АКАДЕМИЯ НАУК СССР
ИНСТИТУТ ВЫСОКИХ ТЕМПЕРАТУР

На правах рукописи

А.В. КАЛИНИН

ИССЛЕДОВАНИЕ НЕКОТОРЫХ ДВУХФАЗНЫХ ТЕЧЕНИЙ С НЕРАВНОВЕСНЫМИ ФАЗОВЫМИ ПРЕВРАЩЕНИЯМИ

(Специальность 01.024 -гидроаэромеханика и газовая динамика)

Автореферат
диссертации на соискание ученой степени
кандидата технических наук

Москва 1970

АКАДЕМИЯ НАУК СССР
ИНСТИТУТ ВЫСОКИХ ТЕМПЕРАТУР

На правах рукописи

А.В. КАЛИНИН

ИССЛЕДОВАНИЕ НЕКОТОРЫХ ДВУХФАЗНЫХ ТЕЧЕНИЙ С НЕРАВНОВЕСНЫМИ ФАЗОВЫМИ ПРЕВРАЩЕНИЯМИ

(Специальность 01.024 -гидроаэромеханика и газовая динамика)

Автореферат
диссертации на соискание ученой степени
кандидата технических наук

Москва 1970

Диссертация представляет собой теоретическое исследование некоторых двухфазных течений с неравновесными фазовыми превращениями и состоит из введения и 4-х глав с выводами.

Во введении отмечается, что интерес к закономерностям движения сжимаемой двухфазной среды обусловлен потребностями целого ряда областей как традиционной, так и, в особенности, новой техники. Это, прежде всего, крупная стационарная теплоэнергетика, где весьма важной остается проблема повышения эффективности работающих на влажном водяном паре последних ступеней конденсационных турбомашин. Во-вторых, это стационарные и транспортные ядерные энергетические установки, цикл которых до настоящего времени в большинстве случаев строится в двухфазной области состояний рабочего тела. Далее, это целый ряд современных химических производств. Наконец, в самое последнее время вопросы динамики сжимаемой двухфазной среды привлекают к себе внимание в связи с проблемой применения металлосодержащих топлив с высококипящими продуктами сгорания в ракетных двигателях и возможностями прямого генерирования электрической энергии в электрогазодинамических и жидкометаллических магнитногидродинамических генераторах. Прогресс в этой области в немалой степени зависит от углубления представлений о неравновесных двухфазных течениях и развития их математического моделирования.

В главе I диссертации дается обзор расчетно-теоретических исследований динамики двухфазной среды.

Трудности расчетно-теоретического исследования двухфазных течений в значительной мере обусловлены отсутствием канонической модели двухфазной среды, подобной модели совершенного газа или газа Навье-Стокса в динамике гомогенных сред. Построение такой модели если и возможно, несмотря на чрезвычайное многообразие двухфазных течений, то эффективность ее применения в прикладных задачах вызывает серьезные сомнения.

Поэтому вполне оправдан интерес к специализированным или даже узко специализированным моделям.

Одним из весьма распространенных и важных в приложениях видов двухфазных течений являются течения двухфазной среды типа аэрозоля, например, влажного пара,конденсированная фаза которого представлена капельками жидкости, взвешенными в газовом потоке.

В диссертации обсуждается около 150 работ, посвященных различным вопросам гидромеханики аэрозолей и суспензий, и на основании проделанного анализа делаются следующие выводы:

I. Наиболее содержательное описание полидисперсного аэрозоля должно представлять соответствующее обобщение кинетического уравнения Больцмана. Однако при нынешнем уровне знаний о процессах взаимодействия, слияния и распада капель построение кинетической теории газа капель вряд ли возможно даже с учетом только парных взаимодействий.

2. При построении гидромеханики аэрозоля необходимо учитывать принципиальную роль, которую играет характер дисперсности конденсированной фазы. Гидромеханику высокодисперсного аэрозоля с фазовыми превращениями естественно строить как продолжение гидромеханики гомогенных реагирующих газовых смесей, поскольку отставание капельной компоненты от газовой фазы играет в этом случае второстепенную роль, а ее собственным объемом можно, как правило,пренебрегать.

3. Гидромеханику грубодисперсного аэрозоля с фазовыми превращениями следует рассматривать как обобщение гидромеханики смесей газа с твердыми макрочастицами. Общая теория течений неидеальной смеси газа с твердыми частицами представлена в литературе достаточно широко, однако трудности удовлетворительной расшифровки тензора напряжений и структурной вязкости неидеальной двухфазной смеси серьезно ограничивают применимость этой теории к прикладным задачам.

4. Отмеченные трудности частично преодолеваются в модели псевдо-идеальной двухфазной среды, где постулируется, что конденсированные частицы образуют газ с нулевым собственным давлением (т.е. обладают одинаковыми скоростями и не взаимодействуют между собой), а динамическое взаимодействие фаз учитывается лишь объемными силами источникового типа.

На основе такой модели удалось решить целый ряд практически важных задач, и ее конструктивность можно считать доказанной. Обобщение этой модели на случай фазовых превращений представляется весьма полезным.

5. Введение некоторого эффективного среднего диаметра множества частиц грубодисперсного аэрозоля является обоснованным с точки зрения схематизации их взаимодействия с газовой фазой, если частицы имеют размеры одного порядка. Монодисперсная схема становится неудовлетворительной лишь тогда, когда спектр размеров присутствующих частиц достаточно широк.

6. Одномерное и квази-одномерное приближение в газовой динамике является весьма плодотворным и дает правильные качественные и количественные результаты в области своей применимости. Ограниченность одномерной схемы в значительной мере искупается, возможностью, с одной стороны,учесть большинство реальных физических процессов, присущих двухфазным течениям с фазовыми превращениями, и, с другой стороны,довести развиваемые представления до практических расчетов в том случае, когда отсутствуют удовлетворительные методы решения задачи в точной (двумерной) постановке (например, задачи оптимизации дозвукового или смешанного течения).

Глава II посвящена течениям с неравновесными фазовыми превращениями двухфазной среды типа высокодисперсного аэрозоля.

В § 2-I обсуждаются основные допущения и формулируется система уравнений гидромеханики.

Отмечается, что в высокодисперсном аэрозоле конденсированная фаза представлена частицами, средний диаметр которых меньше средней длины свободного пробега молекул в газовой фазе. В этих условиях конденсированные частицы могут рассматриваться как своего рода макромолекулы, а взаимодействие между фазами может изучаться с точки зрения закономерностей кинетики реагирующих газов.

Если пренебрегать кинематическим и температурным отставанием частиц конденсированной фазы, то высокодисперсный аэрозоль с фазовыми превращениями (например, гомогенно конденсирующийся пар) можно, по-видимому, рассматривать в рамках одножидкостной модели с одним неравновесным параметром - массовой концентрацией конденсированной фазы. Именно этот подход используется в главе II: предполагается, что высокодисперсный аэрозоль представляет реагирующую псевдоидеальную сжимаемую смесь с плотностью ρ, скоростью $\vec{w}$, склярным давлением P, температурой T и внутренней энергией u, для которой справедливы основные уравнения газовой динамики:

$$\frac{\partial\rho}{\partial t}+\nabla\cdot\rho\vec{w}=0, \qquad (1)$$

$$\frac{\partial\vec{w}}{\partial t}+\vec{w}(\nabla\cdot\vec{w})+\frac{1}{\rho}\nabla P=0, \qquad (2)$$

$$\frac{\partial u}{\partial t}+\vec{w}\cdot\nabla u+\frac{P}{\rho}\nabla\cdot\vec{w}=0 \qquad (3)$$

Для определенности в гл.II рассматривается конденсирующийся пар, газовую фазу которого можно считать термически и калорически совершенным газом, а конденсированную фазу-несжимаемой жидкостью с постоянной теплоемкостью. Соответственно,

$$u=[c_{1v}(1-\beta)+c_2\beta]T, \quad P=\frac{R}{M}\rho(1-\beta)T \qquad (4),(5)$$

Массовая концентрация жидкой фазы β считается релаксирующим параметром, для которого справедливо уравнение кинетики в виде

$$\frac{\partial\beta}{\partial t}+\vec{w}\cdot\nabla\beta=\frac{\beta_{eq}-\beta}{\tau} \qquad (6)$$

где β_{eq} -массовая концентрация жидкой фазы в состоянии равновесия, τ - время релаксации.

