Министерство приборостроения,
средств автоматизации
и систем управления

Академия наук СССР

ИНСТИТУТ АВТОМАТИКИ И ТЕЛЕМЕХАНИКИ (ТЕХНИЧЕСКОЙ КИБЕРНЕТИКИ)

На правах рукописи

Е.Г.Крушель

ВЕРОЯТНОСТНЫЕ МЕТОДЫ ИССЛЕДОВАНИЯ АВТОМАТИЧЕСКИХ СИСТЕМ С РАСПРЕДЕЛЕННЫМИ ПАРАМЕТРАМИ

Специальность № 255 - техническая кибернетика

Автореферат диссертации
на соискание ученой степени
кандидата технических наук

Москва 1968

Министерство приборостроения,
средств автоматизации
и систем управления

Академия наук СССР

ИНСТИТУТ АВТОМАТИКИ И ТЕЛЕМЕХАНИКИ (ТЕХНИЧЕСКОЙ КИБЕРНЕТИКИ)

На правах рукописи

Е.Г.Крушель

ВЕРОЯТНОСТНЫЕ МЕТОДЫ ИССЛЕДОВАНИЯ АВТОМАТИЧЕСКИХ СИСТЕМ С РАСПРЕДЕЛЕННЫМИ ПАРАМЕТРАМИ

Специальность № 255 - техническая кибернетика

Автореферат диссертации
на соискание ученой степени
кандидата технических наук

Москва 1968

ВВЕДЕНИЕ

В последние годы началось быстрое обобщение методов теории автоматического управления на класс систем с распределенными параметрами. Интерес к проблеме управления объектами с распределенными параметрами объясняется тем, что для многих важных классов промышленных объектов не удается построить эффективные алгоритмы управления на основании представления этих объектов сосредоточенными звеньями. В качестве примеров объектов этого класса можно указать вращающиеся печи для обжига и сушки сыпучих материалов, теплообменные аппараты, экстракторы, абсорберы и др.

В задачах автоматического управления распределенными объектами часто встречаются случаи, характеризующиеся неполнотой информации. Это объясняется следующими причинами. Во-первых, математическое описание объекта обычно известно не полностью или составляется заведомо упрощенным (например, в большинстве случаев учитывают распределенность процесса лишь по одной пространственной координате). Во-вторых, параметры, характеризующие процесс (т.е. коэффициенты дифференциальных уравнений, его описывающих), определяемые расчетным путем или экспериментально, известны неточно и испытывают флуктуации в процессе работы (так, теплопроводность, теплоемкость, влажность, крупность сырья, обжигаемого во вращающейся печи, изменяются в процессе работы в широких пределах). В-третьих, переменные, характеризующие распределенный процесс, доступны для измерения в большинстве случаев только в ограниченном числе точек. Так как внутри объекта действуют распределенные возмущения, то мы не можем получить точные сведения о значениях переменных в точках, недоступных непосредственному измерению, даже при наличии точной математической модели. В-четвертых, аддитивные возмущения, действующие в распределенном объекте, труднее учесть, чем в сосредоточенном случае, т.к. природа их значительно разнообразнее: помехи могут быть приложены как к границам объекта, так и действовать по его длине.

Нельзя утверждать, что учет распределенности объекта вносит только нежелательные усложнения в процедуру построения системы автоматического управления. Сам фактор распределенности служит иногда дополнительным источником информации, улучшающей качество системы управления. Здесь нужно указать на работы Б.Н.Девятова, в которых развивается идея применения распределенного контроля, т.е. использования в качестве выходного сигнала распределенного объекта значения интеграла выходной переменной вдоль пространственной оси.

В области приложений методов теории управления к задачам исследования распределенных систем с неполной информацией имеется большое количество нерешенных задач:

а) в вопросах вероятностного анализа систем с распределенными параметрами недостаточно изучены методы определения статистических характеристик систем, содержащих случайные параметры. Применение универсальных методов усложняется тем, что свойства распределенной системы изучаются по-разному в зависимости от типа уравнений, которыми она описывается;

б) приложения вероятностных методов затрудняются тем, что удобные и достаточно точные математические модели распределенных процессов часто отсутствуют;

в) в задачах синтеза статистически-оптимальных распределенных систем основная трудность, по-видимому, состоит не в составлении уравнений, определяющих оптимальный оператор, а в их решении. Здесь методы, разработанные при изучении сосредоточенных систем, часто оказываются неприемлемыми из-за специфического вида весовой функции распределенного объекта;

г) нужно стремиться к тому, чтобы усложнение расчета системы, происходящее при учете распределенности, позволяло сделать достаточно простые качественные выводы.

Некоторые из перечисленных задач отражены в данной работе.

