МИНИСТЕРСТВО ПРИБОРОСТРОЕНИЯ, СРЕДСТВ АВТОМАТИЗАЦИИ И СИСТЕМ УПРАВЛЕНИЯ СССР

АКАДЕМИЯ НАУК СССР

Институт автоматики и телемеханики (технической кибернетики)

Е.П.ПЕТРУШИНИН

ОПТИМАЛЬНОЕ УПРАВЛЕНИЕ РЕСУРСАМИ МЕТОДАМИ НЕЛИНЕЙНОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ

Автореферат

диссертации на соискание ученой степени кандидата технических наук.

Научный руководитель
доктор технических наук,
профессор А.А.Воронов.

Москва 1967 г.

МИНИСТЕРСТВО ПРИБОРОСТРОЕНИЯ, СРЕДСТВ АВТОМАТИЗАЦИИ И СИСТЕМ УПРАВЛЕНИЯ СССР

АКАДЕМИЯ НАУК СССР

Институт автоматики и телемеханики (технической кибернетики)

Е.П.ПЕТРУШИНИН

ОПТИМАЛЬНОЕ УПРАВЛЕНИЕ РЕСУРСАМИ МЕТОДАМИ НЕЛИНЕЙНОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ

Автореферат

диссертации на соискание ученой степени кандидата технических наук.

Научный руководитель
доктор технических наук,
профессор А.А.Воронов.

Москва 1967 г.

А 25

Работа выполнена в Институте автоматики и телемеханики (технической кибернетики).

Ученый совет Института автоматики и телемеханики (технической кибернетики) направляет Вам для ознакомления автореферат диссертации, представляемой на соискание ученой степени кандидата технических наук. Ориентировочная дата защиты - июнь 1967 года.

Просим прислать Ваш отзыв по данной работе и принять участие в обсуждении её на защите. Наш адрес: Москва Б-53, ул.Каланчевская 15-а.
Тел. Б-3-95-00.

Ученый секретарь Совета
кандидат технических наук -

(БОЯРЧЕНКОВ М.А.)

В конце 50-х годов возник, а затем получил бурное развитие новый подход к проблеме организации и управления, основанный на сетевом представлении плана выполнения проекта.
Автоматизированные системы сетевого планирования и управления, известные как " Pert , CPM" и др. - за рубежом и СПУ - в Советском Союзе, играют в настоящее время все большую роль в планировании сложных разработок и в управлении их реализацией.
Интенсивное развитие систем СПУ тесно связано с экономической реформой, проводимой сейчас в нашей стране.

Автоматизация процесса управления сложными разработками состоит, как известно, из 2-х этапов:

1) представление плана выполнения проекта в виде сети и составление плана, оптимального по времени, стоимости или другим производственным показателям;

2) оперативное управление разработкой на основании поступающей информации о ходе реализации плана.

Данная работа посвящена, в основном, решению задач управления, стоящих на первом этапе, а именно, задач управления ресурсами с целью получения плана, удовлетворяющего выбранному критерию оптимальности. Эти задачи известны также как задачи оптимального распределения ресурсов.

Методы решения упомянутых задач, применяемые в настоящее время являются, в основном, эвристическими. Развитию эвристических методов посвящена, в частности, диссертация В.Н.Буркова.

Весьма актуальным следует также признать разработку и применение точных методов при решении оптимальных задач в сетевых системах. В данной работе рассматриваются модели оптимального распределения ресурсов, использующие точные методы решения, в частности, аппарат нелинейного программирования.

Глава 1. Оптимизация распределения ресурсов в системах сетевого планирования.

Данная глава состоит из 2-х разделов: введения и основной части.

Во введении даны основные понятия и определения, связанные с общими характеристиками работ как: длительностью их выполнения, стоимостью, трудоёмкостью и интенсивностью потребления ресурса.

Основная часть главы отведена обзору современного состояния проблем оптимизации управления ресурсами в системах сетевого планирования.

Можно назвать две основные проблемы управления ресурсами: одна заключается в выравнивании потребности в ресурсах с сохранением общего времени выполнения проекта, другая - в минимизации времени выполнения проекта с сохранением имеющихся в распоряжении ресурсов.