Для замыкания системы уравнений (1)-(6) используется то соображение,что при $P>P_{eq}(T)$ двухфазная смесь должна стремиться к гомогенному конденсированному, а при $P<P_{eq}(T)$ к гомогенному газовому состоянию. При $P=P_{eq}(T)$ равновесие фаз безразлично к содержанию конденсированной фазы и всякое $0\leqslant\beta\leqslant 1$ может считаться равновесным. Таким образом

$$\beta_{eq}=\begin{cases}0, & P<P_{eq}(T),\\ \beta, & P=P_{eq}(T),\\ 1, & P>P_{eq}(T).\end{cases} \qquad (7)$$

Зависимость $P_{eq}(T)$ задается уравнением Клапейрона-Клаузиуса, которое записывается в виде

$$\frac{dP_{eq}}{dT}=\frac{r}{R/M}\,\frac{P_{eq}}{T^2}. \qquad (8)$$

В § 2-2 выводится система уравнений, описывающая в линейном приближении распространение одномерных малых возмущений в релаксирующей двухфазной среде рассматриваемого вида. При этом, как обычно, предполагается ограниченность градиентов стационарного гидродинамического поля. Отличительной чертой полученной системы уравнений является особенность типа дельта-функции, содержащаяся в ее коэффициентах.

Исследуются, по-видимому, общепринятым в настоящее время методом условно-периодические возмущенные движения вида

$$\tilde{\chi}_\nu=\tilde{\chi}_{\nu*}\exp[i(\omega t-kx)], \quad \nu=1,\dots 8, \qquad (9)$$

с вещественной частотой ω, что соответствует гармоническому характеру локальных малых возмущений и, тем самым, абсолютной устойчивости исследуемых течений. Комплексный характер волнового числа k учитывает затухание (нарастание волны малого возмущения в пространстве.

Критерием существования нетривиальных решений вида (9) является равенство нулю детерминанта матрицы системы однородных относительно амплитуд малых возмущений $\tilde{\chi}_{\nu*}$ алгебраических уравнений. Это дает в неявном виде зависимость $k=k[\omega,\chi_{\nu 0}]$ -дисперсионное уравнение для исследуемой среды. Фазовые скорости распространения малых возмущений являются, таким образом, действительными частями собственных чисел $\left(\frac{k}{\omega}\right)_\lambda$, а амплитуды $\{\tilde{\chi}_{\nu*}\}$ -собственными векторами упомянутой матрицы.

§ 2-3 посвящен двум важным предельным случаям, когда дисперсионное уравнение оказывается однородным по k,ω:

1) течению с замороженными фазовыми превращениями, $\tau=\infty$, и

(2) термодинамически равновесному течению, $\tau=0$.

При замороженных фазовых превращениях дисперсионное уравнение имеет вид

$$\left(\frac{k}{\omega}\right)^2(AP_0-B\rho_0 w_0^2)+\frac{k}{\omega}2B\rho_0 w_0-B\rho_0=0 \qquad (10)$$

и дает фазовую скорость малых возмущений

$$a_{fr}=\left(\gamma_{fr}\frac{P_0}{\rho_0}\right)^{1/2}, \qquad (11)$$

где

$$\gamma_{fr}=\frac{c_{1P}(1-\beta_0)+c_2\beta_0}{c_{1v}(1-\beta_0)+c_2\beta_0} \qquad (12)$$

– замороженное отношение теплоемкостей двухфазной смеси.

Подчеркивается, что фазовая скорость, вообще говоря, не соответствует реальному физическому распространению какого-либо сигнала. Однако, в отношении замороженной фазовой скорости можно осуществить важную идентификацию: замороженная фазовая скорость совпадает со скоростью распространения в среде слабого разрыва, каким, в частности, является передний фронт волны всякого малого возмущения.

Показано, каким образом эта универсальная физическая закономерность реализуется в рассматриваемом случае. Для этого, как обычно, анализируется матрица коэффициентов при частных производных системы (I)-(8) применительно к одномерному неустановившемуся течению.

При фазовом равновесии дисперсионное уравнение имеет вид

$$\left(\frac{k}{\omega}\right)^2\left(CP_0-E\rho_0 w_0^2\right)+\frac{k}{\omega}2E\rho_0 w_0-E\rho_0=0 \qquad (13)$$

и приводит к равновесной фазовой скорости

$$a_{eq}=\left(\gamma_{eq}\frac{P_0}{\rho_0}\right)^{1/2}, \qquad (14)$$

где

$$\gamma_{eq}=\frac{C}{E}=\frac{c_{1P}-c_2}{\frac{R}{M}\frac{c_2 T_0}{1-\beta_0}+c_{1V}-c_2} \qquad (15)$$

-равновесное отношение теплоемкостей исследуемой двухфазной смеси.

§ 2-4 посвящен дисперсии фазовой скорости малых возмущениц в исследуемэй среде. В общем случае конечных $\tau\neq 0$ дисперсионное уравнение может быть записано в виде

$$\left(\frac{k}{\omega}\right)^3\left[iw_0\left(P_0A-\rho_0 w_0^2 B\right)\right]+\left(\frac{k}{\omega}\right)^2\left[-i\left(P_0A-3\rho_0 w_0^2 B\right)-\right.$$
$$\left.-\frac{1}{\omega\tau}\left(P_0A-\rho_0 w_0^2 B\right)-\frac{\delta}{\omega\tau}\left(P_0C-\rho_0 w_0^2 E\right)\right]+$$
$$+\frac{k}{\omega}\left[-i3\rho_0 w_0 B-\frac{1}{\omega\tau}2\rho_0 w_0 B-\frac{\delta}{\omega\tau}2\rho_0 w_0 E\right]+$$
$$+i\rho_0 B+\frac{1}{\omega\tau}\rho_0 B+\frac{\delta}{\omega\tau}\rho_0 E=0, \qquad (16)$$

где

$\delta=\delta\left(\frac{P_0-P_{eq0}}{P_0}\right)$-дельта-функция.

Рассматриваются асимптотические решения (I6). Для этого особенность, представленная δ-функцией, аппроксимируется δ - образным пределом:

$$\delta(y,\alpha)=\frac{\alpha}{\pi(\alpha^2 y^2+1)} \qquad \text{при} \qquad \alpha\to\infty$$

В частности, для высокочастотных возмущений ($\omega\to\infty$) принимается

$$\delta\left(\frac{P_0-P_{eq0}}{P_0}\right)=\frac{\omega\tau}{\pi\left[\left(1-\frac{P_{eq0}}{P_0}\right)^2(\omega\tau)^2+1\right]} \qquad (17)$$

и для низкочастотных $(\omega\to 0)$

$$\delta\left(\frac{P_0-P_{eq0}}{P_0}\right)=\frac{\omega\tau}{\pi\left[\left(1-\frac{P_{eq0}}{P_0}\right)^2+(\omega\tau)^2\right]} \qquad (18)$$

Подчеркивается,что формальные предельные переходы $\omega\to\infty$ и $\omega\to 0$ носят в определенной мере условный характер и понимаются в том смысле, что частоты рассматриваемых возмущений являются достаточно высокими или достаточно низкими, чтобы такая подмена строгого предельного перехода в рамках качественного анализа была несущественной.

