Академия наук СССР
ИНСТИТУТ ИСТОРИИ ЕСТЕСТВОЗНАНИЯ И ТЕХНИКИ

Л. Г. КОРОЛЮК

РАЗВИТИЕ ТЕОРИИ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНО-ФУНКЦИОНАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ В XVIII И ПЕРВОЙ ПОЛОВИНЕ XIX СТОЛЕТИЙ

(580. История науки и техники)

Автореферат
диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Научный руководитель — доктор
физико-математических наук,
профессор И. И. СИМОНОВ

ЧЕРНОВЦЫ — 1971

Академия наук СССР
ИНСТИТУТ ИСТОРИИ ЕСТЕСТВОЗНАНИЯ И ТЕХНИКИ

Л. Г. КОРОЛЮК

РАЗВИТИЕ ТЕОРИИ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНО-ФУНКЦИОНАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ В XVIII И ПЕРВОЙ ПОЛОВИНЕ XIX СТОЛЕТИЙ

(580. История науки и техники)

Автореферат
диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Научный руководитель — доктор
физико-математических наук,
профессор Н. И. СИМОНОВ

ЧЕРНОВЦЫ — 1971

Работа выполнена в Институте истории естествознания и техники АН СССР.

Научный руководитель — доктор физико-математических наук, профессор Н. И. Симонов.

Официальные оппоненты: Член-корреспондент АН УССР доктор технических наук, профессор А. Н. Боголюбов.

Кандидат физико-математических наук Р. Я. Шостак.

Оппонирующая организация — Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова.

Автореферат разослан «21» апреля 1971 г.

Защита состоится «3» июня 1971 г. на заседании Совета Института истории естествознания и техники АН СССР (Москва, К-12, Старопанский пер., 1/5.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке института.

Ученый секретарь Совета — кандидат физико-математических наук Ф. А. МЕДВЕДЕВ.

Одним из важнейших направлений в изучении истории математики является история отдельных математических наук. Главная задача нашей работы состоит в исследовании развития методов решения дифференциально-функциональных уравнений в XVIII и XIX столетиях.

Сколько-нибудь общая теория дифференциально-функциональных уравнений отсутствует и в настоящее время. В первой половине XX столетия в работах наших и зарубежных математиков с относительной полнотой построена теория дифференциальных уравнений с запаздывающим аргументом (или аргументами). Основы этой теории были заложены А. Н. Тихоновым в 1938 году. В дальнейшее ее развитие существенный вклад внесли А. Д. Мышкис, Л. Э. Эльсгольц и другие советские ученые.

Интерес к теории таких уравнений в начале XX столетия резко повысился в связи с многочисленными практическими применениями, связанными, в частности, с изучением процессов с последействием: в теории автоматического управления, в теории автоколебательных систем, при изучении проблем, связанных с горением в ракетном двигателе, в математической теории экономики и других процессах.

В развитии практических приложений большие заслуги имеют наши отечественные ученые А. А. Андронов, Я. З. Цыпкин, А. Г. Майер.

Такие уравнения также весьма интересны и в теоретическом отношении. Это объясняется не только тем, что классическая теория дифференциальных уравнений получает существенное расширение, но и тем, что новая отрасль органически связана с теорией интегро-дифференциальных уравнений.

Несмотря на существенно возросший интерес к теории дифференциально-функциональных уравнений, история формирования ее изучена весьма неполно. Развитие методов решения уравнений в частных производных и частных разностях с отклоняющимися аргументами совсем не изучена и библиографии по этому вопросу ни в одном обзоре нет. Мы надеемся, что данное исследование, хотя бы до некоторой степени, поможет заполнить этот пробел.

В обширной библиографии, содержащейся в работах по линейным и нелинейным обыкновенным дифференциально-функциональным уравнениям, трудно найти источники, в которых исторически прослеживалось бы развитие теории в XIX столетии.

