АКАДЕМИЯ НАУК СССР

ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫЙ ЦЕНТР

На правах рукописи

Н.Б.КОНЮХОВА

О ВЫДЕЛЕНИИ ОГРАНИЧЕННЫХ РЕШЕНИЙ НЕКОТОРЫХ СИСТЕМ ОБЫКНОВЕННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

(01.008 - вычислительная математика)

Автореферат
диссертации на соискание ученой степени кандидата
физико-математических наук

МОСКВА - 1971

АКАДЕМИЯ НАУК СССР

ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫЙ ЦЕНТР

На правах рукописи

Н.Б.КОНЮХОВА

О ВЫДЕЛЕНИИ ОГРАНИЧЕННЫХ РЕШЕНИЙ НЕКОТОРЫХ СИСТЕМ ОБЫКНОВЕННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

(01.008 – вычислительная математика)

Автореферат
диссертации на соискание ученой степени кандидата
физико-математических наук

МОСКВА – 1971

Работа выполнена в Вычислительном центре Академии наук СССР.

Научный руководитель – кандидат физико-математических наук, доцент А.А.Абрамов.

Официальные оппоненты:

доктор физико-математических наук В.Б.Лидский,

доктор физико-математических наук М.В.Федорюк.

Диссертация направлена на отзыв в Московский государственный университет.

Автореферат разослан 20 апреля 1971 года.

Защита диссертации состоится 20 мая 1971 года, на заседании Ученого совета Вычислительного центра АН СССР (Москва, В-333, ул.Вавилова, 40, конференц-зал).

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке.

Будем пользоваться обозначениями :

$colon(x_1,\dots,x_n)=\begin{pmatrix}x_1\\ \vdots\\ x_n\end{pmatrix}$ – вещественный или комплексный вектор-столбец ;

$diag(D_1,\dots,D_s)=\begin{pmatrix}D_1 & & 0\\ & \ddots & \\ 0 & & D_s\end{pmatrix}$ – квазидиагональная матрица ;

$\Omega_x(c)$ – замкнутая область x -пространства $|x_j|\le c,\ j=1,\dots,n$;

$I_t(T)$ – действительный полубесконечный интервал $T\le t<\infty$;

$\Omega_{x,y}(c)$ – декартово произведение множеств $\Omega_x(c)\times\Omega_y(c)$;

$\Omega_{x;t}(c;T)=\Omega_x(c)\times I_t(T)$;

$|x|=\sum_{j=1}^{n}|x_j|$, где $x=colon(x_1,\dots,x_n)$;

$[x]_m$ – вектор, компоненты которого суть степенные ряды по координатам x ,начинающиеся с членов степени не ниже m ;

под T всюду понимается достаточно большая положительная постоянная ;

для сокращенной записи кратных степенных рядов положим по определению $x^e=x_1^{e_1}\dots x_n^{e_n}$, где $e=(e_1,\dots,e_n)$ – вектор-строка из неотрицательных целых чисел, $x=colon(x_1,\dots,x_n)$, и определим длину $|e|$ вектора e равенством $|e|=\sum_{j=1}^{n}e_j$ (тогда, например ряд

$$S=\sum_{e_1,\dots,e_n=0,\ \sum_{j=1}^{n}e_j\ge1}^{\infty} a_{e_1\dots e_n}(t)\,x_1^{e_1}\dots x_n^{e_n}$$

запишется в виде

$$S=\sum_{|e|\ge1} a_e(t)x^e .$$

В диссертации исследуется проблема переноса граничных условий из бесконечности в конечную точку при решении некоторых краевых задач на бесконечном интервале для линейных и нелинейных систем обыкновенных дифференциальных уравнений, имеющих в бесконечности иррегулярную особенность.

Для отхода от особой точки используется предложенная А.А.Абрамовым идея о переносе всего многообразия решений, удовлетворяющих заданному условию на бесконечности, без исследования более сложного поведения отдельных решений внутри этого многообразия.

Особенность для удобства всюду рассматривается в бесконечно удаленной точке ; к этому случаю сводится случай любой конечной иррегулярной особенности соответствующей заменой независимой переменной.

Известно, что поведению на бесконечности отдельных решений линейных и нелинейных систем обыкновенных дифференциальных уравнений посвящено много работ.

Для линейных систем вида $t^{-2}x' = A(t)x,\ t_0 \leq t < \infty$, с иррегулярной особенностью на бесконечности, изучено асимптотическое поведение при больших t фундаментальной матрицы решений. Это поведение существенно зависит от жордановой структуры матрицы $A(\infty)$ и в общем случае довольно сложно. Асимптотические формулы для решений содержат экспоненты, логарифмы, дробные степени t и вычисляются крайне громоздко (см. [1] , гл.У, [2], гл.IУ, У).

