МИНИСТЕРСТВО ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ СССР

ТРУДЫ ОДЕССКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА
ГОД XXIX имени И. И. МЕЧНИКОВА ТОМ VI (59)

СБОРНИК
МАТЕМАТИЧЕСКОГО ОТДЕЛЕНИЯ ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКОГО ФАКУЛЬТЕТА

ТОМ IV

ИЗДАТЕЛЬСТВО ОДЕССКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА
ОДЕССА 1950

МІНІСТЕРСТВО ВИЩОЇ ОСВІТИ СРСР

ПРАЦІ ОДЕСЬКОГО ДЕРЖАВНОГО УНІВЕРСИТЕТУ
РІК XXIX імені І. І. МЕЧНІКОВА ТОМ VI (59)

ЗБІРНИК

МАТЕМАТИЧНОГО ВІДДІЛУ ФІЗИКО-МАТЕМАТИЧНОГО ФАКУЛЬТЕТУ

ТОМ IV

ВИДАВНИЦТВО ОДЕСЬКОГО ДЕРЖАВНОГО УНІВЕРСИТЕТУ
ОДЕСА 1950

МИНИСТЕРСТВО ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ СССР

ТРУДЫ ОДЕССКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА
ГОД XXIX имени И. И. МЕЧНИКОВА ТОМ VI (59)

СБОРНИК

МАТЕМАТИЧЕСКОГО ОТДЕЛЕНИЯ ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКОГО ФАКУЛЬТЕТА

ТОМ IV

ИЗДАТЕЛЬСТВО ОДЕССКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА
ОДЕССА 1950

ПЕЧАТАЕТСЯ ПО ПОСТАНОВЛЕНИЮ СОВЕТА УНИВЕРСИТЕТА
И РАСПОРЯЖЕНИЮ РЕКТОРА ДОЦЕНТА П. Л. ИВАНЧЕНКО

ОТВЕТСТВЕННЫЙ РЕДАКТОР
ДОЦЕНТ Г. М. МИРАКЬЯН

Доцент Г. М. МИРАКЬЯН,
кандидат физико-математических наук.

ОБ ОДНОЙ ИНТЕРПОЛЯЦИОННОЙ ФОРМУЛЕ

В этой статье будет указан достаточно общий интерполяционный процесс, с помощью которого можно аппроксимировать любую непрерывную функцию. Кроме того, будет показано, что некоторые, ранее известные, интерполяционные процессы получаются из рассматриваемого в этой статье интерполяционного процесса, как частные случаи.

Прежде чем начинать изложение основной части работы, устанавливаются положения вспомогательного характера, играющие важную роль при доказательстве основного результата.

1. Пусть функции $f(x)$, $g(x)$ и $\varphi(x) = e^{g(x)}$ однозначно определены в конечном или бесконечном промежутке $a \leqslant x \leqslant b$.

2. Функции $f(x) \cdot [\varphi(x)]^n$ абсолютно интегрируемы в $[a, b]$ при $n = 0, 1, 2, \ldots$

3. $g(x)$ достигает при $x = c$ $(a < c < b)$ своего максимума (или минимума), при чем так, что верхняя грань для $g(x)$ в каждом сегменте, не содержащем точку $x=c$, меньше чем $g(c)$.

4. Можно указать такую окрестность точки $g = c$ $(a < c < b)$, что для всех x из этой окрестности $g^{(2\nu)}(x)$ определена и непрерывна. Кроме того,

$$g'(c) = 0,\ g''(c) = 0,\ \ldots\ g^{(2\nu-1)}(c) = 0$$
$$g^{(2\nu)}(c) < 0$$
$$(\nu \geqslant 1 \text{ и целое}).$$

5. $f(x)$ непрерывна при $x=c$ и $f(c) \neq 0$. При этих предположениях справедливо асимптотическое равенство при $\to \infty$

$$\int_a^b f(x)\,[\varphi(x)]^n\,dx \sim f(c)\,[\varphi(c)]^{n+\frac{1}{2\nu}} \cdot \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2\nu}\right)}{\nu} \cdot \sqrt[2\nu]{-\frac{(2\nu)!}{n\,\varphi^{(2\nu)}(c)}}$$

Доказательство. Задав $\varepsilon > 0$, подберем $\delta > 0$ так, чтобы:
во-первых,

$$a < c - \delta < c + \delta < b$$

во-вторых,

$$[f(x) - f(c)] < \varepsilon \quad \text{при } [x - c] < \delta$$

и в третьих

$$g^{(2\nu)}(c) - \varepsilon < g^{(2\nu)}(x) < g^{(2\nu)}(c) + \varepsilon < 0 \quad \text{при } [x - c] < \delta$$

(последнее, как следствие непрерывности $(g^{(2\nu)}(x)$ при $x = c$ и предположения, что $g^{(2\nu)}(c) < 0)$.

После этого рассмотрим интеграл

$$\int_a^b f(x)\, e^{n[g(x)-g(c)]}\, dx = \int_{c-\delta}^{c+\delta} f(x)\, e^{n[g(x)-g(c)]}\, dx + \int_a^{c-\delta} f(x)\, e^{n[g(x)-g(c)]}\, dx +$$

$$+ \int_{c+\delta}^{b} f(x)\, e^{n[g(x)-g(c)]}\, dx$$

Проверим, что второе и третье слагаемые правой части последнего равенства являются величинами порядка α^n, где α зависит только от ε, но не от n и, кроме того, $0 < \alpha < 1$.

Для этого достаточно рассмотреть второе слагаемое, так как рассуждения для третьего такие же.

Верхнюю грань $g(x)$ в $[a, c-\delta]$ обозначим через L. По условию

$$L < g(c).$$

Тогда обозначая

$$L - g(c) = -\lambda,$$

где $\lambda > 0$, получим

$$\left| \int_a^{c-\delta} f(x) e^{n[g(x)-g(c)]}\, dx \right| \leqslant$$

$$\leqslant \int_a^{c-\delta} [f(x)]\, e^{-n}\, dx \geqslant e^{-\lambda n} \int_a^b [f(x)]\, dx = (e^{-\lambda})^n \int_a^b [f(x)]\, dx$$

Следовательно, роль α здесь исполняет $e^{-\lambda}$, и так как $\lambda > 0$, то $0 < \alpha < 1$. Так как λ определялось через L, а L через δ и δ по ε, то зависит только от ε, но не от n.

На этом основании

$$\int_a^b f(x)\, e^{n[g(x)-g(c)]}\, dx = \int_{c-\delta}^{c+\delta} f(x)\, e^{n[g(x)-g(c)]}\, dx + 0(\alpha^n)$$

Так как $g^{(2\nu)}(x)$ существует и непрерывна в $(c-\delta, c+\delta)$, то

$$g(x) = g(c) + \frac{g^{(2\nu)}(\xi)}{(2\nu)!}(x - c)^{2\nu}$$

здесь ξ лежит между c и x, а потому $c - \delta < \xi < c + \delta$.

Отсюда получаем, что

$$\int_{c-\delta}^{c+\delta} f(x)\, e^{n[g(x)-g(c)]}\, dx = \int_{c-\delta}^{c+\delta} f(x)\, e^{\frac{n}{(2\nu)!} g^{(2\nu)}(\xi)(x-c)^{2\nu}}\, dx.$$

Применяя к интегралу в правой части теорему о среднем значении, получим

$$\int_{c-\delta}^{c+\delta} f(x)\, e^{n[g(x)-g(c)]}\, dx = \mu \int_{c-\delta}^{c+\delta} e^{\frac{n}{(2\nu)!} g^{(2\nu)}(\xi)(x-c)^{2\nu}}\, dx$$

причем

$$m_\delta \leqslant \mu \leqslant M_\delta$$
$$m_\delta = \inf f(x)$$
$$M_\delta = \sup f(x)$$

при

$$x \in (c - \delta,\ c + \delta)$$

кроме того имеем, что

$$f(c) - \varepsilon \leqslant m_\delta \leqslant \mu \leqslant M_\delta \leqslant f(c) + \varepsilon.$$

На этом основании

$$\int_a^b f(x)\, e^{n[g(x)-g(c)]}\, dx$$

находится между величинами

$$[f(c) + \varepsilon] \int_{c-\delta}^{c+\delta} e^{\frac{n}{(2\nu)!} g^{(2\nu)}(\xi)(x-c)^{2\nu}}\, dx$$

$$[f(c) - \varepsilon] \int_{c-\delta}^{c+\delta} e^{\frac{n}{(2\nu)!} g^{(2\nu)}(\xi)(\ -c)^{2\nu}}\, dx$$

и, очевидно, также между величинами

$$[f(c) + \varepsilon] \cdot \int_{c-\delta}^{c+\delta} e^{\frac{n}{(2\nu)!}[g^{(2\nu)}(c)+\varepsilon](x-c)^{2\nu}}\, dx$$

$$[f(c) - \varepsilon] \cdot \int_{c-\delta}^{c+\delta} e^{\frac{n}{(2\nu)!}[g^{(2\nu)}(c)-\varepsilon](x-c)^{2\nu}}\, dx$$

Далее пусть $a<c<b$ и k постоянное число >0, тогда при постоянных a, b, c, ν и при $n\to\infty$

$$\int_b^a e^{-kn(x-c)^{2\nu}}\,dx\sim\frac{\Gamma\left(\frac{1}{2\nu}\right)}{\nu\sqrt[2\nu]{k\cdot n}}$$

Для доказательства этого утверждения сделаем в интеграле замену переменной интегрирования, полагая $\sqrt[2\nu]{kn}\cdot(x-c)=t$, тогда

$$\sqrt[2\nu]{kn}\,(a-c)\leqslant t\leqslant\sqrt[2\nu]{kn}\,(b-c),$$

и после замены получим

$$\int_d^b e^{-kn(x-c)^{2\nu}}\,dx=\frac{1}{\sqrt[2\nu]{kn}}\int_{\sqrt[2\nu]{kn}\,(a-c)}^{\sqrt[2\nu]{kn}\,(b-c)} e^{-t^{2\nu}}\,dt\sim$$

$$\sim\frac{1}{\sqrt[2\nu]{kn}}\int_{-\infty}^{-\infty} e^{-t^{2\nu}}\,dt=\frac{\Gamma\left(\frac{1}{2\nu}\right)}{\nu\sqrt[2\nu]{kn}}$$

при $n\to\infty$.

На основании последнего результата получаются при $n\to\infty$ такие асимптотические равенства

$$[f(c)+\varepsilon]\int_{c-\delta}^{c+\delta} e^{\frac{n}{(2\nu)!}\left[g^{(2\nu)}(c)+\varepsilon\right](x-c)^{2\nu}}\,dx\sim[f(c)+\varepsilon]\cdot\frac{\Gamma\left(\frac{1}{2\nu}\right)}{\nu\cdot\sqrt[2\nu]{-\frac{n}{(2\nu)!}\left[g^{(2\nu)}(c)+\varepsilon\right]}}$$

$$[f(c)-\varepsilon]\int_{c-\delta}^{c+\delta} e^{\frac{n}{(2\nu)!}\left[g^{(2\nu)}(c)-\varepsilon\right](x-c)^{2\nu}}\,dx\sim[f(c)-\varepsilon]\cdot\frac{\Gamma\left(\frac{1}{2\nu}\right)}{\nu\cdot\sqrt[2\nu]{-\frac{n}{(2\nu)!}\left[g^{(2\nu)}(c)-\varepsilon\right]}}$$

И так как ε — произвольно малое положительное число, то при $n\to\infty$

$$\int_{c+\delta}^{c+\delta} f(x)e^{n[g(x)-g(c)]}\,dx\sim f(c)\cdot\frac{\Gamma\left(\frac{1}{2\nu}\right)}{\nu\sqrt[2\nu]{-\frac{n}{(2\nu)!}g^{(2\nu)}(c)}}$$

но, как отмечено выше,

$$\int_a^b f(x)e^{n[g(x)-g(c)]}\,dx=\int_{c-\delta}^{c+\delta} f(x)e^{n[g(x)-g(c)]}\,dx+0(\alpha^n),$$

где $0<\alpha<1$ и α не зависит от n, а потому при $n\to\infty$

$$\int_a^b f(x)e^{n[g(x)-g(c)]}\,dx\sim f(c)\,\frac{\Gamma\left(\frac{1}{2\nu}\right)}{\nu}\sqrt[2\nu]{-\frac{(2\nu)!}{n\,g^{(2\nu)}(c)}},$$

или иначе

$$\int_a^b f(x)e^{ng(x)}\,dx\sim f(c)\cdot e^{ng(c)}\cdot\frac{\Gamma\left(\frac{1}{2\nu}\right)}{\nu}\cdot\sqrt[2\nu]{-\frac{(2\nu)!}{ng^{(2\nu)}(c)}};$$

полагая $\varphi(x)=e^{g(x)}$, получаем последовательно, что

$$g'(x)\varphi(x)=\varphi'(x)$$

и отсюда

$$\varphi^{(2\nu)}(x)=g^{(2\nu)}(x)\varphi(x)+\binom{2\nu-1}{1}g^{(2\nu-1)}(x)\varphi'(x)+\dots+g'(x)\varphi^{(2\nu-1)}(x)$$

и при $x=c$, имея в виду, что по условию

$$g'(c)=0,\ g''(c)=0,\ \dots,\ g^{(2\nu-1)}(c)=0$$

получаем, что $\varphi^{(2\nu)}(c)=g^{(2\nu)}(c)\varphi(c)$

Вследствие этого при $n\to\infty$

$$\int_a^b f(x)\,[\varphi(x)]^n\,dx\sim f(c)\,[\varphi(c)]^{n+\frac{1}{2\nu}}\,\frac{\Gamma\left(\frac{1}{2\nu}\right)}{\nu}\sqrt[2\nu]{-\frac{(2\nu)!}{n\varphi^{(2\nu)}(c)}}\qquad(A)$$

В частном случае, при $\nu=1$, получаем известное асимптотическое равенство *Laplace'a*

$$\int_a^b f(x)\,[\varphi(x)]^n\,dx\sim f(c)\,[\varphi(c)]^{n+\frac{1}{2}}\sqrt{-\frac{2\pi}{n\varphi''(c)}}.$$

* * *

Рассматривается аналитическая функция $\psi(x)$ от вещественного переменного x, разложение которой в ряд по целым возрастающим степеням x сходится в промежутке $(-r,+r)$, причем $r>0$. Разложение имеет следующий вид

$$\psi(x)=1+c_1x^{2\nu_1}+c_2x^{2\nu_2}+\dots$$

Коэфициенты c_1, c_2, ... являются положительными числами. При сделанных предположениях очевидно, что функция $\psi(x)$ нигде в $(-r,+r)$ не равна нулю и имеет при $x=0$ абсолютный минимум, равный единице. Функция

$$\varphi(x)=\frac{1}{\psi(x)}$$

в промежутке $(-r,+r)$ имеет абсолютный максимум, равный единице только при $x=0$.

Введем в рассмотрение последовательность чисел Δ_n, определяемых равенствами

$$\Delta_n=\int_{-r}^{r}\frac{dx}{[\psi(x)]^n}\qquad n=1,\ 2,\ 3,\ \dots$$

На основании (A), полагая $f(x)\equiv 1$ и имея в виду, что

$$\varphi'(0)=0,\ \varphi''(0)=0,\ \dots,\ \varphi^{(2\nu_1-1)}(0)=0,$$

можно получить асимптотическое значение для Δ_n при $n\to\infty$ Именно:

$$\Delta_n=\int_{r}^{r}[\varphi(x)]^n\,dx\sim\frac{\Gamma\left(\frac{1}{2\nu_1}\right)}{\nu_1}\sqrt[2\nu_1]{-\frac{(2\nu_1)!}{n\varphi^{(2\nu_1)}(0)}}.$$

Из тождества $\varphi(x)\cdot\psi(x)\equiv 1$ получаем дифференцируя $2\nu_1$ раз

$$\varphi^{(2\nu_1)}(x)\,\psi(x)+\binom{2\nu_1}{1}\varphi^{(2\nu_1-1)}(x)\,\psi'(x)+\ \dots\ +\psi(x)\,\psi^{(2\nu_1)}(x)\equiv 0$$

и полагая $x=0$, получается

$$\varphi^{(2\nu_1)}(0)\,\psi(0)+\varphi(0)\ {}^{(2\nu_1)}(0)=0.$$

Так как $\psi'(0)=0$, $\psi''(0)=0,\ \dots,\ \psi^{(2\nu_1-1)}(0)=0$, $\psi^{(2\nu_1)}(0)=(2\nu_1)!\ c_1$,

то

$$\varphi^{(2\nu_1)}(0)=-(2\nu_1)!\ c_1,$$

откуда

$$\Delta_n=\int_{-r}^{r}\frac{dx}{[\psi(x)]^n}\sim\frac{\Gamma\left(\frac{1}{2\nu_1}\right)}{\nu_1}\sqrt[2\nu_1]{\frac{1}{nc_1}}\qquad\text{при } n\to\infty$$

После этого вводится в рассмотрение последовательность функций $\Psi_n(x)$, определяемых равенствами

$$\Psi_n(x)=\frac{1}{\Delta_n}\int_{\alpha-x}^{\beta-x}\frac{f(x+u)}{[\psi(u)]^n}du\quad n=1,\ 2,\ 3,\ \dots$$

при этом предполагается, что функция $f(x)$ непрерывна

$$\text{при } -r<\alpha\leqslant x\leqslant\beta<r.$$

Предполагая все это, докажем, что

$$\lim_{n\to\infty}\Psi_n(x)=f(x)$$

равномерно относительно $x\in[\alpha_1,\ \beta_1]$, причем $\alpha<\alpha_1,<\beta_1<\beta$,
Для этого оценим разность $\Psi_n(x)-f(x)$ при $n\to\infty$

Имеем

$$\Psi_n(x)-f(x)=\frac{1}{\Delta_n}\int_{\alpha-x}^{\beta-x}\frac{f(x+u)}{[\psi(u)]^n}du-\frac{1}{\Delta_n}\int_{-r}^{r}\frac{f(x)}{[\psi(u)]^n}du=$$

$$=\frac{1}{\Delta_n}\int_{\alpha-x}^{\beta-x}\frac{f(x+u)-f(x)}{[\psi(u)]^n}du-\frac{1}{\Delta_n}\int_{-r}^{\alpha-x}\frac{f(x)}{[\psi(u)]^n}du-\frac{1}{\Delta_n}\int_{\beta-x}^{r}\frac{f(x)}{[\psi(u)]^n}du$$

Так как функция $f(x)$ равномерно непрерывна в $[\alpha,\ \beta]$, то по $\varepsilon>0$ найдется такое $\delta>0$, что при $|x_{\mathrm{I}}-x_{\mathrm{II}}|\leqslant\delta$, $|f(x_{\mathrm{I}})-f(x_{\mathrm{II}})|<\frac{\varepsilon}{2}$, где x_{I} и x_{II} из $[\alpha,\beta]$.

Кроме того, выбираем δ настолько малым, чтобы выполнялись неравенства

$$0<\delta\leqslant\alpha_1-\alpha$$
$$0<\delta\leqslant\beta-\beta_1.$$

После чего, предполагая теперь что $\alpha_1\leqslant x\leqslant\beta_1$, представим разность $\Psi_n(x)-f(x)$ в таком виде:

$$\Psi_n(x)-f(x)=\frac{1}{\Delta_n}\int_{-\delta}^{\delta}\frac{f(x+u)-f(x)}{[\psi(u)]^n}du+$$

$$+\frac{1}{\Delta_n}\int_{\alpha-x}^{-\delta}\frac{f(x+u)-f(x)}{[\psi(u)]^n}du+\frac{1}{\Delta_n}\int_{\delta}^{\beta-x}\frac{f(x+u)-f(x)}{[\psi(u)]^n}du-$$

$$-\frac{1}{\Delta_n}\int_{-r}^{\alpha-x}\frac{f(x)}{[\psi(u)]^n}du-\frac{1}{\Delta_n}\int_{\beta-x}^{r}\frac{f(x)}{[\psi(u)]^n}du$$

или отсюда

$$|\Psi_n(x)-f(x)|\leqslant\frac{1}{\Delta_n}\int_{-\delta}^{\delta}\frac{|f(x+u)-f(x)|}{[\psi(u)]^n}du+$$

$$+\frac{1}{\Delta_n}\int_{\alpha-x}^{-\delta}\frac{|f(x+u)-f(x)|}{[\psi(u)]^n}du+\frac{1}{\Delta_n}\int_{\delta}^{\beta-x}\frac{|f(x+u)-f(x)|}{[\psi(u)]^n}du+$$

$$+\frac{1}{\Delta_n}\int_{-r}^{\alpha-x}\frac{|f(x)|}{[\psi(u)]^n}du+\frac{1}{\Delta_n}\int_{\beta-x}^{r}\frac{|f(x)|}{[\psi(u)]^n}du\qquad(B)$$

Из очевидного соотношения

$$\alpha=\alpha_1-\alpha_1+\alpha<\alpha_1-\delta\leqslant x+u\leqslant\beta_1+\delta\leqslant\beta_1+\beta-\beta_1=\beta$$

видно, что $x+u$ в первом, втором и в третьем интеграле в правой части (B) лежит в $[\alpha, \beta]$. Кроме того, обозначая через M sup $|f(x)|$ в $[\alpha, \beta]$, получим

$$|\Psi_n(x) - f(x)| \leqslant \frac{\varepsilon}{2} \cdot \frac{1}{\Delta_n} \int_{-\delta}^{\delta} \frac{du}{[\psi(u)]^n} +$$

$$+ \frac{2M}{\Delta_n \cdot [\psi(\delta)]^n} \left[\int_{\alpha - x}^{-\delta} du + \int_{\delta}^{\beta - x} du + \int_{-r}^{\alpha - x} du + \int_{\beta - x}^{r} du \right] < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{4rM}{\Delta_n \cdot [\psi(\delta)]^n}.$$

Имея в виду асимптотическое значение Δ_n, а также, что

$$\psi(\delta) > 1,$$

найдем такое n_0 так чтобы при $n > n_0$ выполнялось неравенство

$$\frac{4rM}{\Delta_n \cdot [\psi(\delta)]^n} < \frac{\varepsilon}{2};$$

значит при $n > n_0$ и при $\alpha_1 \leqslant x \leqslant \beta_1$

$$|\Psi_n(x) - f(x)| < \varepsilon$$

Так как n_0 выбиралось по δ, а δ зависело только от ε, то

$$\lim_{n \to \infty} \Psi_n(x) = f(x)$$

равномерно относительно $x \in [\alpha_1, \beta_1]$

Предыдущие рассуждения не исключают случая $r = \infty$.

В этом случае

$$\Delta_n = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{du}{[\psi(u)]^n} \qquad n = 1, 2, 3, \ldots$$

Функция $f(x)$ предполагается непрерывной при $-\infty < x < +\infty$ и кроме того, при этих же значениях x $|f(x)| \leqslant M$ т. е. $f(x)$ ограничена. Далее полагаем

$$\Phi_n(x) = \frac{1}{\Delta_n} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(x+u)}{[\psi(u)]^n} du$$

Несколько иначе производится оценка разности $\Phi_n(x) - f(x)$

$$|\Phi_n(x) - f(x)| \leqslant \frac{1}{\Delta_n} \int_{-\delta}^{\delta} \frac{|f(x+u) - f(x)|}{[\psi(u)]^n} du +$$

$$+ \frac{1}{\Delta_n} \int_{-\infty}^{-\delta} \frac{|f(x+u)| + |f(x)|}{[\psi(u)]^n} du + \frac{1}{\Delta_n} \int_{\delta}^{\infty} \frac{|f(x+u)| + |f(x)|}{[\psi(u)]^n} du \leqslant$$

$$\leqslant \frac{\varepsilon}{2} + \frac{2M}{\Delta_n} \left[\int_{-\infty}^{-\delta} \frac{du}{[\psi(u)]^n} + \int_{\delta}^{\infty} \frac{du}{[\psi(u)]^n} \right]$$

Так как $\psi(x)$ функция четная, то

$$|\Phi_n(x) - f(x)| \leqslant \frac{\varepsilon}{2} + \frac{4M}{\Delta_n} \int_{\delta}^{\infty} \frac{du}{[\psi(u)]^n} < \frac{\varepsilon}{2} +$$

$$+ \frac{4M}{\Delta_n \cdot [\psi(\delta)]^{n-1}} \int_{\delta}^{\infty} \frac{du}{\psi(u)} < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{4M}{\Delta_n \cdot [\psi(\delta)]^{n-1}} \int_{0}^{\infty} \frac{du}{1 + c_1 u^{2\nu_1}}$$

Интеграл $\int_{0}^{\infty} \frac{du}{1 + c_1 u^{2\nu_1}}$, очевидно, сходится. Дальнейшие рассуждения не отличаются от случая, когда r предполагалось конечным.

Отметим частные случаи.

I. Пусть $\psi(x) = 1 + x^2 + x^4 + \ldots + x^{2n} + \ldots$

В этом случае $r = 1$ и при $-1 < x < 1$

$$\psi(x) = \frac{1}{1 - x^2}.$$

Значит последовательность Δ_n в этом случае определяется равенствами

$$\Delta_n = \int_{-1}^{+1} (1 - u^2)^n du \qquad n = 1, 2, 3, \ldots,$$

а последовательность аппроксимирующих функций $\Psi_n(x)$ определяется равенствами

$$\Psi_n(x) = \frac{1}{\Delta_n} \int_{\alpha - x}^{\beta - x} f(x+u)(1 - u^2)^n du \qquad n = 1, 2, 3, \ldots$$

В этом частном случае $\Psi_n(x)$ является полиномом относительно x степени $2n$ и хорошо известен, как интерполяционный полином E Landau.

II. Пусть в этом случае

$$\psi(x) = 1 + \frac{x^2}{1!} + \frac{x^4}{2!} + \ldots + \frac{x^{2n}}{n!} + \ldots$$

На этот раз $r = \infty$ и при $-\infty < x < +\infty$

$$\psi(x) = e^{x^2}$$

При этом числа Δ_n точно, а не асимптотически, равны

$$\Delta_n = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-nu^2}\, du = \sqrt{\frac{\pi}{n}}.$$

Для аппроксимирующих функций можно указать два выражения

$$\Psi_n(x) = \frac{1}{\Delta_n} \int_{\alpha-x}^{\beta-x} f(x+u)\, e^{-nu^2}\, du$$

и второе

$$\Phi_n(x) = \frac{1}{\Delta_n} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x+u)\, e^{-nu^2}\, du$$

На основании предшествующих общих рассуждений можно утверждать, во-первых, что, если функция $f(x)$ непрерывна при $\alpha \leqslant x \leqslant \beta$, то

$$\lim_{n \to \infty} \Psi_n(x) = f(x)$$

если $\alpha < \alpha_1 \leqslant x \leqslant \beta_1 < \beta$; и во-вторых, если функция $f(x)$ ограничена и равномерна непрерывна при $-\infty < x < +\infty$, то

$$\lim_{n \to \infty} \Phi_n(x) = f(x)$$

если $-\infty < \alpha_1 \leqslant x \leqslant \beta_1 < \infty$. Кроме того, в обоих случаях сходимость равномерна относительно $x \in [\alpha_1, \beta_1]$.

Функция $\Phi_n = \frac{1}{\Delta_n} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x+u)\, e^{-nu^2}\, du$ является аппроксимирующей функцией Weierstrass'а для функции $f(x)$ и в отличие от предыдущего частного случая не является полиномом.

III. Можно отметить еще один частный случай, где аппроксимирующие функции $\Psi_n(x)$ являются полиномами.

Для этого положим, считая ν целым положительным числом, что

$$\psi(x) = 1 + x^{2\nu} + x^{4\nu} + \ldots + x^{2n\nu} + \ldots$$

здесь $r = 1$ и при $-1 < x < +1$

$$\psi(u) = \frac{1}{1-u^{2\nu}}.$$

Аппроксимирующие полиномы $\Psi_n(x)$ степени $n\nu$ имеют вид

$$\Psi_n(x) = \frac{1}{\Delta_n} \int_{\alpha-x}^{\beta-x} f(x+u)\,(1-u^{2\nu})^n\, du.$$

ЛИТЕРАТУРА

1. Гончаров В. Л. Теория интерполирования и приближения функций, 1934 г.
2. Натансон И. П. О нелокальной сходимости сингулярных интегралов. т. II Ученые записки Казахского государственного университета, Алма-Ата, 1938 г.
3. E. Landau. „Über die Approximation einer stetigen Funktion durch eine ganze raticnale Funktion.
Rend. Circolo Mat. Palermo, 25 (1908).
4. K. Weierstrass. Über die empirische Darstellbarkeit sogenannter willkürlicher Funktionen reeler Argumente".
Werke B. III или Berliner Sitzumgsberichte (1885).

ПРАЦІ ОДЕСЬКОГО ДЕРЖАВНОГО УНІВЕРСИТЕТУ
РІК XXIX імені І. І. МЕЧНІКОВА ТОМ VI (59)

Профессор Н. А. ЛЕДНЕВ,
доктор физико-математических наук

ОБ ОДНОМ КЛАССЕ ФУНКЦИОНАЛЬНЫХ МЕТРИЧЕСКИХ ПРОСТРАНСТВ

ВВЕДЕНИЕ

Как известно, основными метрическими пространствами, рассматриваемыми в математическом анализе, являются нижеследующие пространства: *)

1) Эвклидово пространство n измерений E_n, функция расстояния, в котором задается соотношением:

$$\rho_n(x, y)=\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(x_i-y_i)^2}, \quad (x, y \subset E_n)$$

2) Счетномерное векторное пространство l_p, $(p \geqq 1)$, функция расстояния в котором задается соотношением:

$$\rho(x, y)=\sqrt[p]{\sum_{i=1}^{\infty}|x_i-y_i|^p} \quad (x,\ y \subset l_p).$$

3) Пространство $C=C^G$ ограниченных непрерывных функций $f=f(x)$ на заданном ограниченном измеримом множестве G из E_n, $(x \in G)$, функция расстояния в котором определяется соотношением:

$$\rho(f, g)=\sup_{x \in G}|f(x)-g(x)|, \ (f, g \subset p)$$

4) Счетно-мерное пространство $C_{\omega_0}=C_{\omega_0}^G$ вектор-функций $f=\{f_\alpha\}$- $\alpha<\omega_0$), ω_0 измерений, где $f_\alpha \in C^G$ и ω_0 — первое бесконечное трансфинитное число, функция расстояния в котором определяется соотношением

$$\rho(f, g)=\sum_{\alpha=1}^{\infty} a_\alpha \cdot \sup_{x \in G,}|f_\alpha(x)-g_\alpha(x)|, \quad (f, g \subset C_{\omega_0})$$

---

*) Об основны хвопросах теории этих пространств см., например, статью Л. А. Люстерника. Основные понятия функционального анализа, Успехи Математических Наук, т. I.

где a_α — положительные постоянные, для которых

$$\sum_{\alpha=1}^{\infty} a_\alpha < \infty .$$

5) Пространство $L_p = L_p^G$ $(p \geq 1)$ суммируемых в p-ой степени на ограниченном измеримом множестве G из E_n функций $f = f(x)$ $(x \in G)$, функция расстояния в котором определяется соотношением:

$$\rho(f, g) = \sqrt[p]{\int_G f|(x) - g(x)|^p dx}, \qquad (f, g \subset L_p)$$

Однако в некоторых вопросах математического анализа, в особенности в теории интегральных уравнений, приходится рассматривать выражения видов

$$\operatorname{Sup}_{x \in G} \int_G |f x, \xi)| \, d\xi, \qquad \int_G \operatorname{Sup}_{x \in G} |(f x, \xi)| \, d\xi,$$

где функция f ограничена и непрерывна по x на G при всех ξ из G, и т. п.

Это приводит к необходимости рассматривать более общие метрические пространства, чем указанные выше.

Задача настоящей работы и заключается в изучении некоторых вопросов теории таких пространств.

Содержание работы, в основном, сводится к введению понятия пространства типа $L_{p_1 \ldots p_r}^{G/E_{n_1} \ldots E_{n_r}}$, установлению его полноты и перенесению на такое пространство известных принципов компактности с соответствующими изменениями и добавлениями.

§ 1. Пространство $L_{p_1 \ldots p_r}^{G/E_{n_1} \ldots E_{n_r}}$

1. Пусть G — произвольное ограниченное измеримое подмножество множества E_n и

$$E_n = E_{n_1} \times \ldots \times E_{n_r}$$

— фиксированное разложение пространства E_n в произведение эвклидовых подпространств E_{n_i}:

$$x = (x^{(n_1)}, \ldots, x^{(n_r)}), \quad (n = n_1 + \ldots + n_r),$$

где $x \in E_n$, $x^{(n_i)} \in E_{n_i}$, $(i = 1, 2, \ldots, r)$.

Обозначения:

$G^{(n_1 \ldots n_i)}$ — проекция множества G на эвклидово пространство

$$E^{(n_1 \ldots n_i)} = E_{n_1} \times \ldots \times E_{n_i}.$$

2) $x^{(n_1 \ldots n_i)} = (x^{(n_1)}, \ldots, x^{(n_i)})$

3) $G\{x^{(n_1 \ldots n_i)}\}$ — множество всех точек $x^{(n_1 \ldots n_{i+1})}$ из $G^{n_i \ldots n_{i+1}}$ с фиксированным значением $x^{(n_1 \ldots n_i)}$.

4) $G\{x^{(0)}\} = G^{(n_1)}$.

5) $p_1, p_2, \ldots p_r$ — произвольные величины, удовлетворяющие неравенствам

$$1 \leqslant p_i \leqslant \infty, \quad (i = 1, 2, \ldots, r).$$

Методом полной математической индукции по r определим, для каждой измеримой функции $f = f(x)$ на множестве G, символ

$$(1) \ldots \ldots \|f\|_{p \ldots p_r}^{G/E_{n_i} \ldots E_{nr}}$$

Положим символ $\|f\|_{p_r}^{G/E_{nr}}\{x^{(n_1 \ldots n_{r-1})}\}$ равным

$$\mathop{inf}_{\substack{\Sigma \subseteq G \\ mes\, \Sigma = 0}} \ \sup_{x \in G - \Sigma} |f(x)|,^{*)}$$

если $p_r = \infty$ и

$$\sqrt[p_r]{\int_{G\{x^{(n_1 \ldots n_{r-1})}\}} [f(x)]^{p_r} . \, dG\{x^{(n_1 \ldots n_{r-1})}\}},$$

если $p_r < \infty$.

Предполагая, что символ $\|f\|_{p_{i+1} \ldots p_r}^{G/E_{n_{i+1}} \ldots E_{n_r}}\{x^{(n_1 \ldots n_i)}\}$ уже определен, положим символ $\|f\|_{p_i \ldots p_r}^{G/E_{n_i} \ldots E_{n_r}}\{x^{(n_1 \ldots n_{i-1})}\}$ равным

$$\mathop{inf}_{\substack{\Sigma \subseteq G\{x^{(n_1 \ldots n_{i-1})}\} \\ mes\, \Sigma = 0}} \ \sup_{x \in G\{x^{(n_1 \ldots n_{i-1})}\} - \Sigma} \|f\|_{p_{i+1} \ldots p_r}^{G/E_{n_{i+1}} \ldots E_{n_r}}\{x^{(n_1 \ldots n_i)}\}$$

если $p_i = \infty$ и

$$\sqrt[p_i]{\int_{G\{x^{(n_1 \ldots n_{i-1})}\}} \left[\|f\|_{p_{i+1} \ldots p_r}^{G/E_{n_{i+1}} \ldots E_{n_r}}\{x^{(n_1 \ldots n_i)}\} \right]^{p_i} . \, dG\{x^{(n_1 \ldots n_{i-1})}\}}$$

если $p_i < \infty$.

---

*) Здесь и в дальнейшем грани берутся точными.

Меры множеств и интергрирования понимаются в смысле соответствующих чисел n_i измерений рассматриваемых множеств.

Символ (1) получается из только что определенного символа при $i=1$.

Он имеет смысл и равен вещественному числу ≥ 0 или ∞.

2. Основные свойства символа (1)

1°. Если на множестве G почти всюду $|f(x)| \leqslant |g(x)|$, то

$$\| f \|_{p_1 \ldots p_r}^{G/E_{n_1} \ldots E_{n_r}} \leqslant \| g \|_{p_1 \ldots p_r}^{G/E_{n_1} \ldots E_{n_r}}$$

Утверждение очевидно.

2°. Если λ — постоянная, то

$$\| \lambda f \|_{p_1 \ldots p_r}^{G/E_{n_1} \ldots E_{n_r}} = |\lambda| \cdot \| f \|_{p_1 \ldots p_r}^{G/E_{n_1} \ldots E_{n_r}}.$$

Утверждение очевидно.

3°. Имеет место соотношение

$$\mathop{inf}_{\substack{\Sigma \subseteq G \\ mes\ \Sigma = 0}} \sup_{x \in G - \Sigma} |f(x)| = \lim_{m \to \infty} \sqrt[m]{\int_G |f(x)|^m \cdot dx} \text{ *)} \tag{2}$$

В случае непрерывной функции f в области G эта формула была доказана еще Лапласом. В этом случае левая часть формулы равна

$$\sup_{x \in G} |f(x)|.$$

Докажем ее в общем случае.

Не ограничивая общность, можно считать G замкнутой областью.

Положим

$$A = \mathop{inf}_{\substack{\Sigma \subseteq G \\ mes\ \Sigma = 0}} \sup_{x \in G - \Sigma} |f(x)|.$$

Имеют место неравенства

$$\sqrt[m]{\int_G |f(x)|^m dx} \leqslant A \sqrt[m]{mes\, G}, \quad (m = 1, 2, 3, \ldots). \tag{3}$$

Действительно, если $\Sigma \subseteq G$ и $mes\ \Sigma = 0$, то

$$\sqrt[m]{\int_G |f(x)|^m dx} = \sqrt[m]{\int_{G-\Sigma} |f(x)|^m dx} \leqslant$$

$$\leqslant \operatorname{Sup}_{x \in G-\Sigma} |f(x)| \cdot \sqrt[m]{\mathrm{mes}\ (G - \Sigma)} = \operatorname{Sup}_{x \in G-\Sigma} |f(x)| \cdot \sqrt[m]{mes\, G}.$$

*) Ср., например, В. Л. Гончаров, Теория интерполирования и приближения функций, 1934, стр. 263.

Из неравенств (3) вытекает, что

$$\overline{\lim_{m \to \infty}} \sqrt[m]{\int_G |f(x)|^m dx} \leqslant A \tag{4}$$

Возьмем какую-нибудь последовательность $\{G_m\}$ подмножеств G_m множества G, обладающую следующими свойствами:

a) Каждое множество G_m замкнуто, все его точки являются точками плотности*) и на G_m функция f непрерывна.

b) $G_m \subseteq G_{m+1}$ $(m = 1, 2, 3, \ldots)$.

c) $Mes\ (G - G_m) < \frac{1}{m}$, $(m = 1, 2, 3, \ldots)$.

Из a) вытекает, что функция $|f|$ на G_m в некоторой точке ξ_m достигает точной верхней грани.

Из в) вытекает, что $|f(\xi_m)| \leqslant |f(\xi_{m+1})|$.

Пусть

$$A' = \lim_{m \to \infty} |f(\xi_m)|.$$

На основании a) при заданном $\varepsilon > 0$ найдется такое положительное число $\delta = \delta(G_k)$, что в $G_k \cdot \square(\xi_k, \delta)$**, где $\square(\xi, \delta)$ — n — мерный куб с центром в точке ξ и длиной ребра δ,

$$|f(x) - f(\xi_k)| < \varepsilon.$$

Имеем:

$$\{|f(\xi_k)| - \varepsilon\} \sqrt[m]{mes\ G_k \cdot \square(\xi_k, \delta)} \leqslant \sqrt[m]{\int_{G_k} |f(x)|^m dx} \leqslant$$

$$\leqslant \sqrt[m]{\int_G |f(x)|^m dx}.$$

Так как каждая точка множества G_k, в том числе и ξ_k, является точкой плотности этого множества (см. a), то $mes\ G_k \cdot \square(\xi_k, \delta) > 0$ и потому из только что написанного неравенства получаем:

$$|f(\xi_k)| - \varepsilon \leqslant \underline{\lim_{m \to \infty}} \sqrt[m]{\int_G |(x)|^m dx}$$

*) Точка x_0 называется точкой плотности измеримого множества M, если при любом $\delta > 0$

$mes\ M \cdot \square(x_0, \delta) > 0$, где $\square(x_0, \delta)$ — n — мерный куб с центром в точке x_0 и длиной ребра δ. В обычных определениях точки плотности требуют, чтобы

$$\lim_{\delta \to 0} \frac{mes\ M \cdot \square(x_0, \delta)}{mes\ \square(x_0, \delta)} = 1.$$

**) $G' \cdot G''$ — пересечение множеств G' и G''.

Следовательно,

$$A' \leqslant \varlimsup_{m \to \infty} \sqrt[m]{\int_G |f(x)|^m dx} \quad . \tag{5}$$

Но

(6) . . . . $A = A'$.

Действительно, так как точка ξ_m является точкой плотности множества G_m и функция f на нем непрерывна, то

$$|f(\xi_m)| \leqslant \sup_{\substack{x \in G - \Sigma \\ \Sigma \in G,\ \mathrm{mes}\, \Sigma = 0}} |f(x)| \, .$$

Следовательно,

$$A' \leqslant A.$$

С другой стороны A' — точная верхняя грань функции f на множестве $\sum_{m=1}^{\infty} G_m$ и

$$mes(G - \sum_{m=1}^{\infty} G_m) = 0 \text{ (см. в) и с)).}$$

Следовательно,

$$A \leqslant A'.$$

Равенство (6) доказано.

Сравнивая соотношения (4), (5) и (6), приходим к формуле (2).

Следствия из доказательства формулы (2)

1) Имеют место соотношения

$$\sqrt[m]{\int_G |f(x)|^m dx} \leqslant \inf_{\substack{\Sigma \in G \\ mes\, \Sigma = 0}} \ \sup_{x \in G - \Sigma} |f(x)| \cdot \sqrt[m]{mes\, G}$$

2) Существует такое множество $\Sigma_0 \subseteq G$, $mes\ \Sigma_0 = 0$, что

$$\inf_{\substack{\Sigma \subset G, \\ mes\, \Sigma = 0}} \ \sup_{x \in G - \Sigma} |f(x)| = \sup_{x \in G - \Sigma_0} |f(x)| \, .$$

Первое из этих следствий выше отмечено формулой (3), а второе получается из соотношения (6) при $\Sigma_0 = G - \sum_{m=1}^{\infty} G_n$. 4°. Для любых двух измеримых на G функций f и g имеет место неравенство

$$\| f + g \|^{G \,|\, E_{n_1} \dots E_{n_r}}_{p_1 \dots p_r} \leqslant \| f \|^{G \,|\, E_{n_1} \dots E_{n_r}}_{p_1 \dots p_r} + \| g \|^{G \,|\, E_{n_1} \dots E_{n_r}}_{p_1 \dots p_r}$$

Справедливость этого неравенства при $r = 1$ вытекает из неравенства Минковского и из следствия 2) п. 3°, а в общем случае доказывается методом полной математической индукции по r с привлечениме неравенстна Минковского, следствия 2) п. 3° и при $p_1 < \infty$, формулы

$$\| f \|^{G \,|\, E_{n_1} \dots E_{n_r}}_{p_1 \dots p_r} = \sqrt[p_1]{\int_{G(n_1)} \left[\| f \|^{G_{x(n_1)} \,|\, E_{n_2} \dots E_{n_r}}_{p_2 \dots p_r} \right]^{p_1} \cdot dG^{(n_1)}} \, .$$

где $G_{x(n)_1}$ — множество всех точек x из G с фиксированным значением $x^{(n_1)}$ — пеpеменным интегрирования.

5°. Если $G = G' + G''$, где G' и G'' — измеримые подмножества G, то

$$\| f \|^{G \,|\, E_{n_1} \dots E_{n_r}}_{p_1 \dots p_r} \leqslant \| f \|^{G' \,|\, E_{n_1} \dots E_{n_r}}_{p_1 \dots p_r} + \| f \|^{G'' \,|\, E_{n_1} \dots E_{n_r}}_{p_1 \dots p_r}$$

Для доказательства этого утверждения достаточно рассмотреть случай $G' \cdot G'' = 0$ (пересечение — пустое множество).

При $r = 1$ утверждение непосредственно вытекает из неравенства Минковского и утверждений п. 3°.

Если оно уже доказано для $r - 1$, то

$$\| f \|^{G_{x(n_1)} \,|\, E_{n_2} \dots E_{n_r}}_{p_2 \dots p_r} \leqslant \| f \|^{G'_{x(n_1)} \,|\, E_{n_2} \dots E_{n_r}}_{p_2 \dots p_r} + \| f \|^{G''_{x(n_1)} \,|\, E_{n_2} \dots E_{n_r}}_{p_2 \dots p_r}$$

Применяя к этому соотношению, при $p_1 < \infty$, неравенство Минковского, получим

$$\sqrt[p_1]{\int_{G(n_1)} \left[\| f \|^{G_{x(n_1)} \,|\, E_{n_2} \dots E_{n_r}}_{p_2 \dots p_r} \right]^{p_1} \cdot dx^{(n_1)}} \leqslant$$

$$\leqslant \sqrt[p_1]{\int_{G(n_1)} \left[\| f \|^{G'_{x(n_1)} \,|\, E_{n_2} \dots E_{n_r}}_{p_2 \dots p_r} \right]^{p_1} \cdot dx^{(n_1)}} + \sqrt[p_1]{\int_{G(n_1)} \left[\| f \|^{G''_{x(n_1)} \,|\, E_{n_2} \dots E_{n_r}}_{p_2 \dots p_r} \right]^{p_1} dx^{(n_1)}}$$

$$= \sqrt[p_1]{\int_{G'(n_1)} \left[\| f \|^{G'_{x(n_1)} \,|\, E_{n_2} \dots E_{n_r}}_{p_2 \dots p_r} \right]^{p_1} \cdot dx^{(n_1)}} + \sqrt[p_1]{\int_{G''(n_1)} \left[\| f \|^{G''_{x(n_1)} \,|\, E_{n_2} \dots E_{n_r}}_{p_2 \dots p_r} \right]^{p_1} dx^{(n_1)}},$$

где $G'^{(n_1)}$, $G''^{(n_1)}$ имеют по отношению к G', G'' такой же смысл, что и $G^{(n_1)}$ по отношению к G.

Следовательно, при $p_1 < \infty$ неравенство 5° доказано.

При $p_1 = \infty$ оно непосредственно вытекает из неравенства 4°, взятого для случая $r = 1$, $p_1 = \infty$.

6°. Пусть G_{n_i} — проекция множества G на E_{n_i} и $mes\ G_{n_i}$ — мера G_{n_i} в E_{n_i}.

