МОСКОВСКИЙ ОРДЕНА ТРУДОВОГО КРАСНОГО ЗНАМЕНИ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

На правах рукописи

Б. С. ЦЫБАКОВ

ТЕОРИЯ ПЕРЕДАЧИ НЕПРЕРЫВНЫХ СООБЩЕНИЙ ПО НЕПРЕРЫВНЫМ КАНАЛАМ

(Специальность — 255. «Техническая кибернетика»)

АВТОРЕФЕРАТ ДИССЕРТАЦИИ
НА СОИСКАНИЕ УЧЕНОЙ СТЕПЕНИ
ДОКТОРА ТЕХНИЧЕСКИХ НАУК

Москва 1971

МОСКОВСКИЙ ОРДЕНА ТРУДОВОГО КРАСНОГО ЗНАМЕНИ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

На правах рукописи

Б.С.Цыбаков

ТЕОРИЯ ПЕРЕДАЧИ НЕПРЕРЫВНЫХ СООБЩЕНИЙ ПО НЕПРЕРЫВНЫМ КАНАЛАМ

(Специальность - 255. "Техническая кибернетика)

Автореферат диссертации
на соискание ученой степени
доктора технических наук

МОСКВА 1971

характеристик сообщений и каналов - развивалось, главным образом также в применении к дискретным случаям. В настоящее время найдены выражения для эпсилон-энтропии источников марковского типа; пропускной способности дискретных каналов, обладающих определенной симметрией; границ для вероятности ошибочного декодирования, оптимального кода и др. Вместе с тем были получены некоторые важные результаты, относящиеся к непрерывному случаю. Сюда относятся исследования предельных характеристик каналов без памяти; источников с независимыми компонентами; некоторых моделей гауссовских источников и гауссовских каналов, а также каналов с замираниями.

Относительно последнего из указанных выше направлений, связанного с математическим обоснованием теории информации, можно сказать, что оно было развито с наибольшей полнотой и общностью и охватывает почти все практически интересные ситуации дискретной и непрерывной передачи информации.

В последние годы интерес к "непрерывной" теории информации заметно повысился как в СССР, так и в других странах. Прежде всего это связано с началом широкого использования достижений теории информации в коммерческих, военных и космических линиях связи, с необходимостью выбора для них оптимальных систем модуляции, и, наконец, с желанием использовать опыт, накопленный в "дискретной" теории информации, для решения задач передачи непрерывных сообщений по непрерывным каналам.

Исследование передачи непрерывных сообщений по непрерывному каналу составляет основное содержание реферируемой диссертации. Диссертация состоит из двух частей. В первой части исследуются потенциальные характеристики гауссовских каналов

и источников сообщений. Во второй части исследуются различные линейные и нелинейные методы кодирования. Эти методы кодирования применяются к передаче одномерных сообщений; неподвижных и движущихся изображений; к передаче по радиорелейной линии; к передаче в ситуации, когда имеется шум до кодирования и после декодирования, и в ряде других случаев.

Диссертация имеет восемнадцать глав, четыре математических приложения и заключение.

*

В первой главе на основе рассмотрения условного распределения сигнала на выходе канала дается определение дискретного по времени гауссовского канала; гауссовского канала с конечной памятью о сигнале на входе; векторного гауссовского канала. Устанавливается, что сигнал на выходе гауссовского канала можно представить как сумму линейной фильтрации сигнала на входе канала и гауссовского аддитивного шума, распределение которого не зависит от сигнала на входе и параметров фильтра.

Векторным гауссовским каналом называется такой канал, сигнал на выходе которого любой заданной длины N $(N=1,2,\dots)$, $(\tilde{\eta}_1,\dots,\tilde{\eta}_N)$, где $\tilde{\eta}_i$ $(i=1,\dots,N)$ являются m-мерными векторами, связан со случайным сигналом на входе $\eta_1,\eta_2,\dots$, где η_i $(i=1,2,\dots)$ являются n-мерными случайными векторами, соотношением

$$\tilde{\eta}_k = \sum_{j=1}^{k} A_{kj}\eta_j + \zeta_k, \quad k=1,\dots,N, \qquad (\mathrm{I})$$

где A_{kj} -неслучайные матрицы размера $m \times n$, а $(\zeta_1, \dots, \zeta_N)$- отрезок длины N, независящей от сигнала на входе векторной m -мерной гауссовской последовательности $\zeta_1, \zeta_2, \dots$ с нулевым вектором математических ожиданий. В соотношении (I) $\tilde{\eta}_k, \eta_j$ и ζ_k считаются вектор-столбцами, соответственно, с m, n и m компонентами.

Модель векторного канала обобщает все ранее рассматривавшиеся модели гауссовского канала. Ее частными случаями являются одномерный канал $(n=m=1)$; многоканальная система ($n=m$ -число подканалов); система разнесенного приема или многопутевая система ($n=1$, m -число ветвей разнесения или число путей); системы с n передающими и m приемными антеннами и др. С помощью матриц A_{kj} модель учитывает также часто встречающиеся на практике явления фильтрации в канале; межсимвольной и межканальной интерференции. Компоненты аддитивного шума не предполагаются независимыми, что позволяет учесть возможную зависимость шумов в различных подканалах и в одном и том же подканале в различные моменты времени.