После составления сетевого плана выполнения проекта, вычисления основных временных характеристик и определения критического пути может быть составлена линейная диаграмма проекта, которая позволяет проверить план в отношении использования ресурсов.

1. Задача минимизации времени выполнения проекта. Данная задача появляется тогда, когда существующий набор ресурсов не может быть превышен и цель состоит

в таком планировании работ, чтобы общая длительность проекта была минимальной.

Если планируемое время выполнения проекта составляет " n " единиц времени с использованием " к" видов ресурсов, можно составить матрицу Ro ($k \times n$) потребности в ресурсах в течение времени выполнения проекта. Элементами матрицы являются суммарные интенсивности $\sum y_{ij}^{(s)}(t)$ [t = 1,2,......, n] потребления ресурса s-го вида (s = 1,2,.... , к) в данную единицу времени [i - номер предшествующего события (начало работы), j - номер последующего события (конец работы)].

Будем считать, что интенсивность потребления ресурсов в течение времени выполнения каждой работы неизменна.

Матрице Ro соответствует матрица R_1, фактического наличия ресурсов в организации, ведущей проект. Элементами P_1, служат величины $A^{(s)}(t)$ (t = 1,2....., n; s = 1,2,...., к).

Если выполняется соотношение:

$$\sum y_{ij}^{(s)}(t) \le A^{(s)}(t), \qquad (1)$$

$$[\, t = 1,2,\ldots\ldots, n; \quad s = 1,2,\ldots\ldots, к \,]$$

то проект может быть выполнен в планируемое время Т кр. Если ограничение (1) нарушается, необходимо найти такое размещение работ (с учетом заданной технологической последовательностью), которое удовлетворяло бы (1) и обеспечивало выполнение проекта в минимальное время. Отметим, что по существу данная задача является задачей такого размещения работ при ограниченных ресурсах, при котором задержка во времени выполнения проекта, по отношению к заданному Ткр, была бы минимальной.

Эвристические алгоритмы (Грей, Кидд, Модер) решения этой задачи, использующие линейные диаграммы сетевого проекта, сводятся к применению набора интуитивных правил размещения работ, если в какой-то интервал времени выполнения проекта нарушается условие (1). Эти правила гарантируют изменение начального плана в первую очередь за счёт менее напряженных путей и работ.

Получаемые с помощью эвристических алгоритмов решения не являются, вообще говоря, оптимальными, хотя и могут служить хорошим приближением к искомому минимуму.

Известны также попытки формализации рассматриваемой задачи. Здесь следует отметить линейную модель, предложенную С.И.Зуховицким и И.А.Радчик. Эта модель использует идею сведения задачи оптимального (по времени) распределения ресурсов к задаче отыскания продолжительностей фронтов. Для учёта последовательности выполнения работ, принадлежащих одному и тому же пути, потребовалось введение дополнительного требования упорядоченности событий в сети. К недостаткам модели следует отнести и большой объём выполнений. Данный недостаток присущ, однако, и другим методам, в том числе и эвристическим, использующим аппарат линейных диаграмм.

2. Задача оптимального выравнивания ресурсов в сети. Если задача минимизации времени возникает, когда существующий набор ресурсов не может быть превышен, то проблема выравнивания потребления ресурсов появляется при наличии достаточного количества ресурсов, но хотелось бы использовать эти ресурсы с относительно постоянной скоростью в течение всего проекта. Реализация этого типа планирования включает разнообразные пути, от беглой визуальной проверки, используя сетевой проект, до использования машинных программ с целью планирования согласно определенным критериям.

Таким образом, требуется так разместить работы в сети, чтобы потребление ресурса в проекте было наиболее равноверным в течение времени T.

Если мерой неравномерности потребления ресурса считать его наибольшее ежедневное потребление, то наша задача состоит в нахождении минимума следующей функции:

$$J = \max_{t \in (0,T)} \sum y_{ij}(t) \qquad (2)$$

(с учётом соответствующих ограничений).