Это касается не только источников теории, но и основных принципов ее периодизации, возникновения новых понятий, взаимосвязи с развитием других областей математики и математического естествознания в целом.

Все эти обстоятельства и определили основные направления настоящей работы.

Изучение развития теории в ее взаимосвязи с развитием других областей математики, рассмотрение этих связей, выяснение истоков методов, влияние физических и геометрических факторов не только на постановку задач, но и на формирование методов исследования, изучение содержания теории и ее приложений в XVIII и XIX веках — все это цель настоящего исследования. В известной мере развитие некоторых методов прослеживается и далее — вплоть до середины XX столетия.

Работа состоит из введения и четырех глав: источники теории, линейные дифференциально-функциональные уравнения, нелинейные дифференциально-функциональные уравнения, уравнения в частных производных и частных разностях. В заключение приводятся основные выводы исследования. К работе прилагается список использованной литературы и список наших публикаций.

I

XVIII век характеризуется бурным развитием экономики, науки и культуры, вызванным промышленным переворотом в Англии и буржуазными преобразованиями французской революции.

В этот период формируется ряд новых математических дисциплин, в частности теории дифференциальных уравнений, вариационного исчисления, теории уравнений математической физики, исчисления конечных разностей, теории интерполирования, теории вероятностей.

Классическая теория дифференциальных уравнений получила уже в XVIII и XIX ст. и особенно в 1-ой половине XX столетия весьма существенное расширение во многих направлениях. Одно из них состояло в переходе к рассмотрению таких уравнений, которые связывают неизвестные функции и их производные при различных значениях одного или нескольких аргументов. Уравнения подобного вида получили общее название дифференциально-функциональных уравнений или уравнений с отклоняющимся аргументом. Когда отклонение постоянно, уравнения называются дифференциально-разностными.

В первой главе основное внимание уделяется источникам теории. Необходимость возникновения новых математических наук обусловлена в решающей степени новыми задачами математического естествознания. Подобно этому начальные исследования дифференциально-функциональных уравнений были вызваны рядом задач физики в широком смысле этого слова, а также задачами геометрии. Однако, говоря об источниках этих исследований необходимо учитывать и другое обстоятельство. Оно обусловлено тем, что свойства таких уравнений тесно связаны и со свойствами дифференциальных и в особенности разностных уравнений. В курсе дифференциального и интегрального исчисления С. Ф. Лакруа, представляющего сводный трактат по математическому анализу в 20-х годах XIX века, об этом говорится вполне определенно: «До сих пор дифференциальное исчисление и исчисление разностей рассматривалось изолированно одно от другого: изучались или дифференциальные уравнения или уравнения с конечными разностями. В целях полноты нужно изучить случаи, когда уравнения содержат, как производные (coefficients differentieles), так и разности (differences)». Здесь же говорится, что подобные уравнения «не являются просто комбинацией аналитических формул»: они появились в теории кривых и в различных вопросах, с которыми геометры встретились в дифференциальном и интегральном исчислениях».

Кроме обыкновенных дифференциальных и разностных уравнений и уравнений в частных производных, следует иметь в виду и некоторые классы функциональных уравнений. Необходимо учитывать также не только конкретные задачи геометрии и механики, но и задачи, возникшие в области самой теории.

Возникновение дифференциально-функциональных уравнений нужно отнести к работе Ж. Кондорсе 1771 года: «Об определении произвольных функций, входящих в интегралы уравнений с частными разностями». Однако, например, в монографии Э. Пинни указывается, что изучение дифференциально-функциональных уравнений начато гораздо ранее, а именно И. Бернулли в 1728 году в его работе о колебании струны. Однако в явном виде в этой работе дифференциально-функциональных уравнений нет. Пинни прав в том отношении, что обращение к области математической физики явилось стимулирующим моментом и для развития дифференциально-функциональных уравнений.