Асимптотические решения дисперсионного уравнения (I6) строятся с учетом доминирующих членов разложения его коэффициентов по $\omega\tau$.

Обсуждается характер дисперсии фазовой скорости и зависимость декремента затухания (инкремента нарастания) малых возмущений от частоты и степени неравновесности установившегося течения. Результаты проведенного анализа представлены в таблице.

В § 2-5 исследуются некоторые вопросы устойчивости течений с неравновесными фазовыми превращениями.

В качестве критерия устойчивости установившегося течения принимается отсутствие таких вещественных ω , при которых дисперсионное уравнение обладает решениями k с положительной мнимой частью. Обнаруживаемая, таким образом неустойчивость носит конвективный характер, т.е. связана с существованием такой скорости U (или диапазона таких скоростей), что вдоль прямой $x=Vt$ решение задачи Коши для возмущенного движения неограниченно возрастает при $t\to\infty$, хотя в любой фиксированной точке оно ограничено.

Анализируются условия устойчивости слабо и сильно неравновесных течений (с небольшими градиентами) к случайным малым возмущениям широкого спектра.

Показано, что сильно неравновесное течение исследуемой двухфазной среды, вообще говоря, не может непрерывным образом сопрягаться со слабо неравновесным. Так, переход через контактную поверхность, разграничивающую область сильно неравновесного течения и область слабо неравновесного течения с нормальной дисперсией, должен сопровождаться скачкообразным торможением потока - конденсационным скачком.

Сформулированы следующие выводы.

I. В рамках принятых относительно высокодисперсного аэрозоля допущений, замороженная, т.е. соответствующая бесконечно медленному протеканию фазовых превращений, фазовая скорость малых возмущений всегда вещественна, конечна и не обнаруживает никаких особенностей при стремлении к нулю содержания конденсированной фазы, монотонно приближаясь к скорости звука в чистом газе.

2. Если понимать под скоростью звука скорость распространения переднего фронта волны малого возмущения, которая в самом общем случае совпадает с замороженной фазовой скоростью, то скорость звука, таким образом, не испытывает никаких скачков при переходе из двухфазного состояния в однофазное.

3. Равновесная фазовая скорость, т.е. такая фазовая скорость распространения малых возмущений, что все состояния реализующиеся в волне, включая невозмущенное, являются состояниями равновесия, может быть как вещественной, так и мнимой. В последнем случае распространение малых возмущений с сохранением локального термодинамического равновесия в волне невозможно или, с другой точки зрения, изоэнтропические процессы в исследуемой двухфазной среде в соответствующей области двухфазных равновесий не могут быть реализованы адиабатически по соображениям устойчивости.

4. Равновесная фазовая скорость меняется скачком при переходе из двухфазного состояния в однофазное. Этот вывод соответствует термодинамическим представлениям о существовании скачка так называемой термодинамической скорости звука на границе области двухфазных равновесий (пограничной кривой).

Вопрос о существовании скачка скорости звука на пограничной кривой до последнего времени вызывал весьма разноречивые суждения, о чем свидетельствуют, в частности, недавняя дискуссия [2,3].

5. Как фазовая скорость распространения, так и декремент затухания малых возмущений установившегося неравновесного течения двухфазной смеси - высокодисперсного аэрозоля - весьма существенно зависят от степени неравновесности. В случае слабо неравновесного установившегося течения фазовая скорость изменяется от a_{eq} для низкочастотных возмущений до a_{fr} для высокочастотных, обнаруживая существенную дисперсию, характер которой может быть как нормальным, так и аномальным, в зависимости от $\operatorname{sign}(a_{fr}-a_{eq})$. Если же отклонение установившегося течения от равновесия велико, то и высокочастотные и низкочастотные возмущения распространяются с одной и той же фазовой скоростью a_{fr} и дисперсия, по крайней мере, в рассматриваемом приближении отсутствует или, возможно, носит кимбинированный характер с экстремумом фазовой скорости в промежуточном диапазоне частот $\omega\tau\sim 1$.

В общем случае, замороженная фазовая скорость не является верхней границей дисперсии, а равновесная фазовая скорость - ее нижней границей.

6. Декремент затухания низкочастотных возмущений сильно неравновесного установившегося течения возрастает с частотой $\sim(\omega\tau)^2$, т.е. таким же образом, как при релаксации внутренних степеней свооды в однофазном газе и на порядок медленнее чем в слабо неравновесной двухфазной смеси.

Декремент затухания высокочастотных возмущений сильно неравновесного установившегося течения не зависит от частоты в то время, как при слабой неравновесности фона он с ростом частоты асимптотически убывает к нулю.

Таблица

Слабо неравновесный фон. Низкочастотные возмущения. $a = a_{eq}$, $\xi = (\omega\tau)^3 \frac{\pi W_0}{2\tau a_{eq}^2} \frac{B}{E} \frac{W_0^2 - a_{fr}^2}{a_{eq}^2 - W_0^2 + W_0 a_{eq}}$, $\xi_\lambda = (\omega\tau)^2 \frac{\pi^2 W_0}{a_{eq}} \frac{B}{E} \frac{W_0^2 - a_{fr}^2}{a_{eq}^2 - W_0^2 + W_0 a_{eq}}$.	Сильно неравновесный фон. Низкочастотные возмущения. $a = a_{fr}$, $\xi = (\omega\tau)^2 \frac{W_0}{2\tau a_{fr}^2} \frac{W_0^2 - a_{fr}^2}{a_{fr}^2 - W_0^2 + W_0 a_{fr}}$, $\xi_\lambda = \omega\tau \frac{\pi W_0}{a_{fr}} \frac{W_0^2 - a_{fr}^2}{a_{fr}^2 - W_0^2 + W_0 a_{fr}}$.
Слабо неравновесный фон. Высокочастотные возмущения. $a = a_{fr}$, $\xi = \frac{\omega\tau}{\left(1 - \frac{P_{eq0}}{P_0}\right)^2 (\omega\tau)^2 + 1} \frac{1}{\pi\tau} \frac{E}{B} F$, $\xi_\lambda = \frac{1}{\left(1 - \frac{P_{eq0}}{P_0}\right)^2 (\omega\tau)^2 + 1} \frac{E}{B} 2 a_{fr} F$, $F = \frac{W_0^2 - a_{eq}^2 - 2W_0 a_{fr} + a_{fr}^2}{3W_0^3 - 6W_0^2 a_{fr} + 2a_{fr}^3}$.	Сильно неравновесный фон. Высокочастотные возмущения. $a = a_{fr}$, $\xi = \frac{1}{\tau} \frac{W_0^2 - 2W_0 a_{fr}}{3W_0^3 - 6W_0^2 a_{fr} + 2a_{fr}^3}$, $\xi_\lambda = \frac{1}{\omega\tau} 2\pi a_{fr} \frac{W_0^2 - 2W_0 a_{fr}}{3W_0^3 - 6W_0^2 a_{fr} + 2a_{fr}^3}$.

a – фазовая скорость, ξ – декремент затухания, ξ_λ – коэффициент поглощения на длине волны.

В целом декремент затухания малых возмущений сильно неравновесного двухфазного фона в гораздо меньшей степени чувствителен к частоте и может не иметь резонансного пика в промежуточном диапазоне $\omega\tau \sim 1$, присущего поглощению малых возмущений в слабо неравновесной среде.

Отмеченное влияние степени неравновесности установившегося двухфазного течения на распространение и затухание малых возмущений до последнего времени, по-видимому, не привлекало к себе внимания.

7. Течения с неравновесными фазовыми превращениями в большинстве своем конвективно неустойчивы к малым возмущениям. Широко распространенная неустойчивость к малым возмущениям резко ограничивает возможность расчета даже слабо неравновесных двухфазных течений с помощью термодинамических диаграмм.

