

6  
А-43  
МИНИСТЕРСТВО ПРИБОРОСТРОЕНИЯ  
СРЕДСТВ АВТОМАТИЗАЦИИ И  
СИСТЕМ УПРАВЛЕНИЯ СССР

АКАДЕМИЯ НАУК  
СССР

ИНСТИТУТ АВТОМАТИКИ И ТЕЛЕМЕХАНИКИ  
/ТЕХНИЧЕСКОЙ КИБЕРНЕТИКИ/

на правах рукописи

С.М.Меерков

АСИМПТОТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ ИССЛЕДОВАНИЯ НЕПРЕРЫВНЫХ  
СИСТЕМ АВТОМАТИЧЕСКОЙ ОПТИМИЗАЦИИ

(спец. № 255 - техническая кибернетика)

Автореферат  
диссертации на соискание ученой степени  
кандидата технических наук

Москва 1968



МИНИСТЕРСТВО ПРИБОРОСТРОЕНИЯ  
СРЕДСТВ АВТОМАТИЗАЦИИ И  
СИСТЕМ УПРАВЛЕНИЯ СССР

АКАДЕМИЯ НАУК  
СССР

ИНСТИТУТ АВТОМАТИКИ И ТЕЛЕМЕХАНИКИ  
/ТЕХНИЧЕСКОЙ КИБЕРНЕТИКИ/

на правах рукописи

С.М.Меерков

АСИМПТОТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ ИССЛЕДОВАНИЯ НЕПРЕРЫВНЫХ  
СИСТЕМ АВТОМАТИЧЕСКОЙ ОПТИМИЗАЦИИ

(спец. № 255 – техническая кибернетика)

Автореферат  
диссертации на соискание ученой степени  
кандидата технических наук

Москва 1968



Исследование динамики непрерывных систем автоматической оптимизации, как известно, наталкивается на значительные трудности, связанные со сложностью уравнений, описывающих движение этих систем. Даже простейшие непрерывные экстремальные системы описываются нелинейными нестационарными дифференциальными уравнениями, аналитическое решение которых в большинстве случаев неосуществимо.

В связи с этим А.А. Красовским был предложен /см., например [1] / иной подход к общей задаче исследования систем автоматической оптимизации - рассмотрение двух различных как с технической, так и с математической точки зрения режимов - квазистационарного и форсированного. Оказалось, что уравнения, описывающие динамику квазистационарных режимов, проще для качественного изучения по сравнению с общими уравнениями движения экстремальных систем.

Настоящая работа посвящена развитию асимптотических методов исследования непрерывных систем автоматической оптимизации и систем экстремальной самонастройки в квазистационарном режиме и в одном специфическом классе форсированных режимов. Основные цели, преследовавшиеся в диссертации, заключаются в следующем:

I. Развить единообразные методы исследования динамики различных классов систем автоматической оптимизации и систем экстремальной самонастройки, используя для этой цели методы асимптотических разложений.

II. Изложить с единой точки зрения результаты, полученные в области исследования динамики рассматриваемых классов самонастраивающихся систем /в том числе, и результаты, впервые полученные в настоящей работе/.



Первая глава диссертации носит вводный характер и посвящена, главным образом, обсуждению особенностей непрерывных экстремальных систем с поисковыми колебаниями. Здесь отмечается, что, так как "прямое" измерение частных производных  $\frac{\partial Q}{\partial x_i}$  ( $i = 1, \dots, n$ ) экстремизируемой функции  $Q(x)$  /где  $Q$  - одноэкстремальная дифференцируемая функция обобщенных координат  $x = \{x_1, \dots, x_n\}$  / в общем случае неосуществимо<sup>х/</sup>, методы оценки значений  $\frac{\partial Q}{\partial x_i}$  в непрерывных системах автоматической оптимизации связаны с введением в систему поисковых колебаний, которые приводят к соответствующим движениям обобщенных координат. В отличие от движений обобщенных координат, направленных на поддержание требуемого значения  $\frac{\partial Q}{\partial x_i}$  ( $\frac{\partial Q}{\partial x_i} = 0$ ), движения, вызываемые поисковыми колебаниями, именуется измерительными. Движения же, направленные на поддержание  $\frac{\partial Q}{\partial x_i} = 0$ , называются регулировочными. Ставится задача о представлении решений уравнений движения систем автоматической оптимизации в виде:

$$x_i(t) = \bar{x}_i(t) + \tilde{x}_i(t), \quad /I/$$

где  $\bar{x}_i(t)$ ,  $\tilde{x}_i(t)$  - регулировочное и измерительное движение обобщенной координаты  $x_i(t)$  соответственно. Отмечается, что представление  $x_i(t)$  в виде /I/ существенно упрощает исследование динамики систем автоматической оптимизации вследствие того, что здесь появляется возможность отдельного рассмотрения как основных, регулировочных движений, так и измерительных движений. При этом подчеркивается, что класс режимов, допускающих представление /I/, совпадает с классом квазистационарных и одним специфическим классом форсированных режимов непрерывных экстремальных систем. В работе рассматриваются только те режимы, для которых представление /I/ справедливо. Математическим аппаратом, позволяющим провести разложение /I/, служит метод усреднения [2-4].

х/ В некоторых частных случаях это оказывается возможным. Например, в случае  $Q(x)$  одной скалярной переменной

$$\frac{dQ}{dx} = \dot{Q} \cdot \frac{1}{x}$$

Во второй главе диссертации развивается асимптотический подход к задаче исследования квазистационарных и одного класса форсированных режимов в системах автоматической оптимизации с синхронным детектором и в примыкающей к ним экстремальной системе, разработанной Л.А.Растригиным [5].

В § I вводится стандартная форма уравнений квазистационарного и форсированного режимов. Квазистационарные режимы, как известно, характеризуются тем, что за время периода поискового колебания величина на выходе экстремального регулятора получает достаточно малое приращение [1]. Естественным выводом из этого факта является понятие "иерархии времен", смысл которого заключается в том, что движение системы можно рассматривать в двух масштабах времен - быстром и медленном. В быстром масштабе времени естественно рассматривать поисковые колебания; "медленное" же время характеризует эволюционное движение системы; отношение масштабов времен - малый параметр. Это обстоятельство дает основание утверждать, что уравнения, описывающие квазистационарные режимы непрерывных систем автоматической оптимизации, с помощью соответствующей замены независимой переменной ( $s = \psi(\epsilon)$ ) могут быть приведены к следующей стандартной форме, содержащей малый параметр  $0 < \epsilon \ll 1$ :

$$\frac{dx}{ds} = \epsilon X(x(s), y(s), f(s), s)$$

$$\frac{dy}{ds} = Y(x(s), y(s), f(s), s) \quad /2/$$

$$\frac{df}{ds} = F(s),$$

где  $x = \{x_1, \dots, x_n\}$ ;  $y = \{y_1, \dots, y_m\}$  - обобщенные координаты системы, причем  $x_1, \dots, x_k$  ( $k \leq n$ ) - координаты на выходе экстремального регулятора;  $X = \{X_1, \dots, X_n\}$ ;  $Y = \{Y_1, \dots, Y_m\}$ ;  $F = \{F_1, \dots, F_k\}$ ;  $f = \{f_1, \dots, f_k\}$  - функции, характеризующие поисковые колебания; последнее из уравнений /2/ означает, что скорость поисковых колебаний порядка  $\epsilon$ .