В случае нелинейных систем с той же особенностью $t^{-2}x' = A(t)x + f(t,x),\ t \geq t_0$, изучение асимптотики отдельных

решений становится еще сложнее. Этому вопросу посвящена обширная литература (см., например, обзор результатов и библиографию в [3, 4], а также [2], гл. IX). Исследования в таких работах сводятся к построению для исходных нелинейных систем формальных экспоненциальных рядов, зависящих от нескольких произвольных постоянных, выяснению аналитического смысла таких формальных решений - определению условий сходимости рядов и изучению асимптотического поведения в окрестности особой точки коэффициентов этих рядов. Строение таких рядов крайне сложно, так что использование полученных результатов для практических вычислений наталкивается на большие трудности.

Целесообразно построить обоснованный алгоритм переноса граничных условий из особой точки, не зависящий от жордановой структуры матрицы $A(\infty)$, не требующий знания асимптотик отдельных решений и эффективный с вычислительной точки зрения. Впервые такая задача была решена А.А.Абрамовым в [5] для случая линейных систем с регулярной особенностью, где уже возникают трудности при построении отдельных решений (см. [1], гл. IУ).

Особенность рассматривалась в нуле и ставилась задача об отыскании ограниченных в нуле решений. Для отгонки условия ограниченности от особой точки предлагалось переносить в достаточно близкую точку все линейное многообразие, которое образуют ограниченные в нуле решения, без исследования поведения отдельных решений системы. При этом оказалось, что функции, задающие это многообразие , разлагаются в сходящиеся в окрестности нуля ряды по целым степеням независимой переменной, что и позволяет эффективно отходить от нуля и решать задачу уже на интервале, не содержащем особенность.

В диссертации показано, что в некотором смысле аналогичным образом можно отойти от особой точки при нахождении ограниченных решений некоторых линейных и нелинейных систем обыкновенных дифференциальных уравнений с иррегулярной особенностью, которую, как уже отмечалось, удобно рассматривать на бесконечности. Для таких систем с иррегулярно особенной бесконечностью удается эффективно построить в достаточно удаленной точке многообразия ограниченных решений с помощью асимптотических разложений по обратным целым степеням независимой переменной. Это дает возможность при решении практических задач заменять условие ограниченности решений на бесконечности эквивалентным краевым условием в конечной точке интервала – уравнением всего многообразия, порождающего ограниченные решения, и решать задачу уже на конечном интервале.

С точки зрения такой прогонки граничных условий из бесконечности в конечную точку в диссертации рассматриваются две основные краевые задачи – линейная в главе II и нелинейная в главе III. Обоснование этой прогонки, в особенности для нелинейных систем, конечно, более сложно, чем в случае линейных систем с регулярной особенностью [5]. Существенно, однако, что поведение соответствующих многообразий в окрестности особой точки по-прежнему описывается "хорошими" рядами. При этом линейное многообразие ограниченных решений для задачи главы II строится, исходя из решения одной вспомогательной задачи Коши на бесконечности для некоторой вспомогательной нелинейной системы обыкновенных дифференциальных уравнений. Нелинейное устойчивое многообразие для нелинейной системы главы III строится исходя из решения некоторой особой задачи Коши для системы квазилинейных уравнений в частных производных первого порядка. Изучению этих вспомогательных задач Коши посвящена глава I, представляющая, по-видимому, и самостоятельный интерес.

Следует еще отметить, что в известной работе Ляпунова [6] в связи с вопросами условной устойчивости рассматриваются автономные системы нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений с голоморфной правой частью, для которых строятся аналитические многообразия стремящихся к нулю на бесконечности решений с помощью вспомогательной системы квазилинейных уравнений в частных производных первого порядка. С этими результатами связано в диссертации построение для неавтономных нелинейных систем с иррегулярной особенностью на бесконечности устойчивых начальных многообразий, стремящихся в пределе к многообразиям Ляпунова.

Результаты главы IV представляют собой практическое приложение: решается одна задача квантовой химии с использованием некоторых результатов диссертации, полученных для линейных краевых задач.

