhdt^2dsdds}{(ds^2 - dt^2)^2}$$

и, если взять логарифмы,

$$\frac{s}{c} + \lg t = \lg(-2bhdtdsdds) - 2\lg(ds^2 - dt^2).$$

Это уравнение после дифференцирования, если положить $\sqrt{dt^2 + dy^2}$ вместо ds, переходит в

$$\frac{\sqrt{dt^2 + dy^2}}{c} + \frac{dt}{t} = \frac{dyd^3y + ddy^2}{dyddy} - \frac{4ddy}{dy} = \frac{dyd^3y - 3ddy^2}{dyddy}.$$

§ 590. Для тел вращения, расположенных перпендикулярно к горизонту, $Q = y$ и $R = z$. Таким образом,

$$\int \frac{-Rddy + Qddz}{Rdy - Qdz}$$

переходит в $-\lg(ydz - zdy)$. Следовательно, для искомой кривой, которую тело описывает на предложенной поверхности, мы имеем уравнение

$$\lg ds - \lg(ydz - zdy) = \lg \text{const} + \frac{1}{2}\lg \int e^{\frac{s}{c}} dx,$$

или в абсолютных числах

$$\frac{aabds^2}{(ydz - zdy)^2} = \int e^{\frac{s}{c}} dx.$$

Это уравнение в соединении с $Pdx = ydy + zdz$ определит любую проекцию кривой.

§ 591. Положим, как и в § 577, $yy + zz = tt$, $dy^2 + dz^2 = du^2$. Тогда $ds^2 = du^2 + dx^2$ и $zdy - ydz = t\sqrt{du^2 - dt^2}$. Поскольку же $2\int Pdx = y^2 + z^2 = t^2$, x будет некоторой функцией от t. Положим $x = \int Tdt$. Тогда $ds = \sqrt{du^2 + T^2dt^2}$ и $s = \int \sqrt{du^2 + T^2dt^2}$. После подстановки этого предыдущее уравнение перейдет в

$$\frac{aabdu^2 + aabT^2dt^2}{ttdu^2 - ttdt^2} = \int e^{\frac{\int\sqrt{du^2 + T^2dt^2}}{c}} Tdt.$$

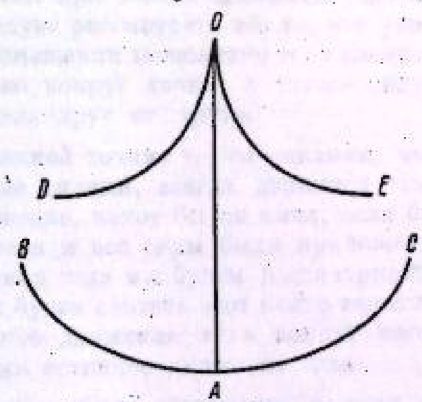


Рис. 96.

Это уравнение содержит в себе только две неизвестные величины. Следовательно, из него можно определить кривую и найти проекцию на горизонтальной плоскости между z и y.

§ 592. Если рассматриваемая поверхность будет сферической с радиусом a, то $tt = 2ax - xx$, или $x = a - \sqrt{aa - tt}$. Отсюда $dx = \frac{tdt}{\sqrt{a^2 - tt}}$. Следовательно, будем иметь

$$T = \frac{t}{\sqrt{a^2 - t^2}}.$$

Мы положим, что колебания являются бесконечно малыми. Величина t исчезает в сравнении с a и $T = \frac{t}{a}$. От этого, однако, уравнение еще не становится значительно более удобным для исследования. Впрочем, если требуется определить кривую, которую тело описывает вокруг центра сил, притягивающего пропорционально расстояниям, при наличии замедляющей относительной силы, пропорциональной квадрату скоростей, ее легче найти то, поскольку эта кривая расположена в одной плоскости, рассмотренным способом.

§ 593. Наконец, здесь следует отметить, каким образом такие движения могут быть произведены на заданных поверхностях с помощью механизма.

Известно, что все движения по заданной кривой могут быть осуществлены с помощью маятников, если их подвесить между вогнутыми пластинками OD, OE (рис. 96), представляющими эволюту пробегаемой кривой BAC. Подобным же образом, если пластины не только обозначают линии, но и образуют коническую поверхность, возникающую при вращении кривой DO вокруг оси AO, то маятник OA, любым образом откинутый, опишет кривую, расположенную на поверхности, образованной вращением кривой BA вокруг оси OA. И, таким образом, любая поверхность имеет эволютную поверхность, при помощи которой можно заставить маятник двигаться по заданной поверхности.

РАЗДЕЛ III. *О ДВИЖЕНИИ ТВЕРДЫХ ТЕЛ ПРИ ПРОИЗВОЛЬНОМ ДЕЙСТВИИ СИЛ**

§ 594. *Твердые тела* обозначают здесь для нас тела определенной величины, которые не меняют свою форму, какое бы воздействие ни оказывали на них силы. Для того чтобы определить движение этих тел, необходимо определить движение произвольно взятой в них точки и одновременно определить положение тела при любом местонахождении этой точки. В движении этой точки следует рассмотреть все то, что указывалось в предыдущем изложении. В отношении положения тела следует рассмотреть вращательное его движение вокруг точки, а также силу, которая стремится отторгнуть части тела друг от друга.

§ 595. Что касается движения выбранной точки, то мы покажем, что свободное тело, приводимое в движение силами, всегда движется так, что его центр тяжести имеет такое движение, какое бы он имел, если бы вся масса тела была в нем сосредоточена и все силы были приложены к нему. Поэтому для отыскания движения тела мы будем рассматривать движение центра его тяжести. Затем мы будем считать этот центр тяжести неподвижным и исследуем вращательное движение тела вокруг него. Соединив оба эти движения, мы получим истинное движение тела.

§ 596. Если бы отдельные части тела не были соединены, каждая из них неслась бы либо тем движением, которое она уже восприняла, либо тем, которое возникает у нее под действием сил. Совершенно очевидно, что если бы движения всех частиц были одинаковы и имели параллельные направления, то все тело имело бы такое же движение, какое имеет каждая его частица, и никакая сила не пыталась бы расторгнуть связь между частями тела и оторвать их друг от друга. Но если бы движения отдельных частиц не совпадали, эти частицы оторвались бы одна от другой, не будь они соединены между собой, как мы положили, прочной связью. Следовательно, необходимо проследить, какое движение будет иметь в этом случае все тело.

§ 597. Для того чтобы это осуществить, я полагаю, что отдельные частицы действительно отделены одна от другой, по крайней мере, на очень маленький промежуток времени, и рассматриваю, куда будет тем временем двигаться каждая частица тела. После этого я делаю допущение, что имеется сила, которая вновь соединяет все частицы и возвращает их к прежней форме. Из сопоставления этого состояния с предыдущим определится движение, которое имеет каждая частица, и именно так она будет стремиться продвигаться дальше. Затем я вновь представляю частицы

* Первоначально Эйлер назвал этот раздел «О движении твердого стержня при произвольном действии сил», а затем изменил это название. — *Г. М.*

тела разъединенными и рассматриваю, куда будут двигаться отдельные частицы как ранее сообщенным движением, так и под действием сил, и, как и раньше, полагаю, что проявляется сила, соединяющая эти частицы. Повторяя такое исследование на протяжении всего движения, можно определить полностью движение целого тела.

§ 598. Следует более точно определить силу, восстанавливающую тела, и ее действие. Пусть будут даны два одинаковых тела A и B (рис. 97), соединенные друг с другом твердым стержнем, лишенным силы инерции. Представим себе, что этот стержень, хотя он не является растяжимым, на очень короткий промежуток времени приобретает способность совершенно свободно растягиваться или сжиматься. Пусть телу A будет придано движение, которым оно может за этот промежуточек времени продвинуться на расстояние Aa. Второе же тело B пусть имеет движение, которым оно описывает за это время расстояние Bb. Следовательно, тело AB в целом приходит тем временем в положение ab, которое было бы для него естественным, если бы длина стержня ab была равна длине AB.

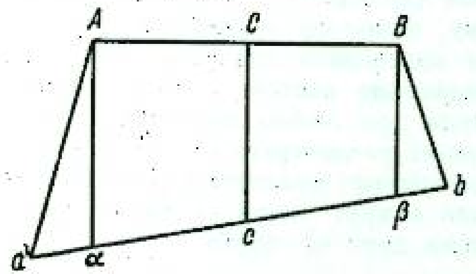


Рис. 97.

§ 599. Но если $ab > AB$, то можно себе представить, что стержень вдруг приобретает силу, стягивающую его к естественной длине. Здесь нет необходимости определять ее величину. Очевидно, однако, следующее: поскольку тела одинаковы и стержень, как мы полагаем, в обеих частях стягивается одинаковым образом, то также и тела перемещаются на одинаковые расстояния, а именно тело A перемещается на $a\alpha$, а B — на $b\beta$, так что $a\alpha = b\beta$ и $\alpha\beta = AB$. Поэтому тело A тем временем переходит не в a, а в α, а тело B в β; весь же стержень AB приходит в положение $\alpha\beta$.

Силу, которой противостоит стержень AB при таком движении вдоль $A\alpha$ и $B\beta$, для того чтобы не быть разорванным, можно найти следующим образом: найдем силу, которая может переместить тела из a и b в α и β за то же время, за которое они продвигаются вдоль Aa и Bb. Она будет равносильна сжатию стержня и является той самой силой, которую выдерживает стержень.

§ 600. Если тела A и B будут неравными, все останется по-прежнему, за исключением того, что эти тела под действием сжимающей силы стержня будут перемещены на неравные отрезочки $a\alpha$ и $b\beta$. Сжимающую же силу стержня следует рассматривать равной в обеих частях. Поэтому так как большее тело под действием одной и той же силы будет перемещено на меньшее расстояние, нежели меньшее тело, а именно в обратном отношении тел, то $a\alpha : b\beta = B : A$. Следовательно, если $\alpha\beta = AB$, то $\alpha\beta$ будет положением, в которое AB приходит через данный промежуточек времени. Поэтому искомое положение $\alpha\beta$ найдется по заданному отношению тел и превышению линии ab в сравнении с AB.

§ 601. Поскольку $a\alpha : b\beta = B : A$, то центр тяжести тел, расположенных в a и b, будет тем же, что и у тех же тел в α и β. Ведь, взяв c за центр тяжести, получим $ac : bc = B : A$. Следовательно, и $\alpha c : \beta c = B : A$. Поэтому под действием восстанавливающей силы центр тяжести тел не меняется. Итак, центр тяжести c тел A и B тем временем перемещается

вдоль линии Cc, и его движение одинаково, будут ли тела A и B отделены друг от друга, или, как мы полагаем, соединены твердым стержнем.

. . . .

§ 606. Изложив принципы, которыми пользуются при исследовании движения твердых тел, следует изложить, каким образом мы расчленим этот раздел.

Движение составных тел отличается от движения точки прежде всего тем, что у составных тел различные части могут двигаться различным образом, если даже на них не действуют никакие силы, в то время как точка в этом случае может только либо покоиться, либо равномерно двигаться по прямой. Поэтому этот вопрос следует рассматривать двояко: сначала применительно к движению тел, не подвергающихся действию никаких сил, а затем применительно к движению тел под действием сил.

§ 607. Другое различие в подходе проистекает из того, что твердые тела могут двигаться либо свободно, либо наоборот, а в последнем случае возможны также различные варианты, сообразно тому, как ограничена свобода тел. Сколько здесь может быть вариантов, мы исследуем тогда, когда непосредственно подойдем к этому вопросу.

Таким образом, уже вполне ясно, о каких вещах следует говорить в этом разделе. Еще необходимо обратить внимание и на то, что здесь мы будем рассматривать только чистые или абсолютные силы, так как встречающиеся в природе относительные силы обычно меняются в зависимости от формы тел, и о них нельзя сказать ничего, пока не определен их способ действия.

Глава I. О ДВИЖЕНИИ СВОБОДНЫХ ТВЕРДЫХ ТЕЛ, НЕ ПОДВЕРЖЕННЫХ ВОЗДЕЙСТВИЮ СИЛ

§ 608. Пусть даны два тела A и B, соединенные стержнем AB, общий центр тяжести которых находится в C (рис. 98). Пусть A имеет скорость, пропорциональную Aa, и B — пропорциональную Bb. Пусть тела, оторвавшись друг от друга, за одно и то же время пройдут в a и b и в этом месте их центр тяжести будет c. Поскольку центр тяжести C не меняется при восстановлении тел, то следует считать, что при этом движении он описал прямую Cc. Для того чтобы определить ее величину, проведем из C прямые Cd и Ce, параллельные и равные Aa и Bb, и соединим их прямой de, которая пройдет через c. Ведь треугольники adc, bec будут подобны, поскольку ad и be равны и параллельны AC и BC. Отсюда $ac : bc = ad : be = AC : BC$.

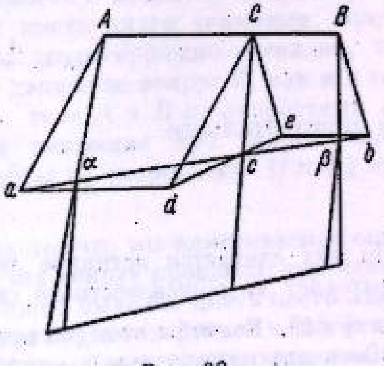


Рис. 98.

§ 609. Поэтому, для того чтобы найти скорость Cc центра тяжести C, следует к точке C приложить прямые Cd и Ce, соответственно равные и параллельные скоростям Aa и Bb. Положим, что в d и e расположены тела A и B; определим их центр тяжести, которым будет c, и проведем прямую Cc. Она представит скорость центра тяжести и одновременно направление его движения. Ведь вследствие подобия вышеупомянутых треугольников $dc : ce = ad : be = AC : BC$. Поэтому c будет центром тяжести тел A и B, помещенных в d и e.

§ 610. Восстанавливаясь, тела придут в α и β, причем их общим центром тяжести останется c. Отсюда ясно, что если с самого начала тела A и B будут иметь скорости, пропорциональные $A\alpha$ и $B\beta$, то тем самым будет порождено такое же движение центра тяжести, и Cc образуется точно так же, если приложить $A\alpha$ и $B\beta$ к C и подобным же образом назначить центр тяжести. После возвращения в α и β тела A и B будут продвигаться вдоль $A\alpha$ и $B\beta$. Поэтому и далее центр тяжести сохранит свое движение. Итак, с найденной скоростью центр тяжести c будет постоянно и равномерно продвигаться по прямой.

§ 611. Подобным же образом можно показать, что центр тяжести многих тел, имеющих какое угодно движение, движется равномерно по прямой и его движение и направление найдутся, если представить себе приложенными к нему прямые, параллельные и равные тем, которые изображают движения отдельных тел, и на концах этих прямых расположить соответственно сами тела, центр тяжести которых затем должен быть определен. При этом прямая, соединяющая эти два центра тяжести, представит движение центра тяжести, а именно направление и скорость.

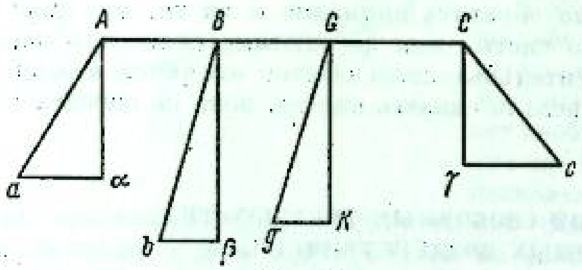


Рис. 99.

§ 612. Разложение каждого отдельного движения на два движения вдоль заданных направлений облегчит нам нахождение движения центра тяжести. Пусть даны три тела A, B и C (рис. 99), соединенные между собой твердым стержнем и имеющие скорости, пропорциональные Aa, Bb и Cc. Разложим последние на вертикальные $A\alpha$, $B\beta$ и $C\gamma$ и горизонтальные αa, βb и γc. Тогда вертикальное движение центра тяжести G

$$GK = \frac{A \cdot A\alpha + B \cdot B\beta + C \cdot C\gamma}{A + B + C}$$

и горизонтальное

$$Kg = \frac{A \cdot a\alpha + B \cdot \beta b - C \cdot \gamma c}{A + B + C}.$$

Из них слагается истинное движение Gg центра тяжести. Это правило вытекает из общеизвестного свойства центра тяжести.

§ 613. Если бы всем частям тела были приданы равные и направленные вдоль параллельных линий скорости, то и центр тяжести, что совершенно очевидно, имел бы такое же движение, и ему соответствовало бы движение всего тела. Ведь если бы даже отдельные частицы были отделены друг от друга, тем не менее вся масса двигалась бы так же, как если бы они были прочно соединены. Поэтому тела, которые однажды уже получили такое параллельное движение, должны постоянно его сохранять, и отдельные частицы так же равномерно будут перемещаться по прямой.

§ 618. Итак, если дано несколько тел A, B с их скоростями, представленными линиями Aa, Bb (рис. 100), то найдем скорость их центра тяжести C, выраженную линией Cc. Для того чтобы центр тяжести C покоился, представим себе, что отдельным телам A, B приданы новые скорости Ad, Be, равные и параллельные скорости Cc, но противоположные ей по направлению. После этого скорости тел будут иными, а именно скоростью тела A будет диагональ Af параллелограмма, построенного на Ad и Aa; подобным же образом Bg будет скоростью тела B.

§ 619. Итак, для того чтобы определить вращательное движение вокруг центра тяжести C, достаточно рассмотреть скорости Af и Bg. Но поскольку центр C покоится, вращательное движение производит только та часть любой из скоростей Af и Bg, которая перпендикулярна к прямым AC или BC. Итак, если разложить скорости Af и Bg на составляющие, из которых одни будут нормальны к прямым AC и BC, а другие совпадают с ними по направлениям, то достаточно будет рассмотреть только нормальные скорости.

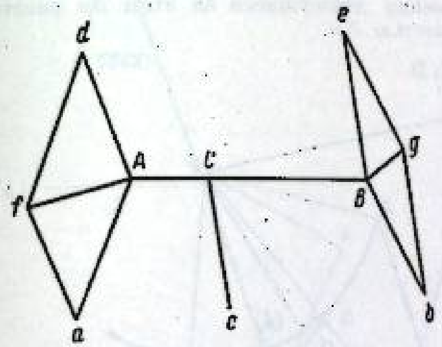


Рис. 100.

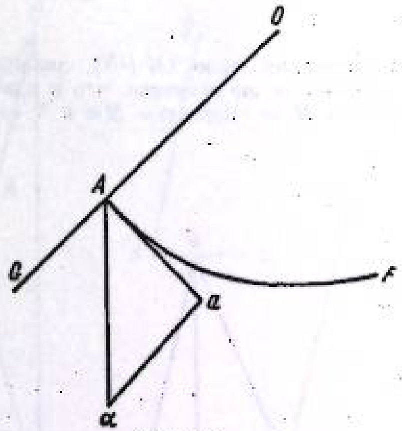


Рис. 101.

§ 620. Если мы положим, что центр тяжести C является не свободным, а закрепленным, так что тело не может иметь иного движения, кроме вращательного вокруг центра тяжести, то совершенно очевидно, что тело будет иметь такое же вращательное движение вокруг C, как и в том случае, когда C свободно. Следовательно, тела A и B со скоростями Aa и Bb производят такое же вращательное движение при закрепленном центре тяжести C, какое они производили бы со скоростями Af и Bg при свободном центре тяжести.

§ 621. Поэтому, чтобы полнее раскрыть то, что мы намереваемся сообщить, исследуем вращательные движения тел вокруг произвольных неподвижных точек, хотя такое обсуждение должно было бы иметь место лишь в дальнейшем изложении, а именно там, где будет говориться о движении несвободных тел. Предпослав это, мы не будем более испытывать необходимости в определении новых скоростей, как в § 618, и рассмотрим скорости Aa, Bb, положив, что центр тяжести является неподвижным, так как при этом должно возникнуть такое же вращательное движение. Таким образом, мы будем определять вращательное и равномерное движение центра тяжести по отдельности и независимо друг от друга.

§ 622. Пусть только одно тело A прикреплено к твердому стержню OA, который закреплен в O (рис. 101), так что он не может совершать никакого другого движения, кроме вращательного вокруг O. Пусть A имеет скорость Aa по направлению, нормальному к AO. Тогда тело A с этой же скоростью будет вращаться вокруг O, описывая окружность AF. Точка же G на расстоянии GO от A будет вращаться со скоростью $\frac{OG \cdot Aa}{AO}$. Это же вращательное движение возникнет и тогда, когда тело A будет иметь другую скорость $A\alpha$, такую, однако, чтобы при разложении ее на нормальную к AO и совпадающую с ней, нормальная скорость была равна Aa.

Примечание на полях рукописи. Пусть (рис. 102)

$$Mr = \frac{M \cdot Mm + N \cdot Nn}{M + N}.$$

Следовательно, тело $(M+N)$, движущееся на радиусе MO со скоростью Mr, обуславливает то же действие, что и одновременно движущиеся на этом же расстоянии тела M со скоростью Mm и N со скоростью Nn.

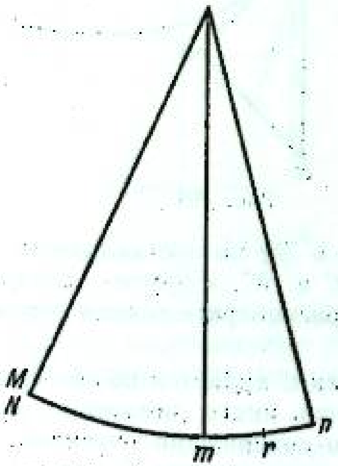


Рис. 102.

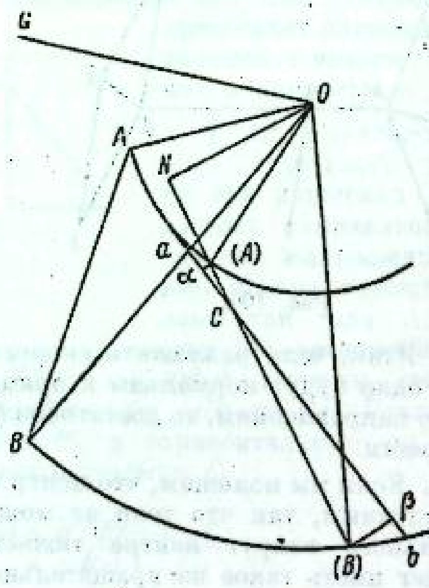


Рис. 103.

§ 623. Пусть два тела A и B соединены между собой твердым стержнем AB и, кроме того, связаны твердыми стержнями OA, OB с неподвижной точкой O (рис. 103), так что оба тела не могут совершать никакого другого движения, кроме вращательного вокруг O. Пусть телу A придана скорость, пропорциональная Aa, и телу B — пропорциональная Bb. Если убрать стержень AB, оба тела за одно и то же время перейдут в a и b. Пусть затем стержень вновь присоединяется и возвращается в свое естественное состояние, под действием чего тела будут отодвинуты в (A) и (B). Поскольку $(A)O = AO$, $(B)O = BO$ и $(A)(B) = AB$, угол $AO(A)$ равен углу $BO(B)$. И поэтому вращательное движение какой-либо произвольно взятой точки G будет происходить со скоростью $\frac{A(A) \cdot OG}{AO}$ или $\frac{B(B) \cdot OG}{BO}$.

Примечание на полях рукописи. Следует полагать, что после того как тела A и B свободно повернутся вокруг O, угол $(A)O(B)$ восстанавливается (рис. 104).

Примечание на полях рукописи. Пусть тело A имеет движение Aa, а тело B — движение Bb (рис. 105). Для того чтобы они находились в покое, необходимо иметь $A \cdot AO \cdot Aa = B \cdot Bb \cdot BO$. Ведь, если стержень ab стягивается силою p, то сила a, влекущая к A, будет пропорциональна $p \cos \text{ang}\, oaA$, т. е. $p \sin Oab$, или $p \cdot OB$, а сила b, влекущая к B, есть $p \cdot OA$. Для того чтобы a и b были приведены в A и B, необходимо иметь

$$\frac{OB}{A} : \frac{AO}{B} = Aa : Bb,$$

т. е. $A \cdot Aa \cdot AO = B \cdot Bb \cdot BO$.

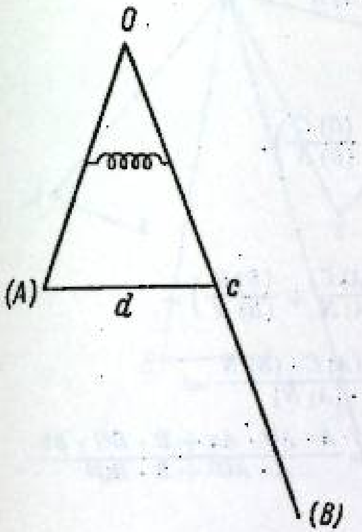


Рис. 104.

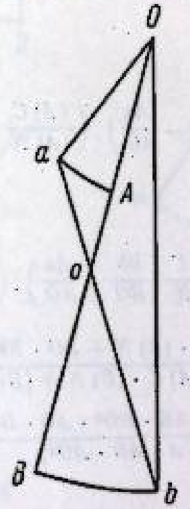


Рис. 105.

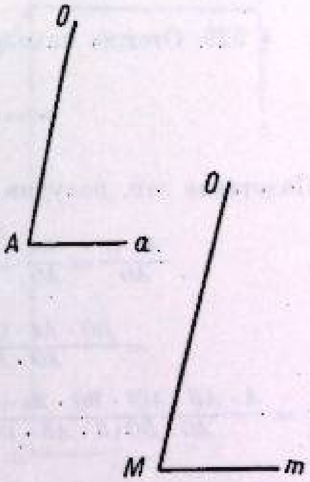


Рис. 106.

Примечание на полях рукописи. Вместо A, движущегося со скоростью Aa, можно положить M (рис. 106), если

$$Mm = \frac{Aa \cdot MO}{AO} \quad \text{и} \quad M = \frac{A \cdot AO^2}{OM^2}.$$

§ 628.* Но $A(A) = Aa + (A)a$ и $B(B) = Bb - (B)b$. И из § 605, в котором идет речь примерно о том же построении, имеем $(A)a = \frac{AO \cdot (A)\alpha}{(A)N}$ и $(B)b = \frac{BO \cdot (B)\beta}{(B)N}$, причем $(A)(B)$ продолжена и на нее опущен из O перпендикуляр ON. Но $(A)\alpha : (B)\beta = (A)C : (B)C$. Положим $(A)\alpha = m \cdot (A)C$. Тогда $(B)\beta = m \cdot (B)C$. Но

$$(A)C : (B)C = \frac{(A)N}{A \cdot AO^2} : \frac{(B)N}{B \cdot BO^2},$$

и поэтому, складывая, получим

$$AB : (A)C = [A \cdot AO^2 \cdot (B)N + B \cdot BO^2 \cdot (A)N] : [B \cdot BO^2 \cdot (A)N].$$

---

* В рукописи этот параграф, следующий непосредственно за § 623, обозначен ошибочно как § 628. — *Г. М.*

Таким образом,

$$(A)\,C=\frac{B\cdot AB\cdot BO^2\cdot (A)\,N}{A\cdot AO^2\cdot (B)\,N+B\cdot BO^2\cdot (A)\,N}$$

и

$$(B)\,C=\frac{A\cdot AB\cdot AO^2\cdot (B)\,N}{A\cdot AO^2\cdot (B)\,N+B\cdot BO^2\cdot (A)\,N}.$$

По этой причине и поскольку $\frac{A\,(A)}{AO}=\frac{B\,(B)}{BO}$, получим

$$\frac{Aa}{AO}+\frac{m\cdot (A)\,C}{(A)\,N}=\frac{Bb}{BO}-\frac{m\cdot (B)\,C}{(B)\,N}.$$

§ 629. Отсюда находим

$$m=\left(\frac{Bb}{BO}-\frac{Aa}{AO}\right):\left(\frac{(A)\,C}{(A)\,N}+\frac{(B)\,C}{(B)\,N}\right).$$

Подставив это, получим

$$\frac{A\,(A)}{AO}=\frac{Aa}{AO}+\frac{(A)\,C}{(A)\,N}\left(\frac{Bb}{BO}-\frac{Aa}{AO}\right):\left(\frac{(A)\,C}{(A)\,N}+\frac{(B)\,C}{(B)\,N}\right)=$$

$$=\frac{BO\cdot Aa\cdot (B)\,C\cdot (A)\,N+AO\cdot Bb\cdot (A)\,C\cdot (B)\,N}{AO\cdot BO\,[(A)\,C\cdot (B)\,N+(B)\,C\cdot (A)\,N]}=$$

$$=\frac{A\cdot AB\cdot AO^2\cdot BO\cdot Aa+B\cdot AB\cdot BO^2\cdot AO\cdot Bb}{AO\cdot BO\,(B\cdot AB\cdot BO^2+A\cdot AB\cdot AO^2)}=\frac{A\cdot AO\cdot Aa+B\cdot BO\cdot Bb}{A\cdot AO^2+B\cdot BO^2}.$$

Отсюда скорость точки G равна

$$OG\,\frac{A\cdot AO\cdot Aa+B\cdot BO\cdot Bb}{A\cdot AO^2+B\cdot BO^2}.$$

§ 630. Итак, скорость, с которой совершается вращательное движение, зависит только от масс тел, их расстояний от неподвижной точки O и приданных скоростей. Здесь не входят в расчет ни расстояние между телами, ни взаимное наклонение радиусов.