Поскольку основной задачей исследования является представление движения, описываемого системой /2/, в виде суммы регулировочного и измерительного движения /см. /1//, аппарат метода усреднения [2-4] хорошо приспособлен для ее решения. Действительно, метод усреднения направлен именно на выделение в системах вида /2/ эволюционных /регулировочных/ движений с последующим и: чением колебаний решения исходной системы /2/ вокруг решения уравнений для эволюционных движений. Тем самым задача исследования квазистационарных режимов в непрерывных системах автоматической оптимизации с поисковыми колебаниями сводится к выяснению условий, при которых уравнения системы могут быть представлены в виде /2/, с последующим изучением этих уравнений методами теории усреднения.

В качестве одного из примеров приведения уравнений движения систем автоматической оптимизации к стандартной форме /2/ рассматривается простейшая система с синхронным детектором, которая предназначена для экстремального регулирования объекта, представляющего собой последовательное соединение, инерционного звена с передаточной функцией  $W_0 = \frac{1}{\epsilon p + 1}$  и экстремальной статической характеристики  $Q$ . Уравнения, описывающие движение системы, следующие:

$$\frac{dx}{dt} = -\frac{1}{T} Q(y) \alpha f(\omega t) \quad /3/$$

$$\frac{dy}{dt} = \frac{1}{\tau} [-y + x + \alpha f(\omega t)],$$

где  $x$  - величина на выходе экстремального регулятора;

$y$  - величина на выходе инерционной части объекта;

$\alpha f(\omega t)$  - функция, характеризующая поисковые колебания;

$T$  - постоянная времени экстремального регулятора. Тогда в квазистационарном режиме масштаб "быстрого" времени характеризуется величиной  $\frac{1}{\omega}$ , а "медленного" -  $T$ ; отношение масштабов времен  $\frac{1}{T\omega}$  - малый параметр  $\epsilon$ .

Для формального приведения системы /3/ к стандартной форме /2/ вводится подстановка  $s = \omega t$ . Если предполагается, что  $\frac{1}{\omega\tau} \sim 1$  /то есть  $\tau \ll T$ /, то после замены переменных

$$\begin{aligned} \frac{dx}{ds} &= -\epsilon Q(y) \alpha f(s) \\ \frac{dy}{ds} &= \frac{1}{\tau\omega} [-y + x + \alpha f(s)]. \end{aligned} \quad /4/$$

Если же предполагается, что  $\frac{T}{\tau} \sim 1$ , то из /3/ следует:

$$\begin{aligned} \frac{dx}{ds} &= -\epsilon Q(y) \alpha f(s) \\ \frac{dy}{ds} &= \epsilon \frac{T}{\tau} [-y + x + \alpha f(s)]. \end{aligned} \quad /5/$$

Обе системы уравнений /4/ и /5/ описывают квазистационарные режимы в экстремальной системе /3/. Здесь существенно лишь то, что в обоих случаях скорость изменения величины  $x$  на выходе экстремального регулятора меньше скорости  $\frac{df}{ds}$  изменения поискового колебания; это обстоятельство формально отражено коэффициентом  $\epsilon$  в правой части выражения для  $\frac{dx}{ds}$ . Наличие или отсутствие коэффициента  $\epsilon$  в уравнении для  $\frac{dy}{ds}$  характеризует инерционность объекта и не определяет факта квазистационарности режима.

Далее рассматриваются форсированные режимы. Форсированные режимы характеризуются тем, что скорость  $\frac{df}{dt}$  поисковых колебаний и скорость  $\frac{dx}{dt}$  обобщенных координат на выходе экстремального регулятора - величины одного и того же порядка:

$$\frac{df}{dt} \sim \frac{dx}{dt} \quad /6/$$

В общем случае при выполнении соотношения /6/ выделить малый параметр в уравнениях экстремальной системы не удается. Однако один специфический класс форсированных режимов также приводится к виду, содержащему малый параметр. Показано, что стандартная форма уравнений этого класса форсированных режимов имеет вид:

$$\begin{aligned} \frac{dx}{ds} &= X(x, y, f(s), s) \\ \frac{dy}{ds} &= \epsilon Y(x, y, f(s), s) \\ \frac{df}{ds} &\sim 1, \end{aligned} \quad /7/$$



где переменные и функции имеют тот же смысл, что и в /2/. Следовательно, рассматриваемый класс форсированных режимов, так же как и квазистационарные режимы, может быть изучен с помощью метода усреднения.

В качестве примера подстановки, приводящей уравнения форсированного режима к стандартной форме /7/, рассматривается, в частности, замена  $s = \frac{t}{T}$ . Тогда из /3/ в предположении, что  $\frac{T}{\tau} = \varepsilon \ll 1$ , следует:

$$\begin{aligned} \frac{dx}{ds} &= -Q(y) a f(\omega T s) \\ \frac{dy}{ds} &= \varepsilon [-y + \alpha + a f(\omega T s)]. \end{aligned} \quad /8/$$

При  $\omega T \sim 1$  режим, определяемый /8/, является форсированным, так как  $\frac{dx}{ds} \sim \frac{df}{ds}$ .

В § I отмечается также, что выбор новой независимой переменной  $s$ , приводящей уравнения экстремальных систем к стандартным формам /2/, /7/, не является формальной операцией и для каждой конкретной системы производится, вообще говоря, по-разному; соответствующие примеры приведены в главах II, III.

§ 2 посвящен исследованию уравнений квазистационарного режима. Рассматривается экстремальная система с синхронным детектором, предназначенная для минимизации функции  $Q(x_1, \dots, x_n)$ :

$$\frac{dx_i}{dt} = -\frac{1}{T_i} Q(x_1, \dots, x_n) a_i f(\omega_i t) \quad i=1, \dots, n, \quad /9/$$

$\omega_i \neq \omega_j \text{ при } i \neq j,$

где  $x_i, T_i$  — координата на выходе и постоянная времени  $i$ -го канала экстремального регулятора соответственно;  $\omega_i$  — поисковая частота. Предполагается, что постоянные времени  $T_i$  в разных каналах — величины одного и того же порядка; то же относится к  $\omega_i$  и  $a_i$ . Вводятся в рассмотрение величины  $T, \omega$  и  $a$  такие, что  $\frac{T_i}{T} = P_i \sim 1; \frac{\omega_i}{\omega} = k_i \sim 1; \frac{a_i}{a} \sim 1$ . Тогда подстановка  $s = \omega t$

даст:

$$\frac{dx_i}{ds} = -\frac{1}{T_i} \cdot \frac{1}{P_i} Q(x_1 + a_1 f(k_1 s); \dots; x_n + a_n f(k_n s)) a_i f(k_i s) \quad i=1, \dots, n.$$