Если мерой неравномерности принять среднеквадратичное отклонение потребляемого в момент t ресурса $\sum y_{ij}(t)$ от его среднего ежедневного потребления $\overline{\sum y_{ij}}$ то задача состоит в минимизации функции:

$$\Pi = \int_0^T \left[\sum y_{ij}(t)\right]^2 dt \qquad (3)$$

Эвристические алгоритмы минимизации функций (2),(3) аналогичны, в основном, алгоритмам, применяемым в задаче минимизации времени выполнения проекта.

Интересно отметить, что в одном из эвристических алгоритмов для определения работ, подлежащих сдвигу, применен вероятностный аппарат. Случайный характер сдвигов даёт возможность определить "локацию" работ в сети, близкую к оптимальной.

В ряде работ отмечается, что использование квадратичного критерия (3) позволяет систематизировать общую процедуру выравнивания функции распределения ресурсов. Для задач оптимального выравнивания ресурсов по критериям (2), (3) разработаны линейные модели (С.И.Зуховицкий, И.А.Радчик), в которых задача оптимального выравнивания сводится к задаче отыскания продолжительности фронтов.

Одним из интересных направлений в изучении и решении проблем оптимизации в сетевых системах является физическое моделирование оптимальных задач. Известен, например, механический аналог метода Фалкерсона минимизации времени проекта при минимальном увеличении расходов.

Для одной задачи оптимального распределения ресурсов Б.С.Разумихиным предложена гидростатическая модель, состояние равновесия которой даёт решение задачи. Изучение экстремальных свойств этой модели позволило разработать и соответствующий метод последовательных приближений. Вообще, любой метод, решающий проблему распределения ресурсов, может быть отнесен к определенной категории, соответственно его алгоритмической и эвристической мощности, понимая под первой способность строго определить и точно решить задачу, под второй - способность быстро получить допустимые решения. Линейные программы, например, обладая хорошей алгоритмической мощностью, имеют в то же время плохую эвристическую мощность.

При решении некоторых задач оптимизации распределения ресурсов эффективность точных методов может быть существенно увеличена путем применения аппарата нелинейного программирования.

Глава П. Задача оптимального распределения ресурсов и её решение методом квадратичного программирования.

Среди задач распределения ресурсов весьма актуальной является задача оптимального выравнивания ресурсов в течение времени выполнения проекта.

Вопрос о том, как используются ресурсы, имеющиеся в организации, ведущей проект, всегда привлекает к себе внимание специалистов.

Действительно, если полученное решение задачи оптимально в смысле равномерного использования имеющихся ресурсов, то такое решение оптимально и в смысле нахождения минимального количества ресурсов, необходимых для выполнения заданного комплекса работ в заданное время.

Глава П посвящена задаче оптимального выравнивания по критерию минимума среднеквадратичного уклонения функции распределения ресурсов от постоянной. Исследуется сеть, в которой времена наступления событий фиксированы, а длительность t_{ij} работы u_{ij} определяется равенством:

$$t_{ij} = t_j - t_i ; \qquad (4)$$

где t_i - момент времени наступления предшествующего события;

t_j - момент времени наступления последующего события.

Показано, что в такой сети длина любого пути, заключенного между начальным и конечным событиями, равна времени выполнения проекта Т.

Задача оптимального выравнивания заключается в минимизации функционала:

$$\Pi^{(k)} = \sum_{\alpha=0}^{n-1} (t_{\alpha+1} - t_\alpha) \Big[\sum_{u_{ij} \in P_k} y_{ij}^{(k)} (t_\alpha + 0) \Big]^2 \qquad (5)$$

$$k = 1, 2, \ldots, S,$$

при ограничениях:

$$y_{ij}^{(к)}(t_\alpha+0)\begin{cases}\equiv 0, & \text{при } t_\alpha<t_i\\ \geq 0, & \text{при } t_i\leq t_\alpha\leq t_j\\ \equiv 0, & \text{при } t_\alpha>t_j\end{cases} \qquad (6)$$

$$\sum_{\alpha=i}^{j-1}(t_{\alpha+1}-t_\alpha)\,y_{ij}^{(к)}(t_\alpha+0)=Q_{ij}^{(к)} \qquad (7)$$

$к = 1,2,\ldots,S$; $i,j = 0, 1, 2, \ldots n$;

Остановимся на некоторых особенностях задачи.

