Госкомитет по приборостроению,
средствам автоматизации и
системам управления при Госплане СССР

Академия наук СССР

ИНСТИТУТ АВТОМАТИКИ И ТЕЛЕМЕХАНИКИ

Л.И. Розоноэр

ВАРИАЦИОННЫЙ ПОДХОД К ПРОБЛЕМЕ ИНВАРИАНТНОСТИ СИСТЕМ АВТОМАТИЧЕСКОГО УПРАВЛЕНИЯ

Автореферат диссертации на соискание
ученой степени доктора технических наук

Москва, 1963 г.

Проблема инвариантности систем автоматического управления заключается, как известно, в определении условий, при которых внешние воздействия не влияют на поведение управляемых величин. Теория инвариантности была развита в работах Г.В.Щипанова, Н.Н.Лузина, В.С.Кулебакина, Б.И.Петрова, Г.М.Уланова, А.И.Кухтенко и многих других авторов (обзоры проблемы инвариантности и соответствующей литературы можно найти в [I,2]).

В настоящей работе развивается вариационный подход к проблеме инвариантности. Показано, что проблема инвариантности является по существу вариационной проблемой. Использование методов, разработанных в теории оптимальных систем, дает возможность получить необходимые и достаточные условия инвариантности в линейных (стационарных и нестационарных) и нелинейных системах.

Работа состоит из двух глав. В первой главе (помимо общей постановки задачи) исследуются линейные системы, во второй - рассматривается общий случай нелинейных систем. В качестве приложения к диссертации приведена подробная библиография работ по теории инвариантности.

Работа полностью опубликована в виде статей [3,4] .

Проблема инвариантности может быть сформулирована следующим образом. Задана система дифференциальных уравнений, описывающих систему управления

$$\dot{x}_i = f_i(x_1,\dots,x_n,u,t), \quad x_i(0)=x_i^0, \quad i=1,\dots,n, \qquad (1)$$

где $x_1, \dots, x_n$ - координаты системы, $u(\tau)$ - внешнее воздействие. Задан функционал от решения системы (1)

$$J(t) \equiv \Phi\{x(\tau), t\} , \tag{2}$$

зависящий, быть может, от параметра t, играющего роль времени. Требуется найти условия, наложенные на функции f_i в (1), при которых значения $J(t)$ не зависят от внешнего воздействия $u(\tau)$. Этому требованию независимости функционала (2) от внешнего воздействия можно придавать различный точный смысл. Можно требовать, например, чтобы функционал (2) не зависел от $u(\tau)$ лишь тогда, когда (2) рассматривается в определенный момент времени $t = T$, причем система отправляется от точно определенных начальных данных $x_i(0) = x_i^0$. Можно усилить это требование и искать условия независимости (2) от $u(\tau)$ при любых t, принадлежащих отрезку $[0,T]$, или при любых начальных данных, или при том и другом условии одновременно. Поскольку на практике возможность контролировать начальные данные реализуется редко, наиболее интересной, по-видимому, является такая постановка проблемы инвариантности, когда последняя имеет место при произвольных начальных данных (для линейных систем в силу принципа суперпозиции различие в начальных данных не сказывается на факте инвариантности системы).

Что касается момента времени t, в который рассматривается функционал (2), будем различать упомянутые выше два случая. В первом случае ("слабая" инвариантность) значение функционала $J(t)$ не должно зависеть от $u(\tau)$ лишь при некотором фиксированном значении параметра $t=T$. Во втором случае ("сильная" инвариантность) значения $J(t)$ не должны зависеть от $u(\tau)$ при произвольных t, принадлежащих заданному отрезку $[0,T]$.

Если речь идет о "сильной" инвариантности при произвольных начальных данных, то будем употреблять иногда термин "совершенная инвариантность" и говорить, что функционал (2) совершенно инвариантен относительно $u(\tau)$ в системе (1).

Наиболее употребительные в теории автоматического управления функционалы имеют вид:

$$J(t) \equiv x_k(t), \tag{3а}$$

$$J(t) \equiv \int_0^T F[x_1(\tau), \dots, x_n(\tau)]\, d\tau, \tag{3б}$$

$$J(t) \equiv F[x_1(t), \dots, x_n(t)] \tag{3в}$$

и, как легко показать, могут быть сведены один к другому.