Для выполнения условий квазистационарности в каждом из каналов, как следует из стандартной формы /2/, необходимо, чтобы  $\frac{1}{T_i} = \varepsilon$ . Таким образом, квазистационарный режим в  $n$ -мерной экстремальной системе с синхронным детектором описывается следующей системой уравнений в стандартной форме:

$$\frac{dx_i}{ds} = -\varepsilon \frac{1}{P_i} Q(x_1 + a_1 f(k_1 s); \dots; x_n + a_n f(k_n s)) a_i f(k_i s) \quad i=1, \dots, n.$$

Использование метода усреднения позволяет представить движение  $x_i(t)$  в виде /1/. При этом оказывается, что регулировочное движение  $\bar{x}_i(t)$  описывается /в первом и во втором приближениях/ следующей системой уравнений:

$$\frac{d\bar{x}_i}{dt} = -\frac{a_i^2}{T_i} \overline{f^2(k_i s)} \frac{\partial Q(\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n)}{\partial x_i} - \frac{1}{T_i} O(a^3); \quad i=1, \dots, n, \quad /10/$$

Где  $\overline{f^2(k_i s)} = \lim_{T' \rightarrow \infty} \frac{1}{T'} \int_0^{T'} f^2(k_i s) ds$ , а измерительное движение  $\tilde{x}_i(t)$  содержит гармонические колебания, амплитуды которых пропорциональны  $\frac{1}{|\omega_i - \omega_j| T_i}$  и  $\frac{1}{|\omega_i - 2\omega_j| T_i}$ .

Таким образом, регулировочное движение  $\bar{x}_i(t)$  в системе /9/ описывается уравнениями градиентного типа /10/. Иными словами, способ синхронного детектирования в этом режиме действительно оценивает величины  $\frac{\partial Q}{\partial x_i}$ .

Анализ полученного выражения для измерительных движений  $\tilde{x}_i(t)$  показывает, что при  $\omega_i \rightarrow \omega_j$  или  $\omega_i \rightarrow 2\omega_j; T_i = const$  амплитуды гармонических составляющих с частотами  $|\omega_i - \omega_j|$  или  $|\omega_i - 2\omega_j|$  неограниченно возрастают. При этом, вообще говоря, при  $\omega_i \neq \omega_j$  и  $\omega_i \neq 2\omega_j$  система в среднем продолжает двигаться в соответствии с градиентом  $Q(x_1, \dots, x_n)$ , однако сглаженное движение "проявляется" уже на очень больших /при очень близких  $\omega_i$  и  $\omega_j$  или  $\omega_i$  и  $2\omega_j$ / интервалах  $\sim \frac{1}{|\omega_i - \omega_j|}$  и  $\frac{1}{|\omega_i - 2\omega_j|}$ , то есть в каждый теку-



ший момент времени отклонение траектории  $x(t)$  от траектории градиентного движения может быть велико. Из требования малости амплитуд измерительного движения вытекают естественные условия на выбор тех значений  $T_i$ , при которых обеспечивается достаточно близкое к градиентному движение системы:

$$\frac{1}{|\omega_i - \omega_j| T_i} \ll 1; \quad \frac{1}{|\omega_i - 2\omega_j| T_i} \ll 1.$$

При точном же равенстве поисковых частот  $\omega_i = \omega_j$  регулировочное движение сходится, как показано в § 2, не к экстремуму функции  $Q(x_1, \dots, x_n)$ , а к некоторой точке, определяемой начальными условиями.

Далее в § 2 изучаются регулировочные и измерительные движения систем экстремального регулирования инерционных объектов. В частности, здесь показано, что регулировочное движение квазистационарного режима /4/ системы /3/ описывается уравнением:

$$\frac{d\bar{x}}{dt} = -\frac{a^2}{2T(1+\omega^2\tau^2)} \frac{dQ}{d\bar{x}} - \frac{1}{T} O(a^4), \quad /II/$$

а регулировочное уравнение квазистационарного режима /5/ представляется следующим образом:

$$\frac{d^2\bar{y}}{dt^2} = -\frac{1}{\tau} \frac{d\bar{y}}{dt} - \frac{1}{T^3\omega^2\tau} \left[ \frac{k^2 a^2}{2} \frac{dQ}{d\bar{y}} + \frac{k a^2}{4} \frac{dQ^2}{d\bar{y}} \right], \quad /I2/$$

где  $k = \frac{T}{\tau} \sim 1$ . Из этих уравнений следует, что если при  $\tau \ll T$  синхронный детектор оценивает  $\text{grad } Q$ , то при  $\tau \sim T$  "измеряется"  $\text{grad}(c_1 Q + c_2 Q^2)$ , где  $c_1$  и  $c_2$  - некоторые постоянные.

В § 2 рассматриваются, кроме того, системы экстремального регулирования некоторых других видов объектов /например, объектов, содержащих элементы чистого запаздывания/. Здесь также получены уравнения для регулировочных движений и сформулированы условия устойчивости поиска.

В § 2 изложены результаты моделирования экстремальных систем рассматриваемого класса с целью определения максимального числа  $\varepsilon_0$ , при котором все еще сохраняется "близость" решений исходной и усредненной систем. При моделировании было установлено, что вплоть до значений  $\varepsilon \approx \frac{1}{3}$  решения усредненной и исходной систем достаточно близки /во всяком случае качественно/.

§ 3 посвящен исследованию поведения экстремальных систем с синхронным детектором в одном классе форсированных режимов, характеризующихся стандартной формой /7/. Рассматриваются уравнения форсированного режима /8/. Использование формализма метода усреднения приводит здесь к выводу, что регулировочные движения экстремальной системы /3/ в этом режиме описываются уравнением:

$$\frac{d^2\bar{y}}{dt^2} = -\frac{1}{\tau} \frac{d\bar{y}}{dt} - \left( \frac{a}{2\omega T\tau} \right)^2 \frac{dQ^2(\bar{y})}{d\bar{y}}. \quad /I3/$$

Следовательно, в этом режиме способ синхронного детектирования оценивает не градиент экстремизируемой функции, а градиент квадрата этой функции.

В § 3 показано также, что наличие или отсутствие аддитивного поискового колебания в правой части второго из уравнений /8/ не влияет на окончательный результат /I3/.

Справедливость регулировочного уравнения /I3/ была подтверждена при моделировании на аналоговой вычислительной машине. Моделировалась экстремальная система /8/ при  $Q(\bar{y}) = \bar{y}^3$  и  $Q(\bar{y}) = \bar{y}$ . При этом было установлено, что точка  $\bar{y} = 0$  - точка асимптотически устойчивого равновесия /что, разумеется, не имеет места в квазистационарном режиме/.

В § 4 асимптотические методы привлекаются к изучению динамики системы автоматической оптимизации, разработанной Л.А. Растргиным [5]. Здесь получены уравнения для регулировочных и формулы для измерительных движений. Анализ этих выражений показывает, что при



"облажения" частот поисковых колебаний амплитуда измерительных движений возрастает.

Третья глава посвящена решению асимптотического подхода к изучению системы автоматической оптимизации, разработанной Л.П. Фицнером [6].