В соответствии с (6) функции $y_{ij}^{(к)}(t)$ (интенсивность потребления ресурса К $\frac{го}{}$ вида на работе u_{ij} в момент времени t) являются ступенчатыми и могут быть отличны от О лишь в интервале (t_i, t_j).

Как правило, при построении начального распределения каждая функция $y_{ij}^{(к)}(t)$ предполагается равномерной. Если за время выполнения ($t_j - t_i$) работы u_{ij} происходят начала или завершения других работ в моменты $t_{i+1}, t_{i+2}, \ldots, t_{i+k}$, причем $t_i<t_{i+1}<\ldots t_j$ то распределение ресурса на работе u_{ij} может стать неравномерным, изменяясь скачками в моменты t_{i+1} t_{i+2} ,...... , но оставаясь постоянным в интервалах между ними. При этом не исключена возможность обращения $y_{ij}^{(к)}(t)$ в О на любом из промежуточных интервалов.

Таким образом, данная задача является задачей распределения ресурсов подмножества $R_к$ вдоль интервала длительности каждой работы $u_{ij} \in P_к$ с целью минимизации функции (5) при выполнении условий (6), (7). Выражение (7) - тредоёмкость работы u_{ij}.

В нашей задаче моменты наступления событий предполагаются фиксированными и, следовательно, величины $t_{\alpha+1} - t_\alpha$ являются постоянными. Система (7) - набор линейных алгебраических уравнений, число которых равно числу операций проекта. Следовательно, решение задачи представляет собой неотрицательное (допусти - мое) решение системы (7), минимизирующее квадратичную функцию цели (5).

В главе рассмотрена квадратичная программа, методика её применения и дан соответствующий пример.

Глава Ш. Сравнительный анализ методов решения задачи оптимального распределения ресурсов. Влияние дополнительных ограничений.

Задача (5), (6), (7) может быть также решена методом, последовательных приближений, предложенным Б.С.Разумихиным.

Рассматривается итерация в квадратичной программе и итерация в методе последовательных приближений. Показано, что итерация в квадратичной программе всегда осуществляет последовательно- параллельное изменение переменных, в то время как итерация в методе последовательных приближений - последовательное изменение переменных задач, что оказывает существенное влияние на сходимость процесса. Приведены оценки числа итераций.

Рассмотрено также влияние на квадратичную программу следующих ограничений:

а) интенсивность потребления ресурса на некоторой операции u_{ij} задана и постоянна в течение времени её выполнения

б) задан нижний предел α_j интенсивности потребления ресурса на операции ;

в) заданы нижний α_j и верхний β_j пределы интенсивности потребления ресурса на операции u_{ij}.

Показано, что задача оптимального распределения ресурсов при введении любого из упомянутых ограничений вновь сводится к определенной квадратичной программе, аналогичной без учёта этих ограничений.

Следовательно, постановка задачи оптимального выравнивания ресурсов в виде задачи квадратичного программирования позволяет осуществить общий подход к решению задач с разнообразными ограничениями, встречающимися при анализе сетевых проектов.

Глава 1У. Вычислительный алгоритм метода квадратичного программирования.

Во второй главе задача оптимального распределения ресурсов рассматривалась как задача квадратичного программирования.

При решении подобных задач, а также других задач с квадратичной целевой функцией и линейными ограничениями, весьма необходимо иметь такой вычислительный аппарат (особенно при большом числе переменных), который был бы пригоден как для ручного счёта, так и для решения задач на ЭЦВМ.

В итерационном процессе рассматриваемого метода квадратичного программирования могут встретиться 2 случая, соответственно обращению в О производной от целевой функции по свободной переменной внутри или за пределами допустимой области. Для обоих возможных случаев получены правила преобразования коэффициентов симплексной таблицы и таблицы целевой функции задачи.

Приведём правила преобразований коэффициентов матрицы целевой функции.