Трактовка малых колебаний струны, как колебаний системы сосредоточенных грузиков, привела к изучению систем таких уравнений, которые Лагранж назвал уравнениями в конечных и бесконечно малых разностях. Такие системы имеются в частности, в заключительной главе I тома его «Аналитической механики», опубликованной в 1788 году.

Характеристика общего алгебраического источника возникновения дифференциально-функциональных уравнений с попыткой их классификации дана Ж. Б. Био в «Мемуаре о смешанных разностях». Работа, изданная в 1806 году, оказала существенное влияние на дальнейшее развитие теории. Предметом исследования у Био являются уравнения первого порядка: производная первого порядка и первая разность Δy неизвестной функции $y=y(x)$ «комбинируются каким-либо образом с переменной y и x (аргументом)». Это определение означает, что Био не требует линейности рассматриваемых уравнений. Аналогичное обстоятельство имелось и в теории обыкновенных дифференциальных уравнений: классические методы Эйлера о линейных дифференциальных уравнениях появились после его первой работы по дифференциальным уравнениям через полтора десятилетия. После всех рассуждений, Био вводит свою классификацию. Все эти уравнения он делит на два больших класса в зависимости от того, применяются ли друг к другу операции взятия производной и взятия разности.

II

Вторая глава посвящена изучению методов решения линейных дифференциально-функциональных уравнений. Эти методы можно в основном классифицировать следующим образом:

1. Перенесение классического метода Эйлера.
2. Метод бесконечных рядов.
3. Метод вариации произвольных постоянных.
4. Метод понижения порядка.
5. Символический метод.
6. Операторный метод.

Идея перенесения на дифференциально-функциональные уравнения классического метода Эйлера для дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами восходит к работе Ж. А. Кондорсе 1771 года. Последующими работами, относящимися к этому методу, явились работы С. Ф. Лакруа и Дж. Буля. Применение метода Эйлера приводило к изучению трансцендентных характеристических уравнений. Этот вопрос вызывал определенные трудности. Поэтому не случайно у Лакруа и Буля вопрос нахождения корней трансцендентного характеристического уравнения почти не затрагивался.

Проблема отрицательности действительных частей корней характеристического уравнения, предложенная Максвеллом на заседании Лондонского математического общества в 1868 году, разрешенная к концу XIX столетия Р. Раусом и А. Гурвицем, нашла применение и в изучении корней квазиполиномов.

Исследование ряда свойств трансцендентных уравнений содержится в работах Ж. Адамара 1893 года, Л. Лекорню 1899 года, Э. Шмидта 1911 года, Ф. Шюрера 1913 года, Э. Хильба 1917 года.

Свойства подобных уравнений рассматриваются в работе советских ученых Н. Г. Чеботарева и Н. Н. Меймана 1949 года, а также в ряде работ Н. Г. Чеботарева 1941, 1942 года.

Наиболее раннее применение метода разложения в бесконечные ряды имеется в работе Ж. А. Шарля 1785 года. В заключительной главе 3 тома анализа Лакруа на основе идей Кондорсе, Лапласа и Био были намечены возможные пути дальнейшего развития теории. Весьма конспективно Лакруа намечает три возможные пути развития методов решения обыкновенных дифференциально-разностных уравнений. Первый из них дается по аналогии с обыкновенными разностными уравнениями. Он заключается в сведении уравнений нового вида к дифференциальным уравнениям бесконечно высокого порядка. Его основанием служат разложения в ряды Тейлора выражений Δy, $\Delta\frac{dy}{dx}$ и т. д. Основная и весьма существенная трудность заключается, как указывает Лакруа, в нахождении наиболее общего способа решения, возникающего дифференциального уравнения бесконечно высокого порядка. Значительно позже — уже в XX столетии было сделано несколько попыток решать такие уравнения приближенно, оставляя конечное число членов (работа Х. Бейтмена 1945 года, М. Ланга 1937 года, Н. Минорского 1941 года).

