Министерство высшего и среднего специального образования РСФСР

Ленинградский ордена Ленина политехнический институт
имени М. И. Калинина

На правах рукописи

П. Н. ГРАДИНАРОВ

ТОЧНОСТНЫЕ И НАДЕЖНОСТНЫЕ СВОЙСТВА АЛГОРИТМОВ, ПОСТРОЕННЫХ НА ОПЕРАЦИЯХ НАД ЧЛЕНАМИ ВАРИАЦИОННЫХ РЯДОВ

(05.255 — техническая кибернетика)

Автореферат диссертации
на соискание ученой степени
кандидата технических наук

1971

МВ и ССО РСФСР
ЛЕНИНГРАДСКИЙ ОРДЕНА ЛЕНИНА ПОЛИТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ
им.М.И.КАЛИНИНА

На правах рукописи

ГРАДИНАРОВ П.Н.

ТОЧНОСТНЫЕ И НАДЕЖНОСТНЫЕ СВОЙСТВА АЛГОРИТМОВ, ПОСТРОЕННЫХ НА ОПЕРАЦИЯХ НАД ЧЛЕНАМИ ВАРИАЦИОННЫХ РЯДОВ

(05.255 – Техническая кибернетика)

Автореферат диссертации на соискание
ученой степени кандидата технических
наук

Научный руководитель:
доктор технических наук,
профессор И.Б.Челпанов

Ленинград
1971

Работа выполнена на кафедре "Механика и процессы управления" Ленинградского ордена Ленина политехнического института имени М.И.Калинина.

Научный руководитель: доктор технических наук, профессор ЧЕЛПАНОВ И.Б.

Официальные оппоненты:

Доктор технических наук, профессор ЦЕЙТЛИН Я.М.

Кандидат технических наук ХУСНУТДИНОВ Г.Н.

Ведущее предприятие: Институт проблем управления (автоматики и телемеханики).

Автореферат разослан " 5 " ноября 1971 г.

Защита диссертации состоится " 7 " декабря 1971 г. на заседании совета физико-механического факультета Ленинградского ордена Ленина политехнического института имени М.И.Калинина (Ленинград, К-251, Политехническая ул., 29).

С диссертацией можно ознакомиться в фундаментальной библиотеке института.

Ученый секретарь совета
физико-механического факультета (Н.В.ДУШИН)

Для повышения точности и надежности измерений в измерительные системы часто вводят функциональную избыточность. Рассматривается простейший вариант схемы с избыточностью: полезный сигнал S измеряется несколькими параллельно включенными датчиками и их показания подвергаются дополнительной обработке с целью получения наилучшего в определенном смысле результата. Для достижения максимальной точности, необходимо осреднить все показания с весовыми коэффициентами, обратно пропорциональными дисперсиям погрешностей датчиков (при нормальном распределении погрешностей этот алгоритм оптимален по критерию минимума дисперсии ошибки). На практике очень часто нет данных о характеристиках погрешностей датчиков, для определения весовых коэффициентов нужны специальные предварительные поверки, которые, как правило, не окупаются достигаемым повышением точности. Поэтому обычно пренебрегают существующей неравноточностью датчиков и производят равномерное осреднение. Однако алгоритм равномерного осреднения всех показаний очень чувствителен к ненадежности датчиков – при отказе даже одного из датчиков происходит существенное ухудшение точности или вообще результаты становятся недостоверными. Предварительное исключение данных, которые представляются недостоверными, возможно, но обычно рекомендуемые приемы приводят к существенному усложнению алгоритмов преобразования.

В реферируемой работе проведено аналитическое исследование точностных и надежностных свойств алгоритмов, построенных на операциях над членами вариационного ряда, который составлен из показаний датчиков. Эти алгоритмы заключаются в следующем: показания N датчиков выстраиваются в порядке возрастания, при этом получается вариационный ряд показаний, затем с обоих концов отбрасывается одинаковое число (по u) членов ряда и остальные $v = N-2u$ членов подвергаются равномерному осреднению. Крайними случаями при этом являются равномерное осреднение всех показаний (при $u=0$) и выбор медианы совокупности показаний (среднего члена вариационного ряда) или мажорирование (для нечетного $N=2h+1$ при $u=h$).

Работа состоит из введения и пяти глав; в конце сформулированы основные выводы.

Во введении дается краткий обзор литературы по теории вариационных рядов, а также по вопросам, связанным с практической реализацией алгоритмов, использующих операции над членами вариационных рядов (в частности, алгоритма выбора медианы).

