МИНИСТЕРСТВО ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ СССР
ХАРЬКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
им. А. М. ГОРЬКОГО

УЧЕНЫЕ ЗАПИСКИ

ТОМ
XL

ЗАПИСКИ
МАТЕМАТИЧЕСКОГО ОТДЕЛЕНИЯ ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКОГО ФАКУЛЬТЕТА И ХАРЬКОВСКОГО МАТЕМАТИЧЕСКОГО ОБЩЕСТВА

СЕРИЯ 4
ТОМ XXIII

ИЗДАТЕЛЬСТВО ХАРЬКОВСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА
им. А. М. ГОРЬКОГО
ХАРЬКОВ 1952

МИНИСТЕРСТВО ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ СССР
ХАРЬКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
им. А. М. ГОРЬКОГО

УЧЕНЫЕ ЗАПИСКИ

ТОМ XL

ИЗДАТЕЛЬСТВО ХАРЬКОВСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА
им. А. М. ГОРЬКОГО
ХАРЬКОВ 1952

МИНИСТЕРСТВО ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ СССР
ХАРЬКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
им. А. М. ГОРЬКОГО

ЗАПИСКИ

МАТЕМАТИЧЕСКОГО ОТДЕЛЕНИЯ ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКОГО ФАКУЛЬТЕТА И ХАРЬКОВСКОГО МАТЕМАТИЧЕСКОГО ОБЩЕСТВА

СЕРИЯ 4

ТОМ XXIII

ИЗДАТЕЛЬСТВО ХАРЬКОВСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА
им. А. М. ГОРЬКОГО
ХАРЬКОВ 1952

Печатать разрешается
Ректор Харьковского государственного университета им. А. М. Горького действительный член АН УССР профессор *И. Н. Буланкин*

ЗАПИСКИ МАТЕМАТИЧЕСКОГО ОТДЕЛЕНИЯ ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКОГО ФАКУЛЬТЕТА ХГУ И ХАРЬКОВСКОГО МАТЕМАТИЧЕСКОГО ОБЩЕСТВА

Том XXIII 1952

ОБ ИНТЕРПОЛИРОВАНИИ ЦЕЛЫХ ТРАНСЦЕНДЕНТНЫХ ФУНКЦИЙ КОНЕЧНОЙ СТЕПЕНИ

Н. И. Ахиезер и Б. Я. Левин

(Харьков)

1. Введение. Настоящая статья посвящена некоторому обобщению результатов двух наших заметок*, относящихся к интерполированию целых трансцендентных функций конечной степени и его применению к изучению вопроса о том, как поведение целой функции конечной степени на вещественной оси зависит от роста функции вдоль некоторой бесконечной последовательности точек (узлов).

Можно назвать классическим тот случай, когда последовательностью узлов является последовательность всех целочисленных точек вещественной оси.

Для этого случая хорошо известна следующая интерполяционная формула (аналог формулы Лагранжа):

$$f(z) = \frac{\sin \pi z}{\pi} \left\{ \frac{P_q(z)}{z} + \sum_{k=-\infty}^{\infty}{}' \frac{(-1)^k f(k)}{z-k} \left(\frac{z}{k}\right)^q \right\},$$

где q — целое неотрицательное число, а $P_q(z)$ — сумма первых $q+1$ членов ряда Маклорена

$$f(z)\frac{\pi z}{\sin \pi z} = f(0) + f'(0) z + \left\{ \frac{f''(0)}{2!} + \frac{\pi^2 f(0)}{3!} \right\} z^2 + \dots,$$

причем штрих означает пропуск члена, отвечающего значению $k = 0$.

Написанная формула справедлива для всякой целой функции $f(z)$, удовлетворяющей условиям:

$$\frac{f(z) e^{-\pi |z|}}{z^q} = O(1) \qquad (z \to \infty),$$

$$\lim_{\pm y \to \infty} \frac{f(iy) e^{-\pi |y|}}{y^q} = 0,$$

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty}{}' \left| \frac{f(k)}{k^{q+1}} \right| < \infty.$$

* Б. Я. Левин. ДАН СССР, 1949, том LXV, № 3.
Н. И. Ахиезер. ДАН СССР, 1949, Том LXV, № 5.
В дальнейшем, цитируя эти статьи, мы будем называть их соответственно I, II.

Равным образом хорошо известна следующая теорема М. Картрайт*: если $f(z)$ есть целая функция степени $\sigma<\pi$, то есть

$$\sigma=\overline{\lim_{|z|\to\infty}}\frac{\ln|f(z)|}{|z|}<\pi,$$

то из неравенств

$$|f(k)|\leqslant M \qquad (\pm k=0,\ 1,\ 2,\ \ldots)$$

следует, что

$$|f(x)|\leqslant CM \qquad (-\infty<x<\infty),$$

где C зависит** лишь от σ.

Ряд исследований, появившихся после работы М. Картрайт, посвящен обобщению приведенных результатов на некоторые случаи „неправильного" расположения узлов. Так, например, в работах Левинсона и Боаса фигурирует последовательность вещественных нецелочисленных узлов, достаточно близких к целочисленным, а в статье I впервые отброшено также и требование вещественности узлов, а именно узлы $\lambda_k(\pm k=0,\ 1,\ 2,\ \ldots)$, рассматриваемые в этой статье, должны удовлетворять лишь двум неравенствам

$$|k-\lambda_k|\leqslant L \qquad (\pm k=0,\ 1,\ 2,\ \ldots), \tag{1}$$

$$|\lambda_n-\lambda_m|>2\delta \qquad (\text{при } m\neq n), \tag{2}$$

где L и δ какие-нибудь положительные числа***. Кроме того, в статьях I и II условие М. Картрайт

$$\sigma<\pi$$

заменено некоторыми менее ограничительными условиями. В настоящей статье мы обобщим наши результаты и на тот случай когда величина δ в неравенстве (2) равна нулю.

Условимся во всем дальнейшем говорить, что числовая (вообще говоря, комплексная) последовательность $\left\{\lambda_k\right\}_{-\infty}^{\infty}$ принадлежит классу $(L,\ \delta)$, и писать

$$\left\{\lambda_k\right\}_{-\infty}^{\infty}\in(L,\ \delta),$$

где L и δ неотрицательные числа, если имеют место неравенства (1), (2).

Таким образом, в настоящей работе вместо классов $(L,\ \delta)$ $(\delta>0)$ будет фигурировать более общий класс $(L,\ 0)$.

В классическом случае узлами были нули функции $\sin\pi z$, которая явно входит в интерполяционную формулу. Теперь вместо функции $\sin\pi z$ появится некоторая целая трансцендентная функция с произвольными нулями $\lambda_k(\pm k=0,\ 1,\ 2,\ \ldots)$. Для наших построений понадобятся оценки этой функции и некоторых от нее производных функций. Этим оценкам, которые оказываются полезными и в других вопросах и поэтому представляют самостоятельный интерес, мы посвятим первые параграфы настоящей статьи.

2. Разбиение узлов на группы. Пусть дана некоторая последовательность $\left\{\lambda_k\right\}_{-\infty}^{\infty}$, принадлежащая классу $(L,\ 0)$ и не принадлежащая классу $(L,\ \delta)$ ни при каком $\delta>0$. Обозначим через r наименьшее целое число, превосходящее $2L$. Далее возьмем какое-нибудь положительное число ρ, удовлетворяющее неравенству

$$\rho<1-\frac{2L}{r}. \tag{3}$$

Разобьем теперь все узлы $\lambda_k(\pm k=0,\ 1,\ 2,\ \ldots)$ на группы, условившись к некоторой группе узлов Λ вместе с узлом λ_i относить всякий узел λ_j, для которого

$$|\operatorname{Re}(\lambda_j-\lambda_i)|\leqslant\rho. \tag{4}$$

Таким образом, если для некоторого узла λ_i нет таких узлов $\lambda_j(j\neq i)$, которые удовлетворяют неравенству (4), то указанный узел λ_i образует группу, состоящую из одного лишь элемента. Если два узла λ_p и λ_q принадлежат различным группам, то в силу определения

$$|\operatorname{Re}(\lambda_q-\lambda_p)|>\rho,$$

а значит и подавно

$$|\lambda_q-\lambda_p|>\rho.$$

Максимальным числом элементов одной группы является r. Действительно, если в некоторую группу входит n узлов, то среди этих узлов найдутся по крайней мере два, скажем λ_p, λ_q, номера которых удовлетворяют неравенству

$$q-p\geqslant n-1.$$

Но тогда

$$\begin{aligned}(n-1)\rho\geqslant|\operatorname{Re}(\lambda_q-\lambda_p)|&=|(\operatorname{Re}\lambda_q-q)-(\operatorname{Re}\lambda_p-p)+(q-p)|\\&\geqslant q-p-|\lambda_q-q|-|\lambda_p-p|\geqslant n-1-2L\end{aligned}$$

и в силу (3)

$$(n-1)\left(1-\frac{2L}{r}\right)>n-1-2L,$$

то есть

$$n-1<r.$$

Обозначим образованные нами группы через $\Lambda_i(\pm i=0,\ 1,\ 2,\ \ldots)$, перенумеровавши их в порядке возрастания минимального номера узла λ_k, входящего в группу. Далее обозначим через Π_i наименьший выпуклый полигон, содержащий группу Λ_i. Заметим, что поли-

*Quart. J. of Math. (Oxf. ser.) **7**, **46**, 1936.

** Точное значение коэффициента $C=C(\sigma)$ найдено лишь для некоторых частных значений аргумента σ. С другой стороны, для $C(\sigma)$ известны некоторые общие оценки, а именно С. Н. Бернштейн (Изв. АН СССР, сер. мат., 1948, **12**) показал, что

$$L_{N-1}<C(\sigma)\leqslant L_N,$$

где

$$N=\left[\frac{\pi}{\pi-\sigma}\right]$$

и

$$L_n=\frac{1}{n}\left\{\frac{1}{\sin\frac{\pi}{2n}}+\frac{1}{\sin\frac{3\pi}{2\pi}}+\ \ldots\ +\frac{1}{\sin\frac{(2n-1)\pi}{2n}}\right\}.$$

А так как при $n\to\infty$

$$L_n\sim\frac{2}{\pi}\ln n,$$

то при $\sigma\to\pi$ имеет место асимптотическое равенство

$$C(\sigma)\sim\frac{2}{\pi}\ln\frac{\pi}{\pi-\sigma}.$$

*** С работой Дюффина и Шэффера [Americ. J. Math., 67, 141—154 (1945)], о которой мы узнали из одной рецензии Боаса в Math. Rev. и которая имеет непосредственное отношение к рассматриваемым нами вопросам, мы ознакомиться не имели возможности.

гоны Π_i разделяются друг от друга параллельными мнимой оси полосами ширины $\geqslant \rho$, не содержащими наших узлов. Это позволяет нам ввести выпуклые полигоны $\Pi_i(\rho)$, которые также разделяются свободными от узлов и параллельными мнимой оси полосами ширины $\geqslant \frac{\rho}{2}$, таким образом, чтобы полигон $\Pi_i(\rho)$ содержал полигон Π внутри и чтобы расстояние от границы полигона $\Pi_i(\rho)$ до любой точки полигона Π_i было не меньше, чем $\frac{\rho}{4}$. Например, в качестве полигонов $\Pi_i(\rho)$ можно взять прямоугольники, две стороны которых представляют отрезки прямых

$$y = \pm(2L+1).$$

Если последовательность $\left\{\lambda_k\right\}_{-\infty}^{\infty}$ принадлежит классу (L, δ) при каком-нибудь $\delta > 0$, разбиение на группы излишне. В этом случае каждый узел λ_i можно отождествить с полигоном Π_i, а вместо полигона $\Pi_i(\rho)$ можно взять круг радиуса $\frac{\delta}{4}$ с центром λ_i. Мы получаем таким образом естественное отделение каждого узла вместе с некоторой его окрестностью от остальных узлов. Наше разбиение узлов на группы и построение полигонов $\Pi_i(\rho)$ преследовало подобное отделение уже не каждого единичного узла*, а каждой группы узлов Λ_i, окрестностью которой и является полигон $\Pi_i(\rho)$.

В дальнейшем нам придется подвергать последовательность узлов λ_i некоторым вещественным сдвигам. Узлы $\lambda_i + \tau\,(\pm i = 0, 1, 2, \ldots)$, очевидно, будут принадлежать классу $(L+1, \delta)$, если последовательность $\left\{\lambda_k\right\}_{-\infty}^{\infty}$ принадлежала классу (L, δ). При этом придется лишь полагать

$$\lambda_i + \tau = \lambda'_{i\pm m},$$

то-есть как-то изменять нумерацию. Указанная трансляция не изменит ни групп, ни полигонов, и числа r, ρ, при определении которых мы учитывали величину L, изменению не подлежат.

В силу сказанного выше, для любых двух узлов λ_p, λ_q, принадлежащих одной группе, имеет место неравенство

$$|\operatorname{Re}(\lambda_q - \lambda_p)| < r\rho.$$

Поэтому расстояние между двумя соседними полосами ширины ρ, параллельными мнимой оси и не содержащими узлов, меньше чем $r\rho$.

Следовательно, в каждом интервале длины $r\rho$ можно найти такое τ, что после сдвига узлов λ_i на τ полоса

$$-\frac{\rho}{2} < \operatorname{Re} z \leqslant \frac{\rho}{2} \tag{5}$$

будет свободна от узлов.

Примем для некоторого упрощения дальнейших построений, что это свойство [пустоты полосы (5)] выполняется уже для исходной последовательности $\left\{\lambda_k\right\}_{-\infty}^{\infty}$. Это предположение о „нормировке" после-

* что уже невозможно, если $\left\{\lambda_k\right\}_{-\infty}^{\infty}$ не принадлежит классу (L, δ) при $\delta > 0$.

довательности узлов, очевидно, не нарушает общности наших рассмотрений.

3. Оценки для основных функций интерполирования. Пусть дана последовательность $\left\{\lambda_k\right\}_{-\infty}^{\infty} \in (L, 0)$, нормированная указанным в конце предыдущего n° образом и разбитая на группы Λ_i. Построим функцию

$$\psi(z) = \lim_{N\to\infty} \prod_{k=-N}^{N} \left(1 - \frac{z}{\lambda_k}\right).$$

Кроме того, построим для каждой группы Λ функцию $\psi_\Lambda(z)$, получающуюся из $\psi(z)$ удалением всех тех множителей, которые отвечают узлам группы Λ. Наконец, для каждой группы Λ построим некоторую систему функций $R_k(z;\ \Lambda)$ следующим образом: если группа Λ состоит из узлов

$$\mu_0,\ \mu_1,\ \mu_2,\ \ldots,\ \mu_s \qquad (s+1 \leqslant r),$$

то

$$R_0(z;\ \Lambda) = \sum_{k=0}^{s} \frac{\psi(z)}{\psi'(\mu_k)(z-\mu_k)} \left(\frac{z-\alpha}{\mu_k-\alpha}\right)^q$$

$$R_1(z;\ \Lambda) = \sum_{k=1}^{s} \frac{\psi(z)}{\psi'(\mu_k)(z-\mu_k)} \left(\frac{z-\alpha}{\mu_k-\alpha}\right)^q (\mu_k - \mu_0)$$

$$R_2(z;\ \Lambda) = \sum_{k=2}^{s} \frac{\psi(z)}{\psi'(\mu_k)(z-\mu_k)} \left(\frac{z-\alpha}{\mu_k-\alpha}\right)^q (\mu_k - \mu_0)(\mu_k - \mu_1)$$

. . . .

$$R_s(z;\ \Lambda) = \frac{\psi(z)}{\psi'(\mu_s)(z-\mu_s)} \left(\frac{z-\alpha}{\mu_s-\alpha}\right)^q (\mu_s - \mu_0)(\mu_s - \mu_1)\ldots(\mu_s - \mu_{s-1}).$$

Здесь q — целое неотрицательное число, которым мы позже распорядимся, а α должно быть отличным от узлов.

Функции $\psi(z)$ и $R_k(z;\ \Lambda)$ назовем основными функциями интерполирования.

В первую очередь покажем, что

$$R_k(z;\ \Lambda) = (-1)^{s+1}\mu_0\mu_1\ldots\mu_s(z-\alpha)^q\,\psi(z)\,\frac{\vartheta}{(s-k)!}\,\frac{d^{s-k}}{d\zeta^{s-k}}\,\frac{1}{(z-\zeta)(\zeta-\alpha)^q\psi_\Lambda(\zeta)} \tag{6}$$

где ζ означает некоторую зависящую от функции $R_k(z;\ \Lambda)$ точку полигона Π, а ϑ — комплексное число, по модулю $\leqslant 1$, которое также зависит от функции $R_k(z,\ \Lambda)$. Таким образом, расстояние от точки ζ до любого из узлов λ_k, не принадлежащих группе Λ, превосходит число ρ. Доказательство формулы (6) вытекает из общей формулы*

$$\frac{f(z_0)}{(z_0-z_1)(z_0-z_2)\ldots(z_0-z_n)} + \frac{f(z_1)}{(z_1-z_0)(z_1-z_2)\ldots(z_1-z_n)} + \ldots =$$

$$= \int_0^1 dt_1 \int_0^{t_1} dt_2 \ldots \int_0^{t_{n-1}} f^{(n)}((1-t_1)z_0 + (t_1-t_2)z_1 + \ldots$$

$$+ (t_{n-1}-t_n)z_{n-1} + t_n z_n)\,dt_n,$$

* См. Нерлунд, Differenzenrechnung, стр. 16.

где $f(z)$ аналитическая функция внутри и на границе наименьшего выпуклого полигона, содержащего точки $z_0, z_1, z_2, \ldots, z_n$. Действительно, если применить к правой части теорему о среднем значении Дарбу, то мы получим, что правая часть равна

$$\vartheta f^{(n)}(\tau_0 z_0 + \tau_1 z_1 + \ldots + \tau_n z_n) \int\limits_0^1 dt_1 \int\limits_0^{t_1} dt_2 \ldots \int\limits_0^{t_{n-1}} dt_n,$$

где ϑ — комплексное число по модулю $\leqslant 1$, а $\tau_0, \tau_1, \ldots, \tau_n$ — неотрицательные числа, в сумме дающие 1, или

$$\frac{\vartheta}{n!} f^{(n)}(\tau_0 z_0 + \tau_1 z_1 + \ \ldots \ + \tau_n z_n).$$

Теорема 1. Функция $\psi(z)$ удовлетворяет при $|y| \geqslant 2L+1$ неравенствам

$$|\psi(z)| \geqslant A e^{\pi|y|} |z| \left|\frac{y}{z^2}\right|^{2L+1}, \tag{7}$$

$$|\psi(z)| \leqslant B e^{\pi|y|} |z| \left|\frac{z^2}{y}\right|^{2L+1}, \tag{8}$$

где положительные величины A, B зависят только от L, а $y = \operatorname{Im} z$.

Доказательство. Модуль отношения

$$\prod_{k=-p}^{p} \left(1 - \frac{z}{\lambda_k}\right) : \ z \prod_{k=-p}^{p}{}' \left(1 - \frac{z}{k}\right),$$

где $p = [L+1]$, имеет при $|y| \geqslant 2L+1$ некоторую конечную верхнюю грань и некоторую положительную нижнюю грань, зависящие лишь от L, так как все $|\lambda_k| (\pm k = 0, 1, 2, \ldots, p)$ не меньше $\frac{\rho}{2}$, а ρ зависит только от L. Поэтому достаточно доказать теорему для функции

$$z\omega(z) = z \prod_{k=-p}^{p}{}' \left(1 - \frac{z}{k}\right) \prod_{n=p+1}^{\infty} \left(1 - \frac{z}{\lambda_n}\right)\left(1 - \frac{z}{\lambda_{-n}}\right)$$

вместо $\psi(z)$.

Введем функцию $n(t)$, которая при $t > 0$ представляет число корней функции $\omega(z)$, лежащих в полосе

$$0 < \operatorname{Re} z < t,$$

а при $t < 0$ представляет со знаком минус число корней функции $\omega(z)$, лежащих в полосе

$$t < \operatorname{Re} z < 0,$$

наконец, положим $n(0) = 0$. Таким образом $n(t) = 0$ при $-1 < t < 1$, а при любом t

$$n(t) = t - \frac{1}{2} + \varphi(t),$$

где

$$|\varphi(t)| < L + \frac{1}{2}.$$

Будем доказывать теорему при $y > 0$. Так как при $y \geqslant 2L+1$

$$\left|1 - \frac{z}{\lambda_k}\right| \geqslant \left|1 - \frac{z}{\operatorname{Re}\lambda_k + iL}\right|$$

и

$$\left|1 - \frac{z}{\lambda_k}\right| \leqslant \left|1 - \frac{z + iL}{\operatorname{Re}\lambda_k}\right|,$$

то при $y \geqslant 2L+1$ с одной стороны

$$\ln|\omega(z)| \geqslant \lim_{N\to\infty} \operatorname{Re} \int\limits_{-N}^{N} \ln \frac{t + iL - z}{t + iL}\, dn(t)$$

$$\geqslant \lim_{N\to\infty} \operatorname{Re} \int\limits_{-N}^{N} \ln \frac{t + iL - z}{t - i}\, dn(t) + \ln A_0(L),$$

а с другой стороны

$$\ln|\omega(z)| \leqslant \lim_{N\to\infty} \operatorname{Re} \int\limits_{-N}^{N} \ln \frac{t - iL - z}{t}\, dn(t)$$

$$\leqslant \lim_{N\to\infty} \operatorname{Re} \int\limits_{-N}^{N} \ln \frac{t - iL - z}{t - i}\, dn(t) + \ln B_0(L).$$

Нам остается оценить величину

$$K(\zeta) = \lim_{N\to\infty} \operatorname{Re} \int\limits_{-N}^{N} \ln \frac{t - \zeta}{t - i}\, dn(t),$$

где ζ один раз равно $z - iL$, а другой раз равно $z + iL$ и $y = \operatorname{Im} z \geqslant 2L+1$. Имеем

$$K(\zeta) = \pi \operatorname{Im}(\zeta - i) - \operatorname{Re} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \varphi(t) \left(\frac{1}{t - \zeta} - \frac{1}{t - i}\right) dt,$$

откуда

$$|K(\zeta) - \pi \operatorname{Im}(\zeta - i)| < \left(L + \frac{1}{2}\right) \int\limits_{-\infty}^{\infty} \left|\operatorname{Re}\left(\frac{1}{t - \zeta} - \frac{1}{t - i}\right)\right| dt.$$

Но интеграл

$$\frac{1}{2} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \left|\operatorname{Re}\left(\frac{1}{t - z_1} - \frac{1}{t - z_2}\right)\right| dt = \rho(z_1, z_2),$$

где z_1, z_2 — две точки верхней полуплоскости, равен расстоянию между этими точками в метрике Лобачевского*, то есть равен

$$\ln \frac{|z_2 - \bar{z}_1| + |z_2 - z_1|}{|z_2 - \bar{z}_1| - |z_2 - z_1|}.$$

---

* Действительно, подвергая z преобразованиям

$$z = \zeta + \zeta_0, \quad z = \alpha\zeta \quad (\alpha > 0), \quad z = -\frac{1}{\zeta},$$

легко находим, что

$$\rho(z_1, z_2) = \rho(\zeta_1, \zeta_2).$$

Следовательно, $\rho(z_1, z_2)$ инвариантно относительно всех движений плоскости Лобачевского. Остается рассмотреть частный случай, когда

$$z_1 = \alpha i, \quad z_2 = \beta i \quad (\beta > \alpha > 0).$$

А в этом случае простое вычисление дает

$$\rho(i\alpha, i\beta) = \frac{1}{2} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{|t|(\beta^2 - \alpha^2)}{(t^2 + \alpha^2)(t^2 + \beta^2)}\, dt = \int\limits_0^{\infty} \frac{(\beta^2 - \alpha^2)\, t\, dt}{(t^2 + \alpha^2)(t^2 + \beta^2)} = \ln \frac{\beta}{\alpha} = \int\limits_{\alpha}^{\beta} \frac{dy}{y}.$$

Таким образом

$$|K(\zeta) - \pi \operatorname{Im}(\zeta - i)| < (2L+1)\ln\frac{|\zeta+i|+|\zeta-i|}{|\zeta+i|-|\zeta-i|}$$

$$< (2L+1)\ln\frac{|\zeta|^2+1}{\operatorname{Im}\zeta}.$$

Учитывая эту оценку, мы и получаем, что

$$\ln|\omega(z)| \geqslant \ln A_1(L) + \pi|y| - (2L+1)\ln\left|\frac{z^2}{y}\right|$$

и значит

$$|\psi(z)| \geqslant A(L)\, e^{\pi|y|}|z|\left|\frac{y}{z^2}\right|^{2L+1},$$

а с другой стороны

$$\ln|\omega(z)| \leqslant \ln B_1(L) + \pi|y| + (2L+1)\ln\left|\frac{z^2}{y}\right|,$$

откуда

$$|\psi(z)| \leqslant B(L)\, e^{\pi|y|}|z|\left|\frac{z^2}{y}\right|^{2L+1}.$$

Тем самым теорема доказана.

Следствие. Для всех комплексных z справедливо неравенство

$$|\psi(z)| \leqslant C\{|z|+1\}^{4L+3}e^{\pi|y|}, \tag{9}$$

а для всех вещественных y имеет место также неравенство

$$|\psi(iy)| \leqslant C\{|y|+1\}^{2(L+1)}e^{\pi|y|}, \tag{10}$$

где C зависит только от L.

Доказательство. При $y = 2L+1$ в силу теоремы 1

$$|\psi(z)| \leqslant B(L)\, e^{\pi(2L+1)}|z|^{4L+3}.$$

Отсюда неравенство (9) с $C = C(L)$ вытекает на основании теоремы Фрагмен — Линделёфа. В частности, при

$$-(2L+1) \leqslant y \leqslant (2L+1)$$

имеет место неравенство

$$|\psi(iy)| \leqslant C(L)\, e^{\pi(2L+1)}(2L+2)^{4L+3}.$$

Отсюда и вытекающего из теоремы 1 неравенства

$$|\psi(iy)| \leqslant B(L)\, e^{\pi|y|}|y|^{2L+2} \qquad (|y| \geqslant 2L+1)$$

непосредственно следует неравенство (10).

Лемма. Имеют место неравенства

$$|\psi_\Lambda(\zeta)| \geqslant D\frac{1}{\{1+|\zeta|\}^{4p-s}}$$

с зависящим лишь от L коэффициентом $D > 0$, где ζ есть любая точка полигона $\Pi(\rho)$, принадлежащего группе Λ из $s+1$ узлов, а Λ пробегает совокупность всех групп, на которые разбита нормированная последовательность $\left\{\lambda_k\right\}_{-\infty}^{\infty} \in (L,\ 0)$, и $p = [L+1]$.

Доказательство. Примем для определенности, что $\xi = \operatorname{Re}\zeta \geqslant 2p+1$ и положим $t = [\xi]$. Затем представим $\psi_\Lambda(\zeta)$ в виде

$$\psi_\Lambda(\zeta) = \Phi_1(\zeta)\,\Phi_2(\zeta)\,\Phi_3(\zeta),$$

где

$$\Phi_1(\zeta) = \prod_{k=t+p+2}^{\infty}\left(1-\frac{\zeta}{\lambda_k}\right)\left(1-\frac{\zeta}{\lambda_{-k}}\right),$$

$$\Phi_2(\zeta) = \prod_{k=-t-p-1}^{t-p-1}\left(1-\frac{\zeta}{\lambda_k}\right),$$

$$\Phi_3(\zeta) = \prod_{k=t-p}^{t+p+1}{}^{*}\left(1-\frac{\zeta}{\lambda_k}\right),$$

причем * у знака произведения означает, что из произведения удалено $s+1$ множителей, отвечающих узлам группы Λ. Полагая $\alpha_k = \operatorname{Re}\lambda_k$, будем при $|k| > t+p+1$ иметь неравенство

$$\left|\frac{\xi-\alpha}{\alpha_k}\right| \geqslant \left|\frac{\xi-(k-p)}{k-p}\right|.$$

Следовательно, при $|k| > t+p+1$

$$\frac{|\zeta-\lambda_k|}{|\lambda_k|} \geqslant \frac{|\xi-\alpha_k|}{|\alpha_k|}|\cos\arg\lambda_k| \geqslant \left|1-\frac{\xi}{k-p}\right|\frac{1}{\sqrt{1+\frac{L^2}{(|k|-p)^2}}}.$$

Поэтому

$$|\Phi_1(\zeta)| \geqslant \prod_{k=t+p+2}^{\infty}\frac{1}{1+\frac{L^2}{(k-p)^2}}\left(1-\frac{\xi}{k-p}\right)\left(1+\frac{\xi}{k+p}\right) =$$

$$= \frac{1}{\prod\limits_{m=t+2}^{\infty}\left(1+\frac{L^2}{m^2}\right)}\prod_{k=t+p+2}^{\infty}\frac{1-\frac{(\xi+p)^2}{k^2}}{1-\frac{p^2}{k^2}} \geqslant D_1(L)\frac{(t+1)!\,(t+2p+1)!}{(2t+2p+2)!}.$$

Далее,

$$|\Phi_2(\zeta)| \geqslant \frac{\prod\limits_{k=-t-p-1}^{t-p-1}(t-k-p)}{\prod\limits_{k=-t-p-1}^{t-p-1}(|k|+p)} \geqslant D_2(L)\frac{(2t+1)!}{(t+2p+1)!\,(t-1)!}.$$

Наконец,

$$|\Phi_3(\zeta)| \geqslant \left(\frac{\rho}{2}\right)^{2p+1-s}\frac{1}{\prod\limits_{k=t-p}^{t+p+1}{}^{*}(k+p)} \geqslant D_3(L)\frac{1}{(t+2p+1)^{2p+1-s}}.$$

Собирая написанные неравенства, получаем

$$|\psi_\Lambda(\zeta)| \geqslant D_4(L)\frac{(t+1)!\,(t+2p+1)!\,(2t+1)!}{(2t+2p+2)!\,(t+2p+1)!\,(t-1)!\,(t+2p+1)^{2p+1-s}}$$

$$\geqslant D_5(L)\frac{1}{(t+p+1)^{4p-s}}$$

$$\geqslant D(L)\frac{1}{(1+|\zeta|)^{4p-s}}.$$

Следствие. Существует такая, зависящая лишь от L, величина E, что

$$|\psi(\zeta)| \geqslant E\frac{1}{(1+|\zeta|)^{4p+1}}$$

для любой точки ζ периферии любого из полигонов $\Pi_i(\rho)$, принадлежащих группам, на которые разбита нормированная последовательность $\left\{\lambda_k\right\}_{-\infty}^{\infty} \in (L,\ 0)$.

Доказательство вытекает из того, что

$$\psi(\zeta) = \psi_\Lambda(\zeta) \prod_{k=0}^{s} \left(1 - \frac{\zeta}{\mu_k}\right),$$

а если ζ принадлежит периферии полигона $\Pi(\rho)$, то

$$\left| \prod_{k=0}^{s} \left(1 - \frac{\zeta}{\mu_k}\right) \right| > \frac{\left(\frac{\rho}{2}\right)^{s+1}}{(1+|\zeta|)^{s+1}}.$$

Мы используем доказанную лемму для оценки сверху модулей функций $R_k(z; \Lambda)$. Так как $\frac{1}{(z-\alpha)^q} R_k(z; \Lambda)$ есть целая трансцендентная функция конечной степени, то достаточно оценить величину $\frac{1}{(z-\alpha)^q} R_k(z; \Lambda)$, например, при $|y| \geqslant 3L + 1$. При этом предположении относительно z величина

$$g(\zeta) = \frac{1}{(z-\zeta)(\zeta-\alpha)^q \psi_\Lambda(\zeta)}$$

является голоморфной функцией от ζ внутри и на границе полигона $\Pi(\rho)$, и в силу леммы

$$\max_{\zeta \in \Pi(\rho)} |g(\zeta)| \leqslant \frac{(1+|\zeta^*|)^{4p-s}}{D_0(L)|\zeta^* - \alpha|^q \{|y| - 2L\}},$$

где ζ^* означает любую точку, лежащую внутри полигона Π. На основании неравенств Коши для производных от голоморфной функции при $\zeta \in \Pi$ имеет место неравенство

$$\left| \frac{d^{s-k} g(\zeta)}{d\zeta^{s-k}} \right| \leqslant N_1(L) \frac{(1+|\zeta^*|)^{4p-s}}{|\zeta^* - \alpha|^q \{|y| - 2L\}},$$

где $N_1(L)$ зависит также лишь от L, так как лишь от L зависит ρ. Принимая во внимание формулу (6), находим, что при $|y| \geqslant 3L + 1$

$$\left| \frac{1}{(z-\alpha)^q} R_k(z; \Lambda) \right| \leqslant N_2(L) \frac{(1+|\zeta^*|)^{4p+1}}{|\zeta^* - \alpha|^q \{|y| - 2L\}} |\psi(z)|, \tag{11}$$

откуда в силу следствия теоремы 1 и теоремы Фрагмен-Линделёфа, получается

Теорема 2. Основные функции интерполирования $R_k(z; \Lambda)$ удовлетворяют во всей плоскости неравенствам

$$|R_k(z; \Lambda)| \leqslant N \frac{(1+|\zeta|)^{4p+1}}{|\zeta - \alpha|^q} |z - \alpha|^q (1 + |z|)^{4L+3} e^{\pi |y|}$$

с зависящим лишь от L коэффициентом N, где ζ означает любую точку полигона Π, принадлежащего группе Λ, а Λ пробегает совокупность всех групп, на которые разбита нормированная последовательность $\{\lambda_k\}_{-\infty}^{\infty} \in (L, 0)$.