«Однако этим методом не следует пользоваться, потому, что членами с высшими производными, как бы малы ни были коэффициенты при них, нельзя пренебрегать при решении дифференциальных уравнений» — отмечает Пинкн.

Второй путь основывается на противоположной операции: сведение к уравнению в конечных разностях с помощью выражения производных через последовательные разности. Так для $\frac{dy}{dx}$ имеют

$$\frac{dy}{dx}=\frac{1}{h}\left(\Delta y-\frac{1}{2}\Delta^2 y+\frac{1}{3}\Delta^3 y-\frac{1}{4}\Delta^4 y+\ .\ .\ .\right).$$

В этом случае, встречаются с трудностью, на которую указал Пуассон: при интегрировании возникающего разностного уравнения затруднительно получить решение в полной общности. Это обстоятельство Лакруа иллюстрирует на примере уравнения $\frac{dy}{dx}=\Delta y$.

Третье весьма широкое направление связано с развитием методов решения непосредственно дифференциально-разностных уравнений.

Перенесение метода вариации произвольных постоянных — одно из немногих общих вопросов теории новых уравнений, рассматриваемых в начальном периоде. Био дает отчетливое перенесение метода Лагранжа получения особых решений дифференциальных уравнений с помощью вариации произвольных постоянных. Особый интерес представляет выяснение геометрических особенностей решений дифференциально-функциональных уравнений, получаемых на этом пути.

К методу понижения порядка следует отнести «каскадный метод» Лапласа, рассмотренный им в работе 1779 года для уравнений в частных производных вида

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}+L\frac{\partial z}{\partial x}+M\frac{\partial z}{\partial y}+Nz+V=0,$$

где L, M, N, V функции от x, y. К уравнению дифференциально-разностному

$$\frac{d\Delta y}{dx}+L\frac{dy}{dx}+M\Delta y+Ny=V, \qquad (*)$$

где L, M, N, V функции от x, каскадный метод Лапласа применил Пуассон в 1806 году. В дальнейшем этот же метод используется в работах Лакруа, Буля, отмеченных выше. При этом следует подчеркнуть формальное применение этого метода вплоть до работ нашего столетия. Обоснование метода дается в работах К. П. Вильямса 1922 года и несколько ранее — в работах Р. Ф. Бордена 1920 года.

Методом понижения порядка решен целый ряд геометрических задач в работах Био, Пуассона, Лакруа, Пюизо и других. К числу одной из важнейших геометрических задач относится задача о взаимных траекториях. Эту задачу решали И. Бернулли и Л. Эйлер, но без введения дифференциально-функциональных уравнений. Последнее обстоятельство возможно объяснить тем, что авторы интересовались не общим решением, а находили алгебраический вид кривых. Некоторые результаты Эйлера следуют как частные случаи из результатов, полученных Био и Пуассоном.

При решении других геометрических задач также возникали дифференциально-функциональные уравнения, которые сводились авторами к решению дифференциальных или разностных уравнений. Чаще всего это достигалось специальными методами, приспособленными для того или иного класса уравнений.

Источником современного операционного исчисления явилось формальное символическое исчисление. Сущность его состояла в том, что символы операций дифференцирования, взятия разностей, суммирования, интегрирования отделялись от функций и над ними производились математические действия, как над числами или над функциями.

Возможность применения символического метода к решению дифференциально-функциональных уравнений можно найти в работах Грегори Д. 1839 года, Буля Дж. 1860 года. Книга М. Е. Ващенко—Захарченко (1868) способствовала дальнейшему распространению этого метода. Авторы рассматривали уравнение (*) при условии $N-LM-L'=0$, нетрудно убедиться, что уравнение в этом случае примет следующий вид:

$$\left(\frac{d}{dx}+M\right)\cdot(D+L)y_x=V,\quad Dy_x=y_{x+1}\cdot$$

Интегрирование этого уравнения сводится к двум последовательным интеграциям — сначала разностного, затем дифференциального уравнения или наоборот.