8. Конвективная неустойчивость течений с неравновесными фазовыми превращениями тесно связана с возникновением в потоках гомогенно конденсирующегося пара специфических детонационных волн-конденсационных скачков. Наличие достаточно обширного экспериментального материала по конденсационным скачкам позволяет дать косвенную оценку справедливости полученных теоретических результатов.

Получено удовлетворительное соответствие между теоретическим прогнозом максимального переохлаждения перед конденсационным скачком и опытными данными [4] . Удовлетворительно согласуется с опытными данными также оценка верхней границы зоны Вильсона, т.е. области практически равновесных состояний за конденсационным скачком. Наконец, подтверждается экспериментом основанное на полученных результатах теоретическое заключение, согласно которому конденсационный скачок должен представлять волну слабой детонации, а режим Чепмена-Жуге является для него неустойчивым. Таким образом, несмотря на известную ограниченность, релаксационная модель высокодисперсного аэрозоля с одним неравновесным параметром-концентрацией конденсированной фазы-является разумным приближением и может быть использована для теоретического исследования соответствующих двухфазных течений.

В главе Ш строится система уравнений гидромеханики двухфазной среды типа грубодисперсного аэрозоля.

Отмечается, что квазигомогенная модель двухфазной среды, использованная в главе II, может считаться достаточно удовлетворительной, если интерес представляет лишь движение среды в целом, а не индивидуальные движения фаз, т.е. двухскоростной характер движения можно не учитывать. Это требование, по-видимому, не выполняется в случае грубодисперсного аэрозоля со значительным отставанием частиц.

В качестве наиболее целесообразного пути построения уравнений гидромеханики двухфазной среды типа грубодисперсного аэрозоля с неравновесными фазовыми превращениями при умеренных концентрациях частиц избрано соответствующее обобщение модели двухфазного псевдо-идеального движения [5] .

В § 3-I формулируются основные допущения.

I. Газовая фаза - мономолекулярный газ.

2. Конденсированная фаза - множество однородных сферических капель с численной концентрацией $n(t,\vec{r})$, размеры которых в окрестности всякой точки гидродинамического поля в фиксированный момент времени различаются не более, чем в пределах одного порядка величины и могут характеризоваться некоторым средним значением диаметра $\delta(t,\vec{r})$. Другими словами, конденсированная фаза - монодисперсная среда. Капли совершают поступательное движение, вращение капель не рассматривается.

3. Как молекулярный газ (газовая фаза), так и газ капель (конденсированная фаза) считаются внутренне термодинамически равновесными идеальными средами, так что в процессах переноса между фазами релаксируют лишь их внешние степени свободы как подсистем двухфазной системы.

Процессы переноса описываются в квазистационарном приближении, т.е. считается, что скорость процесса в каждый момент времени равна скорости стационарного процесса с теми же самыми граничными условиями.

4. Движение капель определяется чисто динамическими закономерностями. Броуновским движением пренебрегается, и, таким образом, столкновения капель исключаются из рассмотрения, а термодинамическое давление газа капель считается равным нулю. Отсюда же следует, что множество капель - моноскоростная среда, т.е. скорость движения отдельной капли совпадает с локальной скоростью множества капель

как сплошной среды.

5. Газ капель считается достаточно разреженным, чтобы рассматривать каждую каплю как находящуюся в невозмущенном гидродинамическом поле газовой фазы. Воздействие газа капель на движение молекулярного газа и обратное воздействие интерпретируются в виде непрерывно распределенных в соответствующей фазе источников массы, импульса и энергии с удельной производительностью, пропорциональной численной концентрации капель.

6. Движение рассматривается в отсутствие массовых, электромагнитных или каких-либо других дальнодействующих сил.

На основании оценки границ применимости модели делается вывод, что предлагаемая континуализация конденсированной фазы возможна в широком диапазоне влажностей для большинства практически важных задач.

§ 3-2 посвящен интегральным уравнениям сохранения. Вводятся эффективные (кажущиеся) плотности фаз в двухфазной смеси, представляющие результат осреднения массы каждой из фаз по элементарному объему гидродинамического поля. Существенно используется положение, согласно которому объемная и поверхностная концентрация фаз совпадают. В отличие от [6] , не постулируется, что уравнения импульса, массы и внутренней энергии конденсированной фазы аналогичны, соответственно, уравнениям движения, массообмена и теплообмена одиночной частицы. Уравнения массы и импульса для каждой из фаз выводятся непосредственно, затем в качестве следствия получаются соответствующие уравнения сохранения для смеси в целом.

Испарение и конденсация рассматриваются, в духе [7] , как две независимые, конкурирующие реакции, а массообмен между фазами как результат их наложения.

Отмечается, что при избранном подходе к выводу уравнений импульса вклад градиента давления в силу сопротивления частиц газовому потоку учитывается автоматически интегралом поверхностных сил. Влияние других сил, обусловленных неравномерностью поля течения газовой фазы игнорируется. Таким образом, фигурирующая в уравнениях импульса объемная сила сопротивления частиц газовому потоку полагается аналогичной силе лобового сопротивления одиночной частицы при безградиентном обтекании. Указывается, что поправка на неинерциальность системы отсчета (эффект присоединенной массы) в рассматриваемом случае должна быть пренебрежимо малой.

В заключение записывается уравнение полной энергии для смеси в целом, которая, в рамках принятых допущений, равна сумме кинетической и внутренней энергий.

В § 3-3 при обычных предположениях относительно производных гидродинамического поля осуществляется переход от интегральных уравнений сохранения к дифференциальным в области течения, не содержащей сильных разрывов.

Далее в качестве следствия из уравнений массы и импульса выводятся уравнения кинетической энергии каждой из фаз и двухфазной смеси в целом. С привлечением ранее полученного уравнения полной энергии смеси удается получить менее постулативным, как представляется, путем, чем в [7], уравнение внутренней энергии смеси, а из него, с учетом несжимаемости жидкой фазы и отсутствия собственного давления газа капель, и уравнения внутренней энергии каждой из фаз.

Полученные дифференциальные уравнения

$$\frac{\partial}{\partial t}\rho_1+\nabla\cdot\rho_1\vec{w}_1=j-g, \tag{19}$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\rho_2+\nabla\cdot\rho_2\vec{w}_2=g-j, \tag{20}$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\rho_1\vec{w}_1+\rho_1\vec{w}_1\left(\nabla\cdot\vec{w}_1\right)+\left(\vec{w}_1\cdot\nabla\right)\rho_1\vec{w}_1+\nabla p\frac{\rho_1}{\rho_1^\circ}=j\vec{w}_{21}-g\vec{w}_{12}+\vec{f}, \tag{21}$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\rho_2\vec{w}_2+\rho_2\vec{w}_2\left(\nabla\cdot\vec{w}_2\right)+\left(\vec{w}_2\cdot\nabla\right)\rho_2\vec{w}_2+\nabla p\frac{\rho_2}{\rho_2^\circ}=g\vec{w}_{12}-j\vec{w}_{21}-\vec{f}, \tag{22}$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\rho_1u_1+\nabla\cdot\rho_1u_1\vec{w}_1=ju_{21}-gu_{12}+q-p\frac{\rho_1}{\rho_1^\circ}\nabla\cdot\vec{w}_1-p\frac{\rho_2}{\rho_2^\circ}\nabla\cdot\vec{w}_2+(1-\omega)\left(\vec{w}_2-\vec{w}_1\right)\cdot\vec{D}, \tag{23}$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\rho_2u_2+\nabla\cdot\rho_2u_2\vec{w}_2=gu_{12}-ju_{21}-q+\omega\left(\vec{w}_2-\vec{w}_1\right)\cdot\vec{D}, \tag{24}$$

где
$$\vec{D}=j\left(\vec{w}_{21}-\frac{\vec{w}_1+\vec{w}_2}{2}\right)-g\left(\vec{w}_{12}-\frac{\vec{w}_1+\vec{w}_2}{2}\right)+\vec{f},$$

$u_{21}, u_{12}, \vec{w}_{21}, \vec{w}_{12}, 0\leqslant\omega\leqslant 1$ определяются дополнительно, представляют собой квазилинейные уравнения первого порядка и могут рассматриваться в качестве основных уравнений динамики двухфазной среды исследуемого вида.