4. Построение одной интерполяционной формулы. Займемся решением следующей задачи: дана некоторая нормированная последовательность $\{\lambda_k\}_{-\infty}^{\infty} \in (L, 0)$ и на ней некоторая функция $f(\lambda_k)$ ($\pm k = 0, 1, 2, \ldots$); требуется построить целую трансцендентную функцию конечной степени $H(z)$, удовлетворяющую условиям

$$H(\lambda_k) = f(\lambda_k) \qquad (\pm k = 0, 1, 2, \ldots). \tag{12}$$

При этом предполагается, что рост функции $f(\lambda_k) = \varphi(k)$ при $\pm k \to \infty$ подчинен некоторым ограничениям. Конечно, наша задача является неопределенной, и речь пока идет лишь о нахождении какого-нибудь ее решения *.

Пусть Λ есть одна из групп, на которые разбита совокупность всех узлов. Обозначим через

$$\mu_0, \mu_1, \ldots, \mu_s$$

все узлы, входящие в состав группы Λ, и положим

$$\left.\begin{aligned} F_0(\Lambda) &= f(\mu_0), \\ F_1(\Lambda) &= f(\mu_0, \mu_1) = \frac{f(\mu_1) - f(\mu_0)}{\mu_1 - \mu_0} \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots \\ F_s(\Lambda) &= f(\mu_0, \mu_1, \ldots, \mu_s) = \frac{f(\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_s) - f(\mu_0, \mu_1, \ldots, \mu_{s-1})}{\mu_s - \mu_0} \end{aligned}\right\}. \tag{13}$$

Подобные величины

$$F_k(\Lambda_i) \quad (k = 0, 1, \ldots, s_i; \quad \pm i = 0, 1, 2, \ldots)$$

введем для всех групп и положим

$$\varphi_i = \max_{0 < k \leqslant s_i} |F_k(\Lambda_i)| \qquad (\pm i = 0, 1, 2, \ldots). \tag{14}$$

Ограничение, которое мы наложим на рост функции $\varphi(k) = f(\lambda_k)$ (при $\pm k \to \infty$), состоит в предположении, что величина φ_i при $\pm i \to \infty$ растет не быстрее чем некоторая степень модуля величины ζ_i, представляющей точку внутри полигона Π_i. Поэтому можно выбрать так число σ, чтобы ряд

$$\sum_{i=-\infty}^{\infty} \frac{\varphi_i}{|\zeta_i|^\sigma} \tag{15}$$

сходился.

Теперь выберем показатель q, входящий в выражения основных функций интерполирования $R_k(z; \Lambda)$ так, чтобы имело место неравенство

$$q \geqslant \sigma + 4p + 1.$$

При таком выборе q ряд

$$H(z) = \sum_{i=-\infty}^{\infty} \{F_0(\Lambda_i) R_0(z; \Lambda_i) + \ldots + F_{s_i}(\Lambda_i) R_{s_i}(z; \Lambda_i)\} \tag{16}$$

на основании теоремы 2 сходится равномерно и абсолютно в каждой

---

* Полагая

$$H^*(z) = H(z) + g(z)\psi(z),$$

где $g(z)$ произвольная целая функция конечной степени, мы получим все решения. В дальнейшем мы встретимся с дополнительными условиями, позволяющими из совокупности всех решений выделить одно определенное.

конечной части плоскости, а сумма этого ряда $H(z)$ удовлетворяет неравенству

$$|H(z)| \leqslant rN(L)|z-\alpha|^q (1+|z|)^{4L+3} e^{\pi|y|} \sum_{i=-\infty}^{\infty} \varphi_i \frac{(1+|\zeta_i|)^{4p+1}}{|\zeta_i-\alpha|^q}$$

$$\leqslant \mathrm{const} \cdot |z-\alpha|^q (1+|z|)^{4L+3} e^{\pi|y|},$$

то-есть представляет целую функцию степени $\leqslant \pi$.

Заметим еще, что в силу неравенства (11) величина

$$\frac{H(z)}{z^{q-\varepsilon}\psi(z)} \qquad (0 \leqslant \varepsilon < 1) \tag{17}$$

стремится к нулю, когда $|z| \to \infty$ и выполнено неравенство

$$\left|\arg z \mp \frac{\pi}{2}\right| < \frac{\pi}{2} - \eta,$$

где η сколь угодно малое положительное число, меньшее $\frac{\pi}{2}$.

Что функция $H(z)$ удовлетворяет условиям (12), проверяется непосредственно.

Таким образом функция $H(z)$, определяемая формулой (16), удовлетворяет всем условиям рассматриваемой нами задачи. Заметим, что интерполяционную формулу (16) можно рассматривать как некоторое обобщение классической формулы Эрмита*.

5. Первая интерполяционная формула для целых функций конечной степени. В настоящем n° мы используем результат предыдущего n° для разложения в интерполяционный ряд заданной целой трансцендентной функции конечной степени.

Мы обозначим эту целую трансцендентную функцию через $f(z)$. Ее значения в точках заданной нормированной последовательности $\left\{\lambda_k\right\}_{-\infty}^{\infty} \in (L, 0)$ будут $f(\lambda_k)$. Мы введем величины (13) и (14), как указано в $n^\circ 4$, и предположим, что при $\pm i \to \infty$ величина (14) растет не быстрее, чем некоторая степень модуля ζ_i, так что мы можем выбрать такое σ, для которого ряд (15) сходится.

Кроме этого мы предположим, что ширина по мнимой оси индикаторной диаграммы функции $f(z)$ меньше, чем 2π, то-есть

$$2\nu \equiv h_f\left(\frac{\pi}{2}\right) + h_f\left(-\frac{\pi}{2}\right) < 2\pi.$$

Напомним, что

$$h_f(\theta) = \overline{\lim_{r\to\infty}} \frac{\ln|f(re^{i\theta})|}{r}.$$

Не нарушая общности, можем предположить, что

$$\nu = h_f\left(\frac{\pi}{2}\right) = h_f\left(-\frac{\pi}{2}\right).$$

Теперь введем вспомогательную функцию

$$g(z;\ з) = f(z)\left[\frac{\sin\omega(z-з)}{\omega(z-з)}\right]^m,$$

* См., напр., В. Л. Гончаров. Теория интерполирования и приближения функций. 1939.

где з комплексный параметр, m наименьшее натуральное число, удовлетворяющее неравенству

$$m \geqslant \sigma + 4p + 1,$$

а ω какое-нибудь положительное число, удовлетворяющее неравенству

$$\omega < \frac{\pi - \nu}{m}.$$

Когда параметр з зафиксирован, $g(z) = g(z;\ з)$ является целой функцией конечной степени от z и при этом

$$h_g\left(\pm\frac{\pi}{2}\right) \leqslant \nu + m\alpha < \pi.$$

Введем в рассмотрение значения $g(\lambda_k;\ з)$ и построим величины $G_k(\Lambda_i;\ з)$ точно так, как в $n^\circ 4$ по значениям $f(\lambda_k)$ были построены величины $F_k(\Lambda_i)$. Мы без труда найдем при этом, что

$$|G_k(\Lambda_i;\ з)| \leqslant N(з,\ m,\ L) \max_{0<j<k} |F_j(\Lambda_i)| \cdot \frac{1}{(1+|\zeta_i|)^m}. \tag{18}$$

Таким образом величины

$$\gamma_i = \max_{0<k<s_i} |G_k(\Lambda_i;\ з)|$$

удовлетворяют неравенствам

$$\gamma_i \leqslant N \frac{\varphi_i}{(1+|\zeta_i|)^m}.$$

Мы можем, следовательно, построить для функции $g(\lambda_k;\ з)$ интерполяционный ряд по формуле (16) при $q = 0$:

$$H(z;\ з) = \sum_{i=-\infty}^{\infty} \{G_0(\Lambda_i;\ з) R_0(z;\ \Lambda_i) + \ldots + G_{s_i}(\Lambda_i;\ з) R_{s_i}(z;\ \Lambda_i)\}.$$

Мы докажем теперь, что

$$H(z;\ з) \equiv g(z;\ з). \tag{19}$$

С этой целью исследуем функцию

$$\Omega(z) = \frac{g(z;\ з) - H(z;\ з)}{\psi(z)} = \Omega_1(z) - \Omega_2(z).$$

Что $\Omega(z)$ есть целая функция, очевидно. Докажем, что она конечной степени. Числитель, как мы знаем, есть целая функция конечной степени. Поэтому в силу первого из утверждений теоремы 1 при $|y| \geqslant 2L+1$ имеет место неравенство

$$|\Omega(z)| \leqslant Me^{k|z|}.$$

Нам остается доказать, что подобное неравенство выполняется и в полосе

$$|y| \leqslant 2L+1.$$

Для этого достаточно использовать принцип максимума модуля в связи со следствием леммы $n^\circ 3$ относительно поведения $|\psi(z)|$ на периферии многоугольников $\Pi_i(\rho)$, беря в качестве этих многоугольников прямоугольники со сторонами, лежащими на прямых $y = \pm(2L+1)$.

Заметим теперь, что, в силу неравенства

$$h_{g(z;\ з)}\left(\pm\frac{\pi}{2}\right) < \pi$$

и оценки (7) для функции $\psi(z)$, имеет место неравенство

$$h_{\Omega_1}\left(\pm\frac{\pi}{2}\right)<0.$$

А так как функция $h(\theta)$ непрерывна, то можно указать такое положительное $\varepsilon<\frac{\pi}{2}$, что

$$h_{\Omega_1}(\theta)<0$$

при

$$\left|\theta\pm\frac{\pi}{2}\right|<\varepsilon.$$

Следовательно, в углах

$$\left|\arg z\pm\frac{\pi}{2}\right|<\varepsilon$$

функция $\Omega_1(z)$ стремится к нулю при $|z|\to\infty$. Но в тех же углах при $|z|\to\infty$ стремится к нулю также $\Omega_2(z)$, как это вытекает из замечания относительно величины (17).

Таким образом в указанных углах $\Omega(z)$ стремится к нулю при $|z|\to\infty$. На основании теоремы Фрагмен—Линделёфа поэтому

$$\Omega(z)\equiv 0,$$

то-есть равенство (19) доказано. Полагая в нем $\mathfrak{z}=z$ и замечая, что

$$g(z;\ z)=f(z),$$

получаем представление

$$f(z)=\sum_{i=-\infty}^{\infty}\{G_0(\Lambda_i;\ z)R_0(z;\ \Lambda_i)+\ldots+G_{s_i}(\Lambda_i;\ z)R_{s_i}(z;\ \Lambda_i)\}. \qquad (A)$$

Это и есть интерполяционная формула для целых функций конечной степени, которую мы хотели установить. Если все группы Λ_i содержат по одному узлу, она принимает вид

$$f(z)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}\frac{\psi(z)}{(z-\lambda_k)\psi'(\lambda_k)}\left[\frac{\sin\omega(z-\lambda_k)}{\omega(z-\lambda_k)}\right]^m f(\lambda_k)$$

и была установлена в I.

Как видим, целая функция $f(z)$ вполне определяется своими значениями на последовательности $\{\lambda_k\}_{-\infty}^{\infty}\in(L,\ 0)$. Однако нужно иметь в виду, что этот результат мы получили при сильном ограничении, наложенном на рост функции $f(z)$, а именно ширина ее индикаторной диаграммы по мнимой оси предположена меньшей, чем 2π. Ниже мы покажем, что это условие можно существенно ослабить.

6. Обобщение теоремы М. Картрайт. С помощью интерполяционной формулы предыдущего n° получается следующее обобщение теоремы М. Картрайт.

Теорема 3. Пусть $\{\lambda_k\}_{-\infty}^{\infty}$ какая-нибудь последовательность, принадлежащая классу $(L,\ 0)$, и пусть $f(z)$ какая-нибудь целая трансцендентная функция конечной степени, у которой ширина индикаторной диаграммы по мнимой оси меньше 2π. Если при этом функция $f(z)$ в том смысле ограничена на последовательности $\{\lambda_k\}_{-\infty}^{\infty}$, что существует такая константа M, что при любых различных $\mu_1,\ \mu_2,\ \mu_3,\ \ldots,\ \mu_r$ имеют место неравенства

$$|f(\mu_1)|\leqslant M,$$
$$|f(\mu_1,\ \mu_2)|\leqslant M,$$
$$\cdots\cdots\cdots$$
$$|f(\mu_1,\ \mu_2\ \ldots,\ \mu_r)|\leqslant M,$$

то функция $f(z)$ ограничена на всей вещественной оси. При этом r определяется, как указано в n° 2.

Доказательство. В соответствии с замечанием, сделанным в n° 2, возьмем бесконечную последовательность сдвигов $\tau_i(\pm i=0,\ 1,\ 2,\ \ldots)$, удовлетворяющих неравенствам

$$\frac{r\rho}{2}\leqslant\tau_{i+1}-\tau_i\leqslant\frac{3r\rho}{2}$$

и таких, что, полагая

$$\lambda_k+\tau=\lambda^*_{k\pm m},$$

где τ любой из этих сдвигов τ_i, мы получим нормированную последовательность $\{\lambda^*_k\}_{-\infty}^{\infty}$. Если мы положим при этом

$$f(z+\tau)=f^*(z),$$

то найдем, что функция $f^*(z)$ на последовательности $\{\lambda^*_k\}_{-\infty}^{\infty}$ будет ограничена в том же смысле и той же константой M, что и функция $f(z)$ на $\{\lambda_k\}_{-\infty}^{\infty}$. Кроме того, ширина индикаторной диаграммы функции $f^*(z)$ по мнимой оси будет та же, что и у функции $f(z)$. Если мы докажем, что в некотором фиксированном интервале длины $2r\rho$ прямой $y=2L+1$ функция $f^*(z)$ ограничена при любом $\tau\in\{\tau_i\}$ одной и той же константой, то будет доказана ограниченность функции $f(z)$ на всей прямой $y=2L+1$, а по теореме Фрагмен—Линделёфа и ограниченность ее на вещественной оси; тем самым будет доказана наша теорема.

Таким образом, нам остается оценить сверху $|f(x+(2L+1)i)|$ при $|x|\leqslant r\rho$ в предположении, что исходная последовательность нормирована. Эту оценку можно без труда получить с помощью интерполяционной формулы предыдущего n°. А именно, выше мы отметили неравенство (18). Из него теперь следует, что

$$|G_k(\Lambda_i;\ z)|\leqslant M\frac{N(z,\ m,\ L)}{(1+|\zeta_i|)^m}.$$

Поэтому в силу интерполяционной формулы предыдущего n° и теоремы 2

$$|f(z)|\leqslant rN(L)MN(z,\ m,\ L)(1+|z|)^{4L+3}e^{\pi|y|}\sum_{i=-\infty}^{\infty}\frac{(1+|\zeta_i|)^{4p+1}}{(1+|\zeta_i|)^m}.$$

А правая часть при $z=x+(2L+1)i$ и $-r\rho\leqslant x\leqslant r\rho$ меньше некоторой вполне определенной константы.

7. Вторая интерполяционная формула для целых трансцендентных функций конечной степени. Рассмотрения настоящего $n°$ непосредственно примыкают к $n°$ 4. Мы предположим лишь, что числа $f(\lambda_k)$ представляют значения целой трансцендентной функции конечной степени $f(z)$, для которой при некотором натуральном значении n (а значит и при всех больших значениях)

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-2\pi|y|}|f(iy)|^2 \frac{dy}{1+y^{2n}} < \infty \tag{20}$$

$$\int_1^{\infty} \frac{1}{u^2}\left\{\ln \int_u^{\infty} e^{-\pi y}|f(-iy)|\frac{dy}{y^{n+2}} + \ln \int_u^{\infty} e^{-\pi y}|f(iy)|\frac{dy}{y^{n+2}}\right\} dy = -\infty. \tag{21}$$

Эти соотношения представляют определенные ограничения, наложенные на рост функции $f(z)$ по мнимой оси. Они слабее ограничений $n°$ 5 и не требуют, чтобы ширина индикаторной диаграммы по мнимой оси была меньше 2π. Последовательность $\left\{\lambda_k\right\}_{-\infty}^{\infty} \in (L, 0)$ мы предполагаем нормированной. Равным образом, как и в $n°$ 4, мы принимаем, что существует некоторое σ, для которого сходится ряд

$$\sum_{i=-\infty}^{\infty} \frac{\varphi_i}{|\zeta_i|^{\sigma}}.$$

Наконец, мы выбираем натуральный показатель q так, чтобы

$$q \geqslant \max\{\sigma + 4p + 1,\quad n + 2L\}$$

и при построении функций $R_k(z;\ \Lambda)$ берем какое-нибудь отличное от нуля вещественное α, удовлетворяющее неравенству

$$|\alpha| < \frac{p}{4}.$$

Пусть

$$H(z) = \sum_{i=-\infty}^{\infty} \{F_0(\Lambda_i)R_0(z;\ \Lambda_i) + \ldots + F_{s_i}(\Lambda_i)R_{s_i}(z;\ \Lambda_i)\}.$$

Введем в рассмотрение функцию

$$\Omega(z) = \frac{f(z) - H(z) - P(z)\psi(z)}{(z-\alpha)^q \psi(z)},$$

где $P(z)$ — многочлен $(q-1)$-ой степени, однозначно определяемый из условия, что числитель $\Omega(z)$ имеет в точке α корень кратности q. Таким образом $\Omega(z)$ есть целая трансцендентная функция. Как и выше ($n°$ 5), мы убеждаемся легко, что $\Omega(z)$ есть функция конечной степени. Далее заметим, что $\Omega(iy)\,(-\infty < y < \infty)$ принадлежит L^2. Действительно, принадлежность к L^2 функции

$$\frac{P(iy)\psi(iy)}{(iy-\alpha)^q \psi(iy)} = \frac{P(iy)}{(iy-\alpha)^q}$$

очевидна, функция

$$\frac{H(iy)}{(iy-\alpha)^q \psi(iy)}$$

принадлежит L^2 в силу замечания, относящегося к (17). Наконец,

$$\frac{f(iy)}{(iy-\alpha)^q \psi(iy)} = \Phi(y)$$

принадлежит L^2 на основании предположения (20) в силу теоремы 1 и выбора показателя q. Применяя к функции $\Omega(iy)$ теорему Палей-Винера, получаем представление

$$\Omega(iy) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{ity}\omega(t)\,dt,$$

где $\omega(t)$ принадлежит L^2 и отлична от нуля лишь в некотором конечном интервале $(-b,\ b)$. Следовательно,

$$\Phi(y) = \frac{H(iy)}{(iy-\alpha)^q \psi(iy)} + \frac{P(iy)}{(iy-\alpha)^q} + \int_{-\infty}^{\infty} e^{ity}\omega(t)\,dt. \tag{22}$$

Применим к обеим частям равенства (22) обратное преобразование Фурье. При этом положим

$$\varphi(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-itx}\Phi(t)\,dt.$$

Результат можем представить в виде

$$\varphi(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-itx}H_1(it)}{(it-\alpha)^q \psi(it)}\,dt + \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-itx}H_2(it)}{(it-\alpha)^q \psi(it)}\,dt +$$

$$+ \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-itx}P(t)}{(it-\alpha)^q}\,dt + \omega(x), \tag{23}$$

где $H_1(z)$ представляет ту часть суммы $H(z)$, которая распространена на все узлы λ_k, лежащие в правой полуплоскости, а $H_2(z)$ на остальные.

Примем вначале, что $x < 0$. В этом случае первый и третий члены правой части формулы (23) равны нулю. Что же касается интеграла

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-itx}H_2(it)}{(it-\alpha)^q \psi(it)}\,dt = g(x),$$

то, как легко видеть, он представляет аналитическую функцию на полуоси $x < 0$. Но $\omega(x) = 0$ при $x < -b$. Итак, мы имеем две функции

$$\varphi(x)\,(-\infty < x < \infty),\ g(x)\,(x < 0),$$

из которых вторая аналитическая, и эти функции совпадают при $x < -b$. При этом, в силу (21), преобразование Фурье $\Phi(x)$ первой функции удовлетворяет условию

$$\int_{-1}^{\infty} \frac{du}{u^2} \ln \int_u^{\infty} e^{-\pi y}|\Phi(\pm y)|\frac{dy}{y^2} = -\infty$$

при одном из знаков по крайней мере.

Но в таком случае на основании одной теоремы Левинсона функции $\varphi(x)$, $g(x)$ совпадают не только при $x<-b$, но и при $x<0$, а это значит, что $\omega(x)=0$ при $x<0$.

Совершенно аналогично доказывается, что $\omega(x)=0$ при $x>0$. Значит $\omega(x)=0$ и поэтому $\Omega(z)=0$. Таким образом мы показали, что при сделанных в начале этого n° предположениях справедлива интерполяционная формула*

$$f(z)=P(z)\psi(z)+\sum_{i=-\infty}^{\infty}\{F_0(\Lambda_i)R_0(z;\Lambda_i)+\ldots+F_{s_i}(\Lambda_i)R_{s_i}(z;\Lambda_i)\}. \quad (B)$$

Заметим, что из доказанной формулы вытекает

Теорема 4. Если целая функция конечной степени $f(z)$ удовлетворяет условиям (20), (21) и если величина (14) растет при $\pm i\to\infty$ как некоторая степень $|\zeta_i|$, то $f(x)\,(\pm x\to\infty)$ также растет как некоторая степень x.

В заключение настоящего n° приведем формулировку использованной теоремы Н. Левинсона. Эта теорема гласит**:

Пусть функция $F(u)\,(-\infty<u<\infty)$ такова, что

$$\int_1^\infty \frac{du}{u^2}\ln\int_u^\infty |F(y)|\frac{dy}{y^2}=-\infty,$$

и пусть

$$f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}F(u)e^{-iux}du$$

ее преобразование Фурье. Если $g(z)$ есть аналитическая функция при $a<x<b$, $0<y<\gamma$ и непрерывная при $a\leqslant x\leqslant b$, $0\leqslant y\leqslant\gamma$ и если $f(x)=g(x)$ при $a<\alpha\leqslant x\leqslant\beta<b$, то $f(x)=g(x)$ при $a\leqslant x\leqslant b$.

8. Интерполяционные формулы с кратными узлами. До сих пор мы предполагали, что среди узлов нет равных. Отбросить это предположение это значит принять, что в качестве данных фигурируют не только значения функции, но и значения некоторых последовательных ее производных. Так, слияние узлов

$$\mu_0,\ \mu_1,\ \ldots,\ \mu_s,$$

образующих группу Λ, означает, что относящимися к этой группе данными вместо разностных отношений (13) являются производные

$$f(\mu_0),\ f'(\mu_0),\ \ldots,\ f^{(s)}(\mu_0).$$

Соответствующие подобным схемам интерполяционные формулы легко получаются из построенных формул (A), (B) с помощью предельного перехода.

Мы используем эти соображения, чтобы получить еще одну теорему типа теоремы М. Картрайт. Для этого нам придется несколько остановиться на некоторых построениях, связанных с относительно плотными множествами. Как известно, множество вещественных чисел называется относительно плотным, если существует такое положительное число l, что всякий интервал длины l содержит число множества; число l называется включающим интервалом.

* При $\{\lambda_k\}_{-\infty}^{\infty}\in(L,\delta)\,(\delta>0)$ впервые получена в II.

** См. Н. Левинсон. Gap and Density Theorems, 1940, стр. 74–81.

Пусть дана конечная система вложенных друг в друга относительно плотных множеств

$$\mathbf{M}_0\supseteq\mathbf{M}_1\supseteq\mathbf{M}_2\supseteq\ldots\supseteq\mathbf{M}_p \quad (24)$$

с включающими интервалами соответственно $l_0,\ l_1,\ l_2,\ldots,\ l_p$. Очевидно, что можно считать* $l_0\leqslant l_1\leqslant l_2\leqslant\ldots\leqslant l_p$. Мы будем называть кратностью числа λ по отношению к системе множеств (24) число множеств $\mathbf{M}_j$, в которые входит λ.

Лемма. При произвольно выбранном $\delta>0$ из множества $\mathbf{M}_0$ можно выделить систему подмножеств $\mathbf{M}_j'\subseteq\mathbf{M}_j\,(j=0,\ 1,\ldots,p)$, также вложенных друг в друга $(\mathbf{M}_0'\supseteq\mathbf{M}_1'\supseteq\mathbf{M}_2'\supseteq\ldots\supset\mathbf{M}_p')$, таким образом, что если перенумеровать числа λ', входящие в $\mathbf{M}_0'$ в порядке их возрастания, давая каждому числу столько номеров, какова его кратность по отношению к новым множествам, то при некотором $L>0$ будет

$$1)\qquad |c\lambda_k'-k|<L\ (\pm k=0,\ 1,\ 2,\ \ldots),$$

где

$$c=\sum_{j=0}^{p}\frac{1}{l_j'}\qquad\text{и}\qquad l_j'=l_j+2\delta\quad(j=0,\ 1,\ 2,\ \ldots,\ p),$$

$$2)\qquad |\lambda_k'-\lambda_i'|>\delta,$$

если

$$\lambda_k'\neq\lambda_i'.$$

Заметим, что кратность числа λ_k' по отношению к системе множеств $\mathbf{M}_j'$ не больше его кратности по отношению к системе множеств $\mathbf{M}_j$.

Доказательство будет состоять из нескольких этапов.

1°. Разобьем всю числовую ось на полуинтервалы

$$(kl_p',\ (k+1)l_p']\quad(\pm k=0,\ 1,\ 2,\ \ldots)$$

и в каждом из этих полуинтервалов выберем точку из $\mathbf{M}_p$, отстоящую не меньше чем на δ от концов полуинтервала. Эти точки образуют множество $\mathbf{M}_p'$. Очевидно, что любые две точки множества $\mathbf{M}_p'$ отстоят друг от друга на расстояние $\geqslant 2\delta$. Кроме того, если обозначить через $n_p(t)$ число точек множества $\mathbf{M}_p'$ на полуинтервале $(0,\ t]$ при $t>0$ и через $-n_p(t)$ число точек этого множества на полуинтервале $[t,\ 0)$ при $t<0$, то, как можно видеть непосредственно,

$$n_p(t)=\frac{t}{l_p'}+\varphi_p(t),$$

где

$$|\varphi_p(t)|<1.$$

2°. Пусть уже построены множества $\mathbf{M}_p',\ \mathbf{M}_{p-1}',\ \ldots,\ \mathbf{M}_j'$ так, что

$$\mathbf{M}_j'\subseteq\mathbf{M}_i\,(i=j,\ j+1,\ \ldots,\ p),\quad \mathbf{M}_p'\subseteq\mathbf{M}_{p-1}'\subseteq\ldots\subseteq\mathbf{M}_j'$$

причем расстояние между любыми двумя различными точками из

* Можно при этом также считать, что величины l_j сколь угодно близки к точным нижним границам включающих интервалов соответствующих множеств.

M'_j не меньше δ. Пусть, кроме того, введены функции $n_i(t)$ $(i=j, j+1, \ldots, p)$, аналогичные функции $n_p(t)$, и пусть

$$n_i(t)=\frac{t}{l'_i}+\varphi_i(t) \qquad (i=j, j+1, \ldots, p), \tag{25}$$

где $|\varphi_i(t)|<L_i$ и L_i — некоторая постоянная.

Построим множество M'_{j-1}. Для этого разобьем всю числовую ось на полуинтервалы

$$(kl'_{j-1}, \ (k+1)\,l'_{j-1}] \quad (\pm k=0, 1, 2, \ldots) \tag{26}$$

и отметим те из этих полуинтервалов, которые содержат точки множества M'_j. Пусть $(k_1 l'_{j-1}, (k_1+1)\,l'_{j-1}]$ первый (считая вправо от нуля) полуинтервал, содержащий больше одной точки из M'_j, скажем, $s_1>1$ точек. Тогда отмечаем первые s_1-1 из неотмеченных еще полуинтервалов, следующих за полуинтервалом $(k_1 l'_j, (k_1+1)\,l'_{j-1}]$. Далее выбираем второй из полуинтервалов, содержащий более одной точки из M'_j, и отмечаем аналогично следующие за ним полуинтервалы и т. д. Аналогично отмечаются полуинтервалы на отрицательной полуоси.

3°. После проведенного построения на оси остаются неотмеченные полуинтервалы. В самом деле, число отмеченных полуинтервалов на отрезке $[0, kl'_{j-1}]$ не превосходит числа точек множества M'_j на этом отрезке, то есть согласно (25) не превосходит величины

$$k\frac{l'_{j-1}}{l'_j}+L_j.$$

Так как здесь коэффициент при k меньше 1, то при достаточно большом k написанное выражение будет меньше, чем k, и, следовательно, на отрезке $[0, kl'_{j-1}]$ найдутся неотмеченные полуинтервалы.

4°. Пусть полуинтервал $(ql'_{j-1}, (q+1)\,l'_{j-1}]$ неотмеченный. Тогда любой полуинтервал вида $(ql'_{j-1}, (q+m)\,l'_{j-1}]$ содержит не больше отмеченных полуинтервалов, чем в нем содержится точек из множества M'_j. Рассуждая аналогично предыдущему, убеждаемся в том, что при

$$m>2L_j\cdot\frac{1}{1-\dfrac{l'_j}{l'_{j-1}}}\equiv m_j$$

указанный полуинтервал содержит неотмеченный полуинтервал.

5°. В каждом из неотмеченных полуинтервалов выберем точку множества M_{j-1}, отстоящую от концов полуинтервала не меньше, чем на δ. Эти точки вместе с точками множества M'_j образуют множество M'_{j-1}.

6°. Из проведенного построения непосредственно видно, что расстояние между любыми двумя различными точками множества M'_{j-1} не меньше δ. Кроме того, если точка $t>0$ совпадает с левым концом неотмеченного полуинтервала, то число точек множества M'_{j-1} на полуинтервале $(0, t]$ в точности совпадает с числом полуинтервалов

вида (26), попавших в этот полуинтервал. Иначе говоря, при этих значениях t

$$n_{j-1}(t)=\frac{t}{l'_{j-1}}.$$

По 5° такие значения t расположены на оси относительно плотно с включающим интервалом $\Delta_j=m_j l'_{j-1}$. Очевидно, что при произвольном $t>0$

$$n_{j-1}(t)=\frac{t}{l'_{j-1}}+\varphi_{j-1}(t),$$

где

$$|\varphi_{j-1}(t)|<m_j.$$

Таким образом, имея множество M'_p, мы строим последовательно

$$M'_{p-1}, \quad M'_{p-2}, \ \ldots, \ M'_0.$$

Обозначая через $n(t)$ число точек из M'_0 при условии (в отличие от $n_0(t)$, что каждая точка считается столько раз, какова ее кратность, мы будем иметь

$$n(t)=\sum_{j=0}^{p} n_j(t)$$

или

$$n(t)=ct+\varphi(t), \quad c=\sum_{j=0}^{p}\frac{1}{l'_j}, \tag{27}$$

где $|\varphi(t)|<L$ при некотором $L>0$. Подставив в соотношение (27) вместо t точку $\lambda'_k\in M'_0$, мы получим

$$|k-c\lambda'_k|<L \qquad (\pm k=0, 1, 2, \ldots).$$

Сформулируем теперь теорему *:

Теорема 5. Пусть $M_0\supseteq M_1\supseteq\ldots\supseteq M_p$ — система вложенных друг в друга относительно плотных множеств вещественных** узлов с включающими интервалами $l_0<l_1\leqslant\ldots<l_p$.

Пусть $f(z)$ — целая функция конечной степени, которая в каждой точке $\lambda\in M_j$ удовлетворяет неравенствам

$$|f(\lambda)|\leqslant M, \quad |f'(\lambda)|\leqslant M, \ \ldots, \quad |f^{(j)}(\lambda)|\leqslant M. \tag{28}$$

Если при этом

$$h_f\left(\frac{\pi}{2}\right)+h_f\left(-\frac{\pi}{2}\right)<2\pi\sum_{j=0}^{p}\frac{1}{l_j}, \tag{29}$$

то $f(x)$ ограничена на вещественной оси.

Доказательство. Выберем $\delta>0$ настолько малым, чтобы выполнялось неравенство

$$h_f\left(\frac{\pi}{2}\right)+h_f\left(-\frac{\pi}{2}\right)<2\pi\sum_{j=0}^{p}\frac{1}{l'_j}$$

и выделим подмножества

$$M'_0\supseteq M'_1\supseteq\ \ldots\ \supseteq M'_p.$$

---

* Эта теорема является обобщением теоремы 2 из II.

** Теорема обобщается без труда и на случай комплексных узлов с ограниченными мнимыми частями, но мы на этом не остановимся.

Умножим все точки множества $\mathbf{M}_0'$ на число c. Мы получим последовательность узлов $c\lambda_k'$, которые снова обозначим через λ_k. При разбиении этих узлов на группы Λ_i каждая группа будет состоять из одной точки (кратной), а последовательность групп будет принадлежать классу (L, δ). Введем функцию $\varphi(z) = f(c^{-1}z)$. Если узел $\mu = \lambda_k$ имеет кратность $s+1$ относительно системы множеств $\mathbf{M}_j'$ ($i = 0, 1, \ldots, p$), то будут иметь место неравенства

$$|\varphi(\mu)| < \mathbf{M}, \quad |\varphi'(\mu)| < \mathbf{M}c^{-1}, \ \ldots, \ |\varphi^{(s)}(\mu)| < \mathbf{M}c^{-s}.$$

Кроме того, в силу (29) ширина по мнимой оси индикаторной диаграммы функции $\varphi(z)$ меньше, чем 2π. Поэтому функция $\varphi(z)$ допускает представление, которое получается из формулы (A) путем упомянутого в начале настоящего n° предельного перехода. Из этого представления и вытекает утверждение теоремы.

ЗАПИСКИ МАТЕМАТИЧЕСКОГО ОТДЕЛЕНИЯ ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКОГО ФАКУЛЬТЕТА ХГУ И ХАРЬКОВСКОГО МАТЕМАТИЧЕСКОГО ОБЩЕСТВА

Том XXIII 1952

ОБ ОДНОМ КЛАССЕ ГИЛЬБЕРТОВЫХ ПРОСТРАНСТВ ФУНКЦИЙ *

А. Я. Повзнер

(Харьков)

Основные теоремы

1. Пусть H обозначает полное гильбертово пространство функций $f(z)$, определенных на некотором множестве $\mathbf{M}$. Рассмотрим в пространстве H семейство функционалов l_ζ, зависящих от точек множества $\mathbf{M}$ и определенных по формуле:

$$l_\zeta(f) = f(\zeta), \ f \in H, \tag{1.1}$$

где ζ — фиксированная точка множества $\mathbf{M}$.

