

# УЧЕНЫЕ ЗАПИСКИ

САРАТОВСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА  
ИМ. Н. Г. ЧЕРНЫШЕВСКОГО

Т. XV

вып. 5

ГИДРАВЛИКА

---

---

## ABHANDLUNGEN

DER TSCHERNYSCHIEWSKY - STAATSUNIVERSITÄT SARATOW


BAND XV

Heft 5

HYDRAULIK

---

---

19  40

САРАТОВСКОЕ ОБЛАСТНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ ИЗДАТЕЛЬСТВО  
САРАТОВ

УЧЕНЫЕ ЗАПИСКИ  
САРАТОВСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА  
им. Н. Г. Чернышевского

Том. XV. Вып. 5

*ГИДРАВЛИКА*

---

ABHANDLUNGEN

DER TSCHERNYSCHIEWSKY-STAATSUNIVERSITÄT SARATOW

BAND XV

Heft 5

*HYDRAULIK*

---

19  40

САРАТОВСКОЕ ОБЛАСТНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ ИЗДАТЕЛЬСТВО  
САРАТОВ

## Гидравлика грунтовых вод

(Часть третья)<sup>1</sup>

*Б. К. Ризенкампф*

### ГЛАВА IV

#### Метод проф. П. Я. Полубариновой-Кочиной

##### § 24. Предварительные замечания

В настоящей главе мы продолжим рассмотрение плоского установившегося потока грунтовых вод, текущего параллельно вертикальной плоскости.

Как и раньше, мы будем предполагать, что поток ограничен свободной поверхностью и прямолинейными отрезками, вдоль которых выполняются известные уже нам граничные условия. При этих условиях, как мы знаем, контур плана скоростей состоит из отрезков прямых и дуг окружностей.

В § 21 мы показали, что если прямые и окружности плана имеют общую точку, то задача о движении грунтовых вод может быть решена сравнительно просто при помощи формулы Шварца-Кристоффеля.

Если такой точки не существует, то формула Шварца-Кристоффеля становится неприменимой. В этом случае, однако, задачу о движении грунтовых вод удаётся, как известно (§§ 19 и 20), свести к задаче Дирихле о нахождении одной из трех гармонических функций

$$\arg \frac{dz}{d\zeta}, \arg \frac{dw}{d\zeta} \text{ и } \arg \frac{d\omega}{d\zeta},$$

регулярных в некоторой области плоскости переменного  $\zeta$ , по значениям ее на контуре этой области.

К сожалению, этот метод приводит на практике к очень громоздким вычислениям, вследствие чего значение его не велико.

Недавно проф. П. Я. Полубаринова-Кочина предложила новый метод решения указанных здесь задач, основанный на применении аналитической теории линейных дифференциаль-

<sup>1</sup> Части первая и вторая напечатаны в Уч. Зап. СГУ, т. I (XIV), 1938 г., серия ФМИ, вып. 1 (стр. 89—114) и вып. 2 (стр. 181—205).

ных уравнений<sup>1</sup>. Так как он приводит на практике к менее громоздким вычислениям и обладает, сравнительно со старым методом, рядом других преимуществ, то ниже мы займемся подробным его рассмотрением.

### § 25. Некоторые сведения из аналитической теории линейных дифференциальных уравнений

Так как метод проф. П. Я. Полубариновой-Кочиной тесно связан со свойствами решений линейного однородного уравнения

$$\frac{d^2u}{dt^2} + P(t) \frac{du}{dt} + Q(t)u = 0, \quad (90)$$

то представляется целесообразным дать здесь некоторые сведения, касающиеся теории таких уравнений<sup>2</sup>.

Мы будем предполагать, что коэффициенты  $P(t)$  и  $Q(t)$  — однозначные аналитические функции, имеющие лишь изолированные особые точки.

Всякая точка  $t$ , лежащая на конечном расстоянии, в которой обе функции  $P(t)$  и  $Q(t)$  регулярны, называется обыкновенной точкой уравнения. Если  $t = \infty$ , то мы преобразуем уравнение (90) при помощи подстановки

$$t = \frac{1}{\tau}.$$

Преобразованное уравнение будет иметь вид

$$\frac{d^2u}{d\tau^2} + \left[ \frac{2}{\tau} - \frac{1}{\tau^2} P\left(\frac{1}{\tau}\right) \right] \frac{du}{d\tau} + \frac{1}{\tau^4} Q\left(\frac{1}{\tau}\right) u = 0. \quad (91)$$

Мы скажем, что точка  $t = \infty$  есть обыкновенная точка уравнения (90), если коэффициенты преобразованного уравнения (91) будут функции, регулярные в точке  $\tau = 0$ .

Точки, не являющиеся обыкновенными, называются особыми точками уравнения.

Мы будем считать известным, что при указанных выше условиях уравнение (90) всегда имеет два линейно независимых решения  $u_1$  и  $u_2$ , представляющие собою аналитические функции переменного  $t$ , регулярные вне особых точек уравнения.

Общее решение уравнения (90) представляется в форме

$$u = c_1 u_1 + c_2 u_2,$$

где  $c_1$  и  $c_2$  — произвольные постоянные.

<sup>1</sup> П. Я. Полубаринова-Кочина. Применение теории линейных дифференциальных уравнений к некоторым случаям движения грунтовой воды. Известия Акад. Наук СССР, отд. мат. и ест. наук, 1938 г., № 3, стр. 271—395.

<sup>2</sup> В этой работе автор сообщает, что основная идея метода — применение теории линейных уравнений — принадлежит академику Н. Е. Кочину.

<sup>3</sup> Более подробные сведения можно найти, напр., в Курсе Высш. Мат. проф. В. И. Смирнова, ГОНТИ, 1939 г., т. III, гл. VIII, стр. 530.

Если точка  $t$  опишет простой замкнутый путь, не содержащий внутри себя особых точек уравнения, то функции  $u_1$  и  $u_2$  примут, очевидно, в конце пути свои первоначальные значения. При обходе особой точки уравнения по замкнутому пути, этого, вообще говоря, не будет, так как особые точки уравнения являются обычно точками разветвления его решений.

Предположим, что после обхода одной из особых точек уравнения по замкнутому пути в положительном направлении (противоположном направлению хода часовой стрелки) функции  $u_1$  и  $u_2$  обратились в некоторые новые функции  $u_1^*$  и  $u_2^*$ . Так как последние являются также решениями уравнения (90), то должны иметь место линейные соотношения вида

$$u_1^* = a u_1 + b u_2, \quad (92)$$

$$u_2^* = c u_1 + d u_2,$$

в которых  $a$ ,  $b$ ,  $c$  и  $d$  — некоторые постоянные. Мы будем говорить, что функции  $u_1$  и  $u_2$  испытывают при обходе особой точки уравнения линейную подстановку (92).

Легко видеть, что

$$ad - bc \neq 0, \quad (93)$$

ибо в противном случае отношение функций  $u_1^*$  и  $u_2^*$  было бы постоянным, что невозможно, так как, по предположению, функции  $u_1$  и  $u_2$  линейно независимы.

Попробуем теперь построить такое решение уравнения (90), которое при обходе особой точки в положительном направлении умножается на некоторый постоянный множитель  $\lambda$ , т. е. для которого

$$u^* = \lambda u. \quad (94)$$

Такое решение должно выражаться линейно через  $u_1$  и  $u_2$ . Следовательно

$$u = \alpha u_1 + \beta u_2, \quad (95)$$

где  $\alpha$  и  $\beta$  — некоторые постоянные, которые должны быть определены так, чтобы было

$$\alpha u_1^* + \beta u_2^* = \lambda (\alpha u_1 + \beta u_2).$$

Отсюда, в силу соотношений (92), получим

$$\alpha (a u_1 + b u_2) + \beta (c u_1 + d u_2) = \lambda (\alpha u_1 + \beta u_2),$$

и далее

$$[(a - \lambda) \alpha + c \beta] u_1 + [b \alpha + (d - \lambda) \beta] u_2 = 0.$$

Так как функции  $u_1$  и  $u_2$  линейно независимы, то это равенство возможно лишь при условии, что

$$\begin{aligned} (a - \lambda) \alpha + c \beta &= 0, \\ b \alpha + (d - \lambda) \beta &= 0. \end{aligned} \quad (96)$$

Чтобы получить отсюда значения  $\alpha$  и  $\beta$ , отличные от нуля, мы должны, очевидно, потребовать, чтобы  $\lambda$  было корнем квадратного уравнения

$$\begin{vmatrix} a - \lambda & c \\ b & d - \lambda \end{vmatrix} = 0. \quad (97)$$

Это уравнение называется обыкновенно характеристическим. В силу неравенства (93), корни его, которые мы обозначим через  $\lambda_1$  и  $\lambda_2$ , всегда отличны от нуля. Вычислив один из них, например  $\lambda_1$ , мы определим по уравнениям (96) постоянные  $\alpha$  и  $\beta$ , а вместе с тем и искомое решение (95), получающее при обходе особой точки уравнения (90) постоянный множитель  $\lambda_1$ .

Если  $\lambda_1 \neq \lambda_2$ , то мы будем иметь два таких решения. Они линейно независимы, так как отношение их получает при обходе особой точки множитель  $\frac{\lambda_1}{\lambda_2} \neq 1$ .

Легко получить аналитическое представление этих решений в окрестности особой точки уравнения.

Для простоты мы предположим, что одной из особых точек уравнения является точка  $t=0$ . Пусть, далее,  $u_1(t)$  и  $u_2(t)$  означают впрямь интересующие нас решения. Рассмотрим функции

$$t^{r_1} \text{ и } t^{r_2},$$

где

$$r_1 = \frac{\ln \lambda_1}{2\pi i} \text{ и } r_2 = \frac{\ln \lambda_2}{2\pi i}. \quad (98)$$

Подобно функциям  $u_1(t)$  и  $u_2(t)$ , они приобретают при обходе точки  $t=0$  множителей  $\lambda_1$  и  $\lambda_2$ . Но тогда отношения

$$\frac{u_1(t)}{t^{r_1}} \text{ и } \frac{u_2(t)}{t^{r_2}}$$

должны быть в окрестности точки  $t=0$  однозначными функциями от  $t$  и, следовательно, могут быть представлены там рядами Лорана.

Отсюда ясно, что в случае  $\lambda_1 \neq \lambda_2$  решения  $u_1$  и  $u_2$  представляются в окрестности особой точки  $t=0$  разложениями вида

$$\begin{aligned} u_1 &= t^{r_1} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k t^k, \\ u_2 &= t^{r_2} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} b_k t^k. \end{aligned} \quad (99)$$

<sup>1</sup> Вследствие многозначности логарифма, числа  $r_1$  и  $r_2$  определены лишь с точностью до целых слагаемых.

При обходе особой точки они испытывают так называемую каноническую подстановку

$$\begin{aligned} u_1^* &= \lambda_1 u_1, \\ u_2^* &= \lambda_2 u_2 \end{aligned}$$

с определителем

$$\begin{vmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{vmatrix} \neq 0.$$

Рассмотрим теперь случай, когда корни характеристического уравнения (97) одинаковы, т. е.  $\lambda_1 = \lambda_2$ . В этом случае мы будем иметь одно решение, удовлетворяющее условию

$$u_1^* = \lambda_1 u_1. \quad (100)$$

Любое другое решение  $u_2$ , линейно независимое от  $u_1$ , испытывает при обходе особой точки линейную подстановку вида

$$u_2^* = c u_1 + d u_2.$$

Характеристическое уравнение будет теперь

$$\begin{vmatrix} \lambda_1 - \lambda & 0 \\ c & d - \lambda \end{vmatrix} = 0.$$

Так как, по предположению, оно имеет двойной корень  $\lambda_1$ , то должно быть выполнено условие  $d = \lambda_1$ . Таким образом, при обходе особой точки второе решение обращается в

$$u_2^* = c u_1 + \lambda_1 u_2. \quad (101)$$

Из (100) и (101) следует, что отношение  $\frac{u_2}{u_1}$  при обходе особой точки переходит в

$$\frac{u_2^*}{u_1^*} = \frac{u_2}{u_1} + \frac{c}{\lambda_1},$$

т. е. получает приращение  $\frac{c}{\lambda_1}$ . Такое же приращение получает при обходе особой точки  $t=0$  уравнения (90) и функция

$$\frac{c}{\lambda_1 2\pi i} \ln t.$$

Следовательно, разность

$$\frac{u_2}{u_1} - \frac{c}{\lambda_1 2\pi i} \ln t$$

есть функция однозначная в окрестности точки  $t=0$  и может быть поэтому разложена там в ряд Лорана.

Принимая во внимание, что  $u_1$  должно иметь теперь, как и раньше, вид (99), мы получим в случае  $\lambda_1 = \lambda_2$  следующее пред-

ставление решений  $u_1$  и  $u_2$  в окрестности особой точки  $t=0$ :

$$\begin{aligned} u_1 &= t^{r_1} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k t^k, \\ u_2 &= t^{r_2} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} b_k t^k + cu_1 \ln t, \end{aligned} \quad (102)$$

где  $c$  — некоторая постоянная, иногда равная нулю.

Относительно решений вида (99) или (102) говорят, что они образуют каноническую систему решений уравнения (90) для особой точки  $t=0$ .

Может случиться, что ряды Лорана, входящие в формулы (99) или (102), будут содержать лишь конечное число членов с отрицательными степенями. В этом случае особая точка уравнения называется регулярной особой точкой. Принимая тогда во внимание, что числа  $r_1$  и  $r_2$ , называемые показателями особой точки, определены лишь с точностью до целых слагаемых, мы можем изменить их значения так, чтобы наши ряды не содержали членов с отрицательными степенями.

Отсюда следует, что в окрестности регулярной особой точки  $t=0$  каноническая система решений уравнения (90) может быть представлена в виде

$$\begin{aligned} u_1 &= t^{r_1} \sum_{k=0}^{\infty} a_k t^k, \\ u_2 &= t^{r_2} \sum_{k=0}^{\infty} b_k t^k + cu_1 \ln t, \end{aligned} \quad (103)$$

где в случае, когда  $r_1 - r_2$  не есть целое число или нуль, следует положить  $c=0$ .

До сих пор мы предполагали, что особая точка уравнения лежит на конечном расстоянии. Чтобы получить выражения для решений уравнения (90) в окрестности бесконечно удаленной особой точки, достаточно ввести вместо  $t$  новую переменную

$$\tau = \frac{1}{t}.$$

Уравнение (90) перейдет тогда в уравнение (91) и дело сведется к построению решений последнего в окрестности точки  $\tau=0$ .

## § 26. О применении теории линейных дифференциальных уравнений к изучению движения грунтовых вод

Предположим, что область течения грунтовой воды односвязна. Отобразим ее конформно на верхнюю полуплоскость

вспомогательного комплексного переменного  $t$  и введем в рассмотрение связанные с этим отображением функции

$$z_1(t) = \frac{dz}{dt} \quad \text{и} \quad w_1(t) = \frac{dw}{dt}, \quad (104)$$

где  $z$  — аффикс некоторой точки потока, а  $w$  — комплексная потерянная высота.

Если нам удастся каким-либо образом определить эти функции, то задачу о движении грунтовых вод можно будет, очевидно, считать в основном решенной.

Ниже мы увидим, что функции  $z_1(t)$  и  $w_1(t)$  выгодно рассматривать, как решения некоторого линейного однородного дифференциального уравнения второго порядка

$$u'' + P(t)u' + Q(t)u = 0. \quad (105)$$

Если исключить из рассмотрения случай, когда комплексная скорость

$$w' = \frac{dw}{dz} = \frac{w_1}{z_1}$$

постоянна, то функции  $z_1$  и  $w_1$  будут линейно независимы. Уравнение (105) представится тогда, как известно, в виде

$$\begin{vmatrix} u & z_1 & w_1 \\ u' & z_1' & w_1' \\ u'' & z_1'' & w_1'' \end{vmatrix} = 0$$

или

$$u'' - \frac{z_1 w_1'' - z_1'' w_1}{z_1 w_1' - z_1' w_1} u' + \frac{z_1' w_1'' - z_1'' w_1'}{z_1 w_1' - z_1' w_1} u = 0.$$

В дальнейшем (§ 28) мы покажем, что уравнение (105) можно при известных условиях построить и не зная функций  $z_1(t)$  и  $w_1(t)$ . Тогда задача о движении грунтовых вод сведется, очевидно, к интегрированию этого уравнения.

Для построения уравнения (105) необходимо знать особенности его коэффициентов. Последние тесно связаны с особенностями функций  $z_1(t)$  и  $w_1(t)$ . К выяснению этих особенностей мы теперь и перейдем.

В § 20 мы показали, что если контур потока грунтовых вод состоит из прямолинейных отрезков и свободной поверхности, то на каждой части контура выполняются два условия вида

$$\begin{aligned} I(Mz + Nw) &= E, \\ I(M'z + N'w) &= E', \end{aligned} \quad (106)$$

где  $M, N, M'$  и  $N'$  — некоторые комплексные постоянные, а  $E$  и  $E'$  — действительные постоянные.

Докажем, следуя Б. Б. Девисону<sup>1</sup>, что если  $\frac{dw}{dz} \neq -1$  ( $K=1$ ), то на всех частях контура потока определитель  $MN' - M'N$  отличен от нуля.

<sup>1</sup> Philosophical Magazine, том XXI, май 1936 г., стр. 891.

В самом деле, на прямолинейных частях контура одно из соотношений (106) содержит только координаты  $x$  и  $y$ , тогда как другое соотношение содержит обязательно  $q$  или  $h$ . Поэтому  $M \neq 0$ ,  $N = 0$ ,  $N' \neq 0$  и, следовательно,  $MN' - M'N \neq 0$ . На свободной поверхности соотношения (106) обращаются в

$$I(z + w) = E, I(-icz + iw) = E',$$

где  $c$  — постоянная испарения (§ 11). Определитель  $MN' - M'N$  принимает при этом значение  $i(1+c)$ . Последнее может обратиться в нуль только при  $c = -1$ . В этом случае условия на свободной поверхности будут

$$I(z + w) = E, I(iz + iw) = E',$$

что возможно лишь тогда, когда во всех точках свободной поверхности, а, следовательно, и потока  $z + w(z) = E' + iE$ , т. е. поток движется вертикально вниз со скоростью, равной единице ( $K=1$ ). При этом  $\frac{dw}{dz} = -1$ . Таким образом, если исключить из рассмотрения этот неинтересный случай, то на каждой части контура потока будем иметь неравенство

$$MN' - M'N \neq 0.$$

Докажем теперь, что точкам соединения  $A, B, C$  и т. д. (черт. 40— $z$ ) различных частей контура потока соответствуют регулярные особые точки уравнения (105)<sup>1</sup>.

В самом деле, рассмотрим, например, части контура потока  $AB$  и  $BC$ , соединяющиеся в точке  $B$ . Предположим, что первая из них  $AB$  определяется граничными условиями

$$I(Mz + Nw) = E,$$

$$I(M'z + N'w) = E',$$

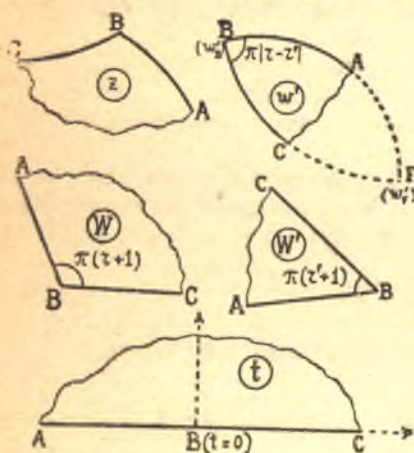
а вторая  $BC$  — условиями

$$I(Pz + Qw) = F,$$

$$I(P'z + Q'w) = F'.$$

Тогда, как известно из § 20, части  $AB$  контура соответствует в плоскости  $w'$  (черт. 40— $w'$ ) дуга  $AB$  окружности

$$I\left(\frac{M' + N'w'}{M + Nw'}\right) = 0, \quad (107)$$



Черт. 40.

<sup>1</sup> Последующие рассуждения этого параграфа принадлежат автору.

а части  $BC$  — дуга  $BC$  окружности

$$I\left(\frac{P' + Q'w'}{P + Qw'}\right) = 0. \quad (108)$$

Так как каждой точке потока, включая и контур его, должна соответствовать одна и только одна точка плоскости  $w'$ , то окружности (107) и (108) неминуемо должны иметь некоторую общую точку  $B$  (черт. 40— $w'$ ), отвечающую точке  $B$  потока. Мы предположим сначала, что эта точка лежит на конечном расстоянии и определяется аффиксом  $w'_B$ . В силу уравнений (107) и (108) мы должны иметь

$$I\left(\frac{M' + N'w'_B}{M + Nw'_B}\right) = 0, I\left(\frac{P' + Q'w'_B}{P + Qw'_B}\right) = 0. \quad (109)$$

Вычитая первое из этих равенств из (107) и замечая, что

$$\frac{M' + N'w'}{M + Nw'} - \frac{M' + N'w'_B}{M + Nw'_B} = \frac{MN' - M'N}{M + Nw'_B} \cdot \frac{w' - w'_B}{M + Nw'}$$

найдем:

$$I\left(\frac{MN' - M'N}{M + Nw'_B} \cdot \frac{w' - w'_B}{M + Nw'}\right) = 0$$

или

$$I\left(\frac{MN' - M'N}{M + Nw'_B} \cdot \frac{dw - w'_B dz}{M dz + N dw}\right) = 0,$$

где  $dz$  и  $dw$  — бесконечно малые векторы перемещения вдоль части контура  $AB$  в плоскостях  $z$  и  $w$ .

Вводя здесь переменное

$$W = w - w'_B z \quad (110)$$

(ср. § 21) и замечая, что  $I(Mdz + Ndw) = 0$ , получим

$$I\left(\frac{MN' - M'N}{M + Nw'_B} dW\right) = 0,$$

откуда, интегрируя, найдем

$$I\left(\frac{MN' - M'N}{M + Nw'_B} W\right) = \text{const.} \quad (111)$$

Так как коэффициент при  $W$  постоянен, то отсюда следует, что части  $AB$  контура потока соответствует в плоскости  $W$  (черт. 40— $W$ ) некоторый прямолинейный отрезок  $AB$ <sup>1</sup>.

<sup>1</sup> Ср. Б. Б. Девисон. Некоторые точные решения задачи о движении грунтовых вод, получаемые упрощенным приемом: Изв. АН СССР, отд. техн. наук, № 8-9, 1938 г.

Рассматриваемый в этой статье упрощенный прием решения задач о движении грунтовых вод по существу не отличается от метода, предложенного уже мною ранее в § 21 (часть 2-я) настоящего труда (см. Учен. Зап. Сарат. У-та, т. I (XIV), серия ФМИ, вып. 2, 1938 г., стр. 189).

Аналогично, вычитая из (108) второе из равенств (109), найдем, что части контура потока  $BC$  соответствует в плоскости  $W$  также некоторый прямолинейный отрезок  $BC$ .

Следовательно, области потока, примыкающей к части контура его  $ABC$  (черт. 40— $z$ ), отвечает в плоскости  $W$  некоторая область угла  $ABC$  (черт. 40— $W$ ), образованного только что найденными прямолинейными отрезками  $AB$  и  $BC$ . Этому углу соответствует, очевидно, некоторая область переменного  $t$  (черт. 40— $t$ ), примыкающая к отрезку  $ABC$  действительной оси. Если обозначить величину угла  $ABC$  (черт. 40— $W$ ) через  $\pi(r+1)$  и предположить, что точке  $B$  потока соответствует в плоскости  $t$  точка  $t=0$ , то, как известно из теории конформных отображений, связь между  $W$  и  $t$  определится в окрестности точки  $t=0$  разложением вида

$$\frac{dW}{dt} = w_1 - w'_B z_1 = t^r (a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + \dots), \quad (a_0 \neq 0) \quad (112)$$

где коэффициенты  $a_0, a_1, a_2, \dots$  постоянны.

Если окружности (107) и (108) имеют не одну, а две общие точки, лежащие на конечном расстоянии, то, обозначая вторую из них через  $w'_F$  (черт. 40— $w'$ ), мы введем в рассмотрение новую плоскость

$$W' = w - w'_F z \quad (113)$$

В этой плоскости частям контура потока  $AB$  и  $BC$  соответствуют, как и в плоскости  $W$ , прямолинейные отрезки, образующие некоторый новый угол  $ABC$  (черт. 40— $W'$ ), заключающий в себе отображение области течения, примыкающей к точке  $B$ .

Обозначая величину этого угла через  $\pi(r'+1)$  и строя отображение его на верхнюю полуплоскость  $t$ , мы получим новое разложение:

$$\frac{dW'}{dt} = w_1 - w'_F z_1 = t^{r'} (a'_0 + a'_1 t + a'_2 t^2 + \dots), \quad (a'_0 \neq 0) \quad (114)$$

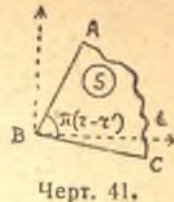
Так как функции  $w_1(t)$  и  $z_1(t)$  являются по предположению решениями уравнения (105), то разложения (112) и (114) должны быть также решениями его. Эти решения образуют, очевидно, каноническую систему решений уравнения (105) в окрестности регулярной особой точки  $t=0$  ( $B$ ). Величины  $r$  и  $r'$  являются показателями рассматриваемой нами особой точки.

Докажем теперь, что абсолютная величина произведения  $\pi(r-r')$  равна углу, образуемому дугами  $AB$  и  $BC$  (черт. 40— $w'$ ) в вершине  $B$  области  $w'$ .

В самом деле, обозначив отношение решений (112) и (114) через  $s$ , легко получим:

$$s = \frac{w'_1 - w'_B}{w_1 - w'_F} = t^{r-r'} (b_0 + b_1 t + \dots), \quad (b_0 = \frac{a_0}{a'_0} \neq 0)$$

Отсюда непосредственно видно, что в плоскости  $s$  углу  $ABC$  области  $w'$  соответствует угол  $\pi|r-r'|$ , ограниченный прямолинейными сторонами (черт. 41). Таков же будет, очевидно, и угол при вершине  $B$  области  $w'$ , ибо  $s$  связано у нас с  $w'$  дробно линейной зависимостью, при которой, как известно, углы не искажаются.



Черт. 41.

Полученный нами вывод сохраняет свою силу и в предельном случае, когда точки  $w'_B$  и  $w'_F$  сливаются. В этом случае вместо двух решений (112) и (114) мы получим указанным выше способом только одно решение (112). Чтобы получить второе, рассмотрим область плоскости комплексного переменного

$$\sigma = \frac{1}{w' - w'_B} = \frac{dz}{dw - w'_B dz} = \frac{z_1(t)}{dW},$$

соответствующую той части потока, которая примыкает к точке  $B$ . В этой плоскости касающимся в точке  $w'_B$  окружностям (107)

и (108) соответствуют параллельные прямые, а точке  $B$  потока—бесконечно удаленная точка плоскости  $\sigma$ . Отобразив названную область плоскости  $\sigma$  на верхнюю полуплоскость переменного  $t$  (черт. 40— $t$ ) получим, как легко разобраться, разложение вида

$$\frac{d\sigma}{dt} = t^{-1-m} (g_0 + g_1 t + \dots), \quad (g_0 \neq 0)$$

где  $m$ —целое положительное число или нуль. Отсюда, интегрируя, легко найдем, что при  $m > 0$

$$z_1(t) - C \frac{dW}{dt} = \frac{dW}{dt} \left( -\frac{g_0}{m} t^{-m} - \dots - g_{m-1} t^{-1} + g_m \ln t + g_{m+1} t + \frac{1}{2} g_{m+2} t^2 + \dots \right), \quad (115)$$

где  $C$ —произвольная постоянная.

При  $m=0$  будем иметь

$$z_1(t) - C \frac{dW}{dt} = \frac{dW}{dt} \left( g_0 \ln t + g_1 t + \frac{1}{2} g_2 t^2 + \dots \right) \quad (116)$$

Полученные разложения и определяют, очевидно, второе решение канонической системы решений в окрестности точки  $t=0$  ( $B$ ). Точка  $B$  ( $t=0$ ), как мы видим, и в этом случае есть регулярная особая точка.

Выше мы предположили, что точки  $w'_B$  и  $w'_F$  находятся на конечном расстоянии. Посмотрим, как должны быть изменены наши рассуждения в случае, когда хотя бы одна из этих точек



удаляется в бесконечность. Для этого заметим, что уравнение (111) можно всегда представить в виде

$$I \left[ \frac{MN - M'N}{M \frac{1}{w'_B} + N} \left( \frac{w}{w'_B} - z \right) \right] = \text{const.}$$

Удаляя точку  $w'_B$  в бесконечность, получим отсюда

$$I \left( \frac{MN - M'N}{N} z \right) = \text{const.} \quad (117)$$

Этот результат показывает, что если точка  $w'_B$  находится в бесконечности, то части  $AB$  и  $BC$  контура области  $z$  являются прямолинейными отрезками. Если назвать внутренний угол области  $z$ , образуемый этими отрезками, через  $\pi(r+1)$ , то одно из решений канонической системы решений уравнения (105) в окрестности точки  $B(t=0)$  будет

$$\frac{dz}{dt} = z_1(t) = t^r (a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + \dots). \quad (a_0 \neq 0) \quad (118)$$

Другое решение найдем по формуле (114) или по формулам, аналогичным формулам (115) и (116), в зависимости от того, будет ли точка  $w'_B$  расположена на конечном или бесконечном расстоянии. Подробнее мы рассмотрим случаи последнего рода в § 30.

Может случиться, что кроме особых точек  $A, B, C$  и т. д. действительной оси плоскости  $t$ , отвечающих точкам деления контура потока на отдельные части, уравнение (105) будет иметь еще и другие особые точки. Такие точки мы рассмотрим ниже в § 31.

### § 27. Теорема Фукса.

Мы сейчас докажем следующую важную теорему, данную Фуксом:

Чтобы точка  $t=t_0$  была регулярной особой точкой уравнения

$$u'' + P(t)u' + Q(t)u = 0, \quad (119)$$

необходимо и достаточно, чтобы коэффициент  $P(t)$  имел эту точку полюсом не выше первого порядка, а коэффициент  $Q(t)$  — полюсом не выше второго порядка, т. е. уравнение (119) должно иметь вид

$$u'' + \frac{p(t)}{t-t_0} u' + \frac{q(t)}{(t-t_0)^2} u = 0, \quad (120)$$

где  $p(t)$  и  $q(t)$  — функции, регулярные в точке  $t=t_0$ .

В самом деле, положим для простоты, что  $t_0=0$  и рассмотрим лишь случай, когда решения уравнения (119) имеют вид (99), так как случай решений вида (102) может быть разобран аналогично. Если  $t=0$  — регулярная особая точка, то решения (99) можно представить в форме

$$u_1 = t^{r_1} g_1(t),$$

$$u_2 = t^{r_2} g_2(t),$$

где показатели  $r_1$  и  $r_2$  различны, а функции  $g_1(t)$  и  $g_2(t)$  регулярны и не равны нулю в точке  $t=0$ .

Замечая, что

$$u_1'' + P(t)u_1' + Q(t)u_1 = 0,$$

$$u_2'' + P(t)u_2' + Q(t)u_2 = 0,$$

мы легко найдем формулы:

$$P(t) = -\frac{u_2'' u_1 - u_1'' u_2}{u_2' u_1 - u_1' u_2} = -\frac{d}{dt} \left\{ \ln \left[ u_1^2 \frac{d}{dt} \left( \frac{u_2}{u_1} \right) \right] \right\}, \quad (121)$$

$$Q(t) = -\frac{u_1''}{u_1} - P(t) \frac{u_1'}{u_1}. \quad (122)$$

Простые вычисления дадут нам:

$$u_1^2 \frac{d}{dt} \left( \frac{u_2}{u_1} \right) = t^{r_1+r_2-1} g_3(t),$$

где  $g_3(t)$  — некоторая функция, регулярная и не равная нулю в точке  $t=0$ .