На основании (23), (24) записываются, соответственно, уравнения энтропии для каждой из фаз и, как следствие, уравнение энтропии для двухфазной смеси в целом. Последнее имеет вид

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\rho_1s_1+\rho_2s_2\right)+\nabla\cdot\left(\rho_1s_1\vec{w}_1+\rho_2s_2\vec{w}_2\right)=\Sigma, \tag{25}$$

где Σ – локальное производство энтропии в единице объема двухфазной смеси, зависящее от 4-х термодинамических потоков – q, $\vec{f}$, j и g в данном неравновесном состоянии, и справедливое лишь при не слишком больших отклонениях от равновесия.

В § 3-4 формулируются уравнения состояния и уравнения кинетики.

Конденсированная фаза предполагается несжимаемой, с постоянной теплоемкостью. Газовая фаза считается совершенным газом. Несжимаемость конденсированной фазы играет принципиальную роль при выводе уравнений внутренней энергии (23), (24), что касается газовой фазы, то последняя считается совершенным газом лишь ради простоты.

Детально обсуждаются уравнения кинетики – переноса массы импульса и внутренней энергии между фазами. Обосновывается целесообразность принятия полу-эмпирических уравнений "почти линейной" кинетики, в которых влияние относительного движения фаз на тепло- и массообмен учитывается посредством некоторых конвективных ("ветровых") множителей в соответствующих кинетических коэффициентах, а перекрестным влиянием скалярных термодинамических сил пренебрегается. Термодинамической силой, соответствующей потоку $\vec{q}$, считается разность температур T_2-T_1, потоку $\vec{f}$ - скорость относительного движения $\vec{W}_2-\vec{W}_1$, потоку j - химическое средство испарения как реакции, в результате которой N_2 молей жидкой фазы превращаются в N_{21} молей пара $(N_2=N_{21})$, наконец, потоку j - химическое сродство конденсации как реакции, в результате которой N_1 молей газовой фазы превращаются в N_{12} молей конденсата ($N_1=N_{12}$). Термодинамические состояния испаряющейся и конденсирующейся масс определяются таким образом, чтобы добиться согласования с имеющимися в литературе соотношениями и использовать их для выяснения вида кинетических коэффициентов. В результате, для скорости теплообмена принимается, в соответствии с соотношением Ранца-Маршалла,

$$q = n\pi\delta\, 2k_1\left(1+\frac{3}{10}Pr^{1/3}Re^{1/2}\right)\left(T_2-T_1\right), \tag{26}$$

для скорости испарения, в соответствии с формулой Максвелла

$$j = n\pi\delta\frac{\rho_1^\circ}{P}2D_1\left(1+\frac{3}{10}Sc^{1/3}Re^{1/2}\right)U_+\left(P_{eq2}-P\right), \tag{27}$$

для скорости конденсации

$$g = n\pi\delta\frac{\rho_1^\circ}{P}2D_1\left(1+\frac{3}{10}Sc^{1/3}Re^{1/2}\right)\frac{P_{eq1}}{P}U_+\left(P-P_{eq1}\right). \tag{28}$$

Скорость переноса импульса (плотность объемных сил взаимодействия между фазами) определяется уравнением

$$\vec{f} = n\frac{\pi\delta^2}{4}C_D\rho_1^\circ\left|\vec{W}_2-\vec{W}_1\right|\left(\vec{W}_2-\vec{W}_1\right). \tag{29}$$

Из многочисленных аппроксимаций коэффициента лобового сопротивления C_D в дальнейшем используются две, приводящие к стоксовскому закону сопротивления при малых скоростях обтекания:

$$C_D=\frac{24}{Re}\left(1+\frac{1}{6}Re^{2/3}\right) \tag{30}$$

- формула Серафини-Клячко, соответствующая стандартной кривой лобового сопротивления сферы в диапазоне $1{,}0 \leqslant Re \leqslant 500$,

и

$$C_D=\frac{24}{Re}\left(1+\frac{3}{16}Re\right) \tag{31}$$

- коэффициент лобового сопротивления деформируемой сферы в приближении Озеена.

В § 3-5 рассматриваются замыкающие уравнения. Делается попытка учесть реальное изменение числа капель вследствие их коагуляции и дробления в рамках монодисперсной схемы. Для этого предлагается уравнение численной концентрации капель в виде

$$\frac{\partial n}{\partial t}+\nabla\cdot n\vec{w}_2 = K_B\exp\left(-\frac{1}{Wb}\right)-K_c n^2. \tag{32}$$

Физический смысл эффективного диаметра δ поясняется условием нормировки

$$n\frac{\pi}{6}\delta^3=\frac{\rho_2}{\rho_2^\circ}, \tag{33}$$

откуда следует, что под δ понимается средне-объемный диаметр множества капель. Таким образом, как дробление, так и коагуляция трактуются в качестве процессов, воздействующих на двухфазное течение исключительно через изменение среднеобъемного диаметра капель.

Констатируется, что предложенные уравнения содержат I7 переменных (в том числе 3 вектора) и составляют замкнутую систему, если известны теплофизические свойства веществ и определены $\vec{W}_{12}$, $\vec{W}_{21}$, ω. Обсуждаются различные способы их определения. Так, если считать, что внутренние степени свободы двухфазной системы равноправны и диссипируемая кинетическая энергия смеси распределяется без какого-либо различия, в соответствии лишь с их теплоемкостями, то следует положить

$$\omega=\frac{\rho_2 c_2}{\rho_2 c_2+\rho_1 c_{1v}} \tag{34}$$

Отмечается, что принятие $\vec{W}_{12}=\vec{W}_2$, $\vec{W}_{21}=\vec{W}_1$ дает наименьшее локальное производство энтропии Σ при данном неравновесном состоянии двухфазной смеси. Делается предположение, что это экстремальное условие может служить аналогом принципа Пригожина для систем, где собственно минимальность (стационарность) Σ нереализуема.

На этом построение системы уравнений гидромеханики двухфазной среды типа грубодисперсного аэрозоля с неравновесными фазовыми превращениями завершается. Общность полученной системы уравнений иллюстрируется переходом к предельным случаям.

I. $n \to 0,\ \rho_2 \to 0$ – конденсированная фаза отсутствует.

В этом случае построенная система уравнений сводится к обычным уравнениям газовой динамики (совершенный газ).

2. $\vec{W}_1 \to \vec{W}_2$, различием скоростей фаз можно пренебречь.

В этом случае, с точностью до определения g, j, q, возникает квазигомогенное релаксационное приближение (с двумя релаксирующими параметрами), подобное применявшемуся в гл.II.

