ТРУДЫ
ТОМСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА
имени В. В. КУЙБЫШЕВА

Том 168 Серия механико-математическая

ГЕОМЕТРИЧЕСКИЙ СБОРНИК

ВЫПУСК 3

ИЗДАТЕЛЬСТВО ТОМСКОГО УНИВЕРСИТЕТА

Томск — 1963

ТРУДЫ
ТОМСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА
имени В. В. КУЙБЫШЕВА

Том 168 Серия механико-математическая

ГЕОМЕТРИЧЕСКИЙ СБОРНИК

ВЫПУСК 3

ИЗДАТЕЛЬСТВО ТОМСКОГО УНИВЕРСИТЕТА

Томск — 1963

Редактор выпуска доцент Р. Н. Щербаков

От редактора

Настоящий третий выпуск „Геометрического семинара" является продолжением предыдущих (Труды Томского университета, тт. 160, 161) и содержит работы, выполненные на кафедре в 1961—1962 годах. Все сотрудники кафедры работали в это время над проблемой применения метода репеража подмногообразий к различным геометрическим образам, в том числе к линейчатым комплексам и конгруэнциям кривых второго порядка. Первая работа посвящена изложению основной идеи метода. Три работы В. С. Малаховского посвящены проективной теории конгруэнций кривых второго порядка. Работы В. А. Романовича посвящены различным вопросам линейчатой геометрии в P_3 и в P_n. В четырех работах Е. Т. Ивлева, М. Б. Пергаменщикова и Р. А. Резниченко излагаются первые результаты эквиаффинной теории пар линейчатых многообразий трехмерного пространства. Другим вопросам эквиаффинной геометрии посвящены работы В. В. Васенина и Н. М. Онищук. В работе Л. И. Магазинникова дано новое построение центроаффинной теории конгруэнций. В работах А. А. Лучинина завершается рассмотрение вопроса о расслоении конгруэнций на подмногообразия с постоянными инвариантами.

Работа Н. М. Маськина посвящена метрической теории комплексов и их бесконечно-малым преобразованиям.

В конце выпуска помещен краткий обзор работы научного геометрического семинара Н. Г. Туганова. Коллектив авторов продолжает работу по данной тематике и надеется издать в 1964 году следующий (четвертый) выпуск „Геометрического сборника".

ТРУДЫ ТОМСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА
имени В. В. КУЙБЫШЕВА

Том 168 Серия механико-математическая

Р. Н. ЩЕРБАКОВ

О МЕТОДЕ РЕПЕРАЖА ПОДМНОГООБРАЗИЙ

В ставшей уже классической теории подвижного репера Э. Картана — С. П. Финикова ([6], гл. XIV) непременным моментом исследования является построение канонического репера, т. е. репера, полностью инвариантно связанного с элементом геометрического образа. В деривационных формулах такого репера все коэффициенты являются инвариантами геометрического образа. Геометры, работающие методом Г. Ф. Лаптева [2], наоборот стремятся остановиться на репере, как можно меньше связанном с элементом образа. При этом получаются более общие аналитические построения, но зато само отыскание инвариантов и даже более общих „объектов" (например, тензоров), которые, вообще говоря, меньше характеризуют исследуемый образ, чем инварианты, становится трудной задачей. В последние годы группа сибирских геометров развивает так называемый „метод репеража подмногообразий". Хотя метод пока применялся к сравнительно простым образам преимущественно в классических трехмерных пространствах, но уже выяснилось, что он занимает в известном смысле срединное положение между классическим методом канонизации репера Э. Картана — С. П. Финикова и методом Г. Ф. Лаптева. Является ли эта середина „золотой" (о чем, понятно, мечтают сторонники метода), покажут дальнейшие исследования. В наших „Геометрических сборниках" уже появилось довольно много работ, в которых идет речь о методе репеража подмногообразий, но до сих пор его идея отчетливо не излагалась. В данной заметке делается попытка кратко изложить основные понятия и идеи метода без каких-либо примеров, так как примеры читатель найдет в статьях коллектива авторов „Геометрических сборников" (см. также [10]). В этом изложении мне придется пользоваться некоторыми основными понятиями дифференциальной геометрии. Как это часто бывает, именно для основных понятий нет общепринятой терминологии. Например, то, что я называю здесь „геометрическим образом", именуют то „семейством геометрических образов" [3], то „погруженным многообразием" [2], то „эквипараметрическим многообразием" [4, 5]. Поэтому я вынужден сформулировать и некоторые общеизвестные понятия, которыми буду пользоваться.

Будем рассматривать n-мерное евклидово пространство E_n. Если, перейдя к неоднородным координатам, дополнить его несобственными элементами, то мы получим расширенное евклидово пространство, изоморфное n-мерному проективному пространству P_n. Если в E_n действует группа движений, то мы получаем метрическую геометрию. В этом случае репером, т. е. простейшей фигурой, стационарная под-группа которой является единичной, служит точка и n ортонормальных векторов, т. е. векторов e_i, для которых $(e_i e_j) = \delta_{ij}$. Если группу движений заменить эквиаффинной (унимодулярной) группой, то мы получим эквиаффинную геометрию. В этом случае репер состоит из точки и n некомпланарных векторов e_i, связанных лишь одним условием $(e_1 e_2 ... e_n) = 1$. Если, наконец, рассматривать проективную группу, то получается проективная геометрия, а репер будет состоять из $n+1$ аналитических точек A_i, причем всегда можно предположить, что $(A_1 A_2 ..... A_{n+1}) = 1$, и исключить тем самым из рассмотрения инвариантную подгруппу перенормировок аналитических точек (ср. [2], гл. V, § 1). Другие геометрии, ассоциирующиеся с E_n — центроаффинная, общая аффинная, центропр ективная и т. п. — в данной работе не рассматриваются, но все, о чем будет идти речь, может быть без труда применено и к ним.

Определение 1. Элементом называется фигура, состоящая из конечного числа точек и прямых линий.

В метрической и аффинной геометрии мы можем задать любой элемент при помощи конечного числа векторов (радиус-векторов точек и направляющих векторов прямых) относительно некоторой неподвижной системы координат. В проективной геометрии элемент задается при помощи конечного числа аналитических точек. Очевидно, что в большинстве случаев один и тот же элемент может быть задан различными наборами векторов или аналитических точек даже относительно одной и той же неподвижной системы координат. Конечно, в состав элемента можно включить и плоскости, как это делают Г. Георгиев и И. Попа в [3—4], а также линейные многообразия более высокого числа измерений (p-плоскости), но нам удобнее ограничиться точками и прямыми. Если теперь векторы или аналитические точки, определяющие элемент, сделать достаточно хорошими функциями некоторого числа параметров, то мы и получим то, что называется геометрическим образом. Учитывая, что аналитические точки можно рассматривать как $n+1$-мерные векторы, мы придем к следующему определению.

Определение 2. Если векторы, определяющие элемент E, являются в некоторой области Δ непрерывными и достаточное число раз дифференцируемыми функциями некоторого числа p параметров, то совокупность всех элементов, соответствующих всем значениям параметров (пробегающих область Δ), называется геометрическим образом Φ_p $(1 \leqslant p \leqslant n)$, состоящим из элементов E.

Следовательно, конкретный элемент геометрического образа получается заданием конкретной совокупности значений параметров. Параметры и функции, о которых идет речь, подразумеваются вещественными. Однако в аффинной и проективной геометриях часто, без особых оговорок, допускают, что они могут быть и комплексными. Мы будем следовать этому обычаю.

С каждым элементом геометрического образа Φ_p можно ассоциировать некоторый репер, состоящий из $n+1$ аналитических точек (в проективной геометрии) или из $n+1$ векторов (в аффинном и метрическом случаях), являющихся функциями первичных (т. е. тех, при помощи которых определяется геометрический образ) и вторичных параметров (см. [1], гл. XIV). Включая элемент или часть его в состав репера, мы получим, что среди N форм Пфаффа, входящих в деривационные формулы репера, будет содержаться $q+p$ первичных форм ω^{α}, обращение которых в нуль фиксирует элемент E. Имеющиеся между ними q линейных зависимостей

$$\omega_{\alpha} = L^{\alpha}_{\beta}\omega^{\beta} \quad (\beta = 1,2...p;\ \alpha = p+1.....p+q) \tag{0.1}$$

являются исходными соотношениями для исследования геометрического образа Φ_p. Остальные $s = N - q - p$ форм Пфаффа имеют вид:

$$\tilde{\omega}^{\gamma} = L^{\gamma}_{\beta}\omega^{\beta} + \pi^{\gamma} \ (\gamma = 1,2....s), \tag{0.2}$$

где π^{γ} — вторичные формы, определяющие выбор репера. Постепенным приведением их к нулю осуществляется канонизация репера. Когда канонизация репера будет проведена полностью, все коэффициенты L^{α}_{β}, L^{γ}_{β} станут константами или инвариантами геометрического образа ([1], гл. XIV). Геометрический образ можно выделить из совокупности всех элементов данного вида при помощи системы дифференциальных уравнений

$$\Omega^{k} \equiv a^{k}_{l}\, du^{l} = 0 \ (l = 1,2...n;\ k = 1,2...n-p), \tag{0.3}$$

где u^l — какие-нибудь точечные координаты, принимая интегралы этой системы за первичные параметры. Эта система определяет геометрический образ (и даже $n-p$-параметрическое семейство их) тогда и только тогда, когда она вполне интегрируема. Однако и тогда, когда она не является вполне интегрируемой, то ей все же можно придать геометрическое значение — на этом пути и возникает так называемая неголономная геометрия (см., например, [3], § 5, [6], гл. 7, [7]).

Совершенно аналогично любую систему уравнений

$$\omega^{\tau} = 0 \ (\tau = 1,2....p-m;\ m < p), \tag{0.4}$$

где ω^{τ} — первичные формы, можно трактовать как неголономное многообразие, принадлежащее геометрическому образу Φ_p. Если система (0.4) вполне интегрируема (в частности, если $m = 1$), то она определяет голономное подмногообразие, т. е. геометрический образ, принадлежащий геометрическому образу Φ_p. Если же система (0.4) не вполне интегрируема, то она все же определяет бесчисленное множество одномерных геометрических образов, проходящих через данный элемент образа Φ_p и принадлежащих Φ_p, причем первые дифференциальные окрестности этих одномерных образов принадлежат первой дифференциальной окрестности данного элемента геометрического образа Φ_p. Это дает основание ввести следующее определение.

Определение 3. Подмногообразием Ψ_m геометрического образа Φ_p называется совокупность одномерных геометрических образов, принадлежащих образу Φ_p, имеющих в каждом элементе первую дифференциальную окрестность, принадлежащую первой дифференциальной окрестности этого же элемента в Φ_p, и определяемых системой $p-m$ независимых уравнений Пфаффа относительно первичных параметров:

$$\omega^{\tau} = 0 \qquad (\tau = 1,2....p-m). \tag{0.4'}$$

Если эта система не вполне интегрируема, то подмногообразие называется неголономным.

Замечание. Очевидно, что в случае вполне интегрируемости системы (0.4′) подмногообразие Ψ_m превращается в $p-m$-параметрическое семейство геометрических образов Φ_m, состоящих из таких же элементов, что и Φ_p. В этом случае эти образы Φ_m (каждый в отдельности) также называются подмногообразиями.

Сознавая, что термин „подмногообразие" не является удачным в связи с возникающими ассоциациями, я не решаюсь заменить его термином „подобраз" как вследствие неблагозвучности последнего, так и вследствие того, что в неголономном случае Ψ_m не является геометрическим образом в смысле определения 2.

Первая дифференциальная окрестность подмногообразия Ψ_m выделяет некоторые геометрически инвариантные (относительно Ψ_m) элементы репера (в линейчатой геометрии это, обычно, — фокальные элементы), фиксация которых обеспечивается обращением в нуль m' независимых вторичных форм $\pi^{\gamma'}$. Та или иная фиксация этих форм $\pi^{\gamma'}$ приводит к тому, что репер ассоциируется с конкретным подмногообразием данного вида. Если же продолжать построение репера, оставляя эти формы не фиксированными, то мы сохраняем возможность отнесения геометрического образа к любому подмногообразию Ψ_m. Мы приходим здесь к следующим основным для метода репеража подмногообразий определениям.

Определение 4. Вторичные формы $\pi^{\gamma'}$ $(\gamma'=1,2...m')$, обращение которых в нуль приводит к фиксации элементов первой дифференциальной окрестности подмногообразия Ψ_m, называются полувторичными формами. Репер, полученный фиксацией всех вторичных форм, кроме m' полувторичных, называется полуканоническим репером геометрического образа Φ_p, отнесенного к подмногообразию Ψ_m, и каноническим репером подмногообразия Ψ_m.

Конечно, выбор тех или иных форм $\pi^{\gamma'}$ в качестве полувторичных, как и другие операции, производимые при любом репераже, может быть произведен не единственным способом. Существенно, однако, что при отнесении геометрического образа к подмногообразию Ψ_m число полувторичных форм равно $m'=m(p-m)$.

Как известно, построение канонического репера производится посредством последовательного продолжения системы (0.1), что приводит к соотношениям вида:

$$\delta B_\rho = f_\gamma(B_\rho)\pi^\gamma, \tag{0.5}$$

где B_ρ — коэффициенты при ω^α, возникающие при указанных продолжениях. При построении полуканонического репера необходимо из соотношений (0.5) выделить такие комбинации, которые не зависят существенно от полувторичных форм $\pi^{\gamma'}$, т. е. имеют вид

$$\delta g_\lambda(B_\rho) = f_{\gamma'}(B_\rho)\pi^{\gamma'} + f_{\gamma^*}(B_\rho)\pi^{\gamma^*}, f_{\gamma'} = \varphi^{\mu}_{\gamma'} g_\mu, \tag{0.6}$$

где π^{γ^*} — не полувторичные формы, и при помощи них производить дальнейшие фиксации до тех пор, пока все π^{γ^*} не будут приведены к нулю. Как только это будет достигнуто, мы можем оставшиеся m' вторичных параметров включить в число неизвестных функций, определяющих геометрический образ, отнеся его тем самым к произвольному подмногообразию Ψ_m, и считать с этого момента полувторичные формы равными нулю. Формулы (0.1) и (0.2) примут тогда вид

$$\omega^\gamma = L^\gamma_\beta \omega^\beta (\gamma = 1,2...s+q;\ \beta = 1,2...p), \tag{0.7}$$

а условия вполне интегрируемости деривационных формул, вытекающие из уравнений структуры, образуют систему внешних дифференциальных уравнений, определяющих геометрический образ вместе с произвольным подмногообразием Ψ_m.

Определение 5. Система внешних уравнений, получающаяся внешним дифференцированием деривационных формул полуканонического репера с применением уравнений структуры, т. е. система условий вполне интегрируемости деривационных формул, называется основной системой дифференциальных уравнений геометрического образа Φ_p, отнесенного к подмногообразию Ψ_m.

Произвол решения этой системы будет на m' функций p аргументов больше, чем произвол существования геометрического образа Φ_p.

Упомянутые деривационные формулы и уравнения структуры имеют вид (см., например, [8], введение, гл. III):

а) в проективной геометрии:

$$dA_i = \omega_i^j A_j \quad (i,j = 1,2...n+1) \tag{0.9}$$

и

$$D\omega_i^j = [\omega_i^k \omega_k^j]\ (i,j,k = 1,2....n+1), \tag{0.10}$$

б) в эквиаффинной геометрии:

$$dr = \omega^i e_i,\ de_i = \omega_i^k e_k,\ \omega_i^i = 0\ (i,k = 1,2...n), \tag{0.11}$$

(здесь r — радиус-вектор начала репера) и

$$D\omega^i = [\omega^j \omega_j^i],\ D\omega_i^k = [\omega_i^j \omega_j^k]\ (i,j,k = 1,2...n). \tag{0.12}$$

В метрической геометрии формы ω_i^j образуют, кроме того, кососимметрическую матрицу, т. е. $\omega_i^j + \omega_j^i = 0$. Формы ω_i^j в (0.9) и ω^i, ω_i^k в (0.11) распадаются на две совокупности: p основных форм ω^α, для которых (0.10) и (0.12) дают лишь выражения для их внешних дифференциалов через внешние произведения тех же форм ω^α и $q+s$ форм ω^γ, внешним дифференцированием которых с использованием выражений для $D\omega^\alpha$ и получается основная система дифференциальных уравнений.

Коэффициенты L^γ_β в (0.7) являются инвариантами полуканонического репера. Из (0.6) для них получится ряд соотношений

$$\delta L^\gamma_\beta = f_{\gamma'}(L^\gamma_\beta)\pi^{\gamma'}\ (\gamma' = 1,2...m'), \tag{0.13}$$

исключая из которых $\pi^{\gamma'}$ получим соотношения вида

$$\delta I = 0,$$

определяющие важнейшие инварианты I самого геометрического образа Φ_p.

Другой способ нахождения таких инвариантов состоит в отыскании формул перехода от полуканонического репера к некоторому каноническому реперу, все коэффициенты деривационных формул которого уже являются инвариантами образа Φ_p.

Геометрическое значение инвариантов L^γ_β, как и инвариантов канонического репера, удобнее всего находить, рассматривая простейшие одномерные подмногообразия Ψ_1, получающиеся приравниванием нулю всех форм ω^α, кроме одной.

Всякую систему соотношений между инвариантами L^γ_β полуканонического репера

$$\varphi_j(L^\gamma_\beta) = 0 \quad (j = 1,2...g) \tag{0.14}$$

можно рассматривать как систему натуральных уравнений некоторого класса подмногообразий. Если уравнения

$$\delta\varphi_j = 0 \quad (j = 1,2...g) \tag{0.15}$$

могут быть удовлетворены в силу (0.13) подходящим выбором форм $\pi^{\prime}$, то подмногообразия класса (0.14) существуют в любом геометрическом образе Φ_p (при этом надо иметь в виду, что часть уравнений (0.14) может быть следствием остальных уравнений той же системы и основной системы дифференциальных уравнений). Если это невозможно, то уравнения (0.14), присоединенные к основной системе уравнений, ограничивают произвол существования геометрического образа, содержащего подмногообразие (0.14). Таким образом, здесь открывается возможность систематического исследования различных видов подмногообразий Ψ_m, а также возможность классификации геометрических образов Φ_p с точки зрения наличия в них подмногообразий Ψ_m определенного вида. Если, наконец, задать такие соотношения (0.14), чтобы (0.15) удовлетворялись при фиксации всех полувторичных форм $\pi^{\prime}$, то мы получим некоторый канонический репер геометрического образа, а образ будет отнесен к некоторому вполне геометрически характеризованному подмногообразию. Таким образом, открывается возможность построения различных канонических реперов путем отнесения геометрического образа к различным специальным подмногообразиям (так, например, недавно В. И. Платонова и Л. К. Тутаев в работе [9] получили новый аффинный канонический репер поверхности, отнеся ее к линиям Дарбу и Сегре).

Так как построение полуканонического репера всегда происходит геометрически инвариантно, то после того, как часть репера ассоциируется с некоторым подмногообразием Ψ_m, то с другой равноправной частью репера естественно ассоциируется некоторое другое подмногообразие Ψ_{p-m}. На этом пути возникают далеко идущие обобщения понятий ортогональной и сопряженной сетей, которые сыграли такую большую роль в классической теории поверхностей.

В частности в теории конгруэнций возникают ортогональные и сопряженные сети линейчатых поверхностей, в теории комплексов — ортогональная и сопряженная „сети", состоящие из неголономных конгруэнций Ψ_2 и линейчатых поверхностей Ψ_1.

Мы ограничимся здесь этими общими замечаниями о сущности метода репеража подмногообразий и о возможностях его применения.

В настоящее время метод успешно применяется к поверхностям, конгруэнциям, комплексам, парам конгруэнций, парам комплексов, парам M (поверхность — конгруэнция) в метрической, аффинной, проективной, конформной геометриях, а также в геометрии пространств постоянной кривизны. Заметим, что переход от двупараметрических геометрических образов (поверхности, конгруэнции) к трехпараметрическим (комплексы) привел к существенному расширению метода (появление понятия неголономного подмногообразия). Следует надеяться, что применение метода к другим геометрическим образам приведет к дальнейшему его развитию и усилению. Пора попытаться применить метод и в геометрии погруженных многообразий [2] самого общего вида.

ЛИТЕРАТУРА

1. Фиников С. П. Метод внешних форм Картана в дифференциальной геометрии. М.—Л., ГИТТЛ, 1948.

2. Лаптев Г. Ф. Дифференциальная геометрия погруженных многообразий. Труды Московского мат. общества, 2, 1953, 275—382.

3. Рашевский П. К. Тензорная дифференциальная геометрия. В сб. „Математика в СССР за тридцать лет", 1948, 883—918.

4. Gheorghiev Gh., Popa I., Geometria proiectivo—diferenţială a unor varietăţi echi—parametrice (II). Studii şi cerc. şt. Mat. Fil. Iaşi, An. 12, Fasc. 1, 1961, 115—124.

5. Gheorghiev Gh., Popa I., Geometria di alcune varietà equi—parametrice (III). Anal. şt. univ. Al. I. Cuza, sect I, 7, fasc. 2, 1961, 283—298.

6. Mihăilescu T., Geometrie diferenţială proiectivă, Bucureşti, 1958.

7. Щербаков Р. Н., Рахула М. О. К эквиаффинной теории неголономного многообразия. Геометрический сборник, вып. 1. Труды Томского университета, 160, 1962, 82—89.

8. Фавар Ж. Курс локальной дифференциальной геометрии. М., Издатинлит, 1960.

9. Платонова В. И., Тутаев Л. К. К теории нелинейчатых поверхностей в аффинном трехмерном пространстве. Весцi акадэмii Беларускай ССР, сер. фiз.—тэхн. навук, 3, 1961, 13—20.

10. Щербаков Р. Н. Курс аффинной и проективной дифференциальной геометрии. Томск. Изд. Томского ун-та, 1960.

ТРУДЫ ТОМСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА
имени В. В. КУЙБЫШЕВА

Том 168 Серия механико-математическая

А. А. ЛУЧИНИН

КОНГРУЭНЦИИ, РАССЛАИВАЮЩИЕСЯ НА СЕМЕЙСТВА ЛИНЕЙЧАТЫХ ПОВЕРХНОСТЕЙ С ПОСТОЯННЫМИ ПРОЕКТИВНЫМИ ИНВАРИАНТАМИ

Если на поверхности в трехмерном евклидовом пространстве существует семейство линий с постоянными инвариантами линии на поверхности, то данные поверхности являются или поверхностями вращения, или их обобщениями [1]. В работе [1] изучены поверхности в трехмерном проективном пространстве, несущие на себе семейство линий с постоянными проективными инвариантами. В работе [2] эта же задача решается в трехмерном аффинном пространстве. Аналогичную задачу можно рассматривать и в теории конгруэнций. В работах [3] и [4] изучены конгруэнции, расслаивающиеся на семейства линейчатых поверхностей с постоянными аффинными или евклидовыми инвариантами. В этой работе с помощью методов внешних форм Картана и репеража подмногообразий [5] определяются все конгруэнции трехмерного пространства, расслаивающиеся на семейства линейчатых поверхностей с постоянными проективными инвариантами.

§ 1. Постановка задачи

Отнесем конгруэнцию к M-реперу, построенному Р. Н. Щербаковым [6] (рассмотрение в K-репере приводит к тем же классам конгруэнций). Этот репер является полуканоническим, то есть линейчатые поверхности $\omega_1^3\,\omega_1^4 = 0$ образуют произвольную сопряженную сеть линейчатых поверхностей, принадлежащих данной конгруэнции. Коэффициенты a_i^j, b_i^j деривационных формул

$$dA_i = (a_i^j\,\omega_1^3 + b_i^j\,\omega_1^4)\,A_j \qquad (i, j = 1,\ 2,\ 3,\ 4) \tag{1}$$

можно выписать в таблицу

Таблица

$i \backslash j$	a_i^1	b_i^1	a_i^2	b_i^2	a_i^3	b_i^3	a_i^4	b_i^4
$i=1$	$B+p$	$A+p^*$	$A+a$	$B+a^*$	1	0	0	1
$i=2$	a	a^*	p	p^*	0	1	1	0
$i=3$	g	g^*	$e+x$	e^*+x^*	$q+B^*$	q^*+A	b	b^*
$i=4$	e	e^*	$g+x^*$	g^*+x	$b+A$	b^*+B^*	q	q^*

(2)

где

$$A = A^*,\ A + p^* + q^* = 0,\ B + B^* + 2(p + q) = 0,$$
$$B^2 - A^2 = C = \mathrm{const}. \tag{3}$$

Условия совместности системы уравнений (1) имеют вид:

$$D\omega_1^3 = (a - b + q^* - p^*)[\omega_1^3\omega_1^4],\quad D\omega_1^4 = (b^* - a^* + p - q)[\omega_1^3\omega_1^4] \tag{4}$$

$$[dp\,\omega_1^3] + [dp^*\omega_1^4] = \{aB - a^*A + g^* - e - p(a - b + q^*) - p^*(b^* - a^* - q)\}[\omega_1^3\omega_1^4] \tag{5_1}$$

$$[da\,\omega_1^3] + [da^*\omega_1^4] = \{aA - a^*B + e^* - g - a(a - b + q^* - p^*) - a^*(b^* - a^* + p - q)\}[\omega_1^3\omega_1^4] \tag{5_2}$$

$$[db\,\omega_1^3] + [db^*\omega_1^4] = \{b^*B^* - Ab + g - e^* - x^* - b(a - b + q^* - p^*) - b^*(b^* - a^* + p - q)\}[\omega_1^3\omega_1^4] \tag{5_3}$$

$$[dx^*\omega_1^3] + [dx\,\omega_1^4] = \{(e + g^*)(B - B^*) + x^*(A + 2b + 2p^* - 2q^*) + x(-B^* - 2b^* + 2q - 2p)\}[\omega_1^3\omega_1^4] \tag{5_4}$$

$$[dx\,\omega_1^3] + [dx^*\omega_1^4] = \{(e^* + g)(B + B^*) - 2A(e + g^*) + x^*(B^* - 2b^* - 2p + 2q) + x(-A + 2b + 2p^* - 2q^*)\}[\omega_1^3\omega_1^4] \tag{5_5}$$

$$[de\,\omega_1^3] + [de^*\omega_1^4] = \{e(A + 2p^* - 2q^* - a + b) - e^*(B + 2p - 2q + b^* - a^*) + g(a^* - b^* - B^*) - g^*(b - a + A) + x^*a^* - ax\}[\omega_1^3\omega_1^4] \tag{5_6}$$

$$[dg\,\omega_1^3] + [dg^*\omega_1^4] = \{e(a^* - b^*) + e^*(b - a) + g(2p^* - 2q^* - a + b) + g^*(B^* - B + 2q - 2p + a^* - b^*) + xa^* - x^*a\}[\omega_1^3\omega_1^4] \tag{5_7}$$

$$[dB\,\omega_1^3] + [dA\,\omega_1^4] = \{3(Aa^* - aB) + A(q - p - b^*) + B(p^* - q^* + b)\}[\omega_1^3\omega_1^4] \tag{5_8}$$

$$[dA\,\omega_1^3] + [dB\,\omega_1^4] = \{3(Ba^* - Aa) + C + A(b - q^* + p^*) + B(q - p - b^*)\}[\omega_1^3\omega_1^4] \tag{5_9}$$

$$[dB^*\omega_1^3] + [dA^*\omega_1^4] = \{3(bB^* - b^*A) + 2x + B^*(p^* - q^* - a) + A(q - p + a^*)\}[\omega_1^3\omega_1^4] \tag{5_{10}}$$

$$[dA^*\omega_1^3] + [dB^*\omega_1^4] = \{3(bA - b^*B^*) + 2x^* + A^2 - B^{*2} + A(p^* - q^* - a) + B^*(q - p + a^*)\}[\omega_1^3\omega_1^4] \tag{5_{11}}$$

В силу формул (3) из уравнений (5_8) — (5_{11}) имеем:

$$d\ln(A + B) = (p^* - q^* + b - 3a - A)\,\omega_1^3 + (p - q + b^* - 3a^* - B)\,\omega_1^4$$

$$\begin{aligned} dB^* = \{&-B(q - p + 3a^* - b^* + B) + A^*(p^* - q^* - a + 3b) + \\ &+ B^*(q - p + a^* - 3b^*) + 2x^* + A^2 - B^{*2}\}\,\omega_1^3 + \\ &+ \{-B(q^* - p^* + 3a - b + A) + A^*(p - q - a^* + 3b^*) + \\ &+ B^*(q^* - p^* + a - 3b) - 2x\}\,\omega_1^4 \end{aligned} \tag{6}$$

Чтобы получить деривационные формулы канонического репера линейчатой поверхности $\omega_1^4 = 0$, принадлежащей данной конгруэнции, достаточно в формулах (1) положить

$$\omega_1^4 = 0,\ \omega_1^3 = ds,\ (a_i^j)_{\omega_1^4=0} = \alpha_i^j \tag{7}$$

Мы получаем

$$\frac{dA_1}{ds} = \alpha_1^1 A_1 + \alpha_1^2 A_2 + A_3,\quad \frac{dA_2}{ds} = \alpha_2^1 A_1 + \alpha_2^2 A_2 + A_4,$$

$$\frac{dA_3}{ds} = \alpha_3^i A_i\ \ \frac{dA_4}{ds} = \alpha_4^i A_i,\ (i = 1, 2, 3, 4) \tag{8}$$

Условия того, что координатная линейчатая поверхность $\omega_1^4 = 0$ имеет постоянные проективные инварианты α_i^j, могут быть записаны в виде:

$$[dA\,\omega_1^4] = 0,\ [dB\,\omega_1^4] = 0,\ [dB^*\omega_1^4] = 0,\ [da\,\omega_1^4] = 0,$$

$$[db\,\omega_1^4] = 0,\ [dg\,\omega_1^4] = 0,\ [de\,\omega_1^4] = 0$$

$$[dp\,\omega_1^4] = 0,\ [dq\,\omega_1^4] = 0,\ [dx\,\omega_1^4] = 0,\ [dx^*\omega_1^4] = 0,$$

$$[dp^*\omega_1^4] + [dq^*\omega_1^4] = 0. \tag{9}$$

Вносят уравнения (9) в систему (5) и проделав несложные выкладки, получаем, что если $A(B + B^*) \neq 0$, то задача имеет решение, и возникают два случая.

А) $b^* - a^* + p - q = 0$. В этом случае из системы уравнений (5) и (9) получаем, что искомые конгруэнции определяются с произволом в две функции одного аргумента следующей системой уравнений:

$$A = A^*,\ 2p^* + b - 3a = 0,\ 2q^* - b + 3a + 2A = 0,$$

$$B^2 - A^2 = C,\ 2(p+q) + B + B^* = 0,$$

$$b^* - a^* + p - q = 0,\ 2x^* - 2a^*(B + B^*) - B^2 + 2A(a +$$

$$+ b + A) + B^*(4p + B) = 0,$$

$$d\ln(A + B) = -(B + 2a^*)\,\omega_1^4,\ dB^* = \{A(2a^* - 4p -$$

$$- B - 2B^*) + B^*(-2a - 2b) - 2x\}\,\omega_1^4,$$

$$dp = \left\{-aB + a^*A - g^* + e - p\left(\frac{1}{2}a + \frac{1}{2}b + A\right) - pp^*\right\}\omega_1^4,$$

$$dx = \{-(e^* + g)(B + B^*) + 2A(e + g^*) - x^*(B^* -$$

$$- 2a^*) - x(6a + A)\}\,\omega_1^4,$$

$$dx^* = \{-(e + g^*)(B - B^*) - 3x^*(A + 2a) + x(B + 2a^*)\}\,\omega_1^4,$$

$$da = \{-aA + a^*B - e^* + g - a(A + 2a)\}\,\omega_1^4,$$

$$db = \{bA - b^*B^* - g + e^* + x^* - b(2a + A)\}\,\omega_1^4,$$

$$dg = \Big\{-e(p - q) - e^*(b - a) - g(5a - b + 2A) -$$

$$- g^*\left(\frac{1}{2}B^* - \frac{3}{2}B - 2p\right) - xa^* + x^*a\Big\}\,\omega_1^4,$$

$$de = \Big\{-e(5a - b + 3A) + e^*\left(2p + \frac{3}{2}B + \frac{1}{2}B^*\right) -$$

$$- g\left(2p + \frac{1}{2}B - \frac{1}{2}B^*\right) - g^*(b - a + A) - x^*a^* + ax\Big\}\,\omega_1^4,$$

$$[de^*\omega_1^4] = 0,\ [dg^*\omega_1^4] = 0.$$

В) $b^* - a^* + p - q \neq 0$. В этом случае из системы уравнений (5) и (9), мы получаем, что искомые конгруэнции определяются с произволом в три постоянные системой:

$$A = A^*,\ 2p^* - 3a + b = 0,\ 2q^* + 3a - b + 2A = 0,$$

$$B^2 - A^2 = C,\ 2(p+q) + B + B^* = 0,\ 2b^* - 6a^* + 4p - B + B^* = 0,$$

$$g^* - e - a^*A + pA - 3aa^* + a^*b + 2ap - \frac{1}{2}aB + \frac{1}{2}bB = 0,$$

$$2aA - 2a^*B + e^* - g + 2a^2 - 2a^{*2} = 0,$$

$$g - e^* - x^* + 2ab - 2a^*b^* - B^*b^* - b^*B = 0,$$

$$(e + g^*)(B - B^*) + 3x^*(A + 2a) - x(B^* + 6a^* + 2B) = 0$$

$$e(5a - b + 3A) - e^*\left(2p + 2a^* + \frac{5}{2}B + \frac{1}{2}B^*\right) +$$

$$+ g(a^* - b^* - B^*) + g^*(b - a + A) + x^*a^* - ax = 0,$$

$$e(a^* - b^*) + e^*(b - a) + g(5a - b + 2A) +$$

$$+ g^*\left(\frac{1}{2}B^* - 2p - 2a^* - \frac{5}{2}B\right) - xa^* - x^*a = 0,$$

$$A(a + b + A) + B^*(2p - 4a^* - B) + x^* = 0,$$

$$B^*(a + b) + A(2p + B^* - B - 4a^*) + x = 0,$$

$$(e^* + g)(B + B^*) - 2A(e + g^*) + x^*(B^* - 6a^* - 2B) + x(6a + A) = 0.$$

Так как у изучаемых конгруэнций все инварианты постоянны, то данные конгруэнции допускают двучленную группу проективных преобразований в себя [7].

Рассмотрим теперь случаи, исключенные ранее.

§2. Случай $A = 0$, $B + B^* \neq 0$

Если $A = 0$, $B + B^* \neq 0$, то из уравнений (5) и (9) получаем, что задача имеет решение и возникают следующие случаи.

I) Если $B^* = 0$, $b^* - a^* + p - q \neq 0$, $p^*[da^*\omega_1^4] \neq 0$, то искомые конгруэнции определяются с произволом в одну функцию одного аргумента системой уравнений:

$$A = A^* = B^* = x = x^* = e = e^* = g = g^* = b = 0,$$

$$B^2 = C,\ p^* + q^* = 0,\ 2p^* = 3a,$$

$$q = -p - \frac{1}{2}B,\ b^* = -2p + 3a^* + \frac{1}{2}B,\ 36a^2 = (4p + 5B)(4p - B),$$

$$dp = \left(-2ap + 3aa^* + \frac{1}{2}aB\right)\omega_1^4.$$

$$[da^* \omega_1^4] = \left(2p - 3a^* - \frac{1}{2} B \right)(B + 2a^*) [\omega_1^3 \omega_1^4].$$

Изучаемые конгруэнции обладают следующими свойствами:
1) точки Лапласа [6] неподвижны, 2) фокальные поверхности (F_1) и (F_2)
конгруэнции $\{A_1 A_2\}$ вырождаются в конусы, 3) конгруэнции $\{F_1 G_1\}$
и $\{F_2 G_2\}$ вырождаются в конусы (F_1) и (F_2), 4) полученные конгруэн-
ции принадлежат классу конгруэнций, для которых $I = J_6 = J_6^{'} = 0$.
Линейчатые поверхности $\omega_1^4 = 0$ принадлежат поверхностям следую-
щих классов:

$$\alpha_4^3 - \alpha_3^4 = \alpha_1^2 - \alpha_2^1 = \alpha_3^3 - \alpha_4^4 = \alpha_3^2 = \alpha_4^2 = \alpha_4^1 = \alpha_3^1 = 0,$$

$$(\alpha_1^1 - \alpha_2^2)^2 = C, \ 2\alpha_4^4 + \alpha_2^2 + \alpha_1^1 = 0, \ 36 \alpha_2^{1\,2} = (5\alpha_1^1 - \alpha_2^2)(5\alpha_2^2 - \alpha_1^1).$$

Линейчатые поверхности $\omega_1^3 = 0$ принадлежат поверхностям следую-
щих классов:

$$\beta_3^2 = \beta_4^1 = \beta_4^2 = \beta_3^1 = \beta_1^1 - \beta_2^2 = \beta_3^3 - \beta_4^4 = \beta_4^3 - \beta_3^4 = \beta_2^2 + \beta_4^4 = 0.$$

$$(\beta_1^2 - \beta_2^1)^2 = C,$$

где β_i^j инварианты линейчатой поверхности $\omega_1^3 = 0$, аналогичные ин-
вариантам α_i^j, введенным уравнениями (7).

II) $e - e^* = B^* = 0$, $ep^* [da^* \omega_1^4] \neq 0$. В этом случае из системы урав-
нений (5) и (9) получаем, что искомые конгруэнции определяются с
произволом в одну функцию одного аргумента системой:

$$A = A^* = B^* = x = x^* = 0, \ 2e = 2e^* = -C,$$

$$8g = 8g^* = C, \ p^* + q^* = 0, \ p^* = p + \frac{1}{2} B,$$

$$q = -p - \frac{1}{2} B, B^2 = C, b^* = -2p + 3a^* + \frac{1}{2} B, \ b = 3a - B - 2p.$$

$$ap^* = \frac{1}{16} C + \frac{1}{2} pB + \frac{1}{2} p^2,$$

$$dp = \left(2a^* p + a^* B - p^2 + \frac{1}{8} C \right) \omega_1^4.$$

$$[da^* \omega_1^4] = \frac{1}{2p^*} \left(p^2 - 2a^* p - a^* B - \frac{1}{8} C \right)(B + 2a^*) [\omega_1^3 \omega_1^4].$$

Полученные конгруэнции обладают следующими свойствами:
1) поверхность (G_1) вырождается в неподвижную точку, 2) поверх-
ность (G_2) вырождается в пространственную кривую, 3) конгруэнция
прямых Лапласа вырождается в конус с вершиной G_1, 4) фокальная
поверхность (F_1) конгруэнции $\{A_1 A_2\}$ является конусом с вершиной G_1,
5) фокальная поверхность (F_2) является торсом с ребром возвра-
та (G_2), 6) конгруэнция $\{F_1 G_1\}$ вырождается в конус (F_1), 7) конгруэн-
ция $\{F_2 G_2\}$ вырождается в торс (F_2), 8) для полученных конгруэнций
мы имеем $I = J_6 = 0$, $J_6^{'} = -1$. Линейчатые поверхности $\omega_1^4 = 0$ при-
надлежат поверхностям следующих классов:

$$\alpha_3^1 - \alpha_4^3 = \alpha_2^1 - \alpha_1^2 = \alpha_3^2 - \alpha_4^1 = \alpha_3^3 - \alpha_4^4 = \alpha_3^1 + \alpha_4^1 = \alpha_2^2 - \alpha_2^1 = 0,$$

$$(\alpha_1^1 - \alpha_2^2)^2 = C,$$

$$2\alpha_4^4 + \alpha_2^2 + \alpha_1^1 = 0, \ 2\alpha_3^4 = 3\alpha_2^1 - \alpha_1^1 - \alpha_2^2.$$

Линейчатые поверхности $\omega_1^3 = 0$ принадлежат поверхностям следующих классов

$$\beta_1^1 - \beta_2^2 = \beta_3^3 - \beta_4^4 = 0, \ \beta_3^2 - \beta_4^1 = \beta_4^3 - \beta_3^4 = \beta_4^2 - \beta_3^1 =$$
$$= \beta_3^1 + \beta_4^1 = \beta_2^2 + \beta_4^4 = 0, \ (\beta_1^2 - \beta_2^1)^2 = C,$$

$$\beta_3^4 = -2\beta_2^2 + \frac{3}{2} \beta_1^2 + \frac{3}{2} \beta_2^1.$$

III) $p^* = B^* = 0$, $a [da^* \omega_1^4] \neq 0$. Из уравнений (5) и (9) получаем, что искомые конгруэнции определяются с произволом в две функции одного аргумента системой:

$$A = A^* = B^* = x = x^* = 0, \ e = g^* = p^* = q = q^* = 0,$$

$$2p + B = 0, \ g + e^* = 0, \ 16g = 3C, \ B^2 = C, \ b = 3a, \ 2b^* = 6a^* + 3B,$$

$$[da \omega_1^4] = 0, \ [da \omega_1^3] + [da^* \omega_1^4] =$$
$$= \left(-\frac{3}{8} C - 2a^{*2} + 2a^2 - 2a^* B \right) [\omega_1^3 \omega_1^4].$$

Полученные конгруэнции принадлежат классу конгруэнций H_0 [8] и выделяются из конгруэнций H_0 следующими характеристическими условиями:

$$q = p^* = 0, \ [da \omega_1^4] = 0.$$

Линейчатые поверхности $\omega_1^4 = 0$ принадлежат поверхностям следующих классов:

$$\alpha_3^2 = \alpha_4^1 = \alpha_3^3 = \alpha_4^4 = 0, \ 4\alpha_1^{1\,2} = C, \ 16\alpha_3^1 = 3C,$$

$$\alpha_1^2 - \alpha_2^1 = \alpha_4^3 - \alpha_3^4 = \alpha_4^2 - \alpha_3^1 = \alpha_1^1 + \alpha_2^2 = \alpha_3^4 - 3\alpha_2^1 = 0$$

и обладают следующими свойствами: 1) касательная к геометрическому месту центров Лапласа $A_4 (A_3)$ пересекает вторую (первую) проективную ось, 2) вторая ось пучка комплексов, касательных к проективно-центральным касательным, является прямой Лапласа. Линейчатые поверхности $\omega_1^3 = 0$ принадлежат поверхностям следующих классов:

$$\beta_1^1 = \beta_2^2 = \beta_3^3 = \beta_4^4 = \beta_4^2 = \beta_3^1 = 0, \ \beta_4^3 - \beta_3^4 = \beta_3^2 - \beta_4^1 = 0, \ 16\beta_4^1 = -3C,$$

$$(\beta_1^2 - \beta_2^1)^2 = C, \ 2\beta_3^4 = 3(\beta_1^2 + \beta_2^1)$$

и обладают следующими свойствами: 1) касательные к геометрическому месту центров Лапласа $A_4 (A_3)$ пересекают первую (вторую) проективно-центральную касательную, 2) одна из осей пучка линейных комплексов, касательных к проективным осям, является прямой Лапласа.

IV) $a = p^* = B^* = 0$, $[da^* \omega_1^4] \neq 0$. В этом случае искомые конгруэнции определяются с произволом в одну функцию одного аргумента системой:

$$A = A^* = B^* = x = x^* = e = g^* = p^* = q^* = q = a = b = 0,$$

$$2p + B = 0, \ B^2 = C, \ e^* + g = 0, \ 16g = 3C, \ b^* = 3a^* + \frac{3}{2} B,$$

$$[da^* \omega_1^4] = \left(-\frac{3}{8} C - 2a^{*2} - 2a^* B \right) [\omega_1^3 \omega_1^4].$$

Эти конгруэнции получаются из предыдущего класса тогда и только тогда, когда выполняется одно из следующих условий для линейчатой поверхности $\omega_1^4 = 0$: 1) первая проективно-центральная касательная A_1A_3 касается первой линии центров A_3 и, следовательно, описывает торс с ребром возврата A_1, 2) вторая проективно-центральная касательная A_2A_4 касается второй линии центров A_4 и, следовательно, описывает торс с ребром A_2. Кроме этих свойств, линейчатые поверхности $\omega_1^4 = 0$ обладают ещё следующими свойствами: 1) первая и вторая линии центров являются асимптотическими, 2) первая (вторая) проективно-центральная касательная в каждом первом (втором) центре касается криволинейной асимптотической, 3) первая (вторая) проективная ось лежит в соприкасающейся плоскости первой (второй) линии центров, 4) обе оси пучка линейных комплексов, касательных к проективным осям, совпадают с касательными к линиям центров, 5) эти поверхности являются E-поверхностями [6].

V) $b^* - a^* + p - q = 0$, $[da^* \omega_1^4] = 0$, $B^* \neq 0$. В этом случае искомые конгруэнции определяются с произволом в одну функцию одного аргумента системой:

$$A = A^* = 0,\ p^* + q^* = 0,\ q = -p - \frac{1}{2}(B + B^*),\ B^2 = C,$$

$$2p^* = 3a - b,\ 2a^* + B = 0,\ b^* = -2p - B - \frac{1}{2}B^*,\ x^* + B^*(2p + B) = 0,$$

$$g^* = \frac{1}{B + B^*}(-eB + 4apB^* + 2aBB^* + xB^* - 4xp -$$

$$- 3xB - 4pbB^* - 2bBB^* + 3eB^*),$$

$$dB^* = -2\{x + B^*(a + b)\}\omega_1^4,\ dp = (e - g^* - 2ap - aB)\omega_1^4,$$

$$da = \left(g - e^* - 2a^2 - \frac{1}{2}C\right)\omega_1^4,$$

$$dx = \{-(e^* + g)(B + B^*) - 6ax - x^*(B + B^*)\}\omega_1^4,$$

$$db = \left(\frac{1}{2}B^{*2} - g + e^* - 2ab\right)\omega_1^4,$$

$$de = \left\{-e(5a - b) + e^*\left(\frac{1}{2}B^* + 2p + \frac{3}{2}B\right) +\right.$$

$$\left. + g\left(\frac{1}{2}B^* - \frac{1}{2}B - 2p\right) - g^*(b - a) - x^*a^* + ax\right\}\omega_1^4,$$

$$dg = \left\{-e(a^* - b^*) - e^*(b - a) - g(5a - b) -\right.$$

$$\left. - g^*\left(-2p + \frac{1}{2}B^* - \frac{3}{2}B\right) - xa^* + ax^*\right\}\omega_1^4,$$

$$[de^* \omega_1^4] = 0.$$

VI) $B^* = b^* - a^* + p - q = [da^* \omega_1^4] = 0$. В этом случае искомые конгруэнции определяются с параметрическим произволом системой:

$$A = A^* = B^* = x = x^* = e + g^* = p + q^* = g + e^* = 0,$$

$$2a^* + B = 0,\ B^2 = C,\ q = -p - \frac{1}{2}B,$$

$$2p^* = 3a - b,\ b^* + 2p + B = 0,\ dp = (2e - 2ap - aB)\omega_1^4$$

$$da = \left(2g - 2a^2 - \frac{1}{2}C\right)\omega_1^4,\ dg = -2\{g(3a - b) + e(2p + B)\}\omega_1^4,$$

$$de = -2\{e(3a - b) + g(2p + B)\}\omega_1^4,\ db = -2(g + ab)\omega_1^4.$$

Искомые конгруэнции обладают следующими свойствами: 1) поверхности (G_1) и (G_2) вырождаются в пространственные кривые, 2) фокальные поверхности (F_1) и (F_2) конгруэнции $\{A_1A_2\}$ являются торсами с ребрами (G_1) и (G_2), соответственно, 3) конгруэнции $\{F_1G_1\}$ и $\{F_2G_2\}$ вырождаются, соответственно, в торсы (F_1) и (F_2), 4) конгруэнции $\{A_1A_2\}$ и $\{A_3A_4)$ проективно наложимы, 5) конгруэнции $\{A_1A_2\}$ и $\{A_3A_4\}$ образуют пару T. Линейчатые поверхности $\omega_1^4 = 0$ принадлежат поверхностям следующих классов:

$$\alpha_4^2 - \alpha_3^4 = 0,\ \alpha_2^1 - \alpha_1^2 = \alpha_3^3 - \alpha_4^4 = \alpha_3^2 - \alpha_4^1 = \alpha_4^2 - \alpha_3^1 = 2\alpha_4^4 + \alpha_2^2 + \alpha_1^1 = 0,$$

$$(\alpha_1^1 - \alpha_2^2)^2 = C.$$

Линейчатые поверхности $\omega_1^3 = 0$ принадлежат поверхностям следующих классов:

$$\beta_1^1 - \beta_2^2 = \beta_4^3 - \beta_3^4 = \beta_2^2 + \beta_4^4 = \beta_3^3 - \beta_4^4 = \beta_4^2 - \beta_3^1 = \beta_3^2 -$$

$$- \beta_4^1 = \beta_2^1 + \beta_1^2 = 0,\ (\beta_1^2 - \beta_2^1)^2 = C.$$

VII) $e = g = b = B^* = [da^* \omega_1^4] = 0$, $a(8a^* + C)(b^* - a^* + p - q) \neq 0$.

В этом случае искомые конгруэнции определяются с произволом в две постоянные системой:

$$A = A^* = B^* = x = x^* = e = e^* = g = g^* = b = b^* = 0,\ B^2 = C,$$

$$2p^* = 3a,\ 2q^* = -3a,\ q = -p - \frac{1}{2}B,$$

$$p = \frac{3}{2}a^* + \frac{1}{4}B,\ a^2 = a^*B + a^{*2},\ da^* = 0.$$

Полученные конгруэнции обладают следующими свойствами: 1) точки Лапласа G_1, G_2 и центры Лапласа A_3, A_4 — неподвижны, следовательно, конгруэнция прямых Лапласа вырождается в неподвижную прямую. 2) фокальные поверхности (F_1) и (F_2) конгруэнции $\{A_1 A_2\}$ суть конусы с вершинами, соответственно, в точках G_1 и G_2, 3) полученные конгруэнции принадлежат классу конгруэнций, у которых $I = J_6 = J_6' = 0$. Линейчатые поверхности $\omega_1^4 = 0$ принадлежат поверхностям следующих классов:

$$\alpha_4^3 = \alpha_3^4 = \alpha_3^2 = 0,\ \alpha_4^1 = \alpha_4^2 = \alpha_3^1 = \alpha_1^2 - \alpha_2^1 = \alpha_3^3 - \alpha_4^4 = 0,$$

$$2\alpha_4^4 + \alpha_2^2 + \alpha_1^1 = 0,\ (\alpha_1^1 - \alpha_2^2)^2 = C,\ 36\alpha_2^{1\,2} = (5\alpha_2^2 - \alpha_1^1)(5\alpha_1^1 - \alpha_2^2).$$

Линейчатые поверхности $\omega_1^3 = 0$ принадлежат поверхностям следующих классов:

$$\beta_4^3 = \beta_3^4 = \beta_4^2 = \beta_3^1 = \beta_3^2 = \beta_4^1 = \beta_1^1 - \beta_2^2 = \beta_3^3 - \beta_4^4 = \beta_2^2 + \beta_4^4 = 0,$$

$$(\beta_1^2-\beta_2^1)^2=C,\ 9\beta_2^{2^2}=4\beta_2^1(\beta_1^2-2\beta_2^1).$$

VIII) $a=a^*=B^*=0,\ b^*-a^*+p-q\neq 0$. В этом случае искомые конгруэнции определяются с произволом в одну постоянную системой:

$$A=A^*=B^*=x=x^*=e=e^*=g=g^*=a=b=p^*=q^*=a^*=b^*=0,$$

$$B^2=C,\ 4q+3B=0,\ 4p-B=0.$$

Полученные конгруэнции обладают следующими свойствами: 1) точки Лапласа G_1, G_2 и центры Лапласа A_3, A_4 — неподвижны, следовательно, конгруэнция прямых Лапласа вырождается в неподвижную прямую, 2) фокальные поверхности (F_1) и (F_2) конгруэнции $\{A_1A_2\}$ суть конусы с вершинами, соответственно, в точках G_1 и G_2, 3) конгруэнции $\{F_1G_1\}$ и $\{F_2G_2\}$ вырождаются, соответственно, в конусы (F_1) и (F_2), 4) конгруэнции $\{A_1A_3\}$, $\{A_2A_4\}$ и $\{A_2A_3\}$ вырождаются в конусы, 5) для полученных конгруэнций имеем $I=J_6=J_6'=0$, $4jJ_7=9C$. Линейчатые поверхности $\omega_1^4=0$ принадлежат поверхностям следующих классов:

$$\alpha_3^4=\alpha_4^3=\alpha_1^2=\alpha_2^1=\alpha_3^2=\alpha_4^1=\alpha_4^2=\alpha_3^1=0,\ \alpha_1^1=5\alpha_2^2,$$

$$\alpha_3^3=\alpha_4^4=-3\alpha_2^2,\ 16\alpha_2^{2^2}=C$$

и определяются относительно некоторой неподвижной системы координат уравнением $2x_2^2x_3+Bx_1x_4^2=0$. Линейчатые поверхности $\omega_1^3=0$ принадлежат поверхностям следующих классов:

$$\beta_1^1=\beta_2^2=\beta_3^3=\beta_3^4=\beta_3^4=\beta_4^3=\beta_4^2=\beta_3^1=\beta_3^2=\beta_4^1=\beta_2^1=0,\ \beta_1^{2^2}=C$$

и определяются относительно некоторой неподвижной системы координат уравнением

$$2x_1x_3-2x_2x_4+Bx_4^2=0.$$

IX) $e-g=B^*=[da^*\omega_1^4]=0,\ b^*-a^*+p-q\neq 0$. В этом случае искомые конгруэнции определяются с произволом в две постоянные системой:

$$A=A^*=B^*=x=x^*=0,\ e=g,\ e^*=g^*,\ e+g^*=0,$$

$$p^*+q^*=0,\ q=-p-\frac{1}{2}B,$$

$$B^2=C,\ p^*=-p-\frac{1}{2}B,\ b^*=-2p+3a^*+\frac{1}{2}B,$$

$$b=3a+2p+B,\ g=a^2-a^{*2}-a^*B.$$

$$3a^2+3ap+aB+3a^*p-3a^{*2}+pB-a^*B=0,$$

$$4ap+\frac{5}{3}aB+4a^*p+\frac{5}{3}pB+\frac{7}{3}a^*B+\frac{1}{2}C=0,\ dp=0.$$

Полученные конгруэнции обладают следующими свойствами: 1) поверхность (G_1) вырождается в пространственную кривую, 2) поверхность (G_2) вырождается в точку, 3) конгруэнция прямых Лапласа вырождается в конус с вершиной G_2, 4) фокальная поверхность (F_1) конгруэнции $\{A_1A_2\}$ является торсом с ребром возврата (G_1), 5) фокальная поверхность (F_2) — конус с вершиной G_2, 6) конгруэнция $\{F_1G_1\}$ вырождается в торс (F_1), 7) конгруэнция $\{F_2G_2\}$ вырождается в конус

(F_2), 8) искомые конгруэнции принадлежат классу конгруэнций, у которых $I=J_6'=0$. Линейчатые поверхности $\omega_1^4=0$ принадлежат поверхностям следующих классов:

$$\alpha_4^3-\alpha_3^4=\alpha_1^2-\alpha_2^1=\alpha_3^3-\alpha_4^4=\alpha_3^2-\alpha_4^1=\alpha_4^2-\alpha_3^1=\alpha_3^1-\alpha_4^1=0,$$

$$(\alpha_1^1-\alpha_2^2)^2=C,$$

$$\alpha_1^1+\alpha_2^2+2\alpha_4^4=0,\ \alpha_3^4=3\alpha_2^1+\alpha_2^2+\alpha_1^1,\ 24\alpha_3^1\alpha_2^2+14\alpha_3^1\alpha_3^4-$$

$$-2\alpha_2^{2^2}(\alpha_1^1-\alpha_2^2)-5\alpha_2^2(\alpha_1^1-\alpha_2^2)^2-4\alpha_2^1\alpha_2^2(\alpha_1^1-\alpha_2^2)-$$

$$-2\alpha_1^1(\alpha_1^1-\alpha_2^2)^2-2C(\alpha_1^1-\alpha_2^2)=0.$$

Линейчатые поверхности $\omega_1^3=0$ принадлежат поверхностям следующих классов:

$$\beta_1^1-\beta_2^2=\beta_3^3-\beta_4^4=\beta_4^3-\beta_3^4=\beta_4^2-\beta_3^1=\beta_3^2-\beta_4^1=\beta_3^1-\beta_4^1=$$

$$=\beta_2^2+\beta_4^4=0,\ (\beta_1^2-\beta_2^1)^2=C.$$

X) $e+g=B^*=[da^*\omega_1^4]=0,\ b^*-a^*+p-q=0$. В этом случае искомые конгруэнции определяются с произволом в две постоянные системой:

$$A=A^*=B^*=x=x^*=0,\ e+g=0,\ e+g^*=0,$$

$$e^*+g^*=0,\ p^*+q^*=0,\ B^2=C.$$

$$q=-p-\frac{1}{2}B,\ p^*=p+\frac{1}{2}B, b^*=-2p+3a^*+\frac{1}{2}B,$$

$$b=3a-2p-B,\ g=a^2-a^{*2}-a^*B,$$

$$3a^2-3ap-aB+3a^*p+pB-a^*B-3a^{*2}=0,$$

$$\frac{5}{3}pB-\frac{5}{3}aB+\frac{7}{3}a^*B-4ap+4a^*p+\frac{1}{2}C=0,\ dp=0.$$

Искомые конгруэнции обладают следующими свойствами: 1) поверхность (G_1) вырождается в точку, 2) поверхность (G_2) вырождается в пространственную кривую, 3) конгруэнция прямых Лапласа вырождается в конус с вершиной G_1, 4) фокальная поверхность (F_1) конгруэнции $\{A_1A_2\}$ является конусом с вершиной G_1, 5) фокальная поверхность (F_2) является торсом с ребром возврата (G_2), 6) конгруэнция $\{F_1G_1\}$ вырождается в конус (F_1), 7) конгруэнция $\{F_2G_2\}$ вырождается в торс (F_2), 8) искомые конгруэнции принадлежат конгруэнциям, у которых $I=J_6=0$. Линейчатые поверхности $\omega_1^4=0$ принадлежат поверхностям следующих классов:

$$\alpha_4^3-\alpha_3^4=\alpha_1^2-\alpha_2^1=\alpha_3^3-\alpha_4^4=\alpha_3^2-\alpha_4^1=\alpha_4^2-\alpha_3^1=\alpha_3^1+\alpha_4^1=0,$$

$$(\alpha_1^1-\alpha_2^2)^2=C,$$

$$\alpha_1^1+\alpha_2^2+2\alpha_4^4=0,\ \alpha_3^4=3\alpha_2^1-\alpha_2^2-\alpha_1^1,$$

$$2C(\alpha_1^1-\alpha_2^2)+5\alpha_2^2(\alpha_1^1-\alpha_2^2)^2+2\alpha_2^{2^2}(\alpha_1^1-\alpha_2^2)-$$

$$-2\alpha_2^1(\alpha_1^1-\alpha_2^2)^2-4\alpha_2^1\alpha_2^2(\alpha_1^1-\alpha_2^2)-24\alpha_2^2\alpha_3^1-14\alpha_3^1(\alpha_1^1-\alpha_2^2)=0.$$

Линейчатые поверхности $\omega_1^3=0$ принадлежат поверхностям следующих классов:

$$\beta_1^1-\beta_2^2=\beta_3^3-\beta_4^4=\beta_2^2+\beta_4^4=\beta_3^4-\beta_4^3=\beta_4^2-\beta_3^1=\beta_3^2-\beta_4^1=$$

$$=\beta_4^1+\beta_3^1=0,\ (\beta_1^2-\beta_2^1)^2=C.$$

§ 3. Случай $B+B^*=0$, $A\neq 0$.

Если $B+B^*=0$, то искомые конгруэнции принадлежат классу конгруэнций W. В этом случае из уравнений (5) и (9) получаем, что задача имеет решение в следующих случаях.

I) $A(2a+A)(a+b+A)\neq 0$. В этом случае искомые конгруэнции определяются с произволом в две функции одного аргумента системой:

$$A=A^*,\ p+q=0,\ B+B^*=0,\ 2p^*=3a-b,$$
$$2q^*=-3a+b-2A,\ b^*=a^*-2p,$$
$$B^2=C+A^2,\ x=-2pA+(a+b)B,$$
$$x^*=C+2pB-(a+b)A,\ e^*=g+\frac{1}{2}C,$$
$$eA=-2apA+a^2B+abB,\ b(2a+A)+2a^2+3aA+A^2=0,$$
$$dA=-B(2a^*+B)\omega_1^4,\ dp=(-aB+a^*A-g^*+e-pA-2ap)\omega_1^4,$$
$$dg=\{-2pe-e^*(b-a)-g(5a-b+2A)+$$
$$+g^*(2p+2B)-xa^*+x^*a\}\omega_1^4,$$
$$da=(-2aA+a^*B-e^*+g-2a^2)\omega_1^4,$$
$$[da^*\omega_1^4]=0,\ [dg^*\omega_1^4]=0.$$

Линейчатые поверхности $\omega_1^4=0$ принадлежат поверхностям следующего класса:

$$\alpha_4^3-\alpha_3^4=\alpha_1^2-\alpha_2^1,\ \alpha_4^4+\alpha_2^2=\alpha_1^1+\alpha_3^3=0,$$
$$(\alpha_1^1+\alpha_2^2)^2-(\alpha_1^2-\alpha_2^1)^2=C,\ \alpha_3^2-\alpha_4^1=-2\alpha_2^2(\alpha_4^3-\alpha_3^4)+$$
$$+(\alpha_1^1-\alpha_2^2)(\alpha_2^1+\alpha_3^4),\ \alpha_3^4(\alpha_2^1+\alpha_1^2)=\alpha_1^2\alpha_2^1+\alpha_1^{2\,2}-4\alpha_2^{1\,2},$$
$$\alpha_4^2-\alpha_3^1=C+2\alpha_2^2(\alpha_1^1-\alpha_2^2)-(\alpha_1^2-\alpha_2^1)(\alpha_2^1+\alpha_3^4),$$
$$\alpha_4^1(\alpha_1^2-\alpha_2^1)=\alpha_2^1(\alpha_2^2\alpha_2^1+\alpha_1^1\alpha_2^1-2\alpha_2^2\alpha_1^2+\alpha_1^1\alpha_3^4-\alpha_2^2\alpha_3^4).$$

Линейчатые поверхности $\omega_1^3=0$ принадлежат поверхностям следующих классов:

$$\beta_1^1+\beta_4^4=\beta_2^2+\beta_3^3=\beta_1^2-\beta_2^1+\beta_4^3-\beta_3^4=0,\ (\beta_1^2-\beta_2^1)^2=C+(\beta_1^1-\beta_2^2)^2,$$
$$(\beta_4^2-\beta_3^1)(\beta_1^1-\beta_2^2)=C(\beta_1^2-\beta_3^4)-(\beta_3^2-\beta_4^1)(\beta_1^2-\beta_2^1).$$

II) $a+b+A=0$, $A(2a+A)\neq 0$. В этом случае искомые конгруэнции определяются с произволом в три функции одного аргумента системой:

$$A=A^*,\ p+q=0,\ B+B^*=0,\ p^*=2a+\frac{1}{2}A,$$
$$q^*=-2a-\frac{3}{2}A,\ b^*=a^*-2p,\ B^2=A^2+C,$$
$$x=-2pA-AB,\ x^*=B^2+2pB,\ b=-a-A,\ e=-2pa-aB,$$
$$dA=-B(B+2a^*)\omega_1^4,\ dp=(-2aB+a^*A-g^*-pA-4ap)\omega_1^4,$$
$$dg=\{4ap^2+4apB+(e^*-3g)(2a+A)+2g^*(p+B)+aB^2-xa^*\}\omega_1^4,$$

$$da=(-2aA+a^*B-e^*+g-2a^2)\omega_1^4,$$
$$[da^*\omega_1^4]=0,\ [de^*\omega_1^4]=0,\ [dg^*\omega_1^4]=0.$$

Линейчатые поверхности $\omega_1^4=0$ принадлежат поверхностям следующих классов:

$$\alpha_3^2=-\alpha_1^2(\alpha_1^1+\alpha_2^2),\ \alpha_4^1=-\alpha_2^1(\alpha_1^1+\alpha_2^2),$$
$$\alpha_3^4+\alpha_1^2=\alpha_3^3+\alpha_1^1=\alpha_2^2+\alpha_4^4=\alpha_4^3+\alpha_2^1=0,$$
$$\alpha_4^2=\alpha_3^1+\alpha_1^{1\,2}-\alpha_2^{2\,2},\ (\alpha_1^1-\alpha_2^2)^2-(\alpha_1^2-\alpha_2^1)^2=C.$$

и обладают следующими свойствами: 1) обе линии центров являются асимптотическими, 2) первая (вторая) проективная ось лежит в соприкасающейся плоскости первой (второй) линии центров. Линейчатые поверхности $\omega_1^3=0$ принадлежат поверхностям следующих классов:

$$\beta_1^1+\beta_4^4=\beta_2^2+\beta_3^3=\beta_1^2-\beta_2^1+\beta_4^3-\beta_3^4=0,\ (\beta_1^2-\beta_2^1)^2-(\beta_1^1-\beta_2^2)^2=C,$$
$$\beta_4^2-\beta_3^1=(\beta_1^1-\beta_2^2)(\beta_3^4-\beta_1^2),\ \beta_3^2-\beta_4^1=(\beta_1^2-\beta_2^1)(\beta_1^2-\beta_3^4).$$

III) $2a+A=0$, $A(a+b+A)\neq 0$. В этом случае конгруэнции определяются с произволом в две функции одного аргумента системой:

$$A=A^*=-2a,\ p+q=0,\ B+B^*=0,\ 2p^*=3a-b,$$
$$2q^*=a+b,\ b^*=a^*-2p$$
$$B^2=C+4a^2,\ x=4ap+(a+b)B,\ x^*=C+2pB+2a(a+b),$$
$$e=-2ap-\frac{1}{2}B(a+b),\ e^*=g+2a^2-\frac{1}{2}C,$$
$$dp=(-aB-2aa^*-g^*+e)\omega_1^4,$$
$$dg=\left\{4ap^2+3apB+pbB+\frac{1}{2}(a+b)C+2g^*(p+B)-a^*x\right\}\omega_1^4,$$
$$db=da=\left(a^*B+\frac{1}{2}C\right)\omega_1^4,\ [dg^*\omega_1^4]=0,\ [da^*\omega_1^4]=0.$$

Линейчатые поверхности $\omega_1^4=0$ принадлежат поверхностям следующих классов:

$$\alpha_2^2+\alpha_4^4=\alpha_1^1+\alpha_3^3=\alpha_1^2+\alpha_2^1=0,\ \alpha_4^3=\alpha_3^1+2\alpha_1^2,$$
$$(\alpha_1^1-\alpha_2^2)^2-4\alpha_1^{2\,2}=C,\ \alpha_4^2=\alpha_3^1+\alpha_1^{1\,2}-2\alpha_2^{1\,2}-\alpha_2^{2\,2}+2\alpha_2^1\alpha_3^4,$$
$$2\alpha_3^2=3\alpha_2^2\alpha_2^1+\alpha_1^1\alpha_2^1+\alpha_1^1\alpha_3^4-\alpha_2^2\alpha_3^4,$$
$$2\alpha_4^1=-3\alpha_2^1\alpha_2^2-\alpha_1^1\alpha_2^1-\alpha_1^1\alpha_3^4+\alpha_2^2\alpha_3^4,\ \alpha_2^1-\alpha_3^4=\mathrm{const}.$$

Линейчатые поверхности $\omega_1^3=0$ принадлежат поверхностям следующих классов:

$$\beta_1^1+\beta_4^4=\beta_2^2+\beta_3^3=0,\ (\beta_1^2-\beta_2^1)^2-(\beta_1^1-\beta_2^2)^2=C,\beta_1^2-\beta_2^1+\beta_4^3-\beta_3^4=0,$$
$$\beta_4^2-\beta_3^1=(\beta_1^1-\beta_2^2)(\beta_3^4-\beta_2^1)-2\beta_1^1(\beta_1^2-\beta_2^1),$$
$$\beta_3^2-\beta_4^1=C+(\beta_1^2-\beta_2^1)(\beta_2^1-\beta_3^4)-2\beta_4^4(\beta_1^1-\beta_2^2).$$

§ 4. Случай $A = B + B^* = 0$.

В этом случае из уравнений (5) и (9) получаем, что задача имеет следующие решения.

I) $a = b^* - a^* + p - q = 0$, $b \neq 0$. В этом случае искомые конгруэнции определяются с произволом в четыре постоянные системой:

$$A = A^* = a = 0,\ B^* + B = p^* + q^* = p + q = 0,$$

$$B^2 = C,\ 2a^* + B = 0,\ 2p^* + b = 0,\ x = bB,$$

$$b^*B = -x^* + \frac{1}{2}C,\ \ pB = -\frac{1}{2}C + \frac{1}{2}x^*,$$

$$e^* = g - \frac{1}{2}C,\ e = g^* = -\frac{1}{2}bB,\ dx^* = dg = db = 0.$$

Эти конгруэнции допускают двучленную группу проективных преобразований в себя и являются конгруэнциями W, а также конгруэнциями, для которых конгруэнции $\{A_1A_2\}$ и $\{A_3A_4\}$ принадлежат одному и тому же линейному комплексу. Линейчатые поверхности $\omega_1^4 = 0$ принадлежат поверхностям следующих классов:

$$\alpha_1^2 = \alpha_2^1 = 0,\ (\alpha_1^1 - \alpha_2^2)^2 = C,\ \alpha_4^3 - \alpha_3^4 = \alpha_4^4 + \alpha_2^2 = \alpha_1^1 + \alpha_3^3 = 0,$$

$$2\alpha_4^1 = \alpha_3^4(\alpha_2^2 - \alpha_1^1),\ 2\alpha_3^2 = \alpha_3^4(\alpha_1^1 - \alpha_2^2),\ \alpha_4^2 = \alpha_3^1 + \alpha_1^{1^2} - \alpha_1^{2^2}$$

и обладают следующим свойством: касательная к первой (второй) линии центров совпадает с первой (второй) проективно-центральной касательной $A_1A_3\,(A_2A_4)$, которая, следовательно, описывает торс с ребром возврата $A_1(A_2)$. Линейчатые поверхности $\omega_1^3 = 0$ принадлежат поверхностям следующих классов:

$$\beta_1^1 - \beta_2^2 = \beta_3^3 - \beta_4^4 = \beta_2^2 + \beta_4^4 = \beta_2^1 + \beta_1^2 = 0,\ 2\beta_1^2 + \beta_4^3 - \beta_3^4 = 0,$$

$$4\beta_1^{2^2} = C,\ 2\beta_3^4\beta_1^2 - \beta_3^2 + \beta_4^1 - 2\beta_1^{2^2} = 0,\ \beta_3^1 = 2\beta_1^2\beta_2^2,\ \beta_4^2 = -2\beta_1^2\beta_2^2.$$

II) $a = b = b^* - a^* + p - q = 0$. В этом случае искомые конгруэнции определяются с произволом в одну функцию одного аргумента системой:

$$A = A^* = x = a = b = p^* = q^* = e = 0,\ B + B^* = 0,$$

$$p + q = 0,\ 2a^* + B = 0,\ B^2 = C,$$

$$b^*B = -x^* + \frac{1}{2}C,\ 4p + B + 2b^* = 0,\ e^* = g - \frac{1}{2}C,$$

$$dx^* = -2g^*B\omega_1^4,\ dg = g^*\left(B + \frac{x^*}{B}\right)\omega_1^4,\ [dg^*\omega_1^4] = 0.$$

Полученные конгруэнции обладают следующими свойствами: 1) эти конгруэнции являются конгруэнциями W, 2) конгруэнции $\{A_1A_2\}$ и $\{A_3A_4\}$ принадлежат одному и тому же линейному комплексу, 3) конгруэнции $\{A_1A_3\}$ и $\{A_2A_4\}$ вырождаются в линейчатые поверхности, 4) принадлежат классу конгруэнций, для которых $I = 1$, $J_2 = J_2'$, $J_4 = J_4'$. Линейчатые поверхности $\omega_1^4 = 0$ принадлежат поверхностям следующих классов:

$$\alpha_3^2 = \alpha_4^1 = \alpha_4^3 = \alpha_3^4 = \alpha_1^2 = \alpha_2^1 = 0,\ \alpha_1^1 + \alpha_3^3 = \alpha_4^4 + \alpha_2^2 = 0,$$

$$(\alpha_1^1 - \alpha_2^2)^2 = C,\ \alpha_4^2 = \alpha_3^1 + \alpha_1^{1^2} - \alpha_2^{2^2}.$$

и обладают свойствами: 1) касательная к первой (второй) линии центров совпадает с первой (второй) проективно-центральной касательной $A_1A_3\,(A_2A_4)$, 2) первая и вторая линии центров являются асимптотическими, 3) первая (вторая) проективная ось лежит в соприкасающейся плоскости первой (второй) линии центров, 4) обе оси линейных комплексов, касательных к проективным осям, совпадают с касательными к линиям центров, 5) первая и вторая проективно-центральные касательные неподвижны, 6) эти поверхности являются E-поверхностями. Линейчатые поверхности $\omega_1^3 = 0$ принадлежат поверхностям следующих классов:

$$\beta_1^1 = \beta_2^2 = \beta_3^3 = \beta_4^4 = 0,\ (\beta_1^2 - \beta_2^1)^2 = C,$$

$$\beta_1^2 + \beta_2^1 = 0,\ \beta_4^3 - \beta_3^4 + \beta_1^2 - \beta_2^1 = 0,\ 2\beta_3^4(\beta_1^2 - \beta_2^1) +$$

$$+ 2\beta_3^2 - \beta_4^1 - (\beta_1^2 - \beta_2^1)^2 = 0,\ \beta_4^2 - \beta_3^1 = 0.$$

III) $a + b = b^* - a^* + p - q = 0$, $a \neq 0$. В этом случае искомые конгруэнции определяются с произволом в две функции одного аргумента системой:

$$A = A^* = x = 0,\ B + B^* = 0,\ \ p^* + q^* = 0,\ p + q = 0,$$

$$B^2 = C,\ 2a^* + B = 0,\ a + b = 0$$

$$p^* = 2a,\ 2pB = -C + x^*,\ b^*B = -x^* + \frac{1}{2}C,\ Be = -ax^*,$$

$$dx^* = -2(g^*B + 2ax^*)\omega_1^4,\ dg = \left\{\frac{ax^{*2}}{C} - ax^* + 2ae^* - \right.$$

$$\left. - 6ag + \frac{x^*g^*}{B} + g^*B + ax^*\right\}\omega_1^4,$$

$$da = \left(g - e^* - 2a^2 - \frac{1}{2}C\right)\omega_1^4,\ [de^*\omega_1^4] = 0,\ [dg^*\omega_1^4] = 0.$$

Полученные конгруэнции обладают следующими свойствами: 1) являются конгруэнциями W, 2) конгруэнции $\{A_1A_2\}$ и $\{A_3A_4\}$ принадлежат одному и тому же линейному комплексу, 3) являются конгруэнциями, для которых $I = 1$, $J_2 = J_2'$. Линейчатые поверхности $\omega_1^4 = 0$ принадлежат поверхностям следующих классов:

$$\alpha_4^3 - \alpha_3^4 = \alpha_1^2 - \alpha_2^1 = \alpha_3^2 - \alpha_4^1 = \alpha_2^2 + \alpha_4^4 = \alpha_1^1 + \alpha_3^3 = \alpha_2^1 + \alpha_3^4 = 0,$$

$$(\alpha_1^1 - \alpha_2^2)^2 = C,\ \alpha_4^1 = \alpha_3^4(\alpha_1^1 + \alpha_2^2),\ \alpha_4^2 = \alpha_3^1 + \alpha_1^{1^2} - \alpha_2^{2^2}$$

и обладают свойствами: 1) обе линии центров являются асимптотическими, 2) обе оси пучка линейных комплексов, касательных к проективным осям, совпадают с касательными к линиям центров, 3) обе оси пучка комплексов, касательных к проективно-центральным касательным, совпадают с рассматриваемым лучом конгруэнции. Линейчатые поверхности $\omega_1^3 = 0$ принадлежат поверхностям следующих классов:

$$\beta_1^1 - \beta_2^2 = \beta_3^3 - \beta_4^4 = \beta_4^2 - \beta_3^1 = \beta_2^2 + \beta_4^4 = 0,$$

$$\beta_1^2 + \beta_2^1 = 0,\ 4\beta_1^{2^2} = C,\ 2\beta_1^2 + \beta_4^3 - \beta_3^4 = 0,\ 2\beta_1^2\beta_3^4 + \beta_3^2 - \beta_4^1 - 2\beta_1^{2^2} = 0.$$

IV) $a = x = b^* - a^* + p - q = 0$. В этом случае искомые конгруэнции определяются с произволом в две постоянные системой:

$$A = A^* = a = x = x^* = e = b = g^* = p^* = q^*, = 0,\ B + B^* = 0,$$

$$p + q = 0,\ B^2 = C,\ a^* = \frac{1}{2} p - \frac{1}{4} B,$$

$$a^* + b^* = 0,\ e^* = g + \frac{1}{2} p^2 + \frac{1}{2} pB - \frac{3}{8} C,$$

$$g = \frac{3}{8}\left(p + \frac{3}{2} B \right)(B - 2p),\ dp = 0.$$

Полученные конгруэнции обладают следующими свойствами: 1) конгруэнция $\{A_1A_2\}$ является конгруэнцией W, 2) конгруэнции $\{A_1A_2\}$ и $\{A_3A_4\}$ образует пару T, 3) конгруэнции $\{A_1A_3\}$ и $\{A_2A_4\}$ вырождаются в линейчатые поверхности, 4) произвольная пара линейчатых поверхностей $\{F_1G_1\}$ и $\{F_2G_2\}$ расслояема, 5) фокусы конгруэнции прямых Лапласа совпадают с точками Лапласа, 6) конгруэнции $\{A_1A_2\}$ и $\{A_3A_4\}$ образуют конфигурацию Бианки [9], 7) у этих конгруэнций $I = 1$, $J_2 = J'_2 = 0$, $J_4 = J'_4$, $J_5 + J'_5 = 0$, $J_6 = J'_6$.