<u>Вспомогательные результаты § 1 главы I и линейная краевая задача главы II.</u>

В § 1 главы I рассматривается задача Коши на бесконечности вида

$$t^{-2}x' = A(t)x + f(t,x) + g(t), \quad t_0 \le t < \infty \qquad (1)$$

$$x(t) \to 0 \quad \text{при} \quad t \to \infty, \qquad (2)$$

где r – неотрицательное целое число, $x = colon(x_1,\dots,x_n)$; матрица $A(t) = (a_{ij}(t))_{i,j=1,\dots,n}$ и вектор $g(t) = colon(g_1(t),\dots,g_n(t))$ определены и непрерывны на действительном интервале $[t_0,\infty)$, причем при $t\to\infty$ $g(t)\to 0$, $A(t)\to A^{(0)}$, где $A^{(0)}$ – постоянная матрица, все собственные значения которой имеют положительные действительные части ; $f(t,x) = colon(f_1(t,x),\dots,f_n(t,x))$ определена и непрерывна по совокупности переменных (x,t) при малых $|x|$ и $t\ge t_0$, $f(t,0)\equiv 0$ и, кроме того, для любого $\varepsilon>0$ существуют δ_ε и T_ε , такие, что

$$|f(t,\tilde{x})-f(t,x)|\le\varepsilon|\tilde{x}-x| \quad \text{для } |x|\le\delta_\varepsilon,\ |\tilde{x}|\le\delta_\varepsilon \text{ и всех } t\ge T_\varepsilon.$$

Показывается, что при таких предположениях решение задачи (I)-(2) существует и единственно. Подробно изучается случай, когда правая часть системы (I) либо представима при малых $|x|$ и больших t сходящимся степенным рядом по x и $1/t$, либо представляет собой многочлен по x , коэффициенты которого разлагаются в асимптотические ряды по обратным целым степеням t . При таких дополнительных предположениях решение задачи (I)-(2) представимо при больших t асимптотическим рядом по целым отрицательным степеням t , причем коэффициенты этого ряда формально определяются из (I).

Аналогичные вопросы существования, единственности и асимптотического поведения стремящегося к нулю на бесконечности решения (I) рассматриваются для случая, когда матрица $A^{(0)} = A(\infty)$ имеет простые собственные значения на мнимой оси.

Решение задачи вида (I)-(2) описывает, например, "передвижение" по t всего линейного многообразия ограниченных решений некоторых линейных систем обыкновенных дифференциальных уравнений с иррегулярной особенностью на бесконечности. Результаты § I используются в главе II, где проводится построение таких многообразий в связи с решением некоторых краевых задач.

А именно: в главе II рассматривается следующая линейная краевая задача

$$t^{-r}x' = A(t)x + g(t), \quad t_0\le t<\infty, \tag{3}$$

заданное краевое условие в точке t_0 , (4)

$$|x(t)| = O(1) \quad \text{при} \quad t\to\infty. \tag{5}$$

Здесь $r\ge 0$ – целое число, система (3) n - мерна, $A(t)$ и $g(t)$ определены и непрерывны на $[t_0,\infty)$ и при $t\to\infty$ имеют заданные асимптотические представления $A(t)\sim\sum_{k=0}^{\infty}\frac{A^{(k)}}{t^k}$, $g(t)\sim\sum_{k=0}^{\infty}\frac{g^{(k)}}{t^k}$, причем $A^{(0)} = diag(A_-^{(0)}, A_+^{(0)})$, где $A_-^{(0)}$ – квадратная матрица порядка ℓ , все собственные значения которой имеют отрицательные действительные части, $A_+^{(0)}$ – квадратная матрица порядка $n-\ell$, все собственные значения которой имеют положительные действительные части.

Требуется "прогнать" условие (5) из бесконечности в конечную точку, т.е. заменить условие (5) некоторым эквивалентным соотношением в конечной точке T , и тем самым свести исходную краевую задачу (3)-(5) к эквивалентной краевой задаче на конечном интервале $[t_0, T]$. Таким соотношением является уравнение всего линейного многообразия ограниченных решений системы (3). Показывается, что это многообразие для достаточно больших t задается в виде

$$x_+ = \alpha(t)x_- + \beta(t), \quad t \geq T. \tag{6}$$

здесь, в соответствии с представлением $A^{(0)}$, $x = \begin{pmatrix} x_- \\ x_+ \end{pmatrix}$, x_- – столбец высоты ℓ, x_+ – столбец высоты $n-\ell$; матрица $\alpha(t)$, с использованием соответствующего блочного представления $B(t) = A(t) - A^{(0)} = \begin{pmatrix} B^{11}(t) & B^{12}(t) \\ B^{21}(t) & B^{22}(t) \end{pmatrix}$, есть решение задачи Коши на бесконечности вида

$$t^{-2}\alpha' = A_+^{(0)}\alpha - \alpha A_-^{(0)} + B^{22}(t)\alpha - \alpha B^{11}(t) - \alpha B^{12}(t)\alpha + B^{21}(t), \quad T \leq t < \infty, \tag{7}$$