I. ВЕРОЯТНОСТНЫЙ АНАЛИЗ РАСПРЕДЕЛЕННЫХ СИСТЕМ

Укажем примеры задач, приводящих к необходимости использования методов вероятностного анализа.

а) Сведения о вероятностных характеристиках выходных сигналов позволяют установить, какую роль играют нестабильность параметров объекта и входные случайные возмущения.

б) Часто при проектировании системы управления прибегают к аппроксимации динамических свойств распределенного объекта обыкновенным дифференциальным уравнением I-II порядка с запаздыванием. Методы вероятностного анализа позволяют установить, насколько будет отличаться работа реальной системы от спроектированной, и

оценить правомерность аппроксимации.

в) Учет распределенности позволяет установить, каким образом вероятностные характеристики изменяются по длине объекта, и сделать заключение о переменной в точках, недоступных непосредственному измерению.

Известно, что свойства распределенной системы исследуются по-разному в зависимости от типа уравнений, ее описывающих. В работе рассматриваются случаи, когда уравнения процесса относятся к параболическому или гиперболическому типу. В ряде случаев рассматриваются и задачи с уравнениями в частных производных I порядка, описывающими процессы транспортировки материала.

Способ, с помощью которого вычисляются вероятностные характеристики распределенной системы, состоит в следующем:

а) в зависимости от типа уравнения, описывающего процесс, и способа задания граничных условий строится весовая функция распределенной системы;

б) по заданным плотностям вероятности параметров системы находятся моменты весовой функции;

в) по найденным моментам весовой функции и по заданным моментам входных возмущений вычисляются моменты выходных сигналов.

В общем виде уравнение процесса в системе имеет вид:

$$F u(\bar{x}) = f(\bar{x}), \qquad (I)$$

где F – оператор объекта с частными производными, коэффициенты которого могут быть случайными;
$u(\bar{x})$ – выходной сигнал;
$\bar{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_r)$ – вектор r независимых координат;
$f(\bar{x})$ – входное аддитивное возмущение.

Распределенным аналогом весовой функции уравнения (I) является функция Грина $G(\bar{\chi}, \bar{x})$ – реакция распределенной системы (I) на r-мерную δ-функцию $\delta(\overline{\chi - x})$

Если случайные параметры, входящие в выражение для функции Грина $G(\bar{\chi}, \bar{x})$, и аддитивное возмущение $f(\bar{x})$ статистически независимы, то математическое ожидание $m_u(\bar{x})$ и корреляционная функция $K_u(\bar{x}, \bar{x}_1)$ выходного сигнала $u(\bar{x})$ определяются по формулам:

$$m_u(\bar{x}) = \int_{\bar{\chi}'}^{\bar{\chi}''} m_f(\bar{\chi})\, m_G(\bar{\chi}, \bar{x})\, d\bar{\chi}. \qquad (2)$$

$$K_u(\bar{x},\bar{x}_1)=\int_{\bar{x}'}^{\bar{x}''}\int_{\bar{x}'_1}^{\bar{x}''_1}\{m_G(\bar{\chi},\bar{x})\overline{m_G(\bar{\chi}_1,\bar{x}_1)}K_f(\bar{\chi},\bar{\chi}_1)+ \tag{3}$$

$$+K_G(\bar{\chi},\bar{x},\bar{\chi}_1,\bar{x}_1)[K_f(\bar{\chi},\bar{\chi}_1)+m_f(\bar{\chi})\overline{m_f(\bar{\chi}_1)}]\}d\bar{\chi}_1 d\bar{\chi}.$$

Здесь $m_f(\bar{\chi})$, $K_f(\bar{\chi},\bar{\chi}_1)$ – соответственно математическое ожидание и корреляционная функция аддитивного возмущения; $m_G(\bar{\chi},\bar{x})$, $K_G(\bar{\chi},\bar{x},\bar{\chi}_1,\bar{x}_1)$ – то же для функции Грина; эти значения вычисляются при усреднении функции Грина по плотностям вероятности случайных параметров системы. Черта над функцией обозначает сопряженную функцию.

Общие выражения (2) и (3) применены в следующих конкретных задачах.

I. Изучается прохождение случайного сигнала $f(t,x)$ через объект, описываемый линейным уравнением теплопроводности

$$a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-\frac{\partial u}{\partial t}=f(t,x),\quad 0<x<\ell,\ 0<t<\infty \tag{4}$$

$$u(t,0)=q_1(t);\qquad u(t,\ell)=q_2(t). \tag{5}$$

Предполагается, что параметр a является случайной величиной с известной плотностью вероятности, а возмущения $f(t,x)$, $q_1(t)$ и $q_2(t)$ – случайными функциями с заданными моментами.