В § I показано, что уравнения движения этой системы могут быть представлены в виде:

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= \frac{1}{T_2} a f\left(\frac{\alpha}{b}\right) \\ \frac{d\alpha}{dt} &= \frac{1}{T_1} Q\left(x + a f\left(\frac{\alpha}{b}\right)\right), \end{aligned} \quad /14/$$

где  $x$  — координата на выходе интегрирующего звена /с постоянной времени  $T_2$  /, на вход которого подается величина с выхода релейного элемента;  $\alpha$  — величина на выходе интегрирующего звена /с постоянной времени  $T_1$  /, на вход которого подается текущее значение  $Q(t)$  минимизируемой функции  $Q(x) > 0$ ;  $a f\left(\frac{\alpha}{b}\right)$  — функция на выходе релейного элемента, представляющая собой периодическую функцию переменной  $\alpha$  типа прямоугольной волны с частотой  $\frac{1}{2b}$  и амплитудой  $a$ .

В фазовом пространстве  $(x, \alpha)$  система /14/ дает:

$$\frac{dx}{d\alpha} = \frac{T_1}{T_2} \frac{a f\left(\frac{\alpha}{b}\right)}{Q\left(x + a f\left(\frac{\alpha}{b}\right)\right)}. \quad /15/$$

Как легко видеть, это уравнение представляет собой не что иное, как уравнение движения безынерционной экстремальной системы с синхронным детектором, максимизирующей функцию  $\frac{1}{Q(x)}$  ( $Q(x) > 0$ ), с тем лишь отличием, что здесь вместо независимой переменной  $t$  в качестве аргумента фигурирует фазовая координата  $\alpha$ . Таким образом, в этой системе способ измерения  $\frac{\partial Q}{\partial x}$  также сводится к синхронному детектированию, но не в пространстве  $(x, t)$ , а в фазовом пространстве  $(x, \alpha)$ .

В § 2 показано, что регулировочные движения рассматриваемой системы в квазистационарном режиме, характеризуемом стандартной формой /2/, для  $n$ -мерного случая имеют вид:

$$\frac{d\bar{x}_i}{d\alpha} = a_i^2 \frac{T_{1i}}{T_{2i}} \frac{\partial}{\partial \bar{x}_i} \left( \frac{1}{Q(\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n)} \right) \quad i = 1, \dots, n.$$

Переход от пространства  $(\bar{x}, \alpha)$  к пространству  $(\bar{x}, \bar{t})$  дает:

$$\frac{d\bar{x}_i}{d\bar{t}} = - \frac{a_i^2}{T_{2i}} \frac{1}{Q(\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n)} \frac{\partial}{\partial \bar{x}_i} Q(\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n), \quad i = 1, \dots, n.$$

Из этого выражения, в частности, следует, что регулировочные движения не зависят от величин  $b_i$  и  $T_{1i}$ . Это означает, что выбор величин  $b_i, T_{1i}$  не влияет на характер регулировочных движений.

Уравнение регулировочных движений для квазистационарного режима при инерционном объекте ( $W_0 = \frac{1}{\tau p + 1}; \frac{\tau}{T_1} \sim 1$ ) в § 2 получено в следующем виде:

$$\frac{d\bar{x}}{d\alpha} = a^2 \frac{T_1}{T_2} \left\{ 1 + \frac{\tau Q(\bar{x}) [\exp(-\frac{T_1 b}{\tau Q(\bar{x})}) - 1]}{T_1 b [\exp(-\frac{T_1 b}{\tau Q(\bar{x})}) + 1]} \right\} \frac{d}{d\bar{x}} \left( \frac{1}{Q(\bar{x})} \right).$$

В § 3 показано, что частота поисковых колебаний /во времени  $t$  / системы автоматической оптимизации, разработанной Л.П. Фицнером, определяется формулой:

$$\omega_{\Phi_i} = \frac{Q(t)}{T_{1i} b_i}.$$

Отсюда следует справедливость отмеченного в [6] свойства рассматриваемой системы, состоящего в том, что эта система остается работоспособной даже в тех случаях, когда параметры  $T_{1i}$  и  $b_i$  ( $i = 1, \dots, n$ ) в разных каналах "практически одинаковы", но достаточно малы. Это обстоятельство является следствием того факта, что разность частот поисковых колебаний в  $i$  и  $j$  канале

$$|\omega_{\Phi_i} - \omega_{\Phi_j}| = \frac{Q(t)}{T_{1i} b_i T_{1j} b_j} |T_{1i} b_i - T_{1j} b_j|$$

может быть достаточно велика за счет коэффициента  $\frac{Q(t)}{T_{1i} b_i T_{1j} b_j}$ ,



если только сами значения параметров  $T_i$  и  $\beta_i$  ( $i=1, \dots, n$ ) выбраны достаточно малыми.

§ 4 посвящен изучению класса форсированных режимов /7/ в системе автоматической оптимизации, разработанной Л.Н. Фицнером.

В § 5 обсуждается вопрос о скорости поиска экстремума в непрерывных экстремальных системах с поисковыми колебаниями. Для изучения влияния числа  $n$  переменных минимизируемой функции  $Q(x_1, \dots, x_n)$  на скорость и "качество" процесса поиска рассматривается класс "симметричных по переменным" функций вида  $Q(x_1, \dots, x_n) = \sum_{i=1}^n q(x_i)$ . При этом показано, что число каналов  $n$ , при котором может быть обеспечена заданная скорость и "колебательность" процесса поиска /т.е. заданная потеря на поиск/ для случая инерционного экстремизируемого объекта, определяется оценкой:

$$n \leq \frac{2\mu}{\varepsilon} \bar{z} \ln \bar{z} + 1,$$

где

$$\varepsilon = \frac{1}{T_{\min} \omega_{\min}}; \quad \bar{z} = \frac{\varepsilon}{2} \frac{T}{\tau} \geq 1; \quad T_{\min} = \min \{T_i\},$$

$T_i$  - постоянная времени  $i$ -го канала экстремального регулятора;  $\omega_{\min} = \min \{\omega_i\}$ ;  $\omega_i$  - поисковая частота в  $i$ -ом канале;  $T$  - постоянная, характеризующая заданную скорость поиска;  $\tau$  - постоянная времени инерционной части объекта;  $\mu$  - постоянная, определяющая заданную потерю на поиск и "колебательность" процесса поиска.

Если же объект экстремального регулирования был бы полностью безинерционным, то как отмечено в § 5, скорость и "колебательность" процесса поиска не зависели бы от числа  $n$  переменных экстремизируемой функции  $Q$ . Все эти выводы получены на основании найденных в предыдущих разделах уравнений для измерительных и регулировочных движений.

Четвертая глава посвящена развитию асимптотических методов

исследования непрерывных систем автоматической оптимизации, подверженных действию помех. В § I выводятся достаточные условия ограниченности моментов решений линейных стохастических систем. Рассматриваются уравнения вида:

$$\frac{dx}{dt} = (D + A(t))x + \beta(t), \quad /I6/$$

где  $x \in E_n$ ,  $D$  - постоянная  $n \times n$ -матрица;  $A(t)$  -  $n \times n$ -матрица, элементы которой представляют собой случайные процессы, а  $\beta(t)$  - некоторый случайный процесс со значениями из  $E_n$ . Вводится определение  $\rho$ -ограниченности: решение  $x(t, x_0, t_0)$  уравнения /I6/ называется  $\rho$ -ограниченным, если при  $|x_0| \leq \Lambda, \Lambda < \infty$

$$\langle |x(t, x_0, t_0)|^p \rangle \leq M < \infty; \quad \rho > 0; \quad t \in [t_0, \infty).$$

Здесь и далее угловыми скобками обозначено вероятностное усреднение. Следующие ниже теоремы о  $\rho$ -ограниченности существенно используют формулировки и идеи, предложенные Р.З. Хасьминским [7] при выводе условий  $\rho$ -устойчивости.