Определение. Пространство H мы будем называть g-пространством, если функционалы семейства (1.1) являются линейными. Это определение эквивалентно следующему: H называется g-пространством, если существует такая функция $\psi(\zeta)$, что для любых $f \in H$, $\zeta \in \mathbf{M}$ имеет место соотношение:

$$|f(\zeta)| \leqslant \psi(\zeta) \, \| f \| . \tag{1.1'}$$

В дальнейшем через $\psi(\zeta)$ будет обозначаться $\| l_\zeta \| = \overline{\lim} \frac{|f(\zeta)|}{\| f \|}$.

По известной теореме Ф. Рисса, каждый линейный функционал в пространстве H можно представить в виде скалярного произведения. Откуда следует, что

$$l_\zeta(f) = f(\zeta) = f(f, g_\zeta), \ f \in H, \ g_\zeta \in H, \tag{1.2}$$

где g_ζ — определенная функция из H с нормой, равной норме функционала l_ζ. Из (1.2) следует, что

$$\| l_\zeta \| = \psi(\zeta) = \sqrt{(g_\zeta, g_\zeta)} = \sqrt{g_\zeta(\zeta)}. \tag{1.3}$$

Обозначим $g_\zeta(z)$ через $g(z, \zeta)$. Функцию $g(z \ \zeta)$ будем называть g-функцией пространства H.

Теорема 1. $g(z, \zeta)$ эрмитово-положительное ядро на $\mathbf{M}$:

$$g(z, \zeta) = \overline{g(\zeta, z)}; \quad \sum_{i, k=1}^{n} g(z_i, z_k) \xi_i \overline{\xi_k} \geqslant 0.$$

---

* После того, как основные результаты этой работы были опубликованы [1] [2], вышла из печати работа Aronszajn'a [3], в которой изложены основы той же теории.

Доказательство. Вставив в (1.2) вместо f функцию $g_z(\zeta)$, получим:

$$g_z(\zeta)=(g_z, g_\zeta)=\overline{(g_\zeta, g_z)}=\overline{g_\zeta(z)}, \text{ т. е. } g(z,\zeta)=\overline{g(z,\zeta)}.$$

Из последнего равенства немедленно получаем

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} g(z_i, z_k)\overline{\xi_i}\xi_k=\Big(\sum_{i=1}^{n} g_{z_i}\xi_i, \sum_{k=1}^{n} g_{z_k}\xi_k\Big)\geqslant 0,$$

Формула (1.2) относит каждой точке $\zeta\in\mathbf{M}$ единственную функцию $g_\zeta\in H$. Поэтому множество $\mathbf{M}$ можно идентифицировать с некоторым подмножеством $\tilde{\mathbf{M}}$ функций пространства H. Это множество $\tilde{\mathbf{M}}$ состоит из функций $\tilde{\zeta}=g_\zeta\in H$, где ζ пробегает $\mathbf{M}$.

2. Предположим, что пространство H сепарабельно. Пусть $\{u_i(z)\}_1^\infty$ — полная ортонормированная система функций в нем. Рассматривая $g(z,\zeta)$ как функцию от z и разлагая ее в ряд Фурье по выбранной системе, будем иметь:

$$g(z,\zeta)=\sum_{k=1}^{\infty} c_k u_k(z),$$

где

$$c_k=c_k(\zeta)=(g_\zeta, u_k)=\overline{(u_k, g_\zeta)}=\overline{u_k(\zeta)}.$$

Откуда для g-функций пространства H получается билинейная формула

$$g(z,\zeta)=\sum_{k=1}^{\infty} u_k(z)\overline{u_k(\zeta)},\ z,\zeta\in\mathbf{M}. \tag{2.1}$$

Ряд (2.1) при фиксированном ζ сходится в метрике H, но о сходимости ряда (2.1) можно сказать несколько больше, в силу следующего предложения.

Лемма 1. Назовем замкнутой ψ-областью совокупность точек $z\in\mathbf{M}$, удовлетворяющих неравенству $\psi(z)\leqslant c$, где c — некоторая константа. Тогда, если последовательность $f_n(z)\in H$ сходится к $f(z)$ в метрике H, то, как немедленно следует из (1.1′), она сходится равномерно в каждой замкнутой ψ-области.

Лемма 2. Линейная оболочка множества $\tilde{\mathbf{M}}$ функций $g_\zeta(z)$ плотна в пространстве H.

Доказательство. Нужно показать, что из равенства $(f, g_\zeta)=0$ для всех $\zeta\in\mathbf{M}$ следует, что $f(\xi)\equiv 0$. Но это вытекает из того, что, в силу (1,2), $(f, g_\zeta)=f(\zeta)$.

Выберем в $\mathbf{M}$ такую последовательность точек $\{a_i\}_1^\infty$, чтобы линейная оболочка функций $\{g_{a_i}\}_1^\infty$ была плотна в H и чтобы любая конечная совокупность функций g_{a_i} была линейно независима. Пусть $\{e_i\}_1^\infty$ — ортонормированная система, полученная из последовательности $\{g_{a_i}\}_1^\infty$, процессом ортогонализации. Любой элемент $f\in H$ представим в виде

$$f=\sum_{i=1}^{\infty}(f, e_i)e_i. \tag{2.2}$$

Известные формулы для e_i дают:

$$e_i=\frac{1}{\sqrt{D_iD_{i-1}}}\begin{vmatrix} g(a_1,a_1)\dots g(a_1,a_i)\\ \dots\dots\dots\dots\\ g(a_{i-1},a_1)\dots g(a_{i-1},a_i)\\ g(z,a_1)\dots g(z,a_i)\end{vmatrix}, \tag{2.3}$$

$$(f, e_i)=\frac{1}{\sqrt{D_iD_{i-1}}}\begin{vmatrix} g(a_1,a_1)\dots g(a_i,a_1)\\ \dots\dots\dots\dots\\ g(a_1,a_{i-1})\dots g(a_i,a_{i-1})\\ f(a_1)\dots f(a_i)\end{vmatrix},$$

где

$$D_0=1,\ D_k=D(a_1, a_2,\dots a_k)=|g(a_i,a_k)|_1^k\ (k=1, 2, 3\dots)$$

выражение (2.2) переходит в

$$f(z)=\sum_{i=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{D_iD_{i-1}}}\begin{vmatrix} g(a_1,a_1)\dots g(a_i,a_1)\\ \dots\dots\dots\dots\\ g(a_1,a_{i-1})\dots g(a_i,a_{i-1})\\ f(a_1)\dots f(a_i)\end{vmatrix} l_i(z) \tag{2.4}$$

Ряд (2.4) сходится не только в метрике H, но и равномерно в каждой замкнутой ψ-области.

Так как плотность линейной оболочки функций $\{g_{a_i}\}_1^\infty$ означает, что в H не существует функции $f(z)$, обращающейся в нуль в точках $\{a_i\}_1^\infty$, за исключением $f(z)\equiv 0$, то справедлива.

Теорема 2. Если последовательность точек $\{a_i\}_1^\infty$, из $\mathbf{M}$ такова, что в пространстве H не существует функции $f(z)\not\equiv 0$, обращающейся в нуль в этих точках, а последовательность функций $\{g_{a_i}\}_1^\infty$ линейно независима, то любая функция $f(z)\in H$ может быть вычислена по ее значениям в точках $\{a_i\}_1^\infty$ по формуле (2.4).

Очевидной является

Теорема 2′. Для того чтобы последовательность чисел $\{\beta_i\}_1^\infty$ была последовательностью значений некоторой функции $f(z)\in H$ в последовательности точек $\{a_i\}_1^\infty$, удовлетворяющих условию теоремы 2, необходимо и достаточно, чтобы выполнялось соотношение:

$$\sum_{i=1}^{\infty}\left|\left(\frac{1}{\sqrt{D_iD_{i-1}}}\begin{vmatrix} g(a_1,a_1)\dots g(a_i,a_1)\\ g(a_1,a_{i-1})\dots g(a_i,a_{i-1})\\ \beta_1\dots\beta_i\end{vmatrix}\right)\right|^2<\infty.$$

По лемме 2-й, линейная оболочка множества $\tilde{\mathbf{M}}$ плотна в H. Поэтому линейная оболочка $\{g_{a_i}\}_1^\infty$, тогда и только тогда плотна в H, если для любой точки $\zeta\in\mathbf{M}$

$$\lim_{n\to\infty}\Big(\min_{c_k}\|g_\zeta-\sum_{k=1}^{n} c_k g_{a_k}\|\Big)=0.$$

Используя детерминантные формулы для минимума, устанавливаем, что справедлива

Теорема 3. Для того чтобы не существовало в пространстве H функции $f(z) \not\equiv 0$, обращающейся в нуль в точках $\{a_i\}_1^\infty$, необходимо и достаточно, чтобы выполнялись соотношения:

$$D(g_{a_1}, g_{a_2}, \ldots, g_{a_n}) \neq 0 \text{ при любом } n,$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{D(g_\zeta, g_{a_1}, g_{a_2}, \ldots, g_{a_n})}{D(g_{a_1}, g_{a_2}, \ldots, g_{a_n})} = 0 \text{ при любом } \zeta \in \mathbf{M}. \tag{2.5}$$

Замечание. Будем говорить, что H обладает A-свойством, если из условия $f(a)=0$ ($f \not\equiv 0$) следует существование в H функции $f_1(z)$, обращающейся в нуль в тех же точках, что и $f(z)$, кроме точки a. Если H обладает A-свойством, то в формулировке теоремы 3, нужно требовать только, чтобы выполнялось условие (2.5) лишь для одной точки $a \in \mathbf{M}$, отличной от $\{a_i\}_1^\infty$.

Действительно, если $\{g_{a_i}\}_1^\infty$ не плотна в H, то существует такая функция $f(z) \in H$ ($f(z) \not\equiv 0$), что $(f, g_{a_i}) = f(a_i) = 0$. Возьмем точку a, отличную от $\{a_i\}_1^\infty$. Тогда в силу A-свойства существует такая функция $f_1(z)$, что $(f_1, g_a) = f_1(a) \neq 0$ и $f_1(a_i) = 0$ $(i = 1, 2, \ldots)$. Но это противоречит справедливости (2.5) для точки a, так как (2.5) означает, что g_a апроксимируется линейными комбинациями функций $\{g_{a_i}\}_1^\infty$.

Развитые выше соображения, позволяют решить в терминах g-пространств одну, часто встречающуюся, экстремальную задачу.

Пусть в некотором g-пространстве H заданы n точек $a_1, a_2, \ldots, a_n \in \mathbf{M}$ и n чисел $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n$. Требуется найти $\min (f, f)$ при условии $f(a_i) = \beta_i$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ $f \in H$, а также минимизирующую функцую. Решение получается сразу, если переписать данные задачи в виде $(f, g_{a_i}) = \beta_i$. Тогда, предполагая линейную независимость функций $\{g_{a_i}\}_1^n$, мы для минимизирующей функции f^* получим выражение

$$f^*(z) = \sum_{k=1}^n x_k\, g(z, a_k),$$

где

$$\sum_{k=1}^n x_k\, g(a_i, a_k) = \beta_i \quad (i = 1, 2, \ldots, n),$$

а $g(z, \zeta)$ g-функция пространства H.

3. Из леммы 2 и эрмитово-положительности g-функции пространства H следует, что H есть замыкание множества функций $\lambda(z)$ вида

$$\lambda(z) = \sum_{s=1}^n g(z, a_s)\, \lambda_s$$

с нормой

$$\|\lambda\|^2 = \sum_{t=1}^n \sum_{s=1}^n g(a_s, a_t)\, \overline{\lambda_s} \lambda_t,$$

где $g(z, \zeta)$ — g-функция пространства H.

Мы сейчас покажем обратное.

Пусть задано некоторое множество $\mathbf{M}$ и эрмитово-положительное ядро $K(z, \zeta)$ на нем, т. е. функция $K(z, \zeta)$, удовлетворяющая условию

$$\sum_{i,k=1}^n K(z_i, z_k)\, \overline{\lambda_i} \lambda_k \geqslant 0$$

при любых числах n, $\{\lambda_i\}_1^n$ и любых точках $\{z_i\}_1^n \in \mathbf{M}$ и $K(u, v) = \overline{K(v, u)}$.

Рассмотрим совокупность H_k' функций $\lambda(z)$ вида:

$$\lambda(z) = \sum_{s=1}^n K(z, a_s)\, \lambda_s.$$

Определим скалярное произведение функций

$$\lambda = \sum_{s=1}^n K(z, a_s)\, \lambda_s$$

и

$$\mu = \sum_{s=1}^m K(z, b_s)\, \mu_s$$

положив

$$(\lambda, \mu) = \sum_{t=1}^m \sum_{s=1}^n K(b_t, a_s)\, \overline{\mu_t} \lambda_s.$$

Имеет место

Теорема 4. Совокупность функций H_k', при вышеуказанном определении скалярного произведения, образует неполное гильбертово пространство. Замыкание H_k пространства H_k' есть g-пространство, g-функция которого равна $K(z, \zeta)$.

Доказательство. Прежде всего покажем, что

$$|\lambda(z)| \leqslant \sqrt{K(z, z)}\, \|\lambda\| \tag{3.1}$$

Действительно, пусть

$$\lambda(z) = \sum_{s=1}^n K(z, a)\, \lambda_s.$$

Зафиксируем z и положим

$$a_0 = z,\ \ \xi_0 = 0,\ \ \xi_i = \lambda_i \ \ (i = 1, 2, \ldots n),\ \ \eta_0 = 1,\ \eta_i = 0\ (i = 1, 2, \ldots, n).$$

В силу неравенства Буняковского

$$\left| \sum_{k=0}^n \sum_{i=0}^n K(a_i, a_k)\, \overline{\eta_i} \xi_k \right| \leqslant \sqrt{\sum_{i=0}^n \sum_{k=0}^n K(a_i, a_k)\, \overline{\xi_i} \xi_k} \cdot \sqrt{\sum_{k=0}^n \sum_{i=0}^n K(a_i, a_k)\, \overline{\eta_i} \eta_k},$$

что после подстановки значений a, ξ и η дает (3.1). (3.1) показывает, что из $\|\lambda\| = 0$ следует, что $\lambda(z) \equiv 0$. Обратное тривиально следует из определения нормы. Из (3.1) вытекает также, что пространство H_k есть g-пространство. Далее, из определения скалярного произведения следует, что при фиксированном $\zeta \in \mathbf{M}$ $(\lambda(z), K(z, \zeta)) = \lambda(\zeta)$. А так как множество функций $\lambda(z)$ плотно в H_k, то и для любой фукции $f(z) \in H_k$ справедливо равенство $(f, K(z, \zeta)) = f(\zeta)$, что показывает, что $K(z, \zeta)$ есть g-функция пространства H_k.

4. Предыдущие рассмотрения естественно приводят к следующему общему способу конструкции g-пространств.

Пусть H — некоторое гильбертово пространство и $\mathbf{M}$ — подмножество его элементов, линейная оболочка которого плотна в H. Любому $f \in H$ единственным образом можно поставить в соответствие функцию $f(m)$ на $\mathbf{M}$, полагая $f(m) = (f, m)$ для всех $m \in \mathbf{M}$. Обозначим это пространство функций через H_1. Это соответствие взаимно однозначно, так как из $f(m) = (f, m) = 0$ для всех $m \in \mathbf{M}$ следует, что $f = 0$. Определяя в H_1 скалярное произведение двух функций $f(m)$ и $g(m)$ по формуле $(f(m), g(m)) = (f, g)$, мы получим гильбертово пространство функций $f(m)$, изоморфное исходному. Это пространство есть g-пространство, так как

$$|f(m)| = |(f, m)| \leqslant \sqrt{(f, f)} \cdot \sqrt{(m, m)} = \sqrt{(m, m)}\, \|f\|.$$

Очевидно, что g-функция пространства H_1 есть

$$g(m, n) = (m, n),$$

ибо

$$f(m) = (f, m) = (f(n), m(n)),$$

т. е.

$$g_m(n) = m(n) = (m, n).$$

Это очевидно есть общий способ построения g-пространств.

Введем в пространстве H слабую топологию, взяв за систему окрестностей $U(f; x_1, x_2, \ldots x_n; \varepsilon)$ элемента $f \in H$ совокупность всех элементов $y \in H$ таких, что

$$|(f, x_i) - (y, x_i)| < \varepsilon \quad (i = 1, 2, \ldots, n).$$

Все нижеследующие топологические термины относятся к слабой топологии. Определив индуцированную этой топологией топологию в $\mathbf{M}$, мы превратим наши функции $f(m)$ в непрерывные. Предположим теперь для определенности, что H сепарабельно, а $\mathbf{M}$ ограниченное замкнутое подмножество H. Тогда $\mathbf{M}$ является компактом. Пусть, далее, $\tau(\mu)$ — вполне аддативная мера на всех борелевских множествах $\mu \in \mathbf{M}$.

Рассмотрим интегральное уравнение:

$$\varphi(y) = \lambda \int_{\mathbf{M}} (x, y)\, \varphi(x)\, d\tau(x), \quad y \in \mathbf{M}. \tag{4.1}$$

Легко видеть, что к ядру (x, y) можно применить всю теорию интегральных уравнений с симметрическим ядром. Если τ-мера любого открытого множества отлична от нуля, будет справедлива также и теорема Мерсера.

Если

$$\int_{\mathbf{M}} |f(y)|^2\, d\tau(y) = \|f\|_\tau < \infty, \quad \text{то}$$

$$\left|\int_{\mathbf{M}} (m, s)\, \varphi(m)\, d\tau(m)\right|^2 \leqslant \int_{\mathbf{M}} |(m, s)|^2 |\varphi(m)|^2\, d\tau(m) \cdot \int_{\mathbf{M}} d\tau(m) \leqslant$$

$$\leqslant L \|s\|^2 \int_{\mathbf{M}} |\varphi(m)|^2\, d\tau(m) \cdot \int_{\mathbf{M}} d\tau(m) \cdot (s \in H),$$

где

$$L = \max_{m \in \mathbf{M}} \|m\|.$$

Отсюда следует, что

$$\overline{K(s)} = \int_{\mathbf{M}} (s, m)\, f(m)\, d\tau(m)$$

есть линейный функционал в H и значит $K(s) = (U_f, s)$.

Пусть $\varphi(y)$ — решение уравнения (4.1). Тогда, по предыдущему, существует такое $U_\varphi \in H$, что

$$\lambda \int_{\mathbf{M}} (m, s)\, \varphi(m)\, d\tau(m) = (U_\varphi, s), \quad s \in H. \tag{4.2}$$

Таким образом

$$\varphi(n) = (U_\varphi, n), \quad n \in \mathbf{M}, \tag{4.3}$$

т. е. $\varphi(n)$ содержится в пространстве функций $f(n)$, $n \in \mathbf{M}$. (4.2) можно переписать в виде

$$\lambda \int_{\mathbf{M}} \varphi(m)\, \overline{s(m)}\, d\tau(m) = (U_\varphi, s), \tag{4.2'}$$

где s — любой элемент из H. В частности, если ψ другая собственная функция нашего уравнения, то, вставляя в (4.2′) U_ψ вместо s, получим

$$\lambda \int_{\mathbf{M}} \varphi(m)\, \overline{\psi(m)}\, d\tau(m) = (U_\varphi, U_\psi) = (\varphi(m), \psi(m))_1.$$

Пусть теперь $\{\varphi_i(n)\}_1^\infty$, $\{\lambda_i\}_1^\infty$ соответственно собственные функции и собственные числа уравнения (4.1). Тогда из (4.4) получим, что функции $\left\{\frac{\varphi_i(m)}{\sqrt{\lambda_i}}\right\}_1^\infty$ можно считать образующими ортонормированную систему функций нашего g-пространства. Если верна теорема Мерсера (т. е. если τ — мера любого открытого множества отлична от нуля), то

$$(m, n) = \sum \frac{\varphi_i(m)\, \overline{\varphi_i(n)}}{\sqrt{\lambda_i}\sqrt{\overline{\lambda_i}}}. \tag{4.5}$$

Это есть частный случай билинейной формулы (2.1).

Вернемся теперь к пространствам, порождаемым эрмитово-положительным ядром $K(x, y)$ $(x, y \in \mathbf{H})$. Пространство H_k состоит, как мы видели, из функций на множестве $\mathbf{H}$. Если $\tilde{\mathbf{H}}$ означает то множество элементов из H_k, в которое отображается множество $\mathbf{H}$, то очевидно пространство H_k можно устроить вышеуказанным общим способом, взяв H_k вместо H, а вместо множества $\mathbf{M}$ элементов H множество $\tilde{\mathbf{H}}$. Тогда $K(x, y)$ перейдет в $(\tilde{m}, \tilde{n})$, где $\tilde{m}, \tilde{n} \in \tilde{\mathbf{H}}$.

Естественно возникает вопрос: если множество $\mathbf{H}$ топологизировано, то каким условиям должен удовлетворять $K(x, y)$, чтобы отображение $n \to \tilde{n}$ $(\tilde{n} \in \tilde{\mathbf{H}}, n \in \mathbf{H})$ было непрерывным.

Теорема 5. Пусть $|K(x, x)| < A$. Для того чтобы отображение $n \to \tilde{n}$ было непрерывно, необходимо и достаточно, чтобы $K(x, y)$ было непрерывным по каждому из переменных.

Доказательство. В самом деле, если отображение $n \to \tilde{n}$ непрерывно, то какова бы ни была окрестность $v(\tilde{n}_0)$ элемента $\tilde{n}_0$, всегда найдется такая окрестность $U(n_0)$ элемента n_0, что $\tilde{U}(n_0) \subset v(\tilde{n}_0)$. Возьмем в качестве $v(\tilde{n}_0)$ совокупность элементов $\tilde{n}$ таких, что $|(\tilde{m}, \tilde{n}_0) - (\tilde{m}, \tilde{n})| < \varepsilon$, где m, ε фиксированы. Тогда, если $n \in U(n_0)$, то $|(\tilde{m}, \tilde{n}_0) - (\tilde{m}, \tilde{n})| = |K(m, n_0) - K(m, n)| < \varepsilon$. Покажем обратное: пусть $K(x, y)$ непрерывно по каждому из переменных. Полная система окрестностей элемента $\tilde{n}_0$ множества $\tilde{\mathbf{H}}$ очевидно состоит из множеств $v(\tilde{n}_0, \tilde{y}_1, \ldots \tilde{y}_s; \varepsilon)$ вида

$$|(\tilde{n}, \tilde{y}_i) - (\tilde{n}_0, \tilde{y}_i)| < \varepsilon \quad (i = 1, 2, \ldots, s), \quad \tilde{y}_i = \sum_{k=1}^{N} \lambda_{i,k}\, \tilde{m}_k,$$

так как множество $\tilde{\mathbf{H}}$ ограничено $(\|\tilde{n}\|^2 < A)$, или

$$\left|\sum_k \lambda_{i,k} [K(n, m_k) - K(n_0, m_k)]\right| < \varepsilon.$$

Ясно, что при фиксированных $\lambda_{i,k}$ и m_k всегда найдется такая окрестность $U(n_0)$, что требуемые неравенства будут удовлетворены для $n \in U(n_0)$. Это завершает доказательство.

Применим этот результат для доказательства следующей теоремы.

Теорема 6. Пусть $K(x, y)$ $(-\infty < a \leqslant x \leqslant b < \infty)$ эрмитово положительное ядро и пусть $\sigma(y)$ неубывающая функция, которая не имеет точек постоянства. Если $K(x, y)$ непрерывно по каждой из переменных, а $\{\varphi_k(x)\}_1^\infty$, $\{\lambda_k\}_1^\infty$ полная ортонормированная система собственных функций и отвечающих им собственных чисел уравнения

$$\varphi(x) = \lambda \int_a^b K(x, y)\, \varphi(y)\, d\sigma(y), \tag{4.6}$$

то совокупность функций $f(x)$, представимых в виде:

$$f(x) = \sum_1^\infty d_k \frac{\varphi_k(x)}{\sqrt{\lambda_k}}, \quad \sum_1^\infty |d_k|^2 < \infty$$

не зависит от выбора функции $\sigma(x)$ и совпадает с H_k.

Доказательство. При построении пространства H_k каждая точка y переходит в элемент $\tilde{y} \in H_k$; так как $y \to \tilde{y}$ непрерывно, то σ-мера интервала (α, β) естественно определяет σ^*-меру на множестве $\tilde{H}$ элементов $\tilde{y}$, а так как $K(x, y) = (\tilde{x}, \tilde{y})$, то уравнение $\varphi(\tilde{x}) = \lambda \int_{\tilde{H}} (\tilde{x}, \tilde{y})\, \varphi(\tilde{y})\, d\sigma^*(\tilde{y})$ полностью эквивалентно уравнению (4.6). Но тогда билинейная формула (4.5) доказывает наше утверждение.

Отметим еще следующий факт, показывающий связь наших рассмотрений с функциями Грина. Пусть H — некоторое гильбертово пространство функций $f(s)$ на множестве S и D — самосопряженный, строго позитивный оператор в H, т. е. $\inf_{\|f\|=1} (Df, f) > 0$. В таком случае оператор D имеет обратный, который мы обозначим, через A. Введем теперь в области определения оператора D новое скалярное произведение, положив $(f, g)_1 = (Df, g)$ и пусть построенное в новой метрике гильбертово пространство есть g-пространство, а $g(s, t)$ его g-функция. В таком случае справедлива формула.

$$D^{-1} f = Af(s) = (f(t), g(t, s)), \tag{4.7}$$

где s — фиксировано.

Действительно,

$$(f(t), g(t, s)) = U(s) = (DAf(t), g(t, s)) = (Af(t), g(t, s))_1 = Af(s).$$

Приложения теории g-пространств

В этой главе мы рассмотрим приложения развитой выше теории g-пространств к некоторым проблемам теории аналитических функций.

1. Пусть γ обозначает некоторую простую, кусочно-гладкую кривую, ограничивающую односвязную область комплексной плоскости. Обозначим через H_γ совокупность всех регулярных в D функций с интегрируемым квадратом модуля на контуре γ. Определим в H_γ скалярное произведение по формуле:

$$(f, h) = \frac{1}{2\pi} \int_\gamma f(s)\, \overline{h(s)}\, ds, \tag{2.1.1}$$

где ds — диференциал дуги кривой γ.

Теорема 1. Гильбертово пространство H_γ есть g-пространство.

Доказательство. По формуле Коши всякую функцию $f(z) \in H_\gamma$ можно представить в виде

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta,$$

откуда, используя неравенство Буняковского,

$$|f(z)| \leqslant \frac{1}{2\pi} \left| \int_\gamma \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta \right| \leqslant \frac{1}{2\pi} \sqrt{\int_\gamma |f(\zeta)|^2\, ds} \cdot \sqrt{\int_\gamma \frac{ds}{|\zeta - z|^2}}$$

или

$$|f(z)| \leqslant \sqrt{\frac{1}{2\pi} \int_\gamma \frac{ds}{|\zeta - z|^2}} \cdot \|f\|.$$

Пространство H_γ очевидно обладает A-свойством. Действительно, если $f(z) \in H_\gamma$ и $f(a) = 0$, $a \in D$, то $f_1(z) = \frac{f(z)}{(z-a)^k}$, где k — кратность корня a, принадлежит H_γ.

Найдем g-функцию пространства H_γ. Если D есть внутренность единичного круга, то последовательность $\{z^n\}_0^\infty$ образует полную ортонормированную систему. Поэтому, в силу билинейной формулы (1, 2.1)

$$g(z, s) = \sum_0^\infty z^n \bar{\zeta}^n = \frac{1}{1 - z\bar{\zeta}}. \tag{2.1.2}$$

В общем случае g-функция может быть найдена с помощью замены переменных. Пусть функция $z = w(u)$ конформно отображает область D плоскости u на единичный круг плоскости z. Тогда из того, что функционал:

$$f(\zeta) = \frac{1}{2\pi} \int_{|z|=1} f(z) \overline{\left(\frac{1}{1 - z\bar{\zeta}}\right)} |dz|,$$

получим:

$$f[w(v)] \sqrt{w'(v)} = \frac{1}{2\pi} \int_\gamma f[w(u)] \sqrt{w'(u)} \overline{\left(\frac{\sqrt{w'(u)} \cdot \sqrt{w'(v)}}{1 - w(u)\overline{w(v)}}\right)} ds.$$

Полагая

$$f[w(v)] \cdot \sqrt{w'(v)} = \Phi(v),$$

получим

$$\Phi(v) = \frac{1}{2\pi} \int_\gamma \Phi(u) \left[\overline{\frac{\sqrt{w'(u)\overline{w'(v)}}}{1 - w(u)\overline{w(v)}}}\right] ds.$$

Так как, очевидно, Φ пробегает все H_γ, то

$$g(u, v) = \frac{\sqrt{w'(u)\overline{w'(v)}}}{1 - w(u)\overline{w(v)}}. \tag{2.1.3}$$

Поставим в случае круга следующую задачу: пусть дана такая последовательность точек $\{a_i\}_1^\infty$, внутри единичного круга γ, что не существует функции $f(z) \not\equiv 0$ из H_γ, которая обращалась бы в нуль в этих точках (хорошо известный критерий Бляшке того, что $\{a_i\}_1^\infty$ удовлетворяет этому требованию получится из (2.5) первого параграфа при $g(z,\zeta)=\frac{1}{1-z\bar{\zeta}}$. Требуется указать интерполяционную формулу, дающую возможность построить $f(z)\in H_\gamma$ по ее значениям в этих точках и найти необходимое и достаточное условие того, что заданная последовательность чисел $\{\beta_i\}_1^\infty$ совпадает с последовательностью значений $\{f(a_i)\}_1^\infty$ некоторой функций $f(z)\in H_\gamma$.

Решение этой задачи сразу следует из теорем 2 и 2' первого параграфа, если положить там $g(z,\zeta)=\frac{1}{1-z\bar{\zeta}}$. Получающиеся при этом формулы были ранее другим методом получены Уолшем [6].

2. Пусть H_D обозначает совокупность функций $f(z)$, регулярных внутри односвязной области D комплексной плоскости. Определим скалярное произведение в H_D положив

$$(f,h)=\frac{1}{\pi}\iint_D f(z)\overline{h(z)}\,dx\,dy,\quad f,h\in H_D\quad z=x+iy.$$

Теорема 2.2. H_D есть -пространство.

Доказательство. Пусть $s\in D$ есть центр круга радиуса r, целиком расположенного в D. Тогда для всякого $\rho\leqslant r$ имеет место равенство:

$$f(\zeta)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(\zeta+\rho e^{i\varphi})\,d\varphi\quad(\rho\leqslant r).$$

Умножим обе части этого равенства на $\rho\,d\rho$ и проинтегрируем по ρ в пределах от 0 до r; получим:

$$\frac{r^2}{2}f(\zeta)=\frac{1}{2\pi}\int_0^r\rho\,d\rho\int_0^{2\pi}f(\zeta+\rho e^{i\varphi})\,d\varphi$$

и в силу неравенства Буняковского

$$\frac{r^2}{2}f(\zeta)\leqslant\frac{1}{2\pi}\sqrt{\int_0^r\int_0^{2\pi}|f(\zeta+\rho e^{i\varphi})|^2\rho\,d\rho\,d\varphi}\cdot\sqrt{\int_0^r\int_0^{2\pi}\rho\,d\rho\,d\varphi}\leqslant\frac{\sqrt{\pi r^2}}{2\sqrt{\pi}}\|f\|,$$

или

$$|f(\zeta)|\leqslant\frac{1}{r}\|f\|.$$

Если D — круг единичного радиуса, то $\{z^n\}_0^\infty$ образует ортогональную, плотную в H_D систему функций. Так как ортонормированная система будет $\{\sqrt{n+1}\,z^n\}_0^\infty$, то g-функция пространства H_D будет

$$g(z,\zeta)=\frac{1}{(1-z\bar{\zeta})^2}.$$

Выражение для g-функции произвольного пространства H_D получается аналогично случаю пространства H_γ. Пространства H_γ и H_D рассматривались соответственно в [4] [5].

3. Пусть $\tau(\rho)$ обозначает непрерывную на всей полуоси $0\leqslant\rho<\infty$ функцию, удовлетворяющую следующим условиям

$$\tau(0)=0,\quad\int_0^\infty e^{-\tau(\rho)}\rho^n\,d\rho<\infty\quad(n=0,1,2,\ldots).$$

Рассмотрим пространство H_τ регулярных во всей плоскости функций $f(\zeta)$ со скалярным произведением

$$(f,g)=\frac{1}{2\pi}\int_0^\infty\int_0^{2\pi}e^{-\tau(\rho)}f(\rho e^{i\theta})\,g(\rho e^{i\theta})\,d\rho\,d\theta.$$

Теорема 2.3. Пространство H_τ есть g-пространство.

Доказательство. Для всякого $R>0$ имеем

$$\|f\|^2\geqslant\frac{1}{2\pi}\int_0^R\int_0^{2\pi}e^{-\tau(\rho)}|f(\rho e^{i\theta})|^2\,d\rho\,d\theta\geqslant$$

$$\geqslant M(R)\frac{1}{2\pi}\int_0^R\int_0^{2\pi}|f(\rho e^{i\theta})|^2\,d\rho\,d\theta,$$

где $M(R)$ константа, зависящая от R. Выбрав $R>\zeta$, мы сведем доказательство нужного нам неравенства для $f(\zeta)$ к случаю, подобному H_D, где D — круг радиуса R. Нужно еще показать, что из $f_n\to f$ по норме H_τ следует, что $f(\zeta)$ — регулярная функция во всей плоскости (замкнутость H_τ). Но это следует из того, что если $|\zeta|<R$, то $\psi(\zeta)$ в неравенстве $|f(\zeta)|\leqslant\psi(\zeta)\,\|f\|$ можно оценить сверху функцией, зависящей только от R.