§ 3–5 посвящен одномерным и квазиодномерным течениям грубодисперсного аэрозоля с неравновесными фазовыми превращениями. Рассматривается вопрос о характеристических скоростях (скоростях распространения слабых разрывов) неустановившегося течения. Для этого, как обычно, анализируется матрица коэффициентов системы линейных относительно $\frac{\partial \chi_i}{\partial t}$, $\frac{\partial \chi_i}{\partial x}$ ($i = 1, \ldots 7$) уравнений, построенной на основании дифференциальных уравнений гидромеханики (I9) – (24), (32). Неоднозначная разрешимость указанной системы относительно $\frac{\partial \chi_i}{\partial x}$ на поверхности слабого разрыва приводит к характеристическому уравнению, корни которого (собственные числа матрицы системы) являются характеристическими скоростями. Показано, что неустановившееся одномерное течение исследуемой среды обладает 7-ю характеристическими скоростями (одна из которых кратности 2):

$$\xi_1 = W_1,\quad \xi_2 = \xi_3 = W_2,\quad \xi_4 = W_1 + a_1,\quad \xi_5 = W_1 - a_1, \tag{35}$$

$$\xi_6 = W_2 + a_2,\quad \xi_7 = W_2 - a_2,$$

где

$$a_1 = \left(\varkappa \frac{P_0}{\rho_0}\right)^{1/2}$$ – обычная скорость звука в чистом газе,

$$a_2 = \left(\frac{\rho_1^\circ}{\rho_1} \frac{P}{\rho_2^\circ}\right)^{1/2}$$ – скорость "медленного" звука (псевдозвука), обусловленного присутствием конденсированных частиц.

В заключение § 3–6 для рассматриваемой двухфазной среды записываются уравнения одномерного стока со сферической симметрией и квази-одномерного течения в канале переменного сечения, которые отличаются лишь источниковыми членами. Подчеркивается, что квази-одномерное приближение оперирует с некоторыми средними по сечению значениями гидромеханических переменных и справедливо, как правило, для каналов с достаточно плавным изменением профиля. Устанавливается существование, помимо интеграла расхода, также интеграла полной энтальпии двухфазной смеси в целом для указанных течений.

Резюмируются полученные в главе III результаты.

I. Построены, при несколько иных допущениях и отличающимся от [7] путем, физическая модель и замкнутая система уравнений гидромеханики грубодисперсного аэрозоля с неравновесными фазовыми превращениями, развивающие представления [5]. Система включает 7 дифференциальных квазилинейных уравнений первого порядка (уравнения сохранения) и II конечных уравнений (4 уравнения состояния, 4 уравнения кинетики и 2 замыкающих).

2. Показано, что для построенной модели линейная кинетика процессов переноса является неудовлетворительной обосновано привлечение "почти линейной" кинетики, выяснен вид кинетических коэффициентов.

3. Установлено, что в рамках построенной модели потери импульса (кинетической энергии) двухфазной смеси, обусловленные переносом массы, играют подчиненную роль в сравнении с потерями, вызванными относительным движением фаз.

4. Указано, что допущение, согласно которому вся диссипируемая кинетическая энергия смеси переходит во внутреннюю энергию газовой фазы $(\omega = 0)$ занижает, по-видимому, возможные потери, связанные с избыточной температурой капель в условиях разгонного течения. Обоснован целесообразный выбор ω.

5. Обращено внимание на то обстоятельство, что допущение, по которому присоединяющаяся масса обладает нулевой скоростью относительно соответствующей фазы, дает наименьшее значение локальному производству энтропии Σ.

6. Предпринята попытка обобщения модели на случай переменного числа капель с учетом их дробления и коагуля-

ции в рамках монодисперсной схемы.

7. Показано, что все характеристические скорости одномерного неустановившегося течения рассматриваемой двухфазной среды являются вещественными. Соответственно, система уравнений одномерного неустановившегося течения удовлетворяет условиям эволюционности (она оказывается параболической в силу кратности 2 одной из характеристических скоростей при переменном числе капель и гиперболической, если число капель постоянно) и допускает корректную постановку задачи с начальными данными. С этой точки зрения предложенную модель двухфазной среды можно считать физически разумной.

В главе IУ рассматриваются установившиеся квазиодномерные течения грубодисперсного аэрозоля с неравновесными фазовыми превращениями в канале переменного сечения.

В § 4-I устанавливается существование особых точек системы уравнений одномерного установившегося течения и классифицируется его характер (сверхзвуковой, дозвуковой, смешанный).

Наличие особых точек у системы уравнений квази-одномерного установившегося течения связано с существованием характеристических скоростей соответствующего неустановившегося течения, способных обращаться в нуль. Помимо тривиальных $\xi_1 = W_1$ и $\xi_{2,3} = W_2$, обращающихся в нуль на бесконечности, характеристическими скоростями такого рода являются

$$\xi_5 = W_1 - \left(\varkappa \frac{P}{\rho_1^\circ}\right)^{1/2}, \qquad \xi_7 = W_2 - \left(\frac{\rho_1^\circ}{\rho_1}\frac{P}{\rho_2^\circ}\right)^{1/2}$$

Характеристическая скорость ξ_5 представляет скорость распространения вверх по потоку переднего фронта акустической волны.

Характеристическая скорость ξ_7 является специфической для построенной двухскоростной модели, которая допускает независимые от газовой фазы возмущения скорости и кажущейся плотности конденсата, и представляет скорость распространения вверх по потоку переднего фронта соответствующей концентрационной волны.

Если все характеристические скорости на $[x_\alpha, x_\beta]$ положительны, то все элементы свободы, которым может удовлетво-

рить система уравнений установившегося течения при интегрировании, исчерпываются заданием граничных условий в $x = x_\alpha$ и, таким образом, течение на $[x_\alpha, x_\beta]$ является сверхзвуковым.

Если одна или обе скорости ξ_5, ξ_7 отрицательны на $[x_\alpha, x_\beta]$, то часть граничных условий (одно или два) должна задаваться в $x = x_\beta$, соответствующие течения оказываются дозвуковыми.

Наконец, если хотя бы одна из скоростей ξ_5, ξ_7 меняет знак на $[x_\alpha, x_\beta]$, проходя через нуль, то течение является смешанным, содержащим особую точку, через которую, вообще говоря, невозможно построение непрерывного решения. Возможность непрерывного перехода через особую точку определяется ее характером и, соответственно, устойчивостью непрерывного течения в малой ее окрестности.

Выяснению этого вопроса посвящается § 4-2.

В системе уравнений квази-одномерного установившегося течения, разрешенной относительно производных

$$\chi_i' = F_i(\chi_m, y, y'), \qquad \begin{matrix} i = 1, \ldots 7 \\ m = 1, \ldots 17 \end{matrix} \qquad (36)$$

особенность содержится существенно лишь в уравнении

$$W_1' = \frac{W(\chi_m, y, y')}{\xi_5 \, \xi_7},$$

прочие производные линейно выражаются через W_1'.

Непрерывный переход через особую точку $\xi_\lambda = 0$ $(\lambda = 5, 7)$ возможен лишь в том случае, если вместе с ξ_λ обращается в нуль и W. Условия $\xi_\lambda = 0, W = 0$, рассматриваемые совместно, определяют в I8-мерном пространстве переменных $\{x, \chi_m\}$ I6-мерную поверхность особых точек системы уравнений (36). Интегральная кривая этой системы, проходящая через изолированную особую точку, в малой окрестности этой точки должна быть, следовательно, двумерной. Последнее дает возможность выяснить характер особенности обычным путем, введя координаты $\{\xi_\lambda, W\}$

Из
$$\frac{dW}{dx} = \varphi(\chi_m, \chi_m', y, y', y''), \qquad \frac{d\xi_\lambda}{dx} = \psi(\chi_m, \chi_m')$$

с учетом (36)

$$\frac{dW}{dx} = \Phi\left(\frac{W}{\xi_\lambda}, \chi_m, y, y', y''\right), \qquad \frac{d\xi_\lambda}{dx} = \Psi\left(\frac{W}{\xi_\lambda}, \chi_m\right)$$

Отсюда

$$\frac{dW}{d\xi_\lambda} = \frac{L_1(W, \xi_\lambda)}{L_2(W, \xi_\lambda)} \qquad (37)$$

где L_1, L_2 – однородные линейные формы. Характер особенности определяется собственными числами матрицы

$$\begin{Vmatrix} \frac{\partial L_1}{\partial W}, & \frac{\partial L_1}{\partial \xi_\lambda} \\ \frac{\partial L_2}{\partial W}, & \frac{\partial L_2}{\partial \xi_\lambda} \end{Vmatrix}$$

т.е. коэффициентами L_1, L_2 .