**Теорема I.** Пусть 1/  $D$  в /I6/ - гурвицева матрица; 2/  $C$  - положительно определенная матрица, обладающая тем свойством, что  $V = (Cx, x)$  является функцией Ляпунова для системы

$$\frac{dx}{dt} = Dx; \quad /I7/$$

3/  $\mu, \lambda$  - наибольшие из положительных чисел, удовлетворяющих неравенствам:

$$\mu(x, x) \leq (Cx, x); \quad \frac{d^0 V}{dt} \leq -\lambda V,$$

где  $\frac{d^0 V}{dt}$  вычисляется в силу /I7/;

4/  $A(t) = (A_{ij}(t))$  ( $i, j = 1, \dots, n$ ) - гауссовский случайный процесс;

$\beta(t)$  - случайный процесс со значениями из  $E_n$ ;

5/ для процесса  $A^0(t) = C^{1/2} A(t) C^{1/2}$  выполнены условия:

$$\langle A^0(t) \rangle \leq a_0; \quad \langle |A^0(t) - \langle A^0(t) \rangle|^2 \rangle \leq a_1; \quad \int_{-\infty}^{\infty} \|K(s, \omega)\| ds \leq a_2,$$

где  $K(s, t) = \text{cov}(A^0(s), A^0(t)) - n^2 \times n^2$ -матрица.

Тогда решение уравнения /I6/  $\rho$ -ограничено при



$$a/ \quad \rho < \frac{\lambda - 2(a_0 + \sqrt{a_1})}{2a_2}; \quad \lambda > 2(a_0 + \sqrt{a_1})$$

$$b/ \quad \langle |\theta^0(t)|^{2p} \rangle \leq N_{2p} < \infty,$$

$$\text{где } \theta^0(t) = \frac{1}{\sqrt{\mu}} C^* \theta(t).$$

Теорема I позволяет уточнить полученные в [7] достаточные условия асимптотической  $\rho$ -устойчивости решений однородной стохастической системы

$$\frac{dx}{dt} = (D + A(t))x, \quad /18/$$

где  $x$ ,  $D$  и  $A$  имеют тот же смысл, что и в /16/. После уточнения эти условия принимают вид:

$$\rho < \frac{\lambda - 2(a_0 + \sqrt{a_1})}{a_2}; \quad \lambda > 2(a_0 + \sqrt{a_1}). \quad /19/$$

Теорема 2. В условиях теоремы I и в предположении о независимости процессов  $\|A^0(t)\|$  и  $|\theta^0(t)|$  выполнения условий /19/ асимптотической  $\rho$ -устойчивости решений системы /18/ достаточно для  $\rho$ -ограниченности решений системы /16/, если только  $\langle |\theta^0(t)|^p \rangle \leq N_p < \infty$ .

Кроме доказательства сформулированных утверждений в § I приводятся также оценки моментов решений линейных неоднородных стохастических систем.

Регулировочные уравнения экстремальных систем с синхронным детектором в присутствии помех получены в § 2. Предполагается, что на каждую из переменных функций  $Q$  аддитивно действует стационарный гауссовский случайный процесс  $\xi_i(t)$  ( $i = 1, \dots, n$ ) и, кроме того, измерение функции  $Q$  происходит с ошибкой  $\eta$ , также являющейся гауссовским стационарным процессом. Процессы  $\xi_i(t)$  и  $\eta(t)$  представляются в виде:

$$\begin{aligned} \xi_i(t) &= \langle \xi_i(t) \rangle + \xi_i^0(t) + \sum_{j=1}^n \xi_i^j(t) + \xi_i^*(t) \\ \eta(t) &= \langle \eta(t) \rangle + \eta^0(t) + \sum_{j=1}^n \eta^j(t) + \eta^*(t), \end{aligned} \quad /20/$$

где  $\xi_i^j(t)$ ,  $\eta^j(t)$  ( $i, j = 1, \dots, n$ ) – узкополосные гауссовские стационарные процессы с нулевым средним значением, шириной спектра порядка  $\frac{1}{T}$  и центральной частотой  $\omega_j$ ,  $j = 1, \dots, n$  /  $\omega_j$  – поисковые частоты экстремального регулятора, а  $T$  – величина порядка инерционности экстремального регулятора:  $\frac{T}{T_i} \sim 1$ ,  $i = 1, \dots, n$  /;  $\xi_i^0$  – "медленный" узкополосный гауссовский стационарный случайный процесс с шириной спектра  $\sim \frac{1}{T}$  и центральной частотой  $\omega_0 = 0$ ;  $\xi_i^*(t)$ ,  $\eta^*(t)$  – также гауссовские стационарные процессы с нулевым средним, определяемые выражениями /20/. Процесс  $\xi_i^0(t)$  может интерпретироваться как дрейф экстремальной характеристики  $Q(z_1, \dots, z_n)$  по  $i$ -ой координате. Узкополосность процессов  $\xi_i^j(t)$  и  $\eta^j(t)$  означает, что  $\frac{1}{T} \ll \omega_j$ .

Узкополосные процессы  $\xi_i^j(t)$  и  $\eta^j(t)$  могут быть [8] представлены в виде:

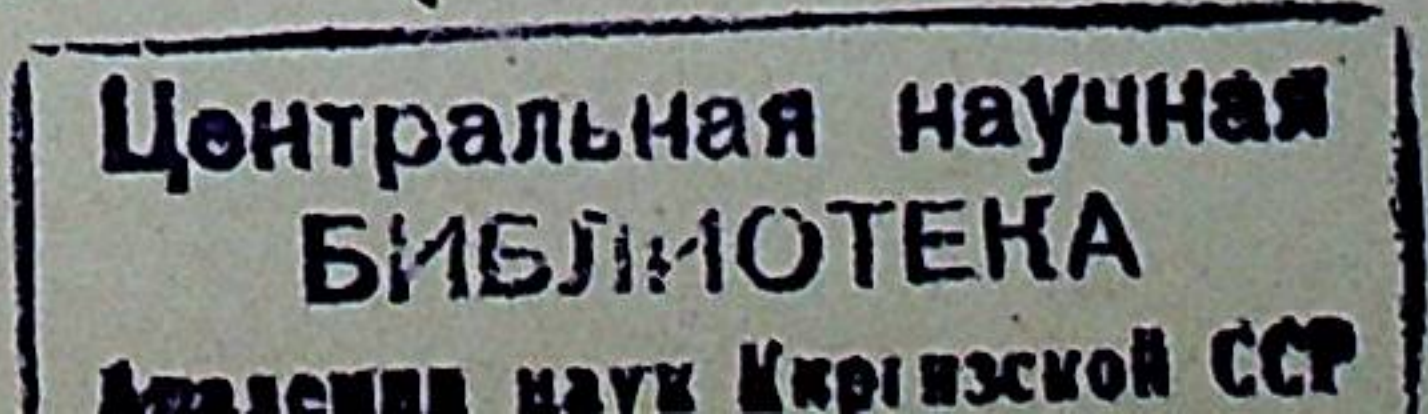
$$\begin{aligned} \xi_i^j(t) &= A_i^j(t) \sin \omega_j t + B_i^j(t) \cos \omega_j t \\ \eta^j(t) &= C^j(t) \sin \omega_j t + D^j(t) \cos \omega_j t, \end{aligned} \quad /21/$$

где  $A_i^j(t)$ ,  $B_i^j(t)$  ( $C^j(t)$ ,  $D^j(t)$ ) – попарно некоррелированные гауссовские стационарные случайные процессы.