Первая глава посвящена некоторым вопросам теории вариационных рядов. Используется определение понятия вариационного ряда, данное Н.В.Смирновым в работе [6], но в связи с рассматриваемыми в дальнейшем задачами это определение несколько обобщается. Пусть $\{x\}=(x_1,x_2,\ldots,x_N)$ есть исходная совокупность случайных величин и $\{\xi\}=(\xi_1,\xi_2,\ldots,\xi_N)$, где $\xi_1\le\xi_2\le\ldots\le\xi_N$, есть вариационный ряд, соответствующий совокупности $\{x\}$. Определение ряда распространяется и на общий случай, когда элементы x_k $(k=1,2,\ldots,N)$ зависимы между собой и их законы распределения различны (не обязательно рассматривать совокупность $\{x\}$ как выборку из одной генеральной совокупности). Приведен пример (при $N=3$) для нахождения плотности вероятности второго (среднего) члена вариационного ряда в наиболее общем случае. Получена также общая формула плотности вероятности i-го члена ряда для произвольного N при предположении, что элементы совокупности $\{x\}$ независимы:

$$f_i^*(x)=\sum_{j=1}^{N} f_j(x)\sum{}' F_{\alpha_1}(x)F_{\alpha_2}(x)\ldots F_{\alpha_{i-1}}(x)\times$$
$$\times\left[1-F_{\alpha_i}(x)\right]\left[1-F_{\alpha_{i+1}}(x)\right]\ldots\left[1-F_{\alpha_{N-1}}(x)\right], \qquad (1)$$

$$\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_{N-1}\ne j;\quad \alpha_\ell\ne\alpha_m \text{ при } \ell\ne m.$$

Здесь $f_k(x)$ – плотность вероятности случайной величины x_k, а $F_k(x)$ – ее закон распределения.

При том же предположении о независимости x_k описан способ получения общей формулы двумерной плотности вероятности $f_{ij}(x,y)$ i-го и j-го членов ряда.

Подробно рассматривается случай, когда исходная совокупность $\{x\}$ состоит из элементов двух групп: $N-r$ элементов

имеют одинаковые распределения с дисперсией σ^2, а r элементов также распределены одинаково, но с другой дисперсией $\sigma_1^2>\sigma^2$ (считается, что $r<\left[\frac{N}{2}\right]$). Особое внимание уделяется исследованию свойств вариационного ряда при предположении, что $\sigma_1\to\infty$. Если это условие выполняется, то элементы второй группы занимают крайние места в вариационном ряду $\{\xi\}$, т.е. вариационный ряд $\{\zeta\}=(\zeta_1,\zeta_2,\ldots,\zeta_{N-r})$, составленный только из элементов с ограниченной дисперсией σ^2, входит в состав ряда $\{\xi\}$ компактным "блоком". В работе показано, что плотность вероятности i-го члена ряда $\{\xi\}$ выражается формулой:

$$f_i^*(x)=\sum_{k=1}^{r+1}\pi_k\varphi^*_{i-r+k-1}(x), \qquad (2)$$

если i удовлетворяет условию $r<i<N-r+1$. В (2) $\varphi_j^*(x)$ есть плотность вероятности j-го члена ряда $\{\zeta\}$, а π_k есть вероятность осуществления k-го варианта взаимного расположения элементов двух групп в вариационном ряду $\{\xi\}$ (число таких вариантов равно $r+1$). Формула, аналогичная (2), имеет место также и для двумерной плотности вероятности $f_{ij}^*(x,y)$. Для моментов членов ряда $\{\xi\}$ справедливы следующие зависимости:

$$m_i^*=\sum_{k=1}^{r+1}\pi_k\mu^*_{i_1+k}, \qquad (3)$$
$$a_{ij}^*=\sum_{k=1}^{r+1}\pi_k\alpha^*_{i_1+k,\,j_1+k}, \qquad (4)$$
$$i_1=i-r-1,\ j_1=j-r-1,$$

где m_i^* и a_{ij}^* представляют собой математическое ожидание и второй смешанный начальный момент соответствующих членов исходного ряда $\{\xi\}$, μ_i^* и α_{ij}^* – те же характеристики для членов ряда $\{\zeta\}$.

Предположим, что с обоих концов ряда $\{\xi\}$ отбрасываются по u элементов и остальные v подвергаются осреднению:

$$\bar{\xi}_v = \sum_{i=1}^{v} b_i \xi_{u+i}, \quad \sum_{i=1}^{v} b_i = 1 \tag{5}$$

(b_i - весовые коэффициенты осреднения). В работе показано, что если $r \leq u$, то дисперсия $\sigma_{\bar{v}}^2$ среднего значения $\bar{\xi}_v$ определяется формулой

$$\sigma_{\bar{v}}^2 = \sum_{k=1}^{r+1} \pi_k \alpha_{\bar{\xi}_k} - m_{\xi}^2, \tag{6}$$

или в случае равномерного осреднения ($m_{\xi} = 0$)

$$\sigma_{\bar{v}}^2 = \sum_{k=1}^{r+1} \pi_k \alpha_{\bar{\xi}_k}, \tag{7}$$

где через $\alpha_{\bar{\xi}_k}$ обозначен второй начальный момент среднего значения $\bar{\xi}_k$ тех v членов ряда $\{\xi\}$, которые в k-ом варианте взаимного расположения элементов двух групп занимают средние v места в исходном ряду $\{\xi\}$.