Подставляя этот результат в формулу (121), получим

$$P(t) = \frac{1-r_1-r_2}{t} - \frac{g_3'(t)}{g_3(t)}, \quad (123)$$

откуда видно, что  $P(t)$  может иметь в точке  $t=0$  полюс не выше первого порядка.

Далее, путем дифференцирования найдем, что  $\frac{u_1'}{u_1}$  может иметь в точке  $t=0$  полюс не выше первого порядка, а  $\frac{u_1''}{u_1}$  — полюс не выше второго порядка. Поэтому, в силу формул (122) и (123),  $Q(t)$  может иметь в точке  $t=0$  полюс не выше второго порядка.

Следовательно, уравнение (119) необходимо должно иметь в окрестности точки  $t=0$  вид

$$u'' + \frac{p(t)}{t} u' + \frac{q(t)}{t^2} u = 0, \quad (124)$$

где функции  $p(t)$  и  $q(t)$  регулярны в точке  $t=0$ .

Докажем теперь обратное предположение. Для этого представим функции  $p(t)$  и  $q(t)$  разложениями

$$p(t) = p_0 + p_1 t + p_2 t^2 + \dots, \quad (125)$$

$$q(t) = q_0 + q_1 t + q_2 t^2 + \dots,$$

а затем, переписав уравнение (124) в виде

$$L[u] = t^2 u'' + tp(t)u' + q(t)u = 0, \quad (126)$$

будет искать решение его в окрестности точки  $t=0$  в форме ряда

$$u = t^r \sum_{k=0}^{\infty} c_k t^k = \sum_{k=0}^{\infty} c_k t^{r+k}. \quad (c_0 \neq 0) \quad (127)$$

Предварительно вычислим  $L[t^{\rho}]$ . Получим

$$L[t^{\rho}] = t^{\rho} [\rho(\rho-1) + p(\rho) + q(\rho)] = t^{\rho} \sum_{i=0}^{\infty} f_i(\rho) t^i,$$

где для краткости введены обозначения

$$f_0(\rho) = \rho(\rho-1) + p_0\rho + q_0, \\ f_i(\rho) = p_i\rho + q_i \quad (i=1, 2, \dots)$$

После этого, подставляя ряд (127) в  $L[u]$ , найдем:

$$L\left[\sum_{k=0}^{\infty} c_k t^{r+k}\right] = \sum_{k=0}^{\infty} c_k L[t^{r+k}] = \sum_{k=0}^{\infty} c_k t^{r+k} \sum_{i=1}^{\infty} f_i(r+k) t^i = \\ = t^r \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{i=0}^{\infty} c_k f_i(r+k) t^{i+k}.$$

Вводя вместо индекса  $i$  индекс  $n = i+k$  и располагая слагаемые двойной суммы по возрастающим степеням  $t$ , легко получим:

$$L\left[\sum_{k=0}^{\infty} c_k t^{r+k}\right] = t^r \sum_{n=0}^{\infty} \left[ \sum_{k=0}^n c_k f_{n-k}(r+k) \right] t^n.$$

Приравнявая этот результат нулю, мы найдем, что ряд (127) будет решением дифференциального уравнения (126), если показатель  $r$  и коэффициенты  $c_k$  ( $k=0, 1, 2, \dots$ ) будут удовлетворять системе уравнений

$$\sum_{k=0}^n c_k f_{n-k}(r+k) = 0 \quad (n=0, 1, 2, \dots)$$

или, что то же,

$$\begin{aligned} c_0 f_0(r) &= 0, \\ c_1 f_0(r+1) + c_0 f_1(r) &= 0, \\ c_2 f_0(r+2) + c_1 f_1(r+1) + c_0 f_2(r) &= 0, \\ &\dots \\ c_n f_0(r+n) + c_{n-1} f_1(r+n-1) + \dots + c_0 f_n(r) &= 0, \\ &\dots \end{aligned} \quad (128)$$

Так как по предположению  $c_0 \neq 0$ , то первое уравнение этой системы показывает, что  $r$  должно быть корнем квадратного уравнения

$$f_0(r) = r(r-1) + p_0 r + q_0 = 0, \quad (129)$$

которое называется обыкновенно определяющим уравнением в рассматриваемой особой точке. Пусть  $r_1$  — один из корней этого уравнения. Тогда, задав  $c_0$  произвольно, мы определим из остальных уравнений системы (128) последовательно  $c_1, c_2$  и т. д., если только  $r_1 + n$  при каком либо целом положительном  $n$  не будет вторым корнем определяющего уравнения (129). Отсюда следует, что если разность корней  $r_1$  и  $r_2$  определяющего уравнения не равна нулю или целому числу, то всегда возможно построить два различных ряда

$$u_1 = t^{r_1} \sum_{k=0}^{\infty} a_k t^k, \quad (a_0 \neq 0) \\ u_2 = t^{r_2} \sum_{k=0}^{\infty} b_k t^k, \quad (b_0 \neq 0) \quad (130)$$

формально удовлетворяющих уравнению (126). Можно доказать, что эти ряды сходятся в окрестности точки  $t=0$  и, следовательно, действительно являются решениями уравнения (126). Мы на этом доказательстве останавливаться не будем. Укажем лишь, что радиус сходимости наших рядов равен расстоянию от точки  $t=0$  до ближайшей другой особой точки уравнения.

Рассмотрим случай, когда разность корней  $r_1$  и  $r_2$  определяющего уравнения есть целое число или нуль. Для определенности мы положим, что  $r_1 - r_2 = m$ , где  $m$  — целое положительное число или нуль. В этом случае мы можем, очевидно, всегда построить предыдущим способом интеграл  $u_1$ . Чтобы получить второй интеграл  $u_2$ , мы воспользуемся формулой

$$u_2 = u_1 \int e^{-\int P(t) dt} \frac{dt}{u_1^2},$$

которая без труда получается из формулы (121). Так как

$$P(t) = \frac{p(t)}{t} = \frac{p_0}{t} + p_1 + p_2 t + \dots,$$

то

$$\int P(t) dt = \ln t^{p_0} + C + p_1 t + \frac{1}{2} p_2 t^2 + \dots$$

и, следовательно,

$$e^{-\int P(t) dt} = t^{p_0} e^C + p_1 t + \frac{1}{2} p_2 t^2 + \dots$$

В нашем случае

$$u_1 = t^{r_1} \sum_{k=0}^{\infty} a_k t^k \quad (a_0 \neq 0)$$

Поэтому

$$u_2 = u_1 \int t^{-p_0 - 2r_1} g(t) dt,$$

где  $g(t)$  — функция, регулярная и не равная нулю в точке  $t=0$ . Полагая здесь

$$g(t) = \sum_{k=0}^{\infty} g_k t^k \quad (g_0 \neq 0)$$

и замечая, что по известному свойству корней квадратного уравнения  $r_1 + r_2 = 2r_1 - m = -p_0 + 1$ , легко найдем, что при  $m > 0$

$$\begin{aligned} u_2 &= u_1 \int \frac{g(t)}{t^{m+1}} dt = \\ &= u_1 \left( -\frac{g_0}{m} t^{-m} - \dots - \frac{g_{m-1}}{t} + g_m \ln t + g_{m+1} t + \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{2} g_{m+2} t^2 + \dots \right). \end{aligned}$$

Если  $m=0$ , то

$$u_2 = u_1 (g_0 \ln t + g_1 t + \frac{1}{2} g_2 t^2 + \dots)$$

Эти результаты можно представить и в таком виде:

1) при  $r_1 - r_2 = m > 0$

$$u_2 = t^{r_2} \sum_{k=0}^{\infty} b_k t^k + g_m u_1 \ln t, \quad (b_0 \neq 0) \quad (131)$$

где  $g_m$  может быть в частном случае и нулем;

2) при  $r_1 - r_2 = m = 0$

$$u_2 = t^{r_1} \sum_{k=1}^{\infty} b_k t^k + g_0 u_1 \ln t. \quad (b_0 = 0) \quad (132)$$

где  $g_0$  всегда отлично от нуля.

Этим, очевидно, исчерпано доказательство теоремы Фукса.

Замечание. Бывают случаи, когда в особой точке дифференциального уравнения оба решения регулярны. Так, например, уравнение

$$u'' - \frac{2}{t} u' + \frac{2}{t^2} u = 0$$

имеет два линейно независимых решения  $u_1 = t$  и  $u_2 = t^2$ , регулярных в особой точке  $t=0$ .

Особые точки, в которых все решения регулярны, называются по Ф. Клейну побочными особыми точками уравнения.

## § 28. Уравнения класса Фукса.

Говорят, что уравнение

$$u'' + P(t)u' + Q(t)u = 0$$

принадлежит к классу Фукса, если оно имеет лишь регулярные особые точки. Первый коэффициент имеет тогда на конечном расстоянии только полюсы не выше первого порядка, а второй — полюсы не выше второго порядка. Бесконечно удаленная точка должна быть при этом либо обыкновенной точкой, либо регулярной особой точкой.

Найдем условия, при которых точка  $t = \infty$  будет регулярной особой точкой. Для этого сделаем подстановку

$$t = \frac{1}{\tau},$$

переводящую точку  $t = \infty$  в точку  $\tau = 0$ . Дифференциальное уравнение преобразуется тогда, как мы знаем, в следующее:

$$\frac{d^2 u}{d\tau^2} + \left[ \frac{2}{\tau} - \frac{1}{\tau^2} P\left(\frac{1}{\tau}\right) \right] \frac{du}{d\tau} + \frac{1}{\tau^4} Q\left(\frac{1}{\tau}\right) u = 0 \quad (133)$$

Чтобы первый коэффициент преобразованного уравнения имел в точке  $\tau = 0$  полюс не выше первого порядка, должно, очевидно, иметь место разложение

$$P\left(\frac{1}{\tau}\right) = a_1 \tau + a_2 \tau^2 + \dots,$$

т. е. вблизи  $t = \infty$  разложение  $P(t)$  должно иметь вид

$$P(t) = a_1 \frac{1}{t} + a_2 \frac{1}{t^2} + \dots \quad (134)$$

Аналогично, принимая во внимание, что второй коэффициент преобразованного уравнения может иметь в точке  $\tau = 0$  полюс не выше второго порядка, получим разложение

$$Q\left(\frac{1}{\tau}\right) = b_2 \tau^2 + b_3 \tau^3 + \dots$$

и, следовательно, разложение  $Q(t)$  вблизи  $t = \infty$  должно иметь вид

$$Q(t) = b_2 \frac{1}{t^2} + b_3 \frac{1}{t^3} + \dots \quad (135)$$

Назовем теперь через  $t_1, t_2, \dots, t_n$  особые точки нашего уравнения, лежащие на конечном расстоянии. Так как функция

$P(t)$  может иметь в этих точках полюсы не выше первого порядка и, в силу разложения (134), должна обращаться на бесконечности в нуль, то она должна быть рациональной дробью вида

$$P(t) = \frac{\varphi_{n-1}(t)}{(t-t_1) \dots (t-t_n)},$$

где  $\varphi_{n-1}(t)$  — многочлен степени не выше  $n-1$ . Точно так же, принимая во внимание разложение (135), найдем, что  $Q(t)$  должно иметь вид

$$Q(t) = \frac{\varphi_{2n-2}(t)}{(t-t_1)^2 \dots (t-t_n)^2},$$

где  $\varphi_{2n-2}(t)$  — многочлен степени не выше  $2n-2$ . Полученные выражения можно, очевидно, записать также в форме:

$$P(t) = \sum_{\kappa=1}^n \frac{B_{\kappa}}{t-t_{\kappa}}, \quad (136)$$

$$Q(t) = \sum_{\kappa=1}^n \frac{C_{\kappa}}{(t-t_{\kappa})^2} + \frac{A_{-1}t^{n-1} + A_0t^{n-2} + A_1t^{n-3} + \dots + A_{n-2}}{(t-t_1)(t-t_2) \dots (t-t_n)}.$$

Легко показать, что постоянная  $A_{-1}$  всегда равна нулю. В самом деле, на основании разложения (135)

$$\lim_{t \rightarrow \infty} tQ(t) = 0.$$

Подставляя сюда значение  $Q(t)$ , получим:

$$A_{-1} = 0.$$

Таким образом, окончательное выражение для  $Q(t)$  будет:

$$Q(t) = \sum_{\kappa=1}^n \frac{C_{\kappa}}{(t-t_{\kappa})^2} + \frac{A_0t^{n-2} + A_1t^{n-3} + \dots + A_{n-2}}{(t-t_1)(t-t_2) \dots (t-t_n)}. \quad (137)$$

Формулы (136) и (137) вполне характеризуют коэффициенты  $P(t)$  и  $Q(t)$  уравнений класса Фукса.

Составим еще определяющие уравнения для особых точек  $t = t_k$  ( $k = 1, 2, \dots, n$ ) и  $t = \infty$ .

Замечая, что при  $t \rightarrow \infty$

$$\lim (t-t_k)P(t) = B_k, \quad \lim (t-t_k)^2Q(t) = C_k,$$

мы легко найдем, на основании (134), (135) и (129), что определяющее уравнение для точки  $t = t_k$  имеет вид

$$r(r-1) + B_k r + C_k = 0. \quad (k = 1, 2, \dots, n) \quad (138)$$

Точно также, пользуясь коэффициентами уравнения (133) и замечая, что

$$\lim_{\tau \rightarrow 0} \tau \left[ \frac{2}{\tau} - \frac{1}{\tau^2} P\left(\frac{1}{\tau}\right) \right] = 2 - \lim_{t \rightarrow \infty} tP(t) = 2 - \sum_{k=1}^n B_k,$$

$$\lim_{\tau \rightarrow 0} \tau^2 \left[ \frac{1}{\tau^4} Q\left(\frac{1}{\tau}\right) \right] = \lim_{t \rightarrow \infty} t^2 Q(t) = \sum_{k=1}^n C_k + A_0,$$

найдем, что определяющее уравнение для точки  $t = \infty$  будет

$$r(r-1) + \left(2 - \sum_{k=1}^n B_k\right)r + \sum_{k=1}^n C_k + A_0 = 0. \quad (139)$$

Назовем корни уравнения (138) через  $r_k$  и  $r'_k$ , а корни уравнения (139) через  $r_{n+1}$  и  $r'_{n+1}$ . Тогда, пользуясь известными соотношениями между корнями и коэффициентами квадратного уравнения, найдем:

$$B_k = 1 - r_k - r'_k, \quad C_k = r_k r'_k, \quad (k = 1, 2, \dots, n)$$

$$A_0 = r_{n+1} r'_{n+1} - \sum_{k=1}^n r_k r'_k,$$

$$\sum_{k=1}^{n+1} (r_k + r'_k) = n - 1. \quad (140)$$

Последнее из этих равенств, называемое соотношением Фукса, показывает, что сумма всех корней определяющих уравнений равна числу лежащих на конечном расстоянии особых точек уравнения, уменьшенному на единицу.

Подставляя полученные выше значения постоянных  $B_k$ ,  $C_k$  ( $k = 1, 2, \dots, n$ ) и  $A_0$  в формулы (136) и (137), будем иметь следующие выражения для коэффициентов уравнений класса Фукса:

$$P(t) = \sum_{k=1}^n \frac{1 - r_k - r'_k}{t - t_k}, \quad (141)$$

$$Q(t) = \sum_{k=1}^n \frac{r_k r'_k}{(t - t_k)^2} +$$

$$+ \frac{(r_{n+1} r'_{n+1} - \sum_{k=1}^n r_k r'_k) t^{n-2} + A_1 t^{n-3} + A_2 t^{n-4} + \dots + A_{n-2}}{(t-t_1)(t-t_2) \dots (t-t_n)}. \quad (142)$$

Постоянные  $A_1, A_2, \dots, A_{n-2}$ , не выражающиеся через корни определяющих уравнений, называются по Ф. Клейну акцес-

сорными параметрами. При  $n \leq 2$  они, очевидно, отсутствуют.

Если  $n=0$ , то дифференциальное уравнение имеет лишь одну особую точку  $t=\infty$ . Вид его будет следующий:

$$u'' = 0.$$

Если  $n=1$ , то, применяя дробно линейное преобразование переменного  $t$ , можно всегда сделать особыми точками уравнения точки  $t_1=0$  и  $t_2=\infty$ . Уравнение примет тогда вид

$$u'' + \frac{1-r_1-r'_1}{t} u' + \frac{r_1 r'_1}{t^2} u = 0.$$

При  $r_1 \neq r'_1$  общее решение его будет

$$u = A t^{r_1} + B t^{r'_1}$$

Если же  $r_1 = r'_1$ , то

$$u = A t^{r_1} + B_1 t^{r_1} \ln t.$$

### § 29. Уравнение Гаусса

Если уравнение класса Фукса имеет три особых точки, то, пользуясь дробно линейным преобразованием независимого переменного, можно распорядиться так, чтобы особыми точками уравнения были точки  $t_1=0$ ,  $t_2=1$  и  $t_3=\infty$ . Наше уравнение примет тогда такой вид:

$$u'' + \left( \frac{1-r_1-r'_1}{t} + \frac{1-r_2-r'_2}{t-1} \right) u' + \left[ \frac{r_1 r'_1}{t^2} + \frac{r_2 r'_2}{(t-1)^2} + \frac{r_2 r'_2 - r_1 r'_1 - r_2 r'_2}{t(t-1)} \right] u = 0, \quad (143)$$

где, в силу соотношения Фукса (140),

$$r_1 + r'_1 + r_2 + r'_2 + r_3 + r'_3 = 1. \quad (144)$$

Для обозначения общего решения этого уравнения Риман ввел чрезвычайно удобный символ

$$u = P \left\{ \begin{matrix} 0 & 1 & \infty \\ r_1 & r_2 & r_3 & t \\ r'_1 & r'_2 & r'_3 \end{matrix} \right\}, \quad (145)$$

где в первой строке указаны особые точки уравнения, а непосредственно под ними записаны соответствующие показатели; в четвертом столбце показана независимая переменная. Порядок первых трех столбцов и порядок показателей в каждом столбце безразличен.

Введем в уравнение (143) вместо  $u$  новую неизвестную функцию  $U$  при помощи подстановки

$$u = t^{r_1} (1-t)^{r_2} U.$$

В результате мы получим для  $U$  также уравнение класса Фукса с теми же особыми точками, но только показатели в точках 0 и 1 будут соответственно уменьшены на  $r_1$  и  $r_2$ . В бесконечно же удаленной точке показатели увеличатся на  $r_1 + r_2$ . Таким образом функция  $U$  определится символом

$$U = P \left\{ \begin{matrix} 0 & 1 & \infty \\ 0 & 0 & r_3 + r_1 + r_2 & t \\ r'_1 - r_1 & r'_2 - r_2 & r'_3 + r_1 + r_2 \end{matrix} \right\}.$$

Полагая здесь, как это обычно принято,

$$r_3 + r_1 + r_2 = a,$$

$$r'_3 + r_1 + r_2 = b,$$

$$r'_1 - r_1 = 1 - c$$

(146)

и замечая, что, в силу соотношения (144),

$$r'_2 - r_2 = c - a - b,$$

мы представим  $U$  в виде

$$U = P \left\{ \begin{matrix} 0 & 1 & \infty \\ 0 & 0 & a & t \\ 1-c & c-a-b & b \end{matrix} \right\}. \quad (147)$$

Отсюда, на основании (143) и (145), заключаем, что функция  $U$  удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$U'' + \frac{c - (a+b+1)t}{t(1-t)} U' - \frac{ab}{t(1-t)} U = 0. \quad (148)$$

Это уравнение называется уравнением Гаусса или гипергеометрическим уравнением. Решение его, соответствующее показателю 0 особой точки  $t=0$  и обращающееся при  $t=0$  в единицу, обозначается по Гауссу через  $F(a, b, c, t)$  и называется гипергеометрической функцией.

Применяя метод неопределенных коэффициентов, рассмотренный в § 27, найдем, что при  $c$ , не равном нулю или целому отрицательному числу,

$$F(a, b, c, t) = 1 + \frac{a \cdot b}{1 \cdot c} t + \frac{a(a+1) \cdot b \cdot (+1)}{1 \cdot 2 \cdot c \cdot (c+1)} t^2 + \dots \quad (149)$$

Полученный ряд называется гипергеометрическим. Так как ближайшая к  $t=0$  особая точка есть  $t=1$ , то можно утверждать, что он наверное сходится в круге  $|t| < 1$ .

Для наших целей представляется более удобным искать решение уравнения (148) не в виде ряда, а в виде определенного интеграла типа

$$U(t) = \int (1-ts)^a V(s) ds, \quad (150)$$

в котором пределы интегрирования, постоянная  $\alpha$  и функция  $V(s)$  должны быть подобраны так, чтобы уравнение (148) было удовлетворено.

Дифференцируя (150) по  $t$ , получим:

$$U' = -\alpha \int (1-ts)^{\alpha-1} s V ds,$$

$$U'' = \alpha(\alpha-1) \int (1-ts)^{\alpha-2} s^2 V ds.$$

Подставляя эти результаты в уравнение (148), помноженное предварительно на  $t(1-t)$ , найдем:

$$\int \{ t(1-t) \alpha(\alpha-1) s^2 - [c - (a+b+1)t] \alpha(1-ts) s - ab(1-ts)^2 \} (1-ts)^{\alpha-2} V ds = 0. \quad (151)$$

Выражение, стоящее здесь в фигурных скобках, можно представить в форме

$$-(\alpha+a)(\alpha+b)t^2 s^2 + [\alpha(\alpha-1)s + (a+b+1)\alpha + ab]ts - (c\alpha s - ab)(1-ts).$$

С целью упростить его, мы положим  $\alpha = -a^1$ . Тогда уравнение (151), после деления его на  $a$ , примет вид

$$\int [(a+1)(s-1)ts - (a-cs)(1-ts)] (1-ts)^{-a-2} V ds = 0$$

или

$$\int s(s-1) V \frac{d}{ds} [(1-ts)^{-a-1}] ds + \int (cs-b)(1-ts)^{-a-1} V ds = 0.$$

Интегрируя первое слагаемое по частям, получим:

$$- [s(1-s)(1-ts)^{-a-1} V] + \int (1-ts)^{-a-1} \left\{ \frac{d}{ds} [s(1-s)V] - (b-cs)V \right\} ds = 0.$$

Это уравнение будет удовлетворено, если взять в качестве функции  $V(s)$  решение уравнения

$$\frac{d}{ds} [s(1-s)V] - (b-cs)V = 0, \quad (152)$$

а пределы интегрирования выбрать так, чтобы

$$[s(1-s)(1-st)^{-a-1} V] = 0.$$

Представляя уравнение (152) в форме

$$\frac{d [s(1-s)V]}{s(1-s)V} = \frac{b-cs}{s(1-s)} ds = \left( \frac{b}{s} - \frac{c-b}{1-s} \right) ds$$

и интегрируя его, найдем, что функция  $V(s)$  должна иметь вид:

$$V = A s^{b-1} (1-s)^{c-b-1}, \quad (153)$$

где  $A$  — произвольная постоянная.

<sup>1</sup> Можно также положить  $\alpha = -b$ .

Принимая теперь во внимание (150) и (153), найдем, что искомое нами решение уравнения Гаусса имеет вид

$$U(t) = A \int s^{b-1} (1-s)^{c-b-1} (1-ts)^{-a} ds, \quad (154)$$

если только пределы интегрирования подобраны так, что выполняется условие

$$[s^b (1-s)^{c-b} (1-ts)^{-a-1}] = 0. \quad (155)$$

Легко проверить, что если в выражении (154) разложить  $(1-ts)^{-a}$  в ряд по степеням  $t$  и выполнить почленное интегрирование, то полученный новый ряд будет отличаться от гипергеометрического ряда лишь постоянным множителем

$$A \int s^{b-1} (1-s)^{c-b-1} ds.$$

Отсюда следует, что

$$F(a, b, c, t) = \frac{\int s^{b-1} (1-s)^{c-b-1} (1-ts)^{-a} ds}{\int s^{b-1} (1-s)^{c-b-1} ds}. \quad (156)$$

Эта формула определяет гипергеометрическую функцию и за пределами круга сходимости ряда (149).

Перейдем теперь к установлению канонических систем решений уравнения Гаусса для особых точек его 0, 1 и  $\infty$ .

Одно из решений канонической системы для точки  $t=0$  есть, очевидно, гипергеометрическая функция. Мы запишем это решение в виде

$$U_{01} = F(a, b, c, t). \quad (157)$$

Чтобы получить второе решение той же системы с показателем  $1-c$  в точке  $t=0$ , введем вместо  $U$  новую искомую функцию  $V$  при помощи подстановки

$$U = t^{1-c} V.$$

Тогда для определения функции  $V$  будем иметь уравнение

$$V = P \begin{Bmatrix} 0 & 1 & \infty \\ 0 & 0 & a+1-c \\ c-1 & c-a-b & b+1-c \end{Bmatrix}.$$

Сравнивая последнее с уравнением (147), мы легко получим решение

$$V = F(a+1-c, b+1-c, 2-c, t),$$

регулярное в точке  $t=0$ . Следовательно, второе решение уравнения Гаусса в точке  $t=0$  будет

$$U_{02} = t^{1-c} F(a+1-c, b+1-c, 2-c, t). \quad (158)$$

Чтобы получить каноническую систему решений для точки  $t=1$ , введем новую независимую переменную  $t' = 1-t$ . Особые точки 0, 1 и  $\infty$  перейдут тогда соответственно в точки 1, 0 и  $\infty$ .

Схема Римана для преобразованного уравнения будет

$$U = P \begin{pmatrix} 0 & 1 & \infty \\ 0 & 0 & a t' \\ c - a - b & 1 - c & b \end{pmatrix}.$$

Сравнивая ее со схемой (147), мы без труда получим для точки  $t=1$  решения:

$$U_{11} = F(a, b, 1 - c + a + b, 1 - t),$$

$$U_{12} = t^{c-a-b} F(c - b, c - a, 1 + c - a - b, 1 - t). \quad (159)$$

Решения для точки  $t=\infty$  получатся, если ввести независимую переменную  $\tau = \frac{1}{t}$ . Уравнение (147) преобразуется тогда к виду

$$U = P \begin{pmatrix} 0 & 1 & \infty \\ a & 0 & 0 \\ b & c - a - b & 1 - c \end{pmatrix} = \tau^a P \begin{pmatrix} 0 & 1 & \infty \\ 0 & 0 & a \tau \\ b - a & c - a - b & 1 - c + a \end{pmatrix}.$$

Отсюда легко получим для точки  $t=\infty$  каноническую систему решений

$$U_{\infty 1} = t^{-a} F(a, 1 - c + a, 1 - b + a, \frac{1}{t}),$$

$$U_{\infty 2} = t^{-b} F(b, 1 - c + b, 1 - a + b, \frac{1}{t}). \quad (160)$$

Относительно решений (157), (158), (159) и (160) необходимо заметить следующее: если разность показателей особой точки равна нулю или целому числу, то для такой особой точки второе из указанных здесь решений теряет силу. В этом случае в общее выражение второго решения входит, как известно (§ 27), логарифмический член. Мы не будем здесь останавливаться на разборе этого случая, так как в дальнейшем, при встрече с ним, всегда можно будет взять в качестве фундаментальной системы решений уравнения Гаусса два интеграла, принадлежащие к каноническим системам разных особых точек, не содержащие логарифмических членов.

**§ 30. Определение показателей особых точек при применении линейных дифференциальных уравнений к решению задач на движение грунтовых вод<sup>1</sup>.**

Мы будем здесь предполагать (ср. § 21), что контур потока грунтовых вод состоит из следующих частей:

- прямолинейных непроницаемых стенок;
- прямолинейных подводных границ грунта;

<sup>1</sup> Рассматриваемый здесь способ определения показателей особых точек принадлежит автору. 15 апреля 1939 года он был доложен на заседании отдела механики ФМИ при СГУ.

в) прямолинейных промежутков высачивания грунтовой воды на дневную поверхность;

г) прямолинейных границ грунта и атмосферы, вдоль которых грунтовая вода не высачивается, но может испаряться, и д) свободных поверхностей, вдоль которых также может иметь место испарение воды.

Количество воды, испаряющееся с частей контура вида г и д, будем считать для простоты пропорциональным горизонтальной проекции контура (§ 11), приписывая при этом постоянной испарения  $c$  на разных частях контура, вообще говоря, разные значения.

Считая область течения грунтовой воды односвязной, мы отобразим ее конформно на верхнюю полуплоскость вспомогательного комплексного переменного  $t$  и введем в рассмотрение функции (ср. § 26):

$$z_1(t) = \frac{dz}{dt}, \quad w_1(t) = \frac{dw}{dt} \quad \text{и} \quad \omega_1(t) = \frac{d\omega}{dt}. \quad (161)$$

В силу соотношения

$$z + w + \omega = \text{const},$$

между ними существует линейная зависимость

$$z_1(t) + w_1(t) + \omega_1(t) = 0. \quad (162)$$

Если рассматривать функции  $z_1(t)$ ,  $w_1(t)$ , а также, конечно, и функцию  $\omega_1(t)$ , как решения уравнения

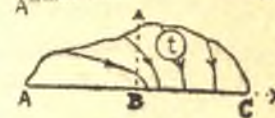
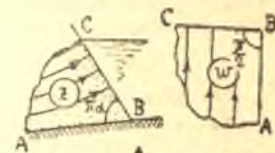
$$u'' + P(t)u' + Q(t)u = 0, \quad (163)$$

то точкам соединения отдельных частей контура потока соответствуют, как известно (§ 26), регулярные особые точки его.

Так как для построения решений указанного уравнения необходимо знать показатели этих точек, то ниже мы рассмотрим приемы их определения в разных случаях, которые могут встретиться на практике.

Сочетая перечисленные выше части контура потока а, б, в, г и д попарно, мы получим следующие десять возможных случаев соединения частей контура:

- аб, ав, аг, ад,  
бв, бг, бд,  
вг, вд,  
гд.



Черт. 42.

Рассмотрим сначала случай аб, т. е. случай соединения непроницаемой стенки и границы водоема (черт. 42-z).

Обозначая угол  $ABC$  области  $z$  через  $\pi\alpha$  и отображая его на верхнюю полуплоскость переменного  $t$  (черт. 42-t) так, чтобы точка B перешла в начало плоскости  $t$ , мы получим, согласно изложенному в § 26, разложение вида

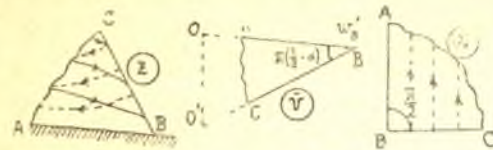
$$\frac{dz}{dt} = z_1(t) = t^{\alpha-1}(a_0 + a_1 t + \dots). \quad (a_0 \neq 0)$$

Отображая далее на ту же полуплоскость  $t$  область переменного  $w$ , имеющую в окрестности точки  $B$  вид, показанный на чертеже 42— $w$ , получим разложение вида

$$\frac{dw}{dt} = w_1(t) = t^{-\frac{1}{2}} (b_0 + b_1 t + \dots) \quad (b_0 \neq 0)$$

Эти разложения показывают, что показатели особой точки имеют такие значения:

$$r = \alpha - 1, \quad r' = -\frac{1}{2}.$$



Черт. 43.

Перейдем теперь к случаю ав, т. е. к случаю, когда непроницаемая стенка  $AB$  (черт. 43— $z$ ) соединяется в точке  $B$  с промежутком высачивания  $BC$ .