Линейчатые поверхности $\omega_1^4 = 0$ принадлежат поверхностям следующих классов:

$$\alpha_3^4 = \alpha_4^3 = \alpha_1^2 = \alpha_2^1 = \alpha_3^2 = \alpha_4^1 = 0,\ \alpha_4^2 - \alpha_4^1 = \alpha_1^1 + \alpha_3^3 = \alpha_2^2 + \alpha_4^4 = 0,$$

$$(\alpha_1^1 - \alpha_2^2)^2 = C,\ \alpha_3^1 = \frac{3}{8}\left(\frac{3}{2}\alpha_1^1 - \frac{1}{2}\alpha_2^2\right)(\alpha_1^1 - 3\alpha_2^2)$$

и обладают свойствами: 1) касательная к первой (второй) линии центров совпадает с первой (второй) проективно-центральной касательной, 2) касательная к геометрическому месту центров Лапласа $A_1(A_3)$ пересекает вторую (первую) проективную ось, 3) первая и вторая линии центров являются асимптотическими, 4) первая и вторая проективные оси описывают торсы, 5) обе оси пучка линейных комплексов, касательных к проективным осям, совпадают с касательными к линиям центров. Линейчатые поверхности $\omega_1^3 = 0$ принадлежат поверхностям следующих классов:

$$\beta_1^1 = \beta_2^2 = \beta_3^3 = \beta_4^4 = \beta_4^2 = \beta_3^1 = 0,\ \beta_3^2 - \beta_4^1 = \beta_1^2 + \beta_4^3 = \beta_2^1 + \beta_3^4 = 0,$$

$$\beta_4^1 = -\beta_2^1\beta_1^2,\ (\beta_1^2 - \beta_2^1)^2 = C.$$

V) $x = b^* - a^* + p - q = 0$, $a \neq 0$. В этом случае искомые конгруэнции определяются с произволом в две постоянные системой уравнений:

$$A = A^* = x = x^* = e = e^* = g = g^* = 0,\ B + B^* = 0,$$

$$p^* + q^* = p + q = 0,\ B^2 = C.$$

$$p^* = 2a,\ a + b = 0,\ a^* + b^* = 0;\ 4b^* = -2p + B,$$

$$a^2 = \frac{1}{4} p^2 + \frac{1}{4} pB - \frac{3}{16} C,\ dp = 0.$$

Полученные конгруэнции обладают следующими свойствами: 1) конгруэнция $\{A_1A_2\}$ является конгруэнцией W, 2) конгруэнция прямых Лапласа вырождается в неподвижную прямую, 3) конгруэнции

$\{A_1A_3\}$ и $\{A_2A_4\}$ образуют пару T, 4) произвольная пара линейчатых поверхностей $\{F_1G_1\}$ и $\{F_2G_2\}$ расслояема, 5) у этих конгруэнций $I=1$, $J_2 = J'_2 = J_5 = J'_5 = J_6 = J'_6 = 0$. Линейчатые поверхности $\omega_1^4 = 0$ принадлежат поверхностям следующих классов:

$$\alpha_3^2 = \alpha_4^1 = \alpha_4^2 = \alpha_3^1 = 0,\ \alpha_4^3 - \alpha_3^4 = \alpha_1^2 - \alpha_2^1 = \alpha_2^2 + \alpha_4^4 = \alpha_2^1 + \alpha_3^4 = 0,$$

$$\alpha_1^1 + \alpha_3^3 = 0,\ (\alpha_1^1 - \alpha_2^2)^2 = C,\ \alpha_1^{1\,2} = \frac{1}{4}\alpha_1^{1\,2} - \frac{3}{16} C.$$

Линейчатые поверхности $\omega_1^3 = 0$ принадлежат поверхностям следующих классов:

$$\beta_4^2 = \beta_3^1 = \beta_3^2 = \beta_4^1 = 0,\ \beta_1^1 - \beta_2^2 = \beta_3^3 - \beta_4^4 = \beta_2^2 +$$
$$+ \beta_4^4 = \beta_2^1 + \beta_3^4 = \beta_1^2 + \beta_4^3 = 0,\ (\beta_1^2 - \beta_2^1)^2 = C.$$

ЛИТЕРАТУРА

1. А. А. Лучинин. Об одном аналоге поверхностей вращения в проективной геометрии. Геометрический сборник, выпуск 1, Труды ТГУ, т. 160, 1962, 45—57.
2. А. А. Лучинин. Об одном аналоге поверхностей вращения в аффинной геометрии. Геометрический сборник, выпуск 1, Труды ТГУ, т. 160, 1962, 90-96.
3. А. А. Лучинин. Конгруэнции, расслаивающиеся на семейства линейчатых поверхностей с постоянными аффинными инвариантами. Геометрический сборник, вып. 2, Труды ТГУ, т. 161, 65—75.
4. А. А. Лучинин. Конгруэнции, расслаивающиеся на семейства линейчатых поверхностей W. Данный сборник.
5. Р. Н. Щербаков. О методе репеража подмногообразий. Данный сборник.
6. Р. Н. Щербаков. Проективная теория репера линейчатой поверхности, принадлежащей данной конгруэнции. Математический сборник, т. 46 (88):2, 1958, 159—194.
7. Ж. Фавар. Курс локальной дифференциальной геометрии. ИЛ., 1960, 116—123.
8. М. Б. Пергаменщиков. Конгруэнция, каждая линейчатая поверхность которой имеет общую касательную квадрику с линейчатой поверхностью соответствующих прямых Лапласа. Доклады научной конференции по теоретическим и прикладным вопросам математики и механики. Издательство Томского университета, Томск, 1960, 74—75.
9. С. П. Фиников. Теория пар конгруэнций, М., 1956.

ТРУДЫ ТОМСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА
имени В. В. КУЙБЫШЕВА

Том 168 Серия механико-математическая

В. С. МАЛАХОВСКИЙ

МНОГООБРАЗИЯ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ ЭЛЕМЕНТОВ В n-МЕРНОМ ПРОЕКТИВНОМ ПРОСТРАНСТВЕ

В работе дано инвариантное построение дифференциальной геометрии многообразия, образующим элементом которого является алгебраический элемент порядка $k = 2p$, т. е. невырожденная алгебраическая гиперповерхность четного порядка гиперплоскости P_{n-1} n-мерного проективного пространства P_n. Основное внимание уделено многообразиям квадратичных элементов ($k = 2$), являющихся непосредственным обобщением многообразий кривых второго порядка в P_3.

При исследовании погруженных многообразий используется терминология Г. Ф. Лаптева [1].

§ 1. Пространство алгебраических элементов

Рассмотрим проективное пространство P_n размерности $n \geqslant 3$, отнесенное к подвижному реперу $\{\bar{A}_1, \bar{A}_2, \ldots, \bar{A}_{n+1}\}$. Инфинитезимальное перемещение репера определяется уравнениями

$$d\bar{A}_\lambda = \omega_\lambda^\mu \bar{A}_\mu, \tag{1.1}$$

причем формы Пфаффа ω_λ^μ удовлетворяют структурным уравнениям Картана

$$D\omega_\lambda^\mu = [\omega_\lambda^\nu \omega_\nu^\mu]. \tag{1.2}$$

Здесь и в дальнейшем индексы $\lambda, \mu, \nu, \lambda_1, \ldots, \lambda_q$, принимают значения $1, 2, \ldots, n+1$, а индексы $\alpha, \beta, \gamma, \alpha_1, \beta_1, \ldots, \alpha_k, \beta_k$ — значения $1, 2, \ldots, n$.

Гиперповерхность пространства P_n порядка q определяется одним алгебраическим уравнением q-й степени:

$$a_{\lambda_1 \ldots \lambda_q} x^{\lambda_1} \cdots x^{\lambda_q} = 0. \tag{1.3}$$

Назовем гиперповерхность (1.3) невырожденной, если гипердетерминант [2] симметрической матрицы коэффициентов ее уравнения отличен от нуля. Так как при переходе к новому реперу $\{\bar{A}^*\}$ этот гипердетерминант лишь умножается на q-ю степень определителя матрицы коэффициентов формул перехода, то он является относительным инвариантом. Следовательно, понятие невырожденной гиперповерхности проективно инвариантно.

Будем считать в этой работе k — четным положительным числом и сформулируем следующее определение.

Определение 1. Алгебраическим элементом A_{n-2}^k порядка k называется невырожденная гиперповерхность порядка k гиперплоскости P_{n-1} пространства P_n, рассматриваемой как $(n-1)$-мерное проективное пространство.

Если вершины A_α репера расположить в гиперплоскости алгебраического элемента A_{n-2}^k, то его уравнения запишутся в виде:

$$a_{\alpha_1 \ldots \alpha_k} x^{\alpha_1} \cdots x^{\alpha_k} = 0, \quad x^{n+1} = 0. \tag{1.4}$$

Обозначим буквой a гипердетерминант матрицы $(a_{\alpha_1 \ldots \alpha_k})$. Так как $a \neq 0$, то пронормируем коэффициенты $a_{\alpha_1 \ldots \alpha_k}$ так, чтобы

$$a = 1. \tag{1.5}$$

Для системы величин $R_{\alpha_1 \ldots \alpha_q}^{\beta_1 \ldots \beta_q}$, определяемых q нижними и r верхними индексами, введем обозначение по формуле:

$$\nabla R_{\alpha_1 \ldots \alpha_q}^{\beta_1 \ldots \beta_r} = dR_{\alpha_1 \ldots \alpha_q}^{\beta_1 \ldots \beta_r} + R_{\alpha_1 \ldots \alpha_q}^{\gamma \beta_2 \ldots \beta_r} \omega_\gamma^{\beta_1} + \cdots + R_{\alpha_1 \ldots \alpha_q}^{\beta_1 \ldots \beta_{r-1} \gamma} \omega_\gamma^{\beta_r} - R_{\gamma \alpha_2 \ldots \alpha_q}^{\beta_1 \ldots \beta_r} \omega_{\alpha_1}^\gamma - \cdots - R_{\alpha_1 \ldots \alpha_{q-1} \gamma}^{\beta_1 \ldots \beta_r} \omega_{\alpha_q}^\gamma. \tag{1.6}$$

Если нижних или верхних индексов у величины R нет, то соответствующие члены в выражении ∇R отсутствуют.

Система уравнений смежного к (1.4) алгебраического элемента относительно репера $\{\bar{A}_\lambda\}$ записывается в виде (после отбрасывания членов второго порядка малости):

$$(a_{\alpha_1 \ldots \alpha_k} + \nabla a_{\alpha_1 \ldots \alpha_k} + 2k\Theta a_{\alpha_1 \ldots \alpha_k}) x^{\alpha_1} \cdots x^{\alpha_k} = 0,$$
$$x^{n+1} - \omega_\alpha x^\alpha = 0, \tag{1.7}$$

где Θ — некоторая форма Пфаффа, а

$$\omega_\alpha = \omega_\alpha^{n+1}. \tag{1.8}$$

Требуя, чтобы системы уравнений (1.4) и (1.7) определяли один и тот же алгебраический элемент и учитывая соотношение (1.5), мы находим систему дифференциальных уравнений инвариантности алгебраического элемента

$$\omega_\alpha = 0, \quad \Delta a_{\alpha_1 \ldots \alpha_k} = 0. \tag{1.9}$$

Здесь обозначено

$$\Delta a_{\alpha_1 \ldots \alpha_k} = \nabla a_{\alpha_1 \ldots \alpha_k} + \frac{k}{n} a_{\alpha_1 \ldots \alpha_k} \omega_\beta^\beta. \tag{1.10}$$

Из соотношения (1.3) вытекает тождество:

$$a^{\alpha_1 \ldots \alpha_k} \Delta a_{\alpha_1 \ldots \alpha_k} = 0, \tag{1.11}$$

где $a^{\alpha_1 \ldots \alpha_k}$ — алгебраические дополнения [2] элементов $a^{\alpha_1 \ldots \alpha_k}$ гипердетерминанта a. Следовательно, система (1.9) содержит

$$N_{nk} = n + C_{n+k-1}^k - 1$$

независимых уравнений и определяет N_{nk} независимых главных форм. Так как в силу (1.2)

$$D\omega_\alpha = [\omega_\alpha^\beta - \delta_\alpha^\beta \omega_{n+1}^{n+1}; \ \omega_\beta], \tag{1.12}$$

то система уравнений

$$\omega_a = 0 \tag{1.13}$$

вполне интегрируема. Она определяет стационарную подгруппу H_1 гиперплоскости алгебраического элемента (1.4).

Совокупность всех алгебраических элементов A^k_{n-2} пространства P_n мы назовем пространством алгебраических элементов, ассоциированным с P_n, и обозначим символом $R(A^k_{n-2})$. Размерность пространства $R(A^k_{n-2})$ очевидно равна N_{nk}.

Теорема 1. Среди всех пространств $R(A^k_{n-2})$ алгебраических элементов, ассоциированных с данным n-мерным проективным пространством P_n, пространство квадратичных элементов и только оно является транзитивным относительно фундаментальной группы G проективных преобразований пространства P_n.

Доказательство. Так как любые две гиперплоскости пространства P_n проективно эквивалентны и каждая из них содержит

$$S_{n,k} = C^k_{n+k-1} \tag{1.14}$$

параметрическую совокупность алгебраических элементов A^k_{n-2}, а группа G_1 проективных преобразований $(n-1)$-мерного проективного пространства P_{n-1} зависит от n^2-1 существенных параметров, то только при $S_{n,k} \leqslant n^2 - 1$ пространство $R(A^k_{n-2})$ является транзитивным. Если же $S_{n,k} > n^2 - 1$, то пространство интранзитивно. Имеем:

$$S_{n,2} < n^2 - 1; \; S_{n,4} > n^2 - 1.$$

Так как $S_{n,k+2} - S_{n,k} = C^{k+2}_{n+k} + C^{k+1}_{n+k-1} > 0$, то теорема доказана. Если $k > 2$, то пространство $R(A^k_{n-2})$ разбивается на системы интранзитивности, состоящие из всех эквивалентных друг другу (относительно проективной группы G) алгебраических элементов A^k_{n-2}. Доказанная теорема выделяет пространство $R(A^2_{n-2})$ квадратичных элементов из всех пространств $R(A^k_{n-2})$.

§ 2. Общая характеристика многообразий алгебраических элементов

Обозначим буквами $u^s (s = 1, \dots, N_{nk})$ независимые первые интегралы системы дифференциальных уравнений (1.9) инвариантности алгебраического элемента и занумеруем их так, чтобы величины $u^a (a = 1, \dots n)$ были первыми интегралами системы дифференциальных уравнений (1.13) (u^s — первичные параметры [1]). Если все параметры u^s считать функциями от m новых независимых параметров $t^1, \dots t^m$ $(1 \leqslant m < N_{nk})$, то мы получим m-мерное многообразие алгебраических элементов. Введем следующее определение.

Определение 2. Многообразием $(h, m, n)^k$ называется m-мерное многообразие алгебраических элементов порядка k в n-мерном проективном пространстве P_n, причем совокупность всех гиперплоскостей, содержащих алгебраические элементы данного многообразия, является h — параметрической.

Очевидно,

$$h \leqslant m, \; h \leqslant n, \; 1 \leqslant m < N_{nk}, \; n \geqslant 3. \tag{2.1}$$

Теорема 2. Многообразие $(h, h+p, n)^k$ расслаивается на ∞^h подмногообразий $(o, p, n)^k$, определенных вполне интегрируемой системой уравнений

$$\omega_a = 0. \tag{2.2}$$

Доказательство. Так как гиперплоскости алгебраических элементов A^k_{n-2} многообразия $(h, h+p, n)^k$ образуют h-параметрическое семейство, то система (2.1) содержит только h независимых уравнений. Первые интегралы этих уравнений можно включить в число независимых первичных параметров этого многообразия. При фиксации этих h параметров фиксируется гиперплоскость алгебраического элемента, причем в каждой гиперплоскости содержится p параметрическая совокупность алгебраических элементов многообразия $(h, h+p, n)^k$ (т. е. выделяется подмногообразие $(o, p, n)^k$). Теорема доказана.

Ниже исследуются многообразия $(h, h, n)^k$, в которых гиперплоскость каждого локального алгебраического элемента A^k_{n-2} содержит только один элемент.

§ 3. Основной внутренний объект многообразия $(h, h, n)^k$

Рассмотрим многообразие $(h, h, n)^k$ алгебраических элементов A^k_{n-2}. Среди форм Пфаффа ω_α на таком многообразии существует только h линейно независимых форм. Учитывая возможность изменения нумерации вершин A_λ репера, мы можем всегда считать линейно независимыми формы $\omega_1, \dots, \omega_h$. Наряду с ранее указанными значениями индексов, обозначенных греческими буквами, мы будем рассматривать еще два типа индексов: индексы i, j, p, q, принимающие значения $1, 2, \dots, h$, и индексы a, b, c, принимающие значения $h+1, h+2, \dots, n$.

Так как формы ω_a, $\Delta a_{\alpha_1 \dots \alpha_k}$ являются линейными комбинациями форм ω_i на многообразии $(h, h, n)^k$, то основная система дифференциальных уравнений этого многообразия записывается в виде:

$$\omega_a = a^i_a \omega_i, \; \Delta a_{\alpha_1 \dots \alpha_k} = b^i_{\alpha_1 \dots \alpha_k} \omega_i, \tag{3.1}$$

где величины $b^i_{\alpha_1 \dots \alpha_k}$ симметричны по любой паре нижних индексов и в силу (1.11) удовлетворяют тождествам

$$a^{\alpha_1 \dots \alpha_k} b^i_{\alpha_1 \dots \alpha_k} = 0. \tag{3.2}$$

Дифференцируя внешним образом уравнения (3.2), находим:

$$[\Delta a^i_a \omega_i] = 0, \quad [\Delta b^i_{\alpha_1 \dots \alpha_k} \omega_i] = 0, \tag{3.3}$$

где

$$\Delta a^i_a = \nabla a^i_a + a^j_a a^i_b \omega^b_j - \omega^i_a; \quad \Delta b^i_{\alpha_1 \dots \alpha_k} = \nabla b^i_{\alpha_1 \dots \alpha_k} +$$

$$+ b^i_{\alpha_1 \dots \alpha_k} \left(\frac{k}{n} \omega^\beta_\beta - \omega^{n+1}_{n+1} \right) + a^i_a b^j_{\alpha_1 \dots \alpha_k} \omega^a_j + \frac{k}{n} a_{\alpha_1 \dots \alpha_k} \left(\omega^i_{n+1} + a^i_a \omega^a_{n+1} \right) -$$

$$- \{ a_{\beta \alpha_2 \dots \alpha_k} (\delta^i_{\alpha_1} + \delta^a_{\alpha_1} a^i_a) + \cdots + a_{\alpha_1 \dots \alpha_{k-1} \beta} (\delta^i_{\alpha_k} + \delta^a_{\alpha_k} a^i_a) \} \omega^\beta_{n+1}. \tag{3.4}$$

Из (3.2) вытекает тождество

$$a^{\alpha_1 \dots \alpha_k} [\Delta b^i_{\alpha_1 \dots \alpha_k} \omega_i] \equiv 0. \tag{3.5}$$

Теорема 3. Многообразия $(h, h, n)^k$ существуют и определяются с произволом

$$S_{n,k,h} = C^k_{n+k-1} + n - h - 1 \tag{3.6}$$

функций h аргументов.

Доказательство. Из тождеств (3.2), (3.5) следует, что система (3.3) содержит $S_{n,k,h}$ независимых квадратичных уравнений и $hS_{n,k,h}$ независимых характеристических форм. Производя высечение цепи по формам базиса ω_i ([3], стр. 230) из уравнений (3.3) заключаем, что

$$r_1 = hS_{n,k,h};\ s_1 = s_2 = \cdots = s_{h-1} = S_{n,k,h}.$$

Следовательно,

$$s_h = r_1 - (s_1 + \cdots + s_{h-1}) = hS_{n,k,h} - (h-1)S_{n,k,h} = S_{n,k,h}.$$

Так как

$$N = Q = S_{n,k,h}\cdot C^2_{h+1},$$

то система—в инволюции и определяет многообразие $(h, h, n)^k$ с произволом $S_{n,k,h}$ функций h аргументов. Теорема доказана.

В частности, многообразия $(h, h, n)^2$ квадратичных элементов в P_n существуют с произволом $C^2_{n+1} + n - h - 1$ функций h аргументов; многообразия $(h, h, 3)^k$ невырожденных плоских алгебраических кривых четного порядка k в P_3 — с произволом $C^2_{k+1} - h + 2$ функций h аргументов.

Разрешая уравнения (3.3) по лемме Картана, получаем:

$$\Delta a^i_a = b^{ij}_a\omega_j,\ \Delta b^i_{\alpha_1\ldots\alpha_k} = b^{ij}_{\alpha_1\ldots\alpha_k}\omega_j, \tag{3.7}$$

где величины b^{ij}, $b^{ij}_{\alpha_1\ldots\alpha_k}$ симметричны по индексам, расположенным на одном уровне.

Система величин $\{a^i_a, a_{\alpha_1\ldots\alpha_k}, b^i_{\alpha_1\ldots\alpha_k}\}$ образует внутренний фундаментальный объект многообразия $(h, h, n)^k$ (см. [1], стр. 330). Система величин $\{a^i_a, b^{ij}_a, a_{\alpha_1\ldots\alpha_k}, b^i_{\alpha_1\ldots\alpha_k}, b^{ij}_{\alpha_1\ldots\alpha_k}\}$ образует продолженный внутренний фундаментальный объект этого многообразия.

Теорема 4. Внутренний фундаментальный объект $\{a^i_a, a_{\alpha_1\ldots\alpha_k}, b^i_{\alpha_1\ldots\alpha_k}\}$ является основным объектом многообразия $(h, h, n)^k$.

Доказательство. Из определения основного объекта следует, что нам нужно доказать алгебраическую разрешимость системы дифференциальных уравнений внутреннего локального геометрического объекта

$$\overset{\circ}{\Delta} a^i_a = 0,\ \overset{\circ}{\Delta} a_{\alpha_1\ldots\alpha_k} = 0,\ \overset{\circ}{\Delta} b^i_{\alpha_1\ldots\alpha_k} = 0 \tag{3.8}$$

относительно всех форм Пфаффа $\pi^\mu_\lambda - \delta^\mu_\lambda\pi^{n+1}_{n+1}$. Здесь $\overset{\circ}{\Delta}$ означает, что в соответствующем выражении все первичные параметры фиксированы. Так как система дифференциальных уравнений (3.8) вполне интегрируема, то начальные значения компонент внутреннего фундаментального объекта $\{a^i_a, a_{\alpha_1\ldots\alpha_k}, b^i_{\alpha_1\ldots\alpha_k}\}$ можно задавать произвольно с соблюдением тождеств (3.2). Выделим следующие пять случаев, исчерпывающих все возможности выбора h и k:

$$1)\ h > 1,\ k > 2;\quad 2)\ h = 1,\ k > 2;\quad 3)\ 1 < h < n,\quad k = 2;\quad 4)\ h = 1,\quad k = 2;\quad 5)\ h = n,\quad k = 2. \tag{3.9}$$

Для всех этих случаев начальные значения компонент a^i_a, $a_{\alpha_1\ldots\alpha_k}$ зададим одинаково: $a^i_a = 0$; $a_{\alpha\ldots\alpha} = 1$; $a_{\alpha_1\ldots\alpha_k} = 0$, если не все $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$ равны между собой.

Значения же компонент $b^i_{\alpha_1\ldots\alpha_k}$ будем задавать по разному для каждого случая.

1) $b^1_{12\ldots2} = 1$, а все остальные компоненты $b^i_{\alpha_1\ldots\alpha_k}$ равны нулю,

2) $b)^1_{1\ldots1} = 1$, $b^1_{n\ldots n} = -1$, а все остальные $b^1_{\alpha_1\ldots\alpha_k}$ равны нулю,

3) $b^1_{ii} = 1 + (i-1)q$, где $q = -\dfrac{2h + (n-h)(n+h+1)}{h(h-1)}$, $b^1_{aa} = a$, а все остальные $b^i_{\alpha\beta}$ равны нулю,

4) $b^1_{11} = -\dfrac{1}{2}(n-1)(n+2) = q$, $b^1_{aa} = a$, а все остальные $b^1_{\alpha\beta}$ равны нулю,

5) $b^s_{ss} = 1\ (s, t = 1, 2, \ldots, n-1)$, $b^\gamma_{\alpha\beta} = 0$, если $\alpha \neq \beta$;

$$b^s_{nn} = -1,\quad b^n_{\alpha\alpha} = 0,\quad b^t_{ss} = 0,\ \text{если } s \neq t.$$

Такие начальные значения компонент, очевидно, удовлетворяют тождествам (3.2). Из уравнений (3.8) в каждом из перечисленных случаев находим (по α не суммировать!):

$$1)\ \tilde{\pi}^\beta_\alpha = \tilde{\delta} a_{\alpha\beta\ldots\beta}\ \text{если } \alpha \neq \beta,\ k\tilde{\pi}^\alpha_\alpha = \tilde{\delta} a_{\alpha\ldots\alpha} +$$

$$+ (k-1)\tilde{\delta} a_{2\ldots2} - n\tilde{\delta} b^2_{1\ldots1} - k\tilde{\delta} b^1_{12\ldots2},\quad k(n-1)\tilde{\pi}^1_{n+1} = n\tilde{\delta} b^1_{1\ldots1},$$

$$k\tilde{\pi}^2_{n+1} = -n\tilde{\delta} b^2_{1\ldots1},\quad \tilde{\pi}^\alpha_{n+1} = \tilde{\delta} b^1_{1\alpha\ldots\alpha}\quad (\alpha = 3, 4, \ldots, n);$$

$$2)\ \tilde{\pi}^\beta_\alpha = \tilde{\delta} a_{\alpha\beta\ldots\beta},\ \text{если } \alpha \neq \beta,\ \tilde{\pi}^\alpha_\alpha = \tilde{\delta} a_{1\ldots1} - (n-1)\tilde{\delta} b^1_{2\ldots2} -$$

$$-\tilde{\delta} b^1_{1\ldots1} + \frac{1}{k}(\tilde{\delta} a_{\alpha\ldots\alpha} - \tilde{\delta} a_{1\ldots1}).$$

$$k\tilde{\pi}^1_{n+1} = -n\tilde{\delta} b^1_{2\ldots2},\ \tilde{\pi}^\alpha_{n+1} = \tilde{\delta} b^1_{1\alpha\ldots\alpha},\ \text{если } \alpha \neq 1;$$

$$3)\ \tilde{\pi}^i_a = \tilde{\delta} a^i_a,\quad \tilde{\pi}^a_i = \tilde{\delta} a_{ia} - \tilde{\delta} a^i_a,\quad (b-a)\tilde{\pi}^b_a = \tilde{\delta} b^1_{ab} -$$

$$-a\tilde{\delta} a_{ab},\ \text{если } a \neq b,\ (j-i)q\tilde{\pi}^j_i = \tilde{\delta} b^1_{ij} - [1 + (i-1)q]\tilde{\delta} a_{ij} -$$

$$-\delta^1_i\tilde{\delta} b^2_{2j} - \delta^1_j\tilde{\delta} b^2_{2i},\ \text{если } i \neq j,\ k\tilde{\pi}^2_{n+1} = -n\tilde{\delta} b^2_{11},$$

$$\tilde{\pi}^i_{n+1} = \tilde{\delta} b^2_{2i},\ \text{если } i \neq 2,\ \tilde{\pi}^a_{n+1} = \tilde{\delta} b^2_{2a},\ \tilde{\pi}^\alpha_\alpha = \frac{1}{2}(\tilde{\delta} a_{\alpha\alpha} - \tilde{\delta} a_{11}) +$$

$$+ 2\left(1 - \frac{1}{n}\right)\tilde{\delta} b^2_{21} - \tilde{\delta} b^1_{11};$$

$$4)\ \tilde{\pi}^1_a = \tilde{\delta} a^1_a,\ \tilde{\pi}^a_1 = \tilde{\delta} a_{1a} - \tilde{\delta} a^1_a,\ (b-a)\tilde{\pi}^b_a = \tilde{\delta} b^1_{ab} - a\tilde{\delta} a_{ab},$$

$$\text{если } a \neq b,\ \tilde{\pi}^a_{n+1} = \tilde{\delta} b^1_{1a} + (a-q)\tilde{\delta} a^1_a - a\tilde{\delta} a_{1a}.\ (n-1)(n-2)\tilde{\pi}^1_{n+1} =$$

$$= 2nA, \ \tilde{\pi}_\alpha^\alpha = \frac{1}{2}(\tilde{\delta} a_{\alpha\alpha} + \tilde{\delta} a_{11}) + \frac{4}{n-2}A - \frac{1}{q}\tilde{\delta} b_{11}^1,$$

где

$$A = \tilde{\delta} a_{11} + \frac{1}{2}\tilde{\delta} b_{22}^1 - \tilde{\delta} a_{22} - \frac{1}{q}\tilde{\delta} b_{11}^1;$$

$$5) \ \tilde{\pi}_s^t = \tilde{\delta} b_{ts}^t - \tilde{\delta} b_{ns}^n, \text{ если } s \neq t \ (s, t = 1, \ldots, n-1),$$

$$(n+4)\tilde{\pi}_s^n = 2\left(\tilde{\delta} a_{sn} - \tilde{\delta} b_{sn}^s - \frac{n}{2}\tilde{\delta} b_{ss}^n\right), \ (n+4)\tilde{\pi}_{n+1}^s =$$

$$= (n+2)\tilde{\delta} a_{sn} + 2\tilde{\delta} b_{sn}^s + n\tilde{\delta} b_{ss}^n, \ (n+4)\tilde{\pi}_{n+1}^n =$$

$$= n(\tilde{\delta} b_{sn}^s - \tilde{\delta} a_{sn} - 2\tilde{\delta} b_{ss}^n), \ \tilde{\pi}_{n+1}^s = \tilde{\delta} b_{ns}^n,$$

$$\tilde{\pi}_\alpha^\alpha = \frac{1}{2}(\tilde{\delta} a_{\alpha\alpha} + \tilde{\delta} a_{11}) - \tilde{\delta} b_{11}^1 - 2\left(1 - \frac{1}{n}\right)\tilde{\delta} b_{n1}^n.$$

Здесь символами $\tilde{\pi}_\lambda^\mu$, $\tilde{\delta} a_a^l$, $\tilde{\delta} a_{\alpha_1 \ldots \alpha_K}$, $\tilde{\delta} b_{\alpha_1 \ldots \alpha_K}^l$ обозначены начальные значения форм $\pi_\lambda^\mu - \delta_\lambda^\mu \pi_{n+1}^{n+1}$ и соответствующих дифференциалов при фиксированных первичных параметрах и по индексу α суммирование не производится.

Так как в каждом из пяти случаев все формы π_α^β, π_{n+1}^α найдены, то теорема доказана.

Следствие. Надлежащее задание компонент объекта $\{a_a^l, a_a^{lJ}, a_{\alpha_1 \ldots \alpha_K}, b_{\alpha_1 \ldots \alpha_K}^l, b_{\alpha_1 \ldots \alpha_K}^{lJ}\}$ определяет многообразие $(h, h, n)^k$ с точностью до констант (см. [1], стр. 347).

Рассмотрим систему величины $a_{\alpha_1 \ldots \alpha_k}$. Из уравнений (3.8) следует, что эта система образует k раз ковариантный симметрический тензор. Этот тензор является, очевидно, подобъектом основного объекта. Мы назовем его основным k раз ковариантным тензором многообразия $(h, h, n)^k$.

Если локальные алгебраические элементы многообразия—квадратичные, т. е. $k = 2$, то наряду с основным дважды ковариантным тензором $a_{\alpha\beta}$ можно ввести основной дважды контравариантный тензор $a^{\alpha\beta}$, образованный алгебраическими дополнениями элементов матрицы $(a_{\alpha\beta})$. Действительно, дифференцируя тождества

$$a_{\alpha\gamma} a^{\gamma\beta} = \delta_\alpha^\beta \tag{3.10}$$

с помощью уравнений (3.1), получаем:

$$\nabla a^{\alpha\beta} - \frac{2}{n} a^{\alpha\beta} \omega_\gamma^\gamma = - a^{\alpha\alpha_1} a^{\beta\beta_1} b_{\alpha_1\beta_1}^\gamma \omega_\gamma. \tag{3.11}$$

Следовательно, система величин $a^{\alpha\beta}$ образует симметрический дважды контравариантный тензор, взаимный по отношению к тензору $a_{\alpha\beta}$.

§ 4. Многообразия $(n, n, n)^k$

Рассмотрим многообразие $(n, n, n)^k$. Из результатов предыдущего параграфа следует, что многообразия $(n, n, n)^k$ существуют и определяются с произволом $C_{n+\kappa-1}^\kappa - 1$ функций n аргументов (теорема 3) и что внутренний фундаментальный объект $\{a_{\alpha_1 \ldots \alpha_K}, b_{\alpha_1 \ldots \alpha_K}^\beta\}$ многообразия $(n, n, n)^\kappa$ является основным (теорема 4). Исследуем некоторые геометрические объекты этого многообразия.

1) Линейный однородный объект $(a_{\alpha_1 \ldots \alpha_K}, b_{\alpha_1 \ldots \alpha_{K-1}})$.

Рассмотрим систему величин

$$b_{\alpha_1 \ldots \alpha_{K-1}} = b_{\alpha_1 \ldots \alpha_{K-1}\beta}^\beta. \tag{4.1}$$

Из формул (3.8) находим:

$$\overset{\circ}{\nabla} b_{\alpha_1 \ldots \alpha_{K-1}} + b_{\alpha_1 \ldots \alpha_{K-1}}\left(\frac{k}{n}\pi_\beta^\beta - \pi_{n+1}^{n+1}\right) - \frac{(n-1)(n+2)}{n} a_{\alpha_1 \ldots \alpha_{K-1}\beta}\pi_{n+1}^\beta = 0. \tag{4.2}$$

Следовательно, система величин $(a_{\alpha_1 \ldots \alpha_K}, b_{\alpha_1 \ldots \alpha_{K-1}})$ образует линейный однородный объект, охватывающий тензор $a_{\alpha_1 \ldots \alpha_K}$. Для многообразий $(n, n, n)^2$ квадратичных элементов этот объект имеет простую геометрическую характеристику. Он определяет в пространстве P_n инвариантный пучок гиперквадрик

$$a_{\alpha\beta} x^\alpha x^\beta + \frac{2n}{(n-1)(n+2)} b_\alpha x^\alpha x^{n+1} + \lambda (x^{n+1})^2 = 0, \tag{4.3}$$

содержащих локальный квадратичный элемент

$$a_{\alpha\beta} x^\alpha x^\beta = 0, \quad x^{n+1} = 0. \tag{4.4}$$

Действительно, если зафиксировать первичные параметры, то уравнение гиперквадрики, смежной к (4.3), запишется в виде:

$$a_{\alpha\beta} x^\alpha x^\beta + \frac{2n}{(n-1)(n+2)} b_\alpha x^\alpha x^{n+1} + \mu (x^{n+1})^2 = 0, \tag{4.5}$$

где

$$\mu = \lambda + \delta\lambda + 2\lambda\left(\frac{1}{n}\pi_\alpha^\alpha - \pi_{n+1}^{n+1}\right) - \frac{2n}{(n-1)(n+2)} b_\alpha \pi_{n+1}^\alpha.$$

2) Основной $(2k-1)$ раз ковариантный тензор $b_{\alpha_1 \ldots \alpha_{2K-1}}$.

Рассмотрим систему величин

$$b_{\alpha_1 \ldots \alpha_{2K-1}} = a_{\beta(\alpha_1 \ldots \alpha_{K-1}} b_{\alpha_K \ldots \alpha_{2K-1})}^\beta - \frac{k}{n+k} b_{(\alpha_1 \ldots \alpha_{K-1}} a_{\alpha_K \ldots \alpha_{2K-1})}, \tag{4.6}$$

где круглые скобки означают циклирование (т. е. над соответствующими индексами нужно сделать все неповторяющиеся циклические перестановки и просуммировать полученные слагаемые).

Из уравнений (3.8) и (4.2) следует, что

$$\overset{\circ}{\nabla} b_{\alpha_1 \ldots \alpha_{2K-1}} + b_{\alpha_1 \ldots \alpha_{2K-1}}\left(\frac{2k}{n}\pi_\beta^\beta - \pi_{n+1}^{n+1}\right) = 0. \tag{4.7}$$

Таким образом, система величин $b_{\alpha_1 \ldots \alpha_{2K-1}}$ образует симметрический $(2k-1)$ раз ковариантный тензор. Он определяет в гиперплоскости каждого локального алгебраического элемента инвариантную $(n-2)$-мерную алгебраическую поверхность порядка $2k-1$:

$$b_{\alpha_1 \ldots \alpha_{2K-1}} x^{\alpha_1} \cdots x^{\alpha_{2K-1}} = 0, \quad x^{n+1} = 0, \tag{4.8}$$

которую мы будем называть поверхностью, „присоединенной" к данному элементу.

Определение 3. Ассоциированным t-фокальным многообразием локального алгебраического элемента A^k_{n-2} многообразия $(n, n, n)^k$ называется пересечение данного алгебраического элемента с присоединенной к нему поверхностью (4.8). Из определения следует, что ассоциированное t-фокальное многообразие алгебраического элемента (4.4) определяется системой уравнений:

$$a_{\alpha_1\ldots\alpha_K} x^{\alpha_1}\cdots x^{\alpha_K} = 0, \quad b_{\alpha_1\ldots\alpha_{2K-1}} x^{\alpha_1}\cdots x^{\alpha_{2K-1}} = 0, \quad x^{n+1} = 0. \tag{4.9}$$

Оно образует $(n-3)$-мерную алгебраическую поверхность порядка $k(2k-1)$. При $n = 3$, т. е. для обычного трехмерного проективного пространства, ассоциированное t-фокальное многообразие вырождается в $k(2k-1)$ точек, которые мы будем называть t-фокальными точками плоской алгебраической кривой A^k_1.

Теорема 5. Основной трижды ковариантный тензор $b_{\alpha\beta\gamma}$ многообразия $(n, n, n)^2$ аполярен основному дважды контравариантному тензору $a^{\alpha\beta}$ этого многообразия.

Доказательство. Имеем

$$b_{\alpha\beta\gamma} = a_{\alpha_1(\alpha} b^{\alpha_1}_{\beta\gamma)} - \frac{2}{n+2} b_{(\alpha} a_{\beta\gamma)}. \tag{4.10}$$

Воспользовавшись тождествами

$$a^{\alpha\beta} b^{\gamma}_{\alpha\beta} = 0, \tag{4.11}$$

получаем:

$$a^{\alpha\beta} b_{\alpha\beta\gamma} = a^{\alpha\beta}\Big[a_{\alpha_1\alpha} b^{\alpha_1}_{\beta\gamma} + a_{\alpha_1\beta} b^{\alpha_1}_{\gamma\alpha} + a_{\alpha_1\gamma} b^{\alpha_1}_{\alpha\beta} - \tag{4.12}$$
$$- \frac{2}{n+2}(b_\alpha a_{\beta\gamma} + b_\beta a_{\gamma\alpha} + b_\gamma a_{\alpha\beta})\Big] = b_\gamma + b_\gamma - \frac{2}{n+2}(b_\gamma + b_\gamma + n b_\gamma) = 0.$$

Теорема доказана.

Если $b_{\alpha_1\ldots\alpha_{2k-1}} = 0$, то системы уравнений (4.4) и (4.9) становятся эквивалентными. Для многообразий $(n, n, n)^2$ квадратичных элементов справедливо и обратное предложение в силу условий (4.12). Следовательно, для того чтобы ассоциированное t-фокальное многообразие квадратичного элемента было неопределенным, необходимо и достаточно, чтобы основной трижды ковариантный тензор $b_{\alpha\beta\gamma}$ равнялся нулю.

Рассмотрим комплекс $(3, 3, 3)^k$ плоских невырожденных алгебраических кривых A^k_1 четного порядка k в трехмерном проективном пространстве P_3. Пусть

$$a_{\alpha_1\ldots\alpha_K} x^{\alpha_1}\cdots x^{\alpha_K} = 0, \quad x^4 = 0 - \tag{4.13}$$

локальная кривая этого многообразия. Линейная зависимость между первичными формами ω_α комплекса $(3, 3, 3)^k$, удовлетворяющая условию интегрируемости, выделяет двумерное подмногообразие кривых A^k_1 — конгруэнцию. Однако при исследовании комплекса $(3, 3, 3)^k$ целесообразно рассматривать и не вполне интегрируемые линейные зависимости между формами ω_α. По аналогии с линейчатой геометрией

(см. [4]) мы будем говорить, что всякая линейная зависимость между формами ω_α определяет, вообще говоря, неголономную конгруэнцию плоских алгебраических кривых A^k_1, принадлежащую комплексу $(3, 3, 3)^k$.

Пусть $N(q^\alpha, 0)$ — произвольная точка в плоскости $x^4 = 0$ кривой (4.13), принадлежащей комплексу $(3, 3, 3)^k$. Выделим среди всех перемещений точки N, те, которые лежат в плоскости кривой A^k_1. Тогда

$$(A_1 A_2 A_3 dN) = 0. \tag{4.14}$$

Отсюда получаем в общем случае не вполне интегрируемое уравнение

$$q^\alpha \omega_\alpha = 0, \tag{4.15}$$

определяющее неголономную конгруэнцию кривых A^k_1, соответствующую точке N. Фокусы этой конгруэнции определяются из системы уравнений (4.13) и уравнения

$$\begin{vmatrix} q^1 & q^2 & q^3 \\ x^1 & x^2 & x^3 \\ b^1_{\alpha_1\ldots\alpha_K} x^{\alpha_1}\cdots x^{\alpha_K} & b^2_{\alpha_1\ldots\alpha_K} x^{\alpha_1}\cdots x^{\alpha_K} & b^3_{\alpha_1\ldots\alpha_K} x^{\alpha_1}\cdots x^{\alpha_K} \end{vmatrix} = 0. \tag{4.16}$$

Рассмотрим на кривой (4.13) произвольную простую точку $M(y^\alpha, 0)$. Единичную точку E репера $\{\overline{A}_\lambda\}$ можно всегда выбрать так, чтобы

$$y^1 + y^2 + y^3 \neq 0. \tag{4.17}$$

Касательная к кривой (4.13) в точке $M(y^\alpha, 0)$ задается параметрическими уравнениями

$$\mathfrak{M} = \lambda \overline{M} + \mu \overline{N}, \tag{4.18}$$

где аналитическая точка $\overline{N}$ имеет координаты $(\Phi_3-\Phi_2, \Phi_1-\Phi_3, \Phi_2-\Phi_1)$. Здесь

$$\Phi_\alpha(y) = \frac{1}{k}\,\frac{\partial(a_{\alpha_1\ldots\alpha_K} y^{\alpha_1}\cdots y^{\alpha_K})}{\partial y^\alpha}.$$

Из (4.16) и (4.18) следует, что если точка $M(y^\alpha, 0)$ кривой (4.13) является фокусом неголономной конгруэнции, соответствующей точке N, то она является также фокусом неголономной конгруэнции, соответствующей произвольной точке $\mathfrak{M}$ касательной MN. Точки кривой, обладающие этим свойством, являются, очевидно, инвариантными и определяются из системы уравнений (4.13) и уравнения

$$\begin{vmatrix} z^1(x) & z^2(x) & z^3(x) \\ x^1 & x^2 & x^3 \\ \varphi^1(x) & \varphi^2(x) & \varphi^3(x) \end{vmatrix} = 0, \tag{4.19}$$

где положено

$$z^1(x) = \Phi_3(x) - \Phi_2(x), \quad z^2(x) = \Phi_1(x) - \Phi_3(x),$$
$$z^3(x) = \Phi_2(x) - \Phi_1(x), \quad \varphi^\beta(x) = b^\beta_{\alpha_1\ldots\alpha_K} x^{\alpha_1}\cdots x^{\alpha_K}. \tag{4.20}$$

Теорема 6. Для того чтобы точка M плоской алгебраической кривой A^k_1 комплекса $(3, 3, 3)^k$ была t-фокальной точкой этой кривой, необходимо и достаточно, чтобы она являлась фокусом неголономных конгруэнций кривых A_1^k, соответствующих всем точкам касательной с кривой A_1^k в точке M.

Доказательство. Уравнение (4.19) с учетом (4.13) приводится (после сокращения на $x^1+x^2+x^3\neq 0$) к виду:

$$\varphi^\alpha(x)\,\Phi_\alpha(x)=0. \tag{4.21}$$

Система уравнений (4.9), определяющая t-фокальные точки кривой, заменяется (после простых преобразований) следующей эквивалентной ей системой:

$$a_{\alpha_1\ldots\alpha_k}x^{\alpha_1}\cdots x^{\alpha_k}=0,\quad x^{n+1}=0,\quad \varphi^\alpha(x)\,\Phi_\alpha(x)=0. \tag{4.22}$$

Так как системы уравнений (4.22) и (4.13), (4.21) эквивалентны, то теорема доказана.

Заметим, что среди всех плоских алгебраических кривых порядка k коника и только она обладает тем свойством, что число ее фокальных точек конгруэнции $(2,2,3)^2$ совпадает с числом t-фокальных точек комплекса $(3,3,3)^2$.

§ 5. Основные геометрические объекты многообразия $(n,n,n)^2$ квадратичных элементов

В этом параграфе мы рассмотрим некоторые геометрические объекты, характерные только для многообразий $(n,n,n)^2$.

1. Квазитензор b^α. Инвариантная точка пространства.

Рассмотрим систему величин

$$b^\alpha=a^{\alpha\beta}b_\beta. \tag{5.1}$$

Так как

$$\delta b^\alpha=-b^\beta\pi_\beta^\alpha+b^\alpha\pi_{n+1}^{n+1}+\frac{n(n+1)-2}{n}\pi_{n+1}^\alpha, \tag{5.2}$$

то эта система величин образует квазитензор, определяющий в пространстве P_n инвариантную точку

$$\bar A=b^\alpha\bar A_\alpha+\frac{2-n(n+1)}{n}\bar A_{n+1} \tag{5.3}$$

и инвариантный гиперконус

$$a_{\alpha\beta}\left\{x^\alpha+\frac{nb^\alpha}{n(n+1)-2}x^{n+1}\right\}\left\{x^\beta+\frac{nb^\beta}{n(n+1)-2}x^{n+1}\right\}=0. \tag{5.4}$$

2. Дополнительный квадратичный элемент и основной вектор.

Система величин

$$b_{\alpha\beta}=a^{\alpha_1\beta_1}a^{\alpha_2\beta_2}b_{\alpha_1\alpha_2\alpha}b_{\beta_1\beta_2\beta} \tag{5.5}$$

определяет дважды ковариантный симметрический тензор, так как

$$\overset{\circ}{\nabla}b_{\alpha\beta}=-2\,b_{\alpha\beta}\left(\frac{2}{n}\pi_\gamma^\gamma-\pi_{n+1}^{n+1}\right). \tag{5.6}$$

Обозначим буквой b определитель матрицы $(b_{\alpha\beta})$. Так как

$$\delta b=2\,b\,(n\pi_{n+1}^{n+1}-\pi_\alpha^\alpha), \tag{5.7}$$

то b — относительный инвариант. Если

$$b\neq 0, \tag{5.8}$$

то уравнения

$$b_{\alpha\beta}x^\alpha x^\beta=0,\quad x^{n+1}=0 \tag{5.9}$$

определяют в гиперплоскости $x^{n+1}=0$ локального квадратичного элемента (4.4) невырожденную инвариантную гиперквадрику, т. е. квадратичный элемент, который мы назовем дополнительным. Совокупность всех таких элементов образует дополнительное многообразие $(n,n,n)^2_*$.

Рассмотрим систему величин

$$c^\alpha=a^{\alpha\alpha_1}a^{\beta\beta_1}a^{\gamma\gamma_1}b_{\alpha_1\beta_1\gamma_1}b_{\beta\gamma}. \tag{5.10}$$

Так как

$$\overset{\circ}{\nabla}c^\alpha=c^\alpha\left(3\pi_{n+1}^{n+1}-\frac{2}{n}\pi_\beta^\beta\right), \tag{5.11}$$

то эта система величин образует один раз контравариантный тензор, называемый основным вектором многообризия $(n,n,n)^2$. В гиперплоскости $x^{n+1}=0$ вектор c^α определяет инвариантную точку

$$\bar C=c^\alpha\bar A_\alpha \tag{5.12}$$

и инвариантный $(n-2)$-мерный конус

$$a_{\alpha\beta}(x^\alpha-c^\alpha)(x^\beta-c^\beta)=0,\quad x^{n+1}=0. \tag{5.13}$$

3. Относительные и абсолютные инварианты многообразия $(n,n,n)^2$.

Рассмотрим системы величин

$$c_0=a_{\alpha\beta}c^\alpha c^\beta,\ \ b_0=a^{\alpha\beta}b_{\alpha\beta},\ \ \tilde c_0=b_{\alpha\beta}c^\alpha c^\beta,\ \ \tilde c=b_{\alpha\beta\gamma}c^\alpha c^\beta c^\gamma. \tag{5.14}$$

Обозначим форму $\pi_{n+1}^{n+1}-\frac{1}{n}\pi_\alpha^\alpha$ буквой π. Тогда

$$\delta c_0=6\,c_0\pi,\ \ \delta b_0=2\,b_0\pi,\ \ \delta\tilde c_0=8\,\tilde c_0\pi,\ \ \delta\tilde c=10\,\tilde c\,\pi. \tag{5.15}$$

Следовательно, величины $c_0, b_0, \tilde c_0, \tilde c$ являются относительными инвариантами многообразия $(n,n,n)^2$. Если выполнено условие (5.8), то мы можем рассмотреть величины

$$C_0=\frac{c_0^n}{b^3},\ \ B_0=\frac{b_0^n}{b},\ \ \tilde C_0=\frac{\tilde c_0^n}{b^4},\ \ \tilde C=\frac{\tilde c^n}{b^5}. \tag{5.16}$$

Так как $\delta C_0=\delta B_0=\delta\tilde C_0=\delta\tilde C=0$, то эти величины абсолютно инвариантны.

Условие $c_0=0$ означает принадлежность инвариантной точки C локальному квадратичному элементу (4.4); условие $b_0=0$ означает аполярность квадратичных элементов (4.4) и (5.9), условие $\tilde c_0=0$ означает принадлежность точки C дополнительному квадратичному элементу (5.9); наконец, условие $\tilde c=0$ означает принадлежность точки C кубичной присоединенной поверхности (4.8).

§ 6. Отображение многообразия $(n, n, n)^2$ на регулярную гиперповерхность $(n+1)$-мерного тангенциального центропроективного пространства p_0^{n+1}

Включим рассматриваемое n-мерное проективное пространство P_n в некоторое $(n+1)$-мерное расширенное аффинное пространство $\mathfrak{a}_{n+1}$ так, чтобы пространство P_n являлось в нем несобственной гиперплоскостью. Отнесем $\mathfrak{a}_{n+1}$ к подвижному реперу, состоящему из аналитических точек $\overline{A}_\lambda^*$, принадлежащих P_n, и линейно независимой от них (не лежащей в P_n) аналитической точки $\overline{A}_0^*$. Инфинитезимальное перемещение такого репера определяется формулами

$$d\overline{A}_0^* = \tilde{\omega}_0^0 \overline{A}_0^* + \tilde{\omega}_0^\lambda \overline{A}_\lambda^*; \quad dA_\lambda^* = \tilde{\omega}_\lambda^\mu \overline{A}_\mu^* . \tag{6.1}$$

где $\tilde{\omega}_0^0$, $\tilde{\omega}_0^\lambda$ — некоторые формы Пфаффа.

По принципу двойственности расширенному аффинному пространству $\mathfrak{a}_{n+1}$ соответствует $(n+1)$-мерное центропроективное тангенциальное пространство p_0^{n+1} его гиперплоскостей. Несобственная гиперплоскость P_n пространства $\mathfrak{a}_{n+1}$ соответствует при этом центру a^0, пространства p_0^{n+1}.

Всякой гиперповерхности пространства p_0^{n+1} соответствует гиперсемейство гиперплоскостей пространства $\mathfrak{a}_{n+1}$, и наоборот.

Отнесем пространство p_0^{n+1} к аналитическому реперу $\{\overline{a}^0, \overline{a}^\lambda\}$ определяемому соотношениями:

$$\overline{a}^0 = -(\overline{A}_1^* \dots \overline{A}_{n+1}^*),\ \overline{a}^1 = (\overline{A}_0^* \overline{A}_2^* \dots \overline{A}_{n+1}^*), \dots,\ \overline{a}^{n+1} = (-1)^n (\overline{A}_0^* \dots \overline{A}_n^*). \tag{6.2}$$

Деривационные формулы этого репера имеют вид:

$$d\overline{a}^0 = \Omega_0^0 \overline{a}^0,\ d\overline{a}^\lambda = \Omega_0^\lambda \overline{a}^0 + \Omega_\mu^\lambda \overline{a}^\mu, \tag{6.3}$$

где

$$\Omega_0^0 = \Theta - \tilde{\omega}_0^0,\ \Omega_0^\lambda = -\tilde{\omega}_0^\lambda,\ \Omega_\lambda^\mu = \Theta \delta_\lambda^\mu - \omega_\lambda^\mu. \tag{6.4}$$

$$\Theta = d \ln (A_0^* \dots A_{n+1}^*).$$

Теорема 7. Дифференциальную геометрию n-мерного, многообразия $(n, n, n)^2$ квадратичных элементов пространства P_n можно рассматривать как дифференциальную геометрию соответствующей регулярной гиперповерхности S $(n+1)$-мерного тангенциального центропроективного пространства p_0^{n+1}, в которой исходное n-мерное точечное пространство P_n играет роль неподвижной точки.

Доказательство. Рассмотрим в $(n+1)$-мерном центропроективном пространстве p_0^{n+1} с центром P_n регулярную гиперповерхность S. Совместим вершину a^{n+1} с текущей точкой гиперповерхности S и расположим вершины a^α в соответствующей касательной гиперплоскости к этой гиперповерхности. Такое расположение вершин репера всегда возможно, так как если бы общая касательная гиперплоскость к гиперповерхности S проходила через центр a^0 пространства p_0^{n+1}, то гиперповерхность S была бы гиперконусом, который, как известно, не является регулярной гиперповерхностью. Замкнутая система дифференциальных уравнений гиперповерхности S имеет вид:

$$\Omega_\alpha^0 = 0,\ \Omega_0^{n+1} = 0,\ [\Omega_0^\alpha \omega_\alpha] = 0. \tag{6.5}$$

Продолжения этой системы приводят к уравнениям:

$$\Omega_0^\alpha = \tilde{a}^{\alpha\beta} \omega_\beta , \tag{6.6}$$

$$\Delta \tilde{a}^{\alpha\beta} = \Lambda^{\alpha\beta\gamma} \omega_\gamma , \tag{6.7}$$

где

$$\Delta \tilde{a}^{\alpha\beta} = \nabla \tilde{a}^{\alpha\beta} - \tilde{a}^{\alpha\beta} (\tilde{\omega}_0^0 + \omega_{n+1}^{n+1}) \tag{6.8}$$

и $\tilde{a}^{\alpha\beta}$, $\Lambda^{\alpha\beta\gamma}$ — симметричны по всем индексам. Обозначим буквой $\tilde{a}$ — определитель матрицы $(\tilde{a}^{\alpha\beta})$. Имеем:

$$d \ln \tilde{a} = -2 \omega_\gamma^\gamma + n (\tilde{\omega}_0^0 + \omega_{n+1}^{n+1}) + \tilde{a}_{\alpha\beta} \Lambda^{\alpha\beta\gamma} \omega_\gamma , \tag{6.9}$$

где $\tilde{a}_{\alpha\beta}$ — приведенные миноры определителя $\tilde{a}$, т. е.

$$\tilde{a}_{\alpha\gamma} \tilde{a}^{\gamma\beta} = \delta_\alpha^\beta . \tag{6.10}$$

Пронормируем аналитические точки $\overline{a}^0, \dots, \overline{a}^{n+1}$ так, чтобы

$$\tilde{a} = 1. \tag{6.11}$$

Тогда

$$\tilde{\omega}_0^0 + \omega_{n+1}^{n+1} = \frac{2}{n} \omega_\gamma^\gamma - \frac{1}{n} \tilde{a}_{\alpha\beta} \Lambda^{\alpha\beta\gamma} \omega_\gamma , \tag{6.12}$$

причем внешнее квадратичное уравнение, полученное дифференцированием уравнения (6.12), является следствием внешних квадратичных уравнений, полученных при замыкании уравнений (6.7). Дифференцируя тождества (6.10) с использованием уравнений (6.7) и (6.12), получаем:

$$\nabla \tilde{a}_{\alpha\beta} + \frac{2}{n} \omega_\gamma^\gamma \tilde{a}_{\alpha\beta} = \tilde{b}_{\alpha\beta}^\gamma \omega_\gamma , \tag{6.13}$$

где

$$\tilde{b}_{\alpha\beta}^\gamma = \left(\frac{1}{n} \tilde{a}_{\alpha\beta} \tilde{a}_{\alpha_1\beta_1} - \tilde{a}_{\alpha\alpha_1} \tilde{a}_{\beta\beta_1} \right) \Lambda^{\alpha_1\beta_1\gamma} . \tag{6.14}$$

Имеем:

$$b_{\alpha\beta}^\gamma = b_{\beta\alpha}^\gamma , \quad a^{\alpha\beta} \tilde{b}_{\alpha\beta}^\gamma = 0. \tag{6.15}$$

Система уравнений (6.13) совпадает с системой уравнений (3.1) при $k = 2$, $h = n$, если положить

$$\tilde{a}_{\alpha\beta} = a_{\alpha\beta},\ \tilde{b}_{\alpha\beta}^\gamma = b_{\alpha\beta}^\gamma .$$

Так как система уравнений (6.13), (6.12) эквивалентна системе (6.7), (6.12), то теорема доказана.

§ 7. Многообразия $(h, h, n)^k$ размерности $h < n$.

Пусть размерность h многообразия $(h, h, n)^k$ меньше размерности n пространства P_n, т. е.

$$1 \leqslant h < n. \tag{7.1}$$

Рассмотрим систему величин a^i_a. Из уравнений (3.8) вытекает, что эта система величин определяет геометрический объект. Уравнения

$$x^i + a^i_a x^a = 0, \quad x^{n+1} = 0 \tag{7.2}$$

определяют в гиперплоскости $x^{n+1} = 0$ локального алгебраического элемента (4.4) $(n-h-1)$-мерное линейное подпространство пространства P_n, которое мы назовем характеристическим. В частности, при $h = n - 1$ это подпространство вырождается в точку. Аналитические точки

$$\overline{M}_a = \overline{A}_a - a^i_a \overline{A}_i \tag{7.3}$$

являются, очевидно базисными аналитическими точками характеристического подпространства Помещая $(n-h)$ вершин репера в характеристическое подпространство, получим;

$$\omega_a = 0, \quad \omega^i_a = b^{ij}_a \omega_j, \tag{7.4}$$

причем системы величин b^{ij}_a и $a_{c_1 \ldots c_K}$ в этом случае определяют тензоры. Обозначим через a^* гипердетерминант матрицы $(a_{c_1 \ldots c_k})$. Так как

$$\delta a^* = ka^* \left[\pi^a_a - \frac{1}{n} (n-h) \pi^\alpha_\alpha \right] a^*, \tag{7.5}$$

то a^* — относительный инвариант. Для многообразий $(h, h, n)^2$ квадратичных элементов $a^* = 0$ тогда и только тогда, когда характеристическое подпространство пересекается со своим полярным подпространством относительно локального квадратичного элемента (4.4). Действительно, система дифференциальных уравнений для определения общих точек этих подпространств имеет вид:

$$x^i = 0, \quad x^{n+1} = 0, \quad a_{bc} x^b x^c = 0. \tag{7.6}$$

Используя частичную канонизацию репера, можно найти различные геометрические объекты многообразия $(h, h, n)^k$ размерности $h < n$ и выделить некоторые классы таких многообразий.

ЛИТЕРАТУРА

1. Лаптев Г. Ф. Дифференциальная геометрия погруженных многообразий. Труды Московского математического общества, т. 2, 275—383, ГИТТЛ, М., 1953.
2. Соколов Н. П. Пространственные матрицы и их приложения. ГИФМЛ, М., 1960.
3. Фиников С. П. Метод внешних форм Картана, ГИТТЛ, М.—Л., 1948.
4. Щербаков Р. Н. Эквиаффинно-инвариантные неголономные конгруэнции линейчатого комплекса, М., сб., т. 60 (102), № 2, стр. 131—156, 1963.

ТРУДЫ ТОМСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА имени В. В. КУЙБЫШЕВА

Том 168 Серия механико-математическая

В. С. МАЛАХОВСКИЙ

НЕВЫРОЖДЕННЫЕ КОНГРУЭНЦИИ КРИВЫХ ВТОРОГО ПОРЯДКА В ТРЕХМЕРНОМ ПРОЕКТИВНОМ ПРОСТРАНСТВЕ

Введение

Дифференциально-геометрическое исследование конгруэнций кривых второго порядка в трехмерном проективном пространсстве P_3 было начато А. Кавагучи [1]. Он рассмотрел произвольную конгруэнцию S_q коник с нелинейчатой огибающей поверхностью (M) плоскостей коник и показал, что она полностью определяется заданием трех фундаментальных тензоров g_{rs}, a_{rst}, q_{rs} $(r, s, t = 1,2)$ огибающей поверхности (M) и двух тензоров, характеризующих положение коники в касательной плоскости к (M) при выполнении условий интегрируемости и аполярности. Некоторые специальные классы конгруэнций коник в P_3 были исследованы Е. Лэйном [2], Бушин Су [3], В. В. Рыжковым [4], Н. Г. Тугановым [5], Ф. Баккесом [6] и автором [7 а, б, в, г, д, е, ж, з].

В работе дано инвариантное построение проективной теории невырожденных конгруэнций коник в P_3 с шестичленной стационарной подгруппой [8], построен канонический репер и исследованы некоторые классы конгруэнций. Основное внимание обращается не на огибающую поверхность (M), а на фокальные поверхности конгруэнции.

§ 1. Внутренний основной фундаментальный объект конгруэнции коник

Определение. Невырожденной конгруэнцией коник в трехмерном проективном пространстве P_3 называется конгруэнция нераспадающихся кривых второго порядка, обладающая следующими свойствами: 1) существуют, по крайней мере, две невырождающиеся фокальные поверхности S_i $(i = 1, 2)$ конгруэнции, 2) каждая из поверхностей S_i не является огибающей поверхностью плоскостей коник, 3) фокальные линии на поверхностях S_i не являются кониками конгруэнции и не соответствуют друг другу.

В дальнейшем мы будем рассматривать только невырожденные конгруэнции коник. Поместим вершины A_i тетраэдра $\{A_\alpha\}$ $(\alpha = 1, 2, 3, 4)$ в фокальные точки коники, описывающие поверхности S_i, вершину A_3 — в точку пересечения касательных к конике в фокусах A_i, вершину A_4 — в произвольную точку проективного пространства, не лежащую в плоскости коники.

Деривационные формулы репера $\{A_\alpha\}$ имеют вид:

$$dA_\alpha = \omega^\beta_\alpha A_\beta, \tag{1.1}$$

причем формы Пфаффа ω_α^β удовлетворяют уравнениям структуры

$$D\omega_\alpha^\beta = [\omega_\alpha^\gamma \omega_\gamma^\beta] \tag{1.2}$$

проективного пространства. В этой работе условимся считать, что греческие индексы принимают значения 1, 2, 3, 4, а латинские — 1, 2, причем всегда $i \neq j$ и по индексам i и j суммирование не производится.

Уравнения коники относительно этого репера записываются в виде:

$$(x^3)^2 - 2px^1x^2 = 0,\ x^4 = 0,\ p \neq 0. \tag{1.3}$$

Система уравнений, определяющая фокальные поверхности и фокальные семейства конгруэнции коник, записывается в виде:

$$\begin{gathered}(x^3)^2 - 2px^1x^2 = 0,\ x^4 = 0,\ x^\kappa\omega_\kappa + x^3\omega_3^4 = 0,\\ p(x^1)^2\omega_1^2 + p(x^2)^2\omega_2^1 + x^3[x^1(p\omega_3^2 - \omega_1^3) + x^2(p\omega_3^1 - \\ - \omega_2^3)] + (x^3)^2\Delta p = 0,\end{gathered} \tag{1.4}$$

где

$$\omega_i = \omega_i^4,\ \Delta p = \frac{1}{2}(\omega_\kappa^\kappa - 2\omega_3^3 - d\ln p). \tag{1.5}$$

Так как A_i — фокальные точки, то их координаты должны удовлетворять системе (1.4). Следовательно, между формами Пфаффа ω_i^j и ω_i существует линейная зависимость. Учитывая, что A_i не являются точками огибающей поверхности, т. е. $\omega_i \neq 0$, мы можем представить эту зависимость в виде:

$$\omega_i^j = \Gamma_i^{ji}\omega_i. \tag{1.6}$$

При фиксации независимых первичных параметров u и v конгруэнции коник фиксируются фокусы A_i и сама коника. Поэтому формы Пфаффа

$$\omega_i,\ \omega_i^j,\ \omega_i^3,\ \omega_3^i\ \omega_3^4,\ \Delta p \tag{1.7}$$

являются главными формами конгруэнции. Их число 10 соответствует тому, что коника в пространстве определяется 8 параметрами и для задания двух фиксированных точек (фокусов) на конике требуется два параметра. Уравнение $\omega_i = 0$ определяет фокальные линии поверхности (A_i). Так как фокальные линии $\omega_1 = 0$, $\omega_2 = 0$ не соответствуют друг другу, то

$$[\omega_1\omega_2] \neq 0, \tag{1.8}$$

и мы можем принять главные формы Пфаффа ω_i за первичные независимые формы конгруэнции коник. Остальные формы (1.7) линейно через них выражаются. Учитывая (1.6), получаем для определения конгруэнции следующую систему уравнений Пфаффа:

$$\begin{gathered}\omega_i^j = \Gamma_i^{ji}\omega_i,\ \omega_i^3 = \Gamma_i^{3\kappa}\omega_\kappa,\ \omega_3^i = \Gamma_3^{i\kappa}\omega_\kappa,\\ \omega_3^4 = \Gamma_3^{4\kappa}\omega_\kappa,\ \Delta p = a^\kappa\omega_\kappa.\end{gathered} \tag{1.9}$$

Продифференцировав внешним образом уравнения (1.9), будем иметь:

$$\begin{gathered}[\Delta\Gamma_i^{ji}\omega_i] = 0,\ [\Delta\Gamma_i^{3\kappa}\omega_\kappa] = 0,\ [\Delta\Gamma_3^{i\kappa}\omega_\kappa] = 0,\\ [\Delta\Gamma_3^{4\kappa}\omega_\kappa] = 0,\ [\Delta a^\kappa\omega_\kappa] = 0,\end{gathered} \tag{1.10}$$

где

$$\begin{gathered}\Delta\Gamma_i^{ji} = d\Gamma_i^{ji} - \Gamma_i^{ji}(\omega_4^4 - \omega_j^j) + \omega_4^j + \{\Gamma_i^{3i}\Gamma_3^{jj} - \Gamma_i^{3j}\Gamma_3^{ji} - \Gamma_i^{ji}(\Gamma_i^{ji} + \\ + \Gamma_i^{3i}\Gamma_3^{4j} - \Gamma_i^{3j}\Gamma_3^{4i})\}\,\omega_j,\\ \Delta\Gamma_i^{3i} = d\Gamma_i^{3i} - \Gamma_i^{3i}(\omega_4^4 - \omega_3^3) + \omega_4^3 + \{\Gamma_i^{3j}(\Gamma_j^{ij} + \Gamma_j^{3j}\Gamma_3^{4i} - \\ - \Gamma_j^{3i}\Gamma_3^{4j}) - \Gamma_i^{3i}(\Gamma_i^{ji} + \Gamma_i^{3i}\Gamma_3^{4j} - \Gamma_i^{3j}\Gamma_3^{4i})\,\omega_j,\\ \Delta\Gamma_i^{3j} = d\Gamma_i^{3j} - \Gamma_i^{3j}(\omega_i^i - \omega_j^j - \omega_3^3 + \omega_4^4),\\ \Delta\Gamma_3^{ii} = d\Gamma_3^{ii} - \Gamma_3^{ii}(\omega_3^3 + \omega_4^4 - 2\omega_i^i) + \Gamma_3^{4i}\omega_4^i + \{\Gamma_3^{ij}(\Gamma_j^{ij} + \Gamma_j^{3j}\Gamma_3^{4i} - \\ - \Gamma_j^{3i}\Gamma_3^{4j}) - \Gamma_3^{ii}(\Gamma_i^{ji} + \Gamma_i^{3i}\Gamma_3^{4j} - \Gamma_i^{3j}\Gamma_3^{4i}) + \Gamma_3^{ji}\Gamma_j^{ij}\}\,\omega_j,\\ \Delta\Gamma_3^{ij} = d\Gamma_3^{ij} - \Gamma_3^{ij}(\omega_3^3 + \omega_4^4 - \omega_i^i - \omega_j^j) + \Gamma_3^{4j}\omega_4^i,\\ \Delta\Gamma_3^{4i} = d\Gamma_3^{4i} - \Gamma_3^{4i}(\omega_3^3 - \omega_i^i) - \{\Gamma_3^{4i}(\Gamma_i^{ji} + \Gamma_i^{3i}\Gamma_3^{4j} - \Gamma_i^{3j}\Gamma_3^{4i}) + \Gamma_3^{ij}\}\,\omega_j,\\ \Delta a^i = da^i - a^i(\omega_4^4 - \omega_i^i) + \frac{1}{2}\omega_4^i - \Gamma_3^{4i}\omega_4^3 + \\ + \left\{\frac{3}{2}(\Gamma_i^{3i}\Gamma_3^{ij} - \Gamma_i^{3j}\Gamma_3^{ii}) - a^i(\Gamma_i^{ji} + \Gamma_i^{3i}\Gamma_3^{4j} - \Gamma_i^{3j}\Gamma_3^{4i})\right\}\omega_j.\end{gathered} \tag{1.11}$$

Замкнутая система (1.9), (1.10) — в инволюции и определяет невырожденные конгруэнции коник с произволом шести функций двух аргументов [5б]. Разрешаем квадратичные уравнения (1.10) по лемме Картана:

$$\begin{gathered}\Delta\Gamma_i^{ji} = \Gamma_i^{jii}\omega_i,\ \Delta\Gamma_i^{3\kappa} = \Gamma_i^{3\kappa p}\omega_p,\ \Delta\Gamma_3^{i\kappa} = \Gamma_3^{i\kappa p}\omega_p,\\ \Delta\Gamma_3^{4\kappa} = \Gamma_3^{4\kappa p}\omega_p,\ \Delta a^\kappa = a^{\kappa p}\omega_p.\end{gathered} \tag{1.12}$$

Система уравнений (1.9), (1.12) является системой дифференциальных уравнений внутреннего фундаментального объекта $\Gamma_1 = \{\Gamma_i^{ji},\ \Gamma_i^{3\kappa};\ \Gamma_3^{i\kappa},\ \Gamma_3^{4\kappa},\ p,\ a^i\}$ конгруэнции коник. Система величины $\Gamma_2 = \{\Gamma_1;\ \Gamma_i^{jii},\ \Gamma_i^{3\kappa p},\ \Gamma_3^{i\kappa p},\ \Gamma_3^{4\kappa p},\ a^{\kappa p}\}$ образует продолженный внутренний фундаментальный объект.

Теорема 1. Система дифференциальных уравнений (1.9), (1.12) алгебраически разрешима относительно всех форм Пфаффа $\bar\omega_\alpha^\beta = \omega_\alpha^\beta - \delta_\alpha^\beta\omega_4^4$.

Доказательство. Так как система уравнений (1.9), (1.12) — в инволюции, то для доказательства теоремы достаточно установить возможность разрешения этих уравнений относительно $\bar\omega_\alpha^\beta$ для произвольных начальных значений компонент объекта Γ_2.

Положим:

$$\begin{gathered}p_0 = (\Gamma_i^{3j})_0 = (\Gamma_1^{31})_0 = (\Gamma_3^{4ii})_0 = 1,\ (\Gamma_i^{ji})_0 = (\Gamma_2^{32})_0 = a_0^\kappa = \\ = (\Gamma_3^{i\kappa})_0 = (\Gamma_3^{4\kappa})_0 = (\Gamma_i^{jii})_0 = (\Gamma_i^{3\kappa p})_0 = (\Gamma_3^{i\kappa p})_0 = (\Gamma_3^{4ij})_0 = a_0^{\kappa p} = 0.\end{gathered} \tag{1.13}$$

Из уравнений (1.12) и $\Delta p = a^k\omega_k$ находим:

$$\begin{gathered}\bar\omega_p = (d\Gamma_3^{4p})_0,\ \bar\omega_4^i = -(d\Gamma_j^{ij})_0,\ \bar\omega_4^3 = (d\Gamma_1^{31})_0,\\ \bar\omega_1^1 = \frac{1}{2}\{(d\ln p)_0 - (d\Gamma_2^{31})_0\},\quad \bar\omega_2^2 = \frac{1}{2}\{(d\ln p)_0 - (d\Gamma_1^{32})_0\},\end{gathered}$$

$$\overline{\omega}_3^3 = -\frac{1}{4}\{(d\Gamma_1^{32})_0 + (d\Gamma_2^{31})_0\}. \tag{1.14}$$

Подставляя найденные значения $\overline{\omega}_p$ в (1.9), убеждаемся, что все 15 форм $\overline{\omega}_\alpha^3$ алгебраически разрешимы относительно компонент объекта Γ_1 и их дифференциалов. Теорема доказана.

Следствие. Внутренний продолженный фундаментальный объект конгруэнции коник является полным ([8], стр. 348).

§ 2. Относительные и абсолютные инварианты

Для выделения подобъектов внутреннего фундаментального объекта Γ_1 запишем систему уравнений (1.9), (1.12) при фиксированных независимых первичных параметрах.

$$\begin{gathered}
\pi_i^j = \pi_i^3 = \pi_3^i = \pi_3^4 = 0, \ \delta \ln p = \pi_\kappa^\kappa - 2\pi_3^3, \\
\delta\Gamma_i^{jl} = \Gamma_i^{jl}(\pi_4^4 - \pi_j^j) - \pi_4^j, \quad \delta\Gamma_i^{3l} = \Gamma_i^{3l}(\pi_4^4 - \pi_3^3) - \pi_4^3, \\
\delta\Gamma_i^{3j} = \Gamma_i^{3j}(\pi_i^i - \pi_j^j - \pi_3^3 + \pi_4^4), \quad \delta\Gamma_3^{4l} = \Gamma_3^{4l}(\pi_3^3 - \pi_i^i), \\
\delta\Gamma_3^{ll} = \Gamma_3^{ll}(\pi_3^3 + \pi_4^4 - 2\pi_i^i) - \Gamma_3^{4l}\pi_4^i, \\
\delta\Gamma_3^{ij} = \Gamma_3^{ij}(\pi_3^3 + \pi_4^4 - \pi_i^i - \pi_j^j) - \Gamma_3^{4l}\pi_4^i, \\
\delta a^i = a^i(\pi_4^4 - \pi_i^i) - \frac{1}{2}\pi_4^i + \Gamma_3^{4l}\pi_4^3.
\end{gathered} \tag{2.1}$$

Из этих уравнений непосредственно заключаем, что величины p, Γ_i^{3j}, Γ_3^{4l} являются относительными инвариантами, причем, в силу невырожденности коники и фокальных поверхностей (A_i)

$$p \neq 0; \quad \Gamma_i^{3j} \neq 0. \tag{2.2}$$

Так как огибающая поверхность (M) определяется формулой

$$M = A_3 - \Gamma_3^{4\kappa}A_\kappa, \tag{2.3}$$

то условие $\Gamma_3^{4l} = 0$ выделяет конгруэнции, характеризующиеся тем, что фокальная касательная A_jA_3 поверхности (A_j) содержит точку M огибающей поверхности.

Используя уравнения (2.1), убеждаемся, что величины

$$\begin{gathered}
a = \frac{1}{4}(\Gamma_i^{3i} - \Gamma_j^{3j})^2, b = \frac{1}{2}(\Gamma_1^{31} - \Gamma_2^{32}), \ b_i = \Gamma_3^{jj} - \Gamma_i^{jl}\Gamma_3^{4j}, \\
e_i = \Gamma_3^{jl} - \Gamma_i^{jl}\Gamma_3^{4l}, \ e_i = \Gamma_3^{jj}\Gamma_3^{4i} - \Gamma_3^{jl}\Gamma_3^{4j}, \ m_i = pb_i - \Gamma_i^{3j}
\end{gathered} \tag{2.4}$$

являются относительными инвариантами. Условие $a = 0$ (или эквивалентное ему условие $b = 0$) характеризует конгруэнции, у которых касательные к линиям $\omega_j = 0$ на поверхностях (A_i) попарно пересекаются. Условие $b_i = 0$ характеризует конгруэнции с асимптотическими фокальными линиями $\omega_i = 0$ на поверхности (A_i). Условие $c_i = 0$ при $b_i \neq 0$ характеризует конгруэнции коник, у которых торсы прямолинейной конгруэнции (A_iA_3) фокальных касательных поверхности (A_i) соответствуют фокальной сети $\omega_1\omega_2 = 0$. Условие $e_i = 0$ при $b_i \neq 0$ характеризует конгруэнции коник, у которых поверхности (A_i) и (A_3)

являются фокальными поверхностями прямолинейной конгруэнции фокальных касательных A_iA_3. Условие $m_i = 0$ характеризует конгруэнции коник со сдвоенной фокальной поверхностью (A_i).

С помощью относительных инвариантов p, Γ_i^{3j}, Γ_3^{4l} и (2.4) можно получить различные абсолютные инварианты. К их числу относятся величины:

$$\begin{gathered}
A = \frac{a}{\Gamma_1^{32}\Gamma_2^{31}}, \quad B = 2p\Gamma_3^{41}\Gamma_3^{42}, \quad C_i = \frac{\Gamma_i^{3j}\Gamma_3^{4l}}{\Gamma_j^{3l}\Gamma_3^{4j}}, \\
D_i = \frac{b_i\Gamma_3^{4l}}{e_i}, \quad E = -\frac{e_2\Gamma_3^{42}}{e_1\Gamma_3^{41}}, \quad K = \frac{\Gamma_3^{42}(b\Gamma_3^{41} + \Gamma_2^{31}\Gamma_3^{42})}{\Gamma_3^{41}(\Gamma_1^{32}\Gamma_3^{41} - b\Gamma_3^{42})}.
\end{gathered} \tag{2.5}$$

Эти абсолютные инварианты характеризуются геометрически через сложные отношения следующим образом.

$$\begin{gathered}
A = -\frac{[1 + (A_1A_2;\ F_1F_2)]^2}{4(A_1A_2;\ F_1F_2)}, \quad B = (A_iM_i;\ N_iM), \\
D_i = (A_iA_3;\ R_iM_j), \quad C_i = -\frac{(PQ_1;\ A_3P_1)}{(PQ_2;\ A_3P_2)}, \\
E = (A_1A_2;\ M_3R), \quad K = (A_3P;\ Q_1Q_2).
\end{gathered} \tag{2.6}$$

Здесь

F_i — фокусы луча A_1A_2 прямолинейной конгруэнции (A_1A_2),
M — точка огибающей поверхности (M) плоскостей коник,
M_i — точка пересечения прямой A_iM с фокальной касательной A_jA_3,
N_i — вторая точка пересечения прямой A_iM с коникой,
R_i — второй фокус луча A_iA_3 конгруэнции фокальных касательных поверхности (A_i),
P_i — точка пересечения касательной к линии $\omega_j = 0$ на поверхности (A_i) с касательной плоскостью к поверхности (A_j),
P — точка, делящая гармонически вместе с A_3 точки P_i,
Q_i — точка пересечения касательной к линии $\omega_3^4 = 0$ на поверхности (A_i) с касательной плоскостью к поверхности (A_j),
M_3 — точка пересечения прямой A_3M с фокальной прямой A_1A_2.
R — точка пересечения фокальной прямой A_1A_2 с касательной плоскостью к поверхности (A_3).

Замечание. Линия $\omega_3^4 = 0$ на поверхности (A_3) характеризуется тем, что ее касательная лежит в плоскости коники.