Тогда, если

$$1 \leqslant p_i \leqslant q_i \leqslant \infty, \ (i=1, 2, \ldots, r),$$

то

$$\| f \|_{p_1 \ldots p_r}^{G/E_{n_1} \ldots E_{n_r}} \leqslant \prod_{i=1}^{r} (mes\, G_{n_i})^{\frac{q_i - p_i}{q_i p_i}} \cdot \| f \|_{q_1 \ldots q_r}^{G/E_{n_1} \ldots E_{n_r}},$$

где значение величины $\frac{q_i - p_i}{q_i \cdot p_i}$ равно $\frac{1}{p_i}$ при $p_i < q_i = \infty$ и 0 при $p_i = q_i = \infty$.

В частности

$$\left| \int\limits_G f(x)\, dx \right| \leqslant \prod_{i=1}^{r} (mes\, G_{n_i})^{\frac{q_i - 1}{q_i}} \cdot \| f \|_{q_1 \ldots q_r}^{G/E_{n_1} \ldots E_{n_r}} \tag{7}$$

Это утверждение доказывается методом полной математической индукции по r с привлечением неравности вида

$$\sqrt[p]{\int\limits_\varphi [f(x)]^p\, dx} \leqslant (mes\, \varphi)^{\frac{q-p}{qp}} \cdot \sqrt[q]{\int\limits_G [f(x)]^q\, dx},$$

где $1 \leqslant p \leqslant q$, и формулы (2).

7°. Пусть δ — положительное число и T_δ — функция-множество на G, ставящая в соответствие каждому значению x из G измеримое подмножество $T_\delta = T(x, \delta)$ множества E_n, причем,

1) множество $T(x, \delta)$ принадлежит n — мерному кубу $\square(x, \delta)$ с центром в точке x и длиной ребра δ,

2) Существует такая положительная постоянная величина K, что почти всюду на G

$$mes\ T(x, \delta) \geqslant K \cdot \delta^n. \tag{K}$$

Тогда, если вне множества G $\quad f(x) \equiv 0$ и

$$[f_\delta(x) = \frac{\int\limits_{T(x,\delta)} f(\xi) \cdot d\xi}{mes\ T(x, \delta)}, \ (x \in G),$$

то имеет место неравенство

$$\| f_\delta \|_{p_1 \ldots p_r}^{G/E_{n_1} \ldots E_{n_r}} \leqslant \frac{1}{K} \cdot \| f \|_{p_1 \ldots p_r}^{G/E_{n_1} \ldots E_{n_r}}. \tag{8}$$

В случае, когда $T(x, \delta) = \square(x, \delta)$ — n-мерный куб с центром в точке x и длиной ребра δ, формулу (8) можно легко доказать методом полной математической индукции по r, причем в этом случае можно положить $K = 1$.

Действительно, на основании формулы (2), достаточно рассмотреть случай $p_1 \ldots p_r < \infty$.

Формула (8) верна при $r = 1$ и любом значении n.

Но в рассматриваемом случае

$$f_\delta(x) = \frac{1}{\delta^k} \cdot \int\limits_{x_1 - \frac{\delta}{2}}^{x_1 + \frac{\delta}{2}} \ldots \int\limits_{x_k - \frac{\delta}{2}}^{x_k + \frac{\delta}{2}} d\xi_1 \ldots d\xi_k \frac{\int\limits_{x_{k+1} - \frac{\delta}{2}}^{x_{k+1} + \frac{\delta}{2}} \ldots \int\limits_{x_n - \frac{\delta}{2}}^{x_n + \frac{\delta}{2}} f(\xi) \cdot d\xi_{k+1} \ldots d\xi_n}{\delta^{n-k}}$$

$1 \leqslant k < n$.

Следовательно, при $p \geqslant 1$

$$\sqrt[p]{\int\limits_\varphi \ldots \int |f_\delta(x)|^p dx_{k+1} \ldots dx_n} \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{\delta^k} \int\limits_{x_1 - \frac{\delta}{2}}^{x_1 + \frac{\delta}{2}} \ldots \int\limits_{x_k - \frac{\delta}{2}}^{x_k + \frac{\delta}{2}} \left[\sqrt[p]{\int\limits_\varphi \ldots \int |f(\xi)|^p d\xi_{k+1} \ldots d\xi_n} \right] d\xi_1 \ldots d\xi_k.$$

Применяя эту формулу последовательно r раз и принимая во внимание определение символа (1), убедимся в правильности неравенства (8) в случае $T(x, \delta) = \square(x, \delta)$, $K = 1$.

Общий же случай сводится к только что рассмотренному на основании неравенства

$$[f_\delta(x)] \leqslant \frac{1}{K} \cdot \frac{\int\limits_{\square(x,\delta)} |f(\xi)|\, d\xi}{mes\, \square(x, \delta)},$$

которое непосредственно вытекает из неравенства (K).

3. Свойство 4° символа (1) позволяет ввести понятие пространства $L_{p_1 \ldots p_r}^{G/E_{n_1} \ldots E_{n_r}}$:

$L_{p_1 \ldots p_r}^{G/E_{n_1} \ldots E_{n_r}}$ — метрическое пространство всех измеримых на G функций f, для которых

$$\| f \|_{p_1 \ldots p_r}^{G/E_{n_1} \ldots E_{n_r}} < \infty,$$

с функцией расстояния

$$\rho_{p_1 \ldots p_r}^{G/E_{n_1} \ldots E_{n_r}}(f, g) = \| f - g \|_{p_1 \ldots p_r}^{G/E_{n_1} \ldots E_{n_r}}.$$

Из свойства 6° символа (1) непосредственно вытекает, что если

$$1 < p_i \leqslant q_i \leqslant \infty, (i = 1, 2, \ldots r),$$

то

$$L^{G/E_{n_1}\ldots E_{n_r}}_{q_1\ldots q_r} \subseteq L^{G/E_{n_1}\ldots E_{n_r}}_{p_1\ldots p_r}.$$

При $p_1 = \ldots = p_r = p < \infty$, на основании теоремы Лебега-Фубини, имеем:

$$L^{G/E_{1}\ldots E_{n_r}}_{p_1\ldots p_r} = L^{G}_{p}.$$

При $p_1 = \ldots = p_r = \infty$ получим пространство равномерной сходимости на G в смысле „почти всюду".

§ 2. Полнота пространства $L^{G/E_{n_1}\ldots E_{n_r}}_{p_1\ldots p_r}$.

1. Теорема 1. Метрическое пространство $L^{G/E_{n_1}\ldots E_{n_r}}_{p_1\ldots p_r}$ является полным.

Доказательство. Пусть последовательность $\{f_\alpha\}$ является фундаментальной в пространстве $L^{G/E_{n_1}\ldots E_{n_r}}_{p_1\ldots p_r}$:

$$\rho^{G/E_{n_1}\ldots E_{n_r}}_{p_1\ldots p_r}(f_\alpha, f_\beta) < \varepsilon, \quad (\alpha, \beta > N). \tag{9}$$

Докажем, что она сходится в этом пространстве.

На основании неравенства (7) последовательность $\{f_\alpha\}$ является фундаментальной и потому сходящейся в пространстве L_1^G:

$$\lim_{\alpha \to \infty} f_\alpha = f.$$

Следовательно, из нее можно выделить такую подпоследовательность $\{f_{\alpha_k}\}$, которая почти всюду сходится на G к f:

$$\lim_{k \to \infty} f_{\alpha_k}(x) = f(x). \tag{10}$$

Положим q_i равным произвольному натуральному числу при $p_i = \infty$ и p_i при $p_i < \infty$.

Из неравенства (9) и следствия 1) 3°, 2, § 1 вытекает существование такой положительной постояной A, зависящей только от пространства $L^{G/E_{n_1}\ldots E_{n_r}}_{p_1\ldots p_r}$, что

$$\rho^{G/E_{n_1}\ldots E_{n_r}}_{q_1\ldots q_r}(f_{\alpha_k}, f_\beta) < A \cdot \varepsilon, \quad (\alpha_k, \beta > N). \tag{11}$$

Но справедливо следующее утверждение:

если последовательность $\{h_\alpha\}$ измеримых на множестве G функций h_α почти всюду сходится к функции h, то

$$\| h \|^{G/E_{n_1}\ldots E_{n_r}}_{q_1\ldots q_r} \leqslant \sup_{(\alpha)} \| h_\alpha \|^{G/E_{n_1}\ldots E_{n_r}}_{q_1\ldots q_r} \tag{12}$$

Это утверждение в общем случае доказывается совершенно аналогично тому, как оно доказывается в случае $q_1 = \ldots = q_r = 1$, превращаясь в этом последнем случае в теорему Фату.

Отсюда и из соотношений (10), (11) заключаем, что

$$\rho^{G/E_{n_1}\ldots E_{n_r}}_{q_1\ldots q_r}(f, f_\beta) \leqslant A \cdot \varepsilon, \quad (\beta > N). \tag{13}$$

Устремляя последовательно, начиная с последней, величины q_i, для которых $p_i = \infty$, к ∞ и принимая во внимание каждый раз формулу (12), на основании утверждения 3°, 2, § 1 получим неравенства

$$\rho^{G/E_{n_1}\ldots E_{n_r}}_{p_1\ldots p_r}(f, f_\beta) \leqslant A \cdot \varepsilon, \quad (\beta > N).$$

Из этих неравенств непосредственно вытекает, что $f \in L^{G/E_{n_1}\ldots E_{n_r}}_{p_1\ldots p_r}$ и последовательность $\{f_\alpha\}$ в пространстве $L^{G/E_{n_1}\ldots E_{n_r}}_{p_1\ldots p_r}$ сходится к f.

Теорема 1 доказана.

2. Интересно заметить, что если при определении нормы (1) символ

$$\inf_{\substack{\Sigma \subseteq G^* \\ mes\, \Sigma = 0}} \sup_{x \in G^* - \Sigma}$$

заменить на символ

$$\sup_{x \in G^*},$$

то, при $p_1 < \infty$ и $p_2 \ldots p_r = \infty$ пространсто $L^{G/E_{n_1}\ldots E_{n_r}}_{p_1\ldots p_r}$ не будет полным.

Если же $p_1 = \infty$ и $p_2 \ldots p_r < \infty$, то это пространство будет полным.

§ 3. Теоремы о компактности в $L^{G/E_{n_1}\ldots E_{n_r}}_{p_1\ldots p_r}$

1. На метрическое пространство $L^{G/E_{n_1}\ldots E_{n_r}}_{p_1\ldots p_r}$ можно перенести, с соответствующими изменениями и добавлениями, теоремы о компактности А. Н. Колмогорова и М. Рисса.

Теорема 2. Для того, чтобы подмножество M множества $L^{G|E_{n_1}\dots E_{n_r}}_{p_1\dots p_r}$ было компактным в пространстве $L^{G|E_{n_1}\dots E_{n_r}}_{p_1\dots p_r}$ необходимо при (при $p_1 \dots p_r < \infty$) и достаточно (при $p_1 \dots p_r > 1$), чтобы

1) Множество M было равномерно ограниченным в пространстве $L^{G|E_{n_1}\dots E_{n_r}}_{p_1\dots p_r}$:

$$\|f\|^{G|E_{n_1}\dots E_{n_r}}_{p_1\dots p_r} < A < \infty, \quad (f \in M).$$

2) При любом положительном числе ε нашлось такое положительное число δ, что для каждого элемента f из M

$$\rho^{G|E_{n_1}\dots E_{n_r}}_{p_1\dots p_r}(f, f_\delta) < \varepsilon.$$

Символ f_δ определен в § 1, п. 2, 7°, причем от функции $T(x, \delta)$, кроме свойств 1), 2) п. 4°, 2, § 1, здесь требуется еще следующее свойство:

3) Для каждого значения E_{n_i} $(i = 1, 2, \dots, r)$ проекция $T_{n_i}(x, \delta)$ множества $T(x, \delta)$ на E_{n_i} равномерно непрерывна на множестве G, а именно: каково бы ни было положительное число ε, найдется такое положительное число $\eta = \eta(\varepsilon)$, что если

$$\rho_n(x', x'') < \eta, \quad (x', x'' \subset G),$$

то, в смысле меры в E_{n_i},

$$mes\{T_{n_i}(x', \delta) - T_{n_i}(x', \delta).\ T_{n_i}(x''\delta)\} < \varepsilon.$$

Доказательство. Так как доказательство этой теоремы во многом аналогично доказательству теоремы А. Н. Колмогорова*), в ко, торую теорема 2 превращается при $p = \dots = p_r < \infty$ и $T(x, \delta) = S(x, \delta)$- где $S - n$ — мерная сфера с центром в точке x радиуса δ, то мы ограничимся здесь только схемой доказательства.

1°. Необходимость. Пусть множество M компактно в $L^{G|E_{n_1}\dots E_{n_r}}_{p_1\dots p_r}$, $(p_1 \dots p_r < \infty)$**)

Так как пространство $L^{G|E_{n_1}\dots E_{n_r}}_{p_1\dots p_r}$ является полным (теорема 1), то, на основании теоремы Гаусдорфа, в нем найдется конечная ε — сеть для множества M

$$f_1, f_2, \dots, f_N. \tag{14}$$

Функции (14) можно считать многочленами от $x_1, \dots, x_n$ (так как все $p_i < \infty$).

*) A. Kolmogoroff, Uber Kompaktheit der Funktionenmengen bei der Konvergenz im Mittel, Nachrichten, Gottingen (1931).

**) Как и всегда $p \geqslant 1$, $(i = 1, 2, \dots, r)$.

Пусть

$$A = \varepsilon + \max_{(i=1, 2, \dots, N)} \|f_i\|^{G|E_{n_1}\dots E_{n_r}}_{p_1\dots p_r}$$

Тогда на основании 4°, 2, § 1, имеют место неравенства

$$\|f\|^{G|E_{n_1}\dots E_{n_r}}_{p_1\dots p_r} < A, \quad (f \in M).$$

Следовательно, множество M равномерно ограничено в $L^{G|E_{n_1}\dots E_{n_r}}_{p_1\dots p_r}$

Так как функции (14) являются многочленами, то найдется столь малое положительное число δ, что будут иметь место неравенства

$$\rho^{G|E_{n_1}\dots E_{n_r}}_{p_1\dots p_r}(f_i, f_{i\delta}) < \varepsilon, \quad (i = 1, 2, \dots N).$$

Но расстояние каждой точки f из M до множества (14) меньше ε

$$\rho^{G|E_{n_1}\dots E_{n_r}}_{p_1\dots p_r}(f, f_s) < \varepsilon, \quad (s = s(f)).$$

Отсюда и из формулы (8) (п. 7°, 2, § 1) заключаем, что

$$\rho^{G|E_{n_1}\dots E_{n_r}}_{p_1\dots p_r}(f, f_\delta) \leqslant \rho^{G|E_{n_1}\dots E_{n_r}}_{p_1\dots p_r}(f, f_s) + \rho^{G|E_{n_1}\dots E_{n_r}}_{p_1\dots p_r}(f_s, f_{s\delta}) +$$

$$+ \rho^{G|E_{n_1}\dots E_{n_r}}_{p_1\dots p_r}(f_{s\delta}, f_\delta) < \varepsilon + \varepsilon + \frac{\varepsilon}{K} = \left(2 + \frac{1}{K}\right) \cdot \varepsilon.$$

Необходимость доказана.

2°. Достаточность. Пусть для множества M выполнены условия 1), 2) теоремы и $p_1 \dots p_r > 1$.

Не ограничивая общность, G можно считать состоящим только из точек плотности для G.

Рассмотрим множество M_δ всех функций f_δ, $f \in M$, где величина δ определена условием 2) теоремы и зависит от ε.

Множество M_δ равностепенно непрерывно на G.

Действительно, пусть η — произвольное положительное число.

Положим $q_i = p_i$ при $p_i < \infty$ и произвольному натуральному числу > 1 при $p_i = \infty$.

Из формулы 6°, 2, § 1 непосредственно вытекает, что множество M равномерно ограничено в пространстве $L^{G|E_{n_1}\dots E_{n_r}}_{q_1\dots q_r}$:

$$\|f\|^{G|E_{n_1}\dots E_{n_r}}_{q_1\dots q_r} < B, \quad (f \in M). \tag{15}$$

Выберем положительное число ζ столь малым, чтобы было выполнено условие:
если

$$\rho_n(x', x'') < \zeta, \ (x', x'' \subset G), \tag{16}$$

то

$$\left.\begin{aligned} &|mes_{E_n} T(x'\delta) - mes_{E_n} T(x'', \delta)| < \eta \\ &mes_{E_{n_i}} \{ T_{n_i}(x', \delta) - T_{n_i}(x', \delta) . T_{n_i}(x'', \delta) \} < \eta \\ &mes_{E_{n_i}} \{ T_{n_i}(x'', \delta) - T_{n_i}(x'', \delta) . T_{n_i}(x', \delta) \} < \eta \end{aligned}\right\} \ldots \tag{17}$$

$i = 1, 2, \ldots \ldots , r.$

Возможность удовлетворения этому условию непосредственно вытекает из условия 3) теоремы.

Согласно неравенству (K) п. 7°, 2, § 1), имеют место неравенства

$$\frac{1}{mes_{En} T(x', \delta)} \leqslant \frac{1}{K \cdot \delta^n}, \ \frac{1}{mes_{En} T(x'', \delta)} \leqslant \frac{1}{K \cdot \delta^n}, \ (x', x'' \subset G). \tag{18}$$

Наконец, при любых значениях $f \in M$ и x', $x'' \subset G$ имеет место неравенство

$$|f_\delta(x') - f_\delta(x'')| \leqslant |mes_{E_n} T'' - mes_{En} T'| \cdot \frac{\left| \int\limits_{T' . T''} f(\xi) d\xi \right|}{mes_{En} T' \cdot mes_{En} T''} +$$

$$+ \frac{\left| \int\limits_{T' - T' . T''} f(\xi) d\xi \right|}{mes_{En} T'} + \frac{\left| \int\limits_{T'' - T'' \cdot T'} f(\xi) d\xi \right|}{mes_{En} T''}, \tag{19}$$

где $T' = T(x', \delta)$ и $T'' = T(x'', \delta)$.

Пользуясь неравенством (7) (п. 6°, 2, § 1) и (15), можно оценить три интеграла правой части соотношения (19), полагая в неравенстве (7) последовательно

$$G' = T' \cdot T'', \ G = T' - T' \cdot T'', \ G = T'' - T'' \cdot T'.$$

Получим:

$$\left| \int\limits_{T' . T''} f(\xi) d\xi \right| \leqslant \prod_{i=1}^{r} \left\{ mes_{E_{n_i}} T'_{n_i} \cdot T''_{n_i} \right\}^{\frac{q_i - 1}{q_i}} B \leqslant \prod_{i=1}^{r} \left\{ mes_{E_{n_i}} G_{n_i} \right\}^{\frac{q_i - 1}{q_i}} B = B' \tag{20}$$

$$\left| \int\limits_{T' - T' . T''} f(\xi) \cdot d\xi \right| \leqslant \prod_{i=1}^{r} \left\{ mes_{E_{n_i}} \left(T'_{n_i} - T'_{n_i} \cdot T''_{n_i} \right) \right\}^{\frac{q_i - 1}{q_i}} B \tag{21}$$

$$\left| \int\limits_{T'' - T' . T'} f(\xi) d\xi \right| \leqslant \prod_{i=1}^{r} \left\{ mes_{E_{ni}} \left(T''_{n_i} - T''_{n_i} \cdot T'_{n_i} \right) \right\}^{\frac{q_i - 1}{q_i}} B, \tag{22}$$

где

$$T'_{n_i} = T_{n_i}(x', \delta) \quad \text{и} \quad T''_{n_i} = T_{n_i}(x'', \delta).$$

Предполагая теперь, что точки x', x'' из G удовлетворяют неравенству (16), и пользуясь оценками (17), (18), (20), (21), (22), из неравенства (19) получим:

$$\left| f_\delta(x') - f_\delta(x'') \right| < \frac{B'}{K^2 \cdot \delta^{2n}} \eta + \frac{2B}{K \cdot \delta^n} \cdot \eta^{\sum\limits_{i=1}^{r} \frac{q_i - 1}{q_i}}, \ (f \in M).$$

Так как $\sum\limits_{i=1}^{r} \frac{q_i - 1}{q_i} > 0$ и величины B, B', δ, q_i не зависят ни от x' x'', f ни от η, ζ, а величина ζ не зависит от x', x'', f, то равностепенная непрерывность множества M_δ доказана.

Далее, из непрерывности функции f_δ на G, $f \in M$, и из условия 1) теоремы вытекает существование для каждого измеримого подмножества G^* множества G, $mes\, G^* > 0$, такой точки $x_f \in G^*$, являющейся точкой плотности для G^* в обычном смысле, что

$$\left| f_\delta(x_f) \right| < \frac{A}{K} \cdot \frac{1}{\| 1 \|_{p_1 \ldots p_r}^{G|E_{n_1} \ldots E_{n_r}}} < \infty .$$

Отсюда и из равностепенной непрерывности множества M_δ непосредственно вытекает его равномерная ограниченность на G.

На основании теоремы Арцеля множество M_δ компактно в пространстве C^G, а потому и в пространстве $L_{p \ldots p_r}^{G|E_{n_1} \ldots E_{n_r}}$.

Отсюда, принимая во внимание условие 2) теоремы, на основании теоремы Фреше, заключаем, что множество M компактно в пространстве $L_{p_1 \ldots p_r}^{G|E_{n_1} \ldots E_{n_r}}$.

Теорема 2 доказана.

Т е о р е м а 3. Для того, чтобы подмножество M множества $L_{p_1 \ldots p_r}^{G|E_{n_1} \ldots E_{n_r}}$ было компактным в пространстве $L_{p_1 \ldots p_r}^{G|E_{n_1} \ldots E_{n_r}}$, необходимо (при $p_1 \ldots p_r < \infty$) и достаточно (в общем случае), чтобы

1) Множество M было равномерно ограниченным в пространстве $L_{p_1 \ldots p_r}^{G|E_{n_1} \ldots E_{n_r}}$:

$$\| f \|_{p_1 \ldots p_r}^{G|E_{n_1} \ldots E_{n_r}} < A, \ (f \in M)$$

2) Каково бы ни было положительное число ε, нашлось такое положительное число δ, что если

$$\sum_{i=1}^{n} (\Delta x_i)^2 < \delta^2, \ (\Delta x_i \text{ — вещественные числа}),$$

то для всех элементов f из M

$$\rho_{p_1 \ldots p_r}^{G|E_{n_1} \ldots E_{n_r}} (f, f_\Delta) < \varepsilon.$$

При этом $f_\Delta(x)\equiv f(x+\Delta x)$ и $f(x)\equiv 0$ вне множества G *).

Доказательство. 1°. Необходимость. Пусть множество M компактно в пространстве $L^{G|E_{n_1}\ldots E_{n_r}}_{p_1\ldots p_r}$, $p_1\ldots p_r<\infty$.

Тогда очевидно, что условие 1) выполнено.

Докажем, что выполнено и условие 2)

Предположим, что оно не выполнено.

Тогда найдется такое положительное число ε_0, что для некоторой последовательности $\{f_m\}$ элементов f_m из M и некоторой последовательности $\{\Delta_m\}$ положительных чисел Δ_m, сходящейся к нулю, будут иметь место неравенства

$$\| f_m-f_{m\Delta m}\|^{G|E_{n_1}\ldots E_{n_r}}_{p_1\ldots p_r}>\varepsilon_0, \qquad m(=1,\ 2,\ 3,\ \ldots). \tag{23}$$

Так как множество M компактно в пространстве $L^{G|E_{n_1}\ldots E_{n_r}}_{p_1\ldots p_r}$, то последовательность $\{f_m\}$ можно считать сходящейся в этом пространстве к некоторому элементу f:

$$\lim_{m\to\infty} f_m=f, \ \left(f\in L^{G|E_{n_1}\ldots E_{n_r}}_{p_1\ldots p_r}\right). \tag{24}$$

Принимая во внимание компактность множества M в пространстве $L_1{}^G$, можно считать, что эта последовательность почти всюду сходится на множестве G:

$$\lim_{m\to\infty} f(x_m)=f(x),\ (x\in G). \tag{25}$$

Но имеет место соотношение

$$\lim_{\Delta\to 0} mes\ G\cdot G_\Delta=mes\ G, \tag{26}$$

где множество G_Δ получается из множества G преобразованием

$$x'=x+\Delta \qquad (\Delta \text{— вещественное число}).$$

Действительно, это утверждение верно для случая, когда G— область, следовательно оно верно и для случая, когда G—замкнутое множество *).

Но так как при любом положительном числе Θ найдется такое замкнутое подмножество G' множества G, мера которого отличается от меры множества G меньше чем на Θ, то это утверждение верно и в общем случае.

Из соотношений (25), (26) следует, что почти всюду на множестве G имеет место соотношение

$$\lim_{m\to\infty} f(x+\Delta_m)=f(x). \tag{27}$$

---

*) Ср. M. Riesz, Meddelanden fran Lunds Universitets, Mat. Seminar. 1. (1933—34).

*) Этого и достаточно для доказательства дальнейшего утверждения (27).

Действительно, пусть G'—замкнутое подмножество множества G, $mes(G-G')<\Theta$, на котором функции f_m непрерывны и сходимость (25) является равномерной.

Так как почти каждая точка x множества G', на основании соотношения (26), удовлетворяет условию:

$$x+\Delta_m\in G',\ (m>N=N(x)),$$

то соотношение (27), ввиду равномерной сходимости (25) последовательности $\{f_m\}$ непрерывных функций f_m на множестве G', имеет место почти всюду на G'.

Но положительное число Θ можно взять сколь угодно малым.

Следовательно, соотношение (27) верно почти всюду и на множестве G.

Так как по предположению $p_1\ldots p_r<\infty$, то из соотношений (24), (25), (27) заключаем, что

$$\lim_{m\to\infty}\| f_m-f_{m\Delta m}\|^{G|E_{n_1}\ldots E_{n_r}}_{p_1\ldots p_r}=0.$$

Это соотношение противоречит соотношениям (23), что и доказывает правильность высказанного выше утверждения о необходимости условия 2) теоремы.

2°. Достаточность. Пусть для множества M выполнены условия 1), 2) теоремы, $p_1\cdots p_r\leqslant\infty$.

Докажем, что оно компактно в $L^{G|E_{n_1}\ldots E_{n_r}}_{p_1\ldots p_r}$.

С этой целью рассмотрим множество M_δ всех функций f_δ, $f\in M$, где величина δ определена условием 2) теоремы и зависит от ε, а

$$f_\delta(x)=\frac{\int\limits_{\square(x),\delta} f[\xi]d\xi}{mes\,\square(x,\delta)}, \text{ (см. 7°, 2, § 1),}$$

причем, по определению, каждая функция из M вне множества G равна нулю.

Имеют место неравенства

$$\rho^{G|E_{n_1}\ldots E_{n_r}}_{p_1\ldots p_r}(f,f_\delta)<\varepsilon, \qquad (f\in M). \tag{28}$$

Для доказательства их зафиксируем элемент f.

Пусть $\bar G$ — произвольная ограниченная область, содержащая все кубы $\square(x,\delta)$, $x\in G$.

Положим $q_i=p_i$, если $p_i<\infty$, и произвольному натуральному числу, если $_i=\infty$.

Из условия 2) теоремы, на основании формулы п. 6°, 2, § 1, заключаем, что если

$$\sum_{i=1}^{n}(\Delta x_i)^2<\delta^2,$$

то

$$\rho_{q_1 \dots q_r}^{G \mid E_{n_1} \dots E_{n_r}}(f, f_\Delta) < \lambda_q \cdot \varepsilon, \tag{29}$$

где

$$\lambda_q = \prod_{i=1}^{r} (mes\, G_{n_i})^{\frac{p_i - q_i}{p_i\, q_i}}.$$

Далее, существует такая последовательность $\{f_\alpha\}$ равномерно непрерывных на множестве $\overline{G}$ функций f_α, что

a) почти всюду на $\overline{G}$

$$\lim_{\alpha \to \infty} f_\alpha(x) = f(x),$$

b) при заданном $\theta > 0$ найдется такое $N = N(\theta) > 0$, что если $\alpha > N$, то

$$\rho_{q_1 \dots q_r}^{G \mid E_{n_1} \dots E_{n_r}}(f_\alpha, f) < \theta, \tag{30}$$

и если, кроме того,

$$\sum_{i=1}^{n} (\Delta x_i)^2 < \delta^2,$$

то

$$\rho_{q_1 \dots q_r}^{G \mid E_{n_1} \dots E_{n_r}}(f_\alpha, f_{\alpha\Delta}) < 2\theta + \lambda_q \cdot \varepsilon. \tag{31}$$

Так как $1 \leqslant q_i < \infty$, $(i = 1, 2, \dots, r)$, то существование последовательности $\{f_\alpha\}$, удовлетворяющей условию a) и первой части условия b), очевидно.

Условию же (31) можно удовлетворить, при достаточно больших значениях α, на основании неравенств (29), (30).

Рассмотрим какую-либо функцию f_α, $\alpha > N$.

Так как она равномерно непрерывна на $\overline{G}$ и $\square(x, \delta) \subset \overline{G}, (x \in G)$, то из определения кратного интеграла получим:

$$f_\alpha(x) - f_{\alpha\delta}(x) = \lim_{m \to \infty} \sum_{i=1}^{m} [f_\alpha(x) - f_\alpha(x + \tau_i)] \cdot \frac{mes\, \Sigma_i}{mes\, \square\,(0, \delta)}, \tag{32}$$

где Σ_r — подобласти области $\square\,[0, \delta]$ и $\tau_i \in \Sigma_i$, $(i = 1, 2, \dots, m]$, причем,

$$\square\,(0, \delta) = \sum_{i=1}^{m} \Sigma_i \quad , \Sigma_i \text{ и } \Sigma_j \text{ не имеют общих внутренних точек при } i \neq j,$$

и максимум диаметров множеств Σ_i стремится к нулю при $m \to \infty$.

Пользуясь основными свойствами функции расстояния, из соотношения (32) получим:

$$\rho_{q_1 \dots q_r}^{G \mid E_{n_1} \dots E_n}(f_\alpha, f_{\alpha\delta}) \leqslant \lim_{m \to \infty} \sum_{i=1}^{m} \rho_{q_1 \dots q_r}^{G \mid E_{n_1} \dots E_{n_r}}(f_\alpha, f_{\alpha\tau_i}) \cdot \frac{mes\, \Sigma_i}{mes\, \square\,[0, \delta]}. \tag{33}$$

Но все точки τ_i принадлежат $\square\,(0, \delta)$.

Следовательно, на основании неравенств (31) из неравенства (33) получаем:

$$\rho_{q_1 \dots q_r}^{G \mid E_{n_1} \dots E_{n_r}}(f_\alpha, f_{\alpha\delta}) \leqslant \lim_{m \to \infty} \sum_{i=1}^{m} (2\theta + \lambda_q \cdot \varepsilon) \cdot \frac{mes\, \Sigma_i}{mes\, \square\,(0, \delta)} = 2\theta + \lambda_q \cdot \varepsilon. \tag{34}$$

Из неравенств (30) и (34), принимая во внимание формулу (8) § 1, заключаем, что

$$\rho_{q_1 \dots q_r}^{G \mid E_{n_1} \dots E_{n_r}}(f, f_\delta) \leqslant \rho_{q_1 \dots q_r}^{G \mid E_{n_1} \dots E_{n_r}}(f, f_\alpha) + \rho_{q_1 \dots q_r}^{G \mid E_{n_1} \dots E_{n_r}}(f_\alpha, f_{\alpha\delta}) + \rho_{q_1 \dots q_r}^{G \mid E_{n_1} \dots E_{n_r}}(f_{\alpha\delta}, f_\delta) <$$

$$< \theta + (2\theta + \lambda_q \cdot \varepsilon) + \frac{\theta}{K} = \left(3 + \frac{1}{K}\right) \cdot \theta + \lambda_q \cdot \varepsilon.$$

Но положительную величину θ можно взять сколь угодно малой.

Следовательно,

$$\rho_{q_1 \dots q_r}^{G \mid E_{n_1} \dots E_{n_r}}(f, f_\delta) < \lambda_q \cdot \varepsilon. \tag{35}$$

Устремляя последовательно, начиная с последней, величины $q_i \neq p_i$ к ∞, на основании формулы (2) § 1, из неравенств (35) получим неравенства (28), что и требовалось доказать.

Множество M_δ компактно в пространстве $L_{p_1 \dots p_r}^{G \mid E_{n_1} \dots E_{n_r}}$.

Действительно, заменив в формуле (7) § 1 G на $\square(x, \delta)$ и, следовательно, G_{n_i} на $\square_{n_i}(x, \delta)$, на основании условия 1) теоремы, будем иметь неравенства

$$|f_\delta(x)| \leqslant \mu_\delta \cdot \| f \|_{p_1 \dots p_r}^{G \mid E_{n_1} \dots E_{n_r}} < \mu_\delta \cdot A, \quad (f \in M),$$

где

$$\mu_\delta = \prod_{i=1}^{r} \left\{ mes_{E_{n_i}} \square_{n_i}(x, \delta) \right\}^{\frac{p_i - 1}{p_i}}.$$

Следовательно, множество M_δ равномерно ограничено в C^G.

Далее, заменив в неравенстве (7) § 1 G на $\square\,(x, \delta)$ и $f(\xi)$ на $f_\Delta(\xi) - f(\xi)$, получим неравенства

$$|f_\delta(x + \Delta x) - f_\delta(x)| \leqslant \frac{\mu_\delta}{mes\, \square\,(0, \delta)} \cdot \rho_{p_1 \dots p_r}^{G \mid E_{n_1} \dots E_{n_r}}(f, f_\Delta), \quad (f \in M). \tag{36}$$

Но вне множества G функция f равна нулю.

Следовательно, на основании формулы п. 5°, 2, § 1, можно написать неравенства

$$\rho_{p_1\,\ldots\,p_r}^{\square(x,\delta)/E_{n_1}\,\ldots\,E_{n_r}}(f,f_\Delta) \leqslant \rho_{p_1\,\ldots\,p_r}^{\square(x,\delta)\,.\,G/E_{n_1}\,\ldots\,E_{n_r}}(f,f_\Delta) +$$

$$+\ \rho_{p_1\,\ldots\,p_r}^{\square(x,\delta)-\square(x,\delta).\,G/E_{n_1}\,\ldots\,E_{n_r}}(f,f_\Delta) \leqslant \rho_{p_1\,\ldots\,p_r}^{\square(x,\delta)\,.\,G/E_{n_1}\,\ldots\,E_{n_r}}(f,f_\Delta) + \tag{37}$$

$$+\,\rho_{p_1\,\ldots\,p_r}^{\square(x+\Delta x,\delta)\,.\,G/E_{n_1}\ldots E_{n_r}}(f,f_\Delta) \leqslant \rho_{p_1\,\ldots\,p_r}^{G/E_{n_1}\,\ldots\,E_{n_r}}(f,f_\Delta) + \rho_{p_1\,\ldots\,p_r}^{G/E_{n_1}\,\ldots\,E_{n_r}}(f_\Delta,f).$$

Из неравенств (36), (37) и условия 2) теоремы вытекает, что если

$$\sum_{i=1}^{n}(\Delta x_i)^2 = \sum_{i=1}^{n}(-\Delta x_i)^2 < \delta^{*\,2},$$

где δ^* определяется в условии 2) теоремы величиной ε^*, то

$$\left| f_\delta(x+\Delta x) - f_\delta(x) \right| < \frac{\mu_\delta}{mes\,\square\,(0,\delta)} \cdot 2 \cdot \varepsilon^*.$$

Следовательно, множество M_δ равностепенно непрерывно на множестве G.

По теореме Арцеля множество M_δ компактно в пространстве C^G.

Следовательно, множество M_δ компактно и в пространстве $L_{p_1\ldots p_r}^{G/E_{n_1}\ldots E_{n_r}}$, что и требовалось доказать.

Так как при каждом положительном числе ε соответствующее множество M_δ компактно в $L_{p_1\ldots p_r}^{G/E_{n_1}\ldots E_{n_r}}$ и удовлетворяет неравенствам (28), то, согласно теореме Фреше, множество M компактно в пространстве $L_{p_1\ldots p_r}^{G/E_{n_1}\ldots E_{n_r}}$.

Теорема 3 доказана полностью.

2. Можно показать, что условия 2) теорем 2, 3 при $p_1 \ldots p_r = \infty$ не всегда являются необходимыми.

ТРУДЫ ОДЕССКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА
ГОД XXIX имени И. И. МЕЧНИКОВА ТОМ VI (59)

Профессор Н. А. ЛЕДНЕВ,
доктор физико-математических наук

ТЕОРЕМА О ДИФФЕРЕНЦИРУЕМОСТИ МНОГОКРАТНОГО ИНТЕГРАЛА ПО ПАРАМЕТРУ

Во многих вопросах математической физики приходится дифференцировать по параметрам интегралы вида

$$I(x) = \int\limits_{G(x)} F(x,\xi)\,d\xi\,,\ (x \in G,\ d\xi > 0),$$

G—область n—мерного эвклидова пространства E_n, $(n > 1)$, с переменными областями интегрирования $G(x)$, $G(x) \subseteq G$.

Насколько мне известно, общая теорема о дифференцировании кратных интегралов по параметрам раньше не была известна.

Целью настоящей заметки и является доказательство такой теоремы.

1. Теорема. Предположим, что выполнены следующие условия:

1) Функция F ограничена и непрерывна по (x,ξ) в области G^2, $(x \in G, \xi \in G)$.

2) В этой области функция F имеет ограниченную частную производную F'_{x_n}, кусочно-непрерывную по ξ при каждом $x \in G$.

3) В области G^2 выражение

$$\frac{\Phi'_{x_n}}{\sqrt{(grad_\xi\,\Phi)^2}},$$

где $\Phi = \Phi(x,\xi)$—непрерывная функция от $(x,\xi) \in G^2$, определяющая уравнение

$$\Phi(x,\xi) = 0$$

границы $S(x)$ области $\Phi(x)$, существует и ограничено при всех $x \in G$ и почти всех (в смысле поверхностной меры) $\xi \in S(x)$, причем кусочно-непрерывно на каждой поверхности $S(x)$.

Тогда в каждой точке $x \in G$ производная I'_{x_n} существует и выражается формулой

$$\frac{\partial I}{\partial x_n} = \int\limits_{S(x)} F(x,\xi)\,sign\,grad_\xi\,\Phi \cdot \frac{\Phi'_{x_n}}{\sqrt{(grad_\xi \Phi)^2}}\,dS + \int\limits_{G(x)} F'_{x_n}(x,\xi)\,d\xi,$$

где символ $sign\,\bar{a}(\xi)$ равен $+1, -1$ или 0 в зависимости от того, направлен ли вектор $\bar{a}(\xi)$ в точке ξ поверхности $S(x)$ внутрь, во вне области $G(x)$ или неопределенно.

Доказательство. Не останавливаясь на доказательстве теоремы подробно, укажем лишь на общую схему доказательства.

С помощью простых рассуждений доказательство теоремы в общем случае сводится к ее доказательству в случае, когда

$$F(x, \xi) \equiv F(\xi),$$

функции $F, \Phi'_{x_n}, \Phi'_{\xi_i}, (i = 1, 2, \ldots n)$, непрерывны в замкнутой области G^2 и

$$(grad_\xi\, \Phi)^2 = \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial \Phi}{\partial \xi_i}\right)^2 > 0, \ (x \in G).$$

Пусть a — произвольная точка области G, точка x отличается от a только n-ой координатой, $x = (a_1, \ldots a_{n-1}, x_n)$, и

$$G'(x) = G(x) - G(x) \cdot G(a)^{*)}$$
$$G''(x) = G(a) - G(x) \cdot G)a).$$

Для величины $\Delta I(a) = I(x) - I(a)$ имеем выражение

$$\Delta(a) = \int\limits_{C'(x)} F(\xi)\, d\xi - \int\limits_{C''(x)} G(\xi)\, d\xi.$$

Рассмотрим, для определенности, интеграл

$$\Delta' I(a) = \int\limits_{G'(x)} F(\xi)\, d\xi.$$

Обозначим через $S'(a)$ пересечение $S(a)$ с границей области $G'(x)$ и через $S''(x)$ пересечение $S(a)$ с границей области $G''(x)$.

Очевидно, что

$$S'(x) + S''(x) = S(a)^{**)},$$

причем, $S'(x)$ и $S''(x)$ не имеют ни одной общей внутренней точки.

Положим

$$\lim_{x \to a} S'(x) = S'(a), \ \lim_{x \to a} S''(x) = S''(a)^{***)}.$$

Разобьем поверхность $S'(x)$ на элементарные подобласти

$$\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_N$$

с кусочно-гладкими границами и с диаметрами, не превосходящими $(\Delta x_n)^2$, где

$$\Delta x_n = x_n - a_n.$$

---

*) $M_1 \cdot M_2$ — пересечение множеств M_1 и M_2.

**) $M_1 + M_2$ — сумма множеств M_1 и M_2.

***) Пределы понимаются в смысле поточечной сходимости.

Обозначим через $\bar{l}(x, \xi)$ нормаль к поверхности $S(a)$ в точке ξ с концом на поверхности $S(x)$.

Множество точек всех нормалей $\bar{l}(x, \xi)$, для которых $\xi \in \sigma_i$, образуют n—мерную область V_i, ограниченную кусочно-гладкой поверхностью; $i = 1, 2, \ldots, n$.

Из определения меры области V_i следует, что

$$mes\, V_i = mes\, \sigma_i\, l(x, \xi^{(i)}) + \varepsilon_i \cdot mes\, \sigma_i \cdot l(x, \xi^{(i)}),$$

где меры понимаются в смысле соответствующих чисел измерений, $\xi^{(i)}$—фиксированная точка из σ_i, $l(x, \xi)$—длина вектора $\bar{l}(x, \xi)$ и $\max\limits_{(i=1 \ldots N)}(\varepsilon_i)$— бесконечно малая величина вместе с максимумом диаметров областей Vi; $i = 1, 2, \ldots, N$.

С другой стороны, из определений определенного интеграла и $G'(x)$ и из условий, наложенных на функции F, Φ, вытекает, что

$$\Delta' I(a) = \sum_{i=1}^{N} F(\xi^{(i)}) \cdot mes\, V_i + \bar{\varepsilon} \cdot \Delta x_n,$$

где $\bar{\varepsilon}$ бесконечно малая величина вместе с Δx_n.

Следовательно,

$$\Delta' I(a) = \sum_{i=1}^{N} F(\xi^{(i)}) \cdot l(x, \xi^{(i)}) \cdot mes\, \sigma_i + \varepsilon \cdot \Delta x_n, \tag{1}$$

где

$$\varepsilon = \bar{\varepsilon} + \sum_{i=1}^{N} \varepsilon_i\, F(\xi^{(i)}) \cdot \frac{l(x\, \xi^{(i)})}{\Delta x_n} \cdot mes\, \sigma_i.$$

Но легко доказать, что при $\Delta x_n \to 0$ выражение

$$\frac{l(x, \xi)}{|\Delta x_n|} \tag{2}$$

равномерно относительно ξ, $\xi \in G$, стремится к функции

$$\frac{|\Phi'_{x_n}(a, \xi)|}{\sqrt{(grad_\xi\, \Phi)_2}}. \tag{3}$$

Действительно, так как $\bar{l}(x, \xi) \parallel grad_\xi\, \Phi(a, \xi)$, то

$$\bar{l}(x, \xi) = \lambda \cdot grad_\xi\, \Phi(a, \xi),$$

где λ—число, и потому

$$l(x, \xi) = |\lambda| \cdot \sqrt{(grad_\xi\, \Phi)^2}. \tag{4}$$

С другой стороны, если η—конечная точка вектора $\bar{l}(x, \xi)$, то

$$\bar{l}(x, \xi) = (\eta_1 - \xi_1, \ldots, \eta_n - \xi_n)$$

и потому, в смысле равномерной сходимости по ξ,

$$\lim \left|\frac{\lambda}{\Delta x_n}\right| = \frac{|\Phi'_{x_n}(a,\xi)|^2}{\sqrt{(grad_\xi \Phi(a,\xi))^2}} \tag{5}$$

Из соотношений (4), (5) заключаем правильность высказанного выше утверждения.

Так как при $\Delta x_n \to 0$ выражение (2) равномерно относительно ξ, стремится к функции (3), то ε—бесконечно малая величина вместе с Δx_n.

Отсюда же, из соотношения (1) и из определения поверхностного интеграла, заключаем, что

$$\lim_{\Delta x_n \to 0} \frac{\Delta' I(a)}{|\Delta x_n|}$$

существует и равен

$$\int_{S'(a)} F(\xi) \cdot \frac{|\Phi'_{x_n}(a,\xi)|}{\sqrt{(grad_\xi \Phi)^2}} \cdot ds, \quad (\xi \in s'(a)).$$

Применяя рассуждения, проведенные для $\Delta' I(a)$, к интегралу

$$\Delta'' I(a) = \int_{G''(x)} F(\xi)\, d\xi,$$

получим соотношение

$$\lim_{\Delta x_n \to 0} \frac{\Delta'' I(a)}{|\Delta x_n|} = \int_{S''(a)} F(\xi) \cdot \frac{|\Phi'_{x_n}(a,\xi)|}{\sqrt{(grad_\xi \Phi)^2}} \cdot dS.$$

Но

$$\Delta I(a) = \Delta' I(a) - \Delta'' I(a).$$

Следовательно,

$$\lim_{\Delta x_n \to 0} \frac{\Delta I(a)}{|\Delta x_n|} = \int_{S'(a)} F(\xi) \cdot \frac{|\Phi'_{x_n}(a,\xi)|}{\sqrt{(grad_\xi \Phi)^2}} \cdot dS - \int_{S''(a)} F(\xi) \cdot \frac{|\Phi'_{x_n}(a,\xi)|}{\sqrt{(grad_\xi \Phi)^2}} \cdot dS. \tag{6}$$

Так как имеют место соотношения

$$sign\, \bar{l}(x,\xi) = \begin{cases} -1 & \text{внутри } S'(x) \\ +1 & \text{внутри } S''(x), \end{cases}$$

то из соотношения (6) получаем равенство

$$\frac{\Delta I(a)}{|\Delta x_n|} = -\int_{S(a)} F(\xi) \cdot sign\, \bar{l}(x,\xi) \cdot \frac{|\Phi'_{x_n}(a,\xi)|}{\sqrt{(grad_\xi \Phi)^2}} dS + \delta, \tag{7}$$

где δ—бесконечно малая величина вместе с Δx_n.