Во второй главе исследуются точностные свойства алгоритма выбора медианы (мажорирования). Ввиду важных преимуществ этого алгоритма (обеспечение высокой надежности измерения и простота практической реализации) ему в работе уделено особое внимание. Примеры практического осуществления выбора медианы при помощи элементов, выполняющих элементарные операции непрерывной логики *minimum* и *maximum* , приведены в работе [5]. Медиана может быть выделена также при помощи схемы с обратной связью (кворум-элемента). Действие кворум-элемента описано в работах [I,2]. В [3] оценивается достигаемая точность реализации алгоритма при использовании в кворум-элементе неидеальных (с зоной линейности) релейных элементов.

Основное содержание проведенных во второй главе исследований заключается в сопоставлении достигаемой точности измерения в случае мажорирования, равномерного осреднения и осреднения с весами, обратно пропорциональными дисперсиям погрешностей при различных гипотезах о свойствах погрешностей используемых датчиков.

В работе принято предположение об аддитивности погрешностей датчиков:

$$x_i = s + n_i, \quad i = 1, 2, \ldots, N, \tag{8}$$

где x_i есть показание i-го датчика. В этом случае все рассматриваемые алгоритмы преобразования инвариантны относительно полезного сигнала s . Вариационному ряду $\{\xi\}$, составленному из показаний датчиков, соответствует вариационный ряд $\{\eta\} = (\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_N)$, составленный из погрешностей n_i . Для рассматриваемых алгоритмов $z = L(x_1, x_2, \ldots, x_N) = L_1(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_N)$ свойства ошибки $e = z - s$ преобразования определяются свойствами членов ряда $\{\eta\}$.

Все результаты, полученные во второй главе, предполагают нормальное распределение погрешностей датчиков. Рассматриваются следующие основные случаи:

I. Измеряемый сигнал квантован, в конце преобразования производится квантование сигнала по исходным уровням. При этом возможно как безошибочное восстановление, так и ошибка на одну или несколько ступеней квантования.

Для простоты вычисления проведены при $N = 3$. Критерием качества преобразования в этом случае является вероятность Q_γ получения ошибки, т.е. неправильного результата. (Здесь и дальше индекс γ указывает на используемый алгоритм, а именно, $\gamma = M$ означает выбор медианы (мажорирование); $\gamma = \bar{v}$ - осреднение v средних членов ряда; $\gamma = \bar{B}$ - равномерное осреднение всех показаний; $\gamma = \bar{H}$ - неравномерное (с весами) осреднение всех показаний). Показано, что при равноточных датчиках получается $Q_{\bar{B}} < Q_M$, но разница невелика; если имеет место даже не очень большая неравноточность, мажорирование (голосование по большинству) обеспечивает меньшую вероятность получения неправильного результата. Осреднение с весами, обратно пропорциональными дисперсиям погрешностей, всегда обеспечивает минимальную вероятность Q_γ , но для реализации этого алгоритма, как уже отмечалось, необходимы сведения о характеристиках погрешностей датчиков.

Во всех остальных разделах измеряемый сигнал считается непрерывным, поэтому ошибки e преобразования имеют непрерывное распределение и их свойства удобнее всего характеризовать дисперсией.

2. Распределения всех погрешностей одинаковы.

Получена приближенная формула для дисперсии ошибки преобразования при выборе медианы:

$$\sigma_м^2 \approx \frac{\pi}{4h+\pi}\,\sigma^2, \tag{9}$$

где σ^2 есть дисперсия нормально распределенной погрешности одного датчика, а $h = \frac{N-1}{2}$ (число датчиков N считается нечетным). Как известно, при осреднении

$$\sigma_{\bar{в}}^2 = \frac{1}{2h+1}\,\sigma^2. \tag{10}$$

Сопоставление (9) и (10) показывает, что с ростом h порядок убывания дисперсий $\sigma_м^2$ и $\sigma_{\bar{в}}^2$ одинаков. При этом дисперсия среднего значения всегда меньше дисперсии медианы:

$$C_h = \frac{\sigma_м^2}{\sigma^2} = \frac{\pi(2h+1)}{4h+\pi} \geqslant 1, \tag{11}$$

но их отношение близко к единице; наибольший проигрыш получается теоретически при $h \to \infty$. При этом относительная разница среднеквадратических отклонений составляет 25%.