Из геометрической характеристики абсолютного инварианта B мы получаем равенство

$$(A_1M_1;\ N_1M) = (A_2M_2;\ N_2M), \tag{2.7}$$

справедливое для общей невырожденной конгруэнции коник. Для абсолютного инварианта A существует другая характеристика:

$$A = -\frac{1}{(PQ_1;\ A_3P_1)\cdot(PQ_2;\ A_3P_2)}. \tag{2.8}$$

Следовательно, в общем случае справедливо равенство:

$$4(A_1A_2;\ F_1F_2) = (PQ_1;\ A_3P_1)(PQ_2;\ A_3P_2)[1 + (A_1A_2;\ F_1F_2)]^2. \tag{2,9}$$

§ 3. Канонический репер невырожденной конгруэнции коник

Анализируя систему (2.1), легко убедиться, что для всякой невырожденной конгруэнции коник можно осуществить следующую фиксацию репера:

$$\Gamma_i^{ji} = 0, \quad \Gamma_i^{3j} = 1, \quad \Gamma_\kappa^{3\kappa} = 0, \ p = 1. \tag{3.1}$$

Если учесть еще условие эквипроективности

$$(A_1A_2A_3A_4) = 1, \tag{3.2}$$

то все вторичные параметры оказываются зафиксированными, а репер $\{A_\alpha\}$ — каноническим. Деривационные формулы (1.1) канонического репера имеют вид:

$$\begin{gathered} dA_i = \Gamma_i^{i\kappa}\omega_\kappa A_i + (\Gamma_i^{3i}\omega_i + \omega_{ji}) A_3 + \omega_i A_4, \\ dA_3 = \Gamma_3^{\alpha\kappa}\omega_\kappa A_\alpha, \ dA_4 = \Gamma_4^{\alpha\kappa}\omega_\kappa A_\alpha, \end{gathered} \tag{3.3}$$

причем

$$\begin{gathered} \Gamma_\alpha^{\alpha i} = 0, \quad \Gamma_\kappa^{3\kappa} = 0, \quad \Gamma_4^{ii} = \Gamma_3^{ij} + \Gamma_i^{3i}\Gamma_3^{ii}, \\ d\Gamma_1^{31} = b^1\omega_1 - b^2\omega_2, \end{gathered} \tag{3.4}$$

где

$$b^i = \Gamma_4^{3i} - \{1 + (\Gamma_i^{3i})^2\}\Gamma_3^{4i} - 2(\Gamma_i^{ij} + \Gamma_3^{3j}) - \Gamma_i^{3i}(\Gamma_i^{ii} + \Gamma_j^{ji} + 2\Gamma_3^{3i}). \tag{3.5}$$

Уравнения структуры (1.2) приводят к следующей системе внешних квадратичных уравнений:

$$\begin{gathered} [db^1\omega_1] - [db^2\omega_2] + m[\omega_1\omega_2] = 0, \\ [d\Gamma_i^{i\kappa}\omega_\kappa] + m_i^i[\omega_i\omega_j] = 0, \quad [d\Gamma_3^{i\kappa}\omega_\kappa] + m_3^i[\omega_i\omega_j] = 0, \\ [d\Gamma_3^{3\kappa}\omega_\kappa] + m_3^3[\omega_1\omega_2] = 0, \ [d\Gamma_3^{4\kappa}\omega_\kappa] + m_3^4[\omega_1\omega_2] = 0, \\ [d\Gamma_4^{i\kappa}\omega_\kappa] + m_4^i[\omega_i\omega_j] = 0, \ [d\Gamma_4^{3\kappa}\omega_\kappa] + m_4^3[\omega_1\omega_2] = 0. \end{gathered} \tag{3.6}$$

Здесь

$$\begin{gathered} m = b^1(\Gamma_1^{31}\Gamma_3^{42} - \Gamma_3^{41} - 2\Gamma_1^{12} - \Gamma_2^{22} - \Gamma_3^{32}) - b^1(\Gamma_1^{31}\Gamma_3^{41} + \Gamma_3^{42} + \\ + 2\Gamma_2^{21} + \Gamma_1^{11} + \Gamma_3^{31}), \\ m_i^i = \Gamma_i^{ij}(\Gamma_3^{4j} + \Gamma_3^{4i}\Gamma_i^{3i} + 2\Gamma_j^{ji} - \Gamma_i^{ii} + \Gamma_3^{3i}) - \Gamma_i^{ii}(\Gamma_3^{4i} + \Gamma_3^{4j}\Gamma_j^{3j} + \\ + \Gamma_j^{jj} + \Gamma_3^{3j}) + \Gamma_3^{ii} - \Gamma_4^{ij} - \Gamma_i^{3i}\Gamma_3^{ij}, \\ m_3^i = \Gamma_3^{ij}(2\Gamma_3^{4j} + \Gamma_3^{4i}\Gamma_i^{3i} + 2\Gamma_j^{ji} + 2\Gamma_i^{ii}) - \Gamma_3^{ii}(\Gamma_3^{4i} + 2\Gamma_3^{4j}\Gamma_j^{3j} + \\ + \Gamma_j^{jj} + 3\Gamma_i^{ij}) - \Gamma_3^{4i}\Gamma_4^{ij}, \\ m_3^3 = \Gamma_3^{31}(\Gamma_1^{31}\Gamma_3^{42} - \Gamma_3^{41} - 2\Gamma_1^{12} - \Gamma_2^{22}) + \Gamma_3^{32}(\Gamma_3^{42} + \Gamma_1^{31}\Gamma_3^{41} + \\ + \Gamma_1^{11} + 2\Gamma_2^{21}) - \Gamma_3^{11} + \Gamma_3^{22} + \Gamma_1^{31}(\Gamma_3^{12} + \Gamma_3^{21}) + \Gamma_3^{42}\Gamma_4^{31} - \Gamma_3^{41}\Gamma_4^{32}, \\ m_3^4 = \Gamma_3^{41}(2\Gamma_1^{31}\Gamma_3^{42} - \Gamma_3^{41} - \Gamma_1^{12} + \Gamma_3^{32}) + \Gamma_3^{42}(\Gamma_3^{42} + \Gamma_2^{21} - \Gamma_3^{31}) + \Gamma_3^{12} - \Gamma_3^{21}, \\ m_4^i = \Gamma_4^{ij}(\Gamma_3^{4j} + \Gamma_3^{4i}\Gamma_i^{3i} + 3\Gamma_j^{ji} + 3\Gamma_i^{ii} + 2\Gamma_3^{3i}) - \Gamma_4^{ii}(\Gamma_3^{4i} + \\ + \Gamma_3^{4j}\Gamma_j^{3j} + 4\Gamma_i^{ij} + 2\Gamma_j^{jj} + 2\Gamma_3^{3j}) - \Gamma_4^{3i}\Gamma_i^{3i} + \Gamma_4^{3j}\Gamma_3^{ii}, \\ m_4^3 = \Gamma_4^{31}(\Gamma_1^{31}\Gamma_3^{42} - \Gamma_3^{41} - 3\Gamma_1^{12} - 2\Gamma_2^{22} - 3\Gamma_3^{32}) + \Gamma_4^{32}(\Gamma_3^{42} + \\ + \Gamma_1^{31}\Gamma_3^{41} + 2\Gamma_1^{11} + 3\Gamma_2^{21} + 3\Gamma_3^{31}) - \Gamma_3^{12} + \Gamma_3^{21} + \Gamma_1^{31}(\Gamma_4^{12} + \Gamma_4^{21} - \Gamma_3^{11} - \Gamma_3^{22}). \end{gathered} \tag{3.7}$$

Используя отмеченные ранее абсолютные инварианты, получаем:

$$(\Gamma_1^{31})^2 = A, \quad (\Gamma_3^{4i})^4 = \frac{1}{2}B^2C_i. \tag{3.8}$$

Так как вершины A_iA_3 фиксированы геометрически, то для геометрической характеристики построенного канонического репера достаточно указать положение вершины A_4.

Рассмотрим охарактеризованную ранее инвариантную точку

$$P = \Gamma_j^{ij}A_i + \Gamma_i^{ji}A_j + \frac{1}{2}\Gamma_\kappa^{3\kappa}A_3 + A_4. \tag{3.9}$$

В каноническом репере эта точка совпадает с вершиной A_4.

Следовательно, вершина A_4 выбирается на линии пересечения касательных плоскостей к фокальным поверхностям (A_i) так, чтобы она гармонически делила вместе с A_3 точки P_i пересечения касательных к линиям $\omega_j = 0$ на поверхностях (A_i) с касательными плоскостями к поверхностям (A_j). Если же $P_1 \equiv P_2$, то A_4 совмещается с точкой пересечения этих касательных. Так как в каноническом репере

$$b = \Gamma_1^{31}, \ c_i = \Gamma_3^{ji}, \ b_i = \Gamma_3^{jj}, \ m_i = \Gamma_3^{ij} - 1, \tag{3.10}$$

то для конгруэнций $\Gamma_1^{31} = 0$, $\Gamma_3^{ji} = 0$, $\Gamma_3^{jj} = 0$, $\Gamma_3^{ij} = 1$ получаем отмеченные выше характеристики.

Теорема 2. Двойные точки Ермолаева E_i [9] пары фокальных поверхностей (A_i) гармонически делят вершины A_3, A_4 канонического репера $\{A_\alpha\}$.

Доказательство. Двойные точки Ермолаева E_i пары поверхностей (A_i) совпадают с точками пересечения касательных к линиям, высекаемым на (A_i) торсами прямолинейной конгруэнции (A_1A_2). Так как уравнение этих торсов имеет вид

$$(\omega_1)^2 - 2\Gamma_1^{31}\omega_1\omega_2 - (\omega_2)^2 = 0, \tag{3.11}$$

то для точек E_i получаем формулы:

$$E_i = A_4 + (-1)^i\sqrt{1 + (\Gamma_1^{31})^2}\,A_3. \tag{3.12}$$

Из этих формул непосредственно следует утверждение теоремы.

§ 4. Фокальные поверхности и фокальные семейства

Фокальные поверхности и фокальные семейства конгруэнции коник определяются из системы уравнений (1.4). Из этой системы, как и следовало ожидать, сразу находим фокусы A_i и соответствующие им фокальные семейства $\omega_i = 0$. Для определения других фокусов и фокальных семейств имеем систему:

$$\begin{gathered} (x^3)^2 - 2x^1x^2 = 0, \ x^4 = 0, \ (x^\kappa + \Gamma_3^{4\kappa}x^3)\omega_\kappa = 0, \\ x^1[(\Gamma_3^{21} - \Gamma_1^{31})\omega_1 + (\Gamma_3^{22} - 1)\omega_2] + x^2[(\Gamma_3^{11} - 1)\omega_1 + \\ + (\Gamma_3^{12} + \Gamma_1^{31})\omega_2] + \frac{1}{2}x^3a^\kappa\omega_\kappa = 0, \end{gathered} \tag{4.1}$$

где

$$a^\kappa = \Gamma_p^{p\kappa} - 2\Gamma_3^{3\kappa}. \tag{4.2}$$

Исключая с помощью результантов из системы (4.1) отношение $\omega_1 : \omega_2$

и x^3, получаем уравнение

$$a_{pqrs}x^p x^q x^r x^s = 0 \tag{4.3}$$

для определения четырех фокусов коники, отличных в общем случае от A_i.
Здесь

$$\begin{gathered} a_{iiii} = m_i^2, \; a_{iiij} = m_i m_{ij} - \frac{1}{2}\kappa_i^2, \\ a_{iijj} = \frac{1}{3}[2m_{12}^2 - m_1 m_2 + 2\kappa_1\kappa_2], \\ \kappa_i = \Gamma_3^{4i} m_i - \Gamma_3^{4j}(\Gamma_3^{ji} - \Gamma_i^{3i}) + a^j, \\ m_{ij} = a^j\Gamma_3^{4i} - a^i\Gamma_3^{4j} + \frac{1}{2}(\Gamma_3^{ij} - \Gamma_3^{ji}) + \Gamma_i^{3i}. \end{gathered} \tag{4.4}$$

Если же из уравнений (4.1) исключить $x^1{:}x^2{:}x^3$, то получим уравнение

$$b_{pqrs}\omega^p\omega^q\omega^r\omega^s = 0, \tag{4.5}$$

определяющее четыре фокальные семейства, отличные в общем случае от $\omega_i = 0$.

Здесь

$$\begin{gathered} b_{iiii} = m_j[m_j + 2\Gamma_3^{4i}(n_i\Gamma_3^{4i} - a^i)], \\ b_{iiij} = \frac{1}{2}[m_j(n_j - n_i) + (n_i\Gamma_3^{4i} - a^i)(m_j\Gamma_3^{4j} + n_j\Gamma_3^{4i} - a^i) + \\ + m_j\Gamma_3^{4i}(n_i\Gamma_3^{4j} + m_i\Gamma_3^{4i} - a^j)], \\ b_{1122} = \frac{1}{3}[(n_2 - n_1)^2 - m_1 m_2 + (n_1\Gamma_3^{41} - a^1)(n_2\Gamma_3^{42} - a^2) + \\ + m_1 m_2\Gamma_3^{41}\Gamma_3^{42} + (m_1\Gamma_3^{41} + n_1\Gamma_3^{42} - a^2)(m_2\Gamma_3^{42} + n_2\Gamma_3^{41} - a^1), \\ n_i = \Gamma_3^{ji} - \Gamma_i^{3i}. \end{gathered} \tag{4.6}$$

Сравнивая величины a_{iiii} и b_{jjjj}, видим, что сдвоенной фокальной поверхности (A_i) соответствует и сдвоенное фокальное семейство. Обратное же утверждение в общем случае неверно. Действительно, если фокальное семейство $\omega_i = 0$ сдвоенное, то $b_{jjjj} = 0$, т. е.

$$m_i[m_i + 2\Gamma_3^{4j}(n_j\Gamma_3^{4j} - a^j)] = 0. \tag{4.7}$$

Отсюда вытекают две альтернативы:
1) $m_i = 0$, что соответствует сдвоенной фокальной поверхности (A_i),
2) $m_i + 2\Gamma_3^{4j}(n_j\Gamma_3^{4j} - a^j) = 0$. В этом последнем случае фокальная поверхность (A_i) может и не быть сдвоенной, так как отсюда в общем случае не вытекает равенство $m_i = 0$.

Отметим некоторые классы конгруэнций, для которых всегда справедливо обратное утверждение.

Теорема 3. Если фокальная касательная A_iA_3 поверхности (A_i) проходит через точку M огибающей поверхности, то всегда сдвоенному фокальному семейству $\omega_i = 0$ соответствует сдвоенная фокальная поверхность (A_i).

Доказательство. Так как точка $M = A_3 - \Gamma_3^{4k}A_k$ лежит на прямой A_iA_3, то $\Gamma_3^{4j} = 0$. Тогда $b_{jjjj} = (m_i)^2 = a_{iiii}$. Теорема доказана.

Следствие. Если поверхность (A_3) является огибающей поверхностью плоскостей коник, то сдвоенным фокальным семействам $\omega_i = 0$ всегда соответствуют сдвоенные фокальные поверхности. Действительно, если $M \equiv A_3$, то $\Gamma_3^{41} = \Gamma_3^{42} = 0$.

§ 5. Конгруэнции I

Определение. Конгруэнциями I называются невырожденные конгруэнции кривых второго порядка, характеризующиеся соотношением

$$\Gamma_1^{31} = 0. \tag{5.1}$$

Теорема 4. Конгруэнции I существуют и определяются с произволом пяти функций двух аргументов.

Доказательство. В силу (5.1) уравнения (3.4) приводятся к виду:

$$\Gamma_i^{3i} = 0, \; \Gamma_4^{ii} = \Gamma_3^{ij}, \; \Gamma_4^{3i} = \Gamma_3^{4i} + 2(\Gamma_i^{ij} + \Gamma_3^{3j}). \tag{5.2}$$

Первое квадратичное уравнение системы (3.6) исчезает тождественно, а система оставшихся уравнений — в инволюции и определяет решение с произволом пяти функций двух аргументов. Теорема доказана.

Теорема 5. Конгруэнции I характеризуются каждым из следующих свойств.

1) Касательные к линиям $\omega_j = 0$ на поверхностях (A_i) пересекаются, т. е. $P_1 \equiv P_2$.

2) Фокусы F_i луча A_1A_2 прямолинейной конгруэнции (A_1A_2) гармонически делят фокальные точки A_i коники.

3) Одна из двойных точек Ермолаева пары фокальных поверхностей (A_i) совпадает с единичной точкой ребра A_3A_4.

4) $(A_1A_2;\ K_iF_i) = (A_3A_4;\ K_i'E_i)$, где K_i, K_i' — квазифлекнодальные точки пары линейчатых поверхностей $\omega_i = 0$, описанных ребрами A_1A_2 и A_3A_4 [10].

Доказательство. 1) $(dA_i)_{\omega_j=0} = [\Gamma_i^{ii}A_i + (\Gamma_i^{3i}A_3 + A_4)]\,\omega_i$. Следовательно, $P_i = \Gamma_i^{3i}A_3 + A_4$. Но $P_1 \equiv P_2$ тогда и только тогда, когда $\Gamma_1^{31} = 0$. 2) Имеем: $F_i = A_1 + [\Gamma_1^{31} + (-1)^i\sqrt{1 + (\Gamma_1^{31})^2}]\,A_2$. Отсюда вытекает, что $(A_1A_2;\ F_1F_2) = -1$ тогда и только тогда, когда $\Gamma_1^{31} = 0$. 3) Справедливость утверждения непосредственно вытекает из формул (3.12). 4) Обозначим $K_i = t_{i1}A_1 + t_{i2}A_2$, $K_i' = t_{i1}'A_3 + t_{i2}'A_4$. Для пары $\omega_i = 0$ имеем:

$$\frac{t_{i1}'}{t_{i2}'} = \frac{t_{i1}}{t_{i2}} - \Gamma_i^{3i}. \tag{5.3}$$

Из этой формулы следует, что $(A_1A_2;\ K_iF_i) = (A_3A_4;\ K_i'E_i)$ тогда и только тогда, когда $\Gamma_1^{31} = 0$. Теорема доказана.

Рассмотрим такие конгруэнции I, которые характеризуются условиями (5.2) и равенствами

$$\Gamma_4^{ij} = \Gamma_3^{ii} = \Gamma_3^{12} - \Gamma_3^{21} = 0, \; \Gamma_3^{12} \neq 0. \tag{5.4}$$

Назовем их конгруэнциями I_1.

Теорема 6. Конгруэнции I_1 существуют и определяются с произволом одной функции двух аргументов. Они характеризуются тем, что пары линейчатых поверхностей (A_1A_2) и (A_3A_4), соответствующие линиям $\omega_i = 0$, расслояемы.

Доказательство. В силу (5.2) и (5.4) уравнения (3.6) приводятся к виду:

$$-\frac{1}{2}d\ln\Gamma_3{}^{12} = (\Gamma_3^{42} + \Gamma_\kappa^{\kappa 1})\,\omega_1 + (\Gamma_3^{41} + \Gamma_\kappa^{\kappa 2})\omega_2, \tag{5.5}$$

$$\Gamma_3^{3j} + \Gamma_j^{ij} = 0,\ \Gamma_4^{3i} = \Gamma_3^{4i},\ \Gamma_3^{42}(\Gamma_1^{11} - \Gamma_2^{21}) - \Gamma_3^{41}(\Gamma_2^{22} - \Gamma_1^{12}) = 0, \tag{5.6}$$

$$[d\Gamma_i^{ii}\omega_i] + [d\Gamma_i^{ij}\omega_j] + m_i^i\,[\omega_i\omega_j] = 0,$$

$$[d\Gamma_2^{21}\omega_1] + [d\Gamma_1^{12}\omega_2] - m_3^3\,[\omega_1\omega_2] = 0,$$

$$[d\Gamma_3^{4\kappa}\omega_\kappa] + m_3^4\,[\omega_1\omega_2] = 0,$$

$$[d\Gamma_3^{42}\omega_1] + [d\Gamma_3^{41}\omega_2] + \{\Gamma_3^{41}(\Gamma_1^{11} + \Gamma_2^{21}) - \Gamma_3^{42}(\Gamma_2^{22} + \Gamma_1^{12})\}\,[\omega_1\omega_2] = 0. \tag{5.7}$$

Если $\Gamma_3^{41} = \Gamma_3^{42} = 0$, то последние два квадратичных уравнения исчезают тождественно. Оставшиеся уравнения определяют решение с произволом одной функции двух аргументов. Все поверхности (A_α) сливаются в этом случае в одну квадрику:

$$x^1x^2 - \Gamma_3^{12}x^3x^4 = 0. \tag{5.8}$$

Если $\Gamma_3^{41} = 0$, $\Gamma_3^{42} \neq 0$, то решение существует тоже с произволом одной функции двух аргументов. Фокальные поверхности в этом случае являются линейчатыми.

Если $\Gamma_3^{41} \neq 0$, $\Gamma_3^{42} \neq 0$, то система уравнений (5.7) дает решение с произволом одной функции двух аргументов. Так как для конгруэнций I_1 возможны только эти три случая, то первая часть теоремы доказана. Второе утверждение теоремы вытекает из тождественного исчезновения для конгруэнций I_1 уравнений для определения квазифлекнодальных точек пары (A_1A_2), (A_3A_4), соответствующей $\omega_i = 0$.

§ 6. Конгруэнции C_R

Определение. Конгруэнциями C_R называются такие невырожденные конгруэнции кривых второго порядка, у которых поверхности (A_α) образуют замкнутую последовательность Лапласа с фокальной сетью $\omega_1\omega_2 = 0$—сетью R.

Теорема 7. Конгруэнции C_R существуют и определяются с произволом одной функции двух аргументов.

Доказательство. Из определения конгруэнции C_R вытекают следующие конечные соотношения:

$$\begin{gathered}\Gamma_1^{31} = \Gamma_3^{4i} - \Gamma_4^{3i} = \Gamma_3^{ij} = \Gamma_4^{ii} = 0,\quad \Gamma_4^{ij} = \Gamma_3^{jj} \neq 0.\\ \Gamma_i^{ij} + \Gamma_3^{3j} = 0,\quad \Gamma_i^{ii} = \Gamma_i^{ij}.\end{gathered} \tag{5.9}$$

Система внешних квадратичных уравнений (3.6) принимает вид:

$$\begin{gathered}[d\Gamma_1^{11}\omega_1] + [d\Gamma_2^{22}\omega_2] + (\Gamma_3^{11} - \Gamma_3^{22})[\omega_1\omega_2] = 0,\\ [d\Gamma_3^{ii}\omega_i] - 4\Gamma_3^{ii}\Gamma_j^{jj}\,[\omega_i\omega_j] = 0.\end{gathered} \tag{5.10}$$

Эта система имеет решение с произволом одной функции двух аргументов. Теорема доказана.

Из определения конгруэнций C_R и соотношений (5.9) непосредственно вытекают следующие следствия: 1) конгруэнции C_R являются конгруэнциями I; 2) конгруэнции C, рассмотренные в [7з], являются конгруэнциями C_R; 3) пары прямолинейных конгруэнций (A_iA_3) и (A_jA_4), ассоциированные с конгруэнциями C_R, являются парами H [11].

ЛИТЕРАТУРА

1. Kawaguchi A. Über die Differentialgeometrie von Kegelschnitten im Dreidimensionalen projektiven Raume. Journ. of the Faculty of science. Hokkaido imperial university, Ser. 1, vol. 1, 1930, 1—45.
2. Lane E. Surfaces and curvelinear congruences. Trans. Amer. Math. Soc., 34, 1932, 676—88.
3. Buchin Su. On the surfaces whose asymptotic curves belong to linear complexes. Tohoku Math. Journ., 40, 1935, 408—420.
4. Рыжков В. В. О конгруэнциях плоских алгебраических кривых. ДАН СССР, т. 41, № 5, 1943, 202—204.
5. Туганов Н. Г. а) Конгруэнции индикатрис поверхности в трехмерном пространстве. Труды 3-го Всес. мат. съезда, 1, 1956, 172—173. б) О конгруэнции линий второго порядка в трехмерном проективном пространстве. ДАН, 100, № 1, 1955, 13—15.
6. Backes F. Sur la stratifications des congruences engendrées, l'une par une droite, l'autre par une conique. Bull. cl. sci. Acad. roy. Belg., 47, № 2, 1961, 66—82.
7. Малаховский В. С. а. Конгруэнции Δ-коник поверхности. Докл. научн. конф. по мат. и мех. Томск, 1960, 64—66; б. Конгруэнции кривых второго порядка, ассоциированные с поверхностью. Сибирский мат. журнал, 1, № 4, 1960, 623—631; в. Конгруэнции кривых второго порядка с неопределенными фокальными семействами Геометрический сборник, вып. 1. Труды Томского университета, 160, 1962, 5—14; г. Об одной паре линейчатых поверхностей в проективном пространстве. Геометрический сб. вып 2. Труды Томского университета, 161, 1962; д. Труды 4-го Всес. мат. съезда; е. Конгруэнции кривых второго порядка с одной фокальной поверхностью, вырождающейся в точку. Данный сб., ж. Конгруэнции кривых второго порядка, плоскости которых образуют однопараметрическое семейство. Данный сб., з. Об одном классе конгруэнций кривых второго порядка с вырождающейся фокальной поверхностью. ДАН СССР, 1962.
8. Лаптев Г. Ф. Дифференциальная геометрия погруженных многообразий. Труды Моск. матем. общества, 2, 1953, 275—382.
9. Фиников С. П. Асимптотически-сопряженные двойные линии Ермолаева. Ученые зап. МГПИ, 16, вып. 3, 1956.
10. Ивлев Е. Т. Пара линейчатых поверхностей в трехмерном проективном пространстве. Доклады научн. конф. по мат. и мех., Томск, 1960, 50—51.
11. Пергаменщиков М. Б. Пара конгруэнций Н. Изв. вузов, Математика, 3 (22), 1961, 91—98.

ТРУДЫ ТОМСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА
имени В. В. КУЙБЫШЕВА

Том 168 Серия механико-математическая

В. С. МАЛАХОВСКИЙ

КОНГРУЭНЦИИ КРИВЫХ ВТОРОГО ПОРЯДКА С ОДНОЙ ФОКАЛЬНОЙ ПОВЕРХНОСТЬЮ, ВЫРОЖДАЮЩЕЙСЯ В ТОЧКУ

В работе исследуются конгруэнции нераспадающихся кривых второго порядка в трехмерном проективном пространстве, обладающие следующими свойствами: 1) одна фокальная поверхность конгруэнции вырождается в точку; 2) имеются по крайней мере две невырождающиеся фокальные поверхности S_1 и S_2, не совпадающие с огибающей поверхностью плоскостей коник конгруэнции; 3) фокальные линии на поверхности S_1 не соответствуют друг другу и не являются кониками конгруэнции. Назовем конгруэнции, определяемые этими условиями, конгруэнциями A.

§ 1. Теорема существования

Поместим вершину $P_i (i, j, k = 1,2)$ тетраэдра $\{P_\alpha\}$ $(\alpha, \beta, \gamma = 1, 2, 3, 4)$ в фокальную точку коники, описывающую поверхность S_i, вершину P_3 — в неподвижную фокальную точку, а вершину P_4 в произвольную точку проективного пространства, не лежащую в плоскости коники. Уравнения коники относительно этого тетраэдра записываются в виде:

$$x^1 x^2 + a_k x^k x^3 = 0, \quad x^4 = 0. \tag{1.1}$$

Деривационные формулы репера $\{P_\alpha\}$ имеют вид:

$$dP_\alpha = \tau_\alpha^\beta P_\beta, \tag{1.2}$$

причем формы Пфаффа τ_α^β удовлетворяют уравнениям структуры проективного пространства

$$D\tau_\alpha^\beta = [\tau_\alpha^\gamma \tau_\gamma^\beta]. \tag{1.3}$$

Из неподвижности точки P_3 вытекают уравнения:

$$\tau_3^i = \tau_3^4 = 0 \tag{1.4}$$

Для определения фокальных поверхностей и фокальных семейств конгруэнции A имеем систему:

$$x^1 x^2 + a_k x^k x^3 = 0, \quad x^4 = 0, \quad \tau_k x^k = 0,$$

$$(\tau_1^2 + a_1 \tau_1^3)(x^1)^2 + (\tau_2^1 + a_2 \tau_2^3)(x^2)^2 - \Delta a_k x^k x^3 = 0, \tag{1.5}$$

где положено

$$\tau_i^4 = \tau_i, \ \Delta a_i = da_i + a_i(\tau_j^j - \tau_3^3 + a_i \tau_j^3 + a_j \tau_i^3) - a_j \tau_i^j.$$

Здесь и в дальнейшем условимся считать, что $i \neq j$ и по индексам i и j суммирование не производится.

Так как точка P_i — фокальная, то ее координаты удовлетворяют системе (1.5). Следовательно, между формами Пфаффа $\tau_i^j + a_i \tau_i^3$ и τ_i существует линейная зависимость. Учитывая, что точка P_i не является точкой огибающей поверхности плоскостей коник, можно представить эту зависимость в виде:

$$\tau_i^j + a_i \tau_i^5 = b_i \tau_i \tag{1.6}$$

При фиксации независимых первичных параметров u и v конгруэнции A фиксируются точки P_i, P_3 и коника (1.1). Поэтому формы Пфаффа

$$\tau_i, \ \tau_i^j, \ \tau_i^3, \ \tau_3^i, \ \tau_3^4, \ d\ln a_i + \tau_j^j - \tau_3^3 \tag{1.7}$$

являются главными формами конгруэнции. Их число (11) соответствует тому, что коника в пространстве определяется восемью параметрами и для задания трех фиксированных точек фокусов на конике требуется три параметра. Среди этих форм всегда существуют две линейно независимые формы, а остальные через них линейно выражаются. Уравнение $\tau_i = 0$ определяет фокальное семейство на поверхности (P_i). Так как фокальные линии конгруэнции A на поверхностях (P_1) и (P_2) не соответствуют, то

$$[\tau_1 \tau_2] \neq 0. \tag{1.8}$$

Следовательно, главные формы Пфаффа τ_i можно принять за независимые первичные формы конгруэнции A и положить

$$\tau_i^3 = \Gamma_i^{3k} \tau_k, \ d\ln a_i + \tau_j^j - \tau_3^3 = \Gamma_j^{jk} \tau_k. \tag{1.9}$$

Дифференцируя внешним образом уравнения (1.6), (1.9), получаем:

$$[\Delta b_i \tau_i] = 0, \quad [\Delta\Gamma_i^{3k} \tau_k] = 0, \quad [\Delta\Gamma_j^{jk} \tau_k] = 0. \tag{1.10}$$

Здесь положено:

$$\begin{gathered}
\Delta b_i = db_i - b_i(\tau_4^4 - \tau_j^j) + \tau_4^j + a_i \tau_4^3 + \{a_i(\Gamma_j^{ji}\Gamma_i^{3j} - \Gamma_j^{jj}\Gamma_i^{3i} - \\
- a_i \Gamma_i^{3j}\Gamma_j^{3i}) + (b_i + a_i \Gamma_j^{3j})(a_i \Gamma_{ii}^3 - b_i)\} \tau_j, \\
\Delta\Gamma_i^{3i} = d\Gamma_i^{3i} - \Gamma_i^{3i}(\tau_4^4 - \tau_3^3) + \tau_4^3 + (b_i - a_i \Gamma_i^{3i})(\Gamma_j^{3j} - \Gamma_i^{3i}) \tau_j, \\
\Delta\Gamma_i^{3j} = d\Gamma_i^{3j} - \Gamma_i^{3j}(\tau_i^i - \tau_j^j - \tau_3^3 + \tau_4^4) + \Gamma_i^{3j}(a_j \Gamma_j^{3j} - b_j - a_i \Gamma_j^{3i}) \tau_i, \\
\Delta\Gamma_j^{ji} = d\Gamma_j^{ji} - \Gamma_j^{ji}(\tau_4^4 - \tau_i^i) + (a_i \Gamma_i^{3i} - b_i)(\Gamma_j^{ji} + b_j - a_j \Gamma_j^{3j}) \tau_j, \\
\Delta\Gamma_j^{jj} = d\Gamma_j^{jj} - \Gamma_j^{jj}(\tau_4^4 - \tau_j^j) + \tau_4^j + \{\Gamma_j^{jj}(a_j \Gamma_j^{3j} - b_j) - a_i a_j \Gamma_j^{3i}\Gamma_i^{3j}\} \tau_i.
\end{gathered} \tag{1.11}$$

Замкнутая система уравнений (1.6), (1.9), (1.10) определяет решение с произволом четырех функций двух аргументов. Получаем следующую теорему.

Теорема 1. Конгруэнции A существуют и определяются с произволом четырех функций двух аргументов.

§ 2. Канонический репер конгруэнции А

Разрешая уравнения (1.10) по лемме Картана и фиксируя независимые первичные параметры u и v конгруэнции A, получаем:

$$\delta b_i = b_i(\pi_4^4 - \pi_j^j) - \pi_4^j - a_i \pi_4^3 \qquad \delta a_i = a_i(\pi_3^3 - \pi_j^j)$$

$$\delta\Gamma_i^{3i} = \Gamma_i^{3i}(\pi_4^4 - \pi_3^3) - \pi_4^3 \qquad \delta\Gamma_i^{3j} = \Gamma_i^{3j}(\pi_i^i - \pi_j^j - \pi_3^3 + \pi_4^4)$$

$$\delta\Gamma_i^{ii} = \Gamma_i^{ii}(\pi_4^4 - \pi_i^i) - \pi_4^i \qquad \delta\Gamma_i^{ij} = \Gamma_i^{ij}(\pi_4^4 - \pi_j^j) \tag{2.1}$$

Из этих уравнений заключаем, что величины a_i, Γ_i^{3j} являются относительными инвариантами, причем при $a_i = 0$ вырождается коника (1.1), а при $\Gamma_i^{3j} = 0$ вырождается фокальная поверхность (P_i). Для конгруэнции A оба эти случая исключены, следовательно

$$a_i \neq 0, \ \Gamma_i^{3j} \neq 0. \tag{2.2}$$

Так как $D\tau_3^3 = 0$, то форма Пфаффа τ_3^3 является полным дифференциалом и соответствующей нормировкой вершины P_3 можно ее привести к нулю

$$\tau_3^3 = 0$$

При этом вершина P_3 становится неподвижной аналитической точкой. Уравнения (2.1), (2.3) при условии (2.2) дают возможность осуществить следующую фиксацию всех вторичных параметров конгруэнции

$$b_i = 0, \ a_i = 1, \ \Gamma_\kappa^{3\kappa} = 0, \ \Gamma_1^{32}\Gamma_2^{31} = 1. \tag{2.3}$$

Репер $\{P_\alpha\}$ становится каноническим. Его деривационные формулы имеют вид:

$$dP_i = \Gamma_i^{i\kappa}\tau_\kappa P_i + \Gamma_i^{3\kappa}\tau_\kappa(P_3 - P_2) + \tau_i P_4,$$
$$dP_3 = 0, \ dP_4 = \Gamma_4^{\alpha\kappa}\tau_\kappa P_\alpha, \tag{2.4}$$

причем

$$\Gamma_\kappa^{3\kappa} = 0, \ \Gamma_1^{32}\Gamma_2^{31} = 1, \ \Gamma_4^{3i} + \Gamma_4^{ii} + \Gamma_i^{ij}\Gamma_j^{3i} + (\Gamma_i^{3i})^2 + \Gamma_i^{3i}\Gamma_i^{ii} + 1 = 0 \tag{2.5}$$

Из уравнений структуры (1.3) вытекает следующая система внешних квадратичных уравнений конгруэнции

$$[d\Gamma_i^{3\kappa}\tau_\kappa] + m_i^3[\tau_i\tau_j] = 0, \ [d\Gamma_i^{i\kappa}\tau_\kappa] + m_i^i[\tau_i\tau_j] = 0,$$
$$[d\Gamma_4^{i\kappa}\tau_\kappa] + m_4^i[\tau_i\tau_j] = 0, \ [d\Gamma_4^{3\kappa}\tau_\kappa] + m_4^3[\tau_1\tau_2] = 0, \tag{2.6}$$
$$[d\Gamma_4^{4\kappa}\tau_\kappa] + m_4^4[\tau_1\tau_2] = 0,$$
$$D\tau_i = m_i[\tau_i\tau_i],$$

где

$$m_i = \Gamma_4^{4j} - \Gamma_i^{ij} - \Gamma_i^{3i}, \ m_i^3 = m_i\Gamma_i^{3i} - m_j\Gamma_i^{3j} - \Gamma_4^{3j} - \Gamma_i^{3i}(\Gamma_i^{ij} + \Gamma_i^{3i}) +$$
$$+ \Gamma_i^{3j}(\Gamma_i^{ii} - \Gamma_j^{3i}), \ m_i^i = m_i\Gamma_i^{ii} - \Gamma_i^{ij} - \Gamma_4^{ij} + (\Gamma_i^{3i})^2 - 1,$$
$$m_4^i = m_i\Gamma_4^{ii} - m_j\Gamma_4^{ij} + \Gamma_4^{ij}(\Gamma_i^{ii} - \Gamma_4^{4i}) + \Gamma_4^{ii}(\Gamma_4^{4j} - \Gamma_i^{ij}) +$$
$$+ \Gamma_4^{ji}\Gamma_j^{3j} - \Gamma_4^{jj}\Gamma_j^{3i}, \tag{2.7}$$
$$m_4^3 = m_1\Gamma_4^{31} - m_2\Gamma_4^{32} + \Gamma_1^{31}(\Gamma_4^{12} + \Gamma_4^{21}) + \Gamma_4^{22}\Gamma_2^{31} - \Gamma_4^{11}\Gamma_1^{32} +$$
$$+ \Gamma_4^{31}\Gamma_4^{42} - \Gamma_4^{32}\Gamma_4^{41}, \ m_4^4 = m_1\Gamma_4^{41} - m_2\Gamma_4^{42} + \Gamma_4^{12} - \Gamma_4^{21} + \Gamma_3^{41}\Gamma_4^{32} - \Gamma_3^{42}\Gamma_4^{31}.$$

Так как вершины P_i, P_3 фиксированы геометрически в § 1, то для геометрической характеристики построенного канонического репера достаточно охарактеризовать вершину P_4. Рассмотрим следующие аналитические точки:

$$M = P_1 + P_2 - P_3, \ M_i = P_j - P_3, \ N_i = P_4 + \Gamma_i^{3i}M,$$

$$E_i = P_j + P_3, \ E_3 = P_1 + P_2, \ M_3 = P_1 - P_2, \tag{2.8}$$

Из формул

$$dP_i = \Gamma_i^{i\kappa}\tau_\kappa P_i - \Gamma_i^{3\kappa}\tau_\kappa M_i + \tau_i P_4 \tag{2.9}$$

непосредственно заключаем, что M является точкой пересечения фокальных касательных поверхностей (P_i), M_i — точка пересечения фокальной касательной поверхности (P_i) с прямой P_3P_j, соединяющей неподвижную фокальную точку P_3 конгруэнции A с фокусом P_j, N_i — точка пересечения касательной линии $\tau_j = 0$ на поверхности (P_i), соответствующей фокальной линии поверхности (P_j) с общей прямой касательных плоскостей к (P_i) и (P_j), E_3 — точка пересечения прямой P_3M с прямой P_1P_2, соединяющей фокусы P_1 и P_2 конгруэнции (фокальной прямой). Точки M_3, E_i определяются как четвертые гармонические к точкам E_3, M_i соответственно, относительно пар точек P_1, P_2 и P_3, P_j. Мы видим, что единичные точки E_i, E_3 ребер P_3P_j, P_1P_2 канонического тетраэдра имеют простую геометрическую характеристику. Из формул

$$N_1 = P_4 + \Gamma_1^{31}M, \ N_2 = P_4 - \Gamma_1^{31}M \tag{2.10}$$

следует, что если $\Gamma_1^{31} \neq 0$, то вершина P_4 является четвертой гармонической к точке M, относительно точек N_i. Если же

$$\Gamma_1^{31} = 0, \tag{2.11}$$

то касательные P_iN_i пересекаются ($N_1 \equiv N_2$) и P_4 совпадает с их точкой пересечения.

§ 3. Основные геометрические образы, ассоциированные с конгруэнцией A

Рассмотрим некоторые геометрические образы, инвариантно присоединенные к конгруэнции A.

1. Прямолинейная конгруэнция (P_1P_2) фокальных прямых. Фокусы F_i лучей этой конгруэнции определяются по формулам:

$$F_i = \Gamma_2^{31}P_1 + [\Gamma_1^{31} + (-1)^i\sqrt{(\Gamma_1^{31})^2 + 1}]P_2. \tag{3.1}$$

Для определения торсов конгруэнции A имеем уравнение:

$$\Gamma_2^{31}(\tau_1)^2 + 2\Gamma_1^{31}\tau_1\tau_2 - \Gamma_1^{32}(\tau_2)^2 = 0. \tag{3.2}$$

Из формулы (3.1) получаем простую геометрическую характеристику инварианта Γ_i^{31}:

$$4x(\Gamma_1^{31})^2 + (x+1)^2 = 0, \tag{3.3}$$

где

$$x = (P_1P_2; \ F_1F_2). \tag{3.4}$$

2. Прямолинейная конгруэнция (P_iM_i) фокальных касательных поверхности (P_i). Второй фокус B_i луча этой конгруэнции и соответствующее ему фокальное семейство определяется по формулам:

$$B_i = c_iP_i + e_iM_i, \ c_i\tau_i - e_i\tau_j = 0, \tag{3.5}$$

где

$$c_i = \Gamma_j^{3i} + \Gamma_j^{ji}, \ e_i = \Gamma_j^{jj} - \Gamma_i^{3i} \tag{3.6}$$

3. Прямолинейная конгруэнция (P_iP_4). Один фокус луча этой конгруэнции совпадает с точкой P_i и ему соответствует фокальное се-

мейство $\Gamma_i^{3\kappa}\tau_\kappa = 0$. Для определения второго фокуса c_i и второго фокального семейства имеем формулы:

$$c_i = (\Gamma_4^{3i}\Gamma_4^{jj} - \Gamma_4^{ji}\Gamma_4^{3j}) P_i + (\Gamma_i^{3j}h_i - \Gamma_i^{3i}k_j) P_4,$$

$$h_i\tau_i + k_j\tau_j = 0, \quad (3.7)$$

где

$$h_i = \Gamma_4^{3i} + \Gamma_4^{ji}, \quad k_j = \Gamma_4^{3j} + \Gamma_4^{jj} \quad (3.8)$$

4. Асимптотические линии поверхности (P_i). Их уравнение имеет вид:

$$[\Gamma_4^{3i} + \Gamma_4^{ji} - \Gamma_i^{3i}(\Gamma_j^{ji} + \Gamma_j^{3i})] (\tau_i)^2 - \Gamma_i^{3j} (\Gamma_j^{jj} + \Gamma_j^{3j}) (\tau_j)^2 +$$
$$+ [\Gamma_4^{3j} + \Gamma_4^{jj} - \Gamma_i^{3j} (\Gamma_j^{ji} + \Gamma_j^{3i}) - \Gamma_i^{3i} (\Gamma_j^{jj} + \Gamma_j^{3j}] \tau_i\tau_j = 0. \quad (3.9)$$

5. Фокальные поверхности и фокальные семейства конгруэнции A. Уравнения (1.5) для определения фокусов и фокальных семейств конгруэнции A приводятся к виду:

$$x^1x^2 + x^3 (x^1 + x^2) = 0, \; x^4 = 0, \; \tau_\kappa x^\kappa = 0,$$

$$(\tau_1 p_\kappa + \tau_2 q_\kappa) x^\kappa x^3 = 0, \quad (3.10)$$

где

$$p_i = \Gamma_j^{ji} + \Gamma_j^{3i} + 2\Gamma_i^{3i}, \; q_i = \Gamma_j^{jj} - \Gamma_i^{3i} + 2\Gamma_i^{3j} \quad (3.11)$$

Из этих уравнений, кроме фокусов P_3, P_i и фокальных семейств $\tau_i = 0$, находим в общем случае два фокуса T_i и два фокальных семейства, определяемые, соответственно, уравнениями

$$x^1x^2 + x^3 (x^1 + x^2) = 0, \; x^4 = 0,$$

$$q_1 (x^1)^2 + (p_2 - p_1) x^1x^2 - q_2 (x^2)^2 = 0 \quad (3.12)$$

$$q_2 (\tau_1)^2 + (p_2 - p_1) \tau_1\tau_2 - q_1 (\tau_2)^2 = 0 \quad (3.13)$$

Мы приходим к следующим теоремам.

Теорема 2. Конгруэнция A имеет в общем случае четыре невырождающиеся фокальные поверхности и четыре фокальных семейства.

Теорема 3. Соответствие фокальных семейств (3.13) конгруэнции A эквивалентно совпадению их фокальных поверхностей (T_i). Справедливость последнего утверждения следует из равенства дискриминантов третьего уравнения системы (3.12) и уравнения (3.13).

§ 4. Конгруэнции A_ε

Определение. Конгруэнциями A_ε называются конгруэнции A, характеризующиеся условиями:

$$\Gamma_1^{31} = 0, \; \Gamma_1^{32} = \varepsilon, \; \varepsilon = \pm 1 \quad (4.1)$$

Теорема 4. Конгруэнции A_ε существуют и определяются с произволом двух функций двух аргументов.

Доказательство. В силу (4.1), (2.5), (2.6) замкнутая система уравнений, определяющая конгруэнции A_ε, приводится к виду:

$$\Gamma_4^{3i} + \Gamma_4^{ii} + \varepsilon\Gamma_i^{ij} + 1 = 0, \qquad \Gamma_4^{ii} = 2\Gamma_j^{ji} + \varepsilon\Gamma_4^{jj} - \Gamma_i^{ii}, \quad (4.2)$$

$$\tau_i^j + \varepsilon\tau_j = 0, \; \tau_i^3 - \varepsilon\tau_j = 0, \qquad \tau_i^i = \Gamma_i^{i\kappa}\tau_\kappa, \; \tau_4^\alpha = \Gamma_4^{\alpha\kappa}\tau_\kappa, \quad (4.3)$$

$$[d\Gamma_i^{i\kappa}\tau_\kappa] + m_i^i [\tau_i\tau_j] = 0, \qquad [d\Gamma_4^{i\kappa}\tau_\kappa] + m_4^i [\tau_i\tau_j] = 0,$$
$$[d\Gamma_4^{3\kappa}\tau_\kappa] + m_4^3 [\tau_1\tau_2] = 0, \qquad [d\Gamma_4^{4\kappa}\tau_\kappa] + m_4^4 [\tau_1\tau_2] = 0. \quad (4.4)$$

Это система — в инволюции и имеет решение с произволом двух функций двух аргументов.

Теорема 5. Конгруэнции A_ε характеризуются тем, что фокусы F_i луча P_1P_2 конгруэнции фокальных прямых гармонически делят фокальные точки P_i и один из фокусов F_i совпадает с точкой E_3.

Доказательство. Из формулы (3.3) следует, что условие $x = -1$ эквивалентно условию $\Gamma_1^{31} = 0$. При $\Gamma_1^{31} = 0$ формула (3.1) приводится к виду:

$$F_i = \Gamma_2^{31}P_1 + (-1)^i P_2.$$

Отсюда вытекает, что условие $\Gamma_2^{31} = \varepsilon$ эквивалентно совпадению одного из фокусов F_i с точкой $E_3 = P_1 + P_2$. Теорема доказана.

Следствие. Конгруэнции A_ε входят в класс конгруэнций I [1] и поэтому обладают свойствами конгруэнций этого класса.

Так как в силу (4.1)

$$p_i = \Gamma_j^{ji} + \varepsilon, \qquad q_i = \Gamma_j^{jj} + 2\varepsilon,$$

то третье уравнение системы (3.12) для определения фокусов T_i приводится к виду:

$$(\Gamma_1^{11} + 2\varepsilon) (x^1)^2 + (\Gamma_1^{12} - \Gamma_2^{21}) x^1x^2 - (\Gamma_2^{22} + 2\varepsilon) (x^2)^2 = 0. \quad (4.5)$$

Рассмотрим подкласс конгруэнций A_ε, обладающих следующими свойствами: 1) касательные плоскости к поверхности (P_4) содержат фокальные прямые P_1P_2 конгруэнции, 2) фокальная сеть $\tau_1\tau_2 = 0$ сопряжена на поверхностях (P_1) и (P_2). Конгруэнции этого подкласса назовем конгруэнциями A_ε'.

Теорема 6. Конгруэнции A_ε' существуют и определяются с произволом двух функций одного аргумента.

Доказательство. Так как плоскость $P_1P_2P_4$ касается поверхности (P_4), то

$$\Gamma_4^{3i} = 0. \quad (4.6)$$

В силу сопряженности фокальной сети $\tau_1\tau_2 = 0$ на поверхности (P_i) в уравнении (3.9) асимптотических линий этой поверхности должен отсутствовать член с произведением $\tau_1\tau_2$. Следовательно,

$$\Gamma_4^{jj} - \varepsilon\Gamma_j^{ji} - 1 = 0. \quad (4.7)$$

Система конечных и пфаффовых уравнений, определяющая конгруэнции A'_ε, приводится к виду:

$$\Gamma_4^{3i} = 0, \quad \Gamma_4^{ii} = 0, \quad \Gamma_i^{ij} = -\varepsilon, \quad \Gamma_4^{4i} + \Gamma_i^{ii} + 2\varepsilon = 0, \quad (4.8)$$

$$\tau_i^j + \varepsilon\tau_j = 0, \quad \tau_i^3 - \varepsilon\tau_j = 0, \quad \tau_i^i = \Gamma_i^{ii}\tau_i - \varepsilon\tau_j, \quad \tau_4^i = \Gamma_4^{ij}\tau_j,$$
$$\tau_4^3 = 0, \qquad \tau_\kappa^\kappa + \tau_4^4 + (\tau_1 + \tau_2) = 0. \quad (4.9)$$

Дифференцируя внешним образом уравнения (4.9), получаем:

$$\Gamma_1^{11} = \Gamma_2^{22}, \quad (4.10)$$

$$d\Gamma_1^{11} + \Gamma_1^{11}(\Gamma_1^{11} + 2\varepsilon)(\tau_1 + \tau_2) + \Gamma_4^{21}\tau_1 + \Gamma_4^{12}\tau_2 = 0, \tag{4.11}$$

$$[d\Gamma_4^{ij}\tau_j] + 3\Gamma_4^{ij}(\Gamma_1^{11} + \varepsilon)[\tau_i\tau_j] = 0 \tag{4.12}$$

Замыкание уравнения (4.11) является следствием уравнения (4.12). Следовательно, система в инволюции и определяет решение с произволом двух функций одного аргумента. Теорема доказана.

Теорема 7. Один из фокусов T_i конгруэнции $A_4^{'}$ совпадает с неподвижной фокальной точкой P_3, а другой — с точкой пересечения прямой P_3M с коникой.

Доказательство. В силу (4.8), (4.10) система уравнений (3.12) для определения фокусов T_i принимает вид:

$$x^1x^2 + x^3(x^1 + x^2) = 0, \qquad (x^1)^2 - (x^2)^2 = 0, \qquad x^4 = 0. \tag{4.13}$$

Следовательно,

$$T_1 = P_1 + P_2 - \frac{1}{2}P_3, \qquad T_2 = P_3. \tag{4.14}$$

Учитывая, что $M = P_1 + P_2 - P_3$, запишем первую формулу в виде:

$$T_1 = M + \frac{1}{2}P_3. \tag{4.15}$$

Отсюда непосредственно заключаем, что фокус T_1 лежит на прямой P_3M, соединяющей неподвижную фокальную точку коники с точкой пересечения фокальных касательных поверхностей (P_i).

Следствие. Конгруэнция $A_4^{'}$ имеет в общем случае три невырождающиеся фокальные поверхности и три фокальных семейства.

Теорема 8. Фокальные линии поверхности (T_1) конгруэнции $A_4^{'}$ соответствуют одному семейству торсов прямолинейной конгруэнции фокальных прямых.

Доказательство. Уравнение фокальных линий поверхности (T_1) имеет вид:

$$\tau_1 + \tau_2 = 0. \tag{4.16}$$

Уравнение же торсов прямолинейной конгруэнции (P_1P_2) (3.2) в рассматриваемом случае записывается в виде:

$$(\tau_1)^2 - (\tau_2)^2 = 0. \tag{4.17}$$

Теорема доказана.

Формулы (3.5) принимают вид:

$$B_i = \Gamma_1^{11}M_i, \qquad \tau_j = 0. \tag{4.18}$$

Следовательно, поверхности (P_i) и (M_i), ассоциированные с конгруэнцией $A_4^{'}$, являются фокальными поверхностями прямолинейной конгруэнции (P_iM_i), причем торсы этой конгруэнции соответствуют фокальной сети $\tau_i\tau_j = 0$ конгруэнции.

ЛИТЕРАТУРА

1. Малаховский В. С. Невырожденные конгруэнции кривых второго порядка в трехмерном проективном пространстве. Данный сб., стр. 43—53

ТРУДЫ ТОМСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА
имени В. В. КУЙБЫШЕВА

Том 168 Серия механико-математическая

В. С. МАЛАХОВСКИЙ

КОНГРУЭНЦИИ КРИВЫХ ВТОРОГО ПОРЯДКА, ПЛОСКОСТИ КОТОРЫХ ОБРАЗУЮТ ОДНОПАРАМЕТРИЧЕСКОЕ СЕМЕЙСТВО

Наиболее общая конгруэнция коник в трехмерном проективном пространстве принадлежит двухпараметрическому семейству плоскостей. Однако представляет интерес исследование такой конгруэнции, у которой плоскости коник образуют однопараметрическое семейство. В этом случае каждая плоскость содержит инвариантную прямую-характеристику и однопараметрическое семейство коник конгруэнции. Характеристические точки F_α ($\alpha, \beta, \gamma, \ldots = 1, 2, 3, 4$) коники C относительно этого однопараметрического семейства коник являются, очевидно, ее фокальными точками. Конику C^*, проходящую через точки F_α и полюс характеристики относительно коники C, условимся называть характеристической коникой.

В работе исследуется конгруэнция коник в трехмерном проективном пространстве, удовлетворяющая следующим условиям: 1) плоскости коник образуют однопараметрическое семейство, 2) каждая коника конгруэнции не касается характеристики своей плоскости, 3) точки пересечения характеристики плоскости с коникой C не сопряжены полярно относительно характеристической коники C^*. Назовем такие конгруэнции конгруэнциями T.

§ 1. Теорема существования

Поместим вершины M_i ($i, j, k, \ldots = 1, 2$) тетраэдра $\{M_\alpha\}$ в точки пересечения характеристики плоскости с коникой C, вершину M_3 — в точку пересечения касательных к конике C в M_i, вершину M_4 — в произвольную точку проективного пространства, не лежащую в плоскости коники. Деривационные формулы имеют вид:

$$dM_\alpha = \tau_\alpha^\beta M_\beta, \tag{1.1}$$

причем формы Пфаффа τ_α^β удовлетворяют уравнениям структуры проективного пространства

$$D\tau_\alpha^\beta = [\tau_\alpha^\gamma\tau_\gamma^\beta]. \tag{1.2}$$

Так как точки M_i лежат на характеристике плоскости $x^4 = 0$, то

$$\tau_i^4 = 0. \tag{1.3}$$

Уравнения коники относительно этого репера записываются в виде:

$$(x^3)^2 - 2px^1x^2 = 0, \ x^4 = 0, \ p \neq 0. \tag{1.4}$$

Система уравнений для определения фокальных семейств и фокальных поверхностей конгруэнции имеет вид:

$$(x^3)^2 - 2px^1x^2 = 0,\ x^4 = 0,\ \tau^2 x^3 = 0 \tag{1.5}$$

$$\tau_1^2 (x^1)^2 + \tau_2^1 (x^2)^2 + x^3 \left[x^1 \left(\tau_3^2 - \frac{1}{p} \tau_1^3 \right) + \right.$$

$$\left. + x^2 \left(\tau_3^1 - \frac{1}{p} \tau_2^3 \right) - 2\tau^1 x^1 x^2 = 0, \right.$$

где обозначено

$$\tau^1 = \frac{1}{2} (d \ln p - \tau_\kappa^\kappa) + \tau_3^3,\ \tau^2 = \tau_3^4.$$

При фиксации независимых первичных параметров u, v конгруэнции фиксируются точки M_i, M_3 и коника C. Поэтому формы Пфаффа τ^i, $\tau_i^j (i \neq j)$, τ_i^3, τ_3^i являются главными. В силу перечисленных выше при определении конгруэнции T условий 1 и 3 формы Пфаффа τ^i линейно независимы, и мы можем, учитывая (1.3), положить:

$$\tau_i^j = \Gamma_{i\kappa}^j \tau^\kappa,\ \tau_i^3 = \Gamma_{i2}^3 \tau^2,\ \tau_3^i = \Gamma_{3\kappa}^i \tau^\kappa \tag{1.6}$$

Здесь и в дальнейшем условимся считать $i \neq j$ и по индексам i и j не суммировать.

Дифференцируя внешним образом уравнения (1.6), получаем:

$$[\Delta\Gamma_{i\kappa}^j \tau^\kappa] = 0,\ [\Delta\Gamma_{i2}^3 \tau^2] = 0,\ [\Delta\Gamma_{3\kappa}^i \tau^\kappa] = 0. \tag{1.7}$$

где

$$\Delta\Gamma_{i1}^j = d\Gamma_{i1}^j - \Gamma_{i1}^j (\tau_i^i - \tau_j^j),\ \Delta\Gamma_{31}^i = d\Gamma_{31}^i - \Gamma_{31}^i (\tau_3^3 - \tau_i^i),$$

$$\Delta\Gamma_{i2}^j = d\Gamma_{i2}^j - \Gamma_{i2}^j (\tau_i^i - \tau_j^j - \tau_3^3 + \tau_4^4) - \Gamma_{i1}^j \tau_4^3 +$$

$$+ \left(\frac{3}{2} \Gamma_{i1}^j \Gamma_{31}^\kappa \Gamma_{\kappa 2}^3 + \Gamma_{31}^j \Gamma_{i2}^3 \right) \tau^1,$$

$$\Delta\Gamma_{i2}^3 = d\Gamma_{i2}^3 - \Gamma_{i2}^3 (\tau_i^i - 2\tau_3^3 + \tau_4^4) - \Gamma_{i1}^j \Gamma_{j2}^3 \tau^1, \tag{1.8}$$

$$\Delta\Gamma_{32}^i = d\Gamma_{32}^i - \Gamma_{32}^i (\tau_4^4 - \tau_i^i) + \tau_4^i - \Gamma_{31}^i \tau_4^3 +$$

$$+ \left(\frac{3}{2} \Gamma_{31}^i \Gamma_{31}^\kappa \Gamma_{\kappa 2}^3 + \Gamma_{j1}^i \Gamma_{32}^j - \Gamma_{j2}^i \Gamma_{31}^j \right) \tau^1.$$

Анализируя замкнутую систему уравнений (1.3), (1.6), (1.7) получим, что конгруэнции T существуют и определяются с произволом четырех функций двух аргументов.

§ 2. Фокальные поверхности и фокальные семейства конгруэнции T

В силу (1.6) система уравнений (1.5) для определения фокусов и фокальных семейств конгруэнции T приводится к виду:

$$(x^3)^2 - 2px^1x^2 = 0,\ x^4 = 0,\ \tau^2 x^3 = 0,$$

$$\Gamma_{1\kappa}^2 \tau^\kappa (x^1)^2 + \Gamma_{2\kappa}^1 \tau^\kappa (x^2)^2 + x^3 x^1 \left(\Gamma_{3\kappa}^2 \tau^\kappa - \frac{1}{p} \Gamma_{12}^3 \tau^2 \right) +$$

$$+ x^3 x^2 \left(\Gamma_{3\kappa}^1 \tau^\kappa - \frac{1}{p} \Gamma_{22}^3 \tau^2 \right) - 2\tau^1 x^1 x^2 = 0. \tag{2.1}$$

Теорема 1. Точки M_i являются фокальными точками коники конгруэнции T.

Доказательство. Исключая из последних двух уравнений системы(2.1) отношение $\tau^1 : \tau^2$, получаем уравнения для определения фокусов коники:

$$x^3 [\Gamma_{11}^2 (x^1)^2 + \Gamma_{21}^1 (x^2)^2 + x^3 (x^1 \Gamma_{31}^2 + x^2 \Gamma_{31}^1) - 2x^1x^2] =$$

$$= 0,\ (x^3)^2 - 2px^1x^2 = 0,\ x^4 = 0. \tag{2.2}$$

Так как координаты точек M_i удовлетворяют этой системе, то M_i—фокальные точки.

Теорема 2. Конгруэнция T имеет одно счетверенное фокальное семейство $\tau^2 = 0$, которому соответствует четыре фокальные точки F_α коники C(1.4), лежащие на характеристической конике C^*.

Доказательство. Из уравнений (2 2) следует, что четыре фокуса коники C(1.4) определяются как точки пересечения ее с характеристической коникой C^*:

$$\Gamma_{11}^2 (x^1)^2 + \Gamma_{21}^1 (x^2)^2 + x^3 (x^1 \Gamma_{31}^2 + x^2 \Gamma_{3}^1) - 2x^1x^2 = 0,\ x^4 = 0. \tag{2.3}$$

Уравнения (2.1) показывают, что этим фокусам F_α соответствует единственное фокальное семейство

$$\tau^2 = 0 \tag{2.4}$$

Следствие. Конгруэнция T имеет три фокальных семейства. Действительно, подставляя координаты точек M_i в (2.1), находим два фокальных семейства, отличные, в общем случае, от $\tau^2 = 0$:

$$\Gamma_{i\kappa}^j \tau^\kappa = 0. \tag{2.5}$$

§ 3. Относительные и абсолютные инварианты

Система величин $\Gamma_1 = \{p,\ \Gamma_{i\kappa}^j,\ \Gamma_{i2}^3,\ \Gamma_{3\kappa}^i\}$ образует внутренний фундаментальный объект конгруэнции T. Фиксируя независимые первичные параметры, получаем с помощью уравнений (1.6) следующую систему дифференциальных уравнений внутреннего локального объекта [1]:

$$\delta\Gamma_{i1}^j = \Gamma_{i1}^j (\pi_i^i - \pi_j^j),\ \delta\Gamma_{31}^i = \Gamma_{31}^i (\pi_3^3 - \pi_i^i),$$

$$\delta\Gamma_{i2}^j = \Gamma_{i2}^j (\pi_i^i - \pi_j^j - \pi_3^3 + \pi_4^4) + \Gamma_{i1}^j \pi_4^3,$$

$$\delta\Gamma_{i2}^3 = \Gamma_{i2}^3 (\pi_i^i - 2\pi_3^3 + \pi_4^4).$$

$$\delta\Gamma_{32}^i = \Gamma_{32}^i (\pi_4^4 - \pi_i^i) - \pi_4^i + \Gamma_{31}^i \pi_4^3,$$

$$\delta \ln p = \pi_\kappa^\kappa - 2\pi_3^3. \tag{3.1}$$

Из этих уравнений непосредственно заключаем, что величины p, Γ_{i1}^j, Γ_{31}^i, Γ_{i2}^3 являются относительными инвариантами, а системы величин $(\Gamma_{i1}^j, \Gamma_{i2}^j)$, $(\Gamma_{31}^i, \Gamma_{32}^i)$ образуют двухкомпонентные квазитензоры [1]. При $p = 0$ коника C распадается. Этот случай мы исключили из рассмотрения.

Условие $\Gamma_{i1}^j = 0$ характеризует конгруэнции, у которых фокальная поверхность (M_i) — сдвоенная. Действительно, из уравнений (2.3) при $\Gamma_{i1}^j = 0$ следует, что точка M_i совпадает с одной из точек пересечения коники C с характеристической коникой C^*.

Условие $\Gamma^3_{i2} = 0$ характеризует конгруэнции, у которых фокальная точка M_i является точкой M ребра возврата огибающего торса, так как $M = \Gamma^3_{22} M_1 - \Gamma^3_{12} M_2$.

Условие $\Gamma^j_{3i} = 0$ характеризует конгруэнции, у которых прямая $M_i M_3$ касается характеристической коники C^*. Действительно, касательная к характеристической конике C^* в точке M_3 определяется уравнениями:

$$x^4 = 0,\ \Gamma^2_{31} x^1 + \Gamma^1_{31} x^2 = 0$$

С помощью относительных инвариантов p, Γ^j_{i1}, Γ^i_{31}, Γ^3_{i2} можно получить различные абсолютные инварианты. К их числу относятся величины:

$$A = \frac{1}{4} p \Gamma^1_{31} \Gamma^2_{31},\ B = \Gamma^2_{11} \Gamma^1_{21},\ C = -\frac{\Gamma^3_{12}}{\Gamma^2_{11} \Gamma^3_{22}}, \tag{3.2}$$

$$D = \frac{\Gamma^2_{31}}{\Gamma^2_{11} \Gamma^1_{31}}$$

Эти абсолютные инварианты характеризуются геометрически через сложные отношения следующим образом:

$$A = (M_i M_3;\ P_i Q_i),\ B = (M_1 M_2;\ N_1 N_2),$$

$$C = (M_1 M_2;\ M N_1),\ D = (M_1 M_2;\ N_1 N_2). \tag{3.3}$$

Здесь Q_i — точка пересечения прямой $M_i M_3$ с полярой точки M_j относительно C^*, P_i — точка пересечения прямой $M_i M_3$ с полярой точки Q_j относительно коники C, M — точка ребра возврата огибающего торса, N — точка пересечения прямой $M_1 M_2$ с касательной плоскостью к поверхности (M_3), N_i — точка пересечения прямой $M_1 M_2$ с полярой точки M_i относительно характеристической коники C^*.

Из геометрической характеристики инварианта A вытекает равенство

$$(M_1 M_3;\ P_1 Q_1) = (M_2 M_3;\ P_2 Q_2), \tag{3.4}$$

справедливое для общей конгруэнции T.

§ 4. Канонический репер невырожденной конгруэнции

Определение. Конгруэнция T называется невырожденной, если по крайней мере одна из точек M_i не принадлежит характеристической конике C^* и не является точкой ребра возврата огибающего торса.

Из геометрической характеристики нулевых значений относительных инвариантов Γ^j_{i1}, Γ^3_{i2} вытекает, что для невырожденной конгруэнции T справедливы неравенства:

$$p \neq 0,\ \Gamma^2_{11} \neq 0,\ \Gamma^3_{12} \neq 0 \tag{4.1}$$

Здесь мы учли возможность изменения нумерации вершин $M_1 M_2$. Система уравнений (3.1) внутреннего локального объекта при выполнении этих неравенств дает возможность осуществить следующую фиксацию репера:

$$p = 1,\ \Gamma^2_{11} = 1,\ \Gamma^3_{12} = 1,\ \Gamma^2_{12} = 0,\ \Gamma^1_{32} = 0,\ \Gamma^2_{32} = 0. \tag{4.2}$$

Если учесть условие эквипроективности

$$(M_1 M_2 M_3 M_4) = 1, \tag{4.3}$$

то все вторичные параметры оказываются зафиксированными, и репер становится каноническим.

Деривационные формулы (1.2) канонического репера имеют вид:

$$dM_1 = \Gamma^1_{1\kappa} \tau^\kappa M_1 + \tau^1 M_2 + \tau^2 M_3,\ dM_2 = \Gamma^2_{2\kappa} \tau^\kappa M_2 + \Gamma^1_{2\kappa} \tau^\kappa M_1 +$$
$$+ \Gamma^3_{22} \tau^2 M_3,\ dM_3 = \Gamma^3_{3\kappa} \tau^\kappa M_3 + (\Gamma^1_{31} M_1 + \Gamma^2_{31} M_2) \tau^1 + \tau^2 M_4,\ dM_4 = \Gamma^\alpha_{4\kappa} \tau^\kappa M_\alpha,$$
$$\Gamma^\alpha_{\alpha\kappa} = 0. \tag{4.4}$$

Имеем:

$$D\tau^1 = m^1 [\tau^1 \tau^2],\ D\tau^2 = m^2 [\tau^1 \tau^2], \tag{4.5}$$

где

$$m^1 = \frac{3}{2} \left(\Gamma^1_{31} + \Gamma^2_{31} \Gamma^3_{22} \right) - \Gamma^3_{41},\ m^2 = \Gamma^{31}_{3} - \Gamma^{41}_{4} \tag{4.6}$$

Уравнения структуры (1.2) приводят к следующей системе конечных и внешних квадратичных уравнений:

$$m^1 = \Gamma^2_{22} - \Gamma^1_{12} - \Gamma^2_{31},\ m^2 = \Gamma^1_{11} - \Gamma^3_{31} + \Gamma^3_{22}, \tag{4.7}$$

$$[d\Gamma^{\bar p}_{p\kappa} \tau^\kappa] + m^{\bar p}_p [\tau^1 \tau^2] = 0,\ [d\Gamma^1_{2\kappa} \tau^\kappa] + m^1_2 [\tau^1 \tau^2] = 0,$$
$$[d\Gamma^3_{22} \tau^2] + m^3_2 [\tau^1 \tau^2] = 0,\ [d\Gamma^1_{31} \tau^1] + m^1_3 [\tau^1 \tau^2] = 0,$$
$$[d\Gamma^2_{31} \tau^1] + m^2_3 [\tau^1 \tau^2] = 0,\ [d\Gamma^{\bar p}_{4\kappa} \tau^\kappa] + m^{\bar p}_4 [\tau^1 \tau^2] = 0,$$
$$\bar p = 1,\ 2,\ 3. \tag{4.8}$$

Здесь

$$m^1_1 = \Gamma^1_{11} m^1 + \Gamma^1_{12} m^2 + \Gamma^1_{31} - \Gamma^1_{22},$$
$$m^2_2 = \Gamma^2_{21} m^1 + \Gamma^2_{22} m^2 + \Gamma^1_{22} + \Gamma^3_{22} \Gamma^2_{31},$$
$$m^3_3 = \Gamma^3_{31} m^1 + \Gamma^3_{32} m^2 - \Gamma^1_{31} - \Gamma^2_{31} \Gamma^3_{22} + \Gamma^2_{41},$$
$$m^3_2 = \Gamma^3_{22} m^2 + \Gamma^3_{22} (\Gamma^3_{31} - \Gamma^2_{21}) + \Gamma^1_{21},$$
$$m^2_3 = \Gamma^?_{31} m^1 + \Gamma^2_{31} (\Gamma^3_{32} - \Gamma^2_{22}) - \Gamma^2_{41} + \Gamma^1_{32},$$
$$m^1_2 = \Gamma^1_{21} m^1 + \Gamma^1_{22} m^2 + \Gamma^1_{22} (\Gamma^1_{11} - \Gamma^2_{21}) - \Gamma^1_{21} (\Gamma^1_{12} - \Gamma^2_{22}) + \Gamma^3_{22} \Gamma^1_{31},$$
$$m^1_3 = \Gamma^1_{31} m^1 + \Gamma^1_{31} (\Gamma^3_{32} - \Gamma^1_{12}) + \Gamma^1_{41} - \Gamma^2_{31} \Gamma^1_{22},$$
$$m^1_4 = \Gamma^1_{41} m^1 + \Gamma^1_{42} m^2 + \Gamma^1_{42} (\Gamma^1_{11} - \Gamma^4_{41}) - \Gamma^1_{41} (\Gamma^1_{12} - \Gamma^4_{42}) - \Gamma^2_{41} \Gamma^1_{22} +$$
$$+ \Gamma^2_{42} \Gamma^1_{21} + \Gamma^3_{42} \Gamma^1_{31},$$
$$m^2_4 = \Gamma^2_{41} m^1 + \Gamma^2_{42} m^2 + \Gamma^2_{41} (\Gamma^4_{42} - \Gamma^2_{22}) - \Gamma^2_{42} (\Gamma^4_{41} - \Gamma^2_{21}) + \Gamma^1_{42} + \Gamma^2_{31} \Gamma^3_{42},$$
$$m^3_4 = \Gamma^3_{41} m^1 + \Gamma^3_{42} m^2 + \Gamma^3_{41} (\Gamma^4_{42} - \Gamma^3_{32}) - \Gamma^3_{42} (\Gamma^4_{41} - \Gamma^3_{31}) - \Gamma^3_{22} \Gamma^2_{41} - \Gamma^1_{41}.$$

Так как вершины M_i, M_3 фиксированы геометрически, то для геометрической характеристики канонического репера $\{M_\alpha\}$ достаточно указать положение вершины M_4.

Из деривационных формул (5.4) непосредственно вытекает, что вершина M_4 выбрана на касательной к линии $\tau^1 = 0$ поверхности (M_3) таким образом, чтобы характеристика плоскости $(M_1 M_2 M_4)$ проходила через точку M ребра возврата огибающего торса.

ЛИТЕРАТУРА

1. Лаптев Г. Ф. Дифференциальная геометрия погруженных многообразий. Труды Моск. матем. общества, 2, 1953, 275—282.

ТРУДЫ ТОМСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА
имени В. В. КУЙБЫШЕВА

Том 168 Серия механико-математическая

В. А. РОМАНОВИЧ

ПАРЫ A_2 КОНГРУЭНЦИЙ

Рассмотрим в P_3 пару конгруэнций $(A_1A_2)-(A_3A_4)$. Поместим вершины A_1 и A_2 координатного тетраэдра в фокусы конгруэнции (A_1A_2), а вершины A_3 и A_4 в точки пересечения фокальных плоскостей конгруэнции (A_1A_2) с лучом конгруэнции (A_3A_4). Пусть при этом фокальная плоскость, соответствующая фокусу A_1, пересекает луч A_3A_4 в точке A_3. Отсюда:

$$\omega_1^4=\omega_2^3=0,\ \omega_3^1=a_3^1\omega_1^3+b_3^1\omega_2^4,\ \omega_4^1=a_4^1\omega_1^3+b_4^1\omega_2^4,$$
$$\omega_3^2=a_3^2\omega_1^3+b_3^2\omega_2^4,\ \omega_4^2=a_4^2\omega_1^3+b_4^2\omega_2^4.$$

Те пары конгруэнций, у которых конгруэнция (A_1A_2) параболическая, исключаются из рассмотрения. Потребуем, чтобы произвольное одномерное подмногообразие данной пары конгруэнций было параболической парой линейчатых поверхностей [2]. Тогда должно быть:

$$a_3^1=0,\ b_4^2=0,\ a_4^1a_3^2=0,\ b_3^2b_4^1=0,$$
$$(b_3^1-a_4^2)^2+4(b_4^1a_3^2+a_4^1b_3^2)=0.$$

Здесь возможны два геометрически различных случая:

$$1)\ a_3^1=0,\ b_4^2=0,\ a_4^1=0,\ b_4^1=0,\ b_3^1=a_4^2,\ a_3^2\neq0,\ b_3^2\neq0,$$
$$2)\ a_4^1=0,\ b_3^2=0,\ a_3^1=0,\ b_4^2=0,$$
$$(b_3^1-a_4^2)^2+4b_4^1a_3^2=0,\ (b_4^1)^2+(a_3^2)^2\neq0.$$

В первом случае получается пара A_1 конгруэнций, которая рассмотрена в работе [3]. Во втором случае получается новая пара конгруэнций, являющаяся предметом рассмотрения в данной статье. Будем называть ее парой A_2. Она характеризуется следующей системой уравнений Пфаффа:

$$\omega_1^4=0,\ \omega_2^3=0,\ \omega_4^1=b_4^1\omega_2^4,\ \omega_3^2=a_3^2\omega_1^3,\ \omega_3^1=b_3^1\omega_2^4,\ \omega_4^2=a_4^2\omega_1^3,\qquad(1)$$

и конечными соотношениями:

$$(b_3^1-a_4^2)^2+4b_4^1a_3^2=0,\ (b_4^1)^2+(a_3^2)^2\neq0.$$

Продифференцировав внешним образом уравнения (1), получим:

$$\left.\begin{aligned}&[\omega_1^2\omega_2^4]+[\omega_1^3\omega_3^4]=0,\ [\omega_2^1\omega_1^3]-[\omega_4^3\omega_2^4]=0,\\&[\Delta b_3^1,\omega_2^4]=0,\ [\Delta a_4^2,\omega_1^3]=0,\ [\Delta b_4^1,\omega_2^4]=0,\ [\Delta a_3^2,\omega_1^3]=0,\end{aligned}\right\}\qquad(2)$$

причем:
$$2(b_3^1-a_4^2)(\Delta b_3^1-\Delta a_4^2)+4a_3^2\Delta b_4^1+4b_4^1\Delta a_3^2=0,$$

где
$$\Delta b_3^1=db_3^1+b_3^1(\omega_1^1+\omega_2^2-\omega_3^3-\omega_4^4)-b_4^1\omega_3^4+a_3^2\omega_4^3,$$
$$\Delta a_4^2=da_4^2+a_4^2(\omega_1^1+\omega_2^2-\omega_3^3-\omega_4^4)-a_3^2\omega_4^3+b_4^1\omega_3^4,$$
$$\Delta b_4^1=db_4^1+b_4^1(\omega_1^1+\omega_2^2-2\omega_4^4)-(b_3^1-a_4^2)\omega_4^3,$$
$$\Delta a_3^2=da_3^2+a_3^2(\omega_1^1+\omega_2^2-2\omega_3^3)-(a_4^2-b_3^1)\omega_3^4.$$

Характеристическая система уравнений (2) состоит из семи характеристических форм: ω_1^2, ω_2^1, ω_3^4, ω_4^3, Δb_3^1, Δa_4^2, Δb_4^1. Следовательно, пары A_2 конгруэнций существуют с произволом одной функции двух аргументов.

Из соотношений (1) следует, что фокальные плоскости конгруэнции (A_3A_4) проходят через фокусы конгруэнции (A_1A_2). Фокусы конгруэнций (A_1A_2) и (A_3A_4), расположенные в одной фокальной плоскости конгруэнции (A_3A_4), назовем соответствующими. Из тех же соотношений (1) получаем также, что торсы пары A_2 соответствуют накрест, то есть соответствуют торсы, имеющие точки возврата не в соответствующих фокусах.

Отметим, прежде всего, два частных класса пар A_2 конгруэнций.

1) Положив в (1) $b_4^1=0$, получим пары A_2^1, характеризующиеся уравнениями:

$$\omega_1^4=\omega_2^3=0,\ \omega_4^1=0,\ \omega_3^2=a_3^2\omega_1^3,$$
$$\omega_3^1=a_4^2\omega_2^4,\ \omega_4^2=a_4^2\omega_1^3,\ \omega_3^2\neq0.$$

$$\left.\begin{aligned}&[\omega_3^4,\omega_1^3]-[\omega_1^2,\omega_2^4]=0,\ [\omega_2^1,\omega_1^3]-[\omega_4^3,\omega_2^4]=0,\\&[da_4^2+a_4^2(\omega_1^1+\omega_2^2-\omega_3^3-\omega_4^4)+a_3^2\omega_4^3,\omega_2^4]=0,\\&[da_4^2+a_4^2(\omega_1^1+\omega_2^2-\omega_3^3-\omega_4^4)-a_3^2\omega_4^3,\omega_1^3]=0,\\&[da_3^2+a_3^2(\omega_1^1+\omega_2^2-2\omega_3^3),\omega_1^3]=0.\end{aligned}\right\}\qquad(3)$$

Имеем пять независимых квадратичных уравнений на шесть характеристических форм:

$$\omega_3^4,\omega_1^2,\omega_2^1,\omega_4^3,\Delta a_4^2\equiv da_4^2+a_4^2(\omega_1^1+\omega_2^2-\omega_3^3-\omega_4^4),$$
$$\Delta a_3^2\equiv da_3^2+a_3^2(\omega_1^1+\omega_2^2-2\omega_3^3).$$

Следовательно, произвол пары A_2^1 конгруэнций — одна функция двух аргументов. Пары A_2^1 конгруэнций выделяются из пар A_2 тем, что на лучах пары A_2 конгруэнций имеется по одному (и только по одному) такому фокусу, что соответствующие им фокальные плоскости пересекаются по прямой, проходящей через эти фокусы. В нашем репере эта прямая A_2A_4.