При вычислении вероятностных характеристик выход $u(t,x)$ объекта представляется в виде суммы двух составляющих $u_1(t,x)$ и $u_2(t,x)$. Первое из них определяется только действием распределенного возмущения $f(t,x)$, а второе – только действием граничных возмущений $q_1(t)$ и $q_2(t)$. Затем вычисляются отдельно вероятностные характеристики процессов $u_1(t,x)$ и $u_2(t,x)$ и учитывается возможная корреляция между ними, возникающая при наличии корреляции между распределенным и граничными возмущениями.

2. Рассматривается задача вероятностного анализа для случая, когда процесс в распределенном объекте описывается уравнением гиперболического типа. Распределенным аналогом весовой функции в данной задаче является функция Римана, моменты которой могут быть построены по заданным плотностям вероятности параметров

системы.

3. Приведены два примера, иллюстрирующие целесообразность применения метода канонических разложений. В первом примере рассматривается прохождение случайного сигнала через систему, описываемую уравнением с частными производными I порядка, процедура решения которого в детерминированном случае достаточно разработана. Уравнение процесса в системе имеет вид:

$$a(t,x)\frac{\partial u(t,x)}{\partial t}+b(t,x)\frac{\partial u(t,x)}{\partial x}+c(t,x)u(t,x)=f(t,x) \tag{6}$$

где $a(t,x)$, $b(t,x)$, $c(t,x)$ – неслучайные коэффициенты, а возмущение $f(t,x)$ может быть представлено в виде:

$$f(t,x)=\rho_1(t,x)F(t)+\rho_2(t,x). \tag{7}$$

В выражении (7) $\rho_1(t,x)$ и $\rho_2(t,x)$ являются неслучайными зависимостями, а $F(t)$ – случайным процессом, заданным каноническим разложением с математическим ожиданием $m_F(t)$ и координатными функциями $F_\nu(t)$, ν = I, 2, 3, ...

Очевидно, что $f(t,x)$, входящее в (6), можно также представить каноническим разложением, полагая математическое ожидание равным $\rho_1(t,x)m_F(t)+\rho_2(t,x)$, а координатные функции равными $\rho_1(t,x)F_\nu(t)$.

Преобразовывая математическое ожидание и координатные функции возмущения $f(t,x)$ в соответствии с уравнением (6), получаем каноническое разложение выходного сигнала.

Во втором примере метод канонических разложений используется для приближенного отыскания вероятностных характеристик при дискретизации по пространственной координате.

П. ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДОВ ВЕРОЯТНОСТНОГО АНАЛИЗА ПРИ ИССЛЕДОВАНИИ ВРАЩАЮЩЕЙСЯ ТРУБЧАТОЙ ПЕЧИ ДЛЯ ОБЖИГА РТУТНОЙ РУДЫ

Типичным примером объекта с распределенными параметрами является вращающаяся трубчатая печь для обжига ртутной руды. Выходные переменные этого объекта – концентрация ртути в руде, температура газов, руды и футеровки – изменяются по длине печи.

Возможны различные пути построения математической модели процесса. Можно, например, представить динамические свойства печи последовательным соединением звена запаздывания и инерционных звеньев, рассчитывая их параметры по экспериментальным кривым разгона. Но в рамках этого подхода трудно установить, какую роль играют в динамике процесса флуктуации теплофизических констант (теплоемкости, теплопроводности руды, состава топлива). Связь этих констант со значениями запаздывания и постоянной времени не поддается аналитическому исследованию. Поэтому значительно легче получить сведения о влиянии нестабильности параметров объекта, представив его динамику распределенной моделью. В этой модели физические константы процесса входят непосредственно в выражения коэффициентов дифференциального уравнения.

Другим соображением, оправдывающим применение распределенной модели процесса, является то, что эта модель представляет возможность судить о свойствах выходных сигналов в точках, недоступных измерению. При изучении вращающейся печи это соображение особенно существенно, т.к. даже простейшие измерения температуры руды вдоль печи требуют введения конструктивно громоздких устройств.

Для того чтобы применить описанные выше методы вероятностного анализа, потребовалось составление распределенной модели процесса. Тепловые процессы, происходящие в печи для обжига ртутной руды, сходны с процессами обжига цементного клинкера. Поэтому математическая модель, предложенная для цементной вращающейся печи Э.Л.Ицковичем, при несущественных изменениях легко переносится на ртутные обжиговые печи. В этой модели процесс обжига описывается весьма сложной нелинейной системой восьми уравнений II порядка с частными производными. Несмотря на то что аналитическое решение этой системы уравнений невозможно, такая модель полезна, т.к. позволяет при упрощающих допущениях получить различные более простые модели.