Отображая, как и в предыдущем случае, область угла  $ABC = \pi\alpha$  плоскости  $z$  на верхнюю полуплоскость переменного  $t$ , получим разложение

$$\frac{dz}{dt} = z_1(t) = t^{\alpha-1} (a_0 + a_1 t + \dots), \quad (a_0 \neq 0)$$

откуда видно, что один из показателей есть

$$r = \alpha - 1.$$

Чтобы найти второй показатель, построим для окрестности точки  $B$  план скоростей (черт. 43— $\bar{v}$ ), а затем, перенеся начало плана в точку  $B$  с комплексной скоростью  $w'_B$ , построим по правилам, данным в § 21, область переменного  $W = w - w'_B z$  (черт. 43— $W$ ). Отображая последнюю на верхнюю полуплоскость переменного  $t$ , получим разложение

$$\frac{dW}{dt} = w_1(t) - w'_B \cdot z_1(t) = t^{-\frac{1}{2}} (b_0 + b_1 t + \dots), \quad (b_0 \neq 0)$$

из которого видно, что второй показатель есть

$$r' = -\frac{1}{2}$$

Здесь может случиться, что  $w'_B = \infty$ . Это будет тогда, когда  $\alpha = \frac{1}{2}$ . В этом частном случае мы отобразим на верхнюю полуплоскость переменного  $t$  область  $ABC$  плана скоростей (точнее— область  $ABC$  плоскости переменного  $w'$ ). В результате получим разложение

$$\frac{dw'}{dt} = \frac{d}{dt} \left( \frac{w_1}{z_1} \right) = t^{-1} (c_0 + c_1 t + c_2 t^2 + \dots), \quad (c_0 \neq 0)$$

Отсюда, интегрируя, найдем следующее выражение для второго решения уравнения (163) в окрестности точки  $B$ :

$$w_1 - Cz_1 = z_1 (c_0 \ln t + c_1 t + \frac{1}{2} c_2 t^2 + \dots), \quad (c_0 \neq 0)$$

Показатели в рассматриваемом частном случае будут, очевидно,

$$r = r' = -\frac{1}{2}.$$

Далее следовало бы разобрать случай аг. Так как, однако, он не содержит в себе ничего нового сравнительно с предыдущими случаями, то мы на нем останавливаться не будем.

Рассмотрим случай ад, изображенный на черт. 44— $z$ . Здесь непроницаемая стенка  $AB$  соединяется в точке  $B$  со свободной поверхностью, вдоль которой имеет место испарение с интенсивностью, определяемой постоянной испарения  $c$ .

План скоростей имеет вид, показанный на чертеже 44— $\bar{v}$ . Он состоит из отрезка прямой  $AB$ , проходящей через начало плана  $O$  и параллельной непроницаемой стенке, а также из дуги  $BC$  окружности с диаметром

$$O'N = 1 + c^2.$$

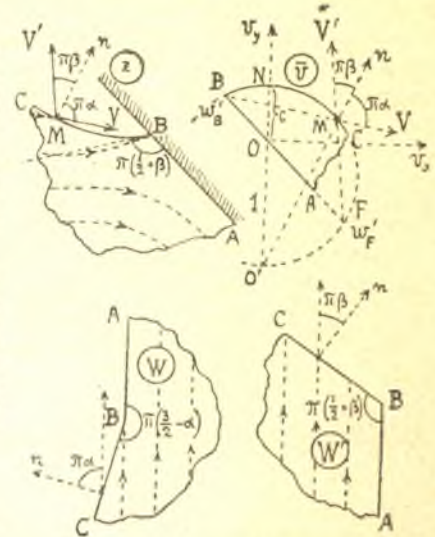
Прямая и окружность плана пересекаются в точках  $B$  и  $F$ .

Перенесем начало плана в точку  $B$  с комплексной скоростью  $w'_B$  и построим по правилам § 21 область функции  $W = w - w'_B z$  (черт. 44— $W$ ). Эта функция определяет некоторое фиктивное течение, линии тока которого показаны на чертеже 44— $z$ . Скорость  $V$  этого течения образует с нормалью  $n$  в любой точке  $M$  свободной поверхности постоянный угол, который мы обозначим через  $\pi\alpha$ . Отображая область  $W$  на верхнюю полуплоскость переменного  $t$ , мы получим разложение вида

$$\frac{dW}{dt} = w_1 - w'_B z_1 = t^{\frac{1}{2}-\alpha} (a_0 + a_1 t + \dots), \quad (a_0 \neq 0)$$

Если перенести начало плана в точку  $F$  с комплексной скоростью  $w'_F$  и построить подобно предыдущему область комплексного переменного  $W' = w - w'_F z$  (черт. 44— $W'$ ), то получим новое разложение

$$\frac{dW'}{dt} = w_1 - w'_F z_1 = t^{\beta-\frac{1}{2}} (b_0 + b_1 t + \dots), \quad (b_0 \neq 0)$$



Черт. 44.

<sup>1</sup> Коэффициент фильтрации  $K$  принимаем равным единице.

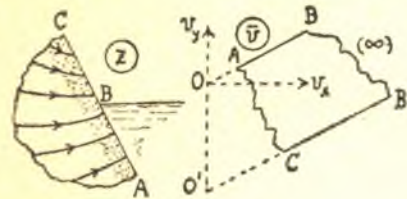


где  $\beta$  — постоянная, получающаяся от деления угла, образуемого новой фиктивной скоростью  $V'$  с нормалью  $n$  в точке  $M$  свободной поверхности, на  $\pi$ .

Из найденных разложений видно, что показатели точки  $B$  имеют следующие значения:

$$r = \frac{1}{2} - \alpha, \quad r' = \beta - \frac{1}{2}.$$

Заметим здесь без доказательства, что угол при вершине  $B$  области  $W'$  (черт. 44— $W'$ ) равен углу, который образует касательная в точке  $B$  свободной поверхности (черт. 44— $z$ ) с непроницаемой стенкой  $AB$ .



Черт. 45.

Далее мы перейдем к разбору случая бв, изображенного на чертеже 45— $z$ . Здесь подводная часть  $AB$  границы грунта соединяется в точке  $B$  с промежутком высачивания  $BC$ . Части  $AB$  и  $BC$  лежат на одной прямой.

Отображая окрестность точки  $B$  на верхнюю полуплоскость переменного  $t$ , получим, очевидно, разложение

$$\frac{dz}{dt} = z_1 = a_0 + a_1 t + \dots \quad (a_0 \neq 0)$$

Оно показывает, что один из показателей точки  $B$  равен нулю.

Чтобы получить второй показатель, построим план скоростей (черт. 45— $\bar{v}$ ). Рассматривая его, замечаем, что угол при вершине  $B$  плана равен нулю. Вспомнив, что по доказанному в § 26 этот угол равен разности показателей точки  $B$ , заключаем, что второй показатель также равен нулю.

Найдем соответствующее этому показателю разложение решения уравнения (163) в окрестности точки  $B$  ( $t=0$ ) плоскости  $t$ .

Если рассматривать ось  $Ov_x$  плана, как мнимую ось, а ось  $Ov_y$  — как действительную, то область  $ABC$  плана станет областью комплексной скорости  $w' = \frac{dw}{dz} = \frac{w_1}{z_1}$ . Отображая эту область на верхнюю полуплоскость переменного  $t$ , получим зависимость вида

$$\frac{dw'}{dt} = t^{-1} (b_0 + b_1 t + b_2 t^2 + \dots). \quad (b_0 \neq 0)$$

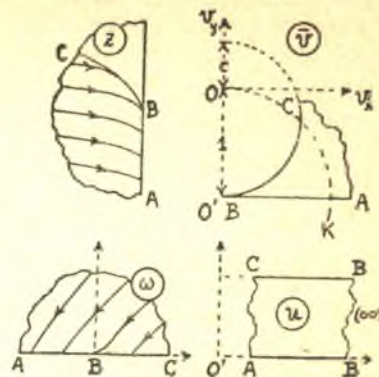
Интегрируя ее по  $t$ , найдем:

$$w' = \frac{w_1}{z_1} = C + b_0 \ln t + b_1 t + \frac{1}{2} b_2 t^2 + \dots,$$

где  $C$  — произвольная постоянная. Отсюда следует, что интересующее нас разложение имеет вид:

$$w_1 - Cz_1 = z_1 (b_0 \ln t + b_1 t + \frac{1}{2} b_2 t^2 + \dots) \quad (b_0 \neq 0)$$

Из остальных случаев соединения частей контура потока грунтовых вод мы рассмотрим только частный вид случая вд (черт. 46— $z$ ), когда вертикальный промежуток высачивания  $AB$  соединяется в точке  $B$  со свободной поверхностью  $BC$ . Так как давление вдоль контура  $ABC$  в данном случае постоянно, то изображение окрестности точки  $B$  в плоскости  $\omega = r + i \frac{p}{\gamma}$  имеет вид, показанный на чертеже 46— $\omega^1$ . Отображая область переменного  $\omega$  на плоскость переменного  $t$ , получим разложение



Черт. 46.

$$\frac{d\omega}{dt} = \omega_1 = a_0 + a_1 t + \dots \quad (a_0 \neq 0) \quad (A)$$

Построив далее план скоростей (черт. 46— $\bar{v}$ ), подвергнем его инверсии около окружности  $K$  радиуса  $O'O$  с центром в точке  $O'$ . Тогда область плана, отвечающая окрестности точки  $B$ , перейдет, как известно (§ 15), в область переменного

$$u = -i \frac{dz}{d\omega},$$

(черт. 46— $u$ ), ограниченную параллельными прямыми  $AB$  и  $BC$ .

Отображая эту область на плоскость переменного  $t$ , получим разложение

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{dz}{d\omega} \right) = t^{-1} (b_0 + b_1 t + b_2 t^2 + \dots), \quad (b_0 \neq 0)$$

из которого найдем, что

$$\frac{dz}{d\omega} = \frac{z_1}{\omega_1} = C + b_0 \ln t + b_1 t + \frac{1}{2} b_2 t^2 + \dots$$

и, следовательно,

$$z_1 - C\omega_1 = \omega_1 (b_0 \ln t + b_1 t + \frac{1}{2} b_2 t^2 + \dots) \quad (b_0 \neq 0) \quad (B)$$

Из выражений (A) и (B) видно, что оба показателя точки  $B$  ( $t=0$ ) равны нулю. Этот результат можно было бы усмотреть и непосредственно из чертежей 46— $\omega$  и  $\bar{v}$ .

С помощью аналогичных приемов можно, очевидно, найти показатели и в остальных случаях соединения частей контура потока. На рассмотрении их мы останавливаться поэтому не будем.

До сих пор мы считали, что особая точка совпадает с точкой  $t=0$ . Если особой точкой будет точка  $t=t_0$ , отличная от

<sup>1</sup> Для простоты мы полагаем, что на свободной поверхности  $\frac{p}{\gamma} = 0$ .

$t=0$  или  $t=\infty$ , то в предыдущих формулах придется заменить  $t$  на  $t-t_0$ .

Предположим теперь, что при конформном отображении области течения грунтовой воды на верхнюю полуплоскость переменного  $t$ , мы перевели одну из точек соединения частей контура потока в бесконечно удаленную точку плоскости  $t$ . Сделав подстановку  $t = \frac{1}{\tau}$ , мы переведем нашу точку в точку  $\tau=0$ . При этом функции

$$z_1 = \frac{dz}{dt}, \quad \omega_1 = \frac{d\omega}{dt}, \quad \omega_1 = \frac{d\omega}{d\tau} \quad \text{и} \quad \frac{dW}{dt}$$

преобразуются в следующие:

$$z_1 = -\frac{dz}{d\tau} \tau^2, \quad \omega_1 = -\frac{d\omega}{d\tau} \tau^2, \quad \omega_1 = -\frac{d\omega}{d\tau} \tau^2 \quad \text{и} \quad -\frac{dW}{d\tau} \tau^2.$$

Из полученных результатов следует, что для бесконечно удаленной особой точки уравнения (163) показатели, определяемые указанными выше приемами, должны быть увеличены на две единицы.

### § 31. Побочные и другие особые точки<sup>1</sup>

Чтобы правильно построить дифференциальное уравнение (163), необходимо знать, кроме особых точек, рассмотренных в предыдущем параграфе, еще и другие возможные особые точки. К таким точкам относятся, например, побочные особые точки, с которыми мы встретились уже в конце § 27 (замечание). В этих точках всякие два линейно независимые решения  $u_1$  и  $u_2$  уравнения (163) являются, как известно, регулярными функциями переменного  $t$ .

Предположим, что побочной особой точкой является точка  $t_0$ . Тогда решения  $u_1$  и  $u_2$  можно представить в окрестности этой точки в виде

$$\begin{aligned} u_1 &= (t-t_0)^n [a_0 + a_1(t-t_0) + a_2(t-t_0)^2 + \dots], \\ u_2 &= (t-t_0)^n [b_0 + b_1(t-t_0) + b_2(t-t_0)^2 + \dots], \end{aligned} \quad (164)$$

где  $n$  — некоторое целое положительное число или нуль. Мы можем, очевидно, подобрать  $n$  так, чтобы по крайней мере одна из постоянных  $a_0$  или  $b_0$  была отлична от нуля. Для определенности мы предположим, что  $a_0 \neq 0$ . Если ввести вместо  $u$  новую неизвестную функцию  $v$  при помощи подстановки

$$u = (t-t_0)^n v,$$

то уравнение (163) перейдет в новое уравнение того же типа

<sup>1</sup> О возможности существования рассматриваемых здесь особых точек в цитированной выше (стр. 4) работе проф. П. Я. Полубариновой-Кочкиной никаких указаний не имеется.

При этом решения (164) преобразуются в

$$\begin{aligned} v_1 &= a_0 + a_1(t-t_0) + a_2(t-t_0)^2 + \dots, \\ v_2 &= b_0 + b_1(t-t_0) + b_2(t-t_0)^2 + \dots \end{aligned} \quad (a_0 \neq 0)$$

Без ущерба для общности мы можем взять в качестве второго интеграла  $v_2$  линейную комбинацию  $v_2 - \frac{b_0}{a_0} v_1$ . Тогда фундаментальная система решений нового дифференциального уравнения представится в виде

$$\begin{aligned} v_1 &= a_0 + a_1(t-t_0) + a_2(t-t_0)^2 + \dots, \\ v_2 &= c_1(t-t_0) + c_2(t-t_0)^2 + \dots \end{aligned} \quad (a_0 \neq 0) \quad (165)$$

Как известно, дифференциальное уравнение, решениями которого являются функции  $v_1$  и  $v_2$ , можно записать в форме

$$v'' - \frac{v_1 v_2'' - v_1'' v_2}{v_1 v_2' - v_1' v_2} v' + \frac{v_1' v_2'' - v_1'' v_2'}{v_1 v_2' - v_1' v_2} v = 0.$$

Если при этом точка  $t=t_0$  не будет обыкновенной точкой этого уравнения, то, согласно теореме Фукса, она должна быть полюсом его коэффициентов. Следовательно, в этом случае неминусом должно иметь место равенство

$$[v_1 v_2' - v_1' v_2]_{t=t_0} = 0,$$

которое, в силу разложений (165), обращается у нас в

$$a_0 c_1 = 0.$$

Но по предположению  $a_0 \neq 0$ ; следовательно  $c_1 = 0$ . Таким образом для рассматриваемой побочной особой точки разложения (165) должны иметь вид:

$$\begin{aligned} v_1 &= a_0 + a_1(t-t_0) + a_2(t-t_0)^2 + \dots, \\ v_2 &= c_2(t-t_0)^2 + \dots \end{aligned} \quad (a_0 \neq 0)$$

Второе из этих разложений можно записать в форме

$$v_2 = (t-t_0)^\nu [d_0 + d_1(t-t_0) + \dots], \quad (d_0 \neq 0)$$

где  $\nu$  — некоторое целое число, удовлетворяющее условию  $\nu \geq 2$ . Возвращаясь теперь от функции  $v$  к старой функции  $u$ , мы найдем, что уравнение (163) имеет в окрестности рассматриваемой нами побочной особой точки  $t_0$  два линейно независимых решения вида

$$\begin{aligned} u_1 &= (t-t_0)^n [a_0 + a_1(t-t_0) + \dots], \\ u_2 &= (t-t_0)^{n+\nu} [d_0 + d_1(t-t_0) + \dots], \end{aligned} \quad (a_0 \neq 0) \quad (166)$$

где  $n$  и  $\nu$  — целые числа, удовлетворяющие условиям:

$$n \geq 0, \quad \nu \geq 2.$$

Числа  $n$  и  $n+\nu$  являются, очевидно, показателями побочной особой точки.

Мы сейчас докажем, что на плане скоростей побочной особой точке с разностью показателей  $\nu$  ( $\nu \geq 2$ ) соответствует точка разветвления порядка  $\nu - 1$ .

В самом деле, рассмотрим плоскость комплексного переменного

$$s = \frac{u_2}{u_1} = (t - t_0)^\nu [l_0 + l_1(t - t_0) + \dots]. \quad (l_0 = \frac{d_0}{a_0} \neq 0) \quad (167)$$

Особой точке  $t_0$  соответствует в плоскости  $s$  точка  $s = 0$ . Если переменное  $t$  совершит однократный обход вокруг точки  $t = t_0$ , то, как показывает разложение (167), переменное  $s$  совершит  $\nu$ -кратный обход вокруг точки  $s = 0$ . Следовательно окрестности точки  $t = t_0$  соответствует в плоскости  $s$   $\nu$ -листная область с точкою разветвления порядка  $\nu - 1$ . Так как по предположению функции  $z_1(t)$  и  $w_1(t)$  являются решениями уравнения (163), то должны иметь место соотношения

$$z_1 = au_1 + bu_2, \quad w_1 = cu_1 + du_2, \quad (ad - bc \neq 0)$$

где  $a, b, c,$  и  $d$  — некоторые постоянные. Вычисляя комплексную скорость  $w'$ , мы получим:

$$w' = \frac{dw}{dz} = \frac{w_1}{z_1} = \frac{cu_1 + du_2}{au_1 + bu_2} = \frac{c + d \frac{u_2}{u_1}}{a + b \frac{u_2}{u_1}}$$

или

$$w' = \frac{c + ds}{a + bs}. \quad (168)$$

Этот результат показывает, что  $\nu$ -кратному обходу точки  $s = 0$  соответствует в плоскости  $w'$   $\nu$ -кратный же обход точки  $w' = \frac{c}{a}$ . Так как область переменного  $t$  является по нашим предположениям однолиственным отображением области течения  $z$ , то отсюда следует, что окрестности побочной особой точки  $t_0$  соответствует на плоскости  $w'$ , а следовательно и на плане скоростей,  $\nu$ -листное отображение потока с  $\nu - 1$ -кратною точкою разветвления. Очевидно, что и наоборот всякой точке разветвления плана скоростей, для которой решения  $u_1$  и  $u_2$  регулярны, соответствует побочная особая точка уравнения (163).

Пользуясь планом скоростей, легко доказать, что побочные особые точки, не лежащие на действительной оси плоскости  $t$ , располагаются симметрично относительно этой оси; но мы на этом вопросе здесь останавливаться не будем.

Наиболее интересным является случай, когда побочная особая точка с разностью показателей  $\nu = 2$  соответствует одной из точек  $P$  (черт. 47— $z$ ) контура потока. Легко проверить, что в этом случае контур плана скоростей имеет вид разреза (черт. 47— $v$ ), сделанного до соответствующей точки плана  $P$ .

Заканчивая вопрос о побочных особых точках, заметим здесь, что обычно показатели их имеют значения 0 и 2 (при  $t_0 \neq \infty$ ).

Если внутри области течения грунтовой воды нет точек, в которых нарушается регулярность комплексной скорости  $w'(z)$ , то, при конечном числе особых точек, рассмотренными выше особыми точками дело, конечно, и исчерпывается. При бесконечном же числе их, предельная особая точка множества особых точек, очевидно, не будет регулярной особой точкой. Случай с такого рода особыми точками мы здесь рассматривать не будем.

Рассмотрим теперь один часто встречающийся на практике случай нарушения регулярности комплексной скорости  $w'(z)$  внутри области течения. Именно, мы предположим, что внутри потока грунтовых вод имеется источник, расход которого (дебит) равен  $Q$ . Пусть  $z = 0$  аффикс источника. Легко подсчитать, что комплексная скорость представится в окрестности источника разложением вида

$$w'(z) = i \frac{Q}{2\pi} z^{-1} (1 + a_1 z + \dots)^{-1}.$$

Если отобразить поток на верхнюю полуплоскость переменного  $t$  и предположить, что источник переходит в точку  $t_0$ , то для функции  $w_1(t) = \frac{dw}{dt}$  получится разложение

$$w_1(t) = i \frac{Q}{2\pi} (t - t_0)^{-1} [1 + b_1(t - t_0) + \dots].$$

Для функции  $z_1(t)$  соответствующее разложение будет иметь вид

$$z_1(t) = c_0 + c_1(t - t_0) + \dots \quad (c_0 \neq 0)$$

Полученные разложения показывают, что источнику соответствует регулярная особая точка с показателями 0 и  $-1$ .

Эту особую точку легко устранить. Для этого достаточно ввести в уравнение (163) вместо функции  $u$  новую неизвестную функцию  $v$  при помощи формулы  $u = (t - t_0)^{-1} v$ . Каноническая система решений преобразованного уравнения представится тогда в окрестности точки  $t = t_0$  в виде

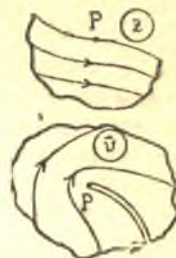
$$\begin{aligned} v_1 &= 1 + b_1(t - t_0) + \dots \\ v_2 &= c_0(t - t_0) + \dots \end{aligned}$$

Следовательно, мы имеем здесь случай либо обыкновенной точки уравнения, либо побочной особой точки. Но побочной особой точки здесь не может быть, ибо

$$[v_1 v_2' - v_1' v_2]_{t=t_0} = c_0 \neq 0.$$

Поэтому для преобразованного уравнения рассматриваемая особая точка есть обыкновенная.

<sup>1</sup> Коэффициент фильтрации  $K$  принимаем равным единице.



Черт. 47.

Особые точки, которые удается устранить из уравнения (163) при помощи преобразования его по формуле

$$u = (t - t_0)^\alpha v,$$

где  $\alpha$  — некоторое подходящим образом выбранное число, мы будем называть в дальнейшем устранимыми особыми точками уравнения (163).

Заканчивая настоящий параграф, заметим здесь, что, основываясь на выводах § 28, легко показать, что сумма показателей особых точек уравнения (163) всегда равна числу неустранимых особых точек его, уменьшенному на две единицы.

### § 32. Задача Девисона-Гамеля<sup>1</sup>

В качестве применения метода проф. П. Я. Полубариновой-Кочиной мы рассмотрим здесь задачу о фильтрации воды через земляную плотину на непроницаемом основании с вертикальными откосами (черт. 48—z). Капиллярным поднятием воды будем пренебрегать.

Впервые метод решения этой задачи, основанный на приведении ее к задаче Дирихле, был дан в 1932 г. Б. Б. Девисоном<sup>2</sup>, и повидимому, независимо от него в 1934 г. Г. Гамелем<sup>3</sup>. В 1935 г. Г. Гамель совместно с Э. Гюнтером опубликовали первый пример численного решения этой задачи<sup>4</sup>. Это решение, как и следовало ожидать, оказалось крайне громоздким.

Значительно проще задачу удалось решить в 1938 г. проф. П. Я. Полубариновой-Кочиной, применившей к ней

<sup>1</sup> Доложено на заседании отдела механики ФМИ при СГУ 15 апреля 1939 г.  
<sup>2</sup> Зап. гос. гидр. Ин-та, том VI, 1932 г.  
<sup>3</sup> ZAMM, 1934, Bd. 14, N. 3, S. 129—157.  
<sup>4</sup> ZAMM, 1935, Bd. 15, N. 3, S. 255—265. См. также С. А. Христианович, С. Г. Михлин, Б. Б. Девисон. Некоторые новые вопросы механики сплошной среды. Изд-во Акад. Наук СССР, 1938 г., стр. 330—338.

впервые методы аналитической теории линейных дифференциальных уравнений<sup>1</sup>.

Мы дадим здесь решение указанной задачи, основанное, как и решение проф. П. Я. Полубариновой-Кочиной, на теории линейных дифференциальных уравнений, но более простое и более удобное для практических расчетов.

Отобразим область фильтрации  $ABCDE$  (черт. 48—z) конформно на верхнюю полуплоскость комплексного переменного  $t$  (черт. 48—t) так, чтобы точкам  $E, C$  и  $D$  контура потока отвечали точки  $0, 1$  и  $\infty$  действительной оси плоскости  $t$ . Пусть при этом точкам  $A$  и  $B$  плоскости  $z$  соответствуют точки  $a$  и  $b$  плоскости  $t$ .

Чтобы получить функции

$$z_1(t) = \frac{dz}{dt}, \quad w_1(t) = \frac{dw}{dt} \quad \text{и} \quad \omega_1(t) = \frac{d\omega}{dt}$$

в виде решений уравнения

$$u'' + P(t)u' + Q(t)u = 0, \quad (169)$$

построим прежде всего канонические системы решений его в окрестностях точек  $E, A, B, C$  и  $D$ .

Применяя правила, указанные в § 30, мы найдем, что эти решения представляются такими разложениями:

1) вблизи  $E$  ( $t=0$ )

$$z_1 = e_0 + e_1 t + \dots \quad (e_0 \neq 0)$$

$$w_1 = C z_1 = z_1 (e_0' \ln t + e_1' t + \dots); \quad (e_0' \neq 0)$$

2) вблизи  $A$  ( $t=a$ )

$$z_1 = (t-a)^{-\frac{1}{2}} [a_0 + a_1(t-a) + \dots], \quad (a_0 \neq 0)$$

$$w_1 = (t-a)^{-\frac{1}{2}} [a_0' + a_1'(t-a) + \dots]; \quad (a_0' \neq 0)$$

3) вблизи  $B$  ( $t=b$ )

$$z_1 = (t-b)^{-\frac{1}{2}} [b_0 + b_1(t-b) + \dots], \quad (b_0 \neq 0)$$

$$w_1 = (t-b)^{-\frac{1}{2}} [b_0' + b_1'(t-b) + \dots]; \quad (b_0' \neq 0)$$

4) вблизи  $C$  ( $t=1$ )

$$w_1 = (t-1)^{-\frac{1}{2}} [c_0 + c_1(t-1) + \dots], \quad (c_0 \neq 0)$$

$$z_1 - C' w_1 = w_1 [c_0' \ln(t-1) + c_1'(t-1) + \dots]; \quad (c_0' \neq 0)$$

5) вблизи  $D$  ( $t=\infty$ )

$$\omega_1 = \left(\frac{1}{t}\right)^2 (d_0 + d_1 \frac{1}{t} + \dots), \quad (d_0 \neq 0)$$

$$z_1 - C'' \omega_1 = \omega_1 (d_0' \ln \frac{1}{t} + d_1' \frac{1}{t} + \dots). \quad (d_0' \neq 0)$$

<sup>1</sup> Изв. Акад. Наук СССР, отд. мат. и ест. наук, 1938 г., № 3, стр. 375—385.

Отсюда видно, что показатели особых точек имеют значения, приведенные в следующей табличке:

Особ. точки	0	$a$	$b$	1	$\infty$	Сумма показат.
Показатели	$r$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	2
	$r'$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	2

Сумма показателей равна у нас единице. Между тем, согласно соотношению Фукса (140), она должна равняться, при пяти особых точках, трем. Следовательно, среди рассматриваемых нами особых точек имеются две устранимые особые точки (см. конец § 31). Это будут, как легко усмотреть из предыдущих разложений, точки  $A$  и  $B$ . Для их устранения достаточно ввести вместо  $u$  новую искомую функцию  $v$  по формуле

$$u = \frac{v}{V(t-a)(t-b)}. \quad (170)$$

Для дифференциального уравнения, которому удовлетворяет функция  $v$ , точки  $A$  и  $B$  будут, очевидно, обыкновенными. Табличка показателей особых точек этого уравнения будет иметь вид:

Особ. точки	0	1	$\infty$	Сумма показат.
Показатели	$r$	0	$-\frac{1}{2}$	1
	$r'$	0	$-\frac{1}{2}$	1

Сумма показателей, как и должно быть, равна теперь единице.

Из изложенного в § 29 следует, что функция  $v$  определяется уравнением

$$v = P \begin{pmatrix} 0 & 1 & \infty \\ 0 & -\frac{1}{2} & 1 \\ 0 & -\frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix} t.$$

Если сделать подстановку

$$v = (t-1)^{-\frac{1}{2}} U, \quad (171)$$

то для определения функции  $U$  получится гипергеометрическое уравнение

$$U = P \begin{pmatrix} 0 & 1 & \infty \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} t.$$

Так как разности показателей особых точек равны у нас нулю, то вторые решения канонических систем решений будут содержать логарифмические члены. Мы воспользуемся в дальнейшем только теми решениями канонических систем, которые свободны от логарифмических членов. Эти решения можно представить, согласно изложенному в § 29, в такой форме:

1) для точки  $t=0$  ( $E$ )

$$U_0(t) = \int_0^1 \frac{ds}{V s(1-s)(1-ts)},$$

2) для точки  $t=1$  ( $C$ )

$$U_1(t) = \int_0^1 \frac{ds}{V s(1-s)[1-(1-t)s]},$$

3) для точки  $t=\infty$  ( $D$ )

$$U_\infty(t) = \frac{1}{V t} \int_0^1 \frac{ds}{V s(1-s)(1-\frac{1}{t}s)}.$$

Рассматривая теперь разложения, приведенные на стр. 37, и принимая во внимание подстановки (170) и (171), мы найдем, что решения уравнения (169), соответствующие полученным решениям гипергеометрического уравнения, будут:

$$\begin{aligned} z_1 &= \frac{dz}{dt} = \frac{AU_0(t)}{V(t-a)(t-b)(t-1)}, \\ w_1 &= \frac{dw}{dt} = \frac{BU_1(t)}{V(t-a)(t-b)(t-1)}, \\ \omega_1 &= \frac{d\omega}{dt} = \frac{CU_\infty(t)}{V(t-a)(t-b)(t-1)}, \end{aligned} \quad (172)$$

где  $A$ ,  $B$  и  $C$  — некоторые постоянные.

Пользуясь соотношением (162), мы легко найдем, что постоянные  $A$ ,  $B$  и  $C$  должны быть подобраны так, чтобы имело место тождество

$$AU_0 + BU_1 + CU_\infty = 0. \quad (173)$$

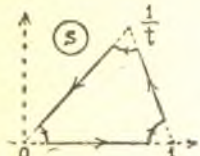
Для наших целей достаточно показать, что необходимым следствием этого тождества являются равенства:

$$|A| = |B| = |C|. \quad (174)$$

Это можно сделать так: мы вычислим интеграл

$$\int \frac{ds}{\sqrt{s(1-s)(1-ts)}}$$

по замкнутому пути, показанному на черт. 49. Внутри и на рассматриваемом пути подынтегральная функция регулярна. Поэтому, уменьшая до нуля радиусы дуг окружностей, окружающих точки 0, 1 и  $\frac{1}{t}$ , мы получим в пределе равенство



Черт. 49.

$$\int_0^1 \frac{ds}{\sqrt{s(1-s)(1-ts)}} + \int_1^{\frac{1}{t}} \frac{ds}{\sqrt{s(1-s)(1-ts)}} + \int_{\frac{1}{t}}^0 \frac{ds}{\sqrt{s(1-s)(1-ts)}} = 0.$$

Преобразовав второй и третий интегралы соответственно при помощи подстановок

$$s = \frac{1-(1-t)s'}{t} \text{ и } s = \frac{s''}{t},$$

мы без труда получим тождество

$$U_0 \pm i U_1 - U_\infty = 0.$$

Из сравнения этого тождества с предыдущим (173) как раз и следуют равенства (174).