Кроме того, следует отметить, что скорости Aa и Bb могут менять знаки в зависимости от того, направлены ли они в одну или в противоположные стороны. На нашем рисунке обе скорости имеют знак $+$, поскольку обе они направлены слева направо. Если бы одно из тел стремилось двигаться налево, его скорость следовало бы выразить как отрицательную.

§ 631. По этому образцу легко сделать заключение о том, какова будет скорость вращения, если тел будет больше, чем два. Пусть тела A, B, C, D соединены друг с другом и с неподвижной точкой O (рис. 107) и имеют соответственные скорости Aa, Bb, Cc, Dd, направленные все вправо. Отсюда возникнет вращательное движение в ту же сторону, скорость которого на расстоянии OG от O, а именно в точке G, будет равна

$$OG\,\frac{A\cdot AO\cdot Aa+B\cdot BO\cdot Bb+C\cdot CO\cdot Cc+D\cdot DO\cdot Dd}{A\cdot AO^2+B\cdot BO^2+C\cdot CO^2+D\cdot DO^2}.$$

§ 632. Истинность этого правила, найденного для многих тел, может быть доказана следующим образом. Пусть даны два тела A и B, имеющие вращательные движения Aa и Bb вокруг точки O (рис. 108), взаимно уничтожающие друг друга, так что скорость, происходящая от обоих движений, равна нулю. Согласно § 629, мы должны иметь $A\cdot AO\cdot Aa+B\cdot BO\cdot Bb=0$, либо, поскольку на рисунке скорость Bb уже выражена как величина отрицательная, получим $A\cdot AO\cdot Aa=B\cdot BO\cdot Bb$. Таким образом, если бы какое-либо другое тело C имело такую скорость Cc вокруг O, что $C\cdot CO\cdot Cc=A\cdot AO\cdot Aa$, то и это движение было бы

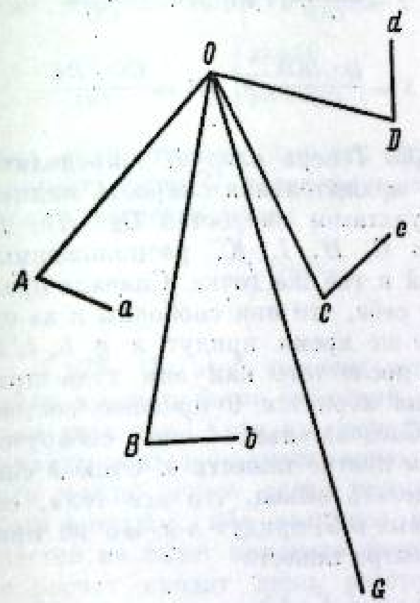


Рис. 107.

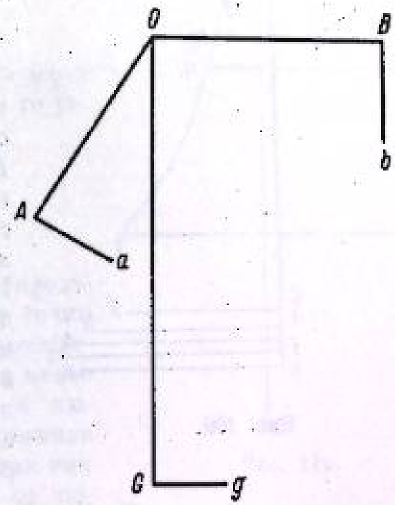


Рис. 108.

уничтожено движением B. Из этого можно заключить, что тела A и C, имеющие скорости Aa и Cc, вращаются вокруг O под действием равных сил.

§ 633. Итак, если $A\cdot AO\cdot Aa=G\cdot GO\cdot Gg$, то тела A и G с одинаковой эффективностью будут вращаться вокруг O, хотя они и движутся не с одинаковой скоростью вращения. Если же окажется, что они движутся с равными скоростями вращения, а это возникнет при $AO:Aa=GO:Gg$, то их вполне можно считать эквивалентными, так как они будут совпадать между собой не только по вращательному движению, но и по эффективности. Итак, в любом случае вместо тела A можно будет поставить G. Но должно быть $Gg=\frac{GO\cdot Aa}{AO}$ и $G=\frac{A\cdot AO\cdot Aa}{GO\cdot Gg}=\frac{A\cdot AO^2}{GO^2}$.

§ 634. Пусть дано несколько тел A, B, C, D, вращающихся вокруг O со скоростями Aa, Bb, Cc, Dd (рис. 109), и требуется найти вращательную скорость, обусловленную всеми этими скоростями, вместе взятыми, или скорость, которую будет иметь точка G на расстоянии OG. Найдем тела с их скоростями, прилагаемые в G, которые были бы соответственно равнодействующими по отношению к телам A, B, C, D. Пусть это будут G, H, I, K. Представим себе, что они находятся в одной и той же точке G и имеют скорости Gg, Hh, Ii, Kk, причем G является равнодействующим

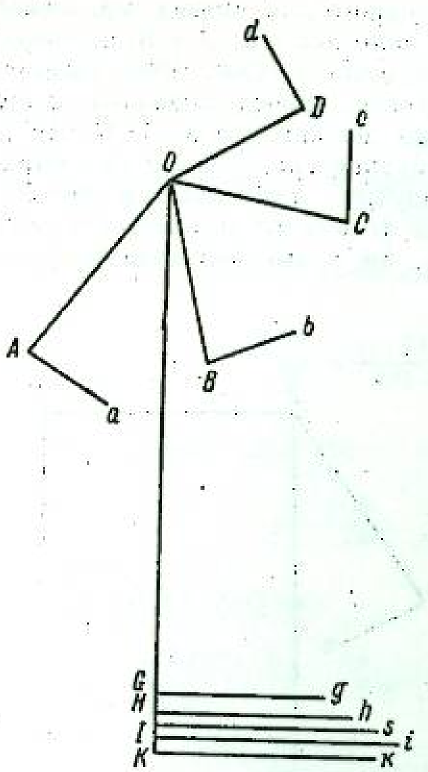


Рис. 109.

по отношению к A, H — к B, I — к C, K — к D. Тогда

$$G=\frac{A\cdot AO^2}{GO^2} \quad \text{и} \quad Gg=\frac{GO\cdot Aa}{AO},$$

$$H=\frac{B\cdot BO^2}{GO^2} \quad \text{и} \quad Hh=\frac{GO\cdot Bb}{BO},$$

$$I=\frac{C\cdot CO^2}{GO^2} \quad \text{и} \quad Ii=\frac{GO\cdot Cc}{CO},$$

$$K=\frac{D\cdot DO^2}{GO^2} \quad \text{и} \quad Kk=\frac{GO\cdot Dd}{DO}.$$

§ 635. Теперь следует определить, какая вращательная скорость является результатом скоростей Gg, Hh, Ii, Kk тел G, H, I, K, расположенных в одной и той же точке. Сначала представим себе, что они свободны и за одно и то же время придут в g, h, i, k. Пусть, после того как они туда придут, они вернутся в прежнее состояние. Следовательно, они соберутся в общем центре тяжести s. Отсюда следует сделать вывод, что все тела, соединенные в G, придут в s. Но из природы центра тяжести

$$Gs=\frac{G\cdot Gg+H\cdot Hh+I\cdot Ii+K\cdot Kk}{G+H+I+K},$$

что равно скорости точки G.

Подставив же вместо G, H и т. д. и вместо Gg, Hh и т. д. надлежащие величины, получим, что скорость точки G равна

$$GO\,\frac{A\cdot AO\cdot Aa+B\cdot BO\cdot Bb+C\cdot CO\cdot Cc+D\cdot DO\cdot Dd}{A\cdot AO^2+B\cdot BO^2+C\cdot CO^2+D\cdot DO^2},$$

как мы уже раньше предполагали.

§ 636. Поэтому, если в G будет приложено тело, равное $G+H+I+K$, т. е.

$$\frac{A\cdot AO^2+B\cdot BO^2+C\cdot CO^2+D\cdot DO^2}{GO^2},$$

со скоростью Gs, найденной в предыдущем параграфе, то оно будет вполне эквивалентно телам A, B, C, D, вращающимся вокруг O со скоростями Aa, Bb, Cc, Dd. Поскольку же длина OG произвольна, то можно будет найти, какой она должна быть, чтобы сумма тел $G+H+I+K$ была равна сумме $A+B+C+D$. А именно, получим

$$GO=\sqrt{\frac{A\cdot AO^2+B\cdot BO^2+C\cdot CO^2+D\cdot DO^2}{A+B+C+D}}$$

и скорость в точке G, т. е.

$$Gs=\frac{A\cdot AO\cdot Aa+B\cdot BO\cdot Bb+C\cdot CO\cdot Cc+D\cdot DO\cdot Dd}{\sqrt{(A+B+C+D)(A\cdot AO^2+B\cdot BO^2+C\cdot CO^2+D\cdot DO^2)}}.$$

§ 637. Если теперь вокруг O будет вращаться бесконечное число соединенных между собой тел, то пусть масса тех тел, которые расположены на расстоянии OP от O, будет пропорциональна аппликате PM кривой OMB и скорость вокруг O, которую они имеют на этом расстоянии, пусть будет пропорциональна аппликате PN кривой ONC (рис. 110). Найдем вращательную скорость, обусловленную всеми этими скоростями, или ту скорость, которую будет иметь точка G. Введя обозначения $OP=x$, $PM=y$ и $PN=u$, получим, что эта скорость равна

$$\frac{\int yxudx}{\int yx^2dx}\,GO$$

или, если угловая скорость выражена через скорость точки G, поделенную на OG, то угловая скорость равна

$$\frac{\int yxudx}{\int yx^2dx}.$$

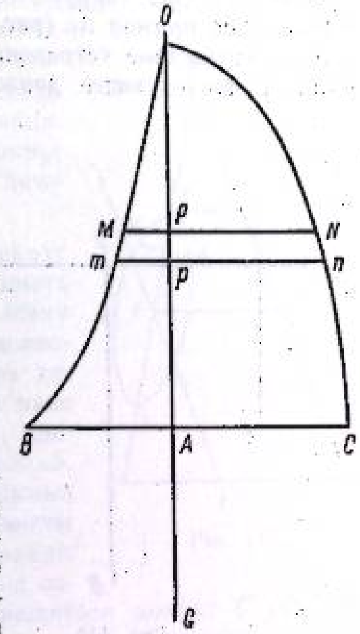


Рис. 110.

§ 638. Из этой теоремы можно определить вращательные движения вокруг точки для всех тел. Хотя на рисунке мы рассматривали только прямую линию, тем не менее это можно очень легко применить к любым фигурам, ибо взаимное расположение частей не имеет никакого значения, так как в расчет входит лишь расстояние от полюса. И поэтому все тельца, удаленные от точки O на расстояние OP, можно рассматривать собранными в точке P, а их сумму — выраженной через аппликату PM. Кроме того, скорость всех этих частиц выражена линией PN, и если даже не все равноудаленные от O частицы имеют одинаковые скорости, тем не менее легко найти общую вращательную скорость.

§ 639. Более того, указанная теорема содержит не только вращательное движение, которое совершается вокруг точки в одной и той же плоскости, но также все вращательные движения вокруг неподвижной оси. Ибо, если тела OA, PB и QC вращаются вокруг оси OQ (рис. 111), то совершенно ясно, что сила вращения вокруг оси каждого из этих тел полностью не зависит от места на оси, а зависит только от расстояния. Поэтому в нашем случае возникает такое же вращательное движение, какое возникло бы в том случае, если бы O, P и Q были соединены в одной точке.

§ 640. Правило, данное выше в символах, может быть выражено в словах следующим образом. Угловая скорость движения вокруг оси определяется, если сумму произведений тел на расстояния от оси и на соответствующие скорости разделить на сумму произведений отдельных тел на квадраты их расстояний от оси. В качестве же скорости следует взять только ту скорость, направление которой расположено в плоскости, нормальной к оси, и к тому же перпендикулярно к прямой, соединяющей тело с осью. Таким образом, если скорости тел будут иметь другие направления, то путем разложения следует вывести из них скорость вышеуказанного направления и рассматривать только ее одну.

§ 641. Изложив закон, в соответствии с которым тела вращаются как вокруг точки, так и вокруг оси, мы вернемся к отысканию движения свободных твердых тел и сначала рассмотрим движение тех тел, которые при продвижении вперед вращаются вокруг точки, т. е. вокруг центра тяжести, а не вокруг оси. Пусть однородный твердый стержень AB совершает сначала вокруг точки D такое движение, что скорость точки A выражается прямой Aa (рис. 112). Пусть затем точка D вдруг станет свободной вследствие устранения закрепления, которым она удерживалась. Найдем последующее движение стержня, а именно — поступательное

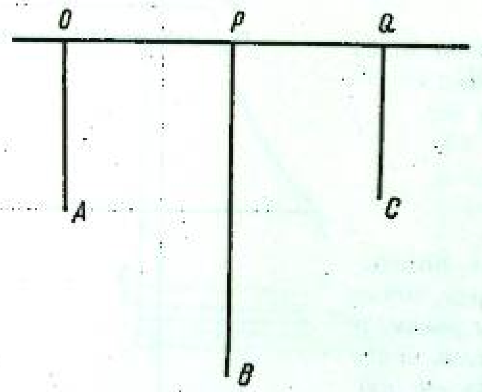


Рис. 111.

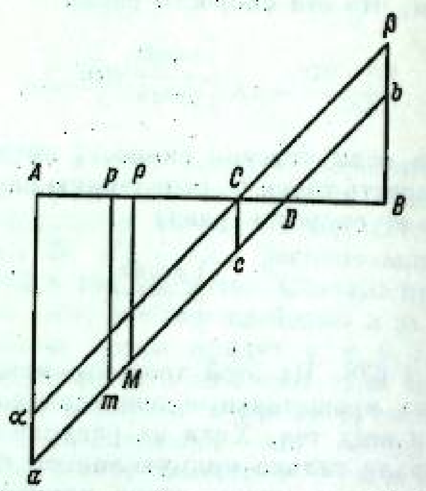


Рис. 112.

движению центра тяжести C и происходящее в то же время круговое движение вокруг него.

§ 642. Проведем прямую aDb, ее расстояние от прямой AB в любой точке даст скорость соответствующей точки на стержне AB; например, прямая PM выразит скорость точки P. Для нахождения движения центра тяжести C следует рассмотреть все прямые PM, приложенные в точке C, а также расположенные на другом конце этих прямых тельца или соответствующие элементы стержня. Затем надо будет определить центр тяжести расположенных таким образом элементов, расстояние которого от точки C даст скорость самого центра тяжести C. Пусть $AB=a$, $AD=b$, $Aa=c$ и $AP=x$. Тогда $DP=b-x$ и $PM=\frac{c(b-x)}{b}$. Итак, расстояние перемещенного элемента $Pp=dx$ от C будет $\frac{c(b-x)}{b}$, а расстояние центра тяжести всех элементов, расположенных в AP, от C равно

$$\frac{c\int dx\,(b-x)}{bx}=c-\frac{cx}{2b}.$$

§ 642a.* Положим, что расстояние центра тяжести всего указанным образом перемещенного стержня AB от C получается при $x=a$. Тогда

* В рукописи вместо номера 643 ошибочно повторен номер 642. — *Г. М.*

для него будем иметь $\frac{2bc-ac}{2b}$, чему равна линия Cc, которая, таким образом, выражает движение центра тяжести. Следовательно, центр тяжести будет равномерно двигаться вдоль Cc со скоростью $c\left(\frac{2b-a}{2b}\right)$. Отсюда вытекает, что если точка D будет в самом центре тяжести C, то скорость ее будет равна нулю, и, следовательно, стержень будет одинаково вращаться вокруг центра тяжести C, независимо от того, является ли он свободным или закрепленным, что и должно иметь место на основе приведенных принципов. Ведь всякое тело, вращающееся вокруг центра тяжести, сохраняет то же движение, даже если оно совершенно свободно.

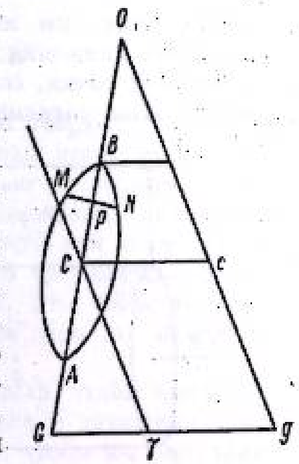


Рис. 113.

§ 643. Вращательное же движение вокруг центра тяжести C, которое между тем будет иметь стержень, найдем, если представим себе, что всему стержню придано движение, равное и противоположное по направлению движению центра тяжести. Следовательно, из любой скорости надо вычесть скорость Cc, что можно получить, проведя через C прямую $\alpha C\beta$, параллельную ab. Расстояния ее от AB дадут скорости, с которыми вращаются вокруг C соответствующие элементы на стержне. Поскольку они пропорциональны расстояниям от C, отдельные точки стержня сохранят эти скорости, и стержень будет вращаться вокруг C так, что конец A будет иметь скорость

$$A\alpha=c-\frac{2bc-ac}{2b}=\frac{ac}{2b}.$$

§ 644. Подобным же образом, если тело BMA произвольной формы вращается вокруг полюса O (рис. 113) и внезапно обрывается нить BO, то центр тяжести C будет равномерно двигаться по прямой со скоростью Cc, которую он имел в последний момент вращательного движения.

Действительно, проведем прямую OC и к ней какую-либо ортогональную апликату MN. Обозначим $OP=x$, $MN=y$. Тогда скорость, с которой вращается точка P, будет пропорциональна x. Пусть она будет nx. Ей будет равна скорость, которую будет иметь любая точка на апликате MN, по крайней мере такая, направление которой к OC нормально. Поэтому скорость центра тяжести, происходящая из всего этого, есть

$$\frac{\int nxydx}{\int ydx}.$$

Но $OC=\frac{\int xydx}{\int ydx}$. Следовательно, скорость точки C есть $n\cdot OC$, т. е. является такой же, какую она получила от вращательного движения.

§ 645. Представим себе, что отдельным точкам тела $AMBN$ придана скорость, равная той, которую имеет центр тяжести C, и прямо противоположная ей по направлению. Точка C будет покоиться, а вокруг нее будет вращаться все тело. Если раньше точка G имела скорость Gg, то теперь, когда из нее вычтена скорость Cc, остается только $G\gamma$, и прямая γC представит скорости, а именно расстояние какой-либо точки от C будет относиться к скорости вращения, как GC относится к $G\gamma$. Итак, это движение вокруг C останется неизменным, т. е. скорость этого углового движения вокруг C будет пропорциональна $G\gamma : GC$. Но $G\gamma : GC = Gg : OG$. Таким образом, тело будет вращаться вокруг C с такой же скоростью, с какой оно раньше двигалось вокруг O.

§ 646. Итак, мы имеем следующую весьма стройную теорему для нахождения движения, которое будет иметь тело, вращающееся вокруг неподвижной точки, если она вдруг станет свободной, а именно: *центр тяжести тела сохранит ту скорость, которую он имел, когда стано-*

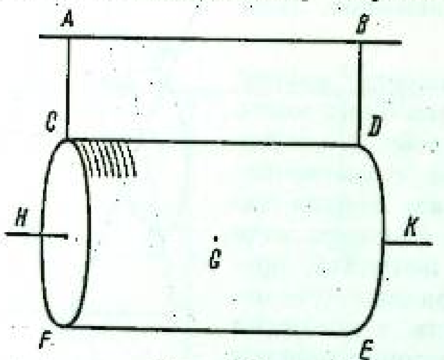


Рис. 114.

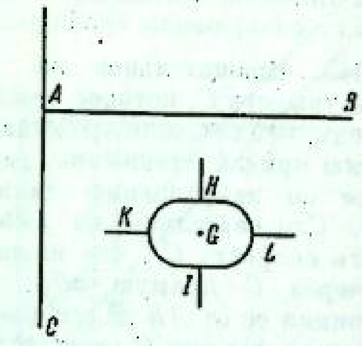


Рис. 115.

вился свободным, и с этой же скоростью он будет продолжать равномерное движение по прямой; а тем временем тело будет вращаться вокруг центра тяжести и притом с такой скоростью, с какой оно раньше двигалось вокруг неподвижной точки. Поэтому периоды вращения вокруг неподвижной точки и вокруг центра тяжести равны.

§ 647. Отсюда можно также сделать вывод о том, какое движение будет иметь тело $CDEF$ (рис. 114), если оно сначала вращалось вокруг неподвижной оси AB, а затем вдруг стало свободным. Ибо центр тяжести G будет равномерно двигаться по прямой со скоростью, которую он имел в момент, когда отрывался от оси AB. И он будет двигаться так, что прямая HK, проходящая через G и параллельная оси AB, также будет продвигаться по прямой, оставаясь себе параллельной. Между тем все тело будет равномерно вращаться вокруг HK движением, равным тому, которое оно раньше имело вокруг AB, т. е. время обращения вокруг HK будет равно времени обращения, которое оно имело раньше вокруг AB.

§ 648. Кроме того, отсюда можно понять, что если тело $HKLI$ (рис. 115) вращается вокруг двух неподвижных осей AB и AC и вдруг становится предоставленным самому себе, то центр тяжести G будет двигаться равномерно по прямой со скоростью, которую он имел в тот самый момент, и при этом он будет иметь двойное вращательное движение: одно — вокруг оси HI, проходящей через G и постоянно параллельной оси AC, с периодом обращения, равным периоду обращения вокруг AC, другое — вокруг оси KL, также проходящей через G и постоянно параллельной оси AB, обращения вокруг этой оси будут совершаться за то же время, что и ранее вокруг AB.

О ПРИРОДЕ ЖИДКОСТЕЙ

§ 1. Что такое жидкость и чем она отличается от твердых тел — это вопрос, на который различные исследователи природы отвечали по-разному. Одни усматривали различие между жидкостью и твердым телом в том, что малые частицы жидкостей, как они утверждали, находятся в постоянном движении. Другие определяли жидкость как тело, части которого уступают любому давлению и в силу этого чрезвычайно легко приводятся в движение одна относительно другой. Это свойство действительно характерно для жидкостей, однако этим дело не исчерпывается.

Следует показать, каково должно быть строение тела, чтобы части его уступали давлению и очень легко могли приводиться в движение одна относительно другой. Это следует выяснить для того, чтобы мы получили четкое представление о жидкости. Итак, я рассмотрю наблюдаемые нами свойства жидкостей и затем попытаюсь сделать вывод о строении жидкостей.

§ 2. Поскольку поставлена задача — вскрыть природу и строение жидкостей, то мне представляется, что лучшим способом ее разрешения будет исследование вопроса о том, чем отличаются жидкости от твердых тел. Различие же тел, по-видимому, надлежит усматривать либо в разном качестве составляющих частиц, либо в различном характере их сочетания. Отсюда следует, что мы лишь в том случае вполне постигнем природу тела, если познаем качество составляющих частиц и характер их сочетания. Итак, чтобы познать природу жидкостей, нужно исследовать, каким образом составлена жидкость из своих частей и каковы ее частицы.

Здесь речь идет не о последних частицах, которые не могут быть более делимы, а только о тех частицах, к которым мы можем прийти путем подлинного деления, ибо для поставленной задачи достаточно познать свойство этих частиц.

§ 3. Что же касается характера сочетания частей, то составляющие части двояким образом могут соединяться для образования целого. Либо эти части связаны друг с другом так, что одна как бы прикреплена к другой, либо все эти части свободны, взаимно не скреплены, так что весьма легко могут быть отделены друг от друга. Первое имеет место в твердых телах, как всякому ясно; второе же относится к жидкостям, что вытекает из всех представлений, которые мы составили себе относительно жидкостей. Ведь характерным признаком жидкостей является то, что жидкость очень легко пропускает проходящее тело, что никоим образом не могло бы произойти, если бы частицы были связаны одна с другой. Из этих соображений вытекает представление о теле совершенно жидком. Даже если частицы не вполне отделены одна от другой, но все-таки предоставляют проход продвигающемуся телу, хотя бы и более затрудненный, то они образуют тела, считающиеся жидкими. В силу этого тела могут быть жидкими в различной степени. Чем легче предоставляет жидкость телу проход, тем она считается более жидкой. Говоря здесь о более затрудненном проходе, я имею в виду не то сопротивление жидкости, которое проявляется при столкновении тела с частями жидкости, а то, которое восходит к цепкости, иными словами — к взаимной связанности частей.

§ 4. Только одно то обстоятельство, что составляющие частицы не связаны между собой, еще не определяет природу жидкости. Ибо, хотя частицы в груде песка, муки или пыли и не скреплены между собой, они, однако, не образуют жидкого тела. Итак, требуется еще, сверх того, нечто другое для образования жидкости, что должно заключаться в природе самих малых частиц. Эти частицы могут быть либо твердыми, либо мягкими. Твердыми я называю такие частицы, которые не изменяют своей формы даже под действием бесконечной силы, мягкими же — те частицы, которые изменяют свою форму даже под действием самой малой силы и полностью уступают силе давления. Имеются также частицы, если только не все они относятся к этой категории, которые обладают средней природой и которые не могут противостоять безграничной силе, но и не уступают самой малой, так что одни из них более приближаются к природе твердых частиц, другие — к природе мягких. И поэтому первые называются твердыми, а вторые — мягкими. Те же частицы, которые вполне обладают природой твердости и мягкости, мы называем совершенно твердыми или совершенно мягкими.

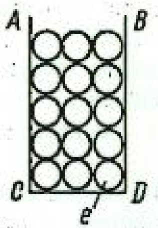


Рис. 1.

Итак, предметом нашего исследования должен стать вопрос о том, к какой категории относятся частицы совершенно жидкого тела, ибо главным образом оно является целью наших изысканий.