Последовательность $\{\zeta^n\}_0^\infty$ очевидно плотна в H_τ. Действительно, в противном случае найдется в H_τ такая функция $f(\zeta)$, что

$$\int_0^\infty e^{-\tau(\rho)}\,d\rho\int_0^{2\pi}f(\rho e^{i\theta})\rho^n e^{-in\theta}\,d\theta=0$$

для всех $n=0,1,2,\ldots$

Зафиксировав n получим, что при заданном ε и $N>N(\varepsilon)$

$$\left|\int_0^N e^{-\tau(\rho)}\,d\rho\int_0^{2\pi}f(\rho e^{i\theta})\rho^n e^{-in\theta}\,d\theta\right|<\varepsilon.$$

Вставив в это неравенство вместо $f(\zeta)$ ее разложение в ряд $f(\zeta)=\sum_0^\infty a_n\zeta^n$, получим, что

$$|a_n|<\frac{\varepsilon}{2\pi\int_0^N e^{-\tau(\rho)}\rho^{2n}\,d\rho},\quad\text{откуда}\quad a_n=0\quad\text{для}\quad n=0,1,2,\ldots$$

В силу билинейной формулы (2.1) первого параграфа g-функция пространства H_τ имеет следующий вид:

$$g(z,v)=\sum_0^\infty\frac{z^k\bar{v}^k}{c_k}=\varphi(z\bar{v}),$$

где

$$c_k=\int_0^\infty e^{-\tau(\rho)}\rho^{2k}\,d\rho,\quad\varphi(w)=\sum_0^\infty\frac{w^k}{c_k}.$$

Полагая $\tau(\rho)=2p\rho$ $(p>0)$, получим, в частности, $c_k=\frac{(2k)!}{2p\,(2p)^{2k}}$. Откуда $\varphi(w)=2p\,ch\,(2p\sqrt{w})$.

Пространство H_τ в случае $\tau(r)=2pr$ очевидно содержит все функции экспоненциального типа меньше p и тип функции из H_{2p}^r не может превосходить p. Теорема 2 первого параграфа дает в этом случае процесс построения функции $f(z)\in H_{2pr}$ по ее значениям в точках $\{a_i\}_1^\infty$ причем $\{a_i\}_1^\infty$ обладает тем свойством, что не существует функции экспоненциального типа меньше p, обращающейся в нуль в этих точках.

Заметим еще, что пространство H_τ обладает A-свойством.

4. В этом разделе мы рассмотрим приложение теории g-пространств к некоторым проблемам ньютонового интерполирования.

Задача ньютонового интерполирования состоит в следующем: дано множество $\mathbf{M}$, последовательность функций $\{u_i(m)\}$ на $\mathbf{M}$ и последовательность точек $\{a_i\}_1^\infty\in\mathbf{M}$, удовлетворяющих условиям $u_n(a_i)=0$ для $i=1,2,\ldots,n-1$ и $u_n(a_n)\neq 0$. Требуется найти достаточные условия того, чтобы данная функция $f(m)$ $(m\in\mathbf{M})$ разлагалась в ряд $f(m)=\sum\limits_{s=1}^\infty p_s u_s(m)$.

Пусть $K(z,v)=\sum\limits_{k=1}^\infty \alpha_k u_k(z)\overline{u_k(v)}$, $\alpha_k>0$ и ряд для $K(z,v)$ сходится для каждой пары $z,v\in\mathbf{M}$. Ядро $K(z,v)$ очевидно позитивно. Построим с помощью ядра K g-пространство H_k. Ясно, что $u_i(z)$ содержится в H_k, ибо $K(z,a_s)=\sum\limits_{k=1}^\infty \alpha_k u_k(z)\overline{u_k(a_s)}=\sum\limits_{k=1}^s \alpha_k u_k(z)\overline{u_k(a_s)}$, откуда следует, что $u_p(z)$ — есть линейная комбинация функций $K(z,a_s)$ $(s=1,2,\ldots,p)$. Соотношения $u_n(a_i)=0$ $(i=1,2,\ldots,n-1)$ можно переписать в виде $(u_n,g_{a_i})=0$ $(i=1,2,\ldots,n-1)$. Положим $g_{a_i}=\tilde a_i$. Так как u_p есть линейная комбинация элементов $\{\tilde a_i\}_1^p$, то $(u_n,u_p)=0$ $(p<n)$ или $\{u_i\}_1^\infty$ образует ортогональную систему в H_k. Ясно, что $\{\sqrt{\alpha_i}u_i\}_1^\infty$ есть полная ортонормированная система в H_k. Полнота следует из представления $K(z,v)=\sum\limits_{k=1}^\infty \alpha_k u_k(z)\overline{u_k(v)}$. Таким образом, каждая функция из H_k разлагается в интерполяционный ряд. Сходимость равномерна в каждой замкнутой области $K(z,z)\leqslant M$.

Естественно поэтому, подбирая так или иначе константы α_i, искать затем достаточные условия для того, чтобы $f(z)$ находилась в построенном с помощью констант α_i пространстве H_k. Эти условия и будут достаточными для сходимости ньютонового процесса интерполяции к $f(z)$.

Мы применим эти соображения, в несколько измененном виде, к классическому ньютоновскому процессу интерполирования.

Составим ядро

$$K_c(z,v)=c\left(1+\frac{z\bar v}{c\cdot 1}+\frac{z(z-1)}{1\cdot 2}\cdot\frac{\overline{v(v-1)}}{c(c+1)}+\ldots\right)=c\,\Gamma(c)\frac{\Gamma(z+\bar v+c)}{\Gamma(z+e)\,\Gamma(\bar v+c)} \tag{4.1}$$

Ряд (4.1) сходится при $\mathrm{Re}(z+\bar v+e)>0$. Будем в дальнейшем считать, что $-1<c<0$. В этом случае $c\,\Gamma(c)>0$ и ядро $K_c(z,v)$ позитивно на множестве $\mathbf{M}_c$, составленном из точек w с $\mathrm{Re}(w)>-\frac{c}{2}$.

Действительно,

$$\sum_1^n\sum_1^n K_c(z_i,z_k)\,\xi_i\bar\xi_k=\sum\sum c\,\Gamma(c)\int_0^\infty e^{-t}t^{z_i+\bar z_k+c-1}\cdot\frac{\xi_i}{\Gamma(z_i+c)}\cdot\frac{\bar\xi_k}{\Gamma(\bar z_k+c)}\,dt=$$

$$=c\,\Gamma(c)\int_0^\infty e^{-t}t^{c-1}\left|\sum_1^n\frac{t^{z_i}\xi_i}{\Gamma(z_i+c)}\right|^2dt\geqslant 0. \tag{4.2}$$

Найдем общий вид функций из пространства H_{k_c}. Всякая функция $F(z)\in H_{k_c}$ есть предел линейных комбинаций функций вида $F_n(z)=\sum\limits_{i=1}^n K_c(z,z_i)\bar\xi_i$, а $\|F_n\|^2$ определяется выражением, стоящим в правой части (4.2).

Функции $F_n(z)$ можно еще представить в виде

$$F_n(z)=\frac{c\,\Gamma(c)}{\Gamma(z+c)}\int_0^\infty e^{-t}t^{z+c-1}f_n(t)\,dt \tag{4.3}$$

с

$$\|F_n\|^2=c\,\Gamma(c)\int_0^\infty e^{-t}t^{c-1}|f_n(t)|^2dt, \tag{4.4}$$

где $f_n(t)\sum\limits_1^n\frac{\bar t^{\bar z_i}\bar\xi_i}{\Gamma(\bar z_i+c)}=\sum\limits_{l=1}^n\eta_l t^{w_l}$; η_l — произвольные числа, а w_l — любые точки из $\mathbf{M}_c$. Из (4.4) следует, что H_{k_c} совпадает с совокупностью функций $F(z)$, представимых в виде

$$F(z)=\frac{c\,\Gamma(c)}{\Gamma(z+c)}\int_0^\infty e^{-t}t^{z+c-1}f(t)\,dt, \tag{4.5}$$

где $f(t)$ любая функция, удовлетворяющая условию

$$c\,\Gamma(c)\int_0^\infty e^{-t}t^{c-1}|f(t)|^2dt<\infty. \tag{4.6}$$

Далее:

$$\|F\|^2=c\,\Gamma(c)\int_0^\infty e^{-t}t^{c-1}|f(t)|^2dt. \tag{4.7}$$

Действительно, очевидным является, что если $F\in H_{k_c}$, то F удовлетворяет (4.5) — (4.7). Обратное следует из того, что функции $f_n(t)$ плотны в возникающем двойственном Гильбертовом пространстве.

Для дальнейшего нам понадобится следующая

Лемма 1. Пусть позитивное ядро $K(x,y)$, заданное на множестве $\mathbf{M}$, имеет следующий вид:

$$K(x,y)=\sum_1^\infty p_k(x)\,v_k(y).$$

Пусть, далее, существует такая последовательность элементов $\{A_i\}_1^\infty\in H_k$, что при каждом n функции $p_1(x)p_2(x),\ldots,p_n(x)$ суть линейные комбинации A_i, $A_2,\ldots A_n$ и пусть существует такая последовательность $\{G_n(x,y)\}_1^\infty$, что $G_n(x,y)$ при фиксированном y принадлежит H_k, $g_n(x, y) \to g(x, y)$ при каждом фиксированном y в метрике H_k и

$$(K(x, y) + G_n(x, y) - \sum P_k(x) v_k(y),\ A_i) = 0 \quad (i = 1, 2, \ldots, n) \tag{4.8}$$

при каждом фиксированном y.

Тогда ряд $\sum_1^\infty P_k(x) v_k(y)$ при каждом фиксированном y сходится в метрике H_k.

Доказательство. (4.8) означает, что $\sum_1^n P_k(x) v_k(y)$ есть проекция элемента $K(x, y) + g_n(x, y)$ (y — фиксировано) на пространство T_n, натянутое на векторах $A_1, A_2, \ldots, A_n$, что доказывает наше утверждение, так как $\| g_n(x, y) - G(x, y) \| \to 0$ при $n \to \infty$ (y — фиксировано).

Введем теперь новое ядро

$$T_c(z, v) = K_c(z, v) - c = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z(z-1):.:(z-k)}{(1+k!)} \cdot \frac{v(v-1):.:(v-k)}{(c+1):.:(c+k)} \tag{4.9}$$

и связанное с ним G-пространство H_{T_c}.

Положим $w_k(z) = \dfrac{z(z-1):.:(z-k)}{\sqrt{(k+1)!(c+1):.:(c+k)}}$.

Тогда

$$T_c(z, v) = \sum_{k=0}^{\infty} w_k(z) \overline{w_k(v)}. \tag{4.10}$$

Положим $\tilde{a}_k = T_c(z, k)$ $(k = 1, 2, 3, \ldots)$. Ясно, что линейная оболочка элементов $w_0, w_1, \ldots, w_{k-1}$ совпадает с линейной оболочкой $\tilde{a}_1, \tilde{a}_2, \ldots$. Так как с другой стороны

$$\left(T_c(z, v) - \sum_{k=0}^{n-1} w_k(z) \overline{w_k(v)},\ \tilde{a}_s\right) = 0 \quad (s = 1, 2, \ldots, n),$$

то из леммы 1 настоящего параграфа следует, что $\{w_k(z)\}_1^\infty$ образует ортонормированную систему в H_{T_c} и (4.10) есть билинейная формула для ядра $T_c(z, v)$.

Пространство H_{T_c} содержит все полиномы, так как $T_c(z_1 - c) = -c$, а линейная оболочка элементов $\tilde{a}_1, \ldots, \tilde{a}_n$ состоит из всех полиномов степени не выше n, обращающихся в нуль в нуле. В частности, полиномы $\tilde{b}_p = K_c(z, p)$ можно считать одновременно элементами H_{k_c} и H_{T_c} $(p = 1, 2, \ldots)$.

Вычислим нормы $\| b \|_k$ и $\| b \|_T$ элемента $b = \sum_{p=1}^n \tilde{b}_p \xi_p$, рассматриваемого как элемент H_{k_c} и H_{T_c}. Имеем

$$\| b \|_k^2 = \sum_{p=1}^n \sum_{q=1}^n K(p, q) \bar{\xi}_p \xi_q.$$

С другой стороны,

$$\sum_{k=1}^n \tilde{b}_k \xi_k = \sum_{k=1}^n T_c(z, k) \xi_k + c\eta,$$

где

$$\eta = \sum_{k=1}^n \xi_k.$$

Откуда

$$\left\| \sum_{k=1}^n \tilde{b}_k \xi_k \right\|_T^2 = \sum_{p=1}^n \sum_{q=1}^n T(p, q) \bar{\xi}_p \xi_q + 2c|\eta|^2 + c^2 |\eta|^2 =$$

$$= \sum_{q=1}^n \sum_{p=1}^n K(p, q) \bar{\xi}_p \xi_q - c|\eta|^2 + 2c|\eta|^2 + c^2|\eta|^2 = \| b \|_k^2 + c(c+1)|\eta|^2.$$

Так как $-1 < c \leqslant 0$, то из этого следует

$$\| b \|_T \leqslant \| b \|_k. \tag{4.11}$$

Но совокупность элементов b плотна в H_{k_c}. Поэтому из неравенства (4.11) следует:

Лемму 2. Всякая функция $F(z) \in H_{k_c}$ содержится в H_{T_c}. Из этой леммы и (4.10) вытекает

Теорема 3. Всякая функция $F(z) \in H_{k_c}$ представима в виде

$$F(z) = \sum_0^\infty \alpha_k w_k(z) \quad \text{с} \quad \sum_{k=0}^\infty |\alpha_k|^2 < \infty. \tag{4.12}$$

Займемся теперь определением наибольшей области, в которой $F(z) \in H_{k_c}$ представима в виде

$$F(z) = \beta_0 + \beta_1 (z-1) + \beta_2 \frac{(z-1)(z-2)}{2!} + \ldots \tag{4.13}$$

Полагая $\mu_k = \dfrac{1}{\sqrt{(k+1)!(c+1):.:(c+k)}}$, получим из (4.12)

$$F(z) = \sum_{k=0}^\infty \frac{\alpha_k}{\mu_k} [(k+1)(z-1):.:(z-k) + (z-1):.:(z-k-1)] =$$

$$= \lim_{n \to \infty} \left[\alpha_0 + \sum_{k=1}^\infty \left(\frac{\alpha_{k-1}}{\mu_{k-1}} + \frac{\alpha_k}{\mu_k}(k+1) \right)(z-1):.:(z-k) + \frac{\alpha_n}{\mu_n}(z-1):.:(z-n-1) \right]. \tag{4.14}$$

Но

$$\left| \frac{\alpha_n}{\mu_n}(z-1):.:(z-n-1) \right| = \frac{|\alpha_n| \delta_n}{\operatorname{Re} z - \frac{1}{2} + \frac{c}{2}},$$

где

$$0 < \lim_{n \to \infty} \delta_n < \infty.$$

Так как $|\alpha_n|$ ограничены, то

$$\lim_{n \to \infty} \frac{\alpha_n}{\mu_n}(z-1):.:(z-w-1) = 0$$

при

$$\operatorname{Re}(z) > \frac{1}{2} - \frac{c}{2}.$$

Поэтому ($c > -1$) ряд (4.13) наверно сходится при $\operatorname{Re}(z) \geqslant 1$, и значит коэффициенты $\beta_0, \beta_1, \ldots$ однозначно определяются значениями функции $F(z)$ в точках $z = 1, 2, 3, \ldots$. Но тогда ясно, что справедлива следующая

Теорема 4. Для сходимости ряда (4.13) необходимо и достаточно, чтобы

$$\lim_{n\to\infty}\frac{|\alpha_n|}{n^{\operatorname{Re}(z)-\frac{1}{2}+\frac{c}{2}}}=0. \tag{4.15}$$

Для β в (4.13) очевидно будем иметь

$$\beta_0=\alpha_0,\quad \frac{\alpha_k}{\mu_k}(K+1)!+\frac{\alpha_{k-1}}{\mu_{k-1}}=\frac{\beta_k}{k!}\quad k=1,\ 2,\dots \tag{4.16}$$

Представляя $F(z)$ в виде

$$F(z)=\frac{c\,\Gamma(c)}{\Gamma(z+c)}\int\limits_0^\infty e^{-t}t^{z+c-1}f(t)\,dt$$

и находя $\beta_0,\ \beta_1,\dots$ через $F(1),\ F(2),\dots$ получим

$$\beta_n=c\,\Gamma(c)\int\limits_0^\infty e^{-t}t^{c-1}f_n(t)\,dt, \tag{4.17}$$

где

$$f_0(t)=\frac{t}{\Gamma(1+c)},\quad f_n(t)=\sum_{k=0}^{n}(-1)^{n+k}\frac{t^{k+1}}{\Gamma(c+k+1)}c_n^k. \tag{4.18}$$

Решение системы (4.16) относительно α дает

$$\alpha_n=c\,\Gamma(c)\int\limits_0^\infty e^{-t}t^{c-1}f(t)\,\Phi_n(t)\,dt,\quad n=1,\ 2,\dots, \tag{4.19}$$

где

$$\Phi_n(t)=\frac{\mu_n}{(n+1)!}\sum(-1)^{n+k}\frac{(n+1):.:(n-k+1)}{\Gamma(k+c+1)(k+1)!}t^{k+1}=$$
$$=(-1)^{n+1}\Gamma_n\left(L_{n+1}^{c-1}(t)-L_{n+1}^{c-1}(0)\right), \tag{4.20}$$

$L_{n+1}^{c-1}(t)$ — полиномы Лагерра относительно веса $e^{-t}t^{c-1}$.

Нетрудно заметить, что с полиномами $f_n(t)$ связаны полиномы $f_n(t)$, образующие вместе с полиномами $f_n(t)$ биортогональную систему.

Действительно, так как $F(-c)=0$, то (4.13) можно переписать в виде

$$F(z)=\sum_{k=1}^{\infty}(\tau_k(z)-\tau_k(-c))\beta_k,\quad \tau_k(z)=\frac{(z-1):.:(z-k)}{k!}$$

Но для $\tau_n(z)-\tau_n(-c)$ имеет место представление

$$\tau_n(z)-\tau_n(-c)=\frac{c\,\Gamma(c)}{\Gamma(z+c)}\int\limits_0^\infty e^{-t}t^{z+c-1}\tilde{f}_n(t)\,dt, \tag{4.21}$$

где

$$\tilde{f}_n(t)=\frac{(c+1):.:(c+n)}{n!}\sum_{k=1}^{n}\frac{c_n^k(-1)^{k+n}t^k}{\Gamma(k+c+1)}. \tag{4.22}$$

Так как

$$\tau_n(z)-\tau_n(-c)=\sum_{k=0}^{\infty}\beta_k\frac{(z-1):.:(z-k)}{k!}$$

с

$$\beta_0=-\tau(-c),\quad \beta_k=\delta_n^k,\quad k=1,\ 2,\dots,$$

то, применяя (4.17), получим

$$c\,\Gamma(c)=\int\limits_0^\infty e^{-t}t^{c-1}f_n(t)\tilde{f}_n(t)\,dt=\delta_n^k\quad (k,\ n=1,\ 2,\dots). \tag{4.23}$$

Для ядра $K_c(z,v)$ представление (4.13) имеет вид

$$K_c(z,v)=(\overline{v+c})+(z-1)\frac{\overline{v(v+c)}}{c+1}-\frac{(z-1)(z-2)}{2!}\cdot\frac{\overline{v(v-1)(v+c)}}{(c+1)(c+2)}+\dots \tag{4.24}$$

Используя интегральное представление для $K_c(z,v)$ и формулу (4.17) $\left(\text{в этом случае } \overline{\beta}_k=u_k(v)=\frac{v(v-1):.:(v-k+1)(v+c)}{(c+1):.:(c+k)}\right)$, получим

$$u_n(v)=\frac{c\,\Gamma(c)}{\Gamma(z+c)}\int\limits_0^\infty e^{-t}t^{v+c-1}f_n(t)\,dt, \tag{4.25}$$

откуда следует, что $\tau_k(z)-\tau_k(-c)$ и $u_k(z)$ $(k=1,\ 2,\dots)$ образуют биортогональную систему в H_{k_c}, что соответствует разложению

$$K_c(z,v)=\sum_{k=1}^{\infty}(\tau_k(z)-\tau_k(-c))\overline{u_k(v)}. \tag{4.24'}$$

5. Рассмотрим теперь класс **H** функций $F(z)$, регулярных в правой полуплоскости и удовлетворяющих условию

$$|F(re^{i\theta})|\leqslant e^{r\psi(\theta)}(1+r)^{\beta+\varepsilon(r)}.\ \left(-\frac{\pi}{2}\leqslant\theta\leqslant\frac{\pi}{2}\right),\quad \left(\beta<-\frac{1}{2}\right), \tag{5.1}$$

где

$$\lim_{r\to\infty}\varepsilon(r)=0,\quad \psi(\theta)=\cos\theta\ln(2\cos\theta+\theta\sin\theta.$$

Теорема 5. Если $F\in\mathbf{H}$ и $F(-c)=0$ то $F\in H_{k_c}$.

Доказательство. Рассмотрим функцию $\Phi(z)=F(z)\Gamma(z+c)$. Эта функция регулярна в правой полуплоскости и при $r>r_0$.

$$\Phi(re^{i\theta})|\leqslant A_0\left|e^{r\psi(\theta)+\left(re^{i\theta}+c-\frac{1}{2}\right)\ln(re^{i\theta}+c)-re^{i\theta}}\cdot r^{\beta+\varepsilon(r)}\right|=$$
$$=A_0\left|e^{r\cos\theta\ln(2\cos\theta+r\theta\sin\theta+(\beta+\varepsilon(r))\ln r+\left(r\cos\theta+ir\sin\theta++c-\frac{1}{2}\right)\left(\ln r+i\theta+0\left(\frac{1}{r}\right)\right)}\times\right.$$
$$\left.\times e^{-r\cos\theta-ir\sin\theta}\right|\leqslant A_1e^{x\ln\frac{2x}{e}+\left(c-\frac{1}{2}+\beta+\varepsilon(r)\right)\ln r}. \tag{5.2}$$

где $A_0,\ A_1$ — некоторые константы, $z=re^{i\theta}=x+iy$.

Полагая $c-\frac{1}{2}-\beta=-\mu_1$, получим, что $\mu_1>1$, и взяв число $\mu\in(1,\mu_1)$, будем иметь

$$\Phi(x+iy)\leqslant A\frac{e^{x\ln\frac{2x}{e}}}{\left[(x^2+y^2)^{\frac{1}{2}}+1\right]^{\mu}}\quad x>0. \tag{5.3}$$

Из (5.3) следует, что

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\Phi(x+iy)|^2 dy < \infty \quad (x \geqslant 0).$$

Поэтому, в силу теоремы Планшереля,

$$\Phi(x+iy) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{(x+iy)t} dt \quad \left(\int_{-\infty}^{\infty} |f|^2 e^{2xt} dt < \infty \right), \tag{5.3'}$$

где

$$f(t) e^{xt} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \Phi(x+iy) e^{-iyt} dy^*$$

Нам нужно показать, что

$$\Phi(z) = \int_{0}^{\infty} e^{-\frac{t}{2}} t^{\frac{c-1}{2}} t^z g(t) dt, \tag{5.5}$$

где

$$\int_{0}^{\infty} |g|^2 dt < \infty. \tag{5.4}$$

Но

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{t}{2}} t^{\frac{c-1}{2}} t^z g(t) dt = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}e^s} \cdot e^{\frac{c-1}{2}s} e^{sz} g(e^s) e^s ds =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}e^s} e^{s\frac{c}{2}} e^{sx} e^{isy} g_1(s) ds, \tag{5.6}$$

где

$$\int_{-\infty}^{\infty} |g_1(s)|^2 ds < \infty.$$

Сравнивая это выражение для правой части (5.5) с (5.3), получим, что наше утверждение будет доказано, если

$$\int_{-\infty}^{\infty} |g_1(s)|^2 ds < \infty,$$

где

$$g_1(s) = f(s) e^{\frac{1}{2}e^s} e^{-s\frac{c}{2}}.$$

Но

$$\int_{-\infty}^{0} |g_1(s)|^2 ds < \infty,$$

так как

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|^2 dt < \infty,$$

* Тот факт, что $f(t)$ не зависит от x следует сразу из того, что

$$\int_{\delta-i\infty}^{\delta+i\infty} \Phi(z) e^{-zt} dt$$

не зависит от t и δ при $t > 0$, $\delta > 0$, что следует из интегрирования $\Phi(z) e^{-zt}$ по контуру соответствующего прямоугольника и оценки (5.2) для $\Phi(z)$.

а $c \leqslant 0$. С другой стороны из (5.4) и (5.2) получим

$$|f(t)| e^{xt} \leqslant \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{A e^{x \ln \frac{2x}{e}}}{[(x^2+y^2)^{\frac{1}{2}}+1]^{\mu}} dy \leqslant \frac{A}{2\pi} \frac{1}{x^{\mu-1}} e^{x \ln \frac{2x}{e}}, \tag{5.7}$$

и полагая в (5.7)

$$\ln \frac{2x}{e} = t - 1,$$

найдем

$$|f(t)| \leqslant \frac{A}{2\pi} e^{-\frac{1}{2}e^t} e^{-(\mu-1)t}, \tag{5.8}$$

что дает

$$g_1(s) \geqslant \frac{A}{2\pi} e^{-(\mu-1)s - \frac{cs}{2}} = \frac{A}{2\pi} e^{-\left(\mu-1+\frac{c}{2}\right)s}.$$

Так как μ — любое число между $\mu_1 = -\beta + \frac{1}{2} - c$ и единицей, то его всегда можно выбрать так, чтобы $\mu - 1 + \frac{c}{2}$ было положительным, а тогда

$$\int_{0}^{\infty} |g_1(s)|^2 ds < \infty.$$

Таким образом теорема доказана.

Как было доказано Норлундом [7], каждая функция класса **H** разлагается в интерполяционный ряд (4.13) при $\mathrm{Re}(z) > 0$. Пользуясь построенной в теореме 4 настоящего параграфа функцией f_c, представляющей $F(z) - F(-c)$ $(F \in \mathbf{H})$ в виде

$$F(z) - F(-c) = \frac{1}{\Gamma(z+c)} \int_{0}^{\infty} e^{-t} t^{z+c-1} f_c(t) dt$$

и теоремой 4, можно получить сходимость ряда (4.13) при $\mathrm{Re}(z) > -c$. В силу произвольности c это дает теорему Норлунда (коэффициенты ряда (4.13) не зависят от c).

6. Укажем теперь вкратце на приложение g-пространств в теории квазианалитических функций.

Рассмотрим класс T функций $f(x)$ $(0 < x < \infty)$, имеющих производные любого порядка и удовлетворяющих условию

$$\int_{0}^{\infty} |f_{(t)}^{(k)}|^2 dt \leqslant A_k^2 \quad (k = 0, 1, 2, \ldots), \tag{6.1}$$

где A_k — заданные константы. Говорят, что константы A_k определяют квазиана литический класс, если из условия $f \in T$, $f_{(0)}^{(k)} = 0$ $k = 0, 1, 2, \ldots$ следует, что $f(x) \equiv 0$.

Легко показать, что класс T тогда и только тогда квазианалитичен, если не существует функции $f(t)$, отличной от нуля, с

$$f_{(0)}^{(k)} = 0 \quad (k = 0, 1, 2, \ldots)$$

и такой, что

$$\|f\|^2 = \sum \frac{1}{A_k^2} \int_{0}^{\infty} |f_{(t)}^{(k)}|^2 dt < \infty \tag{6.2}$$

Таким образом, для того, чтобы класс не был квазианалитическим, необходимо и достаточно, чтобы гильбертово пространство $T_0^{\cdot}$ функций $f(t)$, с нормой (6.2) и обращающихся в нуль вместе со всеми производными в нуле, было не пусто. Пространство T_0, если оно не пусто, очевидно является G-пространством. Действительно, для

$$f \in T_0, \quad |f(x)|^2 = \left| \int_0^x f'(t)\, dt \right|^2 \leqslant x^2 \int_0^\infty |f'(x)|^2 dx \leqslant A_1^2 \|f\|^2.$$

Пусть $g(x, y)$ есть g-функция этого пространства. Рассмотрим пространство T_n функций $f(x)$ с нормой

$$\|f\|_n^2 = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{A_k^2} \int_0^\infty |f_{(t)}^{(k)}|^2 dt \tag{6.3}$$

и удовлетворяющих условию

$$f_{(0)}^{(k)} = 0 \quad (k = 0, 1, 2, \ldots, n-1).$$

T_n также является g-пространством.

Пусть $g_n(x, y)$ есть g-функция T_n. Если функция $f(x) \in T_{n+1}$, то очевидно, $f(x) \in T_n$. В частности, $g_{n+1}(x, y)$ при фиксированном y, содержится в T_n. Поэтому

$$g_{n+1}(x, y) = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{A_k^2} \int_0^\infty \frac{\partial^k}{\partial t^k} g_{n+1}(t, y) \cdot \frac{\partial^k}{\partial t^k} \overline{g_n(t, x)}\, dt$$

и значит

$$|g_{n+1}(x, y)| \leqslant \|g_{n+1}(t, y)\|_{n+1} \|g_n(t, x)\|_n = \sqrt{g_{n+1}(y, y)} \cdot \sqrt{g_n(x, x)}.$$

Полагая $x = y$, получим: $g_{n+1}(x, x) \leqslant g_n(x, x)$. Так как, рассматривая $f \in T_0$ как элемент T_n, получим, что $|f(x)| \leqslant \|f\| \sqrt{g_n(x, x)}$, то ясно, что если $\lim\limits_{n \to \infty} g_n(x, x) = 0$, то пространство T_0 пусто. Если же $\lim\limits_{n \to \infty} g_n(x, x) \neq 0$ тождественно, то, как легко показать, существует и предел $g_n(x, y)$ при любых x, y и предельная функция есть g-функция пространства T_0.

Таким образом для того, чтобы класс был квазианалитическим, необходимо и достаточно, чтобы $\lim\limits_{n \to \infty} g_n(x, x) = 0$. Но $g_n(x, x)$ легко вычислить

$$g_n(x, y) = \frac{1}{2\pi} \int_\infty^0 E_n(x + t) \overline{E_n(y + t)}\, dt,$$

где

$$E_n = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{R_n(s)} e^{ist} ds, \quad R_n(z) = \left(1 - \frac{z}{b_1}\right)\left(1 - \frac{z}{b_2}\right) \ldots \left(1 - \frac{z}{b_n}\right),$$

а $b_1, \ldots, b_n$ — корни уравнения

$$\frac{1}{A_0^2} - \frac{z^2}{A_1^2} + \ldots \pm \frac{z^{2n}}{A_n^2} = 0,$$

лежащие в верхней полуплоскости (считая для определенности, что уравнение не имеет действительных корней).

Переход к пределу даст известный критерий квазианалитичности Карлемана.

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

1. А. Повзнер. DAH, 68, № 5, 1949.
2. А. Повзнер. DAH, 74. № 1, 1950.
3. Aronszayn. Theory of reproducing Kernels. Transactions cf the Am. math. Soc., V. 68, № 3, 1950.
4. Szegö. Math. Zs., 9, 218.
5. Carleman. Ark. for Math., 17, № 9.
6. Walsh. Interpolation and Approximation by Rat. Functions. Am. Math. Soc., Coll. Publ. 305.
7. Nörlund. Leçons sur les séries d'interpolation.
8. С. Бергман. Изв. н.-и. инст. мат. и мех. Томск. гос. ун-та 1, 663 п. 3 1937.

ЗАПИСКИ МАТЕМАТИЧЕСКОГО ОТДЕЛЕНИЯ ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКОГО ФАКУЛЬТЕТА ХГУ И ХАРЬКОВСКОГО МАТЕМАТИЧЕСКОГО ОБЩЕСТВА

Том XXIII 1952

АЛГЕБРА, ЯВЛЯЮЩАЯСЯ БЕСКОНЕЧНОЙ ПРЯМОЙ СУММОЙ КОЛЕЦ

А. К. Сушкевич

(Харьков)

§ 1. Пусть **К** данное коммутативное кольцо; элементы этого кольца будем обозначать малыми латинскими (а иногда и греческими) буквами — с индексами или без индексов; через ε обозначим единичный элемент в **К** (мы предполагаем, что он существует).

За объекты нашего исчисления мы берем ряды, составленные из элементов из **К**, или бесконечные последовательности вида: $A = [a_1, a_2, a_3, \ldots \text{in inf.}]$. Мы обозначаем такие последовательности большими латинскими буквами; совокупность всевозможных таких последовательностей (если $a_1, a_2\ldots$ пробегают независимо друг от друга все элементы из **К**) мы обозначим через **А**. Для оперирования с такими последовательностями мы ставим следующие постулаты: обозначим еще $B = [b_1, b_2, b_3, \ldots \text{in inf.}]$.

I. $A = B$ тогда и только тогда, если при всяком λ $b_\lambda = a_\lambda$.

II. $A + B = [a_1 + b_1, a_2 + b_2, \ldots \text{in inf.}]$.

III. Умножение на скалар: $cA = Ac = [a_1c, a_2c, \ldots \text{in inf.}]$.

IV. $AB = [a_1b_1, a_2b_2, \ldots \text{in inf.}]$.

Из этих постулатов следует, что **А** — ассоциативная и коммутативная алгебра. Последовательность $[0, 0, 0, \ldots \text{in inf.}]$ будем обозначать через 0 („нуль"). Определим еще: $-A = [-a_1, -a_2, -a_3, \ldots \text{in inf.}]$. Естественно определить вычитание формулой:

$$A - B = A + (-B) = [a_1 - b_1, a_2 - b_2, a_3 - b_3, \ldots \text{in inf.}].$$

Далее, из поставленных постулатов следует верность дистрибутивного закона для сложения и умножения (а также для сложения и умножения на скалар) и др. основные законы сложения и умножения.