Анализируется характер особых точек для разгонного течения с присущим ему направлением процессов переноса между фазами.

В § 4-3 уравнения гидромеханики грубодисперсного аэрозоля с неравновесными фазовыми превращениями, представленные в главе Ш, используются для расчета течения влажного пара калия в разгонном устройстве типа сопла Лаваля с гиперболической образующей

$$y(x) = \sqrt{y_0^2 + \left(\frac{2x}{5}\right)^2} \qquad (38)$$

Этот профиль достаточно близок к используемым на практике профилям конических сопл, но обладает тем преимуществом, что не имеет точек сопряжения прямолинейных образующих с дугами окружности, где терпит разрыв $y''(x)$.

Рассматриваются 4 варианта начальных условий (равновесная двухфазная смесь, строго говоря, в бесконечно удаленной точке): P_0=I,5 бар, массовая влажность $\beta_0 = 0,4$ и $\beta_0 = 0,8$ эффективный диаметр капель $\delta_0 = 3\cdot10^{-5}$ м и $\delta_0 = 1\cdot10^{-5}$ м

Длина расширяющейся части сопла (т.е. степень его раскрытия) задается таким образом, чтобы сопло обеспечивало непрерывное расширение сухого пара калия (совершенный газ, $\varkappa = const$) с тем же самым начальным давлением до давления $P_e/P_a = 0,033$ на срезе.

Теплофизические свойства калия заимствуются из [11] .

В качестве основных масштабов задачи принимаются $W_* = \left(\varkappa \frac{P_0}{\rho_1^0}\right)^{1/2}$, $\rho_* = \rho_{10}^0$, $c_* = \frac{R}{M}$, $l_* = y_0$ т.е. масштабом скорости считается скорость звука в газовой фазе и масштабом плотности – плотность газовой фазы в равновесной смеси, масштабом теплоемкости – газовая постоянная, линейным масштабом – полукалибр сопла. Масштабы прочих переменных являются производными от основных. Введением масштабов уравнения течения приводятся к безразмерному виду, в котором и используются далее.

Решение прямой задачи проводится в два этапа. На первом этапе рассчитывается течение на входном участке разгонного устройства с переходом через нуль характеристической скорости ξ_7 . Предполагается, что входной участок разгонного течения может быть схематизирован в виде дозвукового стока со сферической симметрией и центром в начале координат. Течение рассчитывается методом пристрелки по $W=0$ при $\xi_7 = 0$, т.е. повторно решается задача с начальными данными, отнесенными к измененной конечной координате левого конца $x_a = -r_a$, пока не будут достигнуты условия непрерывного (устойчивого, в соответствии с § 4-2) перехода через особенность, и дальнейшее увеличение r_a перестанет оказывать влияние.

При расчете входного участка истинная плотность газовой фазы и число капель считаются постоянными, а перенос массы и энергии между фазами учитывается в линейном приближении. Соответствующим образом упростившаяся система уравнений (36) интегрируется методом Рунге-Кутта с постоянным шагом по координате на ЦВМ БЭСМ-4 вплоть до $M = \frac{W_1}{a_1} = 0,4$. Далее результаты расчета течения на входном участке подвергаются квадратичной аппроксимации по целым обратным степеням радиуса с коэффициентами, вычисленными по методу наименьших квадратов, и используются при задании начальных условий для основного течения.

Основное течение, т.е. смешанное, вообще говоря, течение на $[x_6, x_e]$ в канале заданного профиля с переходом через нуль характеристической скорости ξ_5 рассчитывается в принципе по такой же программе, что и течение на входном участке, с той лишь разницей, что начальные условия (граничные условия в $x = x_6$) не являются фиксированными и следуют из решения уравнений стока при $x < x_6$. Пристрелка осуществляется по $W=0$ при $\xi_5 = 0$ или же по $P_e = 0,033$, если течение в пределах сопла при данных начальных условиях остается чисто дозвуковым.

В § 4-4 рассматривается задача оптимизации сопла как разгонного устройства жидкой фазы. Используется без существенных изменений модифицированный метод множителей Лагранжа [14]. Критерием качества управления (профиля канала) считается приращение кинетической энергии жидкой фазы, которое можно получить в квази-одномерном течении исследуемой двухфазной смеси на $[x_в, x_e]$ при заданном ее начальном (равновесном) состоянии и располагаемом относительном перепаде давлений. В соответствии с этим ищется максимум функционала

$$T = \left(\rho_2 W_2^3 y^2\right)_e - \left(\rho_2 W_2^3 y^2\right)_в \qquad (39)$$

при наличии конечных связей между гидромеханическими переменными и дифференциальных связей (36) между гидромеханическими переменными и управлением $\{y, z\}$

$$y' - z \equiv 0. \qquad (40)$$

Фазовое пространство допустимых управлений считается ограниченным условиями $|z| \leqslant k$, $|y| \leqslant Y$, следующими из квазиодномерной постановки задачи и технической реализуемости управления. В связи с этим допускается, что оптимальный профиль может включать как участки двустороннего экстремума (с произвольными $sign\,\delta y$, $sign\,\delta z$) так и отрезки, где управление принимает предельно допустимые значения $z = \pm k$, $y = \pm Y$. Соответственно, оптимальный профиль ищется в классе кусочно-гладких кривых с конечным числом точек излома $x_в \leqslant x_c \leqslant \ldots \leqslant x_e$, которые, наряду с $\{y, z\}$ являются независимыми управлениями.

Отыскание условного $\max\limits_{y,z,x_в,\ldots x_e} T$ сводится, как обычно, к отысканию безусловного $\max\limits_{y,z,x_в,\ldots x_e} I$, где

$$I = T + \int\limits_{x_в}^{x_e} \sum \mu_i L_i \, dx, \qquad (41)$$

$L_i \equiv 0$ следует из дифференциальных связей (36), (40), μ_i – неопределенные множители Лагранжа.

Необходимое условие максимума $\delta I \leqslant 0$ с учетом ограничений на допустимые управления редуцирует экстремальную задачу (41) к краевой задаче относительно гидромеханических переменных и множителей Лагранжа. Вариация δI зависит

как от вариаций управлений, так и от вариаций гидромеханических переменных. Среди последних лишь $\delta\chi_i\,(i=1,\ldots 7)$ являются независимыми, остальные исключаются с помощью конечных связей, позволяющих выразить $\delta\chi_i\,(i=8,\ldots 17)$ через $\delta\chi_i\,(i=1,\ldots 7)$ и δy.

Множители Лагранжа выбираются таким образом, чтобы δI зависела только от вариаций управлений. Отмечается, что соответствующие уравнения для множителей Лагранжа

$$\mu'_\alpha = G_\alpha\left(\mu_\alpha, \chi_m, y, z\right) \qquad \begin{matrix}\alpha = 1,\ldots 7\\ m = 1,\ldots 17\end{matrix} \qquad (42)$$

имеют особенность в той же самой точке, что и уравнения течения (36), т.е. при $\xi_5 = 0$.

Предполагается, что при допустимом варьировании характер особой точки не меняется (седло), и принимается, в соответствии с [14], что для оптимального течения множители Лагранжа должны быть непрерывны и ограничены при переходе через особенность.