Тот же результат можно было бы получить, основываясь на рассмотрении связи между планом скоростей (точнее—области  $w'$ ) и переменными (172) в точках  $C$ ,  $D$  и  $E$ .

Преобразуем теперь выражения для  $U_0$ ,  $U_1$  и  $U_\infty$  при помощи подстановки  $s = \sin^2 \varphi$ . Тогда, введя в рассмотрение полные эллиптические интегралы первого рода

$$K(t) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{\sqrt{1-t \sin^2 \varphi}}, \quad K'(t) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{\sqrt{1-(1-t) \sin^2 \varphi}},$$

$$K\left(\frac{1}{t}\right) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{\sqrt{1-\frac{1}{t} \sin^2 \varphi}},$$

найдем:

$$U_0 = 2K(t), \quad U_1 = 2K'(t), \quad U_\infty = \frac{2}{\sqrt{t}} K\left(\frac{1}{t}\right).$$

Подставляя эти значения в формулы (172), будем иметь:

$$dz = \frac{2A K(t) dt}{\sqrt{(t-a)(t-b)(t-1)}},$$

$$d\omega = \frac{2B K'(t) dt}{\sqrt{(t-a)(t-b)(t-1)}},$$

$$d\omega = \frac{2C K\left(\frac{1}{t}\right) dt}{\sqrt{(t-a)(t-b)(t-1)t}}.$$

Отсюда, принимая во внимание уравнения

$$x + r + q = \text{const} \text{ и } y + \frac{p}{\gamma} + h = \text{const}$$

и обозначая общую величину модуля количеств  $2A$ ,  $2B$ ,  $2C$  через  $c$ , получим без труда для отдельных частей контура течения следующие формулы:

1) на  $EA$  ( $0 < t < a$ ):

$$dz = \frac{-icK(t) dt}{\sqrt{(a-t)(b-t)(1-t)}} = idy, \quad d\omega = \frac{-cK'(t) dt}{\sqrt{(a-t)(b-t)(1-t)}} = dq;$$

2) на  $AB$  ( $a < t < b$ ):

$$dz = \frac{cK(t) dt}{\sqrt{(t-a)(b-t)(1-t)}} = dx, \quad d\omega = \frac{-icK'(t) dt}{\sqrt{(t-a)(b-t)(1-t)}} = idh;$$

3) на  $BC$  ( $b < t < 1$ ):

$$dz = \frac{icK(t) dt}{\sqrt{(t-a)(t-b)(1-t)}} = idy, \quad d\omega = \frac{cK'(t) dt}{\sqrt{(t-a)(t-b)(1-t)}} = dq;$$

4) на  $CD$  ( $1 < t < +\infty$ ):

$$d\omega = \frac{icK'(t) dt}{\sqrt{(t-a)(t-b)(t-1)}} = -idy, \quad d\omega = \frac{cK\left(\frac{1}{t}\right) dt}{\sqrt{(t-a)(t-b)(t-1)t}} = -dx;$$

5) на  $DE$  ( $-\infty < t < 1$ ):

$$dz = \frac{-icK(t) dt}{\sqrt{(a-t)(b-t)(1-t)}} = idy, \quad d\omega = \frac{cK\left(\frac{1}{t}\right) dt}{\sqrt{(a-t)(b-t)(1-t)(-t)}} = -dq.$$

Формулы, относящиеся к частям контура  $CD$  и  $DE$ , выгодно несколько преобразовать. Для этого, на части  $CD$  мы введем вместо  $t$  переменное  $t_1$ , по формуле

$$t = \frac{1}{t_1},$$

а на части  $DE$  переменное  $t_2$  по формуле

$$t = 1 - \frac{1}{t_2}.$$

Замечая тогда, что

$$K'(t) = \sqrt{t_1} K'(t_1), \quad K\left(\frac{1}{t}\right) = K(t_1),$$

$$K(t) = \sqrt{t_2} K'(t_2), \quad \frac{1}{\sqrt{-t}} K\left(\frac{1}{t}\right) = \sqrt{t_2} K(t_2),$$

мы перепишем все предыдущие формулы в виде:

1) на  $EA$  ( $0 < t < a$ ):

$$dy = -c \frac{K(t) dt}{\sqrt{(a-t)(b-t)(1-t)}}, \quad dq = -c \frac{K'(t) dt}{\sqrt{(a-t)(b-t)(1-t)}}; \quad (175)$$

2) на  $AB$  ( $a < t < b$ ):

$$dx = c \frac{K(t) dt}{\sqrt{(t-a)(b-t)(1-t)}}, \quad dh = -c \frac{K'(t) dt}{\sqrt{(t-a)(b-t)(1-t)}}; \quad (176)$$

3) на  $BC$  ( $b < t < 1$ ):

$$dy = c \frac{K(t) dt}{\sqrt{(t-a)(t-b)(1-t)}}, \quad dq = c \frac{K'(t) dt}{\sqrt{(t-a)(t-b)(1-t)}}; \quad (177)$$

4) на  $CD$  ( $0 < t_1 < 1$ ):

$$dy = c \frac{K'(t_1) dt_1}{\sqrt{(1-at_1)(1-bt_1)(1-t_1)}},$$

$$dx = c \frac{K(t_1) dt_1}{\sqrt{(1-at_1)(1-bt_1)(1-t_1)}}; \quad (178)$$

5) на  $DE$  ( $0 < t_2 < 1$ ):

$$dy = -c \frac{K'(t_2) dt_2}{\sqrt{[1-(1-a)t_2][1-(1-b)t_2]}},$$

$$dq = -c \frac{K(t_2) dt_2}{\sqrt{[1-(1-a)t_2][1-(1-b)t_2]}}. \quad (179)$$

Чтобы приспособить эти формулы к вычислениям с помощью таблиц полных эллиптических интегралов первого рода, положим

$$a = \sin^2 \alpha, \quad b = \sin^2 \beta \quad (0 < \alpha < \beta < \frac{\pi}{2})$$

и введем вместо  $t$ ,  $t_1$ , и  $t_2$  новые переменные  $\Theta$ ,  $\vartheta$  и  $\omega$  по формулам

$$t = \sin^2 \Theta, \quad t_1 = \sin^2 \vartheta, \quad t_2 = \sin^2 \omega.$$

Тогда, введя для сокращения обозначения

$$F(\Theta) = K(\sin^2 \Theta) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - \sin^2 \Theta \sin^2 \varphi}},$$

$$\Phi(\Theta, \alpha, \beta) = (\sin^2 \Theta - \sin^2 \alpha)(\sin^2 \Theta - \sin^2 \beta) =$$

$$= \sin(\Theta + \alpha) \sin(\Theta - \alpha) \sin(\Theta + \beta) \sin(\Theta - \beta),$$

$$\Psi(\vartheta, \alpha, \beta) = \frac{\sin \vartheta}{\sqrt{(1 - \sin^2 \alpha \sin^2 \vartheta)(1 - \sin^2 \beta \sin^2 \vartheta)}},$$

$$\Omega(\omega, \alpha, \beta) = \frac{\sin \omega \cos \omega}{\sqrt{(1 - \cos^2 \alpha \sin^2 \omega)(1 - \cos^2 \beta \sin^2 \omega)}}.$$

получим для отдельных частей контура потока такие формулы:

1) на  $EA$  ( $0 < \Theta < \alpha$ ):

$$dy = -2c \frac{F(\Theta) \sin \Theta}{\sqrt{\Phi(\Theta, \alpha, \beta)}} d\Theta, \quad dq = -2c \frac{F\left(\frac{\pi}{2} - \Theta\right) \sin \Theta}{\sqrt{-\Phi(\Theta, \alpha, \beta)}} d\Theta;$$

2) на  $AB$  ( $\alpha < \Theta < \beta$ ):

$$dx = 2c \frac{F(\Theta) \sin \Theta}{\sqrt{-\Phi(\Theta, \alpha, \beta)}} d\Theta, \quad dh = -2c \frac{F\left(\frac{\pi}{2} - \Theta\right) \sin \Theta}{\sqrt{-\Phi(\Theta, \alpha, \beta)}} d\Theta;$$

3) на  $BC$  ( $\beta < \Theta < \frac{\pi}{2}$ ):

$$dy = 2c \frac{F(\Theta) \sin \Theta}{\sqrt{\Phi(\Theta, \alpha, \beta)}} d\Theta, \quad dq = 2c \frac{F\left(\frac{\pi}{2} - \Theta\right) \sin \Theta}{\sqrt{\Phi(\Theta, \alpha, \beta)}} d\Theta;$$

4) на  $CD$  ( $0 < \vartheta < \frac{\pi}{2}$ ):

$$dy = 2c \Psi(\vartheta, \alpha, \beta) F\left(\frac{\pi}{2} - \vartheta\right) d\vartheta, \quad dx = 2c \Psi(\vartheta, \alpha, \beta) F(\vartheta) d\vartheta;$$

5) на  $DE$  ( $0 < \omega < \frac{\pi}{2}$ ):

$$dy = -2c \Omega(\omega, \alpha, \beta) F\left(\frac{\pi}{2} - \omega\right) d\omega, \quad dq = -2c \Omega(\omega, \alpha, \beta) F(\omega) d\omega.$$

Пусть теперь (черт. 48 —  $z$ ,  $\omega$  и  $\omega$ )

$h_1$  — глубина воды в верхнем бьефе,

$h_2$  — глубина воды в нижнем бьефе,

$l$  — длина флютбета,

$\eta$  — высота промежутка высачивания,

$yc$  — общее падение свободной поверхности,

$Q$  — общий фильтрационный расход через плотину,

$Q_1$  — часть фильтрационного расхода, высачивающаяся на дневную поверхность низового откоса плотины,  
 $Q_2$  — часть фильтрационного расхода, идущая под уровень воды нижнего бьефа.

Рассматривая чертежи 48 —  $z$ ,  $w$  и  $\omega$  мы легко получим из предыдущих результатов следующие удобные для вычислений формулы<sup>1</sup>:

$$h_2 = 2c \int_0^{\alpha} \frac{F(\theta) \sin \theta}{V \Phi(\theta, \alpha, \beta)} d\theta, \quad Q_2 = 2c \int_0^{\alpha} \frac{F\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) \sin \theta}{V \Phi(\theta, \alpha, \beta)} d\theta,$$

$$l = 2c \int_{\alpha}^{\beta} \frac{F(\theta) \sin \theta}{V - \Phi(\theta, \alpha, \beta)} d\theta, \quad h_1 - h_2 = 2c \int_{\alpha}^{\beta} \frac{F\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) \sin \theta}{V - \Phi(\theta, \alpha, \beta)} d\theta,$$

$$h_1 = 2c \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{F(\theta) \sin \theta}{V \Phi(\theta, \alpha, \beta)} d\theta, \quad Q = 2c \int_{\beta}^{\frac{\pi}{2}} \frac{F\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) \sin \theta}{V \Phi(\theta, \alpha, \beta)} d\theta,$$

$$y_c = 2c \int_0^{\frac{\pi}{2}} \Psi(\theta, \alpha, \beta) F\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) d\theta, \quad l = 2c \int_0^{\frac{\pi}{2}} \Psi(\theta, \alpha, \beta) F(\theta) d\theta,$$

$$\eta = 2c \int_0^{\frac{\pi}{2}} \Omega(\omega, \alpha, \beta) F\left(\frac{\pi}{2} - \omega\right) d\omega, \quad Q_1 = 2c \int_0^{\frac{\pi}{2}} \Omega(\omega, \alpha, \beta) F(\omega) d\omega.$$

К этим формулам можно добавить еще такие:

$$\eta + y_c = h_1 - h_2, \quad Q_1 + Q_2 = Q.$$

Наконец, для вычисления координат точек свободной поверхности получим формулы:

$$x = 2c \int_0^{\theta} \Psi(\theta, \alpha, \beta) F(\theta) d\theta, \quad y = 2c \int_0^{\theta} \Psi(\theta, \alpha, \beta) F\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) d\theta.$$

Постоянная  $c$  определяет, очевидно, масштаб области течения  $ABCDE$  (черт. 48 —  $z$ ).

<sup>1</sup> Коэффициент фильтрации  $K$  принят здесь равным единице.

Для облегчения вычисления функций  $\Psi(\theta, \alpha, \beta)$  и  $\Omega(\omega, \alpha, \beta)$  полезно заметить следующее: если положить

$$\sin \alpha \sin \theta = \sin A, \quad \sin \beta \sin \theta = \sin B,$$

то получим

$$\Psi(\theta, \alpha, \beta) = \frac{\sin \theta}{\cos A \cos B}.$$

Аналогично, если положить

$$\cos \alpha \sin \omega = \sin C, \quad \cos \beta \sin \omega = \sin D,$$

то будем иметь

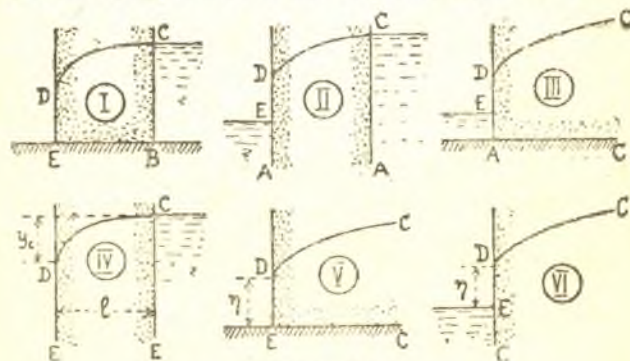
$$\Omega(\omega, \alpha, \beta) = \frac{\sin \omega \cos \omega}{\cos C \cos D}.$$

### § 33. Частные случаи задачи Девисона-Гамеля<sup>1</sup>.

В некоторых частных случаях решение задачи Девисона-Гамеля можно заметно упростить. Сюда относятся следующие случаи:

- |                          |                    |
|--------------------------|--------------------|
| I) $a = 0, 0 < b < 1;$   | IV) $a = b = 0;$   |
| II) $0 < a = b < 1;$     | V) $a = 0, b = 1;$ |
| III) $0 < a < 1, b = 1;$ | VI) $a = b = 1.$   |

Течения, соответствующие этим случаям, показаны на черт. 50.



Черт. 50.

Если воспользоваться уравнениями (175), (176), (177), (178) и (179), то для рассматриваемых случаев получатся следующие полезные формулы:

Случай I ( $a = 0$ ):

$$l = c \int_0^b \frac{K(t) dt}{V t(b-t)(1-t)}, \quad h_1 = c \int_0^b \frac{K'(t) dt}{V t(b-t)(1-t)},$$

<sup>1</sup> Доложено на заседании отдела механики ФМИ при СГУ 15 апреля 1939 г.



$$h_1 = c \int_b^1 \frac{K(t) dt}{V t(t-b)(1-t)}, \quad Q = c \int_b^1 \frac{K'(t) dt}{V t(t-b)(1-t)},$$

$$y_c = c \int_0^1 \frac{K'(t_1) dt_1}{V(1-bt_1)(1-t_1)}, \quad l = c \int_0^1 \frac{K(t_1) dt_1}{V(1-bt_1)(1-t_1)},$$

$$\eta = c \int_0^1 \frac{K'(t_2) dt_2}{V(1-t_2)[1-(1-b)t_2]}, \quad Q = c \int_0^1 \frac{K(t_2) dt_2}{V(1-t_2)[1-(1-b)t_2]},$$

$$y = c \int_0^{t_1} \frac{K'(t_1) dt_1}{V(1-bt_1)(1-t_1)}, \quad x = c \int_0^{t_1} \frac{K(t_1) dt_1}{V(1-bt_1)(1-t_1)}. \quad (0 \leq t_1 \leq 1)$$

Случай II ( $a=b$ ):

$$y_c = c \int_0^1 \frac{K'(t_1) dt_1}{(1-at_1)V1-t_1}, \quad l = c \int_0^1 \frac{K(t_1) dt_1}{(1-at_1)V1-t_1},$$

$$\eta = c \int_0^1 \frac{K'(t_2) dt_2}{1-(1-a)t_2}, \quad Q_1 = c \int_0^1 \frac{K(t_2) dt_2}{1-(1-a)t_2},$$

$$y = c \int_0^{t_1} \frac{K'(t_1) dt_1}{(1-at_1)V1-t_1}, \quad x = c \int_0^{t_1} \frac{K(t_1) dt_1}{(1-at_1)V1-t_1}. \quad (0 \leq t_1 \leq 1)$$

Случай III ( $b=1$ ):

$$h_2 = c \int_0^a \frac{K(t) dt}{(1-t)V a-t}, \quad Q_2 = c \int_0^a \frac{K'(t) dt}{(1-a)V a-t},$$

$$\eta = c \int_0^1 \frac{K'(t_2) dt_2}{V1-(1-a)t_2}, \quad Q_1 = c \int_0^1 \frac{K(t_2) dt_2}{V1-(1-a)t_2},$$

$$y = c \int_0^{t_1} \frac{K'(t_1) dt_1}{(1-t_1)V1-at_1}, \quad x = c \int_0^{t_1} \frac{K(t_1) dt_1}{(1-t_1)V1-at_1}. \quad (0 \leq t_1 < 1)$$

Случай IV ( $a=b=0$ ):

$$y_c = c \int_0^1 \frac{K'(t_1) dt_1}{V1-t_1} = 2c \int_0^1 K(k^2) dk = 4cG,$$

где  $G$  — постоянная Каталана<sup>1</sup>,

$$l = c \int_0^1 \frac{K(t_1) dt_1}{V1-t_1} = 2c \int_0^1 K'(k^2) dk = c \frac{\pi^2}{2},$$

$$\frac{y_c}{l} = \frac{8G}{\pi^2} \text{ или } y_c = 0,7425 l, \quad (180)$$

$$y = c \int_0^{t_1} \frac{K'(t_1) dt_1}{V1-t_1}, \quad x = c \int_0^{t_1} \frac{K(t_1) dt_1}{V1-t_1}. \quad (0 \leq t_1 \leq 1)$$

Случай V ( $a=0, b=1$ ):

$$\eta = c \int_0^1 \frac{K'(t_2) dt_2}{V1-t_2} = 4cG,$$

$$Q = c \int_0^1 \frac{K(t_2) dt_2}{V1-t_2} = c \frac{\pi^2}{2},$$

$$\frac{Q}{\eta} = \frac{\pi^2}{8G} \text{ или } Q = 1,3469 \eta, \quad (181)$$

$$y = c \int_0^{t_1} \frac{K'(t_1) dt_1}{V1-t_1}, \quad x = c \int_0^{t_1} \frac{K(t_1) dt_1}{V1-t_1}. \quad (0 \leq t_1 < 1)$$

Случай VI ( $a=b=1$ ):

$$\eta = c \int_0^1 K'(t_2) dt_2 = 2c \int_0^1 K(k^2) k' dk' = 2c,$$

<sup>1</sup>  $G = 1 - \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} - \dots = 0,915\ 9656.$

$$Q_1 = c \int_0^1 K(t_2) dt_2 = 2c \int_0^1 K(k^2) k dk = 2c,$$

$$Q_1 = \eta, \quad (182)$$

$$y = c \int_0^{t_1} \frac{K'(t_1) d_{21}^2}{(1-t_1)\sqrt{1-t_1}} = 2c \left[ \frac{E'(t_1)}{\sqrt{1-t_1}} - 1 \right],$$

$$x = c \int_0^{t_1} \frac{K(t_1) dt_1}{(1-t_1)\sqrt{1-t_1}} \quad (0 \leq t_1 < 1)$$

Знак  $E'(t_1)$  означает здесь полный эллиптический интеграл 2-го рода

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 - (1-t_1)\sin^2\varphi} d\varphi.$$

Из полученных выше формул наибольшего внимания заслуживают, очевидно, формулы (180), (181) и (182).

## ГЛАВА V

### Некоторые частные приемы и примеры решения задач на движение грунтовых вод параллельно вертикальной плоскости

#### § 34. Определение потока грунтовых вод, имеющего заданную свободную поверхность

Мы сейчас покажем, что если свободная поверхность потока грунтовых вод есть аналитическая кривая, заданная, например, уравнением

$$F(x, y) = 0, \quad (183)$$

то, пользуясь известными условиями, которые должны выполняться на свободной поверхности, легко построить поток грунтовых вод во всей области его существования.

Рассмотрим отдельно случаи с испарением и без испарения на свободной поверхности.

1. Случай, когда на свободной поверхности нет ни испарения ни поглощения воды. В этом

случае, как мы неоднократно видели, на свободной поверхности должны иметь место условия

$$y + h = \text{const} \text{ и } q = \text{const},$$

которые без ущерба для общности можно записать в виде

$$y + h = 0 \text{ и } q = 0. \quad (184)$$

Подставляя определяемые этими условиями значения  $h$  и  $q$  в выражение комплексной потерянной высоты  $w = q + ih$ , найдем, что вдоль свободной поверхности

$$w = -iy. \quad (185)$$

Положим теперь, как обычно,

$$x + iy = z. \quad (186)$$

Если исключить из уравнений (183), (185) и (186) переменные  $x$  и  $y$ , то найдем соотношение

$$F(w + z, iw) = 0, \quad (187)$$

определяющее, очевидно, аналитическое продолжение функции  $w(z)$ , заданной на кривой (183) условием (185).

Приравнявая в уравнении

$$z + w + w = \text{const}$$

константу нулю, можно представить соотношение (187) также в виде:

$$F(-w, iw) = 0.$$

Пример. Пусть свободная поверхность потока грунтовых вод есть парабола

$$y = \frac{x^2}{2a} \quad (a > 0)$$

(черт. 51). Присоединяя сюда уравнения (185) и (186) и исключая переменные  $x$  и  $y$  получим:

$$iw = \frac{(w + z)^2}{2a}$$

или

$$w = ia - z \pm ia\sqrt{1 - \frac{2z}{ia}}$$

Течение, определяемое этой функцией, может быть представлено на двулистной римановой поверхности с точками разветвления в  $\infty$  и в фокусе параболы. На черт. 51 показаны линии тока на одном из двух листов римановой поверхности. Верхняя сплошная черта изображает свободную поверхность—параболу с фокусом в точке  $F$ . От точки  $F$  вниз проведен разрез, вдоль которого первый лист должен быть соединен накрест со вторым листом. Течение на втором листе симметрично с течением на первом относительно оси  $y$ -ов.



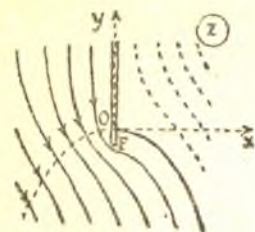
Черт. 51.

Если заменить  $z$  на  $-z$ , а  $w$  на  $-w$ , то верх плоскости  $z$  обратится в низ и наоборот, причем направление течения изменится противоположным. Условия:

$$y+h=0 \text{ и } q=0$$

при этом, конечно, не нарушатся. В результате мы получим течение (черт. 52) для случая, когда свободной поверхностью будет парабола

$$y = -\frac{x^2}{2a},$$



Черт. 52.

обращенная выпуклостью вверх. Комплексная потерянная высота нового течения будет:

$$w = -ia - z \pm ia \sqrt{1 + \frac{2z}{ia}}.$$

2. Случай, когда на свободной поверхности имеет место испарение или поглощение воды. Объем воды, идущий на испарение, мы будем считать пропорциональным горизонтальной проекции свободной поверхности, причем через  $c$  мы обозначим объем воды, отнесенный к единице длины горизонтальной проекции свободной поверхности, испаряющийся в единицу времени<sup>1</sup>. Принимая коэффициент фильтрации  $K=1$ , можно будет представить условия на свободной поверхности в рассматриваемом случае в виде:

$$y+h=0 \text{ и } q-cx=0. \quad (188)$$

Определяя отсюда  $h$  и  $q$  и подставляя в  $w=q+ih$ , найдем, что вдоль свободной поверхности

$$w=cx-iy.$$

Решая это уравнение совместно с уравнением

$$x+iy=z$$

относительно  $x$  и  $y$ , найдем:

$$x = \frac{w+z}{1+c} \text{ и } y = i \frac{w-cz}{1+c}.$$

Подставляя эти значения в уравнение свободной поверхности (183), получим для определения функции  $w(z)$  соотношение:

$$F\left(\frac{w+z}{1+c}, i \frac{w-cz}{1+c}\right) = 0. \quad (189)$$

<sup>1</sup> В случае поглощения воды свободной поверхностью постоянная  $c < 0$ .

Сравнивая последний результат, который можно представить также в виде:

$$F\left(\frac{w-cz}{1+c} + z, i \frac{w-cz}{1+c}\right) = 0$$

с соотношением (187), легко заметить, что для перехода от случая без испарения со свободной поверхностью к случаю с испарением, достаточно в соотношении, связывающем  $z$  и  $w$ , заменить  $w$  на  $\frac{w-cz}{1+c}$ .

Предположим, что, при отсутствии испарения воды со свободной поверхности, течение определяется функцией

$$w = f(z).$$

Тогда, согласно только что изложенному, соответствующее течение в случае испарения воды со свободной поверхности определится функцией:

$$w = (1+c)f(z) + cz.$$

Этот результат показывает, что для перехода от случая без испарения к случаю с испарением со свободной поверхности следует увеличить скорости фильтрации во всех точках потока в  $1+c$  раз и, кроме того, наложить на полученный поток добавочный однородный поступательный поток с вертикальной скоростью фильтрации  $c$ .

Здесь следует заметить, что, при указанном преобразовании потока грунтовых вод, линии тока, вообще говоря, меняются. Неизменными остаются лишь вертикальные линии тока.

Обобщение полученных результатов. Из предыдущего видно, что поток грунтовых вод вполне определяется заданием трех условий (183) и (184) или (188), если добавить к ним соотношения

$$x+iy=z \text{ и } h+iq=w. \quad (190)$$

В более общем случае можно взять три условия вида

$$F_1(x, y, q, h) = 0,$$

$$F_2(x, y, q, h) = 0,$$

$$F_3(x, y, q, h) = 0,$$

которые совместно с соотношениями (190) составят систему пяти уравнений между шестью переменными  $x, y, q, h, z$  и  $w$ . Исключив из этих уравнений переменные  $x, y, q$  и  $h$ , мы получим соотношение вида

$$f(z, w) = 0,$$

из которого найдем искомую функцию  $w(z)$ .

Для определения функции  $w(z)$  можно было бы также взять четыре условия вида

$$F_i(x, y, r, \frac{p}{r}, q, h) = 0 \quad (i=1, 2, 3, 4)$$

и три соотношения

$$x + iy = z, \quad r + i \frac{p}{\gamma} = \omega \text{ и } q + ih = w.$$

Исключив из них переменные  $x, y, r, \frac{p}{\gamma}, q$  и  $h$ , мы без труда нашли бы зависимость между  $z$  и  $w$ .

§ 35. О получении из решения одной задачи решений ряда новых задач

Легко показать, что путем взаимной замены ролей линий

$$x, y, r, \frac{p}{\gamma}, q \text{ и } h = \text{const} \quad (191)$$

и плоскостей  $z, \omega$  и  $w$  можно при известных условиях получить из решения одной задачи решение ряда новых задач.

В самом деле, известно, что в любом течении, определяемом функцией  $w = q + ih$ , можно менять взаимно роли линий тока ( $q = \text{const}$ ) и линий равных потерь высот ( $h = \text{const}$ ). При этом функция  $w$  переходит в новую функцию

$$w_1 = \pm iw.$$

Далее, при движении грунтовых вод параллельно вертикальной плоскости должно выполняться соотношение

$$z + \omega + w = \text{const}. \quad (192)$$

Умножая его на  $\pm i$ , мы заключаем, что при замене  $w$  на  $w_1 = \pm iw$  переменные  $z$  и  $\omega$  должны быть заменены новыми переменными

$$z_1 = \pm iz \text{ и } \omega_1 = \pm i\omega.$$

Геометрически изложенное означает, что если мы повернем плоскости  $z, \omega$  и  $w$  около их начал одновременно в одну и ту же сторону на прямой угол, то из решения первоначальной задачи получится решение некоторой новой. При этом линии (191) перейдут соответственно в линии

$$y, x, \frac{p}{\gamma}, r, h \text{ и } q = \text{const}.$$

Рассматривая уравнение (192), мы видим, что переменные  $z, \omega$  и  $w$  входят в него симметрично. Переставляя их местами, что равносильно перестановке названий плоскостей  $z, \omega$  и  $w$ , можно также получить решение новых задач.

Комбинируя оба указанных способа получения новых решений, удается иногда получить решения некоторых важных задач. Особенно интересный результат получается при замене переменных

$$z, \omega \text{ и } w$$

соответственно переменными

$$\pm iz, \pm iw \text{ и } \pm i\omega.$$

При этой замене свободная поверхность сохраняется в качестве таковой и в новой задаче; горизонтальные и вертикальные направления взаимно меняются; линии тока ( $q = \text{const}$ ) и линии равного потерь высот ( $h = \text{const}$ ) переходят соответственно в изогипсы ( $\frac{p}{\gamma} = \text{const}$ ) и линии роста давления ( $r = \text{const}$ ) и наоборот.

При применении указанных выше способов получения новых решений может случиться, что некоторые границы потока преобразуются в новые границы с довольно странными граничными условиями. Так, например, при замене переменных  $z, \omega$  и  $w$  соответственно переменными  $\omega, w$  и  $z$ , прямолинейная непроницаемая стенка, определяемая уравнениями

$$ax + by + c = 0 \text{ и } q = \text{const},$$

переходит в границу, вдоль которой выполняются условия

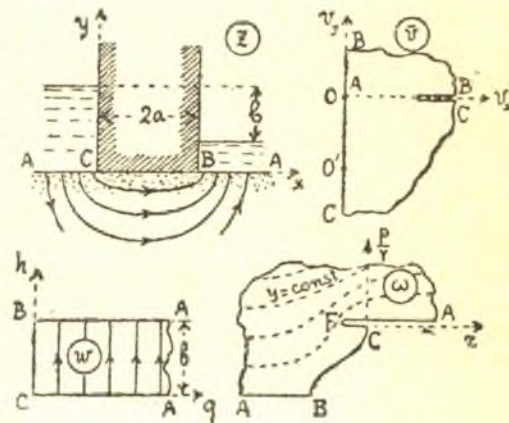
$$ar + b \frac{p}{\gamma} + c = 0 \text{ и } x = \text{const}.$$

Понятно, что такой границе трудно приписать какой либо физический смысл.

Отмеченное неудобство можно устранить, если условиться рассматривать только такие границы, которые получаются из свободной поверхности и вертикальной линии тока при применении указанной выше совокупности преобразований потоков.

Легко проверить, что такими границами могут быть только следующие:

- 1) свободная поверхность ( $p, q = \text{const}$ ),
- 2) вертикальная граница водоема ( $x, h = \text{const}$ ),
- 3) вертикальная линия высачивания ( $x, p = \text{const}$ ),
- 4) вертикальная линия тока ( $x, q, r = \text{const}$ ),
- 5) горизонтальная граница водоема или линия высачивания ( $y, h, p = \text{const}$ ),
- 6) горизонтальная линия тока ( $y, q = \text{const}$ ),
- 7) граница водоема, являющаяся одновременно линией роста давления ( $h, r = \text{const}$ ), и
- 8) горизонтальная линия роста давления ( $y, r = \text{const}$ ).



Черт. 53.

Пример 1. Рассмотрим случай движения грунтовых вод под плоским флютбетом, изображенный на черт. 53—z.