2) Положив в (1) $b_3^1=0$, получим пары A_2^2, характеризующиеся уравнениями:

$$\omega_1^4=\omega_2^3=0,\ \omega_4^1=b_4^1\omega_2^4,\ \omega_3^2=a_3^2\omega_1^3,\ \omega_3^1=0,\ \omega_4^2=a_4^2\omega_1^3,$$
$$[\omega_1^2,\omega_2^4]+[\omega_1^3,\omega_3^4]=0,\ [\omega_2^1,\omega_1^3]-[\omega_4^3,\omega_2^4]=0,$$
$$[-b_4^1\omega_3^4+a_3^2\omega_4^3,\omega_2^4]=0,\ [\Delta a_4^2,\omega_1^3]=0,$$
$$[\Delta b_4^1,\omega_2^4]=0,\quad[\Delta a_3^2,\omega_1^3]=0.$$

$$(a_4^2)^2 + 4\,b_4^1 a_3^2 = 0,\ b_4^1 a_3^2 \neq 0,$$

$$-2\,a_4^2(-b_4^1\omega_3^4 + a_3^2\omega_4^3 - \Delta a_4^2) + 4\,a_3^2\,\Delta\,b_4^1 + 4\,b_4^1\,\Delta\,a_3^2 = 0.$$

Характеристические формы этой системы суть: ω_1^2, ω_2^1, ω_3^4, ω_4^3, Δa_4^2, Δb_4^1. Следовательно, произвол пары A_2 конгруэнций — шесть функций одного аргумента. Пары A_2^2 конгруэнций выделяются из пар A_2 тем, что одна (и только одна) пара несоответствующих фокусов пары A_2 расположена в одной фокальной плоскости конгруэнции (A_1A_2). Легко видеть, что не существует пар A_2 конгруэнций, являющихся одновременно и парами A_2^1, и парами A_2^2.

Прямая, соединяющая квазифлекнодальные [2] точки пары соответствующих линейчатых поверхностей пары A_2^1 конгруэнций, неподвижна при переходе от одной пары соответствующих линейчатых поверхностей пары A_2^1 конгруэнций к другой. Если же пара A_2 не является парой A_2^1, то вышеупомянутые прямые образуют плоский пучок с центром на одном из лучей пары A_2. В нашем репере эти прямые определяются точками

$$K = 2\,\xi\,b_4^1 A_1 - (b_3^1 - a_4^2)\,A_2 \ \text{и}\ K' = 2\,b_4^1 A_3 - (b_3^1 - a_4^2)\,A_4,$$

причем $\omega_2^4 = \xi\,\omega_1^3$.

Теорема 1. Если одна и только одна неголономная поверхность*), присоединенная к конгруэнциям пары $(A_1A_2)-(A_3A_4)$, — параболическая [4] и торсы пары соответствуют, то пара конгруэнций $(A_1A_2)-(A_3A_4)$ есть пара A_2 и обратно.

Доказательство. Обозначим неголономную поверхность, присоединенную к конгруэнции (A_1A_2) через H_3, а неголономную поверхность, присоединенную к конгруэнции (A_3A_4), через H_3'.

Найдем уравнение асимптотических линий неголономной поверхности H_3 в точке $P = A_1 + \lambda A_2$. Характеристика плоскости, проходящей через точку P и луч A_3A_4 при некотором смещении пары лучей A_1A_2, A_3A_4 имеет вид:

$$\begin{gathered} x^2 - \lambda\,x^1 = 0, \\ (\omega_1^1 + \lambda\,\omega_2^1)\,x^2 - x^1(\omega_1^2 + d\lambda + \lambda\,\omega_2^2) + \\ + x^3(\lambda\,\omega_3^1 - \omega_3^2) + x^4(\lambda\,\omega_4^1 - \omega_4^2) = 0. \end{gathered} \tag{4}$$

Для того, чтобы эта характеристика проходила через точку $P = A_1 + \lambda A_2$, необходимо:

$$d\lambda = \lambda^2\,\omega_2^1 - \omega_1^2 - \lambda\,(\omega_2^2 - \omega_1^1).$$

Тогда уравнения (4) запишутся так:

$$x^2 - \lambda\,x^1 = 0,$$

$$x^3(\lambda\,\omega_3^1 - \omega_3^2) + x^4(\lambda\,\omega_4^1 - \omega_4^2) = 0.$$

Так как $dP = (\omega_1^1 + \lambda\,\omega_2^1)\,P + (\omega_1^3 + \lambda\,\omega_2^3)\,A_3 + (\omega_1^4 + \lambda\,\omega_2^4)\,A_4$, то условие того, что направление смещения плоскости PA_3A_4 совпадает с характеристикой, имеет вид:

$$\frac{\omega_1^4 + \lambda\,\omega_2^4}{\omega_1^3 + \lambda\,\omega_2^3} = -\frac{\omega_3^2 - \lambda\,\omega_3^1}{\omega_4^2 - \lambda\,\omega_4^1},$$

*) Неголономной поверхностью, присоединенной к конгруэнции (A_1A_2) пары $(A_1A_2)-(A_3A_4)$ называется трехпараметрическое семейство плоских элементов, образованных точками лучей A_1A_2 и плоскостями, проходящими через эти точки и противоположный луч A_3A_4.

или

$$\begin{gathered} \lambda^2(\omega_2^4\,\omega_4^1 + \omega_2^3\,\omega_3^1) + \lambda\,(\omega_1^3\,\omega_3^1 + \omega_1^4\,\omega_4^1 - \omega_2^4\,\omega_4^2 - \\ - \omega_2^3\,\omega_3^2) - (\omega_1^4\,\omega_4^2 + \omega_1^3\,\omega_3^2) = 0. \end{gathered} \tag{5}$$

Это и есть искомое уравнение асимптотических линий. При заданном смещении это есть уравнение для определения квазифлекнодальных точек на луче A_1A_2. Мы можем поэтому дать другую геометрическую характеристику асимптотических направлений в точке $P = A_1 + \lambda A_2$ неголономной поверхности H_3: это суть направления, касающиеся линий пересечения плоскости PA_3A_4 с линейчатыми поверхностями, принадлежащими конгруэнции (A_1A_2) и имеющими точку P квазифлекнодальной точкой.

Положим

$$\omega_2^4 = \mu\,\omega_1^3.$$

Тогда уравнение (5) примет вид:

$$\mu^2\{\lambda^2 b_4^1 - \lambda\,b_4^2\} + \mu\,\{\lambda^2 a_4^1 + \lambda\,(b_3^1 - a_4^2) - b_3^2\} + \lambda\,a_3^1 - a_3^2 = 0.$$

Если λ удовлетворяет условию:

$$\begin{gathered} \{\lambda^2 a_4^1 + \lambda\,(b_3^1 - a_4^2) - b_3^2\}^2 - 4\,\lambda\,\{\lambda\,b_4^1 - \\ - b_4^2\}\,\{\lambda\,a_3^1 - a_3^2\} = 0, \end{gathered} \tag{6}$$

то в точке $A_1 + \lambda A_2$ асимптотические линии — сдвоенные. Следовательно, на каждом луче пары конгруэнций существует вообще четыре таких точки.

Проводя аналогичные рассуждения для H_3', получим:

$$\begin{gathered} (\lambda')^2(\omega_4^2\,\omega_2^3 + \omega_4^1\,\omega_1^3) + \lambda'(\omega_1^3\,\omega_3^1 + \omega_2^3\,\omega_3^2 - \\ - \omega_2^4\,\omega_4^2 - \omega_1^4\,\omega_4^1) - (\omega_3^2\,\omega_2^4 + \omega_3^1\,\omega_1^4) = 0, \end{gathered}$$

или, полагая $\omega_2^4 = \mu'\,\omega_1^3$:

$$\begin{gathered} (\mu')^2\{-b_3^2 - \lambda'\,b_4^2\} + \mu'\,\{(\lambda')^2\,b_4^1 + \lambda'\,(b_3^1 - a_4^2) - \\ - a_3^2\} + (\lambda')^2\,a_4^1 + \lambda'\,a_3^1 = 0, \\ \{(\lambda')^2\,b_4^1 + \lambda'\,(b_3^1 - a_4^2) - a_3^2\}^2 + 4\,\lambda'\,\{\lambda'\,a_4^1 + a_3^1\}\,\{b_3^2 + \lambda'\,b_4^2\} = 0. \end{gathered}$$

Потребуем теперь, чтобы любая точка луча A_1A_2 удовлетворяла условию (6), то есть, чтобы неголономная поверхность H_3 была параболической (при этом H_3' — не параболическая). Тогда возможны два случая:

1) $a_4^1 = 0,\ b_3^2 = 0,\ b_4^1 = 0,\ b_4^2 = 0,\ b_3^1 = a_4^2,\ a_3^1 \neq 0.$

2) $a_4^1 = 0,\ b_3^2 = 0,\ a_3^1 = 0,\ b_4^2 = 0,\ (b_3^1 - a_4^2)^2 + 4\,b_4^1\,a_3^2 = 0,$

$$(b_4^1)^2 + (a_3^2)^2 \neq 0.$$

Второй случай дает пары A_2 конгруэнций. В первом случае торсу $\omega_2^4 = 0$ конгруэнции (A_1A_2) соответствует неразвертывающаяся поверхность второй конгруэнции (A_3A_4). Теорема доказана.

Теорема 2. Если обе неголономные поверхности H_3 и H_3' — параболические, то конгруэнции (A_1A_2) и (A_3A_4) образуют пару T [1], которая единственным образом разлагается на ∞^1 развертывающихся поверхностей.

Доказательство. Если неголономные поверхности H_3 и H_3' параболические, то должно быть

$$a^1_4 = 0,\ b^2_3 = 0,\ b^1_4 a^1_3 = 0,\ b^2_4 a^2_3 = 0,$$
$$(b^1_3 - a^2_4)^2 + 4\,b^1_4\,a^2_3 + 4\,b^2_4\,a^1_3 = 0;$$
$$b^1_4 = 0,\ a^2_3 = 0,\ a^1_4 b^2_4 = 0,\ a^1_3\,b^2_3 = 0,$$
$$(b^1_3 - a^2_4)^2 + 4\,a^1_4\,b^2_3 + 4\,a^1_3\,b^2_4 = 0.$$

Отсюда:

$$a^1_4 = 0,\ b^1_4 = 0,\ b^2_3 = 0,\ a^2_3 = 0,\ (b^1_3 - a^2_4)^2 + 4\,a^1_3 b^2_4 = 0.$$

Так как теперь $\omega^1_4 = \omega^2_3 = \omega^4_1 = \omega^3_2 = 0$, то конгруэнции (A_1A_2) и (A_3A_4) образуют пару T. Уравнение для определения расслояемых пар линейчатых поверхностей пары T имеет вид:

$$\omega^3_1\,\omega^1_3 - \omega^4_2\,\omega^2_4 = 0,$$

или

$$a^1_3\,(\omega^3_1)^2 - (b^1_3 - a^2_4)\,\omega^3_1\,\omega^4_2 - b^2_4\,(\omega^4_2)^2 = 0. \tag{7}$$

Уравнение (7) дает сдвоенное направление только в случае, если

$$(b^1_3 - a^2_4)^2 + 4\,a^1_3\,b^2_4 = 0.$$

Отсюда следует вторая часть теоремы.

Конгруэнции, входящие в пару A_2, не являются произвольными, так как произвольная конгруэнция зависит от двух функций двух аргументов, а произвол существования пары A_2 — одна функция двух аргументов. В дальнейшем конгруэнции, входящие в пару A_2, мы будем называть конгруэнциями A_2.

Теорема 3. Если дана произвольная поверхность, то с произволом пяти функций одного аргумента можно провести на ней семейство линий, касательные к которым образуют конгруэнцию A_2 (не являющуюся конгруэнцией A^1_2).

Доказательство. Отнесем произвольную поверхность A_1 к тетраэдру первого порядка, тогда:

$$\omega^4_1 = 0,\ [\omega^2_1, \omega^4_2] + [\omega^3_1, \omega^4_3] = 0.$$

Внесем это в систему уравнений (1), (2); тогда получим:

$$\begin{gathered}\omega^3_2 = 0,\ \omega^1_3 = b^1_3\omega^4_2,\ \omega^2_4 = a^2_4\omega^3_1,\ \omega^1_4 = b^1_4\omega^4_2,\ \omega^2_3 = a^2_3\omega^3_1.\\ [\omega^1_2, \omega^3_1] - [\omega^3_4, \omega^4_2] = 0,\ [\Delta\, b^1_3, \omega^4_2] = 0,\ [\Delta\, a^2_4, \omega^3_1] = 0,\\ [\Delta\, b^1_4, \omega^4_2] = 0,\ [\Delta\, a^2_3, \omega^3_1] = 0,\end{gathered} \tag{8}$$

$$2\,(b^1_3 - a^2_4)\,(\Delta\, b^1_3 - \Delta\, a^2_4) + 4\,a^2_3\,\Delta\, b^1_4 + 4\,b^1_4\,\Delta\, a^2_3 = 0. \tag{8'}$$

Характеристические формы системы (8) суть: ω^1_2, ω^3_4, $\Delta\, b^1_3$, $\Delta\, a^2_4$, $\Delta\, b^1_4$. Число независимых квадратичных уравнений равно пяти. Отсюда и следует теорема.

Определим теперь произвол, с которым определяется пара A_2, если задана одна из составляющих ее конгруэнций, например, конгруэнция (A_1A_2). При этом исключим из рассмотрения пары A^2_2. Отнесем конгруэнцию (A_1A_2) к тетраэдру первого порядка [1], тогда:

$$\omega^4_1 = 0,\ \omega^3_2 = 0,\ [\omega^2_1, \omega^4_2] + [\omega^3_1, \omega^4_3] = 0,\ [\omega^1_2, \omega^3_1] - [\omega^3_4, \omega^4_2] = 0.$$

Внесем это в уравнения (1) и (2). Тогда получим систему для определения конгруэнции (A_3A_4):

$$\omega^1_3 = b^1_3\omega^4_2,\ \omega^2_4 = a^2_4\omega^3_1,\ \omega^1_4 = b^1_4\omega^4_2,\ \omega^2_3 = a^2_3\omega^3_1.$$
$$[\Delta\, b^1_3, \omega^4_2] = 0,\ [\Delta\, a^2_4, \omega^3_1] = 0,\ [\Delta\, b^1_4, \omega^4_2] = 0,\ [\Delta\, a^2_3, \omega^3_1] = 0.$$
$$2\,(b^1_3 - a^2_4)\,(\Delta\, b^1_3 - \Delta\, a^2_4) + 4\,a^2_3\,\Delta\, b^1_4 + 4\,b^1_4\,\Delta\, a^2_3 = 0. \tag{9}$$

Продолжая эту систему, получим разложения:

$$\Delta\, b^1_3 = b^1_{32}\omega^4_2,\ \Delta\, a^2_4 = a^2_{41}\omega^3_1,\ \Delta\, b^1_4 = b^1_{42}\omega^4_2,\ \Delta\, a^2_3 = a^2_{31}\omega^3_1, \tag{10}$$

причем в силу соотношения (8′) имеем:

$$(b^1_3 - a^2_4)\,b^1_{32} + 2\,a^2_3 b^1_{42} = 0,\ (a^2_4 - b^1_3)\,a^2_{41} + 2\,b^1_4 a^2_{31} = 0. \tag{11}$$

Внешнее дифференцирование соотношений (10) дает:

$$\begin{gathered}[db^1_{32} + b^1_{32}(\omega^1_1 + 2\omega^2_2 - \omega^3_3 - 2\omega^4_4) -\\ - \{2b^1_3\,(b^1_3 - a^2_4) - 2b^1_4 a^2_3 + \alpha' a^2_{31} + \alpha b^1_{42}\}\,\omega^3_1, \omega^4_2] = 0,\\ [da^2_{41} + a^2_{41}\,(2\omega^1_1 + \omega^2_2 - 2\omega^3_3 - \omega^4_4) -\\ - \{2a^2_4\,(a^2_4 - b^1_3) - 2a^2_3 b^1_4 + \alpha b^1_{42} - \alpha' a^2_{31}\}\,\omega^4_2, \omega^3_1] = 0,\\ [db^1_{42} + b^1_{42}\,(\omega^1_1 + 2\omega^2_2 - 3\omega^4_4) -\\ - (2b^1_4 b^1_3 - 4b^1_4 a^2_4 + \alpha' a^2_{41} - b^1_{32}\beta')\,\omega^3_1, \omega^4_2] = 0,\\ [da^2_{31} + a^2_{31}\,(2\omega^1_1 + \omega^2_2 - 3\omega^3_3) -\\ - (2a^2_3 a^2_4 - 4a^2_3 b^1_3 + \alpha\, b^1_{32} - a^2_{41}\,\beta)\,\omega^4_2, \omega^3_1] = 0.\end{gathered} \tag{12}$$

В силу соотношений (11) система (12) сводится к одному квадратичному уравнению, разрешение которого дает (при этом исключаются из рассмотрения пары A^1_2 и A^2_2):

$$\begin{gathered}a^2_{31} db^1_{42} + a^2_{31} b^1_{42}\,(\omega^1_1 + 2\omega^2_2 - 3\omega^3_3) =\\ = a^2_{31}\,\{2b^1_4\,(b^1_3 - 2a^2_4) + \alpha' a^2_{41} - \beta' b^1_{32}\}\,\omega^3_1 +\\ + [6\,\{(b^1_3)^2 - (a^2_4)^2\}\,(a^2_3\,\alpha' + b^1_4\,\beta) +\\ + b^1_{42}\,\{\beta a^2_{41} - \alpha b^1_{32} + a^2_3\,(a^2_4 + 13 b^1_3)\}]\,\omega^4_2,\end{gathered} \tag{13}$$

и одному конечному соотношению

$$b^1_{42} a^2_{31} = 6a^2_3 b^1_4\,(a^2_4 + b^1_3).$$

Внешнее дифференцирование уравнения (13) приводит к конечному соотношению между коэффициентами: a^2_3, b^1_4, b^1_3, a^2_4, b^1_{42}, α, α', β, β', γ, γ', β'_2, α'_2, β_1, α_1. Таким образом, конгруэнция (A_3A_4) определяется системой уравнений:

$$\omega^1_3 = b^1_3\omega^4_2,\ \omega^2_4 = a^2_4\omega^3_1,\ \omega^1_4 = b^1_4\omega^4_2,\ \omega^2_3 = a^2_3\omega^3_1,$$
$$\Delta\, b^1_3 = b^1_{32}\omega^4_2,\ \Delta\, a^2_4 = a^2_{41}\omega^3_1,\ \Delta\, b^1_4 = b^1_{42}\omega^4_2,\ \Delta\, a^2_3 = a^2_{31}\omega^3_1$$

и уравнением (13). Это система вполне интегрируема. Следовательно, при заданной конгруэнции (A_1A_2) конгруэнция (A_3A_4) определяется с произволом девяти констант.

Если пара A_2 является парой A^1_2, то имеют место уравнения (3), разрешив которые, получим:

$$\omega^4_3 = \alpha\omega^3_1 - \beta\omega^4_2,\ \omega^3_4 = \beta\omega^3_1 + \gamma\omega^4_2,$$

$$\omega_4^3 = -\beta'\omega_1^3 + \alpha'\omega_2^4, \quad \omega_2^1 = \gamma'\omega_1^3 + \beta'\omega_2^4.$$

$$da_4^2 + a_4^2(\omega_1^1 + \omega_2^2 - \omega_3^3 - \omega_4^4) + a_3^2\omega_4^3 = a_{4\,2}^2\omega_2^4, \tag{14}$$

$$da_4^2 + a_4^2(\omega_1^1 + \omega_2^2 - \omega_3^3 - \omega_4^4) - a_3^2\omega_4^3 = a_{4\,1}^2\omega_1^3,$$

$$da_3^2 + a_3^2(\omega_1^1 + \omega_2^2 - 2\omega_3^3) = s\omega_1^3. \tag{15}$$

В силу соотношений (14) имеем:

$$da_4^2 + a_4^2(\omega_1^1 + \omega_2^2 - \omega_3^3 - \omega_4^4) = a_3^2(\beta'\omega_1^3 + \alpha'\omega_2^4). \tag{16}$$

Продифференцировав (15) и (16) внешним образом, получим:

$$[ds + s(2\omega_1^1 + \omega_2^2 - 3\omega_3^3) + 2a_3^2(a_4^2 + \beta\beta' - \alpha\alpha')\omega_2^4, \omega_1^3] = 0, \tag{17}$$

$$[a_3^2 d\beta' + a_3^2\beta'(\omega_1^1 - \omega_4^4), \omega_1^3] +$$
$$+ [a_3^2 d\alpha' + a_3^2\alpha'(\omega_2^2 + \omega_3^3 - 2\omega_4^4) + s\alpha'\omega_1^3, \omega_2^4] = 0. \tag{18}$$

В обозначениях С. П. Финикова [1] (18) можно переписать так:

$$a_3^2[\Delta\beta', \omega_1^3] + \alpha' a_3^2[\Delta\alpha', \omega_2^4] + s\alpha'[\omega_1^3, \omega_2^4] = 0. \tag{18'}$$

Внешнее дифференцирование соотношения $\omega_4^3 = -\beta'\omega_1^3 + \alpha'\omega_2^4$ дает:

$$-[\Delta\beta', \omega_1^3] + \alpha'[\Delta\alpha', \omega_2^4] = 0. \tag{19}$$

Так как $a_3^2 \neq 0$, то из (18′) и (19) следует:

$$2\alpha' a_3^2[\Delta\alpha', \omega_2^4] + s\alpha'[\omega_1^3, \omega_2^4] = 0.$$

Следовательно, если $\alpha' \neq 0$, то

$$2\alpha' a_3^2\Delta\alpha' = x\omega_2^4 - s\alpha'\omega_1^3.$$

Сравнивая это с разложением [1]:

$$\Delta\alpha' = -\beta_2'\omega_1^3 + \alpha_2'\omega_2^4,$$

получим:

$$s = 2a_3^2\beta_2', \quad x = 2\alpha' a_3^2\alpha_2'.$$

Имеем:

$$ds = 2a_3^2 d\beta_2' + 2\beta_2' da_3^2.$$

Подставим это в (17), заменив da_3^2 по формуле (15). Получим:

$$[d\beta_2^1 + \beta_2^1(\omega_1^1 - \omega_3^3) + (a_4^2 + \beta\beta' - \alpha\alpha')\omega_2^4, \omega_1^3] = 0.$$

Это условие относится только к конгруэнции (A_1A_2). Для конгруэнции (A_3A_4) имеем следующие условия:

$$\omega_3^1 = a_4^2\omega_2^4, \quad \omega_4^2 = a_4^2\omega_1^3, \quad \omega_4^1 = 0, \quad \omega_3^2 = a_3^2\omega_1^3,$$

$$da_3^2 = s\omega_1^3 - a_3^2(\omega_1^1 + \omega_2^2 - 2\omega_3^3),$$

$$da_4^2 + a_4^2(\omega_1^1 + \omega_2^2 - \omega_3^3 - \omega_4^4) = a_3^2(\beta'\omega_1^3 + \alpha'\omega_2^4).$$

Таким образом, при заданной конгруэнции (A_1A_2) конгруэнция (A_3A_4) определяется с параметрическим произволом (шесть постоянных). Пусть $\alpha' = 0$. В этом случае фокальная поверхность A_2 есть торс. Уравнение (18′) перепишется в виде:

$$[\Delta\beta', \omega_1^3] = 0.$$

Следовательно, на s условий нет. Конгруэнция (A_3A_4) определяется системой уравнений:

$$\omega_3^1 = a_4^2\omega_2^4, \quad \omega_4^2 = a_4^2\omega_1^3, \quad \omega_4^1 = 0, \quad \omega_3^2 = a_3^2\omega_1^3,$$

$$da_4^2 + a_4^2(\omega_1^1 + \omega_2^2 - \omega_3^3 - \omega_4^4) = a_3^2(\beta'\omega_1^3 + \alpha'\omega_2^4).$$

$$[ds + s(2\omega_1^1 + \omega_2^2 + 3\omega_3^3) + 2a_3^2(a_4^2 + \beta\beta' - \alpha\alpha')\omega_2^4, \omega_1^3] = 0.$$

Поэтому конгруэнция (A_3A_4) в случае $\alpha' = 0$ определяется с произволом одной функции одного аргумента.

ЛИТЕРАТУРА

1. Фиников С. П.. Теория пар конгруэнций, М., 1956.
2. Ивлев Е. Т.. Пара линейчатых поверхностей в трехмерном проективном пространстве. Доклады научной конференции по математике и механике, Томск, 1960, стр. 50—51.
3. Романович В. А.. Об одном классе пар конгруэнций. Геометрический сборник, вып. 2 (Труды Томского ун-та, 161), стр. 21-28
4. Mihăilescu T.. Geometrie differentială proiectivă, 1958.

ТРУДЫ ТОМСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА
имени В. В. КУЙБЫШЕВА

Том 168 Серия механико-математическая

В. А. РОМАНОВИЧ

ПАРА ОДНОПАРАМЕТРИЧЕСКИХ СЕМЕЙСТВ $(p-1)$-МЕРНЫХ ПЛОСКОСТЕЙ В P_n, РАССЛОЯЕМАЯ ДВУМЯ СЕМЕЙСТВАМИ КРИВЫХ.

В этой работе рассматривается расслояемая пара однопараметрических семейств $(p-1)$-мерных плоскостей в P_n, являющаяся непосредственным обобщением понятия расслояемой пары линейчатых поверхностей в P_3, введенного С. П. Финиковым [1].

Пусть (A) и (A') два однопараметрических семейства $(p-1)$-мерных плоскостей в $P_n (n \geqslant 2p-1)$. Установим между плоскостями A и A' этих семейств взаимно-однозначное соответствие, сопоставляющее плоскости A плоскость A'. Предполагается, что плоскости A и A' не имеют общих точек.

Определение. Семейство (A) расслаивает семейство (A'), если существует семейство ∞^{p-1} линий L, принадлежащих p-мерной поверхности, описанной плоскостями семейства (A) таких, что их соприкасающиеся двумерные плоскости в точках пересечения с некоторой плоскостью семейства (A) пересекают соответствующую плоскость семейства (A') по прямой. Линии L называются расслояющими.

Теорема 1. Если не фокальное [2] семейство (A) расслаивает семейство (A'), то 1) пара $(A)-(A')$ вложена в пространство размерности $2p-1$, 2) семейство (A') не фокальное и 3) семейство (A') расслаивает семейство (A).

Доказательство. Поместим вершины $Q_1,\ldots,Q_p$ координатного $(n+1)$-эдра в плоскости A, вершины $Q_{p+1},\ldots Q_{2p}$ — в плоскости A', а остальные вершины $Q_{2p+1},\ldots,Q_{n+1}$ расположим таким образом в пространстве, чтобы точки $Q_1,\ldots,Q_{n+1}$ были линейно независимы. Положим:

$$dQ_K = v_K^M Q_M, \ (K,\ M = 1,2,\ldots n+1).$$

Пусть точка $R = x^i Q_i$ описывает одну из расслояемых линий. По определению расслояющих линий должно быть

$$(R,\ dR,\ Q_{p+1},\ldots,Q_{2p}) = 0, \tag{1}$$

$$(R,\ d^2R,\ Q_{p+1},\ldots,Q_{2p}) = 0. \tag{2}$$

Имеем:

$$dR = (dx^i + x^\kappa v_\kappa^i)\, Q_i + x^\kappa v_\kappa^{p+l}\, Q_{p+l} + $$
$$+ x^\kappa v_\kappa^s Q_s.\ (i,\ k,\ l = 1,\ 2,\ldots p;\ s = 2p+1,\ldots,n+1). \tag{3}$$

В силу этого соотношения (1) даст:

$$x^1 (dx^j + x^\kappa v_\kappa^j) - x^j (dx^1 + x^\kappa v_\kappa^1) = 0, \tag{4}$$

$$x^m v_m^s = 0,\ (j = 2,\ldots p;\ m = 1,2\ldots p). \tag{5}$$

Так как переменные x^i не должны быть связаны никакими конечными соотношениями, то:

$$v_m^s = 0, \tag{5'}$$

Из соотношений (4) найдем:

$$dx^j = \frac{x^j}{x^1} dx^1 + \frac{x^j x^\kappa}{x^1} v_\kappa^1 - x^\kappa v_\kappa^j, \tag{4'}$$

Следовательно,

$$dR = \frac{dx^1 + x^\kappa v_\kappa^1}{x^1} R + x^i v_i^{p+\kappa} Q_{p+\kappa}.$$

Отсюда

$$d^2R = d\left(\frac{dx^1 + x^\kappa v_\kappa^1}{x^1}\right) R + \frac{dx^1 + x^\kappa v_\kappa^1}{x^1} dR + x^i v_i^{p+\kappa} v_{p+\kappa}^l Q_l +$$
$$+ x^i v_i^{p+\kappa} v_{p+\kappa}^{p+m} Q_{p+m} + x^i v_i^{p+\kappa} v_{p+\kappa}^s Q_s + d(x^i v_i^{p+\kappa}) Q_{p+\kappa}.$$

Соотношение (2) теперь дает

$$x^1 x^l v_l^{p+\kappa} v_{p+\kappa}^j - x^j x^l v_l^{p+\kappa} v_{p+\kappa}^1 = 0, \tag{2'}$$

$$x^i v_i^{p+\kappa} v_{p+\kappa}^s = 0. \tag{2''}$$

Из (2'') получим:

$$v_i^{p+\kappa} v_{p+\kappa}^s = 0. \tag{2'''}$$

Если семейство (A) не фокальное, то ранг матрицы $\| v_i^{p+\kappa} \|$ равен p, следовательно, система (2''') имеет только нулевые решения, т. е.

$$v_{p+\kappa}^s = 0. \tag{2^{IV}}$$

Объединяя (5') и (2^{IV}), получаем:

$$dQ_a = v_a^b Q_b (a,\ b,\ c = 1,2,\ldots 2p).$$

Следовательно, пара $(A)-(A')$ расположена в пространстве размерности $2p+1$.

Уравнение (2') можно представить в виде:

$$(x^1)^2 v_1^{p+\kappa} v_{p+\kappa}^{\kappa_1} + x^1 x^{\kappa_1} (v_{\kappa_1}^{p+\kappa} v_{p+\kappa}^{\kappa_1} - v_1^{p+\kappa} v_{p+\kappa}^1) +$$
$$+ x^1 x^{l_1} v_{l_1}^{p+\kappa} v_{p+\kappa}^{\kappa_1} - x^{\kappa_1} x^{l_1} v_{l_1}^{p+\kappa} v_{p+\kappa}^1 = 0 \tag{6}$$

(i_1, j_1, $l_1 = 2,\ldots,p$; $l_1 \neq k_1$, по k_1, не суммировать!).

Если семейство (A) расслаивает семейство (A'), то коэффициенты при различных сочетаниях $x^1 x^\kappa$ равны нулю.

Следовательно, имеем:

$$v_l^{p+\kappa} v_{p+\kappa}^1 = 0. \tag{7'}$$

$$v_{j_1}^{p+\kappa} v_{p+\kappa}^{j_1} - v_1^{p+\kappa} v_{p+\kappa}^1 = 0, \tag{7''}$$

($i \neq l$, по j_1 не суммировать!).

Поместим вершины $Q_{p+1},\ldots Q_{2p}$ координатного $(n+1)$-эдра в точки пересечения касательных p-мерных плоскостей p-мерной поверхности (A) в точках $Q_1,\ldots,Q_p$ с плоскостью A'. Это можно сделать в силу того, что семейство (A) не фокальное. Тогда будем иметь:

$$v_i^{p+\kappa} = 0 \qquad (i \neq k) \tag{8}$$

Условия (7′) и (7″) примут вид:

$$v_i^{p+l} v_{p+l}^l = 0,$$

$$v_{j_1}^{p+j_1} v_{p+j_1}^{j_1} - v_1^{p+1} v_{p+1}^1 = 0$$

($i \neq l$; по i_1, j_1 не суммировать!).

Так как $v_i^{p+l} \neq 0$ (в противном случае семейство (A) фокальное), то

$$v_{p+l}^l = 0 \quad (i \neq l). \tag{9}$$

Произведя подстановку индексов

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & k & \dots & p \\ p+1 & p+2 & \dots & p+k & \dots & 2p \end{pmatrix},$$

найдем условия обратного расслоения:

$$v_{l+p}^{\kappa} v_{\kappa}^{l+p} = 0 \quad (i \neq l). \tag{10}$$

$$(v_{j_1+p}^{\kappa} v_{\kappa}^{j_1+p} - v_{p+1}^{\kappa} v_{\kappa}^{p+1} = 0, \tag{11}$$

(по j_1 не суммировать!).

В силу (8) и (9) соотношения (10) удовлетворены, а соотношения (11) принимают вид:

$$v_{j_1+p}^{j_1} v_{j_1}^{j_1+p} - v_{p+1}^1 v_1^{p+1} = 0,$$

которые удовлетворены в силу (7″). Если при этом семейство (A') фокальное, то по крайней мере одна из величин v_{l+p}^l, равна нулю, но тогда равна нулю по крайней мере одна из величин v_l^{l+p}, и следовательно, семейство (A) также фокальное, что невозможно. Следовательно, семейство (A') не может быть фокальным. Теорема доказана.

Т е о р е м а 2. Если фокальное порядка r [2] семейство (A) расслаивает семейство (A'), то последнее также фокальное порядка $q \geqslant p - r - 2$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Так как семейство (A) фокальное порядка r, то помещая вершины $Q_1, \dots Q_{r+1}$ на r-мерную характеристику плоскости A, будем иметь:

$$v_t^{p+\kappa} = 0 \quad (t = 1, \dots, r+1).$$

Условия расслоения семейством (A) семейства (A') примут вид:

$$v_\alpha^{p+\kappa} v_{p+\kappa}^l = 0,$$

$$v_\beta^{p+h} v_{p+\kappa}^s = 0, \quad (\alpha, \beta = r+2, \dots, p). \tag{12}$$

Для того, чтобы семейство (A') было фокальным порядка q, необходимо и достаточно, чтобы ранг матрицы

$$\| v_{p+\kappa}^{t'} \|, \ (t' = 1, 2 \dots p, \ 2p+1, \dots, n+1) \tag{14}$$

был равен $p - q - 1$. В силу (11) и (12) ранг матрицы (14) равен $R \leqslant p - (p - r - 1) = r + 1$. Следовательно, семейство (A') фокальное порядка $q \geqslant p - r - 2$.

С л е д с т в и е. Если семейство (A) расслаивает семейство (A'), фокальное порядка r, то семейство (A') — фокальное порядка $r' \geqslant p - r - 2$.

О п р е д е л е н и е. Линейное пространство *) минимальной размерности, содержащее плоскость A и бесконечно близкую плоскость семейства (A) называется касательным линейным пространством плоскости A семейства (A).

Очевидно, что размерность касательного линейного пространства плоскости A нефокального семейства (A) равна $2p - 1$. Если же семейство (A) фокальное порядка r, то размерность линейного касательного пространства плоскости A равна $2(p-1) - r$. Если семейство (A) расслаивает семейство (A'), то касательное пространство плоскости A принадлежит $(2p-1)$-мерному пространству, определяемому плоскостями A и A'. В самом деле, если $R = x^i Q_i$, то в силу расслоения

$$v_i^s = 0,$$

следовательно:

$$dR = (dx^i + x^\kappa v_\kappa^i) Q_i + x^k v_\kappa^{p+i} Q_{p+i}.$$

Т е о р е м а 3. Для того, чтобы фокальное порядка r семейство (A) расслаивало семейство (A'), необходимо и достаточно, чтобы 1) семейство (A') было фокальным порядка $q \geqslant p - r - 2$, 2) пересечение касательного пространства плоскости A семейства (A) с плоскостью A' принадлежало характеристике плоскости A'.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Поместим вершины $Q_1, \dots Q_{r+1}$ на r — мерную характеристику плоскости A семейства (A), тогда:

$$v_t^{p+\kappa} = 0.$$

Вершины $Q_{p+1}, \dots Q_{p+q_1}$ $(q_1 = p - r - 1)$ поместим на q — мерную характеристику плоскости A', тогда:

$$v_{p+\bar{\kappa}}^{t'} = 0 \quad (\bar{k} = 1, \dots q_1; \ t' = 1, \dots p, \ 2p+1, \dots, n+1).$$

Условия расслоения семейством (A) семейства (A') примут вид:

$$v_{\bar{i}_1}^{p+\bar{\kappa}_1} v_{p+\bar{\kappa}_1}^l = 0 \quad (\bar{i}_1 = r+2, \dots p; \ \bar{k}_1 = q_1 + 1, \dots p) \tag{15}$$

Так как семейство (A') фокальное порядка q (но не более), то соотношения (15) дают

$$v_{\bar{i}_1}^{p+\bar{\kappa}_1} = 0. \tag{16}$$

Точки пересечения касательного пространства плоскости A семейства (A) с плоскостью A' определяются из условия:

$$(Q_1, \dots, Q_p, \ dQ_{r+2}, \dots dQ_p, x^{p+1} Q_{p+1} + \ . \ . \ . + x^{2p} Q_{2p}) = 0$$

или, что то же, из условий равенства нулю всех определителей порядка $(p-r)$ матрицы:

$$\begin{Vmatrix} v_{r+2}^{p+1} & \dots & v_{r+2}^{p+q_1} & v_{r+2}^{p+q_1+1} & \dots & v_{r+2}^{2p} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ v_p^{p+1} & \dots & v_p^{p+q_1} & v_p^{p+q_1+1} & \dots & v_p^{2p} \\ x^{p+1} & \dots & x^{p+q_1} & x^{p+q_1+1} & \dots & x^{2p} \end{Vmatrix}$$

*) Под линейным пространством понимается плоскость соответствующей размерности.

Потребовав, чтобы эти точки пересечения принадлежали характеристике плоскости A', найдем:

$$v_{i_1}^{p+\bar{\kappa}_1} = 0.$$

Сравнивая это с (16), получаем требуемое.

Если семейства (A) и (A') не фокальные, то можно дать другую геометрическую характеристику расслояемой паре однопараметрических семейств (A) и (A'); при этом выясняется место, которое занимают расслояемые пары в совокупности пар однопараметрических семейств $(p-1)$-мерных плоскостей в P_{2p-1}.

Рассмотрим в P_{2p-1} пару нефокальных семейств $(A)-(A')$ и рассмотрим проективное преобразование плоскости A в себя:

$$M_1 \to M_2 \to M_1^*, \tag{17}$$

где $M_1 = x^i Q_i$ — произвольная точка плоскости A, M_2 — точка пересечения касательной плоскости в точке M_1 p-мерной поверхности (A) с плоскостью A', а точка $M_1^* = x^{i'} Q_i$ — точка пересечения касательной плоскости в точке M_2 p-мерной поверхности (A') с плоскостью A.

Проективное преобразование (17) выражается с помощью формул

$$\rho x^{i'} = v_{\kappa}^{p+l} v_{p+l}^{i} x^{k}. \tag{18}$$

Аналогично определяется проективное преобразование в плоскости

$$\rho' x^{p+i'} = v_{p+\kappa}^{l} v_{l}^{p+i} x^{p+\kappa} \tag{19}$$

Определение. Неподвижные точки проективных преобразований (18) и (19) называются квазифлекнодальными точками плоскостей A и A' пары семейств $(A)-(A')$.

Геометрически очевидно, что проективные преобразования (18) и (19) имеют одинаковые наборы неподвижных точек.

Найдем уравнения для определения квазифлекнодальных точек плоскости A. Положим в (18) $x^{i'} = \sigma x^{i}$, тогда:

$$\sigma\rho x^{j} = v_{\kappa}^{p+l} v_{p+l}^{j} x^{\kappa}$$

или

$$\sigma\rho x^{1} = v_{\kappa}^{p+l} v_{p+l}^{1} x^{\kappa}, \quad \sigma\rho x^{i_1} = v_{\kappa}^{p+l} v_{p+l} x^{\kappa}.$$

Имеем:

$$\frac{x^{i_1}}{x^{1}} = \frac{v_{\kappa}^{p+l} v_{p+l}^{i_1} x^{\kappa}}{v_{l}^{p+l} v_{p+l}^{1} x^{l}};$$

отсюда:

$$x^{1} x^{k} v_{\kappa}^{p+l} v_{p+l}^{i_1} - x^{l} x^{i_1} v_{l}^{p+l} v_{p+l} = 0. \tag{20}$$

Таким образом, уравнения для определения квазифлекнодальных точек плоскости A совпадают с уравнениями (2′). Отсюда непосредственно вытекают следующие два предложения.

Теорема 4. Квазифлекнодальные точки пары однопараметрических семейств $(p-1)$-мерных плоскостей суть те точки, через которые можно провести такие линии, принадлежащие соответствующим p-мерным поверхностям, что их двумерные соприкасающиеся плоскости в точках данной плоскости пересекают противоположную плоскость по прямой.

Эти линии определяются дифференциальными уравнениями (4′).

Теорема 5. Расслояемая пара $(p-1)$-мерных плоскостей в P_{2p-1}

есть такая пара, для которой проективные преобразования (18) и (19) являются тождественными.

В самом деле, проективное преобразование (17) является тождественным тогда и только тогда, когда все точки плоскости являются квазифлекнодальными, т. е. коэффициенты уравнений для определения квазифлекнодальных точек плоскости A после приведения подобных членов равны нулю. Но в этом и только в этом случае имеют место уравнения расслоения (7′) и (7″).

ЛИТЕРАТУРА

1. Фиников С. П. Пара линейчатых поверхностей, расслояемых двумя семействами кривых. Изв. АН СССР, серия математ., т. 9, № 2, 1945, 79—113.
2. Гейдельман Р. М. Теория аналитических конгруэнций плоскостей в комплексных и двойных унитарных пространствах и проективная теория конгруэнций пар плоскостей. Матем. сб., т. 49 (91): 3, 1959, 281—317.

ТРУДЫ ТОМСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА
имени В. В. КУЙБЫШЕВА

Том 168 Серия механико-математическая

В. В. ВАСЕНИН

К ЭКВИАФФИННОЙ ТЕОРИИ НЕГОЛОНОМНОЙ ПОВЕРХНОСТИ

Уравнение Пфаффа $\omega = 0$, связывающее аффинные координаты точки трехмерного пространства, определяет в каждой точке P пространства плоскость π, являющуюся совокупностью касательных к интегральным кривым уравнения $\omega = 0$, проходящим через точку P. Составное многообразие $\{P, \pi\}$ называется неголономной поверхностью, так как в случае вполне интегрируемости уравнения $\omega = 0$ оно расслаивается на ∞^1 поверхностей. Плоскость π называется касательной плоскостью неголономной поверхности в точке P. В настоящей работе неголономные поверхности изучаются с помощью метода репеража подмногообразий [4].

§ 1. H_1-репер неголономной гиперболической поверхности

Деривационные формулы эквиаффинного репера [1], определяемого векторами $\bar r, \bar\varepsilon_1, \bar\varepsilon_2, \bar\varepsilon_3$, где $(\bar\varepsilon_1, \bar\varepsilon_2, \bar\varepsilon_3) = 1$ имеют вид:

$$d\bar r = v^i \bar\varepsilon_i,$$
$$d\bar\varepsilon_i = v_i^k \bar\varepsilon_k, \ (i, k = 1, 2, 3). \tag{1}$$

Возьмем касательную плоскость неголономной поверхности за плоскость $\{\bar\varepsilon_1 \bar\varepsilon_2\}$, тогда уравнение неголономной поверхности примет вид:

$$v^3 = 0. \tag{2}$$

Уравнения

$$v^2 = 0, \quad v^3 = 0 \tag{3}$$

выделяют в неголономной поверхности полосу. Вектор $\bar\varepsilon_1$ направлен по касательной к линии полосы (3). Как следует из соотношения

$$\delta\bar\varepsilon_1 = \pi_1^1 \bar\varepsilon_1 + \pi_1^2 \bar\varepsilon_2,$$

выбор $\bar\varepsilon_1$ зависит от формы π_1^2. Поэтому π_1^2 является полувторичной формой [4]. Построим полуканонический репер неголономной поверхности, отнесенной к произвольной полосе.

Заметим, что v_1^3 и v_2^3 стали главными, то есть: $\pi_1^3 = \pi_2^3 = 0$. Следовательно, можно записать:

$$v_1^3 = X^3_{1l} v^l,$$
$$v_2^3 = X^3_{2l} v^l. \ (l = 1, 2, 3). \tag{4}$$

Дифференцируя (4) внешним образом, обычным путем [1], получаем систему:

$$
\begin{aligned}
\delta X^3_{11} &= (X^3_{21} + X^3_{12}) \pi_1^2 + X^3_{11} (2\pi_1^1 - \pi_3^3),\\
\delta X^3_{12} &= X^3_{22} \pi_1^2 + X^3_{11} \pi_2^1 + 2 X^3_{12} (\pi_1^1 + \pi_2^2),\\
\delta X^3_{13} &= X^3_{23} \pi_1^2 + X^3_{11} \pi_3^1 + X^3_{22} \pi_3^2 + X^3_{13} \pi_1^1,\\
\delta X^3_{21} &= X^3_{22} \pi_1^2 + X^3_{11} \pi_2^1 + 2 X^3_{21} (\pi_1^1 + \pi_2^2),\\
\delta X^3_{22} &= (X^3_{12} + X^3_{21}) \pi_2^1 + X^3_{22} (2\pi_2^2 - \pi_3^3),\\
\delta X^3_{23} &= X^3_{23} \pi_2^1 + X^3_{22} \pi_3^2 + X^3_{21} \pi_3^1 + X^3_{23} \pi_2^2.
\end{aligned} \tag{5}
$$

Произведем следующую фиксацию

$$X^3_{13} = 0, \quad X^3_{23} = 0, \quad X^3_{21} = 0, \quad X^3_{12} = 1, \quad X^3_{11} = X^3_{22} \neq 0. \tag{6}$$

$$\pi_3^1 = 0, \quad \pi_3^2 = 0, \quad \pi_2^1 = -\pi_1^2, \quad \pi_1^1 = -\frac{1}{2X^3_{11}} \pi_1^2,$$

$$\pi_2^2 = \frac{1}{2X^3_{11}} \pi_1^2, \quad \pi_3^3 = 0. \tag{7}$$

Рассмотрим получившийся репер. Поляритет Пантази [2] произвольному смещению $v^1 : v^2 : v^3$ ставит в соответствие прямую в касательной плоскости неголономной поверхности, определяемую уравнениями:

$$x^1 = (x^3_{11} v^1 + v^2) + x^2 x^3_{11} v^2 - v^3 = 0,$$
$$x^3 = 0. \tag{8}$$

Отсюда видно, что смещению (3) соответствует прямая:

$$x^1 = 0, \quad x^3 = 0,$$

то есть вектор $\bar\varepsilon_2$ направлен параллельно прямой, соответствующей в поляритете Пантази смещению (3). Аффинной нормали неголономной поверхности в поляритете Пантази соответствует несобственная прямая ее касательной плоскости. Из (8) видно, что аффинная нормаль неголономной поверхности определяется смещением:

$$v^1 = 0, \quad v^2 = 0,$$

то есть вектор $\bar\varepsilon_3$ направлен по ее аффинной нормали.

Чтобы геометрически охарактеризовать нормировку репера, рассмотрим пару смещений: одно — с касательной в плоскости $\{\bar\varepsilon_1 \bar\varepsilon_3\}$ и другое — с касательной в плоскости $\{\bar\varepsilon_2 \bar\varepsilon_3\}$, таких, что соответствующие им в поляритете Пантази прямые пересекаются с прямой $\bar R = \bar r + \tau \bar\varepsilon_1$ в одной и той же точке. Из (8) следует, что уравнения этих смещений можно записать в виде:

$$v^1 = 0, \quad v^3 = \lambda v^2,$$
$$v^2 = 0, \quad v^3 = \lambda X^3_{11} v^1, \tag{9}$$

где λ произвольно. Через прямую, соответствующую в поляритете Пантази первому смещению, параллельно касательной ко второму смещению проведем плоскость P; ее уравнение имеет вид:

$$x^1 + x^2 X_{11}^3 + \frac{1}{\lambda X_{11}^3} x^3 + \lambda = 0. \tag{10}$$

Существует единственная пара смещений указанного типа, для которой проведенная таким образом плоскость отсекает от координатных плоскостей тетраэдр единичного объема. Эта пара получается при $\lambda = -1$. Отсюда вытекает геометрическая характеристика нормировки репера.

Формы v_i^κ можно записать в виде:

$$v_1^3 = X_{11}^3 v^1 + v^2, \quad v_2^3 = X_{11}^3 v^2.$$
$$v_1^2 = X_{1i}^2 v^i, \quad v_2^1 = X_{2i}^1 v^i, \quad v_3^1 = X_{3i}^1 v^i, \quad v_3^2 = X_{3i}^2 v^i, \tag{11}$$
$$v_1^1 = X_{1i}^1 v^i, \quad v_2^2 = X_{2i}^2 v^i, \quad (X_{12}^3 + X_{21}^3)^2 - 4 X_{11}^3 X_{22}^3 \neq 0^{(*)}.$$

Дифференцируя эти соотношения внешним образом, получим основную систему внешних квадратичных уравнений, исследование которой ([1], гл. VIII, § 6) показывает, что неголономные гиперболические поверхности, отнесенные к произвольной полосе, определяются с произволом в три функции трех аргументов.

§ 2. Канонический репер полосы

Деривационные формулы репера неголономной поверхности, отнесенной к произвольной полосе, даются соотношениями (1). Полагая в этих формулах

$$v^1 = ds, \quad v^2 = 0, \quad v^3 = 0, \tag{12}$$

получим деривационные формулы канонического репера подмногообразия—полосы. Эти формулы можно записать в виде:

$$\frac{d\bar r}{ds} = \bar\varepsilon_1,$$
$$\frac{d\bar\varepsilon_i}{ds} = \alpha_i \bar\varepsilon_1 + \beta_i \bar\varepsilon_2 + \gamma_i \bar\varepsilon_3, \quad (i = 1, 2, 3), \tag{13}$$

где положено:

$$\alpha_i = [X_{i1}^1]_{v^2=v^3=0}, \quad \beta_i = [X_{i1}^2]_{v^2=v^3=0}, \quad \gamma_i = [X_{i1}^3]_{v^2=v^3=0},$$

причем

$$\alpha_1 + \beta_1 + \gamma_1 = 0, \quad \gamma_2 = 0.$$

Выясним геометрический смысл инвариантов канонического репера полосы. Чтобы охарактеризовать инвариант ds, рассмотрим вектор

$$\Delta \bar r = \left(ds + \frac{1}{2}\alpha_1 ds^2 + [3]\right)\bar\varepsilon_1 + \left(\frac{1}{2}\beta_1 ds^2 + [3]\right)\bar\varepsilon_2 + \left(\frac{1}{2}\gamma_1 ds^2 + [3]\right)\bar\varepsilon_3$$

и образующую торса

$$\bar E = \bar r + \lambda \bar\varepsilon_1. \tag{14}$$

---

*) Это неравенство исключает совпадение асимптотических линий, то есть случай параболических поверхностей.

Найдем на этом торсе линию, вдоль которой вектор

$$\Delta \bar E = \bar E(s) - \bar E(s + \Delta s) = \{(1 + \lambda\alpha_1) ds + [2]\}\bar\varepsilon_1 + $$
$$+ (\lambda\beta_1 ds + [2])\bar\varepsilon_2 + (\lambda\gamma_1 ds + [2])\bar\varepsilon_3$$

параллелен плоскости $\{\bar\varepsilon_2 \Delta\bar r\}$. Это требование приводит к соотношению

$$\frac{\gamma_1}{2} ds - \lambda\gamma_1 ds^2 + [3] = 0.$$

Отсюда следует, что при $\lambda = \frac{1}{2}$ вектор $\Delta\bar E$ параллелен плоскости $\{\bar\varepsilon_2 \Delta\bar r\}$ с точностью до бесконечно малых третьего порядка. Плоскость, проходящая через конец вектора $\bar r + \Delta\bar r$ и параллельная плоскости $\{\bar\varepsilon_2 \bar\varepsilon_3\}$, пересекает (14) в точке

$$\bar N(ds + [2], 0, 0).$$

Вычислив простое отношение точек $\bar M = \bar r$, $\bar E^* = \bar r + \frac{1}{2}\bar\varepsilon_1$ и $\bar N$, получим, что его главная часть равна

$$(ME^*N)_0 = 2\,ds. \tag{15}$$

Геометрические характеристики инвариантов α_i, β_i, γ_i вытекают из следующих уравнений: 1) соприкасающейся плоскости линии полосы

$$\gamma_1 x^1 \beta_1 x^3 = 0, \tag{16}$$

2) характеристики плоскости $\{\bar\varepsilon_1 \bar\varepsilon_2\}$ при смещении вдоль линии полосы

$$\beta_1 x^1 + \beta_3 x^3 = 0, \quad x^2 = 0; \tag{17}$$

3) характеристики плоскости $\{\bar\varepsilon_2 \bar\varepsilon_3\}$ при смещении вдоль линии полосы

$$1 - \alpha_2 x^2 - \alpha_3 x^3 = 0, \quad x^1 = 0; \tag{18}$$

4) уравнений характеристик плоскостей $\{\bar\varepsilon_1 \pm \bar\varepsilon_3, \bar\varepsilon_2\}$, $\{\bar\varepsilon_1 \pm \bar\varepsilon_2, \bar\varepsilon_3\}$ при смещении вдоль линии полосы:

$$x^1(\gamma_1 - 2\alpha_1 - \beta_2 - \alpha_3) - \alpha_2 x^2 + 1 = 0, \quad x^1 = x^3. \tag{19$_1$}$$
$$x^1(\gamma_1 + 2\alpha_1 + \beta_2 - \alpha_3) + \alpha_2 x^2 - 1 = 0, \quad x^1 = -x^3. \tag{19$_2$}$$
$$x^1(\beta_2 + \alpha_1) - x^3(\alpha_3 + \beta_3) + 1 = 0, \quad x^1 = -x^2. \tag{19$_3$}$$
$$x^1(\beta_2 - \alpha_1) - x^3(\alpha_3 - \beta_3) + 1 = 0, \quad x^1 = x^2. \tag{19$_4$}$$

Отметим некоторые классы полос гиперболической неголономной поверхности. Как следует из уравнений (19_3) и (19_4), класс $\alpha_1 = 0$ характеризуется тем, что характеристики плоскостей $\{\bar\varepsilon_1 \pm \bar\varepsilon_2, \bar\varepsilon_3\}$ при смещении вдоль линии полосы, пересекают касательную плоскость в точках, лежащих на прямой, параллельной вектору $\bar\varepsilon_2$ и симметричных относительно точки пересечения этой прямой и касательной к линии полосы. Класс $\beta_1 = 0$ характеризуется тем, что соприкасающаяся плоскость линии полосы проходит через аффинную нормаль неголономной поверхности. Такие полосы можно называть союзными (ср. [3]). Класс $\alpha_2 = 0$ обладает следующим свойством: характеристика плоскости $\{\bar{\varepsilon}_2\, \bar{\varepsilon}_3\}$ при смещении вдоль линии полосы параллельна прямой, соответствующей в поляритете Пантази смещению вдоль линии полосы. Из уравнении (19_3) и (19_4) вытекает геометрическая характеристика класса $\beta_2 = 0$. Точки пересечения характеристик плоскостей $\{\bar{\varepsilon}_1 \pm \bar{\varepsilon}_2, \bar{\varepsilon}_3\}$ при смещении вдоль линии полосы с касательной плоскостью неголономной поверхности лежат на прямой, параллельной вектору $\bar{\varepsilon}_2$. Полосы $\alpha_3 = 0$ характеризуются тем, что для них характеристика плоскости $\{\bar{\varepsilon}_2, \bar{\varepsilon}_3\}$ при смещении вдоль линии полосы параллельна аффинной нормали неголономной поверхности.

§ 3. H_2-репер неголономной гиперболической поверхности

Рассмотрим более общее подмногообразие неголономной поверхности $v^3 = 0$:

$$v^1 = v^2 = 0. \tag{20}$$

Касательная к линии, описываемой точкой P этого многообразия, не принадлежит касательной плоскости π поверхности в точке P.

Для удобства это подмногообразие будем называть X_1^2. Вектор $\bar{\varepsilon}_3$ направлен по касательной к линии (20). Выбор его зависит от форм π_3^1 и π_3^2, которые в этом случае являются полувторичными формами.

В системе (5) произведем фиксацию:

$$\begin{gathered} X_{11}^3 = 0, \quad X_{22}^3 = 0, \quad X_{23}^3 = X_{13}^3 = -1. \\ \pi_1^2 = \pi_2^1 = 0, \quad \pi_1^2 = X_{12}^3 \pi_3^2, \quad \pi_2^2 = A_{21}^3 \pi_3^i, \end{gathered} \tag{21}$$

тогда уравнения асимптотических линий неголономной поверхности [2] примут вид:

$$\begin{gathered} v^1 = 0, \quad v^3 = 0 \\ v^2 = 0, \quad v^3 = 0. \end{gathered} \tag{22}$$

т. е. векторы $\bar{\varepsilon}_1$ и $\bar{\varepsilon}_2$ направлены по касательным к асимптотическим линиям неголономной поверхности. Уравнения прямой, соответствующей в поляритете Пантази смещению $v^1 : v^2 : v^3$, имеют вид:

$$\begin{gathered} x^1 (X_{12}^3 v^2 - v^3) + x^2 (X_{21}^3 v^1 - v^3) + v^3 = 0, \\ x^3 = 0. \end{gathered} \tag{23}$$

Отсюда видно, что смещению вдоль линии (20) соответствует прямая

$$\begin{gathered} x^1 + x^2 - 1 = 0 \\ x^3 = 0, \end{gathered} \tag{24}$$

то есть репер нормирован так, что концы векторов $\bar{\varepsilon}_1$ и $\bar{\varepsilon}_2$ помещены в соответствующие точки пересечения прямой (24) с касательными к асимптотическим линиям неголономной поверхности.

Положим

$$\begin{gathered} v_1^3 = X_{12}^3 v^2 - v^3, \quad v_2^3 = X_{21}^3 v^1 - v^3, \quad v_2^1 = X_{2i}^1 v^i, \quad v_1^1 = X_{1i}^1 v^i, \\ v_1^2 = X_{1i}^2 v^i, \quad v_3^1 = X_{3i}^1 v^i, \quad v_3^2 = X_{3i}^2 v^i, \quad v_2^2 = X_{2i}^2 v^i. \end{gathered} \tag{25}$$

Дифференцируя эти соотношения внешним образом, получим основную систему дифференциальных уравнений репера, исследуя которую, строя цепь интегральных элементов по формам $v^1, v^2 - v^1, v^3$, получим, пользуясь принятой в [1] терминологией:

$$s_1 = 8, \quad s_2 = 6, \quad s_3 = 4.$$

Неголономная поверхность, отнесенная к произвольному X_1^2, определяется с произволом в четыре функции трех аргументов.

§ 4. Канонический репер X_1^2

Полагая, как обычно, в деривационных формулах полуканонического репера:

$$v^3 = ds, \quad v^1 = 0, \quad v^2 = 0, \tag{26}$$

получаем деривационные формулы канонического репера произвольного однопараметрического подмногообразия неголономной поверхности — X_1^2:

$$\begin{aligned} &\frac{d\bar{r}}{ds} = \bar{\varepsilon}_3, \\ &\frac{d\bar{\varepsilon}_1}{ds} = \alpha_1 \bar{\varepsilon}_1 + \beta_1 \bar{\varepsilon}_1 - \bar{\varepsilon}_3, \\ &\frac{d\bar{\varepsilon}_2}{ds} = \alpha_2 \bar{\varepsilon}_1 + \beta_2 \bar{\varepsilon}_2 - \bar{\varepsilon}_3 \\ &\frac{d\bar{\varepsilon}_3}{ds} = \alpha_3 \bar{\varepsilon}_1 + \beta_3 \bar{\varepsilon}_2 - (\alpha_1 + \beta_2)\, \bar{\varepsilon}_3, \end{aligned} \tag{27}$$

где положено

$$\alpha_i = (x_{i3}^1)\, v^2 = v^3 = 0, \quad \beta_i = X(_{i3}^2)\, v^2 = v^3 = 0.$$

Для геометрической характеристики инварианта ds рассмотрим объем параллелепипеда

$$V = (\bar{F}_1 - \bar{r}, \ \bar{F}_2 - \bar{r}, \Delta \bar{r}),$$

где $\bar{F}_1$ и $\bar{F}_2$ — радиус-векторы точек пересечения характеристик касательной плоскости неголономной поверхности при смещении вдоль X_1^2 с касательными асимптотических линий неголономной поверхности.

Нетрудно видеть, что

$$ds = \text{гл. ч. } V.$$

Геометрические характеристики остальных инвариантов получаются из уравнений:

1) соприкасающейся плоскости линии (20)

$$x^1 \beta_3 - x^2 \alpha_3 = 0, \tag{28}$$

2) характеристик плоскостей $\{\bar{\varepsilon}_1\, \bar{\varepsilon}_3\}$, $\{\bar{\varepsilon}_2\, \bar{\varepsilon}_3\}$, $\{\bar{\varepsilon}_1 \pm \bar{\varepsilon}_2, \bar{\varepsilon}_3\}$ и $\{\bar{\varepsilon}_1 - \bar{\varepsilon}_3, \bar{\varepsilon}_2\}$ при смещении вдоль линии (20)

$$\beta_1 x^1 + \beta_3 x^3 = 0, \quad x^2 = 0. \tag{29_1}$$

$$\alpha_2 x^2 + \alpha_3 x^3 = 0, \quad x^1 = 0. \tag{29_2}$$

$$x^1 (\beta_1 + \beta_2 + \alpha_1 + \alpha_2) + x^3 (\beta_3 - \alpha_3) = 0, \quad x^1 + x^2 = 0. \tag{29_3}$$

$$x^1 (\beta_1 - \beta_2 - \alpha_1 + \alpha_2) + x^3 (\beta_3 + \alpha_3) = 0, \quad x^1 - x^2 = 0. \tag{29_4}$$

$$x^1(2\alpha_1+\beta_2-\alpha_3+1)+x^2(1-\alpha_2)-1=0\; x^1-x^3=0. \tag{29$_5$}$$

Полученные геометрические характеристики позволяют выделить следующие классы X_1^2.

1) $\alpha_1=0$; касательная к линии $\bar F_1(s)=\bar r(s)+\bar\varepsilon_1(s)$ параллельна вектору $\bar\varepsilon_2$

2) $\beta_1=0$; вектор $\bar\varepsilon_1$ описывает торс с ребром возврата

$$\bar F_1(s)=\bar r(s)+\bar\varepsilon_1(s).$$

3) $\alpha_2=0$; вектор $\bar\varepsilon_2$ описывает торс с ребром возврата, описываемым точкой

$$\bar F_2=\bar r+\bar\varepsilon_2.$$

4) $\beta_2=0$; касательная к линии, описываемой точкой $\bar F_2$, параллельна касательной к линии (20).

5) $\alpha_3=0$; соприкасающаяся плоскость линии (20) содержит одно из асимптотических направлений неголономной поверхности.

6) $\alpha_1=\beta_1=0$; вектор $\bar\varepsilon_1$ описывает конус с вершиной в точке $\bar F_1$.

7) $\alpha_2=0$, $\beta_2=0$; вектор $\bar\varepsilon_2$ описывает конус с вершиной в точке $\bar F_2$.

§ 5. Канонический репер неголономной параболической поверхности

Для удобства будем записывать деривационные формулы репера в виде:

$$d\bar r=\omega^i\bar e_i$$
$$d\bar e_i=\omega_i^l\bar e_l,\quad i,l=1,2,3. \tag{1'}$$

причем;

$$\omega_1^1+\omega_2^2+\omega_3^3=0.$$

Как обычно, совместим плоскость $\{\bar e_1\bar e_2\}$ с касательной плоскостью неголономной поверхности. Дифференциальное уравнение неголономной поверхности принимает вид:

$$\omega^3=0. \tag{30}$$

Формы ω_1^3 и ω_2^3 становятся главными, то есть $\pi_1^3=0$, $\pi_2^3=0$. Следовательно, можно записать:

$$\omega_1^3=X_{1i}^3\omega^i,\quad \omega_2^3=X_{2i}^3\omega^i,\quad i=1,2,3. \tag{31}$$

Аналитическим признаком совпадения асимптотических линий неголономной параболической поверхности является условие:

$$X_{12}^3+X_{21}^3=2\sqrt{X_{11}^3X_{22}^3}\,. \tag{32}$$

Дифференцирование уравнений (31) внешним образом приводит к соотношениям (5) § 1, среди которых, в силу условия (32), остается только пять независимых. Произведем фиксацию:

$$X_{11}^3=X_{12}^3=-X_{21}^3=1,\quad X_{22}^3=X_{13}^3=X_{23}^3=0,$$
$$\pi_2^1=\pi_2^2=\pi_3^1=\pi_3^2=\pi_3^3=\pi_1^1=0. \tag{33}$$

Уравнения (31) примут вид:

$$\omega_1^3=\omega^1+\omega^2$$
$$\omega_2^3=-\omega^1. \tag{31'}$$

Замыкая уравнения (31′), получим:

$$[2\omega_1^1-\omega_3^3,\ \omega^1]+[\omega_2^1-2\omega_3^3,\ \omega^2]+[\omega_3^1+\omega_3^2,\ \omega^3]=0,$$
$$[\omega_2^1+2\omega_3^3,\ \omega^1]-[\omega_3^1\omega^3]=0.$$

Разрешая эти уравнения по лемме Картана, приходим к следующей системе:

$$\omega_3^1=B\omega^1-C\omega^3$$
$$\omega_3^2=(R-B)\,\omega^1+I\omega^2+(F+C)\,\omega^3$$
$$\omega_2^1=\frac{1}{2}\{(X+Q)\,\omega^1+S\omega^2+(T-B)\,\omega^3\}$$
$$\omega_3^3=\frac{1}{4}\{(X-Q)\,\omega^1-S\omega^2-(T+B)\,\omega^3\} \tag{34}$$
$$\omega_1^1=\frac{1}{2}\left\{\left[P+\frac{1}{4}(X-Q)\right]\omega^1+\left(Q-\frac{1}{4}S\right)\omega^2+\left[R-\frac{1}{4}(T+B)\right]\omega^3\right\}.$$

Замыкая первые 5 уравнений системы (34), получаем

$$[dA+\Delta_1\omega^2+\Delta_2\omega^3,\omega^1]-[dB+\Delta_3\omega^2,\omega^3]=0$$
$$[dB+\Delta_3\omega^2,\omega^1]-[dC-\Delta_4\omega^1+\Delta_5\omega^2,\omega^3]=0 \tag{35}$$
$$[dP-\omega_1^2(A+2Q)+\Delta_6\omega^2+\Delta_7\omega^3,\ \omega^1]+[dQ-S\omega_1^2,\ \omega^2]+$$
$$+[dR-(T-B)\,\omega_1^2-\Delta_8\omega_1^3\,\omega^3]=0$$
$$[dQ-\omega_1^2S,\omega^1]+[dS-\Delta_9\omega^1+\Delta_{11}\omega^3,\ \omega^2]+[dT-\Delta_{10}\omega^1,\ \omega^3]=0$$
$$[dR-(T-B)\,\omega_1^2-\Delta_8\omega^2,\ \omega^1]+[dT-\Delta_{10}\omega^1,\ \omega^2]+$$
$$+[dF+C\omega_1^2-\Delta_{12}\omega^1-\Delta_{13}\omega^2,\ \omega^3]=0,$$

где

$$\Delta_1=\frac{1}{8}XS+\frac{1}{2}Q^2-\frac{1}{2}pS+2T.$$

$$\Delta_2=\frac{1}{8}(B-4R+2Q-T)\,X-\frac{1}{2}pT+\frac{1}{4}QT-\frac{1}{4}BQ+5C.$$

$$\Delta_3=\frac{1}{4}\{2XB-2XT+8C-BS+2BQ-2TQ+2SR\}.$$

$$\Delta_4=\frac{1}{2}\left\{CP-\frac{7}{4}XC+RT-RB-\frac{1}{2}BT+\frac{7}{2}B^2-XF+FQ\right\}.$$

$$\Delta_5=\frac{1}{2}\left\{CQ-\frac{5}{4}CS+(T-B)^2-FS\right\}.$$

$$\Delta_6 = \frac{1}{8} PS - \frac{1}{2} PQ - \frac{3}{8} XQ - 3B - T + \frac{3}{8} Q^2 - 2R.$$

$$\Delta_7 = -4C - F - \frac{1}{2} P \left[R - \frac{1}{4} T + \frac{7}{4} B \right] + Q(R - B) + \frac{1}{4} R(A - Q).$$

$$\Delta_8 = -3C - \frac{1}{2} P(T - B) + \frac{1}{2} Q \left(R + \frac{5}{4} T - \frac{3}{4} B \right) - \frac{1}{4} RS.$$

$$\Delta_9 = XQ - \frac{1}{2} XS + \frac{1}{2} Q^2 + \frac{1}{8} QS - \frac{1}{2} SP - 2B.$$

$$\Delta_{10} = \frac{5}{8} BQ - BS + \frac{5}{4} RS - \frac{1}{4} XT - \frac{3}{4} TQ - \frac{1}{2} RQ - 2F.$$

$$\Delta_{11} = BQ + SR - 2C - QT - \frac{3}{8} TS - \frac{7}{8} BS.$$

$$\Delta_{12} = B\left(2\frac{3}{4} R - \frac{3}{2} T - \frac{1}{2} B \right) + F\left(\frac{1}{2} P + \frac{5}{8} X - \frac{9}{8} Q \right) - R^2 + \\ + 1\frac{3}{4} TR + CP + \frac{1}{4} XC - \frac{3}{4} QC.$$

$$\Delta_{13} = \frac{1}{2} \left\{ F\left(Q - \frac{5}{4} S \right) - C\left(Q - \frac{3}{2} S \right) + \right. \\ \left. + \frac{1}{2} T(5T - 3B - 2R) + BR \right\}.$$

Из (35) следует:

$$\begin{gathered} \delta X = \delta B = \delta C = \delta S = \delta T = 0. \\ \delta P = (X + 2Q)\pi_1^2. \\ \delta Q = S\pi_1^2. \\ \delta R = (T - B)\pi_1^2. \\ \delta F = -C\pi_1^2. \end{gathered} \tag{36}$$

Произведем еще одну фиксацию

$$R - B = 0, \quad \pi_1^2 = 0, \quad T - B \neq 0. \tag{37}$$

Охарактеризуем полученный канонический репер.

Поляритет Пантази смещению $\omega^1 : \omega^2 : \omega^3$ ставит в соответствие прямую:

$$\begin{gathered} x^1(\omega^1 + \omega^2) - x^2\omega^1 + \omega^3 = 0, \\ x^2 = 0. \end{gathered} \tag{38}$$

В этом поляритете смещению

$$\omega^1 = 0 \quad \omega^2 = 0 \tag{39}$$

соответствует несобственная прямая касательной плоскости неголономной поверхности, следовательно, вектор $\bar{e}_3$ направлен по аффинной нормали. Вектор $\bar{e}_2$ направлен по касательной к совпавшим асимптотическим линиям. Положим:

$$\omega_1^2 = K\omega^1 + L\omega^2 + M\omega^3. \tag{40}$$

Уравнения конусов Малюса Q_i [2] ищутся из условия $(\bar{e}_i, d\bar{r}, d\bar{e}_i) = 0$ при $\frac{\omega^1}{x^1} = \frac{\omega^2}{x^2} = \frac{\omega^3}{x^3}$. Эти уравнения в локальных координатах имеют вид:

$$\begin{gathered} \Theta_1 \;\; (x^2)^2 + x^1x^2 - x^3(Kx^1 + Lx^2 + Mx^3) = 0 \\ \Theta_2 \;\; (x^1)^2 - x^3\left[x^1\frac{1}{2}(X + Q) + \frac{1}{2} Sx^2 + \frac{1}{2}(T - B)x^3 \right] = 0 \\ \Theta^3 \;\; (T - B)x^1x^2 + (F + C)x^1x^3 + Cx^2x^3 = 0. \end{gathered} \tag{41}$$

Конус Малюса Θ_3 пересекает касательную плоскость неголономной поверхности по прямым:

$$\begin{gathered} x^3 = 0, \quad x^1 = 0, \\ x^3 = 0, \quad x^2 = 0, \end{gathered}$$

которые являются аналогами главных направлений метрической теории. Отсюда следует, что одно из семейств линий кривизны параболической неголономной поверхности совпадает с асимптотическими линиями и что вектор $\bar{e}_1$ направлен по касательной к линии кривизны, отличной от совпавших асимптотических линий.

Чтобы геометрически охарактеризовать нормировку репера, рассмотрим произвольное смещение, касательная к которому лежит в плоскости $\{\bar{e}_1\bar{e}_3\}$:

$$\omega^2 = 0, \quad \omega^3 = \lambda\omega^1. \tag{42}$$

Запишем уравнение плоскости, параллельной касательной к этому смещению и проходящей через прямую, соответствующую ему в поляритете Пантази.

$$x^1 - x^2 - \frac{1}{\lambda} x^3 + \lambda = 0. \tag{43}$$

Существуют два смещения, для которых построенная таким образом плоскость отсекает от координатных плоскостей тетраэдр единичного объема. Для них $\lambda = \pm 1$. Отсюда вытекает геометрическая характеристика нормирования. Исследуя систему (35) с учетом (33) путем построения интегральных элементов, по формам базиса $(\omega^1, \omega^3, \omega^2)$, получим:

$$s_1 = 5, \quad s_2 = 3, \quad s_3 = 1.$$

Таким образом, произвол существования параболической неголономной поверхности равен одной функции трех аргументов.

§ 6. Геометрическая характеристика инвариантов

Рассмотрим неголономные поверхности, касательными плоскостями для которых служат плоскости $\{\bar{e}_1\bar{e}_3\}$ и $\{\bar{e}_2\bar{e}_3\}$. Дифференциальные уравнения этих неголономных поверхностей имеют вид:

$$\omega^1 = 1, \quad \omega^2 = 0. \tag{44}$$

Поляритет Пантази произвольному смещению $\omega^1:\omega^2:\omega^3$ ставит в соответствие прямую в касательной плоскости каждой из этих неголономных поверхностей. Уравнения этих прямых имеют вид:

$$x^2\cdot\frac{1}{2}\{(X+Q)\,\omega^1+S\omega^2+(T-B)\,\omega^3S+x^3(B\omega^1-C\omega^3)+\omega^1=0 \qquad (45_1)$$

$$x^1=0,$$

$$x^1(K\omega^1+L\omega^2+M\omega^3)+x^3(T\omega^2+(F+C)\,\omega^3)+\omega^2=0. \qquad (45_2)$$

$$x^2=0.$$

Пучку смещений, определяемых интегральными кривыми уравнения $\omega^3=0$, в касательной плоскости неголономной поверхности $\omega^1=0$ соответствует пучок прямых с центром в точке:

$$\bar{F}'=\bar{r}-\frac{1}{B}\bar{e}_3, \qquad (46)$$

а в касательной плоскости неголономной поверхности $\omega^2=0$ — пучок прямых с центром в точке

$$\bar{F}''=\bar{r}-\frac{1}{T}\bar{e}_3. \qquad (47)$$

Равенства (46) и (47) дают геометрические характеристики инвариантов T и B. Аффинной нормали неголономной поверхности $\omega^3=0$ в поляритетах Пантази неголономных поверхностей $\omega^1=0$ и $\omega^2=0$ соответствуют прямые:

$$\frac{1}{2}(T-B)\,x^2-Cx^3=0 \qquad (48_1)$$

$$x^1=0$$

$$Mx^1+(F+C)\,x^3=0 \qquad (48_2)$$

$$x^2=0.$$

Совпавшим асимптотическим неголономной поверхности $\omega^3=0$ в поляритете Пантази неголономной поверхности $\omega^2=0$ соответствует прямая:

$$Lx^1+Tx^3+1=0 \qquad (49)$$

$$x^1=0.$$

Смещению вдоль линии кривизны, отличной от совпавших асимптотических, в поляритете Пантази неголономной поверхности $\omega^1=0$ соответствует прямая

$$\frac{1}{2}(A+Q)\,x^2+Bx^3+1=0 \qquad (50)$$

$$x^1=0.$$

Плоскость, касающаяся конуса Θ_3 по аффинной нормали, имеет уравнение

$$(F+C)\,x^1+Cx^2=0. \qquad (51)$$

Плоскость, касающаяся конуса Θ_1 по касательной к линии кривизны,

отличной от асимптотической линии, имеет уравнение

$$x^2-Kx^3=0. \qquad (52)$$

Одна из линий пересечения конуса Θ_2 с плоскостью $\{\bar{e}_2\bar{e}_3\}$ имеет уравнения:

$$Sx^2+(T-B)\,x^3=0,$$
$$x^1=0. \qquad (53)$$

Уравнения (48) — (53) дают геометрические характеристики инвариантов:

$$(A+Q),\ C,\ F,\ S,\ K,\ L,\ M.$$

Чтобы получить геометрические характеристики инвариантов P и Q, найдем уравнения конусов K_i [2].

$$K_1\ (x^2)^2-Kx^3x^1-x^3x^2\cdot\frac{1}{2}\left[P+\frac{5}{4}(A-Q)\right]=0$$

$$K_2\ (x^1)^2-\frac{1}{2}x^1x^3\left(Q+\frac{S}{4}\right)-\frac{1}{2}x^2x^3\cdot S=0 \qquad (54)$$

$$K_3\ M(x^1)^2-\frac{1}{2}(x^2)^2(T-B)+\frac{1}{2}x^1x^2(B-T)+$$
$$x^1x^3(F+C)+x^2x^3\cdot C=0$$

Отсюда видно, что одна из линий пересечения конуса K_2 с плоскостью $\{\bar{e}_2\bar{e}_3\}$ имеет уравнения:

$$x^1-\frac{1}{2}x^3\left(Q+\frac{S}{4}\right)=0,$$
$$x^2=0, \qquad (55)$$

а одна из линий пересечения конуса K_1 с плоскостью $\{\bar{e}_2\bar{e}_3\}$ имеет уравнения

$$x^2-\frac{1}{2}x^3\left[P+\frac{5}{4}(A-Q)\right]=0,\quad x^1=0. \qquad (56)$$

§ 7. H_1-репер неголономной параболической поверхности

Последняя фиксация при построении канонического репера неголономной параболической поверхности связана с выбором вектора $\bar{e}_1$. Как и в § 1, вектор $\bar{e}_1$ является касательным к линии полосы неголономной параболической поверхности, выбор которой зависит от полувторичной формы π_1^2. Таким образом, в процессе канонизации репера был построен полуканонический репер неголономной параболической поверхности, отнесенной к произвольной полосе.