§ 5. Во-первых, как кажется, правильно сделать вывод, что частицы совершенно жидкого тела могут быть либо совершенно мягкими, либо совершенно твердыми. Частицы же не совершенно жидкого тела, во всяком случае, подходят очень близко к одной из этих двух категорий. Однако отнюдь не представляется возможным приписывать совершенно жидкому телу твердые частицы. Ведь мы видим, что тяжелые жидкости, заключенные в сосуд, при определенном уровне оказывают такое же давление на стенки сосуда, как и на его дно, что никоим образом не могло бы произойти, если бы частицы были твердыми. Ибо пусть тяжелая жидкость, которую я считаю состоящей из твердых частиц, заключена в сосуд $ACDB$ (рис. 1) и ее частицы расположены вертикально друг на друге. Ясно, что частицы, находящиеся в самом низу, такие как e, оказывают давление — в силу веса лежащего над ними столба — только на дно, стенки же не испытывают никакого давления, так как частицы, подобные e, стремятся не менять своей формы.

Но кто-либо может сказать, что частицы не расположены вертикально друг на друге и в таком случае стенки сосуда также испытывают давление. Совершенно верно, что в этом случае стенки также подвергаются давлению. Но давайте посмотрим, каково это давление по величине, равно ли оно давлению на дно. Пусть частица D придавливается к стенке BD столбом KE, вес которого выразим линией EF (рис. 2). Пусть через точку соприкосновения частиц D и E будет проведена нормальная к поверхности прямая EG и на эту прямую из точки F опущен перпендикуляр FI. Тогда прямая EI выразит силу, с которой столб EK оказывает давление на частицу D. Частица D не всей этой силой, конечно, давит на стенку.

Если провести горизонтально прямую DH и из точки G опустить на нее перпендикуляр GH, то отношение $DG : DH$ выразит отношение всей силы частицы D к той ее части, с которой она давит на стенку. Итак, пусть вес столба EK будет P, тогда сила частицы D равна $EI \cdot P : EF$. Далее, $DG : DH = EF : FI =$ отношению $EI \cdot P : EF$ к силе, направленной на стенку, которая, следовательно, равна $EI \cdot FI \cdot P : EF^2$. Эта сила никак не может быть равна той силе, которая давит на дно, так как $EI \cdot FI$ не только не равно самой величине EF^2, но не может даже достичь ее половины.

§ 6. Из этого следует, что частицы, образующие жидкость, не могут быть твердыми. Остается поэтому только сделать вывод, что они мягкие. Каким образом из этой теории можно вывести все известные нам свойства жидкостей, я покажу в дальнейшем изложении. Теперь же я рассмотрю несколько подробнее сведения, полученные мною о жидкостях, и извлеку из того, что сообщил о совершенно жидком теле, необходимые сведения о телах, не совершенно жидких.

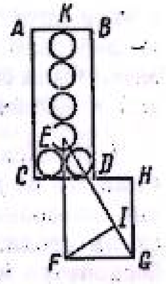


Рис. 2.

§ 7. Итак, относительно совершенно жидкого тела мы знаем, во-первых, что оно состоит из совершенно мягких частиц и что эти частицы свободны и никоим образом не связаны друг с другом. Отсюда также следует, что трение, которое частицы могут испытывать при движении одна относительно другой, надо совсем исключить. Если имеют место условия, обратные этим, то ясно, что тело тогда будет прямо противоположно совершенно жидкому, т. е. будет совершенно твердым. Итак, для совершенно твердого тела требуется, чтобы частицы, из которых оно состоит, были совершенно твердыми, т. е. такими, которые вовсе не меняют своей формы, какая бы сила на них ни воздействовала; затем требуется, чтобы эти частицы были чрезвычайно сильно между собой связаны и не могли быть отделены друг от друга какой-либо силой.

§ 8. Поскольку мы приписываем совершенно жидкому телу совершенно мягкие частицы, может возникнуть вопрос, не могут ли быть эти частицы упругими.

Ведь мы наблюдаем, что многие жидкости, и в первую очередь воздух, упруги, а это свойство может обуславливаться только тем, что эти тела состоят из упругих частиц. На это я отвечаю, что малые частицы, образующие жидкость, не только могут быть упругими, но, вероятно, все наделены совершенной упругостью, ибо упругость и мягкость не исключают друг друга, так как мягкая частица может вместе с тем быть и упругой. Тело же двояким образом может быть упругим: либо оно стремится при изменении своей формы приобрести прежнюю форму, даже если объем его не увеличится и не уменьшится, либо упругость состоит только в том, что если объем тела будет уменьшен или оно будет сжато, тело будет стремиться занять прежний объем.

Эти два случая упругости должны четко разграничиваться один от другого. Первый случай упругости никоим образом не может совмещаться с мягкостью. Ведь свойством совершенно мягкого тела является то, что оно чрезвычайно легко принимает какую угодно форму и не пытается восстановить прежнюю, что прямо противоположно первому случаю упругости. Второй же случай упругости вполне может совмещаться с мягкостью, ибо упругость этого типа проявляется только тогда, когда тело подвергается сжатию; тело же может принимать самые различные формы, если объем его не изменяется. По-видимому, такого рода упругостью обладают частицы воздуха и почти всех жидкостей. Это можно заключить из того, что они либо вовсе не допускают сжатия, либо после сжатия стремятся вернуться в прежнее состояние.

§ 9. Таким образом, тело может быть не совершенно жидким в силу двоякого рода обстоятельств: во-первых, если малые частицы не вполне мягкие, во-вторых, если частицы взаимно сцеплены, и, в-третьих, если имеет место и то и другое, а именно частицы не совершенно мягкие и не совсем одна от другой отделены. Поскольку едва ли в мире имеется тело совершенно жидкое, то отсюда с необходимостью вытекает, что тела, которые мы считаем жидкими, обладают каким-либо из трех упомянутых недостатков — одни в большей мере, другие — в меньшей. И, таким образом, тело будет тем более жидким, чем меньше будет недостаток, которым оно обладает.

Относительно же того, какой недостаток присущ каждой жидкости в этом мире и насколько он велик, можно было бы судить, если бы было исследовано, какие результаты происходят от каждого недостатка, а затем были бы поставлены опыты, из которых стало бы ясно, каким образом и насколько данная жидкость отличается от совершенной.

§ 10. Если бы частицы, образующие жидкость, были совершенно мягкими, то не имело бы значения, каковы они по величине. Ибо поскольку они способны принимать любую форму и их можно представить себе сколь угодно делимыми, то они являются в силу самой природы как бы бесконечно малыми, так как даже самая малая сила, если есть необходимость, может привести их в это состояние. Итак, поскольку величина молекул совершенно жидкого тела не принимается в соображение, то вся масса жидкости, если это совершенная жидкость, является не чем иным, как совершенно мягким телом. Но если наименьшие частицы не были бы совершенно мягкими, а оказывали бы сопротивление силе, пытающейся придать им иную форму, то тогда непременно следовало бы обратить внимание на величину этих частиц, особенно в случае, когда жидкость заключена в очень узкие сосуды.

§ 11. Природа же совершенно мягкого тела такова, что оно до тех пор уступает силе, оказывающей давление, пока не выходит из-под ее воздействия. Не следует, однако, так его себе представлять, будто оно в одно мгновение полностью уступает воздействующей силе. Время это зависит от величины силы и массы совершенно мягкого тела и может быть вычислено, если они будут заданы. И ни на что другое не затрачивается сила, действующая на совершенно мягкое тело, кроме как на придание движения уступающему телу, ибо в зависимости от данной силы, действующей в течение данного времени на данное тело, должно возникнуть некоторое определенное количество движения для преодоления силы инерции. А если тело будет не совершенно мягким, то, кроме силы инерции, присутствует еще и другая причина, которая противостоит силе, и поэтому тело с трудом изменяет свою форму. Такова упругая сила, которой тело может обладать, чтобы приводить себя в прежнее состояние.

§ 12. Поскольку совершенно жидкое тело состоит из частиц совершенно мягких и образовано таким образом, что эти частицы не соединены друг с другом, у меня возникла мысль, не являются ли также и мельчайшие частицы не совершенно мягкого тела совершенно мягкими, а эти тела не отличаются ли от совершенно мягких только характером соединения частиц. Это мнение, по-видимому, подтверждается тем обстоятельством, что все тела, если я не ошибаюсь, либо силой огня, либо силой растворителей могут быть приведены в жидкое состояние. Огонь же и растворители не изменяют самих частиц, из которых состоят тела, но изменяют только характер их сочетания.

Отсюда, по-видимому, следует, что частицы всех тел — совершенно мягкие, различие же заключается в характере сочетания частиц. Тела тем более подобны жидкостям, чем менее их частицы соединены между собой, и тем более тверды, чем сильнее их частицы взаимно связаны. А каким образом частицы между собой связаны — это мне еще не вполне ясно. Но кажется, что у различных тел характер связи частей различен, так как для превращения в жидкость разных тел необходимы разные средства. Превращаются же твердые тела в жидкость в силу того, что уничтожаются узы, которые связывали их части. Итак, поскольку средства превращения твердого тела в жидкость различны, различен, по-видимому, и способ сочетания или связи.

§ 13. Я не сомневаюсь, что исходя из вышесказанного здесь предположения относительно строения тел можно вывести многое, относящееся к природе тел. Но все это должно быть далее проверено путем постановки опытов, так чтобы стало ясно, соответствует ли это истине или не соответствует. Таким образом будет выявлено и станет очевидным, верна эта теория или нет.

РАССУЖДЕНИЕ О ДВИЖЕНИИ ТЕЛ В ЖИДКОСТЯХ БЕЗ УЧЕТА КАКОЙ-ЛИБО ТЯЖЕСТИ

§ I. Движущееся в жидкости тело постоянно ударяет по частицам жидкости и должно их раздвигать, чтобы ему был открыт проход. Итак, благодаря этому столкновению и сообщению частицам жидкости движения, тело обязательно должно терять некоторую часть своей скорости, и, следовательно, его движение должно убывать. С другой стороны, если тело находится в состоянии покоя или движется медленнее, а жидкость настигает его быстрее, то частицы жидкости толкают тело и ускоряют его движение, пока тело движется медленнее, чем жидкость.

§ II. Итак, поскольку это сопротивление зависит от столкновения тела с частицами жидкости, то оно может быть определено с помощью правил передачи движения. Помимо столкновения, сопротивление другого типа может возникать из-за сцепления и связанности частей жидкости. О сопротивлении последнего типа я не собираюсь здесь говорить, но буду исследовать только то сопротивление, которое возникает в результате столкновения. Для того чтобы применить правила передачи движения, необходимо прежде определить, являются ли последние частицы жидкости упругими или нет?

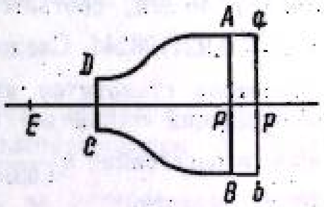
§ III. Поскольку существует много соображений как за, так и против обеих гипотез, я решил исследовать здесь, что вытекает из каждой гипотезы, чтобы затем при помощи опытов можно было бы определить характер мельчайших частиц жидкости.

Для того чтобы не пришлось устанавливать каким-либо иным образом правила передачи движения при столкновении тел, как упругих, так и неупругих, я опишу их здесь, согласно Гюйгенсу. Пусть тело A со скоростью a настигнет тело B, движущееся со скоростью b, и пусть произойдет столкновение. В случае упругих тел скорость тела A после столкновения составляет $\frac{Aa+2Bb-Ba}{A+B}$, а скорость тела B равна $\frac{Bb+2Aa-Ab}{A+B}$. В случае же тел, лишенных какой-либо упругости, скорость обоих тел после столкновения равна $\frac{Aa+Bb}{A+B}$.

§ IV. Следует также учесть и состояние жидкости, т. е. является ли она сжатой или же нет. Если она является сжатой, т. е. если верхние части жидкости оказывают давление на нижние, то мельчайшие частицы нельзя разделить между собой так, чтобы между ними осталось пустое пространство, ибо они обязательно будут постоянно взаимно соприкасаться. В этом случае движущееся тело не сможет сообщить частицам жидкости большей скорости, чем имеет оно само, ибо в противном случае между частицами жидкости и телом должно было бы остаться пустое

пространство, что не может произойти в силу сжатия. Если жидкость не будет сжатой, то она будет безразлична и не будет ни способствовать, ни препятствовать образованию пустого пространства.

§ V. Итак, возможны четыре разных случая в соответствии с этими двумя особенностями жидкостей. Во-первых, ведь можно представить себе жидкость несжатой и неупругой; во-вторых, сжатой, но не упругой; в-третьих, несжатой, но упругой; и, в-четвертых, жидкость может быть одновременно и упругой и сжатой. Это различие жидкостей, по моему мнению, правильно учел и прекрасно применил Ньютон в своих «Началах» для объяснения движения твердых тел в жидкостях. Вся разница, обуславливаемая различным строением жидкости как в отношении сжатия, так и в отношении упругости, заключается только в числовых коэффициентах, так что там, где в одном случае найдем двойной коэффициент, в другом случае находится ординарный или вчетверо больший.



§ VI. Я начну с жидкости несжатой и неупругой. Пусть в такого рода жидкости движется тело, и поверхность, которой оно ударяет по жидкости, — плоская. Пусть $ABCD$ будет движущимся телом (см. рисунок), AB — его поверхностью, которой оно ударяет по жидкости. Пусть оно начнет движение в точке E со скоростью, которая возникает при падении с высоты k, и придет в точку P. Пусть $PE=x$; поверхность AB равна bb, объем тела равен abb и плотность его так относится к плотности жидкости, как $m:n$. Пусть тело должно пройти элемент $Pp=dx$, для этого оно обязательно должно сдвинуть элемент воды $ABba$.

§ VII. Так как мы исходим из того, что жидкость лишена какой-либо упругости и находится в состоянии покоя, то после столкновения жидкость и тело будут иметь одинаковую скорость. Для того чтобы было можно применить правила передачи движения, положим, что движущееся тело есть A и оно, таким образом, равно $abbm$; скорость его будет такой, которая достигается из высоты v. Тогда $a=\sqrt{v}$. Телом B будет элемент жидкости $ABba$; таким образом, $B=bbndx$, а скорость его равна нулю. Следовательно, скорость обоих тел после столкновения составляет $\frac{abbm\sqrt{v}}{abbm+bbndx}=\frac{am\sqrt{v}}{am+ndx}$. Но скорость тела до столкновения была равна $\sqrt{v}$; таким образом, оно теряет от своей скорости $\frac{ndx\sqrt{v}}{am+ndx}$. Следовательно, этому будет равен дифференциал самой скорости $\sqrt{v}$, т. е. $\frac{dv}{2\sqrt{v}}$. Отсюда получается уравнение

$$-\frac{ndx\sqrt{v}}{am}=\frac{dv}{2\sqrt{v}}.$$

§ VIII. Если это уравнение упростить, то оно преобразуется к виду $-2nvdx=madv$. Таким образом, $-2ndx=\frac{madv}{v}$, интегралом будет уравнение $2nx=A-ma\lg v$. Постоянную A определим из того, что v должно обращаться в k при $x=0$, соответственно $A=ma\lg k$. Поэтому возникает уравнение $2nx=ma\lg k-ma\lg v$; из него можно определить путь x, который должен быть пройден, чтобы тело имело данную ско-
рость, если вместо $\lg k$ и $\lg v$ взять гиперболические логарифмы.

§ IX. Поскольку сферическая поверхность испытывает лишь половину того сопротивления, которое испытывает ее наибольший круг,* то, если bb будет наибольшим кругом и abb выразит объем шара, надо будет вместо a подставить $2a$. Тогда движение шара выразится уравнением $nx = ma \lg k - ma \lg v$. Так как a составляет две трети диаметра, то при диаметре, равном c, $a = \frac{2c}{3}$. Соответственно будем иметь уравнение $3nx = 2mc \lg k - 2mc \lg v$. Отсюда ясно, что пути, которые должны пройти в одной и той же жидкости различные шары одинаковой плотности, чтобы потерять подобные части первоначальных скоростей, пропорциональны их диаметрам, и это правильно для всякой среды.

§ X. Если ставится вопрос, сколько своих диаметров должен пройти шар, чтобы потерять половину скорости, то надо положить $\sqrt{v} = \frac{1}{2}\sqrt{k}$. Значит $4v = k$, соответственно $3nx = 2mc \lg 4 = 2mc \cdot 1.386294361$, или $x = \frac{mc}{n} 0.924196241$. Следовательно, если дано отношение n к m, то число диаметров становится известным. Пусть $n = m$; соответственно шар, обладающий такой же плотностью, как и жидкость, должен будет пройти расстояние в $\frac{924\,196\,241}{1\,000\,000\,000}$ части диаметра, чтобы потерять половину скорости.

§ XI. По данному расстоянию x скорость, или v, можно найти следующим образом. Перейдя от логарифмов к числам, получим уравнение $e^{\frac{2nx}{ma}} = \frac{k}{v}$. Соответственно $v = \frac{k}{e^{\frac{2nx}{ma}}}$, где e обозначает число, гиперболический логарифм которого равен 1. Следовательно, $e = 2.7182818$. Таким образом можно найти v с помощью логарифмов. Применим это к шарам, и тогда $a = \frac{4c}{3}$, соответственно $v = \frac{k}{e^{\frac{3nx}{2mc}}}$. Пусть $m = n$ и $x = 6c$, тогда $v = \frac{k}{e^9} = \frac{k}{8103}$; итак, при этом будет сохранена девяностая часть скорости.

§ XII. Иным способом можно выразить скорость v с помощью ряда, а именно

$$v = k - \frac{2nk}{1 \cdot ma} x + \frac{4n^2k}{1 \cdot 2 \cdot m^2a^2} x^2 - \frac{8n^3k}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot m^3a^3} x^3 + \frac{16n^4k}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot m^4a^4} x^4 - \ldots$$

Подставив $\frac{4c}{3}$ вместо a, чтобы ряд был применим к шарам, найдем

$$v = k\left(1 - \frac{3nx}{2^1 \cdot 1 \cdot mc} + \frac{9n^2x^2}{2^2 \cdot 1 \cdot 2 \cdot m^2c^2} - \frac{3^3n^3x^3}{2^3 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot m^3c^3} + \right.$$
$$\left. + \frac{3^4n^4x^4}{2^4 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot m^4c^4} \ldots\right).$$

* См. предложение XXXIV книги II «Начал» Ньютона (1726). — *Г. М.*

Этот ряд оказывается расходящимся всегда, когда nx больше mc, и в этих случаях он не может быть использован.

§ XIII. Но надо определить времена, за которые либо теряются данные степени скорости, либо проходятся данные расстояния. Элемент времени, интеграл которого отыскивается, есть $\frac{dx}{\sqrt{v}}$. В § VII было найдено уравнение $\frac{-ndx\sqrt{v}}{am} = \frac{dv}{2\sqrt{v}}$, соответственно $\frac{dx}{\sqrt{v}} = \frac{-amdv}{2nv\sqrt{v}}$. Соответственно $\int \frac{dx}{\sqrt{v}} = \frac{am}{n\sqrt{v}} - \frac{am}{n\sqrt{k}}$. Следовательно, время, за которое тело приобретает скорость $\sqrt{v}$, пропорционально $\frac{am}{n}\left(\frac{\sqrt{k} - \sqrt{v}}{\sqrt{vk}}\right)$. Если разделить эту величину на 250, а k, v и a выразить в тысячных долях рейнского фута, то время будет выражено в секундах, так что, следовательно, оно составит $\frac{am}{250n}\left(\frac{\sqrt{k} - \sqrt{v}}{\sqrt{vk}}\right)$ секунд.

§ XIV. Время, за которое шарообразное тело диаметра c теряет от своей скорости $\sqrt{k}$ столько, что его скорость становится $\sqrt{v}$, будет $\frac{mc}{187n}\left(\frac{\sqrt{k} - \sqrt{v}}{\sqrt{vk}}\right)$ секунд. Следовательно, время, за которое шар теряет половину скорости, равно $\frac{mc}{187n\sqrt{k}}$ секунд. Времена, за которые шары одинаковой плотности в одной и той же жидкости теряют сходные степени скорости, прямо пропорциональны диаметрам и обратно пропорциональны начальным скоростям. Время вообще может быть определено через пути x. Так как $v = \frac{k}{e^{\frac{2nx}{ma}}}$, а следовательно, $\sqrt{v} = \frac{\sqrt{k}}{e^{\frac{nx}{ma}}}$, то, подставив эту величину вместо $\sqrt{v}$, получим время, за которое проходится путь x; оно равно $\frac{ma}{250n}\frac{e^{\frac{nx}{ma}} - 1}{\sqrt{k}}$ секунд, а для шаров — $\frac{mc}{187n\sqrt{k}} \times \left(e^{\frac{3nx}{4mc}} - 1\right)$ секунд.

§ XV. Так как частицы жидкости здесь считаются лишенными какой-либо упругости, то тело не придает частицам жидкости большей скорости, чем оно само имеет. Соответственно вследствие движения тела никогда не может возникнуть пустоты между частицами. В силу этого движение останется таким же, если жидкость будет сжатой, ибо вследствие сжатия должна устраняться только смежность частиц. Поэтому то, что было сказано о движении тел в неупругих жидкостях, в равной мере применимо к жидкости сжатой и несжатой.

§ XVI. Перехожу к движению тел в упругих жидкостях, т. е. в жидкостях, состоящих из мельчайших совершенно упругих частиц. Сначала я буду рассматривать жидкость как несжатую, движение в которой будет таким, которое может быть выведено из правил передачи движения при столкновении совершенно твердых тел. Итак, оставим те же обозначения, что и прежде, а именно, пусть высота, порождающая первоначальную скорость, будет k, плоскость, ударяющая по жидкости, — bb, объем тела — abb и плотность тела относится к плотности жидкости, как $m:n$; пусть пройденный путь будет x и скорость в конце пути x такова, какая может быть получена из высоты v.

§ XVII. Пока тело стремится пройти элемент $Pp = dx$, происходит столкновение со слоем воды $ABba$. Уменьшение скорости на этом пути, поскольку вся скорость равна $\sqrt{v}$, составит $\frac{-dv}{2\sqrt{v}}$. То же самое получается из правил передачи движения следующим образом. Тело A представляет здесь масса тела $ambb$, и его скорость выражает $\sqrt{v}$. Далее, тело B выражается слоем жидкости, который равен $nbbdx$ и рассматривается как находящийся в покое. Следовательно, скорость тела после столкновения составит $\frac{ambb\sqrt{v} - nbbdx\sqrt{v}}{ambb + nbbdx}$, и скорость слоя жидкости будет $\frac{2ambb\sqrt{v}}{ambb+nbbdx} = 2\sqrt{v}$, так что этот слой продвигается вперед со скоростью, в два раза превосходящей ту, которую имеет тело. Уменьшение скорости тела составляет $\frac{2nbbdx\sqrt{v}}{ambb} = \frac{2ndx\sqrt{v}}{ma}$, что должно быть равно выражению $\frac{-dv}{2\sqrt{v}}$. Поэтому образуется уравнение

$$\frac{2ndx\sqrt{v}}{ma} = \frac{-dv}{2\sqrt{v}}.$$

§ XVIII. Это уравнение переходит в $4ndx = \frac{-madv}{v}$, которое отличается от предыдущего (§ VIII), найденного для движения тела в неупругой жидкости только тем, что там имелось $2ndx$, а здесь $4ndx$. Таким образом, то, что было там выведено, может быть применено к этому движению, если всюду подставить $\frac{a}{2}$ вместо a или $2n$ вместо n. Я не буду более подробно на этом останавливаться.

§ XIX. Так как при этом столкновении тела с жидкостью частицам жидкости сообщается вдвое большая скорость, то отсюда с необходимостью вытекает, что между телом и жидкостью после столкновения должна остаться пустота; ведь жидкость удаляется вдвое скорее, чем движется тело. Следовательно, движение, найденное для жидкости упругой, но не сжатой, отнюдь не соответствует движению в жидкости упругой и сжатой. Ведь такая жидкость никогда не может допустить пустоты. Поэтому тело должно сообщать частицам жидкости не бо́льшую скорость, а как раз равную той, которую оно само имеет. К этому следует добавить, как то вытекает из природы упругости частиц, что количество живой силы не изменяется при столкновении.

§ XX. Итак, пусть z представляет высоту, порождающую скорость, которую тело сохраняет после столкновения и сообщает элементу жидкости $nbbdx$. Следовательно, поскольку общая сумма живых сил должна остаться при столкновении неизменной, получим уравнение $mabbv = mabbz + nbbzdx$, так что $z = \frac{mav}{ma+ndx}$. Соответственно уменьшение живой силы тела пропорционально $v - z$, т. е. $\frac{nvdx}{ma+ndx} = \frac{nvdx}{ma}$, что должно быть равно элементу высоты v. Ведь если тело остается неизменным, то живые силы пропорциональны высотам, порождающим скорости. Следовательно, будем иметь уравнение $\frac{nvdx}{ma} = -dv$.

§ XXI. Поэтому получим уравнение $ndx = \frac{-madv}{v}$, относительно которого следует заметить, что оно отличается от предыдущего, найденного для движения в упругой и несжатой среде, тем, что там было $4ndx$, а здесь ndx с коэффициентом единица. Следовательно, оно отличается от уравнения, выражающего движение в неупругой среде, тем, что там было $2ndx$, а здесь просто ndx. Таким образом, уравнение, определяющее движение в неупругой среде, занимает среднее место между уравнениями, определяющими движение в сжатых и несжатых упругих жидкостях.

§ XXII. Итак, чтобы можно было применить везде то, что мы намереваемся отсюда вывести, возьмем уравнение $indx = \frac{-madv}{v}$, в котором i может обозначать либо 1, либо 2, либо 4. Если $i = 1$, то это уравнение будет справедливо для упругой сжатой жидкости, если $i = 2$ — для жидкости неупругой, а если $i = 4$, то получим уравнение, определяющее движение в упругой и несжатой жидкости.

РАССУЖДЕНИЕ О ПРЯМОЛИНЕЙНОМ ПОДЪЕМЕ И СПУСКЕ ТЕЛ В ЖИДКОСТЯХ

§ I. Описав движение тел в жидкостях без учета их тяжести,* я перехожу к рассмотрению движения тел в жидкостях с учетом тяжести и в этом рассуждении раскрою простейший случай, при котором тела поднимаются или опускаются по прямой. По отношению к жидкостям я буду придерживаться тех же разграничений, которые делал раньше, а именно делить их на сжатые и несжатые, упругие и неупругие. При этом я буду стремиться к тому, чтобы из опытов, произведенных в данных жидкостях, можно было сделать вывод относительно строения жидкости: являются ли ее частицы упругими или нет. Что касается другого разграничения — состояния сжатия, — то все жидкости будут рассматриваться как сжатые вследствие тяжести, с которой верхние частицы действуют на нижние, и, таким образом, случай, при котором i равняется 4, должен быть отсюда исключен.


P

p

§ II. Опускаясь в жидкости, тело постоянно испытывает действия тяжести, под влиянием которых скорость увеличивается, а под влиянием сопротивления жидкости скорость тела уменьшается. Поэтому об истинном приращении скорости следует судить из сопоставления того приращения и этого уменьшения. Если приращение от тяжести равно уменьшению от сопротивления, скорость не получит никакого приращения, и поэтому движение будет равномерным. Поскольку величина сопротивления зависит от скорости, будет иметься некоторая степень скорости, которая, если она будет вначале придана телу, приведет к тому, что тело будет опускаться равномерным движением. Если же телу будет придана меньшая начальная скорость или никакой, то тело будет опускаться ускоренным движением, если же бо́льшая — то замедленным движением.