Но

$$sign\, \bar{l}(x,\xi) = -sign\, grad_\xi \Phi \cdot sign\, \Phi'_{x_n} \cdot sign\, \Delta x_n. \tag{8}$$

Действительно, это непосредственно вытекает из того, что

$$\Phi(a,\xi) = 0, \quad \Phi(x,\eta) = 0$$

и потому величина

$$\Phi'_{x_n}(a,\xi) \cdot \Delta x_n + \sum_{i=1}^{n} \Phi'_{\xi_i}(a,\xi) \cdot (\eta_i - \xi_i) = \Phi'_{x_n} \Delta x_n + \bar{l}(x,\xi) \cdot grad_\xi \Phi$$

является бесконечно малой высшего порядка по сравнению с

$$\sqrt{(\Delta x_n)^2 + \sum_{i=1}^{n} (\eta_i - \xi_i)^2}.$$

Подставляя выражение (8) в соотношение (7), умножая последнее на $sign\, \Delta x_n$ и устремляя затем Δx_n к 0, получим соотношение

$$\frac{\partial I(a)}{\partial x_n} = \int_{S(a)} F(\xi) \cdot sign\, grad_\xi \Phi \cdot \frac{\Phi'_{x_n}(a,\xi)}{\sqrt{(grad_\xi \Phi)^2}} \cdot dS,$$

что и требовалось доказать.

2. При соответствующих предположениях о функциях F, Φ, из доказанной теоремы непосредственно вытекает формула дифференцирования интеграла $I(x)$ в заданном направлении τ:

$$\frac{\partial I(x)}{\partial \tau} = \int_{S(x)} F(x,\xi) \cdot sign\, grad_\xi \Phi(x,\xi) \cdot \frac{\frac{\partial \Phi(x,\xi)}{\partial \tau}}{\sqrt{(grad_\xi \Phi(x,\xi))^2}} \cdot dS + \int_{G(x)} \frac{\partial F(x,\xi)}{\partial \tau} \cdot d\xi.$$

Частные случаи этой формулы (случаи, когда $G(x)$—сфера, конус и т. п.) были доказаны уже давно, в связи с решением различных задач математической физики.

Профессор Н. С. ВАСИЛЬЕВ,
доктор физико-математических наук

ПО ПОВОДУ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ „МАЯТНИК ФУКО"

В учебниках по теоретической механике Аппель и Дотевиль [7], Бухгольц [2], Розе [5] и др. при решении задачи „маятник Фуко" допускают ошибку, которая уничтожает ценность решения: для упрощения интегрирования уравнений движения маятника пренебрегают малыми второго порядка, считая за малые первого порядка r, ω, $\frac{r}{l}$, где r — расстояние материальной точки от вертикальной линии, проходящей через точку привеса маятника, ω — угловая скорость вращения земли, l — длина маятника; при этом не делается между ними различия. В действительности же в процессе решения задачи это допущение не выдерживается: в одних случаях пренебрегают соответствующими членами, в других случаях такие члены или даже меньшие — удерживают. Таким образом получают окончательные соответствующие уравнения, которые решают задачу, т. е. дают теоретическое объяснение наблюдаемому явлению.

Ясно, что такой способ решения неправилен. Если строго придерживаться допущения относительно пренебрежения малых второго порядка из числа указанных выше, то придется отбросить и те члены, которые отвечают кориолисовой силе; задача о движении маятника Фуко сведется тогда к задаче о движении сферического маятника относительно неподвижной земли.

В настоящей заметке я предлагаю, согласно учебнику Аппеля [8]: во-первых, в качестве малых величин первого порядка рассматривать $\frac{x}{l}$, $\frac{y}{l}$ с их производными и ω и пренебрегать их квадратами и высшими степенями; во-вторых, я показываю на простом обычном решении и на решениях других авторов, что предлагаемое допущение позволяет провести приближенное решение задачи Фуко без противоречий. Покажем это.

Возьмем за начало координат подвижной системы декартовых осей x, y, z точку 0, неизменно связанную с землей, ось z направим вертикально вниз, ось x — к югу в меридиане места наблюдения, ось y — к востоку.

Выписываем уравнение движения в векторной форме:

$$m\bar a_r = m\bar g + N + [-2\bar\omega, \bar v_r], \qquad (1)$$

m—масса движущейся точки (см. рис. 1),
$\bar a_r$—ее относительное ускорение, $\bar g$—ускорение силы тяжести,
$\bar N$—реакция нити, $\bar\omega$—угловая скорость вращения земли,
$\bar v_r$—относительная скорость точки.

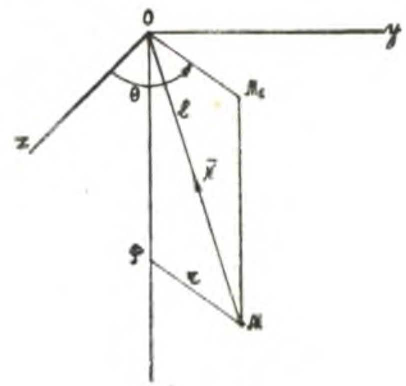


Рис. 1

Воспользуемся законом живых сил и законом моментов вокруг оси z. Умножая обе части уравнения (1) на $\bar v_r$ скалярно, имеем:

$$\bar a_r \bar v_r = \bar g \cdot \bar v_r,$$

уравнение, дающее интеграл живых сил в виде

$$v_r^2 = 2gz + h. \qquad (2)$$

Уравнение моментов вокруг оси z дает

$$\frac{d}{dt}\left(r^2\frac{d\vartheta}{dt}\right) = [\bar\rho, (-2\bar\omega, \bar v_r)]_z \qquad (3)$$

или

$$\frac{d}{dt}\left(r^2\frac{d\vartheta}{dt}\right) = [(2\bar\omega, \bar v_r), \bar\rho]_z = [(2\bar v_r \bar\rho)\bar v_r - 2\bar\omega(\bar\rho\cdot\bar\rho)]_z,$$

$\bar\rho$—радиус вектор точки M, образующей маятник, r—ее расстояние от оси z, θ—угол этого расстояния с осью x.

Заметим, что

$$2\dot{\bar\rho}\cdot\bar\rho = \frac{d}{dt}(l^2) = 0,$$

$$\bar\omega\cdot\rho = x\omega\cos\lambda + z\omega\sin\lambda,\quad (\bar v_r)_z = z',$$

и теперь окончательно имеем

$$\frac{d}{dt}\left(r^2\frac{d\vartheta}{dt}\right) = 2\omega(x\cos\lambda + z\sin\lambda)z'.$$

Уравнение (2) и (3) можно получить из уравнений движения, записанных в аналитической форме.

Запишем z в виде

$$z = l\sqrt{1-\frac{x^2+y^2}{l^2}} = l\left(1-\frac{1}{2}\frac{x^2+y^2}{l^2}\ \ldots\right) = l - \frac{r^2}{2l} + \frac{1}{8}\frac{r^4}{l^3}\ \ldots$$

При решении задачи членами порядка малости выше $\frac{r^2}{2l}$ пренебрегаем, т. е. рассматриваем малые колебания маятника, для которых можно пренебречь членами малости $\frac{r^2}{l^2}$ или меньшими. Тогда в уравнении (3) член

$$2\omega x z'\cos\lambda$$

следует отбросить и писать

$$r^2\frac{d\vartheta}{dt} = -\omega\sin\lambda\cdot r^2 + C,$$

так как

$$z' = -\frac{rr'}{l},\ xz' = -\frac{rr'x}{l},\ \omega xz' = -\omega\frac{r}{l}r'x.$$

Кроме того, заметим, что

$$2zz' = -(r^2)'.$$

Уравнение (3) окончательно принимает вид

$$r^2\left(\frac{d\vartheta}{dt} + \omega\sin\lambda\right) = C. \qquad (3)$$

Преобразуем теперь уравнение (2) живых сил, положив в нем

$$z = l - \frac{r^2}{2l}.$$

Имеем

$$v_r^2 = -\frac{g}{l}r^2 + h$$

или

$$\left(\frac{dr}{dt}\right)^2 + r^2\left(\frac{d\vartheta}{dt}\right)^2 = -\frac{g}{l}r^2 + h_2, \qquad (4)$$

где h_2 — новое обозначение произвольной постоянной.

Положим

$$\frac{d\vartheta}{dt} + \omega\sin\lambda = \frac{d\varphi}{dt}$$

или

$$\varphi = \vartheta + \omega\sin\lambda(t - t_0)$$

и вставим значение $\frac{d\vartheta}{dt}$ в уравнение (4), принимая во внимание, что

$$\left(\frac{d\vartheta}{dt}\right)^2 = \left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2 - 2\omega\sin\lambda\frac{d\varphi}{dt} + \omega^2\sin^2\lambda\,.$$

Так как

$$r^2\frac{d\varphi}{dt} = C$$

на основании (3), а член $\omega^2\sin^2\lambda$ умноженный на r^2 дает бесконечно малую второго порядка, уравнения (4) и (5) приводятся окончательно к виду

$$\left(\frac{dr}{dt}\right)^2 + r^2\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2 = -\frac{g}{l}r^2 + h_2, \tag{5}$$

h_2—опять новое обозначение произвольной постоянной,

$$r^2\frac{d\varphi}{dt} = C;\ \varphi = \vartheta + \omega\sin\lambda(t - t_0)\,. \tag{6}$$

Уравнения (5) и (6) представляют уравнения живых сил и площадей в движении точки, притягиваемой к началу координат с силой, пропорциональной расстоянию. Далее решение задачи ведется по способу, указанному в курсе Аппеля и Дотевиля. (Курс теоретической механики, Одесса, 1912).

Приведенное решение не заключает противоречий.

Можно показать, что указываемый предел малости отбрасываемых величин дает возможность исправить решения других авторов.

В учебнике Аппеля [8, стр. 288, § 427] приходится уравнения:

$$\begin{aligned} x'' &= -N\frac{x}{l} + 2\omega\sin\lambda\cdot y', \\ y'' &= -N\frac{y}{l} - 2\omega(\sin\lambda\cdot x' - \cos\lambda\cdot z')\,, \\ z'' &= g - N\frac{z}{l} - 2\omega\cos\lambda\cdot y' \end{aligned} \tag{1}$$

привести к уравнениям вида

$$\begin{aligned} x'' &= -\frac{g}{l}x + 2\omega\sin\lambda\cdot y' \\ y'' &= -\frac{g}{l}y - 2\omega\sin\lambda\cdot x', \end{aligned} \tag{2}$$

причем, как упомянуто выше, предлагается считать $\frac{x}{l}$, $\frac{y}{l}$ с их производными и ω малыми первого порядка и пренебрегать их квадратами, высшими степенями и произведениями. Там сказано, что при данном приближении мы будем постоянно иметь $z = l$, так как уравнение сферы, по которой движется тяжелая точка, дает

$$z = l\left(1 - \frac{x^2 + y^2}{l^2}\right)^{\frac{1}{2}}$$

и, пренебрегая $\frac{x^2}{l^2}$ и $\frac{y^2}{l^2}$, имеем $z = l$.

При приводимом рассуждении мы пренебрегаем не $\frac{x^2}{l}$ и $\frac{y}{l}$, а $x^2 + y^2$, или, если мы напишем

$$z = l - \frac{x^2 + y^2}{2l} + \frac{1}{8}\frac{r^4}{l^3} - \ \ldots\ ,$$

то мы пренебрежем $\frac{x}{l}$ и $\frac{y}{l}$, чтобы получить $z = l$, либо же считаем малыми первого порядка также x и y.

В то же самое время при дальнейшем решении удерживаются члены с r^2 или $\frac{x}{l}$ и $\frac{y}{l}$. Таким образом, решение задачи оказывается противоречивым.

Однако рассуждение освобождается от противоречий, если строго придерживаться принятого условия.

В самом деле, желая получить в дальнейшем замену N на g из уравнения

$$z'' = g - N\frac{z}{l} - 2\omega\cos\lambda\cdot y',$$

мы можем положить член $-N\frac{z}{l}$ приближенно равным N, так как при этом приходится пренебрегать количествами $\frac{x^2}{l^2}$ и $\frac{y^2}{l^2}$ при замене z его значением. Далее, вставляя из приведенного уравнения

$$N = g + 2\omega\cos\lambda\cdot y' + z''$$

в члены уравнения (1) $-N\frac{x}{l}$ и $-N\frac{y}{l}$, мы можем просто вместо N вставить g, так как и здесь члены $2\omega\cos\lambda\cdot y'$ и z'', умноженные на $\frac{x}{l}$ и $\frac{y}{l}$, дадут малые второго порядка.

Мы приходим к уравнениям (2) без противоречий.

В учебнике П. Аппеля и С. Дотевиля [7] имеем уравнения движения:

$$\begin{aligned} \frac{d^2x}{dt^2} &= -N\frac{x}{l} + 2\omega\sin\lambda\cdot\frac{dy}{dt}, \\ \frac{d^2y}{dt^2} &= -N\frac{y}{l} - 2\omega\left(\sin\lambda\frac{dx}{dt} - \cos\lambda\frac{dz}{dt}\right) \\ \frac{d^2z}{dt^2} &= g - N\frac{z}{l} - 2\omega\cos\lambda\cdot\frac{dy}{dt} \end{aligned}$$

Во втором уравнении отбрасываем член

$$2\omega\cos\lambda\cdot\frac{dz}{dt},$$

потому что он порядка малости

$$\omega\cdot\frac{r}{l^2}\,.$$

Третье уравнение показывает, что N отличается от g на $\frac{r}{l}$ величины порядка малости $\frac{r}{l}$. При подстановке во второе и третье уравнения g вместо N приходится отбрасывать малые порядка $\frac{r^2}{l^2}$, так как при N стоят множители $\frac{x}{l}$ и $\frac{y}{l}$. Приходим к упрощенным уравнениям

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{g}{l}x + 2\omega\sin\lambda\frac{dy}{dt}, \quad \frac{d^2y}{dt^2} = -\frac{g}{l}y - 2\omega\sin\lambda\frac{dx}{dt}.$$

Следуя указываемому методу, мы можем писать уравнения живых сил и моментов так, как они записаны выше, не впадая в противоречия. Подобные соображения можно высказать по поводу решений задачи Фуко, приводимых в учебниках Бухгольца [2] и Аппеля [8].

Жуковский [3] предлагает отбрасывать члены, которые содержат произведение малых величин

$$\omega \text{ и } \frac{dz}{dt}.$$

Отбрасывая член

$$2m\omega\cos\varphi\frac{dz}{dt}$$

и удерживая несколькими строками ниже член

$$2m\omega\sin\varphi\left(x\frac{dx}{dt} + y\frac{dy}{dt}\right),$$

он впадает в противоречие. В самом деле, уравнение сферы, по которой движется точка $M(m)$, при выборе координатной системы и обозначений по Жуковскому, имеем в виде

$$x^2 + y^2 + (z-l)^2 = l^2.$$

Из него находим

$$x\frac{dx}{dt} + y\frac{dy}{dt} = (l-z)\frac{dz}{dt},$$

т. е., что член

$$2m\omega\sin\varphi\left(x\frac{dx}{dt} + y\frac{dy}{dt}\right)$$

эквивалентен члену, включающему

$$\omega \text{ и } \frac{dz}{dt},$$

что доказывает сказанное.

Способ решения Жуковского можно исправить, если следовать нашему методу, а именно: член

$$2m\omega\cos\varphi\cdot\frac{dz}{dt}$$

надо отбросить, так как он порядка

$$\omega\cdot\frac{r}{l},$$

член

$$2m\omega\sin\varphi\left(x\frac{dx}{dt} + y\frac{dy}{dt}\right)$$

надо удержать, так как он порядка ω или порядка $\omega\cdot r^2$, но r мы не считаем малой величиной, квадратом которой надо пренебрегать.

Суслов [6] предлагает пренебрегать степенями, высшими ρ^2, где ρ—расстояние движущейся точки $M(m)$ от вертикали, проходящей через точку привеса маятника. Он не обращает внимания на малость Ω угловой скорости вращения земли и удерживает член

$$2\Omega\sin\lambda(xx' + yy'),$$

величина которого вследствие малости Ω меньше ρ^3. Он удерживает члены такой же величины при преобразовании уравнений живых сил, оперирует членами с множителем Ω и интеграл живой силы приводит к виду

$$\rho^2\rho'^2 = k^2(\rho_0^2 - \rho^2)(\rho^2 - \rho_1^2),$$

заключающему члены порядка малости ρ^4, т. е. противоречит поставленному условию пренебрегать членами в степенях выше ρ^2.

Если пользоваться критерием оценки малости отбрасываемых величин, указываемым мною, то решение Суслова освобождается от противоречий. При этом надо отбросить члены, содержащие множитель Ω.

Указанный мною предел отбрасываемых малых величин дает возможность уточнить решение задачи Фуко, приводимое в книге *Routh* [13].

Там отбрасываются члены, содержащие $\frac{dz}{dt}$, потому что они имеют порядок $\alpha^2\omega$, где α обозначает угол, образуемый нитью с вертикалью. Здесь допущена неточность. В действительности эти члены имеют порядок

$$\frac{r}{l}\cdot\omega r,$$

как указано нами выше, по нашему же условию порядок

$$\frac{r}{l}\cdot\omega.$$

Далее, на основании уравнения

$$\frac{d^2z}{dt^2} - 2\frac{dx}{dt}\vartheta_2 + 2\frac{dv}{dt}\vartheta_1 = -g + \frac{T}{m}\cdot\frac{l-z}{l}$$

принимается, что натяжение нити Т отличается от mg на величины порядка

$$\omega\alpha.$$

Опять допущена неточность, в действительности на величины порядка

$$\frac{r}{l}\cdot r,$$

т. е., согласно нашему условию, на величины порядка

$$\frac{r}{l}.$$

При замене T на mg приходится делать ошибку на величины порядка

$$\frac{r}{l}\cdot\frac{r}{l}\cdot r,$$

т. е. порядка $\alpha^2 r$, а не $\omega\alpha^2$, опять неточность, так как T в соответствующих уравнениях (стр. 35) множится на $\frac{x}{l}$ и $\frac{y}{l}$.

Решение *Routh* надо считать правильным, но при оценке малости отбрасываемых величин и при другом способе решения можно прийти

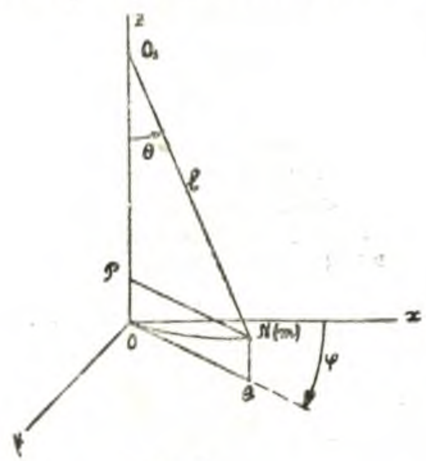


Рис. 2

к противоречию, так как точно не указано, что отбрасывается и сохраняется при оценке малых величин.

Розе [5] принимает за начало координат самое низкое положение точки; тогда

$$x = l\sin\vartheta\cos\varphi \cong l\vartheta\cos\varphi,$$
$$y = l\sin\vartheta\sin\varphi \cong l\vartheta\sin\varphi$$
$$z = l - l\cos\vartheta \cong l - l\left(1 - \frac{\vartheta^2}{2}\right) = \frac{l\vartheta^2}{2}.$$

На основании этой записи он считает, что x и y являются величинами малости первого порядка, а z — второго и что можно пренебречь z, $\frac{dz}{dt}$ и $\frac{d^2z}{dt^2}$ по сравнению с x и y. Кроме того, он пренебрегает членами с Ω^2. О малости Ω он не говорит и получает уравнения

$$\frac{d^2x}{dt} + 2\Omega\sin\frac{dy}{dt} = -\frac{T}{ml}x, \quad \frac{d^2y}{dt^2} - 2\Omega\sin\varphi\frac{dx}{dt} = -\frac{T}{ml}y,$$
$$2\Omega\cos\varphi\frac{d\varphi}{dt} = T - mg.$$

Пренебрегая членом $\frac{d^2z}{dt^2}$ в третьем уравнении и членом с $\frac{dz}{dt}$ во втором, он оставляет члены

$$2\Omega\sin\varphi\frac{dy}{dt},\ 2\Omega\sin\varphi\frac{dx}{dt},\ 2\Omega\cos\varphi\frac{dy}{dt},$$

которых величина меньше, чем z, $\frac{dz}{dt}$, $\frac{d^2z}{dt^2}$.

Далее он говорит: так как Ω и $\frac{dy}{dt}$ суть малые величины, то третье уравнение дает приближенно

$$T = mg,$$

и приходим к уравнениям

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 2\alpha\frac{dy}{dt} + n^2x = 0,$$
$$\frac{d^2y}{dt^2} - 2\alpha\frac{dx}{dt} + n^2y = 0,$$

где $n^2 = \frac{g}{l}$, $\alpha = \Omega\sin\varphi$.

Таким образом, с одной стороны, члены

$$2\Omega\sin\varphi\frac{dy}{dt},\ 2\Omega\sin\varphi\frac{dx}{dt},\ 2\Omega\cos\varphi\frac{dy}{dt}$$

удерживаются, с другой стороны, отбрасываются. Вследствие такого приема решения задачи Розе избегает более резких противоречий.

Чтобы выправить его решения, достаточно отбрасывать члены порядка

$$\omega\cdot\frac{r}{l} \text{ или } \frac{r^2}{l^2}.$$

Рассуждением, подобным тому, которое мы приводили по поводу решения Аппеля и Дотевиля, мы придем к уравнениям, решающим задачу.

Из предшествующего видно, что решение задачи „маятник Фуко" можно провести приближенно без противоречий, если в качестве малых величин рассматривать величины порядка

$$\omega \text{ и } \frac{r}{l}$$

и в процессе решения задачи пренебрегать членами, в состав которых входят в виде множителей величины порядка малости

$$\omega \cdot \frac{r}{l} \text{ или } \frac{r}{l} \cdot \frac{r}{l}$$

или меньшие величины (1).

Д. Бобылев [1] в выражении

$$2 l^2 \omega \varphi' (\varphi \sin\lambda + \varphi^2 \cos\lambda \cos\varphi)$$

пренебрегает вторым членом, содержащим φ^2, квадрат угла отклонения. В то же время в уравнении (411)

$$(\xi \eta' - \eta \xi') = C + (\xi^2 + \eta^2)\, \omega \sin\lambda$$

оставляет член

$$(\xi^2 + \eta^2)\, \omega \sin\lambda$$

и то же делает в уравнениях

$$l^2 (\varphi'^2) + \sin^2\varphi (\psi')^2 = 2\, Gl \cos\varphi + 2\, h, \tag{412}$$

$$l^2 \sin^2\varphi \cdot \psi' = C + l^2 \omega \sin^2\lambda \sin\varphi, \tag{413}$$

когда оставляет члены, содержащие $\sin^2\varphi$ и, таким образом, впадает в противоречие.

Следуя предлагаемому нами способу, эти противоречия легко устранить.

А. Деницо [10] приводит решение Кирхгофа (Kirchhoff, Vorlesungen u Mech. 93), как типичное неточное решение, которое он считает неудовлетворительным.

Уравнения Кирхгофа имеют вид

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -2\omega \sin\psi \frac{dy}{dt} + \lambda\alpha$$

$$\frac{d^2y}{dt^2} = 2\,\omega \left(\sin\psi \frac{dx}{dt} + \cos\psi \frac{dz}{dt}\right) + \lambda y$$

$$\frac{d^2z}{dl^2} = g - 2\,\omega \cos\psi \frac{dy}{dt} + \lambda(z + l),$$

при этом

$$x^2 + y^2 + (l + z)^2 = l^2 \text{ и } z = -\frac{x^2 + y^2}{2\, l}.$$

Следуя нашему способу, легко устранить возникающие противоречия.

Бинэ [9, стр. 157—197,] при решении задачи „маятник Фуко" исходит из уравнений в форме

$$\begin{aligned} \frac{d^2x}{dt^2} + \frac{Nx}{r} &= 2\, n \sin\gamma \frac{dy}{dt} + 2\, n \cos\gamma \frac{dz}{dt}, \\ \frac{d^2y}{dt^2} + \frac{Ny}{r} &= -2\, n \sin\gamma \frac{dx}{dt}, \\ \frac{d^2z}{dt^2} + \frac{Nz}{r} &= g - 2\, n \cos\gamma \frac{dx}{dt}. \end{aligned} \tag{a}$$

Значения количеств, входящих в них, ясны.

Он дает приближенное решение, делая предположение, что $\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$ — расстояние от оси z — должно оставаться малым количеством, как и скорости $\frac{d\rho}{dt}$, $\frac{dx}{dt}$, $\frac{dz}{dt}$; они рассматриваются как малые количества первого порядка.

$$z = \sqrt{r^2 - \rho^2} = r - \frac{\rho^2}{2l}, \quad N = \left[g + \frac{d(\rho\, d\rho)}{r dt^2} - 2\, n \cos\gamma \frac{dx}{dt}\right]\left(1 + \frac{\rho^2}{2\, r^2}\right).$$

В первом приближении Бинэ пренебрегает членом $2\, n \cos\gamma \frac{dx}{dt}$ и членами, заключающими ρ и $\frac{d\rho}{dt}$, которые считаются малыми второго порядка.

Таким образом N сводится к g, и уравнения (a) к уравнениям вида (a′)

$$\begin{aligned} \frac{d^2x}{dt} + h^2 x &= 2\, k \frac{dy}{dt} \\ \frac{d^2y}{dt^2} + h^2 y &= -2\, k \frac{dx}{dt}, \end{aligned} \tag{a′}$$

в которых

$$\frac{N}{r} = \frac{g}{r} = h^2 \text{ и } n \sin\gamma = k.$$

Эти уравнения затем интегрируются.

По поводу решения Бинэ можно заметить, что ему приходится, с одной стороны, отбрасывать член

$$2\, n \cos\gamma \cdot \frac{dx}{dt},$$

который, согласно его предположениям, первого порядка малости; в то же время он удерживает члены первого порядка малости

$$2\, k \frac{dy}{dt} \text{ и } 2\, \kappa \frac{dx}{dt}$$

и таким образом впадает в противоречие. Можно избежать этого противоречия, если считать малыми первого порядка количества

$$\omega \text{ и } \frac{\rho}{r},$$

как мы предлагаем, и удерживать их, пренебрегая квадратами и произведениями этих количеств.

В заключение приведем историческую справку по поводу „маятника Фуко" Деницо [10].

В 1851 году Леон Фуко [11] проделал следующий опыт: 28-килограммовый медный шар был укреплен на проволоке 67 м длины, спускавшейся от купола Парижского Пантеона ($\psi = 48°\ 50'\ 49''$), и приведен в колебание, при том так, чтобы удаленный от положения равновесия в сторону, неподвижно удерживаемый шар, не получал никакой боковой начальной скорости. Двойная продолжительность колебания достигала 16,42 секунды. На вертикали под точкой привеса находился центр кружка с нанесенными на нем делениями. Колеблющийся шар показывал равномерное боковое прогрессивное движение. Оно было сделано заметным при помощи острия, приделанного к шару, которое прочерчивало два небольших вала из песка на расстоянии 6 метров. Отмечаемое на этих валах боковое движение шара, которое при одном полном колебании достигало 2,3 мм, следовало в сторону движения стрелки часов с угловой скоростью $\omega \sin \psi$

$$\omega = \frac{2\pi}{86400} = 0{,}0000729 \text{ сек.}^{-1}$$

Маятник совершал колебания в течение 5—6 часов, постепенно уменьшая размахи, а кружок за то же время повернулся на 60°—70°.

В 1930 году подобный опыт осуществлен у нас в СССР в Ленинграде в бывшем Исаакиевском соборе (ныне антирелигиозный музей).

(А. Верин. „Опыт Фуко". 1934. Гос. тех. теорет. изд. Ленинград-Москва).

Лаплас (1749—1827) в Mecanique cél. (Paris. 1799), глава V тома IV, говорит следующее: „Хотя вращение земли теперь установлено с полной достоверностью, которую допускают физические знания, однако прямое доказательство этого явления должно интересовать геометров и астрономов". В 1837 году в Journal d'ècole Polyt., тетрадь 26, Пуассон, который пользуется уравнениями Лапласа при изучении относительного движения, высказывает мнение о незначительности влияния отклоняющей силы.

Сам Фуко поставил свой знаменитый опыт в связь с работой Пуассона [12], в которой отклонение движущегося тела на вращающейся поверхности земли сводится к действию кориолисовой силы, но в отношении колеблющегося маятника заметное влияние этой силы оспаривается. Вопреки этому, сделанному Пуассоном высказыванию, маятник по Фуко имеет свойство накоплять со временем малые, вызываемые кориолисовой силой, сначала незаметные действия, и таким образом причинять видимое вращение плоскости качания маятника. Между тем, закон синуса этим известным физиком выводится не из рассмотрения соображений, в основе которых лежит эта мысль, а скорее им дается вывод геометрической природы, который ничего общего не имеет с кориолисовой силой. Сведение закона Фуко к действию фиктивной силы принадлежит Бинэ [9] и именно при помощи приближенного вычисления с применением впервые полученных Пуассоном дифференциальных уравнений:

$$\begin{aligned} x'' &= \omega^2 (x \sin\psi + z \cos\psi) \sin\psi - 2\omega y' \sin\psi + 2\lambda x, \\ y'' &= \omega^2 y + 2\omega (x' \sin\psi + z' \cos\psi) + 2\lambda y, \\ z'' &= g + \omega^2 (x \sin\psi + z \cos\psi) - 2\omega y' \cos\psi + 2\lambda z, \end{aligned}$$

в которых члены с ω^2 выпущены. Лиувиль [9, стр. 159] и Пуансо [9, стр. 206] данный Бинэ вывод не признали. Они полагали, что высказанный и экспериментально доказанный закон Фуко должен сводиться к чисто геометрическим основаниям, указанным самим Фуко. Но следует отметить,

что со времени Бинэ впервые примененные дифференциальные уравнения после него служили единственным основанием объяснения опыта Фуко.

ВЫВОДЫ

Автор показывает в настоящей заметке, что решение задачи „маятник Фуко" можно провести приближенно без противоречий, если в качестве малых величин первого порядка рассматривать угловую скорость вращения земли и отношение расстояния маятника от вертикальной прямой, проходящей через точку привеса, к длине маятника и в то же время пренебрегать в процессе решения задачи их квадратами и высшими степенями—малыми второго и высших порядков.

ЛИТЕРАТУРА

1. Д. Бобылев. Курс аналит. механики. С. Петербург, 1888. II ч. Кинетическая. Вып. 1. Механика мат. точки. Стр. 254. Пример 41-й.
2. Н. Н. Бухгольц. Основной курс теорет. мех. ч. I. стр. 334.
3. Н. Е. Жуковский. Полное собрание сочинений, лекций, вып. 5. Динамика точки, стр. 392.
4. А. Н. Крылов. Две заметки по механике. Собрание трудов академика А. Н. Крылова. т. V. Математика и механика. Стр. 437. Москва, 1937. Ленинград Изд. Акад. наук СССР.
5. Н. В. Розе. Динамика твердого тела. 1937. стр. 208.
6. Г. К. Суслов. Основы аналит. механики. Т. I, ч. 2. Динамика точки, стр. 136, Киев, 1911.
7. П. Аппель и С. Дотевиль. Курс теорет. механ. ч. I, стр. 361. § 191. Одесса. 1912.
8. P. Appell. Traité dé mécanique rationnelle T. II. p. 288. 1924.
9. M. Binet. Comtes rendus hebdomad. des seances de l'Ac. de sc. T. 32. 1851.
10. A. Denizot. Das Faucautische Pendel. Leip. und. Berlin 1913.
11. L. Faucaut. Comptes rendus de l'Acad des sc. de Paris 33. p. 135, 1851.
12. Poisson. Journal de l'ecole Polytech 26. p. 15. 1938.
13. E. I. Routh. Die Dynamik der systeme starrer Korp. Bd. II s. 31.

Доцент К. Н. САВЧЕНКО,
кандидат физико-математических наук

АНАЛИЗ РАЗМЕРНОСТЕЙ И ТЕОРИЯ ТЯГОТЕНИЯ

Современная трактовка явлений всемирного тяготения дается или общей теорией относительности или же гравитационной теорией Милна. Первая, вводя в круг своих идей геометризацию физических характеристик, устраняет ньютоново понятие силы и тем самым снимает вообще вопрос о взаимодействии на расстоянии в его обычном понимании. Теория же Милна стремится свести вопрос о всемирном тяготении к чисто кинематическим представлениям.

Как релятивистская, так и милновская трактовки тяготения при всей их внутренней логической стройности не являются вполне последовательными потому, что, устраняя понятие силы в явлении гравитационного взаимодействия, они не могут устранить его при объяснении действия при соприкосновении.

Современные исследования наших отечественных ученых, как напр. Д. Д. Иваненко, посвященные опыту построения квантовой теории гравитационного поля, дают основание к пересмотру того наследства, которое оставлено нам классиками естествознания в виде попыток создать теорию тяготения.

Мы склонны думать, что попытки Гука, Лесажу, Римана, Секки и других должны занимать такое же место в будущей физической теории тяготения, как работы Френеля в области современной физической оптики.

Во всех классических попытках дать объяснение явлению тяготения существует стремление свести дальнодействие к действию через соприкосновение, сохраняя при этом ньютоновское понятие о силе. Все они стремятся к тому, чтобы толковать тяготение как давление космической среды на тела, возникающее благодаря особому роду движения элементов среды и элементарных частиц вещества, образующих тела.

Имеем ли мы право в наши дни разделять этот взгляд на тяготение и продолжать поиски причин тяготения в том же направлении? Не является ли подобное предприятие слишком наивным после непрерывного ряда неудач, преследовавших старые гипотезы гравитационного взаимодействия?

Ответ на этот вопрос мы и намерены дать в этой статье, опираясь на анализ разномерностей как на метод предварительного исследования физических явлений. В том же, что тяготение необходимо отнести к физическим явлениям, мы думаем, никто не станет сомневаться. Более того, мы считаем, что существующий арсенал физических характеристик вполне способен обеспечить рациональное истолкование тяготения, не устраняя при этом ньютоновского понятия о силе. Начнем с того, что попытаемся обосновать выбор той области физических явлений, к которой необходимо отнести тяготение. Во всех классических попытках дать физическое объяснение тяготения соперничают две области явлений: механическая и электродинамическая. Релятивистская же теория выделяет тяготение в особый класс явлений, не сводимый ни к одному из выше перечисленных.

Анализ разномерностей, или так называемый качественный физико-математический анализ, повидимому, есть единственное средство, позволяющее приблизиться к решению этого вопроса. Несмотря на то, что для всякого физика приемы анализа разномерностей хорошо известны, мы все же напомним его основные положения.

Цель анализа разномерностей — дать некоторые сведения о соотношениях, существующих между измеримыми (размерными) величинами, связанными с различными явлениями. Все величины, участвующие в явлениях, принято делить на две категории (деление это хотя и условно, но необходимо для анализа разномерностей): а) основные или первичные, обладающие несводимой степенью простоты, к таковым в системе единиц *CGS* относятся: масса (M), время (T) длина (L) и б) вторичные или производные, определяемые с помощью одной или большого числа первичных величин. К таковым относятся: частота (T^{-1}), ускорение (LT^{-2}), давление $(ML^{-1}T^{-2})$ и им подобные физические величины, имеющие вид степенного одночлена:

$$L^l M^m T^t.$$

Особо важное место среди вторичных размерных величин занимают так называемые размерные постоянные: гравитационная постоянная (κ), скорость света в пустоте (c) и постоянная Планка (h). Их размерности установлены исключительно на основании опыта, и поэтому размерные постоянные должны оставаться теми же на протяжении всех математических операций. Все операции над первичными и вторичными величинами подчинены условию постоянства отношения чисел, измеряющих любые два образца первичной или вторичной величины. Это требование будет равносильно существованию отношения вида:

$$\frac{A(L_1, M_1, T_1)}{A(L_2, M_2, T_2)} = \frac{A(\lambda L_1, \mu M_1 \tau T_1)}{A(\lambda L_2, \mu M_2 \tau T_2)}, \tag{1}$$

справедливого для всех значений L, M, T, и λ, μ, τ.

Здесь под A понимается вторичная величина как функция первичных L, M, T. Наличие отношения (1) необходимо и достаточно, чтобы вторичная величина A всегда была представлена степенным одночленом:

$$[A] = C L^l M^m T^t, \tag{2}$$

где c, l, m, t — постоянные, которые служат мерой размерности вторичной величины A относительно L, M и T.

Образование размерностей вторичных величин $A, B, C, \ldots$ подчинено следующим условиям:

Если $[C] = [AB]$ и $[A] = L^{l_1} M^{m_1} T^{t_1}$

$[B] = L^{l_2} M^{m_2} T^{t_2}$,

то $[C] = L^{l_1+l_2} M^{m_1+m_2} T^{t_1+t_2}$.

Если $[C] = \left[\frac{A}{B}\right]$, то $[C] = L^{l_1-l_2} M^{m_1-m_2} T^{t_1-t_2}$.

Если $[C] = A^h$, то $[C] = L^{hl} M^{hm} T^{ht}$.

Пусть далее вторичные величины A, B, и $C \ldots$ связаны функциональным соотношением:

$$\varphi(A, B, C, \ldots) = 0.$$

которое остается неизменным при любом масштабе первичных величин, тогда его решение всегда имеет вид:

$$F(\Pi_1, \Pi_2, \ldots) = 0 \tag{3}$$

(П—теорема) вне зависимости от того, будут ли среди вторичных величин A, B, C,.... размерные постоянные.

В решении (3) П—есть независимые безразмерные произведения A, B, C,... относительно первичных величин $L\ MT$ (принцип размерной однородности).

Существование решения типа (3) служит основой анализа размерностей.

Безразмерность произведений П определяет выбор степеней одночлена:

$$A^a B^b C^c \ldots$$

из условия

$$\Pi^0 = A^a B^b C^c.$$

Следовательно, a, b, c... должны быть таковы, чтобы это выражение было бы нулевой размерности.

Очевидно, что число уравнений между a, b, c,.... всегда будет равно числу основных величин так, что число безразмерных независимых произведений Π^0 будет равно разности числа показателей степеней a, b, c,... и числа основных единиц измерений (L, M, T).

Анализ размерностей не может указать на выбор функции F, он лишь ограничивает форму ее аргументов и поэтому указывает на число их. Понятно, что наиболее исчерпывающий результат будет в том случае, когда, по условиям задачи, мы получим лишь одно безразмерное произведение, ибо в этом случае анализ разномерностей указывает, что некоторая функция этого произведения равна нулю:

$$F(\Pi) = 0,$$

что равносильно утверждению о равенстве ее аргумента Π некоторой безразмерной постоянной. Следовательно, в этом случае общее решение перейдет в

$$\Pi^0 = \text{const}\ldots \tag{4}$$

Если же условия задачи дают возможность установить большее число безразмерных произведений, то уравнение (3) всегда может быть разрешено относительно одного из произведений в функции остальных:

$$П_1 = \varphi(П_2, \ldots) = 0. \tag{5}$$

Хотя это и не дает исчерпывающего результата, но все же указывает на его общий характер. Часто удается ограничить решение и получить более определенный результат, в котором не остается неопределенной функция:

$$\varphi(П_2).$$

Достигается это путем разумного выбора числа основных единиц измерений, обычно увеличением числа их.

Предположим, что в ограниченном числе задач нам удается привести решение к виду:

$$A^a . B^b . C^c \ldots = П^0 = \text{const.}, \tag{6}$$

тогда всегда возможно из величин $a, b, c,\ldots$ выбрать одну, притом любую из них, и приписать ей независимое решение. Это обстоятельство облегчает установить интересующую нас функциональную связь между участвующими в явлении величинами в явной форме.

Заканчивая эти общие замечания, относящиеся к анализу разномерностей, перейдем к непосредственно интересующей нас задаче: о его приложении в теории тяготения.

Предварительно напомним схему применения этого метода. Необходимо тщательно продумать, какие величины должны предопределить ответ поставленной задачи, выбрав же их, необходимо установить соответствующие им формулы размерностей. От правильного выбора факторов, участвующих в явлении, зависит весь дальнейший анализ, сводящийся к применению принципа размерной однородности и его следствий.

Анализ размерностей, как метод предварительного исследования природы гравитационного взаимодействия, повидимому, впервые был применен Н. Морозовым. Этот вопрос также был рассмотрен Бриджменом в его книге «Анализ размерностей». Из этой книги мы позволим себе привести несколько примеров.

«Попытаемся построить электродинамическую теорию тяготения, полагая, что гравитационное поле связано неизвестным нам образом со свойствами электрона и может быть получено применением электродинамических уравнений поля. В этих уравнениях имеется одна размерная постоянная: отношение электромагнитных единиц к электростатическим. Известно, что c имеет размерность скорости и численно совпадает со скоростью света. В поисках предполагаемой связи мы рассматриваем заряд и массу электрона, характеризующие его свойства, скорость света и гравитационную постоянную. Производим анализ:

Название величины	Символ	Формула размерности
Постоянная тяготения	κ	$M^{-1} L^3 T^{-2}$
Заряд электрона	e	$M^{\frac{1}{2}} L^{\frac{3}{2}} T^{-1}$
Масса электрона	m	M
Скорость света	c	$L T^{-1}$

У нас четыре переменных и три основных единицы, следовательно, мы ожидаем единичное произведение безразмерности:

$$\kappa \cdot e^{-a} m^{-b} c^{-c}$$

или

$$\kappa = e^a m^b c^c.$$

Подстановка формы разномерности дает:

$$M^{-1} L^3 T^{-2} = \left(M^{\frac{1}{2}} L^{\frac{3}{2}} T^{-1}\right)^a M^b \left(L T^{-1}\right)^{c_1}.$$

Условие равенства показателей при первичных величинах позволяет составить три уравнения:

$$\frac{1}{2} a + b + 1 = 0 \qquad \text{для } M$$
$$\frac{3}{2} a + c - 3 = 0 \qquad \text{для } L$$
$$a + c - 2 = 0 \qquad \text{для } T$$

Из них прямо находим, что

$$a = 2, \ b = -2, \ c = 0.$$

Окончательный результат имеет следующую простую форму:

$$\kappa = \text{const.} \left(\frac{e}{m}\right)^2.$$

Подставляя числовые значения

$$\kappa = 6{,}7 \cdot 10^{-8}; \qquad \frac{e}{m} = 5{,}3 \cdot 10^{17},$$

найдем, что безразмерная постоянная равна $2{,}35.10^{-43}$.

Постоянная оказывается непозволительно малой, и мы отказываемся от предполагаемого соотношения, хотя простота размерного соотношения и останавливает внимание» [2].

Подобное заключение Бриджмена покоится на формулировке Эйнштейна вероятного критерия для числовых коэфициентов, которые, как мы уже отметили, есть следствия некоторых математических операций над размерными величинами. Эйнштейн говорит: «Опыт показывает, что подобного рода математические операции не приводят к появлению ни очень больших, ни очень малых числовых факторов»[2].

Предположим теперь, что гравитационное поле обусловлено некоторым квантовым процессом, связанным с элементарной частицей вещества. В уравнения, описывающие квантовые процессы, входят две размерные постоянные: скорость света—C и элементарный квант действия—h. В поисках предполагаемой связи мы опять будем рассматривать массу элементарной частицы вещества как одну из основных характеристик квантомеханических свойств частицы, а также постоянную тяготения.

Будем следовать подобной схеме:

Название величины	Символ	Формула размерности
Постоянная тяготения	κ	$M^{-1} L^3 T^{-2}$
Масса элементарной частицы	m	M
Скорость света	c	$L T^{-1}$
Постоянная Планка	h	$M L^2 T^{-1}$

В этом случае мы опять ожидаем единственное произведение без размерностей:

$$\kappa\, c^{-a} h^{-b} m^{-c},$$

или

$$\kappa = c^a h^b m^c.$$

Подстановка формул размерностей дает

$$M^{-1} L^3 T^{-2} = (L T^{-1})^a (M L^2 T^{-1})^b M^c.$$

Условие равенства показателей у ML и T в правой и левой части позволяет составить три уравнения для a, b и c:

$$\begin{aligned} b + c + 1 &= 0 && \text{для } M \\ a + 2b - 3 &= 0 && \text{для } L \\ a + b + 2 &= 0 && \text{для } T, \end{aligned}$$

отсюда находим

$$a = 1,\ b = 1,\ c = -2.$$

Следовательно, предполагаемая связь будет:

$$\kappa = Const.\ \frac{ch}{m^2}.$$

Подставим числовые значения:

$$6{,}7 \cdot 10^{-8} = Const.\ \frac{3 \cdot 10^{10} \cdot 6{,}5 \cdot 10^{-27}}{(8{,}8 \cdot 10^{-24})^2},$$

следовательно, постоянная равна $2{,}7 \cdot 10^{-46}$.

Мы можем так же, как и в предыдущем случае, заявить, что постоянная «непозволительно мала», хотя простота соотношения также останавливает наше внимание.

Попытаемся теперь рассмотренные нами два случая скомбинировать вместе. Следовательно, мы должны будем предполагать, что гравитационное поле связано неизвестным образом со свойствами электрона, к которым отнесем как его заряд, так и спин.

Сохраняя прежнюю схему, получим:

Название величины	Символ	Формула размерности
Гравитационная постоянная . . .	κ	$M^{-1} L^3 T^{-2}$
Масса электрона	m	M
Заряд электрона	e	$M^{\frac{1}{2}} L^{\frac{3}{2}} T^{-1}$
Скорость света	c	$L T^{-1}$
Спин электрона	$\frac{h}{4\pi}$	$M L^2 T^{-1}$

В этом примере мы имеем пять величин и три основные единицы, в силу чего необходимо ждать решение вида:

$$\Pi_1 \varphi(\Pi_2) = 0.$$

Выберем показатели для κ в произведении Π_1 равным единице, а для h — нулю. В произведении Π_2 показатель для h положим равным единице, а для κ — 0. Очевидно, что мы получим два независимых безразмерных произведения:

$$\kappa\, m^{-a_1} e^{-b_1} c^{-c_1}; \quad \text{и} \quad \frac{1}{4\pi}\, h\, m^{-a_2} e^{-b_2} c^{-c_2}.$$

Подставляя формулы размерности, получим:

$$M^{-1} L^3 T^{-2} = M^{a_1} (M^{\frac{1}{2}} L^{\frac{3}{2}} T^{-1})^{b_1} (L T^{-1})^{c_1}$$

$$M L^2 T^{-1} = M^{a_2} (M^{\frac{1}{2}} L^{\frac{3}{2}} T^{-1})^{b_2} (L T^{-1})^{c}$$

Отсюда легко получаем две группы алгебраических уравнений для двух групп неизвестных показателей:

$$\begin{aligned} a_1 + \tfrac{1}{2} b_1 + 0 \cdot c_1 + 1 &= 0 \\ 0 \cdot a_1 + \tfrac{3}{2} b_2 + c_1 - 3 &= 0 \\ 0 \cdot a_1 + b_1 + c_1 + 2 &= 0 \\ a_2 + \tfrac{1}{2} b_2 + 0 \cdot c_2 - 1 &= 0 \\ 0 \cdot a_2 + \tfrac{3}{2} b_2 + c_2 - 2 &= 0 \\ 0 \cdot a_2 + b_2 + c_2 + 1 &= 0 \end{aligned}$$

Их решения таковы:

$$a_1 = -2,\ b_1 = 2,\ c_1 = 0$$

$$0_2 = 0,\ b_2 = 2,\ c_2 = -1.$$

Поэтому произведения без размерности примут вид:

$$\kappa\, m^2 e^{-2};\ h e^{-2} c.$$

И искомое решение можно представить в таком виде:

$$\kappa = \frac{e^2}{m^2}\varphi\left(\frac{1}{4\pi}h e^{-2} c\right),$$

в котором

$$\frac{e}{m} = 5{,}3 \cdot 10^{17}, \frac{hc}{4\pi e^2} = \frac{137}{4\pi}.$$

Итак, несмотря на то, что мы пока что не имеем представления о характере функции φ, но замечая, что ее аргумент hce^{-2} есть безразмерная постоянная, мы вынуждены будем допустить, что

$$\varphi = (h e^{-2} c)^{\alpha},$$

где α—постоянная.