Деривационные формулы этого репера, в отличие от деривационных формул канонического репера, запишем в виде:

$$d\bar{r}=v^i\bar{\varepsilon}_i$$

$$d\bar{\varepsilon}_i=v_i^l\bar{\varepsilon}_l\quad (i,\ l=1,2,3).$$

Не повторяя уже проводившихся рассуждений, воспользуемся системами (31), (34) и запишем соотношения для v_i^j

$$v_1^3 = v^1 + v^2.$$

$$v_2^3 = -v^1.$$

$$v_3^1 = \tilde{B}v^1 - \tilde{C}v^3.$$

$$v_3^2 = (\tilde{R} - \tilde{B})v^1 + \tilde{T}v^2 + (\tilde{F} + \tilde{C})v^3.$$

$$v_2^1 = \frac{1}{2}\{(\tilde{A} + \tilde{Q})v^1 + \tilde{S}v^2 + (\tilde{T} - \tilde{B})v^3\}. \tag{57}$$

$$v_1^2 = \tilde{K}v^1 + \tilde{L}v^2 + \tilde{M}v^3.$$

$$v_1^1 = \frac{1}{2}\left\{\left[\tilde{P} + \frac{1}{4}(\tilde{A} - \tilde{Q})\right]v^1 + \left(\tilde{Q} - \frac{1}{4}\tilde{S}\right)v^2 + \right.$$

$$\left. + \left[\tilde{R} - \frac{1}{4}(\tilde{T} + \tilde{B})\right]v^3\right\}.$$

$$v_3^3 = \frac{1}{4}\{(\tilde{A} - \tilde{Q})v^1 - \tilde{S}v^2 - (\tilde{T} + \tilde{B})v^3\}.$$

Вектор $\bar{\varepsilon}_2$ полуканонического репера направлен по касательной к совпавшим асимптотическим линиям, вектор $\bar{\varepsilon}_3$ — по аффинной нормали неголономной поверхности. Вектор ε_1 — по касательной к линии полосы. Уравнения линии полосы имеют вид:

$$v^2 = 0, \quad v^3 = 0. \tag{58}$$

§ 8. Канонический репер полосы параболической неголономной поверхности

Полагая в деривационных формулах полуканонического репера параболической неголономной поверхности, отнесенной к произвольной полосе

$$v^2 = 0, \quad v^3 = 0, \quad v^1 = ds, \tag{59}$$

получим деривационные формулы канонического репера полосы. Эти формулы можно записать в виде:

$$\begin{aligned} \frac{d\bar{r}}{ds} &= \bar{\varepsilon}_1, \\ \frac{d\bar{\varepsilon}_1}{ds} &= \alpha\bar{\varepsilon}_1 + \beta\bar{\varepsilon}_2 + \bar{\varepsilon}_3, \\ \frac{d\bar{\varepsilon}_2}{ds} &= \gamma\bar{\varepsilon}_1 + f\bar{\varepsilon}_2 - \bar{\varepsilon}_3, \\ \frac{d\bar{\varepsilon}_3}{ds} &= \xi\bar{\varepsilon}_1 + \mu\bar{\varepsilon}_2 - (\alpha + f)\bar{\varepsilon}_3, \end{aligned} \tag{60}$$

где положено:

$$\alpha = \frac{1}{2}\left[\tilde{P} + \frac{1}{4}(\tilde{A} - \tilde{Q})\right]_{v^2 = v^3 = 0}, \quad \beta = [\tilde{K}]_{v^2 = v^3 = 0},$$

$$\gamma = \left[\frac{1}{2}(\tilde{A} + \tilde{Q})\right]_{v^2 = v^3 = 0}, \quad f = \frac{1}{2}\left[\tilde{P} + \frac{3}{4}(\tilde{A} - \tilde{Q})\right]_{v^2 = v^3 = 0},$$

$$\xi = [\tilde{B}]_{v^2 = v^3 = 0}, \quad \mu = [(\tilde{R} - \tilde{B})]_{v^2 = v^3 = 0}. \tag{61}$$

Для того, чтобы найти геометрическую характеристику инварианта ds, рассмотрим индикатрису вектора $\bar{\varepsilon}_1$, при смещении вдоль линии полосы. Вычислим объем

$$V = (\bar{\varepsilon}_1(s),\ \bar{\varepsilon}_2(s),\ \bar{\varepsilon}_1(s + \Delta s)) = ds + [2],$$

откуда

$$ds = \text{гл. ч. } V.$$

Уравнение соприкасающейся плоскости линии полосы в локальных координатах имеет вид:

$$x^2 = \beta x^3. \tag{62}$$

Отсюда следует, что β—угловой коэффициент соприкасающейся плоскости линии полосы.

Радиус-вектор близкой точки линии полосы в окрестности точки [3] можно представить в виде:

$$\begin{aligned} \bar{\rho}(\Delta s) = &\left\{\Delta s + \frac{\alpha}{2}\Delta s^2 + \frac{1}{6}[\alpha^1 + \alpha^2 + \beta\gamma + \xi]\Delta s^3 + [4]\right\}\bar{\varepsilon}_1 + \\ &+ \left\{\frac{1}{2}\beta\Delta s^2 + \frac{1}{6}[\beta^1 + \alpha\beta + \beta f + \mu]\Delta s^3 + [4]\right\}\bar{\varepsilon}_2 + \\ &+ \left\{\frac{1}{2}\Delta s^2 - \frac{1}{6}(\beta - f)\Delta s^3 + [4]\right\}\bar{\varepsilon}_3. \end{aligned} \tag{63}$$

Уравнение торса касательных линии полосы в локальных координатах:

$$\begin{aligned} x^1 &= \left[\Delta s + \frac{\alpha}{2}\Delta s^2 + [3]\right] + \lambda[1 + \alpha\Delta s + [2]] \\ x^2 &= \left[\frac{1}{2}\beta\Delta s^2 + [3]\right] + \lambda[\beta\Delta s + [2]] \\ x^3 &= \left[\frac{1}{2}\Delta s^2 - \frac{1}{6}(\beta - f)\Delta s^3 + [4]\right] + \lambda\left[\Delta s - \frac{1}{2}(\beta - f)\Delta s^2 + [3]\right]. \end{aligned} \tag{64}$$

Уравнение линии пересечения этого торса с плоскостью $\{\bar{\varepsilon}_1\bar{\varepsilon}_2\}$ имеет вид:

$$\begin{aligned} x^1 &= \frac{1}{2}\Delta s + [3], \\ x^2 &= \frac{1}{12}(\beta - f)\Delta s^3 + [4]. \end{aligned} \tag{65}$$

Отсюда вытекает геометрическая характеристика инварианта $(\beta - f)$.

Уравнение соприкасающегося конического сечения, то есть лежащего в соприкасающейся плоскости и имеющего наивысший порядок касания с линией полосы, находится в виде:

$$(x^1)^2 - \alpha x^1 x^3 + \alpha^2 (x^3)^2 - \frac{4}{3} x^3 = 0, \tag{67}$$
$$x^2 = \beta x^3.$$

Уравнения диаметра соприкасающегося конического сечения, проходящего через точку $\bar{r}$, имеет вид:

$$x^1 - \frac{\alpha}{2} x^2 = 0, \tag{68}$$
$$x^2 = \beta x^3,$$

откуда следует геометрическая характеристика инварианта α.

Характеристика плоскости $\{\bar{\varepsilon}_1 \bar{\varepsilon}_3\}$ при смещении вдоль линии полосы имеет уравнения:

$$\beta x^1 + \mu x^3 = 0 \tag{69}$$
$$x^2 = 0.$$

Отсюда следует геометрическая характеристика инварианта μ.

Характеристика плоскости $\{\bar{\varepsilon}_2 \bar{\varepsilon}_3\}$ при этом же смещении имеет уравнения:

$$1 - \gamma x^2 - \xi x^3 = 0, \tag{70}$$
$$x^1 = 0.$$

Из (70) вытекают геометрические характеристики инвариантов γ и ξ.

Отметим некоторые классы полос параболической неголономной поверхности. Полоса $\beta = 0$ характеризуется тем, что соприкасающаяся плоскость линии полосы проходит через аффинную нормаль неголономной поверхности. Такие полосы можно называть союзными полономной поверхности. У полос $\alpha = 0$ соприкасающаяся сами неголономной поверхности пересекает плоскость $\{\bar{\varepsilon}_2 \bar{\varepsilon}_3\}$ по диаметру (68) соприкасающегося конического сечения (67). У полос $\gamma = 0$ характеристика плоскости $\{\bar{\varepsilon}_2 \bar{\varepsilon}_3\}$ при смещении вдоль линии полосы параллельна касательной к совпавшим асимптотическим линиям неголономной поверхности. У полос $\mu = 0$ характеристика плоскости $\{\bar{\varepsilon}_1 \bar{\varepsilon}_3\}$ совпадает с аффинной нормалью неголономной поверхности.

§ 9. H_2-репер неголономной параболической поверхности

Отнесем теперь неголономную параболическую поверхность к более общему подмногообразию, которое, как и в § 1, будем называть X_1^2. Уравнения X_1^2 имеют вид:

$$v^1 = 0, \quad v^2 = 0. \tag{71}$$

Выбор его зависит от форм π_3^1 и π_3^2, являющихся полувторичными. В системе (5) с учетом (32) произведем фиксацию:

$$A_{22}^3 = 0, \quad A_{12}^3 = -A_{21}^3, \quad A_{11}^3 = A_{12}^3, \quad A_{23}^3 = A_{11}^3, \quad A_{13}^3 = -A_{12}^3 \tag{72}$$

$$\pi_2^1 = 0, \quad \pi_1^2 = \pi_3^2, \quad \pi_1^1 = -\frac{1}{3} \pi_3^1, \quad \pi_2^2 = \pi_1^1.$$

В построенном репере вектор $\bar{\varepsilon}_3$ направлен по касательной к линии (71). Вектор $\bar{\varepsilon}_2$ направлен по касательной к совпавшим асимптотическим. Вектор $\bar{\varepsilon}_1$ направлен по линии пересечения касательной плоскости неголономной поверхности с плоскостью, содержащей ее аффинную нормаль и вектор $\bar{\varepsilon}_3$. Произвольному смещению $v^1 : v^2 : v^3$ в поляритете Пантази соответствует прямая

$$x^1 A_{12}^3 (v^1 + v^2 + v^3) - x^2 A_{12}^3 (v^1 + v^2) + v^3 = 0 \tag{73}$$
$$x^3 = 0.$$

Отсюда следует, что вектор $\bar{\varepsilon}_1 - \bar{\varepsilon}_3$ направлен по аффинной нормали неголономной поверхности, а вектор $\bar{\varepsilon}_1 + \bar{\varepsilon}_2$ направлен параллельно прямой, соответствующей в поляритете Пантази смещению (71).

Деривационные формулы репера имеют вид:

$$d\bar{r} = v^i \bar{\varepsilon}_i$$
$$d\bar{\varepsilon}_i = v_i^e \bar{\varepsilon}_e \quad (i, e = 1, 2, 3).$$

где:

$$v_1^3 = A_{12}^3 (v^1 + v^2 + v^3) \tag{74}$$
$$v_2^3 = -A_{12}^3 (v^1 + v^3)$$
$$v_3^1 = A_{3e}^1 v^e, \quad v_{3e}^2 = A_{3e}^2 v^e,$$
$$v_1^2 = A_{1e}^2 v^e, \quad v_{2e}^1 = A_{2e}^1 v^e,$$
$$v_1^1 = A_{1e}^1 v^e, \quad v_2^2 = A_{2e}^2 v^e.$$

Неголономные параболические поверхности, отнесенные к произвольному X_1^2, определяются с произволом в три функции трех аргументов.

§ 10. Канонический репер X_1^2 неголономной параболической поверхности

Как и в § 6, полагая в формулах (74)

$$v^1 = 0, \quad v^2 = 0, \quad v^3 = ds, \tag{75}$$

получим, очевидно, деривационные формулы канонического репера произвольного однопараметрического подмногообразия X_1^2:

$$\frac{d\bar{r}}{ds} = \bar{\varepsilon}_3,$$

$$\frac{d\bar{\varepsilon}_1}{ds} = \alpha \bar{\varepsilon}_1 + \beta \bar{\varepsilon}_2 + \gamma \bar{\varepsilon}_3, \tag{76}$$

$$\frac{d\bar{\varepsilon}_2}{ds} = \delta \bar{\varepsilon}_1 + \xi \bar{\varepsilon}_2 - \gamma \bar{\varepsilon}_3,$$

$$\frac{d\bar{\varepsilon}_3}{ds} = \mu \bar{\varepsilon}_1 + \eta \bar{\varepsilon}_2 - (\alpha + \xi) \bar{\varepsilon}_3,$$

где положено:

$$\alpha = [A_{13}^1]\, v^1 = v^2 = 0, \quad \beta = [A_{13}^2]\, v^1 = v^2 = 0,$$

$$\gamma = [A^3_{12}]\ v^1 = v^2 = 0, \quad \delta = [A^1_{23}]\ v^1 = v^2 = 0,$$

$$\xi = [A^2_{23}]\ v^1 = v^2 = 0, \quad \mu = [A^1_{33}]\ v^1 = v^2 = 0,$$

$$\eta = [A^2_{33}]\ v^1 = v^2 = 0.$$

Найдем геометрические характеристики инвариантов репера. Чтобы охарактеризовать инвариант ds, рассмотрим индикатрисы векторов ε_1 и ε_2 вдоль линии (71). Вычислим объемы тетраэдров:

$$V_1 = (\bar{\varepsilon}_1(s),\ \bar{\varepsilon}_2(s),\ \bar{\varepsilon}_1(s+\Delta s))$$

$$V_2 = (\bar{\varepsilon}_2(s),\ \bar{\varepsilon}_1(s),\ \bar{\varepsilon}_2(s+\Delta s))$$

$$V = (\overline{M}_1 - \bar{r},\ \overline{M}_2 - \bar{r},\ \bar{\varepsilon}_3),$$

где V — тетраэдр, отсекаемый от координатных плоскостей плоскостью, проходящей через прямую, соответствующую в поляритете Пантази смещению (71), и конец вектора $\bar{\varepsilon}_3$.

$$ds = \text{гл. ч.}\,(\sqrt{V_1, V_2, V}).$$

Геометрические характеристики остальных инвариантов вытекают из следующих уравнений: соприкасающейся плоскости линии X^2_1

$$\eta x^1 - \mu x^2 = 0. \tag{77}$$

характеристики плоскости $\{\bar{\varepsilon}_1 \bar{\varepsilon}_3\}$ —

$$(x^1 - x^2)\gamma + 1 = 0,\ x^3 = 0, \tag{78}$$

характеристики плоскости $\{\bar{\varepsilon}_2 \bar{\varepsilon}_3\}$ —

$$\delta x^2 + \mu x^3 = 0,\ x^1 = 0, \tag{79}$$

характеристик плоскостей

$$P_1\{\bar{\varepsilon}_2,\ \bar{\varepsilon}_1 - \bar{\varepsilon}_3\} \text{ и } P_2\{\bar{\varepsilon}_3,\ \bar{\varepsilon}_1 + \bar{\varepsilon}_2\}$$

$$x^1(2\alpha + \gamma + \xi - \mu) + x^2(\delta - \gamma) + 1 = 0 \tag{80}$$

$$x^1 + x^2 = 0$$

$$x^1(\alpha + \beta + \delta + \xi) + x^3(\eta - \mu) = 0 \tag{81}$$

$$x^1 - x^2 = 0.$$

Полученные геометрические характеристики позволяют выделить следующие классы X^2_1. 1) $\beta = 0$; плоскость $\{\bar{\varepsilon}_1 \bar{\varepsilon}_3\}$ пересекает касательную плоскость неголономной поверхности по своей характеристике. 2) $\delta = 0$; характеристика плоскости $\{\bar{\varepsilon}_2,\ \bar{\varepsilon}_3\}$ совпадает с касательной к совпавшим асимптотическим линиям. 3) $\mu = 0$; характеристика плоскости $\{\bar{\varepsilon}_2 \bar{\varepsilon}_3\}$ совпадает с касательной линии X^2_1. 4) $2\alpha + \gamma + \xi + \mu = 0$, $\delta - \gamma = 0$; плоскость P_1 имеет несобственную характеристику. 5) $\alpha + \beta + \delta + \xi = 0$, $\eta - \mu = 0$; плоскость P_2 имеет несобственную характеристику.

ЛИТЕРАТУРА

1. Фиников С. П. Метод внешних форм Картана, ГИТТЛ, М.—Л., 1948.
2. Щербаков Р. Н. и Рахула М. О. К эквиаффинной теории неголономного многообразия. Геометрический сборник, вып. 1 (Труды Томского ун-та, 160). 1962, 82—89.
3. Щербаков Р. Н. Курс аффинной и проективной дифференциальной геометрии. Издательство Томского ун-та, Томск, 1960 г.
4. Щербаков Р. Н. О методе репеража подмногообразий. Данный сборник.

ТРУДЫ ТОМСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА
имени В. В. КУЙБЫШЕВА
Том 168 Серия механико-математическая

Е. Т. ИВЛЕВ, М. Б. ПЕРГАМЕНЩИКОВ

К ЭКВИАФФИННОЙ ТЕОРИИ ПАР ЛИНЕЙЧАТЫХ ПОВЕРХНОСТЕЙ ТРЕХМЕРНОГО ПРОСТРАНСТВА

В работах [1—5] изучены пары линейчатых поверхностей трехмерного проективного пространства. Изучение этого простейшего образа тесно связано с изучением более сложных геометрических образов — пар конгруэнций и пар комплексов.

Рассмотрение этих же геометрических образов в аффинном пространстве дает возможность выделить новые классы пар линейчатых многообразий, а также получить геометрические характеристики этих многообразий.

Настоящая статья посвящена изучению эквиаффинной пары линейчатых поверхностей трехмерного пространства.

Обозначения и терминология соответствуют, в основном, принятым в [6], [7].

§ 1. Основные и главные точки пары линейчатых поверхностей

Обозначая $\bar{A}$, $\bar{e}_1$, $\bar{e}_2$, $\bar{e}_3$ элементы некоторого эквиаффинного репера пары линейчатых поверхностей l_1 и l_2, запишем его деривационные формулы в виде:

$$d\bar{A} = \omega^i \bar{e}_i,\ d\bar{e}_i = \omega^j_i \bar{e}_j,\ (i, j = 1, 2, 3), \tag{1}$$

где ω^i и ω^j_i суть дифференциальные формы, зависящие от одного главного и 11 вторичных параметров и удовлетворяющие уравнениям структуры:

$$D\omega^i = [\omega^j \omega^i_j],\ D\omega^j_i = [\omega^m_i \omega^j_m],\ (m = 1, 2, 3),$$

причем

$$(\bar{e}_1 \bar{e}_2 \bar{e}_3) = 1,\ \omega^1_1 + \omega^2_2 + \omega^3_3 = 0,\ \Pi^1_1 + \Pi^2_2 + \Pi^3_3 = 0. \tag{2}$$

Рассмотрим на соответствующих лучах линейчатых поверхностей l_1 и l_2 по одной (пока произвольной) точке A_1 и A_2, соответственно. Начало репера A помещаем в середину отрезка A_1A_2. Вектор $\bar{e}_3$ направляем по прямой A_1A_2 так, что

$$\bar{A} = \bar{A}_1 - \bar{e}_3 = \bar{A}_2 + \bar{e}_3, \tag{3}$$

а векторы $\bar{e}_1$ и $\bar{e}_2$ — параллельно лучам линейчатых поверхностей l_1 и l_2, соответственно.

Так как теперь

$$\delta \bar{e}_s \parallel \bar{e}_s,\ \delta \bar{A}_s \parallel \bar{e}_s\ (s = 1, 2),$$

то формы

$$\omega_1^2,\ \omega_1^3,\ \omega_2^1,\ \omega_2^3,\ \omega^2+\omega_3^2,\ \omega^3+\omega_3^3,\ \omega^1-\omega_3^1,\ \omega^3-\omega_3^3$$

суть главные.

Определение 1. Две точки, в каждой из которых касательная плоскость одной линейчатой поверхности данной пары параллельна соответствующему лучу другой, называются основными точками. Прямая, проходящая через основные точки, называется основной прямой. Середина отрезка, соединяющего основные точки, называется основным центром пары линейчатых поверхностей.

Определение 2. Две точки, каждая из которых является точкой пересечения луча одной линейчатой повер ности с асимптотической плоскостью другой, называются главными точками. Прямая, проходящая через главные точки, называется главной прямой. Середина отрезка, соединяющего главные точки, называется главным центром пары линейчатых поверхностей.

Пусть

$$\overline{T}=\overline{A}+\overline{e}_3+t\overline{e}_1,\ \overline{T}^*=\overline{A}-\overline{e}_3+t^*\overline{e}_2 \tag{4}$$

— радиус-векторы произвольных точек T и T^* на лучах линейчатых поверхностей l_1 и l_2. Если T^* и T суть точки пересечения лучей линейчатых поверхностей l_2 и l_1 с касательными плоскостями линейчатых поверхностей l_1 и l_2, соответственно, то

$$\begin{gathered}2(\omega^2+\omega_3^2+t\omega_1^2)+t^*(\omega^3+\omega_3^3+t\omega_1^3)=0,\\ 2(\omega^1-\omega_3^1+t^*\omega_2^1)-t(\omega^3-\omega_3^3+t^*\omega_2^3)=0.\end{gathered} \tag{5}$$

Если T и T^* — основные точки, то уравнения (5) принимают вид:

$$\begin{gathered}\omega^3+\omega_3^3+t\omega_1^3=0,\\ \omega^3-\omega_3^3+t^*\omega_2^3=0.\end{gathered} \tag{6}$$

Если же T^* и T — главные точки, то

$$\begin{gathered}2\omega_1^2+t^*\omega_1^3=0,\\ 2\omega_2^1-t\omega_2^3=0.\end{gathered} \tag{7}$$

§ 2. Реперы пары линейчатых поверхностей

Для упрощения выкладок, связанных с изучением пары линейчатых поверхностей, построим естественно возникающие два канонических репера.

Если A_1 и A_2 — основные точки соответствующих лучей линейчатых поверхностей l_1 и l_2, то из (6) следует:

$$\omega^3=\omega_3^3=0,\ \omega_1^3\omega_2^3\neq 0. \tag{8}$$

При этом, как следует из (5), из рассмотрения исключается пара линейчатых поверхностей, у которой, по крайней мере, одна линейчатая поверхность является торсом с ребром возврата, описываемым неосновной точкой, а также пара цилиндроидов с направляющей плоскостью $(\overline{e}_1\overline{e}_2)$.

Если же A_1 и A_2 — главные точки, то из (7) следует

$$\omega_1^2=\omega_2^1=0,\ \omega_1^3\omega_2^3\neq 0. \tag{8^1}$$

При этом исключается пара линейчатых поверхностей у которой, по крайней мере, одна из линейчатых поверхностей является цилиндром.

Из соотношения

$$d(\overline{e}_1\overline{e}_2)=(\omega_1^1+\omega_2^2)(e_1e_2)+(\overline{e}_3,\ \omega_1^3\overline{e}_2-\omega_2^3\overline{e}_1)$$

следует, что векторы $\overline{e}_1$ и $\overline{e}_2$ можно пронормировать так, чтобы вектор $\overline{e}_1-\overline{e}_2$ был коллинеарен характеристике плоскости $(\overline{e}_1\overline{e}_2)$. Полученные два канонических репера пары линейчатых поверхностей назовем, соответственно, основным и главным реперами.

Деривационные формулы этих реперов запишем в виде: для основного репера

$$\begin{gathered}\frac{d\overline{A}}{ds}=a^1\overline{e}_1+a^2\overline{e}_2,\\ \frac{d\overline{e}_1}{ds}=a_1^1\overline{e}_1+a_1^2\overline{e}_2+\overline{e}_3,\\ \frac{d\overline{e}_2}{ds}=a_2^1\overline{e}_1-a_1^1\overline{e}_2+\overline{e}_3,\\ \frac{d\overline{e}_3}{ds}=a_3^1\overline{e}_1+a_3^2\overline{e}_2;\end{gathered} \tag{9}$$

для главного репера

$$\begin{gathered}\frac{d\overline{A}'}{ds'}=b^1\overline{e}_1'+b^2\overline{e}_2'+b^3\overline{e}_3',\\ \frac{d\overline{e}_1'}{ds'}=b_1^1\overline{e}_1'+\overline{e}_3',\\ \frac{d\overline{e}_2'}{ds'}=b_2^2\overline{e}_2'+\overline{e}_3',\\ \frac{d\overline{e}_3'}{ds'}=b_3^1\overline{e}_1'+b_3^2\overline{e}_2'+b_3^3\overline{e}_3'.\end{gathered} \tag{10}$$

Геометрическая характеристика дифференциального инварианта ds и инвариантов a^j, a_i^j основного репера дается соотношениями:

$$\begin{gathered}ds=6V_{10},\ \overline{E}_1=a_1^2\overline{e}_2+\overline{e}_3,\ \overline{E}_2=a_2^1\overline{e}_1+\overline{e}_3,\\ \overline{E}_3=(a^2+a_1^2)\overline{e}_2+\overline{e}_3,\ \overline{E}_4=(a^1+a_2^1)\overline{e}_1+\overline{e}_3,\\ \overline{E}_5=(a_3^2+a_1^2)\overline{e}_2+\overline{e}_3,\ \overline{E}_6=(a_3^1+a_2^1)\overline{e}_1+\overline{e}_3,\\ a_1^1V_{10}=6V_{20}-1,\end{gathered}$$

где $6V_{10}$ и $6V_{20}$ — главные части смешанных произведений $(\overline{e}_1+d\overline{e}_1,\ \overline{e}_1,\ \overline{e}_2)$ и $(\overline{e}_1+d\overline{e}_1,\ \overline{e}_2,\ \overline{e}_3)$, соответственно; $\overline{E}_1$ и $\overline{E}_2$ — проекции касательных к линиям $\overline{r}=\overline{e}_1$ и $\overline{r}=\overline{e}_2$ на координатные плоскости $(\overline{e}_2\overline{e}_3)$ и $(\overline{e}_1\overline{e}_3)$ в направлении векторов $\overline{e}_1$ и $\overline{e}_2$, соответственно, $\overline{E}_3$ и $\overline{E}_4$ —

проекции касательных к линиям $\bar r = \bar A + \bar e_1$ и $\bar r = \bar A + \bar e_2$ на координатные плоскости $(\bar e_2 \bar e_3)$ и $(\bar e_1 \bar e_3)$ в направлении векторов $\bar e_1$ и $\bar e_2$, соответственно; $\bar E_5$ и $\bar E_6$ — проекции касательных к линиям $\bar r = \bar e_1 + \bar e_3$ и $\bar r = \bar e_2 + \bar e_3$ на координатные плоскости $(\bar e_2 \bar e_3)$ и $(\bar e_1 \bar e_3)$ в направлении векторов $\bar e_1$ и $\bar e_2$, соответственно. Аналогичную геометрическую характеристику можно дать и для инвариантов главного репера.

§ 3. Некоторые классы пар линейчатых поверхностей

Для геометрической характеристики некоторых классов пар линейчатых поверхностей рассмотрим прежде всего некоторые ассоциированные геометрические образы.

Квадрика, касающаяся линейчатой поверхности l_1 и содержащая прямую $\{A_2, \bar e_2\}$, определяется уравнением

$$2x_1x_2 - 2a_1^2 x_1 x_3 + 2a_1^2 x_1 x_0 - (a^2 + a_3^2)\,[(x_3)^2 + (x_0)^2] = 0. \tag{11}$$

Центр этой квадрики находится в точке $C_1\,(0,\ a_1^2,\ 0)$.

Квадрика, касающаяся линейчатой поверхности l_2 и содержащая прямую $\{A_1, \bar e_1\}$, определяется уравнением

$$2x_1x_2 + (a^1 - a_3^1)\,[(x_3)^2 - (x_0)^2] - 2a_2^1 x_2 x_3 + 2a_2^1 x_0 x_2 = 0. \tag{12}$$

Центр этой квадрики находится в точке $C_2\,(-a_2^1,\ 0,\ 0)$.

Квадрика, касающаяся линейчатой поверхности $\{\bar A, \bar e_1\}$ и содержащая прямую $\{A_2, \bar e_2\}$, определяется уравнением

$$x_1x_2 - a^2 x_0 x_3 - a_1^2 x_1 x_3 + a^2 (x_3)^2 = 0. \tag{13}$$

Ее центр находится в точке $C_1'\left(0,\ \frac{1}{2}\,a^2 a_1^2,\ \frac{a^2}{2}\right)$.

Наконец, квадрика, касающаяся линейчатой поверхности $\{\bar A, \bar e_2\}$ и содержащая прямую $\{A, \bar e_2\}$, определяется уравнением

$$x_1x_2 - a_2^1 x_2 x_3 - a^1 x_0 x_3 + a^1 (x_3)^2 = 0. \tag{14}$$

Центр ее находится в точке $C_2'\left(-\frac{1}{2}\,a^1 a_2^1,\ 0,\ -\frac{a^1}{2}\right)$.

Отметим некоторые классы пар линейчатых поверхностей, характеризующиеся обращением в нуль одного из инвариантов.

1. Класс $a^1 = 0$ характеризуется каждым из следующих свойств: а) линейчатая поверхность $\{A, \bar e_2\}$ — торс, б) касательная к линии (A) параллельна вектору $\bar e_2$, в) касательная плоскость к линейчатой поверхности $\{A, \bar e_2\}$ в точке A совпадает с координатной плоскостью $(\bar e_2 \bar e_3)$.

2. Класс $a^2 = 0$ характеризуется каждым из следующих свойств: а) линейчатая поверхность $\{A, \bar e_1\}$ — торс, б) касательная к линии (A) параллельна вектору $\bar e_2$, в) касательная плоскость к линейчатой поверхности $\{A, \bar e_1\}$ в точке A совпадает с координатной плоскостью $(\bar e_1 \bar e_3)$.

3. Класс $a_1^2 = 0$ характеризуется каждым из следующих свойств: а) центр квадрики (11) совпадает с точкой A, б) центр квадрики (13) лежит на прямой $\{A, \bar e_3\}$, в) квазифлекнодальная точка луча линейчатой поверхности l_1 — несобственная.

Аналогично характеризуется класс $a_2^1 = 0$.

4. Класс $a_3^1 = 0$ $(a_3^2 = 0)$ характеризуется тем, что касательная к линии $\bar r = \bar e_3$ параллельна вектору $\bar e_2\,(\bar e_1)$.

Поставим такую задачу: найти пары линейчатых поверхностей, основной и главный реперы которых совпадают.

В обозначениях основного репера условие совпадения главных и основных точек имеет вид:

$$a_1^2 = a_2^1 = 0. \tag{15}$$

Такую пару линейчатых поверхностей назовем парой S. Отметим некоторые свойства, характеризующие пару S: 1) центры квадрик (11) и (12) совпадают с точкой A; 2) прямая $C_1'C_2'$ совпадает с прямой $\{A, \bar e_3\}$; 3) точки A_1 и A_2 являются квазифлекнодальными (вторая пара квазифлекнодальных точек — несобственная).

Пару S можно получить еще и следующим образом. Отнеся пару линейчатых поверхностей к главному реперу, поставим задачу — найти такую точку $\bar A' + \tau \bar e_3$, чтобы линейчатая поверхность

$$\bar A' + \tau \bar e_3' + \lambda\,(\bar e_1' - \bar e_2') \tag{16}$$

была торсом. Имеем

$$(d\,(\bar A' + \tau \bar e_3'),\ \bar e_1' - \bar e_2',\ d\,(\bar e_1' - \bar e_2')) = 0$$

или:

$$b^3 + \tau b_3^3 = 0. \tag{17}$$

Потребовав, чтобы уравнение (17) обращалось в тождество, получим:

$$b^3 = b_3^3 = 0. \tag{18}$$

В этом случае деривационные формулы (10) совпадают с деривационными формулами (9), и мы приходим к паре S.

Найдем геометрическое место фокусов линейчатых поверхностей (16):

$$d\,(\bar A + \tau \bar e_3 + \lambda\,(\bar e_1 - \bar e_2)) \parallel \bar e_1 - \bar e_2.$$

Отсюда находим:

$$\lambda = \frac{a^1 + a^2}{-2a_1^1}\,.$$

Итак, искомое геометрическое место есть прямая линия

$$\bar M = \bar A + \frac{a^1 + a^2}{-2a_1^1}(\bar e_1 - \bar e_2) + \tau \bar e_3,$$

параллельная вектору $\bar e_3$.

В основном репере расслояемая пара линейчатых поверхностей определяется условиями:

$$a_1^2 = a_2^1 = a^2 + a^1 + a_3^2 - a_3^1 = 0, \tag{19}$$

откуда видно, что пара S является обобщением расслояемой пары линейчатых поверхностей.

ЛИТЕРАТУРА

1. Фиников С. П. Теория пар конгруэнций. М.—Л., 1956.

2. Gheorghiu. Gh. Th. Asupra unui cuplu de suprafete riglate. Lucrarile Inst. ped. Timisoara. Mat.—fiz, 1958 (1959), 73—81.

3. Ивлев Е. Т. О паре линейчатых поверхностей в трехмерном проективном пространстве. Геометрический сборник, вып. 2. Труды Томского университета, 161, 1962, стр. 3—10.

4. Пергаменщиков М. Б., Петин В. А. О расслояемой паре линейчатых поверхностей. Геометрический сборник, вып. 1, Труды Томского университета, 160, 1962, стр. 58—64.

5. Романович В. А. Параболическая пара линейчатых поверхностей в трехмерном проективном пространстве, там же, стр. 65—69.

6. Фиников С. П. Метод внешних форм Картана в дифференциальной геометрии, М.—Л., ГИТТЛ, 1948.

7. Щербаков Р. Н. Курс аффинной и проективной дифференциальной геометрии. Издательство Томского университета, Томск, 1960.

ТРУДЫ ТОМСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА
имени В. В. КУЙБЫШЕВА

Том 168 Серия механико-математическая

Е. Т. ИВЛЕВ

О ПАРЕ КОНГРУЭНЦИЙ В ЭКВИАФФИННОЙ ГЕОМЕТРИИ ТРЕХМЕРНОГО ПРОСТРАНСТВА

В статьях [1], [2] методом подвижного репера и связанным с ним методом репеража подмногообразий [3] изучались произвольные пары прямолинейных конгруэнций в трехмерном проективном пространстве. В настоящей статье рассматривается произвольная пара прямолинейных конгруэнций в эквиаффинной геометрии трехмерного пространства.

§ 1. Построение канонического репера. Геометрическая характеристика элементов репера

Обозначая $\bar{A}, \bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3$ элементы некоторого эквиаффинного репера пары конгруэнций, запишем его деривационные формулы в виде:

$$d\bar{A} = \omega^i \bar{e}_i, \tag{1}$$

$$d\bar{e}_i = \omega_i^j \bar{e}_j, \quad (i, j = 1, 2, 3),$$

где ω^i и ω_i^j суть дифференциальные формы, удовлетворяющие уравнениям структуры:

$$D\omega^i = [\omega^j \omega_j^i], \tag{2}$$

$$D\omega_i^j = [\omega_i^m \omega_m^j], \quad (m = 1, 2, 3),$$

причем векторы $\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3$ удовлетворяют условию:

$$(\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3) = 1. \tag{3}$$

Дифференцируя последнее соотношение и пользуясь при этом формулами (1), получим:

$$\omega_1^1 + \omega_2^2 + \omega_3^3 = 0, \tag{4}$$

а для дифференциальных форм π_i^j от вторичных параметров имеем

$$\pi_1^1 + \pi_2^2 + \pi_3^3 = 0. \tag{4'}$$

Будем считать векторы $\bar{e}_1$ и $\bar{e}_2$ параллельными соответствующим лучам конгруэнций данной пары. Возьмем на соответствующих лучах конгруэнций пары по одной (пока произвольной) точке, радиус-векторы которых обозначим $\bar{\Pi}_1$ и $\bar{\Pi}_2$, соответственно. В дальнейшем точки будем обозначать буквами без черточек, а их радиус-векторы — теми же буквами с черточками над ними. Начало рассматриваемого репера поместим в середину между точками Π_1 и Π_2 прямой $\Pi_1\Pi_2$. Вектор $\bar{e}_3$ будем считать направленным по прямой $\Pi_1\Pi_2$, так что

$$\bar{\Pi}_1 = \bar{A} + \bar{e}_3, \quad \bar{\Pi}_2 = \bar{A} - \bar{e}_3. \tag{5}$$

Так как

$$\delta\bar{e}_n \parallel \bar{e}_n, \quad \delta\bar{\Pi}_n \parallel \bar{e}_n, \quad (n = 1, 2), \tag{6}$$

то формы

$$\omega_1^2, \omega_1^3, \omega_2^1, \omega_2^3, \ \omega^1 - \omega_3^1, \ \omega^2 + \omega_3^2, \ \omega^3 + \omega_3^3, \ \omega^3 - \omega_3^3$$

суть главные. Принимая формы ω_1^2 и ω_2^1 за независимые (какие пары конгруэнций при этом исключаются из рассмотрения—выяснится ниже), положим:

$$\omega_1^3 = G\omega_1^2 + H\omega_2^1, \tag{7}$$

$$\omega_2^3 = G'\omega_1^2 + H'\omega_2^1.$$

Дифференцируя эти уравнения внешним образом и выписывая соотношения для δG, δH, $\delta G'$ и $\delta H'$, получим:

$$\delta G - G\pi_2^2 - G^2\pi_3^2 - G'H\pi_3^1 = \delta H' - H'\pi_1^1 - H'^2\pi_3^1 - HG'\pi_3^2 = 0,$$

$$\delta H - 3\pi_1^1 H - HG\pi_3^2 - H'H\pi_3^1 = \delta G' - 3\pi_2^2 G' - G'H'\pi_3^1 - GG'\pi_3^2 = 0.$$

Пользуясь этими соотношениями, проведем следующую фиксацию:

$$G = 0, \ H' = 0, \ G'H \neq 0, \ G' = H, \ \pi_3^1 = 0, \ \pi_3^2 = 0, \ \pi_1^1 = 0, \tag{8}$$

чем и завершается канонизация репера.

Выясним геометрическое значение фиксации (8). Так как между лучами пары конгруэнций установлено взаимно-однозначное соответствие, то с каждой линейчатой поверхностью одной конгруэнции инвариантно связана линейчатая поверхность другой конгруэнции. Возникает, таким образом, пара соответствующих линейчатых поверхностей, принадлежащая данной паре конгруэнций.

Определение 1. Пара линейчатых поверхностей, принадлежащая данной паре конгруэнций и содержащая линейчатую поверхность, асимптотическая плоскость которой параллельна соответствующему лучу другой конгруэнции, называется A-парой.

Найдем дифференциальные уравнения A-пар линейчатых поверхностей. Пусть

$$\bar{T} = \bar{A} + \bar{e}_3 + t\bar{e}_1 \tag{8'}$$

— радиус-вектор произвольной точки на луче, проходящем через Π_1 и параллельном вектору $\bar{e}_1$, и пусть касательная плоскость в точке T любой линейчатой поверхности соответствующей конгруэнции пары, пересекает луч другой конгруэнции в точке, радиус-вектор которой имеет вид

$$\bar{T}^* = \bar{A} - \bar{e}_3 + t^*\bar{e}_2. \tag{8''}$$

Тогда из

$$(d\bar{T}, \ \bar{e}_1, \ \bar{T} - \bar{T}^*) = 0$$

находим

$$2(\omega^2 + \omega_3^2 + t\omega_1^2) + t^*(\omega^3 + \omega_3^3 + t\omega_1^3) = 0. \tag{9}$$

Если

$$\bar{X} = \bar{A} + \bar{e}_3 + x\bar{e}_1 \tag{9'}$$

— радиус-вектор точки пересечения луча конгруэнции, параллельного

вектору $\bar{e}_1$ и проходящего через точку Π_1, с касательной плоскостью в точке с радиусом-вектором

$$\bar{Y} = \bar{A} - \bar{e}_3 + y\bar{e}_2 \tag{9''}$$

любой линейчатой поверхности соответствующей конгруэнции, то x и y связаны соотношением:

$$2(\omega^1 - \omega_3^1 + y\omega_2^1) - x(\omega^3 - \omega_3^3 + y\omega_2^3) = 0. \tag{10}$$

Отсюда и из (9) следует, что дифференциальные уравнения A-пар линейчатых поверхностей имеют вид:

$$\omega_1^3\omega_2^3 = 0. \tag{11}$$

Из соотношений (7) и (8), так как

$$[\omega_1^3\omega_2^3] = -H^2[\omega_1^2\omega_2^1] \neq 0,$$

следует, что при выборе форм ω_1^2 и ω_2^1 за независимые из рассмотрения исключается пара конгруэнций, у которой обе A-пары линейчатых поверхностей совпадают (об этих парах см. [10]).

Как известно [5], главными точками соответствующих лучей пары линейчатых поверхностей называются точки пересечения луча одной линейчатой поверхности с асимптотической плоскостью другой, а основными точками называются точки, в которых касательные плоскости одной линейчатой поверхности пары параллельны соответствующему лучу другой.

Определение 2. Главные (основные) точки соответствующих лучей A-пар линейчатых поверхностей данной пары конгруэнций, не являющиеся несобственными точками, называются главными (основными) точками соответствующих лучей пары конгруэнций. Прямая, проходящая через главные (основные) точки пары конгруэнций, называется главной (основной) прямой. Середина отрезка, соединяющего главные (основные) точки, называется главным (основным) центром пары конгруэнций. Поверхность, описываемая главным (основным) центром пары конгруэнций, называется главной (основной) центральной поверхностью.

Из (8') — (10) следует, что при фиксации (8) точки Π_1 и Π_2 суть главные точки соответствующих лучей пары конгруэнций, а начало рассматриваемого репера является, следовательно, главным центром данной пары конгруэнций.

Если

$$\bar{T} = \Pi_1 + t\bar{e}_1, \quad \bar{T}^* = \Pi_2 + t\,\bar{e}_2 \tag{12}$$

суть радиус-векторы фокусов соответствующих лучей конгруэнций пары, то из

$$d\bar{T} \parallel \bar{e}_1, \quad d\bar{T}^* \parallel \bar{e}_2$$

находим

$$\omega^2 + \omega_3^2 + t\omega_1^2 = 0, \quad \omega^1 - \omega_3^1 + t^*\omega_2^1 = 0, \tag{13}$$

$$\omega^3 + \omega_3^3 + t\omega_1^3 = 0, \quad \omega^3 - \omega_3^3 + t^*\omega_2^3 = 0.$$

Отсюда следует, что при фиксации (8) из рассмотрения исключается пара конгруэнций, у которой, по крайней мере, одна из конгруэнций является цилиндрической.

Выясним, наконец, геометрическое значение нормирования в (8).

Определение 3. Плоскость, параллельная двум соответствующим лучам пары конгруэнций и проходящая через главный (основной) центр пары конгруэнций, называется главной (основной) плоскостью.

Определение 4. Пара линейчатых поверхностей, характеристика главной плоскости которой параллельна проекции направляющего вектора ее главной прямой [5] на главную плоскость в направлении вектора $\bar{e}_3$, называется базисной парой.

Дифференциальное уравнение любой пары линейчатых поверхностей данной пары конгруэнций зададим в виде:

$$\omega_1^2 = \lambda\omega_2^1. \tag{14}$$

Если

$$\bar{X} = \bar{\Pi}_1 + x\bar{e}_1, \quad \bar{T}^* = \Pi_2 + t^*\bar{e}_2$$

суть радиус-векторы главных точек [5] пары линейчатых поверхностей (14), то с помощью (7), (8), (9) и (10) находим

$$\bar{X} = \bar{A} + \bar{e}_3 + \frac{2}{\lambda H}\bar{e}_1, \quad \bar{T}^* = \bar{A} - \bar{e}_3 - \frac{2\lambda}{H}\bar{e}_2. \tag{15}$$

Характеристика главной плоскости пары линейчатых поверхностей, как это следует из $d(\bar{e}_1\bar{e}_2) = -\omega_3^3(\bar{e}_1\bar{e}_2) + (\bar{e}_3, \omega_1^3\bar{e}_2 - \omega_2^3\bar{e}_1)$, параллельна вектору

$$\bar{e}_1 - \lambda\bar{e}_2. \tag{16}$$

Отсюда и из (15) следует, что необходимым и достаточным условием того, чтобы вектор (16) был параллелен проекции вектора $\overline{XT}^*$ на главную плоскость в направлении вектора $\bar{e}_3$, является

$$\lambda^3 + 1.$$

Отсюда и из (14) следует, что через каждую пару соответствующих лучей данной конгруэнции проходят три базисные пары линейчатых поверхностей, принадлежащие этой паре конгруэнций: одна вещественная с дифференциальным уравнением

$$\omega_1^2 = -\omega_2^1 \tag{17}$$

и две мнимые с дифференциальными уравнениями

$$(\omega_1^2)^2 - \omega_1^2\omega_2^1 + (\omega_2^1)^2 = 0.$$

Определение 5. Характеристика главной плоскости вещественной базисной пары линейчатых поверхностей данной пары конгруэнций называется биссекторной прямой.

Таким образом, мы приходим к следующему результату: векторы $\bar{e}_1$ и $\bar{e}_2$ нормированы так, что вектор $\bar{e}_1 + \bar{e}_2$ параллелен биссекторной прямой.

Итак, все элементы канонического репера данной пары конгруэнций геометрически характеризованы. Деривационные формулы этого репера запишем в виде:

$$d\bar{A} = \omega^i\bar{e}_i = (a^i\omega_1^2 + b^i\omega_2^1)\,\bar{e}_i,$$
$$d\bar{e}_i = \omega_i^j\bar{e}_j = (a_i^j\omega_1^2 + b_i^j\omega_2^1)\,\bar{e}_j, \tag{18}$$

где функции a^i, b^i, a_i^j и b_i^j в силу (4) и (8) удовлетворяют соотношениям:

$$a_1^2 = b_2^1 = 1, \quad b_1^2 = a_2^1 = 0, \quad a_1^1 + a_2^2 + a_3^3 = b_1^1 + b_2^2 + b_3^3 = 0,$$
$$a_1^3 = b_2^3 = 0, \quad b_1^3 = a_2^3 = H. \tag{19}$$

Внешнее дифференцирование деривационных формул (18) с учетом (19) приводит к следующей системе восьми независимых квадратичных уравнений:

$$[da^i\omega_1^2] + [ab^i\omega_2^1] + (a^jb_j^i - a^jb_j^i + a^iX_1 + b^iX_2)\,[\omega_1^2\omega_2^1] = 0,$$
$$[da_1^1\omega_1^2] + [db_1^1\omega_2^1] + (b_3^1H - 1 + a_1^1X_1 + b_1^1X_2)\,[\omega_1^2\omega_2^1] = 0,$$
$$[da_3^3\omega_1^2] + [db_3^3\omega_2^1] + (b_3^2H - a_3^1H + a_3^3X_1 + b_3^3X_2)\,[\omega_1^2\omega_2^1] = 0, \tag{20}$$
$$[da_3^\alpha\omega_1^2] + [db_3^\alpha\omega_2^1] + (b_3^\beta a_\beta^\alpha - a_3^\beta b_\beta^\alpha + a_3^\alpha X_1 + b_3^\alpha X_2)\,[\omega_1^2\omega_2^1] = 0,$$
$$[dH_1\omega_1^2] + [dH_2\omega_2^1] = 0, \; (j \neq i, \quad \alpha = 1, 2; \quad \beta \neq \alpha, \quad \beta \neq 3),$$

где

$$H_1 = -HX_2, \quad H_2 = HX_1, \tag{21}$$
$$X_1 = b_2^2 - b_1^1 - a_3^2H, \quad X_2 = a_2^2 - a_1^1 + b_3^1H,$$

причем последнее квадратичное уравнение в системе (20) получено путем внешнего дифференцирования уравнения Пфаффа:

$$dH = H_1\omega_1^2 + H_2\omega_2^1. \tag{22}$$

Система восьми независимых квадратичных уравнений (20) содержит (14) неизвестных функций a^i, b^i $(i = 1, 2, 3)$, $a_1^1, b_1^1, a_3^3, b_3^3, a_3^1, b_3^1, a_3^2$ и b_3^2. Это означает, что пара конгруэнций определяется с произволом в шесть функций двух аргументов. Этот результат очевиден и геометрически. Однако произведенные выкладки позволяют проще решать вопрос о существовании специальных классов пар конгруэнций.

Замечание. Рассматривая координатные A-пары линейчатых поверхностей, мы можем так же, как и в статье [5], дать геометрическую характеристику всех инвариантов a^i, b^i, a_i^j и b_i^j, входящих в деривационные формулы (18).

§ 2. Связь с теорией конгруэнций кривых второго порядка В. С. Малаховского. Другая геометрическая характеристика элементов репера

В предыдущем параграфе мы нашли радиус-векторы главных точек (15) соответствующих лучей любой пары линейчатых поверхностей (14) данной пары конгруэнций. При каждой фиксированной паре лучей данной пары конгруэнций главные прямые [5], т. е. прямые, проходящие через главные точки X и T^* всех пар линейчатых поверхностей, образуют однопараметрическое семейство.

Теорема 1. Главные прямые всех пар линейчатых поверхностей при каждой фиксированной паре лучей данной пары конгруэнций образуют однопараметрическое семейство прямых, которое является однополостным гиперболоидом.

Доказательство. Уравнение всякой квадрики будем писать в виде:

$$(\overline{X}\cdot\overline{X}) = a_{ij}x^ix^j = 0, \quad (i, j = 0, 1, 2, 3, 4), \tag{23}$$

где $(\overline{X}\cdot\overline{X}) = a_{ij}x^ix^j$ обозначает квазискалярное произведение, причем $a_{ij} = a_{ji} = (\overline{e}_i\cdot\overline{e}_j), \overline{e}_0 = \overline{A}$ и x^i — однородные координаты точки X. Потребуем, чтобы квадрике (23) принадлежали все главные прямые

$$\overline{X} = t_1\left(\overline{A} + \overline{e}_3 + \frac{2}{\lambda H}\overline{e}_1\right) + t_2\left(\overline{A} - \overline{e}_3 - \frac{2\lambda}{H}\overline{e}_2\right). \tag{24}$$

Получим:

$$a_{11} = (\overline{e}_1\cdot\overline{e}_1) = 0,\ a_{22} = (\overline{e}_2\cdot\overline{e}_2) = 0,\ a_{02} = (\overline{A}\cdot\overline{e}_2) = 0,\ a_{01} = (\overline{A}\cdot\overline{e}_1) = 0,$$

$$2a_{12} - H^2a_{00} = 2(\overline{e}_1\cdot\overline{e}_2) - H^2(\overline{A}\cdot\overline{A}) = 0,$$

$$a_{22} = (\overline{e}_2\cdot\overline{e}_2) = 0,\ a_{03} = (\overline{A}\cdot\overline{e}_3) = 0,$$

$$a_{13} = (\overline{e}_1\cdot\overline{e}_3) = 0,\ a_{00} + a_{33} = (\overline{A}\cdot\overline{A}) + (\overline{e}_3\cdot\overline{e}_3) = 0.$$

Отсюда следует, что уравнение искомой квадрики в неоднородных координатах x, y и z имеет вид:

$$H^2xy - z^2 + 1 = 0. \tag{25}$$

Теорема доказана.

Определение 6. Однополостной гиперболоид, о котором идет речь в теореме 1, называется главной квадрикой.

Теорема 2. Главный центр пары конгруэнций является центром главной квадрики.

Доказательство этой теоремы вытекает из уравнения (25).

Заметим, что теорема 2 дает новую геометрическую характеристику главного центра пары конгруэнций. Так как через данную точку в пространстве можно провести только одну прямую, пересекающую лучи конгруэнций пары, то получаем новую характеристику главных точек соответствующих лучей этой пары как точек пересечения этих лучей с прямой, проходящей через центр главной квадрики.

Так же, как и в случае главных прямых, находим, что основные прямые всех пар линейчатых поверхностей данной пары конгруэнций при каждой фиксированной паре лучей принадлежат квадрике, уравнение которой имеет вид:

$$2Hxy + y(1 + z)(b^3 + b^3_3) + x(1 - z)(a^3 - a^3_3) = 0. \tag{26}$$

Таким образом, мы приходим к следующей теореме.

Теорема 3. Основные прямые всех пар линейчатых поверхностей при каждой фиксированной паре лучей принадлежат однополостному гиперболоиду (26).

Определение 7. Однополостной гиперболоид, о котором идет речь в теореме 3, называется основной квадрикой.

Теорема 4. Основной центр пары конгруэнций является центром основной квадрики.

Доказательство. Если $\overline{T} = \overline{A} + \overline{e}_3 + t\overline{e}_1$ и $\overline{Y} = \overline{A} - \overline{e}_3 + y\overline{e}_2$ радиус-векторы основных точек пары линейчатых поверхностей (14), то из (9) и (10) находим

$$\overline{T} = \overline{A} + \overline{e}_3 - \frac{(a^3_3 + a^3)\lambda + b^3 + b^3_3}{H}\overline{e}_1,$$

$$\overline{Y} = \overline{A} - \overline{e}_3 - \frac{(a^3 - a^3_3)\lambda + b^3 - b^3_3}{\lambda H}\overline{e}_2. \tag{27}$$

Отсюда следует, что радиус-вектор $\overline{O}$ основного центра пары конгруэнций (см. определение 2) имеет вид:

$$\overline{O} = \overline{A} - \frac{1}{2H}\left\{(b^3 + b^3_3)\overline{e}_1 + (a^3 - a^3_3)\overline{e}_2\right\}. \tag{28}$$

А этот радиус-вектор, как легко видеть из (26), есть радиус-вектор центра основной квадрики.

Итак, мы получили, что каждой паре соответствующих лучей пары конгруэнций соответствует одна главная и одна основная квадрика. Возникает, таким образом, два двупараметрических семейства главных и основных квадрик или два комплекса прямых, каждый из которых состоит из образующих (определенной серии) главной или основной квадрики.

Из уравнений (25) и (26) следует, что линией пересечения плоскости $z = 0$ с главной (основной) квадрикой, является гипербола, уравнение которой имеет вид:

$$H^2xy + 1 = 0, \tag{25'}$$

$$(2Hxy + (b^3 + b^3_3)y + (a^3 - a^3_3)x = 0). \tag{26'}$$

Эту гиперболу будем называть главной (основной) гиперболой. Когда пара соответствующих лучей описывает пару конгруэнций, главная гипербола (25') (основная гипербола (26')) описывает конгруэнцию. Таким образом, мы получаем, что с каждой парой конгруэнций инвариантно связаны конгруэнции кривых второго порядка: конгруэнция главных гипербол и конгруэнция основных гипербол.

В предыдущем параграфе мы отметили, что пара конгруэнций определяется с произволом в шесть функций двух аргументов. В статье [6] В. С. Малаховским было показано, что конгруэнции гипербол определяются с произволом в шесть функций двух аргументов. Следовательно, можно сказать, что конгруэнции главных и основных гипербол являются конгруэнциями гипербол общего вида.

§ 3. О некоторых геометрических образах, связанных с репером

Для геометрической характеристики некоторых специальных классов пар конгруэнций, к рассмотрению которых мы перейдем в следующем параграфе, нам понадобятся некоторые геометрические образы, связанные с построенным в предыдущих параграфах репером.

1. Найдем, прежде всего, фокусы конгруэнций данной пары. Если $\overline{T} = \overline{A} + \overline{e}_3 + t\overline{e}_1$ и $\overline{T}^* = \overline{A} - \overline{e}_3 + t^*\overline{e}_2$ суть радиус-векторы фокусов соответствующих лучей конгруэнций пары, то, исключая из (13) с помощью деривационных формул (18) формы ω^2_1 и ω^1_2, получим

$$Ht^2 + \{H(a^2 + a^2_3) + (b^3 + b^3_3)\}t + (b^3 + b^3_3)(a^2 + a^2_3) - (b^2 + b^2_3)(a^3 + a^3_3) = 0, \tag{29}$$

$$Ht^{*2} + \{H(b^1 - b^1_3) + (a^3 - a^3_3)\}t^* + (a^3 - a^3_3)(b^1 - b^1_3) - (a^1 - a^1_3)(b^3 - b^3_3) = 0.$$

Исключая, далее, параметры t и t^* из (13) и пользуясь при этом деривационными формулами (18), найдем дифференциальные уравнения торсов соответствующих конгруэнций данной пары:

$$H(b^2+b_3^2)(\omega_2)^2-\{H(a^2+a_3^2)-(b^3+b_3^3)\}\omega_1^2\omega_2^1-(a^3+a_3^3)(\omega_1^2)^2=0,$$
$$H(a^1-a_3^1)(\omega_1^2)^2-\{H(b^1-b_3^1)-(a^3-a_3^3)\}\omega_1^2\omega_2^1-(b^3-b_3^3)(\omega_2^1)^2=0. \tag{30}$$

Пусть $\overline{T}=\overline{A}+\overline{e}_3+t\overline{e}_1$ и $\overline{T}^*=\overline{A}-\overline{e}_3+t^*\overline{e}_2$ радиус-векторы квазифлекнодальных точек [7] соответствующих лучей любой пары линейчатых поверхностей данной пары конгруэнций. Тогда из совпадения $\overline{T}\equiv\overline{X}$ и $\overline{T}^*\equiv\overline{Y}$ и соотношений (9) и (10) находим:

$$\{\omega_1^3(\omega^3-\omega_3^3)-2\omega_1^2\omega_2^3\}t^2+\{4\omega_1^2\omega_2^1-2\omega_2^3(\omega^2+\omega_3^2)+(\omega^3)^2-(\omega_3^3)^2-$$
$$-2\omega_1^3(\omega^1-\omega_3^1)\}t+4\omega_2^1(\omega^2+\omega_3^2)-2(\omega^1-\omega_3^1)(\omega^3+\omega_3^3)=0, \tag{31}$$
$$\{2\omega_2^1\omega_1^3+\omega_2^3(\omega^3+\omega_3^3)\}t^{*2}+\{4\omega_1^2\omega_2^1+(\omega^3)^2-(\omega_3^3)^2+2\omega_1^3(\omega^1-\omega_3^1)+$$
$$+2\omega_2^3(\omega^2+\omega_3^2)\}t^*+4\omega_1^2(\omega^1-\omega_3^1)+2(\omega^3-\omega_3^3)(\omega^2+\omega_3^2)=0.$$

2. Пусть

$$P=\overline{A}+p\overline{e}_3,\ \overline{Q}=\overline{A}+q\overline{e}_3 \tag{32}$$

радиус-векторы произвольных точек P и Q на главной прямой данной пары конгруэнций. Рассмотрим пару конгруэнций, образованных прямой, проходящей через точку P и параллельной лучу одной конгруэнции исходной пары и прямой, проходящей через точку Q и параллельной лучу другой конгруэнции исходной пары. Эту пару конгруэнций назовем присоединенной.

Теорема 5. Точки P и Q являются главными точками соответствующих лучей присоединенной пары конгруэнций. A-пары линейчатых п верхностей исходной пары конгруэнций соответствуют A-парам линейчатых поверхностей присоединенной пары.

Доказательство. Пусть $\overline{T}'=\overline{Q}+t'\overline{e}_2$ — радиус-вектор точки пересечения луча QM, параллельного вектору $\overline{e}_2$, с касательной плоскостью любой линейчатой поверхности конгруэнции, образованной лучом PN, параллельным вектору $\overline{e}_1$, в точке с радиус-вектором $T^*=\overline{P}+t^*\overline{e}_1$. Тогда

$$(p-q)(\omega^2+p\omega_3^2+t^*\omega_1^2)+t'(\omega^3+p\omega_3^3+dp+t^*\omega_1^3)=0. \tag{33}$$

Если же $\overline{T}^{**}=P+t^{**}\overline{e}_1$ — радиус-вектор точки пересечения луча PN с касательной плоскостью любой линейчатой поверхности конгруэнции (QM) в точке с радиус-вектором $\overline{T}''=Q+t''\overline{e}_2$, то

$$(p-q)(\omega^1+q\omega_3^1+t''\omega_2^1)+t^{**}(\omega^3+q\omega_3^3+dq+t''\omega_2^3). \tag{34}$$

Отсюда, в силу соотношений (33) и определений 1 и 2 вытекает справедливость настоящей теоремы.

Теорема 6. К любой паре конгруэнций с произволом двух функций двух аргументов можно присоединить такую пару конгруэнций, главная прямая которой является главной прямой исходной пары конгруэнций, а лучи конгруэнций этой пары параллельны соответствующим лучам исходной пары.

Доказательство. Рассмотрим присоединенную пару конгруэнций. На основании теоремы 5 замечаем, что главная прямая этой

пары конгруэнций является главной прямой исходной пары. Деривационные формулы канонического репера присоединенной пары конгруэнций запишем в виде:

$$d\overline{A}^*=\overset{*}{\omega}{}^i\overline{e}^*_i=(\overset{*}{a}{}^i\overset{*}{\omega}{}_1^2+\overset{*}{b}{}^i\overset{*}{\omega}{}_2^1)\overline{e}^*_i,$$
$$d\overline{e}^*_i=\overset{*}{\omega}{}_i^j\overline{e}^*_j=(\overset{*}{a}{}_i^j\overset{*}{\omega}{}_1^2+\overset{*}{b}{}_i^j\overset{*}{\omega}{}_2^1)\overline{e}^*_j, \tag{35}$$

где

$$\overset{*}{a}{}_1^2=\overset{*}{b}{}_2^1=1,\ \overset{*}{b}{}_1^2=\overset{*}{a}{}_2^1=0,\ \overset{*}{a}{}_1^1+\overset{*}{a}{}_2^2+\overset{*}{a}{}_3^3=\overset{*}{b}{}_1^1+\overset{*}{b}{}_2^2+\overset{*}{b}{}_3^3=0,$$
$$\overset{*}{a}{}_1^3=\overset{*}{b}{}_2^3=0,\ \overset{*}{b}{}_1^3=\overset{*}{a}{}_2^3=H^*\neq 0. \tag{36}$$

Перейдем от репера $\{\overline{A}\,\overline{e}_i\}$ к реперу $\{\overline{A}^*\overline{e}_i^*\}$ по формулам

$$\overline{A}^*=\overline{A}+f\overline{e}_3,$$
$$\overline{e}_3^*=g\overline{e}_3, \tag{37}$$
$$\overline{e}_1^*=\lambda_1\overline{e}_1,$$
$$\overline{e}_2^*=\lambda_2\overline{e}_2,$$

где

$$f=\frac{p+q}{2},\quad g=\frac{p-q}{2}. \tag{38}$$

Дифференцируя формулы (35) и (18) и пользуясь при этом формулами (37), получим

$$dln\lambda_1+\omega_1^1=\overset{*}{\omega}{}_1^1,\ dln\lambda_2+\omega_2^2=\overset{*}{\omega}{}_2^2,$$
$$dlng+\omega_3^3=\overset{*}{\omega}{}_3^3,$$
$$\overset{*}{\omega}{}_1^2\lambda_2=\lambda_1\omega_1^2,\ \overset{*}{\omega}{}_1^3g=\lambda_1\omega_1^3,\ \overset{*}{\omega}{}_2^1\lambda_1=\lambda_2\omega_2^1,\ \overset{*}{\omega}{}_2^3g=\lambda_1\omega_2^3, \tag{39}$$
$$\overset{*}{\omega}{}_3^1\lambda_1=\omega_3^1g,\ \overset{*}{\omega}{}_3^2\lambda_2=\omega_3^2g,\ \overset{*}{\omega}{}^1\lambda_1=\omega^1+f\omega_3^1,\ \overset{*}{\omega}{}^2\lambda_2=\omega^2+f\omega_3^2,$$
$$\overset{*}{\omega}{}^3g=\omega^3+f\omega_3^3+df.$$

Требуя

$$(\overline{e}_1^*\,\overline{e}_2^*\,\overline{e}_3^*)=1,$$

мы с помощью (37) получим

$$\lambda_1\lambda_2g=1. \tag{40}$$

Отсюда и из (39) в силу (18) и (35) найдем

$$\lambda_1=\lambda_2=g^{-1/2}. \tag{41}$$

Отсюда и из (37) заключаем, что задание двух функций f и g (или p и q) вполне определяет пару конгруэнций, о которой идет речь в настоящей теореме.

3. Найдем пары линейчатых поверхностей данной пары конгруэнций, у которых, по крайней мере, одна из линейчатых поверхностей обладает тем свойством, что ее основная точка совпадает с главной.

Из (9) и (10) следует, что дифференциальные уравнения этих пар линейчатых поверхностей имеют вид:

$$\omega_2^3(\omega^3+\omega_3^3)+2\omega_2^1\omega_1^3=0, \tag{41'}$$

$$\omega_1^3(\omega^3-\omega_3^3)-2\omega_1^2\omega_2^3=0$$

или в силу (18)

$$(a^3+a_3^3)(\omega_1^2)^2+(b^3+b_3^3)\omega_1^2\omega_2^1+2(\omega_2^1)^2=0, \tag{42}$$

$$(b^3-b_3^3)(\omega_2^1)^2+(a^3-a_3^3)\omega_1^2\omega_2^1-2(\omega_1^2)^2=0.$$

Эти пары линейчатых поверхностей назовем A_1 и A_2-парами линейчатых поверхностей, соответственно.

Теорема 7. Каждая из A_1-(или A_2)-пар линейчатых поверхностей характеризуется тем, что одна квазифлекнодальная точка луча одной линейчатой поверхности этой пары—несобственная.

Доказательство этой теоремы непосредственно вытекает из (41), (42) и (31).

4. Определение 8. Точка пересечения луча одной линейчатой поверхности пары линейчатых поверхностей данной пары конгруэнций с касательной плоскостью в главной точке пары конгруэнций другой линейчатой поверхности называется B-точкой. Точка луча одной линейчатой поверхности пары линейчатых поверхностей данной пары конгруэнций, в которой касательная плоскость этой линейчатой поверхности проходит через главную точку пары конгруэнций другой линейчатой поверхности, называется C-точкой.

Если $\bar T=\bar A+\bar e_3+t\bar e_1$ и $\bar X=\bar A+\bar e_3+x\bar e_1$ соответственно радиус-векторы C- и B-точек луча любой линейчатой поверхности конгруэнции, описываемой прямой, проходящей через точку Π_1 и параллельной вектору e_1, то из (9) и (10) находим:

$$(a^2+a_3^2)\omega_1^2+(b^2+b_3^2)\omega_2^1+t\omega_1^2=0, \tag{43}$$

$$2(a^1-a_3^1)\omega_1^2+(b^1-b_3^1)\omega_2^1\}-x\{(a^3-a_3^3)\omega_1^2+(b^3-b_3^3)\omega_2^1\}=0.$$

Аналогично, если $\bar T^*=\bar A-\bar e_3+t^*\bar e_2$ и $\bar X^*=\bar A-\bar e_3+x^*\bar e_2$, соответственно, радиус-векторы C- и B-точек луча любой линейчатой поверхности другой конгруэнции, то

$$(a^1-a_3^1)\omega_1^2+(b^1-b_3^1)\omega_2^1+t^*\omega_2^1=0, \tag{43'}$$

$$2\{(a^2+a_3^2)\omega_1^2+(b^2+b_3^2)\omega_2^1\}+x^*\{(a^3+a_3^3)\omega_1^2+(b^3+b_3^3)\omega_2^1\}=0.$$

5. Найдем фокусы биссекторной конгруэнции, т. е. конгруэнции, описываемой биссекторной прямой (см. определение 5). Если $\bar\Lambda^*=\bar A+\lambda^*(\bar e_1+\bar e_2)$ есть радиус-вектор фокуса луча биссекторной конгруэнции, то из

$$d\bar\Lambda^*\parallel\bar e_1+\bar e_2$$

находим

$$(a^1-a^2+b_1^1-b_2^2)\lambda^{*2}+\{H(a^1-a^2)-H(b^1-b^2)+ \tag{44}$$

$$+b^3(a_1^1-a_2^2)-a^3(b_1^1-b_2^2)\}\lambda^*+b^3(a^1-a^2)-a^3(b^1-b^2)=0.$$

6. Уравнение квадрики, касательной к лучу линейчатой поверхности одной конгруэнции пары, проходящей через соответствующий луч другой, имеет вид:

$$(b^2+b_3^2)(z^2-1)-2Hxy-2b^3y(1+z)=0 \tag{45}$$

или

$$(a^1-a_3^1)(z^2-1)+2a^3x(1-z)+2Hxy=0. \tag{46}$$

Отсюда и из (45) следует, что

$$\bar C_1=\bar A-\frac{b^3}{H}\bar e_1,\quad \bar C_2=A-\frac{a^3}{H}\bar e_2 \tag{47}$$

суть радиус-векторы центров квадрик (45) и (46), соответственно. Таким образом, мы приходим к следующей теореме.

Теорема 8. Центры квадрик (45) и (46) лежат на прямых L_1 и L_2, проходящих через главный центр пары конгруэнций и параллельных векторам $\bar e_1$ и $\bar e_2$, соответственно.

Теорема 9. Центры квадрик (45) и (46) и только они суть точки касания главной плоскости линейчатых поверхностей $(L_1)_{\omega_1^2=0}$ и $(L_2)_{\omega_2^1=0}$, где L_1 и L_2 прямые, о которых идет речь в теореме 8.

Доказательство этой теоремы непосредственно вытекает из следующих уравнений:

$$(d(\bar A+\lambda\bar e_1),\bar e_1,\bar e_2)|_{\omega_1^2=0}=0,\quad (d(\bar A+\lambda\bar e_2),\bar e_1,\bar e_2)|_{\omega_2^1=0}=0. \tag{48}$$

7. Рассмотрим четыре различные пары линейчатых поверхностей

$$\omega_1^2=\lambda_s\omega_2^1,\ (s=1,2,3,4), \tag{49}$$

принадлежащие данной паре конгруэнций. Пусть

$$\bar M=\bar A+x^j\bar e_j,\ (j=1,2,3,4) \tag{50}$$

— радиус-вектор произвольной точки в пространстве, инвариантно связанной с парой конгруэнций, т. е. x^j суть функции главных параметров. Когда пара лучей описывает данную пару конгруэнций, точка M описывает поверхность (M). Различным парам линейчатых поверхностей (49) на поверхности (M) соответствуют четыре различные кривые. Рассмотрим сложное отношение W касательных к этим кривым в точке M. Подсчитывая

$$dM|_{\omega_1^2=\lambda_s\omega_2^1}=\{(a^i+x^ja_j^i+x_1^i)\lambda_s+(b^i+x^jb_j^i+x_2^i)\}\bar e_i\omega_2^1,$$

где

$$dx^j=x_1^j\omega_1^2+x_2^j\omega_2^1,$$

и обозначая $\bar M_s(s=1,2,3,4)$ — радиус-векторы точек пересечения касательных к кривым (49) на поверхности (M) с главной плоскостью (см. определение 2), получим

$$W=DV(M_1M_2M_3M_4)=\frac{(\lambda_1-\lambda_3)(\lambda_2-\lambda_4)}{(\lambda_2-\lambda_3)(\lambda_1-\lambda_4)}, \tag{51}$$

т. е. сложное отношение W не зависит от выбора точки M.

Будем говорить, что две пары линейчатых поверхностей $\omega_1^2=\lambda_1\omega_2^1$ и $\omega_1^2=\lambda_2\omega_2^1$ данной пары конгруэнций гармонически делят две пары линейчатых поверхностей $\omega_1^2=\lambda_3\omega_2^1$ и $\omega_1^2=\lambda_4\omega_2^1$, если сложное отношение W, соответствующее этим парам линейчатых поверхностей, равно -1.

Определение 9. Пары линейчатых поверхностей данной пары конгруэнций, гармонически делящие A-пары линейчатых поверхностей (см. определение 1 и формулы (18)), называются аффинно-сопряженными.

Как известно (см. § 1), дифференциальные уравнения A-пар линейчатых поверхностей имеют вид:

$$\omega_1^2 = 0, \ (\lambda_1 = 0),$$

$$\omega_2^1 = 0, \ (\lambda_2 = \infty).$$

Отсюда и из определения 9 и из формулы (51) следует, что для того, чтобы дифференциальные уравнения

$$\omega_1^2 = \lambda_3 \omega_2^1, \quad \omega_1^2 = \lambda_4 \omega_2^1 \tag{52}$$

были дифференциальными уравнениями аффинно-сопряженных пар линейчатых поверхностей данной пары конгруэнций, необходимо и достаточно, чтобы

$$\lambda_3 + \lambda_4 = 0. \tag{53}$$

Отсюда и из (52) следует, что аффинно-сопряженные пары линейчатых поверхностей данной пары конгруэнций образуют сеть пар линейчатых поверхностей, т. е. для любой пары линейчатых поверхностей данной пары конгруэнций, проходящих через данную пару соответствующих лучей, существует аффинно-сопряженная ей пара линейчатых поверхностей данной пары конгруэнций, проходящая через ту же пару соответствующих лучей.

§ 4. Некоторые классы эквиаффинной пары конгруэнций

Результаты § 2, 3 дают возможность выделить и геометрически характеризовать специальные классы пар конгруэнций. Прежде всего заметим, что каждую из пар конгруэнций $a^m = 0$, $a_j^i = 0$ (или $b^m = 0$, $b_i^j = 0$) можно геометрически характеризовать с помощью A-пары линейчатых поверхностей $\omega_2^1 = 0$ ($\omega_1^2 = 0$) так же, как мы геометрически характеризовали в работе [5] пары линейчатых поверхностей, определенные обращением в нуль инвариантов канонического репера. Поэтому на рассмотрении пар конгруэнций, определяемых обращением в нуль каждого инварианта, входящего в деривационные формулы (18), мы останавливаться не будем, а перейдем к изучению других пар конгруэнций, представляющих, на наш взгляд, наибольший интерес.

1. Пара C конгруэнций. Парой C конгруэнций называется пара конгруэнций, основные точки соответствующих лучей любой пары линейчатых поверхностей которой совпадают с главными точками.

Теорема 10. Пара C конгруэнций определяется натуральными уравнениями:

$$a^3 = b^3 = a_3^3 = b_3^3 = 0. \tag{53}$$

Доказательство. Из формул (27) следует, что условия (53) являются необходимыми и достаточными условиями совпадения основных точек соответствующих лучей всех пар линейчатых поверхностей данной пары конгруэнций с главными точками пары конгруэнций. Теорема доказана.

Теорема 11. Пара C конгруэнций характеризуется тем, что касательные плоскости главной центральной поверхности (см. определение 2) и одной из главных поверхностей пары конгруэнций параллельны главной плоскости.

Доказательство этой теоремы вытекает из того, что выражения $(d\bar{A}, \bar{e}_1, \bar{e}_2) = \omega^3$, $(d(\bar{A} \pm \bar{e}_3), \bar{e}_1, \bar{e}_2) = \omega^3 \pm \omega_3^3$ равны нулю тогда и только тогда, когда выполняются соотношения (53).

Теорема 12. Касательная плоскость поверхности, описываемой любой точкой главной прямой пары C конгруэнций, координата которой на этой прямой постоянна, параллельна главной плоскости.

Доказательство. Пусть $\bar{X} = \bar{A} + x\bar{e}_3$ — любая точка прямой $\Pi_1\Pi_2$ такая, что $x = \text{const}$. Тогда в силу (53) имеем

$$(d\bar{X}, \bar{e}_1, \bar{e}_2) = (d(\bar{A} + x\bar{e}_3), \bar{e}_1, \bar{e}_2) = \omega^3 + x\omega_3^3 = 0.$$

Теорема доказана.

Теорема 13. Для исходной пары C конгруэнций все присоединенные пары конгруэнций в случае $p = \text{const}$ и $q = \text{const}$ (см. пункт 2 § 3) являются парами C.

Доказательство этой теоремы непосредственно вытекает из того, что в силу соотношений (53), (38) и (39), а также в силу $dp = dq = 0$ получаем $\overset{*}{a}{}^3 = \overset{*}{b}{}^3 = \overset{*}{a}{}_3^3 = \overset{*}{b}{}_3^3 = 0$. Теорема доказана.

Из формул (29), (30), (35) — (39), (42), (44) и (49) вытекают следующие теоремы для пары C конгруэнций.

Теорема 14. Главные точки исходной пары C конгруэнций и присоединенной пары C конгруэнций, для которой $p = \text{const}$ и $q = \text{const}$, являются фокусами соответствующих конгруэнций. A-пары линейчатых поверхностей исходной пары конгруэнций содержат по одному торсу.

Теорема 15. A_1- и A_2-пары линейчатых поверхностей пары C конгруэнций (см. пункт 3 § 3) совпадают с A-парами линейчатых поверхностей $\omega_2^1 = 0$ и $\omega_1^2 = 0$, соответственно.

Теорема 16. Главный центр пары C конгруэнций является фокусом биссекторной конгруэнции (см. пункт 5 § 3).

Теорема 17. Центры квадрики (45) и (46) (см. пункт 6 § 3) совпадают с главным центром пары C конгруэнций.

В работе [5] был построен канонический репер эквиаффинной пары линейчатых поверхностей. В случае пары C конгруэнций все ее пары линейчатых поверхностей обладают тем свойством, что их основные точки совпадают с главными точками пары конгруэнций. Следовательно, канонический репер пары C конгруэнций с точностью до нормирования является каноническим репером всех пар линейчатых поверхностей данной пары конгруэнций. Деривационные формулы основного канонического репера, построенного в [5], будем писать в виде:

$$\begin{aligned} \frac{d\bar{B}}{ds} &= A^1\bar{\varepsilon}_1 + A^2\bar{\varepsilon}_2, \\ \frac{d\bar{\varepsilon}_1}{ds} &= A_1^1\bar{\varepsilon}_1 + A_1^2\bar{\varepsilon}_2 + \bar{\varepsilon}_3, \\ \frac{d\bar{\varepsilon}_2}{ds} &= A_2^1\bar{\varepsilon}_1 - A_1^1\bar{\varepsilon}_2 + \bar{\varepsilon}_3, \\ \frac{d\bar{\varepsilon}_3}{ds} &= A_3^1\bar{\varepsilon}_1 + A_3^2\bar{\varepsilon}_2 \end{aligned} \tag{54}$$

где вместо векторов $\bar{e}_i$ и $\bar{A}$ записываем $\bar{\varepsilon}_i$ и $\bar{B}$, а вместо величин a^i и a^i_j записываем A^i и A^i_j, соответственно.

Деривационные формулы репера всех пар линейчатых поверхностей пары C конгруэнций получаются из (18) и (53) при $\omega_2^1 = d\tilde{s}$, $\omega_1^2 = \lambda d\tilde{s}$:

$$\frac{d\bar{A}}{d\tilde{s}} = \tilde{a}^1\bar{e}_1 + \tilde{a}^2\bar{e}_2, \quad \frac{d\bar{e}_1}{d\tilde{s}} = \tilde{a}_1^1\bar{e}_1 + \lambda\bar{e}_2 + H\bar{e}_3, \tag{55}$$

$$\frac{d\bar{e}_2}{d\tilde{s}} = \bar{e}_1 - \tilde{a}_1^1\bar{e}_2 + \lambda H\bar{e}_3, \quad \frac{d\bar{e}_3}{d\tilde{s}} = \tilde{a}_3^1\bar{e}_1 + \tilde{a}_3^2\bar{e}_2,$$

где

$$\tilde{a}^1 = a^1\lambda + b^1, \ \tilde{a}^2 = a^2\lambda + b^2, \ \tilde{a}_3^1 = a_3^1\lambda + b_3^1,$$

$$\tilde{a}_3^2 = a_3^2\lambda + b_3^2, \ \tilde{a}_1^1 = a_1^1\lambda + b_1^1.$$

Совершая переход от репера $(\bar{B}\,\bar{\varepsilon}_i)$ к реперу $(\bar{A}\,\bar{e}_i)$ по формулам

$$\bar{A} = \bar{B}, \ \bar{e}_3 = \bar{\varepsilon}_3, \ \bar{e}_1 = \lambda_1\bar{\varepsilon}_1, \ \bar{e}_2 = \lambda_2\bar{\varepsilon}_2, \tag{56}$$

получим

$$\tilde{a}^1\lambda_1 = \frac{ds}{d\tilde{s}} = A^1, \ \tilde{a}^2\lambda_2 = \frac{ds}{d\tilde{s}}A^2, \ \tilde{a}_3^1\lambda_1 = \frac{ds}{d\tilde{s}}A_3^1,$$

$$\tilde{a}_3^2\lambda_2 = \frac{ds}{d\tilde{s}}A_3^2, \ \tilde{a}_1^1 = \frac{ds}{d\tilde{s}}\left(\frac{d\ln\lambda_1}{ds} + A_1^1\right), \ \lambda\lambda_2 = \lambda_1\frac{ds}{d\tilde{s}}A_1^2, \tag{57}$$

$$H = \lambda_1\frac{ds}{d\tilde{s}}, \quad \lambda_1 = \lambda_2\frac{ds}{d\tilde{s}}A_2^1, \quad \lambda H = \lambda_2\frac{ds}{d\tilde{s}}$$

причем, в силу $(\bar{\varepsilon}_1\bar{\varepsilon}_2\bar{\varepsilon}_3) = 1$, найдем

$$\lambda_1\lambda_2 = 1.$$

Отсюда и из (57) находим

$$\lambda_1 = \lambda_2^{-1} = \lambda^{-1/2}.$$

Пользуясь этими соотношениями, а так же определением 9 и формулой (17), получаем следующую теорему.