$$\alpha \to 0 \quad \text{при} \quad t \to \infty, \tag{8}$$

которое, на основании результатов § 1 главы I, существует и единственно и при больших t разлагается в асимптотический ряд $\alpha(t) \sim \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\alpha^{(k)}}{t^k}$, формально определяемый из (7); $\beta(t)$, с использованием обозначения $g(t) = \begin{pmatrix} g_-(t) \\ g_+(t) \end{pmatrix}$, есть решение задачи

$$t^{-2}\beta' = A_+^{(0)}\beta + \left(B^{22}(t) - \alpha(t)B^{12}(t)\right)\beta + g_+(t) - \alpha(t)g_-(t), \quad T \leq t < \infty, \tag{9}$$

$$\beta(t) \to -\left(A_+^{(0)}\right)^{-1} g_+^{(0)} \quad \text{при} \quad t \to \infty, \tag{10}$$

которое также ровно одно и представимо при $t \to \infty$ асимптотическим рядом $\beta(t) \sim \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\beta^{(k)}}{t^k}$, где $\beta^{(k)}$ формально определяются из (9) (в (9).– (10) матрица $\alpha(t)$ есть указанное выше решение задачи (7)–(8)).

В результате задача (3)–(5) сводится к эквивалентной краевой задаче на конечном интервале :

$$t^{-2}x' = A(t)x + g(t), \quad t_0 \leq t \leq T, \tag{3'}$$

условие в точке t_0 (4′)

$$x_+(T) = \alpha(T)x_-(T) + \beta(T), \tag{5'}$$

где $\alpha(T)$ и $\beta(T)$ определяются из (7) и (9) с помощью указанных асимптотических разложений по обратным целым степеням t. Для решения задачи (3′)–(5′) на конечном интервале можно воспользоваться различными вариантами устойчивой прогонки (см., например, [7, 8]).

В главе II строится также линейное многообразие ограниченных решений системы (3) для случая, когда матрица $A^{(0)}$ имеет простые собственные значения на мнимой оси. Отдельно рассматриваются системы второго порядка.

Отметим еще раз, что поведение решений системы (3) внутри и вне многообразия (6) хорошо известно, так как изучено асимптотическое поведение в окрестности особой точки фундаментальной матрицы решений однородной линейной системы $t^{-2}x' = A(t)x$, $t_0 \leq t < \infty$. Это поведение сложно, в особенности при наличии жордановых клеток у матрицы $A(\infty)$.

Метод главы II дает возможность отходить от особой точки при решении краевых задач вида (3)–(5), не затрагивая вопроса о жордановой структуре матрицы $A(\infty)$ и о поведении отдельных решений системы (3), а перенося из бесконечности все линейное многообразие (6).

Вспомогательные результаты § 2 главы 1 и нелинейная краевая задача главы Ш.

В § 2 главы I рассматривается задача Коши на бесконечности вида

$$t^{-z}\frac{\partial\gamma}{\partial t}+\frac{\partial\gamma}{\partial x}u(t,x,\gamma)=v(t,x,\gamma),\qquad T\le t<\infty,\ x\in\Omega_x(c), \qquad \text{(II)}$$

$$\lim_{t\to\infty}\gamma(t,x)=\beta(x)\ \text{равномерно по } x \text{ в } \Omega_x(\omega). \qquad \text{(I2)}$$

Здесь $z\ge 0$ – целое число, $\gamma=colon(\gamma_1,\dots,\gamma_m)$, $x=colon(x_1,\dots,x_n)$, $\frac{\partial\gamma}{\partial x}=\left(\frac{\partial\gamma_i}{\partial x_j}\right)_{\substack{i=1,\dots,m\\ j=1,\dots,n}}$ – матрица Якоби, $u(t,x,\gamma)=colon(u_1(t,x,\gamma),\dots,u_n(t,x,\gamma))$, $v(t,x,\gamma)=colon(v_1(t,x,\gamma),\dots,v_m(t,x,\gamma))$; вектор-функции $u(t,x,\gamma)$ и $v(t,x,\gamma)$ определены и непрерывны по (x,γ,t) в $\Omega_{x,\gamma;t}(c;T)$. $u(t,x,\gamma)=[x;\gamma]_1$, $v(t,x,\gamma)=[x;\gamma]_1$ по $\Omega_{x\gamma}(c)$ при каждом $t\ge T$, причем

$$\lim_{t\to\infty}u(t,x,\gamma)=\Lambda^{(0)}x+\varphi(x,\gamma),$$

$$\lim_{t\to\infty}v(t,x,\gamma)=M^{(0)}\gamma+\psi(x,\gamma),$$

где $\varphi(x,\gamma)=[x;\gamma]_2$, $\psi(x,\gamma)=[x;\gamma]_2$ на $\Omega_{x,\gamma}(c)$, $\Lambda^{(0)}$ – квадратная матрица порядка n, все собственные значения

которой имеют отрицательные действительные части, $M^{(0)}$ – квадратная матрица порядка m, все собственные значения которой имеют неотрицательные действительные части; $\beta(x)$ есть голоморфное в нуле решение системы

$$\frac{\partial\beta}{\partial x}\left[\Lambda^{(0)}x+\varphi(x,\beta)\right]=M^{(0)}\beta+\psi(x,\beta), \qquad \text{(I3)}$$

которое на основании теоремы Ляпунова [6], стр. I08–II2, существует и единственно, причем $\beta(x)=[x]_2$ на $\Omega_x(d)$.