Вариационный характер проблемы инвариантности определяется следующими обстоятельствами. Пусть $u(\tau)$ - некоторое внешнее воздействие. Рассмотрим приращение $\Delta u(\tau)$ функции $u(\tau)$. При этом функционал $J(t)$ получает, вообще говоря, приращение $\Delta J(t)$. Выполнение требования инвариантности как раз и означает, что приращение функционала должно тождественно обращаться в нуль. Поэтому критерием "слабой" инвариантности является тождество

$$\Delta J(t) \equiv 0 \ , \ t = T \ , \qquad (4а)$$

выполняющееся при любых $u(\tau)$ и $\Delta u(\tau)$. Критерий "сильной" инвариантности имеет вид тождества

$$\Delta J(t) \equiv 0 \ , \ t \in [0,T] \ , \qquad (4б)$$

которое также должно выполняться при любых $u(\tau)$ и $\Delta u(\tau)$. Условия (4) аналогичны условию $\Delta J \geq 0$ $(\Delta J \leq 0)$, являющемуся критерием минимума (максимума) функционала. Исследование инвариантности может быть проведено теми же методами, которые используются для определения экстремумов функционала, т.е. методами вариационного исчисления.

Чтобы критерии (4а) и (4б) позволяли получать условия инвариантности в системе (1), необходимо иметь соответствующую формулу для приращения значения функционала, выражающую ΔJ через функции f_i в (1). Такая формула была получена в [5,6] ; и в случае функционала (3в) ей можно придать вид:

$$\Delta J(t) = -\int_0^T [H(x(\tau),p(\tau),u(\tau)+\Delta u(\tau)) - H(x(\tau),p(\tau),u(\tau))]\,d\tau - \eta \ , \qquad (5)$$

где $H(x,p,u) \equiv \sum_{1}^{n} p_i f_i(x,u)$, переменные $p_1(\tau),\dots,p_n(\tau)$ удовлетворяют уравнению

$$\dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial x_i} \ , \ i = 1,\dots,n$$

с граничным условием

$$p_i(t) = -\frac{\partial F[x_1(t),\dots,x_n(t)]}{\partial x_i} \ , \ i = 1,\dots,n \ ,$$

а η - некоторый остаточный член, имеющий оценку

$$|\eta| \leq A\left(\int_0^T |\Delta u(\tau)|\,d\tau\right)^2$$

(здесь A - некоторая не зависящая от $\Delta u(\tau)$ константа).

Рассмотрим линейную стационарную систему

$$\dot{x} = Ax + bu \ , \qquad (6)$$

записанную в матричной форме. Здесь $x(t)$ - n-мерная **вектор**-функция, b - n-мерный постоянный, не равный нулю вектор, $u(\tau)$ - скалярная функция, $A = \|a_{ik}\|$ - квадратная матрица. В системе (6) рассматривается инвариантность величины

$$J(t) \equiv (c, x(t)) \ , \qquad (7)$$

где $c = (c_1,\dots,c_n)$ - постоянный **вектор**, а скобки означают скалярное произведение. Использование формулы (5) в линейном случае $\eta \equiv 0$ приводит к необходимому и достаточному условию инвариантности в форме

$$(p(t), b) \equiv 0 \ , \ t \in [0,T] \ , \qquad (8)$$

где вектор $p(t)$ удовлетворяет уравнению

$$\dot{p} = -A'p \ , \quad p(T) = -c$$

(штрих означает операцию транспонирования).

Условие (8) позволяет получить необходимые и достаточные условия инвариантности в виде выражений, в которые входят только коэффициенты, составляющие матрицу A и векторы b и c .

Теорема 1. Необходимым и достаточным условием инвариантности (как "сильной", так и "слабой") линейной комбинации $J(t) \equiv \sum_1^n c_i x_i(t)$ в системе

$$\dot{x} = Ax + bu$$

является выполнение соотношений

$$(c, A^k b) = 0 \quad , \ k = 0, \ldots, n-1 \ . \qquad (9)$$

Из (9) следует, что система векторов $b, Ab, \ldots, A^{n-1} b$ (так же, как и система $c, A'c, \ldots, A'^{n-1} c$) линейно зависима. Возьмем такое целое s $(1 \le s \le n-1)$, для которого система векторов $c, A'c, \ldots, A'^{s-1} c$ линейно независима, а присоединение к этой системе вектора $A'^s c$ делает ее линейно зависимой. Обозначим

$$J_k(t) \equiv (c, A^k x(t)) \ , \ k = 0, \ldots, s-1 \ . \qquad (10)$$

Легко показать, что функции (10) удовлетворяют системе дифференциальных уравнений порядка s :

$$\dot{J}_0 = J_1 \ , \quad \dot{J}_1 = J_2 \ , \ldots, \dot{J}_{s-1} = \sum_0^{s-1} \mu_k J_k \ , \qquad (11)$$

где μ_k - некоторые константы.