§ III. Начну с равномерного движения и исследую ту степень скорости, при которой движущееся тело опускается в данной жидкости равномерным движением. Пусть, как и в предыдущем рассуждении, плоскость, которой тело вторгается в жидкость, равна bb, объем тела равен abb, его удельный вес пропорционален m, а удельный вес жидкости пропорционален n. Пусть искомая скорость такова, какая может быть достигнута из высоты q. Пусть тело придет в P и за мгновение продвинется в p (см. рисунок). Для того чтобы это движение было равномерным, приращение скорости вдоль Pp, происходящее от тяжести, должно быть равно уменьшению, производимому сопротивлением.

§ IV. Если бы не было никакого сопротивления, тело получило бы на Pp приращение скорости, при котором в p его скорость была бы такова, какая

* См. предыдущее сочинение, стр. 516—521. — *Г. М.*

может быть достигнута из высоты $q+Pp$, или, обозначая $Pp=dx$, из высоты $q+dx$, так что dx было бы элементом высоты, порождающей скорость. Если бы тяжесть исчезла и действовало одно сопротивление, то уменьшение высоты, производящей скорость, вдоль Pp было бы (§ XXII предыдущего «Рассуждения»)* равно $\frac{inqdx}{ma}$, если положить q вместо v. При совместном же действии тяжести и сопротивления для возникновения равномерного движения было бы необходимо, чтобы $\frac{inqdx}{ma}=dx$, соответственно $q=\frac{ma}{in}$. Для шаров, если положить диаметр равным c, было бы $q=\frac{4mc}{3in}$.

§ V. Дело обстояло бы так, если бы тела имели в жидкостях такую же тяжесть, как и в пустоте. Но поскольку дело обстоит иначе, надо будет принять во внимание то, что погруженное в жидкость тело, как известно из гидростатики, стремится вниз с такой силой, которая относится к тяжести в пустоте, как избыток плотности тела над плотностью жидкости относится к плотности тела.

. . . .

§ XXIII. Для того чтобы по данному времени можно было определить высоту, с которой тело за это время упало, следует найти выражение для x через t и заданные величины. Итак, возьмем уравнение, найденное в § XIX,

$$t=\frac{m\sqrt{a}}{125\sqrt{(m-n)in}}\left[\lg\left(\sqrt{(m-n)a}-\sqrt{ink}\right)-\right.$$
$$\left.-\lg\left(\sqrt{(m-n)ae^{\frac{inx}{ma}}}-\sqrt{ink+(m-n)a\left(e^{\frac{inx}{ma}}-1\right)}\right)\right].$$

Положим

$$\frac{125t\sqrt{(m-n)in}}{m\sqrt{a}}=z$$

и, перейдя от логарифмов к числам, получим уравнение

$$e^{z}=\frac{\sqrt{(m-n)a}-\sqrt{ink}}{\sqrt{(m-n)ae^{\frac{inx}{ma}}}-\sqrt{ink+(m-n)a\left(e^{\frac{inx}{ma}}-1\right)}}.$$

Если это уравнение будет приведено к такому виду, что $e^{\frac{inx}{ma}}$ останется только в одном члене и затем будут опять взяты логарифмы, то найдем уравнение

$$x=\frac{2ma}{in}\lg\{(m-n)a+ink-2\sqrt{(m-n)aink}-e^{2z}[ink-a(m-n)]\}-$$
$$-\frac{2ma}{in}\lg\left(\sqrt{(m-n)a}-\sqrt{ink}\right)-\frac{2ma}{in}\lg 2-\frac{2ma}{in}\lg\sqrt{(m-n)a}-\frac{250t\sqrt{(m-n)a}}{\sqrt{in}}.$$

* См. стр. 521. — *Г. М.*

§ XXIV. Если бы это надо было применить к шарам, то

$$z=\frac{125t\sqrt{3in\,(m-n)}}{2m\sqrt{c}}.$$

Следовательно,

$$x=\frac{8mc}{3in}\lg\{4(m-n)c+3ink-4\sqrt{3cink\,(m-n)}-e^{2z}[3ink-4c(m-n)]\}-$$
$$-\frac{8mc}{3in}\lg\left(2\sqrt{3c\,(m-n)}-3\sqrt{ink}\right)-\frac{8mc}{3in}\lg 2-$$
$$-\frac{8mc}{3in}\lg\sqrt{\frac{(m-n)\,4c}{3}}-\frac{500t\sqrt{(m-n)\,c}}{\sqrt{3in}}.$$

Из этих уравнений, если k, a и c будут выражены в тысячных частях рейнского фута и t в секундах, найдем x в тысячных частях рейнского фута. Последнее уравнение при дальнейшем преобразовании дает

$$x=\frac{8mc}{3in}\lg\{4c(m-n)+3ink-4\sqrt{3inkc\,(m-n)}-e^{2z}[3ink-4c(m-n)]\}-$$
$$-\frac{8mc}{3in}\lg\left(2\sqrt{c\,(m-n)}-\sqrt{3ink}\right)-\frac{8mc}{3in}\lg 2\sqrt{(m-n)\,c}-$$
$$-\frac{8mc}{3in}\lg 2-\frac{500t\sqrt{(m-n)\,c}}{\sqrt{3in}},$$

причем эти логарифмы должны быть взяты из таблиц гиперболических логарифмов.

§ XXV. Если спуск произойдет из состояния покоя, то $k=0$, соответственно

$$x=\frac{2ma}{in}\lg\left(e^{2z}+1\right)-\frac{2ma}{in}\lg 2-\frac{250t\sqrt{(m-n)\,a}}{\sqrt{in}}\ \text{скрупулов рейнского фута.}$$

Для шаров будет уравнение

$$x=\frac{8mc}{3in}\lg\left(e^{2z}+1\right)-\frac{8mc}{3in}\lg 2-\frac{500t\sqrt{(m-n)\,c}}{\sqrt{3in}}.$$

Но здесь $z=\dfrac{125t\sqrt{3in\,(m-n)}}{2m\sqrt{c}}$, и эту величину следует подставить в показатель e^{2z}. А e обозначает, как и выше, число, логарифм которого равен 1; это число равно 2.7182818.

§ XXVI. Если мы примем высоту такой, чтобы конечная скорость совпадала с наибольшей скоростью, которую только можно достичь, или с той скоростью, с которой тело опускается в равномерном движении, то в $e^{2z}+1$ единица исчезнет в сравнении с e^{2z}, так что будем иметь

$$\lg e^{2z}=2z=\frac{250t\sqrt{(m-n)\,in}}{m\sqrt{a}},$$

откуда найдем уравнение

$$x=\frac{250t\sqrt{(m-n)\,a}}{\sqrt{in}}-\frac{2ma}{in}\lg 2=\frac{250t\sqrt{(m-n)\,a}}{\sqrt{in}}-\frac{ma}{in}\cdot 1.38629436.$$

Для шара диаметром c скрупулов будем иметь

$$x=\frac{500t\sqrt{(m-n)\,c}}{\sqrt{3in}}-\frac{mc}{in}\cdot 1.84839248.$$

§ XXVII. Высота выражается указанным выше образом, если $k=0$, т. е. если движение начинается из состояния покоя. Если же будет какая-нибудь начальная скорость, мы получим уравнение

$$x=\frac{250t\sqrt{(m-n)\,a}}{\sqrt{in}}-\frac{2ma}{in}\left[\lg\sqrt{(m-n)\,a}-\lg\left(\sqrt{(m-n)\,a}+\sqrt{ink}\right)+\lg 2\right]$$

и для шаров, в скрупулах,

$$x=\frac{500t\sqrt{(m-n)\,c}}{\sqrt{3in}}-\frac{8mc}{3in}\left[\lg 2\sqrt{(m-n)\,c}-\lg\left(2\sqrt{(m-n)\,c}+\sqrt{3ink}\right)+\lg 2\right].$$

Отсюда по данному времени можно будет легко найти высоту.

§ XXVIII. Изложив прямолинейный спуск, перехожу к объяснению прямолинейного подъема. Это объяснение можно, однако, без труда получить из сказанного выше, произведя лишь небольшие изменения. Тогда как раньше сила тяжести и сила сопротивления были противоположны, теперь они имеют одно направление. Поэтому в основном уравнении, найденном в § IX, $dv=\dfrac{(m-n)\,dx}{m}-\dfrac{invdx}{ma}$ вместо $+\dfrac{(m-n)\,dx}{m}$ в нашем случае надо подставить $\dfrac{(-m+n)\,dx}{m}$, поскольку сила тяжести замедляет движение. Итак,

$$dv=\frac{-dx\,(m-n)}{m}-\frac{invdx}{ma},\ \text{или}\ dx=\frac{-madv}{(m-n)\,a+inv}.$$

Соответственно

$$x=A-\frac{ma}{in}\lg[(m-n)\,a+inv].$$

§ XXIX. Определив постоянную A из условия, что поднимающееся тело имеет начальную скорость, полученную из высоты k, найдем

$$x=\frac{ma}{in}\lg\frac{ma-na+ink}{ma-na+inv}.$$

Отсюда можно найти, до каких пор тело будет подниматься. Пусть $v=0$, тогда эта высота

$$x=\frac{ma}{in}\lg\frac{ma-na+ink}{ma-na}.$$

Для шаров

$$x=\frac{4mc}{3in}\lg\frac{4mc-4nc+3ink}{4mc-4nc+3inv},$$

и, в частности, та высота, которую тело может достигнуть, равна

$$\frac{4mc}{3in}\lg\frac{4mc-4nc+3ink}{4mc-4nc}.$$

§ XXX. Для того чтобы по данной высоте x найти высоту, соответствующую скорости v, возьмем уравнение

$$\frac{inx}{ma}+\lg(ma-na+inv)=\lg(ma-na+ink).$$

Перейдя от логарифмов к числам, получим

$$ma-na+inv=\frac{ma-na+ink}{e^{\frac{inx}{ma}}},$$

соответственно

$$v=\frac{ma-na+ink}{ine^{\frac{inx}{ma}}}+\frac{-ma+na}{in}=\frac{ink-e^{\frac{inx}{ma}}(ma-na)+ma-na}{ine^{\frac{inx}{ma}}}=$$

$$=\frac{ink-a(m-n)\left(e^{\frac{inx}{ma}}-1\right)}{ine^{\frac{inx}{ma}}}.$$

Следовательно, для шаров

$$v=\frac{3ink-4c(m-n)\left(e^{\frac{3inx}{4mc}}-1\right)}{3ine^{\frac{3inx}{4mc}}}.$$

§ XXXI. Элемент времени составляет

$$\frac{dx}{\sqrt{v}}=\frac{-madv}{[(m-n)a+inv]\sqrt{v}}.$$

Для интегрирования положим, что $\sqrt{v}=s$; тогда $v=ss$ и $dv=2sds$, откуда

$$\frac{dx}{\sqrt{v}}=\frac{-2mads}{(m-n)a+inss}=\frac{-2ma}{in}\,\frac{ds}{\frac{(m-n)a}{in}+ss}.$$

Интегрирование этого элемента зависит, следовательно, от квадратуры круга. Если положить $\frac{(m-n)a}{in}=ff$, то $\int\frac{ffds}{ff+ss}$ будет дугой круга, радиус которой равен f и тангенс — s. Обозначив эту дугу через P, получим

$$dt=\frac{dx}{\sqrt{v}}=\frac{-2ma}{inff}\,\frac{ffds}{ff+ss}=\frac{-2m}{m-n}dP.$$

Совершив интегрирование, получим $t=A-\frac{2mP}{m-n}$. Обозначим ту дугу круга, радиус которой остается f, а тангенс равен $\sqrt{k}$, через B, тогда $t=\frac{2mB-2mP}{m-n}$. Если надо узнать время в секундах, то $t=\frac{mB-mP}{125(m-n)}$ секунд. Расстояния же должны быть выражены в скрупулах рейнского фута.

§ XXXII. Для использования этого уравнения необходимо добиться того, чтобы можно было довести дело до конца с помощью обычных таблиц тангенсов. Итак, пусть радиус круга равен 1. Возьмем в таблицах тангенс, равный $\frac{\sqrt{k}}{f}$, и будем искать соответствующий угол, число градусов которого пусть будет N, тогда $B=\frac{6283fN}{360\,000}$. Подобным же образом найдем угол, соответствующий тангенсу $\frac{\sqrt{v}}{f}$, и назовем число его градусов V, тогда $P=\frac{6283fV}{360\,000}$. Соответственно получим уравнение

$$t=\frac{m}{125(m-n)}\,\frac{6283fN-6283fV}{360\,000}=\frac{6283mf}{45\,000\,000(m-n)}(N-V)\text{ секунд.}$$

Если надо узнать время для шаров, то вместо a в выражение для f следует подставить $\frac{4c}{3}$, так что $f=2\sqrt{\frac{(m-n)c}{3in}}$, где c обозначает диаметр круга в скрупулах рейнского фута.

§ XXXIII. Время всего подъема, до тех пор пока движение совершенно не прекратится, получим, положив $v=0$, а также и $V=0$. Таким образом, искомое время равно

$$\frac{6283mfN}{45\,000\,000(m-n)}=\frac{mfN}{7162(m-n)}\text{ секунд.}$$

Поскольку N является числом градусов угла, тангенс которого равен $\frac{\sqrt{k}}{f}=\frac{\sqrt{ink}}{\sqrt{(m-n)a}}$, то ясно, что если высота k будет такова, что величина $\sqrt{\frac{ink}{(m-n)a}}$ может быть принята за бесконечную в сравнении с единицей, то угол N в этом случае не будет отличаться от прямого, так что без сколько-нибудь существенной ошибки вместо N можно подставить 90, и в этих случаях время всего подъема составит

$$\frac{6283mf}{500\,000\,(m-n)} = \frac{6283m\sqrt{a}}{500\,000\sqrt{in}\,(m-n)} \text{ секунд.}$$

В этом выражении скорость не входит в расчет, откуда следует заключить, что если начальные скорости таковы, что без сколько-нибудь существенной ошибки величина $\frac{ink}{(m-n)a}$ может быть принята за бесконечную в сравнении с самим i, то времена подъемов ощутительно не меняются, какой бы ни была начальная скорость, превосходящая указанный предел.

§ XXXIV. Итак, если из бомбард с наибольшей силой выстреливаются в воздухе вертикально вверх железные шары, посмотрим, будет ли скорость, с которой они выходят, такова, чтобы $\sqrt{\frac{ink}{(m-n)a}}$ можно было принять за тангенс 90°. В опыте наблюдалось, что железный шар диаметром приблизительно в 250 скрупулов, выброшенный вверх с наибольшей силой, падает по прошествии 45 секунд,* откуда можно сделать заключение, что он был выпущен со скоростью, достигаемой по меньшей мере с высоты 5000 футов, так что, следовательно, $k:c=20\,000:1$. Удельные веса железа и воздуха относятся, как 7000 : 1, откуда

$$\sqrt{\frac{3ink}{4(m-n)c}} = \sqrt{\frac{60\,000i}{28\,000}} = \sqrt{\frac{15i}{7}}.$$

А из опытов я нашел, что $i=1$, так что эта высота составляет приблизительно 3/2. Дуга такого тангенса никак не может считаться за 90°.

§ XXXV. Следовательно, для бомбард никак нельзя принять последнее из найденных уравнений, а нужно использовать то уравнение, в которое входит N, и определять для каждого случая N — число градусов дуги, соответствующей тангенсу $\frac{\sqrt{k}}{f}$, где $f=2\sqrt{\frac{(m-n)c}{3in}}$, и время подъема будет равно $\frac{mfN}{7162\,(m-n)}$ секунд.

А если шары с такой силой выбрасываются вверх в воде или в другой более тяжелой жидкости, всюду вместо N можно подставить 90, и время, необходимое шару для подъема, будет равно $\frac{12566m\sqrt{c}}{500\,000\sqrt{3in}\,(m-n)}$ секунд. Ведь поскольку удельный вес железа относится к удельному весу воды, приблизительно как 8 : 1, и если $k=1000c$, то, по крайней мере, $\sqrt{\frac{3ink}{4c\,(m-n)}} = \sqrt{\frac{3000}{28}} = 10$, и соответствующая дуга содержит более чем 89°.

§ XXXVI. Но чаще оказывается необходимым либо по данному времени определить высоту, которую описало тело, либо по данной высоте определить время. Итак, вместо высоты, производящей началь-

* См. опыты, описанные в сочинении Л. Эйлера Е. 853 «Meditatio in experimenta explosione tormentorum nuper instituta» (Opera omnia, II-14). — Г. М.

ную скорость, я введу в расчет высоту, которую достигает тело, и назову ее q. Тогда, согласно § XXIX,

$$q = \frac{ma}{in}\lg\frac{(m-n)a+ink}{ma-na},$$

откуда

$$k = \frac{a\,(m-n)}{in}\left(e^{\frac{inq}{ma}}-1\right).$$

Следовательно,

$$\frac{\sqrt{k}}{f} = \sqrt{e^{\frac{inq}{ma}}-1}.$$

Если мы имеем это число, то найдем в таблицах дугу, соответствующую этому числу, рассматриваемому как тангенс, и если мы назовем через N число ее градусов, то время

$$t = \frac{mN\sqrt{(m-n)a}}{7162\,(m-n)\sqrt{in}} = \frac{mN\sqrt{a}}{7162\sqrt{in\,(m-n)}} \text{ секунд.}$$

Для шаров тангенс равен $\sqrt{e^{\frac{3inq}{4mc}}-1}$ и время

$$t = \frac{mN\sqrt{c}}{3581\sqrt{3in\,(m-n)}} \text{ секунд.}$$

§ XXXVII. Для того чтобы по данному времени отыскать высоту q, найдем $\frac{7162t\sqrt{in\,(m-n)}}{m\sqrt{a}}$, и пусть это число обозначит градусы круга; соответствующий тангенс назовем T. Тогда

$$T = \sqrt{e^{\frac{inq}{ma}}-1},$$

соответственно

$$\lg(TT+1) = \frac{inq}{ma}.$$

Соответственно

$$q = \frac{ma}{in}\lg(TT+1).$$

Для шаров T обозначает тангенс дуги, число градусов которой равно $\frac{3581t\sqrt{3in\,(m-n)}}{m\sqrt{c}}$ и

$$q = \frac{4mc}{3in}\lg(TT+1) \text{ скрупулов.}$$

Вместо тангенса T надо подставлять число, которое соответствовало бы ему, если бы радиус был равен 1.

§ XXXVIII. Если рассматривается сразу подъем и спуск и по всему времени надо определить высоту, либо по высоте — время подъема и спуска, то это достигается следующим образом.

Что касается последнего — определения времени подъема и спуска по данной высоте, — то это время можно будет определить, если сложить времена, найденные в §§ XX и XXXVI, в одну сумму, в результате чего мы получим сразу время подъема и спуска. Если мы обозначим это время через t, то

$$t=\frac{mN\sqrt{a}}{7162\sqrt{in(m-n)}}-\frac{m\sqrt{a}}{125\sqrt{in(m-n)}}\lg\left(\sqrt{e^{\frac{inq}{ma}}}-\sqrt{e^{\frac{inq}{ma}}-1}\right)=$$

$$=\frac{m\sqrt{a}}{895\,300\sqrt{in(m-n)}}\left[125N-7162\lg\left(\sqrt{e^{\frac{inq}{ma}}}-\sqrt{e^{\frac{inq}{ma}}-1}\right)\right] \text{ секунд.}$$

Для шаров найдем

$$t=\frac{m\sqrt{c}}{447\,650\sqrt{3in(m-n)}}\left[125N-7162\lg\left(\sqrt{e^{\frac{3inq}{4mc}}}-\sqrt{e^{\frac{3inq}{4mc}}-1}\right)\right] \text{ секунд.}$$

§ XXXIX. Если высота q такова, что $e^{\frac{inq}{ma}}$ можно принять за число, бесконечно большее чем 1, то $N=90$ и

$$\lg\left(\sqrt{e^{\frac{inq}{ma}}}-\sqrt{e^{\frac{inq}{ma}}-1}\right)=-\frac{inq}{2ma}-\lg 2.$$

Соответственно получим уравнение

$$t=\frac{m\sqrt{a}}{895\,300\sqrt{in(m-n)}}\left(11\,250+\frac{3581inq}{ma}+7162\lg 2\right)=$$

$$=\frac{m\sqrt{a}}{895\,300\sqrt{in(m-n)}}\left(16\,214+\frac{3581inq}{ma}\right) \text{ секунд.}$$

Для шаров

$$t=\frac{m\sqrt{c}}{447\,650\sqrt{3in(m-n)}}\left(16\,214+\frac{2686inq}{mc}\right) \text{ секунд}$$

или приближенно

$$t=\frac{m\sqrt{c}}{166\sqrt{3in(m-n)}}\left(6+\frac{inq}{mc}\right) \text{ секунд.}$$

§ XL. Я не вижу, каким образом можно получить уравнение, представляющее высоту q, из первого более общего уравнения, по той причине, что дуга N тангенса $\sqrt{e^{\frac{inq}{ma}}-1}$ и логарифм — в равной мере трансцендентные величины.

Следовательно, для относящихся сюда примеров значение q не может быть получено иначе, как путем подбора или приближения.

Если бы можно было вместо N написать 90, так чтобы и логарифм был равен нулю, то совершенно ясно, что

$$\frac{3581inq}{ma}+16\,214=\frac{895\,300t\sqrt{in(m-n)}}{m\sqrt{a}}.$$

Соответственно

$$q=\frac{250t\sqrt{a(m-n)}}{\sqrt{in}}-\frac{16\,214ma}{3581in} \text{ скрупулов}$$

и для шаров

$$q=\frac{500t\sqrt{c(m-n)}}{\sqrt{3in}}-\frac{64\,856mc}{10\,743in} \text{ скрупулов,}$$

либо проще

$$q=\frac{500t\sqrt{c(m-n)}}{\sqrt{3in}}-\frac{6mc}{in} \text{ скрупулов.}$$

РАССУЖДЕНИЕ О ДВИЖЕНИИ ТЕЛ ПО КРИВЫМ ЛИНИЯМ В СОПРОТИВЛЯЮЩЕЙСЯ СРЕДЕ

§ I. Пусть тело движется в данной жидкости, плотность которой относится к плотности тела, как n к m, и пусть тело представляет собой цилиндр, движущийся вперед одним из своих оснований и воспринимающий этим основанием сопротивление жидкости. Пусть его высота равна a. Я рассматриваю цилиндр, так как, познав его движение, легко применить теорию к телам другой формы. Пусть тело перемещается по кривой AM и придет в M (рис. 1). Надо будет определить, сколь большое приращение скорости получит тело, пока оно движется по элементу Mm.

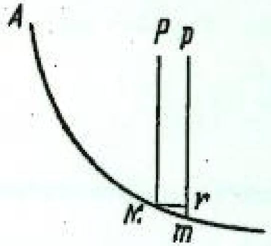


Рис. 1.

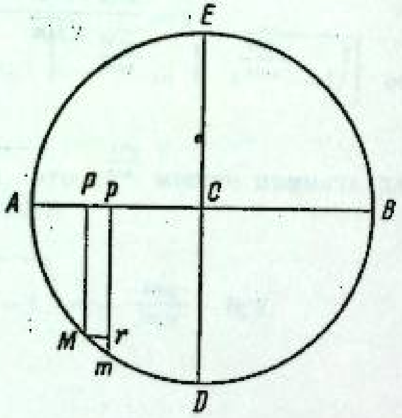


Рис. 2.

§ II. Пусть скорость, которую тело имеет в M, такова, какая может быть достигнута из высоты v. Из точки M и ближайшей к ней точки m возведем вертикали MP и mp, по которым будет определено, насколько опустится тело. Обозначим $Mm=ds$ и из M проведем параллельно горизонту Mr. Обозначим $Mr=dx$ и $rm=dy$. Величина rm выразит, насколько опустилось тело, и ей был бы равен элемент dv, если бы тело не испытывало сопротивления. Пока же тело продвигается в жидкости вдоль элемента Mm со скоростью, которая достигается из высоты v, оно теряет из соответствующей высоты v элемент $\frac{nvds}{ma}$. Но поскольку тело отягощено в жидкости не всем своим весом, то даже если бы жидкость не оказывала сопротивления, все же при спуске вдоль dy было бы $dv=\frac{(m-n)\,dy}{m}$, а при наличии и сопротивления будет

$$dv=\frac{(m-n)\,dy}{m}-\frac{nvds}{ma},$$

или $madv+nvds=(m-n)\,ady$.

§ III. Найденное уравнение может быть использовано двояким образом: либо из данного уравнения кривой может быть определен закон скоростей, либо из данного закона скоростей можно прийти к природе кривой. Сначала я рассмотрю, каким образом из известной природы кривой познается скорость перемещающегося по ней тела.

Пусть будет дана окружность и будет определено движение тела, описывающего окружность. Пусть $AMDB$ будет окружностью, которую описывает подвешенное тело (рис. 2). Проведем горизонтальный диаметр ACB и вертикальный диаметр ECD. Пусть радиус этой окружности равен b, $PM=y$, $AP=x$; тогда $Mr=dx$, $rm=dy$ и $ds=\sqrt{dx^2+dy^2}$. Но из природы окружности $yy=2bx-xx$ и $y:b=dx:ds$. А поскольку $x=b\pm\sqrt{bb-yy}$, $dx=\frac{ydy}{\sqrt{bb-yy}}$. Следовательно, $ds=\frac{bdy}{\sqrt{bb-yy}}$.

§ IV. Если вместо ds подставить эту величину, то получается уравнение

$$madv+\frac{nbvdy}{\sqrt{bb-yy}}=(m-n)\,ady.$$

Для того чтобы с этим уравнением было удобнее обращаться, приведем его к рациональному виду, положив $\sqrt{bb-yy}=(b-y)\,p$. Тогда $b+y=bpp-ypp$; следовательно, $y=\frac{bpp-b}{pp+1}$, $\sqrt{bb-yy}=\frac{2bp}{pp+1}$ и $dy=\frac{4bpdp}{(pp+1)^2}$. Следовательно,

$$madv+\frac{2nbvdp}{pp+1}=\frac{4\,(m-n)\,abpdp}{(pp+1)^2},$$

или

$$madv\,(pp+1)^2+2nbvdp\,(pp+1)=4\,(m-n)\,abpdp.$$

РАССУЖДЕНИЕ О ДВИЖЕНИИ В ЖИДКОСТЯХ ТЕЛ, БРОШЕННЫХ ПОД УГЛОМ

§ I. Если тяжелые тела будут брошены перпендикулярно к горизонту, то они будут двигаться по прямой линии либо вверх, либо вниз. Если же тяжелые тела будут брошены наклонно под каким-либо острым углом к горизонту, то они не будут более двигаться по прямой линии, а опишут кривую линию; в пустоте эту линию, как показал Галилей, следует считать параболой. В сопротивляющейся жидкости дело обстоит иначе, и кривая не будет более параболой, а будет линией трансцендентной. Такого рода кривые в произвольной сопротивляющейся среде построил славный Якоб Германн в «Форономии» и дал славный Иоганн Бернулли в «Деяниях ученых».

§ II. Поскольку здесь передо мной стоит задача определить движение главным образом в отношении времен и скоростей в данной жидкости при данном угле бросания и при данной начальной скорости, необходимо, чтобы я также и своим методом нашел кривую бросания, для того чтобы отыскать, исходя из нее, абсолютные значения времен, скоростей и положений тела.