Система (36), (42) замыкается на участке краевого экстремума уравнениями $y = \pm Y$ или $y' = \pm k$ на участке двустороннего экстремума-уравнениями

$$\mu'_8 = G_8\left(\mu_\alpha, \chi_m, y, z\right), \qquad (43)$$

$$V\left(\mu_8, \mu_\alpha, \chi_m, y\right) = 0, \qquad \begin{matrix}\alpha = 1,\ldots 7\\ m = 1,\ldots 17\end{matrix} \qquad (44)$$

требующими обращения в нуль коэффициентов при δy и δz. Последнее из них, определяющее экстремаль $y(x)$ целевого функционала T, не содержит ни y', ни y'', что указывает на двукратную вырожденность рассматриваемой вариационной задачи.

Выбор граничных условий для множителей Лагранжа удовлетворяет требованиям, следующим из рассмотрения внеинтегральных членов δI. Поскольку течение при $x < x_в$ полагается известным, то вариации $\delta\chi_{iв}\,(i=1,\ldots 7)$ не являются независимыми, и проблема нехватки элементов произвола в выборе $\mu_{iв}$, необходимых для обеспечения непрерывности μ_i при переходе через особенность, не возникает.

На основании проведенного анализа и расчетов, иллюстрирующих возможности применения модели неравновесного двухфазного движения, построенной в гл.Ш, делаются следующие выводы.

1. Адиабатное расширение двухфазной смеси типа грубодисперсного аэрозоля в сопле не может быть удовлетворительно аппроксимировано ни каким-либо политропическим газовым, ни равновесным двухфазным (диаграммным) процессом.

2. Во всех исследованных неравновесных течениях давление, температура газа и температура конденсата на срезе сопла оказываются выше, а скорости газа и конденсата ниже тех значений; которыми характеризуются замороженное и равновесное течения. Таким образом, ни замороженное течение (течение сухого газа при замороженной скорости конденсата $W_2=W_{20}=0$), ни равновесное (диаграммное) течение не могут рассматриваться в качестве абсолютных границ для реализующихся в действительности неравновесных двухфазных течений.

Следует отметить, что в литературе на этот счет имеет некоторое распространение иная точка зрения.

3. Критическое сечение $\xi_s=0\,(M=1)$ во всех рассмотренных случаях смещено вниз по потоку от минимального сечения сопла. Величина этого смещения сложно зависит от β_0, δ_0. При $\beta_0=0{,}8$ смещение Δx_* возрастает с ростом δ_0. Напротив, при $\beta_0=0{,}4$ рост δ_0 приводит к уменьшению Δx_*. С другой стороны, Δx_* уменьшается с ростом β_0 при $\delta_0=1\cdot 10^{-4}$ и, наоборот, возрастает при $\delta_0=3\cdot 10^{-4}$. Отмеченные особенности объясняются немонотонным и в известной мере противоположным характером зависимости интенсивности процессов переноса между фазами от β, δ.

При некоторых начальных условиях ($\beta_0=0{,}8$; $\delta_0=3{,}0.10^{-4}$) критические условия в пределах сопла вообще не достигаются, в течение вплоть до среза остается дозвуковым. Отмеченная возможность существования разгонных чисто дозвуковых течений грубодисперсного аэрозоля в соплах Лаваля подтверждается экспериментом [12].

4. Расход газа через сопло во всех рассмотренных случаях оказывается больше как по сравнению с замороженным, так и с диаграммным течением. Расход двухфазной смеси в целом также всегда больше, чем это следует из диаграммных представлений. Вместе с тем, расход конденсата может отличаться и в ту, и в другую сторону от расхода в диаграммном течении.

5. Сопло Лаваля без специального профилирования является довольно малоэффективным разгонным устройством жидкой фазы. В рассмотренных случаях кинетическая энергия жидкой фазы на срезе составляет от 58,1% до 66,4% диаграммного значения.

6. Вид оптимального профиля существенно зависит от режима течения в канале нулевого приближения. При смешанном течении оптимальный канал состоит из конического конфузора с предельным углом конусности $(y'=-k)$, на выходе которого достигается критическое течение, и далее - расширяющейся части, образованной экстремалью и концевым участком краевого экстремума. Профиль имеет две угловые точки. Для дозвукового течения оптимальным каналом оказывается гладкий конфузор. В некотором смысле, с уменьшением дисперсности (укрупнением) конденсата его разгон в смешанном течении становится невыгодным.

7. В лучшем из рассмотренных случаев оптимальное профилирование позволяет получить увеличение кинетической энергии жидкой фазы на срезе на II,2% по сравнению с соплом без специального профилирования (6,5% от диаграммного значения). Таким образом, в рассмотренных случаях эффект оптимального профилирования оказывается одного порядка с эффектом изменения начальных параметров двухфазной смеси.

8. Эффективность оптимального профилирования с учетом реальной двумерности течения должна оказаться более высокой, однако и потери кинетической энергии T_{diss} при этом также существенно выше. Поэтому эффективность одномерной оптимизации можно рассматривать как верхнюю оценку возможностей оптимального профилирования.

В связи с этим можно проявлять лишь осторожный оптимизм в отношении специального профилирования с целью повышения эффективности сопла как разгонного устройства жидкой фазы.

В заключение приводятся соответствующие иллюстрации к гл. П-IУ.

Материалы диссертации докладывались на газодинамическом семинаре кафедры ПГТ МЭИ, семинаре отдела массообмена ИВТ АН СССР, Симпозиуме "Тепломассообмен и физическая газодинамика" (ИВТ АН СССР, 1970 г.) и опубликованы в следующих статьях:

1. А.В.Калинин, К построению уравнений гидромеханики двухфазной среды с фазовыми переходами, Изв. АН СССР, Энергетика и транспорт, № 6, 1969.

2. А.В.Калинин, Распространение и затухание малых возмущений в релаксирующей двухфазной среде, Изв.АН СССР, Энергетика и транспорт, № 3, 1970.

3. А.В.Калинин, О влиянии степени неравновесности установившегося двухфазного течения на распространение малых возмущений, Теплофизика высоких температур (в печати).

Кроме того, часть материалов диссертации представлена в главах 6 и 8 книги М.Е.Дейча и Г.А.Филиппова "Газодинамика двухфазных сред", "Энергия", 1968.

Литература

1. Е.Ступоченко, И.Стаханов, ДАН СССР, 1960, т.134, № 4.
2. М.Дейч, Е.Стекольщиков, Г.Филиппов, Теплоэнергетика, 1965, № 12.
3. В.Сычев, Теплофизика высоких температур, 1967, том 5, № 6.
4. М.Дейч, В.Степанчук, Г.Циклаури, Г.Салтанов, Теплофизика высоких температур, 1964, т.2, № 5.
5. Х.Рахматулин, ПММ, 1956, т.20, вып.2.
6. А.Крайко, Л.Стернин, ПММ, 1965, т.29, вып.3.
7. Р.Нигматулин, Изв.АН СССР, МЖГ, 1967, № 5.
8. H.Städtke, Proceedings of MHD Symposium Warsaw, IAEA, Vienna, 1968.
9. Ф.Слободкина, ПММ, 1967, т.31, № 3.
10. А.Крайко, В.Старков, Л.Стернин, Изв.АН СССР, МЖГ, № 4, 1968.
11. Теплофизические свойства щелочных металлов. Под ред. ак.В.Кириллина, Изд.стандартов, 1970.
12. М.Дейч, В.Данилин, В.Шанин, Р.Циклаури, Теплоэнергетика, 1969, № 6.
13. S.Soo, Fluid dynamics of multiphase system, Blusdell Publ.Co., 1967.
14. Ф.Слободкина, ПММ, 1968, т.32, вып.3.

ПИ-2 Госстроя СССР
Москва А-80, Волоколамское шоссе, д.1
Заказ № 1007 Т-17690 1970г. Тир. 180 экз.