Таким образом, если в системе (6) величина $J_0 = (c, x)$ инвариантна, то она удовлетворяет дифференциальному уравнению, порядок которого по меньшей мере на единицу ниже порядка исходной системы.

Исследование инвариантности в системе с несколькими внешними воздействиями

$$\dot{x} = Ax + \sum_1^r b^s u_s ,$$

где b^s $(s = 1, \ldots, r)$ - отличные от нуля постоянные векторы, приводит к аналогичным результатам. В силу линейности системы необходимым и достаточным условием инвариантности является совместное выполнение соотношений

$$(c, A^k b^s) = 0 \quad (k = 0, \ldots, n-1 \ ; \ s = 1, \ldots, r) .$$

Рассмотрим нестационарную линейную систему

$$\dot{x} = A(t)x + b(t)u , \qquad (12)$$

записанную в матричной форме. Здесь снова $x(t)$ - n-мерная векторная переменная, $b(t)$ - заданный и, возможно, зависящий от времени n -мерный вектор, $A(t)$ -переменная матрица типа $n \times n$, $u(t)$- скалярная функция. Относительно элементов матрицы $A(t)$ и вектора $b(t)$ предполагается существование и непрерывность всех их производных до (n - 1)-й включительно. В системе (12) рассматривается инвариантность величины

$$J(t) \equiv (c(t), x(t)). \tag{13}$$

Формула (5) для приращения значения функционала приводит в этом случае к необходимому и достаточному условию "слабой" инвариантности в виде

$$(p(t), b(t)) \equiv 0 \quad , \ t \in [0,T] \ , \tag{14}$$

где

$$\dot p = -A'(t)p \quad , \ p(T) = -c(T) \ .$$

Введем в рассмотрение оператор $Q \equiv \frac{d}{dt} - A(t)$, применяемый к n-мерным векторам. Обозначим

$$q^0(t) \equiv b(t) \ , \ q^1(t) \equiv Qq^0(t), \ldots, q^{n-1}(t) = Qq^{n-2}(t) \ . \tag{15}$$

Использование формулы (14) приводит к следующим условиям "слабой" инвариантности.

<u>Теорема 2.</u> Для того чтобы величина $J(T)$ была инвариантна в системе (12)

а) необходимо, чтобы система векторов $q^0(t), \ldots, q^{n-1}(t)$ была линейно зависимой при каждом $t \in [0,T]$ и, кроме того, были выполнены соотношения

$$(c(T), q^k(T)) = 0 \quad , \ k = 0, \ldots, n-1 \ ; \tag{16}$$

б) достаточно, чтобы для некоторого τ, $1 \leqslant \tau \leqslant n-1$, вектор $q^\tau(t)$ линейно выражался через $q^k(t), k=0,\ldots,\tau-1$ при каждом $t \in [0,T]$ и, кроме того, были выполнены соотношения (16).

Простым следствием Теоремы 2 является Теорема 3 об условиях "сильной" инвариантности.

<u>Теорема 3.</u> Для того чтобы величина $J(t)$ была инвариантна в системе (12),

а) необходимо, чтобы выполнялись условия:

$$(c(t), q^k(t)) \equiv 0 \quad , t \in [0,T] \ , \ k = 0, \ldots, n-1 \ ; \tag{17}$$

б) достаточно, чтобы, помимо выполнения (17), для некоторого τ, $1 \leqslant \tau \leqslant n-1$, вектор $q^\tau(t)$ линейно выражался через $q^k(t)$, $k = 0, \ldots, \tau-1$ при каждом $t \in [0,T]$.

Инвариантность систем с несколькими внешними воздействиями рассматривается совершенно аналогично.

Перейдем к исследованию инвариантности в нелинейной системе (1), предполагая, что функции f_i непрерывны по совокупности всех аргументов и имеют непрерывные частные производные по ($x_1, \ldots, x_n$) всех порядков до (n - 1)-го включительно.

Пусть задано множество X^0 возможных начальных данных для системы (1) и некоторое множество $\mathcal{T}$ моментов времени τ, принадлежащих полуоси $[0, \infty)$. Будем говорить, что функция $F(x_1, \ldots, x_n)$ $(X^0, \mathcal{T})$-инвариантна, если, каково бы ни было $x(0) = x^0 \in X^0$, при любом $t \in \mathcal{T}$ и любом $u(\tau) = (u_1(\tau), \ldots, u_z(\tau))$ величина $F(x_1(t), \ldots, x_n(t))$, вычисленная в силу (1), не зависит от $u(\tau)$ и определяется лишь x^0 и t.