В этих предположениях доказывается теорема единственности: в классе функций, голоморфных по x при каждом $t\ge T$, задача (II)–(I2) не может иметь более одного решения. Это доказывается однозначным построением формального решения задачи (II)–(I2) в виде степенного ряда по x

$$\tilde\gamma(t,x)=\sum_{|e|\ge 1}{}' \gamma_e(t)x^e,\quad t\ge T, \qquad \text{(I4)}$$

с коэффициентами $\gamma_e(t)$ – дифференцируемыми функциями t на $[T,\infty)$. Подробно изучается случай, когда в разложениях на $\Omega_{x,\gamma}(c)$

$$u(t,x,\gamma)=\sum_{|p|+|q|\ge 1}{}' u_{pq}(t)x^p\gamma^q,\quad v(t,x,\gamma)=\sum_{|p|+|q|\ge 1}{}' v_{pq}(t)x^p\gamma^q, \qquad \text{(I5)}$$

$t\ge T$, вектор-функции $u_{pq}(t)$ и $v_{pq}(t)$ имеют при $t\to\infty$ заданные асимптотические представления

$$u_{pq}(t)\sim\sum_{k=0}^{\infty}{}'\frac{u_{pq}^{(k)}}{t^k},\quad v_{pq}(t)\sim\sum_{k=0}^{\infty}{}'\frac{v_{pq}^{(k)}}{t^k},\quad |p|+|q|\ge 1. \qquad \text{(I6)}$$

В этом случае для коэффициентов $\gamma_e(t)$ построенного формального степенного ряда (I4) имеет место асимптотические разложения

$$\gamma_e(t) \sim \sum_{\substack{k=0\\ |e|+k\ge 2}}^{\infty} \frac{\gamma_e^{(k)}}{t^k}, \quad t\to\infty, \quad |e|\ge 1,$$

где $\gamma_e^{(k)}$ определяются из (II) формальной подстановкой ряда $\sum\limits_{|e|=1}\sum\limits_{\substack{k=0\\ |e|+k\ge 2}}^{\infty} \frac{\gamma_e^{(k)}}{t^k}x^e$ и разложений (I5),(I6).

Далее, при дополнительных предположениях: вектор-функции $u(t,x,\gamma)$ и $v(t,x,\gamma)$ равномерно ограничены на множестве $\Omega_{x,\gamma;t}(c;T)$, а все собственные значения матрицы $\Lambda^{(0)}$ простые, - доказывается теорема существования решения задачи (II)-(I2) в классе голоморфных по x функций. А именно : доказывается, что построенный формальный степенной ряд (I4), удовлетворяющий уравнению (II) и условию (I2) в смысле равенства формальных разложений по x, сходится в некоторой области $\Omega_{x;t}(\omega;T)$, абсолютно и равномерно по (x,t), и его сумма является истинным решением задачи (II)-(I2).
Хотя алгоритм построения ряда (I4) не зависит от жордановой структуры матрицы $\Lambda^{(0)}$, нам, к сожалению, не удалось доказать сходимость этого ряда без ограничений на кратность собственных значений матрицы $\Lambda^{(0)}$. На самом деле, справедливость теоремы существования представляется несомненной при произвольной жордановой форме матрицы $\Lambda^{(0)}$.

Результаты § 2 главы I представляют собой некоторое обобщение на бесконечномерное пространство результатов § I этой же

главы. С другой стороны, теорема существования и единственности решения задачи (II)-(I2) в классе голоморфных по x функций может рассматриваться как некоторое обобщение на "неавтономные" системы с особенностью теоремы существования Ляпунова, [6], стр.I08-II2, справедливой для "автономных" систем вида (I3).