Далее с учетом /20/, /21/ и в предположении о том, что функция  $Q(z_1, \dots, z_n)$  может быть достаточно точно аппроксимирована квадратичной формой, в § 2 получены регулировочные уравнения квазистационарного режима в следующем виде:

$$\frac{d\bar{y}_i}{dt} = -\frac{1}{T_i} \left\{ \frac{a_i^2}{2} \frac{\partial Q(\bar{y}_1, \dots, \bar{y}_n)}{\partial \bar{y}_i} + \frac{a_i}{2} \sum_{e=1}^n A_e^i(t) \frac{\partial Q}{\partial \bar{y}_e} + \delta_i(t) + \frac{a_i C^i(t)}{2} + \Phi_i(t, \bar{y}_1, \dots, \bar{y}_n) \right\}, \quad i = 1, \dots, n, \quad /22/$$

где  $\bar{y}_i = \bar{x}_i + \langle \xi_i(t) \rangle + \xi_i^0(t)$  – отклонение рабочих составляющих координат от положения экстремума функции  $Q$ ;  $\delta_i(t)$  – случайный процесс, характеризующий скорость "медленного" дрейфа точки экстремума функции  $Q$ ;  $\frac{d\xi_i^0}{dt} = -\frac{1}{T_i} \delta_i(t)$ ;  $a_i$  – амплитуда  $i$ -го





поискового колебания;  $\Phi_i(t, \bar{y}_1, \dots, \bar{y}_n)$  — функция, ограниченная величиной:

$$\Phi_i(t, \bar{y}_1, \dots, \bar{y}_n) \leq \frac{a_i}{2} \sum_{m, e=1}^n \alpha_{me} \frac{\partial^2 Q}{\partial \bar{y}_m \partial \bar{y}_e};$$

$\alpha_{me}$  — постоянные, зависящие от моментов процессов  $\xi_j^m(t)$  и  $\xi_j^e(t)$ .

Из регуляционного уравнения /22/ следует, что при  $Q(\bar{y}_1, \dots, \bar{y}_n)$  типа квадратичной формы процесс поиска описывается линейными стохастическими уравнениями. Это обстоятельство дает возможность применить для исследования условий стохастической устойчивости поиска /22/ доказанные в [7] и в § I гл. IV теоремы о  $\rho$ -устойчивости,  $\rho$ -ограниченности, устойчивости по вероятности и устойчивости почти наверное решений линейных стохастических систем. В § 3 получены условия, обеспечивающие все перечисленные виды стохастической устойчивости для случая  $n$ -мерной экстремальной системы при  $Q(x_1, \dots, x_n) = \sum_{i=1}^n x_i^2$ . В частности оказалось, что решения системы /22/ обладают свойством  $\rho$ -ограниченности, если

$$\rho < \frac{\min_i \frac{a_i^2}{T_i} - \sqrt{\nu_1}}{\sqrt{\nu_2}}; \quad \min_i \frac{a_i^2}{T_i} > \sqrt{\nu_1}$$

и

$$\langle |\Phi'(t)|^{2\rho} \rangle \leq N_{2\rho} < \infty,$$

где величины  $\nu_1$  и  $\nu_2$  задаются следующими неравенствами:

$$\langle \|M(t)\|^2 \rangle \leq \nu_1; \quad \int \|K(s, u)\| ds \leq \nu_2; \quad M(t) - \text{их } n \text{ - матрица с элементами } \frac{a_i}{T_i} A_e^i(t); \quad K(s, t) = \left( \left\langle \frac{a_i}{T_i} A_e^i(s) \frac{a_j}{T_j} A_m^j(t) \right\rangle \right) - n^2 \times n^2 \text{ - матрица } (i, j, e, m = 1, \dots, n); \quad \Phi'(t) - \text{вектор с координатами } \Phi_i'(t) = \frac{1}{T_i} \left[ \Phi_i(t) + \frac{a_i}{2} C^i(t) + \delta_i(t) \right].$$

Условия же асимптотической устойчивости по вероятности /почти наверное/ в целом для случая однородной линейной стохастической системы, соответствующей /22/, имеют вид:

$$\langle |A(t)| \rangle < \min_i \frac{a_i^2}{T_i} \left( \sum_{j=1}^n \frac{a_j^2}{T_j} \right)^{-1/2}, \quad i = 1, \dots, n$$

/где  $A(t)$  — вектор с координатами  $A_e^i$  ( $i, e = 1, \dots, n$ ) /, если только процесс  $|A(t)|$  удовлетворяет закону больших чисел /усиленному закону больших чисел/.

В § 3 приводятся также результаты моделирования экстремальных систем рассматриваемого класса в присутствии помех. При моделировании одновременно решались исходные и регуляционные уравнения, описывающие динамику экстремальной системы с синхронным детектором, подверженной действию помех. В результате экспериментов было установлено, что решение регуляционных уравнений /22/ практически точно "следит" за решением исходных стохастических уравнений при любой степени  $\rho$ -устойчивости и  $\rho$ -ограниченности; потеря соответствующего типа устойчивости "неусредненной" системой происходит одновременно с потерей устойчивости регуляционной системой.

В пятой главе развивается асимптотический подход к исследованию динамики систем экстремальной самонастройки как при детерминированных условиях их работы, так и при наличии помех. В § I обсуждается содержательный смысл задачи экстремальной самонастройки. В § 2 вводится стандартная форма уравнений квазистационарных и форсированных режимов, аналогичная соответствующим стандартным формам уравнений систем автоматической оптимизации. Динамика квазистационарных режимов систем экстремальной самонастройки изучается в § 3. Здесь рассматривается система экстремальной самонастройки коэффициента усиления  $k_2$  "объекта" с передаточной  $k_2 W_2(p)$  по "модели" с передаточной функцией  $k_1 W_1(p)$ . Уравнения движения такой системы представляются в виде:

$$\sum_{i=0}^n a_i \frac{d^i y_1}{dt^i} = k_1(t) \theta(t)$$

$$\sum_{i=0}^n a_i \frac{d^i y_2}{dt^i} = k_2 \theta(t)$$

$$\frac{dk}{dt} = -\frac{1}{T} Q(y_1 - y_2) f(t),$$



где  $k_2 = k + f(t)$ ;  $f(t), \theta(t)$  — поисковые колебания и внешние воздействия соответственно;  $\alpha_1, \alpha_2$  — параметры модели и объекта соответственно;  $y_1, y_2$  — координаты на выходе модели и объекта соответственно;  $T$  — постоянная времени контура самонастройки.