Здесь движение тела следует рассматривать двумя способами: либо при подъеме, либо при спуске, ибо условия подъема и спуска различны. В первом случае тяжесть и сопротивление среды действуют в одном направлении и замедляют движение тела. При спуске же тяжесть ускоряет движение тела, а сопротивление замедляет его; в зависимости от того, какая сила имеет перевес, тело опускается либо ускоренным, либо замедленным движением.

§ III. Я рассмотрю сначала спуск тела по кривой. Пусть A будет крайним положением тела, где направление его движения горизонтально вдоль касательной AP (рис. 1). Пусть скорость тела в A такова, какая достигается при падении с высоты k. Если бы не было никакой тяжести, тело продолжало бы движение по прямой линии AP, но из-за тяжести оно вынуждено описать кривую AM. Пусть тело пришло в M; проведем из M нормаль MP к горизонтали AP и обозначим $AP = x$, $PM = y$. Пусть скорость тела в M будет такова, какая может быть достигнута с высоты v. Пусть удельный вес среды относится к весу тела, как $n : m$. Пусть тело своей плоской частью bb постоянно ударяет жидкость по нормали, и пусть abb будет объемом тела и $abbm$ — его массой.

§ IV. Пусть тело перейдет теперь за мгновение из M в m. Проведем линии mp и Mr, соответственно параллельные линиям PM и Pp. Тогда $Pp = Mr = dx$ и $mr = dy$. Обозначим $Mm\,(\sqrt{dx^2 + dy^2}) = ds$, и пусть высота, соответствующая той скорости, которую тело имеет в m, равна $v + dv$. Известно, что в пустоте $dv = rm = dy$, а в жидкости уменьшается не только скорость, но также и тяжесть, так что, если от-

влечься от сопротивления, стремление тела вниз будет пропорционально $\frac{m-n}{m}$, в то время как раньше оно было пропорционально единице. Таким образом, было бы $dv = \frac{dy\,(m-n)}{m}$. Если отвлечься от тяжести, то с помощью того, что было сообщено в первом рассуждении,* можно было бы получить $dv = \frac{-invds}{ma}$ (где i может означать либо 1, либо 2, в зависимости от того, будет ли среда упругой или мягкой). Отсюда, следовательно, при совместном действии тяжести и сопротивления получается уравнение

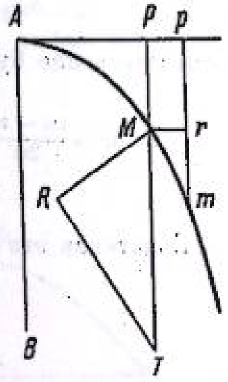


Рис. 1.

$$dv = \frac{dy\,(m-n)}{m} - \frac{invds}{ma}.$$

§ V. Этого уравнения, однако, недостаточно для познания природы кривой, а также для выяснения скорости в отдельных местах, так как оно должно добавляться к природе кривой. Поэтому надо отыскать еще другое уравнение, которое следует вывести из того, что тело свободно описывает эту кривую. Ведь найденное уравнение может быть применено также и для движения тел по заданным кривым. Для того чтобы тело свободно описало кривую, необходимо, чтобы его центробежная сила и его вес постоянно уравновешивали друг друга. Если же одна из этих сил оказалась бы превосходящей, то тело отклонилось бы от пути и уступило превосходящей силе.

§ VI. Поскольку же центробежная сила и сила тяжести не являются прямо противоположными, но центробежная сила действует по перпендикуляру к кривой, а сила тяжести направлена к горизонту, то первая должна быть разложена на две боковые составляющие, из которых одна направлена прямо вверх и прямо противоположна силе тяжести, другая же, чтобы не нарушать движения тела, должна действовать по касательной к кривой. Итак, пусть MR идет по нормали к кривой; разложим MR на вертикальную составляющую MT и касательную TR, так что $MR : MT = dx : ds$, и вертикальная сила MT должна быть равна силе тяжести.

§ VII. Пусть вес тела в пустоте равен p, тогда его вес в жидкости $\frac{(m-n)\,p}{m}$. Отношение же центробежной силы к весу p определяется на основании посмертных работ Гюйгенса путем рассмотрения элемента Mm как круговой дужки, радиус которой будет радиусом кривизны, который назовем r. Итак, вес p будет относиться к центробежной силе, как половина радиуса r к высоте, способной произвести скорость v, так что центробежная сила будет равна $\frac{2vp}{r}$. Но она действует по нормали MR. Итак, пусть $dx : ds = \frac{2vp}{r} : \frac{2vpds}{rdx}$. Последнее выражение дает часть центробежной силы, прямо противоположную силе тяжести, которая равна $\frac{(m-n)\,p}{m}$. Поэтому мы получим уравнение $2vds = \frac{(m-n)\,rdx}{m}$, откуда $v = \frac{(m-n)\,rdx}{2mds}$.

* См. стр. 521. — *Г. М.*

§ VIII. Возьмем элемент dx в качестве постоянной величины, тогда радиус кривизны $r=\frac{ds^3}{dxddy}$. Подставив эту величину в только что найденное уравнение $v=\frac{(m-n)\,rdx}{2mds}$, получим уравнение

$$v=\frac{(m-n)\,ds^2}{2mddy}=\frac{(m-n)\,(dx^2+dy^2)}{2mddy}.$$

Соответственно будет

$$dv=\frac{(m-n)}{2m}\left(2dy-\frac{ds^2d^3y}{ddy^2}\right)=\frac{(m-n)\,dy}{m}-\frac{(m-n)\,ds^2d^3y}{2mddy^2}.$$

Подставив эти величины вместо v и dv в уравнение § IV

$$dv=\frac{(m-n)\,dy}{m}-\frac{invds}{ma},$$

получим такое, свободное от v, уравнение, выражающее природу кривой:

$$\frac{(m-n)\,ds^2d^3y}{2mddy^2}=\frac{(m-n)\,inds^3}{2mmaddy},$$

которое после преобразования переходит в $mad^3y=indsddy$, откуда следует извлечь свойства кривой.

§ IX. Из этого уравнения следует, что если тела движутся в пустоте, то описанная кривая будет параболой, как это хорошо известно. Вот каким образом уравнение параболы может быть извлечено из найденного уравнения. Если допустить, что среда является пустотой или бесконечно разреженной, то $n=0$. Соответственно получим уравнение $d^3y=0$, которое после интегрирования без опущения однородной постоянной, даст $ddy=adx^2$, где постоянная a должна быть определена из данной начальной скорости. Поскольку же

$$v=\frac{(m-n)\,rdx}{2mds}=(\text{так как } n=0)\ \frac{rdx}{2ds}=\frac{ds^2}{2ddy},$$

то, подставив adx^2 вместо ddy, получим $v=\frac{ds^2}{2adx^2}$. В начале же движения $v=k$ и $ds=dx$. Таким образом, имеем $k=\frac{1}{2a}$ и, следовательно, $a=\frac{1}{2k}$, откуда получим $2kddy=dx^2$ и при дальнейшем интегрировании $2kdy=xdx$ и, наконец, $xx=4ky$.

§ X. Для того чтобы в дальнейшем я мог лучше сравнить движение брошенных тел в сопротивляющейся среде с движением в пустоте, здесь будет нелишним вкратце исследовать движение в пустоте. Найденное уравнение $xx=4ky$ относится к параболе, вершина которой в точке A, вертикальная ось AB, а параметр $4k$. Таким образом, параметр параболы, описанной брошенным телом, в четыре раза больше высоты, порождающей скорость, которую имеет тело, когда оно находится в вершине параболы. Иными словами, скорость тела в вершине такая же, какая получается при падении с высоты, равной расстоянию от фокуса до вершины параболы. И вообще скорость тела в любом месте пара-

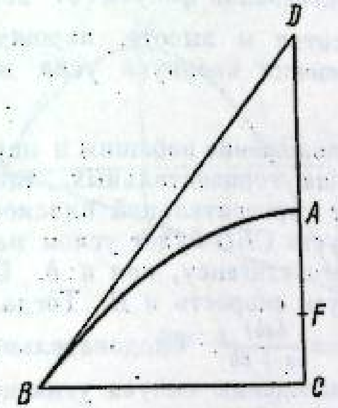


Рис. 2.

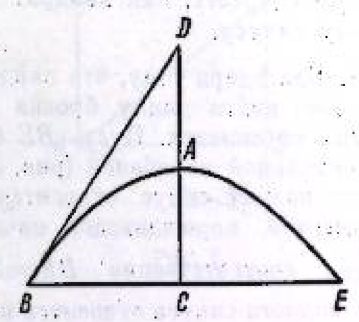


Рис. 3.

болы будет такой, какая может быть получена при падении с высоты, равной расстоянию от этого места до фокуса. Ведь

$$v=\frac{ds^2}{2adx^2}=\frac{kds^2}{dx^2},$$

но $ds^2=dx^2\left(1+\frac{xx}{4kk}\right)$, откуда

$$v=k\left(\frac{4kk+xx}{4kk}\right)=\frac{4kk+xx}{4k}=k+y,$$

а $y+k$, как это следует из теории конических сечений, выражает расстояние точки кривой от фокуса.

§ XI. По данной скорости, с которой шар выбрасывается из точки B под данным углом DBC к горизонту, можно найти вершину параболы, а также ось и параметр. Пусть A — вершина, AC — ось, F — фокус, BC — горизонт и BD — касательная к кривой в точке B (рис. 2). Тогда $AD=AC$. Поскольку начальная скорость в B задана, а высота, способная ее произвести, пусть будет равна f, то $BF=f$. Обозначим $AC=x$, $BC=y$. Тогда $AF=\frac{yy}{4x}$ и $BF=f=x+\frac{yy}{4x}$. Поскольку угол CBD задан, пусть полный синус относится к тангенсу этого угла, как $a:b$. Тогда $y:2x=a:b$. Следовательно, $y=\frac{2ax}{b}$. Таким образом, $f=x+\frac{aax}{bb}$, и, следовательно, высота вершины над горизонтом

$$x = \frac{bbf}{aa+bb}.$$

Поскольку $(aa+bb):bb = BD^2:CD^2$, высота вершины над горизонтом AC будет относиться к высоте, соответствующей начальной скорости f, как квадрат отношения синуса угла наклона CBD к полному синусу. И BC относится к $2AC$, как a к b, т. е. как полный синус к тангенсу угла наклона. Расстояние от фокуса до вершины $AF = \frac{yy}{4x}$ будет равно $\frac{aaf}{aa+bb}$. Следовательно, расстояние фокуса от вершины, или четвертая часть параметра, относится к высоте, порождающей начальную скорость, как квадрат отношения косинуса угла наклона к полному синусу.

§ XII. Благодаря тому, что найдено положение вершины и параметр, легко можно найти длину броска как на горизонтальных, так и на наклонных плоскостях. Пусть BE будет горизонтальной плоскостью и BAE — описанной параболой (рис. 3), пусть CBD будет углом наклона, таким что полный синус относится к его тангенсу, как $a:b$. Пусть f будет высотой, порождающей начальную скорость в B. Тогда $BC = \frac{2abf}{aa+bb}$, соответственно $BE = 2BC = \frac{4abf}{aa+bb}$. Следовательно, как квадрат полного синуса относится к произведению синуса угла наклона на его косинус, так $4f$ относится к четвертой величине, которая обозначит длину броска BE. Отсюда можно сделать вывод, что длина броска будет наибольшей, если $a=b$ и соответственно угол CBD равен половине прямого.

§ XIII. Пусть BG — наклонная плоскость, образующая с горизонтальной линией BE угол GBE (рис. 4), тангенс которого относится к полному синусу, как $c:a$. Из теории конических сечений можно найти, что

$$BG = 4f\,\frac{(b+c)\sqrt{aa+cc}}{aa+bb}.$$

Величину BG получим из таблиц тангенсов следующим образом. Примем во внимание, что квадрат секанса угла наклона CBD относится к произведению из суммы тангенсов угла наклона CBD и угла CBF, который образует наклонная плоскость с горизонтом, на секанс угла CBF так, как $4f$ относится к BG, и таким образом получим величину BG.

§ XIV. Найдем угол бросания CBD, при котором бросок BG был бы наибольшим. Примем b за переменную и приравняем нулю дифференциал BG; получим $aa-bb-2bc=0$, следовательно, $aa+cc=bb+2bc+cc$, соответственно $\sqrt{aa+cc}=b+c$. Отсюда вытекает следующее построение. Пусть AB — горизонтальная линия, AE — вертикальная, AD — наклонная плоскость, образующая с горизонтом угол DAB, AC — искомое направление бросания (рис. 5). Проведем вертикальную линию DC и примем AB за полный синус a. Тогда $BC=b$, $BD=c$ и $AD=\sqrt{aa+cc}$. Следовательно, необходимо, чтобы $BC+BD$, т. е. $DC=AD$. Следовательно, угол $DAC=ACD=CAE$. Поэтому направление бросания AC

должно разделить пополам угол DAE, который образует наклонная плоскость с вертикальной линией.

§ XV. Перехожу к определению времен. Рассмотрим рисунок § III. Будем искать время, за которое тело придет из вершины параболы A

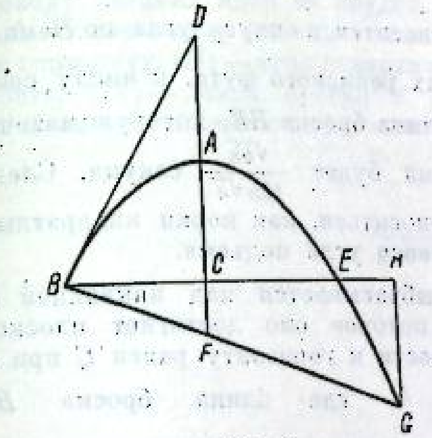


Рис. 4.

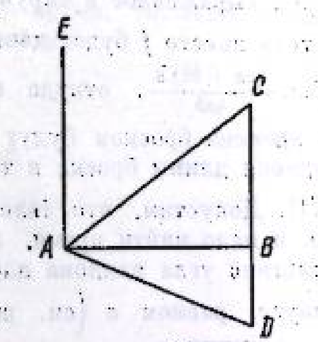


Рис. 5.

в какую-либо точку M с данной абсциссой AP. Обозначив $AP=x$, $PM=y$, получим $xx=4ky$. Следовательно, $rm=dy=\frac{xdx}{2k}$ и $Mm=\frac{dx}{2k}\sqrt{4kk+xx}$.

Промежуток же времени, соответствующий Mm, равен $\frac{dx}{2k}\sqrt{\frac{4kk+xx}{v}}$. Но $v=\frac{4kk+xx}{4k}$. Следовательно, этот промежуточек времени составит $\frac{dx}{\sqrt{k}}$; интеграл его, а именно $\frac{x}{\sqrt{k}}$, выражает время, за которое описывается дуга AM. И если выразить x и k в скрупулах рейнского фута, то время будет равно $\frac{x}{250\sqrt{k}}$ секунд.

Следовательно, движение, отнесенное к горизонту, протекает так, как если бы тело равномерно описывало горизонт, сохраняя начальную скорость.

§ XVI. В § XII была найдена длина броска на горизонтальной плоскости по данной начальной скорости и углу подъема CBD (см. рис. 3). Высота, соответствующая начальной скорости, была обозначена буквой f, тангенс угла подъема b при полном синусе a, и длина броска была $BE=\frac{4abf}{aa+bb}$. Поскольку движение тела по параболе, отнесенное к горизонту, является таким же, как если бы тело двигалось вдоль горизонта со скоростью, которую оно имеет в вершине параболы, а скорость в вершине такова, какая достигается при падении с высоты $\frac{aaf}{aa+bb}$, отсюда следует, что время равно

$$\frac{4abf\sqrt{aa+bb}}{(aa+bb)\,a\sqrt{f}} = \frac{4b\sqrt{f}}{\sqrt{aa+bb}},$$

или, если выразить f в скрупулах рейнского фута, время броска будет составлять

$$\frac{2b\sqrt{f}}{125\sqrt{aa+bb}} \text{ секунд.}$$

Следовательно, полный синус относится к синусу угла подъема так, как $\frac{2\sqrt{f}}{125}$, выраженное в скрупулах рейнского фута, к числу секунд. Либо пусть вместо f будет дана длина броска BE, которую назовем h; тогда $f=\frac{(aa+bb)\,h}{4ab}$, откуда время будет $\frac{\sqrt{bh}}{125\sqrt{a}}$ секунд. Следовательно, времена бросков будут относиться, как корни квадратные из произведения длины броска и тангенса угла подъема.

§ XVII. Допустим, что тело выбрасывается над наклонной плоскостью, и надо найти время, за которое оно достигнет плоскости. Пусть тангенс угла наклона плоскости к горизонту равен C при полном синусе, равном a $\left(\text{см. рис. 4, где длина броска } BG= =4f\frac{(b+c)\sqrt{aa+cc}}{aa+bb}\right)$. Отсюда попытаемся найти длину броска по горизонту BH, опустив на горизонт перпендикуляр GH. Получим

$$BF\,(\sqrt{aa+cc}):BC\,(a)=BG\left(4f\,\frac{(b+c)\sqrt{aa+cc}}{aa+bb}\right):BH,$$

следовательно, $BH=\frac{4af\,(b+c)}{aa+bb}$. Отсюда время броска равно

$$\frac{BH\cdot\sqrt{aa+bb}}{a\sqrt{f}}=\frac{(4b+4c)\sqrt{f}}{\sqrt{aa+bb}},$$

или, если выразить f в тысячных долях рейнского фута, время будет равно $\frac{(2b+2c)\sqrt{f}}{125\sqrt{aa+bb}}$.

Следовательно, секанс угла подъема относится к сумме тангенсов углов подъема и наклона плоскости так, как $\frac{2\sqrt{f}}{125}$, выраженное в рейнских скрупулах, относится к искомому числу секунд.

§ XVIII. Введем вместо начальной скорости длину броска BG, обозначив ее через h. Тогда

$$f=\frac{h\,(aa+bb)}{(4b+4c)\sqrt{aa+cc}}.$$

Соответственно время броска будет равно $\frac{2\sqrt{h}\,(b+c)}{\sqrt[4]{aa+cc}}$. И если выразить h в скрупулах, то время будет выражено в секундах, а именно

$$\frac{\sqrt{bh+ch}}{125\sqrt[4]{aa+cc}} \text{ секунд.}$$

Из приведенных здесь положений относительно движения брошенных тел в пустоте можно решить все вопросы, которые возникают по поводу метания ядер из орудий и связанных с ним времен и скоростей. И поскольку имеется пять величин: (I) — угол подъема орудия к горизонту, (II) — угол поверхности с горизонтом, (III) — начальная скорость, (IV) — длина броска и (V) — время, то, если заданы три из них, две остальные всегда можно найти.

ОБ ИСТЕЧЕНИИ ВОДЫ ИЗ ЦИЛИНДРИЧЕСКИХ ТРУБ, ПРОИЗВОЛЬНО НАКЛОНЕННЫХ И ИЗОГНУТЫХ

§ I. Все рассмотренные до сих пор сосуды, из которых вытекает вода, обладали тем свойством, что их стенки были одинаково во всех направлениях удалены от вертикальной оси. Рассмотрим теперь, по какому закону вода извергается из труб, либо наклоненных к горизонту, либо изогнутых или искривленных. Что касается наклоненных труб, то легко, очевидно, из известных законов спуска по наклонной плоскости заключить, что вода будет оттуда вытекать с точно такой же скоростью, с какой она вытекает из вертикальной трубы той же высоты, отверстие которой имеет то же отношение к основанию. Для того, однако, чтобы не казалось, будто я принимаю непроверенное допущение, я подвергну наклоненные трубы рассмотрению также и с точки зрения нашей теории.

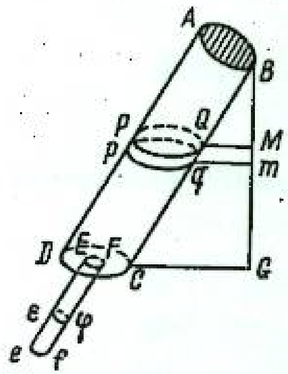


Рис. 1.

§ II. Рассмотрим наклоненную цилиндрическую трубу $ABCD$ (рис. 1). Пусть AB будет ее прямым сечением, а горизонтальным сечением будет основание трубы DC, в котором пробито отверстие EF, также эллиптической формы. Пусть $EFfe$ будет вытекающая струя, $\varepsilon\varphi$ — ее прямое сечение. Проведем вертикаль BG и горизонталь CG; угол наклона будет BCG, а полный синус BC пусть относится к синусу угла наклона BG, как $\alpha:\beta$.

Пусть прямое сечение цилиндра AB относится к прямому сечению струи $\varepsilon\varphi$, или, что то же, горизонтальное сечение цилиндра DC к площади отверстия, как bb к cc. Абсолютно же возьмем bb за площадь горизонтального сечения и cc — за отверстие. Во всяком случае, в расчете в окончательном уравнении не остается ничего, кроме отношения. Пусть $PDCQ$ есть вода, оставшаяся в трубе, GM — ее высота. Сделаем длину трубы $BC=a$, $QC=t$. Получим $BG=\frac{\beta a}{\alpha}$ и $GM=\frac{\beta t}{\alpha}$. Пусть теперь вода в трубе опустится на элемент $PpqQ$, который за это время вытечет в $EefF$. При этом $Pp=Qq=-dt$, а $Mm=-\frac{\beta dt}{\alpha}$.

§ III. Живую силу, вновь порожденную за это время элементарным опусканием, можно определить, умножив каждую каплю на высоту, на которую она снизилась, а именно на $-\frac{\beta dt}{\alpha}$. Поскольку вся вода опускается равномерно, всю массу, которая равна $\frac{\beta bbt}{\alpha}$, надо умно-

жить на $-\frac{\beta dt}{\alpha}$, в результате чего мы получим элемент живой силы $-\frac{\beta\beta bbtdt}{\alpha\alpha}$. Увеличение же живой силы за это время можно определить по принятой скорости, с которой опускается вода. Пусть v — высота, порождающая скорость, с которой вода опускается в трубе. Живая сила воды $PDCQ$ будет равна $\frac{\beta bbtv}{\alpha}$. Следовательно, увеличение живой силы в трубе или элемент, на который живая сила воды $pDCq$ превосходит живую силу воды $PDCQ$, равен $\frac{\beta bbtdv+\beta bbvdt}{\alpha}$. К этому надо добавить живую силу, которая за это время порождается вне трубы, а именно живую силу струи $EefF$, равной элементу $PpqQ=\frac{-\beta bbdt}{\alpha}$. Движется же она со скоростью, которая относится к скорости опускания воды, как bb к cc. Поэтому высота, порождающая эту скорость, будет $\frac{b^4v}{c^4}$. Отсюда получается живая сила вытекающей за это время струи $-\frac{\beta b^6vdt}{\alpha c^4}$.

Таким образом, возникает следующее уравнение:

$$-\frac{\beta\beta bbtdt}{\alpha\alpha}=\frac{\beta bbtdv}{\alpha}+\frac{\beta bbvdt}{\alpha}-\frac{\beta b^6vdt}{\alpha c^4}.$$

Поделив обе части уравнения на $\frac{\beta bb}{\alpha}$ и полагая, по нашему обыкновению, $\frac{b^4}{c^4}-1=n$, получим такое уравнение:

$$-\frac{\beta tdt}{\alpha}=tdv-nvdt.$$

§ IV. Если в это уравнение ввести высоту z, порождающую скорость, с которой вода вытекает из отверстия, а именно вместо v подставить $\frac{c^4z}{b^4}$, то получим следующее уравнение:

$$-\frac{\beta b^4tdt}{\alpha}=c^4tdz-nc^4zdt.$$

Если это уравнение сравнить с тем, которое было найдено для прямых цилиндров, то можно будет обнаружить, что в нашем случае вода будет вытекать с такой скоростью, с какой она вытекает из трубы высотой BG, в которой ширина относится к отверстию, как bb к cc. Таким образом, при равных высотах воды в этих трубах вода вытекает с равной скоростью, как это и было легко предвидеть.

§ V. Отсюда также нетрудно определить времена опоражнивания наклоненных труб. Рассмотрим наклоненную трубу $ABCD$ и трубу $FGIH$, равную ей и одинаковую по ширине (рис. 2). Пусть в основании трубы $FGIH$ будет пробито отверстие, которое относится к отверстию в наклоненной трубе, как BE к BC, так что вытекающие струи будут одинаковой толщины.

Возьмем часть прямой трубы $KLIH$ высотой $KH=BE$. Вытекающая из нее вода повсюду будет иметь ту же скорость, которую имеет вода, вытекающая из наклоненной трубы, тогда, когда вода в трубе будет находиться на той же высоте. Поскольку струи равны между собой, то времена опоражнивания труб будут прямо пропорциональны количеству воды, содержащемуся в каждой. Количество же воды в одной трубе относится к количеству воды в другой, как BC к KH.

Итак, время истечения воды из наклонённой трубы AC будет относиться ко времени истечения из прямой трубы той же высоты KI, как BC к KH, т. е. как BC к BE. Время же истечения из трубы FI относится ко времени истечения из трубы KI, как $\sqrt{FH}$ к $\sqrt{KH}$, т. е. как $\sqrt{BC}$ к $\sqrt{BE}$. Итак, сопоставляя, получим, что время истечения из наклонённой трубы будет относиться к времени истечения из той же трубы, если она выпрямлена, как $\sqrt{BC}$ к $\sqrt{BE}$, т. е. эти времена находятся в отношении корней квадратных из полного синуса и синуса угла наклона.

Следовательно, время опоражнивания наклонённой трубы обратно пропорционально корню квадратному из синуса угла наклона.

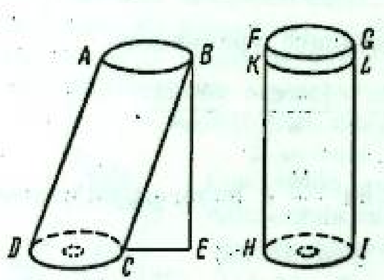


Рис. 2.

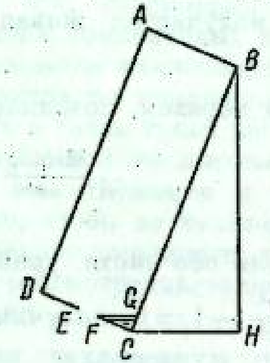


Рис. 3.

§ VI. Подобным же образом дело будет обстоять с наклонёнными трубами, основания которых DC образуют со сторонами прямой или какой-либо другой угол (рис. 3); разумеется, если ширина трубы AB будет весьма мала в сравнении с высотой BH. Ибо, каким бы образом ни была наклонена труба, вытекающая струя будет иметь одинаковую толщину. Поэтому при таком основании результат окажется таким же, что и при горизонтальном основании с пропорциональным отверстием.

Я не случайно добавил условие, что ширина трубы должна быть весьма мала в сравнении с высотой BH. Ведь в случае, если основание не горизонтально, из трубы никогда не вытечет вся вода, но полость FCG постоянно будет оставаться наполненной. Высказанное положение сохраняет силу только в случае, если количество этой оставшейся воды будет незначительно по сравнению со всей водой. В этих и подобных случаях, если необходимы точные измерения, дóлжно обратить внимание на количество воды, которое остается после прекращения истечения. Эту воду не следует принимать в расчет, но ее надо рассматривать как твердое тело, составляющее часть сосуда.

. . . .