Задачи вида (II)-(I2) возникают, например, при изучении поведения "во времени и пространстве" многообразий стремящихся к нулю на бесконечности решений некоторых нелинейных систем обыкновенных дифференциальных уравнений с иррегулярной особенностью на бесконечности. Результаты § 2 главы I используются в главе III, где проводится построение устойчивых начальных многообразий в связи с решением некоторых краевых задач. А именно: в главе III рассматривается следующая нелинейная краевая задача

$$t^{-r}x' = A(t)x + f(t,x), \quad t_0 \le t < \infty, \qquad \text{(I7)}$$

заданное краевое условие в точке t_0, (I8)

$$x(t)\to 0 \quad \text{при} \quad t\to\infty. \qquad \text{(I9)}$$

Здесь $r\ge 0$ - целое число, система (I7) n-мерна, $A(t)$ определена и непрерывна на $[t_0,\infty)$ и при $t\to\infty$ имеет заданное асимптотическое представление $A(t)\sim\sum\limits_{k=0}^{\infty}\frac{A^{(k)}}{t^k}$, причем $A^{(0)}=diag(A_-^{(0)}, A_+^{(0)})$, где $A_-^{(0)}$ - квадратная матрица порядка ℓ, все собственные значения которой простые и имеют отрицательные действительные части, $A_+^{(0)}$ - квадратная матрица порядка $n-\ell$, все собственные значения которой имеют положительные действительные части; $f(t,x)$ определена и непрерывна по (x,t) при малых $|x|$ и $t\ge t_0$.

$f(t,x)=[x]_2$ на $\Omega_x(c)$ при каждом $t\ge t_0$ и $f_j(t,x)$ равномерно ограничены на $\Omega_{x;t}(c;T)$, $j=1,\dots,n$, и, кроме того, в разложении на $\Omega_x(c)$ $f(t,x)=\sum'_{|p|\ge 2} f_p(t)x^p$ вектор-функции $f_p(t)$ имеют при $t\to\infty$ заданные асимптотические представления $f_p(t)\sim\sum'^{\infty}_{m=0}\frac{f_p^{(m)}}{t^m}$, $|p|\ge 2$.

Как и в случае линейной задачи (3)-(5), требуется прогнать из бесконечности условие (I9), заменив его эквивалентным соотношением в конечной точке T. Таким соотношением является уравнение всего ℓ - мерного устойчивого многообразия, которое, на основании теоремы об условной устойчивости [I], гл. XIII, существует для каждого фиксированного достаточно большого t в некоторой окрестности начала координат x - пространства и является аналитическим по x многообразием. Представляет интерес поведение этого многообразия по совокупности переменных (x,t) при малых $|x|$ и больших t. В главе III показывается, что многообразие решений (I5), достаточно малых в момент $t=T$ и стремящихся к нулю при $t\to\infty$, для всех $t\ge T$ задается в виде

$$x_+=\gamma(t,x_-),\quad t\ge T. \tag{20}$$

Здесь, в соответствии с представлением $A^{(0)}$, $x=\begin{pmatrix}x_-\\x_+\end{pmatrix}\begin{matrix}\}\ell\\\}n-\ell\end{matrix}$; $\gamma(t,x_-)$, с использованием соответствующего блочного представления $B(t)=A(t)-A^{(0)}=$ $=\begin{pmatrix}B^{11}(t)&B^{12}(t)\\B^{21}(t)&B^{22}(t)\end{pmatrix}$, $f(t,x_-,x_+)=\begin{pmatrix}f_-(t,x_-,x_+)\\f_+(t,x_-,x_+)\end{pmatrix}$, есть решение задачи Коши на бесконечности вида

$$t^{-1}\frac{\partial\gamma}{\partial t}+\frac{\partial\gamma}{\partial x_-}\Big[\big(A_-^{(0)}+B^{11}(t)\big)x_-+B^{12}(t)\gamma+$$
$$+f_-(t,x_-,\gamma)\Big]=\big(A_+^{(0)}+B^{22}(t)\big)\gamma+B^{21}(t)x_-+f_+(t,x_-,\gamma), \tag{2I}$$
$$T\le t<\infty,\quad x_-\in\Omega_{x_-}(c),$$

$$\lim_{t\to\infty}\gamma(t,x_-)=\beta(x_-),\quad x_-\in\Omega_{x_-}(\omega), \tag{22}$$

где $\beta(x_-)$ есть голоморфное в нуле решение системы

$$\frac{\partial\beta}{\partial x_-}\big[A_-^{(0)}x_-+f_-(\infty,x_-,\beta)\big]=A_+^{(0)}\beta+f_+(\infty,x_-,\beta). \tag{23}$$

На основании результатов § 2 главы I решение $\gamma(t,x_-)$ задачи (2I)-(22) существует и единственно в классе функций, голоморфных по x_- при каждом $t\ge T$. При этом ряд

$$\gamma(t,x_-)=\sum'_{|e|\ge 1}\gamma_e(t)x_-^e \tag{24}$$

сходится абсолютно и равномерно по совокупности переменных (x_-,t) в $\Omega_{x_-;t}(\omega;T)$, где $\gamma_e(t)$ - непрерывные ограниченные вектор-функции на $[T,\infty)$, такие, что при $t\to\infty$

$$\gamma_e(t)\sim\sum'^{\infty}_{\substack{k=0\\|e|+k\ge 2}}\frac{\gamma_e^{(k)}}{t^k},\quad |e|\ge 1, \tag{25}$$