Разложением плотности вероятности медианы (среднего члена вариационного ряда $\{\eta\}$, составленного из погрешностей датчиков) в ряд Грама-Шарлье показано, каким образом распределение медианы с ростом h стремится к нормальному. Получается, что даже при $N=3$ $(h=1)$ распределение может быть достаточно точно аппроксимировано нормальным. Именно при использовании такой аппроксимации и была получена формула (9).

3. Случай трех датчиков с различными параметрами распределений погрешностей.

а) Два датчика имеют одинаковые нормальные распределения погрешностей с дисперсией σ^2, погрешность третьего ("плохого") датчика имеет дисперсию σ_1^2. Для этого случая получена общая формула для дисперсии ошибки при выборе медианы:

$$\sigma_м^2 = \Big[1 + \frac{\delta^2}{2} - \frac{1}{\pi}\Big(\delta^2 \operatorname{arctg}\frac{\delta^2}{\sqrt{1+2\delta^2}} + 2\operatorname{arctg}\frac{1}{\sqrt{1+2\delta^2}} + \sqrt{1+2\delta^2}\Big)\Big]\,\sigma^2, \tag{12}$$

где $\delta = \frac{\sigma_1}{\sigma}$.

Из этой формулы при условии $\delta \gg 1$ получается следующая приближенная формула:

$$\sigma_м^2 \approx \Big(1 - \frac{5\sqrt{2}}{3\pi\delta}\Big)\sigma^2 \approx \Big(1 - 0{,}75\,\frac{\sigma}{\sigma_1}\Big)\sigma^2, \tag{13}$$

При возрастании δ дисперсия $\sigma_м^2$ остается ограниченной, так что при $\delta \to \infty$ имеем $\sigma_м^2 \to \sigma^2$. Если считать дисперсию $\sigma^2 \neq 0$ фиксированной, то предельный переход $\delta \to \infty$, т.е. $\sigma_1 \to \infty$ означает полный отказ "плохого" датчика. Таким образом, при выборе медианы показание вышедшего из строя датчика исключается – дисперсия ошибки измерения не превышает дисперсию погрешности одного неотказавшего датчика. При этом исключение происходит "автоматически" – без использования посторонней информации об отказах.

При равномерном осреднении

$$\sigma_{\bar{в}}^2 = \frac{1}{9}(2+\delta^2)\,\sigma^2 \tag{14}$$

и дисперсия $\sigma_{\bar{в}}^2$ возрастает вместе с δ неограниченно.

При наличии неравноточности датчиков равномерное осреднение дает более высокую точность лишь на небольшом интервале изменения δ, содержащем единицу (в работе получены границы этого интервала: $\delta = 0{,}35$ и $\delta = 2{,}0$). При $\delta > 2{,}0$ выбор медианы выгоднее, чем осреднение.

Осреднение с весами, обратно пропорциональными дисперсиям погрешностей, обеспечивает при любых σ^2 и σ_1^2 минимальную дисперсию: если датчик с дисперсией погрешности σ_1^2 полностью отказал, его показание исключается, но для этого необходимо знать – какой именно датчик отказал (нужно иметь постороннюю информацию об отказах).

Аналогичная ситуация имеет место и при учете систематических погрешностей датчиков. Если выбирать медиану, математическое ожидание ошибки $m_м$ остается ограниченным при возрастании математического ожидания m_1 "плохого" датчика; при осреднении $m_{\bar{в}}$ возрастает неограниченно вместе с m_1.

б) Все три датчика имеют различные дисперсии погрешностей: $\sigma_1^2 \neq \sigma_2^2 \neq \sigma_3^2$. Получена общая формула для дисперсии $\sigma_м^2$ ошибки при выборе медианы. На плоскости параметров (λ_1, λ_2), где $\lambda_1 = \frac{\sigma_2}{\sigma_1}$ и $\lambda_2 = \frac{\sigma_3}{\sigma_1}$, построена область, в которой равномерное осреднение дает меньшую дисперсию ошибки, чем медиана. Эта область имеет вид овала, несколько вытянутого вдоль биссектрисы координатного угла.

4. Измерение производится датчиками двух групп: $N-r$ "хорошими" датчиками с дисперсией погрешностей σ^2 и r "плохими", с дисперсией погрешностей σ_1^2.

Для случая $r=1$ получена приближенная формула для дисперсии ошибки при выборе медианы:

$$\sigma_м^2 \approx \left(в - c\frac{\sigma}{\sigma_1}\right)\sigma^2, \qquad (15)$$

где c и $в$ – коэффициенты, зависящие от числа N используемых датчиков. Их значения рассчитаны для нескольких значений $h = \frac{N-1}{2}$. С ростом N дисперсия ошибки $\sigma_м^2$ довольно быстро убывает.