Теорема 18. Канонический репер пары C конгруэнций совпадает с каноническим репером пары линейчатых поверхностей данной пары конгруэнций, аффинно-сопряженной вещественной базисной паре линейчатых поверхностей.

2. Расслояемая пара конгруэнций. В монографии[1] подробно изучены расслояемые пары конгруэнций в трехмерном проективном пространстве. Поставим задачу: найти условия расслояемости эквиаффинной пары конгруэнций в рассматриваемом каноническом репере. Пусть $\bar{T} = \bar{A} + \bar{e}_3 + t\bar{e}_1$ и $\bar{T}^* = \bar{A} - \bar{e}_3 + t^*\bar{e}_2$ — радиус-векторы точек на лучах конгруэнций, причем t и t^* суть функции главных параметров. Как известно [1], пара конгруэнций называется расслояемой в направлении от $\{\Pi_1\bar{e}_1\}$ к $\{\Pi_2\bar{e}_2\}$, если дифференциальное уравнение

$$2(\omega^1 + \omega_3^1 + dt + t\omega_1^1) - t(\omega^3 + \omega_3^3 + t\omega_1^3) = 0,$$

полученное из условия

$$(d\bar{T}, \ \bar{T} - \bar{T}^*, \ \bar{e}_2) = 0,$$

вполне интегрируемо. Дифференцируя внешним образом это дифференциальное уравнение, исключая dt и приравнивая нулю коэффициенты при $t^n\,(n = 0, 1, 2)$, в силу (18), получим следующие условия расслояемости пары конгруэнций в направлении от $\{\Pi_1\bar{e}_1\}$ к $\{\Pi_2\bar{e}_2\}$:

$$[\omega^3 - \omega_3^3, \omega_2^1] = 0, \ [\omega^1 - \omega_3^1, \ \omega^3 + \omega_3^3] + 2\,[\omega^2 + \omega_3^2, \ \omega_2^1] = 0,$$

$$[\omega^1 - \omega_3^1, \ \omega_1^3] - [\omega^2 + \omega_3^2, \ \omega_2^3] - [\omega^3, \ \omega_3^3] + 2\,[\omega_1^2\omega_2^1] = 0. \tag{58}$$

Аналогично получаются условия расслояемости пары конгруэнций в другом направлении

$$[\omega^2 + \omega_3^2, \omega_2^3] - [\omega^1 - \omega_3^1, \omega_1^3] - [\omega^3, \ \omega_3^3] + 2\,[\omega_1^2\omega_2^1] = 0,$$

$$[\omega^3 + \omega_3^3, \ \omega_1^2] = 0, \ [\omega^2 + \omega_3^2, \ \omega^3 - \omega_3^3] - 2\,[\omega^1 - \omega_3^1, \ \omega_1^2] = 0. \tag{59}$$

Пользуясь деривационными формулами (18) и объединяя соотношения (58) и (59), получаем следующую теорему.

Теорема 19. Расслояемая пара конгруэнций определяется натуральными уравнениями:

$$a^3 - a_3^3 = 0, \ b^3 + b_3^3 = 0, \ a^1 - a_3^1 + b^2 + b_3^2 = 0, \ a^3b^3 + 1 = 0,$$

$$a_3^3(b^1 - b_3^1) - (a^2 + a_3^2) = 0. \tag{60}$$

Пользуясь этими формулами, а также формулами (26), (27), (42) и (46) и определениями 7—9, получаем следующие теоремы.

Теорема 20. Для того, чтобы основная квадрика распадалась на координатные плоскости $x = 0$ и $y = 0$, необходимо и достаточно выполнение одного из следующих условий: 1) главный центр пары конгруэнций совпадает с основным центром, 2) каждая из A_1- и A_2-пар линейчатых поверхностей аффинно сопряжена.

Теорема 21. Для того, чтобы данная пара конгруэнций была расслояемой, необходимо и достаточно одновременное выполнение следующих условий: 1) главный центр пары конгруэнций совпадает с основным центром, 2) A_1-пара линейчатых поверхностей совпадает с A_2-парой, 3) C-точка луча линейчатой поверхности $(\Pi_1\bar{e}_1)_{\omega_2^1=0}$ (или $(\Pi_2\bar{e}_2)_{\omega_1^2=0}$) является B-точкой луча линейчатой поверхности $(\Pi_1\bar{e}_1)_{\omega_1^2=0}$ или $((\Pi_2\bar{e}_2)_{\omega_2^1=0})$), 4) разность двух простых отношений трех точек: главной точки луча $\{\Pi_1\bar{e}_1\}$ пары конгруэнций, C-точки и главной точки луча $\{\Pi_1\bar{e}_1\}$ базисной вещественной пары линейчатых поверхностей и аффинно-сопряженной к ней равно разности двух простых отношений таких же точек луча $\{\Pi_2\bar{e}_2\}$ тех же пар линейчатых поверхностей данной пары конгруэнций.

3. Пара П конгруэнций. Парой П конгруэнций называется пара конгруэнций, главные точки соответствующих лучей которой суть середины квазифлекнодальных точек этих же лучей всех пар линейчатых поверхностей данной пары конгруэнций.

Теорема 22. Пара П конгруэнций определяется натуральными уравнениями:

$$a^2 + a_3^2 = 0, \quad b^1 - b_3^1 = 0, \quad b^2 + b_3^2 + a^1 - a_3^1 = 0, \quad a^3 = a_3^3,$$

$$b^3 = -b_3^3, \quad 1 + a^3 b^3 = 0, \quad (a^3 + a_3^3)(b^3 - b_3^3) \neq 0. \tag{61}$$

Доказательство этой теоремы непосредственно вытекает из уравнений (31).

Теорема 23. Пара II конгруэнций есть расслояемая пара конгруэнций, у которой пары линейчатых поверхностей, соответствующие торсам одной или другой конгруэнции, аффинно-сопряжены.

Доказательство. Из формул (30) и (60) следует, что пары линейчатых поверхностей, соответствующих торсам, например, конгруэнции $(\Pi, \bar{e}_1)$ расслояемой пары конгруэнций, аффинно-сопряжены (см. определение 9) тогда и только тогда, когда $a^2 + a_3^2 = 0$. Теорема доказана.

4. Пара конгруэнций

$$1 - Ha_3^1 = 1 + Hb_3^2 = 0,$$

$$a^2 + a_3^2 + (a^3 + a_3^3)\, b_3^1 - (b^3 + b_3^3)\, a_3^1 = 0, \tag{62}$$

$$b^1 - b_3^1 - (a^3 - a_3^3)\, b_3^2 + (b^3 - b_3^3)\, a_3^2 = 0$$

характеризуется тем, что имеется однопараметрическое семейство поверхностей, описываемых точками лучей каждой конгруэнции пары, касательные плоскости которых в точках луча одной конгруэнции параллельны плоскости, определяемой соответствующим лучом другой конгруэнции и главным центром пары.

5. Пара конгруэнций

$$A^1 = B^2, \quad A_3^1 = B_3^2 \tag{63}$$

характеризуется тем, что имеется однопараметрическое семейство поверхностей, секущих конгруэнцию, описываемую главной прямой, касательные плоскости которых параллельны главной плоскости.

6. Пара Г конгруэнций

$$a^2 + a_3^2 = b^2 + b_3^2 = 0,$$

$$a^1 - a_3^1 = b^1 - b_3^1 = 0$$

характеризуется каждым из следующих свойств: 1) главные точки лучей пары конгруэнций являются квазифлекнодальными точками этих же лучей всех непараболических [7] пар линейчатых поверхностей данной пары конгруэнции, 2) касательная плоскость главной поверхности каждой конгруэнции параллельна плоскости, определяемой соответствующим лучом другой конгруэнции и главным центром пары. Главные поверхности каждой конгруэнции пары являются фокальными поверхностями. Каждая из A-пар линейчатых поверхностей пары Г конгруэнций содержит по торсу соответствующей конгруэнции.

7. Пользуясь квадратичными уравнениями (20), соотношениями (53), (60)—(64) и теоремой Бахвалова [9], получим, что каждая из пар конгруэнций 1—6 настоящего параграфа определяется с произволом соответственно в две, одну функцию двух аргументов, шесть функций одного аргумента, в две, четыре и две функции двух аргументов.

ЛИТЕРАТУРА

1. Ивлев Е. Т. Канонический репер пары конгруэнций в трехмерном проективном пространстве. Геометрический сборник, Вып. 1. (Труды Томского ун-та, т. 160), 1962, 15—24.
2. Ивлев Е. Т. Репераж подмногообразий в теории пар конгруэнций в P_3, там же, стр. 15—25.
3. Щербаков Р. Н. Построение метрической теории комплексов при помощи репеража подмногообразий. Доклады научной конференции по теоретическим и прикладным вопросам математики и механики. Издательство ТГУ, Томск, 1960, 80—82.
4. Фиников С. П. Метод внешних форм Картана в дифференциальной геометрии. М.—Л., ГИТТЛ, 1948.
5. Ивлев Е. Т., Пергаменщиков М. Б. К эквиаффинной теории пар линейчатых поверхностей трехмерного пространства. Данный сб., стр, 97—103.
6. Малаховский В. С. Канонический репер конгруэнций центральных кривых второго порядка в эквиаффинном пространстве. Геометрический сборник, выпуск 2 (Труды Томского ун-та, 161), 1962, 87—93.
7. Ивлев Е. Т. Пара линейчатых поверхностей в трехмерном проективном пространстве Доклады научной конференции по теоретическим и прикладным вопросам математики и механики. Издательство ТГУ, Томск, 1960, 50—51.
8. Фиников С. П. Теория пар конгруэнций, ГИТТЛ, М.—Л., 1956.
9. Бахвалов С. В. Замечания к методу подвижного трехгранника. Математический сборник, 7, (49), № 2, 1930, 321—326.
10. Резниченко Р. А. Об одном эквиаффинно-инвариантном классе пар конгруэнций. Данный сборник стр. 161—166.

ТРУДЫ ТОМСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА
имени В. В. КУЙБЫШЕВА

Том 168 Серия механико-математическая

Е. Т. ИВЛЕВ

НЕКОТОРЫЕ ВОПРОСЫ ЭКВИАФФИННОЙ ТЕОРИИ ПАРЫ КОМПЛЕКСОВ ТРЕХМЕРНОГО ПРОСТРАНСТВА

В статьях [1], [2], [3] методом внешних форм [4] и связанным с ним методом репеража подмногообразий [5] изучались произвольные пары прямолинейных конгруэнций в трехмерном проективном пространстве.

Настоящая статья посвящена изучению эквиаффинной пары комплексов трехмерного пространства.

Обозначения и терминология соответствуют в основном принятым в [1], [4] и [6].

§ 1. Основные и главные точки соответствующих лучей пары комплексов

Обозначим $\overline{A}$, $\overline{e}_1$, $\overline{e}_2$ и $\overline{e}_3$ — элементы некоторого эквиаффинного репера, присоединенного к заданной паре линейчатых комплексов Φ_1 и Φ_2. Деривационные формулы этого репера запишем в виде:

$$d\overline{A} = \omega^i \overline{e}_i,\ d\overline{e}_i = \omega_i^j \overline{e}_j,\ (i, j = 1, 2, 3), \tag{1}$$

где ω^i и ω_i^j суть дифференциальные формы, зависящие от трех главных и 11 вторичных параметров и удовлетворяющие уравнениям структуры:

$$D\omega^i = [\omega^j \omega_j^i],\ D\omega_i^j = [\omega_i^m \omega_m^j],\ (m = 1, 2, 3), \tag{2}$$

причем

$$(\overline{e}_1, \overline{e}_2, \overline{e}_3) = 1,\ \omega_1^1 + \omega_2^2 + \omega_3^3 = 0,\ \pi_1^1 + \pi_2^2 + \pi_3^3 = 0. \tag{3}$$

Здесь и далее π_i^k обозначают дифференциальные формы вторичных параметров.

Рассмотрим на каждом из соответствующих лучей пары комплексов Φ_1 и Φ_2 по одной (пока произвольной) точке Π_1 и Π_2. Начало репера поместим в середину точек Π_1 и Π_2 прямой $\Pi_1\Pi_2$, а векторы $\overline{e}_1$ и $\overline{e}_2$ будем считать параллельными лучам комплексов Φ_1 и Φ_2, соответственно. Вектор $\overline{e}_3$ направим по прямой $\Pi_1\Pi_2$ так, что

$$\overline{\Pi}_1 = \overline{A} + \overline{e}_3,\ \overline{\Pi}_2 = \overline{A} - \overline{e}_3. \tag{4}$$

В силу такого выбора элементов эквиаффинного репера имеем:

$$\delta\overline{\Pi}_1 \parallel \overline{e}_1,\ \delta\overline{\Pi}_2 \parallel \overline{e}_2,\ \delta\overline{e}_1 \parallel e_1,\ \delta\overline{e}_2 \parallel \overline{e}_2,$$

где δ есть знак дифференциала по вторичным параметрам. Отсюда следует, что формы $\omega^2 + \omega_3^2$, $\omega^3 + \omega_3^3$, ω_1^2, ω_1^3 и $\omega^1 - \omega_3^1$, $\omega^3 - \omega_3^3$, ω_2^1, ω_2^3 суть главные формы комплексов Φ_1 и Φ_2. Так как каждый из комплексов Φ_1 и Φ_2 есть трехпараметрическое семейство прямых, то среди пяти линейных зависимостей между этими главными формами имеются, по крайней мере, две зависимости вида:

$$\begin{gathered} x\omega_1^2 + y\omega_1^3 + z(\omega^2 + \omega_3^2) + u(\omega^3 + \omega_3^3) = 0, \\ x^*\omega_2^1 + y^*\omega_2^3 + z^*(\omega^1 - \omega_3^1) + u^*(\omega^3 - \omega_3^3) = 0. \end{gathered} \tag{5}$$

Как известно [1], главная корреляция луча любого линейчатого комплекса определяется следующим образом: каждой точке луча этого комплекса соответствует касательная плоскость любого торса этого комплекса с ребром возврата, описываемым этой точкой.

Определение 1. Две точки на соответствующих лучах пары комплексов, в каждой из которых соответствующая в главной корреляции плоскость одного комплекса параллельна соответствующему лучу другого комплекса, называются основными точками. Прямая, проходящая через основные точки лучей пары комплексов, называется основной прямой. Середина отрезка, соединяющего основные точки, называется основным центром пары комплексов.

Определение 2. Две точки, каждая из которых есть точка пересечения луча одного комплекса пары с плоскостью, соответствующей в главной корреляции несобственной точке луча другого комплекса, называются главными точками. Прямая, проходящая через главные точки лучей пары комплексов, называется главной прямой. Середина отрезка, соединяющего главные точки, называется главным центром пары комплексов.

Определение 3. Плоскость векторов $\overline{e}_1$ и $\overline{e}_2$, параллельных лучам комплексов Φ_1 и Φ_2, проходящая через основной (главный) центр пары комплексов, называется основной (главной) плоскостью пары комплексов.

Пусть

$$\overline{T} = \overline{A} + \overline{e}_3 + t\overline{e}_1,\quad \overline{T}^* = \overline{A} - \overline{e}_3 + t^*\overline{e}_2 \tag{6}$$

— радиус-векторы произвольных точек на лучах комплексов Φ_1 и Φ_2, соответственно. Если T^* — точка пересечения луча комплекса Φ_2 с плоскостью, соответствующей точке T в главной корреляции комплекса Φ_1, то из

$$\begin{gathered} (d^2\overline{T}, \overline{e}_1, \overline{T} - \overline{T}^*) = 0, \\ \omega^2 + \omega_3^2 + t\omega_1^2 = 0, \\ \omega^3 + \omega_3^3 + t\omega_1^3 = 0 \end{gathered}$$

или из

$$\begin{gathered} t^*\omega_1^3 + 2\omega_1^2 = 0, \\ \omega^2 + \omega_3^2 + t\omega_1^2 = 0, \\ \omega^3 + \omega_3^3 + t\omega_1^3 = 0 \end{gathered}$$

в силу (5) находим

$$t^*(x - tz) - 2(y - tu) = 0. \tag{7}$$

Аналогично, если T есть точка пересечения луча комплекса Φ_1 с плоскостью, соответствующей точке T^* в главной корреляции комплекса Φ_2, то

$$t(x^*-t^*z^*)+2(y^*-t^*u^*)=0. \tag{8}$$

Обозначая T_p, T_p^* и T_c, T_c^* — соответственно основные и главные точки лучей данной пары комплексов, из (6) — (8) получим

$$\begin{aligned} &\overline{T}_p=\overline{A}+\overline{e}_3+\frac{x}{z}\overline{e}_1, && \overline{T}_p^*=\overline{A}-\overline{e}_3+\frac{x^*}{z^*}\overline{e}_2, \\ &\overline{T}_c=\overline{A}+\overline{e}_3-\frac{2u^*}{z^*}\overline{e}_1, && \overline{T}_c^*=\overline{A}-\overline{e}_3+\frac{2u}{z}\overline{e}_2. \end{aligned} \tag{9}$$

§ 2. Основные пары линейчатых поверхностей и пары неголономных конгруэнций данной пары комплексов

Для дальнейшего изучения пары комплексов нам понадобятся некоторые интересные подмногообразия пары комплексов — пары линейчатых поверхностей и пары неголономных конгруэнций данной пары комплексов.

Поместив точки Π_1 и Π_2 в основные точки T_p и T_p^* соответствующих лучей комплексов Φ_1 и Φ_2, из (9) получим:

$$x=x^*=0, \qquad zz^*\neq 0. \tag{10}$$

При этом, как это видно из (7) и (8), из рассмотрения исключается пара комплексов, у которой, по крайней мере, один комплекс — специальный. Геометрически репер, таким образом, вполне определен.

Для геометрической характеристики основных подмногообразий пары комплексов рассмотрим ряд геометрических образов, связанных с данной парой комплексов. Пусть касательная плоскость в точке T любой линейчатой поверхности комплекса Φ_1 пересекает соответствующий луч комплекса Φ_2 в точке T^*. Тогда из

$$(dT, \overline{e}_1, \overline{T}-\overline{T}^*)=0$$

находим

$$2(\omega^2+\omega_3^2+t\omega_1^2)+t^*(\omega_3^3+\omega^3+t\omega_1^3)=0. \tag{11}$$

Аналогично, если T — точка пересечения луча комплекса Φ_1 с касательной плоскостью в точке T^* любой линейчатой поверхности комплекса Φ_2, то

$$2(\omega^1-\omega_3^1+t^*\omega_2^1)-t(\omega^3-\omega_3^3+t^*\omega_2^3)=0. \tag{12}$$

Если T и T^* суть точки соприкосновения лучей любых линейчатых поверхностей комплексов Φ_1 и Φ_2 (точка соприкосновения луча линейчатой поверхности комплекса есть точка, в которой касательная плоскость этой линейчатой поверхности совпадает с плоскостью, соответствующей этой точке в главной корреляции данного комплекса), то из (7), (8), (11) и (12) в силу (10) и (5) находим, что t и t^* суть корни следующих квадратных уравнений:

$$\begin{aligned} &(\omega_1^2 z+u\omega_1^3)t^2-2y\omega_1^3 t-y(\omega^3+\omega_3^3)=0, \\ &(\omega_2^1 z^*+u^*\omega_2^3)t^{*2}-2y^*\omega_2^3 t^*-y^*(\omega^3-\omega_3^3)=0. \end{aligned} \tag{13}$$

Произвольные неголономные конгруэнции [1] комплексов Φ_1 и Φ_2 зададим, соответственно, дифференциальными уравнениями:

$$\begin{aligned} &a\omega_1^2+b\omega_1^3+c(\omega^2+\omega_3^2)+e(\omega^3+\omega_3^3)=0, \\ &a^*\omega_2^1+b^*\omega_2^3+c^*(\omega^1-\omega_3^1)+e^*(\omega^3-\omega_3^3)=0. \end{aligned} \tag{14}$$

Если T и T^* суть фокусы лучей неголономных конгруэнций комплексов Φ_1 и Φ_2, то из (11), (12) и (14) в силу (5) и (10) находим следующие квадратные уравнения для определения t и t^*:

$$\begin{aligned} &(ze-cu)t^2+(cy-au-bz)t-ay=0, \\ &(z^*e^*-c^*u^*)t^{*2}+(c^*y^*-a^*y^*-b^*z^*)t^*-a^*y^*=0. \end{aligned} \tag{15}$$

Так как между лучами комплексов Φ_1 и Φ_2 установлено взаимно-однозначное соответствие, то с каждой линейчатой поверхностью (неголономной конгруэнцией) одного комплекса инвариантно связана линейчатая поверхность (неголономная конгруэнция) другого комплекса. Возникает, таким образом, пара соответствующих линейчатых поверхностей (пара соответствующих неголономных конгруэнций), принадлежащая данной паре комплексов. Пару соответствующих линейчатых поверхностей данной пары комплексов, как и в работе [1], будем называть комплексовой парой. Если T и T^* суть квазифлекнодальные точки [7] соответствующих лучей любой комплексовой пары линейчатых поверхностей, то из (11) и (12) следует, что t и t^* суть корни следующих квадратных уравнений:

$$\begin{aligned} &\{\omega_1^3(\omega^3-\omega_3^3)-2\omega_1^2\omega_2^3\}t^2+\{4\omega_1^2\omega_2^1-2\omega_2^3(\omega^2+\omega_3^2)+(\omega^3)^2-(\omega_3^3)^2- \\ &-2\omega_1^3(\omega^1-\omega_3^1)\}t+4\omega_2^1(\omega^2+\omega_3^2)-2(\omega^1-\omega_3^1)(\omega^3+\omega_3^3)=0, \\ &\{2\omega_2^1\omega_1^3+\omega_2^3(\omega^3+\omega_3^3)\}t^{*2}+\{4\omega_1^2\omega_2^1+(\omega^3)^2-(\omega_3^3)^2+2\omega_1^3(\omega^1-\omega_3^1)+ \\ &+2\omega_2^3(\omega^2+\omega_3^2)\}t^*+4\omega_1^2(\omega^1-\omega_3^1)+2(\omega^3-\omega_3^3)(\omega^2+\omega_3^2)=0. \end{aligned} \tag{16}$$

Полученные соотношения (11) — (16) дают возможность выделить и геометрически характеризовать следующие пары неголономных конгруэнций и комплексовые пары линейчатых поверхностей.

1. Первая (вторая) основная пара неголономных конгруэнций данной пары комплексов имеет дифференциальное уравнение

$$\omega_1^3=0 \quad (\omega_2^3=0)$$

и содержит неголономную конгруэнцию комплекса Φ_1 (Φ_2), характеризуемую каждым из следующих свойств: а) точки соприкосновения всех линейчатых поверхностей этой неголономной конгруэнции симметричны относительно основных точек лучей комплексов Φ_1 (Φ_2), б) эта неголономная конгруэнция является цилиндрической, причем вторая фокальная поверхность ее описывается основной точкой луча соответствующего комплекса.

2. Первая (вторая) главная пара неголономных конгруэнций имеет дифференциальное уравнение:

$$\omega^3+\omega_3^3=0 \quad (\omega^3-\omega_3^3=0)$$

и содержит неголономную конгруэнцию комплекса Φ_1 (Φ_2), характеризуемую каждым из следующих свойств: а) точки соприкосновения всех линейчатых поверхностей этой неголономной конгруэнции совпадают с основной точкой луча комплекса Φ_1 (Φ_2), б) эта неголономная конгруэнция является параболической с единственной фокальной поверхностью, описываемой основной точкой луча комплекса Φ_1 (Φ_2).

3. Основная комплексовая пара линейчатых поверхностей имеет дифференциальные уравнения

$$\omega_1^3 = \omega_2^3 = 0$$

и характеризуется каждым из следующих свойств: а) она принадлежит одновременно первой и второй основной паре неголономных конгруэнций, б) несобственные точки соответствующих лучей суть квазифлекнодальные точки, в) обе линейчатые поверхности данной пары линейчатых поверхностей суть цилиндроиды с общей направляющей плоскостью, параллельной основной плоскости (см. опр. 3).

4. Главная комплексовая пара линейчатых поверхностей имеет дифференциальное уравнение

$$\omega^3 = \omega_3^3 = 0$$

и характеризуется каждым из следующих свойств: а) она принадлежит одновременно первой и второй главным парам неголономных конгруэнций; б) основные точки [8] соответствующих лучей этой пары линейчатых поверхностей совпадают с основными точками лучей комплексов Φ_1 и Φ_2.

5. Комплексовая пара P_1 (P_2) линейчатых поверхностей, имеющая дифференциальные уравнения

$$\omega_1^3 = \omega^3 + \omega_3^3 = 0 \; (\omega_2^3 = \omega^3 - \omega_3^3 = 0),$$

характеризуется каждым из следующих свойств: а) она принадлежит одновременно первой (второй) основной и первой (второй) главной парам неголономных конгруэнций, б) она содержит цилиндр комплекса Φ_1 (Φ_2), касательная плоскость которого параллельна основной плоскости.

6. Комплексовая пара Q_1 (Q_2) линейчатых поверхностей, имеющая дифференциальные уравнения

$$\omega_1^3 = \omega^3 - \omega_3^3 = 0 \; (\omega_2^3 = \omega^3 + \omega_3^3 = 0),$$

характеризуется тем, что она принадлежит одновременно первой (второй) основной и второй (первой) главной парам неголономных конгруэнций данной пары комплексов.

§ 3. Канонизация репера

Из результатов предыдущих параграфов следует, что для получения канонического репера данной пары комплексов необходимо провести лишь одно нормирование векторов $\bar{e}_1$ и $\bar{e}_2$. Так как репер геометрически вполне определен, то формы ω^i, ω_i^j $(i \neq j)$ суть главные, зависящие от трех главных параметров. Среди этих форм нам следует выбрать три независимые. Выбирая за независимые формы

$$\omega_1 = \omega_1^3, \; \omega_2 = \omega^3 + \omega_3^3, \; \omega_3 = \omega^3 - \omega_3^3,$$

т. е. считая (17)

$$[\omega_1 \omega_2 \omega_3] = [\omega_1^3, \omega^3 + \omega_3^3, \omega^3 - \omega_3^3] \neq 0,$$

мы тем самым исключаем из рассмотрения пару комплексов, у которой главная комплексовая пара, пара P_1 и пара Q_1 линейчатых поверхностей совпадают. Из соотношения

$$d(\bar{e}_1 \bar{e}_2) = -\omega_3^3 (\bar{e}_1 \bar{e}_2) + (\bar{e}_3, \omega_1^3 \bar{e}_2 - \omega_2^3 \bar{e}_1)$$

следует, что нормирование векторов $\bar{e}_1$ и $\bar{e}_2$ можно осуществить так, что

$$\omega_1^3 = \omega_2^3 \neq 0 \quad \text{при} \quad \omega_2 = \omega_3 = 0, \tag{18}$$

т. е. вектор $\bar{e}_1 - \bar{e}_2$ параллелен характеристике основной плоскости главной комплексовой пары линейчатых поверхностей. При этом из рассмотрения исключается пара комплексов, у которой главная комплексовая пара линейчатых поверхностей совпадает с парами P_2 и Q_2 линейчатых поверхностей.

Итак, репер пары комплексов канонизирован. Деривационные формулы (1) этого репера запишем в виде:

$$d\bar{A} = A_0^{ij} \omega_j \bar{e}_i,$$

$$d\bar{e}_i = A_i^{jm} \omega_m \bar{e}_j, \; (i, j, m = 1, 2, 3), \tag{19}$$

где фукнции A_0^{ij} и A_i^{jm} в силу (3), (5), (10) и (18) связаны соотношениями:

$$A_1^{31} = 1, \; A_1^{32} = A_1^{33} = 0, \; A_0^{31} = 0, \; A_0^{32} = A_0^{33} = \frac{1}{2}, \; A_2^{31} = 1,$$

$$A_3^{31} = 0, \; A_3^{32} = -A_3^{33} = \frac{1}{2}, \; A_1^{11} + A_2^{21} = 0, \; A_1^{12} + A_2^{22} = -\frac{1}{2},$$

$$A_1^{13} + A_2^{23} = \frac{1}{2}, \; A_0^{23} + A_3^{23} = 0, \; A_0^{12} - A_3^{12} - A_2^{32}(A_0^{11} - A_3^{11}) = \tag{20}$$

$$= 0, \; z = z^* = 1, \; x = x^* = 0, \; y = -(A_0^{21} + A_3^{21}), \; y^* = -(A_0^{21} + A_3^{21}),$$

$$y^* = -(A_0^{11} - A_3^{11}), \; u = -(A_0^{22} + A_3^{22}), \; u^* = A_2^{33}(A_0^{11} - A_3^{11}) - A_0^{13} + A_3^{13}.$$

Уравнения структуры (2) приводят к следующим квадратичным уравнениям:

$$[\Delta A_t^{ij}, \omega_j] = 0, \; (t = 0, 1, 2, 3),$$

$$\Delta A_t^{ij} = dA_t^{ij} + \frac{1}{2} \bar{A}_t^{ijm},$$

$$\bar{A}^{ijm} = A_t^{is} (\tilde{A}_s^{mj} - \tilde{A}_s^{jm}) - A_t^{sm} A_s^{ij} + A_t^{sj} A_s^{im},$$

$$\tilde{A}_1^{12} = A_1^{21} A_2^{32} - A_1^{22} A_2^{31} - A_1^{12} + A_3^{32},$$

$$\tilde{A}_1^{13} = A_1^{21} A_2^{33} - A_1^{23} A_2^{31} - A_1^{13} + A_3^{33},$$

$$\tilde{A}_1^{23} = A_1^{22} A_2^{33} - A_1^{23} A_2^{32}, \tag{21}$$

$$\tilde{A}_2^{12} = A_0^{21} A_2^{32} - A_0^{22} A_2^{31} - A_0^{12} - A_3^{12} + A_3^{21} A_2^{32} - A_3^{22} A_2^{31},$$

$$\tilde{A}_2^{13} = A_0^{21} A_2^{33} - A_0^{23} A_2^{31} - A_0^{13} - A_3^{13} + A_3^{21} A_2^{33} - A_3^{23} A_2^{31},$$

$$\tilde{A}_2^{23} = A_0^{22} A_2^{33} - A_0^{23} A_2^{32} - \frac{1}{2} + A_3^{22} A_2^{33} - A_2^{32} A_3^{23}.$$

$$\tilde{A}_3^{12} = A_0^{21}A_2^{32} - A_0^{22}A_2^{31} - A_0^{12} + A_3^{12} - A_3^{21}A_2^{32} + A_3^{22}A_2^{31},$$

$$\tilde{A}_3^{13} = A_0^{21}A_2^{33} - A_0^{23}A_2^{31} - A_0^{13} + A_3^{13} - A_3^{21}A_2^{33} + A_3^{23}A_2^{31},$$

$$\tilde{A}_3^{23} = A_0^{22}A_2^{33} - A_0^{23}A_2^{32} - \frac{1}{2} - A_3^{22}A_2^{33} + A_2^{32}A_3^{23}. \qquad (22)$$

Положим

$$\Delta A_t^{ij} = A_t^{ijn}\omega_n. \qquad (23)$$

Тогда из (21) получаем

$$A_t^{ijn} = A_t^{inj}. \qquad (24)$$

Из соотношений (20) – (22) прежде всего находим:

$$\Delta A_1^{3l} = \Delta A_0^{3l} = \Delta A_3^{3l} = 0, \ \Delta A_1^{1} + \Delta A_2^{21} = \Delta A_1^{12} + \Delta A_2^{2} = 0,$$

$$\Delta A_1^{13} + \Delta A_2^{23} = 0, \ \Delta A_2^{3j} = \frac{1}{2}\bar{A}_2^{3jm}\omega_m, \ \Delta A_0^{23} + \Delta A_3^{23} = \frac{1}{2}(\bar{A}_0^{23m} + A_3^{23m})\,\omega_m,$$

$$\Delta A_0^{12} - \Delta A_3^{12} - A_2^{32}(\Delta A_0^{11} - \Delta A_3^{11}) - (A_0^{11} - A_3^{11})\,\Delta A_2^{32} = \frac{1}{2}\{\bar{A}_0^{12m} - \bar{A}_3^{12m} -$$

$$- A_2^{32}(\bar{A}_0^{11m} - \bar{A}_3^{11m}) - (A_0^{11} - A_3^{11})\,\bar{A}_2^{32m}\}\,\omega_m.$$

Отсюда и из (23) получаем:

$$A_1^{3ln} = A_0^{3ln} = A_3^{3ln} = A_1^{11n} + A_2^{21n} = A_2^{12n} + A_2^{22n} = A_1^{13n} + A_2^{23n} = 0,$$

$$A_2^{3jm} = \frac{1}{2}\bar{A}_2^{3jm}, \ A_0^{23m} + A_3^{23m} = \frac{1}{2}(\bar{A}_0^{23m} + \bar{A}_3^{23m}), \ A_0^{12m} - A_3^{12m} - \qquad (25)$$

$$- A_2^{32}(A_0^{11m} - A_3^{11m}) - (A_0^{11} - A_3^{11})\,A_2^{32m} = \frac{1}{2}\{\bar{A}_0^{12m} - \bar{A}_3^{12m} -$$

$$- A_2^{32}(\bar{A}_0^{11m} - \bar{A}_3^{11m}) - (A_0^{11} - A_3^{11})\,\bar{A}_2^{32m}\}.$$

Применяя признак Кэлера, строя цепь по формам базиса

$$\left\{\omega^3 = \frac{1}{2}(\omega_2 + \omega_3), \ \omega_1, \ \omega_3^3 = \frac{1}{2}(\omega_2 - \omega_3)\right\}$$

и пользуясь при этом формулами (19) – (25), мы так же, как в работах [1] и [2], найдем, что интегральные элементы $\varepsilon_1\,(\omega_1 = \omega_3^3 = 0)$, $\varepsilon_2\,(\omega_3^3 = 0)$, ε_3 определяются с произволом

$$r_1 = 21, \quad r_2 = 13, \quad r_3 = 5,$$

соответственно. С другой стороны, из (23) – (25) следует, что $N = 108 - 69 = 39$. Следовательно, $Q = N = 39$. Это означает, что эквиаффинная пара комплексов определяется с произволом в пять функций трех аргументов. Этот результат и геометрически очевиден. Однако проведенные выкладки позволяют проще решать вопрос о существовании частных классов пар комплексов.

Замечание. Рассматривая координатные комплексовые пары линейчатых поверхностей $\omega_i = \omega_j = 0$, мы так же, как и в [3], можем дать геометрическую характеристику всех инвариантов

$$A_t^{sm}\ (t = 0, 1, 2, 3, \ s, m, i, j = 1, 2, 3, \ i \neq j, \ i \neq m, \ m \neq j),$$

входящих в деривационные формулы (19).

§ 4. Некоторые классы пар комплексов

Результаты предыдущих параграфов, а также некоторые другие геометрические элементы, связанные с репером, дают возможность выделить и геометрически характеризовать наиболее интересные классы пар комплексов.

1. Пара K комплексов. Парой K комплексов называется пара комплексов, у которой основные точки совпадают с соответствующими главными точками.

Теорема 1. Пара K комплексов определяется натуральными уравнениями:

$$u = -(A_0^{22} + A_3^{22}) = 0 \qquad u^* = A_2^{33}(A_0^{11} - A_3^{11}) - A_0^{13} + A_3^{13} = 0. \quad (26)$$

Доказательство. Из соотношений (9) и (10) следует, что соотношения (26) есть необходимые и достаточные условия совпадения основных и главных точек соответствующих лучей данной пары комплексов.

Теорема 2. Пара K комплексов характеризуется тем, что несобственные точки соответствующих лучей пары комплексов являются κ-флекнодальными.

Доказательство. Если T и T^* (см. (6)) суть κ-флекнодальные точки [1] соответствующих лучей пары комплексов, то из (7) и (8) в силу (10) и (20) найдем следующие два квадратных уравнения для определения t и t^*:

$$ut^2 - (y^* + y - 2uu^*)\,t + 2yu^* = 0,$$
$$u^*t^{*2} - (y^* + y + 2uu^*)\,t^* - 2y^*u = 0. \qquad (27)$$

Отсюда следует, что соотношения (26) являются необходимыми и достаточными условиями того, что несобственные точки лучей комплексов Φ_1 и Φ_2 суть κ-флекнодальные точки. Теорема доказана.

Теорема 3. Пара K комплексов характеризуется тем, что основные точки пары комплексов суть κ-флекнодальные точки.

Доказательство. Пусть пара комплексов является парой K. Тогда из (27) в силу (26) следует, что основные точки соответствующих лучей этой пары комплексов суть κ-флекнодальные. Пусть, наоборот, основные точки пары комплексов являются κ-флекнодальными точками. Тогда из (27) следует

$$yu^* = 0, \qquad y^*u = 0. \qquad (28)$$

Покажем, что при $y = 0$ комплекс Φ_1 является специальным. В самом деле, любой точке $\bar{T} = \bar{A} + \bar{e}_3 + t\bar{e}_1$, как это следует из (7) и (20), в случае $y = 0$ соответствует в главной корреляции комплекса Φ_1 одна и та же плоскость, параллельная плоскости $(\bar{e}_1, \bar{A} - \bar{e}_3 + 2u\bar{e}_2)$, т. е. комплекс Φ_1 — специальный (см. [1]). Аналогично показывается, что при $y^* = 0$ комплекс Φ_2 — специальный. Считая $yy^* \neq 0$, т. е. исключая из рассмотрения специальные комплексы, из (28) получаем соотношения (26). Теорема доказана.

Теорема 4. Аффинные оси [9] линейных комплексов l и l^*, каждый из которых касается одного комплекса пары и проходит через соответствующий луч другого, параллельны основной прямой (см. определение 1) тогда и только тогда, когда данная пара комплексов есть пара K комплексов.

Доказательство. Уравнение всякого линейного комплекса будем писать в виде:

$$\{ap\} = a_{01}p_{23} + a_{02}p_{31} + a_{03}p_{12} + a_{12}p_{03} + a_{31}p_{02} + a_{23}p_{01} = 0.$$

Линейный комплекс l, касательный к комплексу Φ_1 и содержащий луч комплекса Φ_2, удовлетворяет условиям:

$$\{a\,[\bar{A} + \bar{e}_3 \cdot \bar{e}_1]\} = 0, \qquad \{a\,[\bar{A} - \bar{e}_3 \cdot \bar{e}_2]\} = 0,$$

$$\{ad\,[\bar{A} + \bar{e}_3 \cdot \bar{e}_1]\} = 0,$$

где $[\bar{x} \cdot \bar{y}]$ обозначает плюккеровы координаты прямой p, проходящей через точки $\bar{x}(1, x_1, x_2, x_3)$ и $\bar{y}(0, y_1, y_2, y_3)$ (см. [9], стр. 36). Выполняя дифференцирование в последнем соотношении, пользуясь при этом формулами (19) и (20) и обращая в нуль коэффициенты при ω_1, ω_2 и ω_3, получим:

$$a_{23} + a_{02} = a_{13} - a_{01} = 0,$$

$$-a_{03}(A_0^{21} + A_3^{21}) - 2a_{01}A_1^{21} + a_{12} = 0,$$

$$-a_{03}(A_0^{22} + A_3^{22}) + a_{02} - 2a_{01}A_1^{22} = 0,$$

$$a_{01} = 0.$$

Уравнение линейного комплекса l имеет, следовательно, вид:

$$p_{12} + (A_0^{21} + A_3^{21})\,p_{03} + (p_{31} - p_{01})(A_0^{22} + A_3^{22}) = 0. \qquad (29)$$

Аналогично получаем уравнение линейного комплекса l^*, касательного к комплексу Φ_2 и проходящего через луч комплекса Φ_1:

$$p_{12} - (A_0^{11} - A_3^{11})\,p_{03} + \{A_0^{13} - A_3^{13} - A_2^{33}(A_0^{11} - A_3^{11})\}(p_{23} - p_{02}) = 0. \qquad (30)$$

Точно так же, как и в [9] (см. стр. 38), находим, что аффинные оси линейных комплексов (29), (30) параллельны векторам

$$\bar{L} = \bar{e}_3 + (A_0^{22} + A_3^{22})\,\bar{e}_2, \quad \bar{L}^* = \bar{e}_3 + \{A_0^{13} - A_3^{13} - A_2^{33}(A_0^{11} - A_3^{11})\}\,\bar{e}_1$$

соответственно. Отсюда следует, что соотношения (26) являются необходимыми и достаточными условиями того, чтобы аффинные оси линейных комплексов l и l^* были параллельны вектору $\bar{e}_3$. Теорема доказана.

Теорема 5. Пара K комплексов характеризуется тем, что точки соответствующие в нуль-системе основной плоскости линейных комплексов l и l^*, совпадают с основным центром пары комплексов.

Доказательство. Из (29) и (30) следует, что радиус-векторы точек, соответствующих в нуль-системе основной плоскости линейных комплексов l и l^*, имеют, соответственно, вид:

$$\bar{H}_1 = \bar{A} - (A_0^{22} + A_3^{22})\,\bar{e}_2,$$

$$\bar{H}_2 = \bar{A} + \{A_0^{13} - A_3^{13} - A_2^{33}(A_0^{11} - A_3^{11})\}\,\bar{e}_1.$$

Отсюда следует, что точки $\bar{H}_1$ и $\bar{H}_2$ совпадают с $\bar{A}$ тогда и только тогда, когда выполняются соотношения (26). Теорема доказана.

Теорема 6. Пара K комплексов характеризуется тем, что плоскости, соответствующие в нуль-системе линейных комплексов l и l^* основному центру пары комплексов, совпадают с основной плоскостью.

Доказательство. Из (29) и (30) следует, что уравнения плоскостей σ и σ^*, соответствующих в нуль-системе линейных комплексов l и l^* основному центру пары комплексов, имеют вид:

$$y_1(A_0^{22} + A_3^{22}) + y_3(A_0^{21} + A_3^{21}) = 0,$$

$$y_2\{A_0^{13} - A_3^{13} - A_2^{33}(A_0^{11} - A_3^{11})\} + y_3(A_0^{11} - A_3^{11}) = 0.$$

Отсюда следует, что плоскости σ и σ^* совпадают с плоскостью $y_3 = 0$ тогда и только тогда, когда выполняются соотношения (26). Теорема доказана.

Теорема 7. Прямые, проходящие через произвольную точку луча комплекса Φ_1 (Φ_2) пары K и точку пересечения соответствующего луча комплекса Φ_2 (Φ_1) с плоскостью, соответствующей в главной корреляции данной точке на луче комплекса Φ_1 (Φ_2), образуют квадрику f_1 (f_2). Каждая из квадрик f_1 и f_2 является однополостным гиперболоидом, центр которого совпадает с основным центром пары комплексов.

Доказательство. Уравнение всякой квадрики будем писать в виде:

$$(\bar{X} \cdot \bar{X}) = a^{ik}x_i x_k = 0, \ (i, k = 0, 1, 2, 3),$$

где $(\bar{X} \cdot \bar{X}) = a^{ik}x_i x_k$ обозначает квазискалярное произведение [9] точки $\bar{X}$ на себя с однородными координатами x_i, причем

$$a^{ik} = a^{ki} = (\bar{e}^i \cdot \bar{e}^k), \ \bar{e}_0 = \bar{A}. \qquad (30)$$

Пусть T — произвольная точка на луче комплекса Φ_1 и T^* — точка пересечения луча комплекса Φ_2 с плоскостью, соответствующей точке T в главной корреляции комплекса Φ_1. Пусть X — произвольная точка прямой TT^*. Тогда из (6) и (7) в силу (10) следует, что

$$\bar{X} = x_1(\bar{A} + \bar{e}_3 + t\bar{e}_1) + x_2\left(\bar{A} - \bar{e}_3 - \frac{2(y - tu)}{tz}\bar{e}_2\right).$$

Легко видеть, что для произвольной пары комплексов прямая TT^* не принадлежит квадрике. Пусть данная пара комплексов есть пара K. Тогда в силу (26) будем иметь:

$$\bar{X} = x_1(\bar{A} + \bar{e}_3 + t\bar{e}_1) + x_2\left(\bar{A} - \bar{e}_3 - \frac{2y}{t}\bar{e}_2\right).$$

Внося теперь $\bar{X}$ в $(\bar{X} \cdot \bar{X}) = 0$ и приравнивая нулю коэффициенты при x_1^2, x_1x_2 и x_2^2, получим:

$$(\bar{A} + \bar{e}_3 + t\bar{e}_1 \cdot \bar{A} + \bar{e}_3 + t\bar{e}_1) = 0,$$

$$\left(\bar{A} + \bar{e}_3 + t\bar{e}_1 \cdot \bar{A} - \bar{e}_3 - \frac{2y}{t}\bar{e}_2\right) = 0,$$

$$\left(\bar{A} - \bar{e}_3 - \frac{2y}{t}\bar{e}_2 \cdot \bar{A} - \bar{e}_3 - \frac{2y}{t}\bar{e}_2\right) = 0.$$

Приравнивая теперь здесь нулю коэффициенты при t^n ($n = 0, 1, \ldots$) и пользуясь при этом формулами (30), получим следующее уравнение квадрики f_1:

$$2y_1y_2 - (A_0^{21} + A_3^{21})(1 - y_3^2) = 0. \tag{31}$$

Аналогично получается уравнение квадрики f_2:

$$2y_1y_2 + (A_0^{11} - A_3^{11})(1 - y_3^2) = 0. \tag{32}$$

Отсюда и из (31) следует, что квадрики f_1 и f_2 суть однополостные гиперболоиды, центры которых совпадают с основным центром пары K комплексов. Теорема доказана.

Теорема 8. Несобственные точки и основные точки соответствующих лучей пары K комплексов суть квазифлекнодальные точки лучей основной комплексовой пары линейчатых поверхностей.

Доказательство этой теоремы непосредственно вытекает из (16), (19) и (20) и $\omega_1^3 = \omega_2^3 = 0$.

6. Пара T комплексов. В работе [1] было показано, что пара T комплексов характеризуется тем, что κ-флекнодальные точки соответствующих лучей этой пары неопределенны. Следовательно, пара T комплексов характеризуется соотношениями:

$$\begin{aligned} &u = -(A_0^{22} + A_3^{22}) = 0, \qquad u^* = A_2^{33}(A_0^{11} - A_3^{11}) - A_0^{13} + A_3^{13} = 0, \\ &y + y^* = -(A_0^{21} + A_3^{21} + A_0^{11} - A_3^{11}) = 0, \end{aligned} \tag{33}$$

вытекающими из тождественного выполнения уравнений (27) и из формул (19) и (20). Отсюда и из (26) следует, что класс пар T комплексов образует подкласс класса пар K комплексов.

Теорема 9. Пара T комплексов есть пара K комплексов, у которой квадрики f_1 и f_2 совпадают.

Доказательство этой теоремы непосредственно вытекает из (31) — (33).

Уравнение плоскости α_1 векторов $(\bar{A} + \bar{e}_3 + d(\bar{A} + \bar{e}_3), \bar{e}_1)$, проходящей через основной центр главной комплексовой пары линейчатых поверхностей, имеет вид:

$$(\bar{R}, \bar{A} + \bar{e}_3 + d(\bar{A} + \bar{e}_3), \bar{e}_1) = 0 \qquad \text{при} \qquad \omega_2 = \omega_3 = 0,$$

а уравнение плоскости α_2 векторов $(\bar{A} - \bar{e}_3 + d(\bar{A} - \bar{e}_3), \bar{e}_2)$, проходящей через основной центр той же пары линейчатых поверхностей, запишется в виде:

$$(\bar{R}, \bar{A} - \bar{e}_3 + d(\bar{A} - \bar{e}_3), \bar{e}_2) = 0.$$

Отсюда и из предыдущего равенства вытекает справедливость следующей теоремы.

Теорема 10. Пара T комплексов есть пара K комплексов, у которой проекция прямой пересечения плоскостей α_1 и α_2 на основную плоскость параллельна вектору $\bar{e}_1 + \bar{e}_2$.

7. Пользуясь результатами § 3, мы точно так же, как в работах [1] и [2], найдем, что пара K определяется с произволом в три функции трех аргументов. Пара T комплексов, как показано в [6], определяется с произволом в две функции трех аргументов.

ЛИТЕРАТУРА

1. Ивлев Е. Т. Канонический репер произвольной пары комплексов в P_3. Сибирский математический журнал, IV, № 3, 1963, стр. 562—580.

2. Ивлев Е. Т. Репераж подмногообразий в теории пар комплексов в P_3. Сибирский математический журнал, IV, № 4, 1963, стр. 800—821.

3. Ивлев Е. Т. О реперах подмногообразий в теории пар комплексов в P_3. ДАН СССР, т. 139, № 3, 1961, 538—540.

4. Фиников С. П. Метод внешних форм Картана в дифференциальной геометрии М.—Л., ГИТТЛ, 1948.

5. Щербаков Р. Н. Построение метрической теории комплексов при помощи репеража подмногообразий. Доклады научной конференции по теоретическим и прикладным вопросам математики и механики. Издательство Томского университета, 1960, стр. 80—82.

6. Фиников С. П. Теория пар конгруэнций. М., ГИТТЛ, 1956.

7. Ивлев Е. Т. Пара линейчатых поверхностей в трехмерном проективном пространстве. Доклады научной конференции по теоретическим и прикладным вопросам математики и механики. Издательство Томского университета, 1960, стр. 50—51.

8. Ивлев Е. Т., Пергаменщиков М. Б. К эквиаффинной теории пар линейчатых поверхностей трехмерного пространства. Данный сборник, стр. 97—103

9. Щербаков Р. Н. Курс аффинной и проективной дифференциальной геометрии. Издательство Томского университета, Томск, 1960.

ТРУДЫ ТОМСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА
имени В. В. КУЙБЫШЕВА

Том 168 Серия механико-математическая

Л. И. МАГАЗИННИКОВ

К ЦЕНТРОАФФИННОЙ ТЕОРИИ ПРЯМОЛИНЕЙНЫХ КОНГРУЭНЦИЙ

Вопросами центроаффинной дифференциальной геометрии занимались многие геометры как у нас в стране, так и за рубежом, особенно в Румынии. В работах В. В. Вагнера, В. Н. Скрыдлова, Я. С. Дубнова (СССР), Майера, Миллера, Попа, Георгиу (Румыния) довольно подробно, различными методами разработана теория плоских и пространственных кривых, теория поверхностей и другие вопросы.

Специально центроаффинной теории конгруэнций посвящена работа Майера, опубликованная в 1950 году [1]. В этой работе Майер строит канонический репер конгруэнции, определяет инварианты ее, изучает центроаффинное изгибание конгруэнций и центроаффинное наложение двух поверхностей.

В данной работе также строится и геометрически характеризуется канонический репер конгруэнции (применение репера Майера во многих вопросах оказывается затруднительным), изучаются семейства конгруэнций с параллельными соответствующими лучами, при этом дается новая геометрическая характеристика линейчатой поверхности с несобственной центральной линией [2] и линейчатой поверхности с центральной линией на средней поверхности, рассматриваются линейчатые поверхности, принадлежащие конгруэнции, секущие фокальную поверхность по сопряженной сети линий. Во второй части работы построен полуканонический репер конгруэнции, с помощью которого изучаются некоторые линейчатые поверхности, принадлежащие конгруэнции.

§ 1. Репер конгруэнции, отнесенной к торсам

Поместим начало репера в центр пространства O, в качестве векторов A_1 и A_3 выберем радиус-вектор некоторой точки луча конгруэнции и вектор, параллельный ее лучу. Пусть A_2 — любой, некомпланарный с A_1 и A_3, вектор.

В дальнейшем считается, что все векторы имеют начало в центре пространства O. Точку мы будем отождествлять с ее радиус-вектором и писать: „точка A_i“, понимая под этим: „точка, радиус-вектором которой является вектор A_i“.

Из деривационных формул репера

$$dA_i = \omega_i^\kappa A_\kappa \quad (i, \kappa = 1, 2, 3),$$

где ω_i^κ — линейные дифференциальные формы, зависящие от двух главных параметров и удовлетворяющие уравнениям структуры центроаффинного пространства:

$$D\omega_i^\kappa = [\omega_i^j, \omega_j^\kappa], \tag{1.1}$$

видно, что неподвижность луча обеспечивается равенствами:

$$\omega_1^1 = \omega_1^2 = \omega_3^1 = \omega_3^2 = 0.$$

Возьмем дифференциальные формы ω_1^2 и ω_3^1 за главные. Тогда:

$$\begin{aligned} \omega_1^1 &= a\,\omega_3^1 + b\,\omega_1^2, \\ \omega_3^2 &= c\,\omega_3^1 + g\,\omega_1^2. \end{aligned} \tag{1.2}$$

Пользуясь уравнением структуры (1.1), получим в результате внешнего дифференцирования формул (1.2):

$$\begin{aligned} &[da - \omega_1^3 - ac\omega_2^1 + a\omega_3^3 - ab\omega_1^2 + bc\omega_1^3, \omega_3^1] + \\ &[db + \omega_2^1 + ab\omega_3^1 - ag\omega_2^1 - b\omega_2^2 + bg\omega_1^3, \omega_1^2] = 0; \\ &[dc + c\omega_2^2 - c^2\omega_2^1 + gc\omega_1^3 + (1 - bc - cg)\,\omega_1^2, \omega_3^1] + \\ &[dg - g\omega_3^3 - cg\omega_2^1 + g^2\omega_1^3, \omega_1^2] = 0, \end{aligned} \tag{1.3}$$

откуда:

$$\begin{aligned} \delta a &= \pi_1^3 (1 - bc) + ac\pi_2^1 - a\pi_3^3; \\ \delta b &= \pi_2^1 (ag - 1) + b\pi_2^2 - bg\pi_1^3; \\ \delta g &= g\pi_3^3 + g\pi_2^1 - g^2\pi_1^3 + gc\pi_2^1; \\ \delta c &= c^2\pi_2^1 - c\pi_2^2 - gc\pi_1^3, \end{aligned} \tag{1.4}$$

где δ и π_i^κ — символ дифференцирования и дифференциальные формы, соответствующие вторичным параметрам, причем $\pi_1^1 = \pi_1^3 = \pi_3^1 = \pi_3^2 = 0$ в силу выбора векторов A_1 и A_3.

Уравнение торсов конгруэнции имеет вид:

$$\varphi = (A_3, dA_3, dA_1) = ac(\omega_3^1)^2 + (bc + aq - 1)\,\omega_3^1\omega_1^2 + bq(\omega_1^2)^2 = 0. \tag{1.5}$$

Выбирая вторичные параметры так, что $\pi_1^3 = \pi_2^1 = 0$, $a = b = 0$, приведем эту квадратичную форму к простейшему виду

$$\varphi = -\omega_3^1\omega_1^2.$$

При этом торсы станут координатными линейчатыми поверхностями (параболические конгруэнции из рассмотрения исключаются), а точка A_1 становится фокусом луча.

Первое соотношение из (1.3) теперь дает:

$$[\omega_2^1, \omega_1^2] - [\omega_1^3, \omega_3^1] = 0,$$

откуда по лемме Картана имеем:

$$\begin{aligned} \omega_2^1 &= m_2\omega_1^2 + \alpha\omega_3^1, \\ -\omega_1^3 &= \alpha\omega_1^2 - m_1\omega_3^1. \end{aligned} \tag{1.6}$$

Дифференцируя эти соотношения внешним образом, получим следующие уравнения:

$$\delta m_2 = 2m_2\pi_2^2,$$

$$\delta m_1 = 2m_1\pi_3^3,$$
$$\delta\alpha = \pi_2^3. \qquad (1.7)$$

Фиксируя вторичный параметр условием $\pi_2^3 = 0$, можем положить $\alpha = 0$. Нормирование векторов A_2 и A_3 можно провести различно, как это видно из соотношений (1.4) и (1.7). Мы будем это делать, исходя из условий стоящей задачи.

Вводя соответствующие обозначения, получим следующие деривационные формулы:

$$\begin{aligned} dA_1 &= \omega_1^2 A_2 + m_1\omega_3^1 A_3, \\ dA_2 &= m_2\omega_1^2 A_1 + (m_3\omega_3^1 + m_4\omega_1^2) A_2 + (m_5\omega_3^1 + m_6\omega_1^2) A_3, \\ dA_3 &= \omega_3^1 A_1 + (c\omega_3^1 + g\omega_1^2) A_2 + (m_7\omega_3^1 + m_8\omega_1^2) A_3. \end{aligned} \qquad (1.8)$$

Условиями совместности этой системы будут следующие, получающиеся из уравнений структуры шесть уравнений:

$$\begin{aligned} &[dm_1, \omega_3^1] = \{m_1(2m_8 - cm_2) - m_5\}[\omega_3^1, \omega_1^2], \\ &[dm_2, \omega_1^2] = \{m_2(2m_3 - m_1 g) - m_6\}[\omega_3^1, \omega_1^2], \\ &[dm_3, \omega_3^1] + [dm_4, \omega_1^2] = \{m_5 g - m_6 c - m_3(cm_2 - m_8) - \\ &\qquad - m_4(m_1 g - m_3)\}[\omega_3^1, \omega_1^2], \\ &[dm_5, \omega_3^1] + [dm_6, \omega_1^2] = \{m_5(2m_8 - m_4 - cm_2) + \\ &\qquad + m_6(2m_3 - m_7 - m_1 g) - m_1 m_2\}[\omega_3^1, \omega_1^2], \\ &[dm_7, \omega_3^1] + [dm_8, \omega_1^2] = \{cm_6 - m_5 g - m_7(cm_2 - m_8) - \\ &\qquad - m_8(m_1 g - m_3)\}[\omega_3^1, \omega_1^2], \\ &[dc, \omega_3^1] + [dg, \omega_1^2] = \{1 + m_4 c + m_7 g - c^2 m_2 - g m_1\}[\omega_3^1, \omega_1^2]. \end{aligned} \qquad (1.9)$$

Фокусами конгруэнции являются точки:

$$F_1 = A_1, \qquad F_2 = A_1 - \frac{1}{g}A_3. \qquad (1.10)$$

Фокальные плоскости имеют уравнения:

$$f_1 = (R - A_1, A_2, A_3) = 0, \qquad (1.10')$$
$$f_2 = (R - A_1, A_1 + cA_2, A_3) = 0, \quad g \neq 0.$$

Направление A_2 параллельно касательной фокальной линии $\omega_3^1 = 0$ поверхности $F_1 = A_1$.

Центральная линия произвольной линейчатой поверхности конгруэнции имеет уравнение:

$$R = A_1 - \frac{\omega_1^2}{c\omega_3^1 + g\omega_1^2}A_3, \qquad \omega_1^2 = \lambda\omega_3^1. \qquad (1.11)$$

Отсюда видно, что линейчатые поверхности с несобственной центральной линией и с центральной линией на средней поверхности имеют уравнения:

$$c\omega_3^1 + g\omega_1^2 = 0,$$
$$c\omega_3^1 - g\omega_1^2 = 0. \qquad (1.12)$$

Из формул (1.7) и (1.4) видно, что ни одну из функций g, m_1, c, m_2 привести к нулю невозможно, следовательно, они являются относительными инвариантами. Исследуем случаи, когда эти функции обращаются в нуль.

1. $c = 0$. Из (1.11) видно, что в этом случае центральные линии всех линейчатых поверхностей лежат на одной поверхности. Из определения фокуса конгруэнции и центральной линии линейчатой поверхности следуют теоремы:

Т е о р е м а 1. Если центральные линии всех линейчатых поверхностей конгруэнции лежат на одной поверхности, то эта поверхность является фокальной и всегда вырождается в конус с вершиной в центре пространства. Одно семейство торсов вырождается в плоскости, совпадающие с плоскостями, определяемыми лучами конгруэнции и центром пространства.

Т е о р е м а 1а. Соприкасающаяся плоскость кривой, по которой касается торс конгруэнции класса $c = 0$ поверхности A_1, проходит через центр пространства. Доказательство следует из формул (1.10′), поскольку плоскость $f_2 = 0$ является соприкасающейся плоскостью ребра возврата торса $\omega_1^2 = 0$.

2. В случае $g = 0$ имеем цилиндрическую конгруэнцию (см. (1.10)).

3. В случае $m_1 m_2 = 0$ фокальная поверхность A_1 вырождается в торс, а одно семейство торсов в плоскость. Действительно, асимптотические линии поверхности A_1 имеют уравнение:

$$m_1(\omega_3^1)^2 + m_2(\omega_1^2)^2 = 0. \qquad (1.13)$$

Произвол каждого из приведенных частных классов конгруэнций равен одной функции двух аргументов. Для доказательства этого надо как либо пронормировать репер, а затем к системе (1.9) применить теорему Бахвалова [3].

З а м е ч а н и е. Построенный репер конгруэнции можно рассматривать как полуканонический ненормированный репер фокальной поверхности A_1, отнесенной к произвольной сопряженной сети. Действительно, неподвижность поверхности обеспечивают равенства $\omega_1^1 = \omega_1^2 = \omega_1^3 = 0$, а луча конгруэнции $\omega_1^1 = \omega_1^2 = \omega_3^1 = \omega_3^2 = 0$.

Таким образом, если рассматривать построенный репер, как репер поверхности, то для него еще остается не фиксированной форма π_3^2. Функции, входящие в деривационные формулы (1.8) изменяются следующим образом при изменении этой формы:

$$\begin{aligned} \delta m_1 &= 0, \\ \delta m_2 &= 0, \\ \delta m_3 &= -(m_5 + m_1 m_4)\pi_3^2, \\ \delta m_4 &= -(m_8 m_2 + m_6)\pi_3^2, \\ \delta m_5 &= m_6 m_1 \pi_3^2, \\ \delta m_6 &= m_5 m_2 \pi_3^2; \\ \delta m_7 &= (-m_1 m_8 + m_5)\pi_3^2; \\ \delta m_8 &= (-m_7 m_2 + m_6)\pi_3^2; \\ \delta c &= 0; \\ \delta g &= 0. \end{aligned} \qquad (1.14)$$

§ 2. Семейства конгруэнций с параллельными лучами

Пронормируем репер условием $c=g=1$. При этом условия интегрируемости дают одно конечное соотношение на инварианты:

$$m_1+m_2-m_4-m_7=1$$

и пять квадратичных.

Теперь второй фокус конгруэнции находится в точке $F_2=A_1-A_3$, а A_2 является точкой пересечения прямой, проходящей через центр пространства параллельно направлению, сопряженному к лучу конгруэнции на F_1, с фокальной плоскостью f_2. При этом нормировании линейчатые поверхности с несобственной центральной линией и с центральной линией на средней поверхности будут иметь уравнения:

$$\omega_3^1+\omega_1^2=0,\qquad \omega_3^1-\omega_1^2=0. \tag{2.1}$$

Рассмотрим семейство конгруэнций:

$$R=\lambda_1A_1+\lambda_2A_2+vA_3, \tag{2.2}$$

где λ_1, λ_2 — произвольные функции тех же аргументов, что и A_i. Уравнение центральной линии произвольной линейчатой поверхности $\omega_1^2=\mu\omega_3^1$ конгруэнции (2.1) имеет вид:

$$R=\lambda_1A_1+\lambda_2A_2+ \\ +\frac{(\lambda_1\lambda_{21}+\lambda_1\lambda_2m_4-\lambda_2\lambda_{11})\,\omega_3^1+(\lambda_1^2+\lambda_1\lambda_2m_3+\lambda_1\lambda_{22}-\lambda_2\lambda_{21}-\lambda_2^2m_1)\,\omega_1^2}{\lambda_2\omega_3^1-\lambda_1(\omega_3^1+\omega_1^2)}A_3, \tag{2.3}$$

где $d\lambda_1=\lambda_{11}\omega_3^1+\lambda_{12}\omega_1^2$, $d\lambda_2=\lambda_{21}\omega_3^1+\lambda_{22}\omega_1^2$ и $\omega_1^2=\mu\omega_3^1$.

Теорема 2. Линейчатая поверхность с несобственной центральной линией конгруэнции (2.2) соответствует одному из торсов исходной конгруэнции тогда и только тогда, когда плоскость, определяемая центром пространства и соответствующим лучом конгруэнции (2.2), параллельна одной из фокальных плоскостей исходной конгруэнции.

Доказательство. Для выполнения условия теоремы необходимо и достаточно, чтобы выполнялось либо соотношение:

$$\lambda_2\omega_3^1-\lambda_1(\omega_3^1+\omega_1^2)=\mu\omega_1^2,$$

либо

$$\lambda_2\omega_3^1-\lambda_1(\omega_3^1+\omega_1^2)=\mu\omega_3^1.$$

Отсюда или $\lambda_2=\lambda_1$, или $\lambda_1=0$. Из (2.2) и (1.10′) при $c=1$ следует требуемое.

Теорема 3. Линейчатая поверхность с несобственной центральной линией данной конгруэнции и такая же линейчатая поверхность конгруэнции (2.2) тогда и только тогда соответствуют, когда соответствующие лучи этих конгруэнций вместе с центром пространства определяют одну и ту же плоскость, т. е. когда $\lambda_2=0$.

Доказательство. Для выполнения условия теоремы необходимо и достаточно, чтобы имело место соотношение:

$$\lambda_2\omega_3^1-\lambda_1(\omega_3^1+\omega_1^2)=\kappa(\omega_3^1+\omega_1^2)\qquad(\kappa\neq0).$$

Отсюда $\lambda_2=0$, ч. т. д.

К конгруэнциям, соответствующие лучи которых параллельны лучам данной конгруэнции, мы подойдем, решая следующую задачу:

„Дана конгруэнция. Найти другую конгруэнцию, лучи которой взаимно однозначно соответствуют лучам данной конгруэнции, а радиус-векторы любых точек соответствующего луча ее пересекают фокальные плоскости заданного луча данной конгруэнции в точках, симметричных относительно центра пространства".

Предварительно решим такую задачу: „Найти прямые, проходящие через центр пространства и пересекающие фокальные плоскости заданного луча данной конгруэнции в точках, симметричных относительно центра пространства".

Любую прямую, проходящую через центр пространства, можно задать уравнением:

$$R=v(\lambda_1A_1+\lambda_2A_2+\lambda_3A_3).$$

Эти прямые пересекают фокальные плоскости данного луча заданной конгруэнции в точках:

$$R_1=\frac{1}{\lambda_1}(\lambda_1A_1+\lambda_2A_2+\lambda_3A_3),\qquad R_2=\frac{1}{\lambda_1-\lambda_2}(\lambda_1A_1+\lambda_2A_2+\lambda_3A_3).$$

Эти точки симметричны относительно центра пространства только при $2\lambda_1=\lambda_2$. Следовательно, решение второй задачи дает пучок прямых:

$$R=v(A_1+2A_2+\lambda A_3). \tag{2.4}$$

Но тогда решением первой задачи будет единственная конгруэнция

$$R=A_1+2A_2+vA_3. \tag{2.5}$$

Теорема 4. Если радиус-вектор произвольной точки соответствующего луча некоторой конгруэнции пересекает фокальные плоскости данной конгруэнции в точках, симметричных относительно центра пространства, то лучи первой конгруэнции параллельны соответствующим лучам данной конгруэнции, а плоскость, определяемая ее лучом и центром пространства, параллельна плоскости, определяемой соответствующим лучом данной конгруэнции и касательной к линии пересечения средней поверхности с проходящей через этот луч линейчатой поверхностью, имеющей несобственную центральную линию.

Доказательство. Первая часть теоремы следует из (2.5), а вторая — из того, что касательная к линии пересечения средней поверхности конгруэнции ее линейчатой поверхностью с несобственной центральной линией, параллельна следующему вектору:

$$R=A_1+2A_2-[(2m_1-m_7)+m_8]\,A_3.$$

В связи с этой задачей дадим новую геометрическую интерпретацию линейчатой поверхности с несобственной центральной линией и с центральной линией на средней поверхности.

Теорема 5. Линейчатая поверхность с несобственной центральной линией и только она пересекает среднюю поверхность по такой кривой, что прямые, проходящие через центр пространства параллельно касательным этой кривой, пересекают соответствующие фокальные плоскости в точках, симметричных относительно центра пространства.

Доказательство. Прямая, проходящая через центр пространства параллельно касательной к линии $\omega_1^2=\lambda\omega_3^1$ средней поверхности, имеет уравнение:

$$R=v\left\{\frac{1}{2}A_1+\frac{1}{2}(1-\lambda)A_2-\left[\left(m_1-\frac{1}{2}m_7\right)-\frac{1}{2}m_8\lambda\right]A_3\right\}.$$

Только при $\lambda = -1$ эта прямая параллельна одной из прямых (2.4).

Теорема 6. Линейчатая поверхность с центральной линией на средней поверхности и только она пересекает индикаторную поверхность ($R = F_1 - F_2$) по такой кривой, что прямые, проходящие через центр пространства параллельно касательным этой кривой, пересекают соответствующие фокальные плоскости в точках, симметричных относительно центра пространства.

Доказательство. Прямая, параллельная касательной к кривой $\omega_1^2 = \lambda\omega_3^1$ индикаторной поверхности, проходящая через центр пространства, имеет уравнение:

$$R = v\{A_1 + (1+\lambda)A_2 + (m_2 - m_1 + m_2\lambda)A_3\}.$$

Только при $\lambda = 1$, эта прямая параллельна одной из прямых (2.4), ч. т. д.

§ 3. Линейчатые поверхности, принадлежащие конгруэнции и секущие фокальную поверхность по сопряженной сети линий

Сеть линейчатых поверхностей конгруэнции, которая сечет фокальную поверхность по сопряженной сети линий, будем называть для краткости a-сопряженной.

Теорема 7. Произведение простых отношений, в которых фокусы конгруэнции делят центральные точки ее a-сопряженных линейчатых поверхностей, не зависит от выбора этих линейчатых поверхностей и равно сложному отношению, в котором делят фокальную сеть линии пересечения фокальной поверхности с линейчатой поверхностью с несобственной центральной линией и с a-сопряженной с ней.

Доказательство. Пусть $\omega_1^2 = \lambda\omega_3^1$ — произвольная линейчатая поверхность конгруэнции. Используя (1.13), найдем, что a-сопряженная с ней линейчатая поверхность будет иметь уравнение:

$$m_1\omega_3^1 + m_2\lambda\omega_1^2 = 0. \tag{3.1}$$

Центральные линии a-сопряженных линейчатых поверхностей имеют уравнения:

$$R_1 = A_1 - \frac{\lambda}{1+\lambda}A_3 \tag{3.2}$$

$$R_2 = A_1 - \frac{m_1}{m_1 - \lambda m_2}A_3. \tag{3.3}$$

Вычисляя, находим:

$$\frac{F_1R_1}{R_1F_2}\cdot\frac{F_1R_2}{R_2F_2} = -\frac{m_1}{m_2}, \tag{3.4}$$

где R_1 и R_2 — точки, определенные соотношениями (3.2) и (3.3). Касательные к линиям, о которых идет речь в теореме, имеют следующие направления:

$$\begin{aligned} L_1 &= A_2,\\ L_2 &= m_1A_3,\\ L_3 &= A_2 + m_1A_3,\\ L_4 &= A_2 - m_2A_3. \end{aligned} \tag{3.5}$$

Отсюда находим:

$$(L_1, L_2; L_3, L_4) = -\frac{m_1}{m_2}.$$

Следовательно,

$$\frac{F_1R_1}{R_1F_2}\cdot\frac{F_1R_2}{R_2F_2} = (L_1, L_2; L_3, L_4).$$

Справедлива и обратная теорема: если произведение простых отношений, в которых делятся фокусы конгруэнции центральными точками некоторых ее линейчатых поверхностей, равно сложному отношению $(L_1, L_2; L_3, L_4)$, где L_i — определены соотношениями (3.5), то эти линейчатые поверхности a-сопряжены. В самом деле, пусть даны две различные линейчатые поверхности:

$$\omega_1^2 = \lambda_1\omega_3^1, \quad \omega_1^2 = \lambda_2\omega_3^1. \tag{3.6}$$

Их центральные линии имеют уравнения:

$$r_1 = A_1 - \frac{\lambda_1}{\lambda_1 + 1}A_3, \qquad r_2 = A_1 - \frac{\lambda_2}{1+\lambda_2}A_3.$$

Находим:

$$\frac{F_1r_1}{r_1F_2}\cdot\frac{F_1r_2}{F_2r_2} = \lambda_1\cdot\lambda_2.$$

По условию теоремы должно быть:

$$\lambda_1\lambda_2 = -\frac{m_1}{m_2},$$

но из (3.1) тогда следует, что линейчатые поверхности (3.6) a-сопряжены.

Следствие. Если простые отношения, в которых делятся фокусы конгруэнции центральными точками любых двух a-сопряженных линейчатых поверхностей, обратны по величине и по знаку, то линейчатая поверхность с несобственной центральной линией и с центральной линией на средней поверхности a-сопряжены. Если эти отношения обратны по величине, а по знаку совпадают, то эти же линейчатые поверхности высекают на фокальной поверхности асимптотическую сеть.

Доказательство следует из (1.13), (2.1) и (3.4).

Теорема 8. В любой конгруэнции существует не более двух a-сопряженных сетей линейчатых поверхностей, имеющих центральные линии на поверхностях, симметричных относительно фокальной поверхности A_1.

Доказательство. Для того, чтобы точки (3.2) и (3.3) были симметричны относительно A_1, необходимо и достаточно выполнения условия:

$$\frac{m_1}{m_1 - \lambda m_2} + \frac{\lambda}{1+\lambda} = 0.$$

Отсюда:

$$\lambda^2 + 2\lambda\frac{m_1}{m_2} - \frac{m_1}{m_2} = 0, \text{ ч. т. д.}$$

Найдем:

$$\lambda_{1,2} = \frac{m_1 \pm \sqrt{(m_1 + m_2)m_1}}{m_2}. \tag{3.7}$$

Как видно из формулы (3.7), в конгруэнциях $(m_1 + m_2) = 0$ сетей линейчатых поверхностей, охарактеризованных в теореме 8, не существует. Такие конгруэнции определяются с произволом в одну функцию двух аргументов (чтобы это доказать, надо внести в условия интегрируемости (1.9) соотношения $c = g = 1$, $m_1 = -m_2$, а затем применить теорему Бахвалова) и геометрически характеризуются тем, что линейчатые поверхности с несобственной центральной линией и с центральной линией на средней поверхности секут фокальную поверхность A_1 по асимптотическим линиям (см. (1.13) и (2.1)).

Теорема 9. Если линейчатые поверхности с несобственной центральной линией и с центральной линией на средней поверхности секут фокальную поверхность по асимптотическим линиям ($m_1 + m_2 = 0$), то все a-сопряженные линейчатые поверхности имеют центральные точки, симметричные относительно средней точки луча, и обратно.

Доказательство. В нашем репере средняя поверхность конгруэнции имеет уравнение:

$$R = A_1 - \frac{1}{2} A_3.$$

Следовательно, для доказательства теоремы надо доказать, что условие:

$$\frac{R_1 + R_2}{2} = A_1 - \frac{1}{2}\left(\frac{\lambda}{1+\lambda} + \frac{m_1}{m_1 - \lambda m_2}\right) A_3 = A_1 - \frac{1}{2} A_3 \tag{3.8}$$

выполняется при любом λ, если $m_1 + m_2 = 0$.

Но условие (3.8) равносильно равенству:

$$\lambda (m_1 + m_2) = 0.$$

Отсюда и следует утверждение теоремы.

Санниа в [4] вводит в рассмотрение такую сеть линейчатых поверхностей конгруэнции, что касательные плоскости в средней точке луча к линейчатым поверхностям сети делят гармонически фокальные плоскости. В работе [5] дана проективная характеристика этой сопряженности. Из результатов работ [4] и [5] следует теорема.

Теорема 10. Для того, чтобы две линейчатые поверхности, проходящие через данный луч конгруэнции, были сопряжены в смысле Санниа, необходимо и достаточно, чтобы их центральные точки гармонически делили фокусы луча.

Впрочем это следует и из того, что:

$$(F_1, F_2; C_1, C_2) = \frac{1}{(f_1, f_2; \beta_1, \beta_2)} = \frac{\lambda_1}{\lambda_2}, \tag{3.9}$$

где C_i — центральные точки линейчатых поверхностей $\omega_1^2 = \lambda_i \omega_3^1$, β_i — касательные плоскости к этим поверхностям в средней точке луча, а F_1, F_2, f_1, f_2 — фокусы и фокальные плоскости конгруэнции. Из условия (3.9) видим, что линейчатые поверхности $\omega_1^2 = \lambda\omega_3^1$ и $\omega_1^2 = -\lambda\omega_3^1$ сопряжены в смысле Санниа. Для последней точка

$$R_3 = A_1 + \frac{\lambda}{1-\lambda} A_3 \tag{3.10}$$

является центральной.

Теорема 11. В любой конгруэнции существует не более двух линейчатых поверхностей L, таких, что a-сопряженная и сопряженная в смысле Санниа с L линейчатые поверхности имеют центральные точки, симметричные относительно фокуса A_1.

Доказательство. Центральные точки этих линейчатых поверхностей R_2 и R_3 должны удовлетворять условию: $\frac{R_2 + R_3}{2} = A_1$. Подставляя сюда значение R_2 и R_3 из (3.10) и (3.3), найдем:

$$\frac{\lambda}{1-\lambda} + \frac{m_1}{m_1 - \lambda m_2} = 0$$

или

$$m_2\lambda^2 - 2\lambda m_1 + m_1 = 0.$$

Отсюда:

$$\lambda_{1,2} = \frac{m_1 \pm \sqrt{m_1 (m_1 - m_2)}}{m_2}.$$

Из этой формулы следует, что таких линейчатых поверхностей через каждый луч проходит либо две, либо ни одной. Последнее имеет место в конгруэнциях $m_1 - m_2 = 0$, т. е. в таких конгруэнциях, в которых линейчатая поверхность с несобственной центральной линией и центральной линией на средней поверхности a-сопряжены. Такие конгруэнции существуют с произволом в одну функцию двух аргументов.

Теорема 12. Если линейчатые поверхности с несобственной центральной линией и с центральной линией на средней поверхности a-сопряжены, то для любой линейчатой поверхности конгруэнции a-сопряженная и сопряженная с нею в смысле Санниа линейчатые поверхности имеют центральные точки, симметричные относительно средней поверхности и обратно.

Доказательство проводится аналогично доказательству теоремы 9 с заменой точек R_1 и R_2 на R_3 и R_4, определяемых соотношениями (3.3) и (3.10).

Теорема 13. Пусть касательная плоскость в любой точке M_1 луча некоторой линейчатой поверхности конгруэнции служит в то же время касательной плоскостью в точке M_2 поверхности a-сопряженной к ней. Тогда, если произведение простых отношений, в которых делят фокусы конгруэнции точки M_1 и M_2, равно $-\frac{m_1}{m_2}$, то точки M_1 и M_2 являются центральными, либо этих линейчатых поверхностей, либо для сопряженных с ними в смысле Санниа (последние, очевидно, a-сопряжены).

Доказательство. Пусть

$$M_1 = A_1 + v_0 A_3.$$

Некоторая точка поверхности $\omega_1^2 = \lambda\omega_3^1$. Тогда:

$$M_2 = A_1 - \frac{v_0 m_1}{m_2\lambda^2 + v_0\lambda^2 m_2 + v_0 m_1} A_3.$$

Вычисляя, находим:

$$\frac{F_1M_1}{M_1F_2} \cdot \frac{F_1M_1}{F_2M_2} = -\left(\frac{v_0}{1+v_0}\right)^2 \cdot \frac{m_1}{m_2\lambda^2}.$$

Условие теоремы приводит к соотношению:

$$\left(\frac{v_0}{1+v_0}\right)^2 = \lambda^2.$$

Отсюда находим:

$$v_0' = -\frac{\lambda}{1+\lambda}, \qquad v_0'' = \frac{\lambda}{1-\lambda}.$$

Используя (3.1), (3.2), (3.3) и (3.10), получим требуемое.