В качестве ограничения на сигналы на входе канала вводится средневзвешенное ограничение на мощность. Оно представляется в виде математического ожидания некоторой неотрицательно определенной квадратичной формы. Все ограничения средней мощности, рассматривавшиеся ранее, являются частными случаями введенного здесь ограничения.

*

Вторая глава посвящена исследованию пропускной способности гауссовского векторного канала без памяти. Рассматриваемый

канал в каждый момент времени задается равенством $\tilde{\eta} = A\eta + \zeta$ и условием $M(\eta' B \eta) \le P$, где $\eta = (\eta_1, \dots, \eta_n)$, $\tilde{\eta} = (\tilde{\eta}_1, \dots, \tilde{\eta}_m)$, $\zeta = (\zeta_1, \dots, \zeta_m)$ -вектор-столбцы представляющие сигнал на входе, сигнал на выходе и шум в канале, соответственно; A -матрица размера $m \times n$; B -неотрицательно определенная матрица; штрих означает транспонирование, а M -символ математического ожидания. Шум ζ считается гауссовским, независящим от η и имеющим ковариационную матрицу D_ζ.

Пропускная способность такого канала является функцией трех матриц: A, B и D_ζ.

Вначале доказывается, что, если произвести линейное невырожденное преобразование пространства сигналов на входе и пространства сигналов на выходе, то возникающий в результате канал с соответствующим ему мощностным ограничением обладает той же пропускной способностью, что и исходный канал.

Далее рассматривается случай, когда матрица A является квадратной и невырожденной и по крайней мере одна из матриц B и D_ζ -вырожденная. Доказывается, что в этом случае пропускная способность бесконечно велика. Приводится физическая интерпретация этого результата.

После рассмотрения случая квадратных и невырожденных матриц, исследуется наиболее общая ситуация произвольных матриц A, B и D_ζ. Для рассмотрения этого случая в приложении I доказывается теорема приведения трех матриц к диагональному виду с помощью двух преобразований. Частным случаем этой теоремы является теорема Обухова-Хотеллинга в теории нормальной корреляции векторов. На основе этой теоремы в терминах рангов рассматриваемых матриц получено необходимое и достаточное условие конечности пропускной способности и найдено выражение для пропускной способности канала через ненулевые корни некоторого уравнения, составляемого с помощью матриц A, B и $\mathcal{D}_{\zeta}$. Выяснено, что обращение в бесконечность пропускной способности вызвано определенным вырождением канала и ограничения на мощность сигнала на его входе.

*

Третья глава называется "Пропускная способность одномерного канала с памятью", в ней исследуется канал, получающийся из модели (I) при $n = m = 1$. В таком канале действует, в общем случае, небелый гауссовский шум и имеется фильтрация сигнала. Пропускная способность определяется здесь как верхняя грань скоростей передачи информации. С помощью теоремы Пинскера, вначале устанавливается важный для этой и дальнейших глав факт, что пропускная способность векторного гауссовского канала достигается на гауссовских сигналах на входе канала. Далее предполагается, что одномерный канал имеет конечную память о сигнале на входе (случай бесконечной памяти рассмотрен в пятой главе) и для него находится пропускная способность в виде интеграла, подинтегральная функция в котором зависит от спектральной характеристики фильтра в канале ,частотной весовой функции, присутствующей в ограничении на мощность , и спектральной плотности аддитивного шума. В случае канала без фильтра и с белым шумом этот результат переходит в известный результат Шеннона.

Основная трудность при получении этого результата состоит в том, что из-за наличия фильтра пара отрезков сигналов на входе и выходе канала не является стационарной. Заметим, что для случая стационарных каналов задача была решена Пинскером.

*

В четвертой главе сведены результаты, полученные для пропускной способности векторного гауссовского канала с памятью.

Вначале рассматривается простой случай, в котором (матричная) частотная характеристика фильтрации в канале является диагональной. Этот случай соответствует отсутствию межканальной интерференции сигналов. В предположении шума с независимыми компонентами и простого ограничения на среднюю мощность сигнала на входе получено выражение для пропускной способности канала.

Далее рассматривается общий случай произвольных матричных спектральных характеристик, определяющих фильтрацию $A(\lambda)$,регулярный шум $F_{\zeta}(\lambda)$ и ограничение на среднюю мощность $B(\lambda)$. Основной результат формулируется в терминах определяемого здесь интегрального ранга матрицы. Интегральным рангом матрицы, зависящей от некоторого параметра, называется интеграл от ранга матрицы по параметру.

Показано , что условие неравенства интегральных рангов матриц $\| B(\lambda), A'(\lambda) \|$ и $B(\lambda)$ является достаточным для обращения пропускной способности в бесконечность. Для случая, когда это условие не выполняется , найдено выражение для пропускной способности через корни некоторого алгебраического уравнения ,определяемого с помощью матриц $A(\lambda), B(\lambda)$ и $F_{\zeta}(\lambda)$. Для установления справедливости этого результата используется теорема приведения трех матриц к диагональной форме, доказанная в приложении I. Сущность метода доказательства состоит в том, что с помощью специально выбранных линейных преобразований канал фактически приводится к диагональному каналу, рассмотренному в начале этой главы. Условия, приводящие к обращению в бесконечность пропускной способности, в простейших случаях интерпретируются как такие, в которых существует конечная полоса частот с бесконечно большим отношением сигнал/шум.