В данной работе такие упрощения относились к тому, что рассматривался только процесс теплообмена без учета явлений массопереноса. Кроме того, считалось, что передача тепла осуществляется только за счет конвекции и лучеиспускания, а эффект теплопроводности мал. При этих допущениях значения температур руды Тр, газов Тг и футеровки Тф можно получить при решении следующей системы уравнений:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial T_{\text{г}}}{\partial t} + W_{\text{г}} \dfrac{\partial T_{\text{г}}}{\partial z} = \varkappa_1 (T_{\text{ф}} - T_{\text{г}}) + \varkappa_2 (T_{\text{р}} - T_{\text{г}}) + \dfrac{1}{C_{\text{г}}^{p} \gamma_{\text{г}}} \sum\limits_{i=1}^{m} q_i n_i C_i(t) e^{-\frac{n_i}{W_{\text{г}}}(\ell - z)} \\ \dfrac{\partial T_{\text{р}}}{\partial t} + W_{\text{р}} \dfrac{\partial T_{\text{р}}}{\partial z} = \varkappa_3 (T_{\text{ф}} - T_{\text{р}}) + \varkappa_4 (T_{\text{г}} - T_{\text{р}}); \\ \dfrac{\partial T_{\text{ф}}}{\partial t} = \varkappa_5 (T_{\text{г}} - T_{\text{ф}}) + \varkappa_6 (T_{\text{р}} - T_{\text{ф}}). \end{cases} \tag{8}$$

Здесь $\varkappa_1, \dots, \varkappa_6$ – коэффициенты, характеризующие теплопередачу между рудой, газом и футеровкой; $W_{\text{г}}, W_{\text{р}}$ – соответственно скорости газов и руды вдоль оси z, $(0 \leq z \leq \ell)$, направленной вдоль оси вращения печи; $C_{\text{г}}^{p}, \gamma_{\text{г}}$ – соответственно теплоемкость газа при постоянном давлении и удельный вес газа; q_i, n_i – теплота реакции горения и число молей i-го компонента $(i = 1, \dots, m)$ мазута в единице объема газа.

$C_i(t)$ определяются из граничных условий, задающих концентрацию каждого компонента мазута в точке $z = \ell$.

Иногда можно оправдать применение еще более простой модели, если считать, что из-за большой скорости $W_{\text{г}}$ газы не успевают заметно охладиться при движении вдоль оси z Тогда вместо (8) можно рассмотреть единственное уравнение:

$$\frac{\partial T_{\text{р}}}{\partial t} + W_{\text{р}} \frac{\partial T_{\text{р}}}{\partial z} + \varkappa (T_{\text{р}} - T_{\text{г}}) = 0. \tag{9}$$

Из этого уравнения можно получить выражения для весовых функций объекта по различным каналам. Так, весовая функция, соответствующая изменению расхода руды, значение которого входит в выражение для коэффициента $\varkappa$, равна

$$G_{\text{т}}(t - \tau, z) = T_{\text{г}} \exp\left\{ -\frac{\varkappa_0 z}{W_{\text{р}}} \right\} G_1(t - \tau), \tag{10}$$

где $\varkappa_0$ – значение коэффициента теплопередачи $\varkappa$ до нанесения возмущения по расходу руды;

$$G_1(t - \tau) = \begin{cases} 1, & z/W_{\text{р}} \leq t \leq 2z/W_{\text{р}}; \\ 0, & t > 2z/W_{\text{р}}, \ t < z/W_{\text{р}} \end{cases}$$

В рамках простейшей математической модели (9) можно получить выражения, определяющие математическое ожидание и дисперсию температуры руды. В предположении, что на границу объекта поступает аддитивное возмущение по расходу руды и что параметр χ_0 является случайной величиной, имеющей математическое ожидание M_{χ_0}, дисперсию $\gamma^2/3$ и распределенной равномерно, получены следующие выражения для математического ожидания $M_T(z)$ приращения температуры руды:

$$M_T(z) = \frac{M_\chi T_r \exp\left\{-\frac{M_{\chi_0} z}{W_p}\right\}}{W_p} \cdot \left[\frac{W_p}{z} \cdot \frac{e^{\frac{\gamma z}{W_p}} - e^{-\frac{\gamma z}{W_p}}}{2\gamma} \right] \qquad (II)$$

Здесь M_χ - математическое ожидание аддитивного возмущения, приложенного к границе объекта.

В выражении (II) первый сомножитель определяется действием граничного воздействия, а второй сомножитель является поправкой, учитывающей влияние нестабильности параметра χ_0.