Получено также приближенное выражение для дисперсии ошибки при $N=5$ и $r=2$. Вычисление дисперсии $\sigma_м^2$ возможно при любых N, r и $\frac{\sigma}{\sigma_1}$, но при этом получаются сложные и неудобные для анализа формулы. Поэтому в работе рассмотрен более подробно предельный случай полного отказа "плохих" датчиков: $\sigma_1 \to \infty$ и для получения соответствующих характеристик использованы результаты, полученные в гл.I. Определена, в частности, плотность вероятности медианы при произвольных $N=2h+1$ и $r \leq h$ и найдены значения дисперсии $\sigma_м^2$ ошибки преобразования. На основании результатов вычисления построена зависимость $\sigma_м^2$ от целочисленного аргумента N при разных r. Получается, что дисперсия ошибки убывает с ростом N даже в

предельном случае $r=h$. При уменьшении r убывание происходит быстрее. Следовательно, выбор медианы обеспечивает повышение точности даже в случае полного отказа менее половины датчиков. При $r>h$ дисперсия ошибки оказывается пропорциональной дисперсии погрешности σ_1^2 "плохих" датчиков. Аналогичный эффект исключения "плохих" показаний при $r \leq h$ наблюдается и при наличии систематических погрешностей датчиков; при этом, однако, не происходит уменьшение систематической ошибки преобразования по сравнению с систематической погрешностью одного "хорошего" датчика.

5. В качестве критерия сравнения точностных свойств рассматриваемых алгоритмов используется вероятность Q_γ выхода ошибки e измерения из заданного интервала ($-\Delta_1$, Δ_2).

Показано на примере (при $N=3$), что при симметричном интервале ($\Delta_1 = \Delta_2 = \Delta$) соотношение между алгоритмами остается тем же, что и по критерию минимума дисперсии ошибки. Если датчики равноточны, осреднение обеспечивает меньшее значение вероятности Q_γ, чем медиана, но разница невелика. Если один из датчиков имеет повышенную дисперсию σ_1^2 погрешности, с ростом отношения $\delta = \frac{\sigma_1}{\sigma}$ и при выборе медианы, и при осреднении вероятность Q_γ возрастает, но в первом случае возрастание происходит гораздо медленее и при $\delta > 2$ получается $Q_м < Q_{\bar{в}}$. Это еще раз подтверждает меньшую чувствительность алгоритма выбора медианы к неравноточности датчиков по сравнению с равномерным осреднением.

В случае несимметричного интервала ($\Delta_1 \neq \Delta_2$) исследована возможность уменьшения вероятности выхода из интервала ($-\Delta_1$, Δ_2) выбором не среднего, а первого или третьего члена вариационного ряда. На плоскости (α, $\varkappa$), где $\alpha = \frac{\Delta_1}{\sigma\sqrt{2}}$ и $\varkappa = \frac{\Delta_2}{\Delta_1}$ выделены области, в которых вероятность Q_γ минимизируется при выборе соответственно первого, второго или третьего члена ряда (датчики считаются равноточными). Показано, что при определенных соотношениях между Δ_1 и Δ_2 первый или третий член могут обеспечить меньшую вероятность Q_γ, чем осреднение.

6. Существует повышенная вероятность больших отклонений

показаний датчиков.

Математическое описание такого состояния для одного датчика осуществляется заданием распределения погрешности в виде смеси двух распределений:

$$f(x)=(1-\alpha)f^{(1)}(x)+\alpha f^{(2)}(x) \qquad (16)$$

с дисперсиями соответственно σ' и σ'', причем $\sigma''>>\sigma'$. Параметр α представляет собой вероятность появления больших отклонений (вероятность временного сбоя датчика, когда погрешность измерения будет иметь плотность $f^{(2)}(x)$). Считается, что $\alpha<<1$.

В работе показано, что при выборе медианы вероятность больших отклонений существенно уменьшается - она имеет порядок α^{h+1}, в то время как при осреднении вероятность больших отклонений сохраняется порядка α.

7. Погрешности датчиков коррелированы между собой.

Рассматривается случай равноточных датчиков с нулевыми математическими ожиданиями и дисперсиями σ^2 погрешностей. Предположим, что погрешность n_i i-го датчика можно представить в виде:

$$n_i=\sqrt{\rho}\,y+\sqrt{1-\rho}\,w_i, \qquad (17)$$

где $w_i\ (i=1,2,\dots,N)$ и y - некоррелированные между собой случайные величины с нулевыми математическими ожиданиями и одинаковыми дисперсиями, равными σ^2. При таких предположениях коэффициент ρ равен коэффициенту корреляции между двумя любыми погрешностями n_i и n_j.