Случай 1. Производная от целевой функции по свободной переменной обращается в О за пределами допустимой области

$$\begin{cases} B_{ih}^{(2)} = \dfrac{B_{ih}^{(1)}\beta_{kl}^{(1)2} - B_{il}^{(1)}\beta_{kl}^{(1)}\beta_{kh}^{(1)} - B_{lh}^{(1)}\beta_{kl}^{(1)}\beta_{ki}^{(1)} + B_{ll}^{(1)}\beta_{kh}^{(1)}\beta_{ki}^{(1)}}{\beta_{kl}^{(1)2}} & i \neq l;\ h \neq l \\[2ex] B_{ih}^{(2)} = \dfrac{B_{ih}^{(1)}\beta_{kl}^{(1)} - B_{il}^{(1)}\beta_{kh}^{(1)}}{\beta_{kl}^{(1)2}}; & i = l;\ h \neq l \\[2ex] B_{ih}^{(2)} = \dfrac{B_{ih}^{(1)}\beta_{kl}^{(1)} - B_{lh}^{(1)}\beta_{ki}^{(1)}}{\beta_{kl}^{(1)2}}; & i \neq l;\ h = l \\[2ex] B_{ih}^{(2)} = \dfrac{B_{ih}^{(1)}}{\beta_{kl}^{(1)2}}; & i = l;\ h = l \end{cases} \qquad (8)$$

где: $\beta_{kl}^{(1)}$ – опорный элемент симплексной таблицы

$B_{ih}^{(2)}$ – коэффициенты преобразованной матрицы.

Случай 2. Производная от целевой функции по свободной переменной обращается в О внутри допустимой области.

$$
\begin{cases}
B_{ih}^{(2)} = \dfrac{B_{ih}^{(1)} B_{ee}^{(1)2} - B_{ie}^{(1)} B_{eh}^{(1)} B_{ee}^{(1)} - B_{eh}^{(1)} B_{ee}^{(1)} B_{ei}^{(1)} + B_{ee}^{(1)} B_{eh}^{(1)} B_{ei}^{(1)}}{B_{ee}^{(1)2}} & i \neq e;\ h \neq e \\[2ex]
B_{ih}^{(2)} = \dfrac{B_{ih}^{(1)} B_{ee}^{(1)} - B_{ie}^{(1)} B_{eh}^{(1)}}{B_{ee}^{(1)2}}; & i = e;\ h \neq e \\[2ex]
B_{ih}^{(2)} = \dfrac{B_{ih}^{(1)} B_{ee}^{(1)} - B_{eh}^{(1)} B_{ei}^{(1)}}{B_{ee}^{(1)2}}; & i \neq e,\ h = e \\[2ex]
B_{ih}^{(2)} = \dfrac{B_{ih}^{(1)}}{B_{ee}^{(1)2}}; & i = e;\ h = e
\end{cases}
\qquad (9)
$$

где $B_{ee}^{(1)}$ – опорный элемент матрицы целевой функции.

Анализ результатов показал, что независимо от того, обращается производная от целевой функции по свободной переменной внутри или за пределами допустимой области, правила преобразований коэффициентов в итерациях идентичны. Следовательно, при вычислениях эти случаи можно формально не различать, что весьма полезно как при ручном счете, так и составлении машинных программ.

Вычислительный алгоритм может применяться как при решении задач оптимального распределения ресурсов, так и других задач с квадратичной целевой функцией и линейными ограничениями.

Глава У. Математическая модель некоторых задач оптимального распределения ресурсов.

Ранее была рассмотрена задача оптимального выравнивания при фиксированных временах наступления событий в сети.

Если времена наступления событий не фиксированы, задача оптимального выравнивания состоит не только в нахождении оптимальной функции распределения ресурсов вдоль интервала длительности каждой работы, но и в определении оптимальных значений времен наступления событий.

В настоящей главе рассматриваются 2 задачи: задача оптимального распределения ресурсов в случае нефиксированных времен и комплекса используемых ресурсов (общая задача выполнения проекта) и задача минимизации выполнения проекта.

Предлагаемый метод решения обеих задач состоит в последовательном применении метода квадратичного программирования и метода Лагранжа минимизации соответствующих функций цели.