Результаты, найденные ранее Овсеевичем и Пинскером для случая многопутевой системы с $n=1$ и Пинскером для невырожденного случая при $n=m$, являются частными случаями полученных здесь результатов.

*

Пропускная способность канала с белым шумом и фильтром с бесконечной памятью исследуется в пятой главе. В отличие от предыдущих глав, пропускная способность здесь определяется "нестационарным образом" как предел пропускной способности, относящейся к передаче на интервале времени заданной длины, при стремлении этой длины к бесконечности. Устанавливается, что пропускная способность зависит от асимптотики распределения собственных значений некоторой матрицы, сходящейся к теплицевой матрице. Для получения выражения пропускной способности при условии, когда квадраты коэффициентов, задающих фильтр в канале, сходятся, доказывается, что рассматриваемые функции от собственных значений некоторой матрицы сходятся к функции от собственных значений теплицевой матрицы, которая легко вычисляется. Аналогичные результаты в применении к эпсилон-энтропии были независимо получены Грэйем (США).

*

Оставшиеся главы первой части посвящены исследованию эпсилон-энтропии гауссовского сообщения при среднеквадратическом взвешенном критерии качества передачи информации. Центральным результатом шестой главы является найденное выражение для эпсилон-энтропии векторного гауссовского сообщения.

Рассматривается сообщение на входе, представляющее собой стационарную n-мерную векторную гауссовскую последовательность $\ldots,\xi_{-1},\xi_0,\xi_1,\ldots$ с независимыми значениями $\xi_i=(\xi_i^{(1)},\ldots\xi_i^{(n)})$, которые являются гауссовскими случайными векторами с нулевым математическим ожиданием и ковариационной матрицей D_ξ. Сообщение на выходе является n-мерной векторной последовательностью $\ldots,\tilde\xi_{-1},\tilde\xi_0,\tilde\xi_1,\ldots$, где $\tilde\xi_i=(\tilde\xi_i^{(1)},\ldots,\tilde\xi_i^{(n)})$. Критерий качества передачи задается в виде

$$M[(\xi_i-\tilde\xi_i)'H(\xi_i-\tilde\xi_i)]\leq\epsilon^2,$$

где H – некоторая неотрицательно определенная матрица, ϵ^2 – заданная неотрицательная постоянная, а $(\xi_i-\tilde\xi_i)$ понимается как вектор-столбец.

Эпсилон-энтропия является функцией двух матриц H и D_ξ. Доказывается, что она фактически зависит от собственных чисел матрицы HD_ξ. Получено выражение для эпсилон-энтропии через эти собственные значения. Для доказательства использована теорема приведения двух матриц с помощью прямого и обратного преобразования, доказанная в приложении I.

В следующей главе приведены известные результаты по вычислению эпсилон-энтропии гауссовской регулярной последовательности.

Наиболее общие результаты относительно эпсилон-энтропии, обобщающие предыдущие рассмотрения, изложены в восьмой главе. В ней исследуется эпсилон-энтропия векторного гауссовского сообщения с, вообще говоря, зависимыми значениями. Показано, что эпсилон-энтропия может быть выражена с помощью интеграла некоторой функции, зависящей от собственных значений матрицы $\Psi(\lambda)F_{\xi}(\lambda)$, где $\Psi(\lambda)$ -матричная функция порядка n, задающая веса в критерии качества, а $F_{\xi}(\lambda)$-матрица спектральных плотностей регулярного сообщения. Для установления этого результата была использована лемма приведения двух матриц с помощью прямого и обратного преобразования, доказанная в приложении I.

Как выражения для пропускной способности, так и выражения для эпсилон-энтропии, полученные в гауссовском случае, остаются в силе для ситуации, когда неизвестны вероятностные многомерные характеристики каналов и источников, а известны лишь их корреляционные характеристики. Природа этого состоит в том, что гауссовские источники и каналы являются в некотором смысле наихудшими (подробно это обсуждается в тринадцатой главе).

*

Вторая часть диссертации посвящена разработке и исследованию методов кодирования и декодирования непрерывных сообщений для непрерывного канала. Здесь рассматриваются источники сообщений и каналы как с дискретным, так и с непрерывным временем.

Исследование линейных методов кодирования и декодирования одномерных сообщений составляет содержание девятой лавы.

Даются определения линейных кодера и декодера, как фильтров. Линейные кодеры и декодеры впервые были рассмотрены Костесом. Оптимальными кодером и декодером называются такие, которые приводят к наименьшей среднеквадратической ошибке $\varkappa^2$. Вначале обсуждается использование линейных методов в весьма общем канале со случайными параметрами. Получены выражения для спектральной характеристики оптимального декодирующего фильтра. Найдены уравнения для спектральной характеристики оптимального кодирующего фильтра. Далее рассмотрения конкретизируются для канала с аддитивным шумом, для которого выписаны известные выражения характеристик оптимальных кодирующего и декодирующего фильтров и наименьшей среднеквадратической ошибки.