Дисперсия температуры руды $D_T(z)$ определяется выражением:

$$D_T(z) = A' T_r^2 \exp\left\{-\frac{2M_{\chi_0} z}{W_p}\right\} \left[\frac{2z}{\alpha W_p} - \frac{2}{\alpha^2} \left(1 - e^{-\frac{\alpha z}{W_p}}\right)\right] \times$$
$$\times \frac{W_p}{4z} \cdot \frac{e^{2\gamma z/W_p} - e^{-2\gamma z/W_p}}{\gamma} + M_{\chi^2} T_r^2 \exp\left\{-\frac{2M_{\chi_0} z}{W_p}\right\} \times$$
$$\times \left\{ \frac{z\left(\exp\left\{\frac{2\gamma z}{W_p}\right\} \exp\left\{-\frac{2\gamma z}{W_p}\right\}\right.}{2\gamma W_p} - \frac{\left(e^{\frac{\gamma z}{W_p}} - e^{-\frac{\gamma z}{W_p}}\right)^2}{\gamma^2} \right\} \qquad (I2)$$

Последнее выражение соответствует случаю, когда граничное возмущение имеет корреляционную функцию вида $A' \exp\{-\alpha|t-\tau|\}$.

Рассмотрен также случай, когда параметр χ_0 имеет распределение, близкое к гауссовому.

По формулам (II) и (I2) проведен численный расчет и построены графики зависимости математического ожидания и дисперсии температуры руды для различных значений дисперсии параметра χ_0.

Выше уже отмечено, что при управлении объектами с распределенными параметрами в ряде работ предлагается использовать распределенный контроль. В данной работе исследовалась задача сравнения помехоустойчивости двух схем регулирования температурного режима печи. В первой схеме использовалась информация только об одном значении температуры руды в точке $z = \ell$. Во второй выходом объекта считалось среднее значение интеграла по пространственной координате:

$$T_s(t) = \frac{1}{\ell} \int_0^\ell T_p(t, z)\, dz \qquad (I3)$$

Дисперсия температуры руды в точке $z = \ell$ сравнивалась в этих двух схемах следующим образом: с помощью математической модели (9) вычислялись модули амплитудно-фазовых характеристик двух систем в предположении, что регуляторы в обеих схемах имеют одни и те же настройки. Сравнивая эти выражения, можно заметить, что дисперсия температуры руды в схеме с распределенным контролем ниже, чем в схеме, использующей сведения о температуре руды в единственной точке. Таким образом, в ряде случаев введение распределенного контроля приводит к улучшению помехоустойчивости системы управления.

Ш. НЕКОТОРЫЕ ВОПРОСЫ СИНТЕЗА ОПТИМАЛЬНЫХ СИСТЕМ С РАСПРЕДЕЛЕННЫМИ ПАРАМЕТРАМИ

Рассмотрим две задачи.

I. Для системы с заданным распределенным элементом, находящимся под воздействием приложенных в конечном числе точек $x_1, \ldots, x_m$ возмущений, строятся выражения, определяющие элементы матрицы весовых функций корректирующего устройства системы фильтрации

$$\begin{Vmatrix} g_{11}^* & \cdots & g_{1m}^* \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ g_{m1}^* & \cdots & g_{mm}^* \end{Vmatrix} \qquad (I3)$$

На вход элементов (I3) поступают сигналы $X_i(t)$, $i = 1, \ldots, m$ представляющие собой смесь полезных сигналов $U_i(t)$ и помех $V_i(t)$ с известными корреляционными функциями. Задан критерий оптимальности

$$J = M\left\{\left[U_k(t) - U_k^*(t)\right]^2\right\} = \min, \qquad (I4)$$

в котором $U_k(t)$ является выходом распределенного элемента в точке $x = x_k$, а $U_k^*(t)$ есть заданное преобразование системой полезных сигналов $U_i(t)$, $i = 1, \ldots, m$. Тогда значения элементов матрицы (I3), оптимальные по критерию (I4), находятся при решении системы уравнений

$$\sum_{j,i=1}^{m} \int_0^\infty g_{ji}^*(t-\tau_1)\, N_{si}^{\tau j}(\tau, \tau_1)\, d\tau_1 + Q_s^{\tau}(t, \tau) = 0,$$
$$s, \tau = 1, 2, \ldots, m. \qquad (I5)$$

Выражения $N_{gi}^{\gamma j}$ и $Q_g^{\, z}$ определяются весовыми функциями заданного распределенного элемента и корреляционными функциями процессов $X_i(t)$ и $U_k^*(t)$.

Так как весовая функция распределенного элемента имеет весьма своеобразный вид (содержит ряды, функции Бесселя и др.), то точные методы решения (I5) в частотной области не могут быть применены. Для приближенного нахождения передаточной функции корректирующего устройства в работе применяется аппроксимация трансцендентной передаточной функции распределенного элемента дробно-рациональным рядом.