Работы Ольтрамара и его учеников, конца XIX столетия, относятся к формальному символическому исчислению. К решению дифференциально-функциональных уравнений автор применяет способ производящей функции.

Изложение принципов символического исчисления и применение его к дифференциально-функциональным уравнениям имеется в работе Р. Д. Кармайкла 1913 года.

В дальнейшем символический метод получил название операторного. Этот метод нашел применение в работе Л. Брювье 1930 года. В работе Р. Я. Шостака операторный метод применяется к решению линейных уравнений с переменными коэффициентами.

III

Методы решения нелинейных дифференциально-функциональных уравнений развивались в уже указанных выше работах Био, Лакруа, Ч. Баббеджа. Здесь же, а также в работах других авторов, освещен ряд геометрических задач, которые приводили к возникновению уравнений этого вида. Одной из самых ранних геометрических задач явилась задача об отражении света, предложенная в 1745 году в «Acta Eruditorum». Она была решена в том же журнале в работе Эйлера и опубликована в 1746 году. Эйлер при этом выясняет алгебраический вид кривых. Лишь много лет спустя Био, Лакруа, Гершель и другие решают ее с помощью дифференциально-функциональных уравнений.

Многие задачи механики и физики приводили также к возникновению этого класса уравнений. Методы в большинстве случаев специальные, приспособленные для частного вида уравнений.

В работах Био, Лакруа рассмотрены следующие нелинейные уравнения

$$\frac{dy}{dx} = x\,\Delta\frac{dy}{dx} - \frac{1}{4}\left(\Delta\frac{dy}{dx}\right)^3$$

$$\Delta y = x\,\frac{d\Delta y}{dx} - \frac{1}{4}\left(\frac{d\Delta y}{dx}\right)^2.$$

Последнее уравнение в результате замены $\Delta y = z$ сводится к решению нелинейного дифференциального уравнения типа Клеро и общий интеграл его уравнения зависит от одной произвольной периодической функции и произвольной постоянной. Первое из этих уравнений в результате замены $\frac{dy}{dx} = p$ сводится к решению нелинейного разностного уравнения. Его общий интеграл имеет вид

$$y = \int x\varphi(\sin 2\pi x,\ \cos 2\pi)\,dx - \frac{1}{4}\int\varphi^2(\sin 2\pi x,\ \cos 2\pi x)\,dx + c,$$

где c — произвольная постоянная. Дальнейшая интеграция возможна лишь при задании конкретного вида периодической функции $\varphi(x) = \varphi$, на что обращает внимание в своем мемуаре Био.

Ряд способов сведения таких уравнений к решению обыкновенных дифференциальных уравнений при определенной, заранее заданной функциональной зависимости, предлагает Ч. Баббедж в ряде работ 1817 года, 1816 года. Например, одно из уравнений в записи Баббеджа имеет вид:

$$\frac{d\Psi x}{dx} = \psi\alpha x$$

Это уравнение Баббедж рассматривает не при любых α $(\alpha = \alpha(x))$, а при таких, которые удовлетворяют заранее заданной функциональной зависимости. Прежде всего предполагается, что $\alpha^2(x) = x$. Это нужно понимать так: $\alpha^2 x = \alpha(\alpha(x)) = x$. Во избежание неясности в дальнейшем мы ввели обычные обозначения. Тем же автором рассматриваются более сложные уравнения, — например

$$\frac{d^n\Psi(x)}{dx^n} = \Psi[\alpha(x)], \quad \alpha^p(x) = x; \quad p \leqslant n.$$

Нужно отметить, что главные усилия математиков XIX ст. в решении нелинейных уравнений сосредоточены на частных способах интегрирования и сведении их к решению либо разностных либо обыкновенных дифференциальных уравнений.