Подробно рассмотрен случай сообщения с показательной функцией корреляции $R_{\xi}(n)=\alpha\cdot a^{-|n|}$, $n=0,\pm1,\dots$, где α и $a>1$ -некоторые постоянные. При действии в канале шума со спектральной плотностью f показано, что

$$\frac{\varkappa^2}{\alpha} = 1 + \frac{1}{\pi}\left[\frac{(a^2-1)(\pi g+\lambda_1)}{1+a^2-2a\cos\lambda_1} - \operatorname{arctg}\left(\frac{a+1}{a-1}\operatorname{tg}\frac{\lambda_1}{2}\right)\right]$$

при

$$g=\frac{P}{f} \le \frac{2}{\pi}F\left(\frac{\pi}{2},\ \frac{4a}{(a+1)^2}\right)-1=g_0,$$

а при $g \ge g_0$

$$\frac{\varkappa^2}{\alpha} = \frac{4}{\pi^2}\,\frac{a-1}{a+1}\,F^2\left(\frac{\pi}{2},\frac{4a}{(a+1)^2}\right)\frac{1}{g+1},$$

где P -мощность сигнала в канале, F -полный эллиптический интеграл первого рода, а λ_1 -корень уравнения (при $g \leq g_0$)

$$\pi g = \frac{2\sqrt{1+a^2-2a\cos\lambda_1}}{a+1}\left[F\left(\frac{\pi}{2},\frac{4a}{(a+1)^2}\right) - \right.$$

$$\left. - F\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\lambda_1}{2},\frac{4a}{(a+1)^2}\right)\right] - \lambda_1$$

и $\lambda_1 = \pi$ при $g \geq g_0$.

Параметр λ_1, как функция отношения сигнал/шум, изображен графически при $a = 2{,}04$. Для того же значения a функция $\frac{\varkappa^2}{\alpha}(g)$ также представлена графически. Показано, что для значений $g \leq 0{,}7$ отношение $\varkappa^2/\alpha$ больше, чем 0,5, а при $g \geq 70$ отношение $\varkappa^2/\alpha$ меньше, чем 10^{-2}.

Далее рассматривается случай непрерывного по времени сообщения с экспоненциальной функцией корреляции. Показано, что при белом шуме в канале спектральная характеристика оптимального кодирующего фильтра имеет максимум. Вычислена наименьшая среднеквадратическая ошибка. Показано, что при больших отношениях u сигнал/шум ошибка пропорциональна $(\log u)/u$. Приведены графически зависимости $\varkappa^2$ от u.

Проведено сравнение оптимальной ошибки ν^2 в случае, когда кодирование не производится, с ошибкой $\varkappa^2$. Показано, что при слабых корреляционных связях в сообщении кодирование производить нецелесообразно. В случае сильных корреляционных связей линейное кодирование существенно уменьшает величину ошибки и его целесообразно использовать, особенно при больших отношениях сигнал/шум.

*

Идеи применения линейных методов кодирования и декодирования при передаче телевизионных изображений были выдвинуты в работе диссертанта [3]. Применявшиеся ранее одномерные методы кодирования не позволяли учесть и использовать корреляцию изображения по плоскости кадра. Они учитывали лишь корреляцию вдоль строки развертки. Предложенные двумерные методы кодирования и декодирования, реализуемые на оптических системах, позволяют учесть все корреляционные зависимости в кадре и использовать их для увеличения помехоустойчивости передачи изображения по каналу с шумом.

Детальному исследованию двумерных методов кодирования посвящена глава I0. Вначале дается их математическое описание. Затем приводится идея одной из возможных их реализаций с помощью оптической системы. Указывается, что место двумерного кодирования в общей схеме передачи изображения находится до развертки, а декодирования - после сворачивания изображения.

Наилучшей системой двумерного кодирования называется такая, которая приводит к наименьшей среднеквадратической ошибке. В работе обсуждается возможность применения среднеквадратического критерия к передаче изображений и указывается на существование ситуаций, в которых он не является адекватным.

В случае аддитивного шума в канале найдены оптимальные

- частотные характеристики кодирующего и декодирующего двумерных фильтров. Оптимальный кодирующий фильтр пропускает лишь те пространственные частоты, на которых отношение спектральных плотностей изображения на входе и шума в канале превышает некоторую заданную пороговую величину. Оптимальные фильтры определяются лишь своими амплитудными характеристиками. Поэтому их фазовые характеристики можно выбрать так, чтобы уменьшить фазовые искажения, возникающие при передаче.

Для непрерывного по времени изображения доказывается, что в отличие от двумерного линейное одномерное кодирование не приводит к уменьшению среднеквадратической ошибки.

Подробно изучается передача изотропного изображения с экспоненциальной функцией корреляции. Показано, что отношение наименьшей среднеквадратической ошибки σ^2 к мощности изображения α определяется равенством

$$\frac{\sigma^2}{\alpha} = \frac{1}{2}\,\frac{h+\upsilon}{(1+\upsilon)^{3/2}} + \frac{1}{(1+\upsilon)^{1/2}},$$

где h -отношение сигнал/шум, а υ -корень уравнения $3\upsilon + 4 - 4(1+\upsilon)^{3/4} = h$. Функция σ^2/α в зависимости от h изображена графически.

Далее рассмотрено неизотропное изображение с дискретным временем. Уровни равной корреляции в рассмотренном изображении лежат на сторонах квадрата. Для этого случая выписаны формулы для характеристик оптимальных кодирующего и декодирующего двумерных фильтров и найдена наименьшая ошибка.