Замечание. Все рассуждения этого параграфа велись с использованием фокальной поверхности A_1. Так как асимптотические линии второй фокальной поверхности имеют уравнение:

$$m_3(\omega_3^1)^2+m_8(\omega_1^2)^2=0,$$

то, заменяя в предыдущих рассуждениях m_1 на m_3, а m_2 на m_8, получим аналогичные результаты для другой фокальной поверхности.

§ 4. Некоторые конгруэнции, присоединенные к данной поверхности

Пронормируем репер следующим образом: $-m_1=m_2=1$. Условия интегрируемости (1.9) дадут два конечных соотношения на инварианты конгруэнции:

$$2m_8+m_5=c,$$

$$2m_3-m_6=g. \tag{4.1}$$

Асимптотические линии фокальной поверхности A_1 при этом будут иметь уравнения:

$$(\omega_3^1)^2-(\omega_1^2)^2=0.$$

Теорема 14. В построенном репере конгруэнции, для которых $(m_3+m_7)(m_4+m_8)=0$ (причем оба сомножителя не равны нулю одновременно), характеризуются тем, что фокальная сеть на A_1 образует главные линии [2] этой поверхности. Следовательно, этот репер можно рассматривать как канонический репер поверхности A_1, отнесенной к своим главным линиям.

Доказательство. Поверхности, образованные касательными к одной асимптотической линии вдоль другой (асимптотические линейчатые поверхности) на поверхности A_1, имеют уравнения:

$$R_1=A_1+v(A_2-A_3)_{\omega_3^1+\omega_1^2=0}, \tag{4.2}$$

$$R_2=A_1+v(A_2+A_3)_{\omega_3^1-\omega_1^2=0},$$

а их центральные точки суть

$$R_1=A_1-\frac{2(A_2-A_3)}{m_3+m_4+m_7+m_8},\qquad R_2=A_1-\frac{2(A_2+A_3)}{m_4+m_8-m_3-m_7}. \tag{4.3}$$

Поэтому прямая

$$R=A_1-\frac{2(A_2-A_3)}{m_3+m_4+m_7+m_8}+v\{(m_3+m_7)A_2-(m_4+m_8)A_3\}$$

является центральной нормалью [2] поверхности A_1. Но известно, что касательные первых главных линий параллельны соответствующим центральным нормалям [2]; следовательно, первые главные линии будут иметь уравнение:

$$(m_3+m_7)\omega_3^1-(m_4+m_8)\omega_1^2=0. \tag{4.4}$$

Линии, сопряженные к последним, называются вторыми главными линиями. Их уравнение имеет вид:

$$(m_3+m_7)\omega_1^2+(m_4+m_8)\omega_3^1=0. \tag{4.4'}$$

Из (4.4) и (4.4') следует утверждение теоремы. То, что условие теоремы 14 не накладывает ограничения на фокальную поверхность A_1, следует из соотношений (1.14). Действительно, выбором вторичного параметра π_3^2 можно получить $m_3+m_7=0$, если $m_4+m_8\neq 0$, или $m_4+m_8=0$, если $m_3+m_7\neq 0$.

Пусть дана произвольная поверхность A_1. Рассмотрим конгруэнции

$$R=A_1+v(\lambda_1A_1+\lambda_2A_2+\lambda_3A_3), \tag{4.5}$$

где λ_1, λ_2, λ_3 — некоторые функции двух аргументов.

Отнесем поверхность A_1 к ее главным линиям. Тогда деривационными формулами ее репера будут формулы (1.8), если в них положить, согласно теореме 14 — $m_1=m_2=1$, $m_3+m_7=0$ $(m_4+m_8\neq 0)$. Центральная линия произвольной линейчатой поверхности $\omega_1^2=\kappa\omega_3^1$ конгруэнции (4.5) имеет уравнение

$$R=A_1+\frac{(\lambda_2\omega_3^1+\lambda_3\omega_1^2)(\lambda_1A_1+\lambda_2A_2+\lambda_3A_3)}{\lambda_2(d\lambda_3-\lambda_1\omega_3^1+\lambda_2\omega_3^2+\lambda_3\omega_3^3)-\lambda_3(d\lambda_3+\lambda_1\omega_1^2+\lambda_2\omega_2^2+\lambda_3\omega_2^3)}, \tag{4.6}$$

где надо положить $\omega_1^2=\kappa\omega_3^1$.

Теорема 15. Пусть дана поверхность и на ней линия $\omega_1^2=\mu\omega_3^1$. Если к поверхности присоединены конгруэнции (4.5) так, что линейчатая поверхность каждой из них, соответствующая данной линии, имеет ее своей центральной кривой, то соответствующие лучи всех этих конгруэнций лежат в плоскости, определяемой касательной к данной линии и центром пространства.

Доказательство. Из формулы (4.6) видно, что для выполнения условия теоремы необходимо и достаточно, чтобы удовлетворялось равенство:

$$\lambda_2\omega_3^1+\lambda_3\omega_1^2=\kappa(\omega_1^2-\mu\omega_3^1),$$

где κ — некоторый множитель пропорциональности. Отсюда:

$$\lambda_2=-\kappa\mu,\qquad \lambda_3=-\kappa,$$

и уравнение конгруэнции (4.5) примут вид:

$$R=A_1+v(\lambda_1A_1+\mu A_2+A_3).$$

И касательная к данной линии, и лучи этих конгруэнций вместе с центром пространства определяют одну и ту же плоскость

$$(R-A_1,\mu A_2+A_3)=0.$$

Теорема доказана.

Теорема 16. Аффинная нормаль поверхности и центр пространства определяют плоскость, в которой лежат лучи конгруэнций таких, что линейчатая поверхность каждой из этих конгруэнций, соответствующая второй главной линии, имеет эту линию своей центральной кривой.

Действительно, Майером показано [2], что аффинная нормаль лежит в плоскости, определяемой центром пространства и касательной ко второй главной линии. Поэтому теорема 16 следует из теоремы 15.

Теорема 17. К данной поверхности можно присоединить и притом единственным образом (с точностью до выбора асимптотической линии ее) конгруэнцию так, чтобы ее линейчатая поверхность, соответствующая одной из асимптотических линий данной поверхности, имела эту линию своей центральной кривой, а второй асимптотической линии соответствовала линейчатая поверхность с несобственной центральной линией. Лучи этой конгруэнции параллельны радиус-векторам центральных точек асимптотических линейчатых поверхностей данной поверхности.

Доказательство. По теореме 15 искомая конгруэнция входит в одно из семейств конгруэнций:

$$R_1 = A_1 + v(\lambda_1' A_1 + A_2 + A_3),$$
$$R_2 = A_1 + v(\lambda_1'' A_1 + A_2 - A_3). \tag{4.7}$$

Используя (4.6), найдем, что линейчатые поверхности с несобственной центральной линией этих конгруэнций имеют уравнения:

$$[\lambda_1' + 2(m_8 + m_7)]\,\omega_3^1 + [-\lambda_1' + m_8 - m_4 + 2m_7]\,\omega_1^2 = 0,$$
$$[\lambda_1'' + 2(m_8 - m_7)]\,\omega_3^1 + [\lambda_1'' + 2m_7 - m_8 + m_4]\,\omega_1^2 = 0.$$

Эти линейчатые поверхности соответствуют той асимптотической линии, которая не является центральной кривой для соответствующей ей линейчатой поверхности только при $\lambda_1' = \lambda_2'' = -\dfrac{m_4 + m_8}{2}$. Сравнивая (4.7) при этом условии с (4.3), где надо положить $m_3 + m_7 = 0$, получим требуемое.

§ 5. Полуканонический репер конгруэнции

В соотношениях (1.4) фиксацию вторичных параметров произведем по-другому. Именно:

$$a = 0\ (c \neq 0), \quad b = 1, \quad g = 1, \quad \pi_1^3 = \pi_2^2 = \pi_3^3 = 0.$$

Будем обозначать векторы полуканонического репера через B_1, B_2, B_3, а его дифференциальные формы через v_3^1 и v_1^2. Теперь форма v_1^3 стала главной, а потому имеет место:

$$v_1^3 = p_1 v_3^1 + p_2 v_1^2.$$

Дифференцируя это соотношение внешним образом, найдем:

$$\delta p_2 = -\pi_2^3 + \delta\nu,$$

где $\delta\nu$ — не зависящая от π_2^3 вторичная дифференциальная форма. Выбирая вторичный параметр условием $\pi_2^3 = 0$, можем положить $p_2 = 0$. Форму π_2^1 фиксировать не будем. Это оставляет одну координатную линейчатую поверхность произвольной.

Вводя соответствующие обозначения, получим следующие деривационные формулы полуканонического репера конгруэнции:

$$dB_1 = v_1^2 B_1 + v_1^2 B_2 + p_1 v_3^1 B_3, \tag{5.1}$$
$$dB_2 = (p_2 v_3^1 + p_3 v_1^2) B_1 + (p_4 v_3^1 + p_5 v_1^2) B_2 + (p_6 v_3^1 + p_7 v_1^2) B_3,$$
$$dB_3 = v_3^1 B_1 + (a v_3^1 + v_1^2) B_2 + (p_8 v_3^1 + p_9 v_1^2) B_3,$$

где

$$Dv_3^1 = (1 - p_2 + a p_3 - p_9)\,[v_3^1, v_1^2],$$
$$Dv_1^2 = (p_1 - p_4)\,[v_3^1, v_1^2].$$

Условия интегрируемости включают в себя одно конечное соотношение

$$p_1 + p_2 - p_4 = 0 \tag{5.2}$$

и шесть квадратичных

$$[dp_1, v_3^1] = \{(p_1 p_9 - p_1 - p_6) - p_1(1 - p_2 + a p_3 - p_9)\}\,[v_3^1, v_1^2],$$

$$[dp_2, v_3^1] + [dp_3, v_1^2] = \{p_2 + p_3 p_4 - p_2 p_5 - p_7 - p_2(1 - p_2 + a p_3 - p_9) - p_3(p_1 - p_4)\}\,[v_3^1, v_1^2],$$
$$[dp_4, v_3^1] + [dp_5, v_1^2] = \{p_2 + p_4 - a p_5 - p_4(1 - p_2 + a p_3 - p_9) + p_2 p_5\}\,[v_3^1, v_1^2],$$
$$[dp_6, v_3^1] + [dp_7, v_1^2] = \{p_7(p_4 - p_8) + p_6(p_9 - p_5) - p_1 p_3 - p_6(1 - p_2 + a p_3 - p_9) + p_2 p_7\}\,[v_3^1, v_1^2],$$
$$[da, v_3^1] = \{1 + a p_5 - p_4 - a p_9 + p_8 - a(1 - p_2 + a p_3 - p_9) + p_2\}\,[v_3^1, v_1^2],$$
$$[dp_8, v_3^1] + [dp_9, v_1^2] = \{a p_7 - p_6 - p_8(1 - p_2 + a p_3 - p_9) + p_2 p_9\}\,[v_3^1, v_1^2].$$

Произвол существования решения системы (5.1) составляет три функции двух аргументов.

Торсы теперь имеют уравнения

$$v_1^2\,[(a - 1)\,v_3^1 + v_1^2] = 0.$$

Фокусы находятся в точках

$$F_1 = B_1,$$
$$F_2 = B_1 + (a - 1) B_3,$$

а плоскости

$$f_1 = (R - B_1, B_3, B_1 + B_2) = 0,$$
$$f_2 = (R - B_1, B_3, B_1 + a B_2) = 0$$

являются фокальными.

Вектор B_3 нормирован так, что:

$$B_3 = B_1 - R_{ц},$$

где $R_{ц}$ — радиус-вектор центральной точки произвольной линейчатой поверхности конгруэнции $v_3^1 = 0$, а точка B_2 является точкой пересечения следующих плоскостей:

$$f_1 = 0,$$
$$(R, B_2, B_3) = 0,$$
$$(R, B_1, B_2) = 0,$$

где вторая и третья плоскости проходят через центр пространства параллельно, соответственно, асимптотической плоскости линейчатой поверхности $v_3^1 = 0$ и касательной к линии $v_3^1 = 0$ на поверхности B_1. Таким образом, репер геометрически охарактеризован.

Для того, чтобы получить деривационные формулы репера произвольной линейчатой поверхности, принадлежащей конгруэнции, достаточно положить в формулах (5.1) $v_3^1 = 0$. Получим:

$$\frac{dB_1}{ds} = B_1 + B_2, \qquad \frac{dB_2}{ds} = \alpha_1 B_1 + \alpha_2 B_2 + \alpha_3 B_3, \tag{5.3}$$
$$\frac{dB_3}{ds} = B_2 + \alpha_4 B_3,$$

где: $(v_1^2)_{v_3^1 = 0} = ds$, $(p_3)_{v_3^1 = 0} = \alpha_1$, $(p_5)_{v_3^1 = 0} = \alpha_2$, $(p_7)_{v_3^1 = 0} = \alpha_3$, $(p_9)_{v_3^1 = 0} = \alpha_4$.

Покажем, что в качестве ds в формулах (5.3) взят элемент центроаффинной длины дуги линейчатой поверхности [2]. Майер следующим образом вводит его:

$$ds^* = \frac{(l, dl, dy)}{(l, dl, y)},$$

где l — вектор, параллельный лучу линейчатой поверхности,
y — радиус-вектор ее центральной точки.
Применяя (5.3), найдем: $ds^* = ds$. Как нетрудно видеть, из рассмотрения исключены торсы и линейчатые поверхности с несобственной центральной линией.

§ 6. Вычислительные формулы для инвариантов линейчатой поверхности, принадлежащей данной конгруэнции

Произведем нормирование канонического репера конгруэнции так же, как и в § 2. Используя геометрическую характеристику векторов A_1, A_2, A_3 канонического репера конгруэнции, найдем их выражения через векторы полуканонического репера:

$$A_1 = B_1,$$

$$A_3 = (1 - a) B_3,$$

$$A_2 = \frac{a}{a-1}\left(B_1 + B_2 - \frac{p_1}{1-a} B_3\right).$$

Из условия $dB_1 = dA_1$ получим:

$$\frac{a}{a-1}\omega_1^2 = v_1^2, \qquad \frac{[(a-1)v_3^1 + v_1^2]\, p_1}{(a-1)^2} = \omega_3^1 m_1.$$

Полагая, $v_3^1 = 0$ и $(v_1^2)_{v_3^1 = 0} = ds$, найдем, что векторы репера произвольной линейчатой поверхности, принадлежащей данной конгруэнции, следующим образом выражаются через векторы канонического репера конгруэнции:

$$B_1 = A_1, \qquad B_3 = \left(\frac{ds}{\omega_1^2} - 1\right) A_3,$$

$$B_2 = -A_1 + \frac{\omega_1^2}{ds} A_2 + \frac{\omega_3^1 m_1}{ds} A_3. \tag{6.1}$$

Из формул (5.3) находим:

$$\alpha_1 = \frac{\left(\frac{dB_2}{ds}, B_2, B_3\right)}{(B_1, B_2, B_3)}, \qquad \alpha_2 = \frac{\left(\frac{dB_2}{ds}, B_1, B_3\right)}{(B_1, B_2, B_3)}$$

и т. д.

Используя (5.3) и (1.8), получим:

$$\alpha_2 = -\frac{\omega_1^2}{ds} + \frac{d}{ds}\left(\frac{\omega_1^2}{ds}\right) + \frac{\omega_1^2 (m\,\omega_3^1 + m\,\omega_1^2) + m\,\omega_3^1(\omega_3^1 + \omega_3^2)}{ds},$$

$$\alpha_1 = -\left\{\frac{m_2(\omega_1^2)^2 + m_1(\omega_3^1)^2}{ds^2}\right\} \cdot \frac{\omega_1^2}{ds} + \alpha_2 \tag{6.2}$$

$$\alpha_3 = \frac{\alpha_2 m_1 \omega_3^1}{ds} - \left\{-\frac{m_1\omega_3^1}{ds} + \frac{\omega_1^2(m_5\omega_3^1 + m_6\omega_1^2)}{ds^2} + \frac{\omega_3^1 m_1 (m_7\omega_3^1 + m_8\omega_1^2)}{ds^2} + \right.$$

$$\left. + \frac{d}{ds}\left(\frac{m_1\omega_3^1}{ds}\right)\right\}\frac{\omega_1^2}{ds};$$

$$\alpha_4 = \left\{\frac{m_1(ds - \omega_1^2)(\omega_3^1 + \omega_1^2)}{\omega_1^2 ds^2} - \frac{\omega_1^2}{ds}\left[\frac{d}{ds}\left(\frac{ds}{\omega_1^2}\right) + \right.\right.$$

$$\left.\left. + \frac{(ds - \omega_1^2)(m_7\omega_3^1 + m_8\omega_1^2)}{\omega_1^2 ds}\right]\right\}\frac{\omega_1^2}{ds - \omega_1^2}.$$

Как видим, все инварианты — второго порядка. Наложение одной связи на α_i выделяет, вообще говоря, некоторые линейчатые поверхности, а наложение двух налагает ограничение уже на саму конгруэнцию.

§ 7. О некоторых линейчатых поверхностях, принадлежащих конгруэнции

Сформулируем задачу: дана конгруэнция и в ней выбрана некоторая произвольная линейчатая поверхность; найти конгруэнцию, лучи которой параллельны соответствующим лучам данной, а выбранной линейчатой поверхности данной конгруэнции соответствует линейчатая поверхность с несобственной центральной линией искомой конгруэнции.

Чтобы иметь возможность применить полуканонический репер, ограничимся случаем, когда выбранная поверхность не торс, а ее центральная линия — собственная (исключенные здесь случаи рассмотрены в § 2). Искомая конгруэнция находится среди конгруэнций вида:

$$R = \lambda_1 B_1 + \lambda_2 B_2 + v B_3. \tag{7.1}$$

Центральная линия произвольной линейчатой поверхности конгруэнции (7.1) имеет следующее уравнение:

$$R = \lambda_1 B_1 + \lambda_2 B_2 + \frac{\lambda_1\{\lambda_1 v_1^2 + d\lambda_2 + \lambda_2 v_2^2\} - \lambda_2\{d\lambda_1 + \lambda_1 v_1^2 + \lambda_2 v_2^1\}}{\lambda_2 v_3^1 - \lambda_1(a v_3^1 + v_1^2)} B_3, \tag{7.2}$$

где надо положить $v_1^2 = \mu v_3^1$.

Поскольку в полуканоническом репере $v_3^1 = 0$ — произвольная линейчатая поверхность, то ею, в частности, может быть и выбранная, но чтобы этой поверхности соответствовала линейчатая поверхность с несобственной центральной линией конгруэнции (7.1), необходимо, чтобы было $\lambda_1 = 0$. Следовательно, конгруэнции

$$R = \lambda B_2 + v B_3 \tag{7.3}$$

являются искомыми, где направление B_2, разумеется, зависит от выбора линейчатой поверхности в данной конгруэнции. Этим самым дана новая геометрическая характеристика направления вектора B_2. Формула (7.2) теперь принимает вид:

$$R = \lambda B_2 - \frac{\lambda(p_2 v_3^1 + p_3 v_1^2)}{v_3^1} B_3. \tag{7.2'}$$

Теорема 18. Тогда и только тогда, когда выбранная линейчатая поверхность является цилиндроидом, у конгруэнции (7.3) одна фокальная поверхность вырождается в конус с вершиной в центре пространства.

Доказательство. Из формул (5.3) находим, что при $\alpha_1 = 0$ линейчатая поверхность $v_3^1 = 0$ вырождается в цилиндроид, но $\alpha_1 = (p_3)_{v_3^1 = 0}$. Следовательно, при $p_3 = 0$ координатная линейчатая поверхность полуканонического репера конгруэнции будет цилиндроидом. Из формулы (7.2) и теоремы 1 следует утверждение теоремы.

Рассмотрим конгруэнцию, образованную касательными к линиям пересечения фокальной поверхности B_1 линейчатыми поверхностями $v_3^1 = 0$, принадлежащими данной конгруэнции:

$$R = B_1 + v(B_1 + B_2). \tag{7.4}$$

Торсы имеют уравнения:

$$p_1 [(p_2 - p_4) v_3^1 - (p_3 - p_5) v_1^2] v_3^1 = 0.$$

Фокусы находятся в точках:

$$F_1 = B_1, \qquad F_2 = B_1 + \frac{p_1 (p_3 - p_5)(B_1 + B_2)}{(p_1 + p_6)(p_5 - p_3) + (p_2 - p_4) p_7}. \tag{7.5}$$

Центральная линия произвольной линейчатой поверхности этой конгруэнции имеет уравнение:

$$R = B_1 - \frac{p_1}{(p_1 + p_6) + \lambda p_7}(B_1 + B_2). \tag{7.6}$$

Теорема 19. На фокальной поверхности имеется ∞^1 семейств таких линий, что одна фокальная поверхность конгруэнций, образованных касательными к линиям семейства, вырождается в конус с вершиной в центре пространства. Вдоль линейчатых поверхностей, секущих фокальную поверхность, по этим линиям и только вдоль них линейчатая поверхность $R = B_1 + vB_2$ вырождается в плоскость, проходящую через центр пространства (легко видеть, что в этом случае у конгруэнции $R = B_1 + vB_2$ одна фокальная поверхность вырождается в конус с вершиной в центре пространства).

Доказательство. Из (7.6) видно, что для того, чтобы у конгруэнции (7.4) вырождалась одна фокальная поверхность в конус с вершиной в центре пространства, необходимым и достаточным является условие $p_7 = 0$, но в этом случае, как это видно из (5.3), координатная линейчатая поверхность полуканонического репера принадлежит классу $\alpha_3 = 0$. Получилось дифференциальное уравнение второго порядка. Вторая часть теоремы доказывается простой выкладкой с применением формул (5.3).

Зная геометрическую характеристику направления вектора B_2, можно точке B_2 дать еще одну геометрическую характеристику.

Теорема 20. Точка B_2 является центральной точкой той линейчатой поверхности конгруэнции (7.6), которая соответствует линейчатой поверхности с несобственной центральной линией конгруэнции

$$R = B_1 + vB_2.$$

Поскольку линейчатая поверхность с несобственной центральной линией последней конгруэнции имеет уравнение $p_6 v_3^1 + p_7 v_1^2 = 0$, то доказательство теоремы следует из формулы (7.6).

Теорема 21. Если через каждый луч конгруэнции проходит такая линейчатая поверхность, что вдоль нее $\frac{dB_1}{ds} \parallel \frac{dB_2}{ds}$, то у этой конгруэнции фокальная поверхность B_1 вырождается в линейчатую поверхность.

Доказательство. Для того, чтобы было $\frac{dB_1}{ds} \parallel \frac{dB_2}{ds}$, необходимо и достаточно выполнения условия $\alpha_1 = \alpha_2$, $\alpha_3 = 0$ (см. (5.3)). При $\alpha_1 = \alpha_2$, как видно из (6.2) и (1.13), получаем те линейчатые поверхности, которые секут фокальную поверхность по асимптотическим линиям, а при $\alpha_1 = \alpha_2$, $\alpha_3 = 0$ имеем $d^2B_1 \parallel dB_1$, т. е. эта асимптотическая является прямой, следовательно, фокальная поверхность — линейчатая.

Используя деривационные формулы (5.3), находим, что при $p_3 = p_5$ полуканонический репер конгруэнции превращается в канонический, у которого координатными линейчатыми поверхностями являются один из торсов и одна из линейчатых поверхностей, соответствующих асимптотическим линиям фокальной поверхности, а при $p_3 = p_5$, $p_7 = 0$ имеем канонический репер конгруэнции, у которой одна фокальная поверхность — линейчатая.

ЛИТЕРАТУРА

1. Mayer O. Congruentele de drepte în geometria centroaffine. Acad. RPR. Fill. Jasi Stud, cerc. Sti., I,1. 1950, 67—93.

2. Mayer O. Geometrie centro—affine differentielle des surfaces. Ann. Sci de l' Univ. de Jassy, .I, 1—4, 1935, 1—77.

3. Бахвалов С. В. Замечания к методу подвижного трехгранника. Математический сборник, 7 (49], № 22, 1940, 321—325.

4. G. Sannia, Nuova esposizione della geometria infinitesimale delle congruenze rettilinee Ann di Matem (III), 15 1908, 143—185.

5. Щербаков Р. Н. Проективная теория репера линейчатой поверхности, принадлежащей данной конгруэнции. Математический сборник, 46 [88]:2, 1958, стр. 158—194.

ТРУДЫ ТОМСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА
имени В. В. КУЙБЫШЕВА

Том 168 Серия механико-математическая

Н. М. ОНИЩУК

ЗАДАЧА БИАНКИ ДЛЯ ПАРЫ, СОСТОЯЩЕЙ ИЗ КОНГРУЭНЦИИ И ПОВЕРХНОСТИ, В ЭКВИАФФИННОЙ ГЕОМЕТРИИ

Решение задачи Бианки в метрической теории поверхностей приведено в монографии [1]. Р. Н. Щербаковым рассмотрен аналог этой задачи в аффинной теории поверхностей (см. [2]).

Парой M назовем пару, состоящую из конгруэнции (K) и произвольной секущей ее поверхности (P) (см. [3], [4]).

В данной работе решается следующая задача. Найти пару M, для которой в каждой касательной плоскости поверхности (P) можно выбрать прямую T так, чтобы построенная таким образом конгруэнция (T) и конгруэнция (K) образовывали расслояемую в обе стороны пару.

Для решения поставленной задачи используется полуканонический репер, построенный для пары M в работе [4]. Репер этот состоит из точки P, вектора ε_3, направленного по лучу конгруэнции (K), векторов ε_1 и ε_2, направленных по линии пересечения асимптотических плоскостей произвольных сопряженных линейчатых поверхностей конгруэнции (K) с касательной плоскостью поверхности (P) в точке P. Нормировка вектора ε_3 характеризуется формулой $2\varepsilon_3 = F_1 + F_2$ (F_1 и F_2 — радиус-векторы фокусов конгруэнции (K)). Векторы ε_1 и ε_2 нормированы так, что $\varepsilon_1 + \varepsilon_2$ и $\varepsilon_1 - \varepsilon_2$ направлены по касательным к линиям пересечения торсов конгруэнции (K) с поверхностью (P).

Деривационные формулы полуканонического репера имеют вид:

$$
\begin{aligned}
dP &= (\alpha v_3^1 + v_3^2)\,\varepsilon_1 + (v_3^1 + \alpha v_3^2)\,\varepsilon_2,\\
d\varepsilon_1 &= (C_2^* v_3^1 + E_2^* v_3^2)\,\varepsilon_1 + (G_2^* v_3^1 + N_1^* v_3^2)\,\varepsilon_2 +\\
&+ \{(A^* - \alpha A_2^*)\,v_3^1 + (A_1^* - \alpha A^*)\,v_3^2\}\,\varepsilon_3,\\
d\varepsilon_2 &= (N_2^* v_3^1 + G_1^* v_3^2)\,\varepsilon_1 + (E_1^* v_3^1 + C_1^* v_3^2)\,\varepsilon_2 +\\
&+ \{(A_2^* - \alpha A^*)\,v_3^1 + (A^* - \alpha A_1^*)\,v_3^2\}\,\varepsilon_3,\\
d\varepsilon_3 &= v_3^1\,\varepsilon_1 + v_3^2\,\varepsilon_2 - \{(C_2^* + E_1^*)\,v_3^1 + (C_1^* + E_2^*)\,v_3^2\}\,\varepsilon_3,
\end{aligned}
\tag{1}
$$

где

$$
\begin{aligned}
d\alpha &= \{\alpha\,(C_2^* + E_1^*) + N_2^* - G_2^* - 2E_2^*\}\,v_3^1 +\\
&+ \{\alpha\,(E_2^* + C_1^*) + N_1^* - G_1^* - 2E_1^*\}\,v_3^2.
\end{aligned}
\tag{2}
$$

Условиями совместности системы (1) являются уравнения:

$$
\begin{aligned}
&[d\,(A^* - \alpha A_2^*),\ v_3^1] + [d\,(A_1^* - \alpha A^*),\ v_3^2] = \{(A^* - \alpha A_2^*)(-4E_2^* + N_2^* -\\
&- 2C_1^*) - (A_1^* - \alpha A^*)(N_1^* - 3E_1^* - 3C_2^*) + G_2^*(A^* - \alpha A_1^*) -\\
&- N_1^*(A_2^* - \alpha A^*)\}\,[v_3^1,\ v_3^2],\\
&[d\,(A_2^* - \alpha A^*),\ v_3^1] + [d\,(A^* - \alpha A_1^*),\ v_3^2] = \{(\alpha A^* - A_2^*)(3E_2^* -\\
&- N_2^* - 3C_1^*) - (A^* - \alpha A_1^*)(N_1^* - 4E_1^* - 2C_2^*) + N_2^*(A_1^* - \alpha A^*) -\\
&- G_1^*(A^* - \alpha A_2^*)\}\,[v_3^1,\ v_3^2],\\
&[dC_2^*,\ v_3^1] + [dE_2^*,\ v_3^2] = \{-C_2^*(E_2^* - N_2^* + C_1^*) - E_2^*(N_1^* -\\
&- 2E_1^*) + G_1^* G_2^* - N_1^* N_2^* - A_1^* - \alpha A^*\}\,[v_3^1,\ v_3^2],\\
&[dG_2^*,\ v_3^1] + [dN_1^*,\ v_3^2] = \{G_2^*(N_2^* - 3E_2^*) - N_1^*(N_1^* -\\
&- E_1^* - 2C_2^*) + A^* - \alpha A_2^*\}\,[v_3^1,\ v_3^2],\\
&[dN_2^*,\ v_3^1] + [dG_1^*,\ v_3^2] = \{N_2^*(N_2^* - E_2^* - 2C_1^*) - G_1^*(N_1^* -\\
&- 3E_1^*) + \alpha A_1^* - A^*\}\,[v_3^1,\ v_3^2],\\
&[dE_2^*,\ v_3^1] + [dC_1^*,\ v_3^2] = \{E_1^*(N_2^* - 2E_2^*) - C_1^*(N_1^* - E_1^* -\\
&- C_2^*) + N_1^* N_2^* - G_1^* G_2^* + A_2^* - \alpha A^*\}\,[v_3^1,\ v_3^2],\\
&[dG_2^* + dE_2^*,\ v_3^1] + [dG_1^* + dE_1^*,\ v_3^2] = \{G_2^*(N_2^* - 3E_2^* -\\
&- C_1^*) + G_1^*(C_2^* + 3E_1^* - N_1^*) - E_2^*(2C_1^* + 3E_2^* - 2N_2^*) +\\
&+ E_1^*(2C_2^* + 3E_1^* - 2N_1^*)\}\,[v_3^1,\ v_3^2].
\end{aligned}
\tag{3}
$$

Так как в полуканоническом репере координатная сеть не фиксирована, то направления векторов ε_1 или ε_2 можно выбирать как угодно в касательной плоскости поверхности (P). Выберем направление вектора ε_2 параллельным прямой T, и пусть t — координата точки пересечения прямой T с прямой, проходящей через точку P в направлении вектора ε_1. Чтобы найти пару M, удовлетворяющую условию задачи, нужно определить функции A^*, A_i^*, C_i^*, E_i^*, G_i^*, N_i^*, t $(i = 1,2)$ из уравнений (3) и условия расслояемости конгруэнций (T) и (K).

Пусть уравнения прямых T и K имеют, соответственно, вид:

$$
r = P + t\,\varepsilon_1 + y\,\varepsilon_2 \tag{4}
$$

и

$$
r = P + z\,\varepsilon_3. \tag{5}
$$

Потребовав, чтобы выполнялось условие расслояемости конгруэнций (K) и (T) в обе стороны, получим следующие уравнения:

$$
\begin{aligned}
&(dr,\ \varepsilon_3,\ P - \{P + t\varepsilon_1 + y\,\varepsilon_2\}) = 0,\\
&(dr,\ \varepsilon_2,\ P + z\,\varepsilon_3 - \{P + t\,\varepsilon_1\}) = 0,
\end{aligned}
\tag{6}
$$

которые должны быть вполне-интегрируемы. После элементарных преобразований система (6) примет вид:

$$
\begin{aligned}
t\,dy &= y^2\,(N_2^* v_3^1 + G_1^* v_3^2) + y\,\{\alpha v_3^1 + v_3^2 + dt +\\
&+ t\,(C_2^* v_3^1 + E_2^* v_3^2 - E_1^* v_3^1 - C_1^* v_3^2)\} - t\,\{v_3^1 + \alpha v_3^2 + t\,(G_2^* v_3^1 + N_2^* v_3^2)\},\\
t\,dz &= -z^2 v_3^1 - z\,\{\alpha v_3^1 + v_3^2 - t\,(C_2^* + E_1^*)\,v_3^1 - t\,(C_1^* + E_2^*)\,v_3^2\}.
\end{aligned}
\tag{7}
$$

Дифференцируя эту систему внешним образом и исключая dy и dz, получаем следующие квадратичные уравнения:

$$[dt,\ y^2(N^*_2 v^1_3 + G^*_1 v^2_3) + y\{\alpha v^1_3 + v^2_3 + t(C^*_2 v^1_3 + E^*_2 v^2_3 - E^*_1 v^1_3 - C^*_1 v^2_3)\} -$$
$$- t\{v^1_3 + \alpha v^2_3 + t(G^*_2 v^1_3 + N^*_1 v^2_3)\}] = 2y[y\{\alpha v^1_3 + v^2_3 + dt + t(C^*_2 v^1_3 +$$
$$+ E^*_2 v^2_3 - E^*_1 v^1_3 - C^*_1 v^2_3)\} - t\{v^1_3 + \alpha v^2_3 + t(G^*_2 v^1_3 + N^*_1 v^2_3)\},$$
$$N^*_2 v^1_3 + G^*_1 v^2_3] + ty^2\{[dN^*_2,\ v^1_3] + [dG^*_1,\ v^2_3] + N^*_2 Dv^1_3 + G^*_1 Dv^2_3\} +$$
$$+ [y^2(N^*_2 v^1_3 + G^*_1 v^2_3) - t\{v^1_3 + \alpha v^2_3 + t(G^*_2 v^1_3 + N^*_1 v^2_3)\},$$
$$\alpha v^1_3 + v^2_3 + dt + t(C^*_2 v^1_3 + E^*_2 v^2_3 - E^*_1 v^1_3 - C^*_1 v^2_3)] + ty\{[d\alpha,\ v^1_3] +$$
$$\alpha Dv^1_3 + Dv^2_3 + [dt,\ C^*_2 v^1_3 + E^*_2 v^2_3 - E^*_1 v^1_3 - C^*_1 v^2_3] + t[d(C^*_2 - E^*_1),$$
$$v^1_3] + t[d(E^*_2 - C^*_1),\ v^2_3] + t(C^*_2 - E^*_1)Dv^1_3 + t(E^*_2 - C^*_1)Dv^2_3\} - [tdt,$$
$$v^1_3 + \alpha v^2_3 + 2t(G^*_2 v^1_3 + N^*_1 v^2_3)] - t^2\{Dv^1_3 + [d\alpha,\ v^2_3] + \alpha Dv^2_3 +$$
$$+ t[dG^*_2,\ v^1_3] + t[dN^*_1,\ v^2_3] + tG^*_2 Dv^1_3 + tN^*_1 Dv^2_3\},$$

$$[dt,\ -z^2 v^1_3 - z(\alpha v^1_3 + v^2_3)] = z[zv^2_3 - 2tz(C^*_1 + E^*_2)v^2_3, v^1_3] -$$
$$- tz^2 Dv^1_3 - tz[d\alpha,\ v^1_3] - tz\alpha Dv^1_3 - tzDv^2_3 - z^2(C^*_1 + E^*_2)[v^1_3,\ v^2_3] +$$
$$+ tz\{[d(C^*_2 + E^*_1),\ v^1_3] + [d(C^*_1 + E^*_2),\ v^2_3]\} + tz(C^*_2 + E^*_1)Dv^1_3 +$$
$$+ tz(C^*_1 + E^*_2)Dv^2_3.$$

Эти уравнения должны быть алгебраическими следствиями системы (7), следовательно, все коэффициенты при степенях y и z должны исчезать. В результате этого при использовании уравнений системы (3) получаем соотношения:

$$N^*_2 + tA^* = G^*_1 + tA^*_1 = 0,$$
$$[dt,\ v^1_3] = \{1 + t(E^*_2 - N^*_2)\}[v^1_3,\ v^2_3], \tag{8}$$
$$[dt,\ v^2_3] = \{-\alpha - tC^*_2 - t^2 A^*_2\}[v^1_3,\ v^2_3].$$

Отсюда имеем

$$dt = -(\alpha + tC^*_2 + t^2 A^*_2)v^1_3 - (1 + tE^*_2 + t^2 A^*)v^2_3. \tag{9}$$

Внешнее дифференцирование соотношения (9) дает уравнение

$$[dA^*_2,\ v^1_3] + [dA^*,\ v^2_3] = \Big\{A^*_1 G^*_2 + \frac{2}{t}(A^*_1 - A^*_2) +$$
$$+ 2A^*(C^*_2 + E^*_1 - N^*_1) - A^*_2(3E^*_2 + C^*_1 + tA^*)\Big\}[v^1_3,\ v^2_3]. \tag{10}$$

Из соотношений (8) возникают четыре случая: 1) $A^*_1 \neq 0$ и $A^* \neq 0$, 2) $A^*_1 = 0,\ A^* \neq 0$, 3) $A^* = 0,\ A^*_1 \neq 0$, 4) $A^* = 0,\ A^*_1 = 0$.

1) Предположим, что A^*_1 и A^* не обращаются в нуль. Тогда из равенств (8) следует, что G^*_1 и N^*_2 также не равны нулю.

Имеем:

$$t = -\frac{G^*_1}{A^*_1}, \tag{11}$$
$$G^*_1 A^* - A^*_1 N^*_2 = 0. \tag{12}$$

Равенство (12) накладывает ограничение на выбор координатной сети подмногообразий пары M. Действительно, формы v^1_3 и v^2_3 полуканонического репера выражаются через инвариантные формы канонического репера следующим образом:

$$v^1_3 = \frac{1+k^2}{2k}\omega^1_3 + \frac{1-k^2}{2k}\omega^2_3,$$
$$v^2_3 = \frac{1-k^2}{2k}\omega^1_3 + \frac{1+k^2}{2k}\omega^2_3$$

(см. [4]), т. е. выбор сети $v^1_3 v^2_3 = 0$ зависит от выбора функции k.

Инвариант полуканонического репера $G^*_1 A^* - N^*_2 A^*_1$ выражается через инварианты пары M следующим образом:

$$G^*_1 A^* - N^*_2 A^*_1 = \frac{1-k^4}{4k^2}\Big\{\frac{1+k^2}{2k}[A_1(E_1 - C_2) + A_2 G_1] +$$
$$+ \frac{1-k^2}{2k}[A_2(C_1 - E_2) - A_1 G_2]\Big\} + \frac{(1+k^2)^3}{64k^6}A_1 N_2 - \tag{13}$$
$$- \frac{(1-k^2)^3}{64k^6}A_2 N_1 + \frac{1+k^2}{2k^2}k_1 A_1 + \frac{1-k^2}{2k^2}k_2 A_2,$$

где k_1 и k_2 определяются равенством $dk = k_1\omega^1_3 + k_2\omega^2_3$. Отсюда видим, что обращение в нуль выражения $G^*_1 A^* - N^*_2 A^*_1$ накладывает ограничение на выбор координатной сети подмногообразий пары M.

Выясним геометрический смысл этого ограничения. Из формул (1) усматриваем, что линия

$$N^*_2 v^1_3 + G^*_1 v^2_3 = 0 \tag{14}$$

поверхности $\mathbf{r} = \mathbf{e}_3$ характеризуется тем, что касательная к ней лежит в плоскости $\{\mathbf{e}_2,\ \mathbf{e}_3\}$. С другой стороны, зная уравнение

$$A^*_2(v^1_3)^2 + 2A^* v^1_3 v^2_3 + A^*_1(v^2_3)^2 = 0 \tag{15}$$

асимптотических линий поверхности (P), заключаем, что линии $v^1_3 = 0$ и

$$A^* v^1_3 + A^*_1 v^2_3 = 0 \tag{16}$$

этой поверхности сопряжены. При условии (12) линии, определяемые уравнениями (14) и (16), совпадают.

Однако условие (12) еще не фиксирует сети, так как в соотношение (13) входят частные производные функции k, и, следовательно, произвол выбора сети остается функциональным.

Подставляя значения N^*_2 и G^*_1 из (8) в пятое уравнение системы (3), получаем:

$$[dA^*,\ v^1_3] + [dA^*_1,\ v^2_3] = \{A^*_1(C^*_2 + tA^*_2 - N^*_1 +$$
$$+ 3E^*_1) - 2A^*(E^*_2 + tA^* + C^*_1)\}[v^1_3,\ v^2_3]. \tag{17}$$

Тогда первые два уравнения (3) дадут конечные соотношения:

$$\begin{aligned} &\alpha A^*_1 (A^*_2 - A^*_1) + G^*_1 \{A^*_1 C^*_2 - A^*_2 (N^*_1 - E^*_1 - G^*_1) - 2A^* E^*_2\} = 0, \\ &A^*_1 (A^*_2 - A^*_1) + N^*_2 \{A^*_2 C^*_1 - A^*_1 (N^*_2 - E^*_2 - G^*_2) - 2A^* E^*_1\} = 0. \end{aligned} \tag{18}$$

При значении $t = -\dfrac{G^*_1}{A^*_1}$ уравнения (9), (10), (17) и оставшиеся уравнения системы (3) примут вид:

$$\begin{aligned} dG^*_1 = \frac{G^*_1}{A^*_1} dA^*_1 + \left(\alpha A^*_1 - G^*_1 C^*_2 + \frac{(G^*_1)^2 A^*_2}{A^*_1}\right) v^1_3 + \\ + \left(A^*_1 - G^*_1 E^*_2 + \frac{(G^*_1)^2 A^*}{A^*_1}\right) v^2_3, \end{aligned} \tag{19}$$

$$\begin{aligned} &[dA^*_2, v^1_3] + [dA^*, v^2_3] = \Theta_1 [v^1_3, v^2_3], \\ &[dA^*, v^1_3] + [dA^*_1, v^2_3] = \Theta_2 [v^1_3, v^2_3], \\ &[dC^*_2, v^1_3] + [dE^*_2, v^2_3] = \Theta_3 [v^1_3, v^2_3], \\ &[G^*_1 (A^*_2)^2 dE^*_2 - 2G^*_1 A^*_2 E^*_2 dA^*_2, v^1_3] + [(\alpha A^*_1 - \\ &- G^*_1 C^*_2) A^*_2 dA^*_1 + (-\alpha (A^*_1)^2 + 2A^* G^*_1 E^*_2 + A^*_1 G^*_1 C^*_2) dA^*_2 + \\ &+ 2A^* G^*_1 A^*_2 dE^*_2 - G^*_1 A^*_1 A^*_2 dC^*_2, v^2_3] = \Theta_4 [v^1_3, v^2_3], \\ &[dE^*_1, v^1_3] + [dC^*_1, v^2_3] = \Theta_5 [v^1_3, v^2_3], \\ &\Big[(A^*_1 + C^*_1 G^*_1) dA^*_2 + \left(-A^*_2 + 2\frac{A^* G^*_1 E^*_1}{A^*_1} - \frac{G^*_1 A^*_2 C^*_1}{A^*_1}\right) dA^*_1 + \\ &+ G^*_1 (A^*_2 dC^*_1 - 2A^* dE^*_1), v^1_3] + [2E^*_1 G^*_1 dA^*_1 - A^*_1 G^*_1 dE^*_1, v^2_3], = \Theta_6 [v^1_3, v^2_3], \end{aligned} \tag{20}$$

где $\Theta_j (j = 1,2,\ldots,6)$ — некоторые функции инвариантов полуканонического репера.

Таким образом, пару M, допускающую решение задачи Бианки, и выбор сети в ней определяют функции A^*, A^*_i, C^*_i, E^*_i, G^*_i, N^*_i, удовлетворяющие трем конечным соотношениям (12), (18), уравнению Пфаффа (19) и шести независимым квадратичным уравнениям (20). Отсюда согласно теореме Бахвалова [5] заключаем, что такая пара M существует и определяется с произволом одной функции двух аргументов.

Точка $\left(-\dfrac{G^*_1}{A^*}, 0,0\right)$ пересечения прямых T и $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{P} + v\boldsymbol{\varepsilon}_1$ в рассмотренной здесь паре M определяется геометрически следующим образом. Асимптотическая плоскость линейчатой поверхности $v^1_3 = 0$ конгруэнции прямых $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{P} + v\boldsymbol{\varepsilon}_2$ имеет уравнение

$$G^*_1 x_3 - (A^* - \alpha A^*_1) x_1 = 0. \tag{21}$$

Точка $B\left(0,0, -\alpha + \dfrac{A^*}{A^*_1}\right)$ характеризуется как точка прикосновения плоскости $\{\boldsymbol{\varepsilon}_2, \boldsymbol{\varepsilon}_3\}$ к линейчатой поверхности $A^* v^1_3 + A^*_1 v^2_3 = 0$ конгруэнции (K). Прямая

$$\left.\begin{aligned} x_2 &= 0, \\ x_3 &= -\alpha + \frac{A^*}{A^*_1}, \end{aligned}\right\}$$

проходящая через точку B в направлении вектора $\boldsymbol{\varepsilon}_1$, пересекает плоскость (21) в точке $\left(\dfrac{G^*_1}{A^*_1}, 0, -\alpha + \dfrac{A^*}{A^*_1}\right)$. Отсюда заключаем, что проекция точки пересечения прямой, проходящей через точку B в направлении вектора $\boldsymbol{\varepsilon}_1$, с асимптотической плоскостью линейчатой поверхности $v^1_3 = 0$ конгруэнции прямых $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{P} + v\boldsymbol{\varepsilon}_2$ на касательную плоскость поверхности (P) есть точка, симметричная относительно начала репера точке пересечения прямой T с прямой $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{P} + v\boldsymbol{\varepsilon}_1$.

Замечание. Для рассмотренной здесь пары M в каждой касательной плоскости поверхности (P) существует ∞^1 прямых T таких, что конгруэнция (T) и конгруэнция (K) образуют расслояемую пару.

2) Рассмотрим случай $A^*_1 = 0$, $A^* \neq 0$. Тогда из равенства (8) имеем: $G^*_1 = 0$, $N^*_2 \neq 0$.

Прежде всего дадим геометрическую характеристику координатной сети подмногообразий, определяемой равенством $A^*_1 = 0$.

Из уравнения (15) видим, что при $A^*_1 = 0$ линия $v^1_3 = 0$ поверхности (P) является асимптотической линией.

Таким образом, в этом случае координатная сеть подмногообразий пары M выбрана так, что линейчатая поверхность $v^1_3 = 0$ конгруэнции (K) пересекает поверхность (P) по асимптотической линии, а линейчатая поверхность $v^2_3 = 0$ конгруэнции (K) сопряжена ей.

Найдем натуральные уравнения класса пар M, допускающих решение задачи Бианки, в получившимся здесь каноническом репере.

Так как в данном случае $t = -\dfrac{N^*_2}{A^*}$, то уравнения (9), (10) принимают вид:

$$\begin{aligned} dN^*_2 = \frac{N^*_2}{A^*} dA^* + \left(\alpha A^* - N^*_2 C^*_2 + \frac{(N^*_2)^2}{A^*} A^*_2\right) v^1_3 + \\ + (A^* - N^*_2 E^*_2 + (N^*_2)^2) v^2_3, \end{aligned} \tag{22}$$

$$\begin{aligned} [dA^*_2, v^1_3] + [dA^*, v^2_3] = \Big\{\frac{2A^* A^*_2}{N^*_2} + 2A^* (C^*_2 - N^*_1 + \\ + E^*_1) - A^*_2 (3E^*_2 + C^*_1 - N^*_2)\Big\} [v^1_3, v^2_3]. \end{aligned} \tag{23}$$

Подставляя $A^*_1 = G^*_1 = 0$ в систему (3) и используя уравнения (22), (23), получаем:

$$\begin{aligned} &\alpha A^* A^*_2 + N^*_2 \{A^*_2 (E^*_1 - N^*_1) - 2A^* E^*_2\} = 0, \\ &A^* A^*_2 + N^*_2 (A^*_2 C^*_1 - 2A^* E^*_1) = 0, \end{aligned} \tag{24}$$

$$[dA^*, v^1_3] = \Theta_1 [v^1_3, v^2_3],$$

$$[dC^*_2, v^1_3] + \frac{1}{2}\left[\left(\frac{\alpha}{N^*_2} + \frac{E^*_1 - N^*_1}{A^*}\right)\left(dA^*_2 - \frac{A^*_2}{A^*} dA^*\right) + \right.$$

$$+\frac{A_2^*}{A^*}(dE_1^* - dN_1^*), v_3^2 \Big] = \Theta_2 [v_3^1, v_3^2],$$

$$[dG_2^*, v_3^1] + [dN_1^*, v_3^2] = \Theta_3 [v_3^1, v_3^2], \tag{25}$$

$$[dE_1^*, v_3^1] + \left[\frac{2}{A_2^*}(E_1^* dA^* + A^* dE_1^*) - \frac{2A^*E_1^*}{(A_2^*)^2} dA_2^*, v_3^2\right] =$$

$$= \Theta_4 [v_3^1, v_3^2],$$

$$\left[dG_2^* + \frac{1}{2}\left(\frac{\alpha}{N_2^*} + \frac{E_1^* - N_1^*}{A^*}\right) dA_2^* + \frac{A_2^*}{2A^*}(dE_1^* - dN_1^*), v_3^1\right] +$$

$$+ [dE_1^*, v_3^2] = \Theta_5 [v_3^1, v_3^2],$$

где $\Theta_j (j = 1,2,\ldots,5)$ — некоторые функции инвариантов пары M.

Пара M в рассматриваемом случае определяется девятью функциями A^*, A_2^*, C_i^*, E_i^*, G_i^*, N_i^*, удовлетворяющими двум конечным соотношениям (24), уравнению Пфаффа (22) и шести независимым квадратичным уравнениям (23), (25). Таким образом, пара M, допускающая решение задачи Бианки, в данном репере имеет натуральные уравнения

$$G_1^* = A^*A_2^* + N_2^*(A_2^*C_1^* - 2A^*E_1^*) = \alpha A^* A_2^* +$$

$$+ N_2^*\{A_2^*(E_1^* - N_2^*) - 2A^*E_2^*\} = 0$$

и определяется с произволом шести функций одного аргумента.

Отметим, что одним из свойств такой пары является то, что линейчатая поверхность $v_3^1 = 0$ конгруэнции (K), пересекающая поверхность (P) по асимптотической линии, является цилиндроидом. Это следует из геометрической характеристики инварианта G_1^* полуканонического репера ($-G_1^*$ является средней аффинной кривизной линейчатой поверхности $v_3^1 = 0$ [4]) и из фиксации линейчатой поверхности $v_3^1 = 0$ в данном случае.

Прямая T параллельна вектору $\mathbf{e}_2$ (т. е. параллельна линии пересечения направляющей плоскости цилиндроида $v_3^1 = 0$ с касательной плоскостью поверхности (P)) и проходит через точку с координатам $\left(-\frac{N_2^*}{A^*}, 0,0\right)$. Определим геометрически эту точку.

Назовем конгруэнцию, описываемую линией пересечения направляющей плоскости цилиндроида $v_3^1 = 0$ с касательной плоскостью поверхности (P), конгруэнцией (K_2).

Точка с координатами $\left(0, -\frac{\alpha}{N_2^*}, 0\right)$ является точкой пересечения касательной плоскости поверхности (P) с прямой, сопряженной касательной к средней линии линейчатой поверхности $v_3^2 = 0$ конгруэнции (K) на этой линейчатой поверхности в центре луча. Плоскость, касающаяся линейчатой поверхности $v_3^1 = 0$ конгруэнции (K_2) в точке $\left(0, -\frac{\alpha}{N_2^*}, 0\right)$, имеет уравнение

$$\alpha A^* x_1 + N_2^* x_3 = 0.$$

Проекция точки пересечения этой плоскости с плоскостями $x_2 = 0$ и $x_3 = \alpha$ ($-\alpha$ — координата центра луча K) на касательную плоскость поверхности (P) является той точкой, через которую проходит луч T конгруэнции (T).

3) Рассмотрим случай $A^* = 0$, $A_1^* \neq 0$. При этом из (8) следует:

$$G_1^* \neq 0,$$

$$N_2^* = 0,$$

$$t = -\frac{G_1^*}{A_1^*}. \tag{26}$$

Уравнения (9), (10) и (3) запишутся в виде:

$$dG_1^* = \frac{G_1^*}{A_1^*} dA_1^* + \left(\alpha A_1^* - G_1^*C_2^* + \frac{(G_1^*)^2 A_2^*}{A_1^*}\right) v_3^1 + (A_1^* - G_1^*E_2^*) v_3^2, \tag{27}$$

$$[dA_2^*, v_3^1] = \left\{A_1^*G_2^* - \frac{2A_1^*}{G_1^*}(A_1^* - A_2^*) - A_2^*(3E_2^* + C_1^*)\right\} [v_3^1, v_3^2], \tag{28}$$

$$\left.\begin{aligned} &A_1^*(A_2^* - A_1^*) + G_1^*\{A_2^*C_1^* + A_1^*(G_2^* + E_2^*)\} = 0, \\ &\alpha A_1^*(A_2^* - A_1^*) + G_1^*\{A_1^*C_2^* + A_2^*(G_1^* + E_1^* - N_1^*)\} = 0, \end{aligned}\right\} \tag{29}$$

$$[dA_1^*, v_3^2] = \{A_1^*(C_2^* - N_1^* + 3E_1^*) - A_2^*G_1^*\} [v_3^1, v_3^2],$$

$$[dC_2^*, v_3^1] + [dE_2^*, v_3^2] = \{-C_2^*(E_2^* + C_1^*) + E_2^*(2E_1^* - N_1^*) +$$

$$+ G_1^*G_2^* - A_1^*\} [v_3^1, v_3^2],$$

$$[dG_2^*, v_3^1] + [dN_1^*, v_3^2] = \{-3G_2^*E_2^* - N_1^*(N_1^* - E_1^* - 2C_2^*) -$$

$$- \alpha A_2^*\} [v_3^1, v_3^2],$$

$$[dE_1^*, v_3^1] + [dC_1^*, v_3^2] = \{-2E_1^*E_2^* + C_1^*(E_1^* + C_1^* - N_1^*) -$$

$$- G_1^*G_2^* + A_2^*\} [v_3^1, v_3^2], \tag{30}$$

$$[dG_2^* + dE_2^*, v_3^1] + [dG_1^* + dE_1^*, v_3^2] = \{-G_2^*(3E_2^* + C_1^*) +$$

$$+ G_1^*(-N_1^* + 3E_1^* + C_2^*) - E_2^*(2C_1^* + 3E_2^*) + E_1^*(3E_1^* -$$

$$- 2N_1^* + 2C_2^*)\} [v_3^1, v_3^2].$$

Таким образом, девять неизвестных функций A_i^*, C_i^*, E_i^*, G_i^*, N_1^* удовлетворяют двум конечным соотношениям (29), одному уравнению Пфаффа (27) и шести независимым квадратичным уравнениям (28), (30). Следовательно, пара M, допускающая решение задачи Бианки в этом случае, также существует и определяется с произволом шести функций одного аргумента.

Фиксирование A^* определяет выбор координатной сети подмногообразий $v_3^1 v_3^2 = 0$. Выбирая значение $A^* = 0$, относим пару M к двояко-сопряженной сети [3] подмногообразий этой пары, что непосредственно усматривается из уравнения (15), т. е. в рассматриваемом случае репер является каноническим, совпадающим с репером, построенным в работе [3].

В этом регере пара M, допускающая решение задачи Бианки имеет натуральные уравнения:

$$
\begin{aligned}
&N_2 = 0,\\
&A_1 (A_2 - A_1) + G_1 \{A_2 C_1 + A_1 (G_2 + E_2)\} = 0,\\
&\alpha A_1 (A_2 - A_1) + G_1 \{A_1 C_2 + A_2 (G_1 + E_1 - N_1)\} = 0.
\end{aligned} \tag{31}
$$

(A_i, C_i, E_i, G_i, N_i — инварианты канонического репера, охарактеризованные геометрически в работе [3]).

Отсюда следует, что рассматриваемый класс пар M входит в класс $N_2 = 0$, характеризуемый тем, что направление касательной в центре луча к средней линии линейчатой поверхности $v_3^2 = 0$ сопряжено направлению вектора $\mathbf{e}_2$ на этой поверхности (см. [3]).

В каждой касательной плоскости поверхности (P) пары M существует единственная прямая T такая, что конгруэнции (T) и (K) образуют расслояемую в обе стороны пару. Геометрически прямую T можно описать следующим образом. Вектор $\mathbf{e}_2$ (вектор, направленный по линии пересечения касательной плоскости поверхности (P) с касательной плоскостью поверхности $v_3^2 = 0$ конгруэнции (K) в центре луча) является направляющим вектором прямой T.

Асимптотическая плоскость линейчатой поверхности $v_3^1 = 0$ конгруэнции прямых $\mathbf{r} = \mathbf{P} + v\mathbf{e}_2$ имеет уравнение

$$
\alpha A_1 x_1 + G_1 x_3 = 0. \tag{32}
$$

Прямая

$$
\left.\begin{aligned} x_2 &= 0\\ x_3 &= -\alpha \end{aligned}\right\},
$$

проходящая через центр луча конгруэнции (K) в направлении вектора $\mathbf{e}_1$ ($\mathbf{e}_1$ направлен по линии пересечения асимптотической плоскости линейчатой поверхности $v_3^2 = 0$ конгруэнции (K) с касательной плоскостью поверхности (P)), пересекает плоскость (32) в точке

$$
B\left(\frac{G_1^*}{A_1^*}, 0, -\alpha\right).
$$

Отсюда видно, что точка пересечения прямой T с прямой $\mathbf{r} = \mathbf{P} + v\mathbf{e}_1$ симметрична проекции точки B на касательную плоскость поверхности (P) относительно точки P.

4) Пусть теперь $A_1^* = A^* = 0$, тогда из (8) следует $G_1^* = N_2^* = 0$, а система уравнений (9), (10) и (3) становится эквивалентной следующей системе:

$$
\begin{aligned}
&C_1^* = \frac{1}{t},\\
&\alpha C_1^* + N_1^* - E_1^* = 0,\\
&dt = -(\alpha + tC_2^* + t^2 A_2^*)\, v_3^1 - (1 + tE_2^*)\, v_3^2,\\
&[d \ln A_2^*, v_3^1] = -3 (E_2^* + C_1^*)\, [v_3^1, v_3^2],\\
&[dC_2^*, v_3^1] + [dE_2^*, v_3^2] = \{-C_2^* (C_1^* + E_2^*) + E_2^* (N_1^* +\\
&\qquad + 2\alpha C_1^*)\}\, [v_3^1, v_3^2],\\
&[dG_2^*, v_3^1] + [dN_1^*, v_3^2] = \{-3G_2^* E_2^* + N_1^* (\alpha C_1^* + 2C_2^*) - \alpha A_2^*\}\, [v_3^1, v_3^2],\\
&[d \ln N_1^*, v_3^1] = -(2E_2^* + C_1^*)\, [v_3^1, v_3^2],\\
&[dE_2^*, v_3^1] = \{\alpha C_1^* (2N_1^* + \alpha C_1^* - C_2^*) + 3E_2^{*2} + N_1^{*2}\}\, [v_3^1, v_3^2].
\end{aligned} \tag{33}
$$

Как было показано в предыдущем случае, выбор $A^* = 0$ относит репер к двоякосопряженной сети подмногообразий [3] и репер становится каноническим. Пара M в этом случае относится к классу $A_1 = G_1 = N_2 = 0$ и определяется с произволом пяти функций одного аргумента (это следует из системы (33)). Класс этот характеризуется следующими свойствами: 1) поверхность (P) — торс, на котором линия $v_3^1 = 0$ — прямолинейная образующая (см. [3] стр. 103); 2) линейчатая поверхность $v_3^1 = 0$ конгруэнции (K) — цилиндроид (см. [3], стр. 102); 3) направление касательной в центре луча к средней линии линейчатой поверхности $v_3^2 = 0$ сопряжено направлению вектора $\mathbf{e}_2$ (см. [3] стр. 103), т. е. направлению линий пересечения направляющей плоскости цилиндроида $v_3^1 = 0$ с касательной плоскостью поверхности (P).

В каждой касательной плоскости поверхности (P) имеется единственная прямая T, принадлежащая конгруэнции (T). Прямая T параллельна вектору $\mathbf{e}_2$ и проходит через точку пересечения прямой $\mathbf{r} = \mathbf{P} + v\mathbf{e}_1$ с соприкасающейся квадрикой Ли цилиндроида $v_3^1 = 0$. Действительно, в этом случае уравнение (13) квадрики Ли поверхности $v_3^1 = 0$, приведенное в работе [3], принимает вид:

$$
\alpha C_1 x_1^2 - C_1 x_1 x_2 - x_1 x_3 - \alpha x_1 + x_3 = 0.
$$

Отсюда видно, что точка пересечения (отличная от P) квадрики с прямой $\mathbf{r} = \mathbf{P} + v\mathbf{e}_1$ имеет координату $v = \frac{1}{C_1}$, ч. т. д.

Основной результат изложенного сформулируем в виде теоремы.

Теорема 1. Существует только четыре класса пар M, для которых в каждой касательной плоскости поверхности (P) можно выбрать прямую T так, чтобы конгруэнция (T) и (K) образовали расслояемую в обе стороны пару. Эти классы следующие. 1) Класс пар M, определяемый с произволом одной функции двух аргументов и выделяемый в полуканоническом репере вместе с выбором сети уравнениями:

$$
\begin{aligned}
N_2^* A_1^* - A^* G_1^* = \alpha A_1^* (A_2^* - A_1^*) + G_1^* \{A_1^* C_2^* - A_2^* (N_1^* - E_1^* - G_1^*) -\\
- 2A^* E_2^*\} = A^* (A_2^* - A_1^*) + N_2^* \{A_2^* C_1^* - A_1^* (N_2^* - E_2^* - G_2^*) - 2A^* E_1^*\} = 0.
\end{aligned}
$$

В каждой касательной плоскости поверхности (P) этого класса существует бесчисленное множество прямых T. 2) Класс пар M, определяемый с произволом шести функций одного аргумента и выделяемый в полуканоническом репере вместе с выбором сети уравнениями:

$$
\begin{aligned}
A_1^* = G_1^* = A^* A_2^* + N_2^* (A_2^* C_1^* - 2A^* E_1^*) = \alpha A^* A_2^* + N_2^* \{A_2^* (E_1^* -\\
- N_2^*) - 2A^* E_2^*\} = 0.
\end{aligned}
$$

В каждой касательной плоскости поверхности (P) этого класса существует единственная прямая T. 3) Класс пар M, определяемый с произволом шести функций одного аргумента и выделяемый в полуканоническом репере вместе с выбором сети уравнениями:

$$A^* = N_2^* = A_1^*(A_2^* - A_1^*) + G_1^*\{A_1^*(G_2^* + E_2^*) + A_2^*C_1^*\} =$$

$$= \alpha A_1^*(A_2^* - A_1^*) + G_1^*\{A_1^*C_2^* - A_2^*(N_1^* - E_1^* - G_1^*)\} = 0.$$

В каждой касательной плоскости поверхности (P) этого класса существует единственная прямая T. 4) Класс пар M, определяемый произволом пяти функций одного аргумента и выделяемый в полуканоническом репере вместе с выбором сети уравнениями: $A^* = A_1^* = G_1^* = N_2^* = 0$. В каждой касательной плоскости поверхности (P) этого класса существует единственная прямая T.

Теорема 2. Если в паре M, не принадлежащей классу $A_1 = G_1 = N_2 = 0$ и допускающей решение задачи Бианки, конгруэнция (K) сопряжена поверхности (P), то конгруэнция (K) является конгруэнцией W, асимптотические линии фокальных поверхностей которой соответствуют асимптотическим линиям поверхности (P). Доказательство теоремы становится очевидным, если найти уравнения асимптотических линий фокальных поверхностей конгруэнции (K) и поверхности (P) в полуканоническом репере.

ЛИТЕРАТУРА

1. Фиников С. П. Метод внешних форм Картана. Гостехиздат, М.—Л., 1948.
2. Щербаков Р. Н. Репер линии на поверхности в афинной дифференциальной геометрии. Ученые записки Бурят-Монгольского пед. института, 3, 1952, 15—40.
3. Онищук Н. М. Пара, состоящая из конгруэнции и поверхности, в эквиаффинной геометрии. Геометрический сборник, в 1 (Труды Томского университета, т. 160), 1962, 97—106.
4. Онищук Н. М. Репераж подмногообразий в теории пары, состоящей из конгруэнции и поверхности, в эквиаффинной геометрии. Там же, 107—114.
5. Бахвалов С. В. Замечание к методу подвижного трехгранника. Мат. сб. 7(49):2, 1940. 321—326.

ТРУДЫ ТОМСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА
имени В. В. КУЙБЫШЕВА

Том 168 Серия механико-математическая

Р. А. РЕЗНИЧЕНКО

ОБ ОДНОМ ЭКВИАФФИННО-ИНВАРИАНТНОМ КЛАССЕ ПАР КОНГРУЭНЦИЙ

В статье [1] показано, что через каждую пару соответствующих лучей произвольной эквиаффинной пары конгруэнций проходят принадлежащие ей две пары линейчатых поверхностей, каждая из которых содержит по одной линейчатой поверхности, асимптотическая плоскость которой параллельна соответствующему лучу другой линейчатой поверхности. Эти пары линейчатых поверхностей называются A-парами. При построении канонического репера в [1] из рассмотрения исключена пара конгруэнций, обе A-пары линейчатых поверхностей которой совпадают. Настоящая статья посвящена изучению этой пары конгруэнций.

Обозначения и терминология соответствуют принятым в [1], [2], [3] и [6].

§ 1. Построение канонического репера

Обозначая $\bar{A}$, $\bar{e}_1$, $\bar{e}_2$, $\bar{e}_3$ элементы некоторого эквиаффинного репера пары конгруэнций, запишем его деривационные формулы в виде

$$d\bar{A} = \omega^i \bar{e}_i, \qquad (i, k = 1, 2, 3), \qquad d\bar{e}_i = \omega_i^k e_k, \tag{1}$$

где ω^i, ω_i^k — дифференциальные формы, удовлетворяющие уравнениям структуры аффинного пространства:

$$D\omega^i = [\omega^j \omega_j^i], \qquad (j = 1, 2, 3), \qquad D\omega_k^i = [\omega_k^j \omega_j^i], \tag{2}$$

причем предполагается, что

$$(\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3) = 1, \ \omega_1^1 + \omega_2^2 + \omega_3^3 = 0. \ \pi_1^1 + \pi_2^2 + \pi_3^3 = 0. \tag{3}$$

Будем считать векторы $\bar{e}_1$ и $\bar{e}_2$ параллельными соответствующим лучам пары конгруэнций. Возьмем на соответствующих лучах конгруэнций пары по одной (пока произвольной) точке, радиус-векторы которых обозначим Π_1 и Π_2, соответственно. Начало рассматриваемого репера поместим в середину между точками $\bar{\Pi}_1$ и $\bar{\Pi}_2$ прямой $\Pi_1\Pi_2$. Вектор $\bar{e}_3$ будем считать направленным по прямой $\Pi_1\Pi_2$, так что

$$\bar{\Pi}_1 = \bar{A} + \bar{e}_3, \ \bar{\Pi}_2 = \bar{A} - \bar{e}_3. \tag{4}$$

В статье [1] показано, что формы

$$\omega_1^3,\ \omega_1^2,\ \omega_2^3,\ \omega_2^1,\ \omega^1-\omega_3^1,\ \omega^2+\omega_3^2,\ \omega^3+\omega_3^3,\ \omega^3-\omega_3^3$$

суть главные. Принимая формы ω_1^3 и ω_1^2 за независимые, можно считать

$$\omega^1-\omega_3^1=a^1\omega_1^3+b^1\omega_1^2,\ \omega^3+\omega_3^3=a^3\omega_1^3+b^3\omega_1^2,$$
$$\omega^3-\omega_3^3=a_3^3\omega_1^3+b_3^3\omega_1^2, \tag{5}$$
$$\omega^2+\omega_3^2=a^2\omega_1^3+b^2\omega_1^2,\ \omega_2^1=a_2^1\omega_1^3+b_2^1\omega_1^2.$$

В упомянутой статье показано также, что дифференциальные уравнения A-пар линейчатых поверхностей имеют вид

$$\omega_1^3\omega_2^3=0.$$

Здесь и в дальнейшем мы будем рассматривать пару конгруэнций, у которой обе эти A-пары линейчатых поверхностей совпадают. Следовательно, должно выполняться соотношение:

$$\omega_2^3=\mu\omega_1^3. \tag{6}$$

Дифференцируя внешним образом уравнение (5) и (6) и выписывая выражения для δa^1, δb^1, δa^2, δb^2 и $\delta\mu$, получим:

$$\delta a^1+2a^1\pi_1^1-a_3^3\pi_3^1+(a_2^1-b^1)\pi_3^2-a_2^1\pi^2=0,$$
$$\delta b^1+3b^1\pi_1^1-b_2^1\pi^2+b_2^1\pi_3^2=0,$$
$$\delta a^2-(a^3-b^2)\pi_3^2=0,$$
$$\delta b^2-\pi^1-\pi_3^1-b^3\pi_3^3=0,$$
$$\delta\mu+2\mu\pi_1^1=0.$$

Пользуясь этими формулами, проведем следующую фиксацию:

$$b^1=0,\ b^2=0,\ b_2^1\neq 0,\ \pi_3^2-\pi^2=\pi^1+\pi_3^1=0, \tag{7}$$
$$\mu=1,\ \pi_1^1=0.$$

Отсюда следует, что репер данной пары конгруэнций полностью канонизирован. Деривационные формулы этого репера запишем в виде

$$d\bar{A}=\omega^i\bar{e}_i=(\alpha^i\omega_1^3+\beta^i\omega_1^2)\bar{e}_i,$$
$$d\bar{e}_i=\omega_i^k e_k=(\alpha_i^k\omega_1^3+\beta_i^k\omega_1^2)e_k, \tag{8}$$

где функции α^i, β^i, α_i^k, β_i^k связаны соотношениями:

$$\alpha_1^3=\alpha_2^3=1,\ \beta_1^3=\beta_2^3=0,\ \alpha_1^2=\beta_1^2=0,\ \alpha_2^1=a_2^1,$$
$$\beta_2^1=b_2^1,\ \beta^2=-\beta_3^2,\ \beta^1=\beta_3^1,\ \alpha^2+\alpha_3^2=a^2,\alpha_3^3=\frac{a_3^3-a^3}{2}, \tag{9}$$
$$\alpha^1-\alpha_3^1=a^1,\ \alpha^3=\frac{a^3+a_3^3}{2},\ \beta^3=\frac{b^3+b_3^3}{2},\ \beta_3^3=\frac{b_3^3-b^3}{2},$$
$$\alpha_1^1+\alpha_2^2+\alpha_3^3=\beta_1^1+\beta_2^2+\beta_3^3=0.$$

Внешнее дифференцирование деривационных формул (8) в силу (9) приводит к восьми независимым квадратичным уравнениям:

$$[d\alpha^i\omega_1^3]+[d\beta^i\omega_1^2]=\{\alpha^i(\beta_1^1-\beta_3^3+1)+\beta^i(\alpha_2^2-\alpha_1^1-\beta_3^2)+$$
$$+\alpha^1\beta_1^i-\beta^1\alpha_1^i+\alpha^2\beta_2^i-\beta^2\alpha_2^i+\alpha^3\beta_3^i-\beta^3\alpha_3^i\}[\omega_1^3\omega_1^2],$$

$$[d\alpha_1^1\omega_1^3]+[d\beta_1^1\omega_1^2]=\{\alpha_1^1(1-\beta_3^3)+\beta_1^1(\alpha_2^2-\beta_3^2)-\beta_3^1-\alpha_2^1\}[\omega_1^3\omega_1^2],$$
$$[d\alpha_3^3\omega_1^3]+[d\beta_3^3\omega_1^2]=(2\beta_3^3\alpha_2^2-\beta_3^3\beta_3^2-\alpha_3^1-\alpha_3^2+\alpha_3^3\beta_1^1)[\omega_1^3\omega_1^2],$$
$$[d\alpha_2^1\omega_1^3]+[d\beta_2^1\omega_1^2]=(3\beta_1^1\alpha_2^1+\alpha_2^1-2\alpha_1^1\beta_2^1+2\alpha_2^2\beta_2^1+\beta_3^2)[\omega_1^3\omega_1^2],$$
$$[d\alpha_3^1\omega_1^3]+[d\beta_3^1\omega_1^2]=(2\alpha_3^1\beta_1^1-2\alpha_3^1\beta_3^3+\alpha_3^1-3\beta_3^1\alpha_1^1-\beta_3^1\beta_3^2+$$
$$+\alpha_3^2\beta_2^1-\beta_3^2\alpha_2^1)[\omega_1^3\omega_1^2],$$
$$[d\alpha_3^2\omega_1^3]+[d\beta_3^2\omega_1^2]=(-3\alpha_3^2\beta_3^3+\alpha_3^2-\beta_3^1\alpha_1^1-(\beta_3^2)^2+$$
$$+\alpha_3^3\beta_3^2)[\omega_1^3\omega_1^2] \tag{10}$$

и одному конечному соотношению

$$\beta_1^1-\beta_2^2-\beta_2^1+1=0. \tag{11}$$

Отсюда и из (9) следует, что система (10) содержит тринадцать независимых инвариантов:

$$\alpha_1^1,\ \alpha_3^3,\ \beta_1^1,\ \beta_3^3,\ \alpha^1,\ \alpha^2,\ \alpha^3,\ \beta^1,\ \beta^2,\ \beta^3,\ \alpha_2^1,\ \alpha_3^1,\ \alpha_3^2.$$

Пользуясь теоремой Бахвалова [5], получаем следующую теорему.

Теорема 1. Пара B конгруэнций, характеризуемая тем, что ее A-пары линейчатых поверхностей совпадают, определяется вплоть до эквиаффинного преобразования с произволом в пять функций двух аргументов.

§ 2. Геометрическое значение элементов репера

Геометрические свойства пары B конгруэнций

В предыдущем параграфе мы провели аналитическое построение репера. В этом параграфе дадим геометрическое истолкование элементов этого репера. С этой целью рассмотрим ряд геометрических образов, связанных с данным репером.

Пусть

$$\bar{T}=\bar{A}+\bar{e}_3+t\bar{e}_1,\ \bar{T}^*=\bar{A}-\bar{e}_3+t^*\bar{e}_2 \tag{12}$$

— радиус-векторы произвольных точек соответствующих лучей пары B конгруэнций. Если T и T^* суть главные точки [4] любой пары линейчатых поверхностей пары B, то так же, как и в [4], находим

$$t=\frac{2\omega_2^1}{\omega_1^3},\quad t^*=-\frac{2\omega_1^2}{\omega_1^3}. \tag{13}$$

Если же T и T^* суть квазифлекнодальные точки [6] то так же, как и в [6], находим два квадратных уравнения для определения t и t^*:

$$\begin{gathered}\{\omega_1^3(\omega_3^3-\omega^3)+2\omega_1^2\omega_1^3\}t^2+\{2\omega_1^3(\omega^1-\omega_3^1)+\\+(\omega_3^3-\omega^3)(\omega_3^3+\omega^3)-4\omega_2^1\omega_1^2+2\omega_1^3(\omega^2+\omega_3^2)\}t+\\+2(\omega^1-\omega_3^1)(\omega^3+\omega_3^3)-4\omega_2^1(\omega^2+\omega_3^2)=0,\\\{\omega_1^3(\omega^3+\omega_3^3)+2\omega_2^1\omega_1^3\}t^{*2}+\{2\omega_1^3(\omega^2-\omega_3^2)+\\+(\omega^3-\omega_3^3)(\omega^3+\omega_3^3)+4\omega_2^1\omega_1^2+2\omega_1^3(\omega^1-\omega_3^1)\}t^*+\\+2(\omega_3^2+\omega^2)(\omega^3-\omega_3^3)+4\omega_1^2(\omega^1-\omega_3^1)=0.\end{gathered} \tag{14}$$

Отсюда вытекает следующая теорема.

Теорема 2. Несобственные точки лучей A-пары линейчатых поверхностей пары B конгруэнций суть квазифлекнодальные точки.

Из формул (14) следует, что фиксация (7) геометрически означает, что точки Π_1 и Π_2 помещены в собственные квазифлекнодальные точки лучей нерасслояемой A-пары. Формула (13) показывает, что пара линейчатых поверхностей $\omega_1^2 = 0$ характеризуется тем, что она содержит линейчатую поверхность, описываемую лучом, проходящим через точку Π_2 параллельно $\bar{e}_2$, главная точка которой совпадает с точкой Π_2. Следовательно, при выборе форм ω_1^2 и ω_1^2 за независимые из рассмотрения исключается такая пара B конгруэнций, у которой A-пара линейчатых поверхностей совпадает с парой

$$\omega_1^2 = 0.$$

Если T и T^* суть фокусы лучей пары B конгруэнций, то из $d\bar{T} \parallel \bar{e}_1$ и $d\bar{T}^* \parallel \bar{e}_2$ находим

$$\begin{aligned} &\omega^2 + \omega_3^2 + t\omega_1^2 = 0, \ \omega^1 - \omega_3^1 + t^*\omega_2^1 = 0, \\ &\omega^3 + \omega_3^3 + t\omega_1^3 = 0, \ \omega^3 - \omega_3^3 + t^*\omega_1^3 = 0. \end{aligned} \tag{15}$$

Отсюда следует, что при фиксации (7) из рассмотрения исключается пара конгруэнций, у которой, по крайней мере, одна конгруэнция — цилиндрическая.

Теорема 3. Характеристика основной плоскости (плоскости, параллельной векторам $\bar{e}_1$ и $\bar{e}_2$ и проходящей через начало репера) при смещении вдоль любой пары линейчатых поверхностей пары B конгруэнций параллельна одному и тому же вектору.

Доказательство. Из $d(\bar{e}_1\bar{e}_2) = -\omega_3^3(\bar{e}_1\bar{e}_2) + \omega_1^3(\bar{e}_3, \bar{e}_2 - \bar{e}_1)$ следует, что характеристика основной плоскости при смещении вдоль любой пары линейчатых поверхностей пары B конгруэнций параллельна вектору $\bar{e}_2 - \bar{e}_1$. Теорема доказана.

Следствие. Векторы $\bar{e}_1$ и $\bar{e}_2$ пронормированы так, что вектор $\bar{e}_1 - \bar{e}_2$ параллелен вектору, о котором идет речь в теореме 3.

Таким образом, все элементы канонического репера данной пары конгруэнций геометрически характеризованы. Выясним геометрическое значение конечного соотношения (11).

Теорема 4. Конгруэнция, описываемая прямой, параллельной вектору $\bar{e}_1 - \bar{e}_2$, проходящей через начало репера, является цилиндрической.

Доказательство. Если $\bar{F} = \bar{A} + f(\bar{e}_1 - \bar{e}_2)$ — радиус-вектор фокуса луча конгруэнции, о которой идет речь в теореме, то

$$2(\beta_1^1 - \beta_2^2 - \beta_2^1 + 1) f^2 + \{\beta^3(\alpha_1^1 - \alpha_2^1 - \alpha_2^2) - 2\beta^1 - 2\beta^2\} f + \\ + \beta^3(\alpha^1 + \alpha^2) - \alpha^3(\beta^1 + \beta^2) = 0.$$

Теорема 5. Обе линейчатые поверхности A-пары, принадлежащей паре B-конгруэнций, суть цилиндроиды с направляющей плоскостью, параллельной основной.