IV

Успех теории уравнений в частных производных и частных разностях был менее значительным, но и в этой области нужно отметить ряд работ. Теория дифференциально-функциональных уравнений с частными производными и частными разностями разработана и до настоящего времени очень слабо. В современных приложениях, в основном, встречаются уравнения с отклонениями по одному аргументу.

Математики XVIII и XIX ст. рассматривали весьма частные виды таких уравнений, при этом отклонения, как и в современных источниках, встречались в основном лишь по одному из аргументов. В конце XVIII ст. теория таких уравнений развивалась в связи с математической физикой. В 1779 году Лаплас, в 1788 году Лагранж заменяли уравнение колебания струны конечно-разностным уравнением, приближенно представляющим уравнение с частными производными.

Напомним, что замена производных разностями соответствующих порядков существенно использовалась в предшествующих работах Эйлера, Лагранжа. Замена дифференциального уравнения разностным позволила Эйлеру в 1744 году заложить основы «прямых методов» в вариационном исчислении. Аппроксимация дифференциального уравнения уравнением в конечных разностях явилась основой классического метода ломаных Эйлера, развитого им в 1768 году в «Интегральном исчислении».

В 4-й главе сначала рассматриваются методы замены в работах Франкини, Гершеля, Лакруа, затем освещаются методы Ч. Баббеджа решения дифференциально-функциональных уравнений в частных производных, характеризуется символический метод Буля, Ващенко—Захарченко. В заключение главы рассматривается формальный метод шагов (Чезаро).

Изучение указанных работ по дифференциально-функциональным уравнениям показывает каким образом изменилось само понимание общего решения дифференциально-функционального уравнения и характера произвольных элементов, входящего в него.

Так общее решение у Пуассона, Лакруа и других, полученное в результате понижения порядка уравнения, содержит одну произвольную периодическую функцию и одну постоянную.

Применение символического метода Грегори Д., Булем приводило к распадению уравнения на два — разностное и дифференциальное и общее решение рассмотренных ими уравнений также зависит от одной произвольной периодической функции и от одной произвольной постоянной.

В 1948 году Р. Я. Шостак доказал, что общее решение полного линейного дифференциально-разностного уравнения порядка (m, n) содержит m произвольных периодических функций и n произвольных постоянных. Это уравнение при m = 0 превращается в линейное дифференциальное уравнение n порядка, а при n=0 — в линейное разностное уравнение порядка m. Поэтому из найденного общего решения полного линейного дифференциально-разностного уравнения порядка (m, n), как частные случаи получают общее решение линейного дифференциального уравнения и линейного разностного уравнения.

При решении такого класса уравнений, как уравнение в частных производных и частных разностях нужно отметить аналогию с общими интегралами уравнений в частных производных.

В результате представленной работы мы приходим к следующим выводам:

1. Важнейшими источниками возникновения и развития теории дифференциально-функциональных уравнений явились: теория дифференциальных уравнений; уравнений в частных производных, теория разностных уравнений, функциональных уравнений.

2. Развитие теории стимулировалось задачами геометрии, механики, физики.

3. Развитие методов происходило при отчетливом параллелизме с методами дифференциальных и разностных уравнений.

4. Рассмотренные методы решения дифференциально-функциональных уравнений являлись основными с момента их возникновения до работ математиков XX столетия.

5. Наиболее сильными методами решения линейных дифференциально-функциональных уравнений, развитыми в рассматриваемую эпоху, являлись:

а) для уравнений с постоянными коэффициентами — перенесение метода Эйлера;

б) для уравнений с переменными коэффициентами — метод понижения порядка.

6. Существенные результаты были достигнуты с помощью символических методов.

7. Общие методы для нелинейных уравнений разработать не удалось. Наиболее удобные частные приемы решения отдельных классов нелинейных уравнений принадлежат Био, Пуассону, Баббеджу.