Установим порядок α. Элементарный подсчет показывает, что $\alpha \approx -44$. Следовательно, мы видим, что результат опять получается неблагоприятный, тем более, что происхождение безразмерного множителя в этом случае нам неизвестно.

Очевидно, что, выбрав показатель в произведении Π_1 для κ—равным единице, а для e—нулю, а в произведении Π_2—наоборот, мы получим два независимых безразмерных произведения:

$$\kappa m^{-a_1} c^{-b_1} h^{-c_1};$$

$$\frac{1}{4\pi} e h^{-a_2} m^{-b_2} c^{-c_2};$$

и соответствующее им решение вида:

$$\kappa = \frac{ch}{m^2}\varphi_1\left(\frac{1}{4\pi}h e^{-2} c\right).$$

Сопоставляя рассмотренные нами примеры, мы видим, что два последних варианта есть лиш комбинация предыдущих, ничего нового для выяснения предполагаемой связи не дающих, за исключением появления нового безразмерного соотношения $he^{-2}c$ не имеющего никакого отношения к интересующему нас вопросу. Иные возможные комбинации не позволяют получить безразмерного произведения, от найденных же приходится отказаться в связи с возникновением ничтожно малых безразмерных коэфициентов, указывающих на отсутствие физической связи между размерными величинами. Отсутствие подобной связи в примере Бриджмена следует непосредственно из способа установления формулы размерности для заряда электрона на основании закона Кулона:

$$f = \kappa\frac{e_1 \cdot e_2}{r_2},$$

подобного закону Ньютона:

$$F = \kappa\frac{m_1 \cdot m_2}{r_2}.$$

Поскольку для составления размерности предполагается, что коэфициент $\kappa=1$ и $e_1=e_2=e$ то естественно, что заряд должен иметь размерность, относительно размерности гравитационной постоянной равную половине:

$$[e] = [\kappa]^{\frac{1}{2}}.$$

Следовательно, совершенно напрасно искать объяснение в электродинамических процессах явления гравитации.

Посмотрим теперь, возможно ли построить теорию тяготения в рамках чисто механических представлений. С этой целью рассмотрим некоторые вспомогательные вопросы.

Если мы примем систему единиц измерений C, G, S, то формулы размерности всех физических величин, как было уже отмечено, будут иметь вид степенного одночлена:

$$L^l M^m T^t.$$

Все геометрические единицы измерений суть производные только одной первичной величины L. Кинематические единицы построены уже на двух первичных L и T. Наконец, для построения динамических единиц необходимо привлечь все три основные величины:

$$L, M \text{ и } T.$$

Беглый взгляд на формулы размерностей величин, встречаемых при физических исследованиях, обнаруживает равенство размерностей относительно основных единиц L, M, T, различно именуемых количеств. Обозначая через Π^0 безразмерное произведение, мы заметим, что

$$[\nu]^{-1}[\omega] = \Pi^0, \quad [\rho]^{-1}[u] = \Pi^0,$$

$$[W]^{-1}[M] = \Pi^0, \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; ,$$

где

$[\nu] = T^{-1}$ — частота, $[\omega] = T^{-1}$ — угловое ускорение,

$[p] = L^{-1}MT^{-2}$ — давление, $[u] = L^{-1}MT^{-2}$ = плотность энергии,

$[W] = L^2MT^{-2}$ — энергия, $[M] = L^2MT^{-2}$ — момент силы, . . .

Весьма существенно установить то, о чем говорят нам подобные соотношения. Можно ли, например, единицами давления измерять плотность энергии, единицами энергии — момент сил и т. д. Если это так, то не означает ли это, что давление и плотность энергии есть одна и та же физическая сущность? Для того, чтобы ответить на этот вопрос, необходимо, очевидно, объяснить факт совпадения формул размерностей двух различно именуемых величин. Мы привели исключительно тривиальные соотношения, которые есть определения или характеристики различных сторон изучаемых физических процессов. Следовательно, совпадение формул размерностей различно именуемых величин при рациональном их выборе должно означать качественное сходство изучаемых элементов физических явлений.

Обратив внимание на всю совокупность физических характеристик, мы обнаружим, что масса всегда входит в степенные одночлены с положительным показателем, время же—исключительно с отрицательными. Если за основную величину принять время, то простейшая ее производная есть частота, которая участвует во всех характеристиках как нечто самостоятельное. Если это обстоятельство не случайное, то можно будет сделать на основании его некоторые выводы, относящиеся к понятию силы—основного понятия классической динамики.

На основании второго закона Ньютона сила определяется как произведение массы тела на ускорение. Если же мы попытаемся ее определить, используя более простые характеристики, то, не нарушая формулы ее размерности, сможем представить ее в виде произведения количества движения $m \cdot v = I$ на частоту $\frac{1}{T} = \nu$, т. е.

$$F = I \cdot \nu . \tag{a}$$

Количество движения или импульс есть мера механического движения, частота же есть число циклов, укладывающихся в единицу времени или мера повторений некоторого физического процесса. Следовательно, формула (a) утверждает, что всякая физическая сила, например, сила тяготения, силы электрические и магнитные и. т. д. должны обуславливаться какими-то явными или скрытыми количествами движения, повторяющимися с известной частотой.

Мы склонны думать, что подобное определение силы, вне зависимости от ее характера, т. е., будет ли это сила, действующая на расстоянии, или сила, действующая при соприкосновении, способствует установлению единства природы действующих сил.

Одной из характеристик есть понятие плотности, которое служит мерой заполняемости пространства. Физика оперирует понятиями плотности массы и плотности энергии. Предположим, что отношение плотности массы к плотности энергии должно быть инвариантом нашего мира и служить мерой скорости распространения в нем волнового процесса, как основы всякого в нем действия:

$$\left[\frac{u}{\rho}\right] = Invar. \tag{1}$$

Размерность плотности массы есть

$$ML^{-3} = [\rho]$$

и плотности энергии

$$L^{-1}MT^{-2} = [u] .$$

Следовательно:

$$\left[\frac{u}{\rho}\right] = (v)^2 = Invar. \tag{2}$$

Выберем константу v равной скорости света c, тогда на основании предыдущего соотношения получим:

$$u = \rho c^2 . \tag{3}$$

Умножая размерное тождество (3^1)

$$L^{-1}MT^{-2} = [M L^{-3}][L^2T^{-2}] \tag{3^1}$$

на L^3, получим

$$L^2MT^{-2} = M[L^2T^{-2}] \tag{4}$$

или

$$W = mc^2 . \tag{4^1}$$

Замечая далее, что плотность u и энергия W имеет размерность, совпадающую с размерностью напряжения H, на основании соотношения (4) сможем написать

$$H = \rho c^2 . \tag{5}$$

Наконец, замечая, что размерность напряжения H совпадает с размерностью давления p, сможем составить еще одно соотношение:

$$p = \rho c^2 . \tag{6}$$

Во всех формулах (3), (4), (5), (6) нет ничего нового. Они все приводят к общеизвестному соотношению

$$\frac{F}{\rho} = \frac{W}{v} ,$$

утверждающему, что давление в динах на квадратный сантиметр равно числу эргов в кубическом сантиметре объема.

Наличие массы в пространстве обуславливает присутствие в нем энергии и наоборот. Присутствие же в пространстве энергии обуславливает возникновение напряжения или давления в любом элементе пространства.

Если частота ν действительно есть фактор, неразлучно связанный с физическими характеристиками явлений, а энергия и количество движения вместе с массой есть основные его элементы, то между этими величинами должна существовать универсальная связь, вытекающая из соотношения (4)

$$I \cdot \nu = mc^2 = W . \tag{7}$$

Назовем наименьшее из возможных количеств движения I элементарным импульсом и обозначим его через h. Тогда

$$h\nu_0 = m_0 c^2 , \tag{7^1}$$

где m_0 — масса наименьшей из возможных частиц материи.

Все вышеприведенные формулы, как легко видеть, могут быть получены из известного выражения для скорости распространения колебаний, установленной еще Ньютоном:

$$c = \sqrt{\frac{p}{\rho}} , \tag{8}$$

где p — давление, а ρ — плотность среды.

Формула эта обобщается на случай сред различных физических свойств введением безразмерного коэфициента.

Формула (8) выражает один из основных законов природы и содержит как частный случай и закон эквивалентности массы и энергии (4). Ограничим пока что себя рассмотрением механических явлений, в основу которых, как мы уже видели, необходимо положить процессы периодического характера. Частота ν как основная характеристика периодического процесса входит во все физические единицы, следовательно, она явно или неявно должна входит во все основные законы природы. Плотность массы или энергии как мера материальности пространства должна, по нашему мнению, также играть существенную роль во всех основных законах природы.

Легко сообразить, что входящая в закон всемирного тяготения гравитационная постоянная содержит частоту ν и плотность ρ и явно от других размерных величин не зависит потому, что

$$\kappa = Const.\left(\frac{\nu^2}{\rho}\right) = M^{-1}L^{3}T^{-2}. \qquad (9)$$

Не занимаясь пока что определением значения безразмерного коэфициента, с целью оценить справедливость подобной зависимости, заметим, что гравитационную постоянную относят к универсальным постоянным природы.

Следовательно и отношение:

$$\frac{\nu^2}{\rho},$$

должно оставаться неизменным, если предполагаемое нами соотношение имеет какой-либо физический смысл.

Вспомним замечание Ньютона, относящееся к выяснению природы тяготения и помещенное в заключительной главе его «Принципов»: «Нет сомнения, что сила тяжести исходит из причины, проникающей до центра солнца и планет не ослабляясь. Она пропорциональна не поверхности твердых частичек, на которые она действует как это обычно бывает с механическими причинами, а их объему» [3]. Невольно хочется сравнить действие тяготения, пропорциональное объему, с потерей веса тела, погруженного в жидкость, также пропорциональной объему тела и свести тяготение к давлению. Но для этой цели потребуется среда, в которой гравитирующие тела должны быть погружены как в жидкость, она должна быть вытесняема, т. е., отсутствовать там, где есть локализованная материя, и в то же время быть проницаема для всего того, что принято называть сплошным телом, в противном случае тяготение не может быть пропорционально массам тел. На первый взгляд может показаться, что подобная среда должна обладать свойствами, не имеющими ничего общего с обычными формами материи. Но достаточно обратиться к таблице современных физических характеристик, чтобы убедиться, что мы применяем одни и те же характеристики как к локализованной материи, так и к тому, что мы называем полем (например, поле излучения).

Если такая физическая характеристика как энергия одинаково хорошо служит нам для изучения свойств локализованной материи и поля, то ее плотность может служить мерой давления материи и поля.

Связь, существующая между этими величинами, осуществляется одним и тем же способом для всякого физического процесса вне зависимости от того, где он протекает. Вот почему мы позволяем себе описывать физическое поле, используя аппарат динамики сплошных сред или же кинетической теории газов.

Поместив два тела в пространство, мы, тем самым, вносим в него и энергию, которая окажет давление на эти тела. Но давление как механическая причина действует пропорционально поверхности тел, поэтому необходимо предположить, что давление воспринимается исключительно элементарными частицами вещества, не проницаемыми для гравитационного поля и что сумма поверхностей элементарных частиц вещества должна быть пропорциональна массам взаимодействующих тел. Если действительно тяготение может быть сведено к давлению космической среды (гравитонного газа), то, очевидно, вместо закона Ньютона:

$$F = \kappa\,\frac{m_1 \cdot m_2}{r_{1,2}^{\,2}},$$

мы сможем написать

$$F = p\,\frac{s_1 \cdot s_2}{r_{1,2}^{\,2}},$$

где s_1 и s_2 — суммы поверхностей элементарных частиц вещества и p — постоянная давления. Заметим, что в этом случае s_1 и s_2 будут пропорциональны массам m_1 и m_2 взаимодействующих тел. Пусть

$$\kappa\, m_1 m_2 = p\, s_1 s_2.$$

Выбрав $s_1 s_2$ так, чтобы

$$\left|\frac{s_1 s_2}{m_1 m_2}\right| = 1,$$

получим

$$|\rho| = |\kappa|.$$

Для того, чтобы определить плотность ρ_0 той среды (гравитонного газа), давление которой способно вызвать эффект тяготения, воспользуемся соотношением:

$$c = \sqrt{\frac{p}{\rho}}.$$

Попытаемся теперь определить значение безразмерной постоянной в формуле (9), для чего будем определять частоту ν из формулы (7) (соотношение де-Бройля). Будем предполагать, что частота связана с элементарными частицами вещества, например, с протоном.

Приняв массу протона равной $1{,}7.10^{-27}$ гр. и постоянную Планка $h \cong 10^{-27}$ эрг. ск, найдем, что

$$\nu = \frac{mc^2}{h} \cong 1{,}5 \cdot 10^{24} \text{ герц}.$$

и приняв $\rho \cong 10^{-28}$ гр.$\cdot$см$^{-3}$, получим:

$$\kappa = Const.\,\frac{\nu^2}{\rho} \cong 2.10^{76} \cdot Const.\ гр.^{-1}\ см.^{3}\ ск.^{-2}$$

т. е., что $Const. = 3.10^{-84}$.

Результат явно неудовлетворительный. Поэтому остается предположить, что нами не учтены какие-то факторы, обуславливающие столь незначительную величину безразмерной постоянной.

Вспомним, что мы отметили сходство в действиях тяготения и гидростатического давления, как действий, пропорциональных объемам тел. Будем представлять, что непроницаемыми для гравитационного действия могут быть только элементарные частицы вещества, например, протоны, электроны, т. е., что только они способны вытеснять среду, обуславливающую тяготение.

Пусть m обозначает массу элементарной частицы вещества, m — массу вытесняемой ею среды, которую мы будем называть массой гравитона. К этим характеристикам добавим еще плотность ρ_0 среды и частоту ν_0 некоторого процесса, определяющего ее динамические свойства.

Попытаемся теперь применить анализ размерностей к интересующему нас вопросу.

Составляем таблицу характеристики.

Название величины	Символ	Формула размерности
Гравитационная постоянная . . .	κ	$M^{-1}L^{3}T^{-2}$
Масса элемент. частицы	m	M
Плотность среды	ρ_0	ML^{-3}
Масса гравитона	m_0	M
Частота волнового процесса . . .	ν_0	T^{-1}

У нас пять переменных при трех основных единицах, следовательно, мы должны ожидать два безразмерных произведения Π^0 и получить решение вида:

$$\Pi_1 \varphi(\Pi_2) = 0 .$$

Очевидно, что искомые безразмерные произведения должны иметь вид:

$$\kappa\, m^{-\alpha_1} \rho_0^{-\beta_1} \nu_0^{-\gamma_1}; \quad m_0\, m^{-\alpha_2} \rho_0^{-\beta_2} \nu_0^{-\gamma_2}.$$

Подставляя формулы размерности, получим:

$$M^{-1} L^{3} T^{-2} = M^{\alpha_1} (ML^{-3})^{\beta_1} (T^{-1})^{\gamma_1},$$

$$M = M^{\alpha_2} (ML^{-3})^{\beta_2} (T^{-1})^{\gamma_2}.$$

Следовательно, уравнения для искомых показателей будут:

$$\begin{aligned} \alpha_1 + \beta_1 + 0\gamma_1 + 1 &= 0 \\ 0\alpha_1 - 3\beta_1 + 0\gamma_1 - 3 &= 0 \\ 0\alpha_1 + 0\beta_1 - \gamma_1 + 2 &= 0; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \alpha_2 + \beta_2 + 0\gamma_2 - 1 &= 0 \\ 0\alpha_2 + \beta_2 + 0\gamma_2 + 0 &= 0 \\ 0\alpha_2 + 0\beta_2 + 0\gamma_2 + 0 &= 0 . \end{aligned}$$

Их решения таковы:

$$\alpha_1 = 0,\ \beta_1 = -1,\ \gamma_1 = 2,$$
$$\alpha_2 = 1,\ \beta_2 = 0,\ \gamma_2 = 0;$$

Итак, для искомых произведений получим:

$$\Pi_1{}^0 = \kappa \rho_0 \nu_0^{-2}; \quad \Pi^0{}_2 = m^{-1} m_0 ,$$

поэтому для гравитационной постоянной можем составить следующее выражение:

$$\kappa = Const.\ \frac{\nu_0^2}{\rho_0}\ \varphi\left(\frac{m_0}{m}\right).$$

Поскольку κ постоянная величина, вид неопределенной функции φ определится из условия:

$$\varphi = \left(\frac{m}{m^0}\right)^n ,$$

где n — целое и положительное число равное 2, в силу того, что в формулу закона Ньютона M входит во второй степени.

Итак, предполагаемая связь должна иметь следующий вид:

$$\kappa = Const.\ \frac{m_0^2}{m^2} \cdot \frac{\nu_0^2}{\rho_0} . \tag{10}$$

Заметим, что на основании соотношения (7) мы можем придать этой связи еще такую форму:

$$\kappa = Const.\ \frac{m_0^2 c^4}{\rho_0 h^2} . \tag{10_1}$$

Наконец, замечая, что размеры всех элементарных частиц одинаковы $a \simeq 10^{-13}$ см.), воспользуемся соотношением:

$$\frac{m_0}{\rho_0} = \frac{m}{\rho} ,$$

на основании которого придадим формуле гравитационной постоянной еще такой вид:

$$\kappa = Const.\ \frac{m^2 c^4}{\rho^2 h^2} \rho_0 . \tag{10_2}$$

Все вошедшие в это выражение величины нам уже известны, поэтому можно будет ожидать, что безразмерная величина

$$\frac{m^2 c^4 \rho_0}{\rho^2 h^2 \kappa} ,$$

должна быть близка к единице. Действительно, приняв массу элементарной частицы равной массе протона ($m = 1{,}7 \cdot 10^{-24}$ *гр.*), радиус протона порядка 10^{-13} см., так что плотность ρ его будет порядка 10^{-14} гр. см.$^{-3}$, скорость распространения тяготения равной скорости света $C = 3 \cdot 10^{10}$ см. сек.$^{-1}$, постоянную Планка $h = 6{,}5 \cdot 10^{-27}$ эрг. сек., постоянную тяготения $\kappa = 6{,}7 \cdot 10^{-8}$ гр.$^{-1}$ см.^{3} сек.$^{-2}$ и плотность ρ_0 среды порядка 10^{-28} *гр. см*$^{-3}$, мы получим:

$$\frac{m^2 c^4 \rho_0}{\rho^2 h^2 \kappa} = \frac{1{,}9 \cdot 10^{-48} \cdot 8{,}1 \cdot 10^{41} \cdot 10^{-28}}{10^{28} \cdot 4{,}2 \cdot 10^{-54} \cdot 6{,}7 \cdot 10^{-8}} \simeq 5 .$$

Найденный результат дает основание рассчитывать, что формула (10_2), а также и ее разновидности (10_1) и (10) имеют смысл достоверных соотношений, заслуживающих специального изучения.

Из формулы (10_2) следует, что если плотность ρ_0, которую мы назовем плотностью гравитонного газа, есть величина постоянная во всей вселенной, то постоянная тяготения приобретает смысл универсальной постоянной природы.

Таковы результаты, к которым приводит нас анализ размерностей. Он, конечно, ничего не говорит нам о механизме гравитационного взаимодействия, за исключением разве того, что его можно искать в давлении среды.

Чтобы приблизиться к пониманию механизма гравитационного взаимодействия, в котором бы последнее сводилось к давлению, достаточно обратиться к исследованиям Римана, Бьеркнеса и Хинкса, пытавшихся построить модель гравитационного взаимодействия, используя теорию взаимодействия источников и стоков.

Согласно взглядам, развиваемым Хинксом, элементарные частицы материи должны быть рассматриваемы как знакопеременные источники гравитационного поля, что имеет нечто общее с первыми опытами построения модели «покоющейся» частицы де-Бройлем, по которому со всякой частицей, пребывающей в стационарном состоянии, связана стоячая волна, волна, не переносящая энергию частиц, а распределяющая ее в окружающем частицу пространстве.

Взгляды де-Бройля и работы Бьеркнеса и Хинкса, будучи совместно рассмотренными, должны обеспечить нерушимость законов сохранения энергии и количества движения при интерпретации гравитационного взаимодействия как давления, но с другой стороны эти взгляды одновременно требуют от нас признания, что пустое пространство в присутствии локализованной материи становится носителем всех ее свойств.

Но позволительно ли с точки зрения современного естествознания пользоваться механической моделью при описании гравитационного взаимодействия? В прошлом столетии было распространено мнение, что физические явления могут быть сведены к механическим моделям. Современное же естествознание относится к этому вопросу более осторожно.

Оставляя за механическими принципами сохраняемости их универсальность, механическим моделям уделяют весьма скромное место.

Некоторые из представителей современного точного естествознания даже впали в крайность, подчеркивая вредность механических моделей в описании физических явлений, предпочитая им чисто математическое описание, забывая при этом, что они составляют начало физических теорий.

Поэтому, для того чтобы дать на поставленный выше вопрос правильный ответ, нужно помнить, что всякое движение заключает в себе

механическое движение и перемещение больших или мельчайших частей материи; познать эти механические движения является первой задачей науки. Само же механическое движение вовсе не исчерпывает движения вообще.

Механическое движение есть неотъемлемая часть всякого реального процесса, поэтому постройка механической модели, способной дать наивероятнейшее представление тех механических движений, которые сопутствуют физическому процессу, должна быть первым этапом в исследовании.

Переходя к вопросу о природе тяготения, мы не собираемся утверждать, что она заключена исключительно в рамки механического движения, но лишь то, что постичь ее немыслимо без его обнаружения.

Став на эту точку зрения, нам сразу же придется столкнуться с проблемой действия на расстоянии. Могут ли взаимодействовать два тела, находящиеся на некотором расстоянии друг от друга так, чтобы в пространстве, отделяющем их, не происходило какого-либо физического процесса? На этот вопрос мы должны дать только отрицательный ответ, ибо в противном случае мы должны были бы вступить в противоречия с принципами сохраняемости и причинности.

Исходя из этих положений, мы позволим себе кратко остановиться на учении об источниках и стоках, которое позволяет нарисовать механизм гравитационного взаимодействия, удовлетворяющего требованиям, вытекающим из анализа размерностей.

Мощностью q источника или стока называют массу вещества, появляющегося или исчезающего за единицу времени. Если через ρ_0 обозначим плотность вещества, то, согласно определению мощности источника, можно написать

$$\rho_0 v = \frac{q}{4\pi},$$

где v — скорость течения вещества.

Если затем опишем из источника как из центра сферу радиуса r, то через единицу поверхности этой сферы за единицу времени будет протекать

$$\rho_0 v = \frac{q}{4\pi r^2}$$

единиц массы вещества. Вводя вспомогательные понятия линии и трубки тока, мы должны будем принять, что если вещество может быть уподоблено идеальной жидкости, то все его частицы, которые начинают совершать движение по какой-либо линии тока, будут оставаться на этой линии в течение всего своего дальнейшего движения. Следовательно, не может быть никакого движения через боковую поверхность трубки тока.

Потенциал скоростей ψ при этом условии может быть функцией расстояния от источника, т. е.

$$\psi = \frac{q}{4\pi\rho_0 r}.$$

Понятие источников и стоков подчиняется принципу наложения или суперпозиции. Если $q_1, q_2, q_3, \ldots$ обозначают мощности источников, находящихся на расстояниях $r_1 r_2 r_3, \ldots$ от некоторой точки пространства, то потенциал скоростей ψ в этой точке будет:

$$\psi = \frac{1}{4\pi\rho_0}\left\{\frac{q_1}{r_1} + \frac{q_2}{r_2} \frac{q_3}{r_3} + \ldots\right\},$$

или

$$\psi = \frac{1}{4\pi\rho}\sum\frac{q_i}{r_i}.$$

Очевидно, что функция ψ удовлетворяет уравнению Лапласа:

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\psi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\psi}{\partial z^2} = 0$$

в точках пространства, для которых $r_i \neq 0$.

Известно, что между двумя источниками или стоками возникает взаимодействие, напоминающее собой гравитационное. Возникает это взаимодействие как следствие нарушения симметрии в распределении линии тока, что приводит к появлению реактивного давления на поверхностях источников. Результирующая давления, всегда направленная по линии, соединяющей источники, приводит их к сближению с силой:

$$F = -\frac{1}{4\pi\rho_0} \quad \frac{q_1 \cdot q_2}{R^2},$$

где R — расстояние между источниками мощности q_1 и q_2.

Чтобы закон, по которому взаимодействуют источники или стоки, удовлетворял принципу сохраняемости, необходимо предположить, что мощности источников есть некоторые периодические функции времени.

Этим предположением и воспользовался проф. Хинкс при разработке своей теории тяготения.

Следуя за Бьеркнесом, представим себе, что в некоторой неограниченной и несжимаемой среде помещены два полых шара радиусов a_1 и a_2, расстояние между центрами которых обозначим через R_{12}.

Если теперь мы заставим эти шары пульсировать с амплитудами da_1 и da_2 и с периодом T, то каждый из пульсирующих шаров может быть рассматриваем как знакопеременный источник энергии. Очевидно, что в этом случае мощность этих источников будет:

$$q_1 = 8\pi^2\rho_0 a_1\, da_1\, T^{-1}$$

и

$$q_2 = 8\pi^2\rho_0 a_2\, da_2\, T^{-1},$$

где ρ_0 попрежнему обозначает плотность среды.

На основании предыдущих формул сможем написать, что наибольшее притяжение, существующее между нашими знакопеременными источниками, будет:

$$F = -\frac{16\pi^3\rho_0}{T^2} \cdot \frac{a_1^2\, da_1 \cdot a_2^2\, da}{R_{12}^2}.$$

Предположим теперь, что рассматриваемые нами шары сплошные, и что толщина слоя каждого шара равна амплитуде его пульсации (da_1 и da_2).

Не рассматривая пока что подробностей механизма работы такого источника, мощность которого была бы пропорциональна его объему, для силы взаимодействия двух подобных источников должны будем написать:

$$F_{1,2} = -\frac{16\pi^3\rho_0}{T^2}\int_0^{r1}\!\!\int_0^{r2}\frac{a_1^2 da_1 \cdot a_2^2 da_2}{R_{1,2}^2}$$

или

$$F_{1,2} = -\frac{16}{3}\pi^3\,\frac{\rho_0}{T^2}\cdot\frac{a_1^3 \cdot a_2^3}{R_{1,2}^2}$$

Замечаем, что $\frac{4}{3}\pi a_1^3\rho$, и $\frac{4}{3}\pi a_2^3\rho_0$ есть массы вытесняемой источниками среды. Следовательно, если эти массы обозначим соответственно через $M_{0,1}$ и $M_{0,2}$, то сможем предыдущее выражение для силы взаимодействия двух источников переписать еще так:

$$F_{1,2} = -\frac{\pi}{\rho_0 T^2}\cdot\frac{M_{0,1}\cdot M_{0,2}}{R_{1,2}^2}$$

или

$$F_{1,2} = -\frac{\omega^2}{4\pi\rho_0}\cdot\frac{M_{0,1}\cdot M_{0,2}}{R_{1,2}^2}.$$

Здесь ω есть частота пульсации источников ($\omega = 2\pi T^{-1}$).

Мы же выше видели, что абсолютное значение гравитационной постоянной может быть близко к истинному ее значению, если частота будет соответствовать собственной частоте массы среды (массы гравитона), вытесняемой элементарной частицей вещества. Поэтому, переходя от масс M_{01} и M_{02}, вытесняемых телами среды, к массам их вытесняющим M_1 и M_2, мы легко приведем предыдущую формулу к обычной формуле закона тяготения.

Вспоминая, что нами было предположено, что непроницаемыми для гравитационного давления являются исключительно элементарные частицы вещества, обозначим через N_1 и N_2 число элементарных частиц, образующих первый и второй источник, тогда массы наших источников можно представить так:

$$M_1 = \frac{4}{3}\pi a_1^3\rho = m N_1; \qquad M = \frac{4}{3}\pi a_2^3\rho = m N_2,$$

в то время как

$$M_{0,1} = \frac{4}{3}\pi a_1^3\rho_0 = m_0 N_1; \qquad M_{0,2} = \frac{4}{3}\pi a_2^3\rho_0 = m_0 N_2,$$

где m есть масса элементарной частицы, а m_0 — масса вытесняемой ею среды, т. е. масса гравитона.

В силу этих соотношений формуле взаимодействия можем придать еще такой вид:

$$F_{1,2} = -\frac{\omega^2}{4\pi\rho_0}\,\frac{m_0^2}{m^2}\cdot\frac{M_1 M_2}{R_{1,2}^2}.$$

Сравнивая эту формулу с законом Ньютона, мы замечаем, что место гравитационной постоянной занимает величина:

$$\frac{\omega^2}{4\pi\rho_0} \cdot \frac{m_0{}^2}{m^2},$$

имеющая размерность гравитационной постоянной. Следовательно, можем написать

$$\kappa = \frac{\omega^2}{4\pi\rho_0} \cdot \frac{m_0^2}{m}.$$

Пусть далее частота ω пульсации будет равна частоте элементарной частицы вещества и определяется формулой:

$$\omega = \frac{2\pi m c^2}{h},$$

где h — постоянная Планка и c — скорость света.

Тогда для гравитационной постоянной сможем написать еще такое выражение:

$$\kappa = \frac{\pi m_0^2 c^4}{\rho_0 h^2}.$$

Но, поскольку $m_0 c^2$ может быть рассматриваемо как собственная энергия гравитона, и следовательно величина:

$$\frac{m_0 c^2}{h}$$

может быть, в свою очередь, определена как собственная частота ν_0 гравитона, то для постоянной тяготения κ можно предложить еще такую формулу:

$$\kappa = \frac{\pi \nu_0^2}{\rho_0}.$$

Эта формула совершенно тождественна формуле, найденной нами выше на основании анализа размерностей.

Итак, опираясь на теорию взаимодействия источников, можно описать гравитационное взаимодействие между массами M_1 и M_2 следующей формулой:

$$F = -\frac{\pi\nu_0^2}{\rho_0} \cdot \frac{M_1 \cdot M_2}{R_{1,2}^2}. \tag{11}$$

Очевидно, что для гравитационной постоянной мы сможем написать еще такое выражение:

$$\kappa = \pi \frac{\nu_i}{\rho_i} \nu_0, \tag{12}$$

или

$$\kappa = \pi \frac{\nu_i^2}{\rho_i^2} \rho_0: \tag{12^1}$$

поскольку размеры всех элементарных частиц вещества одного и того же порядка, то

$$\frac{\nu_i}{\rho_i} = \frac{\nu_0}{\rho_0},$$

где ν_i — собственная частота элементарных частиц вещества, а ρ_i — ее плотность.

Итак, представляя всякую частицу материи, согласно де-Бройлю, сопряженной с некоторым волновым процессом и отождествляя часть ее собственной энергии с энергией поля стоячих волн, мы тем самым приходим к естественной необходимости рассматривать элементарную частицу как знакопеременный источник гравитационной энергии.

Такой взгляд на элементарные частицы приводит к одной из наиболее вероятных механических моделей гравитационного взаимодействия материи. Согласно ей тяготение должно быть сведено к давлению, определяемому как величина пропорциональная произведению масс (при сферическом распределении плотностей взаимодействующих тел), вытесняемых телами среды, и обратно пропорциональная квадрату расстояния между ними.

Здесь уместно вспомнить, что в свое время Максвелл измерял заряд массой эфира, вытесняемого за поверхность сферы, ограничивающей этот заряд. То обстоятельство, что элементарные частицы вещества несут одинаковые заряды независимо от их масс, еще в большей степени способствует установлению аналогии между моделью Максвелла и теми, к которым приводит рассмотренная нами модель гравитационного взаимодействия.

Это, конечно, не должно давать повод видеть в подобной аналогии нечто большее и ожидать, что она способна привести к единой теории поля, в котором бы гравитационное поле и поле электромагнитное могли бы быть рассматриваемы с единой точки зрения. Макс Борн по этому поводу пишет: «Было опубликовано много единых теорий поля (Эйнштейном, Бейлем, Эддингтоном, Вебленом и др.), но безуспешно. Мне это представляется вполне понятным. Тяготение — это очень маленькая сила, экспериментально изучена только в случае макроскопически нейтральных тел. Позволительно сомневаться, имеет ли вообще смысл говорить о силах тяготения, действующих между двумя електронами. Гравитационное притяжение между двумя электронами на расстоянии r равно

$$\kappa \frac{m^2}{r^2}, \quad \text{где } \kappa = 6{,}66 \cdot 10^{-8}\ \text{см}^3\ \text{гр.}^{-1}\ \text{сек.}^{-2},$$

в то время как электрическое отталкивание равно $\frac{e^2}{r^2}$. Отношение силы тяготения к электрической силе равно:

$$\kappa \frac{m^2}{e^2} = 2{,}4 \cdot 10^{-43}.$$

Чрезвычайно малая величина этого отношения убедительно говорит о том, что попытки объяснить существование элементарных частиц тяготением, равно как и все попытки построить единую теорию поля, абсолютно ошибочны» [1].

Мы не совсем разделяем мнение Борна о роли гравитационного поля в формировании элементарных частиц. Повидимому гравитационное поле, проявляющееся в виде давления гравитонного газа на элементарные частицы вещества, обеспечивает их целостность, т. е. силы гравитационного давления повидимому уравновешивают электрические силы отталкивания, действующие внутри элементарных частиц. Но это нисколько не говорит в пользу возможности построения единой теории поля, о чем говорит и анализ размерностей. Поэтому остается признать за гравитационными явлениями механическую природу и интерпретировать силы ньютонианские как силы весьма близкие, по характеру их действия, силам архимедовым.

Если для последних требуется наличие среды и инородного по отношению к ней тела, то для возникновения сил ньютонианских достаточно наличия в пространстве только масс, ибо при их присутствии пространство приобретает свойства среды. Для того, чтобы это понять, достаточно представить себе, что всякая частица материи простирается на всю вселенную в виде поля волн материи.

Это поле и служит той средой, в которой протекает гравитационное взаимодействие. Но при этом необходимо отметить, что всякая попытка, ограничивающаяся рамками классической механики и направленная к тому, чтобы свести потенциальную энергию к кинетической и тем самым силы дальнодействия свести к силам, действующим при соприкосновении, сталкивается с вопросом о природе собственной энергии частиц.

Невозможность построить механическую модель, которая бы объясняла собственную энергию mc^2 как локализованную в самой частице, заставляет нас предположить, что собственная энергия состоит из двух равных частей: кинетической энергии самой частицы $\frac{mc^2}{2}$ и кинетической энергии $\frac{mc^2}{2}$, размещающейся в виде волнового поля частицы. Столь, казалось бы, произвольное толкование собственной энергии может быть оправдано, с одной стороны, существованием принципа эквивалентности различных видов энергии и, с другой — соображениями космологического характера.

ЛИТЕРАТУРА

1. Борн. Успехи физических наук, т. XVI, 1936, стр. 715.
2. Бриджмен. Анализ размерностей, гл. 8, 1946.
3. Ньютон И. Математические основания натуральной философии, кн. 3, 1915.

Поступило в 1947 году.

М. Н. ШВЕЦ,
кандидат физико-математических наук

О ПОДСТАНОВКАХ НАТУРАЛЬНОГО РЯДА

Подстановкой в этой работе называется подстановка натурального числового ряда, т. е. однозначное отображение этого ряда на себя или на свою часть. Отображающая функция $f(n)$ такой подстановки характеризуется, следовательно, тем, что она определена для всякого натурального n и принимает исключительно натуральные значения. В случае надобности мы будем записывать подстановку в две строки

$$\begin{pmatrix} n \\ f(n) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots \\ f(1) & f(2) & f(3) & \cdots \end{pmatrix}$$

и указывать закон перехода $n \to f(n)$.

Мы будем пользоваться следующей классификацией подстановок, данной А. К. Сушкевичем [1].

I тип — *Обычные* подстановки, нижние строки которых заключают все натуральные числа и только по одному разу.

II тип — *Недостаточные* подстановки, нижние строки которых заключают только различные числа, но не все числа натурального ряда.

III тип — *Избыточные* подстановки, нижние строки которых заключают все натуральные числа и допускают повторения их.

IV тип — *Смешанные* подстановки, нижние строки которых заключают не все натуральные числа и допускают повторения.

Обычное умножение подстановок

$$\begin{pmatrix} n \\ f(n) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} n \\ \varphi(n) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} n \\ \varphi[f(n)] \end{pmatrix}$$

всегда имеет смысл и, как известно, ассоциативно, хотя не всегда коммутативно.

Множество всех обычных подстановок (первый тип) является по умножению группой — бесконечной симметрической группой S_∞, явившейся предметом исследования Шрейера и Улама [4, 5, 6]. Подстановки других типов использовались А. К. Сушкевичем [1, 3] главным образом для построения примеров обобщенных групп, подробным же исследованием таких подстановок, насколько нам известно, никто специально не занимался. В настоящей работе тоже не имеется в виду построение исчерпывающей теории подстановок. После некоторых общих рассуждений о разложении подстановок на циклы, мы рассматриваем два специальных типа подстановок — так называемые предельные подстановки и подстановки конечного порядка и полностью решаем вопрос о их циклической структуре.

---

1. Разложение на циклы

11. Пусть $A=\begin{pmatrix} n \\ f(n)\end{pmatrix}$ — данная подстановка и α — натуральное число; обозначая через $f^{\kappa}(x)$ κ-ую итерацию функции $f(x)$ (т. е. $f^1(x)=f(x)$, $f^{\kappa}(x)=f\,[f^{\kappa-1}(x)]$), получим следующую цепочку переходов, однозначно определяемую подстановкой A и числом α (для простоты опускаем аргумент и полагаем $f^{\circ}(\alpha)=f^{\circ}=\alpha$):

$$\alpha=f^{\circ}\rightarrow f\rightarrow f^{2}\rightarrow f^{3}\rightarrow\ .\ .\ .\ \rightarrow f^{\kappa}\rightarrow\ .\ .\ . \tag{1}$$

Цепочку (1) назовем *циклом элемента* α подстановки A (или циклом, порожденным элементом α).

Могут представиться два случая:

1. Все элементы f^{κ} различны; цикл (1) в этом случае называется бесконечным.

2. Найдется пара равных элементов: $f^{\kappa}=f^{m+\kappa}, m\geqslant 1$; тогда при $\varkappa, \lambda\geqslant\kappa$ и $\varkappa\equiv\lambda\ (mod m)$ будет всегда $f^{\varkappa}=f^{\lambda}$, т. е. число различных элементов цикла (1) будет конечным, и цикл представится в виде:

(2)

Предполагая, что m и κ наименьшие числа с указанными свойствами, заметим, что все элементы $f^{\circ}, f, f^{2}, \ldots, f^{\kappa+m-1}$ различны; будем рассматривать в дальнейшем только такие представления цикла (1) и говорить, что цикл состоит из *ядра* (2′) и *хвоста* (2″)

(2′)

$$f^{\circ}\rightarrow f\rightarrow f^{2}\rightarrow\ .\ .\ .\ \rightarrow f^{\kappa-1}\ {}^{*)}. \tag{2″}$$

Цикл элемента α называется в этом случае конечным; число $\kappa+m$ элементов цикла можно назвать его длиной.

Представим себе, что циклы подстановки A построены для каждого элемента α; некоторые из этих циклов могут пересекаться; если α — общий элемент двух циклов, то, начиная с α, оба цикла имеют одинаковые продолжения. Если α — первый общий элемент двух циклов (такой всегда существует, если циклы пересекаются и не тождественны), то циклы соединяются следующим образом

$$\begin{matrix}\searrow\\ \nearrow\end{matrix}\alpha\longrightarrow,$$

---

*) Эти термины введены А. К. Сушкевичем для обобщенных конечных подстановок [2].

где справа от α расположена общая часть обоих циклов, а слева — „разветвления" для каждого из них.

12. Множество всех натуральных чисел в отношении данной подстановки A можно разбить на попарно непересекающиеся классы, относя два числа к одному классу, тогда и только тогда, если циклы их пересекаются. Будем называть эти классы, рассматривая их совместно с законом перехода одних элементов в другие, *независимыми циклами* подстановки A. Независимые циклы обладают следующими очевидными свойствами.

1. Независимый цикл вполне определяется каждым своим элементом.

2. Независимый цикл не может разветвляться в направлении перехода ($\rightarrow$) и значит не может сужаться в обратном направлении.

3. Если цикл хотя бы одного элемента независимого цикла бесконечен, то и всякий другой элемент этого бесконечного цикла порождает бесконечный цикл.

4. Независимый цикл не может иметь больше одного ядра. Если элемент независимого цикла порождает конечный цикл, то его ядро является общим для циклов всех элементов независимого цикла.

Таким образом независимые циклы подстановки распадаются на две категории: циклы без ядер и циклы, содержащие только по одному ядру. Будем называть независимый цикл без ядра *бесконечным,* а независимый цикл с ядром — *конечным.* В дальнейшем, для простоты, независимый цикл будем называть просто *циклом* подстановки (в отличие от цикла элемента).

Заметим, что бесконечный цикл действительно содержит бесконечное множество элементов, так как он во всяком случае не имеет последнего элемента («открытый справа»), в то время как конечный цикл может содержать как конечное, так и бесконечное множество элементов (цикл «закрытый справа»); при этом ядро конечного цикла всегда состоит из конечного множества элементов, остальные же элементы распределяются вокруг ядра в виде хвостов.

Конечный цикл будем называть m-членным, если его ядро состоит из m элементов.

Элементы хвостов конечного цикла, переходящие в соответствующие элементы ядра, назовем *непосредственно примыкающими к ядру.* Для остальных элементов хвостов введем понятие *расстояния* от ядра следующим образом: пусть α — элемент хвоста и β — первый элемент ядра в цикле элемента α; если между α и β в этом цикле находится $d-1$ элементов, то число d назовем расстоянием элемента α от ядра.

Хвост цикла будем называть *конечным,* если существует число N, которого не превосходят расстояния элементов этого хвоста от ядра, в противном случае — *бесконечным.* Конечный хвост может содержать и бесконечное множество элементов (за счет разветвлений). Цикл, состоящий только из ядра, будем называть *чистым ядром.*

Легко видеть, что циклы обычных подстановок не могут иметь ни хвостов, ни разветвлений, т. е. они могут быть либо чистыми ядрами, либо бесконечными циклами, открытыми с обеих сторон. Ясно, что разветвления и хвосты циклов возможны только в том случае, если нижняя строка подстановки содержит равные элементы (избыточные и смешанные подстановки). Поэтому циклы недостаточной подстановки могут быть только чистыми ядрами или бесконечными. Однако, в то время как все циклы обычной подстановки могут быть чистыми ядрами, имеет место

Теорема 1. *Каждая недостаточная подстановка содержит по крайней мере один бесконечный цикл, открытый справа.*

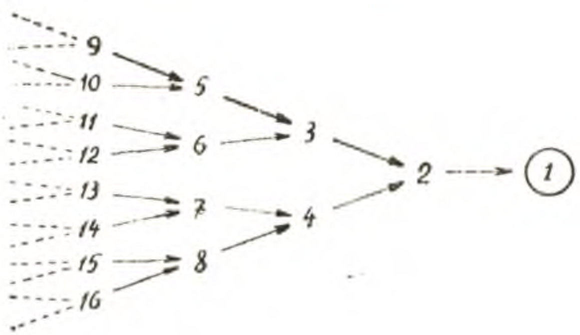
Действительно, таковым будет цикл каждого элемента, не входящего в нижнюю строку.

13. Рассмотрим некоторые примеры циклической структуры подстановок.

1) Подстановка

$$\begin{pmatrix} n \\ \left[\frac{n+1}{2}\right] \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & \ldots \\ 1 & 1 & 2 & 2 & 3 & 3 & 4 & 4 & \ldots \end{pmatrix}$$

состоит из единственного конечного одночленного цикла с ядром (1) и одним бесконечным хвостом



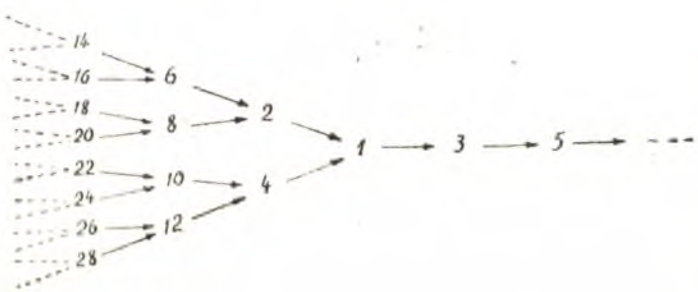
2) Подстановка

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 & \ldots \\ 3 & 1 & 5 & 1 & 7 & 2 & 9 & 2 & 11 & 4 & 13 & 4 & \ldots \end{pmatrix},$$

характеризуемая функцией

$$f(2n-1) = 2n+1, \ f(2) = f(4) = 1, \ f(4n) = f(4n-2) = 2n-2 \quad \text{при } n > 1,$$

состоит из одного бесконечного цикла



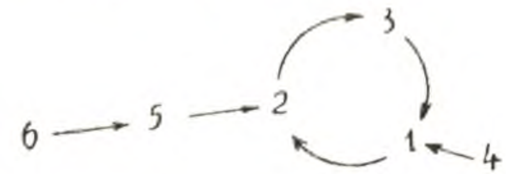
3) Подстановка

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 & \ldots \\ 2 & 3 & 1 & 1 & 2 & 5 & 8 & 8 & 10 & 10 & 12 & 12 & \ldots \end{pmatrix},$$

характеризуемая функцией

$$f(2n-1) = f(2n) = 2n \quad \text{при } n \geqslant 4,$$

состоит из одного трехчленного цикла



и бесконечного множества одночленных циклов

$$2n-1 \longrightarrow 2n, \qquad n \geq 4$$

4) Подстановка

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & \ldots \\ 1 & 4 & 6 & 8 & 10 & 12 & 14 & 16 & \ldots \end{pmatrix},$$

характеризуемая функцией

$$f(1) = 1, \quad f(n) = 2n \quad (n > 1),$$

состоит из одного чистого ядра (1) и бесконечного множества бесконечных циклов, открывающихся слева числом 2 и каждым нечетным числом.