Отмечено, что двумерное кодирование тем более эффективно

(по сравнению с одномерным), чем выше корреляция в изображении. При корреляции в изображении, охватывающей 10-100 элементов, происходит уменьшение ошибки в 10-100 раз, благодаря применению двумерного кодирования по сравнению с одномерным.

Эффективность использования двумерных фильтров в качестве составных элементов кодирующих устройств для передачи изображения подтверждена в ряде экспериментов, проведенных Лебедевым, Грэхмом, Хуангом и Андерсоном.

*

Среднеквадратическая ошибка при передаче изображения характеризует мощность аддитивного шума на выходе двумерного декодирующего устройства. Однако при использовании оптимальных кодирующих и декодирующих фильтров аддитивный шум, вообще говоря, является коррелированным с передаваемым изображением. Это не всегда желательно. В связи с этим в одиннадцатой главе рассматриваются взаимнообратимые двумерные кодирующие и декодирующие фильтры. Их использование приводит к независимости шума от изображения. Как правило, аддитивный шум в этом случае будет коррелированным.

Приведены оптимальные частотные характеристики взаимнообратных фильтров, минимизирующие мощность шума. Они обобщают известные результаты Штейна. Найдено выражение для наименьшей мощности шума для дискретного по времени изображения.

Для изображения с экспоненциальной функцией корреляции отношение сигнал/шум увеличивается при использовании взаимнообратного кодирования в 10-100 раз (в зависимости от скорости спадания корреляции в изображении). Получено явное выражение для этого выигрыша и построена графическая зависимость.

*

Глава 12 посвящена исследованию линейного кодирования в применении к передаче движущихся изображений. Для передачи малокадрового телевидения предлагается схема трехмерного кодирования, непрерывного по пространству и дискретного по времени изображения. Трехмерные фильтры с задержкой на T кадров можно построить с помощью $T+1$ двумерных фильтров (например, оптических пространственных фильтров) и сумматора изображений.

Для оптимальных с точки зрения минимума среднеквадратической ошибки весовых характеристик двумерных фильтров, участвующих в схеме трехмерного фильтра, найдена система уравнений. Приводится асимптотическое решение уравнений для больших T. Показано, что выигрыш в среднеквадратической ошибке, или отношении сигнал/шум, образующийся при применении трехмерных линейных методов по отношению к случаю, когда никакого кодирования не производится, для ряда практических интересных случаев равен 100-1000 раз. Разработанные в США линии задержки изображения для системы "Пикчефон" дают техническую основу использования трехмерного кодирования не только в системе малокадрового телевидения.

*

Сравнительная эффективность оптимальных линейных и нелинейных методов кодирования непрерывных сообщений является предметом исследования в главе 13. Предполагается, что о стационарном сообщении не известны никакие статистические данные, кроме

его спектральной плотности. Точно так же считается известной лишь спектральная характеристика аддитивного шума в канале и не известными все многомерные распределения вероятностей. Эти предположения часто согласуются с практическими ситуациями.

Устанавливается, что минимаксные выражения для эпсилон-энтропии при среднеквадратическом критерии и пропускной способности при ограничении средней мощности достигаются на гауссовских процессах.

Для отыскания наименьшей ошибки при оптимальных нелинейных методах кодирования ε^2 используется уравнение, правая часть которого является пропускной способностью канала, а левая - эпсилон-энтропией источника сообщений. Это уравнение решается для ряда практически интересных сообщений с экспоненциальной функцией корреляции и белого шума в канале.

Отношение σ^2/ε^2, где σ^2-ошибка при оптимальных линейных методах кодирования, как функция отношения сигнал/шум g представлена графически. Результаты показывают, что отношение σ^2/ε^2 для одномерного непрерывного по времени сообщения при $g<10$ близко к единице, а при $g<10^3$ оно не превосходит 3,5. При передаче двумерного изображения с непрерывными аргументами показано, что σ^2/ε^2 при больших g всегда не превышает 2.

Для дискретного по времени одномерного сообщения показано, что при g больших некоторого порогового значения, σ^2/ε^2 зависит лишь от скорости спадания корреляции в сообщении a. Так, при a=1,01 имеем σ^2/ε^2 =4,66, при a =1,06 имеем σ^2/ε^2 = 2,6, при a =1,1 имеем σ^2/ε^2=2,2.

Наконец, рассмотрено дискретное по аргументам изображение с равной корреляцией на сторонах квадрата. В этом случае σ^2/ε^2 зависит от скорости спадания корреляции a и при достаточно больших g имеем σ^2/ε^2 =4,77, при a =I,I; σ^2/ε^2 =6,9 при a =I,06; σ^2/ε^2 =2I,7 при a =I,0I. Для небольших g отношение σ^2/ε^2 проиллюстрировано на графике при a =I,I; a =I,0I и a =I,00I.

Показано, что близость σ^2 и ε^2 увеличивается с уменьшением корреляции в сообщении, а также с уменьшением отношения сигнал/шум.

Из результатов следует , что в рассмотренных условиях минимально достижимая среднеквадратическая ошибка может быть лишь ненамного уменьшена при переходе от оптимальных линейных методов кодирования и декодирования к оптимальным нелинейным методам.

При передаче сообщения с равномерным спектром по каналу с белым шумом в полосе сообщения линейные методы являются наилучшими среди всевозможных (в общем , нелинейных) методов.