1. Общая задача оптимального выравнивания ресурсов при заданном времени выполнения проекта. Задача заключается в минимизации функционала:

$$
\Pi = \sum_{k=1}^{S} \gamma_k \sum_{\alpha=0}^{n-1} (t_{\alpha+1} - t_\alpha) \Big[\sum_{u_{ij} \in P_k^\alpha} y_{ij}^{(k)} (t_{\alpha+0}) \Big]^2 \qquad (10)
$$

$$
i,j = 0, 1, \ldots, n
$$

при ограничениях:

$$
0 \leq t_i < t_j \leq t_n \qquad (11)
$$

$$y_{ij}^{(K)}(t_\alpha+0) = \begin{cases} \equiv 0, & \text{при} \\ > 0, & \text{при} \\ \equiv 0, & \text{при} \end{cases} \qquad (12)$$

$$\sum_{\alpha=i}^{j-1} (t_{\alpha+1} - t_\alpha)\, y_{ij}^{(K)}(t_\alpha+0) = Q_{ij}^{(K)} \qquad (13)$$

$$K = 1,2,\ldots,S;\ i,j = 0,1,\ldots,n$$

В ф.(10) γ_K - коэффициент ценности ресурса "$K^{\text{го}}$" вида.

Решение задачи разбиваем на 2 этапа:

а) считаем времена наступления событий фиксированными и решаем задачу о минимуме функционала:

$$\Pi^{(K)} = \gamma_K \sum_{\alpha=0}^{n-1} (t_{\alpha+1} - t_\alpha) \Big[\sum_{u_{ij}\in P_K} y_{ij}^{(K)}(t_\alpha+0)\Big]^2 \qquad (14)$$

$$K = 1,2,\ldots,S;\ i,j = 0,1,\ldots,n$$

при ограничениях (11), (12), (13).

Данную задачу решаем методом квадратичного программирования, рассмотренным в главе второй и находим систему функций $y_{ij}^{(K)}(t_\alpha+0)$ $[K = 1,2,\ldots,S;$ $i,j = 0,1,\ldots,n;$ $\alpha = 0,1,\ldots,n-1]$, минимизирующую (14). Определяем величины:

$$A_\alpha^{(K)} = (t_{\alpha+1}^{(0)} - t_\alpha^{(0)}) \sum y_{ij}^{(K)}(t_\alpha^{(0)}+0) \qquad (15)$$

$$K = 1,2,\ldots,S;\ \alpha = 0,1,\ldots,n-1$$

$$K = 1,2,\ldots,S;\quad \alpha = 0,1,\ldots,n-1.$$

Где $\sum y_{ij}^{(K)}(t_\alpha^{(0)}+0)$ - величина, получаемая в результате решения задачи с фиксированными временами.

б) Предполагаем, что величины $A_\alpha^{(K)}$ остаются неизменными при изменении t_α и, применяя метод Лагранжа, решаем задачу о минимуме функционала(10). Получаем выражение для определения оптимальных моментов времени наступления событий:

$$\tau_\alpha = \frac{T\sqrt{\sum_{K=1}^{S}\gamma_K (A_\alpha^{(K)})^2}}{\sum_{\alpha=0}^{n-1}\sqrt{\sum_{K=1}^{S}\gamma_K (A_\alpha^{(K)})^2}}; \qquad (16)$$

$$\alpha = 0,1,\ldots,n-1$$

в ф.(16) $\tau_\alpha = t_{\alpha+1} - t_\alpha$

T - заданное время выполнения проекта.

2. Задача минимизации времени выполнения проекта. Как правило, данная задача возникает в случае, когда ресурсы, предназначенные для выполнения работ, ограничены. План считается оптимальным, когда ресурсы используются полностью и наиболее равномерно в течение времени выполнения проекта. Вместе с тем, при решении задач на выравнивание при заданном времени выполнения проекта T, оптимальная функция распределения ресурсов не всегда оказывается равномерной. В таких случаях целесообразно уменьшить T за счет более полного использования ресурса. Пусть все работы в сети выполняются одним видом ресурса, коэффициент

ценности которого $\gamma_k = 1$. Будем считать, что переменные нашей задачи подчиняются ограничениям (11), (12), (13).