причем $\gamma_e^{(k)}$ определяются из (2I) формальной подстановкой ряда $\sum'_{\substack{|e|\ge 1\\|e|+k\ge 2}}\sum'^{\infty}_{k=0}\frac{\gamma_e^{(k)}}{t^k}x_-^e$ при малых $|x_-|$ и больших t.

В результате задача (I7)-(I9) сводится к эквивалентной краевой задаче на конечном интервале :

$$t^{-2}x' = A(t)x + f(t,x), \quad t_0 \le t \le T,$$

заданное краевое условие в точке t_0 ,

$$x_+(T) = \gamma(T, x_-(T)),$$

где $\gamma(T, x_-(T))$ определяется из (2I) с помощью разложений (24) и (25).

Эти результаты несомненно останутся справедливыми без ограничений на кратность собственных значений матрицы $A_-^{(0)}$, так как если предположить сходимость ряда (24) в общем случае, то все последующие доказательства, как и построение самого ряда (24), не зависят от жордановой структуры матрицы $A^{(0)}$.

В главе Ш строится также устойчивое начальное многообразие для решений системы $t^{-2}x' = A(t)x + f(t,x) + g(t)$, где $g(t) \sim \sum_{k=1}^{\infty} \frac{g^{(k)}}{t^k}$ при $t \to \infty$. Отдельно рассматриваются системы второго порядка.

Дополнительно рассматривается вопрос о поведении решений системы (I7) внутри и вне многообразия (20).

Для автономных систем

$$x' = A(\infty)x + f(\infty, x), \tag{26}$$

получающихся из (I7) заменой t на $\tau = t^{2+1}/(2+1)$ и формальным переходом к пределу в правой части при $\tau \to \infty$, устойчивое ℓ -мерное многообразие задается в виде

$$x_+ = \beta(x_-), \tag{27}$$

где $\beta(x_-)$ есть голоморфное в нуле решение системы (23). Ляпуновым показано, на какие решения "расслаивается" многообразие (27), а именно: для решений (26), принадлежащих многообразию (27), получено представление в виде ℓ - параметрического экспоненциального ряда с коэффициентами, имеющими рост не выше степенного, [6], § 23 . В [I] гл.XШ приводится теорема о поведении решений (26), начинающихся вблизи устойчивого многообразия, но не лежащих на нем.

Аналитическому интегрированию неавтономных нелинейных систем вида (I7) в окрестности особой точки, как уже отмечалось, посвящено много работ, на основании которых, в частности, для системы (I7) может быть построено семейство решений – ℓ -параметрический экспоненциальный ряд, имеющий довольно сложное строение. Естественно предположить, что из решений этого ℓ - параметрического семейства "склеено" все многообразие (20) в (x,t) пространстве.

В диссертации подробно изучается "внутреннее строение" устойчивого многообразия (20) в простейшем случае двумерной нелинейной системы (I7) $(n=2, \ell=1)$. Для общего случая n уравнений доказывается теорема о поведении решений вне устойчивого многообразия, аналогичная теореме 5.I из [I], гл. XШ, для автономных систем. Эти результаты, как отмечено выше, получены в дополнение к основным результатам главы Ш.

Основной целью главы Ш является показать, как можно использовать для решения нелинейных краевых задач вида (I7)-(I9) уравнение всего устойчивого многообразия без выяснения сложного поведения отдельных решений внутри этого многообразия.

Отметим в заключение, что краевые задачи на полубесконечном интервале, подобные изученным в настоящей диссертации, возникают, например, при приближенном решении некоторых задач квантовой химии (см. приложение к диссертации, [9, 16]), теории атомных столкновений [10], теории распространения радиоволн [11]. Результаты главы П использовались также в [12] и [13] для численного решения задачи распространения светового луча в нелинейной среде.

Основные результаты диссертации изложены в работах [15 - 19] и докладывались на Всесоюзной конференции по вычислительной математике (МГУ, 22-26 января 1965 г.), на IУ Всесоюзном совещании по квантовой химии (Киев, 6-I2 октября 1966г.) и на ХУI научной конференции в МФТИ (27-28 ноября 1970г.).

К результатам I части работы [15], опубликованной в 1965г. примыкает опубликованная позднее, в 1970 году, работа Д.Рассела [14], где получены некоторые сходные результаты для линейных систем с особенностью несколько более общего вида.