*

В четырнадцатой главе рассматривается постановка задачи, обобщающая первоначальную постановку Шеннона. Дело в том, что во многих реальных случаях кодированию подвергается не само первоначальное сообщение, интересующее получателя на выходе, а лишь некоторый его предварительно зашумленный вариант. Так в случае передачи изображения, например, подлежащее передаче изображение вначале переносится на мозаику передающей трубки и затем считывается с нее. Из-за различных флуктуаций, имеющих место в передающих трубках потенциал элементов мозаики случайным образом отклоняется от значения, предписанного ему яркостью соответствующей точки передаваемого объекта. В результате таких отклонений поступающее на передатчик и подлежащее кодированию сообщение уже не является точной копией объекта; а представляет собой его зашумленный вариант.

Второе обобщение, которое вводится в схему Шеннона, состоит в том, что предполагается, что декодирование превышает сигнал на выходе канала не в само сообщение , доставляемое потребителю, а в "декодированный сигнал". Само сообщение на выходе представляет собой случайную величину , стохастически связанную с декодированным сигналом. Это обобщение охватывает часто встречающиеся на практике ситуации.

Для обобщенной модели приведено точное математическое описание и сформулирована теорема кодирования. Теорема кодирования использует обычное определение пропускной способности канала и новое определение эпсилон-энтропии. Доказательство теоремы в диссертации отсутствует. Оно приведено в работе [4].

*

Глава I5 посвящена разработке понятия эпсилон-энтропии, введенного в предыдущей главе, для случая гауссовских шумов. В главе рассматривается гауссовское сообщение с непрерывным временем. В качестве критерия качества выбран частотно-взвешенный среднеквадратический критерий.

Вначале рассматриваются вероятностные свойства последовательности: сообщение на входе - зашумленное сообщение - декодированный сигнал - сообщение на выходе. Затем решается вариационная задача отыскания эпсилон-энтропии. Трудность при ее решении состоит в том, что приходится осуществлять вариацию функционала по двум функциям , одна из которых неотрицательная, а другая комплексная.

Полученное в результате выражение для эпсилон-энтропии представляет ее через спектральные характеристики сообщения и шумов до кодирования и после декодирования. Это выражение обобщает известные результаты Шеннона и Пинскера , полученные для обычно рассматриваемой схемы без дополнительных шумов.

Указаны обобщения полученного результата на случай, когда шумы не являются гауссовскими.

В заключение рассматривается одна естественная схема передачи, использующая операции оптимального (нелинейного в общем случае) выделения сообщения из шума до кодирования и после декодирования. В совокупности с оптимальной передачей по каналу эти операции образуют последовательность отдельных оптимальных операций. Показано, однако, что в общем случае, последовательность этих оптимальных операций не является оптимальной в совокупности. Вместе с тем доказано, что в гауссовском случае описанная схема является оптимальной.

*

В главе I6 исследуется линейное кодирование в применении к передаче непрерывного сообщения в ситуации с дополнительным шумом.

Вначале рассматривается линейное кодирование и декодирование двумерного изображения. Составляются спектральные уравнения для наилучших, с точки зрения минимума частотно-взвешенного среднеквадратического критерия, частотных характеристик

кодирующего и декодирующего фильтров. Проводится решение этих уравнений. В результате выписаны выражения для оптимальных частотных характеристик кодирующего и декодирующего фильтров и для наименьшей ошибки. Доказывается, что оптимальные линейные кодирование и декодирование могут быть осуществлены по схеме, описанной в конце предыдущей главы.

Ситуация с дополнительным шумом возникает при передаче сообщений по радиорелейной линии с несколькими промежуточными ретрансляционными станциями, производящими декодирование. Приведена теоретическая модель такой линии и исследована возможность применения линейных методов кодирования и декодирования. Трудность аналитического отыскания наилучших характеристик кодирующих и декодирующих фильтров в этом случае связана с большим их числом. Для радиорелейной линии с двумя участками получено алгебраическое уравнение четвертой степени для установления вида оптимальных характеристик.

*

Последние две главы диссертации посвящены нелинейным методам кодирования и квантования.

В семнадцатой главе разрабатывается теория последовательного декодирования для непрерывного канала.

В первоначальной работе Возенкрафта, а также во всех последующих работах, процедура последовательного декодирования рассматривалась в приложении к дискретному каналу. Здесь разработана процедура последовательного декодирования для канала дискретного по времени и непрерывного по амплитуде . Рассмотренное в главе кодирование для непрерывного канала является объединением операций кодирования и модуляции, часто рассматриваемых раздельно. Сигнал , передаваемый по каналу при таком кодировании, представляет собой импульсную шумоподобную последовательность.

Одна из трудностей, возникающая при рассмотрении непрерывного случая, состоит в том, что необходимо создать сверточный код, удовлетворяющий мощностным ограничениям. В главе описаны несколько различных методов построения случайных древовидных сверточных полифазных кодов с ограничениями на среднюю мощность. Найден код, у которого ветви на кодовом дереве образуют полугруппу по операции покомпонентного сложения.