§ XVIII... Надо положить, что это приращение равно тому, которое было найдено в § XVI, а именно $-bbtdt$. Таким образом, получим уравнение

$$bbtdv + bbvdt - b^6vdt : c^4 = -bbtdt.$$

Если разделить это уравнение на bb и считать ради краткости, что $b^4 : c^4 - 1$ равно n, то получим уравнение

$$tdv + tdt = nvdt.$$

§ XIX. Для того чтобы это уравнение преобразовать и привести к интегрируемому виду, его можно перевести в другое уравнение, в котором неизвестные отделимы, затем перейти сначала к логарифмам и от них к алгебраическому уравнению. Это получится, если положить, что $v = tp$, как это показал впервые знаменитый Д. Бернулли. Затем уравнение будет переведено в алгебраическое следующим образом. Те члены, в которые одновременно входят v и t, поместим в одной части; тогда $tdt = nvdt - tdv$. После деления обеих частей на t^{n+1} получим уравнение

$$\frac{dt}{t^n} = \frac{nvdt - tdv}{t^{n+1}},$$

в котором оба члена будут интегрируемыми. Интегрируя это уравнение, получим

$$\frac{-1}{(n-1)\,t^{n-1}} = \frac{-v}{t^n} + A.$$

Здесь A обозначает постоянную, которую надо прибавить или вычесть, чтобы это более общее уравнение было приведено к нашему случаю. Оно заключает в себе в общем виде скорости опускающейся в цилиндре воды, с какой бы скоростью вода ни начала опускаться из AB.

§ XX. Если в нашем случае рассматривать опускание, начатое в AB из состояния покоя, то вместо A надо подставить такую величину, чтобы v было равно нулю при $t = a$. Поэтому

$$A = \frac{-1}{(n-1)\,a^{n-1}},$$

так что получим уравнение

$$\frac{v}{t^n} = \frac{1}{(n-1)\,t^{n-1}} - \frac{1}{(n-1)\,a^{n-1}}.$$

Следовательно,

$$v = \frac{t}{n-1}\left(\frac{a^{n-1} - t^{n-1}}{a^{n-1}}\right).$$

Исходя из этого уравнения можно легко найти скорость воды, до какого бы места она ни опустилась, т. е. определить высоту, при падении с которой тяжелое тело достигнет искомой скорости.

§ XXI. Это легко можно будет найти во всех случаях при любом отверстии, за исключением того единственного случая, при котором $n = 1$, или $b^4 = 2c^4$. Рассмотрение этого случая связано, очевидно, с несколько бóльшими трудностями. При этой подстановке уравнение дает

$$v = \frac{t}{0}\left(\frac{a^0 - t^0}{a^0}\right),$$

из чего нельзя сделать решительно никакого вывода.

Поэтому необходимо прибегнуть в этом случае к дифференциальному уравнению $tdt = nvdt - tdv$, которое при $n = 1$ переходит в $tdt = vdt - tdv$, а после деления на tt в следующее зависящее от логарифмов уравнение:

$$\frac{dt}{t} = \frac{vdt - tdv}{tt}.$$

Если это уравнение проинтегрировать и подставить квадратуру гиперболы, то оно примет вид $\lg t = -\frac{v}{t} + A$. Для того чтобы при $t = a$ получить $v = 0$, вместо A надо подставить величину $\lg a$.

Итак, получим $\lg t = \lg a - \frac{v}{t}$, либо $\lg a - \lg t = \frac{v}{t}$, или, наконец, $v = t\lg a - t\lg t$.

§ XXII. Относительно такого определения скоростей следует прежде всего отметить, что при подстановке каждой величины вместо n, т. е. для отдельных отверстий, найденное уравнение изменяет свой порядок. Так, для одного отверстия получается простейшее алгебраическое уравнение, для других — чрезвычайно сложное, высокого порядка, а для того отверстия, которое относится к основанию цилиндра, как 1 к $\sqrt{2}$, — даже не алгебраическое, а экспоненциальное уравнение.

§ XXIII. Определив скорость, с которой вода опускается в трубе или цилиндре, можно узнать отсюда также и скорость, с которой вода выскакивает из сосуда, или высоту, которую я обозначил через z и при падении с которой тяжелое тело достигает скорости, равной той, с которой вода извергается из сосуда. Действительно, так как $z = b^4v : c^4 = (n+1)v$, то

$$z = \frac{n+1}{n-1} t \frac{a^{n-1} - t^{n-1}}{a^{n-1}}.$$

Отсюда можно вывести скорость, с которой вода вытекает из какого угодно цилиндра через произвольное отверстие.

§ XXIV. Для значения z следует взять три общих уравнения в соответствии с подстановкой трех возможных значений n; ведь n либо больше единицы, либо меньше ее, либо равно ей. В первом предположении предыдущее уравнение не изменяется по форме; следовательно, здесь

$$z = \frac{n+1}{n-1} t \frac{a^{n-1} - t^{n-1}}{a^{n-1}}.$$

Во втором предположении n меньше чем 1, и для этих случаев получим уравнение

$$z = \frac{1+n}{1-n} t \frac{-t^{1-n} + a^{1-n}}{t^{1-n}} = \frac{1+n}{1-n} t^n (-t^{1-n} + a^{1-n}) = \frac{1+n}{1-n} (-t + a^{1-n} t^n).$$

Если, наконец, $n = 1$, то из § XXI можно найти уравнение $z = 2t(\lg a - \lg t)$.

§ XXV. Поскольку t всегда меньше чем a, положим $t = qa$, т. е. пусть q обозначает отношение t к a. При этом всегда $q < 1$. Эту подстановку я делаю по той причине, что t может быть дано только в отношении к a. После совершения этой подстановки получим для первого рода

$$z = \frac{n+1}{n-1} a (q - q^n),$$

для второго рода, при $n < 1$,

$$z = \frac{1+n}{1-n} a (q^n - q).$$

Для третьего рода, при $n = 1$, найдем $z = -2aq\lg q$. Если здесь вместо q подставлены числа, то вместо $\lg q$ должны быть взяты их гиперболические логарифмы, либо обычно используемые логарифмы Влакка должны быть умножены на число 2.302587123917691,* как мною найдено из чрезвычайно точно произведенного вычисления.

§ XXVI. Так как до сих пор были успешно рассмотрены только два случая, в которых отверстие совпадает по своим размерам с дном или является бесконечно малым, я применю к этим случаям наше уравнение и выведу из него, каким образом здесь происходит истечение.

Для того чтобы положить в первом случае, что отверстие равно основанию цилиндра, следует подставить вместо n во втором уравнении нуль. Тогда получим $z = 1(a - t) = a - t$. Отсюда ясно, что вода вытекает всегда с такой скоростью, какую имеет тяжелое тело, когда оно опускается с высоты $a - t$, т. е. с той высоты, с которой вода уже упала. Отсюда становится понятным, что вода вытекает из этого отверстия или, вернее, падает наподобие твердого тела. Это не только прекрасно соответствует опытам, но, насколько мне известно, совпадает с всеобщим мнением.

§ XXVII. Следует отметить также и другой случай, когда отверстие бесконечно мало по сравнению с шириной трубы. Для того чтобы применить к этому случаю общее уравнение, надо положить $n = \infty$. Прежде чем произвести эту подстановку, необходимо, чтобы первое из трех уравнений, найденных в § XXV, было бы приведено к логарифмам. Сделав это, получим следующее уравнение:

$$\lg z = \lg(n+1) - \lg(n-1) + \lg a + \lg q + \lg(1 - q^{n-1}).$$

Но

$$\lg(1 - q^{n-1}) = \lg(1 - q) + \lg(q^{n-2} + 1 \cdot q^{n-3} + 1^2 \cdot q^{n-4} + \ldots),$$

и в этом случае $q = 1$, ибо сосуд ведь остается постоянно наполненным, так как отверстие, а следовательно, и истечение воды бесконечно малы. Все члены ряда $\lg(q^{n-2} + 1 \cdot q^{n-3} + \ldots)$ равны между собой, а так как их число $n - 1$, то получим

$$\lg(q^{n-2} + 1 \cdot q^{n-3} + \ldots) = \lg(n-1) q^{n-2} = \lg(n-1) + (n-2)\lg q.$$

Поэтому уравнение в целом принимает следующий вид:

$$\lg z = \lg(n+1) + \lg a + \lg q + \lg(1-q) + (n-2)\lg q.$$

* Должно быть 2.302585093. — *Г. М.*

Так как $q=1$, то члены $\lg q$ и $(n-2)\lg q$ исчезнут. Также исчезнет $\lg(n+1)+\lg(1-q)$, так как логарифм первого члена есть ∞, а второго $-\infty$. В результате остается $\lg z=\lg a$, т. е. $z=a$.

Это показывает, что скорость всегда будет такой, как если бы произошло свободное падение с высоты трубы, или такой, которая нужна для подъема обратно до высоты воды.

§ XXVIII. Итак, в этом случае вода с самого начала тотчас вытекает с такой скоростью, при которой она может подняться до верхнего уровня воды. Во всех прочих случаях скорость в самом начале истечения равна нулю, ибо $z=0$ при $t=a$, или $q=1$.

Хотя может показаться, что положение это не согласуется с опытом, все же оно ни в какой мере не может поколебать теории, так как в теории исходят из того, что вода разделена до бесконечности, т. е. на бесконечно малые капельки. Отсюда легко достигается разъяснение этого сомнения. Ведь капли воды не бесконечно малы, но обладают некоторым весом, которым нельзя пренебречь; в первый момент капелька, являющаяся бесконечно малой, при всех обстоятельствах начала бы движение с состояния покоя и упала бы из отверстия на землю по прямой линии, даже если бы направление отверстия не было бы обращено вниз. Поскольку же вода не может быть делима до бесконечности, то эта первая капелька не может упасть сразу из-за сцепления и связанности с водой, следующей за ней. Так как эта капелька ожидает, пока не выделится значительная капля, то она с необходимостью воспринимает движение от воды, которая за ней следует.

§ XXIX. Далее, если вместо t поставить нуль, то получим $z=0$. Вследствие этого и последняя капля из сосуда должна начать движение из состояния покоя, за исключением того единственного случая, когда отверстие обнимает все основание. В последнем случае скорость здесь будет наибольшей из всех, ибо с этой скоростью вода может подняться на высоту всего сосуда.

Поскольку истечение воды таково, что первая и последняя скорости отсутствуют, то необходимо, чтобы в какой-то момент скорость вытекающей воды была наибольшей; я определю здесь эту скорость и установлю, где она имеет место.

§ XXX. Для определения наибольшей скорости необходимо продифференцировать уравнение, выражающее значение z, принимая z за постоянную. Отсюда получим значение t или q, которое укажет место наибольшей скорости.

В первом уравнении, где $n>1$,

$$z=\frac{n+1}{n-1}a(q-q^n)$$

найдем

$$1=nq^{n-1} \text{ или } q=\frac{1}{n^{\frac{1}{n-1}}}.$$

Следовательно,

$$t=\frac{a}{n^{\frac{1}{n-1}}},$$

а

$$z=\frac{(n+1)a}{\sqrt[n-1]{n^n}}.$$

Во втором случае, где $n<1$,

$$z=\frac{1+n}{1-n}a(q^n-q).$$

В этом случае скорость будет наибольшей тогда, когда $q=\sqrt[1-n]{n}$, а $t=a\sqrt[1-n]{n}$. Поэтому

$$z=(1+n)a\sqrt[1-n]{n^n}.$$

Наконец, в третьем случае, где $n=1$, $z=-2aq\lg q$. Место наибольшей скорости в этом случае будет там, где $q=\frac{1}{g}$ (здесь g обозначает число, логарифм которого есть единица). Таким образом, $z=\frac{2a}{g}$. Мною найдено, что число g, логарифм которого есть единица, равно 2.7182818 с точностью до одной миллионной. Поэтому

$$q=\frac{10\,000\,000}{27\,182\,818} \quad \text{и} \quad z=\frac{20\,000\,000\,a}{27\,182\,818}.$$

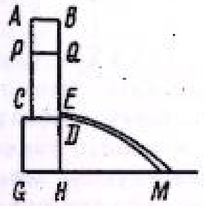


Рис. 4.

§ XXXI. Для того чтобы подтвердить опытом то, что выведено из моей теории относительно наибольших скоростей, необходимо применить цилиндры со сплошным основанием, которые имеют горизонтальное отверстие, так чтобы вода вытекала оттуда по направлению, параллельному горизонту. Сделав это, можно будет по величине отброса струи получить вывод относительно скорости извергающейся воды, а также и о наибольшей скорости. Каков же отброс, легко определится, если будет известна скорость извержения воды, на основании известных принципов.

§ XXXII. Итак, пусть в цилиндре $ABDC$, стоящем на подставке $CGHD$, пробито отверстие DE и пусть GHM — горизонтальная плоскость (рис. 4). Допустим, что вода в трубе опустилась до PQ, а вытекающая вода описывает параболу EM. Пусть $AC=a$, $PC=t$, а z — высота, порождающая скорость, с которой вытекает вода. Пусть, кроме того, высота подставки $HD=e$. Тогда DH будет осью параболы, z — расстоянием от вершины D до фокуса, и параметр соответственно будет равен $4z$. Исходя из природы параболы получим $HM=2\sqrt{ez}$. Следовательно, длина отброса HM пропорциональна корню квадратному из высоты z, т. е. пропорциональна скорости, с которой вытекает вода. Поэтому линия HM может служить для измерения скоростей.

§ XXXIII. Если вместо z подставить значение, найденное в § XXX, то получим самый длинный отброс. В первом случае, где $n>1$, было найдено

$$z=\frac{(n+1)a}{\sqrt[n-1]{n^n}}.$$

Если подставим это значение, то найдем

$$HM = 2\sqrt{\frac{(n+1)ae}{n^{\frac{n}{n-1}}}}.$$

В прочих случаях, где $n=1$ либо <1, этот опыт весьма трудно поставить, так как такое широкое отверстие едва ли может быть вырезано в стенках цилиндра. Тем не менее опыт может оказаться удачным, если вместо цилиндра взять параллелепипед, у которого из какой-либо стороны легко можно вырезать кусок любой величины. В случае $n<1$ найдем

$$HM = 2\sqrt{(1+n)ae^{1-n}\sqrt{n^n}},$$

а в случае $n=1$ получим

$$HM = \frac{2000}{1166}\sqrt{ae}.$$

§ XXXIV. Относительно наибольших скоростей следует, кроме того, заметить, что они где-то имеют наименьшее значение. Наибольшая скорость в обоих случаях, когда отверстие бесконечно мало или равно основанию, такова, что вода может подняться до высоты трубы, а в прочих случаях она меньше. Отсюда ясно, что будет иметь место такой случай, при котором наибольшая скорость будет наименьшей из всех наибольших скоростей во всех остальных случаях. Для того чтобы ее найти, следует отметить, что всегда в предположении наибольшей скорости $z = \frac{1+n}{n}t$, ибо

$$t = \frac{a}{\sqrt[n-1]{n}}.$$

Совершая дифференцирование и полагая z постоянной, а n и t переменными, будем иметь

$$0 = \frac{dt + ndt + tdn}{n} - \frac{tdn + ntdn}{nn}.$$

Следовательно,

$$dt(n+nn) = tdn = \frac{adn}{\sqrt[n-1]{n}}.$$

Но

$$\lg t = \lg a - \frac{1}{n-1}\lg n,$$

откуда

$$dt = \frac{adn \lg n}{(n-1)^2 \sqrt[n-1]{n}} - \frac{adn}{(n-1)n\sqrt[n-1]{n}}.$$

Если подставить это значение в найденное уравнение, то можно получить

$$\frac{n\lg n}{(n-1)^2} = \frac{2n}{nn-1},$$

т. е. $2n-2=(n+1)\lg n$.

Для того чтобы узнать отношение площади отверстия к основанию цилиндра в том случае, когда наибольшая скорость имеет наименьшее значение, из последнего уравнения надо отыскать значение n. Так как, однако, найти корень отсюда никаким способом нельзя, то следует обратиться к подбору, который можно успешно произвести, ибо ясно, что n равно 1. При этом вновь получаем $n=1$, и это указывает на то, что искомый случай наименьшего значения есть тот самый случай, о котором уже много говорилось, а именно тот, где cc относится к bb, как $1:\sqrt{2}$.

§ XXXV. Перехожу к тому, что является важнейшим в этом вопросе и благодаря чему вся эта теория приобретает силу и совершенство, а именно к вычислению времени истечения воды из труб. Ведь благодаря вычислению времени можно самым точным образом сопоставить теорию с опытом и исследовать как бы при помощи лидийского камня ее истинность и подлинность.

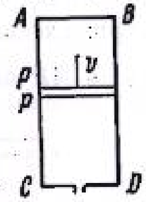


Рис. 5.

Для правильного определения времен истечения необходимо соотнести эти времена с каким-либо установленным и известным временем. В качестве такого времени возьмем время спуска тяжелого тела с высоты трубы a и определим отношение времени истечения ко времени этого спуска с a.

Таким образом, поскольку тяжелое тело опускается за время одной секунды с высоты 15 637 скрупулов, или тысячных частей рейнского фута, то по данной высоте трубы, выраженной в такого рода мере, можно определить абсолютное значение времени.

§ XXXVI. Для того чтобы по данным расстояниям и скоростям определить правильное отношение между двумя этими временами, необходимо взять в обоих случаях для времени одну и ту же меру. Итак, я беру для времени расстояние, отнесенное к скорости, откуда для времени спуска тяжелого тела с высоты a получается $2\sqrt{a}$.

Пусть a уже дано в тысячных долях рейнского фута. Так как времена находятся в отношении корней квадратных из высот, то время спуска тяжелого тела с высоты a будет $\sqrt{\frac{a}{15\,637}}$, т. е. $\frac{\sqrt{a}}{125}$ секунд. Таким образом, отношение $2\sqrt{a}$ к $\frac{\sqrt{a}}{125}$ будет равно отношению $250:1$. Поэтому я смогу времена, которые нужно найти, разделить на 250, после чего буду иметь число секунд для времени истечения.

§ XXXVII. Итак, определим время спуска воды в трубе $ABDC$ (рис. 5) из A до P. Пусть дана скорость воды, с которой она опускается в трубе в каком-либо месте P, а именно корень квадратный из высоты v. Следовательно, промежуточек времени, соответствующий элементу Pp, составляет для тех случаев, где $n>1$,

$$\frac{-dt}{\sqrt{v}} = \frac{-dt\sqrt{(n-1)a^{n-1}}}{\sqrt{t(a^{n-1}-t^{n-1})}}.$$

Если n будет меньше 1, то для отрезка времени, соответствующего элементу Pp, будем иметь формулу

$$\frac{-dt\sqrt{(1-n)t^{1-n}}}{\sqrt{t(a^{1-n}-t^{1-n})}}.$$

Только в единственном остающемся случае, где $n=1$, время, как мне кажется, определить нельзя.*

§ XXXVIII. Первое выражение для промежуточка времени, соответствующего Pp, имеет вид

$$\frac{-dt\sqrt{(n-1)a^{n-1}}}{\sqrt{t(a^{n-1}-t^{1-n})}}.$$

Если его проинтегрировать, то оно представит время истечения воды в трубе до P.

Однако вполне точно эта величина не может быть проинтегрирована. Поэтому мы должны быть удовлетворены тем, что выразили времена истечений по крайней мере через ряды.

Для того чтобы получить более простую формулу, я полагаю $t=pp$; следовательно, $\sqrt{t}=p$ и $\frac{dt}{\sqrt{t}}=2dp$. Отсюда для времени спуска вдоль AP получаем

$$\sqrt{(n-1)a^{n-1}}\int\frac{-2dp}{\sqrt{a^{n-1}-p^{2n-2}}}=2\sqrt{(n-1)a^{n-1}}\int-dp\,(a^{n-1}-p^{2n-2})^{-\frac{1}{2}}.$$

Если эту степень преобразовать по методу Валлиса в ряд, то любой член будет интегрируемым. Если произвести интегрирование и вместо pp подставить значение t, то мы получим для времени спуска с высоты AP следующий ряд:

$$A-2\sqrt{(n-1)t}\left(1+\frac{1\cdot t^{n-1}}{2\cdot1\cdot(2n-1)a^{n-1}}+\frac{1\cdot3\cdot t^{2n-2}}{4\cdot1\cdot2\cdot(4n-3)a^{2n-2}}+\right.$$
$$\left.+\frac{1\cdot3\cdot5\cdot t^{3n-3}}{8\cdot1\cdot2\cdot3\cdot(6n-5)a^{3n-3}}+\ldots\right),$$

в котором можно сразу же обнаружить закон прогрессии.

§ XXXIX. Остается еще определить постоянную A. Это достигается благодаря тому, что при $t=a$ время должно быть равно нулю. Следовательно,

$$A=2\sqrt{(n-1)a}\left(1+\frac{1}{2\cdot1\cdot(2n-1)}+\frac{1\cdot3}{4\cdot1\cdot2\cdot(4n-3)}+\right.$$
$$\left.+\frac{1\cdot3\cdot5}{8\cdot1\cdot2\cdot3\cdot(6n-5)}+\ldots\right).$$

Тогда время падения тяжелого тела с высоты a будет относиться ко времени спуска воды в трубе от A до P, как $2\sqrt{a}$ относится к

$$2\sqrt{(n-1)}\left(a^{1/2}-t^{1/2}+\frac{1\cdot\left(a^{n-\frac{1}{2}}-t^{n-\frac{1}{2}}\right)}{2\cdot1\cdot(2n-1)a^{n-1}}+\frac{1\cdot3\cdot\left(a^{2n-\frac{3}{2}}-t^{2n-\frac{3}{2}}\right)}{4\cdot1\cdot2\cdot(4n-3)a^{2n-2}}+\right.$$
$$\left.+\frac{1\cdot3\cdot5\cdot\left(a^{3n-\frac{5}{2}}-t^{3n-\frac{5}{2}}\right)}{8\cdot1\cdot2\cdot3\cdot(6n-5)a^{3n-3}}+\ldots\right).$$

* Ср. § LIII. — *М. Г.*

Выразив a и t в тысячных долях рейнского фута, найдем время спуска воды в трубе до P в секундах:

$$\frac{\sqrt{n-1}}{125}\left(a^{1/2}-t^{1/2}+\frac{1\cdot\left(a^{n-\frac{1}{2}}-t^{n-\frac{1}{2}}\right)}{2\cdot1\cdot(2n-1)a^{n-1}}+\frac{1\cdot3\cdot\left(a^{2n-\frac{3}{2}}-t^{2n-\frac{3}{2}}\right)}{4\cdot1\cdot2\cdot(4n-3)a^{2n-2}}+\right.$$
$$\left.+\frac{1\cdot3\cdot5\cdot\left(a^{3n-\frac{5}{2}}-t^{3n-\frac{5}{2}}\right)}{8\cdot1\cdot2\cdot3\cdot(6n-5)a^{3n-3}}+\ldots\right).$$

§ XL. Если вместо t подставить qa, то найдем для времени спуска воды до P в секундах

$$\frac{\sqrt{(n-1)a}}{125}\left(1-q^{1/2}+\frac{1\cdot\left(1-q^{n-\frac{1}{2}}\right)}{2\cdot1\cdot(2n-1)}+\frac{1\cdot3\cdot\left(1-q^{2n-\frac{3}{2}}\right)}{4\cdot1\cdot2\cdot(4n-3)}+\ldots\right).$$

Если в этом выражении положить $q=0$, то получим полное время опоражнивания в секундах:

$$\frac{\sqrt{(n-1)a}}{125}\left(1+\frac{1}{2\cdot1\cdot(2n-1)}+\frac{1\cdot3}{4\cdot1\cdot2\cdot(4n-3)}+\frac{1\cdot3\cdot5}{8\cdot1\cdot2\cdot3\cdot(6n-5)}+\ldots\right).$$

Отсюда ясно, что если q и n, т. е. отношение площади отверстия к основанию и отношение высоты оставшейся воды к полной высоте сосуда, остаются неизменными, то времена спусков вдоль подобных высот находятся в отношении корней квадратных из высот труб; в том же отношении будут находиться времена полного опоражнивания, если только отношение отверстий к основаниям останется неизменным.

§ XLI. Выведем из найденной формулы, выражающей времена, некоторые следствия. Хотя они, с точки зрения математической строгости, отклоняются от истины, однако на практике и при опытах могут рассматриваться как вполне точные. Я вывожу их, предполагая, что отверстие столь мало и n возрастает в такой мере, что в найденном ряду всеми членами, кроме первого, если не считать незначительной ошибки, можно пренебречь. Итак, в этих случаях число секунд, за которые вода опускается до P, составит

$$\frac{\sqrt{n-1}}{125}(\sqrt{a}-\sqrt{t}).$$

Таким образом, при переменном t и постоянном n времена будут пропорциональны $\sqrt{a}-\sqrt{t}$, а время полного истечения будет относиться ко времени спуска до P, как $\sqrt{a}$ относится к $\sqrt{a}-\sqrt{t}$. Если $t={}^1/_2a$, то время полного опоражнивания будет относиться ко времени половинного, как $\sqrt{2}$ к $\sqrt{2}-1$, т. е. приблизительно как $17:5$.

§ XLII. Там, где скорость извергающейся воды является наибольшей, было найдено

$$t=\frac{a}{n^{\frac{1}{n-1}}}.$$

Следовательно, время истечения воды до того, когда она вытекает с наибольшей скоростью, составляет в секундах

$$\frac{\sqrt{(n-1)\,a}}{125}\left(1-\frac{1}{\sqrt{n^{\frac{1}{n-1}}}}\right).$$

Отсюда в любом случае, при котором величина n делает остальные члены ряда по отношению к первому исчезающе малыми, можно вычислить время до момента наибольшей скорости. Однако я считаю, что это может применяться только в тех случаях, где n весьма велико и n должно быть тем больше, чем точнее мы хотим определить время.

§ XLIII. Другая формула для времени спуска воды до высоты t была

$$\frac{-dt\sqrt{(1-n)\,t^{1-n}}}{\sqrt{t\,(a^{1-n}-t^{1-n})}}.$$

Если использовать эту формулу для нахождения другой, выражающей время искомого спуска, то можно получить

$$A-\frac{2\sqrt{(1-n)\,t^{2-n}}}{\sqrt{a^{1-n}}}\left(\frac{1}{2-n}+\frac{1\cdot t^{1-n}}{2\cdot 1\cdot(4-3n)\,a^{1-n}}+\frac{1\cdot 3\cdot t^{2-2n}}{4\cdot 1\cdot 2\cdot(6-5n)\,a^{2-2n}}+\ldots\right).$$

Постоянная A будет, следовательно,

$$2\sqrt{(1-n)\,a}\left(\frac{1}{2-n}+\frac{1}{2\cdot 1\cdot(4-3n)}+\right.$$
$$\left.+\frac{1\cdot 3}{4\cdot 1\cdot 2\cdot(6-5n)}+\frac{1\cdot 3\cdot 5}{8\cdot 1\cdot 2\cdot 3\cdot(8-7n)}+\ldots\right).$$

Эта величина также выражает время истечения всей воды из цилиндрического сосуда. Таким образом, если выразить a в тысячных долях рейнского фута, то время полного опоражнивания в секундах будет

$$\frac{\sqrt{(1-n)\,a}}{125}\left(\frac{1}{2-n}+\frac{1}{2\cdot 1\cdot(4-3n)}+\frac{1\cdot 3}{4\cdot 1\cdot 2\cdot(6-5n)}+\ldots\right).$$

§ XLIV. Если мы положим $n=0$, чтобы определить время истечения воды в том случае, когда все основание цилиндра целиком отнимается, то для отношения этого времени ко времени спуска тяжелого тела с той же высоты мы будем иметь следующее отношение:

$$\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2\cdot 1\cdot 4}+\frac{1\cdot 3}{4\cdot 1\cdot 2\cdot 6}+\frac{1\cdot 3\cdot 5}{8\cdot 1\cdot 2\cdot 3\cdot 8}+\ldots\right):1.$$

Это отношение есть равенство, так как данный ряд является половиной ряда

$$1+\frac{1}{2\cdot 1\cdot 2}+\frac{1\cdot 3}{4\cdot 1\cdot 2\cdot 3}+\frac{1\cdot 3\cdot 5}{8\cdot 1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}+\ldots,$$

который равен 2.