§ 2. Рассмотрим теперь бесконечные последовательности, составленные из наших последовательностей. Дадим определение:

Последовательность $A_1, A_2, A_3, \ldots$ in inf. стремится к нулю: $A_m \to 0$ или $\lim\limits_{m\to\infty} A_m = 0$, если, взяв произвольное натуральное число n, мы всегда найдем соответственно ему такое число $M > 0$, что при всяком $m > M$ в A_m первые n элементов равны нулю.

Далее: последовательность $A_1, A_2, A_3, \ldots$ in inf. стремится к пределу B: $\lim\limits_{m\to\infty} A_m = B$, если последовательность:

$$A_1 - B, A_2 - B, A_3 - B, \ldots \text{in inf.}$$

стремится к нулю. Иначе последовательность $A_1, A_2, A_3, \ldots$ in inf. стремится к пределу B, если при всяком натуральном n можно найти такое $M > 0$, что при всяком $m > M$ в A_m первые n элементов будут такие же как и в B. Из этого определения следует:

Последовательность не может иметь двух различных пределов. Если $\lim\limits_{m\to\infty} A_m = A$, $\lim\limits_{m\to\infty} B_m = B$,

то

$$\lim_{m\to\infty}(A_m \pm B_m) = A \pm B.$$

Это же верно и для алгебраической суммы нескольких слагаемых. Если

$$\lim_{m\to\infty} A_m = A,\ \lim_{m\to\infty} B_m = B,$$

то

$$\lim_{m\to\infty} A_m B_m = AB.$$

Это же верно и для произведения нескольких сомножителей.

Обозначим, как обычно, степень последовательности A:

$$A^k = [a_1^k, a_2^k, a_3^k, \ldots \text{in inf.}] = \underbrace{A\cdot A \ldots A}_{k\ \text{раз}}$$

(k — натуральное число).

Из предыдущего следует:

Если $\lim\limits_{m\to\infty} A_m = A$, то $\lim\limits_{m\to\infty} (A_m^k) = A^k$ — для всякого натурального k.

Далее, если $\lim\limits_{m\to\infty} A_m = A$, а B какая-либо постоянная последовательность, то: $\lim\limits_{m\to\infty} (A_m B) = AB$.

Заметим, что при умножении всякий скаляр c можно рассматривать, как частный случай последовательности:

$C = [c, c, c, \ldots \text{in inf.}]$; при любом A: $Ac = AC$.

Последовательность: $E = [\varepsilon, \varepsilon, \varepsilon, \ldots \text{in inf.}]$ является единицей для нашего умножения последовательностей. $C = cE$.

Из предыдущего следует: если $\lim\limits_{m\to\infty} A_m = A$, $\lim\limits_{m\to\infty} B_m = B \ldots$ (конечное число) и $f(A_m, B_m, \ldots)$ целая рациональная функция от A_m, $B_m, \ldots$ с любыми коэффициентами из наших последовательностей или из скаляров, то $\lim\limits_{m\to\infty} f(A_m, B_m, \ldots) = f(A, B, \ldots)$.

§ 3. Можно доказать и теорему Коши-Больцано; но здесь необходимое и достаточное условие существования предела формулируется проще: последовательность $A_1, A_2, A_3, \ldots$ in inf. имеет предел тогда и только тогда, если при всяком натуральном n можно найти такое натуральное число M, что при натуральном $m \geqslant M$ в $A_m - A_{m+1}$ первые n элементов будут равны нулю.

Доказательство. 1) Условие необходимо: Если существует $A = \lim\limits_{m\to\infty} A_m$, то, по определению, при данном n можно найти натуральное M, так, что в $A - A_m$, и в $A - A_{m+1}$, при $m \geqslant M$ первые n элементов будут $= 0$; а следовательно, и в

$$(A - A_{m+1}) - (A - A_m) = A_m - A_{m+1}$$

первые n элементов равны нулю.

2) Условие достаточно: Пусть оно исполнено. Найдем ряд натуральных чисел: $M_1 \leqslant M_2 \leqslant M_3 \leqslant \ldots$ in inf. так, чтобы в $A_{M_\alpha} - A_{M_\alpha+1}$, первые α элементов были $= 0$ ($\alpha = 1, 2, 3, \ldots$ in inf.). Обозначим через a_α α-й элемент в A_{M_α} и пусть $A = [a_1, a_2, a_3, \ldots \text{in inf.}]$. Докажем, что $A = \lim A_m$. Пусть n данное натуральное число. Тогда в A_{M_n} 1-й элемент тот же, что и в A_{M_1}, т. е. a_1; 2-й элемент a_2 и т. д., наконец, n:й элемент a_m т. е. в $A - A_{M_n}$ первые n элементов $= 0$; с другой стороны при

$m > M_n$ в A_m первые n элементов те же что и в A_{M_n}, т. е. и в $A - A_m$ первые n элементов $= 0$, что и тр. док.

§ 4. Рассмотрим теперь бесконечный ряд (бесконечную сумму) наших последовательностей: $A_1 + A_2 + A_3 + \ldots$ in inf.

Обозначим: $S_m = A_1 + A_2 + \ldots + A_m$; если существует $\lim\limits_{m\to\infty} S_m = S$, то данный ряд — сходящийся, и S его сумма.

В противном случае ряд — расходящийся. Из теоремы § 3 следует необходимое и достаточное условие сходимости ряда. Ряд $A_1 + A_2 + A_3 + \ldots$ сходящийся тогда и только тогда, если при произвольном натуральном n можно найти такое натуральное M, что при натуральном $m \geqslant M$ в совокупности A_{m+1} первые n элементов будут равны 0, т. е., другими словами:

Для сходимости ряда необходимо и достаточно, чтобы общий его член стремился к нулю: $\lim\limits_{m\to\infty} A_m = 0$.

Из теорем § 2 вытекает, что сходящиеся ряды можно почленно складывать и вычитать и почленно умножать на данную последовательность. Наконец, теорема об умножении сходящихся рядов остается правильной. Пусть $S = A_1 + A_2 + A_3 + \ldots$ и $T = B_1 + B_2 + B_3 + \ldots$ два сходящиеся ряда. Возьмем ряд: $C_1 + C_2 + C_3 + \ldots$, где: $C_1 = A_1B_1$, $C_2 = A_1B_2 + A_2B_1$, вообще: $C_m = A_1B_m + A_2B_{m-1} + \ldots + A_mB_1$.

Рассмотрим случаи, когда $m = 2k$ четное и $m = 2k + 1$ нечетное.

$$C_{2k} = A_1B_{2k} + A_2B_{2k-1} + \ldots + A_kB_{k+1} + A_{k+1}B_k + \ldots + A_{2k}B_1;$$

$$C_{2k+1} = A_1B_{2k+1} + A_2B_{2k} + \ldots + A_{k+1}B_{k+1} + \ldots + A_{2k+1}B_1.$$

Но так как ряды S и T сходящиеся, то при данном n и при достаточно большом k в $A_k, A_{k+1}, \ldots B_k, B_{k+1} \ldots$ будут равны нулю первые n элементов; но тогда и в C_{2k} и в C_{2k+1} первые n элементов будут $= 0$; след. ряд $C_1 + C_2 + \ldots$ сходящийся. Но $C_1 + C_2 + \ldots + C_m - S_mT_m$ (где $S_m = A_1 + A_2 + \ldots + A_m$, $T_m = B_1 + B_2 + \ldots + B_m$) при достаточно большом m есть сумма произведений вида $A_\varkappa B_\lambda$, где $\varkappa$ или $\lambda \geqslant k$, т. е. в такой сумме все первые n элементов $= 0$. Следовательно: $(C_1 + C_2 + \ldots + C_m) - S_mT_m \to 0$, т. е. $C_1 + C_2 + C_3 + \ldots$ in. inf. $= ST$.

§ 5. Рассмотрим совокупность особого типа: пусть E_n совокупность, в которой все элементы, кроме n-го, равны нулю, а n-й элемент равен ε. Тогда, очевидно:

$E_mE_n = 0$ при $m \neq n$; $E_mE_n = E_n$. И всякая совокупность A представляется в виде бесконечного ряда:

$$A = a_1E_1 + a_2E_2 + a_3E_3 + \ldots \text{in. inf.}$$

Этот ряд сходящийся, ибо $\lim\limits_{m\to\infty} E_m = 0$. Это представление A — однозначно.

Заметим, что все элементы вида x_nE_n — при данном n — составляют кольцо, если x_n пробегает все элементы кольца $\mathbf{K}$; это кольцо элементов x_nE_n есть субалгебра для $\mathbf{A}$, и при этом — инвариантная субалгебра (идеал). Мы его обозначим через $\mathbf{A}_n$. Сумма нескольких и даже бесчисленного множества таких субалгебр $\mathbf{A}_n$ — тоже инвариантная субалгебра для $\mathbf{A}$. Две таких субалгебры $\sum\limits_\varkappa \mathbf{A}_\varkappa$ и $\sum\limits_\lambda \mathbf{A}_\lambda$ взаимно-простые, если никакое $\varkappa$ не равно никакому λ. В частности, при всяком данном n $\mathbf{A}_n$ взаимно-простое с суммою остальных субалгебр

$\mathbf{A}_m$. Мы можем сказать, что $\mathbf{A}$ есть прямая сумма всех субалгебр $\mathbf{A}_m$; будем обозначать:

$$\mathbf{A} = \mathbf{A}_1 \dotplus \mathbf{A}_2 \dotplus \mathbf{A}_3 \dotplus \ldots \text{ in. inf.}$$

Заметим, что это понятие о прямой сумме алгебр с бесчисленным множеством слагаемых отличается от понятия прямого произведения групп с бесчисленным множеством сомножителей тем, что каждый элемент такого прямого произведения групп представляется в виде произведения конечного числа компонентов, тогда как у нас каждый объект („совокупность") алгебры $\mathbf{A}$ представляется, как бесконечная сумма элементов из алгебр $\mathbf{A}_\alpha$.

Заметим, что алгебра $\mathbf{A}_n$ при всяком n просто изоморфна кольцу $\mathbf{K}$.

§ 6. Введем теперь понятие о бесконечном произведении наших совокупностей (которые мы в дальнейшем будем называть „объектами"). Пусть дана бесконечная последовательность объектов: $A_1, A_2, A_3, \ldots$ in inf.; возьмем: $P_m = A_1 A_2 \ldots A_m$ и выясним, существует ли $\lim\limits_{m\to\infty} P_m = P$; если этот предел существует и (как нам и здесь выгодно считать) отличен от нуля, то мы назовем наше бесконечное произведение сходящимся, а значение $P = A_1 A_2 A_3 \ldots$ in inf. — его произведением. Предположим сначала, что в P ни один элемент не равен нулю и не есть нулевой делитель.

По определению предела, взяв любое натуральное n, можно найти натуральное M так, что для всякого натурального $m \geqslant M$ в $P - A_1 A_2 \ldots A_m$ первые n элементов будут $= 0$; т. е. в $A_1 A_2 \ldots A_m$ первые n элементов такие же, как и в P, и по условию они $\neq 0$; но тогда, след., в A_{m+1} в A_{m+2} и т. д. in inf. первые n элементов равны ε, т. е. $\lim\limits_{m\to\infty} A_m = E$.

Обратно, пусть $\lim\limits_{m\to\infty} A_m = E$; след., взяв любое натуральное n, можно так найти M, что при $m \geqslant M$ во всех A_m первые n элементов будут равны ε; если обозначить через $a_1, a_2, \ldots a_n$ первые n элементов в произведении $A_1 A_2 \ldots A_m$ и затем, увеличивая n беспредельно, определить: $P = [a_1, a_2, a_3, \ldots$ in inf.$]$, то легко видеть, что $P = \lim\limits_{m\to\infty} (A_1 A_2 \ldots A_m)$, т. е. произведение $A_1 \cdot A_2 \cdot A_3 \ldots$ in inf. — сходящееся. Правда, еще следует поставить условие, что во всех A_λ ($\lambda = 1, 2, 3, \ldots$ in inf.) нет элементов, равных нулю. В этом случае можно положить:

$$A_\lambda = E + B_\lambda, \ \lim_{\lambda\to\infty} B_\lambda = 0 \text{ и } P = \prod_{\lambda=\lambda}^{\infty} (E + B_\lambda).$$

Мы должны во всех этих заключениях поставить специальное условие: во всех A_λ (и в P) нет элементов, которые были бы нулевыми делителями, ибо нулевой делитель может иметь единицу, отличную от ε и даже наверное имеет ее: пусть $ab = 0$, $\varepsilon - b = \delta$; тогда:

$$a\delta = a\varepsilon - ab = a\varepsilon = a.$$

§ 7. Рассмотрим вопрос о делении наших объектов. Если $C = AB$, то C „делится" на A (и на B); если $A = [a_1, a_2, \ldots]$, $B = [b_1, b_2, \ldots]$, $C = [c_1, c_2, \ldots]$, то при всяком m $c_m = a_m b_m$, т. е. c_m делится на a_m; это условие и достаточно для делимости C на A.

Если объект A делит всякий другой объект, то он делит и единицу E; т. е. всякий его элемент a_m есть делитель единицы ε, т. е. является „алгебраической единицей". Это условие очевидно и достаточно. Назовем и здесь A — „алгебраической единицей". В этом случае существует и $A^{-1} = E : A$.

Очевидно, что произведения, частные и степени алгебраических единиц — тоже алгебраические единицы. Т. е. все алгебраические единицы из $\mathbf{A}$ составляют группу (бесконечную).

Объект $A = [a_1, a_2, \ldots]$ идемпотентный тогда и только тогда, если все a_n — идемпотентные элементы * из $\mathbf{K}$. Произведение идемпотентных объектов — тоже идемпотентный объект (как следует из коммутативного закона для умножения). Следовательно, все идемпотентные объекты из $\mathbf{A}$ составляют обобщенную ассоциативную группу с единицей ** (ибо E — тоже идемпотент).

Объект $A = [a_1, a_2, \ldots]$ — нулевой делитель в $\mathbf{A}$ тогда и только тогда, если хоть один из элементов a_n есть нулевой делитель в $\mathbf{K}$ (или равен нулю), ибо, если a_m — нулевой делитель (или $= 0$) и $a_m b_m = 0$ ($b_m \neq 0$), то, обозначив: $B = (0, 0, \ldots b_m, 0, \ldots)$ (b_m стоит на m-м месте), получим: $AB = 0$, и $B \neq 0$.

Таким образом, в $\mathbf{A}$ всегда имеются нулевые делители, даже, если $\mathbf{K}$ — область целости.

Объект $A = [a_1, a_2, \ldots]$ нильпотентный тогда и только тогда, если все a_n — нильпотентные элементы в $\mathbf{K}$. Но здесь необходима оговорка: если α_n — индекс нильпотентности элемента a_n ($n = 1, 2, \ldots$ in. inf.), и все α_n ограничены: $\alpha_n \leqslant M$, то $A^M = 0$, M — индекс нильпотентности для A. Но если α_n — неограничены, то мы можем только утверждать, что $\lim\limits_{k\to\infty} A^k = 0$. В этом случае мы считаем объект A нильпотентным с бесконечным индексом нильпотентности.

Вследствие верности коммутативного закона для умножения всякий нильпотентный объект A есть и собственно-нильпотентный, ибо AB — тоже нильпотентный объект при любом объекте B. Таким образом, совокупность нильпотентных объектов из $\mathbf{A}$ (и обычных, и в нашем обобщенном смысле) есть инвариантная субалгебра для $\mathbf{A}$, которую мы и здесь назовем „радикалом".

Мы должны сделать еще одно дополнение: если A и B нильпотентны, то их сумма $A + B$ нильпотентна, если индексы нильпотентности конечны; но мы докажем, что $A + B$ нильпотентна и тогда, если один или оба индекса нильпотентности (у A и B) бесконечны. По определению предела, при данном n можно найти M так, что при $m \geqslant M$ в A^m и в B^m первые n элементов будут равны нулю. Возьмем:

$$(A + B)^{2m} = A^{2m} + 2mA^{2m-1}B + \frac{2m(2m-1)}{2} A^{2m-2}B^2 + \ldots + B^{2m}$$

(умножение на натуральное число есть просто повторение столько раз слагаемым); мы имеем сумму, в каждом слагаемом которой первые n элементов равны нулю; следовательно, и в сумме тоже первые n элементов равны нулю, и $\lim\limits_{k\to\infty} (A + B)^k = 0$.

Таким образом, радикал $\mathbf{P}$ алгебры $\mathbf{A}$ образуется всеми объектами $A = [a_1, a_2, \ldots]$, где элементы a_n берутся всевозможными способами

* Элемент 0 тоже входит в число идемпотентных элементов.

** Частный случай так наз. „сверхгруппы" Раутера; её „регулярная область" состоит из одного только объекта E.

из радикала R кольца $\mathbf{K}$. Если кольцо $\mathbf{K}$ полупростое (т. е. в данном случае — без нильпотентов), то и $\mathbf{A}$ — полупростая алгебра.

§ 8. Рассмотрим теперь вопрос об идеалах (инвариантных субалгебрах) в $\mathbf{A}$; пусть $\mathbf{B}$ — такой идеал, и $B = [b_1, b_2, b_3, \dots] \in \mathbf{B}$, $B' = [b_1', b_2', b_3', \dots] \in \mathbf{B}$; тогда и $B \pm B' = [b_1 \pm b_1', b_2 \pm b_2', \dots] \in \mathbf{B}$; если $A = [a_1, a_2, \dots]$ — любой объект из $\mathbf{A}$, то и $AB = [a_1 b_1, a_2 b_2, \dots] \in \mathbf{B}$, т. е. при всяком n n-е элементы всех объектов из $\mathbf{B}$ пробегают некоторый идеал Λ_n из $\mathbf{K}$ (при некоторых n может быть $\Lambda_n = 0$ или $\Lambda_n = \mathbf{K}$). Очевидно и обратное: если в $B = [b_1, b_2, b_3, \dots]$ при всяком n b_n пробегает некоторый идеал $\Lambda_n \in \mathbf{K}$, то B пробегает некоторый идеал $\mathbf{B} \in \mathbf{A}$.

Пусть каждый из идеалов Λ_n порождается конечным числом образующих: $a_{n1}, a_{n2}, \dots a_{nk_n}$. Пусть, далее:

$$A_\lambda' = [a_{1\lambda}, 0, 0, 0, \dots] \, (\lambda = 1, 2, \dots k_1); \; A_\lambda'' = [0, a_{2\lambda}, 0, 0, \dots] \, (\lambda = 1, 2, \dots k_2)$$

и т. д. Тогда для всякого объекта $B \in \mathbf{B}$ имеем:

$$B = \sum_{\lambda=1}^{k_1} x_{1\lambda} A_\lambda' + \sum_{\lambda=1}^{k_2} x_{2\lambda} A_\lambda'' + \dots \text{ in. inf. (ряд сходящийся).}$$

Можно объединить: $[x_{1\lambda}, x_{2\lambda}, \dots] = x_\lambda$ (здесь, например, при $\lambda > k_1$ заменяем $x_{1\lambda}$ нулем и т. д.); $A_\lambda' + A_\lambda'' + \dots = A_\lambda$ (здесь тоже, например, при $\lambda > k_1$ заменяем A_λ' нулем); тогда:

$$B = \sum_\lambda X_\lambda A_\lambda; \tag{1}$$

эта сумма или конечна или бесконечна (если числа $k_1, k_2, k_3, \dots$ неограничены); во всяком случае, такая сумма представляет сходящийся ряд со значением B. Следовательно, если в кольце $\mathbf{K}$ всякий идеал имеет конечный базис, то в $\mathbf{A}$ всякий идеал имеет конечный или счетный базис.

Пусть, в частном случае, все $k_n = 1$, т. е. все идеалы Λ_k — главные; пусть идеал Λ_n порождается элементом a_n, и $[a_1, a_2, a_3, \dots] = A$; тогда по (1): $B = XA$, где X — любой объект из $\mathbf{A}$; т. е. и идеал $\mathbf{B}$ — главный. Легко видеть и обратное: если $\mathbf{B}$ — главный идеал, то и все идеалы Λ_n главные идеалы кольца $\mathbf{K}$.

Если $\mathbf{B} = \Lambda_1 \dotplus \Lambda_2 \dotplus \Lambda_3 \dotplus \dots$ и $\mathbf{B}' = \Lambda_1' \dotplus \Lambda_2' \dotplus \Lambda_3' \dotplus \dots$ два идеала в $\mathbf{A}$, и $\mathbf{B} \supset \mathbf{B}'$ то, очевидно, при всяком n: $\Lambda_n \supset \Lambda_n'$; и обратно.

Для алгебры $\mathbf{A}$ неверна теорема о конечности возрастающей цепи идеалов, равно как и теорема конечности убывающей цепи идеалов. Так (обозначения, как и в § 5): $\mathbf{A}_1 \subset \mathbf{A}_1 \dotplus \mathbf{A}_2 \subset \mathbf{A}_1 \dotplus \mathbf{A}_2 \dotplus \mathbf{A}_3 \subset \dots$ in. inf. $\subset \mathbf{A}$ с другой стороны $\mathbf{A} \supset \mathbf{A}_2 \dotplus \mathbf{A}_3 \dotplus \dots$ in. inf. $\supset \mathbf{A}_3 \dotplus \mathbf{A}_4 \dotplus \dots$ in. inf. $\supset \bigcap \dots$ in inf.

Если $\mathbf{B} = \Lambda_1 \dotplus \Lambda_2 \dotplus \dots$ и $\mathbf{B}' = \Lambda_1' \dotplus \Lambda_2' \dotplus \dots$ два идеала из $\mathbf{A}$, и $\Gamma = \mathbf{M}_1 \dotplus \mathbf{M}_2 \dotplus \dots$ их сумма, а $\Delta = \mathrm{N}_1 \dotplus \mathrm{N}_2 \dotplus \dots$ их пересечение, то, очевидно, что для всякого n: $\mathbf{M}_n = \Lambda_n + \Lambda_n'$, а N_n — пересечение Λ_n и Λ_n' Это же верно и для случая нескольких (конечного числа) идеалов из $\mathbf{A}$. В случае же бесчисленного множества идеалов $\mathbf{B}, \mathbf{B}', \mathbf{B}'', \dots$ из $\mathbf{A}$ эта теорема тоже остается правильной; только надо сделать оговорку относительно бесконечных сумм: $\mathbf{B} + \mathbf{B}' + \mathbf{B}'' + \dots$ и $\Lambda_n + \Lambda_n' + \Lambda_n'' + \dots$ (для всякого n); их следует понимать, как совокупности всевозможных конечных сумм их элементов. (Для суммы $\mathbf{B} + \mathbf{B}' + \mathbf{B}'' + \dots$ in. inf.

это сводится к данному нами в § 4 определению суммы бесконечного ряда).

§ 9. Рассмотрим теперь частный случай, когда $\mathbf{K}$ есть абсолютная область целости, т. е. область обычных целых чисел. Пусть $A = [a_1, a_2, a_3, \dots]$ и $B = [b_1, b_2, b_3, \dots]$ два любых объекта из $\mathbf{A}$, неравных нулю и не нулевых делителей (т. е. все $a_n \neq 0$ и все $b_n \neq 0$). В таком случае при всяком n мы можем a_n разделить на b_n:

$$a_n = b_n q_n + r_n$$

где q_n — неполное частное, а r_n — остаток, причем: $0 \leqslant r_n < |b_n|$. Обозначим: $Q = [q_1, q_2, q_3, \dots]$, $R = [r_1, r_2, r_3, \dots]$; тогда:

$$A = BQ + R, \text{ где для всякого } n\text{: } 0 \leqslant r_n < |b_n|. \tag{2}$$

Такой вид имеет в $\mathbf{A}$ теорема о делении с остатком. Заметим, что некоторые r_n могут быть $= 0$, т. е. объект R может оказаться и нулевым делителем. Заметим также, что A может быть и нулевым делителем (и даже нулем), — формула (2) остается правильной; если, напр., $a_n = 0$, то мы считаем $r_n = 0$ и $q_n = 0$ ибо $b_n \neq 0$.

Что касается случая, когда B — нулевой делитель, то формула (2) здесь остается верной, если в A равны нулю все элементы, стоящие на тех же местах, где и равные нулю элементы в B (т. е., если $b_n = 0$, то и $a_n = 0$); в этом случае и в R равны нулю элементы, стоящие на тех же местах, а Q — неопределенно, — именно на тех местах, на которых в B стоят нули, в Q могут стоять любые целые числа.

§ 10. Принимая и в дальнейшем $\mathbf{K}$ абсолютной областью целости, рассмотрим, возможен ли в $\mathbf{A}$ алгорифм Эвклида. Возьмем два объекта из $\mathbf{A}$: $A = [a_1, a_2, a_3, \dots]$ и $B = [b_1, b_2, b_3, \dots]$, неравных нулю и не являющихся нулевыми делителями. Делим A на B:

$A = BQ + R$; далее, делим B на R:

$B = RQ' + R'$; далее делим R на R':

$R = R'Q'' + R''$ и т. д.

Но здесь необходимо еще много оговорок. Во-первых, напр., R (или какой-нибудь из дальнейших остатков) может оказаться нулевым делителем; это будет тогда, если при некотором n a_n разделится на b_n: $a_n = b_n q_n$; в таком случае пишем: $a_n = b_n(q_n - 1) + b_n$ и возьмем в Q n-й элемент равным $q_n - 1$, а в R n-й элемент равным b_n. В процессе дальнейших делений этот случай представится для всякого значка n. Пусть, например, $\mathrm{D}(a_1, b_1) = r_1^{(s)}$; тогда для $(s+1)$-го деления: $R^{(s-1)} = R^{(s)} Q^{(s+1)} + R^{(s+1)}$, и мы будем иметь: $r_1^{(s-1)} = r_1^{(s)} q_1^{(s)}$; мы и здесь пишем:

$$r_1^{(s-1)} = r_1^{(s)} (q_1^{(s)} - 1) + r_1^{(s)}$$

А для следующего деления: $R^{(s)} = R^{(s+1)} Q^{(s+2)} + R^{(s+2)}$ берем:

$$r_1^{(s)} = r_1^{(s)} \cdot 0 + r_1^{(s)},$$

т. е. во всех последующих $R^{(m)}$ первый элемент будет $= r_1^{(s)}$. И так мы поступаем для всякого значка n, когда такой случай встретится.

Во-вторых, возникает вопрос, окончится-ли когда-нибудь наш процесс. Для всякого значка n элементы a_n и b_n имеют общего наибольшего делители d_n, который находится алгорифмом Эвклида через k_n шагов (делений). Если числа k_n (при $n = 1, 2, 3, \dots$ in. inf.) ограничены: $k_n \leqslant K$ при всяком n, то через K шагов соответственно остаток будет: $D = [d_1, d_2, d_3, \dots]$ и алгорифм Эвклида будет закончен, ибо все последующие остатки будут равны D. Если же числа

k_n — неограничены, то алгорифм Эвклида будет продолжаться без конца. Но легко видеть, что при любом данном n найдется такое натуральное $M > 0$, что при $m \geq M$ m-й остаток будет иметь первые n элементов, равные $d_1, d_2, \ldots d_n$, т. е. в этом случае:

$$\lim_{m \to \infty} R^{(m)} = D.$$

Очевидно, что D есть общий наибольший делитель для A и B, — наибольший в том смысле, что он делится на всякий другой общий делитель объектов A, B.

§ 11. Дадим теперь другую форму алгорифма Эвклида в алгебре **A** (где К, как и раньше, абсолютная область целости), более эффективную для ее действительного выполнения. Пусть, по прежнему, $A = [a_1\ a_2, \ldots]$ и $B = [b_1, b_2, \ldots]$ два, неравных нулю, объекта из **A**, не являющихся нулевыми делителями. Находим общий наибольший делитель d_1 чисел a_1 и b_1 алгорифмом Эвклида: $a_1 = b_1 q_1 + r_1$, $b_1 = r_1 q_1' + r_1', \ldots r_1^{(k-2)} = r_1^{(k-1)} q_1^{(k)} + d_1$, $r_1^{(k-1)} = d_1 q_1^{(k+1)}$.

Теперь определяем: $Q_1 = [q_1, 0, 0, \ldots]$, $R_1 = [r_1, a_2, a_3, \ldots]$; тогда: $A = BQ_1 + R_1$ и далее: $B = R_1 Q_1' + R_1'$, где $Q_1' = [q_1', 0, 0, \ldots]$, $R_1' = [r_1', b_2, b_3, \ldots]$ и т. д., наконец, $R_1^{(k-1)} = R_1^{(k)} Q_1^{(k+1)} + R^{(k+1)}$, где: $Q^{(k+1)} = [q_1^{(k+1)} - 1, 0, 0, 0, \ldots]$; $R^{(k+1)} = [d_1, a_2, a_3, \ldots]$ или $R_1^{(k+1)} = [d_1, b_2, b_3, \ldots]$, смотря по тому, что k нечетное или четное; тогда как $R^{(k)} = [d_1, b_2, b_3, \ldots]$ при k нечетном и $R_1^{(k)} = [d_1, a_1, a_2, \ldots]$ при k — четном.

Теперь находим алгорифмом Эвклида общий наибольший делитель a_2 и b_2; например, при k_1 — четном:

$$a_2 = b_2 q_2 + r_2,\ b_2 = r_2 q_2' + r_2', \ldots\ r_1^{(k_1-1)} = d_2 q_2^{(k_1+1)};$$

берем:

$R_1^{(k)} = R_1^{(k+1)} Q_2 + R_2$, где $Q_2 = [0, q_2, 0, 0, \ldots]$, $R_2 = [d_1, r_2, a_3, a_4, \ldots]$ и т. д.

Так мы последовательно находим:

$$R_1^{(k_1)} = [d_1, (a_2, a_3, \ldots \text{ или } b_2, b_3, \ldots)],$$

$$R_2^{(k_2)} = [d_1, d_2, (a_3, a_4, \ldots \text{ или } b_3, b_4, \ldots)], \text{ и т. д.}$$

Ясно, что $\lim\limits_{m \to \infty} R_m^{(k_m)} = D = [d_1, d_2, d_3, \ldots]$. Число шагов нахождения D здесь всегда бесконечно.

§ 12. Наряду с общим наибольшим делителем двух объектов естественно определить их общее наименьшее кратное. Пусть (с прежними обозначениями) A и B два объекта, не нулевых делителя и неравных нулю; обозначим:

$$m_n = \mathrm{M}(a_n, b_n),\ M = [m_1, m_2, m_3, \ldots \text{ in. inf.}];$$

очевидно, что M общее кратное A и B, делящее всякое иное общее кратное A и B, т. е. общее наименьшее кратное. Возьмем все $a_n > 0$ и все $b_n > 0$ (такие объекты A и B можно назвать „положительными“); берем также все $d_n > 0$ и $m_n > 0$. Тогда, очевидно: $DM = AB$.

Если $D = E$ (единица), то объекты A и B „взаимно-простые“; это бывает тогда и только тогда, если при всяком n a_n и b_n взаимно-простые. В этом случае: $M = AB$.

Если $D(A, B) = D$ (с прежними обозначениями), то для всякого n можно найти целые числа x_n, y_n так, что:

$$a_n x_n + b_n y_n = d_n;$$

обозначив: $[x_1, x_2, x_3, \ldots] = X$, $[y_1, y_2, y_3 \ldots] = Y$, получим:

$$AX + BY = D,$$

т. е. такое уравнение разрешимо. В частности, если A и B взаимно простые, то разрешимо уравнение:

$$AX + BY = E.$$

А отсюда следуют теоремы Эвклида и др. теоремы о делимости.

§ 13. Поставим теперь вопрос о „простых“ объектах, т. е. таких, которые делятся только на „единицы“ и на самих себя*. „Единицами“ в случае, когда **K** абсолютная область целости, являются те объекты которых элементы равны ± 1. Два объекта, различающиеся только „единичным“ множителем, назовем (как обычно) ассоциированными. В вопросах делимости ассоциированные объекты могут быть заменены друг другом; поэтому можно брать объекты, все элементы которых положительны (мы назвали такие объекты положительными).

Легко видеть, что „простыми“ объектами являются такие и только такие, все элементы которых равны единице (т. е. числу 1), кроме одного, который равен какому-то простому числу p (и все ассоциированные с ними объекты). Пусть $P_n = [1, 1, \ldots p, 1, \ldots]$ такой простой объект; простое число p стоит на n-м месте. Пусть AB (обозначения, как и раньше) делится на P_n; следовательно, произведение $a_n b_n$ делится на p; но тогда или a_n или b_n (или оба) делятся на p, т. е или A или B делится на P_n. Это же верно и для нескольких сомножителей.

Докажем, что это верно и для произведения бесчисленного множества сомножителей (конечно, если произведение сходящееся и ни один из сомножителей не равен нулю и не есть нулевой делитель). Пусть $A = A_1 A_2 A_3 \ldots$ in inf. делится на простой объект $P_m = [1, 1, \ldots p, 1, \ldots]$ (p стоит на m-м месте). Возьмем $M > m$ и соответственно ему $N > 0$ так, чтобы при $n \geq N$ $A_1 A_2 \ldots A_n$ имело бы на m-м месте тот же элемент a_m, что и A; тогда $A_1 A_2 \ldots A_n$ будет делится на P_m, т. е. по крайней мере один из сомножителей $A_1 A_2, \ldots A_n$ делится на P_m.