и три соотношения

$$x + iy = z, \quad r + i \frac{p}{\gamma} = \omega \quad \text{и} \quad q + ih = w.$$

Исключив из них переменные  $x, y, r, \frac{p}{\gamma}, q$  и  $h$ , мы без труда нашли бы зависимость между  $z$  и  $w$ .

§ 35. О получении из решения одной задачи решений ряда новых задач

Легко показать, что путем взаимной замены ролей линий

$$x, y, r, \frac{p}{\gamma}, q \quad \text{и} \quad h = \text{const} \quad (191)$$

и плоскостей  $z, \omega$  и  $w$  можно при известных условиях получить из решения одной задачи решение ряда новых задач.

В самом деле, известно, что в любом течении, определяемом функцией  $w = q + ih$ , можно менять взаимно роли линий тока ( $q = \text{const}$ ) и линий равных потерянных высот ( $h = \text{const}$ ). При этом функция  $w$  переходит в новую функцию

$$w_1 = \pm iw.$$

Далее, при движении грунтовых вод параллельно вертикальной плоскости должно выполняться соотношение

$$z + \omega + w = \text{const}. \quad (192)$$

Умножая его на  $\pm i$ , мы заключаем, что при замене  $w$  на  $w_1 = \pm iw$  переменные  $z$  и  $\omega$  должны быть заменены новыми переменными

$$z_1 = \pm iz \quad \text{и} \quad \omega_1 = \pm i\omega.$$

Геометрически изложенное означает, что если мы повернем плоскости  $z, \omega$  и  $w$  около их начал одновременно в одну и ту же сторону на прямой угол, то из решения первоначальной задачи получится решение некоторой новой. При этом линии (191) перейдут соответственно в линии

$$y, x, \frac{p}{\gamma}, r, h \quad \text{и} \quad q = \text{const}.$$

Рассматривая уравнение (192), мы видим, что переменные  $z, \omega$  и  $w$  входят в него симметрично. Переставляя их местами, что равносильно перестановке названий плоскостей  $z, \omega$  и  $w$ , можно также получить решение новых задач.

Комбинируя оба указанных способа получения новых решений, удается иногда получить решения некоторых важных задач. Особенно интересный результат получается при замене переменных

$$z, \omega \quad \text{и} \quad w$$

соответственно переменными

$$\pm iz, \pm iw \quad \text{и} \quad \pm i\omega.$$

При этой замене свободная поверхность сохраняется в качестве таковой и в новой задаче; горизонтальные и вертикальные направления взаимно меняются; линии тока ( $q = \text{const}$ ) и линии равного потерянного напора ( $h = \text{const}$ ) переходят соответственно в изогипсы ( $\frac{p}{\gamma} = \text{const}$ ) и линии роста давления ( $r = \text{const}$ ) и наоборот.

При применении указанных выше способов получения новых решений может случиться, что некоторые границы потока преобразуются в новые границы с довольно странными граничными условиями. Так, например, при замене переменных  $z, \omega$  и  $w$  соответственно переменными  $\omega, w$  и  $z$ , прямолинейная непроницаемая стенка, определяемая уравнениями

$$ax + by + c = 0 \quad \text{и} \quad q = \text{const},$$

переходит в границу, вдоль которой выполняются условия

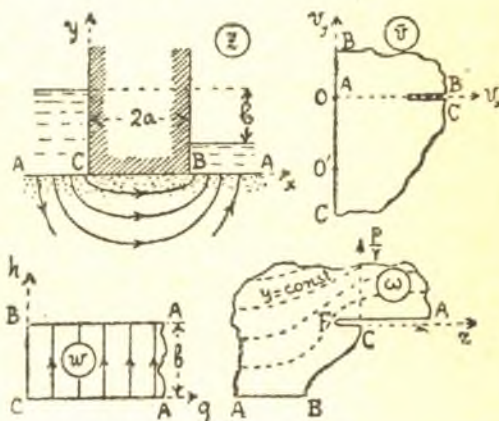
$$ar + b \frac{p}{\gamma} + c = 0 \quad \text{и} \quad x = \text{const}.$$

Понятно, что такой границе трудно приписать какой либо физический смысл.

Отмеченное неудобство можно устранить, если условиться рассматривать только такие границы, которые получаются из свободной поверхности и вертикальной линии тока при применении указанной выше совокупности преобразований потоков.

Легко проверить, что такими границами могут быть только следующие:

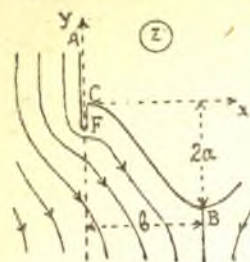
- 1) свободная поверхность ( $p, q = \text{const}$ ),
- 2) вертикальная граница водоема ( $x, h = \text{const}$ ),
- 3) вертикальная линия высачивания ( $x, p = \text{const}$ ),
- 4) вертикальная линия тока ( $x, q, r = \text{const}$ ),
- 5) горизонтальная граница водоема или линия высачивания ( $y, h, p = \text{const}$ ),
- 6) горизонтальная линия тока ( $y, q = \text{const}$ ),
- 7) граница водоема, являющаяся одновременно линией роста давления ( $h, r = \text{const}$ ), и
- 8) горизонтальная линия роста давления ( $y, r = \text{const}$ ).



Черт. 53.

Пример 1. Рассмотрим случай движения грунтовых вод под плоским флютбетом, изображенный на черт. 53—z.

Построив план скоростей (черт. 53— $v$ ) и применяя способ, указанный в примере § 12, мы легко наметим для рассматриваемого течения контур области переменного  $\omega$  (черт. 53— $\omega$ ).



Черт. 54.

Заменим теперь переменные  $z$ ,  $\omega$  и  $w$  соответственно переменными  $-i\omega$ ,  $-iz$  и  $-i\omega$ . Тогда плоскости переменных  $z$ ,  $\omega$  и  $w$  повернутся влево на прямой угол и обратятся соответственно в плоскости переменных  $w$ ,  $z$  и  $\omega$ . При этом горизонтальные границы водоемов  $AB$  и  $CA$  (черт. 53— $z$ ) перейдут в вертикальные линии тока, а линия тока  $BC$  — в свободную поверхность.

В плоскости  $\omega$  намечено несколько линий  $y = \text{const}$ . Последние перейдут, очевидно, в линии тока.

В результате мы получим течение со свободной поверхностью, изображенное на черт. 54.

Найдем уравнение свободной поверхности этого течения.

Отображая область  $w$  (черт. 53— $w$ ) конформно на нижнюю полуплоскость переменного  $z$  (черт. 53— $z$ ) получим зависимость

$$\frac{z}{a} = 1 - \cos \frac{\pi w}{ib},$$

где  $a$  — полудлина флютбета, а  $b$  — перепад. Заменяя, как указано выше, переменные  $z$  и  $w$  переменными  $-i\omega$  и  $-i\omega$ , будем иметь для нового течения соотношение

$$-\frac{i\omega}{a} = 1 - \cos \frac{\pi\omega}{b}. \quad (193)$$

Принимая теперь во внимание, что при выбранном нами расположении начал плоскостей  $z$ ,  $\omega$  и  $w$  в точке  $C$ ,

$$z + \omega + w = 0, \quad (194)$$

и что, следовательно, вдоль свободной поверхности

$$w = ih = -iy \text{ и } \omega = r = -x,$$

найдем, что свободная поверхность будет синусоидой:

$$-\frac{y}{a} = 1 - \cos \frac{\pi x}{b}. \quad (195)$$

Определим еще положение острья  $F$ , которое обходит наш поток (черт. 54). Для этого пользуясь уравнением (194) представим уравнение (193) в виде

$$-\frac{i\omega}{a} = 1 - \cos \frac{\pi}{b}(z + w).$$

Вдоль вертикальной стенки, спускающейся до точки  $F$ , будем иметь:

$$z = iy, \quad w = ih$$

и, следовательно,

$$\frac{h}{a} = 1 - \cos \frac{\pi}{b}(iy + ih) = 1 - ch \frac{\pi}{b}(y + h).$$

Отсюда

$$y + h = -\frac{b}{\pi} \operatorname{arch} \left(1 - \frac{h}{a}\right). \quad (196)$$

Дифференцируя этот результат по  $h$  и замечая, что при приближении к точке  $F$  вдоль стенки

$$\frac{dy}{dh} = \frac{1}{v_y} \rightarrow 0,$$

будем иметь

$$1 = \frac{b}{\pi} \frac{1/a}{\sqrt{\left(1 - \frac{h}{a}\right)^2 - 1}},$$

откуда

$$h_F = a - a \sqrt{1 + \frac{b^2}{\pi^2 a^2}}. \quad (197)$$

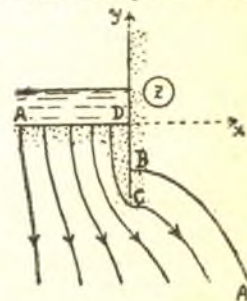
Подставляя это значение в уравнение (196), получим для ординаты точки  $F$  следующее значение:

$$y_{F_1} = -a + a \sqrt{1 + \frac{b^2}{\pi^2 a^2}} - \frac{b}{\pi} \operatorname{arsh} \frac{b}{\pi a}. \quad (198)$$

Пример 2. Рассмотрим теперь течение грунтовых вод, изображенное на черт. 55. Это течение было впервые найдено проф. Н. Е. Жуковским<sup>1</sup>.



Черт. 55.



Черт. 56.

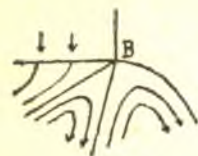
При замене переменных  $z$ ,  $\omega$  и  $w$  переменными  $iz$ ,  $i\omega$  и  $i\omega$ , правая половина указанного течения  $ABCD$  преобразуется в новое течение, показанное на черт. 56. Последнее течение было также найдено проф. Н. Е. Жуковским<sup>2</sup>.

<sup>1</sup> См. его посмертную статью «Просачивание воды через плотины», напечатанную первоначально в «Издании опытно-мелиоративной части НКЗ», вып. 30, 1923 г. под редакцией Н. Г. Ченцова, а затем перепечатанную в «Полном собрании сочинений проф. Н. Е. Жуковского», том VII, 1937 г., стр. 325.

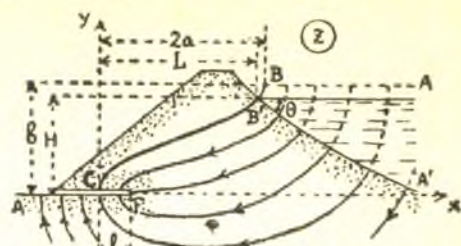
<sup>2</sup> См. также § 2 работы ниж. В. И. Аравина: Приток грунтовых вод к водосборам, «Известия Научно-Исслед. Ин-та Гидротехники», т. XVIII, 1936 г., стр. 8—13.

<sup>3</sup> См. указанную выше статью проф. Н. Е. Жуковского.

Не лишне здесь отметить, что проф. Н. Е. Жуковский представлял себе течение в области точки  $B$  не совсем правильно. Он говорит, что „линии токов возле этой точки расположены так, как представлено на“ черт. 57.



Черт. 57.



Черт. 58.

### § 36. О движении грунтовой воды через земляную плотину на проницаемом основании

Если преобразовать течение, показанное на чертеже 54 (стр. 54) при помощи замены переменных  $z$ ,  $\omega$  и  $w$  переменными  $-iz$ ,  $-i\omega$  и  $-i\omega$ , то получим течение, представленное на черт. 58.

Известно, что всякую линию равного потерянго напора  $h = \text{const}$  можно всегда принять за границу, отделяющую грунт от водоема. Если взять в качестве границы водоема линию равного потерянго напора  $A'B'$  (черт. 58), то получим течение, весьма близкое к тому, которое наблюдается при движении грунтовой воды через земляную плотину на проницаемом основании с дренажем  $CF$  при отсутствии воды в нижнем бьефе. Пользуясь этим обстоятельством можно дать довольно простые формулы для расчета движения грунтовой воды через такие плотины.

Задача должна, очевидно, заключаться в том, чтобы, зная напор  $H$  (черт. 58), горизонтальную проекцию  $L$  свободной поверхности  $B'C$  и угол  $\theta$  наклона напорного откоса плотины на уровне воды верхнего бьефа, определить параметры  $a$  и  $b$ , характеризующие движение, и затем вычислить длину  $l$  дренажа  $CF$ .

Из уравнений (193) и (194) получим после указанной выше замены переменных:

$$-\frac{\omega}{a} = 1 - \cos \frac{\pi w}{ib} \quad \text{и} \quad z + \omega + w = 0.$$

Из уравнения (195) получим уравнение свободной поверхности:

$$\frac{x}{a} = 1 - \cos \frac{\pi y}{b}, \quad (199)$$

которое можно представить также в виде:

$$\frac{x}{a} = 2 \sin^2 \frac{\pi y}{2b}.$$

Отсюда, дифференцируя по  $y$ , найдем:

$$\frac{1}{a} \frac{dx}{dy} = 2 \frac{\pi}{b} \sin \frac{\pi y}{2b} \cos \frac{\pi y}{2b}.$$

Подставляя в последние два уравнения координаты  $L$  и  $H$  точки  $B'$  и замечая, что в этой точке

$$\frac{dx}{dy} = \text{tg} \theta,$$

получим:

$$\frac{L}{a} = 2 \sin^2 \frac{\pi H}{2b} \quad (200)$$

и

$$\frac{1}{a} \text{tg} \theta = 2 \frac{\pi}{b} \sin \frac{\pi H}{2b} \cos \frac{\pi H}{2b}.$$

Разделив первый из этих результатов на второй, найдем

$$\frac{L}{L \text{tg} \theta} = \frac{\text{tg} \frac{\pi H}{2b}}{\frac{\pi}{b}} = \frac{H}{2} \frac{\text{tg} \frac{\pi H}{2b}}{\frac{\pi H}{2b}}.$$

Если положить здесь

$$\frac{\pi H}{2b} = \xi, \quad (201)$$

то получим уравнение:

$$\frac{\text{tg} \xi}{\xi} = 2 \frac{L}{H} \text{ctg} \theta. \quad (202)$$

Решив последнее относительно  $\xi$ , мы найдем по уравнениям (200) и (201) для  $a$  и  $b$  такие значения:

$$a = \frac{L}{2 \sin^2 \xi}, \quad b = \frac{\pi H}{2\xi}. \quad (203)$$

Чтобы идти дальше, воспользуемся уравнениями (197) и (198), которые для рассматриваемого здесь течения обращаются в следующие:

$$r_F = a \sqrt{1 + \frac{b^2}{\pi^2 a^2}} - a \quad \text{и} \quad x_F = l = a - a \sqrt{1 + \frac{b^2}{\pi^2 a^2}} + \frac{b}{\pi} \text{arsh} \frac{b}{\pi a}.$$

Замечая, что в любой точке потока

$$x + r + q = 0,$$

получим

$$-q_F = \frac{b}{\pi} \text{arsh} \frac{b}{\pi a}.$$

Но  $-q_F$  есть, очевидно, расход, попадающий в дренаж сверху через отрезок  $CF$ . Обозначая его через  $Q$ , будем иметь

$$Q = \frac{b}{\pi} \text{arsh} \frac{b}{\pi a}.$$

Если разложить

$$\sqrt{1 + \frac{b^2}{\pi^2 a^2}} \text{ и } \operatorname{arsh} \frac{b}{\pi a}$$

в ряды по степеням переменного  $\frac{b}{\pi a}$ , то для  $l$  и  $Q$  получатся следующие приближенные, но достаточно точные формулы:

$$l = \frac{b^2}{2\pi^2 a}, \quad Q = \frac{b^2}{\pi^2 a}.$$

Подставляя сюда значения  $a$  и  $b$ , определяемые формулами (203), получим:

$$l = \frac{H^2}{4L} \left( \frac{\sin \xi}{\xi} \right)^2 \quad (204)$$

$$\text{и} \quad Q = 2l, \quad (205)$$

чем, очевидно, и исчерпано решение нашей задачи.

При малых углах  $\theta$  формулы (203) и (204) выгодно заменить приближенными формулами, которые можно получить при помощи следующих соображений. При  $\theta = 0$  уравнение (202) дает для  $\xi$  значение  $\frac{\pi}{2}$ . Отсюда следует, что при небольших углах  $\theta$  величина  $\xi$  мало отличается от  $\frac{\pi}{2}$ . Положим поэтому

$$\xi = \frac{\pi}{2} - \varepsilon.$$

Тогда будем иметь:

$$\operatorname{tg} \xi = \operatorname{ctg} \varepsilon = \frac{1}{\operatorname{tg} \varepsilon}$$

или приближенно:

$$\operatorname{tg} \xi = \frac{1}{\varepsilon}.$$

Пренебрегая теперь величинами высоких порядков малости относительно  $\varepsilon$  и замечая, что при этом условии

$$\sin^2 \xi = \cos^2 \varepsilon = 1 - \varepsilon^2,$$

можно будет представить уравнения (202), (203) и (204) в виде

$$\frac{1}{\pi \varepsilon} = \frac{L}{H} \operatorname{ctg} \theta,$$

$$a = \frac{L}{2} (1 + \varepsilon^2), \quad b = H \left( 1 + \frac{2}{\pi} \varepsilon \right), \quad l = \frac{H^2}{\pi^2 L} \left( 1 + \frac{4}{\pi} \varepsilon \right).$$

Определив из первого уравнения  $\varepsilon$  и подставив в остальные уравнения, получим при малом  $\theta$  следующие удобные расчетные формулы:

$$a = \frac{L}{2} \left( 1 + \frac{H^2}{\pi^2 L^2 \operatorname{ctg}^2 \theta} \right), \quad b = H \left( 1 + \frac{2H}{\pi^2 L \operatorname{ctg} \theta} \right), \quad (206)$$

<sup>1</sup> Предполагается, что коэффициент фильтрации  $K = 1$ . При  $K \neq 1$  следует писать:  $Q = K2l$ .

$$l = \frac{H^2}{\pi^2 L} \left( 1 + \frac{4H}{\pi^2 L \operatorname{ctg} \theta} \right). \quad (207)$$

Линия депрессии, как было указано выше, определяется при этом уравнением (199).<sup>2</sup>

### § 37. Движение потока грунтовых вод по горизонтальному водонепроницаемому слою

Мы попытаемся сейчас получить общее решение задачи о движении потока грунтовых вод, имеющего свободную поверхность  $AB$  (черт. 59— $z$ ), по горизонтальному водонепроницаемому слою  $A'B'$ .

Назовем через  $Q$  общий расход потока ( $K = 1$ ). В плоскости переменного  $w = q + ih$  (черт. 59— $w$ ) потоку соответствует, очевидно, вертикальная полоса  $ABB'A'$  шириною  $Q$ .

Мы примем, что на прямой  $A'B'$   $y = 0$  и  $q = 0$ . Возьмем точку  $M(x, y)$ , лежащую на свободной поверхности  $AB$ , и точку  $M'(x, -y)$ , симметричную с ней относительно оси  $x$ -ов. На основании принципа симметрии Римана-Шварца в плоскости  $w$  им соответствуют точки  $M(Q, h)$  и  $M'(-Q, h)$ , симметричные относительно вертикальной прямой  $q = 0$ . Указанное соответствие между рассматриваемыми точками плоскостей  $z$  и  $w$  можно выразить равенствами:

$$z(Q + ih) = x + iy \text{ и } z(-Q + ih) = x - iy.$$

Из них найдем, что

$$z(Q + ih) - z(-Q + ih) = 2iy. \quad (208)$$

Воспользуемся теперь условием на свободной поверхности

$$y + h = \operatorname{const}.$$

Перенося начало плоскости  $w$  вдоль вертикальной прямой  $q = 0$ , можно, очевидно, достигнуть того, что условие на свободной поверхности представится в виде

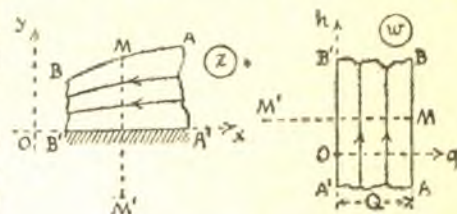
$$y + h = 0.$$

<sup>1</sup> При помощи более простых соображений нам удалось установить формулу

$$l = \frac{H^2}{8L} \cdot \frac{1}{1 - \frac{H}{4L \operatorname{ctg} \theta}},$$

вывод которой мы предполагаем дать в другом месте.

<sup>2</sup> Другое решение рассмотренной здесь задачи дал проф. Ф. Б. Нельсон-Скорняков. См. Научные Зап. Моск. ин-та инженеров вод. хоз., вып. IV, 1937 г., стр. 77—89.



Черт. 59.



Определив отсюда  $u$  и подставив в уравнение (208), получим:

$$z(Q + ih) - z(-Q + ih) = -2ih.$$

Полагая здесь

$$-Q + ih = w$$

или, что то же,

$$ih = w + Q,$$

мы получим уравнение в конечных разностях

$$z(w + 2Q) - z(w) = -2(w + Q), \quad (209)$$

определяющее искомую функцию  $z(w)$ .

Легко подобрать частное решение этого уравнения вида

$$z(w) = Aw^2 + Bw,$$

где  $A$  и  $B$  — некоторые постоянные.

В самом деле, подставляя последнее выражение в уравнение (209) и сравнивая коэффициенты при одинаковых степенях  $w$ , найдем, что уравнение будет удовлетворено при

$$A = -\frac{1}{2Q} \text{ и } B = 0.$$

Таким образом, частное решение уравнения (209) будет

$$z = -\frac{w^2}{2Q}. \quad (210)$$

Рассмотрим течение, соответствующее этому решению.<sup>1</sup>

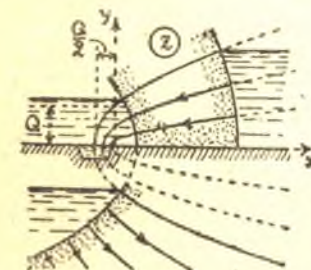
Отделяя в (210) действительную и мнимую части и включая из полученных соотношений переменную  $h$ , найдем уравнение семейства линий тока ( $q = \text{const}$ ):

$$y^2 = 2\frac{q^2}{Q}\left(x + \frac{q^2}{2Q}\right).$$

Это будут софокусные параболы с горизонтальной осью симметрии и с фокусом в начале координат (черт. 60).

При  $q = Q$  получим уравнение свободной поверхности:

$$x + \frac{Q}{2} = \frac{y^2}{2Q}. \quad (211)$$



Черт. 60.

Аналогично мы найдем и семейство ортогональных к линиям тока линий равного потеряннного напора ( $h = \text{const}$ ):

$$y^2 = 2\frac{h^2}{Q}\left(\frac{h^2}{2Q} - x\right).$$

<sup>1</sup> Cp. J. Kozenu, Grundwasserbewegung bei freiem Spiegel, Fluss- und Kanalversickerung, „Wasserkraft und Wasserwirtschaft“, 1931, 3 Heft, S. 28, а также Акад. Н. Н. Павловский, О притоке воды к горизонтальным фильтрам, „Известия Научно-исслед. и-та гидротехники“, том XXI, 1937 г., стр. 5—22.

Эти линии также являются параболоми с общим фокусом в точке  $z = 0$ . При отсутствии капиллярного поднятия воды каждую из них можно принять за границу водоема (черт. 60).

Для получения общего решения уравнения (209) достаточно прибавить к частному решению (210) общее решение уравнения

$$z(w + 2Q) - z(w) = 0.$$

Последнему удовлетворяет, очевидно, произвольная периодическая функция от  $w$  с периодом  $2Q$ . Обозначая ее через  $\varphi(w; 2Q)$ , мы получим общее решение уравнения (209) в виде

$$z = -\frac{w^2}{2Q} + \varphi(w; 2Q) \quad (212)$$

Функция  $\varphi(w; 2Q)$  должна, очевидно, принимать на отрезке  $A'B'$  (черт. 59—z) действительные значения.

### § 38. Движение грунтовой воды через земляную плотину на непроницаемом основании

Мы рассмотрим здесь лишь тот случай, когда в нижнем бьефе вода отсутствует, а вода, фильтрующаяся через плотину, вступает на отрезке  $DA = l$  (черт. 61—z) в дренаж.

Задача наша будет заключаться в определении длины  $l$ , когда известна длина  $L$  горизонтальной проекции свободной поверхности, глубина воды  $H$  в верхнем бьефе и угол  $\theta$ , образуемый горизонтом подпораемой воды с верховым откосом плотины.

Если в первом приближении считать, что свободная поверхность грунтовой воды есть парабола с горизонтальной осью симметрии, с фокусом в точке  $A$ , проходящая через точку  $C$ , то пользуясь уравнением (211) мы найдем формулы:

$$L = \frac{H^2}{2Q} \text{ и } l = \frac{Q}{2}, \quad (213)$$

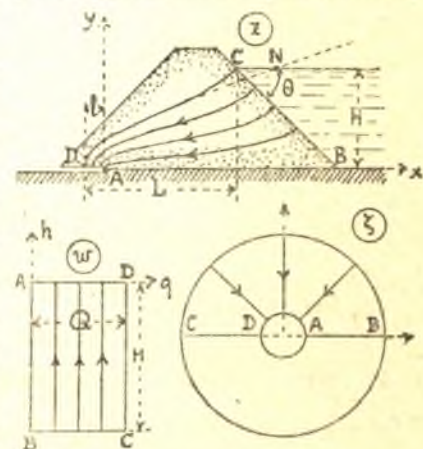
из которых следует, что

$$l = \frac{H^2}{4L}. \quad (214)$$

Последняя формула дает для  $l$  несколько преувеличенное значение.

Более точный результат можно получить, если исходить из общей формулы (212), которую можно представить так:

$$\varphi = z(w) + \frac{w^2}{2Q}.$$



Черт. 61.

В правой части мы имеем здесь, очевидно, функцию переменного  $w$ , регулярную внутри и на контуре прямоугольника  $ABCD$  (черт. 61— $w$ ), за исключением, может быть, угловых его точек. Если отобразить этот прямоугольник при помощи функции

$$\zeta = e^{i\pi \frac{w}{Q}}$$

на полукольцо  $ABCD$  (черт. 61— $\zeta$ ), то функция  $\varphi$ , имеющая период  $2Q$ , представится внутри всего кольца в виде однозначной и регулярной функции переменного  $\zeta$ . Разлагая ее в ряд Лорана, получим:

$$\varphi = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n \zeta^n = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n e^{in\pi \frac{w}{Q}}$$

Так как, согласно отмеченному в конце предыдущего параграфа, функция  $\varphi$  должна принимать на отрезке  $AB$  действительные значения, то коэффициенты  $a_n$  — числа действительные.

Далее легко заметить, что  $z(w)$ , а вместе с тем и  $\varphi$  — четные функции от  $w$ . Это следует из того, что однократному обходу точки  $A$  в плоскости  $w$  соответствует в плоскости  $z$  двукратный обход точки  $A$ . Раз так, то  $\varphi$  может быть представлено в виде:

$$\varphi = a_0 + 2a_1 \cos \frac{\pi w}{Q} + 2a_2 \cos \frac{2\pi w}{Q} + \dots$$

Подставляя это разложение в уравнение (212), получим:

$$z = -\frac{w^2}{2Q} + a_0 + 2a_1 \cos \frac{\pi w}{Q} + \dots$$

Замечая теперь, что в точке  $A$  переменные  $z$  и  $w$  равны у нас нулю, получим:

$$0 = a_0 + 2a_1 + \dots$$

Вычитая последний результат из предыдущего, будем иметь:

$$z = -\frac{w^2}{2Q} + 2a_1 \left( \cos \frac{\pi w}{Q} - 1 \right) + \dots \quad (215)$$

Постараемся получить отсюда уравнение свободной поверхности.

Замечая, что на свободной поверхности у нас

$$y + h = 0, \quad w = Q + ih = Q - iy,$$

получим из уравнения (215):

$$x = -\frac{Q}{2} + \frac{y^2}{2Q} - 2a_1 \left( \operatorname{ch} \frac{\pi y}{Q} + 1 \right) + \dots \quad (216)$$

Это и есть уравнение свободной поверхности, в котором постоянные  $a_n$  остаются пока неопределенными.

Подставляя в него координаты точки  $D$ , получим:

$$l = \frac{Q}{2} + 2a_1 \cdot 2 + \dots \quad (217)$$

Для точки  $C$  будем иметь:

$$x_c = -\frac{Q}{2} + \frac{H^2}{2Q} - 2a_1 \left( \operatorname{ch} \frac{\pi H}{Q} + 1 \right) + \dots$$

Складывая эти два результата, получим

$$L = \frac{H^2}{2Q} - 2a_1 \left( \operatorname{ch} \frac{\pi H}{Q} - 1 \right) + \dots \quad (218)$$

Дифференцируя далее уравнение (216) по  $y$  и замечая, что в точке  $C$

$$\frac{dx}{dy} = \operatorname{tg} \theta,$$

найдем:

$$\operatorname{tg} \theta = \frac{H}{Q} - 2a_1 \frac{\pi}{Q} \operatorname{sh} \frac{\pi H}{Q} + \dots, \quad (219)$$

Если сохранить теперь в уравнениях (217), (218) и (219) только те члены, которые мы выписали, отбросив все остальные, то из (219) получим:

$$2a_1 = \frac{H}{\pi} \frac{1 - \frac{Q}{H} \operatorname{tg} \theta}{\operatorname{sh} \frac{\pi H}{Q}}$$

Далее, из (217) и (218) найдем:

$$l = \frac{Q}{2} + 2 \frac{H}{\pi} \frac{1 - \frac{Q}{H} \operatorname{tg} \theta}{\operatorname{sh} \frac{\pi H}{Q}}, \quad (220)$$

$$L = \frac{H^2}{2Q} - \frac{H}{\pi} \left( 1 - \frac{Q}{H} \operatorname{tg} \theta \right) \frac{\operatorname{ch} \frac{\pi H}{Q} - 1}{\operatorname{sh} \frac{\pi H}{Q}}.$$

Если воспользоваться известными формулами:

$$\operatorname{ch} x - 1 = 2 \operatorname{sh}^2 \frac{x}{2} \quad \text{и} \quad \operatorname{sh} x = 2 \operatorname{sh} \frac{x}{2} \operatorname{ch} \frac{x}{2},$$

то выражение для  $L$  можно будет переписать также в виде

$$L = \frac{H^2}{2Q} - \frac{H}{\pi} \left( 1 - \frac{Q}{H} \operatorname{tg} \theta \right) \operatorname{th} \frac{\pi H}{2Q}. \quad (221)$$

В случае, когда

$$\operatorname{tg} \theta = \frac{H}{Q},$$

формулы (220) и (221) дают для  $l$  и  $L$  значения, в точности совпадающие с теми, которые мы получили раньше для случая параболической свободной поверхности. Легко проверить, что в этом случае  $\theta$  есть угол, образуемый в точке  $C$  нормалью

к параболической свободной поверхности с горизонтом. Для земляных плотин угол откоса  $\theta$ , оставаясь положительным, обыкновенно меньше указанного значения. Поэтому мы примем в дальнейшем, что

$$0 < \operatorname{tg} \theta < \frac{H}{Q}$$

и в соответствии с этим

$$0 < 1 - \frac{Q}{H} \operatorname{tg} \theta < 1. \quad (\text{A})$$

Согласно первой из формул (213) приближенно

$$\frac{H}{Q} = 2 \frac{L}{H}.$$

Так как на практике обычно  $L > H$ , то на основании предыдущего равенства мы будем считать, что

$$\frac{H}{Q} > 2.$$

Отсюда, пользуясь таблицами гиперболических функций, заключаем, что во всех интересующих нас случаях

$$0 < \frac{\frac{\pi H}{Q}}{\operatorname{sh} \frac{\pi H}{Q}} < 0,0235, \quad (\text{B})$$

$$0,996 < \operatorname{th} \frac{\pi H}{2Q} < 1. \quad (\text{C})$$

Представляя теперь формулу (220) в виде

$$\frac{2l}{Q} = 1 + \frac{4}{\pi^2} \left(1 - \frac{Q}{H} \operatorname{tg} \theta\right) \frac{\frac{\pi H}{Q}}{\operatorname{sh} \frac{\pi H}{Q}}$$

и замечая, что, на основании неравенств (A) и (B), последний член правой части не превышает 0,0095, мы можем заменить ее с большою степенью точности формулой

$$\frac{2l}{Q} = 1 \text{ или } l = \frac{Q}{2}. \quad (\text{220}_1)$$

Также и формулу (221), в силу неравенств (C), можно заменить с такою же точностью формулой

$$L = \frac{H^2}{2Q} - \frac{H}{\pi} \left(1 - \frac{Q}{H} \operatorname{tg} \theta\right). \quad (\text{221}_1)$$

Вводя теперь обозначение

$$\lambda = \frac{H}{\pi} \left(1 - \frac{Q}{H} \operatorname{tg} \theta\right), \quad (\text{222})$$

будем иметь

$$L = \frac{H^2}{2Q} - \lambda, \quad (\text{221}_2)$$

откуда

$$Q = \frac{H^2}{2(L + \lambda)}. \quad (\text{223})$$

<sup>1</sup> Здесь предполагается, что коэффициент фильтрации  $K = 1$ .