Отсюда ясно, что вода из цилиндра, у которого отнято дно, будет падать как твердое тело.

§ XLV. Можно, кроме того, еще и другим образом подойти к ряду, выражающему время, а именно следующим образом. В параграфе XXXVIII имелась следующая величина, подлежащая интегрированию:

$$2\sqrt{(n-1)\,a^{n-1}}\int\frac{-dp}{\sqrt{a^{n-1}-p^{2n-2}}}.$$

Если положить в ней $p^{n-1}=r$, то $p=r^{\frac{1}{n-1}}$ и, следовательно,

$$dp=\frac{1}{n-1}\,r^{\frac{2-n}{n-1}}\,dr.$$

Отсюда формула, подлежащая интегрированию, будет

$$2\sqrt{\frac{a^{n-1}}{n-1}}\int\frac{-r^{\frac{2-n}{n-1}}\,dr}{\sqrt{a^{n-1}-rr}}.$$

Если положить здесь

$$\sqrt{a^{n-1}-rr}=a^{\frac{n-1}{2}}-rs,$$

с тем чтобы исчезла иррациональность, то будем иметь тогда некоторый возведенный в степень двучлен. Его можно обратить в ряд при помощи преобразования Валлиса и, помножив на дифференциальную величину, проинтегрировать, так что мы получим ряд, выражающий время. Я опускаю здесь этот ряд в его общем развернутом виде, в котором он может быть применен ко времени любого истечения, из-за его громоздкости. Вот что из него получается в применении ко времени полного истечения:

$$2\sqrt{(n-1)\,a}\,\sqrt[n-1]{2}\left(1-\frac{1}{(n-1)\cdot 1\cdot(2n-1)}+\right.$$
$$\left.+\frac{1\cdot n}{(n-1)^2\cdot 1\cdot 2\cdot(4n-3)}-\frac{1\cdot n\,(2n-1)}{(n-1)^3\cdot 1\cdot 2\cdot 3\cdot(6n-5)}+\ldots\right).$$

В этом ряду знаки $+$ и $-$ чередуются.

§ XLVI. Этот ряд сходится гораздо лучше, чем предыдущий по двум причинам. Во-первых, его члены через один имеют знак минус, в силу чего то, что добавляет один член, вновь устраняет второй. Вторая причина заключается в том, что величина n входит здесь в знаменатель во второй степени, тогда как в предыдущем ряду она была в первой. По этой причине здесь с бо́льшим правом можно взять вместо всего ряда только первый его член, при условии что n обладает некоторой значительной величиной.

§ XLVII. Если выразить a в тысячных частях рейнского фута, то полное время в секундах будет

$$\frac{\sqrt{(n-1)\,a}}{125}\,\sqrt[n-1]{2}\left(1-\frac{1}{(n-1)\cdot 1\cdot(2n-1)}+\right.$$
$$\left.+\frac{1\cdot n}{(n-1)^2\cdot 1\cdot 2\cdot(4n-3)}-\frac{1\cdot n(2n-1)}{(n-1)^3\cdot 1\cdot 2\cdot 3\cdot(6n-5)}+\ldots\right).$$

Если мы хотим в силу значительности величины n пренебречь всеми членами, кроме первого, то для времени опустошения цилиндра получим

$$\frac{\sqrt{(n-1)\,a}}{125}\sqrt[n-1]{2}.$$

Так как n выражает почти четвертую степень отношения диаметра отверстия к диаметру основания, то, если это отношение хоть несколько увеличится, n тотчас неизмеримо возрастет, и поэтому n можно принять без значительной ошибки вместо $n-1$. Тогда имеем

$$\frac{\sqrt{na}}{125}\sqrt[n-1]{2}.$$

Поскольку же $n=\frac{b^4}{c^4}-1$, то можно будет вместо n написать $\frac{b^4}{c^4}$. Тогда время может быть выражено в виде

$$\frac{bb}{cc\cdot 125}\sqrt{a}\,\sqrt[n-1]{2}$$

либо просто в виде

$$\frac{bb}{125\,cc}\sqrt{a},$$

так как $\sqrt[n-1]{2}$ лишь незначительно отличается от единицы.

§ XLVIII. К этим двум рядам, выражающим время, можно еще прибавить третий ряд. В § XLV величина, неопределенным образом выражающая время спуска воды в цилиндре, была приведена к виду

$$2\sqrt{\frac{a^{n-1}}{n-1}}\int\frac{-r^{\frac{2-n}{n-1}}\,dr}{\sqrt{a^{n-1}-rr}}.$$

Если положить $a^{n-1}-rr=ss$, то эта формула примет вид

$$2\sqrt{\frac{a^{n-1}}{n-1}}\int ds\,(a^{n-1}-ss)^{\frac{3-2n}{n-1}}.$$

Если эта величина будет вновь преобразована в ряд, будет произведено интегрирование и вместо s, а затем r подставлено t, то это доставит нам ряд, выражающий неопределенное время, а именно время спуска воды в цилиндре до высоты t. Я утверждаю, что будет получен ряд

$$2\sqrt{\frac{a\,(a^{n-1}-t^{n-1})}{(n-1)\,a^{n-1}}}\left(1+\frac{2n-3}{(2n-2)\cdot 3\cdot 1}\left(\frac{a^{n-1}-t^{n-1}}{a^{n-1}}\right)+\right.$$
$$+\frac{(2n-3)(4n-5)}{(2n-2)^2\cdot 5\cdot 1\cdot 2}\left(\frac{a^{n-1}-t^{n-1}}{a^{n-1}}\right)^2+$$
$$\left.+\frac{(2n-3)(4n-5)(6n-7)}{(2n-2)^3\cdot 7\cdot 1\cdot 2\cdot 3}\left(\frac{a^{n-1}-t^{n-1}}{a^{n-1}}\right)^3+\ldots\right).$$

§ XLIX. Этот ряд имеет в сравнении с другими ту особенность, что в определенных случаях он перестает быть бесконечным и его можно определить. Это происходит тогда, когда n будет равно либо $^3/_2$, либо $^5/_4$, $^7/_6$, $^9/_8$ и т. д., т. е. когда n будет дробью, числитель которой — нечетное число, а знаменатель меньше числителя на единицу. Итак, при этих значениях время можно определить абсолютно.

§ L. Для получения полного времени опоражнивания положим $t=0$ и получим это время в секундах, если a выражается в тысячных долях рейнского фута. А именно, время в секундах составит

$$\frac{1}{125}\sqrt{\frac{a}{n-1}}\left(1+\frac{2n-3}{(2n-2)\cdot 3\cdot 1}+\frac{(2n-3)(4n-5)}{(2n-2)^2\cdot 5\cdot 1\cdot 2}+\right.$$
$$\left.+\frac{(2n-3)(4n-5)(6n-7)}{(2n-2)^3\cdot 7\cdot 1\cdot 2\cdot 3}+\ldots\right).$$

Этот ряд, правда, не очень сходящийся, и он совершенно бесполезен при вычислении времени. Его желательно присоединить только с той целью, чтобы представить все проинтегрированные полные времена.

§ LI. Этот ряд сохраняет силу при $n>1$. В противоположном случае, если $n<1$, найденный ряд перейдет в следующий:

$$2\sqrt{\frac{a\,(a^{1-n}-t^{1-n})}{(1-n)\,t^{1-n}}}\left(1-\frac{3-2n}{(2-2n)\cdot 3\cdot 1}\left(\frac{a^{1-n}-t^{1-n}}{t^{1-n}}\right)+\ldots\right).$$

Этот ряд при $t=0$ в свою очередь превратится в другой, в котором любой член бесконечен, так что из него нельзя будет ничего заключить.

§ LII. Из предыдущего ряда легко определить время от начала истечения до истечения с наибольшей скоростью, так как при этом

$$t^{n-1}=\frac{a^{n-1}}{n}.$$

Подставив это значение вместо t^{n-1} и выразив a соответствующим образом, найдем следующее число секунд:

$$\frac{1}{125}\sqrt{\frac{a}{n}}\left(1+\frac{2n-3}{2n\cdot 3\cdot 1}+\frac{(2n-3)(4n-5)}{4nn\cdot 5\cdot 1\cdot 2}+\ldots\right).$$

§ LIII. До сих пор были определены времена истечения воды в тех случаях, при которых n либо превосходит единицу, либо меньше ее. Ни одна из этих формул не может быть применена к случаю, при котором $n=1$. Так как в этом случае $v=t(\lg a-\lg t)$, то для времени получим

$$\int\frac{dt}{\sqrt{t\,(\lg a-\lg t)}}.$$

Я нашел, что эта сумма может быть выражена следующим рядом:

$$2\sqrt{a\,(\lg a-\lg t)}\left(1-\frac{\lg a-\lg t}{2\cdot 3\cdot 1}+\frac{(\lg a-\lg t)^2}{4\cdot 5\cdot 1\cdot 2}-\frac{(\lg a-\lg t)^3}{8\cdot 7\cdot 1\cdot 2\cdot 3}+\ldots\right).$$

§ LIV. Описав истечение воды из цилиндрических труб, я продолжаю далее исследование этого предмета и начну изложение вопроса об истечении воды опять-таки из цилиндров, но таких, ко дну которых, сверх того, прикреплена труба любой формы: либо цилиндрическая, либо сходящаяся коническая, либо расходящаяся. Я мог бы добавить криволинейные трубы, но их я на этот раз не буду касаться.

Поскольку я собираюсь определить скорости и времена для такого рода сосудов, то я ограничусь тем периодом, пока верхний цилиндр содержит воду, иначе говоря, пока присоединенная труба остается наполненной. Определение скоростей и времен, после того как верхняя труба будет опорожнена и начнет опорожняться присоединенная труба, потребует здесь огромного труда из-за чрезвычайно запутанных

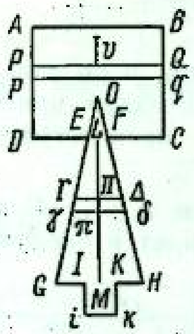


Рис. 6.

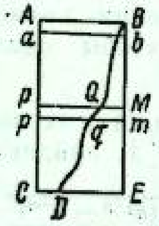


Рис. 7.

дифференциальных уравнений, не допускающих ни интегрирования, ни других исследований.

§ LV. Рассмотрим цилиндрическую трубу $ABCD$, к основанию которой CD прикреплена труба $EGHF$, а на дне последней GH имеется отверстие IK, из которого вытекает вода (рис. 6). После того как труба, первоначально наполненная до AB, будет открыта, пусть вода опустится до PQ. Нужно определить скорость, с которой будет оседать поверхность воды PQ, а затем скорость, с которой вода извергается из отверстия IK. Для того чтобы определить это, положим, что первоначальная высота воды в цилиндре $AD = a$, ширина цилиндра $AB = b$, а квадрат ее bb выражает основание цилиндра. Пусть, далее, переменная высота жидкости $DP = t$, $EF = c$, $GH = e$, диаметр отверстия $IK = f$, а высота присоединенной трубы $LM = k$. Пусть поверхность воды PQ опустится до pq. Тогда $Pp = -dt$. За это время вытечет столбик $IikK$, равный столбику или слою $PQqp$.

§ LVI. Прежде всего надо определить элемент живой силы, который вода получила при падении с высоты Pp. Совершенно ясно, что живая сила будет определена, если каждая частичка воды будет умножена на ту высоту, с которой она опустилась за время, пока верхняя поверхность воды PQ упала на Pp. Ведь живые силы, полученные при падении тел, равны массе тела, умноженной на пройденную высоту. Относительно того, как следует надлежащим образом определить этот вновь полученный элемент в сосуде любой формы, я нашел следующую не лишенную изящества и представляющую в этом вопросе замечательную пользу теорему. Как только ее увидел славнейший Д. Бернулли, он подкрепил ее доказательством, полученным из природы центра тяжести, и изложил это доказательство недавно в присутствии высокого собрания.* Мое же доказательство я сообщаю здесь.

§ LVII. Теорема эта такова.

Пусть (рис. 7) сосуд произвольной формы порожден вращением фигуры $ABQDC$ вокруг оси AC, или, для того чтобы теорема могла быть распространена на всякого рода некруглые сосуды, пусть квадраты ординат кривой BQD выражают размер сосуда при соответствующих высотах. Пусть сосуд наполнен до AB, и пусть вода опустится на Aa. Я утверждаю, что при этом спуске достигается живая сила, равная той, которую достигает вода в цилиндре $ABEC$ той же высоты, основание которого равно квадрату AB, при падении с той же высоты Aa.

Для того чтобы это доказать, представим себе какой-либо слой $PQqp$. Достигнутая живая сила этого слоя будет равна слою, умноженному на высоту, с которой он падает за время, пока поверхность снижается на элемент Aa. Поскольку скорости, с которыми вода опускается в этой трубе, обратно пропорциональны сечениям, то и элементы высот, с которых опускается каждая поверхность, будут находиться в этом же отношении. Поскольку AB опускается на Aa, то положим, что PQ^2 так относится к AB^2, как Aa относится к четвертому члену, который будет высотой, на которую опускается слой $PQqp$, а именно $\frac{Aa \cdot AB^2}{PQ^2}$. Если эту высоту умножить на сам слой $PQ^2 \cdot Pp$, то мы получим живую силу слоя $PQqp$, достигнутую в этот момент, а именно $Aa \cdot Pp \cdot AB^2$.

§ LVIII. Тому, кто рассматривает это выражение, становится ясно, что оно определяет живую силу цилиндрического слоя $PMmp$, упавшего вдоль Aa. Поскольку $AB^2 = PM^2$, следовательно, $Pp \cdot AB^2$ равно самому цилиндрическому слою $PMmp$. Так как полученная живая сила любого слоя равна живой силе соответствующего цилиндрического слоя, упавшего с высоты Aa, то в целом сумма всех живых сил воды, содержащихся в сосуде $ABQDC$, т. е. живая сила всей воды, полученная при опускании верхней поверхности на Aa, равна сумме всех сил, содержащихся в цилиндре $ABEC$, т. е. всей силе воды, содержащейся в цилиндре, которую она получила при падении с Aa.

§ LIX. Эта живая сила воды в цилиндре, по причине того что скорость опускающейся воды всюду остается одинаковой, равна массе воды, умноженной на элемент Aa, т. е. равна произведению $AB^2 \cdot AC \cdot Aa$. Это произведение выразит живую силу, которую вода приобретает в сосуде $ABQDC$, пока верхняя поверхность AB снижается на элемент Aa.

Если в этом произведении AC рассматривается как пройденная высота, то $AB^2 \cdot Aa$ будет массой. Поэтому в сосуде AD достигается та же живая сила, какую приобретает верхний слой $ABba$ толщиной Aa при падении с высоты сосуда AC. Таким образом изложил теорему славнейший Даниил Бернулли.

§ LX. Для того чтобы приспособить изложенное к моей задаче, возьмем вновь предыдущую фигуру (рис. 6). Живая сила воды, полу-

* В заседании Конференции Академии наук в Петербурге. — *Г. М.*

ченная при опускании верхней поверхности на высоту Pp, согласно доказанному, равна произведению из PQ^2 на $(PD+LM)$ и на Pp, т. е. в символах — $bbtdt - bbkdt$. Найдем теперь тот же элемент живой силы другим методом, а именно из рассмотрения скорости, с которой опускается вода. Пусть вода PQ опускается со скоростью, равной той, которую достигает тяжелое тело при падении с высоты v. Живая сила всей воды, содержащейся в сосуде, может быть выражена целиком, откуда затем можно найти также и ее мгновенное приращение. Живую силу воды в цилиндре $PDCQ$ легко получить, так как скорость воды повсюду в нем остается одинаковой. Она будет, конечно, выражена произведением массы bbt на высоту, порождающую ее скорость, v, т. е. $bbtv$.

§ LXI. Живая же сила воды, содержащейся в присоединенной трубе $EFHG$, должна быть извлечена путем суммирования, а именно при помощи суммирования живых сил каждого слоя. Пусть $\Gamma\Delta\delta\gamma$ — произвольный слой, живая сила которого определяется. Пусть продолжения линий GE и HF пересекаются в точке O, из которой опущена вертикаль OLM. Пусть $O\Pi = x$, $\Gamma\Delta = y$, $OL = g$. Тогда $OM = (g+k)$ и $\Pi\pi = dx$. Вследствие подобия треугольников $O\Gamma\Delta$ и OGH будем иметь

$$O\Pi\,(x) : \Gamma\Delta\,(y) = OM\,(g+k) : GH\,(e),$$

откуда получим следующее уравнение:

$$(gy+ky) = ex.$$

Итак, для слоя $\Gamma\Delta\delta\gamma$ имеем

$$yydx = \frac{eedx\,xx}{(g+k)^2}.$$

Пусть его скорость порождена высотой α. Тогда $bb\sqrt{v} = yy\sqrt{\alpha}$, ибо скорости обратно пропорциональны ширине трубы, а $\sqrt{v}$ и $\sqrt{\alpha}$ выражают скорости. Следовательно, $\alpha = b^4v : y^4$. Если умножить эту высоту на элемент или слой $\frac{eexxdx}{(g+k)^2}$, то получим живую силу слоя, а именно

$$\frac{b^4eexxvdx}{y^4(g+k)^2} = \frac{b^4vdx\,(g+k)^2}{eexx}.$$

Интеграл ее

$$A - \frac{b^4v\,(g+k)^2}{eex}$$

выразит живую силу воды, содержащейся в конусе $O\Gamma\Delta$.

§ LXII. Для нашего дела требуется найти живую силу воды в объеме $EFHG$, соответствующем фигуре усеченного конуса. Мы получим ее, отнимая живую силу конуса OEF от живой силы конуса OGH. Первая сила составит, если вместо x подставить g,

$$A - \frac{b^4v\,(g+k)^2}{eeg}.$$

Вторую же силу — конуса OGH — получим, если вместо x подставим $g+k$:

$$A - \frac{b^4v\,(g+k)}{ee}.$$

Если отнять от нее первую силу, то останется

$$\frac{b^4v\,(g+k)}{ee}\,\frac{k}{g} = \frac{b^4kv\,(g+k)}{eeg},$$

что и дает выражение живой силы воды в присоединенной трубе. Для того чтобы избавиться от буквы g, привлечем на помощь подобие треугольников OEF и OGH, которое дает $g : c = (g+k) : e$. Отсюда извлечем $\frac{g+k}{g} = \frac{e}{c}$. Подставив это значение, получим живую силу воды в присоединенной трубе $\frac{b^4kv}{ce}$.

§ LXIII. Таким образом, живая сила всей воды в сосуде равна сумме $bbtv + \frac{b^4k}{ce}v$.

После того как вода опустится на элемент Pp и придет в положение $pDEGIikKHFCq$, живая сила будет равна живой силе воды в сосуде и живой силе вытолкнутого столбика $IikK$. Первая из этих живых сил будет равна найденной ранее $bbtv + \frac{b^4k}{ce}v$ плюс ее элементу, или дифференциалу, а именно

$$bbtv + \frac{b^4k}{ce}v + bbtdv + bbvdt + \frac{b^4k}{ce}dv.$$

Живая же сила вытолкнутой воды — $bbdt$, поскольку высота, порождающая ее скорость, равна $\frac{b^4}{f^4}v$, будет $-b^6vdt : f^4$. Таким образом, вся живая сила после спуска на Pp составит

$$bbtv + \frac{b^4kv}{ce} + bbtdv + bbvdt + \frac{b^4kdv}{ce} - \frac{b^6vdt}{f^4}.$$

Если отсюда отнять живую силу воды, имевшуюся непосредственно до этого, то останется мгновенное приращение

$$bbtdv + bbvdt + \frac{b^4kdv}{ce} - \frac{b^6vdt}{f^4}.$$

Оно должно быть равно тому, что было найдено выше в § LX, а именно $-bbtdt - bbkdt$. Отсюда получим следующее уравнение:

$$-bbtdt - bbkdt = bbtdv + bbvdt + \frac{b^4kdv}{ce} - \frac{b^6vdt}{f^4},$$

которое, будучи поделено на bb, принимает следующий вид:

$$\frac{b^4vdt}{f^4}-tdt-kdt-tdv-vdt-\frac{bbkdv}{ce}=0.$$

§ LXIV. Ради краткости вместо $\frac{b^4}{f^4}-1$ напишем n и вместо $\frac{bb}{ce}$ m. Уравнение примет следующий вид:

$$nvdt-mkdv-tdt-kdt-tdv=0.$$

Это уравнение представлено в общих выражениях, способ интегрирования которых в общем виде указал знаменитейший Германн. Для того чтобы сделать все члены однородными в отношении переменных величин, произведем подстановки $v=z-k\frac{m-1}{n}$ и $t=x-mk$ и получим уравнение $nzdx-xdz=xdx$. Для интегрирования этого уравнения разделим обе его части на x^{n+1}:

$$\frac{nzdx-xdz}{x^{n+1}}=\frac{dx}{x^n},$$

после чего они станут полностью интегрируемыми. Интеграл этого уравнения будет

$$A-\frac{z}{x^n}=\frac{-1}{(n-1)\,x^{n-1}},$$

где A обозначает постоянную, которую надо либо прибавить, либо отнять и которая будет определена в дальнейшем. Произведя умножение на $(n-1)x^n$, получим уравнение

$$(n-1)\,Ax^n+x=(n-1)\,z.$$

§ LXV. Заменив x и z прежними буквами t и v, т. е. подставив вместо x $(t+mk)$ и вместо z $\left(v+k\frac{m-1}{n}\right)$, получим уравнение

$$(n-1)\,A\,(t+mk)^n+t+mk=(n-1)\left(v+k\frac{m-1}{n}\right).$$

Для того чтобы определить значение постоянной A, будем его искать из уравнения, которое получается при $t=a$ и $v=0$, ибо в начале спуска скорость равна нулю. Тогда найдем

$$A=\frac{(n-1)\,k\frac{m-1}{n}-a-mk}{(n-1)\,(a+mk)^n}=\frac{-a-k\frac{m+n-1}{n}}{(n-1)\,(a+mk)^n}.$$

Отсюда получим

$$v=\frac{\left(t+k\frac{m+n-1}{n}\right)(a+mk)^n-\left(a+k\frac{m+n-1}{n}\right)(t+mk)^n}{(n-1)\,(a+mk)^n}.$$

§ LXVI. Из этого уравнения можно вывести много любопытных следствий. Здесь я коснусь только некоторых. Прежде всего следует

отметить, что истечение воды останется таким же, если будут неизменными по крайней мере значения a, k, n и m, т. е. четыре величины, тогда как в расчет входят шесть заданных величин a, b, c, e, f, k. Поэтому в случае неизменности a и k истечение будет всегда одинаковым, если только останутся одинаковыми отношения $b:f$ и $bb:ce$, а именно отношение отверстия к ширине цилиндра и отношение ширины bb к ширине ce, которая является средним пропорциональным между обоими основаниями присоединенного усеченного конуса. Следовательно, если даже усеченный конус будет перевернут и обращен вниз, вода при неизменности отверстия будет вытекать таким же образом.

§ LXVII. Если отверстие ff будет равно ширине цилиндра bb, так что $n=0$, то $(a+mk)^n$ и $(t+mk)^n$ будут равны единице и, следовательно,

$$v=\frac{t+k\frac{m+n-1}{n}-a-k\frac{m+n-1}{n}}{-1}=a-t,^*$$

т. е. вода повсюду будет иметь ту скорость, которую достигает тяжелое тело при падении с высоты, с которой опускается вода, и вода таким же образом будет выливаться или, лучше сказать, падать наподобие твердого тела, сколь бы незначительным ни было отверстие, или проход, на дне цилиндра.

§ LXVIII. Я не сомневаюсь, что если присоединенная труба будет слишком широкой, вода, не прикасаясь к присоединенной трубе, будет свободно вытекать из цилиндра таким же образом, как если бы никакая труба не была присоединена. Это, однако, никак не может поколебать теорию, так как в качестве исходного начала было принято, что вода везде примыкает к стенкам трубы и остается всюду непрерывной. Теория по необходимости сохраняет свое значение там, где сохраняется это начало. Однако она не распространяется на те случаи, при которых в силу причин, приведенных при объяснении исходного начала, мы сталкиваемся с исключением относительно этого начала.

§ LXIX. Пусть отверстие будет бесконечно малым, а n, следовательно, бесконечным. При этом $(t+mk)^n$ исчезает в сравнении с $(a+mk)^n$. Если даже t не меньше чем a, то при этом надо рассматривать воду опустившейся с бесконечно малой высоты, так что в результате $(a+mk)$ и $(t+mk)$ отличаются друг от друга на бесконечно малую величину. А в силу этого $(a+mk)^n$ в бесконечное число раз больше чем $(t+mk)^n$, ибо x^n исчезает в сравнении с $(x+dx)^n$, если n бесконечно. Это легко уяснить, возводя двучлен в степень n, когда все члены, на первый

---

* Полученная здесь Эйлером формула неверна вследствие ошибочности проведенного им предельного перехода. В действительности из формул § LXV при $n\to 0$ следует

$$v=(a-t)-k\,(m-1)\lg\frac{a+mk}{t+mk}.$$

Этот же результат легко получить и из исходного дифференциального уравнения § LXIV.

Ошибочен, конечно, и последующий вывод в конце параграфа. — *Г. М.*

взгляд, представляются как бы равными первому — x^n, число же членов будет бесконечным. Следовательно,

$$v = \frac{t+k}{n-1},$$

и, принимая z за высоту, порождающую скорость, с которой вытекает вода, получим

$$z = \frac{n+1}{n-1}(t+k) = t+k.$$

Поэтому вода будет вытекать с такой скоростью, с какой она сможет подняться до высоты цилиндра вместе с присоединенным сосудом.*

§ LXX. Остается, по аналогии с рассмотрением одиночных цилиндров, отыскать место, где скорость — наибольшая, а также саму эту наибольшую скорость. Для того чтобы это сделать, надо продифференцировать найденное уравнение и положить $dv = 0$. Сделав это, найдем следующее уравнение:

$$t = \frac{(a+mk)^{\frac{n}{n-1}}}{[an + k(m+n-1)]^{\frac{1}{n-1}}} - mk.$$

Отсюда получим высоту воды в цилиндре, при которой вода извергается с наибольшей скоростью. Высоту же v, порождающую эту наибольшую скорость, найдем, если подставим вместо t найденное значение:

$$v = \frac{1}{n}\sqrt[n-1]{\frac{(a+mk)^n}{na + k(m+n-1)}} - k\frac{m-1}{n}.$$

Отсюда получим высоту, порождающую наибольшую скорость истечения воды:

$$z = \frac{n+1}{n}\sqrt[n-1]{\frac{(a+mk)^n}{na+k(m+n-1)}} - k\frac{(m-1)(n+1)}{n}.$$

Положим здесь $n = \infty$, чтобы определить скорость, с которой вода вытекает в сосуде с бесконечно малым отверстием. Но при этом любая скорость является наибольшей, поскольку вода всегда вытекает с одной и той же скоростью. Получим $\frac{n+1}{n} = 1$, $\sqrt[n-1]{na + k(m+n-1)} = 1$, и, следовательно, $z = a + mk - mk + k = a + k$, т. е. вода будет вытекать со скоростью, которая возникает при падении с высоты уровня воды.