Отсюда, как в элементарной теории чисел, следует однозначная разложимость всякого неособенного (т. е. не нулевого делителя и не равного нулю) объекта на простые множители (однозначная — с точностью до „единичных“ множителей); только произведение простых множителей будет вообще бесконечное. Именно, если

$$A = [a_1, a_2, a_3, \ldots \text{in inf.}], \text{ и } |a_k| = p_1^{(k)\alpha_1^{(k)}} p_2^{(k)\alpha_2^{(k)}} \ldots$$

разложение числа $|a_k|$, на простых множителей, и

$$[1, 1, \ldots p_1^{(k)}, 1, \ldots] = P_k' \quad (p_1^{(k)} \text{ на } k\text{-м месте}) \qquad \text{то}$$

$$A = P_1'^{\alpha'} P_2'^{\alpha_2'} \ldots P_1''^{\alpha''} P_2''^{\alpha''} \ldots \text{in nif.}$$

с точностью до „единичного“ множителя).

§ 14. Легко видеть, что алгорифм Эйлера переносится на наши (объекты: пусть R и R_1 два данных объекта, а $K_1, K_2, \ldots K_n$ тоже данные объекты, причем все эти объекты не обязательно не нулевые

* и, конечно, на ассоциированные с собою объекты.

делители, т. е. некоторые из них могут быть делителями нуля (только отличны от нуля); определяем $R_2, R_3, \ldots R_n, R_{m+1}$ следующей таблицей:

$$\begin{aligned} R &= K_1R_1 + R_2, \\ R_1 &= K_2R_2 + R_3 \\ &\cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ R_{n-1} &= K_nR_n + R_{n-1} \end{aligned} \tag{3}$$

Эта таблица по существу заменяет бесчисленное множество таких таблиц, соответственно каждому элементу наших объектов. Следствия из таблицы (3) — такие же, как для чисел. Именно, определив „скобки Эйлера", как и для чисел формулами:

$$[K_1] = K_1, \ [K_1, K_2] = K_1K_2 + E;$$

$$[K_1, K_2, \ldots K_{m+1}] = [K_1, K_2, \ldots K_m]\, K_{m+1} + [K_1, K_2, \ldots K_{m-1}], \tag{4}$$

получим:

$$R = [K_1, K_2, \ldots K_m]\, R_m + [K_1, K_2, \ldots K_{m-1}]\, R_{m+1}.$$

Далее, выводим, как и для чисел:

$$[K_1, K_2, \ldots K_m] = K_1[K_2, \ldots K_m] + [K_3, \ldots K_m];$$

$$[K_1, \ldots K_m] = [K_m, \ldots K_1];$$

$$[K_1, \ldots K_n] = [K_1, \ldots K_m]\,[K_{m+1}, \ldots K_n] + \\ + [K_1, \ldots K_{m-1}]\,[K_{m+2}, \ldots K_n]$$

при $m < n$; причем „пустые" скобки мы считаем равными E. Далее выведем:

$$(-1)^{n-1}[K_1, \ldots K_{n-1}]R_1 + (-1)^n[K_2, \ldots K_{n-1}]\, R = R_n; \tag{5}$$

$$[K_1, \ldots K_n]\,[K_2, \ldots K_{n-1}] - [K_1, \ldots K_{n-1}][K_2, \ldots K_n] = (-1)^n E. \tag{6}$$

Пусть теперь R и R_1 два данных объекта, над которыми мы совершаем алгорифм Эвклида, как в § 10, обозначая только те „частные", что мы обозначали через $Q, Q', \ldots$ теперь через $K_1, K_2, \ldots$, а „остатки" — через $R_2, R_3, \ldots$; тогда алгорифм Эвклида сольется с алгорифмом Эйлера (3). Но мы знаем, что алгорифм Эвклида может продолжаться без конца. Остановившись на n-м звене, мы найдем формулу (5). Пусть теперь n стремится к ∞. Мы видели, что тогда R_n стремится к D, где D — общий наибольший делитель R и R_1. Следовательно, правая, а значит и левая часть (5) стремятся к пределу при $n \to \infty$, и мы получим:

$$\pm [K_1, K_2, \ldots \text{in inf.}]\, R_1 \mp [K_2, K_3, \ldots \text{in inf.}] R = D; \tag{7}$$

двойной знак здесь зависит от того, что мы ведь можем взять $-D$ вместо D. Мы можем избегнуть этой неопределенности, написав формулу (7) в виде:

$$[-K_1, -K_2, \ldots \text{in inf.}]\, R_1 + [-K_2, -K_3, \ldots \text{in inf.}]\, R = D. \tag{7a}$$

Таким образом, скобки Эйлера и тут позволяют решить уравнение $RX + R_1Y = D$.

§ 15. В дальнейшем мы несколько обобщим наши объекты, беря за **K** не абсолютную область целости, а абсолютную область рациональности. Теперь элементы a_n объекта $A = a_1, a_2, \ldots$ in inf.] будут вообще дробными числами; написав каждую такую дробь в виде;

$a_n = \frac{b_n}{c_n}$ (эта дробь не обязательно несократима; при a_n целом можно написать $a_n = \frac{a_n}{1}$ и обозначив:

$$B = [b_1, b_2, \ldots], \ C = [c_1, c_2, \ldots],$$

получим: $A = \frac{B}{C}$. Здесь C — не нулевой делитель (все $c_n \neq 0$); но B может быть и нулевым делителем (именно, если A — нулевой делитель). Будем называть B, C — „целыми" объектами, а A — „дробным" объектом. Конечно, всякий целый объект A можно представить в виде „дроби": $\frac{A}{E}$. Если „числитель" B и „знаменатель" C дроби $A = \frac{B}{C}$ взаимно-простые, то дробь $\frac{B}{C}$ „несократима". Если же общий наибольший делитель B и C есть $D \neq E$, то $B = DB_1$, $C = DC_1$ и B_1 и C_1 взаимно-простые; тогда

$$A = \frac{B}{C} = \frac{B_1}{C_1}.$$

Представление A в виде несократимой дроби однозначно *.

Подобно же, несколько дробей (конечное число) можно привести к одному знаменателю. А далее, легко видеть, что и рациональные действия над нашими „дробями" совершаются по тем же правилам, как и над обычными дробями. Только при делении для возможности и однозначности деления делитель (т. е. его числитель) не должен быть ни нулем, ни нулевым делителем.

Если несократимая дробь $A = \frac{B}{C}$ не есть нулевой делитель, то ее можно (как и обычные, числовые дроби) разложить в непрерывную дробь посредством алгорифма Эвклида, только, поскольку алгорифм Эвклида здесь может оказаться бесконечным, и получаемая непрерывная дробь может быть бесконечной, сходящейся в том смысле, как мы определили в § 2; т. е. последовательность ее подходящих дробей будет сходиться к данной дроби A. Подходящие дроби находятся обычным способом посредством алгорифма Эйлера.

§ 16. Если алгебру **A** представить обычным (регулярным) способом при помощи матриц, то каждому объекту $A = [a_1, a_2, \ldots]$ будет соответствовать бесконечная диагональная матрица, у которой по диагонали расположены элементы $a_1, a_2, \ldots$

Таким образом, алгебру **A** можно рассматривать, как частный случай матричной алгебры над кольцом **K**.

§ 17. Можно обобщить нашу алгебру **A** следующим образом: пусть нам дана последовательность коммутативных колец $\mathbf{K}_1, \mathbf{K}_2, \ldots$ in inf. Объект $A = [a_1, a_2, a_3, \ldots$ in inf.] из **A** мы определяем следующим образом: $a_n \in \mathbf{K}_n$ ($n = 1, 2 \ldots$ in inf.), т. е. каждый элемент a_n из A берется из своего особого кольца $\mathbf{K}_n$. Эти кольца $\mathbf{K}_n$ — весьма разнообразны и независимы друг от друга; напр., некоторые из них (или все они) могут быть областями целости, или даже полями. Мы получаем, таким образом, бесконечную прямую сумму различных по своей структуре (коммутативных) колец**. Легко убедиться, что все изложенное в §§ 1—8, остается верным и для новой, более общей алгеб-

* Если B — нулевой делитель, то некоторые элементы в B равны 0; пусть $b_n = 0$, тогда в D n-й элемент тот же, что и в C: $d_n = c_n$. Если дробь $\frac{B}{C}$ несократима, то при $b_n = 0$ должно быть $c_n = 1$.

** Возможно, конечно, дальнейшее обобщение — на некоммутативные кольца; но на этом мы сейчас не останавливаемся.

ры $\mathbf{A}^*$. Следует только выяснить следующий пункт: и здесь, как в § 5:

$$\mathbf{A} = \mathbf{A}_1 \dot{+} \mathbf{A}_2 \dot{+} \mathbf{A}_3 \dot{+} \dots \text{ in inf.}, \tag{8}$$

только там все субалгебры A_n были изоморфны друг другу и изоморфны кольцу $\mathbf{K}$; а здесь A_n изоморфна $\mathbf{K}_n$, т. е. друг с другом A_n вообще не изоморфны. Так следует выяснить, не зависит ли A от того порядка, в каком стоят в (8) субалгебры $\mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2, \dots$ Дело здесь касается стремления к пределу. Пусть

$$\overline{\mathbf{A}} = \mathbf{A}_{\alpha_1} \dot{+} \mathbf{A}_{\alpha_2} \dot{+} \mathbf{A}_{\alpha_3} \dot{+} \dots \text{ in inf.}, \tag{9}$$

где $\mathbf{A}_{\alpha_n}$ — те же $\mathbf{A}_n$, только в ином порядке. Пусть: $A_1, A_2, A_3, \dots$ in inf. — последовательность объектов из $\mathbf{A}$, стремящихся к определенному пределу A. Пусть, далее, $\bar{A}_1, \bar{A}_2, \bar{A}_3, \dots$ in inf. объекты, получаемые из $A_1, A_2, A_3, \dots$ при переходе от $\mathbf{A}$ к $\overline{\mathbf{A}}$, а $\bar{A}$ — объект, получаемый тем же способом из A, т. е., если, например $A = [a_1, a_2, a_3, \dots]$, где $a_n \in \mathbf{K}_n$, то $\bar{A} = [a_{\alpha_1}, a_{\alpha_2}, a_{\alpha_3}, \dots]$, где $a_{\alpha_n} \in \mathbf{K}_{\alpha_n}$.

Надо выяснить, будет ли $\bar{A}$ пределом последовательности $\bar{A}_1, \bar{A}_2, \bar{A}_3, \dots$ А для этого достаточно рассмотреть случай, когда $A = 0$ (т. е. все элементы в A — нули соответствующих колец); тогда и $\bar{A} = 0$. Итак, пусть $\lim\limits_{m \to \infty} A_m = 0$. Но это значит, что, взяв любое n, можно найти $M > 0$ так, что при всяком $m > M$ в A_m первые n элементов будут нули (из соответствующих колец). Но вместо n можно взять наибольшее из чисел $\alpha_1, \alpha_2, \dots \alpha_n$; тогда в A_m будут (при $m > M$**) равным нулю и все элементы с индексами $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$, т. е. это значит, что в $\bar{A}_m$ первые n элементов будут нули; а это и говорит о том, что $\lim\limits_{m \to \infty} \bar{A}_m = 0$. Следовательно, предел не зависит от перестановки слагаемых в (8).

Заметим, что $\mathbf{A}$ тогда и только тогда полупростая алгебра, если все кольца $\mathbf{K}_n$ „полупростые".

§ 18. Рассмотрим еще случай, когда все $\mathbf{K}_n$ являются конечными простыми полями с различными характеристиками p_n (простые числа). Определим еще действие: умножение объекта A на натуральное число m: $mA = \underbrace{A + A + \dots + A}_{m \text{ слагаемых}}$.

Если при всяком n числа p_n ограничены, то среди них только конечное число различных; обозначив через M общее наименьшее кратное всех этих различных чисел p_n, мы будем иметь для всякого объекта $A \in \mathbf{A}$: $MA = 0$.

Если же числа p_n неограничены, т. е. их бесчисленное множество различных, то будет верно следующее: взяв любое натуральное число n, можно найти такое натуральное число M, что для всякого объекта A в MA первые n элементов будут равны нулю. Действительно, для этого следует только взять за M — общее наименьшее кратное всех характеристик $p_1, p_2, \dots p_n$.

Любопытен случай, когда все $p_n = 2$. В такой алгебре $\mathbf{A}$ сумма $A + A = 0$ для всякого объекта A. В этой алгебре за исключением единицы E всякий объект является нулевым делителем.

* За исключением умножения на скаляр (§ 1, III), ибо теперь нет скаляров, общих всем $\mathbf{K}_n$.

** Это M уже не предыдущее, а новое, подходящим образом выбранное.

ЗАПИСКИ МАТЕМАТИЧЕСКОГО ОТДЕЛЕНИЯ ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКОГО ФАКУЛЬТЕТА ХГУ И ХАРЬКОВСКОГО МАТЕМАТИЧЕСКОГО ОБЩЕСТВА

Том XXIII 1952

О НЕКОТОРЫХ ОСНОВНЫХ ФОРМУЛАХ ИНТЕГРАЛЬНОЙ ГЕОМЕТРИИ (II)

Г. И. Дринфельд

(Харьков)

В предыдущей статье [1] выражения для кинематической плотности на плоскости, плотности множества линейных элементов в пространстве, а также для некоторых других мер, инвариантных относительно группы евклидовых движений, были получены как инварианты продолженной группы. В настоящей статье те же выражения и ряд других найдены как интегральные инварианты некоторой группы, порождаемой группой евклидовых движений, но не являющейся ее продолжением.

В параграфе 1, предлагаемым нами общим методом, будет установлена известная формула Картана. Эта формула обобщается в параграфе 2 на случай множества плоскостей и множества прямых в пространстве. В параграфе 3 тем же методом найдена кинематическая плотность в пространстве, а в параграфе 4 — плотность множества линейных элементов. Далее, в параграфе 5 рассмотрены множества „пар" (прямых, плоскостей). Наконец, в последнем параграфе показана возможность получения тем же методом основных формул интегральной геометрии в неевклидовом пространстве.

Нам представляется, что настоящая работа и статья [1] с достаточной полнотой исчерпывают вопрос о применении теории интегральных инвариантов непрерывных групп к выводу основных (исходных) формул интегральной геометрии как в евклидовом, так и в неевклидовом пространстве.

Обобщения на n-мерное пространство не вызывают существенных затруднений.

Непосредственное отношение к предмету настоящей статьи имеют работы Мюллера [2] и Сантало [3].

§ 1. Найдем меру множества прямых

$$ux + vy = 1, \tag{1}$$

инвариантную относительно группы G преобразований

$$\begin{aligned} x' &= a + x\cos\alpha - y\sin\alpha, \\ y' &= b + x\sin\alpha + y\cos\alpha. \end{aligned} \tag{2}$$

Преобразования (2) переводят прямую (1) в прямую

$$Ux + Vy = 1,$$

где

$$U = \frac{u\cos\alpha + v\sin\alpha}{1 - au - bv}, \quad V = \frac{v\cos\alpha - u\sin\alpha}{1 - au - bv}. \tag{3}$$

Таким образом, группа G преобразований (2) в плоскости (x, y) порождает группу $\tilde{G}$ преобразований (3) в плюккеровой плоскости (u, v).

Очевидно, что мера множества прямых (1), инвариантная относительно группы G совпадает с мерой множества точек (u, v), инвариантной относительно группы $\tilde{G}$.

Так как, при малых α, a, b

$$f(U, V) = f(u, v) + \alpha X_1(f) + aX_2(f) + bX_3(f) + \ldots,$$

где

$$X_1(f) = v\frac{\partial f}{\partial u} - u\frac{\partial f}{\partial v}, \quad X_2(f) = u^2\frac{\partial f}{\partial u} + uv\frac{\partial f}{\partial v}, \quad X_3(f) = uv\frac{\partial f}{\partial u} + v^2\frac{\partial f}{\partial v}, \tag{4}$$

то выражения (4) являются инфинитезимальными операторами группы $\tilde{G}$.

Необходимые и достаточные условия инвариантности интеграла

$$\int M du dv$$

относительно группы $\tilde{G}$ (см. напр. [1]) приводят к системе уравнений

$$X_1(M) = 0, \; X_2(M) + 3uM = 0, \; X_3(M) + 3vM = 0,$$

единственным, с точностью до постоянного множителя, решением которой является

$$M = (u^2 + v^2)^{-3/2}.$$

Мы получили таким образом формулу Картана

$$\iint \frac{du dv}{(u^2 + v^2)^{3/2}} \tag{5}$$

для меры множества прямых (1), инвариантной относительно евклидовой группы движений.

Если положить

$$-\frac{u}{v} = \operatorname{tg}\varphi, \; \frac{1}{v} = n,$$

то интеграл (5) заменится интегралом

$$\iint |\cos\varphi| \, dn d\varphi, \tag{6}$$

Если же положить

$$\frac{u}{v} = \operatorname{tg}\psi, \; \frac{1}{\sqrt{u^2 + v^2}} = p,$$

то интеграл (5) заменится интегралом

$$\iint dp d\psi,$$

приведенным у Бляшке [4] в качестве меры множества прямых.

Из выражения (6) для меры множества прямых, в частности, сразу следует известная теорема о мере множества прямых, пересекающих отрезок данной длины.

§ 2. Так как мы снова будем пользоваться лишь условиями инвариантности, выраженными с помощью инфинитезимальных операторов группы, то мы можем ограничиться рассмотрением преобразований близких к тождественному. Поэтому, евклидово движение в пространстве (x, y, z) определяется формулами

$$\begin{aligned} x_1 &= a + x + \alpha y + \beta z, \\ y_1 &= b - \alpha x + y + \gamma z, \\ z_1 &= c - \beta x - \gamma y + z. \end{aligned} \tag{7}$$

Преобразования (7) переводят плоскость

$$ux + vy + wz = 1 \tag{8}$$

в плоскость

$$Ux + Uy + Wz = 1$$

Здесь

$$U = \frac{u - v\alpha - w\beta}{1 - au - bv - cw}, \quad V = \frac{u\alpha + v - w\gamma}{1 - au - bv - cw}, \quad W = \frac{u\beta + v\gamma + w}{1 - au - bv - cw}. \tag{9}$$

Таким образом группа G_3 преобразований (7) в пространстве (x, y, z) порождает в плюккеровом пространстве (u, v, w) группу $\tilde{G}_3$ преобразований (9).

Инфинитезимальными операторами группы $\tilde{G}_3$ являются операторы

$$X_1(f) = -v\frac{\partial f}{\partial u} + u\frac{\partial f}{\partial v}, \; X_2(f) = -w\frac{\partial f}{\partial u} + u\frac{\partial f}{\partial w}, \; X_3(f) = -w\frac{\partial f}{\partial v} + v\frac{\partial f}{\partial w}, \tag{10}$$

$$X_4(f) = u\left(u\frac{\partial f}{\partial u} + v\frac{\partial f}{\partial v} + w\frac{\partial f}{\partial w}\right), \; X_5(f) = \frac{v}{u}X_4(f), \; X_6(f) = \frac{w}{u}X_4(f)$$

Действительно, как легко проверить, с точностью до малых порядка выше первого

$$f(U, V, W) = f(u, v, w) + \alpha X_1(f) + \beta X_2(f) + \gamma X_3(f) + aX_4(f) + bX_5(f) + cX_6(f).$$

Необходимыми и достаточными условиями инвариантности, относительно группы $\tilde{G}_3$, интеграла

$$\int M du dv dw$$

являются равенства

$$X_1(M) = 0, \; X_2(M) = 0, \; X_3(M) = 0,$$
$$X_4(M) + 4uM = 0, \; X_5(M) + 4vM = 0, \; X_6(M) + 4wM = 0,$$

из которых, с точностью до постоянного множителя, следует

$$M = (u^2 + v^2 + w^2)^{-2},$$

Следовательно, инвариантная относительно группы G_3, мера множества плоскостей выражается интегралом

$$\int \frac{du dv dw}{(u^2 + v^2 + w^2)^2}, \tag{11}$$

который, положив

$$p=\frac{1}{\sqrt{u^2+v^2+w^2}},\ \cos\varphi=pu,\ \cos\psi=pv,\ \cos\chi=pw,$$

можно заменить интегралом

$$\int\frac{\sin\varphi\sin\psi}{\cos\chi}\,d\varphi d\psi dp, \tag{12}$$

наглядно-геометрический смысл которого очевиден.

Заметим, что переход от интеграла (11) к интегралу (12) проще всего осуществить внешним (альтернирующим) умножением выражений для $\sin\varphi\,d\varphi$, $\sin\psi\,d\psi$, dp.

Рассмотрим теперь множество прямых

$$x=uz+\xi,$$
$$y=vz+\eta.$$

Легко проверить, что группа G_3 порождает в пространстве (u, v, ξ, η) группу $\tilde{G}_4$ с инфинитезимальными операторами

$$\frac{\partial f}{\partial\xi},\ \frac{\partial f}{\partial\eta},\ u\frac{\partial f}{\partial\xi}+v\frac{\partial f}{\partial\eta},\ u\frac{\partial f}{\partial v}-v\frac{\partial f}{\partial u}+\xi\frac{\partial f}{\partial\eta}-\eta\frac{\partial f}{\partial\xi}, \tag{13}$$

$$(1+u^2)\frac{\partial f}{\partial u}+u\xi\frac{\partial f}{\partial\xi}+uv\frac{\partial f}{\partial v}+v\xi\frac{\partial f}{\partial\eta},\ uv\frac{\partial f}{\partial u}+u\eta\frac{\partial f}{\partial v}+$$
$$+(1+v^2)\frac{\partial f}{\partial v}+v\eta\frac{\partial f}{\partial\eta}.$$

Легко также проверить, что группа с инфинитезимальными операторами (13) имеет, с точностью до постоянного множителя, единственный интегральный инвариант четвертого порядка:

$$\int\frac{du\,dv\,d\eta\,d\xi}{(1+u^2+v^2)^2}. \tag{14}$$

Этот интеграл и является, инвариантной относительно евклидовой группы движений, мерой множества прямых в пространстве.

Если положить

$$\cos\varphi=\frac{u}{\sqrt{1+u^2+v^2}},\quad \cos\psi=\frac{v}{\sqrt{1+u^2+v^2}},$$

то интеграл (14) заменится интегралом

$$\int\sin\varphi\sin\psi\,d\varphi\,d\psi\,d\xi\,d\eta.$$

§ 3. Кинематическую плотность в пространстве можно рассматривать как плотность множества точек N и пар (u, v) проходящих через них взаимно-перпендикулярных прямых.

Обозначим координаты точки N через ξ, η, ζ и косинусы углов прямых u, v с осями, соответственно, через l, m, p; l_1, m_1, p_1.

Уравнениями прямых u, v являются

$$\frac{x-\xi}{l}=\frac{y-\eta}{m}=\frac{z-\zeta}{p};\quad \frac{x-\xi}{l_1}=\frac{y-\eta}{m_1}=\frac{z-\zeta}{p_1}, \tag{15}$$

где

$$l^2+m^2+p^2=l_1^2+m_1^2+p_1^2=1,$$
$$ll_1+mm_1+pp_1=0. \tag{16}$$

Выполнив в уравнениях (15) замену (7), найдем, что величины ξ, η, ζ; l, m, l_1 преобразуются по формулам

$$\begin{aligned}
\bar{\xi}&=\xi-a-\beta\zeta-\alpha\eta,\\
\bar{\eta}&=\eta-b-\gamma\zeta+\alpha\eta,\\
\bar{\zeta}&=\zeta-c+\beta\xi+\gamma\eta,\\
\bar{l}&=l-\beta p-\alpha m,\\
\bar{m}&=m-\gamma p+\alpha l,\\
\bar{l}_1&=l_1-\beta p_1-\alpha m_1,
\end{aligned} \tag{17}$$

а величины p, m_1 p_1 — по формулам

$$\begin{aligned}
\bar{p}&=p+\gamma m+\beta l,\\
\bar{m}_1&=m_1-\gamma p_1+\alpha l_1,\\
\bar{p}_1&=p_1+\gamma m_1+\beta l_1;
\end{aligned} \tag{18}$$

причем

$$\bar{l}^2+\bar{m}^2+\bar{p}^2=1,\ \bar{l}_1^2+\bar{m}_1^2+\bar{p}_1^2=1,\ \bar{l}\,\bar{l}_1+\bar{m}\,\bar{m}_1+\bar{p}\,\bar{p}_1=0.$$

Легко проверить, что преобразования (17), ввиду (18), образуют группу. Инфинитезимальными операторами этой группы являются

$$\frac{\partial f}{\partial\xi},\ \frac{\partial f}{\partial\eta},\ \frac{\partial f}{\partial\zeta};\ -\eta\frac{\partial f}{\partial\xi}+\xi\frac{\partial f}{\partial\eta}-m\frac{\partial f}{\partial l}+b\frac{\partial f}{\partial m}-m\frac{\partial f}{\partial l_1};$$
$$-\zeta\frac{\partial f}{\partial\xi}+\xi\frac{\partial f}{\partial\zeta}-p\frac{\partial f}{\partial l}-p_1\frac{\partial f}{\partial l_1};\ -\zeta\frac{\partial f}{\partial\eta}+\eta\frac{\partial f}{\partial\zeta}-p\frac{\partial f}{\partial m}, \tag{19}$$

Так как эти операторы линейно не связаны, то группа транзитивна и имеет единственный интегральный инвариант шестого порядка

$$\int M\,d\xi\,d\eta\,d\zeta\,dl\,dm\,dp. \tag{20}$$

Для того, чтобы интеграл (20) был интегральным инвариантом группы с инфинитезимальными операторами (19) необходимо и достаточно чтобы удовлетворялись условия

$$\frac{\partial M}{\partial\xi}=\frac{\partial M}{\partial\eta}=\frac{\partial M}{\partial\zeta}=0, \tag{21}$$

$$-m\frac{\partial M}{\partial l}+l\frac{\partial M}{\partial m}-m_1\frac{\partial M}{\partial l_1}-M\frac{\partial m_1}{\partial l_1}=0, \tag{22}$$

$$p\frac{\partial M}{\partial l}+p_1\frac{\partial M}{\partial l_1}+M\left\{\frac{\partial p}{\partial l}+\frac{\partial p_1}{\partial l_1}\right\}=0, \tag{23}$$

$$p\frac{\partial M}{\partial m}+M\frac{\partial p}{\partial m}=0. \tag{24}$$

Из уравнений (21) и (24) следует

$$M=\frac{\omega(l, l_1)}{p}=\frac{\omega(l, l_1)}{\sqrt{1-l^2-m^2}}.$$

Подставив это выражение в уравнения (22) — (23), получим

$$m\frac{\partial \omega}{\partial l}+\frac{\partial (m_1\omega)}{\partial l_1}=0$$

$$p\frac{\partial \omega}{\partial l}+\frac{\partial (p_1\omega)}{\partial l_1}=0$$

— систему уравнений, из которой, на основании соотношений (16) следует

$$-ll_1\frac{\partial \omega}{\partial l}+(1-l_1^2)\frac{\partial \omega}{\partial l_1}=l_1\omega,$$

$$(1-l^2)\frac{\partial \omega}{\partial l}-ll_1\frac{\partial \omega}{\partial l_1}=l\omega.$$

Без труда находим теперь

$$\omega=\frac{1}{\sqrt{|1-l^2-l_1^2|}}.$$

Интегральный инвариант (20), таким образом, существует, единствен и выражается интегралом

$$\int\frac{dldmdl_1}{\sqrt{1-l^2-m^2}}\cdot\frac{d\xi d\eta d\zeta}{\sqrt{|1-l^2-l_1^2|}}.$$

Это выражение для кинематической плотности в пространстве можно заменить другими — эквивалентными.

§ 4. Мы найдем теперь те же выражения для плотности множества линейных элементов в пространстве, которые были найдены в предыдущей статье другим методом.

Прямая

$$\frac{x-x_0}{l}=\frac{y-y_0}{m}=\frac{z-z_0}{p}\ ;\quad l^2+m^2+p^2=1$$

при преобразованиях (7) переходит в прямую

$$\frac{x-\bar{x}_0}{\bar{l}}=\frac{y-\bar{y}_0}{\bar{m}}=\frac{z-\bar{z}_0}{\bar{p}}\quad \bar{l}+\bar{m}^2+\bar{p}^2=1,$$

где, с точностью до малых порядка выше первого,

$$\left.\begin{aligned}
\bar{x}_0&=x_0-a-\beta z_0-\alpha y_0,\\
\bar{y}_0&=y_0-b-\gamma z_0+\alpha x_0,\\
\bar{z}_0&=z_0-c+\beta x_0+\gamma y_0;\\
\bar{l}&=l-\beta p-\alpha m,\\
\bar{m}&=m-\gamma p+\alpha l,\\
\bar{p}&=p+\gamma m+\beta l.
\end{aligned}\right\}\qquad (25)$$

Преобразования (25) образуют в пространстве (x_0, y_0, z_0, l, m) группу с инфинитезимальными операторами

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{\partial f}{\partial x_0},\ \frac{\partial f}{\partial y_0},\ \frac{\partial f}{\partial z_0},\ -y_0\frac{\partial f}{\partial x_0}+x_0\frac{\partial f}{\partial y_0}-m\frac{\partial f}{\partial l}+l\frac{\partial f}{\partial m},\\
&-z_0\frac{\partial f}{\partial x_0}+x_0\frac{\partial f}{\partial z_0}-p\frac{\partial f}{\partial l},\ -z_0\frac{\partial f}{\partial y_0}+y_0\frac{\partial f}{\partial z_0}-p\frac{\partial f}{\partial m}
\end{aligned}\right\},\qquad (26)$$

и поэтому условия инвариантности интеграла

$$\int Mdx_0dy_0dz_0dldm$$

таковы

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{\partial M}{\partial x_0}=\frac{\partial M}{\partial y_0}=\frac{\partial M}{\partial z_0}=0,\\
&-m\frac{\partial M}{\partial l}+l\frac{\partial M}{\partial m}=0,\\
&-p\frac{\partial M}{\partial l}+\frac{l}{p}M=0,\\
&-p\frac{\partial M}{\partial m}+\frac{m}{p}M=0.
\end{aligned}\right.\qquad (27)$$

Единственным, с точностью до постоянного множителя, решением системы (27) является функция

$$M=\frac{1}{\sqrt{1-l^2-m^2}}=\frac{1}{p}.$$

Объемом группы (25) — (26) является, таким образом, интеграл

$$\int\frac{dx_0dy_0dz_0dldm}{p},$$

который, если положить

$$l=\cos\alpha,\quad m=\cos\beta,\quad p=\sqrt{1-l^2-m^2}=\cos\gamma,$$

можно заменить интегралом

$$\int\frac{\sin\alpha\sin\beta}{\cos\gamma}\,d\alpha d\beta dx_0dy_0dz_0.$$

Этим интегралом и выражается мера множества линейных элементов.

§ 5. Как известно [5], если операторы

$$X_k(f)=\xi_{ki}\frac{\partial f}{\partial x^i},\quad k=1,\ 2,\ \dots\ r$$

являются инфинитезимальными операторами группы G, то дважды расширенная группа имеет инфинитезимальные операторы

$$X_i(f)+X_i'(f),\quad i=1,\ 2,\ \dots\ r,$$

где $X_i'(f)$ — оператор, полученный из $X_i(f)$ заменой $x^1, \dots x^n$, соответственно, на $x_1^1, \dots x_1^n$, причем переменные $x_1^1, \dots x_1^n$ не зависят от $x^1, \dots x^n$.

Если группа G транзитивна, то, будучи дважды расширенной, она или останется транзитивной (тогда G называется дважды транзитивной) или станет интранзитивной и будет допускать абсолютные инварианты, называемые двойными инвариантами группы G.

Очевидно, что если интеграл

$$\int M(x^1, \dots x^n)\,dx^1, \dots dx^n$$

является объемом группы G, то интеграл

$$\int M(x_1^1, \dots x_1^n)\,dx_1^1 \dots dx_1^n$$

является объемом группы с операторами $X'_k(f)$, а интеграл

$$\int M(x^1, \ldots x^n) M(x_1^1, \ldots x_1^n) dx_1^1 \ldots dx_1^n dx^1 \ldots dx^n$$

является интегральным инвариантом дважды расширенной группы — единственным (следовательно — объемом), если группа G дважды транзитивна. Если группа G не дважды транзитивна и функции

$$\varphi_i(x^1, \ldots, x^n;\ x_1^1, \ldots x_1^n), \quad i = 1, \ldots s$$

являются полной совокупностью ее независимых двойных инвариантов, то самым общим интегральным инвариантом $2n$-го порядка является интеграл

$$\int \Pi(\varphi_1, \ldots, \varphi_s) M(x^1, \ldots, x^n) M(x_1^1, \ldots, x_1^n)\ dx_1^1, \ldots, dx_1^n dx^1 \ldots dx^n,$$

в котором Π — произвольная функция аргументов.

Преобразования (7), будучи применены к паре плоскостей

$$ux + vy + wz = 1,$$
$$u_1 x + v_1 y + w_1 z = 1,$$

определяют в пространстве $(u, v, w; u_1, v_1\ w_1)$ группу $\widetilde{G}_6$ являющуюся расширением группы $\widetilde{G}_3$ с инфинитезимальными операторами (10). Операторы группы $\widetilde{G}_6$

$$X_i(f) + X_i^1(f), \qquad i = 1, 2, \ldots 6,$$

где $X_i(f)$ — операторы (10), как легко проверить, связаны одной линейной зависимостью. Следовательно, группа $\widetilde{G}_6$ имеет один абсолютный инвариант. Но таким инвариантом является

$$\cos^2 \omega = \frac{(uu_1 + vv_1 + ww_1)^2}{(u^2 + v^2 + w^2)(u_1^2 + v_1^2 + w_1^2)}$$

и поэтому самым общим интегральным инвариантом шестого порядка группы $\widetilde{G}_6$ является интеграл

$$\int \varphi(\cos^2 \omega) \frac{du dv dw}{(u^2 + v^2 + w^2)^2} \cdot \frac{du_1 dv_1 dw_1}{(u_1^2 + v_1^2 + w_1^2)^2}.$$

Подобным образом легко рассмотреть случай множества пар прямых, пар: прямая и плоскость и т. п.