В работе показано, что если представление (17) возможно, дисперсия ошибки σ_M^2 при выборе медианы можно представить формулой:

$$\sigma_M^2=[\rho+\mu(1-\rho)]\sigma^2, \qquad (18)$$

где $\mu=\frac{\sigma^2_{M,N}}{\sigma^2}$ есть коэффициент, определяемый дисперсией $\sigma^2_{M,N}$ медианы в случае некоррелированных погрешностей.

Формула (18) показывает, что с увеличением ρ выигрыш в точности при выборе медианы по сравнению с отдельным датчиком уменьшается: при $\rho=1$ (полная коррелированность погрешностей) получается $\sigma_M^2=\sigma^2$, т.е. введение избыточности неэффективно.

<u>В третьей главе</u> исследуются точностные свойства алгоритма осреднения v средних членов ряда, симметрично расположенных относительно его середины. Если датчики равноточны, чем большее число v членов подвергается осреднению, тем меньше дисперсия ошибки (осреднение всех показаний в этом случае является оптимальной операцией). Следовательно, с точки зрения точности преобразования, желательно осреднять как можно больше членов ряда. С другой стороны, при увеличении числа $2u$ отбрасываемых членов ряда возрастает надежность преобразования; наиболее высокой надежностью обладает алгоритм выбора медианы (это показано в гл.IУ). Поэтому при выборе числа $2u$ нужно искать компромиссное решение в зависимости от конкретных требований, предъявляемых к измерению в отношении точности и надежности.

Если число $2u$ отбрасываемых членов ряда невелико, проигрыш в точности при осреднении v средних членов ряда по сравнению с осреднением всех показаний незначителен. Так, например, при $N=5$ и $u=1$ относительная разница $\Delta_\sigma=\frac{\sigma_1-\sigma_2}{\sigma_2}\cdot 100\%$ составляет всего лишь 4,5%. При наличии даже небольшой неравноточности датчиков, когда равномерное осреднение всех показаний уже не является оптимальной операцией, оказывается, что при отбрасывании нескольких крайних членов вариационного ряда дисперсия ошибки измерения меньше, чем при осреднении всех показаний.

Если из N используемых датчиков r отказало (причем неизвестно какие именно), принимается, что дисперсия их погрешностей $\sigma_1\to\infty$, тогда их показания займут крайние места в вариационном ряду. Если при этом $u\geq r$, даже при самых неблагоприятных вариантах взаимного расположения показаний, когда показания всех отказавших датчиков смещены в одну сторону, они исключаются и алгоритм дает достоверный результат. При $u<r$ дисперсия ошибки преобразования будет содержать слагаемое, пропорциональное дисперсии σ_1^2 отказавших датчиков и результат измерения будет недостоверным.

В работе приведены таблицы для дисперсии ошибки преобразования при осреднении v средних членов ряда для нескольких значений N в случае равномерного и нормального распределения погрешностей.

В четвертой главе исследуются надежностные свойства алгоритмов. Датчик считается отказавшим, если его показание сильно отличается от показаний остальных. Как отказ системы измерения квалифицируется такое состояние, когда среди осредняемых членов ряда есть показания отказавших датчиков. При исследовании надежностных свойств алгоритмов использованы некоторые результаты, полученные М.А.Розенблатом в его работе [4].

В случае выбора медианы получена общая формула для вероятности отказа системы при предположении, что измерение производится различными датчиками и что различны вероятности отказа типа завышения q_+ и типа занижения q_-. В случае равнонадежных датчиков для вероятности отказа системы из общей формулы следует:

$$Q_M=\sum_{i=h+1}^{N} C_N^i q_+^i (1-q_+)^{N-i}+\sum_{i=h+1}^{N} C_N^i q_-^i (1-q_-)^{N-i}. \qquad (19)$$

Эта формула приводится в работе [4] . Если $q_+=q_-=\frac{q}{2}$,где q - полная вероятность отказа одного датчика, получаем:

$$Q_M=\frac{1}{2^{N-1}}\sum_{i=h+1}^{N} C_N^i q^i (2-q)^{N-i}. \qquad (20)$$

В общем случае (при использовании любого из рассматриваемых алгоритмов) вероятность отказа системы определяется осреднением условных вероятностей отказа по всем возможным состояниям:

$$Q_\gamma=\sum_{r=0}^{N} Q_{\gamma/r} P_r , \qquad (21)$$

где P_r - вероятность отказа ровно r датчиков, а $Q_{\gamma/r}$ есть условная вероятность отказа системы при условии,что отказало ровно r датчиков. В случае равнонадежных датчиков,величина P_r определяется формулой:

$$P_r=C_N^r q^r (1-q)^{N-r}. \qquad (22)$$

При фиксированных N и r вероятность $Q_{\gamma/r}$ зависит от применяемого алгоритма преобразования. В работе приведены таблицы со значениями вероятностей $Q_{\gamma/r}$ для разных N при использовании различных алгоритмов. В тех же таблицах приведены и формулы для полных вероятностей отказа Q_γ.