Приношу искреннюю благодарность своему научному руководителю А.А.Абрамову за выбор темы исследования, ценные советы и постоянное внимание к работе.

Литература

I. Э.А.Коддингтон, Н.Левинсон. Теория обыкновенных дифференциальных уравнений. М., Изд-во ин.лит., I958.

2. В.Вазов. Асимптотические разложения решений обыкновенных дифференциальных уравнений. М., "Мир", I968.

3. M. Iwano. Intégration analytique d'un système d'équations différentielles non linéaires dans le voisinage d'un point singulier, I. Ann. Mat. Pura ed Appl. (1957) 44, ser. 4, 261-292.

4. M. Iwano. Analytic expressions for bounded solutions of non-linear ordinary differential equations with an irregular type singular point. Ann. Mat. Pura ed Appl. (1969) 82, ser. 4, 189-256.

5. А.А.Абрамов. О переносе условия ограниченности для некоторых систем обыкновенных линейных дифференциальных уравнений. ЖВМ и МФ, I96I, I, № 4, 733-737.

6. А.М.Ляпунов. Собрание сочинений, т.П. М.-Л., Изд-во АН СССР, I956.

7. А.А.Абрамов. О переносе граничных условий для систем линейных обыкновенных дифференциальных уравнений. ЖВМ и МФ, I96I, I, № 3, 542-545.

8. В.Б.Лидский, М.Г.Нейгауз. К методу прогонки в случае самосопряженной системы второго порядка. ЖВМ и МФ, 1962, 2, № I, I6I-I65.

9. А.А.Абрамов, Е.С.Биргер, Н.Б.Конюхова. I. О численном нахождении собственных чисел для систем обыкновенных дифференциальных уравнений, встречающихся в квантовой химии. 2. Один метод определения уровней энергии одноэлектронных молекул. IУ Всесоюзное совещание по квантовой химии, Тезисы докладов, Изд-во "Наукова думка", Киев, 1966.

10. Е.С.Биргер, В.К.Жиховский. Образование метастабильных молекул при столкновении медленных атомов. Процессы с участием двух электронных состояний. Доклады У Международной конференции по физике электронных и атомных столкновений, Ленинград, июль. 1967 .

11. Е.С.Биргер, Н.Б.Конюхова. Численный расчет распространения радиоволн в вертикально-неоднородной тропосфере. Радиотехника и электроника, XIУ, № 7, 1969, 1147-1156.

12. А.Л.Дышко, В.Н.Луговой, А.М.Прохоров. Самофокусировка интенсивных световых пучков. ЖЭТФ, Письма в редакцию, 6, вып.5, Изд-во "Наука", 1967, 655-659.

13. В.В.Соболев, В.С.Синах. Численный эксперимент по самофокусировке электромагнитных волн в нелинейной среде. ПМТФ, № 6, 1969, 20-22.

14. D. L. Russell. Numerical solution of singular initial value problems. SIAM J. Numer. Anal., vol. 7, № 3, september 1970, 399-417.

15. Е.С.Биргер, Н.Б.Ляликова (Конюхова). О нахождении для некоторых систем обыкновенных дифференциальных уравнений решений с заданным условием на бесконечности. I, ЖВМ и МФ, 1965, 5, № 6, 979-990 ; II, ЖВМ и МФ, 1966, 6, № 3, 446-453.

16. Е.С.Биргер, Н.Б.Конюхова. К расчету молекул в одноэлектронном и одноцентровом приближении. ТЭХ, 1968, 4, вып.1, 29-36.

17. Н.Б.Конюхова. О численном выделении стремящихся к нулю на бесконечности решений для некоторых двумерных нелинейных систем обыкновенных дифференциальных уравнений. ЖВМ и МФ, 1970, 10, № 1, 74-87.

18. Н.Б.Конюхова. О поведении решений внутри вне устойчивого многообразия некоторых двумерных нелинейных систем обыкновенных дифференциальных уравнений. Математические заметки, 8, вып. 3, 1970, 285-295.

19. Н.Б.Конюхова. К решению краевых задач на бесконечном интервале для некоторых нелинейных систем обыкновенных дифференциальных уравнений. ЖВМ и МФ, 1970, 10, № 5, 1150-1163.

Н.Б.Конюхова

О выделении ограниченных решений
некоторых систем обыкновенных
дифференциальных уравнений
(01.008 – вычислительная математика)

Т-06136. Подписано в печать 1/IУ-71г. Заказ 35
Тираж 200 экз. Формат бумаги 60x90 1/16
Бесплатно

Отпечатано на ротапринтах в ВЦ АН СССР
Москва, В-333, ул.Вавилова, 40