8. Наиболее общими методами решения линейных уравнений в частных производных и частных разностях во второй половине XVIII ст. явились:

а) метод замены переменных;

б) метод сведения дифференциально-функциональных уравнений в частных производных при определенных условиях к уравнениям в частных производных;

в) символический метод.

9. Второй важнейший период в развитии теории дифференциально-функциональных уравнений начинается с работ начала XX ст. Э. Шмидта, Ф. Шюрера, О. Полосухиной на основе методов теории функций комплексного переменного и требует самостоятельного изучения.

Результаты работы частично освещены в наших статьях:

1. Королюк Л. Г., Симонов Н. И. — «Об оптимизации в методе шагов для дифференциальных уравнений с переменным запаздыванием». Всесоюзная межвузовская конференция по теории и приложениям дифференциальных уравнений с отклоняющимся аргументом, Черновцы, 1965, стр. 29.

2. Королюк Л. Г. — «Применение метода шагов к обыкновенному дифференциальному уравнению с запаздывающим аргументом». Тезисы докладов XXI научной сессии, Черновцы, 1965, стр. 136.

3. Королюк Л. Г. — «О ранних источниках возникновения дифференциально-разностных уравнений». Вопросы истории физико-математических наук, Тамбов, 1968, стр. 33.

4. Королюк Л. Г. — «О развитии методов решения линейных дифференциально-разностных уравнений в частных производных и частных разностях». Материалы годичной конференции Ленинградского отделения Сов. нац. объединения историков естествознания и техники, Ленинград, 1968, стр. 48.

5. Королюк Л. Г. — «О геометрических источниках возникновения дифференциально-разностных уравнений». Труды X научной конференции аспирантов и младших научных сотрудников Института истории естествознания и техники АН СССР. Секция истории математики и механики, М., 1968, стр. 15—18.

6. Королюк Л. Г. — «О некоторых методах решения дифференциально-разностных уравнений с переменными коэффициентами в XIX ст.». Труды XI научной конференции аспирантов и младших научных сотрудников Института истории естествознания и техники АН СССР. Секция истории математики и механики, М., 1968, 38—42.

7. Королюк Л. Г. — «О некоторых методах решения дифференциально-функциональных уравнений у Ч. Баббеджа». Труды XII научной конференции аспирантов и младших научных сотрудников Института истории естествознания и техники АН СССР. Секция истории математики и механики, М., 1969, 15—22.

8. Королюк Л. Г. — «Про деякі методи розв'язування диференціально-функціональних рівнянь з частинними похідними і частинними різницями в XVIII і в першій половині XIX ст.». Нариси з історії природознавства і техніки, Киев (в печати).

9. Королюк Л. Г. — «О ранних источниках возникновения дифференциально-функциональных уравнений». Материалы годичной конференции Ленинградского отделения Сов. нац. объединения историков естествознания и техники, Ленинград, 1970, 80—81.

Основные разделы диссертации были доложены на заседаниях Научно-исследовательского семинара по истории математики и механики Механико-математического факультета МГУ (1968 г.), на Межвузовской конференции по истории физико-математических наук (Тамбов, 1968 г.), на IX научной конференции математических кафедр пединститутов Поволжья (Ярославль, 1968 г.), на заседании Научно-исследовательского семинара по теории дифференциальных уравнений с отклоняющимся аргументом, Ун-т дружбы народов (Москва, 1968 г.), на заседании республиканского семинара по истории математических наук (Киев, 1969 г., 1970 г.).

Ответственный за выпуск
кандидат физико-математических наук Кушнир Е. А.

Сдано в набор 18.I-1971 г. Подписано к печати 28.I-1971 г.
Бумага 60×84 1/16. Физ. печ. лист. 1,0. Условн. лист. 0,93.
БД 01440. Тираж 200. Бесплатно.

Зак. № 26. Областная типография управления по печати
Черновицкого облисполкома, г. Черновцы, ул. Щорса, 23.

Бесплатно.