Подробно рассмотрены две модификации последовательного декодирования. Одна - декодирование с фиксированной вероятностью ошибки. Другая - декодирование с фиксированной задержкой. Найдены основные характеристики последовательного декодирования,такие, как вероятность ошибки, среднее число операций, моменты числа операций, вычислительная скорость и др. Вывод соответствующих результатов проведен конспективно , он заимствован из совместной работы диссертанта, Зигангирова и Пинскера.

Основная трудность при получении этих результатов (которая не возникает в двоичном симметричном канале) состоит в том, что последовательность случайных значений функции правдоподобия соответствующих "правильному" пути на кодовом дереве, является статистически зависимой от значений функции правдоподобия на "неправильном" поддереве. Для преодоления этой трудности вводятся в рассмотрение функции , зависящие от двух аргументов, один из которых принадлежит правильному пути, а другой - неправильному поддереву, а также предполагается некоторая мажо-

рирующая "фиктивная" процедура последовательного декодирования.

Показано, что моменты числа операций при декодировании являются конечными для всех скоростей , меньших некоторых найденных пороговых скоростей, зависящих от порядка рассматриваемого момента. Последовательное декодирование для непрерывного канала при практической реализации требует по сравнению с дискретным случаем использования дополнительных аналоговых устройств простой структуры. Проведение последовательного декодирования в непрерывном канале всегда более выгоднее с точки зрения вероятности ошибки, чем сведение канала к дискретному с помощью квантования и проведения последовательного декодирования для проквантованного канала.

*

Последняя, восемнадцатая, глава посвящена разработке и исследованию нелинейного квантования непрерывного сообщения. Цель квантования устранение избыточности в сообщении. Рассматривается сообщение, дискретное по времени. Из теорем кодирования для источника следует, что в некотором асимптотическом смысле существуют коды, обеспечивающие квантование с заданной точностью и для которых логарифм числа слов на одно значение сообщения равен эпсилон-энтропии. При случайном выборе такого кода для его использования необходимо иметь память, возрастающую экспоненциально с длиной подвергаемого квантованию отрезка сообщения. В настоящей главе разработан простой код для квантования, который требует при его использовании хранения лишь двух, а не экспоненциального числа, последовательностей. С помощью этих двух последовательностей по описанному нелинейному алгоритму квантующее устройство создает все кодовые слова.

В качестве критерия качества рассмотрена вероятность того, что квантованное $\tilde{\xi}$ и истинное ξ (векторные) значения сообщения будут отличаться в смысле некоторой функции ρ зависящей от ξ и $\tilde{\xi}$, больше, чем на заданное число.

Получено выражение для числа кодовых блоков в квантующем коде через плотность распределения вероятности сообщения и функцию ρ. Отмечено, что аналогично построенный код может быть использован не только для квантования, но и для помехоустойчивого кодирования в канале. При этом этот код будет оптимальным в смысле минимума вероятности ошибочного декодирования при заданной скорости передачи.

*

В заключение реферата подведем итоги. Диссертационная работа посвящена исследованию потенциальных характеристик непрерывных каналов и источников сообщений, специфических для непрерывного случая методов кодирования, и сравнению достижимых для этих методов характеристик с потенциальными.

I. Разработана теория векторного канала, которая включает в себя как частные случаи многоканальную систему, разнесенный прием, многопутевую систему и др. При условии, что в векторном канале действуют произвольно зависящие друг от друга гауссовские шумы (или шумы с неизвестным распределением, но известными спектрами) получены общие выражения для пропускной способности. Все известные результаты по пропускной способности дискретного по времени гауссовского канала получаются как частные

случаи найденных здесь выражений. Для получения этого результата была доказана теорема приведения трех матриц к диагональному виду, которая может быть использована при решении других задач. Окончательный результат по пропускной способности векторного канала (см. теорему 4.2) сформулирован в терминах введенного здесь понятия интегрального ранга матрицы, который является векторным аналогом понятия ширины полосы частот канала.

2. Векторный гауссовский источник (или векторный источник с неизвестным распределением, но известными спектральными характеристиками) с дискретным временем был рассмотрен и для него получены выражения для эпсилон-энтропии при средневзвешенном критерии верности воспроизведения сообщения. Частными случаями полученных выражений являются все известные результаты по эпсилон-энтропии, относящиеся к гауссовскому источнику с дискретным временем.

3. Новая теоретико-информационная модель введена для передачи информации в ситуации, когда шум присутствует не только в канале, но и в самом источнике сообщений, а также на приемном конце после декодирования. Для этой модели сформулирована теорема Шеннона и найдено выражение для эпсилон-энтропии в гауссовском случае. В частных случаях из найденного выражения следуют известные результаты, относящиеся к обычной шенноновской схеме передачи информации. Развитая здесь модель в последнее время была переосмыслена М.С.Пинскером и применена к задачам кодирования с конечной задержкой или предсказанием, возникающим в системах с обратной связью и системах автоматического управления.

4. Среди исследованных в диссертации методов кодирования и декодирования непрерывных сообщений центральное место занимают линейные методы. Аналогом этих методов в дискретном канале являются сверточные коды, интенсивно изучаемые в последние годы в связи с практическими применениями последовательного и порогового декодирования в коммерческих, военных и космических линиях связи. В диссертации показано, что линейные методы в ряде практически интересных случаев дают значительный выигрыш в среднеквадратической ошибке или отношении сигнал/шум. Этот выигрыш зависит от корреляции в исходном сообщении и шуме и может доходить до десятков и даже сотен раз.