14. Рассмотрим, какое влияние оказывает на циклы возведение подстановки в степень *).

Назовем *ветвью* цикла цепочку его элементов, состоящую из цикла какого-нибудь элемента, продолженного без разветвлений влево, насколько позволяет подстановка. Если цикл не содержит разветвлений, то он состоит из одной ветви, в противном случае ветвь «проходящая через данный элемент» определяется вообще неоднозначно. Элементы ядра образуют очевидно самостоятельную ветвь. Цикл с разветвлениями таким образом состоит из отдельных его ветвей с общим продолжением. Каждую ветвь можно представить в виде

$$\alpha_i \to \alpha_{i+1} \qquad \text{или} \qquad i \to i+1,$$

$$i = \kappa, \ \kappa+1, \ \ldots, \ l; \qquad -\infty \leqslant \kappa \leqslant l \leqslant +\infty.$$

*) Заметим, что $\begin{pmatrix} n \\ f(n) \end{pmatrix}^{\kappa} = \begin{pmatrix} n \\ f^{k}(n) \end{pmatrix}$.

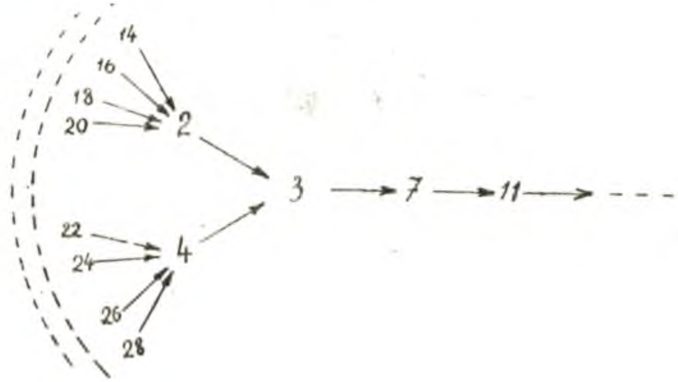
Пусть $i \to i+1$ — бесконечная (открытая справа) ветвь подстановки A; в подстановке A^{k} эта ветвь распадается на k ветвей

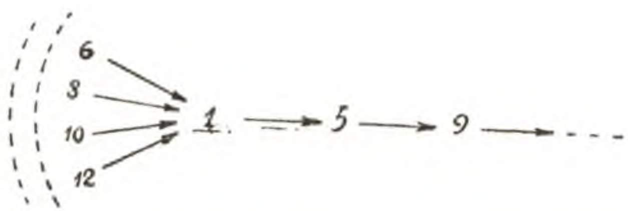
$$i+s \to i+s+k,\quad s=0,\ 1,\ 2,\ \dots,\ k-1,$$

причем каждая из них будет содержать числа одного и только одного класса вычетов по модулю k. Отсюда легко заключить:

так как бесконечный цикл состоит из отдельных бесконечных ветвей, то при возведении подстановки в степень k каждый бесконечный цикл распадается на k самостоятельных (независимых) бесконечных циклов.

Так, квадрат подстановки примера 2 (13) состоит из двух бесконечных циклов:





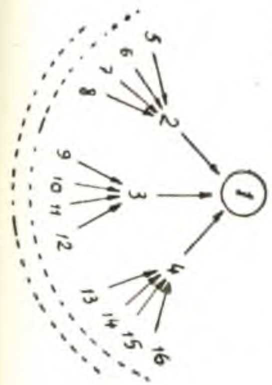
Что происходит с конечными циклами при возведении подстановки в степень?

Одночленный цикл при этом не распадается, так как ядро—общая часть каждой ветви — остается без изменения. Увеличивается только число хвостов, причем легко сосчитать сколько хвостов получается из одного. При возведении в степень элементы хвостов приближаются к ядру каждый раз на единицу расстояния, причем предельным положением элемента будет непосредственное примыкание к ядру; т. е. если d — расстояние элемента α от ядра в подстановке A, то в подстановке A^{k} растояние этого элемента от ядра равно

$$\begin{array}{ll} d-(k-1), & \text{если } d>k \\ \text{и}\quad 1 & \text{, если } d\leqslant k. \end{array}$$

Таким образом, при возведении подстановки в степень все элементы хвостов, расстояния которых от ядра не превосходят k, и только они,

будут непосредственно примыкать к ядру. Поэтому один хвост одночленного цикла при возведении в степень k порождает столько хвостов, сколько имеется элементов этого хвоста, удаленных от ядра на расстояние $\leqslant k$.



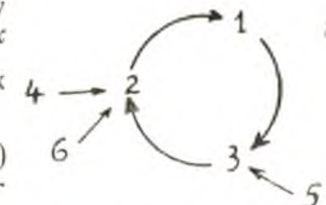
Так, квадрат подстановки примера 1(13) состоит из одного одночленного цикла с тремя хвостами.

Вообще, в данном случае число хвостов каждой степени k подстановки, как легко видеть, равно

$$\sum_{d=1}^{k} 2^{d-1} = 2^{k} - 1.$$

Перейдем теперь к конечным многочленным циклам и рассмотрим прежде всего чистое m-членное ядро. Оно представляет собой обычную конечную подстановку, поэтому при возведении в степень k оно распадается на d чистых $\frac{m}{d}$-членных ядер, где $d=(m,\ k)$. В частности, при возведении в степень lm (и только в этом случае) m-членное ядро распадается на m-одночленных ядер. Соответственно этому m-членный цикл при возведении в степень k распадается на d отдельных $\frac{m}{d}$-членных циклов.

Так, трехчленный цикл примера 3 (13) при возведении в квадрат переходит в следующий (см. рисунок справа):



а при возведении в куб он распадается на три одночленных цикла:

2. Предельные подстановки

21. Последовательность степеней

$$A,\ A^{2},\ A^{3},\ \dots,\ A^{k},\ \dots$$

подстановки A в некоторых случаях может иметь предел при $k\to\infty$; здесь мы исследуем условия существования этого предела и свойства подстановок, которые могут быть предельными.

Определение. Подстановка

$$\begin{pmatrix} n \\ \varphi(n) \end{pmatrix}$$

называется **предельной** для подстановки

$$\begin{pmatrix} n \\ f(n) \end{pmatrix},$$

если

$$\lim_{\kappa\to\infty}\begin{pmatrix} n \\ f(n) \end{pmatrix}^{\kappa}=\lim_{\kappa\to\infty}\begin{pmatrix} n \\ f^{\kappa}(n) \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} n \\ \varphi(n) \end{pmatrix}$$

в следующем смысле: для всякого натурального N существует натуральное K такое, что для всех $n\leqslant N$ и $\kappa\geqslant K$ выполняется условие

$$f^{\kappa}(n)=\varphi(n).$$

Легко видеть, что условие $\lim\limits_{\kappa\to\infty}\begin{pmatrix} n \\ f(n) \end{pmatrix}^{\kappa}=\begin{pmatrix} n \\ \varphi(n) \end{pmatrix}$ эквивалентно функциональному соотношению $\lim\limits_{\kappa\to\infty} f^{\kappa}(n)=\varphi(n)$ для всех натуральных n.

Здесь существенно то, что функции $f^{\kappa}(n)$ и $\varphi(n)$ принимают только натуральные значения. Отсюда следует

Теорема 2. *Для того чтобы подстановка $\begin{pmatrix} n \\ f(n) \end{pmatrix}$ имела предельную, необходимо и достаточно, чтобы κ-ая итерация функции $f(n)$ стремилась к конечному пределу для каждого n при $\kappa\to\infty$.*

Необходимость вытекает из указанного замечания, достаточность получается положением $\varphi(n)=a_n$, если

$$\lim_{\kappa\to\infty} f^{\kappa}(n)=a_n<\infty.$$

Получающаяся отсюда в частности ограниченность κ-ой итерации функции $f(n)$ для каждого n при $\kappa\to\infty$, как необходимое условие существования предельной подстановки, может служить для доказательства несуществования предельных подстановок. Так, подстановка $\begin{pmatrix} n \\ 2n \end{pmatrix}$ не имеет предельной, так как здесь $f(n)=2n$, $f^{\kappa}(n)=2^{\kappa}n\to\infty$ при $\kappa\to\infty$. Более того, можно сказать, что подстановка, содержащая бесконечный цикл, не обладает предельной, так как здесь нарушено условие ограниченности. В частности, в силу теоремы 1, никакая недостаточная подстановка не может иметь предельной.

Отметим здесь же, что подстановка не может иметь больше одной предельной.

22. Рассмотрим примеры.

1) Подстановка $\begin{pmatrix} n \\ \left[\frac{n+1}{2}\right] \end{pmatrix}$ имеет предельной подстановку $\begin{pmatrix} n \\ 1 \end{pmatrix}$; в то же время подстановка $\begin{pmatrix} n \\ 1 \end{pmatrix}$ является предельной для себя самой, так как она совпадает со всеми своими степенями.

2) Пусть λ — произвольное фиксированное натуральное число и

$$f(n)=\begin{cases} \lambda & \text{при } n\leqslant\lambda \\ n-\lambda & \text{при } n>\lambda, \end{cases}$$

тогда

$$f^{\kappa}(n)=\begin{cases} \lambda & \text{при } n\leqslant\kappa\lambda \\ n-\kappa\lambda & \text{при } n>\kappa\lambda, \end{cases}$$

поэтому

$$\lim_{\kappa\to\infty}\begin{pmatrix} n \\ f(n) \end{pmatrix}^{\kappa}=\begin{pmatrix} n \\ \lambda \end{pmatrix};$$

кроме того, $\begin{pmatrix} n \\ \lambda \end{pmatrix}$ является предельной для себя самой, так как $\begin{pmatrix} n \\ \lambda \end{pmatrix}^{\kappa}=\begin{pmatrix} n \\ \lambda \end{pmatrix}$ при любом κ.

3) Определим целочисленные функции $\varphi(n,\lambda)$ и $\psi_m(n,\lambda)$ от натуральных аргументов следующим образом: $\varphi(n,\lambda)$ — наименьший положительный вычет числа n по модулю λ;

$$\psi_m(n,\lambda)=\begin{cases} \varphi(n,\lambda) & \text{при } n\leqslant m\lambda \\ n-m\lambda & \text{при } n>m\lambda \end{cases}$$

и положим

$$A_\lambda=\begin{pmatrix} n \\ \varphi(n,\lambda) \end{pmatrix} \text{ и } B_{m,\lambda}=\begin{pmatrix} n \\ \psi_m(n,\lambda) \end{pmatrix}.$$

Легко проверить, что A_λ — предельная подстановка для $B_{m,\lambda}$ при любом m; это показывает, что одна и та же подстановка может быть предельной для бесконечного множества различных подстановок. Кроме того, как легко убедиться непосредственно, подстановка A_λ — является предельной для себя самой.

23. Выведем теперь условие существования предельной подстановки для данной, основанное на свойствах циклов подстановок.

Теорема 3. *Для того, чтобы подстановка A обладала предельной, необходимо и достаточно, чтобы A содержала только одночленные циклы.*

Пусть подстановка $A=\begin{pmatrix} n \\ f(n) \end{pmatrix}$ содержит только одночленные циклы и пусть

$$\ldots\to\alpha_\kappa\to\ldots\to\alpha_3\to\alpha_2\to\alpha_1\to(\alpha)$$

одна из ветвей такого цикла с ядром (α). Тогда

$$\alpha = f(\alpha_1) = f^2(\alpha_2) = \ . \ . \ . = f^{\kappa}(\alpha_{\kappa}) = \ . \ . \ . \ ,$$

следовательно

$$\lim_{\kappa \to \infty} f^{k}(\alpha_i) = \alpha \text{ для всех } i.$$

То же самое относится ко всякой другой ветви цикла с ядром (α), т. е. $\lim\limits_{\kappa \to \infty} f^{\kappa}(n') = \alpha$ для всякого элемента n' этого цикла. Так как это рассуждение применимо ко всем другим циклам, то для каждого n предел $\lim\limits_{\kappa \to \infty} f^{\kappa}(n)$ существует и конечен (равен элементу соответствующего ядра). В силу теоремы 2, подстановка A имеет предельную.

Если подстановка A содержит бесконечный цикл, то, как уже отмечено, она не может иметь предельной. Если, наконец, подстановка A содержит только конечные циклы, но хоть один из них m-членный, $m > 1$, то функция $f^{\kappa}(n)$ для элементов n этого цикла, хотя и остается ограниченной при $\kappa \to \infty$, но не стремится к пределу; поэтому такая подстановка не имеет предельной.

Следствие. Среди обычных подстановок только тождественная $E = \begin{pmatrix} n \\ n \end{pmatrix}$ имеет предельную (самое себя). Действительно, в силу отсутствия хвостов и разветвлений, только одночленные циклы может содержать такая обычная подстановка, у которой каждый элемент образует цикл.

24. *Структура предельных подстановок* вполне разъясняется доказательством теоремы 3. Именно, чтобы построить предельную подстановку для данной (если это возможно), нужно все элементы, кроме ядерных, сделать непосредственно примыкающими к своим ядрам. Поэтому имеет место

Теорема 4. *Подстановка будет предельной тогда и только тогда, когда она не содержит других циклов, кроме чистых одночленных ядер и одночленных ядер с непосредственно примыкающими к ним элементами.*

То же доказательство теоремы 3 указывает способ построения подстановок, для которых данная подстановка отмеченной структуры является предельной: достаточно элементы, непосредственно примыкающие к ядрам этой подстановки, произвольным образом расположить в виде хвостов при соответствующих ядрах.

Так как подстановка указанной структуры не меняется при возвышении в степень, т. е. является идемпотентной и так как, наоборот, всякая идемпотентная подстановка является предельной для себя самой, то имеет место

Теорема 5. *Предельными подстановками являются все идемпотентные подстановки и только они.*

Наконец, освобождаясь от языка циклов, класс предельных подстановок можно охарактеризовать следующим образом:

Подстановка будет предельной (идемпотентной) тогда и только тогда, когда она не меняет элементов нижней строки, т. е.

$$f^2(n) = f(n).$$

25. Что касается подставок с многочленными циклами, то, как уже выяснено, они не имеют предельных; однако, в некоторых случаях степени этих подстановок могут иметь предельные или сами быть предельными. Вопрос исчерпывается следующими двумя теоремами.

Теорема 6. *Некоторая степень подстановки A имеет предельную тогда и только тогда, когда*

1. *A не содержит бесконечных циклов;*
2. *Множество чисел m таких, что A содержит m-членные циклы, конечно.*

Действительно, если эти условия выполнены, то пусть $м$ — общее наименьшее кратное всех чисел m; тогда подстановка $A^{м}$ будет содержать только одночленные циклы. Ясно с другой стороны, что если A содержит бесконечный цикл, то и всякая степень A будет содержать бесконечные циклы; наконец, если A содержит m-членные циклы при сколь угодно больших m, то не существует степени A, в которой все эти циклы распались бы на одночленные.

Легко видеть, что при выполнении условий теоремы общий вид степени A, обладающей предельной, есть $A^{\kappa м}$, κ—любое натуральное.

Чтобы некоторая степень подстановки A сама была предельной, конечно, необходимо выполнение условий 1 и 2 теоремы 6, однако, оно не является достаточным, так как эти условия не исключают наличия бесконечных хвостов. Но даже отсутствие бесконечных хвостов, как легко видеть, еще не обеспечивает требуемого свойства, так как допуская наличие конечных хвостов с элементами сколь угодно удаленными от своих ядер, мы не найдем степени A, в которой все элементы хвостов будут непосредственно примыкать к ядрам. Здесь нужно потребовать, чтобы расстояния элементов хвостов от своих ядер не превосходили некоторого числа N для всех циклов подстановки A; будем называть подстановку A в этом случае равномерно ограниченной. Таким образом:

Теорема 7. *Для того, чтобы некоторая степень подстановки A была предельной (идемпотентной) подстановкой, необходимо и достаточно выполнение следующих условий:*

1. *A не содержит бесконечных циклов;*
2. *Множество чисел m таких, что A содержит m-членные циклы, конечно;*
3. *Подстановка A равномерно ограничена.*

26. Отметим в заключение этого параграфа следующий факт, являющийся простой перефразировкой рассмотренных свойств постановок.

Пусть a_n — данная последовательность натуральных чисел, $f(n)$ — искомая функция, принимающая натуральные значения для натуральных значений аргумента и $f^{\kappa}(n)$ — κ-ая итерация функции $f(n)$; функциональное уравнение $\lim\limits_{\kappa \to \infty} f^{\kappa}(n) = a_n$ разрешимо тогда и только тогда, когда подстановка $\begin{pmatrix} n \\ a_n \end{pmatrix}$ идемпотентна.

3. Подстановки конечного порядка

31. *Периодические подстановки.* Будем называть подстановку $A = \begin{pmatrix} n \\ f(n) \end{pmatrix}$ *периодической,* если существуют числа l и κ такие, что

$$l \geqslant 0, \quad \kappa \geqslant 1;$$

$f(n) = f(m)$ при $n > l$, $m > l$, $n \equiv m \pmod{\kappa}$.

Полагая для простоты $f(n) = a_n$, получим

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & . & . & l & l+1 & l+2 & . & . & l+\kappa & l+\kappa+1 & . & . & . & l+2\kappa & . & . & . \\ a_1 & a_2 & & . & a_l & a_{l+1} & a_{l+2} & . & . & a_{l+\kappa} & a_{l+1} & . & . & . & a_{l+\kappa} & . & . & . \end{pmatrix},$$

Сокращенно будем обозначать эту подстановку так:

$$A = [a_1, a_2, \ldots, a_l, (a_{l+1}, a_{l+2}, \ldots, a_{l+\kappa})]$$

Будем пользоваться обычной терминологией: если l и κ — наименьшие числа, обладающие указанными свойствами, то

$a_{l+1}, a_{l+2}, \ldots, a_{l+\kappa}$ — период подстановки;

$a_1, a_2, \ldots, a_l$ — предпериод ее;

κ — длина периода, l — длина предпериода;

если $l = 0$ (предпериод отсутствует) — подстановка чистая периодическая; если $l \geqslant 1$ — она смешанная периодическая.

Заметим, что функция $f(n) = a_n$ для всех $n > l$ сама периодична с периодом κ: $f(n+\kappa) = f(n)$, и что всякое число κ', удовлетворяющее условию $f(n+\kappa') = f(n)$ для всех n, начиная с некоторого, делится на κ.

Мы уже имели примеры (чистых) периодических подстановок (22):

$$\begin{pmatrix} n \\ \lambda \end{pmatrix} = [(\lambda)] \text{ и } A_\lambda = [(1, 2, \ldots, \lambda)].$$

Теорема 8. Если A — периодическая подстановка, а H — любая подстановка, то подстановка AH — тоже периодическая; при этом если κ, l — длина периода и предпериода подстановки A, а κ', l' — длина периода и предпериода подстановки AH, то $l' \leqslant l$ и κ' — делитель κ.

Действительно, пусть

$$A = \begin{pmatrix} n \\ f(n) \end{pmatrix} \quad \text{и } H = \begin{pmatrix} n \\ \varphi(n) \end{pmatrix},$$

тогда

$$AH = \begin{pmatrix} n \\ \varphi[f(n)] \end{pmatrix};$$

если $n, m > l$ и $n \equiv m \pmod{\kappa}$, то $f(n) = f(m)$; но тогда и $\varphi[f(n)] = \varphi[f(m)]$; уменьшение длины предпериода произойдет в случае $\varphi[f(l+\kappa)] = \varphi[f(l)]$.

Следствие. Множество периодических подстановок замкнуто относительно умножения, т. е. является обобщенной ассоциативной группой.

По поводу теоремы 8 можно заметить еще, что равенство $AH = AH'$ будет иметь место всякий раз, как только подстановки H и H' одинаково изменяют элементы нижней строки A, число которых $= \kappa + l$; остальные элементы могут переводиться этими подстановками совершенно произвольно. Обратное произведение HA может не быть периодической подстановкой; если, например, нижняя строка H будет

$$1, 2, \ldots, \lambda, 1, 1, 2, 2 \ldots, \lambda, \lambda, 1, 1, 1, 2, 2, 2, \ldots, \lambda, \lambda, \lambda \ldots,$$

то $HA_\lambda = H$ непериодическая.

32. *Подстановки конечного порядка.* Подстановкой конечного порядка будем называть подстановку с идемпотентной степенью, т. е. такую подстановку A, для которой существует натуральное m с условием $A^{2m} = A^m$. Вместе с одним таким m их существует бесконечное множество; наименьшее из них назовем ***порядком*** подстановки A.

Так, всякая идемпотентная подстановка — первого порядка; подстановка $A = [(a_1, a_2, \ldots, a_\kappa)]$, для которой $a_1 \equiv a_2 \equiv \ldots \equiv a_\kappa \pmod{\kappa}$, как легко проверить, — второго порядка.

Циклическая структура подстановки конечного порядка вполне определяется теоремой 7 (25).

Теорема 9. *Для того чтобы A была подстановкой конечного порядка, необходимо и достаточно существование двух неравных чисел n и m таких, что $A^n = A^n$.*

Действительно, если $n > 2m$, то, умножая обе части равенства $A^n = A^m$ на A^{n-2m}, получим $A^{2(n-m)} = A^{n-m}$, т. е. порядок A не выше $n - m$. Пусть теперь вообще $n = m + \kappa$, $\kappa \geqslant 1$; тогда $A^{m+2\kappa} = A^{m+\kappa} = A^m$ и аналогично $A^{m+l\kappa} = A^m$ при любом l; достаточно взять поэтому $m + l\kappa > 2m$, т. е. $l\kappa > m$; порядок A не выше $l\kappa = l(n-m)$.

Теорема 10. Всякая периодическая подстановка имеет конечный порядок.

Действительно, очевидно, что периодическая подстановка $A = [a_1, a_2, \ldots, a_l, (b_1, b_2, \ldots, b_\kappa)]$ состоит не более чем из $\kappa + l$ конечных циклов, причем хвосты всех циклов будут конечными. Таким образом все условия теоремы 7(25) для подстановки A выполнены, т. е. она имеет идемпотентную степень.

Нетрудно показать, что если AB — подстановка конечного порядка, то и BA тоже конечного порядка. Действительно, если $(AB)^n = (AB)^m$, то, умножая обе части слева на B и справа на A, получим $(BA)^{n+1} = (BA)^{m+1}$. Однако из конечности порядков A и B вовсе не следует конечность порядка AB.

Отметим еще, что обычная подстановка будет иметь конечный порядок тогда и только тогда, если некоторая степень ее равна тождественной подстановке.

ЛИТЕРАТУРА

1. Сушкевич А. К. Исследования о бесконечных подстановках. Сборник памяти академика Граве Д. А. Москва—Ленинград, 1940, стр. 245—253.
2. Сушкевич А. К. Теория обобщенных групп, 1937, стр. 10—12.
3. Suschkewitsch A. Uber einen merkwurdigen Typus der verallgemeinerten unendlichen Gruppen. Записки Харк. Мат. т-ва, сер. 4, т. 9 (1934), стор. 39—44.
4. Schreier I. und Ulam S. Uber die Permutationsgruppe der naturlichen Zahlenfolge, Studia Mathem., t. IV (1933), S. 134—141.
5. Schreier I. et Ulam S. Sur le groupe de permutations de la suite des nombres naturel, C. R. 197 (1933), p. 54—55,
6. Schreier I. und Ulam S. Uber die Automorphismen der Permutationsgruppe der naturlichen Zahlenfolge, Fundamenta Mathem. t. XXVIII, (1937), S. 258—260.

Доцент Г. В. КОСТАНДИ,
кандидат физико-математических наук

ОБ ОДНОМ КЛАССЕ ИРРАЦИОНАЛЬНОСТЕЙ, РАЗЛАГАЮЩИХСЯ В ПЕРИОДИЧЕСКИЕ НЕПРЕРЫВНЫЕ ДРОБИ ВЫСШИХ ПОРЯДКОВ

Одним из обобщений непрерывных дробей является, как известно, обобщение Якоби[1]), а именно:

Пусть нам будут даны некоторые положительные числа:

$$u_0^0,\ u_1^0,\ u_2^0,\ \ldots,\ u_{n-1}^0\,{}^{*}), \tag{1}$$

и пусть b_r^0*) есть наибольшее целое число, заключающееся в дроби $\frac{u_r^0}{u_0^0}$.

Составим новую совокупность не отрицательных чисел:

$$\begin{gathered} u_0^1 = u_1^0 - b_1^0 u_0^0,\ u_1^1 = u_2^0 - b_2^0 u_0^0,\ \ldots, \\ u_{n-2}^1 = u_{n-1}^0 - b_{n-1}^0 u_0^0 \text{ и } u_{n-1}^1 = u_0^0\,{}^{*}) \end{gathered} \tag{2}$$

Пусть $u_0^1 \neq 0$ и пусть b_r^1 есть наибольшее целое число, заключающееся в дроби $\frac{u_r^1}{u_0^1}$. Снова находим:

$$\begin{gathered} u_{r-1}^2 = u_r^1 - b_r^1 u_0^1 = \left(\frac{u_r^1}{u_0^1} - b_r^1\right) u_0^1,\ r = 1,\ 2,\ \ldots,\ n-1 \\ \text{и } u_{n-1}^2 = u_0^1\,{}^{*}). \end{gathered} \tag{3}$$

Если $u_0^2 \neq 0$, то снова получим:

$$\begin{gathered} u_{r-1}^3 = u_r^2 - b_r^2 u_0^2 = \left(\frac{u_r^2}{u_0^2} - b_r^2\right) u_0^2,\ r = 1,\ 2,\ \ldots,\ n-1 \\ \text{и } u_{n-1}^3 = u_0^2\,{}^{*}). \end{gathered}$$

Затем находим: u_r^4, u_r^5 и т. д.

Из (2) имеем:

$$u_r^0 = u_{r-1}^1 + b_r^0 u_{n-1}^1.$$

---

[1]) C. G. I. Jacobi's Gesammelte Werke. 6. Band. Berlin, 1891.

*) Мы пишем u_j^l, b_j^l, P_j^l вместо $u_j^{(l)}$, $b_j^{(j)}$, $P_j^{(l)}$; это мы имеем право сделать, так как числа u, b, P с верхними и нижними индексами встречаются у нас только в первой степени.

Затем из (3) получим:

$$u_r^0 = u_{r-2}^2 + b_{r-1}^1 u_{n-1}^2 + b_r^0 \left(u_{n-2}^2 + b_{n-1}^1 u_{n-1}^2\right) =$$
$$= u_{r-2}^2 + b_r^0 u_{n-2}^2 + \left(b_{r-1}^1 + b_r^0 b_{n-1}^1\right) u_{n-1}^2 .$$

Продолжая эти преобразования, будем постепенно повышать значения верхних индексов и придем к системе равенств:

$$u_r^0 = P_r^i u_0^i + P_r^{i+1} u_1^i + P_r^{i+2} u_2^i + \dots +$$
$$+ P_r^{i+n-1} u_{n-1}^i \ ^{*)}, \quad r = 0, 1, 2, \dots, n-1. \tag{4}$$

Здесь P_r^s числа целые, так как они являются полиномами от целых чисел b_κ^i с целыми коэфициентами.

Из (4) находим:

$$\frac{u_r^0}{u_0^0} = \frac{P_r^i + P_r^{i+1}\dfrac{u_1^i}{u_0^i} + P_r^{i+2}\dfrac{u_2^i}{u_0^i} + \dots + P_r^{i+n-1}\dfrac{u_{n-1}^i}{u_0^i}}{P_0^i + P_0^{i+1}\dfrac{u_1^i}{u_0^i} + P_0^{i+2}\dfrac{u_2^i}{u_0^i} + \dots + P_0^{i+n-1}\dfrac{u_{n-1}^i}{u_n^i}} \tag{5}$$

Допустим, что существуют два таких целых числа $\kappa \geqq 0$ и $h \geqq 1$, при которых имеет место система равенств:

$$\frac{u_r^{\kappa+h}}{u_0^{\kappa+h}} = \frac{u_r^\kappa}{u_0^\kappa}, \quad r = 1, 2, \dots, n-1. \tag{6}$$

Вследствие равенств (6) имеем:

$$b_r^{\kappa+h} = b_r^\kappa, \quad r = 1, 2, \dots, n-1.$$

Но для значений r от 1 до $n-2$

$$\frac{u_r^{\kappa+h+1}}{u_0^{\kappa+h+1}} = \frac{\dfrac{u_{r+1}^{\kappa+h}}{u_0^{\kappa+h}} - b_{r+1}^{\kappa+h}}{\dfrac{u_1^{\kappa+h}}{u_0^{\kappa+h}} - b_1^{\kappa+h}} = \frac{\dfrac{u_{r+1}^\kappa}{u_0^\kappa} - b_{r+1}^\kappa}{\dfrac{u_1^\kappa}{u_0^\kappa} - b_1^\kappa} = \frac{u_r^{\kappa+1}}{u_0^{\kappa+1}}$$

и

$$\frac{u_{n-1}^{\kappa+h+1}}{u_0^{\kappa+h+1}} = \frac{1}{\dfrac{u_1^{\kappa+h}}{u_0^{\kappa+h}} - b_1^{\kappa+h}} = \frac{1}{\dfrac{u_1^\kappa}{u_0^\kappa} - b_1^\kappa} = \frac{u_{n-1}^{\kappa+1}}{u_0^{\kappa+1}} .$$

Итак, из равенств (6) вытекают равенства

$$\frac{u_r^{\kappa+h+1}}{u_0^{\kappa+h+1}} = \frac{u_r^{\kappa+1}}{u_0^{\kappa+1}}, \quad r = 1, 2, \dots, n-1.$$

*) См. сноску *) на 93 странице.

Точно так же мы обнаружим, что

$$\frac{u_r^{\kappa+h+2}}{u_0^{\kappa+h+2}} = \frac{u_r^{\kappa+2}}{u_0^{\kappa+2}}; \quad \frac{u_r^{\kappa+h+3}}{u_0^{\kappa+h+3}} = \frac{u_r^{\kappa+3}}{u_0^{\kappa+3}}; \ \dots ; \ \frac{u_r^{\kappa+h+s}}{u_0^{\kappa+h+s}} = \frac{u_r^{\kappa+s}}{u_0^{\kappa+s}} ,$$

где s есть любое натуральное число.

Полагая s равным h, $2h$, $3h, \dots, (n-1)h$, будем иметь:

$$\frac{u_r^\kappa}{u_0^\kappa} = \frac{u_r^{\kappa+h}}{u_0^{\kappa+h}} = \frac{u_r^{\kappa+2h}}{u_0^{\kappa+2h}} = \dots = \frac{u_r^{\kappa+(n-1)h}}{u_0^{\kappa+(n-1)h}} \tag{7}$$

Из равенств (5) вытекает:

$$P_0^i \cdot \frac{u_r^0}{u_0^0} - P_r^i + \left(P_0^{i+1} \cdot \frac{u_r^0}{u_0^0} - P_r^{i+1}\right)\frac{u_1^i}{u_0^i} + \left(P_0^{i+2}\frac{u_r^0}{u_0^0} - P_r^{i+2}\right)\frac{u_2^i}{u_0^i} + \dots$$
$$\dots + \left(P_0^{i+n-1} \cdot \frac{u_r^0}{u_0^0} - P_r^{i+n-1}\right) \cdot \frac{u_{n-1}^i}{u_0^i} = 0. \tag{8}$$

Полагая в равенстве (8) число i равным κ, $\kappa + h$, $\kappa + 2h, \dots$, $\kappa + (n-1)h$, получим систему n равенств вида (8); принимая же во внимание равенства (7), справедливые для всех значений r от 1 до $n-1$, мы можем исключить из n равенств $(n-1)$ число, т. е. получить уравнение $\Delta_r = 0$, где Δ_r есть приведенный ниже определитель:

$$\begin{vmatrix} P_0^\kappa \cdot \dfrac{u_r^0}{u_0^0} - P_r^\kappa & P_0^{\kappa+1}\dfrac{u_r^0}{u_0^0} - P_r^{\kappa+1} & \dots P_0^{\kappa+n-1} \cdot \dfrac{u_r^0}{u_0^0} - P_r^{\kappa+n-1} \\ P_0^{\kappa+h} \cdot \dfrac{u_r^0}{u_0^0} - P_r^{\kappa+h} & P_0^{\kappa+h+1} \cdot \dfrac{u_r^0}{u_0^0} - P_r^{\kappa+h+1} & \dots P_0^{\kappa+h+n-1} \cdot \dfrac{u_r^0}{u_0^0} - P_r^{\kappa+h+n-1} \\ \dots & \dots & \dots \\ P_0^{\kappa+(n-1)h} \cdot \dfrac{u_r^0}{u_0^0} - P_r^{\kappa+(n-1)h} & P_0^{\kappa+(n-1)h+1} \cdot \dfrac{u_r^0}{u_0^0} - P_r^{\kappa+(n-1)h+1} & \dots P_0^{\kappa+(n-1)(h+1)} \cdot \dfrac{u_r^0}{u_0^0} - P_r^{\kappa+(n-1)(h+1)} \end{vmatrix}$$

Равенство $\Delta_r = 0$ есть уравнение n-ой степени относительно $\dfrac{u_r^0}{u_0^0}$.

Итак, если алгорифм Якоби для чисел $\dfrac{u_r^0}{u_0^0}$ периодичен, то эти числа служат корнями уравнения степени не выше n-ой, если только определитель Δ_r не обращается в нуль тождественно.

Может быть поставлен вопрос: для всякой ли иррациональности n-го порядка периодичен алгорифм Якоби соответствующего порядка? Вопрос этот до настоящего времени не решен не только для иррациональностей n-го порядка вообще, но даже и для иррациональностей третьего порядка.

Не решая этой задачи во всем ее объеме, рассмотрим один класс иррациональностей, для которого алгорифм Якоби периодичен.

Пусть целое положительное число a удовлетворяет следующим условиям:

$$\left.\begin{array}{l} a=\kappa^n+r, \text{ где } \kappa,\ r \text{ и } n \text{ натуральные числа, причем,} \\ 1)\ n\geqq 2,\ \ 2)\ \kappa\geqq\dfrac{n-1}{2},\ \ 3)\ \ 0<r\leq\dfrac{2\kappa}{n-1}\ \text{ и }\ 4)\ \dbinom{n}{i}\kappa^i\equiv 0\,(mod\, r)\,^{*)} \end{array}\right\} \qquad (9)$$

Положим:

$$u_0^0=1,\ u_1^0=\sqrt[n]{a},\ u_2^0=\sqrt[n]{a^2},\ \dots,\ u_{n-1}^0=\sqrt[n]{a^{n-1}}\ \text{ и }\ \sigma_i^0=\sqrt[n]{a^i}-\kappa^i\ ^{**)}$$

Если окажется, что $0<\sigma_i^0<1$ при любом i от 1 до $n-1$, то можно будет положить $b_i^0=\kappa^i$, а также, очевидно, $u_{i-1}^1=\sigma_i^0$ для всех значений индекса i от 1 до $n-1$, кроме того, $u_{n-1}^1=u_0^0=1$.

Итак, если $0<\sigma_i^0<1$, $i=1, 2, \dots, n-1$, то

$$b_1^0=\kappa,\ b_2^0=\kappa^2,\ b_3^0=\kappa^3,\ \dots,\ b_{n-1}^0=\kappa^{n-1}$$

и

$$u_0^1=\sigma_1^0,\ u_1^1=\sigma_2^0,\ \dots,\ u_{n-2}^1=\sigma_{n-1}^0,\ u_{n-1}^1=1.$$

Для облегчения дальнейших вычислений докажем некоторые тождества. Положим:

$$s_i^j=\sum_{s=0}^{i}\binom{j-1+s}{j-1}\kappa^s\sqrt[n]{a^{i-s}} \qquad (10)$$

и

$$\sigma_i^j=s_i^j-\binom{j+1}{i}\kappa^i,\ \text{ если } j\geqq 1, \qquad (11)$$

а при $j=0$ имеем $s_i^0=\sqrt[n]{a^i}$ и $\sigma_i^0=\sqrt[n]{a^i}-\kappa^i$.

Положив $\sqrt[n]{a}=\kappa+\rho$, находим

$$\sigma_1^j=s_1^j-\binom{j+1}{1}\kappa=\sqrt[n]{a}+\left\{\binom{j}{j-1}-\binom{j+1}{1}\right\}\kappa=\sqrt[n]{a}-\kappa,$$

т. е.

$$\sigma_1^j=\rho.$$

Заметим, что

$$s_{n-1}^1=\sum_{s=0}^{n-1}\binom{s}{0}\kappa^s\sqrt[n]{a^{n-1-s}}=\frac{a-\kappa^n}{\sqrt[n]{a}-\kappa}=\frac{r}{\rho},$$

т. е.

$$\rho\, s_{n-1}^1=r.$$

---

*) Здесь $\binom{n}{i}=\frac{n\,!}{i\,!\,(n-i)\,!}$.

**) Здесь и в дальнейшем мы пишем u_j^i, b_j^i, σ_j^i и s_j^i вместо $u_j^{(i)}$, $b_j^{(i)}$, $\sigma_j^{(i)}$ и $s_j^{(i)}$; это мы вправе сделать, так как числа u, b, σ и s с верхними и нижними индексами у нас будут встречаться только в первой степени.

Кроме того,

$$\rho\, s_i^{j+1}=\left(\sqrt[n]{a}-\kappa\right)\sum_{s=0}^{i}\binom{j+s}{j}\kappa^s\sqrt[n]{a^{i-s}}$$

$$=\sum_{s=0}^{i}\binom{j+s}{j}\kappa^s\sqrt[n]{a^{i+1-s}}-\sum_{\sigma=0}^{i}\binom{j+\sigma}{j}\kappa^{\sigma+1}\sqrt[n]{a^{i-\sigma}}.$$

Положив в вычитаемом $\sigma+1=s$, находим:

$$\rho\, s_i^{j+1}=\sum_{s=0}^{i}\binom{j+s}{j}\kappa^s\sqrt[n]{a^{i+1-s}}-\sum_{s=1}^{i+1}\binom{j+s-1}{j}\kappa^s\sqrt[n]{a^{i+1-s}}$$

$$=\sum_{s=0}^{i}\left\{\binom{j+s}{j}-\binom{j+s-1}{j}\right\}\kappa^s\sqrt[n]{a^{i+1-s}}-\binom{j+i-1}{j}\kappa^{i+1}$$

$$=\sum_{s=0}^{i+1}\binom{j-1+s}{j-1}\kappa^s\sqrt[n]{a^{i+1-s}}-\binom{j+i+1}{j}\kappa^{i+1},$$

т. е.

$$\rho\, s_i^{j+1}=\sigma_{i+1}^j$$

Откуда

$$r\, s_i^{j+1}=\rho\, s_{n-1}^1\, s_i^{j+1}=\sigma_{i+1}^j\, s_{n-1}^1,$$

т. е.

$$\sigma_{i+1}^j\, s_{n-1}^1=r\, s_i^{j+1}.$$

Итак, мы можем записать:

$$\text{a)}\ \sigma_1^j\, s_{n-1}^1=r,\quad \text{в)}\ \sigma_{i+1}^j\, s_{n-1}^1=r\, s_i^{j+1},\quad \text{c)}\ s_i^j=\binom{i+j}{i}\kappa^i+\sigma_i^j, \qquad (12)$$

$$\text{где } 1\leqslant i\leqslant n-1,\ j\geqslant 0 \text{ и } i+j\leqslant n.$$

Обнаружим теперь, что $0<\sigma_i^j<1$ для всех i и j, удовлетворяющих указанным выше условиям, если только

$$\kappa\geqslant\frac{n-1}{2}\ \text{ и }\ 0<r\leqslant\frac{2\kappa}{n-1}.$$

Заменив в выражении σ_i^j число $\sqrt[n]{a^i}$ равным ему $(\kappa+\rho)^i$ и воспользовавшись тождеством

$$\sum_{\sigma=0}^{i-s}\binom{j+\sigma}{j}\binom{i-\sigma}{s}=\binom{j+i+1}{j+s+1},$$

которое нетрудно доказать, мы найдем, что

$$\sigma_i^j=\sum_{\sigma=1}^{i}\binom{j+i}{i-\sigma}\kappa^{i-\sigma}\rho^\sigma \qquad (13)$$

Действительно,

$$\sigma_i^j=\sum_{\sigma=0}^{i}\binom{j-1+\sigma}{j-1}\kappa^{\sigma}(\kappa+\rho)^{i-\sigma}-\binom{j+i}{i}\kappa^i$$

$$=\sum_{\sigma=0}^{i}\binom{j-1+\sigma}{j-1}\sum_{s=0}^{i-\sigma}\binom{i-\sigma}{s}\kappa^{i-s}\rho^s-\binom{j+i}{i}\kappa^i$$

$$=\sum_{\sigma=0}^{i}\sum_{s=1}^{i-\sigma}\binom{j-1+\sigma}{j-1}\binom{i-\sigma}{s}\kappa^{i-s}\rho^s,$$

так как при $s=0$ имеем:

$$\sum_{\sigma=0}^{i}\binom{j-1+\sigma}{j-1}\binom{i-\sigma}{0}\kappa^i=\kappa^i\sum_{\sigma=0}^{i}\binom{j-1+\sigma}{j-1}=$$

$$=\binom{j+i}{j}\kappa^i=\binom{j+i}{i}\kappa^i.$$

Кроме того, заметим, что

$$\sum_{\sigma=0}^{i}\sum_{s=1}^{i-\sigma}\binom{j-1+\sigma}{j-1}\binom{i-\sigma}{s}=\sum_{s=1}^{i}\sum_{\sigma=0}^{i-s}\binom{j-1+\sigma}{j-1}\binom{i-\sigma}{s}=$$

$$=\sum_{s=1}^{i}\binom{j+i}{j+s}=\sum_{s=1}^{i}\binom{j+i}{i-s},$$

чем и доказывается справедливость равенства (13).

Из равенства (13) мы прежде всего обнаруживаем, что σ_i^j при данном i возрастает с ростом индекса j, а потому $\sigma_i^{n-i}\geqslant\sigma_i^j$, так как $n-i\geqslant j$. Вследствие этого, для установления неравенств $\sigma_i^j<1$ при любых j и i (удовлетворяющих, конечно, поставленным для них условиям) достаточно выбрать ρ так, чтобы имели место неравенства

$$0<\sigma_i^{n-i}<1$$

для всех значений i от 1 до $n-1$.

Заметим прежде всего, что $\sigma_1^{n-1}=\sqrt[n]{a}-\kappa$, а так как

$$0<\sqrt[n]{a}-\kappa<1,$$

то

$$0<\sigma_1^{n-1}<1.$$

Если $2\leqslant i\leqslant n-1$, то

$$\sigma_i^{n-i}=\sum_{s=1}^{i}\binom{n}{i-s}\kappa^{i-s}\rho^s=\binom{n}{i-1}\kappa^{i-1}\rho Q,$$

где

$$Q=1+\frac{\binom{n}{i-2}}{\binom{n}{i-1}}\cdot\frac{\rho}{\kappa}+\frac{\binom{n}{i-3}}{\binom{n}{i-1}}\cdot\frac{\rho^2}{\kappa^2}+\ldots$$

$$=1+\frac{i-1}{n-i+2}\cdot\frac{\rho}{\kappa}+\frac{(i-1)(i-2)}{(n-i+2)(n-i+3)}\cdot\frac{\rho^2}{\kappa^2}+\ldots$$

$$<\sum_{s=0}^{\infty}\left(\frac{i-1}{n-i+2}\cdot\frac{\rho}{\kappa}\right)^s=\frac{1}{1-\frac{i-1}{n-i+2}\cdot\frac{\rho}{\kappa}}\leqslant\frac{1}{1-\frac{n-2}{3}\cdot\frac{\rho}{\kappa}}.$$

Итак,

$$\sigma_i^{n-i}<\binom{n}{i-1}\kappa^{i-1}\rho\cdot\frac{1}{1-\frac{n-2}{3}\cdot\frac{\rho}{\kappa}},\quad 2\leqslant i\leqslant n-1. \qquad (14)$$

Так как $\rho=\sqrt[n]{\kappa^n+r}-\kappa$ и $0<r\leqslant\frac{2\kappa}{n-1}$, то

$$\rho\leqslant\kappa\left\{\left(1+\frac{2}{(n-1)\kappa^{n-1}}\right)^{\frac{1}{n}}-1\right\}<\frac{2}{n(n-1)\kappa^{n-2}}\left\{1-\frac{2}{n\kappa^{n-1}}+\frac{4(2n-1)}{n^2(n-1)\kappa^{2n-2}}\right.,$$

т. е.

$$\rho<\frac{2}{n(n-1)\kappa^{n-2}}\left(1-\frac{n-2}{3}\cdot\frac{\rho}{\kappa}\right).\text{*)}$$

Откуда

$$\sigma_i^{n-i}<\binom{n}{i-1}\cdot\frac{2}{n(n-1)\kappa^{n-i-1}}=\frac{2\binom{n}{s+1}}{n(n-1)\kappa^{s-1}},\quad\text{где } s=n-i\geqslant 1.$$

Но $\kappa\geqslant\frac{n-1}{2}$, а потому

$$\sigma_i^{n-i}=\sigma_{n-s}^s<\frac{n\left(\frac{n-1}{2}\right)^s\cdot\frac{2^s}{(s+1)!}}{n\left(\frac{n-1}{2}\right)^s}=\frac{2^s}{(s+1)!}\leqslant 1.$$

Таким образом мы находим, что

$$0<\sigma_i^j<1,\ \text{где } 1\leqslant i\leqslant n-1,\ j\geqslant 0 \text{ и } i+j\leqslant n. \qquad (15)$$

Теперь не представит большого труда нахождение чисел b_ρ^σ и u_ρ^σ. Легко также будет доказать, что при этих условиях алгорифм Якоби периодичен.

Мы имели:

$$u_0^0=1,\ u_1^0=\sqrt[n]{a},\ u_2^0=\sqrt[n]{a^2},\ \ldots,u_{n-1}^0=\sqrt[n]{a^{n-1}} \text{ и } \sigma_i^0=\sqrt[n]{a^i}-\kappa^i.$$

*) Случай $n=3,\kappa=r=1$ проверяется непосредственно, причем оказывается, что $\rho<0{,}26$ и $\sigma_2^1<0{,}9$.