2. Метод динамического программирования используется для нахождения оптимальных управлений для объектов, описываемых конечно-разностными уравнениями. Последние получаются при применении метода сеток для приближенного исследования объекта, описываемого системой уравнений гиперболического типа. Выход объекта рассматривается при этом в дискретных точках $x=kh,\ k=1,\dots,N,$ и в дискретные моменты времени $t=j\tau,\ j=1,2,\dots,M,$ при шагах дискретизации по пространственной и временной координате h и τ соответственно.

Система n уравнений процесса в объекте имеет вид

$$U_{k+1,j+1}^{i}=f_i\left(k,h,U_{k+1,j}^{\prime},\dots,U_{k+1,j}^{n},U_{k,j+1}^{\prime},\dots,U_{kj+1}^{n},U_{kj}^{\prime},\dots,U_{kj}^{n},V_{kj}\right) \qquad (I6)$$

с дополнительными условиями

$$U_{k0}^{j}=\varphi_k^{j};\quad U_{0j}^{i}=\psi_j^{i};\ k=1,2,\dots,N;\quad j=1,2,\dots,M;$$
$$i=1,2,\dots,n. \qquad (I7)$$

Здесь V_{kj} есть управляющее воздействие. Требуется найти V_{kj}, минимизирующие критерий

$$J[\varphi_k,\psi_j]=\sum_{k=0}^{N-1}\sum_{j=0}^{M-1}G_i^*\left(U_{k+1,j+1}^{i};V_{kj}\right). \qquad (I8)$$

Пусть под действием управления V_{kj} система (I6) перемещается из начального состояния (I7) в конечное, вообще говоря, не заданное состояние U_{NM}. Рассмотрим какое-либо промежуточное состояние системы в узлах, для которых соблюдается правило номеров: при уменьшении номера k (или j) номер j (или k) должен увеличиваться или оставаться постоянным. Эти узлы разбивают сеточную область $x=kh,\ t=j\tau,\ k=1,\dots,N,\ \ j=1,\dots,M$ на два участка I и П. Значения оптимальных по критерию (I8) управлений внутри второго участка сеточной области определяются только значениями выходной переменной в узлах, разделяющих I и П участок, и не зависят от того, каким образом достигнуты значения выходной переменной в этих узлах.

Используя это утверждение, можно находить оптимальные управления V_{kj} для процесса (I6) методом динамического программирования при "попятном" движении от конечного состояния U_{NM} к начальному U_{00}.

Здесь возможен определенный произвол в выборе маршрута "попятного" движения. В допустимых маршрутах каждый "попятный" шаг разбивает сеточную область так, что для граничных узлов соблюдается правило номеров. Те маршруты, в которых это правило не соблюдается, являются запретными.

Для конкретного маршрута "попятного" движения в работе приведены рекуррентные формулы, определяющие оптимальные управления V_{kj}.

Метод динамического программирования позволяет находить оптимальные управления и тогда, когда они могут быть приложены лишь к границе объекта $x=0$ или когда поведение системы зависит от вектора случайных параметров.

IУ. ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДА СТОХАСТИЧЕСКОЙ АППРОКСИМАЦИИ В ЗАДАЧАХ УПРАВЛЕНИЯ ИНЕРЦИОННЫМИ ОБЪЕКТАМИ

Известно, что регуляторы, реализующие стандартные линейные законы регулирования (интегральный, пропорционально-интегральный), часто могут быть успешно применены в промышленных системах управления распределенными объектами. Поэтому наряду с необходимостью разрабатывать строгие методы синтеза оптимальных распределенных систем целесообразны и постановки задач, связанные со стремлением придать этим линейным законам регулирования новые полезные качества.

Здесь исследуются задачи стабилизации выходных сигналов инерционного объекта, описываемого обыкновенным дифференциальным уравнением первого порядка. Известно, что метод стохастической аппроксимации позволяет построить систему стабилизации безынерционного объекта, в которой обеспечивается асимптотическая сходимость процесса к задающему воздействию.

При применении метода стохастической аппроксимации к задаче стабилизации инерционного объекта возможны два подхода. Во-первых, можно исследовать, сохраняется ли свойство асимптотической сходимости в системе, использующей тот же закон управления, что и для безынерционного объекта. При этом подходе в системе стабилизации используется интегральный регулятор с переменным коэффициентом, и уравнение процесса имеет вид:

$$T\frac{d^2u(\omega,t)}{dt^2}+\frac{du(\omega,t)}{dt}+ka(t)u(\omega,t)=-h(\omega,t)a(t) \tag{I9}$$

Здесь $a(t)=\begin{cases}A, & t<1;\\ A/t, & t\geq 1\end{cases}$

A - произвольная постоянная;

$u(\omega,t)$ - выход инерционного объекта, имеющего постоянную времени Т и коэффициент усиления К;

$h(\omega,t)$ - случайное воздействие, приложенное на выходе объекта;

ω - произвольный элемент в пространстве элементарных событий.