Показано, что регулировочное движение квазистационарного режима при  $f(t) = \mu \cos \omega t$  и  $\theta(t) = \alpha \cos \Omega t$  описывается уравнением:

$$\frac{d\bar{k}}{dt} = -\frac{1}{T} \frac{\alpha^2 \mu^2}{4} \left\{ [k \operatorname{Re} W_2(j\Omega) - k_1 \operatorname{Re} W_1(j\Omega)] [\operatorname{Re} W_2(j(\Omega-\omega)) + \operatorname{Re} W_2(j(\Omega+\omega))] + \right. \\ \left. + [k \operatorname{Im} W_2(j\Omega) - k_1 \operatorname{Im} W_1(j\Omega)] [\operatorname{Im} W_2(j(\Omega-\omega)) + \operatorname{Im} W_2(j(\Omega+\omega))] \right\} \quad /26/$$

Значение  $k^*$  настраиваемого параметра, к которому сходится поиск /26/ при  $k_1(t) = \text{const}$  не обеспечивает минимум среднего значения  $Q(\bar{k}, t)$  величины  $Q(y_1(t) - y_2(\bar{k}, t))$ .

Однако при

$$\operatorname{Re} W_2(j(\Omega-\omega)) \approx \operatorname{Re} W_2(j\Omega) \approx \operatorname{Re} W_2(j(\Omega+\omega)) \\ \operatorname{Im} W_2(j(\Omega-\omega)) \approx \operatorname{Im} W_2(j\Omega) \approx \operatorname{Im} W_2(j(\Omega+\omega)) \quad /27/$$

минимум  $Q(\bar{k}, t)$  достигается. При этом регулировочное уравнение /26/ приобретает вид:

$$\frac{d\bar{k}}{dt} = -\frac{1}{T} \frac{\alpha^2 \mu^2}{2} \frac{\partial |\Delta W(\bar{k}, j\Omega)|^2}{\partial \bar{k}},$$

где  $\Delta W(\bar{k}, j\Omega) = \bar{k} W_2(j\Omega) - k_1 W_1(j\Omega)$ .

В § 3 показано также, что во втором приближении регулировочное движение  $\bar{k}(t)$  /при выполнении /27// описывается уравнением:

$$\frac{d\bar{k}}{ds} = -\varepsilon \frac{\alpha^2 \mu^2}{2} \frac{\partial |\Delta W|^2}{\partial \bar{k}} - \varepsilon^2 \frac{\alpha^2 \mu^2}{2} [|\Delta W|^2 + \frac{3\mu^2}{4} |W_2|^2] (\Delta \operatorname{Re})^2 \frac{\partial \Delta \Phi}{\partial \bar{k}},$$

где  $s = \omega t$ ;  $\varepsilon = \frac{1}{T\omega}$ ;  $\Delta \operatorname{Re} = \bar{k} \operatorname{Re} W_2(j\Omega) - k_1 \operatorname{Re} W_1(j\Omega)$ ;  $\Delta \operatorname{Im} = \bar{k} \operatorname{Im} W_2(j\Omega) - k_1 \operatorname{Im} W_1(j\Omega)$ ;  $\Delta \Phi(\bar{k}) = \frac{\Delta \operatorname{Im}(\bar{k})}{\Delta \operatorname{Re}(\bar{k})}$ .

Кроме того, в § 3 получена формула для измерительных движений в рассматриваемой самонастраивающейся системе. Анализ этого соотношения позволяет сформулировать условия, которые необходимо наложить на частоты  $\Omega$  и  $\omega$  для того, чтобы удовлетворить задан-

ной "колебательности" процесса поиска и потерь на поиск.

Исследование уравнений одного специфического класса форсированных режимов в системах экстремальной самонастройки проведено в § 4. Здесь изучается поведение системы экстремальной самонастройки коэффициента усиления  $k_2$  /при  $W_1(p) = \frac{1}{\tau_1 p + 1}$ ,  $W_2(p) = \frac{1}{\tau_2 p + 1}$  / в одном классе форсированных режимов, описываемых уравнениями:

$$\frac{dy_1}{ds} = \varepsilon z_1 [-y_1 + k_1(\tau_1 s) \theta(\tau_1 s)] \\ \frac{dy_2}{ds} = \varepsilon z_2 [-y_2 + (k + \mu \cos \omega \tau_2 s) \theta(\tau_2 s)] \\ \frac{dk}{ds} = -Q(y_1 - y_2) \mu \cos \omega \tau_2 s \\ \frac{d\theta}{ds} \sim \varepsilon; \quad \frac{dk_1}{ds} \sim \varepsilon; \quad \omega T \sim 1,$$

где  $s = \frac{t}{T}$ ,  $\varepsilon = \frac{T}{\tau}$ ,  $z_i = \frac{\tau_i}{T}$ , а  $\tau$  — величина, определенная соотношением  $\frac{\tau_i}{T} \sim 1$  ( $i = 1, 2$ ) в предположении, что  $\frac{\tau_i}{T} \sim 1$ .

Показано, что регулировочные движения в этом режиме /при  $\frac{d\bar{\theta}}{ds} = 0$  / характеризуются следующими соотношениями:

$$\frac{d\bar{y}_1}{ds} = \varepsilon z_1 [-\bar{y}_1 + \bar{k}_1(\tau_1 s) \bar{\theta}(\tau_1 s)] \\ \frac{d\bar{y}_2}{ds} = -\varepsilon z_2 \frac{d\bar{y}_2}{ds} - \varepsilon^2 \left( \frac{\bar{\theta} \mu}{2\omega T} \right)^2 z_2^2 \frac{\partial Q^2(\bar{y}_1 - \bar{y}_2)}{\partial \bar{y}_2}$$

Следовательно, регулировочное движение направлено на минимизацию функции  $Q^2$  от "невязки"  $\bar{y}_1 - \bar{y}_2$ . "Двухшаговый" градиентный спуск, описываемый последним из этих соотношений, сходится к точке экстремума функции  $Q^2$  [9]. Отмечается, что наличие или отсутствие аддитивного поискового колебания не влияет на характер регулировочных движений. В § 4 исследуются также некоторые другие примеры рассматриваемого класса форсированных режимов.