В частности, скажем, что функция $F(x_1,\dots,x_n)$ совершенно инвариантна, если она $(X^\circ,\mathcal{T})$-инвариантна при X°, совпадающем со всем пространством ($x_1,\dots,x_n$), и $\mathcal{T}$, совпадающем со всей полуосью $[0,\infty)$.

Из формулы (5) следует, что для выполнения $(X^\circ,\mathcal{T})$-инвариантности функции $F(x_1,\dots,x_n)$ в (1) необходимо, чтобы функция $z+1$ переменной $\tau, v_1,\dots,v_z$

$\Delta H(\tau,v)\equiv H(x(\tau),p(\tau),u(\tau)+v)-H(x(\tau),p(\tau),u(\tau))$

была тождественно по $v_1,\dots,v_z$ равна нулю при любом $\tau\in[0,t]$, каково бы ни было $u(\tau)$ для любых $t\in\mathcal{T}$ и $x^\circ\in X^\circ$.

На основании проведенного в работе исследования некоторых простых свойств гамильтоновых систем, гамильтониан которых линейно зависит от p, сформулированное выше условие инвариантности может быть приведено к следующей форме.

Введем специальное обозначение ("угловую скобку"), которая ставит в соответствие двум векторам $\varphi(x,\tau)$ и $f(x,\tau)$ третий вектор $\psi(x,\tau)=<\varphi,f>$ с компонентами

$$\psi_s=\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial\varphi_s}{\partial x_i}f_i-\frac{\partial f_s}{\partial x_i}\varphi_i\right),\quad s=1,\dots,n.$$

Рассмотрим также оператор $D(f)$, такой, что, будучи применен к любой функции $F(x_1,\dots,x_n)$, он дает результат

$$D(f)F\equiv\sum_{1}^{n}\frac{\partial F}{\partial x_i}f_i\ .$$

Пусть $f^s(x,z,u)$, $s=0,\dots,n-1$ — система n-мерных вектор-функций:

$$f^\circ\equiv f(x,z)\ ;\ f^1\equiv<f^\circ(x,z),f(x,u)>,\ \dots,\ f^{n-1}\equiv<f^{n-2},f(x,u)>.$$

Теорема 4. Если в системе (1) функция $F(x_1,\dots,x_n)$ $(X^\circ,\mathcal{T})$-инвариантна, то в каждой точке x пространства $(x_1,\dots,x_n)$, через которую в момент времени $t\in\mathcal{T}$ проходит хотя бы одно решение системы (1) с $x(0)=x^\circ\in X^\circ$ при $u(\tau)=u=const$, тождественно по z выполнены соотношения:

$$D(f(x,z))F=D(f(x,u))F\ ;\quad D(f^s)F=0\ ,\ s=1,\dots,n-1.$$

Особенно простую форму приобретают условия инвариантности в случае совершенной инвариантности.

Введем в рассмотрение систему функций

$$F_\circ\equiv F\ ,\ F_1=D(f)F_\circ\ ,\ \dots\ ,\ F_{n-1}=D(f)F_{n-2}\ . \qquad (18)$$

Теорема 5. Необходимым и достаточным условием совершенной инвариантности функции $F(x_1,\dots,x_n)$ в системе (1) является независимость функций $F_1(x,u), F_2(x,u),\dots,F_{n-1}(x,u)$, определенных формулой (18), от u при любых z.

В качестве применения Теоремы 5 рассмотрена система

$$\dot{x}=(A+Bu)x\ ,$$

билинейная по x, u. Условия совершенной инвариантности величины $J(t) \equiv (c, x(t))$ имеют вид

$$B'A'^{s}c = 0, \quad s = 0, \ldots, n-2.$$

ЛИТЕРАТУРА

1. Теория инвариантности и её применение в автоматических устройствах. (Труды совещания.) Изд-во АН УССР, 1959.
2. УЛАНОВ Г.М. Регулирование по возмущению. Госэнергоиздат, 1960.
3. РОЗОНОЭР Л.И. Вариационный подход к проблеме инвариантности систем автоматического управления, I. "Автоматика и телемеханика", т.XXIУ, № 6, 1963.
4. РОЗОНОЭР Л.И. Вариационный подход к проблеме инвариантности, П. "Автоматика и телемеханика", т.XXIУ, № 7, 1963.
5. РОЗОНОЭР Л.И. Принцип максимума Л.С. Понтрягина в теории оптимальных систем, I. "Автоматика и телемеханика", т.XX, № 10, 1959.
6. РОЗОНОЭР Л.И. О достаточных условиях оптимальности. Доклады АН СССР, т.127, № 3, 1959.