Так как $0 < \sigma_i^0 < 1$ при любом значении индекса i от 1 до $n-1$, то

$$b_1^0 = \kappa, \; b_2^0 = \kappa^2, \; b_3^0 = \kappa^3, \ldots, \; b^0_{n-2} = \kappa^{n-2}, \; b^0_{n-1} = \kappa^{n-1}$$

и

$$u_0^1 = \sigma_1^0, \; u_1^1 = \sigma_2^0, \; u_2^1 = \sigma_3^0, \ldots, \; u^1_{n-2} = \sigma^0_{n-1}, \; u^1_{n-1} = 1.$$

Согласно правилу для нахождения чисел u_ρ^s имеем:

$$u_\rho^2 = \left(\frac{u^1_{\rho+1}}{u_0^1} - b^1_{\rho+1}\right) u_0^1, \text{ т. е. } u_\rho^1 = \left(\frac{\sigma^0_{\rho+2}}{\sigma_1^0} - b^1_{\rho+1}\right) u_0^1.$$

Но

$$\frac{\sigma^0_{\rho+2}}{\sigma_1^0} = \frac{\sigma^0_{\rho+2}\, s^1_{n-1}}{\sigma_1^0\, s^1_{n-1}} = \frac{r\, s^1_{\rho+1}}{r} = s^1_{\rho+1} = \binom{\rho+2}{\rho+1} \kappa^{\rho+1} + \sigma^1_{\rho+1},$$

если $0 \leqslant \rho \leqslant n-3$.

Так как $0 < \sigma^2_{\rho+1} < 1$, то мы можем положить

$$b^1_{\rho+1} = \binom{\rho+2}{\rho+1} \kappa^{\rho+1} = \binom{\rho+2}{1} \kappa^{\rho+1},$$

откуда

$$u_\rho^2 = \sigma^1_{\rho+1}\, u_0^1$$

для всех значений ρ от 0 до n—3. Кроме того,

$$u^2_{n-2} = \left(\frac{u^1_{n-1}}{u_0^1} - b^1_{n-1}\right) u_0^1 = \left(\frac{1}{\sigma_1^0} - b^1_{n-1}\right) u_0^1 \text{ и } u^2_{n-1} = u_0^1 = \sigma_1^0$$

$$\frac{1}{\sigma_1^0} = \frac{s^1_{n-1}}{\sigma_1^0\, s^1_{n-1}} = \frac{\binom{n}{n-1} \kappa^{n-1} + \sigma^1_{n-1}}{r} = \frac{\binom{n}{n-1} \kappa^{n-1}}{r} + \frac{\sigma^1_{n-1}}{r},$$

а так как $0 < \frac{\sigma^1_{n-1}}{r} < 1$ и $\frac{\binom{n}{n-1} \kappa^{n-1}}{r}$ есть число целое, то

$$b^1_{n-1} = \frac{\binom{n}{n-1} \kappa^{n-1}}{r} \text{ и } u^2_{n-2} = \frac{\sigma^1_{n-1}}{r} u_0^1.$$

Итак, мы имеем

$$b_\rho^1 = \binom{\rho+1}{1} \kappa^\rho, \; \rho = 1, 2, \ldots, n-2; \; b^1_{n-1} = \frac{\binom{n}{n-1} \kappa^{n-1}}{r};$$

$$u_\rho^2 = \sigma^1_{\rho+1}\, u_0^1, \; \rho = 0, 1, \ldots, n-3; \; u^2_{n-2} = \frac{\sigma^1_{n-1}}{r} u_0^1 \text{ и } u^2_{n-1} = u_0^1.$$

Рассматривая значения b_ρ^σ и u_ρ^σ, мы замечаем, что в том случае, когда сумма верхнего и нижнего индекса не превышает $n-1$, оказывается

$$b_\rho^\sigma = \binom{\rho+\sigma}{\rho} \kappa^\rho \text{ и } u_\rho^\sigma = \sigma^{\sigma-1}_{\rho+1}\, u_0^{\sigma-1};$$

если же $\rho + \sigma \geqslant n$, то

$$b_\rho^\sigma = \frac{\binom{n}{\rho} \kappa^\rho}{r} \text{ и } u_\rho^\sigma = \frac{\sigma^{n-\rho-1}_{\rho+1}}{r}\, u_0^{\sigma-1} \text{ при } \rho \leqslant n-2 \text{ и } u^\sigma_{n-1} = u_0^1.$$

Дальнейшие вычисления позволяют нам составить приведенную ниже таблицу значений u_ρ^σ. В этой таблице указаны только коэфициенты; и для получения u_ρ^σ коэфициенты эти должны быть снабжены множителями, стоящими в последней колонке.

ρ	0	1	2	…	$n-i-2$	$n-i-1$	$n-i$	…	$n-4$	$n-3$	$n-2$	$n-1$	$u_0^{\sigma-1}$
u_ρ^0	1	$\sqrt[n]{a}$	$\sqrt[n]{a^2}$	…	$\sqrt[n]{a^{n-i-2}}$	$\sqrt[n]{a^{n-i-1}}$	$\sqrt[n]{a^{n-i}}$	…	$\sqrt[n]{a^{n-4}}$	$\sqrt[n]{a^{n-3}}$	$\sqrt[n]{a^{n-2}}$	$\sqrt[n]{a^{n-1}}$	1
u_ρ^1	σ_1^0	σ_2^0	σ_3^0	…	σ^0_{n-i-1}	σ^0_{n-i}	σ^0_{n-i+1}	…	σ^0_{n-3}	σ^0_{n-2}	σ^0_{n-1}	1	1
u_ρ^2	σ_1^1	σ_2^1	σ_3^1	…	σ^1_{n-i-1}	σ^1_{n-i}	σ^1_{n-i+1}	…	σ^1_{n-3}	σ^1_{n-2}	$\frac{\sigma^1_{n-1}}{r}$	1	u_0^1
u_ρ^3	σ_1^2	σ_2^2	σ_3^2	…	σ^2_{n-i-1}	σ^2_{n-i}	σ^2_{n-i+1}	…	σ^2_{n-3}	$\frac{\sigma^2_{n-2}}{r}$	$\frac{\sigma^1_{n-1}}{r}$	1	u_0^2
…	…	…	…	…	…	…	…	…	…	…	…	…	…
[illegible]	σ_1^{i-1}	σ_2^{i-1}	σ_3^{i-1}	…	σ^{i-1}_{n-i-1}	σ^{i-1}_{n-i}	$\frac{\sigma^{i-1}_{n-i+1}}{r}$	…	$\frac{\sigma^3_{n-3}}{r}$	$\frac{\sigma^2_{n-2}}{r}$	$\frac{\sigma^1_{n-1}}{r}$	1	u_0^{i-1}
[illegible]	σ_1^i	σ_2^i	σ_3^i	…	σ^i_{n-i-1}	$\frac{\sigma^i_{n-i}}{r}$	$\frac{\sigma^{i-1}_{n-i+1}}{r}$	…	$\frac{\sigma^3_{n-3}}{r}$	$\frac{\sigma^2_{n-2}}{r}$	$\frac{\sigma^1_{n-1}}{r}$	1	u_0^i
…	…	…	…	…	…	…	…	…	…	…	…	…	…
[illegible]	σ_1^{n-2}	$\frac{\sigma_2^{n-2}}{r}$	$\frac{\sigma_3^{n-3}}{r}$	…	$\frac{\sigma^{i+1}_{n-i-1}}{r}$	$\frac{\sigma^i_{n-i}}{r}$	$\frac{\sigma^{i-1}_{n-i+1}}{r}$	…	$\frac{\sigma^3_{n-3}}{r}$	$\frac{\sigma^2_{n-2}}{r}$	$\frac{\sigma^1_{n-1}}{r}$	1	u_0^{n-2}
[illegible]	$\frac{\sigma_1^{n-1}}{r}$	$\frac{\sigma_2^{n-2}}{r}$	$\frac{\sigma_3^{n-3}}{r}$	…	$\frac{\sigma^{i+1}_{n-i-1}}{r}$	$\frac{\sigma^i_{n-i}}{r}$	$\frac{\sigma^{i-1}_{n-i+1}}{r}$	…	$\frac{\sigma^3_{n-3}}{r}$	$\frac{\sigma^2_{n-2}}{r}$	$\frac{\sigma^1_{n-1}}{r}$	1	u_0^{n-1}
[illegible]	σ_1^{n-1}	σ_2^{n-2}	σ_3^{n-3}	…	σ^{i+1}_{n-i-1}	σ^i_{n-i}	σ^{i-1}_{n-i+1}	…	σ^3_{n-3}	σ^2_{n-2}	σ^1_{n-1}	1	u_0^n
[illegible]	σ_1^{n-1}	σ_2^{n-2}	σ_3^{n-3}	…	σ^{i+1}_{n-i-1}	σ^i_{n-i}	σ^{i-1}_{n-i+1}	…	σ^3_{n-3}	σ^3_{n-2}	$\frac{\sigma^1_{n-1}}{r}$	1	u_0^{n+1}
…	…	…	…	…	…	…	…	…	…	…	…	…	…
[illegible]	σ_1^{n-1}	$\frac{\sigma_2^{n-2}}{r}$	$\frac{\sigma_3^{n-3}}{r}$	…	$\frac{\sigma^{i+1}_{n-i-1}}{r}$	$\frac{\sigma^i_{n-1}}{r}$	$\frac{\sigma^{i-1}_{n-i+1}}{r}$	…	$\frac{\sigma^3_{n-3}}{r}$	$\frac{\sigma^2_{n-2}}{r}$	$\frac{\sigma^1_{n-1}}{r}$	1	u_0^{2n-2}
[illegible]	$\frac{\sigma_1^{n-1}}{r}$	$\frac{\sigma_2^{n-2}}{r}$	$\frac{\sigma_3^{n-3}}{r}$	…	$\frac{\sigma^{i+1}_{n-i-1}}{r}$	$\frac{\sigma^i_{n-1}}{r}$	$\frac{\sigma^{i-1}_{n-i+1}}{r}$	…	$\frac{\sigma^3_{n-3}}{r}$	$\frac{\sigma^2_{n-2}}{r}$	$\frac{\sigma^1_{n-1}}{r}$	1	u_0^{2n-1}
[illegible]	σ_1^{n-1}	σ_2^{n-2}	σ_3^{n-3}	…	σ^{i+1}_{n-i-1}	σ^i_{n-i}	σ^{i-1}_{n-i+1}	…	σ^3_{n-3}	σ^2_{n-2}	σ^1_{n-1}	1	u_0^{2n}
[illegible]	σ_1^{n-1}	σ_2^{n-2}	σ_3^{n-3}	…	σ^{i+1}_{n-i-1}	σ^i_{n-i}	σ^{i-1}_{n-i+1}	…	σ^3_{n-3}	σ^2_{n-2}	$\frac{\sigma^1_{n-1}}{r}$	1	u_0^{2n+1}
…	…	…	…	…	…	…	…	…	…	…	…	…	…

Значения $b_\rho^{\,s}$ приведены в помещенной ниже таблице (см. стр. 103). В таблице указаны только коэфициенты при соответствующих степенях κ, помещенных вверху колонок.

Рассматривая эту последнюю таблицу, мы видим, что $b_\rho^{n-1} = \frac{\binom{n}{\rho}\kappa^\rho}{r}$ и $b_\rho^n = \binom{n}{\rho}\kappa^\rho$ для всех значений индекса ρ.

Продолжая вычисление, мы находим, что снова для всех значений индекса ρ оказывается:

$$b_\rho^{2n-1} = \frac{\binom{n}{\rho}\kappa^\rho}{r} \qquad \text{и } b_\rho^{2n} = \binom{n}{\rho}\kappa^\rho \text{ т. е. } b_\rho^{n-1} = b_\rho^{2n-1}.$$

Но в таком случае, как мы видели выше, алгорифм Якоби периодичен. Период здесь начинается с n-ой строчки и состоит из n строчек. Непериодическую часть составляет $(n-1)$ первая строчка.

В частном случае, когда $n=3$, мы имеем:

i	0	1	2	3	4	5	....	$3j-1$	$3j$	$3j+1$	....
b_1^i	κ	2κ	$\frac{3\kappa}{r}$	3κ	3κ	$\frac{3\kappa}{r}$	....	$\frac{3\kappa}{r}$	3κ	3κ	....
b_2^i	κ^2	$\frac{3\kappa^2}{r}$	$\frac{3\kappa^2}{r}$	$3\kappa^2$	$\frac{3\kappa^2}{r}$	$\frac{3\kappa^2}{r}$	....	$\frac{3\kappa^2}{r}$	$3\kappa^2$	$\frac{3\kappa^2}{r}$	....

Для $n=4$ имеем:

i	0	1	2	3	4	5	6	7	...	$4j-1$	$4j$	$4j+1$	$4j+2$	...
b_1^i	κ	2κ	3κ	$\frac{4\kappa}{r}$	4κ	4κ	4κ	$\frac{4\kappa}{r}$	...	$\frac{4\kappa}{r}$	4κ	4κ	4κ	...
b_2^i	κ^2	$3\kappa^2$	$\frac{6\kappa^2}{r}$	$\frac{6\kappa^2}{r}$	$6\kappa^2$	$6\kappa^2$	$\frac{6\kappa^2}{r}$	$\frac{6\kappa^2}{r}$	...	$\frac{6\kappa^2}{r}$	$6\kappa^2$	$6\kappa^2$	$\frac{6\kappa^2}{r}$	...
b_3^i	κ^3	$\frac{4\kappa^3}{r}$	$\frac{4\kappa^3}{r}$	$\frac{4\kappa^3}{r}$	$4\kappa^3$	$\frac{4\kappa^3}{r}$	$\frac{4\kappa^3}{r}$	$\frac{4\kappa^3}{r}$	...	$\frac{4\kappa^3}{r}$	$4\kappa^3$	$\frac{4\kappa^3}{r}$	$\frac{4\kappa^3}{r}$	...

В том случае, когда $n=2$, находим

$$b_1^{\,0} = \kappa, \qquad b_1^{\,2n-1} = \frac{2\kappa}{r}, \qquad b_1^{\,2n} = 2\kappa,$$

т. е.

$$\sqrt{\kappa^2+r} = \left(\kappa, \left(\frac{2\kappa}{r}, 2\kappa\right)\right), \text{ если только } r/2\kappa.$$

Здесь $\left(\kappa, \left(\frac{2\kappa}{r}, 2\kappa\right)\right)$ есть схематическая запись обыкновенной не-

ρ	1	2	3	...	$n-i-2$	$n-i-1$	$n-i$	...	$n-4$	$n=3$	$n-2$	$n-1$
κ^ρ	κ	κ^2	κ^3	...	κ^{n-i-2}	κ^{n-i-1}	κ^{n-i}	...	κ^{n-4}	κ^{n-3}	κ^{n-2}	κ^{n-1}
b_ρ^0	1	1	1	...	1	1	1	...	1	1	1	1
b_ρ^1	$\binom{2}{1}$	$\binom{3}{2}$	$\binom{4}{3}$	...	$\binom{n-i-1}{u-i-2}$	$\binom{n-i}{n-i-1}$	$\binom{n-i+1}{n-i}$	...	$\binom{n-3}{n-4}$	$\binom{n-2}{n-3}$	$\binom{n-1}{n-2}$	$\frac{\binom{n}{n-1}}{r}$
b_ρ^2	$\binom{3}{1}$	$\binom{4}{2}$	$\binom{5}{3}$	...	$\binom{n-i}{n-i-2}$	$\binom{n-i+1}{n-i-1}$	$\binom{n-i+2}{n-i}$	...	$\binom{n-2}{n-4}$	$\binom{n-1}{n-3}$	$\frac{\binom{n}{n-2}}{r}$	$\frac{\binom{n}{n-1}}{r}$
b_ρ^3	$\binom{4}{1}$	$\binom{5}{2}$	$\binom{6}{3}$	...	$\binom{n-i+1}{n-i-2}$	$\binom{n-i+2}{n-i-1}$	$\binom{n-i+3}{n-i}$	...	$\binom{n-1}{n-4}$	$\frac{\binom{n}{n-3}}{r}$	$\frac{\binom{n}{n-2}}{r}$	$\frac{\binom{n}{n-1}}{r}$
...	...	...	...	...	....	....	....	...	...	...	...	..
b_ρ^i	$\binom{i+1}{1}$	$\binom{i+2}{2}$	$\binom{i+3}{3}$	...	$\binom{n-2}{n-i-2}$	$\binom{n-1}{n-i-1}$	$\frac{\binom{n}{n-i}}{r}$	...	$\frac{\binom{n}{n-4}}{r}$	$\frac{\binom{n}{n-3}}{r}$	$\frac{\binom{n}{n-2}}{r}$	$\frac{\binom{n}{n-1}}{r}$
b_ρ^{i+1}	$\binom{i+2}{1}$	$\binom{i+3}{2}$	$\binom{i+4}{3}$	...	$\binom{n-1}{n-i-2}$	$\frac{\binom{n}{n-i-1}}{r}$	$\frac{\binom{n}{n-i}}{r}$	...	$\frac{\binom{n}{n-4}}{r}$	$\frac{\binom{n}{n-3}}{r}$	$\frac{\binom{n}{n-2}}{r}$	$\frac{\binom{n}{n-1}}{r}$
...	...	...	...	...	....	....	....	...	...	...	...	...
b_ρ^{n-2}	$\binom{n-1}{1}$	$\frac{\binom{n}{2}}{r}$	$\frac{\binom{n}{3}}{r}$	...	$\frac{\binom{n}{n-i-2}}{r}$	$\frac{\binom{n}{n-i-1}}{r}$	$\frac{\binom{n}{n-i}}{r}$	...	$\frac{\binom{n}{n-4}}{r}$	$\frac{\binom{n}{n-3}}{r}$	$\frac{\binom{n}{n-2}}{r}$	$\frac{\binom{n}{n-1}}{r}$
b_ρ^{n-1}	$\frac{\binom{n}{1}}{r}$	$\frac{\binom{n}{2}}{r}$	$\frac{\binom{n}{3}}{r}$	...	$\frac{\binom{n}{n-i-2}}{r}$	$\frac{\binom{n}{n-i-1}}{r}$	$\frac{\binom{n}{n-i}}{r}$	...	$\frac{\binom{n}{n-4}}{r}$	$\frac{\binom{n}{n-3}}{r}$	$\frac{\binom{n}{n-2}}{r}$	$\frac{\binom{n}{n-1}}{r}$
b_ρ^n	$\binom{n}{1}$	$\binom{n}{2}$	$\binom{n}{3}$	...	$\binom{n}{n-i-2}$	$\binom{n}{n-t-1}$	$\binom{n}{n-i}$	...	$\binom{n}{n-4}$	$\binom{n}{n-3}$	$\binom{n}{n-2}$	$\binom{n}{n-1}$
b_ρ^{n+1}	$\binom{n}{1}$	$\binom{n}{2}$	$\binom{n}{3}$	...	$\binom{n}{n-i-2}$	$\binom{n}{n-i-1}$	$\binom{n}{n-i}$	...	$\binom{n}{n-4}$	$\binom{n}{n-3}$	$\binom{n}{n-2}$	$\frac{\binom{n}{n-1}}{r}$
...	...	..	...	...	....	....	....	...	...	...	...	...
b_ρ^{2n-2}	$\binom{n}{1}$	$\frac{\binom{n}{2}}{r}$	$\frac{\binom{n}{3}}{r}$	...	$\frac{\binom{n}{n-i-2}}{r}$	$\frac{\binom{n}{n-i-1}}{r}$	$\frac{\binom{n}{n-i}}{r}$	...	$\frac{\binom{n}{n-4}}{r}$	$\frac{\binom{n}{n-3}}{r}$	$\frac{\binom{n}{n-2}}{r}$	$\frac{\binom{n}{n-1}}{r}$
b_ρ^{2n-1}	$\frac{\binom{n}{1}}{r}$	$\frac{\binom{n}{2}}{r}$	$\frac{\binom{n}{3}}{r}$	...	$\frac{\binom{n}{n-i-2}}{r}$	$\frac{\binom{n}{n-i-1}}{r}$	$\frac{\binom{n}{n-i}}{r}$	...	$\frac{\binom{n}{n-4}}{r}$	$\frac{\binom{n}{n-3}}{r}$	$\frac{\binom{n}{n-2}}{r}$	$\frac{\binom{n}{n-1}}{r}$
b_ρ^{2n}	$\binom{n}{1}$	$\binom{n}{2}$	$\binom{n}{3}$	...	$\binom{n}{n-i-2}$	$\binom{n}{n-i-1}$	$\binom{n}{n-i}$	...	$\binom{n}{n-4}$	$\binom{n}{n-3}$	$\binom{n}{n-2}$	$\binom{n}{n-1}$
b_ρ^{2n+1}	$\binom{n}{1}$	$\binom{n}{2}$	$\binom{n}{3}$	...	$\binom{n}{n-i-2}$	$\binom{n}{n-i-1}$	$\binom{n}{n-i}$	...	$\binom{n}{n-4}$	$\binom{n}{n-3}$	$\binom{n}{n-2}$	$\frac{\binom{n}{n-1}}{r}$
...	...	...	...	...	....	....	....	...	...	...	...	...

риодической непрерывной дроби, а именно:

$$\sqrt{\kappa^2+r}=\kappa+\cfrac{1}{\cfrac{2\kappa}{r}+\cfrac{1}{2\kappa+\cfrac{1}{\cfrac{2\kappa}{r}+\cfrac{1}{2\kappa+\ldots}}}}$$

Например:

$\sqrt{2}=(1,(2))$; $\sqrt{3}=(1,(1,2))$; $\sqrt{5}=(2,(4))$; $\sqrt{6}=(2,(2,4))$;

$\sqrt{8}=(2,(1,4))$; $\sqrt{10}=(3,(6))$; $\sqrt{11}=(3,(3,6))$; $\sqrt{12}=(3,(2,6))$;

$\sqrt{15}=(3,(1,6))$; $\sqrt{17}=(4,(8))$; $\sqrt{18}=(4,(4.8))$; $\sqrt{20}=(4\,(2,8))$ и т. д.

Из рассматриваемой совокупности иррациональностей выпадают числа:

$\sqrt{7}=(2,\ (1,\ 1,\ 1,\ 4))$; $\sqrt{13}=(3,\ (1,\ 1,\ 1,\ 1,\ 6))$;

$\sqrt{14}=(3,\ (1,\ 2,\ 1,\ 6))$; $\sqrt{19}=(4,\ (2,\ 1,\ 3,\ 1,\ 2,\ 8)$ и т. д.

В этих последних случаях $\frac{2\kappa}{r}$ не целое число, а именно:

$$\frac{4}{3};\ \frac{6}{4};\ \frac{6}{5};\ \frac{8}{3}.$$

Нетрудно видеть, что и наоборот:

$$(a,\ (b,\ 2a))=\sqrt{a^2+\frac{2a}{b}}$$

при любых значениях целых положительных a и b.

ТРУДЫ ОДЕССКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА
ГОД XXIX имени И. И. МЕЧНИКОВА ТОМ VI (59)

Г. Ф. КАТКОВ,
кандидат физико-математических наук

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНАЯ ГЕОМЕТРИЯ МНОГООБРАЗИЙ УРОВНЯ

ВВЕДЕНИЕ

Дифференциально-геометрические свойства многообразий уровня, их дифференциальные инварианты недостаточно разработаны и слабо освещены в математической литературе. Геометрическая мысль, с начала ее зарождения и до наших дней достигла огромных результатов в изучении теории кривых и поверхностей (гиперповерхностей) не только в эвклидовом пространстве, но и в пространствах Лобачевского, Римана и других. Однако следует заметить, что эта теория в основном строится на параметрическом представлении многообразий. В классической дифференциальной геометрии, особенно в вопросах элементарных, встречается ряд задач, в которых кривая или поверхность предполагается заданной в неявном виде относительно декартовой системы координат, и для них выводятся уравнения касательной, нормали, кривизна и т. д., но результаты более общие отсутствуют.

Целью настоящей работы является получить некоторые дифференциально-геометрические свойства и дифференциальные инварианты многообразий уровня. В случае плоского скалярного поля — свойства линий уровня, в случае трехмерного (n-мерного) скалярного поля — дифференциально-геометрические свойства поверхностей (гиперповерхностей) уровня, а также свойства кривых, заданных как линии пересечения поверхностей (гиперповерхностей) уровня. До Гаусса рассматривались кривые на плоскости и поверхности в пространстве, заданные соответственно уравнениями: $\varphi(x,y)=const$ и $F(x,\ y,\ z)=const$ как линии поверхности) уровня некоторого скалярного поля.

Гаусс в работе „Disquisitiones generales circa superficies curvas" получил выражение полной кривизны (K) для поверхности уровня $F(x,y\,z)=0$, где x, y, z — декартовы прямоугольные координаты. Формула, которую он получил, очень громоздка. Только числитель дроби содержит двенадцать членов.

В шестидесятых годах прошлого столетия русский математик академик О. И. Сомов получил выражение полной и средней кривизн для поверхности $\varphi(u^1, u^2, u^3)=const$, заданной в общих криволинейных координатах. Как и следовало ожидать, его результаты еще более громоздки, чем у Гаусса.

В 1906 году американский математик Heinrich Maschke опубликовал работу, в которой получил формулу для полной кривизны гиперповерхности, написанную им в своеобразной, довольно сложной и громоздкой символике, причем гиперповерхность он предполагает заданной в параметрической форме. Из его формулы также следует выражение полной кривизны для поверхности в трехмерном пространстве, рассматриваемой как многообразие уровня, но он не распространил этот результат на гиперповерхность уровня в n-мерном пространстве. Следует отметить также работу Ю. В. Икорникова, опубликованную в Известиях Академии Наук СССР в 1932 году, в которой даны формулы для кривизны поверхности в векторной форме.

Громоздкость выкладок и окончательных результатов послужила одной из основных причин к переходу от задания кривых и поверхностей (гиперповерхностей) как многообразий уровня к теории, основанной на параметрическом представлении многообразий. В настоящее время развитие тензорного анализа делает возможным избежать громоздких выражений и позволяет решить ряд задач, относящихся к кривым и поверхностям, заданным как многообразия уровня в эвклидовом или афинном (эквиафинном) пространстве. Тензорный аппарат является не только средством преодоления громоздкости в выкладах и делает формулы компактными, но, кроме того, он делает их годными для любой системы координат. В связи с тем, что в тексте мы систематически используем аппарат тензорного анализа, приведем обозначения наиболее важных и часто употребляемых операций над тензорами, чтобы не делать в дальнейшем специальных замечаний. Под ковариантной производной некоторого тензора λ_{ij} будем понимать выражение

$$\lambda_{ij/\kappa}=\frac{\partial\lambda_{ij}}{\partial u^{\kappa}}-\lambda_{\alpha j}\Gamma^{\alpha}_{i\kappa}-\lambda_{i\alpha}\Gamma^{\alpha}_{j\kappa},$$

где $\Gamma^{\alpha}_{j\kappa}$ коэффициенты связности, природа которых может быть в различных случаях различна. Для отличия ковариантной производной от обычной будем употреблять вертикальную черточку. Тензор нулевой валентности (J) называют инвариантом, ковариантная производная от инварианта совпадает с обычной

$$J_{|\kappa}=\frac{\partial J}{\partial u_{\kappa}}.$$

Если ковариантное дифференцирование производится относительно метрики пространства (или поверхности), то в этом случае метрический тензор пространства (поверхности) и ему взаимный ковариантно „постоянны", т. е.

$$g_{ij\,|\,\kappa}=0,\ g^{ij}_{\ \ |\,\kappa}=0.$$

Заметим, что любой тензор, обладающий свойством ковариантного постоянства, можно вынести за знак ковариантной производной.

Настоящая тема разработана под руководством проф. Я. С. Дубнова, которому считаю своим долгом выразить свою искреннюю благодарность.

§ 1. Инварианты линии уровня скалярного поля на эвклидовой плоскости

Рассмотрим плоское скалярное поле $\varphi=\varphi(u^1,u^2)$ с линиями уровня:

$$\varphi(u^1,\ u^2)=const, \tag{1}$$

где u^1, u^2 — общие криволинейные координаты на плоскости. Через каждую точку плоскости проходит пара координатных линий. Если

выберем на плоскости некоторую точку 0, то положение любой другой точки плоскости M определится радиусом—вектором

$$\bar r(u^1,\ u^2)=\overline{0M}.$$

Производные этого радиуса—вектора по криволинейным координатам $\bar r_1$, $\bar r_2$, направленные по касательным к координатным линиям, в каждой точке плоскости образуют векторный репер.

Наряду с этим репером введем взаимный репер $\bar r^1$, $\bar r^2$ так, что

$$\bar r^{\alpha}\bar r_{\beta}=\delta^{\alpha}_{\beta}=\begin{cases}1,\alpha=\beta,\\ 0,\alpha\neq\beta,\end{cases}$$
$$(\alpha,\beta=1,2).$$

Векторы взаимного репера направлены по нормалям к координатным линиям.

Любой вектор плоскости, а следовательно, и $\bar r_{ij}=\frac{\partial\bar r_i}{\partial u_j}$, можно разложить как по векторам репера $\bar r_1$, $\bar r_2$, так и по векторам взаимного репера $\bar r^1$, $\bar r^2$. Именно:

$$\bar r_{ij}=(\bar r_{ij}\bar r_{\alpha})\,\bar r^{\alpha}=\Gamma_{ij,\alpha}\bar r^{\alpha}=(\bar r_{ij}\bar r^{\alpha})\,\bar r_{\alpha}=\Gamma^{\alpha}_{ij}\bar r^{\alpha}.$$

Единичный вектор касательной ($\bar t$) к любой из линий уровня семейства (1) определится формулой:

$$\bar t=\frac{d\bar r}{ds}=\bar r_{\alpha}\frac{du^{\alpha}}{ds}=\bar r_{\alpha}\mu^{\alpha} \tag{2}$$
$$(\alpha=1,\ 2),$$

где, как и всюду в дальнейшем,

$$\frac{du^{\alpha}}{ds}=\mu^{\alpha}.$$

Дифференцируя (1) по s, получим:

$$\varphi_{\alpha}\mu^{\alpha}=0 \tag{3}$$
$$(\alpha=1,\ 2)$$

откуда μ^{α} определится с точностью до множителя, именно:

$$\mu^{\alpha}=\xi\,\varepsilon^{\alpha\nu}\varphi_{\nu},$$

где $\varepsilon^{\alpha\nu}$ контровариантный кососимметрический тензор второй валентности

$$\varepsilon^{\alpha\nu}=\bar r^{\alpha}\times\bar r^{\nu}.$$

Этот тензор принято называть дискриминантным.

Для упрощения дальнейших выкладок и сокращения записей впредь будем пользоваться поднятием и опусканием индексов с помощью дискриминантного тензора. При этом поднятый или опущенный индекс, в отличие от поднятого или опущенного индекса с помощью метрического тензора, будем подчеркивать:

$$\varepsilon^{i\alpha} t_\alpha = t^{\underline{i}}, \quad \varepsilon_{\alpha i} t^\alpha = t_{\underline{i}}.$$

(Такого рода поднятием и опусканием индексов неоднократно пользовались в своих работах Я. С. Дубнов и А. П. Норден). Благодаря этому, для μ^α получим выражение

$$\mu^\alpha = \xi \varphi^{\underline{\alpha}}. \tag{4}$$

Для определения ξ используем равенство

$$g_{\alpha\beta} \mu^\alpha \mu^\beta = 1. \tag{5}$$

Подставляя (4) в (5) найдем:

$$\xi = \frac{1}{\sqrt{\Delta\varphi}}$$

($\Delta\varphi = \varphi^\alpha \varphi_\alpha$ — первый дифференциальный параметр).

Согласно этому, получаем окончательное значение для μ^α:

$$\mu^\alpha = \frac{\varphi^{\underline{\alpha}}}{\sqrt{\Delta\varphi}} \tag{6}$$

Таким образом, выражение для единичного вектора касательной (2) примет вид:

$$\bar{t} = \frac{\varphi^{\underline{\alpha}} \bar{r}_\alpha}{\sqrt{\Delta\varphi}} \quad (\alpha = 1, 2). \tag{2}$$

Допустим, что на плоскости имеется семейство линий уровня рассматриваемого скалярного поля. При этом предполагается, что функция $\varphi(u^1, u^2)$ однозначна и $\Delta\varphi \neq 0$, по крайней мере, в некоторой области. Тогда через каждую точку этой области будет проходить одна из линий уровня, для которой эта точка будет обыкновенной. Следовательно, в каждой точке определится единичный касательный вектор к линии уровня, проходящей через эту точку, а потому мы имеем векторное поле единичных касательных векторов.

Кроме векторного поля единичных касательных векторов, легко определить векторное поле единичных нормалей. В самом деле. Пусть $\varphi(u^1, u^2) = C$, одна из линий нашего семейства, тогда градиент поля φ в точках линии $\varphi(u^1, u^2) = C$, направлен по нормали к этой линии, причем он выражается формулой:

$$grad\, \varphi = \bar{r}^\alpha \varphi_\alpha,$$

поэтому вектор единичной нормали выразится формулой:

$$\bar{n} = \frac{\bar{r}^\alpha \varphi_\alpha}{\sqrt{\Delta\varphi}}. \tag{7}$$

Имея выражение единичных векторов касательной и нормали, найдем кривизну линии уровня $\varphi(u^1, u^2) = C_1$. Как известно, она определяется формулой:

$$\kappa = \frac{d\bar{t}}{ds} \cdot \bar{n}. \tag{8}$$

Дифференцируя (2) по s, получим:

$$\frac{d\bar{t}}{ds} = (\bar{r}_\alpha \mu^\alpha)_{|\kappa} \mu^\kappa = \bar{r}_{\alpha/\kappa} \mu^\alpha \mu^\kappa + \bar{r}_\alpha \mu^\alpha{}_{|\kappa} \mu^\kappa.$$

Но

$$\bar{r}_{\alpha|\kappa} = r_{\alpha\kappa} - \bar{r}_\delta \Gamma^\delta_{\alpha\kappa} = r_{\alpha\kappa} - \bar{r}_\delta (\bar{r}^\delta \bar{r}_{\alpha\kappa}) = \bar{r}_{\alpha\kappa} - \bar{r}_{\alpha\kappa} = 0,$$

поэтому

$$\frac{d\bar{t}}{ds} = \bar{r}_\alpha \mu^\alpha{}_{|\kappa} \mu^\kappa. \tag{9}$$

Согласно (7), (8) и (9) имеем:

$$k = \frac{\bar{r}^\beta \varphi_\beta \bar{r}_\alpha \mu^\alpha{}_{|\kappa} \mu^\kappa}{\sqrt{\Delta\varphi}} = \frac{\varphi_\alpha \mu^\alpha{}_{|\kappa} \mu_\kappa}{\sqrt{\Delta\varphi}}. \tag{10}$$

Дифференцируя ковариантно (3), найдем:

$$\varphi_\alpha \mu^\alpha{}_{|\kappa} = -\varphi_{\alpha|\kappa} \mu^\alpha, \quad (\kappa, \alpha = 1, 2),$$

а потому (10) преобразуется к виду

$$\kappa = -\frac{\varphi_{\alpha|\kappa} \mu^\alpha \mu^\kappa}{\sqrt{\Delta\varphi}}.$$

Если подставить сюда вместо μ^α его значение из (6) и изменить индексы суммирования, то формула для кривизны линии уровня плоского скалярного поля приведется к следующему виду:

$$\kappa = -\frac{\varphi_{\alpha|\beta} \varphi^{\underline{\alpha}} \varphi^{\underline{\beta}}}{(\Delta\varphi)^{3/2}}. \tag{11}$$

Из нее легко получить выражение для кривизны плоской кривой, заданной в неявном виде $\varphi(x, y) = 0$ в декартовой прямоугольной системе координат.

§ 2. Инварианты линии уровня скалярного поля на поверхности

Допустим, что поверхность (S_2) задана в трехмерном пространстве двумя гауссовыми тензорами:

$$g_{ij} = \bar{r}_i \bar{r}_j, \quad -b_{ij} = \bar{r}_i \bar{N}_j,$$

которые удовлетворяют уравнениям Гаусса-Кодацци. Таким образом, поверхность определяется с точностью до положения в пространстве.

Обозначим внутренние координаты поверхности (S_2) через u^1, u^2. Тогда гауссовы тензоры будут функциями этих координат.

$$g_{ij}=g_{ij}(u^1, u^2),\ b_{ij}=b_{ij}(u^1, u^2).$$

Рассмотрим на поверхности скалярное поле

$$\varphi=\varphi(u^1, u^2)$$

с линиями уровня

$$\varphi(u^1, u^2)=const. \tag{1}$$

Возьмем одну из линий семейства (1)

$$\varphi(u^1, u^2)=C_1. \tag{l}$$

В точках линии (l) построим репер Дарбу, состоящий из единичного вектора нормали к поверхности, единичного вектора касательной к линии (l) и единичного вектора, лежащего в касательной плоскости к поверхности и ортогонального к линии (l), которые соответственно обозначим $\bar N$, $\bar t$, $\bar\nu$. Производные векторов построенного репера по дуге выразятся формулами:

$$\begin{aligned}\bar t' &= \alpha\bar\nu+\beta\bar N,\\ \bar\nu' &= -\alpha\bar t+\gamma\bar N,\\ \bar N' &= -\beta\bar t-\gamma\bar\nu,\end{aligned}$$

где α, β, γ—склярные инварианты $(l,)$ называемые, соответственно, геодезической кривизной $\left(\underset{g}{K}\right)$, нормальной кривизной $\left(\underset{n}{K}\right)$ и геодезическим кручением $\left(\underset{g}{\sigma}\right)$. Они выражаются через векторы репера и их производные следующим образом:

$$\begin{aligned}\underset{g}{K} &= \bar t'\bar\nu=-\bar\nu'\bar t,\\ \underset{n}{K} &= \bar t'\bar N=-\mathrm{N}'\bar t,\\ \underset{g}{\sigma} &= \bar\nu'\bar N=-\bar N'\bar\nu.\end{aligned} \tag{2}$$

Наряду с репером Дарбу будем пользоваться репером $\bar r_1, \bar r_2\bar N(\bar r_1, \bar r_2$—касательные векторы к координатным линиям на поверхности) и взаимным реперам $\bar r^1$, $\bar r^2$, $\bar N$.

Тогда очевидно, что

$$t=\bar r_\alpha\mu^\alpha;\quad t'=(\bar r_\beta\mu^\beta)_{|\kappa}\mu^k. \tag{3}$$

Далее, введя в рассмотрение „поверхностный градиент", будем иметь:

$$\bar\nu=\frac{grad\,\varphi}{|grad\,\varphi|}=\frac{\bar r^\alpha\varphi_\alpha}{\sqrt{\Delta\varphi}}. \tag{4}$$

Найдем выражения трех скалярных инвариантов:

$$\underset{g}{K},\ \underset{n}{K},\ \underset{g}{\sigma}.$$

После подстановки значений $\bar t'$ и $\bar\nu$ из (3) и (4) в первое из уравнений (2) получим следующее выражение для геодезической кривизны:

$$\underset{g}{K}=\frac{\bar r^\alpha\varphi_\alpha}{\sqrt{\Delta\varphi}}\left(\bar r_\beta\mu^\beta\right)_{|\kappa}\mu^\kappa. \tag{3'}$$

Так как на рассматриваемой поверхности в некоторой ее области через каждую точку проходит одна из линий уровня, то в каждой точке упомянутой области определится единичный вектор касательной к линии уровня, проходящей через эту точку. Особые точки линии уровня мы предполагаем исключенными из рассмотрения.

Таким образом, μ^α будет определен всюду внутри области однозначности функции $\varphi(u^1 u^2)$.

Выполняя дифференцирование в (3′), получаем:

$$\underset{g}{K}=\frac{\bar r^\alpha\varphi_\alpha}{\sqrt{\Delta\tau}}\left(\bar r_{\beta|\kappa}\mu^\beta+\bar r_\beta\mu^\beta{}_{|\kappa}\right)\mu^\kappa= \tag{3''}$$

$$=\frac{\left(\bar r^\alpha\bar r_{\beta|\kappa}\right)\varphi_\alpha\mu^\beta\mu^\kappa}{\sqrt{\Delta\varphi}}+\frac{\left(\bar r^\alpha\bar r_\beta\right)\varphi_\alpha\mu^\beta{}_{|\kappa}\mu^\kappa}{\sqrt{\Delta\varphi}}.$$

Дифференцирование производится относительно метрики поверхности.

Замечая, что

$$\bar r_{\beta|\kappa}=\frac{\partial\bar r_\beta}{\partial u^\kappa}-\bar r_\sigma\Gamma^\sigma_{\beta\kappa}=\bar r_{\beta\kappa}-\bar r_\sigma\left(\bar r^\sigma\bar r_{\beta\kappa}\right),$$

и так как

$$\bar r_{\beta\kappa}=\left(\bar r_{\beta\kappa}\bar r^\sigma\right)\bar r_\sigma+\left(\bar r_{\beta\kappa}\bar N\right)\bar N,$$

получаем:

$$\bar r_{\beta|\kappa}=\left(\bar r_{\beta|\kappa}\bar N\right)\bar N=b_{\beta\kappa}\bar N,$$

т. е. $\bar r_{\beta|\kappa}$ коллинеарен $\bar N$, а потому первое слагаемое в правой части (3″) равно нулю ($\bar r^\alpha$ лежат в касательной плоскости).

Следовательно,

$$\underset{g}{K}=\frac{\left(\bar r^\alpha\bar r_\beta\right)\mu^\beta{}_{/\kappa}\mu^\kappa\varphi_\alpha}{\sqrt{\Delta\varphi}}=\frac{\mu^\alpha{}_{|\kappa}\mu^\kappa\varphi_\alpha}{\sqrt{\Delta\varphi}}.$$

Из соотношений $\varphi_\alpha\mu^\alpha=0$, $g_{\alpha\beta}\mu^\alpha\mu^\beta=1$, как и в случае кривой на плоскости, найдем выражение для μ^α:

$$\mu^\alpha=\frac{\varphi^{\underline{\alpha}}}{\sqrt{\Delta\varphi}}. \tag{5}$$

Ковариантное дифференцирование соотношения $\varphi_\alpha \mu^\alpha = 0$ дает

$$\varphi_\alpha \mu^\alpha{}_{|\kappa} = -\varphi_{\alpha|\kappa} \mu^\alpha .$$

Учитывая это, находим для геодезической кривизны линии (l) на поверхности следующую формулу:

$$\underset{\kappa}{K} = -\frac{\varphi_{\alpha|\kappa} \mu^\alpha \mu^\kappa}{\sqrt{\Delta\varphi}} = -\frac{\varphi_{\alpha|\kappa} \underline{\varphi}^\alpha \underline{\varphi}^\kappa}{(\Delta\varphi)^{3/2}}$$

или, меняя индексы суммирования,

$$\underset{g}{K} = -\frac{\varphi_{\alpha|\beta} \tilde{\varphi}^\alpha \tilde{\varphi}^\beta}{(\Delta\varphi)^{3/2}} .$$

Мы получаем новый вид формулы *Bonnet*, которая дает выражение геодезической кривизны кривой на поверхности.

Таким образом, кривизна линий уровня плоского скалярного поля и геодезическая кривизна линий уровня скалярного поля на поверхности выражается одной и той же формулой.

Перейдем к нахождению выражения для нормальной кривизны. Согласно (3) имеем:

$$\bar{t}' = \left(\bar{r}_{\beta|\kappa} \mu^\beta + \bar{r}_\beta \mu^\beta{}_{|\kappa}\right) \mu^\kappa .$$

Поэтому

$$\underset{g}{K} = \bar{N} \left(\bar{r}_{\beta|\kappa} \mu^\beta + \bar{r}_\beta \mu^\beta{}_{|\kappa}\right) \mu^\kappa = \left(\bar{N} \bar{r}_{\beta|\kappa}\right) \mu^\beta \mu^\kappa$$

(второй член исчез в виду того, что $\bar{N}$ ортогонален $\bar{r}_\beta$). Но

$$\left(\bar{r}_{\beta/\kappa} \bar{N}\right) = \left(\bar{r}_\beta \bar{N}\right)_{/\kappa} - \bar{r}_\beta N_\kappa = -b_{\beta\kappa} .$$

Следовательно,

$$\underset{n}{K} = -b_{\beta\kappa} \mu^\beta \mu^\kappa .$$

Используя (5) и меняя индексы суммирования, окончательно получаем:

$$\underset{n}{K} = \frac{b_{\alpha\beta} \underline{\varphi}^\alpha \underline{\varphi}^\beta}{\Delta\varphi} . \qquad (7)$$

Чтобы найти выражение для геодезического кручения, продифференцируем по дуге равенство:

$$\bar{\nu} = \frac{\bar{r}^\alpha \psi_\alpha}{\sqrt{\Delta\varphi}}$$

В результате дифференцирования получим:

$$\bar{\nu}' = \left(\bar{r}^\alpha \frac{\varphi_\alpha}{\sqrt{\Delta\varphi}}\right)_{|\kappa} \mu^\kappa = \bar{r}^\alpha{}_{/\kappa} \frac{\varphi_\alpha}{\sqrt{\Delta\varphi}} \mu^\kappa + \bar{r}_\alpha \left(\frac{\varphi_\alpha}{\sqrt{\Delta\varphi}}\right)_{|\kappa} \mu^\kappa .$$

Подставляя это значение ν' в третье из соотношений (2), будем иметь:

$$\underset{g}{\sigma} = \bar{N} \bar{r}^\alpha{}_{|\kappa} \frac{\varphi_\alpha}{\sqrt{\Delta\varphi}} \mu^\kappa + \bar{N} \bar{r}_\alpha \left(\frac{\varphi_\alpha}{\sqrt{\Delta\varphi}}\right)_{|\kappa} \mu^\kappa .$$

Второй член правой части равен нулю, так как $\bar{N}$ ортогонален $\bar{r}_\alpha$. Кроме того, используя (5) и замечая, что

$$\bar{N} \bar{r}^\alpha{}_{|\kappa} = \left(\bar{N} \bar{r}^\alpha\right)_{|\kappa} - \bar{N}_\kappa \bar{r}^\alpha = b^\alpha_\kappa ,$$

получаем:

$$\underset{g}{\sigma} = -\frac{\varepsilon^{\kappa\beta} b^\alpha_\beta \varphi_\alpha \varphi_\kappa}{\Delta\varphi} = \frac{b^\alpha_\beta \varphi_\alpha \varphi^\beta}{\Delta\varphi} . \qquad (8)$$

В заключении параграфа найдем в тензорной форме дифференциальное уравнение стрикционной линии (линии сжатия) однопараметрического семейства кривых на поверхности. Известно, что ее уравнение имеет вид:

$$div\, \bar{t} = 0,$$

где $\bar{t}$ единичный касательный вектор к линии семейства. Так как

$$div\, \bar{t} = \bar{r}^\alpha \bar{t}_\alpha \quad \text{и} \quad \bar{t} = \bar{r}_\beta \mu^\beta ,$$

то

$$div\, t = \bar{r}^\alpha \left(\bar{r}_\beta \mu^\beta\right)_{|\alpha} = \bar{r}^\alpha \left(\bar{r}_{\beta|\alpha} \mu^\beta + \bar{r}_\beta \mu^\beta{}_{|\alpha}\right) = 0.$$

Но $\bar{r}^\alpha$ ортогонален $\bar{r}_{\beta|\alpha}$, поэтому

$$\bar{r}^\alpha \bar{r}_\beta \mu^\beta{}_{|\alpha} = \mu^\alpha{}_{|\alpha} = 0.$$

Чтобы найти выражение для $\mu^\alpha{}_{/\alpha}$, продифференцируем (5) и произведем свертывание:

$$\mu_{\alpha|\kappa} = \left(\frac{\underline{\varphi}^\alpha}{\sqrt{\Delta\varphi}}\right)_{|\kappa} = \frac{\underline{\varphi}^\alpha{}_{|\kappa}}{\sqrt{\Delta\varphi}} - \frac{\underline{\varphi}^\alpha g^{\sigma\rho} \varphi_{\sigma|\kappa} \varphi_\rho}{(\Delta\varphi)^{3/2}} = \frac{\underline{\varphi}^\alpha{}_{|\kappa} g^{\sigma\rho} \varphi_\rho \varphi_\sigma - g^{\sigma\rho} \varphi_{\sigma|\kappa} \varphi_\rho \underline{\varphi}^\alpha}{(\Delta\varphi)^{3/2}} =$$

$$= \frac{\varepsilon^{\alpha\nu} g^{\sigma\rho} \varphi^\rho}{(\Delta\varphi)^{3/2}} \left(\varphi_{\nu|\kappa} \varphi_\sigma - \varphi_{\sigma|\kappa} \varphi_\nu\right).$$

Используя тождество

$$\varphi_{\nu|\kappa} \varphi_\sigma - \varphi_{\sigma|\kappa} \varphi_\nu = \varepsilon^{\lambda\mu} \varepsilon_{\nu\sigma} \varphi_{\lambda|\kappa} \varphi_\mu ,$$

получим:

$$\mu_{\alpha|\kappa} = \frac{\varepsilon^{\alpha\nu} \varphi^{\lambda\mu} \varepsilon_{\nu\sigma} g^{\sigma\rho} \varphi_{\lambda|\kappa} \varphi_\mu \varphi_\rho}{(\Delta\varphi)^{3/2}} =$$

$$= \frac{-\delta^\alpha_\sigma \varepsilon^{\lambda\mu} g^{\sigma\rho} \varphi_{\lambda|\kappa} \varphi_\mu \varphi_\rho}{(\Delta\varphi)^{3/6}} = -\frac{\varepsilon^{\lambda\mu} g^{\alpha\rho} \varphi_{\lambda|\kappa} \varphi_\mu \varphi_\rho}{(\Delta\varphi)^{3/2}} .$$

После свертывания и поднятия индексов уравнение стрикционной линии принимает вид:

$$\varphi_{\alpha|\beta}\varphi^{\alpha}\varphi^{\beta}=0$$
$$(\alpha, \beta = 1, 2).$$

§ 3. Инварианты линии уровня скалярного поля на афинной плоскости

Подгруппа афинной группы на плоскости, при преобразованиях которой сохраняются площади, называется эквиафинной. Эта группа содержит пять независимых параметров, т. е. является 5-членной. Афинные преобразования, оставляющие неподвижной некоторую точку, называются центроафинными; они образуют 4-членную группу. В состав центроафинной группы входит 3-членная центроэквиафинная группа; при ее преобразованиях сохраняются как площади, так и некоторая точка—центр преобразования.