В более общем случае сигнал $u(\omega,t)$ может проходить через нелинейный элемент со статической характеристикой $\tau(u)$, при этом процесс описывается следующим уравнением:

$$T\frac{d^2u(\omega,t)}{dt^2}+\frac{du(\omega,t)}{dt}+\tau(u(\omega,t))a(t)=-a(t)h(\omega,t). \tag{20}$$

Во-вторых, можно изменить закон управления с тем, чтобы уравнение процесса стабилизации инерционного объекта совпало с уравнением процесса для безынерционного объекта. При этом подходе метод стохастической аппроксимации приводит к системе, использующей пропорционально-интегральный регулятор с переменным коэффициентом, и уравнение процесса имеет вид:

$$T\frac{du(\omega,t)}{dt}+\left[1+kT_1a(t)\right]u(\omega,t)+\int_0^t ka(\tau)u(\omega,\tau)d\tau=$$

$$=-kT_1a(t)h(\omega,t)-\int_0^t ka(\tau)h(\omega,\tau)d\tau. \tag{2I}$$

Если коэффициент усиления пропорциональной части регулятора T_1 точно равен постоянной времени объекта Т, то (2I) сводится к уравнению, описывающему процесс стабилизации для безынерционного объекта.

При обоих подходах законы управления напоминают серийные и отличаются от них введением переменного коэффициента $a(t)$. Введение переменного коэффициента придает законам регулирования (I9) и (2I) новое свойство - обеспечение асимптотической сходимости процесса к заданию независимо от того, располагаем ли мы сведениями о параметрах объекта и о законе распределения помех в цепи обратной связи.

В работе доказывается асимптотическая сходимость с вероятностью I процесса, описываемого уравнением (20), к нулевому задающему воздействию. В добавление к известным условиям асимптотической сходимости метода стохастической аппроксимации вводятся требования непрерывной дифференцируемости статической характеристики $\tau(u)$ и непрерывности с вероятностью I первой производной помехи $h(\omega,t)$.

С целью исследования влияния параметров объекта на процесс стабилизации проведено приближенное вычисление дисперсии выходного сигнала методом, предложенным Л.Заде. В соответствии с этим методом построены нулевые и первые приближения для нестационарных передаточных функций систем, описываемых уравнениями (I9) и (2I). С помощью этих передаточных функций в предположении, что спектральная плотность помехи $h(\omega,t)$ постоянна и равна S_h получены нулевые и первые приближения дисперсии выхода $D_{вых}(t)$, равные для случая (I9) соответственно:

$$D^{\circ}_{вых}(t)=\frac{S_h kA}{2t}\left(1-\frac{T}{t}\right); \tag{22}$$

$$D^{1}_{вых}(t)\cong\frac{5S_hT}{8t^2}. \tag{23}$$

Последние выражения справедливы только при больших t. Сравнение этих выражений показывает, что асимптотическая скорость сходимости первого приближения выше, чем нулевого.

Алгоритмы (I9) и (2I) моделировались на аналоговой вычислительной машине АМУ-I; при этом исследовалось влияние параметров объекта на начальный участок процесса стабилизации.

Метод стохастической аппроксимации применен также в задаче построения систем с распределенным контролем. В ряде задач управления распределенными процессами встречается случай, когда выходной сигнал $U_{вых}(t,\ell)$ в точке $x=\ell$, характеризующий качество работы объекта, не может быть измерен непрерывно (например, содержание ртути в обожженной руде во вращающейся печи измеряется в результате химических анализов). В системе управления используются промежуточные переменные $u_i(t,x_i)$ в точках $x=x_i$, $i=1,2,\dots,n$, имеющие статистическую связь с выходом $U_{вых}(t,\ell)$ (в примере с вращающейся печью этими промежуточными переменными могут служить значения температуры руды, измеренные в ряде точек). Для случая, когда в качестве косвенного показателя используется значение сигнала распределенного контроля промежуточной переменной

$$\tilde{u}(t)=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}k_i u_i(t,x_i), \qquad (24)$$

ставится задача нахождения таких значений коэффициентов k_i, $i=1,\dots,n$, при котором сигнал $\tilde{u}(t)$ служит наилучшим средним квадратическим приближением сигнала $U_{вых}(t,\ell)$. При этом минимизируется критерий:

$$J=M\left\{\left[U_{вых}(t,\ell)-\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}k_i u_i(t,x_i)\right]^2\right\}=min. \qquad (25)$$