Подставляя это значение  $Q$  в выражение (222), получим уравнение

$$\lambda = \frac{H}{\pi} \left[1 - \frac{H \operatorname{tg} \theta}{2(L + \lambda)}\right].$$

Решив его относительно  $\lambda$ , мы найдем, что при указанных выше условиях

$$\lambda = \frac{\frac{H}{\pi} - L}{2} + \frac{\frac{H}{\pi} + L}{2} \sqrt{1 - \frac{2 \operatorname{tg} \theta}{\pi \left(\frac{L}{H} + \frac{1}{\pi}\right)^2}}. \quad (\text{222}_1)$$

В этой формуле величины  $L$ ,  $H$  и  $\theta$  предполагаются известными. Вычислив по ней  $\lambda$ , мы найдем искомую рабочую длину дренажа по формуле

$$l = \frac{H^2}{4(L + \lambda)}, \quad (\text{224})$$

которая является непосредственным следствием формул (220<sub>1</sub>) и (223).

Для практических вычислений формулу (222<sub>1</sub>) выгодно несколько упростить, разложив в ней корень квадратный в ряд по степеням второго члена подкоренного количества. В результате, ограничиваясь первыми членами разложения, получим приближенные формулы:

$$\lambda = \frac{H}{\pi}, \quad (\text{222}_2)$$

$$\lambda = \frac{H}{\pi} \left[1 - \frac{\operatorname{tg} \theta}{2 \left(\frac{L}{H} + \frac{1}{\pi}\right)}\right] \quad (\text{222}_3)$$

и т. д.

Из сравнения формулы (222<sub>2</sub>) с первой из формул (213) легко вывести чрезвычайно простое правило для построения линии депрессии. Это правило состоит, очевидно, в следующем (черт. 61—z): от точки  $C$  по уровню воды верхнего бьефа откладываем отрезок  $CN = \lambda$ ; строим параболу с горизонтальной осью симметрии, с фокусом в точке  $A$ , проходящую через точку  $N$  и, наконец, ортогонально к откосу проводим через точку  $C$  гладкую кривую, плавно сопрягающуюся ниже точки  $C$  с параболою.<sup>1</sup>

### § 39. Движение потока грунтовых вод по наклонной водонепроницаемой плоскости

Пусть поток грунтовых вод  $A'B'BA$  (черт. 62—z), имеющий свободную поверхность  $AB$ , течет по наклонной водонепроницаемой плоскости  $A'B'$ , составляющей угол  $\alpha$  с горизонтом.

<sup>1</sup> После того, как настоящая работа была слана в печать, в Известиях Научно-исслед. и-та гидротехники (т. XXV, 1939 г., стр. 115) была опубликована статья С. Н. Нумерова «О фильтрации в земляных плотинах с дренажем на водонепроницаемых основаниях», в которой дано новое решение рассмотренной здесь задачи.

Если отнести движение потока к плоскости  $\zeta = \xi + i\eta$ , ось  $\xi$  которой направлена по линии дна  $A'B'$ , то условие на свободной поверхности

$$y + h = \text{const}$$

можно будет представить в виде

$$\eta \cos \alpha - \xi \sin \alpha + h = c, \quad (225)$$

где  $c$  — некоторая действительная постоянная.

В плоскости  $w = q + ih$  области течения соответствует полоса  $A'B'BC$  (черт. 62— $w$ ), ширина которой  $Q$  равна расходу потока ( $K=1$ ). Если принять, что на прямой  $A'B'$   $q=0$ , то точкам  $M(-Q, h)$  и  $M'(Q, h)$  плоскости  $w$  будут соответствовать точки  $M(\xi, \eta)$  и  $M'(\xi, -\eta)$  плоскости  $\zeta$ , причем точка  $M(\xi, \eta)$  будет лежать на свободной поверхности потока. Соответствие между названными точками плоскостей  $w$  и  $\zeta$  можно выразить равенствами

$$\zeta(-Q + ih) = \xi + i\eta \text{ и } \zeta(Q + ih) = \xi - i\eta.$$

Определив отсюда  $\xi$  и  $\eta$  и подставив их значения в уравнение (225), будем иметь:

$$\zeta(Q + ih)e^{i\alpha} - \zeta(-Q + ih)e^{-i\alpha} = 2i(h - c).$$

Полагая здесь

$$-Q + ih = w,$$

получим для определения функции  $\zeta(w)$  уравнение в конечных разностях

$$\zeta(w + 2Q)e^{i\alpha} - \zeta(w)e^{-i\alpha} = 2(w + Q - ic). \quad (226)$$

Попытаемся удовлетворить этому уравнению, положив

$$\zeta(w) = Aw + B,$$

где  $A$  и  $B$  — постоянные. Простые вычисления показывают, что уравнение (226) будет удовлетворено, если принять

$$A = -\frac{i}{\sin \alpha} \text{ и } B = \frac{Q \operatorname{ctg} \alpha - c}{\sin \alpha}.$$

Пользуясь произвольностью постоянной  $c$ , мы положим

$$c = Q \operatorname{ctg} \alpha.$$

Тогда  $B$  обратится в нуль. В результате мы будем иметь частное решение уравнения (226) вида

$$\zeta = -\frac{iw}{\sin \alpha}. \quad (227)$$

Оно определяет однородный поступательный поток, линии тока и линии равного потеряннго напора которого представляются прямыми

$$\eta = -\frac{q}{\sin \alpha} \text{ и } \xi = \frac{h}{\sin \alpha}.$$

Если положить  $q = -Q$ , то получим уравнение свободной поверхности

$$\eta = \frac{Q}{\sin \alpha}. \quad (228)$$

Это — прямая, параллельная линии дна потока  $A'B'$ .

Найдем теперь общее решение уравнения (226). Чтобы получить его, достаточно, как известно, добавить к частному решению (227) общее решение однородного уравнения

$$\zeta(w + 2Q)e^{i\alpha} - \zeta(w)e^{-i\alpha} = 0.$$

Применяя известные правила нахождения решений линейных однородных уравнений в конечных разностях, мы получим общее решение последнего уравнения в форме

$$\zeta = \varphi(w; 2Q)e^{-i\frac{\alpha - k\pi}{Q}w},$$

где  $\varphi(w; 2Q)$  — произвольная периодическая функция от  $w$  с периодом  $2Q$ , а  $k$  — любое целое число. Присоединяя к нему частное решение (227), мы найдем, что искомое общее решение уравнения (226) имеет следующий вид:

$$\zeta = \varphi(w; 2Q)e^{-i\frac{\alpha - k\pi}{Q}w} - \frac{iw}{\sin \alpha}. \quad (229)$$

Для изучения течения, определяемого этим решением, выгодно ввести вместо  $\zeta$  и  $w$  новые переменные  $\zeta_1$  и  $w_1$  при помощи соотношений

$$\zeta = \frac{Q}{\alpha \sin \alpha} \zeta_1 \text{ и } w = \frac{Q}{\alpha} w_1. \quad (230)$$

Геометрически дело сведется, очевидно, лишь к некоторому изменению масштабов плоскостей  $\zeta$  и  $w$ .

Выполнив указанную замену переменных, мы представим решение (229) в виде

$$\zeta_1 = \varphi_1(w_1; 2\alpha)e^{-i\frac{\alpha - k\pi}{\alpha}w_1} - iw_1,$$

где  $\varphi_1(w_1; 2\alpha)$  — новая произвольная периодическая функция от  $w_1$ , с периодом  $2\alpha$ .

Мы рассмотрим дальше лишь случай, когда

$$\varphi_1(w; 2\alpha) = 1 \text{ и } k = 0.$$

В этом случае будем иметь

$$\zeta_1 = e^{-iw_1} - iw_1. \quad (231)$$

Полагая здесь

$$\zeta_1 = \xi_1 + i\eta_1 \text{ и } w_1 = q_1 + ih_1 \quad (232)$$

и отделяя действительную и мнимую части, мы получим уравнения

$$\xi_1 = e^{h_1 \cos q_1} + h_1 \text{ и } \eta_1 = -e^{h_1 \sin q_1} - q_1. \quad (233)$$

При  $q_1 = \text{const}$  они определяют линии тока, а при  $h_1 = \text{const}$  — линии равного потерянного напора. Последние являются, очевидно, трохоидами (укороченными или удлиненными циклоидами). Каждая из них вычеркивается точкой круга радиуса 1, находящейся на расстоянии  $e^{h_1}$  от его центра, при качании круга по прямой  $\xi_1 = h_1 - 1$ . Центр круга должен при этом находиться на прямой  $\xi_1 = h_1$ . При  $q_1 = 0$  координаты точки, вычеркивающей трохоиду, будут  $\xi_1 = e^{h_1} + h_1$  и  $\eta_1 = 0$ .

По формулам (233) нами вычислена нижеследующая таблица, дающая для разных значений  $q_1$  и  $h_1$  координаты  $\xi_1$  и  $\eta_1$ .

$h_1 \backslash q_1$	0		$-\frac{\pi}{4} = -0,785$		$-\frac{\pi}{2} = -1,571$		$-\frac{3\pi}{4} = -2,356$		$-\pi = -3,142$	
	$\xi_1$	$\eta_1$	$\xi_1$	$\eta_1$	$\xi_1$	$\eta_1$	$\xi_1$	$\eta_1$	$\xi_1$	$\eta_1$
$-\frac{3\pi}{2} = -4,712$	4,70	0,00	4,71	0,79	4,71	1,58	4,72	2,36	4,72	3,14
$-\frac{5\pi}{4} = -3,927$	3,927	0,00	3,91	0,80	3,93	1,59	3,94	2,37	3,95	3,14
$-\pi = -3,142$	3,10	0,00	3,11	0,82	3,14	1,61	3,17	2,39	3,18	3,14
$-\frac{3\pi}{4} = -2,356$	2,26	0,00	2,29	0,85	2,36	1,67	2,42	2,42	2,45	3,14
$-\frac{\pi}{2} = -1,571$	1,36	0,00	1,42	0,93	1,57	1,78	1,72	2,50	1,78	3,14
$-\frac{\pi}{4} = -0,785$	0,33	0,00	0,46	1,11	0,79	2,03	1,11	2,68	1,24	3,14
0	1,00	0,00	0,71	1,49	0,00	2,57	0,71	3,06	1,00	3,14
$\frac{\pi}{4} = 0,785$	2,98	0,00	2,34	2,34	0,79	3,76	0,77	3,91	1,41	3,14
$\frac{\pi}{2} = 1,571$	6,38	0,00	4,97	4,19	1,57	6,38	1,83	5,76	3,24	3,14
$\frac{3\pi}{4} = 2,356$	12,91	0,00	9,82	8,25	2,36	12,12	5,10	9,82	8,19	3,14

Исключив из формул (233) переменную  $h_1$ , мы получим уравнение линий тока в виде

$$\xi_1 = \frac{\eta_1 + q_1}{-\text{tg} q_1} + \ln \frac{\eta_1 + q_1}{-\sin q_1}.$$

Общий вид этих линий при  $-\pi \leq q_1 \leq \pi$  показан на черт. 63.

Чтобы установить, которая из найденных линий тока является при заданном угле  $\alpha$  свободной поверхностью потока, вспомним, что вдоль свободной поверхности

$$q = -Q.$$

Пользуясь уравнениями (230) и (232), мы найдем, что свободной поверхностью будет та линия тока, на которой (см. черт. 63)

$$q_1 = -\alpha,$$

где, как известно,  $\alpha$  — угол, образуемый водонепроницаемой наклонной плоскостью с горизонтом.

Вращая черт. 63 вокруг начала  $O$ , можно наглядно представить себе изменение вида свободной поверхности потока при изменении угла  $\alpha$ .

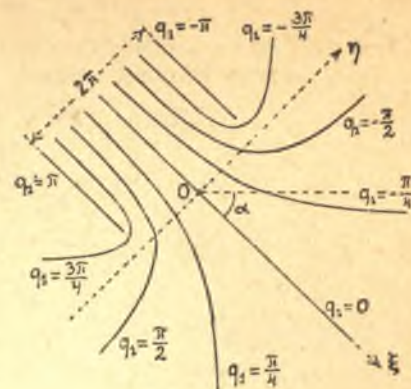
Заметим здесь без доказательства, что, по мере приближения к одному из бесконечно удаленных концов свободной поверхности, касательная к ней, удаляясь всеми своими точками в бесконечность, стремится занять горизонтальное положение. На другом бесконечно удаленном конце свободной поверхности, касательная к ней обращается в асимптоту

$$\eta_1 = \alpha \text{ или } \eta_1 = \frac{Q}{\sin \alpha},$$

параллельную линии дна потока. Течение потока становится при этом равномерным поступательным.

При подходящем выборе угла  $\alpha$  можно, очевидно, сделать свободной поверхностью любую из изображенных на черт. 63 линий тока.

Принимая за линию дна потока ту или иную прямолинейную линию тока, мы получим шесть различных форм течения грунтовой воды по наклонной водонепроницаемой плоскости, показанных на черт. 64.



Черт. 63.



Черт. 64.

Если ввести для сокращения обозначение

$$\eta_0 = \frac{Q}{\sin \alpha}^2,$$

то для свободных поверхностей указанных шести форм течения получаются соответственно следующие уравнения:

$$(I) \quad \xi = \frac{\eta - \eta_0}{\operatorname{tg} \alpha} + \frac{\eta_0}{\alpha} \ln(\eta - \eta_0),$$

$$(II) \quad \xi = \frac{\eta - \eta_0}{\operatorname{tg} \alpha} + \frac{\eta_0}{\alpha} \ln(\eta_0 - \eta),$$

$$(III) \quad \xi = \frac{\eta - \eta_0}{\operatorname{tg} \alpha} - \frac{\eta_0}{\pi - \alpha} \ln(\eta - \eta_0),$$

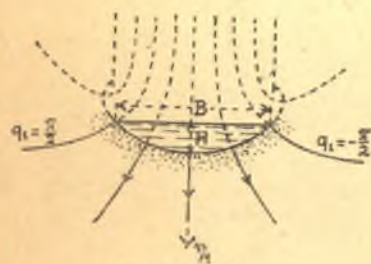
$$(IV) \quad \xi = \frac{\eta - \eta_0}{\operatorname{tg} \alpha} - \frac{\eta_0}{\pi - \alpha} \ln(\eta_0 - \eta),$$

$$(V) \quad \xi = \frac{\eta - \eta_0}{\operatorname{tg} \alpha} + \frac{\eta_0}{\pi + \alpha} \ln(\eta - \eta_0),$$

$$(VI) \quad \xi = -\frac{\eta - \eta_0}{\operatorname{tg} \alpha} + \frac{\eta_0}{\alpha} \ln(\eta + \eta_0),$$

в которых  $\alpha$  означает наименьший положительный угол, образуемый линией дна с горизонтом (черт. 64)<sup>2</sup>.

#### § 40. Применение предыдущих выводов к оросительным и осушительным каналам



Черт. 65.

Предполагая, что капиллярного поднятия грунтовой воды нет, можно будет принять любую линию  $h_1 = \text{const}$  за границу водоема. Так, например, при выборе в качестве границы водое-

<sup>1</sup> При коэффициенте фильтрации, отличном от единицы, величина  $\eta_0$ , называемая в гидравлике нормальной глубиной потока, должна вычисляться по формуле

$$\eta_0 = \frac{Q}{K \sin \alpha}.$$

<sup>2</sup> Приближенные уравнения свободных поверхностей в случаях, отмеченных у нас римскими цифрами I, II и VI, были даны в 1930 г. академиком Н. Н. Павловским м. См. его работу: „Неравномерное движение грунтовых вод“, помещенную в 19-м сообщении Государственного Института Сооружений (август 1930 г.), а также его „Учебный гидравлический справочник“, изд. 2-ое, 1931 г., стр. 153—157.

ма подходящей линии  $h_1 = \text{const}$ , можно получить случай фильтрации из канала, изображенный на черт. 65. Дном канала здесь будет удлиненная циклоида.

Простые вычисления, которые мы опускаем, показывают, что общий расход на фильтрацию  $Q$  может быть найден в этом случае по формуле

$$Q = K(B - 2H), \quad (234)$$

где  $K$  — коэффициент фильтрации,  $B$  — ширина канала на уровне воды и  $H$  — наибольшая глубина воды в канале.

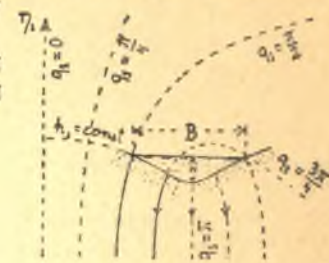
Здесь следует заметить, что при том же очертании канала возможны и другие формы истечения грунтовой воды. Одна из таких возможных форм истечения показана на черт. 66. Понятно, что распространять на них формулу (234) нельзя.

Рассмотрим теперь новый случай фильтрации из канала, получающийся также из черт. 63, но в предположении, что  $\alpha = -\frac{\pi}{2}$ .

В этом случае свободной поверхностью будет линия тока  $q_1 = \frac{\pi}{2}$ . При-



Черт. 66.



Черт. 67.

няв за дно канала одну из укороченных циклоид  $h_1 = \text{const}$  мы будем иметь случай фильтрации из канала, показанный на черт. 67.

Общий расход на фильтрацию определится теперь по формуле

$$Q = K(B + 2H). \quad (235)$$

Указанные здесь два случая фильтрации из каналов были опубликованы впервые проф. Кожени (1931 г.)<sup>1</sup>. Ему же принадлежат и приведенные здесь формулы (234) и (235). Последний случай фильтрации из каналов рассматривали также проф. В. В. Ведерников<sup>2</sup> и академик Н. Н. Павловский<sup>3</sup>.

Обстоятельство, что линии  $h = \text{const}$  являются в указанных случаях трохоидами (удлиненными или укороченными циклоидами), не было, повидимому, замечено названными авторами.

Если глубина воды в канале  $H$  мала сравнительно с шириною  $B$ , то формулу (235) можно, очевидно, заменить более простою

$$Q = KB.$$

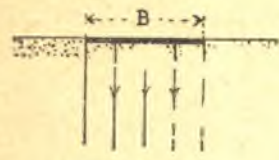
<sup>1</sup> Prof. Dr. I. Kozeny, „Grundwasserbewegung bei freiem Spiegel“, „Wasserkraft und Wasserwirtschaft“, 1931, № 3, стр. 28—31.

<sup>2</sup> Инж. В. В. Ведерников, Фильтрация из каналов. ОНТИ. Госстройиздат, 1934 г.

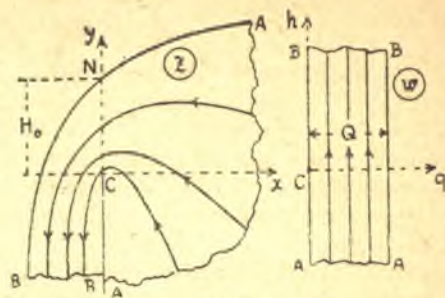
<sup>3</sup> Акад. Н. Н. Павловский, Свободная фильтрация на бесконечность из открытых русел с круговой основой формы. Известия Научно-Исследов. Ин-та Гидротехники. Т. XIX, 1936 г., стр. 49—81.

Последняя формула точно соответствует случаю движения грунтовых вод, изображенному на черт. 68.

Пользуясь черт. 63 можно получить еще некоторые интересные формы течений. Так, например, при  $\alpha = -\frac{\pi}{2}$  мы полу-



Черт. 68.



Черт. 69.

чим течение, напоминающее водослив в тонкой стенке (черт. 69—z).

Если поместить начало плоскости  $z$  в точку  $C$ , играющую роль порога водослива, и принять, что в этой точке  $w=0$ , то зависимость между  $z$  и  $w$  представится уравнением

$$z = -w + i \frac{2Q}{\pi} \left( 1 - e^{i \frac{\pi w}{2Q}} \right).$$

Для свободной поверхности мы будем иметь уравнение

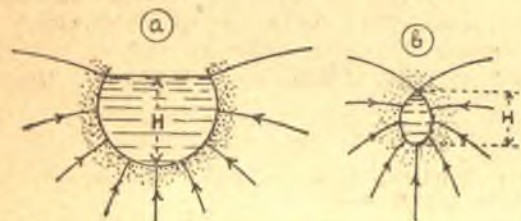
$$x = -Q + \frac{2Q}{\pi} e^{\frac{\pi y}{2Q}} - 1.$$

Определяя отсюда ординату  $H_0$  точки  $N$  свободной поверхности, лежащей на одной вертикали с порогом  $C$ , найдем

$$H_0 = \frac{2Q}{\pi} \left( \ln \frac{\pi}{2} + 1 \right),$$

откуда

$$Q = \frac{\pi H_0}{2 \left( \ln \frac{\pi}{2} + 1 \right)} = 1,082 H_0.$$



Черт. 70.

Осушительный канал. Если в последнем течении сделать одну из линий  $h = \text{const}$  границей грунта и водоема, то легко получить течение для случая фильтрации воды из грунта в некоторый осушительный

<sup>1</sup> При коэффициенте фильтрации  $K$ , не равном единице, будем иметь:  $Q = K \cdot 1,082 H_0$ .

канал (черт. 70— $a$ ). Для общего фильтрационного расхода  $Q$ , поступающего в такой канал, получается без труда формула

$$Q = K(2H - B).$$

При  $B=0$  канал обращается в дрена, изображенную на черт. 70— $b$ . Расход, поступающий в эту дрена, найдется, очевидно, по формуле

$$Q = K \cdot 2H,$$

где  $H$ — высота отверстия дрены.

#### § 41. О фильтрации из канала произвольного поперечного сечения

Представим себе канал, сечение которого есть некоторая гладкая кривая  $BCD$ , изображенная на черт. 71— $z$ . Мы будем предполагать, что в бесконечности вода, фильтрующаяся из канала, опускается вниз лишь под действием своего веса и приобретает там, следовательно, скорость, равную коэффициенту фильтрации.

Легко убедиться, что при указанных условиях план скоростей будет иметь вид, показанный на черт. 71— $v$ .

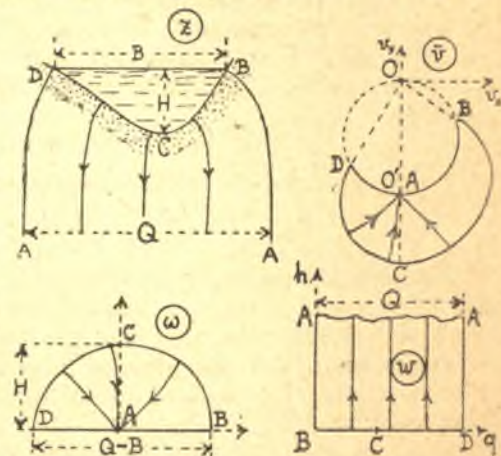
Исследуя при помощи плана скоростей направление градиента пьезометрической высоты в различных точках потока (§ 13, пример), мы без труда наметим приближенно контур области  $\omega$  (черт. 71— $\omega$ ). Если предположить, что давление на свободной поверхности потока равно нулю, то отображением свободной поверхности в плоскости  $\omega$  будет служить, очевидно, отрезок  $DAB$  действительной оси.

Принимая для простоты, что расход  $Q$  на фильтрацию из канала равен  $\pi$  ( $K=1$ ), преобразуем область переменного  $w$  (черт. 71— $w$ ) при помощи функции

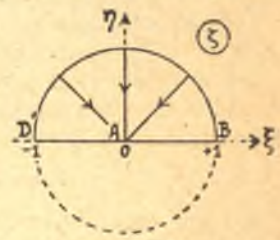
$$\zeta = e^{iw} \quad (236)$$

в полукруг плоскости  $\zeta$  (черт. 72) радиуса  $AB=1$ .

Сравнивая области переменных  $\zeta$  и  $\omega$  и замечая, что действительной оси плоскости  $\zeta$  соответствует действительная же ось плоскости  $\omega$ , мы найдем, применяя принцип симметрии Римана-Шварца, что точкам, симметричным относительно действительной оси плоскости  $\zeta$ , соответствуют точки, симметричные



Черт. 71.



Черт. 72.

относительно действительной оси плоскости  $\omega$  и что функция  $\omega(\zeta)$ , дающая конформное отображение полукруга  $ABCD$  плоскости  $\zeta$  на область переменного  $\omega$ , регулярна внутри круга  $|\zeta| < 1$  и непрерывна на окружности  $|\zeta| = 1$ .

Если сечение канала имеет вертикальную ось симметрии, то соответствующая область переменного  $\omega$  будет также симметрична около прямой, параллельной мнимой оси и проходящей через точку  $A$ . Если расположить при этом начало плоскости  $\omega$  в точке  $A$ , то  $\omega(\zeta)$  будет, очевидно, нечетной функцией от  $\zeta$ .

Заметим, наконец, что отображение круга  $|\zeta| \leq 1$  на область  $\omega$  должно быть однолиственным и, в силу конформности его, производная  $\omega'(\zeta)$  не должна обращаться внутри этого круга в нуль.

Предположим дальше, что функция  $\omega(\zeta)$ , удовлетворяющая указанным требованиям, найдена. Тогда, чтобы получить зависимость между  $z$  и  $w$ , нам придется лишь заменить в выражении  $\omega(\zeta)$  переменную  $\zeta$  ее значением (236) и воспользоваться соотношением

$$z + \omega + w = \text{const.}$$

В результате мы найдем, отбрасывая константу, что

$$z = -w - \omega(e^{iw}). \quad (237)$$

Указанный здесь прием не дает возможности решить точно задачу о фильтрации из канала заданного очертания, так как он не дает никаких средств построить точно область переменного  $\omega$ . Но можно, как мы видели выше, наметить область переменного  $\omega$  грубо. Тогда, подобрав приближенно функцию  $\omega(\zeta)$ , отображающую круг  $|\zeta| \leq 1$  на соответствующую область переменного  $\omega$ , мы получим по формуле (237) приближенное решение задачи<sup>1</sup>.

Можно, наконец, задавать функцию  $\omega(\zeta)$  произвольно, лишь бы она была однолистной в круге  $|\zeta| < 1$  и принимала на  $DAB$  (черт. 72) действительные значения, и изучать получающиеся при этом формы каналов.

Если положить, например,  $\omega = a\zeta$  ( $a > 0$ ), то мы получим случай фильтрации из канала Кожени-Ведерникова-Павловского, упомянутый уже ранее в § 40 (черт. 67).

Иногда выгодно, поместив начало плоскости  $\omega$  в точке  $A$ , представлять функцию  $\omega(\zeta)$  разложенной в ряд

$$\omega = a_1\zeta + a_2\zeta^2 + \dots \quad (a_1 > 0) \quad (238)$$

где  $a_1, a_2, \dots$  — некоторые постоянные<sup>2</sup>. Так как функция  $\omega(\zeta)$  должна быть непрерывной на окружности  $|\zeta| = 1$ , то ряд (238) должен сходиться при всех значениях  $\zeta$ , удовлетворяющих условию  $|\zeta| \leq 1$ . Коэффициенты ряда (238) должны быть действительными,

<sup>1</sup> Ср. В. В. Ведерников. Фильтрация из каналов, ОНТИ, 1934 г., главы IV и V, а также акад. Н. Н. Павловский. Известия Научно-исслед. и-та гидротехники, том XIX, 1936 г., стр. 5—24 и 49—81.

<sup>2</sup> Ср. G. Hamel, Über die Versickerung von Wasser aus Kanälen in tiefen Grund, ZAMM, Bd. 18, H. 1, февр. 1938 г.

тельными, так как на действительной оси плоскости  $\zeta$  функция  $\omega$  должна принимать у нас действительные значения. Отметим, наконец, что для сечений каналов, имеющих вертикальную ось симметрии, разложение (238) должно содержать лишь нечетные степени  $\zeta$ , так как функция  $\omega(\zeta)$  должна быть в этом случае нечетной.

Подставляя разложение (238) в уравнение (237) получим

$$z = -w - \sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{inw}. \quad (239)$$

Вдоль смоченного периметра канала у нас  $h = 0$  (черт. 71—72) и  $w = q$ . Поэтому, чтобы определить форму сечения канала, достаточно подставить в уравнение (239)  $q$  на место  $w$  и отделить действительную и мнимую части. Выполняя указанные операции, мы найдем, что сечение канала определится следующими параметрическими уравнениями:

$$\begin{aligned} x &= -q - \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nq, \\ y &= - \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin nq, \end{aligned} \quad (240)$$

где  $q$  — переменный параметр, меняющийся в пределах от 0 до  $\pi$ .

Пользуясь первым из этих уравнений, найдем для ширины канала  $B$  формулу

$$B = \pi - 2(a_1 + a_3 + a_5 + \dots). \quad (241)$$

Если предположить еще, что сечение канала имеет вертикальную ось симметрии, причем глубина воды на оси симметрии есть  $H$ , то из второго уравнения (240) получается формула

$$H = a_1 - a_3 + a_5 - \dots, \quad (242)$$

где знаки  $+$  и  $-$  чередуются.

При выводе формул (241) и (242) предполагалось, что коэффициент фильтрации  $K = 1$ , а расход  $Q = \pi$ . Если отбросить эти предположения, то формулы (241) и (242) придется заменить такими:

$$B = \frac{Q}{K} \left[ 1 - \frac{2}{\pi} (a_1 + a_3 + a_5 + \dots) \right], \quad (243)$$

$$H = \frac{Q}{K\pi} (a_1 - a_3 + a_5 - \dots). \quad (244)$$

Отсюда получаем:

$$B + 2H = \frac{Q}{K} \left[ 1 - \frac{4}{\pi} (a_3 + a_7 + a_{11} + \dots) \right],$$

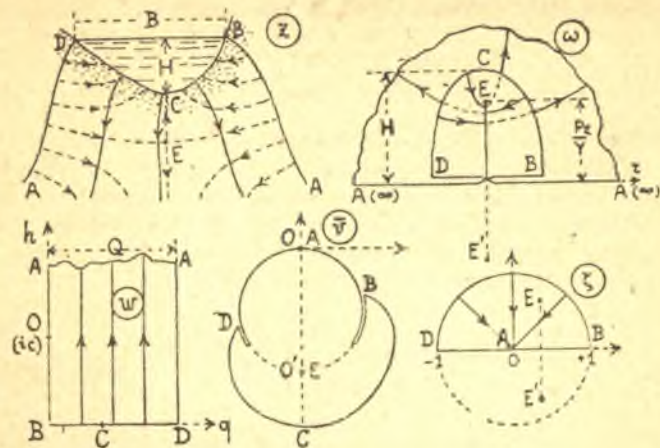
что дает для определения расхода  $Q$  следующую интересную формулу:

$$Q = K \frac{B + 2H}{1 - \frac{4}{\pi} (a_3 + a_7 + a_{11} + \dots)} \quad (245)$$



Фильтрация из канала в случае, когда скорость в бесконечности равна нулю. Наиболее общий случай такого рода представлен на черт. 73—z.