Если имеются две точки и две прямые, через них проходящие (два линейных элемента), то этим двум линейным элементам можно отнести число, которое при эквиафинных преобразованиях будет инвариантным. За такое число можно взять площадь треугольника с вершинами в двух заданных точках и в точке пересечения прямых, через них проходящих.

Афинная длина дуги кривой выражается интегралом,

$$S=\int_{t_1}^{t_2}\left(\frac{d\bar{r}}{dt}\times\frac{d^2\bar{r}}{dt}\right)^{1/3}dt^2,$$

а потому ее дифференциал будет:

$$ds=\left(\frac{d\bar{r}}{dt}\times\frac{d^2\bar{r}}{dt^2}\right)^{1/3}dt.$$

Косое произведение $\left(\frac{d\bar{r}}{dt}\times\frac{d^2\bar{r}}{dt^2}\right)$ есть инвариант эквиафинных преобразований.

Вместо произвольного параметра t обычно берут афинную длину дуги s, удовлетворяющую условию:

$$\frac{d\bar{r}}{ds}\times\frac{d^2\bar{r}}{ds^2}=1,$$

которое также инвариантно при эквиафинных преобразованиях.

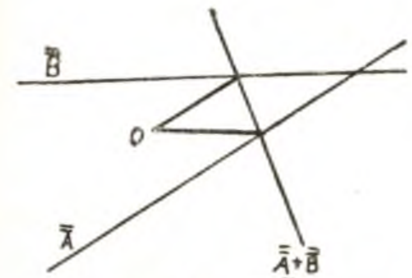
Афинная кривизна кривой определяется формулой:

$$k=\frac{d^2\bar{r}}{ds^2}\times\frac{d^3\bar{r}}{ds^3}. \tag{1}$$

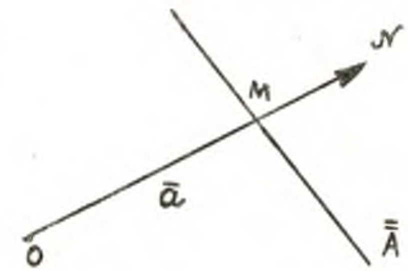
В центроафинной геометрии по отношению к основным геометрическим образам (векторам и дублетам) имеет место принцип двойственности. При этом под вектором понимается упорядоченная пара точек, из которых первая есть центр преобразования 0, а вторая—

любая точка плоскости, не принадлежащая несобственной прямой плоскости. Дублетом называется пара прямых, из которых первая есть несобственная прямая, а вторая—любая прямая плоскости, не проходящая через центр. Вектор и дублет являются по отношению друг к другу двойственными геометрическими образами.

Термин „дублет" впервые употреблял Bouligand, но он вкладывал в него другой смысл, понимая под дублетом пару произвольных параллельных плоскостей в афинном пространстве. Введем некоторые понятия из алгебры дублетов в эквицентроафинной плоскости, которые нам потребуются в дальнейшем. Собственную прямую дублета



Чертеж № 1.

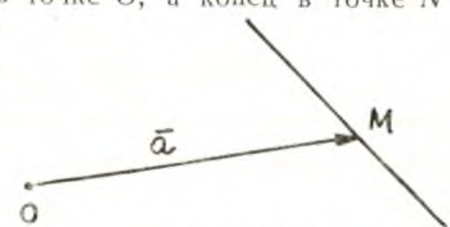


Чертеж № 2.

называют краем дублета; ее мы будем обозначать буквой с двумя черточками наверху ($\bar{\bar{A}}$). Если 0 центр и заданы два дублета своими краями $\bar{\bar{A}}$ и $\bar{\bar{B}}$, то их суммой называется дублет, край которого проходит через противоположные вершины параллелограмма, две стороны которого находятся на заданных краях дублетов и две вершины в точке 0 и точке пересечения краев $\bar{\bar{A}}$ и $\bar{\bar{B}}$, при этом край суммы $\bar{\bar{A}}+\bar{\bar{B}}$ не содержит центра. Вычитание дублетов определяется как действие обратное сложению.

Пусть дан дублет $\bar{\bar{A}}$ и вектор $\bar{a}$, которые пересекаются в точке M, причем начало вектора $\bar{a}$ находится в точке O, а конец в точке N Тогда под скалярным произведением вектора $\bar{a}$ на дублет $\bar{\bar{A}}$ будем понимать отношение $\frac{\overline{OH}}{\overline{OM}}$, т. е.

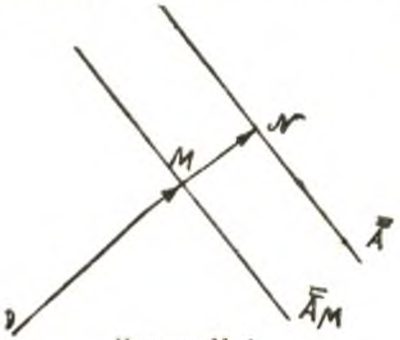
$$\bar{a}\cdot\bar{\bar{A}}=\frac{\overline{OH}}{\overline{OM}}$$



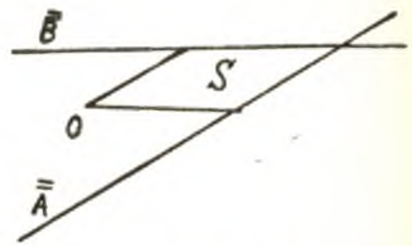
Чертеж № 3.

Очевидно, что определенное таким образом скалярное произведение вектора на дублет есть инвариант центроафинных преобразований. Когда точка M совпадает с точкой N, скалярное произведение равно единице (чертеж 3); когда вектор $\bar{a}$ и край дублета $\bar{\bar{A}}$ параллельны, их скалярное произведение по определению равно нулю. Если дублет $\bar{\bar{A}}$ отстоит от центра на расстоянии ON, то под произведением дублета $\bar{\bar{A}}$ на скаляр $\mu = \frac{ON}{OM}$ понимается дублет $\bar{\bar{A}}\mu$, отстоящий в μ раз дальше (ближе) от центра (чертеж 4).

Вследствие инвариантности площадей при эквиафинных преобразованиях понятие косого (псевдо-скалярного) произведения двух



Чертеж № 4.



Чертеж № 5.

векторов сохраняется. Наряду с косым произведением векторов в эквиафинной плоскости имеет место косое произведение двух дублетов, которые равно с точностью до знака скаляру—обратной величине площади параллелограмма, определяемого перемножаемыми дублетами и центром (чертеж 5).

$$\bar{\bar{A}} \times \bar{\bar{B}} = \pm \frac{1}{S}.$$

Пусть на эквиафинной плоскости задано скалярное поле

$$\varphi = \varphi\ (u^1,\ u^2) \tag{2}$$

с линиями уровня

$$\varphi\ (u^1\ u^2) = \text{const}\,.$$

Здесь u^κ общие криволинейные координаты. Выделим одну из линий уровня семейства (2) $\varphi(u^1,\ u^2) = C_1\quad (l)$.

Положение любой точки линии уровня (l) будем определять радиусом-вектором $\bar{r}$. В точках плоскости, а следовательно, и кривой (l) после введения координатной системы u^i возникает векторный репер- состоящий из касательных векторов к координатным линиям $\bar{r}_1, \bar{r}_2$.

Рассматривая общее начало этих векторов как центр локальной центроафинной плоскости, построим два репера $(r_1,\ r_2)$ взаимный репер из дублетов—дублетный репер $\bar{\bar{r}}^1,\ \bar{\bar{r}}^2$, так что

$$\bar{\bar{r}}_\alpha \bar{\bar{r}}^\beta = \delta^\beta_\alpha = \begin{cases} 1, & \alpha = \beta, \\ 0, & \alpha \neq \beta. \end{cases} \tag{3}$$

Любой вектор $\bar{x}$ можно разложить по векторам векторного репера, а также каждый дублет $\bar{\bar{A}}$ можно разложить по дублетам дублетного репера:

$$\begin{aligned} \bar{x} &= (\bar{x}\,\bar{\bar{r}}^1)\,\bar{r}_1 + (\bar{x}\,\bar{\bar{r}}^2)\,\bar{r}_2 = (\bar{x}\,\bar{\bar{r}}^\alpha)\,\bar{r}_\alpha, \\ \bar{\bar{A}} &= (\bar{\bar{A}}\,\bar{r}_1)\,\bar{\bar{r}}^1 + (\bar{\bar{A}}\,\bar{r}_2)\,\bar{\bar{r}}^2 = (\bar{\bar{A}}\,\bar{r}_\alpha)\bar{\bar{r}}^\alpha\,. \end{aligned} \tag{4}$$

Данное разложение легко получается, если воспользоваться свойством взаимности реперов (3).

Благодаря наличию двух видов косого произведения, появляются два кососимметрических тензора

$$\varepsilon_{\alpha\beta} = \bar{r}_\alpha \times \bar{r}_\beta\ ;\quad \varepsilon^{\alpha\beta} = \bar{\bar{r}}^\alpha \times \bar{\bar{r}}^\beta,$$

взаимных между собой, т. е.

$$\varepsilon_{\alpha\beta}\,\varepsilon^{\alpha\gamma} = \delta^\gamma_\beta \begin{cases} 1, & \alpha = \beta, \\ 0, & \alpha \neq \beta. \end{cases}$$

Разложим вектор

$$\bar{r}_{ij} = \frac{\partial^2 r}{\partial u^i\,\partial u^j}$$

по векторам векторного репера:

$$\bar{r}_{ij} = \Gamma^\alpha_{ij}\,\bar{r}_\alpha \qquad (i, j, \alpha = 1, 2)\,. \tag{5}$$

Согласно (4), коэффициентами этого разложения являются величины

$$\Gamma^\alpha_{ij} = \bar{r}_{ij}\,\bar{\bar{r}}_\alpha\,. \tag{6}$$

Из симметричности второй производной $\bar{r}_{ij} = \bar{r}_{ij}$ следует:

$$\Gamma^\alpha_{[ij]} = 0\,.$$

Примем Γ^α_{ij} за коэфициенты связности и установим соответствующее ковариантное дифференцирование:

$$\lambda_{i\,|\,\kappa} = \lambda_{i\kappa} - \lambda_\alpha\ \Gamma^\alpha_{i\kappa}\,.$$

Ковариантные производные от векторов векторного репера относительно этих Γ равны нулю, т. е. $\bar{r}_\alpha$ — ковариантно постоянны.

В самом деле, используя (5), имеем

$$\bar{r}_{\alpha\,|\,\kappa} = \bar{r}_{\alpha\,\kappa} - \bar{r}_\sigma\,\Gamma^\sigma_{\alpha\,\kappa} = 0.$$

Из определения $\varepsilon_{\alpha\beta} = \bar{r}_\alpha \times \bar{r}_\beta$ следует, что $\varepsilon_{\alpha\beta\,|\,\kappa} = 0$.

Легко показать, что и для взаимного тензора $\varepsilon^{\alpha\beta}{}_{|\,\kappa} = 0$.

Найдем теперь выражение афинной кривизны линии уровня поля φ. Так как

$$\frac{d\bar{r}}{ds} = \bar{r}_\alpha\,\mu^\alpha,\ \left(\mu^\alpha = \frac{dr^\alpha}{ds}\right),$$

то

$$\frac{d^2\bar{r}}{ds^2}\,(\bar{r}_\alpha\mu^\alpha)_{\,|\,\kappa}\,\mu^\kappa = \bar{r}_\alpha\,\mu^\alpha{}_{|\,k}\,\mu^\kappa$$

$$\frac{d^3\bar{r}}{d^3s} = \bar{r}_\alpha\,(\mu^\alpha{}_{|\,\kappa l}\,\mu^\kappa\,\mu^l + \mu^\alpha{}_{|\,\kappa}\,\mu^k{}_{|\,l}\,\mu^l).$$

Подставляя эти значения в (1), получим:

$$\kappa = (\bar r_\beta \times \bar r_\alpha)(\mu^\alpha{}_{|\kappa l}\mu^\kappa\mu^l + \mu^\alpha{}_{|\kappa}\mu^\kappa{}_{|l}\mu^l)\mu^\beta{}_{|\rho}\mu^\rho = \qquad (1^1)$$

$$= \varepsilon_{\beta\alpha}\mu^\beta{}_{|\rho}\mu^\rho(\mu^\alpha{}_{|\kappa}\mu^\kappa\mu^l + \mu^\alpha{}_{|\kappa}\mu^\kappa{}_{|l}\mu^l).$$

В силу условия $\varphi_\alpha\mu^\alpha=0$, имеем:

$$\mu^\alpha = \xi\varepsilon^{\alpha i}\varphi_i = \xi\varphi^\alpha, \qquad (*)$$

где $\varepsilon^{\alpha i}$ тензор, взаимный тензору $\varepsilon_{\alpha j}$.

Подставляя в условие

$$\frac{d\bar r}{ds}\times\frac{d^2\bar r}{ds^2}=1$$

вместо $\frac{d\bar r}{ds}$ и $\frac{d^2\bar r}{ds^2}$ найденные выше значения, будем иметь:

$$\varepsilon_{\beta\alpha}\mu^\alpha{}_{|\kappa}\mu^\kappa\mu^\beta=1,$$

что преобразуется, в силу (*), к виду

$$\varepsilon_{\beta\lambda}\varepsilon^{\beta\nu}\varepsilon^{\kappa\lambda}\xi^2\mu^\alpha{}_{|\kappa}\varphi_\nu\varphi_\lambda=1,$$

или

$$\varepsilon^{\kappa\lambda}\xi^2\mu^\alpha{}_{|\kappa}\varphi_\alpha\varphi_\lambda=1.$$

Дифференцируя ковариантно $\varphi_\alpha\mu^\alpha=0$, найдем:

$$\varphi_{\alpha\kappa|}\mu^\alpha = -\varphi_\alpha\mu^\alpha{}_{|\kappa}.$$

Благодаря этому, (8) запишется так:

$$\xi^2\varepsilon^{\kappa\lambda}\varphi_{\alpha|\kappa}\mu^\alpha\varphi_\lambda=1.$$

Подставляя сюда вместо μ^α его значение из (*), получим:

$$\xi^3\varepsilon^{\kappa\lambda}\varepsilon^{\alpha i}\varphi_{\alpha|\kappa}\varphi_i\varphi_\lambda=-1.$$

Следовательно,

$$\xi = -(\varphi_{\alpha|\kappa}\varphi^\alpha\varphi^\kappa)^{-\frac{1}{3}}. \qquad (9)$$

Из (*) и (9) следует:

$$\mu^\beta = -\frac{\varphi^\beta}{(\varphi_{\alpha|\kappa}\varphi^\alpha\varphi^\kappa)^{1/3}} = -\frac{\varphi^\beta}{\psi^{1/3}}, \qquad (10)$$

где

$$\psi=\varphi_{\alpha|\kappa}\varphi^\alpha\varphi^\kappa.$$

Очевидно, что

$$\chi_i = -\frac{\varphi^l}{\psi^{1/3}}. \qquad (11)$$

Ясно, что эквиафинно-нормированный градиент.

$$\mu^\beta=\beta\beta \qquad (10)$$

Согласно (10) имеем:

$$\mu^\beta{}_{|\rho} = \chi^\beta{}_{|\rho}, \qquad \mu^\rho = \chi^\rho,$$
$$\mu^\alpha{}_{|\kappa} = \chi^\alpha{}_{|\kappa}, \qquad \mu^\alpha{}_{|\kappa l}=\chi^\alpha{}_{|\kappa l},$$
$$\mu^\kappa=\chi^\kappa, \qquad \mu^l=\chi^l,$$
$$\mu^\kappa{}_{|l}=\chi^\kappa{}_{|l} \qquad (12)$$

После подстановки этих значений в (1)′ получим следующее выражение для афинной кривизны:

$$\kappa = \varepsilon_{\beta\alpha}\left[\chi^\beta{}_{|\rho}\chi^\alpha{}_{|\kappa l}\chi^\rho\chi^\kappa\chi^l + \chi^\beta{}_{|\rho}\chi^\alpha{}_{|\kappa}\chi^\kappa{}_{|l}\chi^\rho\chi^l\right] =$$

$$= \left[\chi_{\alpha|\rho}\chi^\alpha{}_{|\kappa l}\chi^\rho\chi^\kappa\chi^l + \chi_{\alpha|\rho}\chi^\alpha{}_{|\kappa}\chi^\kappa{}_{|l}\chi^\rho\chi^l\right] =$$

$$= \chi_{\alpha|}\chi^\beta\chi^l\left(\chi^\alpha{}_{|\kappa l}\chi^\kappa + \chi^\alpha{}_{|\kappa}\chi^\kappa{}_{|l}\right) =$$

$$= \chi_{\alpha|\rho}\chi^\rho\chi^l\left(\chi^\alpha{}_{|\kappa}\chi^\kappa\right)_{|l}.$$

Таким образом, окончательное выражение афинной кривизны для линии уровня (l) будет такое:

$$\kappa = \chi_{\alpha|\beta}\chi^\beta(\chi^\alpha{}_{|\kappa}\chi^\kappa)_{|l}\chi^l.$$

Так как χ^i выражается через ε и производные от φ до второго порядка, то афинная кривизна выражается через ε и производные от φ до четвертого порядка. Найдем выражение для вектора, дающего направление афинной нормали. Её направление определяется вектором

$$\frac{d^2\bar r}{ds^2} = \bar r_\alpha\mu^\alpha{}_{|\kappa}\mu^\kappa.$$

Так как

$$\mu^\alpha = -\frac{\varphi^\alpha}{\psi^{1/3}} = -\frac{\varepsilon^{\alpha i}\varphi_i}{(\varepsilon^{\nu\nu_1}\varepsilon^{\lambda\lambda_1}\varphi_{\nu|\lambda}\varphi_{\nu_1}\varphi_{\lambda_1})^{1/3}},$$

то, дифференцируя ковариантно, получим:

$$\mu^\alpha{}_{|\kappa} = \frac{\varepsilon^{\alpha i}\varepsilon^{\nu\nu_1}\varepsilon^{\lambda\lambda_1}}{3(\varepsilon^{\nu\nu_1}\varepsilon^{\lambda\lambda_1}\varphi_{\nu|\lambda}\varphi_{\nu_1}\varphi_{\lambda_1})^{4/3}}\left(-3\varphi_{i|\kappa}\varphi_{\nu|\lambda}\varphi_{\nu_1}\varphi_{\lambda_1} + \right.$$

$$\left. + \varphi_i\varphi_{\nu|\lambda\kappa}\varphi_{\nu_1}\varphi_{\lambda_1} + \varphi_{\nu|\lambda}\varphi_{\nu_1|\kappa}\varphi_{\lambda_1}\varphi_i + \varphi_{\nu|\lambda}\varphi_{\lambda_1|\kappa}\varphi_{\nu_1}\varphi_i\right).$$

Подставляя значения $\mu^\alpha{}_\kappa$, μ^κ в выражение для $\frac{d^2\bar r}{ds_2}$, найдем выражение для вектора, дающего направление афинной нормали:

$$\varepsilon^{\alpha i}\varepsilon^{\nu\nu_1}\varepsilon^{\lambda\lambda_1}\varepsilon^{\kappa\beta}\varphi_\beta\bar r_\alpha(3\varphi_{i|\kappa}\varphi_{\nu|\lambda}\varphi_{\nu_1}\varphi_{\lambda_1} - \varphi_{\nu|\lambda\kappa}\varphi_{\nu_1}\varphi_{\lambda_1}\varphi_i) -$$

$$-\varphi^{\alpha i}\varphi^{\nu\nu_1}\varepsilon^{\lambda\lambda_1}\varphi^{\kappa\beta}\varphi^\beta\bar r_\alpha(\varphi_{\nu|\lambda}\varphi_{\nu_1|}\varphi_{\kappa_1}\varphi_i + \varphi_{\nu|\lambda}\varphi_{\lambda_1|\kappa}\varphi_{\nu_1}\varphi_i).$$

Второй член последнего выражения можно записать так:

$$2(\varepsilon^{\alpha i}\bar r_\alpha\varphi_i)\varepsilon^{\nu\nu_1}(\varepsilon^{\lambda\lambda_1}\varphi_{\lambda_1}\varphi_{\nu|\lambda})(\varepsilon^{\kappa\beta}\varphi_\beta\varphi_{\nu_1|\kappa}) =$$

$$=2\bar r_\alpha\varphi^\alpha\varepsilon^{\nu\nu_1}(\varphi^\lambda\varphi_{\nu|\lambda})(\varphi^\kappa\varphi_{\nu_1|\kappa}).$$

Две последние скобки в совокупности симметричны по индексам ν, ν_1 а $\varepsilon^{\nu\nu_1}$ кососимметрический тензор, поэтому выражение для вектора, дающего направление афинной нормали, принимает более простой вид (в силу равенства нулю второго члена)

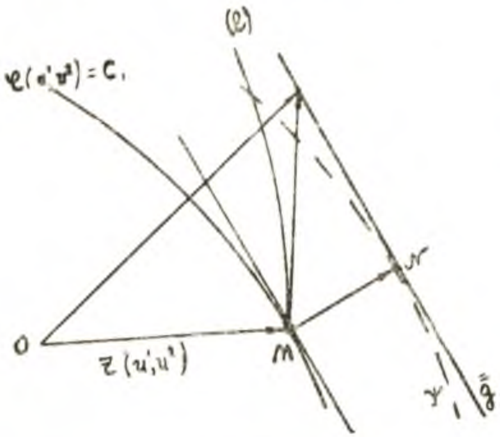
$$\varepsilon^{\alpha l}\,\varepsilon^{\nu\nu_1}\,\varepsilon^{\lambda\lambda_1}\,\varepsilon^{\kappa\beta}\,\varphi_\beta\, r_\alpha\,(3\,\varphi_{l\,|\,\kappa}\,\varphi_{\nu\,|\,\lambda}\,\varphi_{\nu_1}\varphi_{\lambda_1} - \varphi_{\nu\,|\,\lambda\kappa}\,\varphi_{\nu_1}\,\varphi_{\lambda_1}\,\varphi_l)$$

или, поднимая индексы,

$$\varphi^{\kappa}_{-}\,\varphi^{\nu}_{-}\,\varphi^{\lambda}_{-}\,\bar{r}^{\,l}_{-}\,(3\,\varphi_{l\,|\,\kappa}\,\varphi_{\nu\,|\,\lambda} - \varphi_{\nu\,|\,\lambda\kappa}\,\varphi_l).$$

§ 4. Афинный градиент скалярного поля в эквиафинной плоскости

В предыдущем параграфе было установлено, что если задано в эквиафинной плоскости скалярное поле $\varphi = \varphi\,(u^1, u^2)$, то можно отнести каждой ее точке (после соответствующего нормирования) вектор афинной нормали. Таким образом с каждым скалярным полем связано векторное поле, направление векторов которого в каждой точке совпадает с направлениями афинных нормалей линий уровня скалярного поля φ. При заданном скалярном поле φ можно построить другое векторное поле, эквиафинно-инвариантно связанное с φ.



Чертеж № 6.

Предварительно рассмотрим одну из линий уровня поля φ,

$$\varphi\;(u^1,\; u^2) = C_1.$$

Произвольной точке M на этой линии поставим в соответствие дублет (точнее — край дублета) $\bar{\bar{g}} = \bar{\bar{r}}^{\alpha}\varphi_\alpha$. Если сравнить выражение дублета g с выражением градиента в эвклидовой плоскости

$$grad\;\varphi = \bar{r}^{\alpha}\varphi_\alpha,$$

то видно, что частные производные скаляра φ по координатам являются компонентами разложения по векторам взаимного репера $\bar{r}^{\alpha}$ — в эвклидовой плоскости по дублетам взаимного дублетного репера $\bar{\bar{r}}^{\alpha}$ в эквиафинной.

В эвклидовой геометрии градиент скалярного поля направлен по нормали к линии уровня; возникает вопрос, какая существует связь между скалярным полем φ и дублетным полем $\bar{\bar{g}}$?

Чтобы установить геометрический смысл дублета $\bar{\bar{g}}$, проведем через M произвольную кривую l (отличную от $\varphi = C_1$) и параметризуем

её значением скалярного поля φ. В этом случае вектор $\dfrac{d\bar{r}}{d\varphi}$ (с началом в точке M и касательный к (l)) выразится в виде:

$$\frac{d\bar{r}}{d\varphi} - \frac{\bar{r}_\alpha \dot{u}^{\alpha}}{\varphi_\alpha \dot{u}^{\alpha}}.$$

Умножая скалярно $\dfrac{d\bar{r}}{d\varphi}$ на $\bar{\bar{g}} = \bar{\bar{r}}^{\beta}\varphi_\beta$, получим:

$$\bar{\bar{g}}\,\frac{d\bar{r}}{d\varphi} = \frac{\bar{r}_\alpha \bar{\bar{r}}^{\alpha}\varphi_\beta \dot{u}^{\alpha}}{\varphi_\alpha \dot{u}^{\alpha}} = \frac{\delta^{\beta}_{\alpha}\varphi_\beta \dot{u}^{\alpha}}{\varphi^{\alpha}\dot{u}^{\alpha}} = 1\,.$$

В силу произвольности (l) заключаем, что геометрическим местом концов касательных векторов $\dfrac{d\bar{r}}{d\varphi}$ к всевозможным кривым, выходящим из точки M, является прямая — край дублета $\bar{\bar{g}}$.

Из соотношения:

$$\bar{\bar{g}}\,\frac{d\bar{r}}{d\varphi} = \bar{\bar{r}}^{\alpha}\varphi_\alpha \bar{r}_\beta\,\frac{du^{\beta}}{ds} = \varphi_\alpha\,\frac{du^{\alpha}}{ds} = 0$$

следует, что $\bar{\bar{g}}$ параллелен касательной к линии уровня $\varphi = C_1$ в точке M (чертеж № 6).

Итак, геометрический смысл дублета $\bar{\bar{g}}$ по отношению к скалярному полю φ заключается в том, что он является геометрическим местом концов касательных векторов к всевозможным кривым, выходящим из некоторой точки M линии уровня поля φ, причем $\bar{\bar{g}}$ параллелен касательной к линии уровня в точке M. Назовем $\bar{\bar{g}}$ афинным градиентом скалярного поля $\varphi = \varphi\;(u^1\;\;u^2)$. Совокупность афинных градиентов порождает дублетное поле. Отметим некоторые свойства афинного градиента:

$$\begin{aligned}
&1)\;\bar{\bar{g}}\;(\varphi + \psi) = \bar{\bar{g}}(\varphi) + \bar{\bar{g}}(\psi),\\
&2)\;\bar{\bar{g}}\;(\varphi\,\cdot\,\psi) = \varphi\bar{\bar{g}}(\psi) + \bar{\bar{g}}\,(\varphi),\\
&3)\;g\;\{\,F(\varphi)\} = F'(\varphi)\cdot\,\bar{\bar{g}}(\varphi).
\end{aligned}$$

В самом деле, мы имеем:

$$\begin{aligned}
\bar{\bar{g}}\,(\varphi + \psi) &= \bar{\bar{r}}^{\alpha}(\varphi + \psi)_\alpha = \bar{\bar{\eta}}^{\alpha}\varphi_\alpha + \bar{\bar{\eta}}^{\alpha}\psi_\alpha = \bar{\bar{g}}\,(\varphi) + \bar{\bar{g}}\,(\psi),\\
\bar{\bar{\varphi}}\,(\tau\cdot\psi) &= \bar{\bar{r}}^{\alpha}\,(\varphi\cdot\psi)_\alpha = \bar{\bar{r}}^{\alpha}\,\varphi_\alpha\cdot\psi + \bar{\bar{r}}^{\alpha}\,\psi_\alpha\,\varphi = \varphi\bar{\bar{g}}(\psi) + \psi\,\bar{\bar{g}}(\varphi),\\
\bar{\bar{g}}\{F(\varphi)\} &= \bar{\bar{r}}^{\alpha}\{F(\varphi)\}_\alpha = F'(\varphi)\,\cdot\bar{\bar{r}}^{\alpha}\varphi_\alpha = F'(\varphi)\,\bar{\bar{g}}\,(\varphi).
\end{aligned}$$

Свойство (1) может служить основанием для сложения дублетных полей: если дублеты $\bar{\bar{A}}$ и $\bar{\bar{B}}$ являются афинными градиентами функций φ и ψ,

$$\bar{\bar{A}} = \bar{\bar{g}}\,(\varphi)\,,\quad \bar{\bar{B}} = \bar{\bar{g}}\,(\psi)\,,$$

то дублет

$$\overline{\overline{C}} = \overline{\overline{A}} + \overline{\overline{B}}$$

будет афинным градиентом функции

$$\chi = \varphi + \psi .$$

По аналогии с потенциальным векторным полем в метрической геометрии будем называть дублетное поле $\overline{\overline{g}}$ потенциальным, если оно является для некоторого скалярного поля φ афинным градиентным полем. В связи с этим докажем следующую теорему. Для того, чтобы дублетное поле $\overline{\overline{g}}$ являлось потенциальным дублетным полем для некоторого скалярного поля φ, необходимо и достаточно, чтобы имело место равенство

$$\bar{r}_\alpha \overline{\overline{g}} = \varphi_\alpha. \tag{1}$$

Для доказательства сформулированной теоремы нужно показать, что условие (1) есть необходимое и достаточное для того, чтобы поле $\overline{\overline{g}}$ являлось афинным градиентным полем для скалярного поля τ.

Необходимость. Пусть дано скалярное поле φ. Его афинный градиент $\overline{\overline{g}}$ запишется в виде

$$\overline{\overline{g}} = \overline{\overline{r}}^\beta \varphi_\beta. \tag{2}$$

Умножая скалярно обе части равенства (2) на $\bar{r}_\alpha$, получим:

$$\bar{r}_\alpha \overline{\overline{g}} = \overline{\overline{r}}^\beta \bar{r}_\alpha \varphi_\beta = \delta^\alpha_\beta \varphi_\beta = \varphi_\alpha .$$

Отсюда видно, что равенство (1) действительно имеет место.

Достаточность. Пусть равенство (1) выполняется, тогда $\overline{\overline{g}}$ есть афинный градиент скалярного поля φ, которое определяет равенство (1). В самом деле, афинный градиент скаляра φ запишется в виде

$$\overline{\overline{r}}^\alpha \varphi_\alpha . \tag{3}$$

Подставляя в (3) вместо φ_α его значение из (1), найдем

$$\overline{\overline{r}}^\alpha \varphi_\alpha = \overline{\overline{r}}^\alpha (\bar{r}_\alpha \overline{\overline{g}}).$$

Но правая часть равна $\overline{\overline{g}}$, так как выражение

$$r^\alpha (\bar{r}_\alpha \overline{\overline{g}})$$

есть дублет $\overline{\overline{g}}$, разложенный по дублетам $\overline{\overline{r}}^\alpha$ дублетного репера, т. е.

$$\overline{\overline{r}}^\alpha (\bar{r}_\alpha \overline{\overline{g}}) = \overline{\overline{g}} .$$

Таким образом, дублет $\overline{\overline{g}}$ есть афинный градиент скалярного поля φ.

Возвратимся к вопросу о построении векторного поля для заданного скалярного поля φ. На линии уровня $\varphi(u^1, u^2) = C_1$ фиксируем точку M (чертеж № 6). Для ее афинного градиента будем иметь уравнение:

$$\bar{R} = \bar{r} + \frac{d\bar{r}}{d\varphi} = \bar{r} + \frac{\bar{r}_\alpha du^\alpha}{\varphi_\alpha du^\alpha}, \tag{4}$$

где $\bar{r}, \bar{r}_\alpha, \varphi_\alpha$ — постоянные, а параметром является $\dfrac{du^1}{du^2}$ при условии, что $\varphi_\alpha du^\alpha \neq 0$.

При движении точки M вдоль линии уровня $\varphi = c_1$, прямая (4) огибает некоторую кривую Ψ.

Для того, чтобы получить уравнение кривой Ψ, будем в уравнении (4), записанном в виде

$$\bar{R} = \bar{r} + \frac{\bar{r}_\alpha \mu^\alpha}{r_\alpha \mu^\alpha}, \quad \left(\mu^\alpha = \frac{du^\alpha}{ds}\right), \tag{4}$$

величины $\bar{r}, r_\alpha, \varphi_\alpha$ — рассматривать как сложные функции параметра t, к которому отнесена кривая $\varphi = C_1$, через посредство криволинейных координат u^1, u^2, а отношение $\mu^1 : \mu^2$ (при $\varphi_\alpha \mu^\alpha \neq 0$) — как параметр точки на прямой—крае дублета.

Чтобы найти зависимость между параметрами $\mu^1 : \mu^2$ и t, запишем условие коллинеарности векторов $\dfrac{\partial \bar{R}}{\partial t}$ и $\bar{r}_\lambda \dot{u}^\lambda$ (дающего направление касательной к $\varphi = C_1$, а вместе с тем и дублета $\overline{\overline{g}}$):

$$\frac{\partial \bar{R}}{\partial t} = \left(\bar{r}_\beta - \frac{\varphi_{\alpha|\beta} \mu^\alpha}{(\varphi_\alpha \mu^\alpha)^2} \bar{r}_\sigma \mu^\sigma\right) \dot{u}^\beta,$$

где точкой обозначено дифференцирование по параметру t. Мы имеем

$$\frac{\partial \bar{R}}{\partial t} \times \bar{r}_\lambda \dot{u}^\lambda \equiv \left(\varepsilon_{\beta\lambda} - \varepsilon_{\sigma\lambda} \frac{\varphi_{\alpha|\beta} \mu^\alpha \mu^\sigma}{(\varphi_\alpha \mu^\alpha)^2}\right) \dot{u}^\beta \dot{u}^\lambda = 0,$$

откуда

$$\varepsilon_{\sigma\lambda} \varphi_{\alpha|\beta} \mu^\alpha \mu^\tau \dot{u}^\beta \dot{u}^\lambda = 0, \tag{5}$$

где $\dot{u}^i$ определяется из уравнения $\varphi_\beta \dot{u}^\beta = 0$, именно:

$$\dot{u}^\beta = \xi \varepsilon^{\beta\rho} \varphi_\rho.$$

Подставляя это значение в (5), имеем

$$\varepsilon_{\sigma\lambda} \varphi_{\alpha|\beta} \mu^\alpha \mu^\sigma \varepsilon^{\beta\rho} \varepsilon^{\lambda\nu} \varphi_\rho \varphi_\nu = 0,$$

или, так как

$$\varphi_\alpha \mu^\alpha \neq 0 \text{ и}$$

$$\varepsilon^{\beta\rho} \varphi_{\alpha|\beta} \varphi_\rho \mu^\alpha = 0,$$

отсюда

$$\mu^{\alpha} = \eta\, \varepsilon^{\alpha\sigma} \varepsilon^{\beta\rho} \varphi_{\sigma|\beta} \varphi_{\rho}.$$

Благодаря этому, уравнение (4) примет вид:

$$\bar{R} = \bar{r} + \frac{\varepsilon^{\alpha\sigma} \varepsilon^{\beta\rho} \varphi_{\sigma|\beta} \varphi_{\rho} \bar{r}_{\alpha}}{\varepsilon^{\alpha\sigma} \varepsilon^{\beta\rho} \varphi_{\sigma|\beta} \varphi_{\rho} \varphi_{\alpha}}.$$

Если точке M на огибающей соответствует точка N, то

$$MN = \frac{\varepsilon^{\alpha\sigma} \varepsilon^{\beta\rho} \varphi_{\sigma\beta} \varphi_{\rho} \bar{r}_{\alpha}}{\varepsilon^{\alpha\sigma} \varepsilon^{\beta\rho} \varphi_{\alpha|\beta} \varphi_{\rho} \varphi_{\alpha}}.$$

Таким образом в каждой точке скалярного поля $\varphi = \varphi(u^1, u^2)$ мы построили вектор MN, т. е. получили новое векторное поле, афинно-инвариантно связанное со скалярным полем φ.

§ 5. Инварианты кривой в трехмерном пространстве

Зададим в трехмерном пространстве два скалярных поля, поверхности уровня которых в произвольных криволинейных координатах имеют вид:

$$\varphi(u^1 u^2, u^3) = const,$$
$$\Psi(u^1, u^2, u^3) = const.$$

Выделим по одной поверхности уровня из этих семейств:

$$\varphi(u^1, u^2, u^3) = C_1$$
$$\Psi(u^1, u^2, u^3) = C_2.$$

Тогда они в своем пересечении определят кривую (l), вдоль которой значение функций φ и Ψ постоянны.

В каждой точке (l) мы имеем два вектора:

$$grad\, \varphi = \bar{r}^{\alpha} \varphi_{\alpha},$$
$$grad\, \psi = \bar{r}^{\alpha} \psi_{\alpha},$$

коллинеарные нормалям поверхностей уровня (1) и расположенные в нормальной плоскости кривой (l).

Единичный вектор касательной к l будет иметь вид:

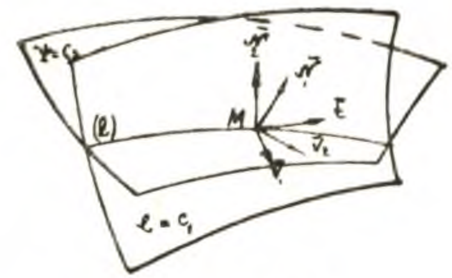
$$\bar{t} = \frac{\left[\bar{r}^{\alpha} \bar{r}^{\beta}\right] \varphi_{\alpha} \psi_{\beta}}{\left|\left[\bar{r}^{\alpha} \bar{r}^{\beta}\right] \varphi_{\alpha} \psi_{\beta}\right|}$$

или

$$\bar{t} = \frac{\left[r^{\alpha} \bar{r}^{\beta}\right] \varphi_{\alpha} \psi_{\beta}}{\sqrt{\Delta\varphi\, \Delta\psi - [\Delta(\varphi, \psi)]^2}}.$$

По отношению к каждой из поверхностей (1), на которых расположена кривая (l), определим геодезическую и нормальную кривизны и геодезическое кручение.

Для вывода указанных формул в точках (l) построим два репера Дарбу: $\left(\underset{1}{\bar{N}}, \bar{t}, \underset{1}{\bar{\nu}}\right)$ и $\left(\underset{2}{\bar{H}}, \bar{t}, \bar{\nu}_2\right)$, у которых вектор $\bar{t}$ (единичный вектор касательной к l)—общий; $\underset{1}{\bar{N}}$ и $\underset{2}{\bar{N}}$—единичные нормали к соответствующим поверхностям уровня, $\bar{\nu}_1$, и $\bar{\nu}_2$—единичные векторы, расположенные в касательных плоскостях к поверхностям τ и ψ и ортогональные к $\bar{t}$.



Чертеж № 7.

Используя первый из построенных реперов, будем иметь

$$\bar{t}' = \underset{g}{K} \underset{1}{\bar{\nu}} + \underset{n}{K} \underset{1}{\bar{N}};\quad \underset{1}{\bar{\nu}'} = -\underset{g}{K} \bar{t} + \underset{g}{\tau} \underset{1}{\bar{N}};\quad \underset{1}{\bar{N}^1} = -\underset{n}{K} \bar{t} - \underset{g}{\tau} \underset{1}{\bar{\nu}}$$

(штрих означает дифференцирование по дуге кривой), при чем

$$\underset{g}{K} = \bar{t}' \underset{1}{\bar{\nu}};\quad \underset{n}{K} = \bar{t}^1 \underset{1}{\bar{N}};\quad \underset{g}{\tau} = -\underset{1}{\bar{N}^1} \underset{1}{\bar{\nu}}. \tag{2}$$

В дальнейших выкладках используем следующие формулы:

$$\bar{t} = \frac{\left[r^{\alpha} \bar{r}^{\beta}\right] \varphi^{\alpha} \psi_{\beta}}{\sqrt{\Delta\varphi\, \Delta\psi - [\Delta(\varphi, \psi)]^2}},\quad \bar{t}' = \left[\bar{r}^{\alpha} \bar{r}^{\beta}\right] \left\{\frac{\varphi_{\alpha} \psi_{\beta}}{\sqrt{\Delta\varphi\, \Delta\psi - [\Delta(\varphi, \psi)]^2}}\right\}_{|\kappa} \mu^{\kappa}$$

$$\underset{1}{\bar{N}} = \frac{\bar{r}^{\alpha} \varphi_{\alpha}}{\sqrt{\Delta\varphi}},\quad \underset{1}{\bar{N}'} = \bar{r}^{\alpha} \left(\frac{\varphi_{\alpha}}{\sqrt{\Delta\varphi}}\right)_{|\kappa} \mu^{\kappa} \tag{3}$$

$$\bar{\nu}_1 = \left[\underset{1}{\bar{N}} \bar{t}\right],\quad \mu^{\kappa} = \frac{\varepsilon^{\kappa\nu_1\nu_2} \varphi_{\nu_1} \psi_{\nu_2}}{\sqrt{\Delta\varphi\, \Delta\psi - [\Delta(\varphi, \psi)]^2}}.$$

Первая из формул (2), в силу (3) преобразуется к виду:

$$\underset{g}{K} = \bar{t}^1 \bar{\nu} = \bar{t}^1 \left(\underset{1}{\bar{N}} \bar{t}\right) = \left(\underset{1}{\bar{N}} \bar{t} \bar{t}^1\right).$$

Подставляя сюда вместо $\bar{N}^1, \bar{t}, \bar{t}^1$ их значения из (3), получим:

$$\underset{g}{K} = \left(\bar{r}^\alpha \left[\bar{r}^\beta \bar{r}^\gamma\right] \left[\bar{r}^\nu \bar{r}^\lambda\right]\right) \frac{\varphi_\alpha \varphi_\beta \psi_\gamma}{\Delta\varphi \sqrt{\Delta\varphi \cdot \Delta\psi - [\Delta\varphi, \psi)]^2}} \left\{ \frac{\varphi_\nu \psi_\lambda}{\sqrt{\Delta\varphi\, \Delta\psi - [\Delta(\varphi, \psi)]_2}} \right\}_{|\kappa} \mu^\kappa.$$

Замечая, что

$$\left(\bar{r}^\alpha \left[\bar{r}^\beta \bar{r}^\gamma\right] \left[\bar{r}^\nu \bar{r}^\lambda\right]\right) = g^{\alpha\gamma} \varepsilon^{\beta\nu\lambda} - g^{\alpha\beta} \varepsilon^{\gamma\nu\lambda},$$

и подставляя вместо μ^κ его значение из (3), предварительно обозначив

$\sqrt{\Delta\varphi\, \Delta\psi - \Delta\, [\Delta(\varphi\, \psi)]^2} = \Omega(\varphi, \psi)$, найдем для $\underset{g}{K}$:

$$\underset{g}{K} = \left(g^{\alpha\gamma} \varepsilon^{\beta\nu\lambda} - g^{\alpha\beta} \varepsilon^{\gamma\nu\lambda}\right) \frac{\varphi_\alpha \varphi_\beta \psi^\gamma}{\Delta\varphi \cdot \Omega(\varphi\psi)} \left\{ \frac{\varphi_\nu \psi^\lambda}{\Omega(\varphi, \psi)} \right\}_{|\kappa} \frac{\varepsilon^{\kappa\nu_1\nu_2} \varphi_{\nu_1} \psi_{\nu_2}}{\Omega(\varphi, \psi).}.$$

Поднимая индексы $y\,\varphi$ и используя знак альтернации, окончательно получим выражение для геодезической кривизны

$$\underset{g}{K} = \frac{\varphi^{[\gamma}{}_{\vartheta}{}^{\beta]\,\nu\gamma} \varphi_\beta \psi_\gamma \varepsilon^{\kappa\delta\rho} \varphi_\delta \psi_\rho}{(\Delta\varphi \cdot \Omega^2 \varphi, \psi)} \left\{ \frac{\varphi_\nu \psi_\alpha}{\Omega(\varphi, \psi)} \right\}_{|\kappa}.$$

Чтобы найти формулу для нормальной кривизны; подставим во второе из равенств (2) вместо $\bar{t}'$ и $\underset{1}{N}$ их значения из (3), что приведет к соотношению

$$\underset{n}{K} = \frac{\bar{r}^\alpha \varphi_\alpha}{\sqrt{\Delta\varphi}} \left[\bar{r}^\beta \bar{r}^\gamma\right] \left(\frac{\varphi_\beta \psi_\gamma}{\Omega(\varphi, \psi)} \right)_{|\kappa} \mu^\kappa,$$

или, так как $\left(\bar{r}^\alpha \bar{r}^\beta \bar{r}^\gamma\right) = \varepsilon^{\alpha\beta\gamma}$, и подставляя вместо μ^κ его значение, будем иметь

$$\underset{n}{K} = \varepsilon^{\alpha\beta\gamma} \varepsilon^{\kappa\nu\lambda} \frac{\varphi_\alpha \varphi_\nu \psi_\lambda}{\sqrt{\Delta\varphi}\, \Omega(\varphi, \psi)} \left(\frac{\varphi^\beta \psi^\gamma}{\Omega(\varphi, \psi)} \right)_{|\kappa}.$$

Наконец, третья из формул (2), благодаря (3), преобразуется к виду:

$$\underset{g}{\varphi} = \frac{\varepsilon^{\kappa\delta\rho} \varphi_\alpha \psi_\rho}{\sqrt{\Delta\varphi}\, \Omega^2(\varphi, \psi)} \left(\Delta\varphi\, \Omega^\beta - \Delta(\varphi, \psi)\varphi^\beta\right) \left(\frac{\varphi^\beta}{\sqrt{\Delta\varphi}} \right)_{|\kappa}.$$

Понятно, что меняя местами φ и ψ в формулах $\underset{g}{K}$, $\underset{n}{K}$ и $\underset{g}{\delta}$, мы получим соответствующие формулы для геодезической кривизны, нормальной кривизны и геодезического кручения кривой (l) относительно поверхности ψ.