§ 6. Гиперболическое движение выражается преобразованиями, которые в окрестности тождественного преобразования имеют вид

$$x' = \frac{x - \alpha y + \beta}{1 + \beta x + \gamma y}, \quad y' = \frac{\alpha x + y + \gamma}{1 + \beta x + \gamma y} \tag{28}$$

в двумерном пространстве и вид

$$x' = \frac{x - \alpha y - \beta z + \gamma}{1 + \gamma x + \varepsilon y + \eta z}, \quad y' = \frac{\alpha x + y - \delta z + \varepsilon}{1 + \gamma x + \varepsilon y + \eta z}, \quad z' = \frac{\beta x + \delta y + z + \eta}{1 + \gamma x + \varepsilon y + \eta z} \tag{29}$$

в трехмерном пространстве.

Преобразования (28) образуют группу с инфинитезимальными операторами

$$-y\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y}, \quad (1 - x^2)\frac{\partial f}{\partial x} - xy\frac{\partial f}{\partial y}, \quad -xy\frac{\partial f}{\partial x} + (1 - y^2)\frac{\partial f}{\partial y}, \tag{30}$$

а преобразования (29) — с инфинитезимальными операторами

$$\begin{gathered} -y\frac{\partial f}{\partial x} + x\frac{\partial f}{\partial y}, \quad z\frac{\partial f}{\partial x} - x\frac{\partial f}{\partial z}, \quad -z\frac{\partial f}{\partial y} + y\frac{\partial f}{\partial z} \\ (1 - x^2)\frac{\partial f}{\partial x} - xy\frac{\partial f}{\partial y} - xz\frac{\partial f}{\partial z}, \\ -xy\frac{\partial f}{\partial x} + (1 - y^2)\frac{\partial f}{\partial y} - yz\frac{\partial f}{\partial z}, \\ -xz\frac{\partial f}{\partial x} - zy\frac{\partial f}{\partial y} + (1 - z^2)\frac{\partial f}{\partial z}. \end{gathered} \tag{31}$$

Условия инвариантности интеграла

$$\int M dx\, dy$$

относительно группы (28) — (30) и интеграла

$$\int N dx dy dz$$

относительно группы (29) — (31), соответственно, таковы:

$$\left.\begin{aligned} & y\frac{\partial M}{\partial x} - x\frac{\partial M}{\partial y} = 0, \\ & 1 - x^2\frac{\partial M}{\partial x} - xy\frac{\partial M}{\partial y} - 3xM = 0, \\ & -xy\frac{\partial M}{\partial x} + (1 - y^2)\frac{\partial M}{\partial y} - 3yM = 0; \end{aligned}\right\} \tag{32}$$

$$\left.\begin{aligned} & -y\frac{\partial M}{\partial x} + x\frac{\partial M}{\partial y} = 0, \\ & z\frac{\partial M}{\partial x} - x\frac{\partial M}{\partial z} = 0, \\ & -z\frac{\partial M}{\partial y} + y\frac{\partial M}{\partial z} = 0, \\ & (1 - x^2)\frac{\partial M}{\partial x} - xy\frac{\partial M}{\partial y} - xz\frac{\partial M}{\partial z} - 4xM = 0, \\ & -xy\frac{\partial M}{\partial x} + (1 - y^2)\frac{\partial M}{\partial y} - yz\frac{\partial M}{\partial z} - 4yM = 0, \\ & -xz\frac{\partial M}{\partial x} - zy\frac{\partial M}{\partial y} + (1 - z^2)\frac{\partial M}{\partial z} - 4zM = 0. \end{aligned}\right| \tag{33}$$

Единственным (с точностью до постоянного множителя) интегралом системы уравнений (32) является функция

$$(1 - x^2 - y^2)^{-3/2},$$

а системы уравнений (33) функция

$$(1 - x^2 - y^2 - z^2)^{-2}.$$

Таким образом, интегралы

$$\int \frac{dxdy}{\mu_2^{3/2}} = \int \frac{dxdy}{(1 - x^2 - y^2)^{3/2}}, \quad \int \frac{dxdydz}{(1 - x^2 - y^2 - z^2)^2} = \int \frac{dxdydz}{\mu_3^2}$$

суть, соответственно, инвариантные, относительно гиперболического движения, меры множества точек в двумерном и трехмерном пространствах. Величину μ_2 можно выразить через расстояние ρ_2 точки (x, y) от начала координат, так как имеет место зависимость

$$\rho_2 = \ln \frac{1+\sqrt{1-\mu_2}}{1-\sqrt{1-\mu_2}}.$$

Такой же зависимостью связаны величины μ_3 и ρ_3.

Нет необходимости, очевидно, рассматривать в гиперболической геометрии все задачи, аналогичные рассмотренным в предыдущих параграфах и мы ограничимся рассмотрением 2-х задач.

1. Мера множества прямых на плоскости. В бельтрамиевых координатах уравнением прямой на гиперболической плоскости является уравнение

$$ux + vy = 1.$$

Преобразованиям (28) в плоскости (u, v) соответствуют преобразования

$$U = \frac{-u - v\alpha + \beta}{u\beta + v\gamma - 1}, \quad V = \frac{\alpha u - v + \gamma}{u\beta + v\gamma - 1}, \tag{34}$$

образующие группу с инфинитезимальными операторами

$$v\frac{\partial f}{\partial u} - u\frac{\partial f}{\partial v}, \quad (u^2-1)\frac{\partial f}{\partial u} + uv\frac{\partial f}{\partial v}, \quad (v^2-1)\frac{\partial f}{\partial v} + uv\frac{\partial f}{\partial u}, \tag{35}$$

фактически не отличающимися от операторов (30). Ничего неожиданного в этом, конечно, нет.

Учитывая, что обязательно

$$u^2 + v^2 > 1,$$

мы запишем объем группы (34)—(35) в виде интеграла

$$\int \frac{du dv}{(u^2+v^2-1)^{3/2}}.$$

Этим интегралом и определяется мера множества прямых на гиперболической плоскости.

2. Мера множества линейных элементов (кинематическая плотность) на гиперболической плоскости. Линейный элемент

$$y - y_0 = m(x - x_0), \tag{36}$$

проходящий через точку (x_0, y_0), преобразования (28) переводят в линейный элемент

$$y - \overline{y}_0 = \overline{m}(x - \overline{x}_0),$$

где

$$\overline{x}_0 = \frac{x_0 + \alpha y_0 - \beta}{1 - \beta x_0 - \gamma y_0}, \quad \overline{y}_0 = \frac{-\alpha x_0 + y_0 - \gamma}{1 - \beta x_0 - \gamma y_0}, \quad \overline{m} = \frac{m - m\beta x_0 - \alpha - \beta y_0}{1 - \gamma y_0 + m\alpha + m\gamma x_0}. \tag{37}$$

Преобразования (37) образуют группу с инфинитезимальными операторами

$$X_1(f) = y_0\frac{\partial f}{\partial x_0} - x_0\frac{\partial f}{\partial y_0} - (1+m^2)\frac{\partial f}{\partial m},$$

$$X_2(f) = (x_0^2-1)\frac{\partial f}{\partial x_0} + x_0 y_0\frac{\partial f}{\partial y_0} + (y - mx_0)\frac{\partial f}{\partial m}, \tag{38}$$

$$X_3(f) = x_0 y_0\frac{\partial f}{\partial x_0} + (y_0^2-1)\frac{\partial f}{\partial y_0} + m(y_0 - mx_0)\frac{\partial f}{\partial m}$$

Условия инвариантности интеграла

$$\int M dx_0 dy_0 dm$$

относительно группы (37)—(38) приводят к системе уравнений

$$y_0\frac{\partial M}{\partial x_0} - x_0\frac{\partial M}{\partial y_0} - (1+m^2)\frac{\partial M}{\partial m} - 2mM = 0,$$

$$(-1+x_0^2)\frac{\partial M}{\partial x_0} + x_0 y_0\frac{\partial M}{\partial y_0} + (y_0 - mx_0)\frac{\partial M}{\partial m} + 2x_0 M = 0, \tag{39}$$

$$x_0 y_0\frac{\partial M}{dx_0} + (-1+y_0^2)\frac{\partial M}{\partial y_0} + m(y_0 - mx_0)\frac{\partial M}{\partial m} + (4y_0 - 2mx_0)M = 0.$$

Умножив уравнения системы (39) соответственно на -1, $-y_0$, x_0 и сложив, получим

$$[(1+m^2) - (y_0 - mx_0)^2]\frac{\partial M}{dm} + M[2m + 2x_0(y_0 - mx_0)] = 0,$$

$$M = \frac{\varphi(x_0, y_0)}{1 + m^2 - (y_0 - mx_0)^2}. \tag{40}$$

Подставив выражение (40) в уравнения (39), легко найдем единственное, с точностью до постоянного множителя, значение φ

$$\varphi(x_0, y_0) = \frac{1}{1 - x_0^2 - y_0^2}.$$

Таким образом, мера множества линейных элементов равна интегралу

$$\int \frac{dx_0 dy_0 dm}{(1 - x_0^2 - y_0^2)[(1+m^2) - (y_0 - mx_0)^2]}. \tag{41}$$

Если записать уравнение (36) в обычном виде

$$ux + vy = 1,$$

то в формуле (41) надо положить

$$y_0 - mx_0 = \frac{1}{v}, \quad m = -\frac{u}{v}, \quad dm = \frac{-vdu + udv}{v^2},$$

что приводит к следующему выражению для меры

$$\int \frac{dx_0 dy_0}{1 - x_0^2 - y_0^2} \cdot \frac{udv - vdu}{u^2 + v^2 - 1}.$$

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

1. Г. И. Дринфельд. О некоторых основных формулах интегральной геометрии (1). Записки ХМО, т. 22, 1950.
2. A. Müller. Dichten linearen Mannigfaltigkeiten im euklidischen und nichteuklidischen Rn. Mat. Zeitschrift, 42, 1936.
3. L. Santaló. Integral geometry in projective and affine spaces. Ann. of Math, 51, 1950.
4. В. Бляшке. Лекции по интегральной геометрии. УМН, V, 1938.
5. Н. Г. Чеботарев. Теория групп Ли. Москва, 1940.

ЗАПИСКИ МАТЕМАТИЧЕСКОГО ОТДЕЛЕНИЯ ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКОГО ФАКУЛЬТЕТА ХГУ И ХАРЬКОВСКОГО МАТЕМАТИЧЕСКОГО ОБЩЕСТВА

Том XXIII 1952

О КОНЕЧНЫХ ВОЗМУЩЕНИЯХ ОДНОМЕРНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ОПЕРАТОРОВ ВТОРОГО ПОРЯДКА

В. А. Марченко

(Харьков)

Обозначим через L дифференциальный оператор вида

$$L[u] = \frac{d^2}{dx^2} u(x) - q(x) u(x), \tag{1}$$

заданный на конечном или бесконечном полуинтервале $[o, a)$, $a \leqslant \infty$. Функция $q(x)$ предполагается вещественной и суммируемой на каждом частичном полуинтервале $[0, b)$ при любом $b < a$.

Оператор $\widehat{L}$, связанный с оператором L формулой:

$$\widehat{L}[u] = L[u] - \widehat{q}(x) u(x), \tag{2}$$

называется возмущенным, а функция $\widehat{q}(x)$ — возмущением оператора L. Возмущение мы будем называть конечным, если функция $\widehat{q}(x)$ равна нулю в некоторой окрестности точки a.

Как известно, краевая задача для оператора L с разделенными граничными условиями определяется заданием граничного условия в нуле: $u'(0) - hu(0) = 0$ и, возможно, в точке a. Решение вопроса о необходимости задания граничного условия в точке a зависит от поведения функции $q(x)$ только в окрестности этой точки. Поэтому его решение одинаково для операторов L и $\widehat{L}$, если возмущение $\widehat{q}(x)$ конечно, что мы и будем в дальнейшем предполагать.

Рассмотрим краевые задачи для операторов L и $\widehat{L}$ с граничными условиями в нуле:

$$u'(0) - hu(0) = 0 \quad (\text{для } L); \quad u'(0) - \widehat{h}u(0) = 0 \quad (\text{для } \widehat{L})$$

и одним и тем же условием в точке a, если его вообще нужно задавать.

Обозначим множество собственных значений первой краевой задачи через $\Lambda(L, h)$, а второй — через $\Lambda(\widehat{L}, \widehat{h})$. Таким образом, $\lambda \in \Lambda(L, h)$ и $(\lambda \in \Lambda(\widehat{L}, \widehat{h}))$ тогда и только тогда, когда решение $\omega(\lambda, x)$ и $(\widehat{\omega}(\lambda, x))$ уравнения:

$$L[\omega] + \lambda\omega = 0 \text{ и } (\widehat{L}[\widehat{\omega}] + \lambda\widehat{\omega} = 0)$$

при начальных данных:

$$\omega(\lambda, 0) = 1, \ \omega'(\lambda, 0) = h: \ (\widehat{\omega}(\lambda, 0) = 1, \ \widehat{\omega}'(\lambda, 0) = \widehat{h}) \tag{3}$$

принадлежит $L^2[0, a)$ (и удовлетворяет граничному условию в точке a, если его вообще нужно задавать).

Заметим, что спектр краевой задачи, вообще говоря, шире множества собственных значений, так как он может содержать еще и непрерывную часть, которой соответствуют так называемые дифференциальные собственные функции.

Известно, что непрерывные части спектров краевых задач для оператора L и возмущенного оператора $\widehat{L}$ совпадают, если возмущение конечно [1]. Иначе ведет себя по отношению к конечным возмущениям множество собственных значений. Мы докажем, что конечное возмущение не может оставить на месте слишком много собственных значений.

Точная формулировка соответствующей теоремы такова:

Теорема. Пусть $n(x)$ — число точек множества $\Lambda(L, h) \cap \Lambda(\widehat{L}, \widehat{h})$, лежащих в интервал $(-x, x)$. Тогда, если возмущение $\widehat{q}(x)$ не равно тождественно нулю и конечно, то есть $\widehat{q}(x) = 0$ при $x > b$, где $b < a$, то

$$\overline{\lim_{x\to\infty}} \frac{n(x)}{\sqrt{x}} \leqslant \frac{2b}{\pi}.$$

Приводимое ниже доказательство этой теоремы по идее близко к доказательству Борга [2] однозначной определенности операторов Штурма-Лиувилля по спектрам двух краевых задач.

Пусть $\lambda \in \Lambda(L, h) \cap \Lambda(\widehat{L}, \widehat{h})$. Рассмотрим соответствующие собственные функции краевых задач $\omega(\lambda, x)$ и $\widehat{\omega}(\lambda, x)$. Они удовлетворяют уравнениям:

$$\omega''(\lambda, x) - q(x)\,\omega(\lambda, x) + \lambda\,\omega(\lambda, x) = 0$$

$$\widehat{\omega}''(\lambda, x) - q(x)\,\widehat{\omega}(\lambda, x) - \widehat{q}(x)\,\widehat{\omega}(\lambda, x) + \lambda\widehat{\omega}(\lambda, x) = 0,$$

начальным условиям (3) и принадлежит $L^2[0, a)$. (Если функция $q(x)$ такова, что в точке a тоже задается граничное условие, то рассматриваемые собственные функции удовлетворяют и ему).

Умножая первое уравнение на $\widehat{\omega}(\lambda, x)$, а второе — на $\omega(\lambda, x)$ и вычитая затем из первого уравнения второе, получим

$$\widehat{\omega}(\lambda, x)\,\omega''(\lambda, x) - \widehat{\omega}''(\lambda, x)\,\omega(\lambda, x) + \widehat{q}(x)\,\widehat{\omega}(\lambda, x)\,\omega(\lambda, x) = 0,$$

откуда после интегрирования по сегменту $[0, A]$, $A < a$, следует:

$$\widehat{\omega}(\lambda, x)\,\omega'(\lambda, x) - \widehat{\omega}'(\lambda, x)\,\omega(\lambda, x)\Big|_0^A + \int_0^A \widehat{q}(x)\,\widehat{\omega}(\lambda, x)\,\omega(\lambda, x)\,dx = 0.$$

Пусть теперь $A \to a$. Тогда, учитывая начальные и граничные данные, которым удовлетворяют функции $\omega(\lambda, x)$ и $\widehat{\omega}(\lambda, x)$, получим:

$$\widehat{h} - h + \int_0^a \widehat{q}(x)\,\widehat{\omega}(\lambda, x)\,\omega(\lambda, x)\,dx = 0.$$

Функция $\widehat{\omega}(x)$ по условию равна нулю при $x > b$. Поэтому из предыдущего равенства следует:

$$h - \widehat{h} = \int_0^b \widehat{q}(x)\,\widehat{\omega}(\lambda, x)\,\omega(\lambda, x)\,dx, \tag{4}$$

каково бы ни было $\lambda \in \Lambda(L, h) \cap \Lambda(\widehat{L}, \widehat{h})$.

Используя операторы преобразования [3], мы можем функции $\omega(\lambda, x)$ и $\widehat{\omega}(\lambda, x)$ представить в виде:

$$\omega(\lambda, x) = \cos\mu x + \int_0^x k(x, t)\cos\mu t\,dt,$$

$$\widehat{\omega}(\lambda, x) = \cos\mu x + \int_0^x \widehat{k}(x, t)\cos\mu t\,dt,$$

где $\lambda = \mu^2$, а ядра $k(x, t)$ и $\widehat{k}(x, t)$ — непрерывны при $0 \leqslant t \leqslant x < a$. Перемножая эти равенства, получим:

$$\widehat{\omega}(\lambda, x)\,\omega(\lambda, x) = \cos^2\mu x + \left[\cos\mu x \int_0^x \left(k(x, t) + \widehat{k}(x, t)\right)\cos\mu t\,dt + \int_0^x k(x, t)\cos\mu t\,dt \cdot \int_0^x \widehat{k}(x, t)\cos\mu t\,dt\right].$$

Хорошо известная в теории преобразований Фурье теорема о свертках позволяет представить выражение, стоящее в квадратных скобках, в виде:

$$\int_0^{2x} A(x, t)\cos\mu t\,dt,$$

где функция $A(x, t)$, получающаяся определенным образом из $k(x, t)$, $\widehat{k}(x, t)$, тоже непрерывна при $0 \leqslant t \leqslant 2x < 2a$.

Поэтому:

$$\widehat{\omega}(\lambda, x)\,\omega(\lambda, x) = \cos^2\mu x + \int_0^{2x} A(x, t)\cos\mu t\,dt,$$

или:

$$\widehat{\omega}(\lambda, x)\,\omega(\lambda, x) = \frac{1 + \cos 2\mu x}{2} + 2\int_0^x A(x, 2u)\cos 2\mu u\,du.$$

Полагая для краткости $4A(x, 2u) = B(x, u)$, окончательно получим:

$$\widehat{\omega}(\lambda, x)\,\omega(\lambda, x) = \frac{1}{2}\left[1 + \cos 2\mu x + \int_0^x B(x, u)\cos 2\mu u\,du\right], \tag{5}$$

где: $\lambda = \mu^2$ и ядро $B(x, u)$ непрерывно при $0 \leqslant u \leqslant x < a$.

Из формул (4), (5) следует:

$$h - \widehat{h} = \frac{1}{2}\int_0^b \widehat{q}(x)\left[1 + \cos 2\mu x + \int_0^x B(x, u)\cos 2\mu u\,du\right] dx,$$

откуда после несложных преобразований будем иметь:

$$2(h-\widehat{h})-\int_0^b \widehat{q}(x)\,dx=\int_0^b\left[\widehat{q}(u)+\int_u^b B(x,u)\,\widehat{q}(x)\,dx\right]\cos 2\mu u\,du,$$

или:

$$F(\mu)=2(h-\widehat{h})-\int_0^b \widehat{q}(x)\,dx-\int_0^b f(u)\cos 2\mu u\,du=0, \tag{6}$$

где:

$$f(u)=\widehat{q}(u)+\int_u^b B(x,u)\,\widehat{q}(x)\,dx \tag{7}$$

и

$$\lambda=\mu^2\in\Lambda(L,h)\cap\Lambda(\widehat{L},\widehat{h}).$$

Функция $f(u)$ не равна тождественно нулю. Действительно, если бы $f(u)\equiv 0$, то из формулы (7) следовало бы, что

$$\widehat{q}(u)=-\int_u^b B(x,u)\,\widehat{q}(x)\,dx,$$

то есть функция $\widehat{q}(u)$ удовлетворяла бы однородному уравнению типа Вольтерра. Но, как известно, однородное уравнение Вольтерра имеет только тривиальное решение $\widehat{q}(u)\equiv 0$. Однако по условию $\widehat{q}(u)\not\equiv 0$, откуда вытекает, что и $f(u)\not\equiv 0$.

Рассмотрим функцию $F(\mu)$ из формулы (6) при произвольных комплексных μ. Ясно, что функция $F(\mu)$ является целой функцией экспоненциального типа, причем

$$|F(re^{i\theta})|<A+Be^{2br|\sin\theta|}.$$

Из этого неравенства следует, что функция $F(\mu)$ ограничена на вещественной оси и

$$\overline{\lim_{r\to\infty}}\frac{\lg|F(re^{i\theta})|}{r}\leqslant 2b.$$

Пусть $N(x)$ — число нулей функции $F(\mu)$, лежащих в круге радиуса x. Тогда, как известно,

$$\lim_{x\to\infty}\frac{N(x)}{x}\leqslant\frac{4b}{\pi}. \tag{8}$$

(Доказательство этого важного неравенства есть, например, в [4]).

Но формула (6) показывает, что функция $F(\mu)$ заведомо обращается в нуль, если $\mu^2\in\Lambda(L,h)\cap\Lambda(\widehat{L},\widehat{h})$. Поэтому $N(x)\geqslant 2n(x^2)$ и согласно (8):

$$\overline{\lim_{x\to\infty}}\frac{2n(x^2)}{x}\leqslant\frac{4b}{\pi},$$

то есть

$$\overline{\lim_{x\to\infty}}\frac{n(x)}{\sqrt{x}}\leqslant\frac{2b}{\pi},$$

что и требовалось доказать.

Следствие. В каждом конечном интервале конечное возмущение $\widehat{q}(x)\not\equiv 0$ не может оставить на месте бесконечно много собственных значений.

Действительно, в противном случае функция $n(t)$ обратилась бы в бесконечность при некотором конечном t, что противоречит доказанной теореме.

Замечание. Вместо операторов (1) можно рассматривать операторы

$$L[v]=\frac{d^2}{dx^2}v(x)-\left[q(x)+\frac{n(n-1)}{x^2}\right]v(x)$$

и конечные возмущения их. Доказательство соответствующей теоремы ничем не отличается от приведенного выше. Нужно только использовать обобщение операторов преобразования, полученное для таких операторов. В. В. Сташевской [5].

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

1. И. М. Глазман. О характере спектра одномерных сингулярных краевых задач. ДАН СССР, 86, № 1, 1952 г.

2. Borg G. Eine Umkehrung der Sturm — Liovilleschen Eigenwertaufgabe, Acta Mathem., 78 : 1 — 2, 1946 г.

3. В. А. Марченко. Некоторые вопросы теории одномерных линейных дифференциальных операторов второго порядка, часть 1. Труды Моск. матем. общ., т. 1, стр. 338, 1952 г.

4. Levinson N. Gap and density theorems, стр. 13, теорема VIII, 1940 г.

5. В. В. Сташевская. Об обратных задачах спектрального анализа для одного класса дифференциальных уравнений (Диссертация, Харьков, 1953 г.).

ЗАПИСКИ МАТЕМАТИЧЕСКОГО ОТДЕЛЕНИЯ ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКОГО ФАКУЛЬТЕТА ХГУ И ХАРЬКОВСКОГО МАТЕМАТИЧЕСКОГО ОБЩЕСТВА

Том XXIII 1952

О ЖЕСТКОСТИ ВЫПУКЛЫХ МНОГОГРАННИКОВ

А. В. Погорелов

§ 1. Постановка вопроса

Говорят, что на фигуре F задано в е к т о р н о е п о л е v, если каждой точке x фигуры сопоставлен некоторый вектор $v(X)$. Векторное поле v называется т р и в и а л ь н ы м, если оно допускает представление вида:

$$v(X) = b + a \times r(X),$$

где $r(X)$ — вектор точки x, а b и a — векторы, не зависящие от x. Тривиальное векторное поле допускает простую механическую интерпретацию. Оно есть поле скоростей движения фигуры F как твердого тела.

Многогранник P называется н е ж е с т к и м, если на нем можно задать векторное поле v, тривиальное на каждой грани многогранника, но не тривиальное на всем многограннике. Если же любое векторное поле, тривиальное на каждой грани многогранника, будет также тривиальным на всем многограннике, то такой многогранник называется ж е с т к и м.

Наглядное представление о жесткости многогранника можно получить следующим образом. Пусть многогранник P деформируется, переходя к моменту t в многогранник $P(t)$, но так, что при любом t граням P соответствуют грани $P(t)$. Такую деформацию многогранника P будем называть регулярной. Пусть x и y две произвольные точки многогранника P, $X(t)$ и $y(t)$ — соответствующие им точки на $P(t)$ и $\rho(x, y, t)$ — расстояние между ними. Говорят, что при деформации многогранника P его грани стационарны, если $\frac{d}{dt}\rho(X, y, t) = 0$ при $t = 0$ для каждой пары точек X и y, принадлежащих одной грани. Если же это имеет место для любых двух точек многогранника, то стационарен весь многогранник.

Теперь можно определить понятие жесткости многогранника следующим образом. Многогранник P называется нежестким, если существует регулярная деформация этого многогранника, при которой его грани стационарны, но сам многогранник не стационарен. Если же стационарность граней при любой регулярной деформации влечет за собой стационарность всего многогранника, то многогранник называется жестким.

Нетрудно видеть, что оба данные определения понятия жесткости многогранника эквивалентны. Для этого достаточно заметить, что регулярной деформации многогранника P, при которой грани стационарны, соответствует векторное поле — поле скоростей деформации.

тривиальное на каждой грани многогранника. Это векторное поле тривиально на всем многограннике тогда и только тогда, когда при деформации, которой это поле соответствует, стационарен весь многогранник.

Обратно, если задано векторное поле v на многограннике, тривиальное на каждой его грани, то существует регулярная деформация многогранника P, при которой грани многогранника стационарны, а весь многогранник стационарен тогда и только тогда, когда поле v тривиально на всем многограннике. Такая деформация получается, например, когда точка x многогранника P к моменту t смещается на вектор $v(X)t$.

Первый результат, касающийся жесткости многогранников, был получен Коши в 1813 г. [1]. Коши доказал, что все замкнутые выпуклые многогранники являются жесткими. Другое доказательство этой теоремы было дано Деном [2].

Полное исследование вопроса о жесткости выпуклых многогранников дано А. Д. Александровым в его книге „Выпуклые многогранники"[3]. В ней рассматривается вопрос о жесткости не только замкнутых, но также бесконечных выпуклых многогранников.

Интерес, который в последнее время был проявлен к вопросу жесткости выпуклых многогранников, объясняется тем, что изучение жесткости многогранников находится в тесной связи с одним из основных вопросов теории общих выпуклых поверхностей — реализацией абстрактно заданной выпуклой метрики выпуклой поверхностью.

В настоящей заметке мы рассмотрим вопрос о жесткости основных типов выпуклых многогранников новым методом.

Рассматривая вопрос о жесткости многогранников, целесообразно с точки зрения приложений результатов расширить понятие грани многогранника следующим образом. Разобьем геометрические грани многогранника непересекающимися (внутри грани) диагоналями на многоугольники. Эти многоугольники будем называть условными гранями (или просто гранями) многогранника. Таким образом, один и тот же многогранник, вообще говоря, можно мыслить составленным из различных граней. С таким расширенным пониманием грани многогранника теорема Коши о жесткости замкнутых выпуклых многогранников применяется в доказательстве теоремы А. Д. Александрова о реализации абстрактно заданной выпуклой многогранной метрики замкнутым выпуклым многогранником.

§ 2. Одна лемма о деформации выпуклого многогранного угла

Лемма. Пусть V — выпуклый многогранный угол и g — полупрямая, идущая из вершины внутри угла. Тогда, если при регулярной деформации $V(t)$ угла V его грани (условные грани) стационарны, а хотя бы один из углов, образуемых истинными ребрами угла V с полупрямой g уменьшается (увеличивается), то по крайней мере один из таких углов увеличивается (соответственно уменьшается).

С помощью понятия векторного поля лемме можно дать следующую эквивалентную формулировку.

Пусть на угле V задано векторное поле v, тривиальное на каждой его условной грани и равное нулю в вершине. Тогда, если составляющая этого поля в направлении g положительна (отрицательна) хотя бы на одном истинном ребре угла, то она отрицательна (соответственно положительна) хотя бы на одном истинном ребре.

Доказательство леммы. 1. Пусть V — многогранный угол и v — поле на нем, удовлетворяющее условиям леммы. Рассмотрим поле v', определяемое условиями:

а) v' — линейно на каждой геометрической грани угла V;

б) $v' = v$ — на каждом истинном ребре угла V.

Это поле тривиально на каждой геометрической грани угла V и удовлетворяет условиям лемы.

2. Не ограничивая общности, можно считать, что вершиной угла V является начало координат, а полупрямой g — положительная полуось z. Пусть составляющая ζ' поля v' по оси z неотрицательна, причем есть точки, в которых $\zeta' > 0$. Покажем, что тогда существует поле v^*, удовлетворяющее условиям леммы, причем $\zeta^* \geqslant 0$ на всем угле V, кроме вершины.

Если $\zeta' > 0$ на всех истинных ребрах угла, то по линейности поля $\zeta' > 0$ на всем угле. Таким образом, в рассмотрении нуждается только тот случай, когда на некоторых истинных ребрах $\zeta' = 0$.

Пусть a_1, a_2, a_3, a_4 — четыре последовательных ребра угла V, причем вдоль a_2 $\zeta' > 0$, а вдоль a_3 $\zeta' = 0$. Рассмотрим деформацию четырехгранного угла с ребрами a_1, a_2, a_3, a_4, при которой его ребра a_1 и a_4 остаются неподвижными, плоские углы — неизменными и скорость деформации угла вдоль ребра a_3 отлична от нуля. Пусть u — поле скоростей такой деформации. Так как вдоль a_3 $u \neq 0$, то его составляющая по оси z отлична от нуля, ибо вдоль a_3 u есть поле вращения около оси a_1.

Рассмотрим теперь поле v^*, равное $v' + u\varepsilon$ на гранях $(a_1 a_2)$, $(a_2 a_3)$, $(a_3 a_4)$ и равное v' на остальных гранях угла V. Очевидно, если взять достаточно малым ε и его знак выбрать из условия, чтобы составляющая поля $u\varepsilon$ на a_3 по оси z была положительна, то для поля v^* неравенство $\zeta^* > 0$ будет выполнено на всех ребрах, где была $\zeta' > 0$, а также на ребре a_3.

Таким образом, применяя описанный выше способ построения поля v^*, мы, в конце концов, приходим к такому полю, удовлетворяющему условиям леммы, для которого всюду на V, кроме его вершины, составляющая в направлении z положительна.

3. Пусть поле v на угле V удовлетворяет условиям леммы, пусть его составляющая по оси z всюду положительна, кроме начала координат, где она равна нулю. Покажем, что поле v не может быть тривиально на всем угле V.

Действительно, допустим поле v тривиально на всем V. Тогда оно есть поле вращения угла V около некоторой прямой, проходящей через вершину угла. Проведем плоскость σ через эту прямую и ось z. Плоскость σ пересечет угол V по двум полупрямым. На каждой из этих полупрямых составляющая поля v обращается в нуль, что противоречит предположению.

4. Пусть поле v на угле V удовлетворяет условиям леммы и его составляющая по оси z положительна всюду, кроме начала координат. Рассмотрим деформацию $V(t)$ угла V, при которой его произвольная точка X смещается к моменту t на вектор $v(X)t$. При такой деформации угла V его грани стационарны, плоские диагональные углы не могут быть все стационарны, так как тогда стационарен V и, следо-

вательно, тривиально поле v. Покажем, что при деформации $V(t)$ угла V все его диагональные углы не могут одновременно возрастать или убывать при $t=0$.

Допустим, утверждение неверно и при $t=0$ все диагональные углы возрастают. Так как в этом пункте рассуждений мы, кроме сделанного предположения относительно возрастания диагональных углов и тривиальности поля v на гранях угла V, ничем не будем пользоваться, то, не ограничивая общности, можно считать, что поле v на грани α, равно нулю.

Пусть w_k — тривиальное векторное поле в пространстве, совпадающее с v на грани α_k угла V. Поле w_k есть поле вращения относительно некоторой прямой, проходящей через вершину угла V. Имеем:

$$w_n = (w_n - w_{n-1}) + (w_{n-1} - w_{n-2}) + \ldots + (w_2 - w_1) \quad (w_1 = 0).$$

Поле $w_k - w_{k-1}$ есть поле вращения около ребра, принадлежащего граням α_{k-1} и α_k.

Возьмем на ребре $\alpha_n\,\alpha_1$ произвольную точку N. Эта точка при деформации угла V сместится на вектор $\bar{\delta}_n + \bar{\delta}_{n-1} + \ldots + \bar{\delta}_2$, где $\bar{\delta}_i$—смещение, вызванное вращением около ребра $\alpha_k\,\alpha_{k-1}$. Если при деформации угла V все двугранные углы одновременно убывают или возрастают, то все векторы $\bar{\delta}_i$ направлены в одно полупространство и, следовательно, их сумма может быть равна нулю (ребро $\alpha_n\,\alpha_1$ неподвижно) тогда и только тогда, когда все $\bar{\delta}_i$ равны нулю, что невозможно. Итак, при деформации $V(t)$ диагональные углы V не могут одновременно возрастать или одновременно убывать.