Надежностные свойства алгоритмов преобразования исследованы в различных аспектах. Построены графики зависимостей вероятностей отказа системы Q_γ от числа r отказавших датчиков. Рассматривается также изменение надежности системы во времени для экспоненциального закона надежности отдельного датчика (считается, что датчики равнонадежны):

$$q=1-e^{-\lambda t}. \qquad (23)$$

Построены зависимости $Q_\gamma=Q_\gamma(t)$. При малых значениях λt эти зависимости (в логарифмической сетке) приближенно линейны. Определены также средние времена T_γ безотказной работы при использовании различных алгоритмов.

Сопоставление надежностных свойств рассматриваемых алгоритмов показывает, что наиболее высокую надежность преобразования обеспечивает алгоритм выбора медианы. С уменьшением числа $2u$ отбрасываемых членов ряда надежность падает и алгоритм равномерного осреднения всех показаний наиболее чувствителен к отказам датчиков.

В работе рассмотрен также случай неравнонадежных датчиков; надежностные свойства системы исследованы при разных гипотезах о вероятностях отказа датчиков и показано, что соотношение между алгоритмами сохраняется - и в случае неравнонадежности медиана обеспечивает наиболее высокую надежность.

Если все датчики равнонадежны, но вероятности отказа типа завышения и занижения различны ($q_+\neq q_-$), то в зависимости от соотношения q_+/q_- можно повысить надежность системы выбором не среднего, а какого-нибудь другого члена вариационного ряда. В работе построены на плоскости (q_+ , q_-) кривые равных значений вероятностей $Q_i^*=Q_{i+1}^*$ отказов преобразований при выборе соответственно i-го и ($i+1$)-го членов вариационных рядов и, таким образом, выделены области, в которых при выборе соответствующего (i-го) члена ряда вероятность отказа системы Q_i^* минимальна. Показано, что медиана, как лучшая из рассматриваемых оценок, малочувствительна к асимметрии, особенно при малых значениях вероятностей q_+ и q_-. Необходимость в смещении для снижения Q_γ возникает лишь в случаях, когда q_+ и q_- значительно различаются.

Последняя, пятая глава, посвящена совместному анализу точностных и надежностных свойств алгоритмов. Точность преобразования характеризуется осредненной дисперсией

$$\bar{\sigma}_\gamma^2 = \frac{\sum\limits_{r=0}^{N} P_r \sigma_{\gamma,r}^2}{\sum\limits_{r=0}^{N} P_r P_{\gamma/r}}. \qquad (24)$$

Здесь $P_{\gamma/r} = 1 - Q_{\gamma/r}$ – условная вероятность исправной работы системы при условии, что отказало ровно r датчиков; $\sigma_{\gamma,r}^2$ – дисперсия ошибки преобразования при r отказавших датчиках.

Вводятся числа r_1 и r_2 – два характерных значений числа отказавших датчиков. При $r \le r_1$ соответствующий алгоритм выдает правильный результат при любом взаимном расположении показаний исправных и отказавших датчиков; если $r_1 < r \le r_2$, при некоторых вариантах взаимного расположения (при вариантах исправной работы) получается достоверный результат, при других (варианты отказа) при осреднении включаются показания отказавших датчиков и результат преобразования недостоверен. Если $r > r_2$, ни при каких взаимных расположениях показаний невозможно получить достоверный результат.

В частности, для медианы

$$r_1 = h = \frac{N-1}{2}, \quad r_2 = N-1, \qquad (25)$$

а при осреднении v средних членов ряда

$$r_1 = \frac{N-v}{2}, \quad r_2 = N-v. \qquad (26)$$

Если $r \le r_1$, все $r+1$ возможных вариантов взаимного

расположения являются вариантами исправной работы; при $r > r_2$ все варианты являются вариантами отказа.