5. Линейные методы , предложенные ранее для передачи одномерных сообщений, распространены на случай многомерных сообщений. Линейные двумерные и трехмерные кодирующие и декодирующие устройства, выполненные с помощью оптических и радиотехнических средств, особенно важны в телевидении, так как дают возможность учесть статистические зависимости по плоскости кадра и между кадрами , что может быть использовано для сокращения избыточности или увеличения помехоустойчивости телевизионного сообщения. Интересные экспериментальные исследования, проведенные в последнее время рядом авторов (см.гл.IO,§ 2) в СССР и за рубежом, показали, что двумерные методы кодирования являются важным составным элементом эффективных систем передачи изображения.

6. Среди непрерывных нелинейных методов кодирования в диссертации дается теория последовательного декодирования для непрерывного канала. Построены полифазные вероятностные сверточные коды, обладающие свойством полугрупповости. Эти коды представляют собой шумоподобные кодовые деревья. Теория последовательного декодирования, развитая диссертантом совместно с К.Ш.Зигангировым и М.С.Пинскером, является первой попыткой обобщения дискретных результатов на непрерывные каналы .Получены выражения для среднего и моментов числа операций при декодировании, вычислительной скорости, вероятности ошибки и других характеристик. Рассмотрено несколько различных модификаций процедуры. Характеристики последовательного декодирования для непрерывного канала являются предельно достижимыми для дискретных каналов с многоуровневой модуляцией и с этой точки зрения представляют дополнительный интерес.

7. Разработан и исследован новый способ обобщенного квантования непрерывного по амплитуде источника сообщений. Этот способ не требует хранения в памяти квантующего устройства экспоненциально растущего с длиной сообщения числа данных и напоминает дискретные групповые методы кодирования. Для предложенного метода найдено число блоков, достаточное для квантования. Это число зависит от распределения вероятности сообщения и уровня допустимого искажения при квантовании. Тот же самый метод можно применить для построения простого оптимального вероятностного блочного кода для непрерывного канала.

Основное содержание диссертации было доложено на всесоюзных и международных конференциях и опубликовано в печати:

I. Б.С.Цыбаков. Шенноновская схема для гауссовского сообщения с равномерным спектром и канала с флуктуационным шумом. Радиотехн. и электрон., 6 , 4, стр.649, I96I.

2. Б.С.Цыбаков. Линейное кодирование сообщений. Радиотехн. и

электрон., 7,I, стр.25, I962.

3. Б.С.Цыбаков. Линейное кодирование изображений. Радиотехн. и электрон., 7,3, стр.375,I962.

4. R.L. DOBRUSHIN, B.S. TSYBAKOV. INFORMATION TRANSMISSION WITH ADDITIONAL NOISE, I.R.E. TRANSACTION ON INFORMATION THEORY, IT-8, 5, p293, 1962.

5. Б.С.Цыбаков. Кодирование непрерывных сообщений, доклад на Конференции по теории кодирования и ее приложениям. Одесса, I963.

6. Б.С.Цыбаков. Передача сообщений с известной функцией корреляции, доклад на 7-й всесоюзн. конф. по теор. вероятн. и матем статист.Тбилиси, I963.

7. Б.С.Цыбаков. Сравнительная эффективность оптимальных линейных и нелинейных методов кодирования непрерывных сообщений. Изв. АН СССР, Техн.киберн., 4, стр.42, I964.

8. Б.С.Цыбаков. Пропускная способность векторного гауссовского канала без памяти. Проблемы передачи информации, I,I,стр. 26,I965.

9. Б.С.Цыбаков. Вопросы линейного кодирования - движущихся изображений. Сб."Кибернетику на службу коммунизму", 3, стр.I34,I966.

IO.Б.С.Цыбаков. Пропускная способность векторного гауссовского канала с памятью. Доклад на 3-й всесоюзн.конф. по теории кодирования. Ужгород, I967.

II.Б.С.Цыбаков,К.Ш.Зигангиров, М.С.Пинскер. Последовательное декодирование в непрерывном канале. Проблемы передачи информации, 3,4, стр.5, I967.

I2.Б.С.Цыбаков. Избыточность векторных сообщений. Доклад на 3-м симпозиуме по использованию избыточности в информ. системах. Ленинград ,I968.

I3. Б.С.Цыбаков. Пропускная способность некоторых каналов связи (§ 5). Пропускная способность каналов со случайно изменяющимися параметрами (§ 6). Линейные методы кодирования непрерывных сообщений для непрерывного канала (§ 7). Сб. "Техническая кибернетика в СССР", стр.237, Изд.-"Наука", I968.

I4. Б.С.Цыбаков. Эпсилон-энтропия векторных сообщений. Международный симпозиум, по теории информации. Элленвилль,США, I969.

I5. Б.С.Цыбаков. Эпсилон-энтропия векторного сообщения. Проблемы передачи информации, 5, I, стр.96, I969.

I6. Б.С.Цыбаков. О кодировании для непрерывного по амплитуде и дискретного по времени источника сообщений. 4-й симпозиум по проблеме избыточности в информ.системах, 2 часть, стр.64I, I970.

I7. Б.С.Цыбаков. О пропускной способности дискретного по времени гауссовского канала с фильтром. Проблемы передачи информации, 6,3,стр.78,I970.