Доказательство этой теоремы непосредственно вытекает из того, что $d\bar{e}_i$ и $d^2\bar{e}_i$, $(i = 1, 2)$ при $\omega_1^3 = \omega_2^3 = 0$, параллельны основной плоскости.

Замечание. Рассматривая координатные пары линейчатых поверхностей $\omega_1^2 = 0$ и $\omega_1^2 = 0$ пары B конгруэнций так же, как и в [6], можно дать геометрическую характеристику всех инвариантов β_i^k, β^i и α_i^k, α^i, входящих в деривационные формулы (8).

§ 3. О некоторых классах пар B конгруэнций

Результаты предыдущих параграфов дают возможность выделить и геометрически характеризовать некоторые специальные классы пар B конгруэнций.

1. Пара B конгруэнций

$$b^3 + 2 = 0, \ 1 + \beta_2^1 = 0, \ a^2 - a^1 = 0,$$
$$\beta^3\alpha_3^3 - \beta_3^3\alpha^3 - 2\alpha_2^1 = 0$$

характеризуется тем, что она расслояема в обе стороны [3].

2. Пара B конгруэнций

$$a_3^3 = a^3 = 0, \ a^1 + a^2 = 0, \ \alpha_2^1 = 0, \ b_3^3 - 2 = 0,$$

$$b^3 + 2\beta_2^1 = 0$$

характеризуется тем, что все принадлежащие ей пары линейчатых поверхностей расслояемы.

3. Пара C' конгруэнций. Парой C' конгруэнций называется такая пара B конгруэнций, основные точки всех пар линейчатых поверхностей которой совпадают с собственными квазифлекнодальными точками A-пары линейчатых поверхностей. Пара C' конгруэнций определяется натуральными уравнениями:

$$\alpha^3 = \alpha_3^3 = \beta^3 = \beta_3^3 = 0. \tag{16}$$

В самом деле, если T и T^* суть основные [4] точки любой пары линейчатых поверхностей пары B конгруэнций, то в силу (12), из $(d\bar{T}, \bar{e}_1, \bar{e}_2) = 0$ и $(d\bar{T}^*, \bar{e}_1, \bar{e}_2) = 0$ находим

$$\omega^3 + \omega_3^3 + t\omega_1^3 = 0, \ \omega^3 - \omega_3^3 + t^*\omega_1^3 = 0.$$

Отсюда следует, что соотношение (16) является необходимым и достаточным условием того, чтобы точки Π_1 и Π_2 совпадали с основными точками всех пар линейчатых поверхностей пары.

Из деривационных формул (8) и соотношений (15) непосредственно вытекает, что 1) пара C' конгруэнций характеризуется тем, что касательные плоскости поверхностей, описываемых началом репера и собственной квазифлекнодальной точкой по крайней мере одной линейчатой поверхности A-пары, параллельны основной плоскости; 2) конгруэнции пары C' суть параболические с единственными фокальными поверхностями, описываемыми собственными квазифлекнодальными точками A-пары; 3) обе линейчатые поверхности A-пары, принадлежащей паре C' конгруэнций, суть цилиндры.

Пользуясь формулами (8) — (11) и применяя теорему Бахвалова [5], получим, что все рассмотренные в этом параграфе классы пар B конгруэнций существуют и определяются с произволом: расслояемая пара B конгруэнций — в одну функцию двух аргументов, пара B конгруэнций, все пары линейчатых поверхностей которой расслояемы — в пять функций одного аргумента и, наконец, пара C' конгруэнций — в одну функцию двух аргументов.

ЛИТЕРАТУРА

1. Ивлев Е. Т. О паре конгруэнций в эквиаффинной геометрии трехмерного пространства. Данный сборник, стр. 103—119.
2. Фиников С. П. Метод внешних форм Картана в дифференциальной геометрии. М—Л., ГИТТЛ, 1948.
3. Фиников С. П. Теория пар конгруэнций. ГИТТЛ, М—Л., 1956.
4. Ивлев Е. Т., Пергаменщиков М. Б. К эквиаффинной теории пар линейчатых поверхностей трехмерного пространства. Данный сборник, стр. 97—103.
5. Бахвалов С. В. Замечания к методу подвижного трехгранника. Математический сборник, 7, (49), № 2, 1940, 321—326.
6. Ивлев Е. Т. Пара линейчатых поверхностей в трехмерном проективном пространстве. Доклады научной конференции по теоретическим и прикладным вопросам математики и механики. Издательство Томского университета, Томск 1960, 50—51.

ТРУДЫ ТОМСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА
имени В. В. КУЙБЫШЕВА

Том 168 Серия механико-математическая

Н. М. МАСЬКИН

О БЕСКОНЕЧНО МАЛЫХ ДУАЛЬНО-КОНФОРМНЫХ ПРЕОБРАЗОВАНИЯХ ЛИНЕЙЧАТЫХ КОМПЛЕКСОВ

Для изучения геометрических образов можно использовать метод, широко применяемый в римановой геометрии [1] и в других обобщенных пространствах [2]. Сущность этого метода состоит в следующем: на образе определяется некоторая группа бесконечно малых преобразований, а затем ищутся те образы, для которых возможны преобразования, составляющие эту группу и зависящие от данного числа параметров [3] или произвольных функций [4].

В настоящей статье дано определение бесконечно малого преобразования геометрического образа в аффинном пространстве и, как частный случай, рассмотрено бесконечно малое преобразование комплекса в эвклидовом пространстве. Понятие дуально-конформного преобразования, введенное Н. М. Барабошиным [5], распространено на бесконечно малые преобразования. Отличие от конечных преобразований здесь состоит в том, что коэффициентом пропорциональности исходной и преобразованной дуальных квадратичных форм комплекса является не произвольное дуальное число, а дуальное число, бесконечно мало отличающееся от единицы. Получены классы комплексов, для которых возможны преобразования, составляющие группу бесконечно малых дуально-конформных преобразований в первую дифференциальную окрестность, и доказаны некоторые общие теоремы относительно этих преобразований. Один из классов представлен безинтегрально.

§ 1. Бесконечно малое преобразование геометрического образа

Геометрический образ может быть задан одной или несколькими аналитическими вектор-функциями одной или нескольких переменных [6]

$$r_i(s^k), \quad m_e(s^k),$$

где r_i суть радиусы-векторы, а m_e — свободные векторы. Аффинная система координат, состоящая из векторов $Ae_1e_2e_3$, являющихся функциями тех же аргументов, что и векторы r_i и m_e, называется подвижным репером геометрического образа. Если репер задан так, что положение всех векторов репера относительно элемента образа можно описать полностью и независимо от какой-либо неподвижной системы координат, то он называется каноническим. Все формы ω^i, ω^i_k, входящие в деривационные формулы канонического репера

$$dA=\omega^i e_i,\qquad de_i=\omega_i^\kappa e_\kappa, \tag{1,1}$$

выражаются через базисные $\tilde{\omega}^i = p^i_\kappa ds^\kappa$ по формулам

$$\omega^i = l^i_\kappa\tilde{\omega}^\kappa,\quad \omega^m_e = l^m_{e\kappa}\tilde{\omega}^\kappa. \tag{1,2}$$

Коэффициенты l^i_κ, $l^i_{e\kappa}$ суть или константы или инварианты образа.
Рассмотрим репер $A^*\overset{*}{e}_1\overset{*}{e}_2\overset{*}{e}_3$, полученный из репера $Ae_1e_2e_3$ преобразованием

$$A^*=A+\tau B = A+\tau\xi^i e_i,$$
$$\overset{*}{e}_i = e_i+\tau p_i = (\delta_i^\kappa+\tau\varphi_i^\kappa)e_k, \tag{1,3}$$
$$\mathrm{Det}(\delta_i^\kappa+\tau\varphi_i^\kappa)\neq 0,$$

где $B=\xi^i e_i$, $p_i=\varphi_i^\kappa e_\kappa$ — дифференцируемые вектор-функции от s^k, а τ — параметр.
Векторы e_i, в силу невырожденности преобразования (1,3), можно выразить через векторы $\overset{*}{e}_\kappa$

$$e_i = (\delta_i^\kappa + \tau\psi_i^\kappa)\overset{*}{e}_\kappa. \tag{1,4}$$

Дифференцируя формулы (1,3) по s^κ и считая τ постоянным, получим

$$dA^* = \{\omega^i+\tau(d\xi^i+\xi^\kappa\omega^i_\kappa)\}e_i,$$
$$d\overset{*}{e}_i = \{\omega_i^\kappa+\tau(d\varphi_i^\kappa+\varphi_i^e\omega_e^\kappa)\}e_\kappa.$$

Замена e_i их значениями (1.4) через $\overset{*}{e}_\kappa$ дает

$$dA^* = \{\omega^i+\tau(d\xi^i+\xi^e\omega^i_e)\}(\delta_i^\kappa+\tau\psi_i^\kappa)\overset{*}{e}_\kappa = \overset{*}{\omega}{}^\kappa\overset{*}{e}_\kappa,$$
$$d\overset{*}{e}_i = \{\omega_i^m+\tau(d\varphi_i^m+\varphi_i^e\omega_e^m)\}(\delta_m^\kappa+\tau\psi_m^\kappa)\overset{*}{e}_\kappa = \overset{*}{\omega}{}_i^\kappa\overset{*}{e}_\kappa.$$

Отсюда следует

$$\overset{*}{\omega}{}^\kappa = \omega^\kappa+\tau(d\xi^\kappa+\xi^e\omega_e^m + \psi_i^\kappa\omega^i)+\tau^2(d\xi^i+\xi^e\omega_e^i)\psi_i^\kappa,$$
$$\overset{*}{\omega}{}_i^\kappa = \omega_i^\kappa+\tau(d\varphi_i^\kappa+\varphi_i^e\omega_e^\kappa+\psi_m^\kappa\omega_i^m)+\tau^2(d\varphi_i^m+\varphi_i^e\omega_e^m)\psi_m^\kappa. \tag{1,5}$$

При бесконечно малом τ, члены с τ^2, входящие в выражения форм $\overset{*}{\omega}{}^i$, $\overset{*}{\omega}{}_i^\kappa$, будут иметь более высокий порядок малости. Отбросив эти члены, т. е. положив $\tau^2=0$, мы получим некоторое преобразование геометрического образа. Это преобразование лишь с точностью до бесконечно малых второго порядка совпадает с преобразованием (1,3).

Определение. Преобразование репера, определяемое формулами (1,3) и условием $\tau^2=0$, называется бесконечно малым.

Теорема (1,1). Совокупность всех бесконечно малых преобразований репера составляет группу.

Для доказательства теоремы достаточно проверить выполнение групповых аксиом.

1) Произведение двух последовательных преобразований принадлежит той же совокупности преобразований, так как произведение преобразования (1,3) и преобразования

$$A^{**}=A+\tau B^*=A+\tau\overset{*}{\xi}{}^i\overset{*}{e}_i,$$
$$\overset{**}{e}_i=e_i+\tau\overset{*}{p}_i=e_i+\tau\overset{*}{\varphi}{}_i^\kappa\overset{*}{e}_\kappa,$$

где

$$B^*=\overset{*}{\xi}{}^i\overset{*}{e}_i,\ \overset{*}{p}_i=\overset{*}{\varphi}{}_i^\kappa\overset{*}{e}_\kappa,$$

имеет вид

$$A^{***}=A+\tau(B+B^*)=A+\tau(\xi^i e_i+\overset{*}{\xi}{}^i\overset{*}{e}_i)=$$
$$=A+\tau(\xi^i+\overset{*}{\xi}{}^i)e_i=A+\tau B^{**},$$
$$\overset{***}{e}_i=e_i+\tau(p_i+\overset{*}{p}_i)=\{e_i+\tau(\varphi_i^\kappa e_\kappa+\overset{*}{\varphi}{}_i^\kappa\overset{*}{e}_\kappa)\}=$$
$$=\{\delta_i^\kappa+\tau(\varphi_i^\kappa+\overset{*}{\varphi}{}_i^\kappa)\}e_\kappa=e_i+\tau\overset{**}{p}_i. \tag{1,6}$$

Здесь

$$(\xi^i+\overset{*}{\xi}{}^i)e_i=B^{**}\quad(\varphi_i^\kappa+\overset{*}{\varphi}{}_i^\kappa)e_\kappa=\overset{**}{p}_i.$$

2) Произведение любых трех последовательных преобразований обладает свойством ассоциативности, так как

$$\xi^i+\overset{*}{\xi}{}^i+\overset{**}{\xi}{}^i=(\xi^i+\overset{*}{\xi}{}^i)+\overset{**}{\xi}{}^i=\xi^i+(\overset{*}{\xi}{}^i+\overset{**}{\xi}{}^i),$$
$$\varphi_i^\kappa+\overset{*}{\varphi}{}_i^\kappa+\overset{**}{\varphi}{}_i^\kappa=(\varphi_i^\kappa+\overset{*}{\varphi}{}_i^\kappa)+\overset{**}{\varphi}{}_i^\kappa=\varphi_i^\kappa+(\overset{*}{\varphi}{}_i^\kappa+\overset{**}{\varphi}{}_i^\kappa).$$

3) Полагая в (1,3) $B=0$, $p_i=0$, получим тождественное преобразование.

4) Существует преобразование, обратное к (1,3), определяемое формулами

$$A^*=A-\tau B=A-\tau\xi^i e_i,$$
$$\overset{*}{e}_i=e_i-\tau p_i=e_i-\tau\varphi_i^\kappa e_\kappa.$$

Действительно, потребовав, чтобы произведение (1,6) двух преобразований было тождественным, получим

$$\overset{*}{\xi}{}^i=-\xi^i,\ \overset{*}{\varphi}{}_i^\kappa=-\varphi_i^\kappa.$$

Замечание. По сравнению с конечными преобразованиями здесь имеется существенное упрощение: соответствующие функции двух обратных друг другу бесконечно малых преобразований отличаются только знаком, в то время как функции ψ_i^κ, входящие в формулы (1,4), являются функциями φ_i^κ. Поэтому формы $\overset{*}{\omega}{}^i$, $\overset{*}{\omega}{}_\kappa^i$ при $\tau^2=0$, принимают вид:

$$\overset{*}{\omega}{}^\kappa=\omega^\kappa+\tau(d\xi^\kappa+\xi^e\omega_e^\kappa-\varphi_i^\kappa\omega^i),$$
$$\overset{*}{\omega}{}_i^\kappa=\omega_i^\kappa+\tau(d\varphi_i^\kappa+\varphi_i^e\omega_e^\kappa-\varphi_m^\kappa\omega_i^m). \tag{1,7}$$

Пусть задана система дифференциальных уравнений

$$\lambda_{ij}d\xi^i+\mu_{ij}^\kappa d\varphi_\kappa^i+\nu_{ij}\tilde{\omega}^i=0,\ j=1,\dots p, \tag{1,8}$$

где p не больше общего числа функций ξ^i, φ_κ^i. Здесь ν_{ij} — выражения, линейные и однородные относительно неизвестных функций ξ^i, φ_κ^i, а λ_{ij}, μ_{ij}^κ суть функции от s^e.

Теорема (1,2). Совокупность всех бесконечно малых преобразований (1,3) репера, в которых функции ξ^i, φ^i_κ суть решения системы (1,8), образует группу, являющуюся подгруппой группы всех бесконечно малых преобразований (1,3).

Доказательство. Решения системы дифференциальных уравнений (1,8) обладают следующими очевидными свойствами:

1) Если ξ^i, φ^i_κ и $\overset{*}{\xi}{}^i$, $\overset{*}{\varphi}{}^i_\kappa$ — два решения, то и сумма $\xi^i + \overset{*}{\xi}{}^i$, $\varphi^i_\kappa + \overset{*}{\varphi}{}^i_\kappa$ есть решение.

2) Любые три решения обладают свойством ассоциативности относительно сложения.

3) Существует нулевое решение $\xi^i = 0$, $\varphi^i_\kappa = 0$.

4) Если ξ^i, φ^i_κ — решение, то и $-\xi^i$, $-\varphi^i_\kappa$ — решение. Следовательно, если в качестве функций, участвующих в бесконечно малом преобразовании (1,3), взять все решения системы (1,8), то групповые аксиомы будут удовлетворены. Теорема доказана.

Следствие. Совокупность бесконечно малых преобразований репера, определяемая всевозможными решениями системы

$$A_{ij}\xi^i + C^\kappa_{ij}\varphi^i_\kappa = 0, \quad j = 1, \ldots p, \tag{1,9}$$

линейной и однородной относительно неизвестных функций ξ^i φ^i_κ, образует группу.

Произвольным преобразованием репера, один из элементов которого является элементом геометрического образа, мы получим произвольное преобразование образа. Однако векторы A^*, $\overset{*}{e}_i$ не обязательно будут векторами канонического репера преобразованного образа, для изучения которого желательно также иметь канонический репер. Поэтому на преобразование (1,3) можно наложить такие условия, чтобы общность преобразования не нарушалась, а канонический репер преобразовывался в канонический.

Репер $Ae_1e_2e_3$ является каноническим, если формы ω^i, ω^i_κ, входящие в деривационные формулы (1,1), удовлетворяют соотношениям (1,2). Следовательно, чтобы преобразованный репер $A^*\overset{*}{e}_1\overset{*}{e}_2\overset{*}{e}_3$ был каноническим, нужно формы (1,7) подчинить уравнениям

$$\overset{*}{\omega}{}^i = \overset{*}{I}{}^i_\kappa \overset{*}{\tilde{\omega}}{}^\kappa \qquad \overset{*}{\omega}{}^e_i = \overset{*}{I}{}^e_{i\kappa} \overset{*}{\tilde{\omega}}{}^\kappa, \tag{1,9'}$$

аналогичным соотношениям (1,2). Величины $\overset{*}{I}{}^i_\kappa$, $\overset{*}{I}{}^e_{i\kappa}$ тогда являются инвариантами преобразованного образа. Если учесть соотношения (1,2) и положить

$$\delta I^i_\kappa = \overset{*}{I}{}^i_\kappa - I^i_\kappa, \quad \delta I^e_{i\kappa} = \overset{*}{I}{}^e_{i\kappa} - I^e_{i\kappa},$$

$$\overset{*}{\omega}{}^i = \omega^i + \delta\omega^i, \quad \overset{*}{\tilde{\omega}}{}^\kappa = \tilde{\omega}^\kappa + \delta\tilde{\omega}^\kappa,$$

$$\overset{*}{\omega}{}^\kappa_i = \omega^\kappa_i + \delta\omega^\kappa_i,$$

где $\delta\omega^i$, $\delta\tilde{\omega}^\kappa$, $\delta\omega^\kappa_i$ определяются соотношениями (1,7), то уравнения (1,9) принимают вид:

$$\begin{aligned} \delta\omega^i &= I^i_\kappa \delta\tilde{\omega}^\kappa + \tilde{\omega}^\kappa \delta I^i_\kappa, \\ \delta\omega^e_i &= I^e_{i\kappa} \delta\tilde{\omega}^\kappa + \tilde{\omega}^\kappa \delta I^e_{i\kappa}. \end{aligned} \tag{1,10}$$

Эти уравнения исключают произвол, обусловленный преобразованием элементов репера, но не сужают произвол преобразования образа.

Определение. Преобразование геометрического образа, определяемое формулами (1,3), уравнениями (1,10) и условием $\tau^2 = 0$, называется бесконечно малым.

В силу этого определения во всем дальнейшем полагаем $\tau^2 = 0$, $\tau \neq 0$.

§ 2. Бесконечно малое преобразование комплексов в эвклидовом пространстве

Деривационные формулы

$$dA = \omega^i e_i, \qquad \omega^\kappa_i = -\omega^i_\kappa, \qquad de_i = \omega^\kappa_i e_\kappa, \tag{2,1}$$

канонического репера комплекса в эвклидовом пространстве характеризуются соотношениями [7]

$$\omega^2 = a\omega^1_3, \tag{2,2}$$

$$\begin{aligned} \omega^2_1 &= x_1\omega^1 + x_2\omega^1_3 + x_3\omega^2_3, \\ da &= x_2\omega^1 + x_4\omega^1_3 + x_5\omega^2_3, \\ a\omega^2_1 - \omega^3 &= x_3\omega^1 + x_5\omega^1_3 + x_6\omega^2_3. \end{aligned} \tag{2,3}$$

Формы ω^i, ω^i_κ удовлетворяют уравнениям структуры эвклидова пространства [8]

$$D\omega^i = [\omega^\alpha\omega^i_\alpha], \quad D\omega^i_\kappa = [\omega^\alpha_\kappa\omega^i_\alpha]. \tag{2,4}$$

Полагая

$$ax_1 - x_3 = z_1, \quad ax_2 - x_5 = z_2, \quad ax_3 - x_6 = z_3,$$

дифференцируя соотношения (2,3) внешним образом и применяя лемму Картана, получим [9]:

$$\begin{aligned} dx_1 &= \alpha_1\omega^1 + \alpha_2\omega^1_3 + \alpha_3\omega^2_3, \\ dx_2 &= (\alpha_2 - 2x_1z_1)\,\omega^1 + (\alpha_4 - x_1z_2 - x_2z_1)\,\omega^1_3 + \\ &\quad + (\alpha_5 + 1 - x_1z_3 - x_3z_1)\,\omega^2_3, \\ dx_3 &= (\alpha_3 - x_1x_2)\,\omega^1 + (\alpha_5 - x_2^2)\,\omega^1_3 + (\alpha_6 - x_2x_3)\,\omega^2_3, \\ dx_4 &= (\alpha_4 - 2x_1z_2 - 2x_2z_1)\,\omega^1 + (\alpha_7 - 2x_2z_2)\,\omega^1_3 + \\ &\quad + (\alpha_8 - x_2z_3 - x_3z_2)\,\omega^2_3, \\ dx_5 &= (\alpha_5 + 1 - x_1z_3 - x_3z_1 - x_1x_4)\,\omega^1 + \\ &\quad + (\alpha_8 - x_2x_4)\,\omega^1_3 + (\alpha_9 - x_3x_4)\,\omega^2_3, \\ dx_6 &= (\alpha_6 - 2x_1x_5)\,\omega^1 + (\alpha_9 + 2x_3z_3 - 2x_2x_5)\,\omega^1_3 + \\ &\quad + (a\alpha_6 - \alpha_{10})\,\omega^2_3, \end{aligned} \tag{2,5}$$

где α_i — инварианты комплекса, принадлежащие третьей дифференциальной окрестности луча.

Известно, что положение прямой в пространстве полностью характеризуется четырьмя координатами. Следовательно, наиболее общее преобразование комплекса зависит от четырех произвольных функций трех аргументов.

Формулы бесконечно малого преобразования канонического репера комплекса, состоящего из единичных и взаимно перпендикулярных векторов, можно записать следующим образом [4]

$$
\begin{aligned}
A^* &= A + (\xi_1 e_1 + \xi_2 e_2 + \xi_3 e_3)\tau,\\
\overset{*}{e}_1 &= e_1 - \varphi_1 \tau e_2 - \varphi_2 \tau e_3,\\
\overset{*}{e}_2 &= \varphi_1 \tau e_1 + e_2 - \varphi_3 \tau e_2,\\
\overset{*}{e}_3 &= \varphi_2 \tau e_1 + \varphi_3 \tau e_2 + e_3,
\end{aligned} \tag{2,6}
$$

где ξ_i, φ_κ — произвольные дифференцируемые функции, а $\tau^2 = 0$. Число произвольных функций здесь больше, чем их необходимо для наиболее общего преобразования комплекса.

Формы $\overset{*}{\omega}{}^i$, $\overset{*}{\omega}{}^i_\kappa$, входящие в деривационные формулы преобразованного комплекса

$$dA^* = \overset{*}{\omega}{}^i \overset{*}{e}_i,$$

$$d\overset{*}{e}_i = \overset{*}{\omega}{}^\kappa_i \overset{*}{e}_\kappa,$$

имеют вид

$$\overset{*}{\omega}{}^i = \omega^i + \delta\omega^i, \quad \overset{*}{\omega}{}^i_\kappa = \omega^i_\kappa + \delta\omega^i_\kappa, \tag{2,7}$$

где

$$
\begin{aligned}
\delta\omega^1 &= \{d\xi_1 - (z_1\varphi_2 + x_1\xi_2)\,\omega^1 - (a\varphi_1 + z_2\varphi_2 + \\
&\quad + x_2\xi_2 - \xi_3)\,\omega^1_3 - (z_3\varphi_2 + x_3\xi_2)\,\omega^2_3\}\,\tau,\\
\delta\omega^2 &= \{d\xi_2 + (\varphi_1 - z_1\varphi_3 + x_1\xi_1)\,\omega^1 - (z_2\varphi_3 - x_2\xi_1)\,\omega^1_3 - \\
&\quad - (z_3\varphi_3 - x_3\xi_1 - \xi_3)\,\omega^2_3\}\,\tau,\\
\delta\omega^3 &= \{d\xi_3 + \varphi_2\omega^1 + (a\varphi_3 - \xi_1)\,\omega^1_3 - \xi_2\omega^2_3\}\,\tau,\\
\delta\omega^2_1 &= \{-d\varphi_1 + \varphi_3\omega^1_3 - \varphi_2\omega^2_3\}\,\tau,\\
\delta\omega^1_3 &= \{d\varphi_2 - x_1\varphi_3\omega^1 - x_2\varphi_3\omega^1_3 - (\varphi_1 + x_3\varphi_3)\,\omega^2_3\}\,\tau,\\
\delta\omega^2_3 &= \{d\varphi_3 + x_1\varphi_2\omega^1 + (\varphi_1 + x_2\varphi_2)\,\omega^1_3 + x_3\varphi_2\omega^2_3\}\,\tau.
\end{aligned} \tag{2,8}
$$

Выражения $\delta\omega^i$, $\delta\omega^i_\kappa$ будем называть вариациями соответствующих форм. В силу постоянства τ имеем

$$D\overset{*}{\omega}{}^i = D\omega^i + D\delta\omega^i, \quad D\overset{*}{\omega}{}^\kappa_i = D\omega^\kappa_i + D\delta\omega^\kappa_i.$$

Непосредственной подстановкой убеждаемся, что формы $\overset{*}{\omega}{}^i$, $\overset{*}{\omega}{}^i_\kappa$ удовлетворяют системе

$$D\overset{*}{\omega}{}^i = [\overset{*}{\omega}{}^\alpha \overset{*}{\omega}{}^i_\alpha], \quad D\overset{*}{\omega}{}^\kappa_i = [\overset{*}{\omega}{}^\alpha_i \overset{*}{\omega}{}^\kappa_\alpha],$$

которую, используя уравнения структуры (2,4), можно привести к виду

$$D\delta\omega^i = [\delta\omega^\alpha \omega^i_\alpha] + [\omega^\alpha \delta\omega^i_\alpha],$$

$$D\delta\omega^i_\kappa = [\delta\omega^\alpha_\kappa \omega^i_\alpha] + [\omega^\alpha_\kappa \delta\omega^i_\alpha].$$

Потребуем, чтобы формы $\overset{*}{\omega}{}^2$, $\overset{*}{\omega}{}^1_3$ удовлетворяли уравнению

$$\overset{*}{\omega}{}^2 = a^* \overset{*}{\omega}{}^1_3, \tag{2,9}$$

аналогичному соотношению (2,2). Тогда преобразованный репер $A^*\overset{*}{e}_1\overset{*}{e}_2\overset{*}{e}_3$ будет каноническим, а a^* будет кривизной преобразованного комплекса. Заменяя в уравнении (2,9) формы $\overset{*}{\omega}{}^2$, $\overset{*}{\omega}{}^1_3$ их значениями (2,7) и используя соотношение (2,2), получим

$$\delta\omega^2 = a^*\delta\omega^1_3 + \omega^1_3(a^* - a). \tag{2,10}$$

Вариации форм ω^i, ω^i_κ суть произведения τ на выражения, составленные из форм ω^i, ω^i_κ, инвариантов комплекса, неизвестных функций и их дифференциалов. Поэтому разность

$$\delta a = a^* - a, \tag{2,11}$$

которую мы будем называть вариацией кривизны комплекса, представляется в виде произведения некоторого выражения на τ

$$\delta a = \psi\tau, \tag{2,12}$$

где ψ — неизвестная пока функция.

Подставляя в уравнения (2,10) значение a^*, найденное из уравнения (2,11) и учитывая только члены с первой степенью τ, получим

$$\delta\omega^2 = a\delta\omega^1_3 + \omega^1_3\delta a. \tag{2,13}$$

Так как из уравнений (2,2) и (2,13) следует уравнение (2,9), то уравнение (2,13) является необходимым и достаточным условием преобразования канонического репера комплекса в канонический. Следовательно, уравнением (2,13) исключается произвол, обусловленный преобразованием репера.

Формулы (2,6), уравнение (2,13) и условие $\tau^2 = 0$ определяют бесконечно малое преобразование комплекса.

Внешнее дифференцирование уравнения (2,9) и применение леммы Картана приводит к уравнениям

$$\overset{*}{\omega}{}^2_1 = \overset{*}{x}_1 \overset{*}{\omega}{}^1 + \overset{*}{x}_2 \overset{*}{\omega}{}^1_3 + \overset{*}{x}_3 \overset{*}{\omega}{}^2_3,$$

$$da^* = \overset{*}{x}_2 \overset{*}{\omega}{}^1 + \overset{*}{x}_4 \overset{*}{\omega}{}^1_3 + \overset{*}{x}_5 \overset{*}{\omega}{}^2_3,$$

$$a^*\overset{*}{\omega}{}^2_1 - \overset{*}{\omega}{}^3 = \overset{*}{x}_3 \overset{*}{\omega}{}^1 + \overset{*}{x}_5 \overset{*}{\omega}{}^1_3 + \overset{*}{x}_6 \overset{*}{\omega}{}^2_3,$$

аналогичным соотношениям (2,3). Отсюда, обозначая

$$\delta x_i = \overset{*}{x}_i - x_i$$

вариации инвариантов x_i, принадлежащих второй дифференциальной окрестности луча комплекса и применяя соотношения (2,3), получим

$$
\begin{aligned}
\delta\omega^2_1 &= x_1\delta\omega^1 + \omega^1\delta x_1 + x_2\delta\omega^1_3 + \omega^1_3\delta x_2 + x_3\delta\omega^2_3 + \omega^2_3\delta x_3,\\
d\delta a &= x_2\delta\omega^1 + \omega^1\delta x_2 + x_4\delta\omega^1_3 + \omega^1_3\delta x_4 + x_5\delta\omega^2_3 + \omega^2_3\delta x_5,\\
a\delta\omega^2_1 + \omega^2_1\delta a - \delta\omega^3 &= x_3\delta\omega^1 + \omega^1\delta x_3 + x_5\delta\omega^1_3 + \\
&\quad + \omega^1_3\delta x_5 + x_6\delta\omega^2_3 + \omega^2_3\delta x_6.
\end{aligned} \tag{2,14}
$$

Сравнивая в этих уравнениях коэффициенты при независимых формах, получим, что каждая из вариаций δx_i представляется, как и в случае (2,12), в виде произведения некоторого выражения ψ_i на τ

$$\delta x_i = \psi_i\tau. \tag{2,15}$$

Уравнения (2,14) связывают вариации инвариантов второй дифференциальной окрестности луча комплекса при бесконечно малых преобразованиях. Формально система (2,13), (2,14) может быть получена дифференцированием соотношений (2,2), (2,3) и последующей заменой дифференциалов форм и инвариантов их вариациями, а второго дифференциала — дифференциалом его вариации. Наложение дополнительных условий вида (1,8) и (1,9) выделит из бесконечно малых преобразований комплекса соответствующую этим условиям подгруппу. Функции ξ_i, φ_k, входящие в уравнения подгруппы, состоящие из уравнения (2,13) и дополнительных условий вида (1,8) и (1,9), могут существовать как с параметрическим, так и с функциональным произволом от всех переменных. В последнем случае группа называется функциональной, а число произвольных функций — ее рангом [10]. Ранг или число параметров группы определяется произволом решения системы всех уравнений, которым подчинены функции ξ_i, φ_k.

§ 3. Условия преобразования комплекса в первую дифференциальную окрестность

Определение. Бесконечно малое преобразование комплекса, при котором каждый луч l переходит в луч l^*, принадлежащий всем линейным комплексам, касающимся с данным на луче l, называется преобразованием в первую дифференциальную окрестность.

Пучок касательных линейных комплексов, отнесенный к локальной системе координат, определяется уравнением

$$as_1 - s_4 + \lambda s_6 = 0. \tag{3,1}$$

Здесь λ — произвольный параметр, s_1, s_2, s_3 — координаты вектора $\overset{*}{e}_3$ луча l^* линейного комплекса, s_4, s_5, s_6 — координаты момента $M^* = [AA^*, \overset{*}{e}_3]$ луча l^* относительно начала A.

Преобразованный луч определяется векторами

$$AA^*(\xi_1\tau,\ \xi_2\tau,\ \xi_3\tau),$$

$$\overset{*}{e}_3(\varphi_2\tau,\ \varphi_3\tau,\ 1),$$

с помощью которых легко находится его момент относительно начала A

$$M^*(\xi_2\tau,\ -\xi_1\tau,\ 0).$$

Подставляя плюккеровы координаты преобразованной прямой (координаты векторов $\overset{*}{e}_3$ и M^*) в уравнение пучка касательных линейных комплексов (3,1) и сокращая на τ, получим условие

$$a\varphi_2 - \xi_2 = 0. \tag{3,2}$$

Уравнение (2,13) при замене $\delta\omega^2$, $\delta\omega_3^1$ и δa их значениями (2,8), (2,12) приводится к виду

$$\begin{gathered} d(a\varphi_2 - \xi_2) = (\varphi_1 + x_2\varphi_2 + x_3\varphi_3 + x_1\xi_1)\,\omega^1 + \\ + (x_4\varphi_2 + x_5\varphi_3 + x_2\xi_1 - \psi)\,\omega_3^1 + (a\varphi_1 + x_5\varphi_2 + x_6\varphi_3 + x_3\xi_1 + \xi_3)\,\omega_3^2. \end{gathered} \tag{3,3}$$

При условии (3,2) оно равносильно системе

$$\begin{gathered} \varphi_1 + x_2\varphi_2 + x_3\varphi_3 + x_1\xi_1 = 0, \\ a\varphi_1 + x_5\varphi_2 + x_6\varphi_3 + x_3\xi_1 + \xi_3 = 0, \end{gathered} \tag{3,4}$$

$$\delta a = (x_2\xi_1 + x_4\varphi_2 + x_5\varphi_3)\,\tau. \tag{3,5}$$

Уравнения (3,2), (3,4) представляют совокупность всех условий того, чтобы рассматриваемое бесконечно малое преобразование было преобразованием комплекса в первую дифференциальную окрестность. Так как они линейны и однородны относительно функций ξ_i, φ_k, то, согласно следствию из теоремы (1,2), имеет место

Теорема (3,1). Совокупность бесконечно малых преобразований комплекса в первую дифференциальную окрестность есть функциональная группа ранга три.

Дифференцируя уравнения (3,4) и (3,5), сравнивая результат с уравнениями (2,14) и исключая φ_1, ξ_2, ξ_3, получим:

$$\begin{aligned} \delta x_1 &= \{\alpha_1\xi_1 + \alpha_2\varphi_2 + \alpha_3\varphi_3\}\,\tau, \\ \delta x_2 &= \{(\alpha_2 - 2x_1z_1)\,\xi_1 + (\alpha_4 - x_1z_2 - x_2z_1)\,\varphi_2 + \\ &\qquad + (\alpha_5 + 1 - x_1z_3 - x_3z_1)\,\varphi_3\}\,\tau, \\ \delta x_3 &= \{(\alpha_3 - x_1x_2)\,\xi_1 + (\alpha_5 - x_2^2)\,\varphi_2 + (\alpha_6 - x_2x_3)\,\varphi_3\}\,\tau, \\ \delta x_4 &= \{(\alpha_4 - 2x_1z_2 - 2x_2z_1)\,\xi_1 + (\alpha_7 - 2x_2z_2)\,\varphi_2 + \\ &\qquad + (\alpha_8 - x_2z_3 - x_3z_2)\,\varphi_3\}\,\tau, \\ \delta x_5 &= \{(\alpha_5 + 1 - x_1z_3 - x_3z_1 - x_1x_4)\,\xi_1 + (\alpha_8 - x_2x_4)\,\varphi_2 + \\ &\qquad + (\alpha_9 - x_3x_4)\,\varphi_3\}\,\tau, \\ \delta x_6 &= \{(\alpha_6 - 2x_1x_5)\,\xi_1 + (\alpha_9 + 2x_3z_3 - 2x_2x_5)\,\varphi_2 + \\ &\qquad + (a\alpha_6 - \alpha_{10})\,\varphi_3\}\,\tau. \end{aligned} \tag{3,6}$$

Из этих формул и формулы (3,5) видно, что для получения вариаций инвариантов a, x_i можно в выражениях (2,3), (2,5) их дифференциалов формы ω^1, ω_3^1, ω_3^2 заменять, соответственно, величинами $\xi_1\tau$, $\varphi_2\tau$, $\varphi_3\tau$. Отметим, что формулы (3,5) и (3,6) получены при условиях преобразования комплекса в первую дифференциальную окрестность. В статьях [4] и [9] нами рассмотрены некоторые подгруппы группы бесконечно малых преобразований комплексов в первую дифференциальную окрестность.

§ 4. Уравнения группы бесконечно малых дуально-конформных преобразований

Известно, что преобразование комплекса, удовлетворяющее условию

$$\Phi^* = \Lambda\Phi, \tag{4,1}$$

где $\Lambda = \lambda + \varepsilon\bar{\lambda}$, ε — дуальная единица, а $\Phi = \Phi_1 + \varepsilon\Phi_2$ и $\Phi^* = \overset{*}{\Phi}_1 + \varepsilon\overset{*}{\Phi}_2$ — исходная и преобразованная дуальные квадратичные формы, называется дуально-конформным [5]. Это понятие естественно обобщить и на бесконечно малые преобразования комплекса. При бесконечно малых преобразованиях комплекса имеем, в силу $\tau^2 = 0$,

$$\Phi^* = \Phi + \delta\Phi,$$

$$\begin{gathered} \overset{*}{\Phi}_1 = \Phi_1 + \delta\Phi_1, \quad \overset{*}{\Phi}_2 = \Phi_2 + \delta\Phi_2, \\ \delta\Phi_1 = 2\,(\omega_3^1\delta\omega_3^1 + \omega_3^2\delta\omega_3^2), \\ \delta\Phi_2 = 2\,\{(\omega_3^1)^2\,\delta a + 2a\omega_3^1\delta\omega_3^1 - \omega^1\delta\omega_3^2 - \omega_3^2\delta\omega^1\}. \end{gathered} \tag{4,3}$$

Так как вариация $\delta\Phi$ дуальной квадратичной формы комплекса есть величина бесконечно малая по отношению к самой форме, то Λ может отличаться от единицы только на бесконечно малое дуальное число и представляется следующим образом

$$\Lambda = 1 + 2(\lambda + \varepsilon\bar{\lambda})\tau. \tag{4,3}$$

Подставляя значения Φ, Φ^* и Λ из (4,2) и (4,3) в (4,1) и отделяя действительную и дуальную части, получим:

$$\begin{gathered} \delta a - \bar{\lambda}\tau = 0, \\ \delta\omega_3^1 - \lambda\omega_3^1\tau = 0, \\ \delta\omega_3^2 - \lambda\omega_3^2\tau = 0, \\ \delta\omega^1 - \lambda\omega^1\tau + \bar{\lambda}\omega_3^2\tau = 0. \end{gathered} \tag{4,4}$$

Чтобы исключить произвол, обусловленный преобразованием репера, эту систему надо дополнить уравнением (2,13)

$$\delta\omega^2 = a\delta\omega_3^1 + \bar{\lambda}\omega_3^1\tau = 0.$$

Определение. Бесконечно малое преобразование комплекса, удовлетворяющее условиям (4,4), (2,13), называется бесконечно малым дуально-конформным преобразованием.

Возьмем два произвольных дуально-конформных преобразования. Пусть при этих преобразованиях дуальная квадратичная форма Φ преобразуется так:

$$\Phi^* = \Lambda\Phi, \qquad \Phi^{**} = \Lambda^*\Phi,$$

$$\Lambda = 1 + 2(\lambda + \varepsilon\bar{\lambda})\tau, \qquad \Lambda = 1 + 2(\lambda^* + \varepsilon\bar{\lambda}^*)\tau.$$

Тогда в результате применения произведения этих преобразований получим:

$$\begin{gathered} \Phi^{***} = \Lambda^*\Phi^* = \Lambda\Lambda^*\Phi = \Lambda^{**}\Phi, \\ \Lambda^{**} = 1 + 2(\lambda^{**} + \varepsilon\bar{\lambda}^{**})\tau, \\ \lambda^{**} = \lambda + \lambda^* \qquad \bar{\lambda}^{**} = \bar{\lambda} + \bar{\lambda}^*. \end{gathered} \tag{4,5}$$

Система (4,4), (2,13) относительно функций ξ_i, φ_κ, λ и $\bar{\lambda}$ имеет вид (1,8). Совокупность ее решений обладает всеми свойствами совокупности решений системы (1,8). Следовательно, в силу соотношений (4,5) имеет место

Теорема (4,1). Совокупность всех бесконечно малых дуально-конформных преобразований комплекса составляет группу.

Теорема (4,2). При бесконечно малом дуально-конформном преобразовании цилиндры комплекса преобразуются в цилиндры.

Доказательство. Цилиндры комплекса определяются уравнениями $\omega_3^1 = \omega_3^2 = 0$. Из второго и третьего уравнений системы (4,4), при $\omega_3^1 = \omega_3^2 = 0$, следуют уравнения $\delta\omega_3^1 = \delta\omega_3^2 = 0$, а соотношения (2,8) дают уравнения $\overset{*}{\omega}{}_3^1 = \overset{*}{\omega}{}_3^2 = 0$, определяющие цилиндры преобразованного комплекса. Аналогичная теорема доказана, для случая конечных преобразований, Н. М. Барабошиным [5].

Теорема (4,3). Если при бесконечно малом дуально-конформном преобразовании комплекса $\lambda = 0$, то боковые поверхности Гаака преобразуются в боковые поверхности Гаака.

Доказательство. Боковые поверхности Гаака определяются уравнениями $\omega_3^1 = 0$, $\omega^1 + a\omega_3^2 = 0$. Уравнения (4,4) при этих условиях дают

$$\delta\omega_3^1 = 0, \ \delta\omega_3^2 = 0, \ \delta\omega^1 + \omega_3^2\delta a = 0.$$

Следовательно,

$$\overset{*}{\omega}{}_3^1 = 0, \ \overset{*}{\omega}{}^1 + a^*\overset{*}{\omega}{}_3^2 = 0.$$

Теорема доказана.

§ 5. Некоторые классы комплексов, допускающих группу бесконечно малых дуально-конформных преобразований в первую дифференциальную окрестность

Чтобы бесконечно малое дуально-конформное преобразование было преобразованием в первую дифференциальную окрестность, надо к системе (4,4), (2,13) присоединить уравнение (3,2).

После исключения функций ξ_2, ξ_3, φ_1 и $\bar{\lambda}$ система уравнений задачи принимает вид

$$\begin{gathered} d\varphi_2 = x_1\varphi_3\omega^1 + (x_2\varphi_3 + \lambda)\omega_3^1 - (x_1\xi_1 + x_2\varphi_2)\omega_3^2, \\ d\varphi_3 = -x_1\varphi_2\omega^1 + (x_1\xi_1 + x_3\varphi_3)\omega_3^1 - (x_3\varphi_2 - \lambda)\omega_3^2, \\ d\xi_1 = \{(ax_1 + z_1)\varphi_2 + \lambda\}\omega^1 - \{(ax_1 + z_1)\xi_1 + (ax_3 + z_3)\varphi_3\}\omega_3^1 + \\ + \{(ax_3 + z_3 - x_4)\varphi_2 - x_2\xi_1 - x_5\varphi_3\}\omega_3^2. \end{gathered} \tag{5,1}$$

Внешнее дифференцирование этих уравнений и применение леммы Картана дает

$$\begin{gathered} \tau d\lambda = (\delta x_3 - x_1\delta a + x_3\lambda\tau)\omega_3^1 - (-\delta x_2 + x_2\lambda\tau)\omega_3^2, \\ \delta x_1 + x_1\dot{\lambda}\tau = 0, \end{gathered} \tag{5,2}$$

$$\delta(az_1 - z_3 + x_4) + (az_1 - z_3 + x_4)\lambda\tau = 0. \tag{5,3}$$

Здесь δa и δx_i определены формулами (3,5), (3,6). На четыре неизвестные функции ξ_1, φ_2, φ_3 и λ мы имеем, кроме конечных, четыре независимых дифференциальных уравнения. Следовательно, группа бесконечно малых дуально-конформных преобразований комплекса в первую дифференциальную окрестность зависит не более, чем от четырех параметров.

В общем случае система уравнений (5,1), (5,2), (5,3) обладает только нулевым решением, и соответствующий комплекс не допускает рассматриваемой группы преобразований.

В дальнейшем группа бесконечно малых дуально-конформных преобразований комплекса в первую дифференциальную окрестность, зависящая от r параметров, обозначается G_r.

Рассмотрим некоторые классы комплексов, допускающие преобразования группы G_r.

1) Комплекс

$$x_1 = 0, \ x_3 = 0, \ x_4 + x_6 = 0 \tag{5,4}$$

существует, как показывает исследование системы (2,2), (2,3), (5,4), с произволом в две функции одного аргумента.

Теорема (5,1). Комплекс (5,4) допускает группу G_4.

Доказательство. Уравнения (5,3) исчезают, система (5,1), (5,2) становится вполне интегрируемой. Теорема доказана.

Рассмотрим некоторые свойства этого комплекса. Комплекс, для которого $az_1 - z_3 + x_4 = 0$, называется изотропным [11]. При $x_1 = x_3 = 0$ это условие принимает вид $x_4 + x_6 = 0$. Следовательно, комплекс (5,4) есть изотропный комплекс, расслаивающийся на изотропные бицентральные конгруэнции [12]. Комплекс (5,4) расслаивается и на однопараметрическое семейство цилиндрических конгруэнций $\omega_3^1 = 0$.

Геометрическое место центров лучей, принадлежащих конгруэнции $\omega_3^1 = 0$, есть цилиндрическая поверхность, для которой вектор e_1 служит направляющим вектором прямолинейных образующих. Лучи комплекса касаются этой цилиндрической поверхности. Один из инфлекционных центров комплекса несобственный. Центральные кривые плоские и совпадают с ортогональными сечениями цилиндра, являющегося геометрическим местом центров лучей, принадлежащих конгруэнции $\omega_3^1 = 0$.

Боковые поверхности Главатого являются, ввиду $x_1 = 0$, $x_3 = 0$, цилиндроидами (см. [12]), направляющими плоскостями которых служат плоскости $\{e_2e_3\}$. Цилиндры комплекса суть плоскости, линии центров на цилиндрах — прямые, перпендикулярные к лучам комплекса. Комплекс главных нормалей вырождается в конгруэнцию, состоящую из цилиндрических поверхностей. Центр луча бинормали комплекса (5,4) совпадает с центром кривизны центральной кривой.

Инварианты $\hat{a}$, $\hat{x}_i$ комплекса бинормалей комплекса (5,4) определяются формулами:

$$\hat{a} = \frac{z_2}{x_2}, \quad \hat{x}_1 = 0, \quad \hat{x}_2 = -\frac{1}{x_2}, \quad \hat{x}_3 = 0,$$

$$\hat{x}_4 = \frac{\alpha_8 - x_2x_4}{x_2^2}, \quad \hat{x}_5 = \frac{x_2(\alpha_7 + a - 2x_2z_2) - z_2}{x_2^2}, \quad \hat{x}_6 = x_2x_4 - \alpha_8.$$

Отсюда вытекают следующие свойства комплекса бинормалей: центральные кривые — плоские, боковые поверхности Главатого суть цилиндроиды, цилиндры вырождаются в плоскости, линии центров на цилиндрах ортогональны лучам комплекса.

Теорема (5,2). Плоскости $\{e_1e_2\}$ комплекса (5,4) огибают минимальную поверхность.

Доказательство. Радиус-вектор произвольной точки плоскости $\{e_1e_2\}$ имеет вид

$$P = A + ue_1 + ve_2. \tag{5,5}$$

Если точка P принадлежит огибающей, то вектор,

$$dP = \omega^1 e_1 + a\omega_3^1 e_2 + (z_2\omega_3^1 + x_4\omega_3^2)e_3 + due_1 + dve_2 +$$
$$+ u(x_2\omega_3^1 e_2 - \omega_3^1 e_3) - v(x_2\omega_3^1 e_1 + \omega_3^2 e_3),$$

перпендикулярен вектору e_3. Так как из равенства $(dP, e_3) = (z_2 - u)\omega_3^1 + (x_4 - v)\omega_3^2 = 0$ следует $u = z_2$, $v = x_4$, то

$$P = A + z_2e_1 + x_4e_2, \tag{5,5'}$$

$$dP = (-Be_1 + Ae_2)\omega_3^1 + (Ae_1 + Be_2)\omega_3^2, \tag{5,6}$$

где

$$A = \alpha_7 + a - x_2z_2, \quad B = \alpha_8 - x_2x_4.$$

Вектор e_3 есть нормаль поверхности (5,5') в соответствующей точке.

Первая и вторая квадратичные формы поверхности имеют вид

$$\tilde{\varphi}_1 = (A^2 + B^2)\{(\omega_3^1)^2 + (\omega_3^2)^2\},$$

$$\tilde{\varphi}_2 = B(\omega_3^1)^2 - 2A\omega_3^1\omega_3^2 - B(\omega_3^2)^2.$$

Средняя кривизна равна нулю. Теорема доказана.

2) Комплекс

$$x_1 = 0, \quad x_2 = 0, \quad ax_3 + z_3 - x_4 = 0 \tag{5,7}$$

существует и определяется системой (2,2), (2,3), (5,7) с произволом в две функции одного аргумента. Комплекс (5,7) допускает группу G_4, так как уравнения (5,3) исчезают, а система (5,1), (5,2) становится вполне интегрируемой. Комплекс (5,7) — изотропный, расслаивающийся на изотропные бицентральные конгруэнции. Цилиндры комплекса вырождаются в плоскости $\{e_1e_3\}$, центральные поверхности — цилиндроиды, направляющими плоскостями которых являются плоскости $\{e_1e_3\}$. Два инфлекционных центра несобственные. Комплекс бинормалей вырождается в совокупность прямых, параллельных одной плоскости.

Для получения еще нескольких классов рассмотрим частный случай, когда уравнение (5,2) имеет вид:

$$d\lambda = x_3\lambda\omega_3^1 - x_2\lambda\omega_3^2. \tag{5,8}$$

Тогда

$$\begin{gathered} \delta x_1 + x_1\lambda\tau = 0, \\ \delta x_2 = 0, \\ x_1\delta a - \delta x_3 = 0, \\ \delta(az_1 - z_3 + x_4) + (az_1 - z_3 + x_4)\lambda\tau = 0. \end{gathered} \tag{5,9}$$

Дифференцируя уравнение (5,8) внешним образом, получим

$$\begin{gathered} \alpha_3\lambda = 0, \\ (ax_1^2 + x_1z_1 - \alpha_2)\lambda = 0, \\ (ax_1x_2 + x_1z_2 - \alpha_4 - \alpha_6)\lambda = 0. \end{gathered} \tag{5,10}$$

3) Комплекс

$$\begin{gathered} x_1 = 0, \ ax_3 + z_3 - x_4 = 0, \ 1 + x_2^2 + x_3^2 = 0, \\ \alpha_4 = -x_2x_3, \ \alpha_5 = x_2^2 \end{gathered} \tag{5,11}$$

существует и определяется с произволом в две функции одного аргумента. Система уравнений (5,1), (5,8) вполне интегрируема. Следовательно, комплекс (5,11) допускает группу G_4. Это мнимый изотропный комплекс, расслаивающийся на мнимые цилиндрические конгруэнции $\omega_3^1 = 0$.

4) Комплекс

$$a = 0, \ x_3 = 0, \ x_1x_6 + 1 = 0, \ x_1 = \mathrm{const} \neq 0$$

есть комплекс касательных к сфере. Система уравнений (5,9), (5,10) сводится к уравнению $\lambda = 0$. Поэтому комплекс касательных к сфере допускает группу G_3.

5) Комплекс

$$x_2 = 0, \ z_1 = 0, \ x_1z_3 - x_1x_4 - 1 = 0, \ x_1 = \mathrm{const} \neq 0 \tag{5,12}$$

существует и определяется с произволом в две функции одного аргумента. Система (5,9), (5,10) сводится к уравнению $\lambda = 0$. Поэтому комплекс (5,12) допускает группу G_3. Этот комплекс, из других соображений, получен, подробно изучен и безынтегрально представлен Гааком [13]. Отметим еще одно свойство этого комплекса: кривизна центральной кривой комплекса (5,12) равна кривизне ортогонального сечения цилиндра комплекса его главных нормалей.

6) Комплекс

$$x_1 = 0,\ x_3 = 0,\ \alpha_4 = 0,\ \alpha_9 = 2ax_2^2 - \alpha_7 \qquad (5,13)$$

существует с произволом в три функции одного аргумента и допускает группу G_2, так как система (5,9), (5,10) сводится к уравнениям $\varphi_3 = 0$, $\lambda = 0$.

В силу теоремы (4,3) боковые поверхности Гаака преобразуются в боковые поверхности Гаака. Цилиндры комплекса вырождаются в плоскости, линия центров на цилиндре ортогональна лучам. Центральные кривые плоские. Комплекс расслаивается на однопараметрическое семейство цилиндрических конгруэнций $\omega_3^1 = 0$. Геометрическое место центров лучей, принадлежащих конгруэнции $\omega_3^1 = 0$, есть цилиндрическая поверхность. Вектор e_1 служит направляющим вектором прямолинейных образующих, лучи комплекса касаются соответствующей цилиндрической поверхности. Боковые поверхности Главатого — цилиндроиды. Комплекс главных нормалей вырождается в конгруэнцию, состоящую из цилиндрических поверхностей. Инварианты $\hat{a}$, $\hat{x}_i$ комплекса бинормалей определяются формулами:

$$\hat{a} = \frac{z_2}{x_2},\quad \hat{x}_1 = 0,\quad \hat{x}_2 = -\frac{1}{x_2},\quad \hat{x}_3 = 0,$$

$$\hat{x}_4 = \frac{\alpha_8 - 2x_2x_4 + x_2z_2}{x_2^2},\quad \hat{x}_5 = \frac{x_2(\alpha_7 + a - 2x_2z_2) - z_2}{x_2^2},\quad \hat{x}_6 = -\alpha_{10}.$$

Из этих формул следует, что цилиндры комплекса бинормалей тоже вырождаются в плоскости, линия центров на цилиндре ортогональна лучам комплекса. Центральные кривые комплекса бинормалей плоские, а боковые поверхности Главатого — цилиндроиды.

7) Комплекс

$$x_1 = 0,\ x_2 = 0,\ \alpha_6 = 0,\ \alpha_{10} = \alpha_8 - x_3x_5 \qquad (5,14)$$

существует с произволом в три функции одного аргумента. Так как система (5,9), (5,10) сводится к уравнениям $\varphi_2 = 0$, $\lambda = 0$, то комплекс (5,14) допускает группу G_2. Этот комплекс представляет собой совокупность касательных к некоторому, непроизвольному, однопараметрическому семейству цилиндров с параллельными образующими, причем угол между касательными и образующими цилиндров изменяется только при переходе от цилиндра к цилиндру.

8) Комплекс

$$x_1 = 0,\ \alpha_4 + \alpha_6 = 0 \qquad (5,15)$$

существует с произволом в одну функцию двух аргументов. Система (5,9), (5,10) сводится к уравнениям $\varphi_2 = \varphi_3 = \lambda = 0$. Комплекс (5,15) допускает группу G_1. Комплекс (5,15) расслаивается на однопараметрическое семейство цилиндрических конгруэнций $\omega_3^1 = 0$.

Геометрическое место центров лучей, принадлежащих одной конгруэнции $\omega_3^1 = 0$, образует торс. Прямолинейные образующие торса определяются уравнением $\omega_3^2 = 0$, имеют в качестве направляющего

вектор $p = e_1 - x_3e_3$ и касаются поверхности $P = A - \frac{a}{x_2}p$ на расстоянии $\frac{a}{x_2}\sqrt{1 + x_3^2}$ от центра луча.

Выделим два частных случая комплексов (5,15).

а) Комплекс

$$x_1 = 0,\ ax_3 + z_3 - x_4 = 0 \qquad (5,16)$$

есть изотропный комплекс, определяющийся с произволом в четыре функции одного аргумента. Так как при $\lambda = 0$ два последних уравнения системы (4,4) принимают вид:

$$\delta\omega_3^2 = 0,\ \delta\omega^1 + \omega_3^2\delta a = 0,$$

то

$$\delta(\omega^1 + a\omega_3^2) = 0,\quad \overset{*}{\omega}{}^1 + a^*\overset{*}{\omega}{}_3^2 = 0.$$

Следовательно, при бесконечно малом дуально-конформном преобразовании комплекса (5,16) изотропные конгруэнции комплекса преобразуются в изотропные.

б) Комплексу

$$x_1 = 0,\ x_2 = 0,\ x_5 = 0,\ \alpha_6 = 0 \qquad (5,17)$$

удается дать безынтегральное представление. Произвол существования этого комплекса — две функции одного аргумента. Так как в данном случае $x_2 = 0$, то

$$\delta a = (x_2\xi_1 + x_4\varphi_2 + x_5\varphi_3)\tau = 0.$$

$$a^* = a.$$

Уравнение

$$dA = \omega^1e_1 - (x_3\omega^1 - z_3\omega_3^2)e_3, \qquad (5,18)$$

при $\omega_3^1 = 0$, вполне интегрируемо. Геометрическое место центров лучей, принадлежащих конгруэнции $\omega_3^1 = 0$, есть цилиндрическая поверхность. Дифференциал $dp = -x_3\omega_3^1p$ параллелен направляющему вектору $p = e_1 - x_3e_3$ прямолинейной образующей цилиндра (5,18). Все цилиндры, определяемые уравнением (5,18), имеют образующие, параллельные вектору p. Цилиндры комплекса вырождаются в плоскости и касаются цилиндров (5,18).

Найдем огибающую всех плоскостей, секущих цилиндры (5,18) по прямолинейным образующим и проходящих через их нормали e_2. Радиус-вектор произвольной точки такой плоскости представляется в виде

$$P = A + ue_2 + vp. \qquad (5,19)$$

Если ввести вектор, перпендикулярный этой плоскости

$$q = [p, e_2] = x_3e_1 + e_3,$$

то дифференциал

$$dP = \omega^1e_1 + a\omega_3^1e_2 + \omega^3e_3 + du e_2 + dv p - uq\omega_3^2 - vx_3p\omega_3^1$$

(P — радиус-вектор точки огибающей) должен быть перпендикулярен вектору q. Из равенства нулю скалярного произведения

$$(dP, q) = \{z_3 - u(1 + x_3^2)\}\,\omega_3^2 = 0$$

следует, что огибающая задается уравнением

$$P = A + \frac{z_3}{1 + x_3^2}e_2 + vp.$$

Здесь $\dfrac{z_3}{1+x_3^2}$ — радиус кривизны ортогонального сечения цилиндра, а v — произвольный параметр. Так как

$$d\left(\frac{z_3}{1+x_3^2}\right)_{\omega_3^1=0}=\frac{\alpha_{10}}{1+x_3^2}\,\omega_3^2\neq 0,$$

то цилиндры (5,18) не являются круговыми. Плоскости (5,19) касаются огибающей по прямым, параллельным вектору p. Огибающая есть цилиндрическая поверхность. Цилиндры (5,18) ортогональны семейству касательных плоскостей огибающей, их можно назвать ее эвольвентами. Косинус угла между лучом комплекса и прямолинейными образующими цилиндров (5,18)

$$\cos(e_3, p)=-\frac{x_3}{\sqrt{1+x_3^2}}$$

изменяется, ввиду $dx_3=-(1+x_3^2)\,\omega_3^1$, только при переходе от эвольвенты к эвольвенте. Следовательно, чтобы построить комплекс

$$x_1=0,\ x_2=0,\ x_5=0,\ \alpha_6=0,$$

надо задать произвольный цилиндр (одна произвольная функция одного аргумента) и на каждой эвольвенте этого цилиндра провести двупараметрическое семейство касательных так, чтобы угол (вторая произвольная функция одного аргумента) между прямолинейными образующими и касательными изменялся только при переходе от эвольвенты к эвольвенте.

ЛИТЕРАТУРА

1. Петров А. З. Пространства Эйнштейна. Физматгиз. Москва, 1961.
2. Егоров И. П. О движениях в пространствах аффинной связности. Диссертация, МГУ, 1955.
3. Кручкович Г. И. Классификация трехмерных римановых пространств по группам движений. Успехи мат. наук, 9, вып. 1, 1954, 3—40.
4. Маськин Н. М. Группы инфинитезимальных преобразований линейчатых комплексов. Сиб. мат. журнал, 3, № 2, 1962, 229—243.
5. Барабошин Н. М. Дуально-конформное преобразование комплексов. Известия высш. уч. завед. Математика, № 3 (10), 1959, 22—29.
6. Щербаков Р. Н. Три лекции по дифференциальной геометрии. Томск, 1959.
7. Кованцов Н. И. Приложение идей неголономной геометрии к линейчатому комплексу. Укр. мат. журнал, 6, № 3. 1954, 270—281.
8. Фиников С. П. Метод внешних форм Картана. ГИТТЛ, М-Л, 1948.
9. Маськин Н. М. Группы движений линейчатых комплексов. Ученые зап. Бур. гос. пед. ин-та, вып. XIX, 1960, 29—42.
10. Эйзенхарт Л. П. Непрерывные группы преобразований. ГИИЛ, Москва, 1947.
11. Фиников С. П. Геометрия комплекса прямых. Учен. зап. Моск. государ. пед. ин-та. каф. математики, вып. 1, 1940, 3—26.
12. Щербаков Р. Н. Построение метрической теории комплекса прямых при помощи репеража линейчатых подмногообразий. Вопросы математики, (Труды Томского ун-та, (155), 1961, 3-24.
13. Haack W. Differentialgeometrie der Strahlenkomplexe. Math. Zeitschr., 43, 1937, 228—247.
14. Haack W. Differentialgeometrie der Strahlenkomplexe. Math. Zeitschr. 40, 1935, 560—581, 703—718.

ТРУДЫ ТОМСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА
имени В. В. КУЙБЫШЕВА

Том 168 Серия механико-математическая

А. А. ЛУЧИНИН

КОНГРУЭНЦИИ, РАССЛАИВАЮЩИЕСЯ НА СЕМЕЙСТВА ЛИНЕЙЧАТЫХ ПОВЕРХНОСТЕЙ W

Если поверхность евклидова пространства несет на себе семейство линий с постоянными инвариантами линии на поверхности, то эти поверхности являются поверхностями вращения или их обобщениями [ ]. В работах [1] и [2] изучаются поверхности, несущие на себе семейство линий с постоянными проективными или аффинными инвариантами. Аналогичную задачу можно рассматривать в теории конгруэнций. Ранее были изучены конгруэнции, расслаивающиеся на семейства линейчатых поверхностей с постоянными аффинными инвариантами [3]. Эта работа посвящена изучению конгруэнций, расслаивающихся на семейство линейчатых поверхностей с постоянными евклидовыми инвариантами поверхности, принадлежащей данной конгруэнции.

Определение. Линейчатые поверхности, у которых все инварианты постоянны, называются поверхностями W.

Линейчатые поверхности W уже изучались ранее. Класс поверхностей W состоит из цилиндров с постоянными a^*, p^*, поверхностей вращения второго порядка и геликоидов [4]. Так как в рассматриваемом репере цилиндрические конгруэнции исключены из рассмотрения, то в нашем случае будут фигурировать только поверхности вращения второго порядка и геликоиды.

Отнесем конгруэнцию к реперу, построенному Р. Н. Щербаковым [5]. Этот репер является полуканоническим, то есть линейчатые поверхности $\omega_1^3\omega_2^3=0$ образуют произвольную сеть линейчатых поверхностей с ортогональными сферическими изображениями. Деривационные формулы этого репера имеют вид:

$$\begin{aligned}
d\bar{A}&=(a\,\omega_1^3+b\,\omega_2^3)\,\bar{e}_1+(b'\,\omega_1^3-a\,\omega_2^3)\,\bar{e}_2+(p\,\omega_1^3+q\,\omega_2^3)\,\bar{e}_3,\\
d\bar{e}_1&=(h\,\omega_1^3+k\,\omega_2^3)\,\bar{e}_2+\omega_1^3\,\bar{e}_3,\\
d\bar{e}_2&=-(h\,\omega_1^3+k\,\omega_2^3)\,\bar{e}_1+\omega_2^3\,\bar{e}_3,\\
d\bar{e}_3&=-\omega_1^3\,\bar{e}_1-\omega_2^3\,\bar{e}_2.
\end{aligned}\tag{1}$$

Условия совместности системы уравнений (1) имеют вид:

$$D\omega_1^3=h\,[\omega_1^3\omega_2^3],\ D\omega_2^3=k\,[\omega_1^3\omega_2^3],\tag{2}$$

$$[dh\,\omega_1^3]+[dk\,\omega_2^3]+(h^2+k^2+1)\,[\omega_1^3\omega_2^3]=0,$$

$$[dp\,\omega_1^3]+[dq\,\omega_2^3]+(b-b'+ph+qk)\,[\omega_1^3\omega_2^3]=0,\tag{3}$$

$$[da\,\omega_1^3] + [db\,\omega_2^3] + \{(b+b')\,k - q + 2\,ah\}[\omega_1^3\omega_2^3] = 0,$$

$$[db'\,\omega_1^3] - [da\,\omega_2^3] + \{(b+b')\,h + p - 2\,ak\}\,[\omega_1^3\omega_2^3] = 0.$$

Полагая

$$\omega_2^3 = 0,\ ds = \omega_1^3,\ (h)_{\omega_2^3=0} = \eta,$$
$$(a)_{\omega_2^3=0} = \alpha,\ (b')_{\omega_2^3=0} = \beta,\ (p)_{\omega_2^3=0} = \pi, \tag{4}$$

получим деривационные формулы канонического репера линейчатой поверхности, принадлежащей данной конгруэнции:

$$\frac{d\bar{A}}{ds} = \alpha\bar{e}_1 + \beta\bar{e}_2 + \pi\bar{e}_3,\ \frac{d\bar{e}_1}{ds} = \eta\bar{e}_2 + \bar{e}_3,\ \frac{d\bar{e}_2}{ds} = -\eta\bar{e}_1,\ \frac{d\bar{e}_3}{ds} = -\bar{e}_1. \tag{5}$$

Имеем

$$a^* = -\frac{d\alpha}{ds} - \pi,\ b^* = -\eta,\ p^* = -\beta, \tag{6}$$

где a^*, b^*, p^* — инварианты канонического репера линейчатой поверхности [5].

Если линейчатая поверхность, принадлежащая данной конгруэнции, имеет постоянные инварианты α, β, π, η, то эта поверхность является поверхностью W. В самом деле, если инварианты линейчатой поверхности, принадлежащей данной конгруэнции, постоянны, то $\alpha = \text{const.}$, $\beta = \text{const.}$, $\pi = \text{const}$, $\eta = \text{const.}$, тогда из соотношений (6) получаем $a^* = \text{const.}$, $b^* = \text{const.}$, $p^* = \text{const.}$, что и доказывает наше утверждение.

Условия того, что координатная линейчатая поверхность $\omega_2^3 = 0$ имеет постоянные инварианты α, β, π, η, могут быть записаны в виде:

$$[dh\,\omega_2^3] = 0,\ [da\,\omega_2^3] = 0,\ [db'\,\omega_2^3] = 0,\ [dp\,\omega_2^3] = 0. \tag{7}$$

Внося уравнения (7) в систему (3) и проделав несложные выкладки, получаем, что, если координатные линейчатые поверхности не являются цилиндроидами (то есть $hk \neq 0$), то задача имеет решение и определяет искомые конгруэнции с произволом в четыре функции одного аргумента системой:

$$b' = ph,$$

$$dh = h_2\,\omega_2^3,\qquad da = \left\{\frac{2\,a}{h}\,h_2 - q - \frac{kp}{h} - \frac{2\,a}{h}\right\}\omega_2^3,$$

$$dp = \left\{-\frac{p}{h}\,h_2 + \frac{p}{h} - \frac{2\,ak}{h} + b + ph\right\}\omega_2^3,$$

$$dk = \{h_2 - k^2 - h^2 - 1\}\,\omega_1^3 + k_2\,\omega_2^3,$$

$$db = \left\{\frac{2\,a}{h}\,h_2 - \frac{kp}{h} - \frac{2\,a}{h} - 2\,ah - (b+ph)\,k\right\}\omega_1^3 + b_2\,\omega_2^3,$$

$$dq = \left\{-\frac{p}{h}\,h_2 + \frac{p}{h} - \frac{2\,ak}{h} + ph - qk\right\}\omega_1^3 + q_2\,\omega_2^3,$$

$$[dh_2\,\omega_2^3] = -h_2 k\,[\omega_1^3\omega_2^3].$$

$$\frac{2\,a}{h}\,[dh_2\,\omega_1^3] + [db_2\,\omega_2^3] = \left\{\frac{2\,a}{h^2}\,h_2^2 - \frac{2\,q}{h}\,h_2 - \frac{6\,a}{h^2}\,h_2 - 8\,ah_2 + 2\,\frac{ak^2}{h^2} - \frac{kb}{h} - \right.$$
$$- \frac{p}{h}\,k_2 - (b+ph)\,k_2 - 2\,kb_2 + \frac{kp}{h^2} + \frac{4\,a}{h^2} + \frac{2\,q}{h} + 2\,qh + kp + 6\,a + \tag{8}$$
$$\left. + 2\,ah^2 + 2\,ak^2\right\}[\omega_1^3\omega_2^3],$$

$$[dh_2\,\omega_1^3] + [dk_2\,\omega_2^3] = \{-3\,hh_2 - 3\,kk_2 + h^3 + k^2h + h\}\,[\omega_1^3\omega_2^3],$$

$$-\frac{p}{h}\,[dh_2\,\omega_1^3] + [dq_2\,\omega_2^3] = \left\{-\frac{2\,a}{h}k_2 + 2\,\frac{kq}{h} + 2\,\frac{k^2q}{h^2} - qk_2 - 2\,kq_2 + \right.$$
$$\left. + qhk + 2\,\frac{p}{h^2}\,h_2^2 - 3\,\frac{p}{h^2}\,h_2 - \frac{b}{h}\,h_2 + \frac{p}{h^2} + 2\,\frac{ak}{h^2} + p + \frac{b}{h} + hb\right\}[\omega_1^3\omega_2^3].$$

Линейчатые поверхности W являются в этом случае однополостными гиперболоидами вращения. Их локальное уравнение имеет вид:

$$x^2 + y^2 - \frac{z^2}{a^2\eta^2} - 2\,\frac{\alpha}{a^2\,\eta}\,z - \pi^2 - \frac{\alpha^2}{a^2} = 0, \tag{9}$$

где $a^2 = 1 + \eta^2$.

Теперь рассмотрим случаи, исключенные выше.

1. Случай $k = 0$. Если $k = 0$, то линейчатые поверхности $\omega_1^3 = 0$, ортогональные линейчатым поверхностям W, являются цилиндроидами. В этом случае искомые конгруэнции определяются с произволом в две функции одного аргумента системой уравнений:

$$k = 0,$$
$$da = (2\,ah - q)\,\omega_2^3,\ dp = (ph - b' + b)\,\omega_2^3,$$
$$db' = \{(b+b')\,h + p\}\,\omega_2^3,\ dh = (1+h^2)\,\omega_2^3, \tag{10}$$
$$[db\,\omega_2^3] = 0,\ [dq\,\omega_2^3] = 0.$$

2. Случай $h = 0$. Если $h = 0$, то из уравнений (3) и (7) получаем

$$2a + kp = 0.$$

Дифференцируя это соотношение и используя уравнения (3) и (7), получаем

$$p\,(k^2 + 1) = 0.$$

Отсюда получаем следующие случаи.

А). Если $p = 0$, $k^2 + 1 \neq 0$, то искомые конгруэнции определяются с произволом в три функции одного аргумента системой уравнений

$$h = p = a = 0,\quad db' = 0,$$
$$[dk\omega_2^3] = -(1+k^2)\,[\omega_1^3\omega_2^3],\ [dq\omega_2^3] = (b' - b - qk)\,[\omega_1^3\omega_2^3].$$
$$[db\omega_2^3] = \{q - (b+b')\,k\}\,[\omega_1^3\omega_2^3] \tag{11}$$

Для линейчатых поверхностей $\omega_2^3 = 0$ имеем

$$\alpha = \pi = \eta = 0,$$

следовательно, эти поверхности являются прямыми геликоидами.

Конгруэнции, содержащие ∞^1 прямых геликоидов, изучены Р. Н. Щербаковым (см. [5] стр. 74). Полученные конгруэнции выделяются из них тем свойством, что линейчатые поверхности $\omega_1^3 = 0$ являются распределительными. Это свойство является характеристическим.

В). Если $k^2 + 1 = 0$, $p \neq 0$, то искомые конгруэнции (они, конечно, не содержат действительных лучей) определяются с произволом в три функции одного аргумента системой уравнений:

$$h = 0,\ k^2 + 1 = 0,\ 2a + kp = 0,\ db' = 0.$$

$$[dp\omega_2^3] = 0,$$

$$k\,[dp\omega_1^3] - 2\,[db\omega_2^3] + \{2q - 2k\,(b + b')\}\,[\omega_1^3\omega_2^3] = 0. \tag{12}$$

$$[dp\omega_1^3] + [dq\omega_2^3] + (b - b' + qk)\,[\omega_1^3\omega_2^3] = 0.$$

Для определения линейчатых поверхностей $\omega_2^3 = 0$ имеем следующую систему дифференциальных уравнений с постоянными инвариантами

$$\frac{d\bar{A}}{ds} = \alpha\bar{e}_1 + \beta\bar{e}_2 + \pi\bar{e}_3, \quad \frac{d\bar{e}_1}{ds} = \bar{e}_3, \quad \frac{d\bar{e}_2}{ds} = 0, \quad \frac{d\bar{e}_3}{ds} = -\bar{e}_1.$$

Интегрируя эту систему, получаем, что линейчатые поверхности $\omega_2^3 = 0$ являются мнимыми цилиндроидами

$$x\cos\frac{z}{\beta} + y\sin\frac{z}{\beta} - \pi = 0, \tag{13}$$

так как π здесь—мнимая величина.

ЛИТЕРАТУРА

1. Лучинин А. А. Об одном аналоге поверхностей вращения в проективной геометрии. Геометрический сборник, вып. 1 (Труды ТГУ, т. 160). 1962, 45—57.
2. Лучинин А. А. Об одном аналоге поверхностей вращения в аффинной геометрии. Геометрический сборник, вып. 1 (Труды ТГУ, т. 160). 1962, 90—96.
3. Лучинин А. А. Конгруэнции, расслаивающиеся на семейства линейчатых поверхностей с постоянными аффинными инвариантами. Геометрический сборник, вып. 2 (Труды ТГУ, т. 161, 65—75).
4. Фавар Ж. Курс локальной дифференциальной геометрии. И. Л., 1960, стр. 374.
5. Щербаков Р. Н. Репер линейчатой поверхности, принадлежащей данной конгруэнции (метрическая теория). Уч. зап. Бур. Монг. гос. пед. ин-та, вып. V, 1954, 61—89.

ТРУДЫ ТОМСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА
имени В. В. КУЙБЫШЕВА

Том 168 Серия механико-математическая

В предыдущем геометрическом сборнике освещена работа семинара до 11 мая 1961 г. Ниже приводится перечень докладов, заслушанных в течение следующего года.

18. 5. 1961 г. Н. М. Онищук. Репераж подмногообразий в центроаффинной теории пары, состоящей из поверхности и конгруэнции.

18. 5. 1961 г. В. С. Малаховский. Канонический репер конгруэнции центральных кривых в эквиаффинной геометрии.

25. 5. 1961 г. Е. Т. Ивлев. Репераж подмногообразий в теории параболических пар комплексов в P_3.

25. 05. 1961 г. Р. Н. Щербаков. Комплексы с совпадающими метрическими и аффинными реперами.

21. 9. 1961 г. Н. М. Маськин (Улан-Удэ). Бесконечно-малые преобразования комплексов

5. 10. 1961 г. Н. М. Онищук. О конгруэнции парабол в центроаффинной геометрии.

12. 10. 1961 г. В. С. Малаховский. Одномерные многообразия коник в P_3.

19. 10. 1961 г. В. С. Малаховский. Канонический репер конгруэнций кривых второго порядка в P_3.

26. 10. 1961 г. Л. И. Магазинников. Центроаффинная теория прямолинейной конгруэнции.

2. 11. 1961 г. Р. Н. Щербаков. О проективном полуканоническом репере линейчатого комплекса.

16. 11. 1961 г. Е. Т. Ивлев, М. Б. Пергаменщиков. Эквиаффинная теория пар линейчатых поверхностей.

7. 12. 1961 г. Е. Т. Ивлев. Эквиаффинный канонический репер пары комплексов трехмерного пространства.

14. 12. 1961 г. В. В. Васенин. Параболические неголономные многообразия.

21. 12. 1961 г. М. Р. Вайнтруб (Томская область). Одномерные сферические многообразия.

28. 12. 1961 г. В. К. Ионин. Некоторые экстремальные задачи для выпуклой поверхности.

18. 1. 1962 г. В. С. Малаховский. Теория конгруэнций кривых второго порядка в проективном пространстве.

15. 2. 1962 г. Н. М. Маськин (Улан-Удэ). Некоторые классы комплексов, допускающие дуально конформные бесконечно малые преобразования.

22. 2. 1962 г. Е. Т. Ивлев. Эквиаффинная теория пар конгруэнций трехмерного пространства.

1. 3. 1962 г. А. А. Лучинин. Конгруэнции, расслаивающиеся на семейство линейчатых поверхностей с постоянными проективными инвариантами.

15. 3. 1962 г. В. В. Васенин. К эквиаффинной теории троек неголономных поверхностей.

29. 3. 1962 г. В. А. Романович. Об одном классе пар конгруэнций в P_3.

5. 4. 1962 г. В. А. Романович. Пара однопараметрических семейств p-1-мерных плоскостей в $P^{=}$, расслаивающиеся двумя семействами кривых.

26. 4. 1962 г. Р. Н. Щербаков. О методе репеража подмногообразий в линейчатой геометрии.

26. 4. 1962 г. Р. А. Резниченко. Об одном эквиаффинно-инвариантном классе пар конгруэнций.

ОГЛАВЛЕНИЕ

ГЕОМЕТРИЧЕСКИЙ СБОРНИК, ВЫПУСК 3

Редактор издательства М. И. Волкова

Корректоры В. А. Малаховская, М. И. Сваровская

К302414. Сдано в набор 16/VIII-63 г. Подписано к печати 7/XII-63 г.
Бумага $70 \times 108^1/_{16}$. Тираж 500. Заказ 4495-63.
Объем 11,75 п. л., 5,88 бум. л.; 16,0 уч.-изд. л.
Цена 1 р. 12 к., в переплете 1 р. 27 к.
Издательство Томского университета, пр. Ленина, 34.

Типография № 1 Полиграфиздата, Томск, ул. Советская, 47.