Исследуя, как в предыдущем случае, при помощи плана скоростей (черт. 73—v) направление градиента давления в различ-



Черт. 73.

ных точках потока, мы можем наметить в плоскости  $z$  приближенно линии роста давления. Эти линии представлены на черт. 73— $z$  пунктирами со стрелками, указывающими направление роста давления. Деформируя после этого область переменного  $z$  так, чтобы линии роста давления оказались бы направленными вертикально вверх, мы получим из области  $z$  область переменного  $w$  (черт. 73— $w$ ). Бесконечно удаленная точка  $A$  потока перейдет при этом в бесконечно удаленную точку плоскости  $w$ . Область переменного  $w$  будет в рассматриваемом случае двусторонней с точкою разветвления  $E$ .

Принимая для простоты расход из канала равным  $\pi$  и сравнивая области переменных  $w$  и  $\zeta = e^{iw}$  (черт. 73), легко обнаружить, применяя принцип симметрии Римана-Шварца, что функция  $w(\zeta)$  регулярна во всех точках круга  $|\zeta| \leq 1$ , за исключением точки  $A$ , где она имеет простой полюс. На действительной оси плоскости  $\zeta$  она принимает действительные значения и, кроме того, производная ее обращается в нуль только в двух точках круга  $|\zeta| < 1$ : в точке  $E$  (черт. 73— $\zeta$  и  $w$ ) и в симметричной с ней относительно оси  $\xi$  точке  $E'$ . Эти точки должны быть простыми нулями производной  $w'(\zeta)$ , так как для области  $w$  они являются точками разветвления первого порядка.

Изложенные соображения позволяют представить функцию  $w(\zeta)$  в круге  $|\zeta| \leq 1$ , при подходящем выборе начала плоскости  $w$ ,

разложением

$$w = \frac{a}{\zeta} + a_1\zeta + a_2\zeta^2 + \dots \quad (246)$$

с действительными коэффициентами  $a$ ,  $a_1$ ,  $a_2$  и т. д.

Не останавливаясь дальше на разборе общего случая, перейдем к рассмотрению простейшего случая, когда

$$w = \frac{a}{\zeta} + a_1\zeta. \quad (247)$$

Дифференцируя по  $\zeta$  получим

$$w'(\zeta) = -\frac{a}{\zeta^2} + a_1 = a_1 \frac{\zeta^2 - \frac{a}{a_1}}{\zeta^2}.$$

Из черт. 73— $\zeta$  и  $w$  видно, что вблизи точки  $A$  ( $\zeta=0$ ) при действительных значениях  $\zeta$   $w'(\zeta) > 0$ . Отсюда следует, что  $a < 0$ .

Точки, в которых  $w'(\zeta) = 0$ , будут:

$$\zeta = \pm \sqrt{\frac{a}{a_1}}.$$

Так как эти точки ( $E$  и  $E'$ ) не могут, очевидно, лежать на действительной оси плоскости  $\zeta$ , то знак  $a_1$  противоположен знаку  $a$ , т. е.  $a_1 > 0$ .

Положив для удобства

$$a = -a_1 e^{-2c},$$

где  $c$  — некоторая действительная постоянная, получим из (247):

$$w = a_1 \left( \zeta - \frac{e^{-2c}}{\zeta} \right)$$

или, заменяя  $\zeta$  его значения (236):

$$w = a_1 e^{-c} (e^{iw+c} - e^{-iw-c}) = 2a_1 e^{-c} \operatorname{sh}(c+iw).$$

Пользуясь дальше соотношением

$$z + w + \bar{w} = \text{const}$$

и, полагая для сокращения

$$2a_1 e^{-c} = A, \quad (A > 0)$$

получим следующую зависимость между  $z$  и  $w$ :

$$z = -w - A \operatorname{sh}(c+iw) + \text{const}.$$

Эту зависимость можно представить также в виде

$$z = -w - A \operatorname{sh} iw, \quad (248)$$

для чего достаточно перенести начало плоскости  $w$  вдоль мнимой оси в точку  $ic$  (черт. 73— $w$ ) и подобрать подходящим образом константу, сопровождающую  $z$ .

Подробное исследование этой зависимости, которое мы опускаем, показывает, что течение, определяемое ею, располагается

на некоторой многолистной Римановой поверхности. Интересующая нас часть течения имеет вид, показанный на черт. 74. На другом листе течения располагается симметрично относительно разреза  $AF$ .

Мы имеем здесь, как легко видеть, случай движения грунтовой воды через водослив с тонкой стенкой, когда уклон свободной поверхности в бесконечности равен нулю.

Отделяя в уравнении (248) действительную и мнимую части, получим:

$$\begin{aligned}x &= -q + A \operatorname{sh} h \cos q, \\y &= -h - A \operatorname{ch} h \sin q,\end{aligned}\quad (249)$$

Если положить здесь  $q = 0$  и исключить  $h$ , то получим уравнение свободной поверхности  $AB$ :

$$x = -A \operatorname{sh} y, \quad (250)$$

В начале координат  $O$  (черт. 74) мы будем иметь, очевидно, точку перегиба.

Постоянную  $A$  легко выразить через угол  $\beta$ , образуемый касательной к свободной поверхности в точке перегиба  $O$  с отвесом (черт. 74). Простые вычисления дадут нам:

$$A = \operatorname{tg} \beta. \quad (251)$$

Чтобы определить сечение канала  $BCD$ , достаточно положить в уравнениях (249)  $h = -c$ . В результате получим для сечения следующие параметрические уравнения:

$$\begin{aligned}x &= -q - A \operatorname{sh} c \cos q, \\y &= c - A \operatorname{ch} c \sin q.\end{aligned}$$

Для точек  $B$  и  $C$  (черт. 74) будем иметь:

$$x_B = -A \operatorname{sh} c, \quad y_B = c,$$

$$x_C = -\frac{\pi}{2}, \quad y_C = c - A \operatorname{ch} c.$$

Второе из этих равенств показывает, что  $c$  есть высота уровня воды в канале относительно точки перегиба  $O$ .

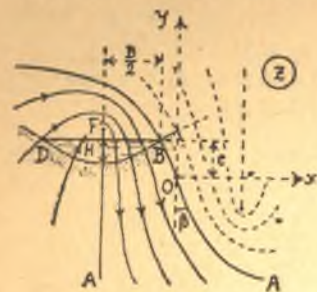
Полученные равенства дают нам для ширины  $B$  и глубины  $H$  канала такие формулы:

$$B = \pi - 2A \operatorname{sh} c, \quad H = A \operatorname{ch} c.$$

При выводе их предполагалось, что коэффициент фильтрации  $K = 1$ , а расход  $Q = \pi$ . При переходе к любым  $K$  и  $Q$  предыдущие формулы, как легко проверить, придется заменить следующими:

$$B = \frac{Q}{K} \left( 1 - \frac{2A}{\pi} \operatorname{sh} \frac{\pi Kc}{Q} \right), \quad (252)$$

$$H = \frac{Q}{K} \frac{A}{\pi} \operatorname{ch} \frac{\pi Kc}{Q}, \quad (253)$$



Черт. 74.

где, как и раньше,  $c$  — высота уровня воды в канале относительно точки перегиба свободной поверхности.

Формула (252) показывает, что при  $c = 0$ ,

$$B = \frac{Q}{K}. \quad (254)$$

Обозначая это значение через  $B_0$  и замечая, что

$$\operatorname{ch} x - \operatorname{sh} x = e^{-x}, \quad \operatorname{ch} x + \operatorname{sh} x = e^x,$$

мы легко найдем, что

$$B + 2H = \frac{Q}{K} \left( 1 + 2 \frac{\operatorname{tg} \beta}{\pi} e^{-\frac{\pi c}{B_0}} \right),$$

$$B - 2H = \frac{Q}{K} \left( 1 - 2 \frac{\operatorname{tg} \beta}{\pi} e^{-\frac{\pi c}{B_0}} \right)$$

откуда

$$Q = K \frac{B + 2H}{1 + 2 \frac{\operatorname{tg} \beta}{\pi} e^{-\frac{\pi c}{B_0}}} \quad (255)$$

или

$$Q = K \frac{B - 2H}{1 - 2 \frac{\operatorname{tg} \beta}{\pi} e^{-\frac{\pi c}{B_0}}}. \quad (256)$$

Первую из этих формул следует применять, когда  $c > 0$ , т. е. когда уровень воды в канале расположен выше точки перегиба свободной поверхности; вторую — в противоположном случае. Если  $|c| \rightarrow \infty$ , то, при подходящем выборе знака  $c$ , из формул (255) и (256) получаются известные уже нам формулы проф. Кожени (§ 40).

#### § 42. Фильтрация из канала трапециoidalного сечения<sup>1</sup>

Мы рассмотрим здесь лишь тот случай фильтрации из канала трапециoidalного сечения, когда скорость фильтрации в бесконечности направлена вертикально вниз (черт. 75— $z$ ). Сечение канала будем считать симметричным относительно вертикальной прямой  $DA$ .

На черт. 75— $w$  и  $\bar{v}$  построены область переменного  $w$  и план скоростей для правой половины фильтрующегося потока.

Подвергая план скоростей инверсии около окружности  $K$  радиуса  $OO' = 1$  с центром в точке  $O$ , получим прямоугольный

<sup>1</sup> Первое решение этой задачи, существенно отличное от предлагаемого здесь, было дано в 1936 г. проф. В. В. Ведерниковым. См. Научные Зап. Московского И-та Инж. Водн. Хоз., вып. II, 1936 г., стр. 248—288 или ЗАММ, Bd. 17, N. 3, Juni 1937, стр. 155—168.

треугольник  $ABC$  (черт. 75— $u$ ). Точка  $v_x + v_y$  плана перейдет при этом в точку

$$u = i \frac{dz}{dw}.$$

Отобразим области переменных  $w$  и  $u$  на верхнюю полу-плоскость вспомогательного переменного  $t$  (черт. 75— $t$ ), на которой положено  $BC=1$ .

Для упрощения формул мы примем, оставляя пока размеры канала неопределенными, что общий расход на фильтрацию из канала при коэффициенте фильтрации  $K=1$ , равен числу  $\pi$ .

Первое отображение, как легко проверить, осуществляется функцией.

$$t = \frac{\sin^2 w}{\sin^2 \theta},$$

где  $\theta$  — расход на фильтрацию через откос канала  $BC$  (черт. 75— $w$ ). Что касается второго отображения, то обозначая через  $\beta = \pi\alpha$  угол, образуемый откосом  $BC$  с горизонтом, будем иметь на основании формулы Шварца-Кристоффеля

$$du = \frac{-iAdt}{t^{\frac{1}{2}} + \alpha(t-1)^{1-\alpha}},$$

где  $A$  — некоторая постоянная. Чтобы определить ее,

проинтегрируем  $du$  по пути  $CA$ . Получим

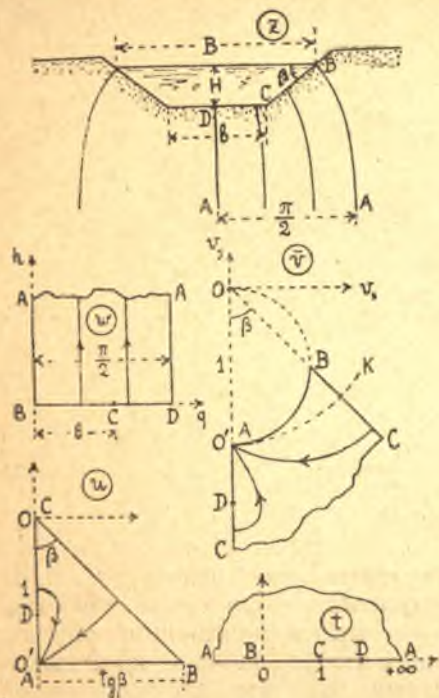
$$u_A - u_C = -i = -iA \int_1^{\infty} \frac{dt}{t^{\frac{1}{2}} + \alpha(t-1)^{1-\alpha}} = -iA \cdot B\left(\alpha, \frac{1}{2}\right),$$

откуда

$$A = \frac{1}{B\left(\alpha, \frac{1}{2}\right)} = \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2} + \alpha\right)}{\sqrt{\pi} \Gamma(\alpha)}. \quad (257)$$

Подставляя теперь в выражение для  $du$  найденное выше значение  $t$ , получим

$$du = -i2A \sin \theta \frac{\cos w dw}{\sin^{2\alpha} w (\sin^2 w - \sin^2 \theta)^{1-\alpha}}.$$



Черт. 75.

Введем сюда вместо  $w$  переменную

$$\zeta = e^{iw}.$$

Замечая, что

$$\sin w = \frac{e^{iw} - e^{-iw}}{2i} = i \frac{1 - \zeta^2}{2\zeta},$$

$$\cos w = \frac{e^{iw} + e^{-iw}}{2} = \frac{1 + \zeta^2}{2\zeta},$$

будем иметь

$$\frac{du}{d\zeta} = 4A \sin \theta \frac{1 + \zeta^2}{(1 - \zeta^2)^{2\alpha} (1 - 2 \cos 2\theta \cdot \zeta^2 + \zeta^4)^{1-\alpha}}. \quad (258)$$

Чтобы проинтегрировать это выражение, разложим правую часть его в круге  $|\zeta| < 1$  в ряд по целым положительным степеням переменного  $\zeta$ .

Для определения коэффициентов искомого разложения выгодно ввести в рассмотрение вспомогательную функцию

$$\varphi(x) = \frac{1+x}{(1-x)^{2\alpha} (1-2\cos 2\theta \cdot x + x^2)^{1-\alpha}}$$

С помощью этой функции выражение (258) представится в виде

$$\frac{du}{d\zeta} = 4A \sin \theta \cdot \varphi(\zeta^2) \quad (259)$$

и вопрос о разложении в ряд выражения (258) сведется к определению коэффициентов разложения

$$\varphi(x) = 1 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_n x^n + \dots \quad (260)$$

Для получения последнего разложения возьмем логарифмическую производную от  $\varphi(x)$ . В результате будем иметь

$$\begin{aligned} \frac{\varphi'(x)}{\varphi(x)} &= \frac{1}{1+x} + \frac{2x}{1-x} + \frac{2(1-\alpha)(\cos 2\theta - x)}{1-2\cos 2\theta \cdot x + x^2} = \\ &= \frac{A_0 + A_1 x + A_2 x^2 + A_3 x^3}{1-2\cos 2\theta \cdot (x-x^3)-x^4}, \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} A_0 &= 1 + 2 \cos 2\theta + 2(1 - \cos 2\theta) \alpha, \\ A_1 &= -3 - 2 \cos 2\theta + 4(1 - \cos 2\theta) \alpha, \\ A_2 &= 1 + 2(1 - \cos 2\theta) \alpha, \\ A_3 &= 1. \end{aligned} \quad (261)$$

Отсюда, избавляясь от знаменателей, получим тождество

$$\varphi'(x) [1 - 2 \cos 2\theta \cdot (x - x^3) - x^4] = \varphi(x) (A_0 + A_1 x + A_2 x^2 + A_3 x^3).$$

Подставляя в него разложение (260) и сравнивая коэффициенты при одинаковых степенях  $x$ , будем иметь для опреде-

ления постоянных  $a_1, a_2, \dots$  систему уравнений:

$$\begin{aligned} a_1 &= A_0, \\ 2a_2 &= A_0 a_1 + A_1 + 2 \cos 2\theta \cdot a_1, \\ 3a_3 &= A_0 a_2 + A_1 a_1 + A_2 + 2 \cos 2\theta \cdot 2a_2, \\ 4a_4 &= A_0 a_3 + A_1 a_2 + A_2 a_1 + 1 + 2 \cos 2\theta \cdot (3a_3 - a_1), \\ &\dots \\ (n+1)a_{n+1} &= A_0 a_n + A_1 a_{n-1} + A_2 a_{n-2} + a_{n-3} + \\ &+ 2 \cos 2\theta \cdot [na_n - (n-2)a_{n-2}] + (n-3)a_{n-3}, \\ &\dots \end{aligned} \quad (262)$$

из которых последовательно определим  $a_1, a_2, a_3$  и т. д.

Предполагая, что коэффициенты  $a_1, a_2, \dots$  найдены, мы представим теперь искомое разложение выражения (258) в виде

$$\frac{du}{d\zeta} = 4A \sin \theta \cdot (1 + a_1 \zeta^2 + a_2 \zeta^4 + a_3 \zeta^6 + \dots).$$

Интегрируя этот результат и принимая во внимание, что при  $\zeta = 0, u = -i$ , получим

$$u = i \frac{dz}{dw} = -i + 4A \sin \theta \cdot \left( \zeta + \frac{a_1}{3} \zeta^3 + \frac{a_2}{5} \zeta^5 + \frac{a_3}{7} \zeta^7 + \dots \right),$$

откуда

$$\frac{dz}{dw} = -1 - i4A \sin \theta \left( e^{iw} + \frac{a_1}{3} e^{i3w} + \frac{a_2}{5} e^{i5w} + \dots \right).$$

Интегрируя вторично, найдем

$$z = -w - 4A \sin \theta \cdot \left( e^{iw} + \frac{a_1}{3^2} e^{i3w} + \frac{a_2}{5^2} e^{i5w} + \dots \right).$$

Отсюда для определения координат  $x$  и  $y$  смоченного периметра канала получим параметрические уравнения:

$$x = -q - 4A \sin \theta \cdot \left( \cos q + \frac{a_1}{3^2} \cos 3q + \frac{a_2}{5^2} \cos 5q + \dots \right),$$

$$y = -4A \sin \theta \cdot \left( \sin q + \frac{a_1}{3^2} \sin 3q + \frac{a_2}{5^2} \sin 5q + \dots \right).$$

$$(0 \leq q \leq \pi)$$

Стоящие здесь в скобках тригонометрические ряды сходятся, так как функции  $x(q) + q$  и  $y(q)$  удовлетворяют, очевидно, условиям Дирихле.

Для координат точек  $B$  и  $D$  будем иметь

$$x_B = -4A \sin \theta \cdot \left( 1 + \frac{a_1}{3^2} + \frac{a_2}{5^2} + \dots \right), \quad y_B = 0,$$

$$x_D = -\frac{\pi}{2}, \quad y_D = -4A \sin \theta \cdot \left( 1 - \frac{a_1}{3^2} + \frac{a_2}{5^2} - \dots \right).$$

Замечая, что

$$x_B - x_D = \frac{B}{2}, \quad y_B - y_D = H,$$

где  $B$  — ширина канала на уровне воды, а  $H$  — глубина воды в канале, найдем:

$$B = \pi - 8A \sin \theta \left( 1 + \frac{a_1}{3^2} + \frac{a_2}{5^2} + \dots \right),$$

$$H = 4A \sin \theta \left( 1 - \frac{a_1}{3^2} + \frac{a_2}{5^2} - \dots \right).$$

Выше мы предположили, что  $K=1$  и  $Q=\pi$ . Если отбросить это предположение, то будем, очевидно, иметь:

$$B = \frac{Q}{K} \left[ 1 - \frac{8A}{\pi} \sin \theta \cdot \left( 1 + \frac{a_1}{3^2} + \frac{a_2}{5^2} + \dots \right) \right], \quad (263)$$

$$H = \frac{Q}{K} \frac{4A}{\pi} \sin \theta \cdot \left( 1 - \frac{a_1}{3^2} + \frac{a_2}{5^2} - \dots \right). \quad (264)$$

Величина  $\theta$ , как легко убедиться, связана с действительным расходом на фильтрацию через оба откоса канала  $Q'$  зависимостью

$$\theta = \frac{\pi}{2} \frac{Q'}{Q}. \quad (265)$$

Если к  $B$  прибавить  $2H$ , то из выражений (263) и (264) получится следующая формула для определения полного фильтрационного расхода из канала:

$$Q = K\mu (B + 2H)^2, \quad (266)$$

где

$$\mu = \frac{1}{1 - \frac{16A}{\pi} \sin \theta \cdot \left( \frac{a_1}{3^2} + \frac{a_2}{5^2} + \dots \right)}. \quad (267)$$

Последнее выражение показывает, что коэффициенты  $a_2, a_4, a_6$  и т. д., зависящие лишь от формы сечения канала, не оказывают влияния на расход, вычисляемый по формуле (266). Это составляет, конечно, существенное достоинство формулы (266).

Для определения коэффициента  $\mu$  необходимо знать величину  $\theta$ . Последнюю можно найти из уравнения

$$\frac{B}{2H} = \frac{\frac{\pi}{8A} - \sin \theta \left( 1 + \frac{a_1}{3^2} + \frac{a_2}{5^2} + \dots \right)}{\sin \theta \left( 1 - \frac{a_1}{3^2} + \frac{a_2}{5^2} - \dots \right)}, \quad (268)$$

которое получается исключением  $Q$  из формул (263) и (264).

Вычисление коэффициента  $\mu$  лучше всего вести путем последовательных приближений. В первом приближении можно по-

<sup>1</sup> По проф. Ведерникову (см. его работы, указанные на стр. 79)  $Q = K(B + AH)$ , где  $A$  — некоторая функция от  $\frac{Q}{K}$  и  $\beta$ .

ложить  $a_1 = a_2 = \dots = 0$ . Тогда формулы (267) и (268) дадут нам:

$$\mu = 1, \quad \frac{B}{2H} = \frac{\pi}{8A \sin \theta} - 1.$$

Второй из этих результатов приводит к формуле

$$\sin \theta = \frac{1}{C \left(1 + \frac{B}{2H}\right)}, \quad (269)$$

где для сокращения введено обозначение [см. форм. (257)]:

$$C = \frac{8A}{\pi} = \frac{8\Gamma\left(\frac{1}{2} + \alpha\right)}{\pi \sqrt{\pi} \Gamma(\alpha)}.$$

Формула (269) в связи с формулой (265) определяет отношение расхода  $Q'$ , фильтрующегося через оба откоса канала, к общему фильтрационному расходу  $Q$  из канала.

Определив по формуле (269)  $\sin \theta$ , мы вычислим  $a_1$  по первым из формул (261) и (262). После простых преобразований получим:

$$a_1 = 3 - 4(1 - \alpha) \sin^2 \theta. \quad (270)$$

Положив после этого  $a_2 = a_3 = \dots = 0$ , мы найдем во втором приближении для  $\mu$ , согласно формуле (267), значение

$$\mu = \frac{1}{1 - 2C \sin \theta \cdot \frac{a_1}{3^2}}.$$

Это приближение настолько точно, что практически нет необходимости искать дальнейшие приближения.

Если воспользоваться теперь результатами (269) и (270), то для вычисления коэффициента  $\mu$  получится следующая, легко поддающаяся номографированию, формула:

$$\frac{1}{\mu} = 1 - \frac{1}{1,5 \left(1 + \frac{B}{2H}\right)} + \frac{1}{D \left(1 + \frac{B}{2H}\right)^2}, \quad (271)$$

где

$$D = \frac{9C^2}{8(1 - \alpha)}.$$

Необходимые для применения формул (265), (266), (269) и (271) значения величин  $C$  и  $D$  при углах откоса  $\beta$  (черт. 75—z), лежащих в пределах от 0 до 50,4° ( $\Delta\beta = 3,6^\circ$ ), даны в следующей таблице:

$\beta^\circ$	$C$	$D$	$\beta^\circ$	$C$	$D$	$\beta^\circ$	$C$	$D$
0°	0,000	0,000	18°	0,225	0,063	36°	0,406	0,232
3,6°	0,050	0,003	21,6°	0,244	0,089	39,6°	0,439	0,278
7,2°	0,097	0,011	25,2°	0,302	0,119	43,2°	0,470	0,327
10,8°	0,141	0,024	28,8°	0,338	0,153	46,8°	0,501	0,381
14,4°	0,184	0,041	32,4°	0,373	0,190	50,4°	0,530	0,439

Эта таблица составлена так, что для промежуточных значений угла  $\beta$ , не указанных в таблице, величины  $C$  и  $D$  можно находить при помощи линейного интерполирования.

Чтобы судить о степени точности формулы (271), мы приводим ниже краткую сводку примеров, рассмотренных проф. В. В. Ведерником в его цитированной выше (стр. 79) работе. В этой сводке рядом с расходом, вычисленным по формуле проф. В. В. Ведерникова  $Q = K(B + AH)$ , даны расходы, найденные по нашим формулам (266) и (271). Коэффициент фильтрации  $K$  принят для простоты равным единице.

Данные			Q	
B	H	ctgβ	По Ведернику	По Ризенкампфу
8,16	1,58	1	12,9	12,9
1,2	0,3	2	1,73	1,70
12	2	1,5	17,4	17,6

#### § 43. Фильтрация из канала малой глубины с пологими откосами при учете капиллярного поднятия грунтовой воды

Выше, в § 40, мы показали, что если глубина  $H$  воды в канале незначительна, то расход  $Q$  на фильтрацию из канала при отсутствии капиллярного поднятия грунтовой воды можно вычислить по формуле

$$Q = KB^1.$$

Посмотрим теперь, какие изменения должны быть внесены в эту формулу для получения расхода из канала при наличии некоторого капиллярного поднятия грунтовой воды  $h_k$  (§ 5).

Течение грунтовой воды в последнем случае будет иметь вид, показанный на черт. 76—z, где  $B = CC'$  — ширина канала на уровне воды, а  $B_1 = BB'$  — расстояние между точками  $B$  и  $B'$ , в которых свободные поверхности  $AB$  и  $A'B'$  отделяются от откосов канала.

Для упрощения решения задачи мы примем сначала, что расход на фильтрацию из канала  $Q$  при коэффициенте фильтрации  $K=1$ , равен числу  $\pi$ . Ниже мы избавимся от этого ограничения.

Пользуясь тем, что поток наш симметричен около вертикальной прямой  $AD$  (черт. 76—z), мы построили план скоростей (черт. 76—v) и область переменного  $\omega$  (черт. 76—w) только для правой половины потока.

Подвергнув план скоростей инверсии около окружности радиуса  $OO' = 1$  с центром в точке  $O$ , мы получим, как известно

<sup>1</sup> При этом предполагается, что скорость фильтрации в бесконечности равна  $K$  и направлена вертикально вниз.

(§ 14), область комплексного переменного

$$u = i \frac{dz}{dw},$$

показанную на черт. 76— $u$ .

Отображая теперь область переменного  $w$  на верхнюю полуплоскость вспомогательного переменного  $t$  (черт. 76— $t$ ), на которой принято  $CD=1$ , будем иметь

$$w = \arcsin \sqrt{t},$$

откуда, полагая  $\sqrt{t}=s$ , получим

$$s = \sin w. \quad (272)$$

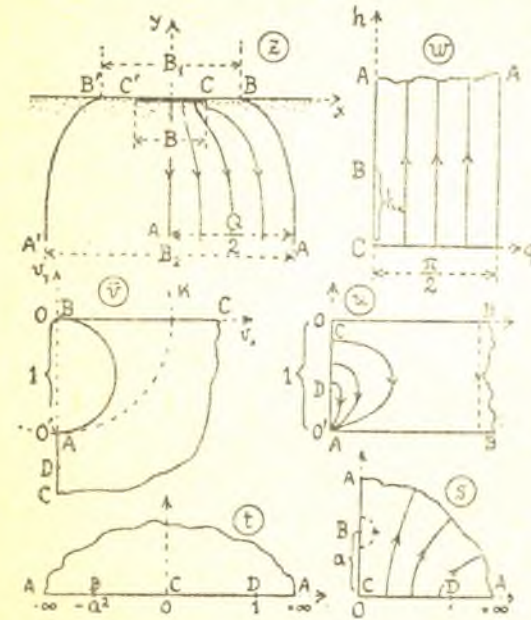
Область переменного  $s$ , соответствующая правой половине потока, показана на черт. 76— $s$ .

Если назвать расстояние между точками  $C$  и  $B$  плоскости  $s$  через  $a$ , то, пользуясь уравнением

$$y + \frac{p}{\gamma} + h = \text{const},$$

мы легко найдем, что

$$a = \text{sh } hk. \quad (273)$$



Черт. 76.

Отображая далее на верхнюю полуплоскость переменного  $t$  область переменного  $u$ , получим на основании формулы Шварца-Кристоффеля:

$$du = \frac{A dt}{(t+a^2)\sqrt{t}} = \frac{2Ads}{s^2+a^2}$$

где  $A$  — некоторая постоянная. Чтобы определить ее, представим  $du$  в виде

$$du = 2A \frac{1}{s+ia} \frac{ds}{s-ia}$$

Полагая здесь  $s = ia + \rho e^{i\theta}$ , найдем, что вблизи точки  $B$ , при  $\rho = \text{const}$ ,

$$du = \frac{2A}{a} d\theta.$$

Интегрируя этот результат в пределах от  $-\frac{\pi}{2}$  до  $+\frac{\pi}{2}$ , получим, как показывают чертежи 76— $s$  и  $u$ :

$$-i = \frac{2A}{a} \pi,$$

Отсюда следует, что

$$A = -i \frac{a}{\pi}.$$

Принимая теперь во внимание зависимость (272), мы найдем, что

$$du = -i \frac{2a}{\pi} \frac{\cos w dw}{\sin^2 w + a^2}.$$

Прежде чем интегрировать это выражение, мы введем вместо  $w$  новую переменную  $\zeta$  по формуле

$$\zeta = e^{iw}.$$

Тогда, на основании равенства (273), получим после простых вычислений:

$$\frac{\pi}{2} \frac{du}{d\zeta} = \frac{e^{-hk}}{e^{-2hk} - \zeta^2} - \frac{e^{hk}}{e^{2hk} - \zeta^2}.$$

Функция от  $\zeta$ , стоящая здесь в правой части, не имеет в плоскости  $\zeta$  (черт. 77) других особенностей, кроме полюсов первого порядка в точках

$$-e^{hk}, -e^{-hk}, e^{-hk} \text{ и } e^{hk}.$$

Для наших целей выгодно разложить ее в ряд Лорана в кольце, ограниченном окружностями  $|\zeta| = e^{-hk}$  и  $|\zeta| = e^{hk}$ .

Замечая, что в указанном кольце имеют место разложения

$$\frac{e^{-hk}}{e^{-2hk} - \zeta^2} = -e^{-hk} \frac{1}{\zeta^2} - e^{-3hk} \frac{1}{\zeta^4} - e^{-5hk} \frac{1}{\zeta^6} - \dots$$

и

$$\frac{e^{hk}}{e^{2hk} - \zeta^2} = +e^{-hk} + e^{-3hk} \zeta^2 + e^{-5hk} \zeta^4 + \dots,$$

мы найдем, что искомый ряд Лорана имеет вид:

$$\frac{\pi}{2} \frac{du}{d\zeta} = \dots - e^{-5hk} \frac{1}{\zeta^6} - e^{-3hk} \frac{1}{\zeta^4} - e^{-hk} \frac{1}{\zeta^2} - e^{-hk} - e^{-3hk} \zeta^2 - e^{-5hk} \zeta^4 - \dots$$

Возвращаясь теперь от переменного  $\zeta$  к старому переменному  $w$ , получим:

$$i \frac{\pi}{4} \frac{du}{dw} = e^{-hk} \cos w + e^{-3hk} \cos 3w + e^{-5hk} \cos 5w + \dots$$



Черт. 77.