§ LXXI. Что касается времен истечения воды из подобного рода сосудов, то определить их значительно труднее, чем в случае с одиночными цилиндрами, поскольку элемент времени не может быть здесь разложен в ряд, отдельные члены которого интегрируемы. Поэтому каждый член надо будет вновь обращать в ряд, чтобы таким образом время было выражено при помощи бесконечного множества рядов. Таким образом, элемент времени будет

$$\frac{-dt}{\sqrt{v}} = \frac{-dt\sqrt{(n-1)(a+mk)^n}}{\sqrt{\left(t+k\frac{m+n-1}{n}\right)(a+mk)^n - \left(a+k\frac{m+n-1}{n}\right)(t+mk)^n}}.$$

Положим для краткости $(t+mk) = x$ и $(a+mk) = g$, а также

$$\frac{k(m-1)(n-1)}{n} = h.$$

Тогда

$$\frac{-dt}{\sqrt{v}} = \frac{-dx\sqrt{(n-1)g^n}}{\sqrt{g^n x - g^n h - g x^n + h x^n}} = \frac{-dx\sqrt{(n-1)g^n}}{\sqrt{g^n(x-h) - x^n(g-h)}}.$$

§ LXXII. Итак, время спуска воды в цилиндре до высоты t составит

$$A - \int \frac{dx\sqrt{(n-1)g^n}}{\sqrt{(x-h)g^n - x^n(g-h)}}.$$

Но

$$\int \frac{dx\sqrt{(n-1)g^n}}{\sqrt{(x-h)g^n - x^n(g-h)}} = \sqrt{(n-1)g^n}\int dx\,[(x-h)g^n - x^n(g-h)]^{-1/2}.$$

Это подлежащее интегрированию выражение, обращенное в ряд при помощи преобразования Валлиса, принимает вид

$$dx\left(\frac{1}{g^{\frac{n}{2}}\sqrt{x-h}} + \frac{1\cdot(g-h)x^n}{2\cdot 1\cdot g^{\frac{3n}{2}}(x-h)\sqrt{x-h}} + \frac{1\cdot 3\cdot (g-h)^2 x^{2n}}{4\cdot 1\cdot 2\cdot g^{\frac{5n}{2}}(x-h)^2\sqrt{x-h}} + \ldots\right).$$

Но

$$\int \frac{dx}{g^{\frac{n}{2}}\sqrt{x-h}} = \frac{2\sqrt{x-h}}{g^{\frac{n}{2}}}$$

и

$$\frac{1\cdot(g-h)}{2\cdot 1\cdot g^{\frac{3n}{2}}}\int \frac{x^n dx}{(x-h)\sqrt{x-h}} = \frac{1\cdot(g-h)}{2\cdot 1\cdot g^{\frac{3n}{2}}\sqrt{x-h}}\left(\frac{x^n}{n-\frac{1}{2}} + \frac{nhx^{n-1}}{\left(n-\frac{1}{2}\right)\left(n-\frac{3}{2}\right)} + \right.$$

$$\left. + \frac{n(n-1)hhx^{n-2}}{\left(n-\frac{1}{2}\right)\left(n-\frac{3}{2}\right)\left(n-\frac{5}{2}\right)} + \ldots\right).$$

* Рассуждения Эйлера здесь не строги, как это часто у него бывает при переходе к пределу (ср. § XXVII). Они привели к правильному результату прежде всего потому, что этот результат был уже известен во времена Эйлера. Подобная же неточность имеет место в конце следующего параграфа. — *Г. М.*

Далее

$$\frac{1\cdot 3\cdot (g-h)^2}{4\cdot 1\cdot 2\cdot g^{\frac{5n}{2}}}\int\frac{x^{2n}dx}{(x-h)^2\sqrt{x-h}}=\frac{1\cdot 3\cdot (g-h)^2}{4\cdot 1\cdot 2\cdot g^{\frac{5n}{2}}(x-h)\sqrt{x-h}}\times$$

$$\times\left(\frac{x^{2n}}{2n-\frac{3}{2}}+\frac{2nhx^{2n-1}}{\left(2n-\frac{3}{2}\right)\left(2n-\frac{5}{2}\right)}+\frac{2n(2n-1)hhx^{2n-2}}{\left(2n-\frac{3}{2}\right)\left(2n-\frac{5}{2}\right)\left(2n-\frac{7}{2}\right)}+\ldots\right).$$

§ LXXIII. Итак, сумма

$$\frac{dx\sqrt{(n-1)g^n}}{\sqrt{(x-h)g^n-x^n(g-h)}}$$

равна

$$\sqrt{\frac{n-1}{x-h}}\left\{2x-2h+\frac{1\cdot(g-h)}{2\cdot 1\cdot g^n}\left(\frac{x^n}{n-\frac{1}{2}}+\frac{nhx^{n-1}}{\left(n-\frac{1}{2}\right)\left(n-\frac{3}{2}\right)}+\right.\right.$$

$$\left.+\frac{n(n-1)hhx^{n-2}}{\left(n-\frac{1}{2}\right)\left(n-\frac{3}{2}\right)\left(n-\frac{5}{2}\right)}+\ldots\right)+\frac{1\cdot 3\cdot(g-h)^2}{4\cdot 1\cdot 2\cdot g^{2n}(x-h)}\left(\frac{x^{2n}}{2n-\frac{3}{2}}+\right.$$

$$\left.+\frac{2nhx^{2n-1}}{\left(2n-\frac{3}{2}\right)\left(2n-\frac{5}{2}\right)}+\frac{2n(2n-1)hhx^{2n-2}}{\left(2n-\frac{3}{2}\right)\left(2n-\frac{5}{2}\right)\left(2n-\frac{7}{2}\right)}+\ldots\right)+$$

$$+\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot(g-h)^3}{8\cdot 1\cdot 2\cdot 3\cdot g^{3n}(x-h)^2}\left(\frac{x^{3n}}{3n-\frac{5}{2}}+\frac{3nhx^{3n-1}}{\left(3n-\frac{5}{2}\right)\left(3n-\frac{7}{2}\right)}+\right.$$

$$\left.\left.+\frac{3n(3n-1)hhx^{3n-2}}{\left(3n-\frac{5}{2}\right)\left(3n-\frac{7}{2}\right)\left(3n-\frac{9}{2}\right)}+\ldots\right)+\ldots\right\}.$$

§ LXXIV. Прилагая найденный ряд к нашему исследованию, произведя надлежащую подстановку вместо x и g и положив $t=a$, найдем, что постоянная A, которая должна быть добавлена, равна следующему ряду:

$$\sqrt{(n-1)\left(a+k\frac{m+n-1}{n}\right)}\left\{2+\frac{1}{2\cdot 1}\left(\frac{1}{n-\frac{1}{2}}+\frac{nh}{\left(n-\frac{1}{2}\right)\left(n-\frac{3}{2}\right)(a+mk)}+\right.\right.$$

$$\left.+\frac{n(n-1)hh}{\left(n-\frac{1}{2}\right)\left(n-\frac{3}{2}\right)\left(n-\frac{5}{2}\right)(a+mk)^2}+\ldots\right)+\frac{1\cdot 3}{4\cdot 1\cdot 2}\left(\frac{1}{2n-\frac{3}{2}}+\right.$$

$$\left.\left.+\frac{2nh}{\left(2n-\frac{3}{2}\right)\left(2n-\frac{5}{2}\right)(a+mk)}+\frac{2n(2n-1)hh}{\left(2n-\frac{3}{2}\right)\left(2n-\frac{5}{2}\right)\left(2n-\frac{7}{2}\right)(a+mk)^2}+\ldots\right)+\ldots\right\}.$$

Если вычесть из этого значения ряд, возникающий при $t=0$, то останется время опоражнивания всего цилиндра:

$$\sqrt{(n-1)\left(k\frac{m+n-1}{n}\right)}\left\{2+\frac{1\cdot\left(a+k\frac{m+n-1}{n}\right)}{2\cdot 1\cdot\left(k\frac{m+n-1}{n}\right)(a+mk)^n}\left(\frac{(mk)^n}{n-\frac{1}{2}}+\right.\right.$$

$$\left.+\frac{nh(mk)^{n-1}}{\left(n-\frac{1}{2}\right)\left(n-\frac{3}{2}\right)}+\frac{n(n-1)hh(mk)^{n-2}}{\left(n-\frac{1}{2}\right)\left(n-\frac{3}{2}\right)\left(n-\frac{5}{2}\right)}+\ldots\right)+$$

$$\left.+\frac{1\cdot 3\cdot\left(a+k\frac{m+n-1}{n}\right)^2}{4\cdot 1\cdot 2\cdot\left(k\frac{m+n-1}{n}\right)^2(a+mk)^{2n}}\left(\frac{(mk)^{2n}}{2n-\frac{3}{2}}+\frac{2nh(mk)^{2n-1}}{\left(2n-\frac{3}{2}\right)\left(2n-\frac{5}{2}\right)}+\ldots\right)+\ldots\right\}.$$

Из этих рядов в любом частном случае определится с большой точностью время опоражнивания цилиндра. Время будет дано в секундах, если, выразив a и k в тысячных долях рейнского фута, разделим найденное число на 250.

§ LXXV. Обоснование рядов, которыми был выражен

$$\int\frac{x^n dx}{(x-h)\sqrt{x-h}}$$

и вообще

$$\int\frac{x^n dx}{(x-h)^r\sqrt{x-h}},$$

получено из следующего. Ясно, что сумма дифференциала

$$\frac{x^n dx}{(x-h)^r\sqrt{x-h}}$$

выражается через дробь, знаменатель которой есть $(x-h)^{r-1}\sqrt{x-h}$, а числителем является некоторый ряд, в котором наибольшим порядком x является x в степени n; остальные же члены имеют меньший порядок. Подставив, следовательно, вместо числителя ряд $ax^n+\beta hx^{n-1}+\gamma hhx^{n-2}+\ldots$, продифференцировав затем дробь и уничтожив все члены, кроме $x^n dx$, найдем коэффициенты a, β, γ и т. д. Таким образом, сумма

$$\frac{x^n dx}{(x-h)^r\sqrt{x-h}}$$

равна

$$\frac{1}{(x-h)^{r-1}\sqrt{x-h}}\left(\frac{1\cdot x^n}{n-r+\frac{1}{2}}+\frac{nhx^{n-1}}{\left(n-r+\frac{1}{2}\right)\left(n-r-\frac{1}{2}\right)}+\right.$$

$$\left.+\frac{n(n-1)hhx^{n-2}}{\left(n-r+\frac{1}{2}\right)\left(n-r-\frac{1}{2}\right)\left(n-r-\frac{3}{2}\right)}+\ldots\right).$$

§ LXXVI. Не могу пройти мимо исключительного свойства такого рода рядов, которое наблюдается, когда $x=h$, так что при этом ряд может быть разделен на h^n. Удалив h^n, получим ряд

$$\frac{1}{n-r+\frac{1}{2}}+\frac{n}{\left(n-r+\frac{1}{2}\right)\left(n-r-\frac{1}{2}\right)}+\frac{n(n-1)}{\left(n-r+\frac{1}{2}\right)\left(n-r-\frac{1}{2}\right)\left(n-r-\frac{3}{2}\right)}+\ldots$$

Сумма этого ряда остается постоянной, каким бы образом ни менялось n, так как она равна

$$\frac{1}{\frac{1}{2}-r} \quad \text{или} \quad \frac{2}{1-2r}.$$

Легко усмотреть, что в случае $r=1$ ряд

$$\frac{1}{n-\frac{1}{2}}+\frac{n}{\left(n-\frac{1}{2}\right)\left(n-\frac{3}{2}\right)}+\frac{n(n-1)}{\left(n-\frac{1}{2}\right)\left(n-\frac{3}{2}\right)\left(n-\frac{5}{2}\right)}+\ldots$$

равен отрицательной величине -2, какое бы число ни подставлялось вместо n.

Если вместо n подставить целое число, ряд будет ограниченным, в противном случае он будет бесконечным. Если n будет дробью, знаменатель которой равен двум, отдельные члены ряда с определенного места станут бесконечными; тем не менее сумма ряда будет известной.

§ LXXVII. Время истечения воды может быть, кроме того, выражено иначе, если те члены, которые не являются полностью интегрируемыми, при помощи преобразования будут обращены в ряды. Таким образом, получим

$$\int\frac{x^n dx}{(x-h)^r\sqrt{x-h}}=2\sqrt{x}\left(\frac{x^{n-r}}{2n-2r+1}+\frac{(2r+1)hx^{n-r-1}}{2\cdot 1\cdot(2n-2r-1)}+\right.$$
$$\left.+\frac{(2r+1)(2r+3)hhx^{n-r-2}}{4\cdot 1\cdot 2(2n-2r-3)}+\ldots\right)=2x^{n-r}\sqrt{x}\left(\frac{1}{2n-2r+1}+\right.$$
$$\left.+\frac{(2r+1)h}{2\cdot 1\cdot(2n-2r-1)x}+\frac{(2r+1)(2r+3)hh}{4\cdot 1\cdot 2(2n-2r-3)xx}+\ldots\right).$$

Применив эти ряды, найдем

$$\sqrt{n-1}\int dx\left(\frac{1}{\sqrt{x-h}}+\ldots\right)=2\sqrt{(n-1)(x-h)}+x^n\sqrt{(n-1)x}\times$$
$$\times\left\{\frac{1\cdot(g-h)}{1\cdot 1\cdot g^n x}\left(\frac{1}{2n-1}+\frac{3\cdot h}{2\cdot 1\cdot(2n-3)x}+\frac{3\cdot 5\cdot hh}{4\cdot 1\cdot 2\cdot(2n-5)xx}+\ldots\right)+\right.$$
$$+\frac{1\cdot 3\cdot(g-h)^2 x^{n-2}}{2\cdot 1\cdot 2\cdot g^{2n}}\left(\frac{1}{4n-3}+\frac{5\cdot h}{2\cdot 1\cdot(4n-5)x}+\frac{5\cdot 7\cdot hh}{4\cdot 1\cdot 2\cdot(4n-7)xx}+\ldots\right)+$$
$$+\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot(g-h)^3 x^{2n-3}}{4\cdot 1\cdot 2\cdot 3\cdot g^{3n}}\left(\frac{1}{6n-5}+\frac{7\cdot h}{2\cdot 1\cdot(6n-7)x}+\right.$$
$$\left.\left.+\frac{7\cdot 9\cdot hh}{4\cdot 1\cdot 2\cdot(6n-9)xx}+\ldots\right)+\ldots\right\}.$$

§ LXXVIII. Для того чтобы получить прибавляемую постоянную A, подставим $a+mk$ вместо g и x и величину $a+k\frac{m+n-1}{n}$ вместо $g-h$. Итак, постоянная будет

$$2\sqrt{(n-1)\left(a+k\frac{m+n-1}{n}\right)}+2\sqrt{(n-1)(a+mk)}\times$$
$$\times\left\{\frac{1\cdot\left(a+k\frac{m+n-1}{n}\right)}{2\cdot 1\cdot(a+mk)}\left(\frac{1}{2n-1}+\frac{3\cdot h}{2\cdot 1\cdot(2n-3)(a+mk)}+\right.\right.$$
$$\left.+\frac{3\cdot 5\cdot hh}{4\cdot 1\cdot 2\cdot(2n-5)(a+mk)^2}+\ldots\right)+\frac{1\cdot 3\cdot\left(a+k\frac{m+n-1}{n}\right)^2}{4\cdot 1\cdot 2\cdot(a+mk)^2}+$$
$$+\left(\frac{1}{4n-3}+\frac{5\cdot h}{2\cdot 1\cdot(4n-5)(a+mk)}+\frac{5\cdot 7\cdot hh}{4\cdot 1\cdot 2\cdot(4n-7)(a+mk)^2}+\ldots\right)+$$
$$+\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot\left(a+k\frac{m+n-1}{n}\right)^3}{8\cdot 1\cdot 2\cdot 3\cdot(a+mk)^3}\times$$
$$\left.\times\left(\frac{1}{6n-5}+\frac{7\cdot h}{2\cdot 1\cdot(6n-7)(a+mk)}+\frac{7\cdot 9\cdot hh}{4\cdot 1\cdot 2\cdot(6n-9)(a+mk)^2}+\ldots\right)+\ldots\right\}.$$

Другой же ряд, который нужно вычесть из этого для получения времени полного опоражнивания, имеет следующий вид:

$$2\sqrt{(n-1)k\frac{m+n-1}{n}}+2\sqrt{(n-1)mk}\times$$
$$\times\left\{\frac{1\cdot\left(a+k\frac{m+n-1}{n}\right)(mk)^{n-1}}{2\cdot 1\cdot(a+mk)^n}\left(\frac{1}{2n-1}+\frac{3\cdot(m-1)(n-1)}{2\cdot mn\cdot 1\cdot(2n-3)}+\right.\right.$$
$$\left.+\frac{3\cdot 5\cdot(m-1)^2(n-1)^2}{4\cdot mmnn\cdot 1\cdot 2\cdot(2n-5)}+\ldots\right)+\frac{1\cdot 3\cdot\left(a+k\frac{m+n-1}{n}\right)^2(mk)^{2n-2}}{4\cdot 1\cdot 2\cdot(a+km)^{2n}}+$$
$$+\left(\frac{1}{4n-3}+\frac{5\cdot(m-1)(n-1)}{2\cdot mn\cdot 1\cdot(4n-5)}+\frac{5\cdot 7\cdot(m-1)^2(n-1)^2}{4\cdot mmnn\cdot 1\cdot 2\cdot(4n-7)}\ldots\right)+$$
$$+\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot\left(a+k\frac{m+n-1}{n}\right)^3(mk)^{3n-3}}{8\cdot 1\cdot 2\cdot 3\cdot(a+mk)^{3n}}\times$$
$$\left.\times\left(\frac{1}{6n-5}+\frac{7\cdot(m-1)(n-1)}{2\cdot mn\cdot 1\cdot(6n-7)}+\frac{7\cdot 9\cdot(m-1)^2(n-1)^2}{4\cdot mmnn\cdot 1\cdot 2\cdot(6n-9)}+\ldots\right)+\ldots\right\}.$$

§ LXXIX. Если приложить эти ряды к отдельным примерам, то можно получить время полного опоражнивания цилиндра. Для того чтобы определить это время в секундах, следует выразить a и k в рейнских скрупулах и найденное число разделить на 250.

Относительно применения такого рода рядов к отдельным случаям надо иметь в виду следующее. Члены, соответствующие друг другу в обоих этих рядах, например те члены, знаменатель которых равен $4n-3$, надо складывать совместно. Это делается для того, чтобы избегнуть недопустимого здесь положения, а именно, чтобы некоторые члены не перешли в бесконечность, поскольку знаменатель исчезает.

§ LXXX.* Попробуем подойти к делу иным образом и посмотрим, нельзя ли разыскать удобный ряд для времен. Элемент времени составляет

$$\frac{-dt\sqrt{(n-1)(a+mk)^n}}{\sqrt{\left(t+k\frac{m+n-1}{n}\right)(a+mk)^n-\left(a+k\frac{m+n-1}{n}\right)(t+mk)^n}}.$$

Пусть $a+mk=g$, $k\frac{m+n-1}{n}=h$ и $k\frac{(m-1)(n-1)}{n}=e$. Положим ради краткости вместо mk просто k и обозначим элемент времени через dT. Тогда

$$dT=\frac{-dt\sqrt{(n-1)g^n}}{\sqrt{tg^n+hg^n-(t+k)^n(a+h)}}.$$

Пусть $a+h=i$ и $t+h=x$. Тогда $t+k=x+k-h=x+e$. Возводя в квадрат, получим

$$g^n x dT^2 - i dT^2 (x+e)^n = (n-1) g^n dx^2.$$

Если продифференцировать это уравнение, положив dx постоянной, то

$$2g^n x ddT + g^n dT dx = 2i ddT (x+e)^n + n i dT (x+e)^{n-1} dx.$$

§ LXXXI. Положим по способу знаменитейшего Лейбница, изложенному в «Деяниях ученых»,

$$T=A+\frac{\alpha x}{1}+\frac{\beta xx}{2}+\frac{\gamma x^3}{3}+\frac{\delta x^4}{4}+\frac{\varepsilon x^5}{5}+\ldots$$

Тогда

$$dT=\alpha dx+\beta x dx+\gamma x^2 dx+\delta x^3 dx+\varepsilon x^4 dx+\ldots$$

* В текст §§ LXXX и LXXXI пришлось ввести некоторые незначительные редакционные исправления, так как оригинал Эйлера написан здесь очень небрежно. — *Г. М.*

Отсюда

$$\begin{aligned}\frac{dT^2}{dx^2}=\alpha\alpha+2\alpha\beta x+2\alpha\gamma x^2+2\alpha\delta x^3+2\alpha\varepsilon x^4+\ldots\\ +\beta\beta x^2+2\beta\gamma x^3+2\beta\delta x^4+\ldots\\ +\gamma\gamma x^4+\ldots\end{aligned}$$

Если подставить эти ряды в уравнение вместо $\frac{dT^2}{dx^2}$ и затем определить α, β, γ и т. д., то можно получить простой ряд, служащий для времен. Уравнение же имеет вид

$$\frac{dT^2}{dx^2}[g^n x - i(x-e)^n]=(n-1)g^n.$$

Но

$$(x+e)^n=e^n+\frac{n}{1}e^{n-1}x+\frac{n(n-1)}{1\cdot 2}e^{n-2}x^2+\frac{n(n-1)(n-2)}{1\cdot 2\cdot 3}e^{n-3}x^3+\ldots$$

Отсюда найдем

$$\alpha=\sqrt{\frac{(1-n)g^n}{ie^n}},\quad \beta=\alpha\frac{g^n-nie^{n-1}}{2ie^n},$$

$$\gamma=\frac{\beta g^n}{ie^n}-\frac{\beta\beta}{2\alpha}-\frac{n\beta}{1\cdot e}-\frac{n(n-1)\alpha}{1\cdot 2\cdot 2e^2} \quad \text{и т. д.}$$

ИМЕННОЙ УКАЗАТЕЛЬ — INDEX NOMINUM

* Курсивом указаны страницы предисловия, введения и примечаний; стр. 19—280 относятся к латинским текстам Эйлера, а стр. 283—571 к русскому переводу.
Litteris italicis paginae praefationis, prooemii et annotationum notantur; pp. 19—280 ad textum Latinum et pp. 283—571 ad versionem Rossicam pertinent.

СОДЕРЖАНИЕ — CONSPECTUS TOMI

**Рукописные материалы Л. Эйлера
в Архиве АН СССР, т. II**

ТРУДЫ АРХИВА, Вып. 20

*Утверждено к печати
Архивом Академии наук СССР*

Технический редактор *Н. Ф. Виноградова*
Корректор *Т. Г. Эдельман*
Латинский текст прочитан *Л. З. Фрадкиной*

Сдано в набор 7/XII 1964 г. Подписано к печати 7/VI 1965 г. РИСО АН СССР № 1-142В. Формат бумаги 70 × 108$^1/_{16}$. Бум. л. 18. Печ. л. 36 = 49.32, усл. печ. л. Уч.-изд. л. 45.7. Изд. № 2114. Тип. зак. 1076. Тираж 1000. ТП 1965 г. № 413.

Цена 3 р. 30 к.

Ленинградское отделение издательства «Наука»
Ленинград, В-164, Менделеевская лин., д. 1

1-я тип. изд-ва «Наука». Ленинград, В-34, 9 лин., д. 12

ТРУДЫ АРХИВА АКАДЕМИИ НАУК СССР

Вып. 1. Архив АН СССР. Обозрение архивных материалов, том I. Под редакцией Г. А. Князева и Л. Б. Модзалевского. 1933, 259 стр.

Вып. 2. Ученая корреспонденция Академии наук XVIII века, 1766—1782. Научное описание. Составила И. И. Любименко. 1937, 606 стр.

Вып. 3. Рукописи Ломоносова в Академии наук СССР. Научное описание. Составил Л. Б. Модзалевский. 1937, 403 стр.

Вып. 4. Материалы для истории экспедиций Академии наук в XVIII и XIX вв. Хронологические обзоры и описание архивных материалов. Составила В. Ф. Гнучева. 1940, 310 стр.

Вып. 5. Архив АН СССР. Обозрение архивных материалов, том II. Под редакцией Г. А. Князева и Л. Б. Модзалевского. 1946, 391 стр.

Вып. 6. В. Ф. Гнучева. Географический департамент Академии наук XVIII в. 1946, 446 стр.

Вып. 7. Документы по истории изобретения фотографии. Переписка Ж. Н. Ниепса, Ж. М. Дагерра и других лиц. Под редакцией Т. П. Кравца. 1949, 509 стр.

Вып. 8. Рукописные материалы И. П. Павлова в Архиве АН СССР. Научное описание. Составили Г. П. Блок и Е. С. Кулябко. 1949, 156 стр.

Вып. 9. Архив АН СССР. Обозрение архивных материалов, том III. Под редакцией Г. А. Князева, П. Н. Корявова и Г. П. Блока. 1950, 142 стр.

Вып. 10. Рукописи Б. Б. Голицына в Архиве АН СССР. Составили Г. П. Блок и М. В. Крутикова. 1952, 139 стр.

Вып. 11. Рукописные материалы И. П. Кулибина в Архиве АН СССР. Научное описание с приложением текстов и чертежей. Составили Н. М. Раскин и Б. А. Малькевич. 1953, 734 стр.

Вып. 12. Материалы Ф. П. Моисеенко в Архиве АН СССР. Описание научных работ, личных и служебных документов. Тексты минералогических работ. Составили И. И. Шафрановский и Н. М. Раскин. 1955, 105 стр.

Вып. 13. Письма А. О. Ковалевского к И. И. Мечникову (1866—1900). Под редакцией Ю. И. Полянского при участии И. И. Соколова и Л. К. Кувановой. 1955, 312 стр.

Вып. 14. Рукописные материалы Е. С. Федорова в Архиве АН СССР. Научное описание, тексты. Составили И. И. Шафрановский и Н. М. Раскин. 1957, 215 стр.

Вып. 15. Рукописные материалы химиков второй половины XVIII в. в Архиве АН СССР. Научное описание. Составил Н. М. Раскин. 1957, 213 стр.

Вып. 16. Архив АН СССР. Обозрение архивных материалов, том IV. Под редакцией Г. А. Князева, Г. П. Блока и Т. И. Лысенко. 1959, 353 стр.

Вып. 17. Рукописные материалы Л. Эйлера в Архиве АН СССР, том I. Научное описание. Составили Ю. Х. Копелевич, М. В. Крутикова, Г. К. Михайлов и Н. М. Раскин. 1962, 427 стр.

Вып. 18. Рукописные материалы И. И. Мечникова в Архиве АН СССР. Научное описание, тексты. Составили Л. К. Куванова и М. С. Бастракова. 1960, 98 стр.

Вып. 19. Архив АН СССР. Обозрение архивных материалов, том V. Под редакцией Г. А. Князева, Е. С. Кулябко, Б. В. Левшина, Н. М. Раскина и А. М. Черникова. 1963, 188 стр.

ИСПРАВЛЕНИЯ И ОПЕЧАТКИ

Страница	*Строка*	*Напечатано*	*Должно быть*
62	5 снизу	$\frac{N}{MF^2}$	$\frac{N^2}{MF^2}$
318	16 »	$\frac{dY}{y}$	$\frac{dY}{Y}$
380	1 »	мсек.^{2}	м/сек.^{2}
482	5 сверху	QML	QNL
552	1 снизу	$M. \Gamma.$	$\Gamma. M.$

Рукописные материалы Леонарда Эйлера