Асимптотически-оптимальные значения коэффициентов распределенного контроля могут быть найдены методом стохастической аппроксимации. Значения коэффициентов на $s+1$ -м шаге находятся из следующих рекуррентных соотношений:

$$k_i^{(s+1)}=k_i^{(s)}+\frac{A}{s}\left\{U_{вых}(t_s,\ell)-\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}k_j^{(s)}u_j(x_j,t_s)\right\}u_i(t_s,x_i),$$

$$s=1,2,\dots$$

$$i,j=1,2,\dots,n. \qquad (26)$$

В заключение перечислим основные результаты работы:

I. Предложен метод вероятностного анализа распределенных систем, с помощью которого можно определить моменты выходных сигналов объектов и систем с распределенными параметрами по заданным вероятностным характеристикам случайных воздействий (распределенных в пространстве или приложенных к границе объекта) и случайных параметров системы.

2. Построены выражения, определяющие вероятностные характеристики выходных сигналов в системах со случайными параметрами, описываемых уравнениями параболического и гиперболического типа.

3. Метод вероятностного анализа применен при исследовании влияния параметрических и аддитивных помех на работу вращающейся трубчатой печи для обжига ртутной руды.

4. На примере построения системы автоматического регулирования температурного режима вращающейся трубчатой печи обсуждается возможность снижения дисперсии выходной переменной за счет введения интегрального контроля.

5. Получены уравнения, определяющие оптимальный по критерию минимума средней квадратической ошибки оператор системы фильтрации, заданная часть которой является распределенной и находится под воздействием сосредоточенных возмущений.

6. Рассмотрено применение метода динамического программирования в задаче нахождения оптимальных управлений для объектов, описываемых уравнениями гиперболического типа.

7. Исследовано применение метода стохастической аппроксимации в задаче стабилизации выходных сигналов распределенных объектов.

8. Метод стохастической аппроксимации применен для нахождения асимптотически-оптимальных значений весовых коэффициентов распределенного контроля.

Изложенный в работе материал может оказаться полезным при исследовании и проектировании систем автоматизации промышленных объектов с распределенными параметрами.

Результаты работы докладывались на VI Всесоюзной конференции по автоматическому контролю и методам электрических измерений (Новосибирск, 1964 г.), III Всесоюзном совещании по автоматическому управлению (технической кибернетике) (Одесса, 1965 г.), I Всесоюзном симпозиуме по статистическим проблемам в технической кибернетике (Москва, 1967 г.) и на научных конференциях в Институте автоматики Киргизской ССР в 1964, 1965 и 1967 гг. Основное содержание диссертационной работы отражено в статьях:

1. Бусаргин В.М., Крушель Е.Г., Топчиев В.Н. Математическое описание процессов, происходящих во вращающейся печи при обжиге ртутных руд. В сб."Автоматизация процессов производства цветных металлов". Изд-во ИЛИМ, г.Фрунзе, 1964.
2. Егоров А.И., Крушель Е.Г. Динамическое программирование в оптимальном управлении распределенными объектами. Известия Академии наук Киргизской ССР, № 2, 1968.

3. Крушель Е.Г. Способ определения вероятностных характеристик распределенной системы со случайными параметрами. "Автоматика и телемеханика", т.XXIII, № 6, 1965.
4. Крушель Е.Г. Приближенный метод вероятностного анализа системы с распределенными параметрами. Труды VI Конференции по автоматическому контролю и методам электрических измерений, т.I, изд-во "Наука", Новосибирск, 1966.
5. Крушель Е.Г. Вероятностный анализ распределенных систем. Реферат доклада на I Всесоюзном симпозиуме по статистическим проблемам в технической кибернетике, кн.I, М., 1967.
6. Крушель Е.Г. Математическая модель вращающейся печи и ее использование при анализе помехоустойчивости системы управления. В сб."Принципы построения автоматических систем с неполной информацией", изд-во ИЛИМ, г.Фрунзе, 1967.
7. Крушель Е.Г. О синтезе оптимальной распределенной системы, находящейся под воздействием сосредоточенных возмущений. В сб. "Элементы теории и техники автоматического управления", изд-во ИЛИМ, г.Фрунзе, 1966.
8. Крушель Е.Г. О статистическом подходе к задаче синтеза оптимальной системы управления объектом с распределенными параметрами. В сб."Оптимальные системы". Тр.III Всесоюзного совещания по автоматическому управлению (технической кибернетике), изд."Наука", М., 1967.

Т-01645 от 24/I-1968г. Заказ 23. Тираж 120 экз.

Москва, ИАТ(ТК), Каланчевская, 15 а