§ 6. Инварианты гиперповерхности уровня скалярного поля в n-мерном пространстве

Рассмотрим эвклидово пространство n измерений E_n. Аналогично тому, как поступали в плоском случае, положение любой точки M, принадлежащей E_n будем определять вектором $\bar{r}$ относительно некоторой фиксированной точки 0. В прямоугольных декартовых координатах r выражается равенством

$$\bar{r} = x^\alpha \bar{e}_\alpha, \quad (\alpha = 1, 2, \ldots n),$$

где $\bar{e}_\alpha$ единичные векторы по координатным осям. Наряду с прямоугольной декартовой системой координат введем в рассмотрение общие криволинейные координаты. Тогда положение точки M в E_n определится системой n чисел: $u^1, u^2, \ldots u^n$. Каждая из этих координат является функцией радиуса-вектора точки

$$u^\alpha(r) = u^\alpha(x^1, x^2, \ldots x^n) \quad (\alpha = 1, 2, \ldots n). \tag{1}$$

Мы предполагаем, что

$$\left| \frac{\partial u^i}{\partial x^\kappa} \right| \neq 0.$$

Если криволинейные координаты вводятся не для всего пространства E_n, а лишь для некоторой его области, тогда предыдущие функции предполагаются заданными только в этой области.

Обратно, в силу неравенства нулю якобиана, мы можем систему (1) разрешить относительно x^i; в результате получим:

$$x^\alpha = x^\alpha(u^1, u^2, \ldots u^n), \quad (\alpha = 1, 2, \ldots n), \tag{2}$$

а это значит, что

$$r = r(u^i) \quad (i = 1, 2, \ldots n).$$

Если мы рассмотрим любую из функций (1), то очевидно, что каждая из них есть функция точки в E_n.

Таким образом

$$u^\alpha(r) = const \tag{3}$$

образуют n семейств гиперповерхности уровня скалярных полей:

$$u^\alpha = u^\alpha(\bar{r}), \quad (\alpha = 1, 2, \ldots n). \tag{4}$$

Допустим, что через каждую точку M пространства E_n (по крайней мере, в некоторой его области) проходит по одной гиперповерхности из каждого семейства (координатные гиперповерхности), тогда эти гиперповерхности определят n координатных линий, проходящих через рассматриваемую точку M. Производные от радиуса вектора $\bar r$ по общим криволинейным координатам u^α обозначим через $\bar r_\alpha$. Ясно, что они будут направлены по касательным к координатным линиям.

Таким образом, в каждой точке пространства E_n определится векторный репер, состоящий из n векторов $\bar r_\alpha$. Рассмотрим, кроме того, векторный репер, состоящий из n векторов,

$$\bar r^\kappa = grad\ u^\kappa, \quad (k = 1, 2, \dots n),$$

т. е. градиентов скалярных полей (4).

Легко обнаружить, что векторы $\bar r^\kappa$ будут взаимны вектором $\bar r_\alpha$, т. е.

$$\bar r^\kappa \bar r_\alpha = \delta^\kappa_\alpha = \begin{cases} 1, & \alpha = k, \\ 0, & \alpha \neq k. \end{cases}$$

В каждой точке пространства E_n (или его части) мы имеем два взаимных векторных репера. В окрестности точки $M(u^1, u^2, \dots u^n)$, принадлежащей E_n, квадрат линейного элемента выражается формулой

$$ds^2 = d\bar r^2 = \bar r_\alpha du^\alpha \cdot \bar r_\beta du^\beta$$

или, обозначая

$$g_{ij} = \bar r_i \bar r_j, \tag{6}$$

получим:

$$ds^2 = g_{\alpha\beta}(u^1, u^2 \dots u^n)\, du^\alpha du^\beta, \quad (\alpha, \beta = 1, 2, \dots n). \tag{7}$$

Система функций $g_{\alpha\beta} = g_{\alpha\beta}(u^1, u^2, \dots u^n)$ образует основной метрический тензор пространства E_n.

Система функций $g^{\alpha\beta}(u^1, u^2, \dots u) = \bar r^\alpha \bar r^\beta$ образует обратный тензор по отношению к $g_{\alpha\beta}$, при этом выполняется равенство:

$$g^{\alpha\kappa} g_{\beta\kappa} = \delta^\alpha_k.$$

Если задать в E_n скалярное поле $\varphi(n^1, u^2 \dots u^n)$, то гиперповерхностями уровня этого поля будут

$$\varphi(\bar r) = \text{const}.$$

или в криволинейных координатах:

$$\varphi(u^1, u^2, \dots u^n) = \text{const},$$

при этом, в каждой точке E_n определится вектор-градиент поля φ.

Следовательно, мы имеем в E_n векторное поле, векторы которого направлены по нормалям к соответствующим поверхностям уровня поля φ.

Рассмотрим некоторую гиперповерхность уровня заданного скалярного поля $\varphi = \varphi(u^1, u^2, \dots u^n)$ и обозначим через $\bar N$ единичный вектор нормали гиперповерхности. В силу коллинеарности $\bar N$ вектору $grad\ \varphi$, легко получаем для $\bar N$ следующее выражение:

$$N = \frac{\bar r^\beta \varphi_\beta}{\sqrt{\Delta\varphi}},$$

где $\Delta\varphi = \varphi^\alpha \varphi_\alpha$ — первый дифференциальный параметр гиперповерхности.

Под второй квадратичной формой гиперповерхности понимают скалярное произведение:

$$\mathrm{II} = -d\bar N\, d\boldsymbol{r} = \bar N d^2 \bar r.$$

Подставим сюда значения $d\bar r$ и $d\bar H$ по формулам

$$d\bar r = \bar r_\alpha du^\alpha,$$

$$dN = \left(\frac{\bar r^\beta \varphi_\beta}{\sqrt{\Delta\varphi}}\right)_{|\kappa} du^\kappa = \frac{\bar r^\beta(\varphi_{\beta|\kappa}\Delta\varphi - g^{\sigma\rho}\varphi_{\sigma|\kappa}\varphi_\rho\varphi^\beta)}{(\Delta\varphi)^{3/2}}\, du^n,$$

получим:

$$\mathrm{II} = -\frac{\delta^\beta_\alpha\left(\varphi_{\beta|\kappa}\Delta\varphi - g^{\sigma\rho}\varphi_{\sigma|\kappa}\varphi_\rho\varphi_\beta\right)}{(\Delta\varphi)^{3/2}}\, du^\kappa du^\alpha =$$

$$= -\frac{\varphi_{\alpha|\kappa}\Delta\varphi - g^{\sigma\rho}\varphi_{\sigma|\kappa}\varphi_\rho\varphi^\alpha}{(\Delta\varphi)^{3/2}}\, du^\kappa du^\alpha.$$

Так как $\varphi^\alpha du^\alpha = 0$, то второй член исчезает и мы для второй квадратичной формы гиперповерхности получаем следующую формулу:

$$\mathrm{II} = -\frac{\varphi_{\alpha|\kappa}}{\sqrt{\Delta\varphi}}\, du^\alpha du^\kappa \quad (\alpha, \kappa = 1, 2, \dots n). \tag{8}$$

Система функций:

$$-\frac{\varphi_{\alpha|\kappa}}{\sqrt{\Delta\varphi}} \tag{8'}$$

образует симметрический тензор второй валентности.

Отобразим гиперповерхность S_{n-1} на гиперсферу, полагая $\bar r = \bar N$, где $\bar N$ — единичный вектор нормали $\bar N$ к гиперповерхности.

Квадрат линейного элемента $d\sigma$ сферического отображения выразится формулой:

$$d\sigma^2 = \bar N_\kappa du^\kappa \bar N_l du^l.$$

Так как здесь,

$$\bar N = \frac{\bar r^\alpha \varphi_\alpha}{\sqrt{\Delta\varphi}}, \quad (\alpha = 1, 2, \dots n),$$

то

$$\overline{N}_\kappa = \frac{\bar{r}^\nu \varphi_{\nu|\kappa}}{\sqrt{\Delta\varphi}} - \frac{\bar{r}^\nu \varphi_\nu g^{\gamma\delta} \varphi_{\gamma|\kappa} \varphi_\delta}{(\Delta\varphi)^{3/2}}$$

$$\overline{N}_e = \frac{\bar{r}^\beta \varphi_{\beta|e}}{\sqrt{\Delta\varphi}} - \frac{\bar{r}^\beta \varphi_\beta g^{\delta\rho} \varphi_{\delta|e} \varphi_\rho}{(\Delta\varphi)^{3/2}},$$

$$\overline{N}_\kappa \overline{N}_e = \frac{g^{\nu\beta} \varphi_{\nu|\kappa} \varphi_{\beta|e}}{\Delta\varphi} - 2\frac{g^{\nu\beta} g^{\delta\rho} \varphi_{\nu|\kappa} \varphi_{\delta|e} \varphi_\rho}{(\Delta\varphi)^2} +$$

$$+ \frac{g^{\nu\beta} \varphi_\nu \varphi^\beta g^{\gamma\delta} g^{\delta\rho} \varphi_{\gamma|\kappa} \varphi_{\delta|e} \varphi_\delta \varphi_\rho}{(\Delta\varphi)^3} = \frac{g^{\nu\beta} \varphi_{\nu|\kappa} \varphi_{\beta|e}}{\Delta\varphi}$$

$$-2\frac{g^{\nu\beta} g^{\delta\rho} \varphi_{\nu|\kappa} \varphi_{\delta|e} \varphi_\beta \tau_\rho}{(\Delta\varphi)^2} + \frac{g^{\gamma\delta} g^{\delta\rho} \sigma_{\gamma|\kappa} \varphi_{\delta|e} \tau_\delta \varphi_\rho}{(\Delta\varphi)^2}$$

$$\overline{N}_\kappa \overline{N}_e = \frac{g^{\nu\beta} \varphi_{\nu|\kappa} \varphi_{\beta|e}}{\Delta\varphi} - \frac{\varphi^{\nu\beta} \varphi^{\delta\rho} \varphi_{\nu|\kappa} \varphi_{\delta|e} \varphi_\beta \varphi_\rho}{(\Delta\varphi)^2} =$$

$$= \frac{g^{\nu\beta} g^{\delta\rho} (\varphi_{\nu|\kappa} \varphi_{\beta|e} \varphi_\delta \varphi_\rho - \varphi_{\nu|\kappa} \varphi_{\delta|e} \varphi_\beta \varphi_\rho)}{(\Delta\tau)^2} =$$

$$= \frac{g^{\nu\beta} g^{\delta\rho} (\varphi_{\nu|\kappa} \varphi_{\beta|e} \varphi_\delta \varphi_\rho)_{[\beta\delta]}}{(\Delta\varphi)^2}.$$

Выражение, стоящее в круглых скобках, нужно проальтернировать по индексам β и σ.

Подставляя значение $\overline{N}^\kappa\ \overline{N}^e$ в выражение для $d\sigma^2$, получим следующую формулу для квадрата линейного элемента сферического отображения:

$$d\sigma^2 = \frac{g^{\alpha\beta} g^{\delta\rho} (\varphi_{\alpha|\kappa} \varphi_{\beta|e} \varphi_\delta \varphi_\rho)_{[\alpha\delta]}}{(\Delta\varphi)^2} du^\kappa du^l.$$

Система функций:

$$\frac{g^{\alpha\delta} g^{\nu\lambda} (\varphi_{\alpha|i} \varphi_{\beta|\kappa} \varphi_\nu \varphi_\lambda)_{[\beta\nu]}}{(\Delta\varphi)^2}$$

образует симметрический тензор второй валентности. Пусть на гиперповерхности S_{n-1} имеется некоторая кривая (l), тогда вдоль неё

$$\frac{d^2\bar{r}}{ds^2} = \kappa\bar{n},$$

где $\bar{n}$ — первая нормаль кривой (l), κ — первая кривизна l. Обозначим угол между первой нормалью $\bar{n}$ и нормалью к гиперповерхности $\overline{N}$ через Θ, $\Theta = (\widehat{\overline{N}\,\bar{n}})$, тогда согласно (8) получим

$$\overline{N}\frac{d^2\bar{r}}{ds^2} = \kappa\cos\Theta = -\frac{\varphi_{\alpha|\kappa} du^\alpha du^\kappa}{\sqrt{\Delta\varphi}\, g_{\alpha\beta} du^\alpha, du^\kappa} = \frac{1}{\rho_n}. \qquad (9)$$

Величина $\kappa \cos \Theta$ называется нормальной кривизной кривой на гиперповерхности S_{n-1}.

Из (9) следует, что все кривые на гиперповерхности, имеющие в данной точке общую касательную, имеют одинаковую нормальную кривизну. Направление, для которого нормальная кривизна в данной точке принимает экстремальное значение, называется главным направлением, а соответствующая этому главному направлению нормальная кривизна — главной кривизной.

Кривые на гиперповерхности, направление которых в каждой точке совпадает с главными направлениями, называются линиями кривизны. S_{n-1}.

Перепишем (9) в виде

$$\frac{\sqrt{\Delta\varphi}}{\rho_n} g_{\alpha\beta} du^\alpha du^\beta + \varphi_{\alpha|\kappa} du^\alpha du^\kappa = 0,$$

или

$$(\varphi_{\alpha|\kappa} + \lambda g_{\alpha\kappa}) \mu^\alpha \mu^\kappa = 0, \quad (\alpha, \kappa = 1, 2, \ldots n),$$

где

$$\lambda = \frac{\sqrt{\Delta\varphi}}{\rho_n}, \quad \mu^\alpha = \frac{du^\alpha}{ds}.$$

Для определения главных кривизн решим задачу на относительный экстремум по методу множителей Лагранжа, помня, что μ^α должны удовлетворять соотношениям: $\varphi^\alpha \mu^\alpha = 0$ и $g_{\alpha\beta} \mu^\alpha \mu^\beta = 1$. Легко заметить, что задача сводится к определению экстремума функции

$$F(\mu^\alpha) = (\varphi_{\alpha|\kappa} + \lambda g_{\alpha\kappa}) \mu^\alpha \mu^\kappa + 2\nu \varphi_\alpha \mu^\alpha$$

После дифференцирования по μ^i и приравнивания нулю получим:

$$(\varphi_{\alpha|\kappa} + \lambda g_{\alpha\kappa}) \frac{\partial \mu^\alpha}{\partial \mu^i} \mu^\kappa + (\varphi_{\alpha|i} + \lambda g_{\alpha i}) \mu^\alpha + 2\nu\varphi_i = 0.$$

Так как

$$\frac{\partial \mu^\alpha}{\partial \mu_i} = \delta_i^\alpha,$$

то

$$(\varphi_{i|\kappa} + \lambda g_{i\kappa}) \mu^\kappa + (\varphi_{\alpha|i} + \lambda g_{\alpha i}) \mu^\alpha + 2\nu\varphi_i = 0$$

или

$$(\varphi_{i|\kappa} + \lambda g_{i\kappa}) \mu^\kappa + \nu\varphi i = 0, \quad (i, \kappa = 1, 2, \ldots n).$$

Система уравнений (10) в совокупности с уравнением $\varphi_\alpha \mu^\alpha = 0$ дает возможность определить из них $(n+1)$ неизвестных: μ^κ и ν. Определяя μ^κ из (10) и подставляя найденное значение в уравнение

$$\varphi_\alpha \mu^\alpha = 0, \quad (\alpha = 1, 2, \ldots n),$$

получим характеристический полином степени $(n-1)$ относительно λ (а так как $\lambda = \underset{n}{K}\sqrt{\Delta\varphi}$, то, следовательно, и относительно $\underset{n}{K}$). Этот полином имеет $(n-1)$ корней $\underset{1}{\kappa}, \underset{2}{\kappa}, \dots, \underset{n-1}{\kappa}$, которые и будут главными кривизнами.

Рассмотрим два произвольных главных направления $\underset{1}{\mu}^i$ и $\underset{2}{\mu}^i$, соответствующие двум неравным главным кривизнам

$$\underset{(e)}{K} \text{ и } \underset{(m)}{K}$$

Подставляя $\underset{1}{\mu}^i$ и $\underset{2}{\mu}^i$ в (10), найдем

$$\left(\varphi_{i\,|\,\kappa} + \sqrt{\Delta\varphi}\,\underset{(l)}{K}\,g_{i\kappa}\right)\underset{1}{\mu}^\kappa + \nu\,\varphi_i = 0,$$

$$\left(\varphi_{i\,|\,\kappa} + \sqrt{\Delta\varphi}\,\underset{(m)}{K}\,g_{i\kappa}\right)\underset{2}{\mu}^\kappa + \nu\,\varphi_i = 0,$$

$$(i, \kappa = 1, 2, \dots n).$$

Свертывая первое с $\underset{2}{\mu}^i$, второе с $\underset{1}{\mu}^i$ и учитывая, что $\varphi_i\,\mu^i = 0$, получим

$$\left(\varphi_{i\,|\,\kappa} + \sqrt{\Delta\varphi}\,\underset{(l)}{K}\,g_{i\kappa}\right)\underset{1}{\mu}^\kappa\,\underset{2}{\mu}^i = 0,$$

$$\left(\varphi_{i\,|\,\kappa} + \sqrt{\Delta\varphi}\,\underset{(m)}{K}\,g_{i\kappa}\right)\underset{2}{\mu}^\kappa\,\underset{1}{\mu}^i = 0. \qquad (*)$$

Вычитая одно из другого и полагая, что $\underset{(e)}{K} \neq \underset{(m)}{K}$, будем иметь:

$$g_{i\kappa}\,\underset{1}{\mu}^i\,\underset{2}{\mu}^\kappa = 0,$$

что и доказывает ортогональность главных направлений.

Раскрывая (*) и используя условие ортогональности, получим условие сопряженности двух несовпадающих главных направлений:

$$\varphi_{i\,|\,\kappa}\,\underset{1}{\mu}^i\,\underset{2}{\mu}^\kappa = 0.$$

Таким образом, любые два несовпадающих главных направления взаимно ортогональны и сопряжены.

Так как $\lambda = \underset{n}{K}\sqrt{\Delta\varphi}$, то уравнение (10) можно записать в виде:

$$\left(\frac{\varphi_{i\,|\,\kappa}}{\sqrt{\Delta\varphi}} + \underset{n}{K}\,g_{i\kappa}\right)\mu^\kappa + \frac{\nu}{\sqrt{\Delta\varphi}}\,\varphi_i = 0.$$

Используя равенства

$$\frac{\varphi_{i\,|\,\kappa}}{\sqrt{\Delta\varphi}} = \bar{r}_i\,\bar{N}_\kappa, \quad g_{i\kappa} = \bar{r}_i\,\bar{r}_\kappa$$

перепишем предыдущее соотношение:

$$\left(\bar{r}_i\,\bar{N}_\kappa + \underset{n}{K}\,\bar{r}_i\,\bar{r}_\kappa\right)\mu^\kappa + \frac{\nu}{\sqrt{\Delta\varphi}}\,\varphi_i = 0.$$

Свертывая его с μ^i и отбрасывая знаменатель ds^2, получим:

$$d\bar{r}\,(d\bar{N} + \underset{n}{K}\,d\bar{r}) = 0.$$

Учитывая еще равенство

$$\bar{N}\,(d\bar{N} + \underset{n}{K}\,d\bar{r}) = 0$$

убеждаемся, что вдоль линий кривизны на гиперповерхности уровня имеет место формула Родрига

$$d\bar{N} = -\underset{n}{K}\,d\bar{r}.$$

Система уравнений (10) позволяет найти дифференциальные уравнения линий кривизны. В самом деле, исключая в ней параметр ν, получим систему уравнений:

$$\frac{(\varphi_{1\,|\,\kappa} + \lambda\,g_{1\kappa})\,du^\kappa}{\varphi_1} = \frac{(\varphi_{2\,|\,\kappa} + \lambda\,g_{2\kappa})\,du^\kappa}{\varphi_2} = \dots = \frac{(\varphi_{n\,|\,\kappa} = \lambda\,g_{n\kappa})\,du^\kappa}{\varphi_n}$$

$$(\kappa = 1, 2, \dots n)$$

для определения μ^κ, соответствующих экстремальным значениям нормальной кривизны и дающих направление линии кривизны.

Следовательно, если подставим в эту систему корни характеристического полинома, соответствующие главным кривизнам, то предыдущая система будет системой дифференциальных уравнений линии кривизны на гиперповерхности уровня. Через каждую точку гиперповерхности, исключая омбилические точки, будет проходить $(n-1)$ линия кривизны.

Перейдем теперь к отысканию инвариантов гиперповерхности уровня.

Полной кривизной (K) гиперповерхности называется произведение главных кривизн, средней кривизной (H) — сумма главных кривизн. Ранее было найдено выражение нормальной кривизны кривой, расположенной на гиперповерхности уровня:

$$\frac{1}{\rho_n} = -\frac{\varphi_{\alpha\,|\,\kappa}\,du^\alpha\,du^\kappa}{\sqrt{\Delta\varphi}\;\;g_{\alpha\beta}\,du^\alpha\,du^\beta}$$

$$(\alpha, \kappa = 1, 2, \dots n).$$

Кроме того, была получена система уравнений (10)

$$(\varphi_{i\,|\,\kappa} + \lambda\,g_{i\kappa})\,\mu^\kappa + \nu\,\varphi_i = 0 \qquad (10)$$

$$(i, \kappa = 1, 2, \dots n).$$

Определим из этой системы μ^κ и подставим в соотношение $\varphi_\alpha\,\mu^\alpha = 0$, в результате получим характеристический полином $(n-1)^{\text{й}}$ степени относительно λ, а следовательно, и относительно $\frac{1}{\rho^n}$.

Определитель системы (10) обозначим Δ:

$$\Delta = |\varphi_{i\,|\,\kappa} + \lambda\, g_{i\kappa}| \quad (i, \kappa = 1, 2, \ldots, n).$$

Тогда:

$$\mu^{\kappa} = \frac{\Delta^{(\kappa)}}{\Delta}, \quad (\kappa = 1, 2, \ldots, n),$$

где

$$\Delta^{(\kappa)} = -\nu \begin{vmatrix} \varphi_{1|1} + \lambda g_{11}, \ldots \varphi_{1|\kappa-1} + \lambda g_{1,\kappa-1}, \varphi_1, \varphi_{1|\kappa+1} + \lambda g_{1|\kappa\kappa}, \ldots \varphi_{1|n} + \lambda g_{1n} \\ \varphi_{2|1} + \lambda g_2, \ldots \varphi_{2\kappa-1} + \lambda g_{1,\kappa-1}, \varphi_2, \varphi_{2|\kappa+1} + \lambda g_{2|\kappa+1}, \ldots \varphi_{2|n} + \lambda g_{2n} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \varphi_{n|1} + \lambda g_{n1}, \ldots \varphi_{n,\kappa-1} + \lambda g_{n,\kappa-1}, \varphi_n, \varphi_{n,\kappa+1} + \lambda g_{n,\kappa+1}, \ldots \varphi_{n|n} + \lambda g_{nn} \end{vmatrix}$$

Подставляя значение μ^{κ} и уравнение

$$\varphi^{\kappa} \mu^{\kappa} = 0, \quad (\kappa = 1, 2, \ldots, n),$$

получим:

$$\varphi \cdot \Delta^{\kappa} = 0, \quad (\kappa = 1, 2, \ldots, n),$$

т. е. упомянутый выше характеристический полином $(n-1)^{\underline{a}}$ степени. Запишем его в виде:

$$A_1 \lambda^{n-1} + A_2 \lambda^{n-2} + \ldots + A_{n-1} \lambda + A_n = 0. \tag{11}$$

Обозначая корни этого полинома через $\lambda_1, \lambda_2, \ldots \lambda_{n-1}$, будем иметь

$$\lambda_1 \cdot \lambda_2 \ldots \lambda_{n-1} = (-1)^{n-1} \frac{A_n}{A_1}. \tag{12}$$

Найдем значение A_n и A_1.

Согласно выражению для Δ^{κ}, уравнение $\varphi_{\kappa} \Delta^{\kappa} = 0$ имеет свободный член A_n,

$$A_n = \begin{vmatrix} \varphi_1 \varphi_1 & \varphi_{1|2} \cdots \varphi_{1|n} \\ \varphi_2 \varphi_1 & \varphi_{2|2} \cdots \varphi_{2|n} \\ \ldots & \ldots \\ \ldots & \ldots \\ \varphi_n \varphi_1 & \varphi_{n|2} \cdots \varphi_{n|n} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \varphi_{1|1} & \varphi_1 \varphi_2 \cdots \varphi_{1|n} \\ \varphi_{2|1} & \varphi_2 \varphi_2 \cdots \varphi_{2|n} \\ \ldots & \ldots \\ \ldots & \ldots \\ \varphi_{n|1} & \varphi_n \varphi_2 \cdots \varphi_{n|n} \end{vmatrix} + \ldots$$

$$\ldots + \begin{vmatrix} \varphi_{1|1} & \varphi_{1|2} \cdots \varphi_1 \varphi_{n-1} & \varphi_{1|n} \\ \varphi_{2|1} & \varphi_{2|2} \cdots \varphi_2 \varphi_{n-1} & \varphi_{2|n} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ \varphi_{n|1} & \varphi_{n|2} \cdots \varphi_n \varphi_{n-1} & \varphi_{n|n} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \varphi_{1|1} & \varphi_{1|2} \cdots \varphi_{1|n-1} & \varphi_1 \varphi_n \\ \varphi_{2|1} & \varphi_{2|2} \cdots \varphi_{2|n-1} & \varphi_2 \varphi_n \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ \varphi_{n|1} & \varphi_{n|2} \cdots \varphi_{n|n-1} & \varphi_n \varphi_n \end{vmatrix}$$

и коэффициент A_1:

$$A_1 = \begin{vmatrix} \varphi_1 \varphi_1 & g_{12} \ldots g_{1n} \\ \varphi_2 \varphi_1 & g_{22} \ldots g_{2n} \\ \ldots & \ldots \\ \ldots & \ldots \\ \varphi_n \varphi_1 & g_{n2} \ldots g_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} g_{11} & \varphi_1 \varphi_2 \ldots g_{1n} \\ g_{21} & \varphi_2 \varphi_2 \ldots g_{2n} \\ \ldots & \ldots \\ \ldots & \ldots \\ g_{n1} & \varphi_n \varphi_2 \ldots g_{nn} \end{vmatrix} + \ldots + \begin{vmatrix} g_{11} & g_{12} \ldots \varphi_1 \varphi_n \\ g_{21} & g_{22} \ldots \varphi_2 \varphi_n \\ \ldots & \ldots \\ \ldots & \ldots \\ g_{n1} & g_{n2} \ldots \varphi_n \varphi_n \end{vmatrix}$$

В силу свойств дискриминантного тензора, определитель порядка n, $|a_{ij}| = a$ может быть записан в виде:

$$a = |a_{ij}| = \frac{\varepsilon^{\alpha_1 \alpha_2 \ldots \alpha_n} \varepsilon^{\beta_1 \beta_2 \ldots \beta_n}}{n!} \cdot g\, a_{\alpha_1 \beta_1} a_{\alpha_2 \beta_2} \ldots a_{\alpha_n \beta_n},$$

где $a_{ij} = a_{ji}$ (*)

$$A_n = g \cdot \varepsilon^{\alpha_1 \alpha_2 \ldots \alpha_n} \varepsilon^{\beta_1 \beta_2 \ldots \beta_n} \frac{1}{(n-1)!} \varphi_{\alpha_1} \varphi_{\beta_1} \varphi_{\alpha_2|\beta_2} \ldots \varphi_{\alpha_n|\beta_n} \tag{13}$$

Коэффициент A_1 представляется в таком виде:

$$A_1 = g \cdot g^{\alpha\beta} \varphi_\alpha \varphi_\beta \tag{14}$$

Подставляя значения A_n и A_1 из (13) и (14) в (12), получим:

$$\lambda_1 \lambda_2 \ldots \lambda_{n-1} = (-1)^{n-1} \frac{\varepsilon^{\alpha_1 \alpha_2 \ldots \alpha_n} \varepsilon^{\beta_1 \beta_2 \ldots \beta_n} \varphi_{\alpha_1} \varphi_{\beta_1} \varphi_{\alpha_2|\beta_2} \ldots \varphi_{\alpha_n|\beta_n}}{(n-1)!\ g^{\alpha\beta} g_\alpha \varphi^\beta}$$

$$(\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_n, \beta_1, \beta_2, \ldots \beta_n, \alpha, \beta = 1, 2, \ldots n).$$

Так как

$$\lambda_i = \frac{\sqrt{g^{\alpha\beta} \varphi_\alpha \varphi_\beta}}{\rho_i} = \frac{\sqrt{\Delta \varphi}}{\rho_i},$$

$$(i = 1, 2, \ldots n-1),$$

для полной кривизны гиперповерхности уровня мы получаем следующее новое выражение:

$$K = \frac{1}{\rho_1} \cdot \frac{1}{\rho_2} \ldots \frac{1}{\rho_{n-1}} = (-1)^{n-1} \frac{\varepsilon^{\alpha_1 \alpha_2 \ldots \alpha_n} \varepsilon^{\beta_1 \beta_2 \ldots \beta_n} \varphi_{\alpha_1} \varphi_{\beta_1} \varphi_{\alpha_2|\beta_2} \ldots \varphi_{\alpha_n|\beta_n}}{(n-1)!\ (\Delta \varphi)^{\frac{n+1}{2}}} \tag{15}$$

$$(\alpha_1 \alpha_2, \ldots \alpha_n, \beta_1 \ldots \beta_n = 1, 2, \ldots n).$$

Для средней кривизны

$$H = \frac{1}{\rho_1} + \frac{1}{\rho_2} + \ldots + \frac{1}{\rho_{n-1}} = -\frac{A_2}{A_1}$$

мы получили такую формулу:

$$H = -\frac{\varepsilon^{\alpha_1 \alpha_2 \ldots \alpha_n} \varepsilon^{\beta_1 \beta_2 \ldots}{}_{\ldots \alpha_3 \ldots \alpha_n} \varphi_{\alpha_1|\beta_1} \varphi_{\alpha_2} \varphi_{\beta_2}}{(n-1)!\ (\Delta \varphi)^{3/2}} \tag{16}$$

*) Oswald Veblen „Jnvariants of quadratic differential forms".

На основании этой формулы все коэффициенты характеристического полинома можно записать в весьма простой форме. В частности, свободный член запишется так:

По аналогии с полной и средней кривизнами можно получить выражение для промежуточных кривизн, которые обозначим через K^i $(i=2,3,4\ .\ .\ .\ n-2)$. Очевидно, что

$$K_i=\frac{1}{\rho_1}\cdots\frac{1}{\rho_{i-1}}+\frac{1}{\rho_2}\frac{1}{\rho_3}\cdots\frac{1}{\rho_{i-2}}+\ldots+\frac{1}{\rho_{n-i+1}}\cdot\frac{1}{\rho_{n-i+2}}\cdots\frac{1}{\rho_n}=(-1)^{i-1}\frac{A^i}{A_1}$$

Находя значения A^i и подставляя в предыдущее равенство, получим:

$$K_i=(-1)^{i-1}\frac{\varepsilon^{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n}\varepsilon^{\beta_1\ldots\beta_i}{}_{\alpha_{i+1}\ldots\alpha_n}\varphi_{\alpha_1|\beta_1}\cdots\varphi_{\alpha_{i+1}|\beta_{i-1}}\varphi_{\alpha_i}\varphi_{\beta_i}}{(n-1)!\ \ (\Delta\varphi)^{\frac{i+1}{2}}} \tag{17}$$

Полная, средняя и промежуточные кривизны были получены для гиперповерхности и n-мерном эвклидовом пространстве. Однако, те же формулы будут справедливы и в римановом пространстве.

В самом деле, пусть риманово пространство R_n вложено в эвклидово пространство E_N $(n \leqslant N)$, что возможно при $N=\frac{n(n+1)}{2}$.

Обозначим радиус-вектор точек R_n через $\bar{r}$:

$$\bar{r}=\bar{r}(u^1,\ u^2,\ .\ .\ .\ u^n)$$

Производные радиуса-вектора $\bar{r}$ по u^k будут направлены по касательным к координатным линиям.

Таким образом в каждой точке R_n определится векторный репор, состоящий из n векторов $\bar{r}_k$:

Положительная квадратичная форма

$$ds^2=g_{\alpha\beta}\,du^\alpha\,du^\beta$$
$$(\alpha,\beta=1,2,\ .\ .\ .\ n),$$

где $g_{\alpha\beta}=\bar{r}_\alpha\bar{r}_\beta$ будет давать выражение для квадрата бесконечно малого расстояния в R_n. Векторы r_k определяют n-мерную касательную плоскость к R_n.

Для репера $\bar{r}_k$ построим взаимный репер $\bar{r}^i$, так что будет выполняться равенство:

$$\bar{r}_k\bar{r}^i=\delta^i_k=\begin{cases}1, & i=k,\\ 0, & i\neq k,\end{cases}$$
$$(i,k=1,2,\ldots n).$$

Зададим в R_n скалярное поле φ:

$$\varphi=\varphi(u^1,u^2),\ldots u^n)$$

и рассмотрим некоторую гиперповерхность уровня.

$$\varphi(u^1,u^2,\ldots u^n)=C \qquad (S_{n-1})$$

После задания скалярного поля в R_n появляется градиентное векторное поле, нормальное к гиперповерхностям уровня. Единичный вектор нормали к S_{n-1} выразится формулой:

$$\bar{N}=\frac{\bar{r}^\alpha\varphi_\alpha}{\sqrt{\Delta\varphi}} \qquad (\alpha=1,2,\ldots n)$$

Вторая квадратичная форма гиперповерхности уровня в K_n

$$\text{II}=-d\bar{N}\,d\bar{r}$$

после подстановки вместо $d\bar{N}$ и $d\bar{r}$ их значений будет иметь вид:

$$\text{II}=-\frac{\varphi_{\alpha|\kappa}}{(\Delta\varphi)^{1/2}}du^\alpha du^\kappa,$$

т. е. ничем не отличается от формы гиперповерхности в эвклидовом n-мерном пространстве.

Рассуждения и выкладки, аналогичные предыдущим, приводят нас к заключению, что формулы гауссовой кривизны, средней и промежуточных кривизн, указанные выше, будут верны и для гиперповерхности в римановом пространстве K_n.

§ 7. Нормальная и геодезическая кривизны кривой на гиперповерхности

Будем считать кривую в n-мерном эвклидовом пространстве заданной как пересечение $(n-1)$ гиперповерхностей уровня:

$$\overset{(\alpha)}{F}(u^1,u^2,\ldots u^n)=C_\alpha, \qquad (l)$$
$$(\alpha=1,2,\ldots n-1),$$

соответствующих скалярным полям.

$$\overset{(\alpha)}{F}=\overset{(\alpha)}{F}(u^1,u^2,\ldots u^n)$$
$$(\alpha=1,2,\ldots n-1).$$

Вектор кривизны

$$\frac{d\bar{t}}{ds}=k\bar{n}$$

кривой (l) можно представить относительно каждой из гиперповерхностей $\overset{\alpha}{S}_{n-1}$, её определяющих, как сумму двух составляющих векторов: вектора, направленного по нормали $\overset{\alpha}{\bar{N}}$ к $\overset{\alpha}{S}_{n-1}$, — вектора, нормальной кривизны, и вектора, лежащего в касательной плоскости к $\overset{(\alpha)}{S}_{n-1}$ — вектора геодезической кривизны.

Вектор геодезической кривизны обозначим так

$$\frac{{}^{(\alpha)}D\bar t}{ds}.$$

Таким образом, будем иметь:

$$\frac{d\bar t}{ds}=\underset{(\alpha)(\alpha)}{\xi \bar N}+\frac{{}^{(\alpha)}D\bar t}{ds}=\underset{(\alpha)(\alpha)}{\xi \bar N}+\underset{(\alpha)}{\eta^i}\bar r_i \qquad (1)$$

$$(i,\alpha=1,2,\dots n).$$

Умножая скалярно (1) на $\underset{(\alpha)}{\bar N}$, найдем

$$\underset{(\alpha)}{\xi}=\frac{d\bar t}{ds}\underset{(\alpha)}{\bar N}=\underset{n}{\overset{(\alpha)}{K}}. \qquad (2)$$

Здесь $\underset{n}{\overset{(\alpha)}{H}}$ — нормальная кривизна l относительно гиперповерхности $\overset{(\alpha)}{F}$.

Для того, чтобы найти формулу нормальной кривизны относительно поверхности $\overset{(1)}{F}$, подставим в выражение $\underset{n}{\overset{(1)}{K}}=\bar t'\underset{1}{\bar N}$ вместо t' и $\underset{1}{\bar N}$ их значения, которые (по аналогии с трехмерным пространством) выразятся следующим образом:

$$\underset{1}{\bar N}=\frac{\bar r^{\alpha}\overset{(1)}{F^{\alpha}}}{\sqrt{\overset{(1)}{\Delta F}}},$$

$$\bar t'=\left(\frac{[\bar r^{\alpha_1}\bar r^{\alpha_2}\dots\bar r^{\alpha}{}_{n-1}]\overset{1}{F}_{\alpha_1}\overset{2}{F}_{\alpha_2}\dots\overset{n-1}{F}_{\alpha_{n-1}}}{\Delta(\overset{1}{F},\overset{2}{F},\dots\overset{n-1}{F})}\right)_{|K}\frac{\varepsilon^{K\nu_1\dots\nu_{n-1}}\overset{1}{F}_{\nu_1}\overset{2}{F}_{\nu_2}\dots\overset{n-1}{F}_{\nu_{n-1}}}{\Delta(\overset{1}{F},\overset{2}{F},\dots\overset{(n-1)}{F})},$$

где через $\Delta(\overset{1}{F},\overset{2}{F}\dots\overset{n-1}{F})$ обозначен модуль векторного произведения

$$\left|[\bar r^{\alpha 1}\bar r^{\alpha 2}\dots\bar r^{\alpha}{}_{n-1}]\overset{1}{F}_{\alpha_1}\overset{2}{E}_{\alpha_2}\dots\overset{n-1}{F}_{\alpha n-1}\right|.$$

В результате подстановки получим:

$$\underset{n}{K}=\left(\frac{[\bar r^{\alpha_1}\bar r^{\alpha_2}\dots\bar r^{\alpha n}]\overset{1}{F}_{\alpha_1}\dots\overset{n-1}{F}_{\alpha n-1}}{\Delta(\overset{1}{F}\cdot\overset{2}{F}\dots\overset{(n-1)}{F})}\right)_{|K}\frac{\varepsilon^{K\nu_1\dots\nu_{n-1}}\overset{1}{F}_{\nu}\dots{}_{\nu_{n-1}}}{\Delta(\overset{1}{F}\overset{2}{F}\dots\overset{n-1}{F})}\cdot\frac{\bar r^{\alpha_n}\overset{1}{F}_{\alpha_n}}{\sqrt{\overset{1}{\Delta F}}}.$$

или окончательно

$$\underset{n}{K}=\frac{\varepsilon^{\alpha_1\alpha_2\dots\alpha_n}\varepsilon^{K\nu_1\dots\nu_{n-1}}\overset{1}{F}_{\nu_1}\dots\overset{n-1}{F}_{\nu_{n-1}}\overset{1}{F}_{\alpha_n}}{\Delta(\overset{1}{F}\overset{2}{F}\dots\overset{n-}{F})\sqrt{\overset{1}{\Delta F}}}\left(\frac{\overset{1}{F}_{\alpha_1}\overset{2}{F}_{\alpha_2}\dots\overset{(n-1)}{F}_{\alpha_{n-1}}}{\Delta(\overset{1}{F},\overset{2}{F},\dots\overset{(n-1)}{F})}\right)_{|K}.$$

Нормальная кривизна кривой l относительно поверхности $\overset{l}{F}$ получится путем перестановки мест $\overset{1}{F}$ и $\overset{i}{F}$. Перейдем к выводу формулы для геодезической кривизны. Для этого соотношение (1), в силу (2), запишем в следующем виде:

$$\frac{d\bar t}{ds}=\underset{n(\alpha)}{\overset{(\alpha)}{K}N}+\frac{{}^{(\alpha)}Dt}{ds}=\underset{n(\alpha)}{\overset{(\alpha)}{K}\bar N}+\underset{(\alpha)}{\eta^i}\bar r_i,$$

откуда

$$\frac{{}^{(\alpha)}D\bar t}{ds}=\underset{(\alpha)}{\eta^i}\bar r_i=\frac{d\bar t}{ds}-\underset{n(\alpha)}{\overset{(\alpha)}{K}\bar N}. \qquad (3)$$

Так как $t=\bar r_\nu\mu_\nu$,

то

$$\frac{d\bar t}{ds}=\frac{d\mu^\nu}{ds}\bar r_\nu+r_{\beta\beta}\mu^\nu\mu^\beta=\frac{d\mu^\nu}{d\mu}\bar r_\nu+\Gamma^i_{\beta\nu}\bar r_i\mu^\nu\mu^\beta. \qquad (4)$$

Подставляя в (3) вместо $\frac{d\bar t}{ds}$ его значение из (4) и учитывая, что

$$\underset{\alpha}{N}=\frac{\bar r^\lambda\overset{(\alpha)}{F}_\lambda}{\sqrt{\overset{(\alpha)}{\Delta F}}}=\frac{F^\lambda{}_i\bar r_i\overset{(\alpha)}{F}_\lambda}{\sqrt{\overset{(\alpha)}{\Delta F}}},$$

получим:

$$\frac{{}^{(\alpha)}D\bar t}{ds}=\underset{(\alpha)}{\eta^i}\bar r_i=\frac{d\mu^i}{ds}\bar r_i+\Gamma^i_{\nu\beta}\mu^\nu\mu^\beta\bar r_i-\underset{n}{\overset{(\alpha)}{K}}\frac{g^{\lambda i}\overset{(\alpha)}{F}_\lambda}{\sqrt{\overset{(\alpha)}{\Delta F}}}\bar r_i=$$

$$=\left(\frac{d\mu^i}{ds}+\Gamma^i_{\nu\beta}\mu^\nu\mu^\beta-\frac{\underset{n}{\overset{(\alpha)}{K}}g^{\lambda i}\overset{(\alpha)}{F}_\lambda}{\sqrt{\overset{(\alpha)}{\Delta F}}}\right)\bar r_i,$$

т. е.

$$\underset{(\alpha)}{\eta^i}=\frac{d\mu^i}{ds}+\Gamma^i_{\nu\beta}\mu^\nu=\frac{\underset{n}{\overset{(\alpha)}{K}}g^{\lambda i}\overset{(\alpha)}{F}_\lambda}{\sqrt{\overset{(\alpha)}{\Delta F}}},$$

где

$$\mu^\alpha=\frac{\varepsilon^{\alpha\nu_1\lambda_2\dots\nu_{n-1}}\overset{1}{F}_{\nu 1}\overset{2}{F}_{\nu_2}\dots\overset{n-1}{F}_{\nu_{n-1}}}{\Delta(\overset{1}{F},\overset{2}{F},\dots\overset{(n-1)}{F})}.$$

Модуль вектора $\frac{{}^{(\alpha)}Dt}{ds}$ есть геодезическая кривизна кривой (l) относительно гиперповерхности $\overset{(\alpha)}{F}=C_\alpha$. Для геодезических линий на гиперповерхности $\underset{(\alpha)}{\eta^i}=0$.

Полагая в (1) $\underset{(\alpha)}{\eta^l}=0$ обнаружим, что у геодезической линии в каждой точке $\bar{n}\ \underset{(\alpha)}{\bar{N}}$, т. е. первая нормаль к (l) совпадает с нормалью к гиперповерхности, кривизна же геодезической равна нормальной кривизне по соответствующему направлению.

ЛИТЕРАТУРА

1. Гуревич Г. Б.— Основы теории алгебраических инвариантов. 1948 г.
2. Икорников Ю. В.—Векториальные формулы кривизны поверхности, заданной в криволинейных координатах. Изв. Акад. наук СССР т. IV. 1932 г.
3. Рашевский П. К.—Введение в Риманову геометрию и тензорный анализ. 1936 г.
4. Сомов О. И.—Прямой способ для выражения дифференциальных параметров I-го и 2-го порядков и кривизна поверхности в каких-либо координатах ортогональных или косоугольных. Записки Импер. Академии наук VIII т. 1865 г.
5. C. F. Gauss.—„Disquisiones generales circa superficies curvas". IV.
6. H. Meschke.—„Fransactions of the American Mathematical Soviety". Volume 7. 1906.
4. Bouligand—„Zesons de gêometrie vectorielle". 1924.
8. W. Blaschke.—„Vorlesungen uber Differential-geometrie" II. Berlin 1923.
9. Weatherburn C. E.—„Differential geometr of three dimensions". Volume 1-e. 1930—1931.

СОДЕРЖАНИЕ

Техредактор М. С. Ходоров

Подписано к печати 13/XI 1950 года. Печатн. лист. 9. Уч.-авт. 8,2.
БР 10028. Типография Одесского Государственного университета им. И. И. Мечникова,
Одесса, ул. Щепкина № 12. Заказ № 1112. Тираж 500 экз.