Вспомнив теперь, что

$$u = i \frac{dz}{dw}$$

и интегрируя последний ряд дважды по  $w$ , мы найдем, что

$$\frac{\pi}{4} z = e^{-hk} \cos w + e^{-3hk} \frac{\cos 3w}{3^2} + e^{-5hk} \frac{\cos 5w}{5^2} + \dots \quad (274)$$

Этот ряд, как легко сообразить, сходится внутри и на краях полосы плоскости  $w$ , ограниченной прямыми  $l(w) = \pm h_k$ . Пользуясь им, мы найдем для вычисления ширины канала  $B$  разложение

$$\frac{\pi}{8} B = e^{-hk} + \frac{1}{3^2} e^{-3hk} + \frac{1}{5^2} e^{-5hk} + \dots, \quad (275)$$

годное для всех значений  $h_k$ , удовлетворяющих условию  $h_k \geq 0$ .

Если  $h_k$  не очень мало, то, в смысле сходимости, ряд (275) не оставляет желать ничего лучшего. При малых значениях  $h_k$  выгоднее преобразовать его в новый ряд, который может быть получен следующим образом.

Дифференцируя (275) по  $h_k$  и полагая для сокращения письма  $h_k = x$ , получим:

$$\frac{\pi}{8} \frac{dB}{dx} = -e^{-x} - \frac{1}{3} e^{-3x} - \frac{1}{5} e^{-5x} - \dots \quad (x > 0)$$

или, как легко проверить,

$$\begin{aligned} \frac{\pi}{4} \frac{dB}{dx} &= \ln \frac{1-e^{-x}}{1+e^{-x}} = \ln \frac{e^{\frac{x}{2}} - e^{-\frac{x}{2}}}{e^{\frac{x}{2}} + e^{-\frac{x}{2}}} = \ln \frac{\operatorname{sh} \frac{x}{2}}{\operatorname{ch} \frac{x}{2}} = \ln \frac{x}{2} + \\ &+ \ln \frac{\operatorname{sh} \frac{x}{2}}{\frac{x}{2}} - \ln \operatorname{ch} \frac{x}{2}, \end{aligned}$$

Пользуясь теперь известными разложениями:

$$\ln \frac{\operatorname{sh} u}{u} = \frac{S_2}{\pi^2} u^2 - \frac{1}{2} \frac{S_4}{\pi^4} u^4 + \frac{1}{3} \frac{S_6}{\pi^6} u^6 - \dots, \quad (|u| < \pi)$$

$$\ln \operatorname{ch} u = (2^2 - 1) \frac{S_2}{\pi^2} u^2 - \frac{2^4 - 1}{2} \frac{S_4}{\pi^4} u^4 + \frac{2^6 - 1}{3} \frac{S_6}{\pi^6} u^6 - \dots, \quad (|u| < \frac{\pi}{2})$$

где для сокращения введено обозначение

$$S_n = 1 + \frac{1}{2^n} + \frac{1}{3^n} + \frac{1}{4^n} + \dots,$$

будем иметь:

$$\begin{aligned} \frac{\pi}{4} \frac{dB}{dx} &= \ln \frac{x}{2} - (2-1) \frac{S_2}{2\pi^2} x^2 + \\ &+ \frac{2^3 - 1}{2} \frac{S_4}{2^3 \pi^4} x^4 - \frac{2^5 - 1}{3} \frac{S_6}{2^5 \pi^6} x^6 + \dots \quad (0 < x < \pi) \end{aligned}$$

Интегрируя этот результат в пределах от  $x=0$  до  $x=h_k$  и замечая, что на основании соотношения (275), при  $h_k=0$ ,

$$\frac{\pi}{8} B = 1 + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \dots = \frac{\pi^2}{8},$$

легко найдем:

$$\begin{aligned} \frac{\pi}{4} B &= \frac{\pi^2}{4} + \left( \ln \frac{h_k}{2} - 1 \right) h_k - \frac{S_2}{2\pi^2} \frac{h_k^3}{3} + \\ &+ \frac{2^3 - 1}{2} \frac{S_4}{2^3 \pi^4} \frac{h_k^5}{5} - \frac{2^5 - 1}{3} \frac{S_6}{2^5 \pi^6} \frac{h_k^7}{7} + \dots \quad (276) \\ &(0 < h_k \leq \pi) \end{aligned}$$

Входящие сюда суммы  $S_n$  имеют, как известно, следующие значения:

$$S_2 = \frac{\pi^2}{6}, \quad S_4 = \frac{\pi^4}{90}, \quad S_6 = \frac{\pi^6}{945} \text{ и т. д.}$$

Подставляя их в соотношение (276), получим для вычисления  $B$  при малых  $h_k$  такое разложение:

$$\frac{\pi}{4} B = \frac{\pi^2}{4} + \left( \ln \frac{h_k}{2} - 1 \right) h_k - \frac{1}{36} h_k^3 + \frac{7}{7200} h_k^5 - \frac{31}{635040} h_k^7 + \dots$$

или

$$\begin{aligned} B &= 3,14159 + 1,27324 \left( \ln \frac{h_k}{2} - 1 \right) h_k - \\ &- 0,03537 h_k^3 + 0,00124 h_k^5 - 0,00006 h_k^7 + \dots \quad (277) \end{aligned}$$

Перейдем теперь к вычислению расстояния  $B_1$  между точками  $B$  и  $B'$  (черт. 76—z).

Пользуясь уравнением (274), мы найдем:

$$\begin{aligned} \frac{\pi}{4} (z_B - z_D) &= \frac{\pi}{4} \frac{B_1}{2} = e^{-h_k} \operatorname{ch} h_k + e^{-3h_k} \frac{\operatorname{ch} 3h_k}{3^2} + \\ &+ e^{-5h_k} \frac{\operatorname{ch} 5h_k}{5^2} + \dots = \frac{1}{2} \left( 1 + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \dots + e^{-2h_k} + \right. \\ &\left. + \frac{1}{3^2} e^{-3 \cdot 2h_k} + \frac{1}{5^2} e^{-5 \cdot 2h_k} + \dots \right). \end{aligned}$$

Отсюда, обозначая через  $B(h_k)$  и  $B_1(h_k)$  величины  $B$  и  $B_1$ , вычисленные для высоты капиллярного поднятия  $h_k$ , мы легко получим для нахождения  $B_1$  следующую удобную формулу:

$$B_1(h_k) = \frac{\pi + B(2h_k)}{2}. \quad (278)$$

Пользуясь формулами (275), (277), (278) мы вычислили для ряда значений  $h_k$  величины  $B$  и  $B_1$ , которые приводим в таблице I.

Таблица I

$K=1, Q=\pi$		
$h_k$	$B$	$B_1$
0,0	3,1416	3,1416
0,1	2,6328	2,7210
0,2	2,3003	2,4760
0,4	1,8104	2,1568
0,6	1,4503	1,9583
0,8	1,1720	1,8290
1,0	0,9516	1,7435
1,2	0,7750	—
1,6	0,5165	—
2,0	0,3453	—

Таблица II

$\frac{h_k}{B}$	$\lambda = \frac{Q}{Q_0}$	$\nu = \frac{B_1}{B}$
0,0000	1,000	1,000
0,0380	1,193	1,033
0,0869	1,366	1,076
0,2210	1,735	1,191
0,4137	2,166	1,350
0,6826	2,681	1,561
1,0508	3,301	1,832
1,548	4,054	—
3,098	6,082	—
5,791	9,097	—

Эти величины соответствуют, как мы знаем, лишь случаю когда коэффициент фильтрации  $K=1$ , а расход  $Q=\pi$ . Чтобы получить таблицу, годную для любых значений  $K$  и  $Q$ , достаточно, очевидно, подсчитать по данным таблицы I значения отношений:

$$\frac{h_k}{B}, \frac{\pi}{B} \text{ и } \frac{B_1}{B}.$$

Эти значения мы приводим в таблице II, где для удобства пользования таблицей столбец со значениями отношений  $\frac{\pi}{B}$  отмечен равенством  $\lambda = \frac{Q}{Q_0}$ , в котором  $Q_0$  означает расход на фильтрацию из канала при  $h_k=0$  (равный при  $K=1$  ширине канала  $B$ ), а  $Q$  — расход на фильтрацию из того же канала при любом  $h_k$  (равный в нашем частном случае числу  $\pi$ ); столбец же со значениями отношений  $\frac{B_1}{B}$  отмечен равенством  $\nu = \frac{B_1}{B}$ .

Зная отношение  $\frac{h_k}{B}$ , мы вычислим (при любых  $K$  и  $B$ ) расход  $Q$ , расстояние  $B_1$  и ширину  $B_2$ , стекающей вниз струи (черт. 76—z) по формулам:

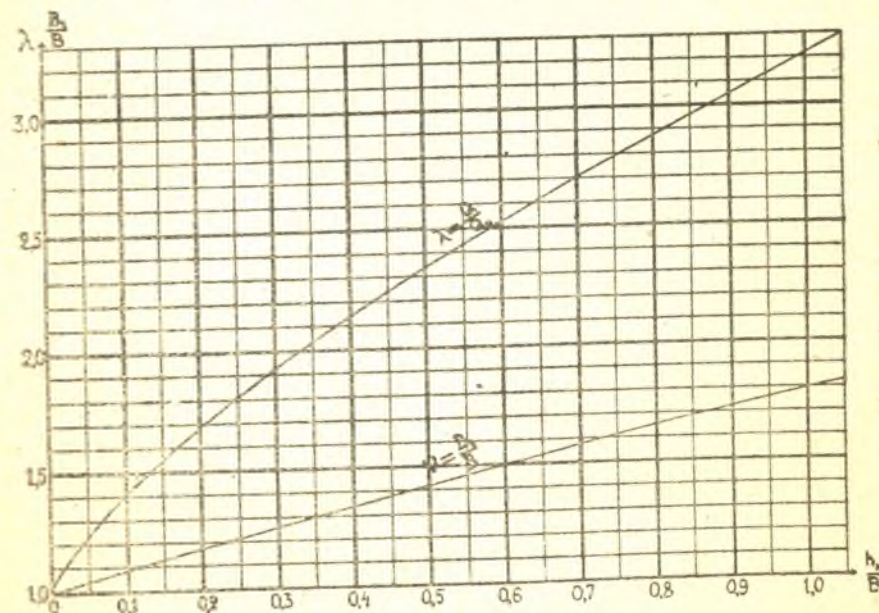
$$\begin{aligned} Q &= \lambda Q_0 = K \lambda B, \\ B_1 &= \nu B \text{ и } B_2 = \lambda B, \end{aligned} \quad (279)$$

где  $\lambda$  и  $\nu$  берутся из второго и третьего столбцов таблицы II.

Числами второго столбца таблицы II можно также воспользоваться для приближенного определения расхода  $Q$  и в том случае, когда глубина воды в канале  $H \neq 0$ . Так, например, для каналов трапециевидального поперечного сечения, мы получим, принимая во внимание зависимость (266), следующую приближенную формулу:

$$Q = K \lambda \mu (B + 2H), \quad (280)$$

в которой  $\mu$  имеет прежнее значение.



Черт. 78.

По данным таблицы II мы составили графики (черт. 78), определяющие отношения  $\lambda = \frac{Q}{Q_0}$  и  $\nu = \frac{B_1}{B}$  для значений отношения  $\frac{h_k}{B}$ , лежащих в пределах от 0 до 1,05.

Из графика отношения  $\lambda = \frac{Q}{Q_0}$  видно, например, что при  $\frac{h_k}{B} = 0,33$  расход  $Q = 2Q_0$  и т. д.

Заканчивая настоящий параграф, покажем еще, что для значений  $\frac{h_k}{B}$ , близких к нулю, зависимость между  $\frac{B_1}{B}$  и  $\frac{h_k}{B}$  можно представить формулой

$$\frac{B_1}{B} = 1 + \frac{4 \ln 2}{\pi} \frac{h_k}{B} = 1 + 0,883 \frac{h_k}{B}. \quad (281)$$



В самом деле, пользуясь уравнениями (276) и (278), получим для значений  $h_k$ , близких к нулю:

$$B = \pi + \frac{4}{\pi} \left( \ln \frac{h_k}{2} - 1 \right) h_k,$$

$$B_1 = \pi + \frac{4}{\pi} \left( \ln h_k - 1 \right) h_k.$$

Вычитая из второго результата первый, будем иметь:

$$B_1 - B = \frac{4 \ln 2}{\pi} h_k,$$

откуда непосредственно получается формула (281).

Иногда может представиться более целесообразным записывать последнюю зависимость (для любых  $K$  и  $B$ ) в форме

$$\frac{B_1 - B}{2} = \frac{2 \ln 2}{\pi} h_k = 0,4413 h_k, \quad (282)$$

которая показывает, что точки  $B$  и  $B'$  (черт. 76—z), в которых свободные поверхности потока отделяются от откосов канала,

находятся при малых  $\frac{h_k}{b}$  на расстоянии  $0,4413 h_k$  от урезов  $C$  и  $C'$ .

(Поступило в редакцию: глава IV—10/V, глава V—26/VIII 1939 г.).

## Hydraulik der Grundwasserströmungen

### Kapitel IV u. V\*

#### B. Riesenkaempf

(Zusammenfassung)

Im IV. Kapitel beschäftige ich mich ausführlich mit einer neuen Methode zur Lösung der ebenen Grundwasserströmungsaufgaben, die von Prof. P. Polubarinowa—Kotschina stammt und sich auf die Anwendung der Theorie der linearen Differentialgleichungen der Fuchsschen Klasse stützt<sup>1</sup>. Ich bemühte mich diese Methode möglichst zu vereinfachen und bequem anwendbar zu machen. Zur Bestimmung der Exponente der singulären Punkte (Wurzeln der determinierenden Gleichungen) habe ich ein anschauliches geometrisches Verfahren gegeben, welches bei einer beliebigen Anzahl von Singularitäten anwendbar ist (§ 30). Als Beispiel betrachte ich die

\* Kap. I, II u. III siehe „Abhandlungen d. Universität Saratow“, Bd. I (XIV), 1938. H. 1, S. 89—114 u. H. 2, S. 181—205.

<sup>1</sup> P. Poloubarinova-Kochina. An application of the theory of linear differential equations to certain movements of ground water (russisch). Bulletin de l'Academie des sciences de URSS, serie mathematique, 1938, № 3.

Aufgabe über das Strömen des Wassers durch einen Erdwall mit senkrechten Wänden (Abb. 48)<sup>1</sup> und bekomme beiläufig für einige spezielle Fälle (Abb. 50) nützliche Formeln [(180), (181) u. (182)].

Im V. Kapitel behandle ich hauptsächlich folgende Fragen:

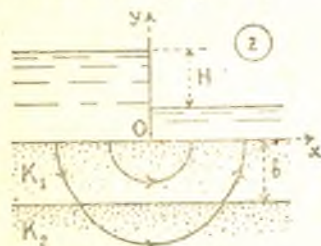
- 1) die Bestimmung der Grundwasserströmung bei bekannter Oberfläche des Stromes (§ 34),
- 2) den Zusammenhang zwischen einigen Grundwasserströmungsaufgaben (§ 35),
- 3) das Strömen des Wassers durch Erdwälle (Talsperren) (Abb. 58 u. 61),
- 4) das Strömen des Grundwassers mit freier Oberfläche auf einer geneigten undurchlässigen Schicht (§ 39) und
- 5) die Sickerung aus Kanälen ohne und mit Einfluss des kapillaren Aufstieges (§§ 40—43).

<sup>1</sup> Vergl. 1) G. Hamel. Über Grundwasserströmung. ZAMM, 1934, Bd. 14, H. 3, S. 129—157. 2) B. Davison. On the steady two-dimensional motion of ground-water with a free surface. Phil. Mag., 1936, vol. 21, № 143, p. 881—903.

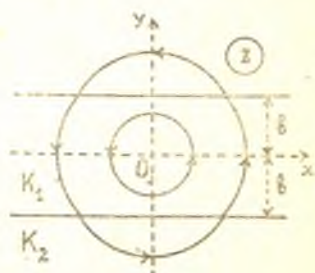
## Об одном случае фильтрации воды в многослойном грунте

Б. К. Ризенкампф

В настоящей статье дается решение плоской задачи о фильтрации воды под тонкой стенкой, отделяющей два водоема, в грунте, состоящем из двух слоев с разными коэффициентами фильтрации  $K_1$  и  $K_2$ , причем второй слой простирается неограниченно вниз (черт. 1).<sup>1</sup>



Черт. 1.



Черт. 2.

Задача будет, очевидно, решена, если удастся найти скорости фильтрации в различных точках грунта.

Пусть  $H$  — разность высот уровней воды в водоемах и  $b$  — толщина верхнего слоя грунта. Движение воды в грунте отнесем к плоскости комплексного переменного  $z = x + iy$  (черт. 1), ось  $x$ -ов которой направим по дну нижнего водоема, а ось  $y$ -ов — вертикально вверх вдоль стенки.

Замечая, что на оси  $x$ -ов скорости фильтрации направлены вертикально, мы можем, применяя принцип симметрии Римана-Шварца, продолжить поток вверх через ось  $x$ -ов, в результате чего получим течение (черт. 2) с вихревой точкой в начале  $O$  и с линиями тока, расположенными симметрично относительно координатных осей.

Называя через  $v_1$  и  $v_2$  скорости фильтрации в верхнем и нижнем слоях грунта, мы можем, как легко проверить, выразить комплексную скорость<sup>2</sup> в области  $|y| \leq b$  (черт. 2) в виде

$$v_{iy} + iv_{ix} = K_1 \frac{H}{\pi} \left[ \frac{\gamma}{z} + f(z) \right], \quad (1)$$

<sup>1</sup> Приводимое ниже решение этой задачи было доложено мною на заседании отдела механики ФМИ при Сарат. Гос. университете 20 сентября 1938 г.

<sup>2</sup> Ризенкампф, Б. К. Гидравлика грунтовых вод (часть 1), Ученые записки Сар. Гос. ун-та, т. 1 (XIV), серия ФМИ, вып. 1, 1938 г., стр. 100.

где  $f(z)$  — некоторая функция от  $z$ , регулярная внутри и на контуре названной области и обращающаяся в бесконечности в нуль.

Эту функцию можно, как известно, представить в области  $|y| \leq b$  интегралом Фурье

$$f(z) = i \int_{-\infty}^{+\infty} a(u) e^{-iuz} du, \quad (2)$$

в котором  $a(u)$  есть неопределенная пока функция от действительного переменного  $u$ .

Покажем, что функция  $a(u)$  — нечетная и принимает лишь действительные значения.

В самом деле, замечая, что в точках, симметричных относительно  $O$  (черт. 2), скорости равны и противоположны, мы найдем, исходя из выражения (1), что

$$f(-z) = -f(z).$$

Отсюда, опираясь на единственность представления (2), получим, что

$$a(-u) = -a(u).$$

Пользуясь этим результатом, мы можем представить функцию  $f(z)$  в виде

$$f(z) = i \int_0^{\infty} a(u) (e^{-iuz} - e^{iuz}) du = 2 \int_0^{\infty} a(u) \sin uz du. \quad (3)$$

Замечая дальше, что в точках действительной оси плоскости  $z$  комплексная скорость, а вместе с нею и функция  $f(z)$ , принимают лишь действительные значения, мы найдем, на основании представления (3), что  $a(u)$  есть действительная функция от  $u$ .

Пользуясь теперь выражением (3) и известным тождеством

$$\frac{1}{z} = i \int_0^{\infty} e^{-iuz} du, \quad (y < 0)$$

мы можем представить комплексную скорость в области  $0 > y \geq -b$  в форме

$$v_{iy} + iv_{ix} = K_1 \frac{H}{\pi} i \int_0^{\infty} \{ [a(u) + 1] e^{-iuz} - a(u) e^{iuz} \} du. \quad (4)$$

При помощи аналогичных рассуждений легко установить, что в области  $y \leq -b$  комплексную скорость можно предста-

вить в форме

$$v_{2y} + iv_{2x} = K_2 \frac{H}{\pi} i \int_0^{\infty} b(u) e^{-iuz} du, \quad (5)$$

где  $b(u)$  есть некоторая новая действительная функция от действительного переменного  $u$ .

Чтобы найти функции  $a(u)$  и  $b(u)$ , воспользуемся граничными условиями, которые должны выполняться на линии раздела  $y = -b$  наших слоев грунта.

Эти условия выражаются, как известно, равенствами

$$v_{1y} = v_{2y} \text{ и } \frac{v_{1x}}{K_1} = \frac{v_{2x}}{K_2}. \quad (6)$$

Определив из выражений (4) и (5) компоненты скорости фильтрации при  $y = -b$  и подставив их в условия (6), получим, положив для простоты  $b = \frac{1}{2}$ , равенства:

$$\begin{aligned} K_1 \int_0^{\infty} \left\{ [a(u) + 1] e^{-\frac{u}{2}} + a(u) e^{\frac{u}{2}} \right\} \sin ux \, du &= \\ &= K_2 \int_0^{\infty} b(u) e^{-\frac{u}{2}} \sin ux \, du \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \int_0^{\infty} \left\{ [a(u) + 1] e^{-\frac{u}{2}} - a(u) e^{\frac{u}{2}} \right\} \cos ux \, du &= \\ &= \int_0^{\infty} b(u) e^{-\frac{u}{2}} \cos ux \, du. \end{aligned}$$

Так как эти равенства должны быть справедливы при любых значениях  $x$ , то для определения функций  $a(u)$  и  $b(u)$  будем иметь два уравнения:

$$K_1 \left\{ [a(u) + 1] e^{-\frac{u}{2}} + a(u) e^{\frac{u}{2}} \right\} = K_2 b(u) e^{-\frac{u}{2}}$$

$$[a(u) + 1] e^{-\frac{u}{2}} - a(u) e^{\frac{u}{2}} = b(u) e^{-\frac{u}{2}},$$

где  $u \geq 0$ .

<sup>1</sup> Там же, стр. 97.

Решая их относительно  $a(u)$  и  $b(u)$  и вводя для сокращения обозначение

$$\lambda = \frac{K_2 - K_1}{K_2 + K_1},$$

найдем:

$$a(u) = \frac{\lambda e^{-u}}{1 - \lambda e^{-u}} \text{ и } b(u) = \frac{1 - \lambda e^{-u}}{1 - \lambda e^{-u}}. \quad (u \geq 0)$$

Подставляя эти значения в выражения (4) и (5), получим формулы:

$$v_{1y} + iv_{1x} = K_1 \frac{H}{\pi} i \left[ \int_0^{\infty} \frac{e^{-iuz}}{1 - \lambda e^{-u}} du - \lambda \int_0^{\infty} \frac{e^{iu(z+i)}}{1 - \lambda e^{-u}} du \right]$$

(  $0 > y \geq -\frac{1}{2}$  )

и

$$v_{2y} + iv_{2x} = K_2 \frac{H}{\pi} i (1 - \lambda) \int_0^{\infty} \frac{e^{-iuz}}{1 - \lambda e^{-u}} du. \quad (y \leq -\frac{1}{2})$$

Эти формулы выгодно несколько преобразовать. Для этого заметим, что при  $u \geq 0$  и  $|\lambda| < 1$ , что, очевидно, у нас выполнено, имеет место разложение

$$\frac{1}{1 - \lambda e^{-u}} = \sum_{n=0}^{\infty} \lambda^n e^{-nu}.$$

Пользуясь им и опираясь на тождества

$$i \int_0^{\infty} e^{-iuz} du = \frac{1}{z}, \quad (y < 0)$$

$$i \int_0^{\infty} e^{iuz} du = -\frac{1}{z}, \quad (y > 0)$$

получим:

1) при  $y < 0$ ,

$$i \int_0^{\infty} \frac{e^{-iuz}}{1 - \lambda e^{-u}} du = \sum_{n=0}^{\infty} \lambda^n i \int_0^{\infty} e^{-iu(z - in)} du = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\lambda^n}{z - in},$$

2) при  $y > -1$ ,

$$i\lambda \int_0^{\infty} \frac{e^{iu(z+i)}}{1-\lambda e^{-u}} du = \sum_{n=0}^{\infty} \lambda^{n+1} i \int_0^{\infty} e^{iu(z+i(n+1))} du =$$

$$= -\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\lambda^{n+1}}{z+i(n+1)} = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\lambda^n}{z+in}.$$

Эти результаты дают возможность представить искомые комплексные скорости в следующем удобном виде

$$v_{1y} + iv_{1x} = K_1 \frac{H}{\pi} \left[ \frac{1}{z} + \sum_{n=1}^{\infty} \lambda^n \left( \frac{1}{z-in} + \frac{1}{z+in} \right) \right], \quad (0 > y \geq -\frac{1}{2}) \quad (7)$$

$$v_{2y} + iv_{2x} = K_2 \frac{H}{\pi} (1-\lambda) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\lambda^n}{z-in}. \quad (y \leq -\frac{1}{2}) \quad (8)$$

Выше мы предположили, что  $b = \frac{1}{2}$ . Для перехода к общему случаю достаточно, очевидно, заменить  $z$  на  $\frac{z}{2b}$  и  $H$  на  $\frac{H}{2b}$ .

В нижеследующей табличке мы приводим получающиеся из последних формул значения комплексных скоростей фильтрации для некоторых предельных значений коэффициента фильтрации  $K_2$ .

	$K_2 = 0$	$K_2 = K_1$	$K_2 = \infty$
$v_{1y} + iv_{1x}$	$\frac{K_1 H}{sh \pi z}$	$\frac{K_1 H}{\pi z}$	$\frac{K_1 H}{ih \pi z}$
$v_{2y} + iv_{2x}$	0		0

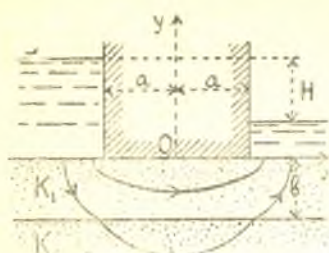
Примененный выше метод решения задачи может быть, очевидно, распространен на любое число слоев грунта произвольной толщины и с разными коэффициентами фильтрации.

В заключение укажем еще, что, пользуясь формулой (7), легко построить линейное интегральное уравнение, к которому приводится решение задачи о фильтрации воды под горизонтальной подошвою плотины (черт. 3) в двуслойном грунте с разными коэффициентами фильтрации  $K_1$  и  $K_2$ .

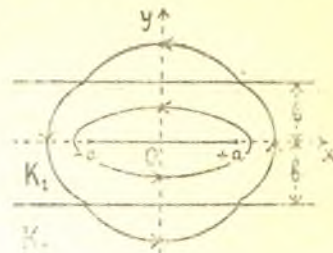
Для этого заметим, что, продолжив наш поток грунтовых вод вверх через ось  $x$ -ов, мы получим в рассматриваемом случае течение, показанное на черт. 4. Это течение можно осуществить, расположив вдоль разреза  $(-a, +a)$  действитель-

ной оси плоскости  $z$  слой вихрей с некоторой переменной плотностью циркуляции  $K_1 \nu(\xi) = 2v_{1x}$ .

В случае точечного вихря с циркуляцией  $K_1 \Gamma$ , расположенного в точке  $\xi$  оси  $x$ -ов, легко получить из формул (7) и (8)



Черт. 3.



Черт. 4.

следующие комплексные скорости фильтрации в областях  $|y| \leq b$  и  $|y| \gg b$  (считая  $b = \frac{1}{2}$ ):

$$v_{1y} + iv_{1x} = K_1 \frac{\Gamma}{2\pi} \left[ \frac{1}{z-\xi} + \sum_{n=1}^{\infty} \lambda^n \left( \frac{1}{z-\xi-in} + \frac{1}{z-\xi+in} \right) \right],$$

$$v_{2y} + iv_{2x} = K_2 \frac{\Gamma}{2\pi} (1-\lambda) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\lambda^n}{z-\xi-in}.$$

Заменяя в этих формулах  $\Gamma$  на  $\nu(\xi) d\xi$  и интегрируя в пределах от  $-a$  до  $+a$ , мы найдем, что для случая, показанного на черт. 3, комплексные скорости фильтрации определяются формулами

$$v_{1y} + iv_{1x} = K_1 \frac{1}{2\pi} \int_{-a}^{+a} \left[ \frac{1}{z-\xi} + \sum_{n=1}^{\infty} \lambda^n \left( \frac{1}{z-\xi-in} + \frac{1}{z-\xi+in} \right) \right] \nu(\xi) d\xi,$$

$$(0 > y \geq -\frac{1}{2})$$

$$v_{2y} + iv_{2x} = K_2 \frac{1-\lambda}{2\pi} \int_{-a}^{+a} \left( \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\lambda^n}{z-\xi-in} \right) \nu(\xi) d\xi, \quad (y \leq -\frac{1}{2})$$

причем граничные условия (6) на линии раздела  $y = -\frac{1}{2}$  не нарушатся.

Укажем теперь путь, ведущий к определению неизвестной функции  $\nu(\xi)$ . Для этого будем приближать точку  $z$  к точке  $x$ ,

лежащей на разрезе  $(-a, +a)$ . Тогда  $v_{iy} + iv_{ix}$  обратится в  $iv_{ix}$ , а интеграл

$$\int_{-a}^{+a} \frac{v(\xi) d\xi}{z-\xi}$$

перейдет, как известно, в

$$v.p. \int_{-a}^{+a} \frac{v(\xi) d\xi}{x-\xi} + \pi i v(x),$$

где знак *v.p.* указывает, что берется главное значение Коши интеграла. Замечая, что  $K_1 v(\xi) = 2v_{ix}$ , мы получим в результате однородное интегральное уравнение Фредгольма 1-го рода

$$v.p. \int_{-a}^{+a} \frac{v(\xi) d\xi}{x-\xi} + \int_{-a}^{+a} \left[ \sum_{n=1}^{\infty} \lambda^n \left( \frac{1}{x-\xi-in} + \frac{1}{x-\xi+in} \right) \right] v(\xi) d\xi = 0,$$

которое, очевидно, и определяет искомую функцию  $v(\xi)$ <sup>1</sup>.

<sup>1</sup> Недавно ст. препод. кафедры механики Саратов. Гос. У-та Н. К. Калинин показал мне, что, пользуясь формулой обращения интеграла

$$v.p. \int_{-a}^{+a} \frac{v(\xi) d\xi}{x-\xi} = f(x),$$

можно преобразовать данное уравнение в неоднородное интегральное уравнение Фредгольма 2-го рода.

## СОДЕРЖАНИЕ

<i>Ризенкампф, Б. К.</i> Гидравлика грунтовых вод . . . . .	3
<i>Ризенкампф, Б. К.</i> Об одном случае фильтрации воды в многослойном грунте . . . . .	94

УЧЕНЫЕ ЗАПИСКИ САРАТОВСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО  
УНИВЕРСИТЕТА им. Н. Г. ЧЕРНЫШЕВСКОГО

Саратовское областное государственное издательство, 1940 г.

Ответ. редактор *Г. К. Русаков*. Ответ. секретарь Ред. Совета *А. П. Малюков*

Уполномоченный Обллита № А/351

Техн. редактор *П. П. Минеев*.

Корректор *Т. Козьмина*

Сдано в набор 11/V 1940 г. Подписано к печати 1/VIII 1940 г. Инд. Э.К. — 1 г.  
Изд. № 38. Тираж 500. Учетн.-изд. л. 6,94 Печ. л. 6 1/4. Форм. бум. 60×92 1/16  
Бум. л. 3 1/8. Знаков в бум. л. 94400.

Саратов, Типография Облместпрома, Заказ № 2427

15