Дисперсия $\sigma_{\gamma,r}^2$ находится в соответствии с (7) осреднением по вариантам исправной работы вторых начальных моментов $\alpha_{\bar{z}_k}$ с весами π_k:

$$\sigma_{\gamma,r}^2 = \sum_{(k)}{}' \pi_k \alpha_{\bar{z}_k}$$

В работе в полулогарифмической сетке построены зависимости между средним квадратическим отклонением $\bar{\sigma}_\gamma$ и вероятностью отказа Q_γ системы при различных N (диаграмма точность-надежность). Эта диаграмма дает наглядное представление о соотношении между точностью и надежностью преобразования при использовании разных алгоритмов. Видно, что выигрыш в отношении точности приводит к снижению надежности и обратно. При переходе от одного алгоритма к другому (при фиксированном N) изменение точности преобразования невелико, в то время как вероятность отказа может измениться на несколько порядков.

Построена также диаграмма точность-надежность (при $N=3$ и $N=5$) с учетом изменения вероятности отказа датчиков во времени (принято, что q изменяется по экспоненциальному закону).

Выводы

1. Использование алгоритмов, построенных на операциях над членами вариационных рядов, при обработке избыточной информации значительно расширяет возможности повышения точности и надежности измерения.

2. Алгоритм отбрасывания крайних членов вариационного ряда и осреднения оставшихся связан с повышением надежности преобразования. Проигрыш в точности при его применении в случае абсолютной равноточности датчиков незначителен; если имеет место небольшая неравноточность, он может дать более высокую точность по сравнению с равномерным осреднением всех показаний.

3. Наибольшее повышение надежности измерения достигает-

ся при выборе медианы. По сравнению с равномерным осреднением она дает меньшую точность в случае равноточных датчиков, но проигрыш в точности невелик, в то время как надежность может возрастать на несколько порядков. При неравноточных датчиках проигрыш в точности уменьшается и, если неравноточность значительна, медиана дает большую точность, чем равномерное осреднение.

4. При повышенной вероятности больших отклонений показаний датчиков выбор медианы обеспечивает существенное снижение вероятности больших выбросов, осреднение не дает этого эффекта.

5. При наличии одинаковых систематических погрешностей всех датчиков использование алгоритма выбора медианы неэффективно. Однако, если систематические погрешности нескольких датчиков (их число не должно превышать половины всех) существенно возросли, их показания автоматически отбрасываются и систематическая ошибка измерения имеет порядок погрешности "хороших" датчиков.

6. При наличии корреляционной связи между погрешностями датчиков алгоритм выбора медианы, как и осреднение, не может способствовать повышению точности; эта особенность выявляется тем сильнее, чем больше коэффициент корреляции.

7. При использовании вместо медианы других членов вариационных рядов в некоторых случаях существует возможность повышения показателей преобразования, если имеет место несимметрия точностных и надежностных характеристик датчиков.

8. Алгоритмы рассматриваемого класса, в частности медиана, являются непараметрическими – для их реализации не нужно иметь никаких априорных данных о погрешностях датчиков; это важное преимущество по сравнению с оптимальным алгоритмом неравномерного осреднения.

9. Для практической реализации алгоритма выбора медианы разработаны достаточно простые и высоконадежные схемы.

Литература

I. Браславский Д.А. Кворум-элементы для устройств с функциональной избыточностью. В сб.Системы с переменной структурой и их применение в задачах автоматизации полета.Изд. "Наука", 1968.

2. Браславский Д.А., Якубович А.М. Функциональная избыточность и статистическая инвариантность. В сб.Теория инвариантности автоматических систем, т.I, изд."Наука", 1970.

3. Иванов В.Н. О реализации мажоритарной операции (функции голосования) в системах с обратной связью. "Автоматика и телемеханика", 1968, № 7.

4. Розенблат М.А. Надежность резервированных систем с восстанавливающим органом, выполняющим функцию медианы. "Автоматика и телемеханика", 1970, № I.

5. Розенблат М.А. Функция "медиана" в непрерывной логике и ее реализация. "Автоматика и телемеханика", 1969, № I.

6. Смирнов Н.В. Предельные законы распределения для членов вариационного ряда. В сб.Теория вероятностей и математическая статистика (избранные труды Н.В.Смирнова), изд."Наука",1970.

Разделы диссертации были доложены на Седьмой Всесоюзной научно-технической конференции: Кибернетические методы в теории и практике измерений, Ленинград, 1970 и на Четвертом симпозиуме по проблеме избыточности в информационных системах, Ленинград, 1970. Некоторые результаты были опубликованы в сборнике докладов симпозиума в работе:

Е.П.Гильбо, П.Н.Градинаров, И.Б.Челпанов. Повышение точности и надежности преобразования сигналов нескольких датчиков при применении мажоритарных схем.

М 55340 . Подписано к печати 1.11.71 . Заказ 142
Тираж 150 . Бесплатно.

Отпечатано на ротапринте фундаментальной библиотеке Ленинградского ордена Ленина политехнического института им.М.И.Калинина. Ленинград, К-251, Политехническая ул., 29.