Кроме того, известно значение целевой функции полученное при решении задачи оптимального распределения ресурсов при фиксированных временах наступления событий:

$$П_{opt} = \sum_{\alpha=0}^{n-1} (t_{\alpha+1} - t_\alpha) \Big[\sum_{u_{ij} \in P_k} y_{ij}(t_\alpha + 0) \Big]^2 \qquad (17)$$

Задача состоит в минимизации функции:

$$T = \sum_{\alpha=0}^{n-1} \tau_\alpha \qquad (18)$$

при выполнении условий (11), (12), (13), (17).

Решение данной задачи также разбиваем на 2 этапа:

а) считаем времена наступления событий фиксированными, время выполнения проекта T заданным, (в качестве которого может быть принят некоторый директивный срок) и решаем задачу минимизации функционала (14) при ограничениях (11), (12), (13). Значение функции цели в оптимальной точке будет $П_{opt}$;

б) применяя метод Лагранжа, решаем задачу минимизации функции (18) при ограничении (17).

Оптимальные времена наступления событий в сети определяем из соотношения:

$$\tau_\alpha = \frac{A_\alpha \sum_{\alpha=0}^{n-1} A_\alpha}{П_{opt}}; \qquad (19)$$

$$\alpha = 0, 1, \ldots, n-1.$$

В результате решения данной задачи функция распределения ресурсов будет постоянной в любой момент времени выполнения проекта.

Таким образом, рассмотренные задачи оптимального распределения ресурсов отличаются лишь видом целевых функций, экстремальные значения которых определяются на втором этапе методом Лагранжа. Тем самым, осуществлен единый подход к решению различных задач оптимального распределения ресурсов.

В приложении к диссертации (глава У1) показано применение одного из разработанных алгоритмов в решении задачи оптимального распределения ресурсов при ремонте мартеновских печей.

В ы в о д ы:

В заключение дадим краткий обзор результатов, полученных в работе.

1. Рассмотрены задачи управления ресурсами в процессе построения оптимального плана выполнения сетевого проекта.

2. Задача оптимального распределения ресурсов при заданном времени выполнения проекта поставлена и решена как задача нелинейного программирования, что позволяет:

а) строго формализовать задачу,

б) получить точное решение,

в) существенно сократить итерационный процесс,

г) получать различные оптимальные планы выполнения проекта.

Использование варьируемых переменных (от которых целевая функция в оптимальной точке не зависит), открывает широкие комбинационные возможности в построении оптимальных планов распределения ресурсов. В частности, в задаче распределения ресурсов при ремонте мартеновских печей оказалось возможным получить такое оптимальное решение, в котором интенсивность потребления ресурса на работах проекта постоянна в течение времени их выполнения. Тем самым, нелинейная программа может быть использована и при решении более широкого круга задач.

3. Разработан табличный вычислительный алгоритм для метода квадратичного программирования, который может быть использован как при решении задач оптимизации распределения ресурсов, так и других экстремальных задач с квадратичной целевой функцией и линейными ограничениями. Вычислительный алгоритм запрограммирован на ЭЦВМ "Минск".

4. Общая задача оптимального распределения ресурсов при заданном времени выполнения проекта и задача минимизации времени решены методом, содержащим нелинейную программу и метод Лагранжа минимизации соответствующих целевых функций. Получены соотношения для определения оптимальных времен наступления событий сетевого проекта.

Содержание работы и отдельные результаты докладывались автором на семинарах Института автоматики и телемеханики (технической кибернетики) в 1965--1966 годах.

Основное содержание диссертации отражено в статьях:

1. Воронов А.А., Петрушинин Е.П. "Решение задачи оптимального распределения ресурсов методом квадратичного программирования", Автоматика и телемеханика, № 11, 1966 г.

2. Петрушинин Е.П. "Метод Лагранжа и задачи оптимального распределения ресурсов в системах сетевого планирования", Автоматика и телемеханика, № 12, 1966 г.