В § 5 рассматривается поведение самонастраивающейся системы, описываемой уравнениями /25/, в случае, если на настраиваемый коэффициент усиления действует стационарный случайный процесс  $\xi(t)$ :

$$k_2(t) = k(t) + \mu \cos \omega t + \xi(t),$$

где  $\xi(t) = \xi_0(t) + \xi_1(t)$ ;  $\xi_0(t)$  — "медленный" узкополосный стационарный



процесс с гауссовским распределением вероятностей, шириной спектра порядка  $\frac{1}{T}$  и центральной частотой  $\omega^0 = 0$ ;  $\xi_1(t)$  — узкополосный гауссовский стационарный процесс с шириной спектра порядка  $\frac{1}{T}$  и центральной частотой  $\omega^1 = \omega$ . Для простоты вычислений предполагается, что  $\langle \xi_0(t) \rangle = \langle \xi_1(t) \rangle = 0$ . Очевидно, что  $\xi_0(t)$  может интерпретироваться как медленный дрейф настраиваемого коэффициента усиления, а  $\xi_1(t)$  — как высокочастотная помеха. Процесс  $\xi_1(t)$  представляется в следующем виде:

$$\xi_1(t) = A(t) \sin \omega t + B(t) \cos \omega t.$$

При этом показано, что регулировочное уравнение имеет / в случае, если  $\theta(t) = a \cos \Omega t$  и условия /27/ выполнены/ вид:

$$\frac{d\bar{x}}{dt} = -\frac{a^2 \mu (\mu + B(t))}{2T} |W_2|^2 \bar{x} - [Re W_1, Re W_2 + Im W_1, Im W_2] \varphi(t) + |W_2|^2 \psi(t) / 28 /$$

где

$\bar{x} = (\bar{k} + \xi_0(t)) |W_2|^2 - k_1(t) [Re W_1, Re W_2 + Im W_1, Im W_2]$  — отклонение рабочих составляющих настраиваемого параметра от положения экстремума функции  $Q$ ;  $\varphi(t) = \frac{dk_1}{dt}$  — скорость изменения коэффициента усиления модели, а случайный процесс  $\psi(t) = \frac{d\xi_0}{dt}$  характеризует скорость дрейфа настраиваемого коэффициента  $k_2(t)$ .

Далее в § 5 выводятся условия асимптотической  $\rho$ -устойчивости,  $\rho$ -ограниченности, устойчивости по вероятности и устойчивости почти наверное решений стохастического уравнения /28/. Кроме того, в § 5 изучается поведение рассматриваемой системы в присутствии помехи  $\xi(t)$  при  $\theta(t) = const$ . Здесь показано, что помехоустойчивость системы экстремальной самонастройки коэффициента усиления  $k_2$  при внешнем воздействии  $\theta(t) = const$  ниже, чем при  $\theta(t) = a \cos \Omega t$ . Например, в первом случае для асимптотической устойчивости по вероятности в целом достаточно:

$$\langle (A^2(t) + B^2(t))^{1/2} \rangle < \mu \cos \varphi_2(j\omega),$$

где  $\varphi_2(j\omega)$  — аргумент  $W_2(j\omega)$ , а во втором случае этот же

тип устойчивости имеет место при

$$\langle |B(t)| \rangle < \mu.$$

При этом предполагается, что процессы  $(A^2(t) + B^2(t))^{1/2}$  и  $|B(t)|$  удовлетворяют закону больших чисел.

### Заключение

В работе показано, что основные задачи, которые возникают при исследовании динамики систем автоматической оптимизации и систем экстремальной самонастройки в квазистационарных и в одном классе форсированных режимов, сводятся к изучению систем дифференциальных уравнений, содержащих малый параметр. Это обстоятельство дает основание утверждать, что метод усреднения адекватен задаче исследования динамики рассматриваемых систем.

Основные новые результаты, содержащиеся во второй главе:

1/ предложена стандартная форма уравнений квазистационарного и форсированного режимов;

2/ получены уравнения второго и третьего приближений для регулировочных и измерительных движений квазистационарного режима экстремальных систем с синхронным детектором /безынерционный и инерционный объекты/;

3/ выведено уравнение, описывающее регулировочные движения в одном классе форсированных режимов экстремальных систем с синхронным детектором.

Основные результаты, полученные в третьей главе:

1/ показано, что в системе автоматической оптимизации, разработанной Л.Н. Фицнером, по-существу, также реализуется синхронное детектирование, при котором роль времени выполняет одна из фазовых координат системы;

2/ даны выражения для регулировочных и измерительных движений квазистационарного режима /безынерционный и инерционный объекты/, а также для регулировочных движений одного класса фор-



сированных режимов;

3/ выведена оценка максимального числа каналов многомерной инерционной экстремальной системы, при котором могут быть удовлетворены заданные требования к скорости поиска и к потере на поиск.

Основные новые результаты четвертой главы:

1/ доказаны теоремы о  $\rho$ -ограниченности решений линейных неоднородных стохастических систем;

2/ выведены стохастические дифференциальные уравнения, описывающие регулировочные движения многомерной экстремальной системы с синхронным детектором в присутствии широкополосных помех;

3/ даны условия  $\rho$ -устойчивости, устойчивости по вероятности, устойчивости почти наверное, а также условия  $\rho$ -ограниченности решений регулировочных уравнений.

Основные новые результаты, содержащиеся в пятой главе:

1/ получены формулы для регулировочных /второе приближение/ и измерительных движений квазистационарного режима систем экстремальной самонастройки;

2/ выведены уравнения для регулировочных движений одного класса форсированных режимов;

3/ выведены уравнения, описывающие регулировочные движения систем экстремальной самонастройки в присутствии помех, и даны условия  $\rho$ -устойчивости,  $\rho$ -ограниченности, устойчивости по вероятности, устойчивости почти наверное этих уравнений.

Основное содержание диссертации опубликовано в работах [10-12]. Результаты работы докладывались на XIII конференции молодых ученых ИАТ /ТК/ /Москва, 1966/, на Общественном семинаре по расширению возможностей автоматов /Москва 1966, 1967/, на третьем симпозиуме по экстремальным задачам /Томск, 1967/.

#### Цитированная литература

1. Красовский А.А. Динамика непрерывных самонастраивающихся систем. Физматгиз, 1963.
2. Боголюбов Н.Н. О некоторых статистических методах в математической физике. Изд-во АН УССР, 1945.
3. Митропольский Ю.А. Лекции по методу усреднения в нелинейной механике. Изд-во "Наукова думка", 1966.
4. Волосов В.М. Усреднение в системах обыкновенных дифференциальных уравнений. Успехи математич. наук, т. XVII, в: 6/108/, 1962.
5. Растрингин Л.А. Случайный поиск. Изд-во "Зинатне", 1965.
6. Фицнер Л.Н. Автоматическая оптимизация сложных систем пространственного распределения. В сб. "Самонастраивающиеся автоматические системы". Изд-во "Наука", 1965.
7. Хасьминский Р.З. Об устойчивости нелинейных стохастических систем. Прикл.мат. и мех., т. 30, в. 5, 1966.
8. Рытов С.М. Введение в статистическую радиофизику. Изд-во "Наука", 1966.
9. Поляк Б.Т. О некоторых способах ускорения сходимости итерационных методов. У. вычисл. матем. и матем. физ., т. 4. № 5, 1964.
10. Меерков С.М. Методы теории усреднения в задаче исследования непрерывных систем автоматической оптимизации. Тезисы докладов третьего симпозиума по экстремальным задачам. Изд-во Томского университета, Томск, 1966.
11. Меерков С.М. Асимптотические методы исследования квазистационарных режимов в непрерывных системах автоматической оптимизации. Автоматика и телемеханика, № II, 1967.
12. Меерков С.М. Асимптотические методы исследования одного класса форсированных режимов в экстремальных системах. Автоматика и телемеханика, № I2, 1967.