5. Пусть поле v на угле V удовлетворяет условиям леммы и его составляющая в направлении полупрямой g, выходящей из вершины внутри угла V, положительна всюду, кроме самой вершины, где она равна нулю. Очевидно, это будет иметь место и по отношению любой другой полупрямой g', достаточно близкой к g. Согласно п. 4 при деформации $V(t)$, при которой точка x угла V к моменту t смещается на вектор $v(x)t$, либо найдутся стационарные диагональные углы, либо найдутся смежные диагональные углы, из коих один возрастает, а другой убывает. Рассмотрим обе эти возможности.

Допустим диагональный угол θ стационарен. Тогда мы разобьем угол V на два угла (V' и V'') плоскостью угла θ. В силу предыдущего замечания можно считать, что эта плоскость не проходит через полупрямую g. Пусть для определенности полупрямая g проходит внутри V'. Зададим поле v' на угле V' следующими условиями: $v'(X) = v(X)$, если x принадлежит V, v' на θ — линейно. Построенное на угле V' поле v' обладает теми же свойствами, что и поле v на угле V.

Допустим теперь, что существуют два смежных диагональных угла θ_1 и θ_2 с общим ребром $k_{1,2}$, причем при деформации $V(t)$ угол θ_1 возрастает, а угол θ_2 убывает. Пусть k_1 и k_2 — другие стороны углов. На грани (k_1k_2) угла V можно указать полупрямую k, идущую из вершины угла V, и такую, что угол θ со сторонами $k_{1,2}$ и k стационарен при деформации $V(t)$ угла V. Плоскость угла θ разбивает угол V на два угла V' и V''. Пусть полупрямая g находится внутри V'. Тогда подобно тому, как в рассмотренном выше случае, на угле V' можно указать поле v', обладающее теми же свойствами, что и поле v на угле V.

Теперь нетрудно завершить доказательство леммы. В самом деле, допустим лемма неверна. Пусть v векторное поле на угле V тривиальное на каждой условной грани и равное нулю в вершине. Пусть составляющая поля в направлении полупрямой g, проходящей внутри угла из его вершины, неотрицательна, причем существенно положительна, по крайней мере на одном истинном ребре угла V.

Согласно п. 1 существует поле v' на угле V, обладающее свойствами поля v и тривиальное на каждой истинной грани угла V. Не ограничивая общности, можно считать, что этим свойством обладает поле v.

Согласно п. 2 на угле V существует поле v'', обладающее свойствами поля v, причем составляющая этого поля в направлении g всюду положительна, кроме вершины угла V, где она равна нулю. Не ограничивая общности, можно считать что поле v уже обладает этим свойством.

Согласно п. 5 существует угол V' с меньшим числом ребер, чем V, на котором существует поле v', обладающее теми же свойствами, что и поле v на углу V. Таким образом, мы приходим к трехгранному углу. Но если V трехгранный угол, то из стационарности его плоских углов при деформации $V(t)$ немедленно следует стационарность всего угла и, следовательно, тривиальность поля v на всем угле V, что невозможно, как показано в п. 3.

Лемма доказана.

§ 3. Жесткость выпуклых многогранных шапок

Выпуклой многогранной шапкой мы будем называть такой выпуклый многогранник с плоским краем, что его ортогональная проекция на плоскость края не выходит за пределы плоского выпуклого многоугольника, ограниченного краем этого многогранника.

Выпуклые многогранные шапки вообще не являются жесткими. Однако представляется возможным естественным образом ограничить допустимые деформации шапки, по отношению к которым шапка оказывается жесткой. Именно имеет место следующая теорема.

Теорема 1. Многогранная выпуклая шапка с краем, фиксированным плоскостью, жесткая.

Иначе говоря, если при регулярной деформации шапки ее грани стационарны, а граница находится в фиксированной плоскости, то стационарна вся шапка.

Еще иначе: векторное поле, тривиальное на каждой грани шапки и на ее границе лежащее в плоскости границы, — тривиально на всей шапке.

Доказательство. Допустим, теорема неверна и на выпуклой многогранной шапке P существует векторное поле v, тривиальное на каждой грани шапки, не тривиальное на всей шапке, и составляющая этого поля вдоль края шапки, перпендикулярная плоскости этого края, равна нулю. Не ограничивая общности, можно считать, что плоскостью края шапки является плоскость xy.

1. Пусть составляющая ζ поля v по оси z равна нулю тождественно. Покажем, что поле v тривиально на той части шапки P, которая образуется гранями, не перпендикулярными плоскости xy.

Пусть α' и α'' — две грани шапк , не перпендикулярные плоскости xy и имеющие общее ребро k. Обозначим v' и v'' — тривиальные поля в пространстве, совпадающие с v на гранях α' и α'' соответственно. Поле $v'-v''$ на ребре k равно нулю, на гранях α' и α'', оно есть поле вращения около ребра k. И так как составляющая этого поля по оси z равна нулю, а ребро k не перпендикулярно плоскости xy, то $v'-v''$ равно нулю на α' и α''. Но это значит, что поле v тривиально на $\alpha'+\alpha''$ и следовательно, тривиально на всей части шапки P, составленной из граней, не перпендикулярных плоскости xy.

2. Покажем теперь, что если составляющая ζ поля v по оси z равна нулю тождественно, то поле v тривиально на всей шапке.

Пусть $\bar v$ — тривиальное поле, совпадающее с полем v на гранях шапки, не перпендикулярных xy. Покажем, что поле $v-\bar v$ равно нулю на всей шапке P. Очевидно, для этого достаточно показать, что $v-\bar v$ равно нулю во всех вершинах шапки P. Обозначим $\bar P$ — часть шапки P, составленную из граней, не перпендикулярных xy.

Каждая вершина E шапки P либо принадлежит $\bar P$, и тогда в ней $v-\bar v=0$ по определению $\bar v$, либо E лежит на границе шапки, причем из E исходит истинное ребро k шапки, перпендикулярное xy. Пусть α' и α'' — грани шапки, примыкающие к ребру k и k', k'' — ребра этих граней, принадлежащие $\bar P$.

Поле $v-\bar v$ на α' и α'' — суть поля вращения около осей k' и k''. Отсюда следует, что поле $v-\bar v$ в вершине E должно быть перпендикулярно трем направлениям k, k' и k'', что невозможно, так как эти три направления заведомо не параллельны одной плоскости и, следовательно, $v-\bar v=0$ в E.

Итак, $v-\bar v=0$ во всех вершинах шапки. Но тогда $v-\bar v$ равно нулю тождественно. А так как поле тривиально, то тривиально поле v.

3. Пусть поле v удовлетворяет условиям теоремы 1. Покажем, что составляющая ζ этого поля по оси z на границе части $\bar P$ шапки P равна нулю. Для этого, очевидно, достаточно показать, что ζ равна нулю в каждой вершине границы $\bar P$. Если вершина E на границе $\bar P$ будет также на границе шапки, то в ней $\zeta=0$ по условию. Допустим, E не принадлежит границе P. Тогда перпендикуляр EM, опущенный из вершины E на плоскость xy, лежит в некоторой грани шапки P. А так как составляющая ζ в M равна нулю, то она равна нулю и в E.

4. Теперь нетрудно закончить доказательство теоремы. Если поле v не тривиально на всей шапке, то в силу п. 2 ζ не может быть равна нулю тождественно. Пусть $m=\max|\zeta|$. Тогда, если точка X является внутренней точкой грани и в этой точке $|\zeta|=m$, то $|\zeta|=m$ на всей грани α; если точка X является внутренней точкой ребра k и в точке X $|\zeta|=m$, то $|\zeta|=m$ вдоль всего ребра k. Отсюда следует, что найдется вершина E, в которой $|\zeta|=m$.

Соединим эту вершину с какой-нибудь вершиной E', лежащей на границе $\bar P$, ломаной Γ, составленной из истинных ребер шапки P. Пусть E'' — первая вершина Γ на пути следования из E в E', в которой $|\zeta|<m$, а E^* — предшествующая ей вершина этой ломаной.

Рассмотрим теперь многогранный угол V, образуемый гранями шапки, примыкающими к вершине E^*. Зададим на угле V векторное поле v^* следующими условиями:

1) $v^*(X)=v(X)-v(E^*)$, если точка X угла V принадлежит одной из граней шапки, сходящихся в E^*,

2) поле v^* тривиально на каждой грани угла V. Очевидно, такое поле может быть построено.

Для поля v^* на угле V и полупрямой g, проходящей внутри V из его вершины параллельно оси, выполнены условия леммы предыдущего параграфа. Но тогда составляющая ζ^* поля v^* по оси z меняет знак. А это противоречит тому, что $|\zeta|$ достигает максимума в E^*.

Теорема доказана.

§ 4. Жесткость бесконечных выпуклых многогранников

Теорема 2. Бесконечные выпуклые многогранники с полной кривизной 2π — жесткие.

Доказательство. Пусть P — бесконечный выпуклый многогранник с полной кривизной 2π. Сферическое изображение такого многогранника покрывает единичную полусферу и, следовательно, все его бесконечные ребра (полупрямые) параллельны и направлены в одну сторону.

Если взять плоскость σ, перпендикулярную направлениям бесконечных ребер так, чтобы она пересекала многогранник только по бесконечным граням, то она разобьет его на две части — выпуклую многогранную шапку ω и бесконечный многогранный полуцилиндр z.

Допустим, многогранник P нежесткий и v — поле на нем, тривиальное на каждой грани многогранника, но не тривиальное на всем многограннике. Пусть α' и α'' — две смежные бесконечные грани многогранника P а v', v'' — тривиальные поля в пространстве, совпадающие с v на гранях α' и α'' соответственно. Поле $v'-v''$ на ребре k, по которому пересекаются грани α' и α'', равно нулю. Отсюда следует, что составляющая поля $v'-v''$ в направлении k равна нулю на $\alpha'+\alpha''$.

Занумеруем бесконечные грани многогранника так, чтобы грани α_i и α_{i+1} имели общее ребро. Пусть v_i — тривиальное поле в пространстве, совпадающее с v на грани α_i. Имеем:

$$v_i-v_1=(v_i-v_{i-1})+\ldots+(v_2-v_1).$$

Так как составляющие полей v_s-v_{s-1} в направлении бесконечных ребер равны нулю, то составляющая поля v_i-v_1 тоже равна нулю. Отсюда следует, что составляющая поля $v-v_1$ в направлении бесконечных ребер равна нулю на всех бесконечных гранях.

Поле $v-v_1$ на шапке ω удовлетворяет условиям теоремы 1. Но в силу этой теоремы поле $v-v_1$ должно быть тривиально на шапке ω, а следовательно, на всем многограннике P. А так как поле v_1 тривиально по условию, то тривиально поле v.

Теорема доказана.

Рассмотрим теперь бесконечные выпуклые многогранники с полной кривизной меньше 2π.

Бесконечные выпуклые многогранники с полной кривизной меньше 2π не жесткие. Мы не будем доказывать этого в общем случае и укажем только на простой пример такого нежесткого многогранника. Выпуклый многогранный угол, очевидно, допускает регулярную деформацию, при которой его грани стационарны, но не стационарен угол в целом.

Бесконечные выпуклые многогранники с полной кривизной меньше 2π оказываются жесткими, если деформации на достаточно большом удалении подчинить некоторым дополнительным ограничениям. Именно, имеет место следующая теорема.

Теорема 3. Бесконечный нецилиндрический выпуклый многогранник P с кривизной меньше 2π и слабозакрепленный в направлении прямой g, которая пересекает его в одной точке, — жесткий.

Иначе говоря: поле v, тривиальное на каждой грани многогранника с ограниченной составляющей в направлении g, тривиально на всем многограннике.

Еще иначе: если при регулярной деформации составляющие скорости деформации многогранника ограничены в направлении g и грани многогранника стационарны, то стационарен весь многогранник.

Доказательство. 1. Так как прямая g пересекает многогранник в одной точке, то любая параллельная g прямая, пересекающая многогранник, либо пересекает его в одной точке, либо имеет с многогранником общую полупрямую. Не ограничивая общности, можно считать, что прямая g является осью z.

Обозначим $\bar{P}$ проекцию многогранника P на плоскость xy. $\bar{P}$ представляет собой либо всю плоскость xy, либо бесконечный многоугольник, который, в частности, может вырождаться в полуплоскость или полосу между двумя параллельными прямыми. Рассмотрим каждый из этих случаев.

2. Пусть $\bar{P}$ есть вся плоскость xy. Обозначим $\zeta(X)$ составляющую поля $v(X)$ в направлении оси z. Будем различать два случая: 1) $\zeta(x) = \text{const}$ и 2) $\zeta(X)$ не постоянна.

В первом случае $\zeta = \text{const}$; не ограничивая общности, можно считать, что $\zeta \equiv 0$. И заключение о тривиальности поля v на всем многограннике P делается дословно так же, как и для шапок в п. 2 § 3.

Во втором случае ζ не постоянна на P. Обозначим $m = \max|\zeta|$. По соображениям, которые были указаны в п. 4 § 3, ζ принимает значение m, по крайней мере, в одной вершине многогранника P. При этом, если ζ не постоянна, найдутся вершины, в которых $|\zeta| < m$. Дальнейшее рассмотрение этого случая ничем не отличается от рассмотрения доказательства для шапок, приведенного в п. 4 § 3. Мы приходим к заключению, что поле v должно быть тривиально на всем многограннике P.

3. Рассмотрим теперь случай, когда $\bar{P}$ — бесконечный многоугольник, не вырождающийся в полуплоскость или полосу между двумя параллельными прямыми. В этом случае многогранник P имеет бесконечные грани, перпендикулярные плоскости xy. Эти грани проектируются на плоскость xy в стороны многоугольника $\bar{P}$, а бесконечные ребра, по которым пересекаются такие грани, — в вершины многоугольника P.

Пусть, как и раньше, ζ — составляющая поля v по оси z. Если $\zeta = \text{const}$, то заключение о тривиальности поля v делается так же, как и в случае шапок. Рассмотрим случай, когда ζ не постоянна.

Обозначим; $\bar{P}$ — ту часть многогранника P, которая составлена из граней, не перпендикулярных плоскости xy, а Z — ту часть многогранника, которая составлена из граней, перпендикулярных плоскости xy. Пусть v_0 — тривиальное векторное поле в пространстве, совпадающее с полем v на какой-нибудь бесконечной грани α_0 многогранника P. Покажем, что составляющая ζ поля $v - v_0$ на границе $\bar{P}$ или, что то же, на границе Z в направлении оси z равна нулю.

Занумеруем бесконечные грани многогранника P, расположенные между бесконечными гранями α_0 и α: $\alpha_0, \alpha_1, \ldots \alpha_s = \alpha$. Пусть v_k — тривиальное векторное поле в пространстве, совпадающее с полем v на грани α_k. Имеем:

$$v_s - v_0 = (v_s - v_{s-1}) + \ldots + (v_1 - v_0).$$

Так как грани α_{k-1} и α_k примыкают к бесконечному ребру, перпендикулярному плоскости xy, и на этом ребре $v_k - v_{k-1} = 0$, то составляющая по оси z поля $v_k - v_{k-1}$ равна нулю. Отсюда следует, что составляющая поля $v - v_0$, равного $v_s - v_0$ на α_s, по оси z равна нулю.

Дальнейшее рассмотрение этого случая — как и в случае выпуклых шапок в п. 4 § 3.

4. Рассмотрение случая, когда $\bar{P}$ — полуплоскость принципиально не отличается от случая, когда $\bar{P}$ — бесконечный выпуклый многоугольник, и мы его приводить не будем.

5. Рассмотрим, наконец, случай, когда $\bar{P}$ — полоса между двумя параллельными прямыми.

Обозначим Z_1 и Z_2 части многогранника P, проектирующиеся в параллельные прямые, ограничивающие полосу $\bar{P}$. Покажем, что составляющая поля v в направлении оси z постоянна на каждой из частей Z_1 и Z_2. Пусть α — бесконечная грань, принадлежащая Z_1, проектирующаяся на плоскость xy в полупрямую. Занумеруем грани P, принадлежащие Z_1, в порядке их следования от α_1: $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_n$. Обозначим v_k — тривиальное поле, совпадающее с v на грани α_k. Тогда составляющая поля $v_k - v_{k-1}$ по оси z равна нулю. Отсюда следует, что составляющая по оси z поля $v_k - v_1$ равна нулю. И так как k произвольно, то это значит, что составляющая поля $v - v_1$ по оси z на всей части Z_1 равна нулю. Далее, так как α_1 проектируется на плоскость xy в полупрямую, то v_1 есть поле переноса и вращения около оси, лежащей в плоскости α_1, и, следовательно, его составляющая по оси z — постоянна. Но тогда составляющая поля $v - v_1$ по оси z тоже постоянна.

Аналогичное рассуждение можно провести и для части Z_2.

Обозначим $\bar{v}$ — поле вращения около одной из прямых, ограничивающих полосу $\bar{P}$. Можно подобрать число λ таким образом, чтобы поле $v + \lambda\bar{v}$ было постоянно на $Z_1 + Z_2$. Если теперь в отношении поля $v + \lambda\bar{v}$ провести то же рассуждение, что и в п. 2 настоящего параграфа, то придем к заключению, что это поле тривиально, а следовательно, тривиально и поле v.

Итак, во всех случаях поле v оказывается тривиальным на всем многограннике P.

Теорема доказана полностью.

§ 5. Жесткость замкнутых выпуклых многогранников

Теорема 4. Замкнутые выпуклые многогранники жесткие.

Доказательство. Пусть F — произвольная фигура в пространстве и v — заданное на ней векторное поле. Пусть F' — фигура, полученная проективным преобразованием из F. Дарбу указал способ построения векторного поля v' на F', которое оказывается тривиальным на части F'_1 фигуры F' тогда и только тогда, когда тривиально поле v на соответствующей части F_1 фигуры F.

Мы не будем касаться этого вопроса во всей общности и укажем только на один частный случай. Пусть фигура F' получается из F проективным преобразованием, которое точку $X(x, y, z)$ фигуры F переводит в точку с кординатами:

$$x' = \frac{x}{z}, \quad y' = \frac{y}{z}, \quad z' = \frac{1}{z}.$$

Пусть: v — векторное поле, заданное на F; ξ, η, ζ — компоненты вектора v. Построим векторное поле v' на F', сопоставляя точке x' вектор v' с компонентами;

$$\xi' = \frac{\xi}{z}, \quad \eta' = \frac{\eta}{z}, \quad \zeta' = -\frac{z\xi + y\eta + z\zeta}{z}.$$

Поле v' на фигуре F' обладает указанным выше свойством. Именно, на части фигуры F' оно тривиально тогда и только тогда, когда на соответствующей части фигуры F тривиально поле v.

Действительно, так как фигура F из F' получается тем же проективным преобразованием и поле v получается из v' так же, как v' из v, то достаточно показать, что если поле v тривиально на части F_1 фигуры F, то поле v' тривиально на соответствующей части F'_1 фигуры F'. А это, в свою очередь, достаточно показать для простейших тривиальных полей — полей смещения вдоль координатных осей и полей вращения около этих осей, что не составляет труда.

Перейдем к доказательству теоремы. Допустим, теорема не верна. Тогда существует поле v, тривиальное на каждой грани замкнутого выпуклого многогранника P, но не тривиальное на всем многограннике. Проведем через какую-нибудь вершину E многогранника плоскость σ так, чтобы многогранник был с одной стороны этой плоскости и вершина E была единственной общей точкой многогранника и плоскости σ. Введем в пространстве прямоугольные декартовы координаты, приняв точку E за начало координат и плоскость σ — за плоскость xy.

Подвергнем многогранник P проективному преобразованию, при котором точке (x, y, z) сопоставляется точка с координатами:

$$x' = \frac{x}{z}, \quad y' = \frac{y}{z}, \quad z' = \frac{1}{z}.$$

При этом мы получим бесконечный выпуклый многогранник P' с полной кривизной 2π. Его бесконечные грани, соответствующие граням P, сходящимся в E, перпендикулярны плоскости xy.

Так как на многограннике P существует поле v, тривиальное на каждой грани, но не тривиальное на всем многограннике, то и на многограннике P' можно указать такое поле, т. е. тривиальное на каждой грани, но не тривиальное на всем многограннике. Мы пришли к противоречию: согласно теореме 3 на многограннике P' такого поля задать нельзя.

Теорема доказана.

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

1. A. Cauchy. Sur les polygones et les polyèdres. Second Mèmoire. Journale Ecole Polytechn., т. 9, 1813, стр. 87.

2. Dehn. Über die Starrheit konvexer Polyeder. Math. Ann. т. 77. 1915.

3. А. Д. Александров. Выпуклые многогранники. Гостехиздат, 1951.

ЗАПИСКИ МАТЕМАТИЧЕСКОГО ОТДЕЛЕНИЯ ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКОГО ФАКУЛЬТЕТА ХГУ И ХАРЬКОВСКОГО МАТЕМАТИЧЕСКОГО ОБЩЕСТВА

Том XXIII 1952

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ПРАВИЛА МНОЖИТЕЛЕЙ ДЛЯ ИЗОПЕРИМЕТРИЧЕСКОЙ ЗАДАЧИ

Методическая заметка

Н. И. Ахиезер

Ограничимся для простоты основным случаем изопериметрической задачи, когда ищется вектор-функция $y = y(x) = \{y_1(x), y_2(x), \dots, y_m(x)\}$ от одной независимой переменной при фиксированных значениях на концах интервала $[a, b]$, а минимизации подлежит функционал

$$J_0[y] = \int_a^b f_0(x, y, y')\,dx$$

при связях

$$J_k[y] = \int_a^b f_k(x, y, y')\,dx = l_k \quad (k = 1, 2, \dots, n). \tag{1}$$

Функции $f_i(x, y, y')$ $(i = 0, 1, \dots, n)$ определены в некоторой области G пространства $x, y_1, y_2, \dots, y_m$ для всех конечных значений вектора $y' = \{y_1', y_2', \dots, y_m'\}$ и удовлетворяют обычным требованиям дифференцируемости.

Пусть кусочно-гладкая кривая $y = \bar{y}(x)$, целиком лежащая в области G и соединяющая две ее заданные точки, дает функционалу $J_0[y]$ минимум при связях (1). Подлежащее доказательству правило множителей, как известно, устанавливает существование таких констант $\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_n$ $(\lambda_0^2 + \lambda_1^2 + \dots + \lambda_n^2 \neq 0)$, что $y = \bar{y}(x)$ является для функционала

$$\int_a^b \{\lambda_0 f_0 + \lambda_1 f_1 + \dots + \lambda_n f_n\}\,dx$$

безусловной экстремалью, то-есть, экстремалью, отвечающей свободному варьированию.

Положим

$$[\bar{f}_{ir}] = f_{iy'_r}(x, \bar{y}, \bar{y}') - \int_a^x f_{iy_r}(x, \bar{y}, \bar{y}')\,dx - c_{ir}$$

$$(i = 0, 1, \dots, n; \quad r = 1, 2, \dots, m),$$

где константы c_{ir} подобраны так, что

$$\int_a^b [\bar{f}_{ir}]\,dx = 0 \quad (i = 0, 1, \dots, n; \quad r = 1, 2, \dots, m), \tag{2}$$

и введем векторы:

$$[\bar{f}_i] = \{[\bar{f}_{i1}], [\bar{f}_{i2}], \ldots, [\bar{f}_{im}]\} \quad (i = 0, 1, \ldots, n).$$

Правило множителей будет доказано, если мы установим, что векторы

$$[\bar{f}_0], [\bar{f}_1], \ldots, [\bar{f}_n],$$

линейно зависимы, или, иначе говоря, что равен нулю определитель Грама

$$\Gamma\{[\bar{f}_0], [\bar{f}_1], \ldots, [\bar{f}_n]\} = |([\bar{f}_i], [\bar{f}_k])|^n_{i,k=0}, \tag{3}$$

где $([\bar{f}_i], [\bar{f}_k])$ означает скалярное произведение вектор-функций $[\bar{f}_i]$, $[\bar{f}_k]$, определяемое общей формулой:

$$(u, v) = \int_a^b \{u_1(x) v_1(x) + u_2(x) v_2(x) + \ldots + u_m(x) v_m(x)\} dx.$$

Мы можем принять, что

$$\Gamma\{[\bar{f}_1], [\bar{f}_2], \ldots, [\bar{f}_n]\} \neq 0, \tag{4}$$

так как в противном случае существовала бы линейная зависимость уже между вектор-функциями:

$$[\bar{f}_1], [\bar{f}_2], \ldots, [\bar{f}_n].$$

Проварируем теперь вектор-функцию $\bar{y}(x)$, полагая:

$$y^*(x) = \bar{y}(x) + \varepsilon_0 \int_a^x [\bar{f}_0] dx + \varepsilon_1 \int_a^x [\bar{f}_1] dx + \ldots + \varepsilon_n \int_a^x [\bar{f}_n] dx, \tag{5}$$

где ε_i — достаточно малые по абсолютному значению числа. В компонентах (5) имеет вид:

$$y_r^*(x) = \bar{y}_r(x) + \varepsilon_0 \int_a^x [\bar{f}_{0r}] dx + \varepsilon_1 \int_a^x [\bar{f}_{1r}] dx + \ldots + \varepsilon_n \int_a^x [\bar{f}_{nr}] dx.$$

$$(r = 1, 2, \ldots, m).$$

Что вектор-функция $y^*(x)$ удовлетворяет краевым условиям, вытекает из (2). С другой стороны, если мы положим:

$$J_i[y^*] = \varphi_i(\varepsilon_0, \varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n) \quad (i = 0, 1, 2, \ldots, n),$$

то

$$\varphi_k(0, 0, \ldots, 0) = l_k \quad (k = 1, 2, \ldots, n),$$

$$\varphi_0 = (0, 0, \ldots, 0) = J_0[\bar{y}]$$

и

$$\left(\frac{\partial \varphi_i}{\partial \varepsilon_k}\right)_{\varepsilon_0 = \varepsilon_1 = \ldots = \varepsilon_n = 0} = \int_a^b [\bar{f}_i][\bar{f}_k] dx = ([\bar{f}_i], [\bar{f}_k]),$$

так что

$$\left.\frac{\partial(\varphi_0, \varphi_1, \ldots, \varphi_n)}{\partial(\varepsilon_0, \varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n)}\right|_{\varepsilon_0 = \varepsilon_1 = \ldots = \varepsilon_n = 0} = \Gamma\{[\bar{f}_0], [\bar{f}_1], \ldots, [\bar{f}_n]\} \tag{6}$$

и

$$\left.\frac{\partial(\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n)}{\partial(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_n)}\right|_{\varepsilon_0 = \varepsilon_1 = \ldots = \varepsilon_n = 0} = \Gamma\{[\bar{f}_1], [\bar{f}_2], \ldots, [\bar{f}_n]\}.$$

В силу нашего предположения (4) в достаточно малой окрестности точки $\varepsilon = 0$ уравнения

$$\varphi_k(\varepsilon_0, \varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n) = l_k \quad (k = 1, 2, \ldots, n)$$

определяют величины $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_n$ как непрерывно дифференцируемые функции от ε_0, обращающиеся в нуль при $\varepsilon_0 = 0$. А так как функция $\varphi_0(\varepsilon_0, \varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n)$ имеет в точке $\varepsilon_0 = \varepsilon_1 = \ldots = \varepsilon_n = 0$ минимум при связях $\varphi_k(\varepsilon_0, \varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n) = l_k$ $(k = 1, 2, \ldots, n)$, то на основании правила множителей из дифференциального исчисления должен равняться нулю якобиан

$$\left.\frac{\partial(\varphi_0, \varphi_1, \ldots, \varphi_n)}{\partial(\varepsilon_0, \varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n)}\right|_{\varepsilon_0 = \varepsilon_1 = \ldots = \varepsilon_n = 0}$$

что в силу (6) означает равенство нулю определителя Грама (3).

Доказательство закончено.

ЗАПИСКИ МАТЕМАТИЧЕСКОГО ОТДЕЛЕНИЯ ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКОГО ФАКУЛЬТЕТА ХГУ И ХАРЬКОВСКОГО МАТЕМАТИЧЕСКОГО ОБЩЕСТВА

Том XXIII 1952

ОБ ОДНОМ ОБОБЩЕНИИ ЛЕММ ШВАРЦА И ЛЕВНЕРА

Н. И. Ахиезер и М. Г. Крейн

(Харьков и Одесса)

1. Принимая, чем общность рассмотрений не нарушается, полуплоскости в качестве стандартных круговых областей, обозначим через S класс всех аналитических функций $w = f(z)$, которые в верхней полуплоскости ($\mathrm{I}z > 0$) регулярны и принимают значения из верхней же полуплоскости ($\mathrm{I}w > 0$). В известной лемме Шварца [1] устанавливается важное неравенство относительно функций класса S.

Обозначим, далее, через $S(a, b)(-\infty < a, b < \infty)$ класс всех тех функций из S, которые на полуоси $-\infty < \mathrm{R}z < a$ регулярны и принимают значения, принадлежащие полуоси $-\infty < \mathrm{R}w < b$. Класс $S(a, b)$ фигурирует в лемме Левнера [1].

В настоящей заметке рассматривается класс $S(a, \infty)$. Мы устанавливаем для этого класса одно общее предложение (теорема 2). Частный случай этого предложения (теорема 1) содержит как лемму Шварца так и лемму Левнера.

2. *Теорема 1.* Пусть функция $w = F(z)$ принадлежит классу $S(a, \infty)$ и пусть $F(i) = i$. В таком случае значение ω этой функции в произвольно выбранной точке $z = \zeta$ ($\mathrm{I}\zeta > 0$) лежит внутри или на границе некоторого кругового сегмента $D(a, \zeta)$ плоскости w.

Этот сегмент является конформным отображением при помощи функции

$$\omega = \zeta + \frac{1+\zeta^2}{t-\zeta}$$

изображенного на фиг. 1 угла величины

$$\varphi = \pi - \arg(\zeta - a)$$

плоскости комплексной переменной t.

Вершинами сегмента суть точки $A(w=\zeta)$ и $B\left(w = \frac{1+a\zeta}{a-\zeta}\right)$. Одной из границ является отрезок прямой BA, содержащий эти точки. Второй границей является дуга ACB окружности K, имеющей центром точку

$$\frac{1+|\zeta|^2}{2\eta} i \qquad (\zeta = \xi + i\eta).$$

Если значение ω попадает на дугу ACB, то

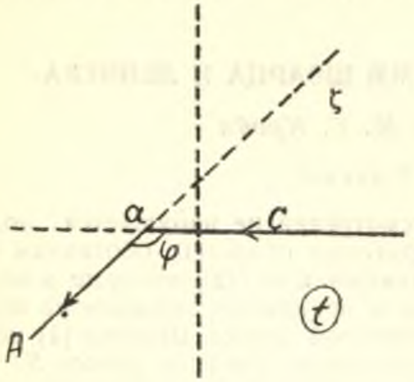
$$F(z) \equiv \frac{1+\lambda z}{\lambda - z}$$

при некотором λ из интервала $[a, \infty]$. Если же значение ω попадает на отрезок BA, то

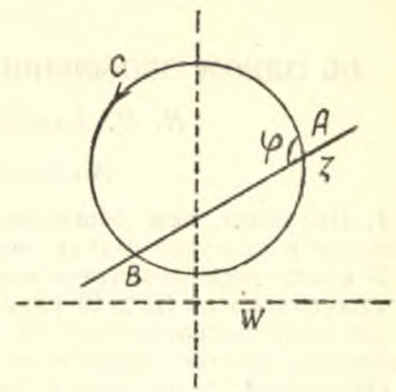
$$F(z) = z(1-\mu) + \mu\frac{1+az}{a-z}$$

при некотором значении μ из интервала $[0, 1]$.

Не мешает заметить, что K есть неевклидова окружность с неевклидовым центром $w = i$, проходящая через точку $w = \zeta$.



Фиг. 1



Фиг. 2

3. Из теоремы 1 лемма Шварца получается как предельный случай ($a \to -\infty$). Действительно, если $a \to -\infty$, то $\varphi \to \pi$. В пределе мы получаем полный круг Q с окружностью K, а класс $S(a, \infty)$ переходит в класс S. Из теоремы 1 следует, что неевклидово расстояние от точки ω до точки i не должно превосходить неевклидово расстояние от точки ζ до точки i, а в этом и состоит основная часть леммы Шварца.

4. Чтобы получить из теоремы 1 лемму Левнера, докажем следующее вспомогательное предложение.

Лемма. Если

$$\frac{F(z)-F(i)}{F(z)-\overline{F(i)}} = \frac{z-i}{z+i}\,\frac{G(z)-i}{G(z)+i},$$

то утверждения

α) $F(z) \in S(a, \infty)$,

β) $G(z) \in S(a, -a)$

эквивалентны.

Доказательство. Докажем, что α) влечет β). Функция

$$\varphi(z) = \frac{F(z)-F(i)}{F(z)-\overline{F(i)}} : \frac{z-i}{z+i}$$

в верхней полуплоскости регулярна и в силу принципа максимума модуля она в этой области по модулю меньше единицы*. А так как на полуоси $-\infty < \mathrm{R}z < a$ функция $\varphi(z)$ регулярна и по модулю равна единице, то во всяком случае $G(z) \in S(a, \infty)$.

Пусть точка z движется по вещественной оси от точки $-\infty$ до точки a. Тогда

$$\arg\frac{z-i}{z+i}$$

* Если исключить тривиальный случай, когда (z) есть константа.

будет возрастать от 0 до некоторого $\vartheta < 2\pi$. Что же касается

$$\arg\frac{G(z)-i}{G(z)+i}$$

то он будет возрастать в интервале, скажем, от σ до τ. Тогда изменение

$$\arg\frac{F(z)-F(i)}{F(z)-\overline{F(i)}},$$

будеть происходить в интервале $[\sigma, \tau+\vartheta]$. Этот интервал должен составлять часть* интервала $[0, 2\pi]$. Поэтому $\tau \leqslant 2\pi - \vartheta$, то есть значения функции $G(x)$ при $-\infty < x < a$ принадлежат во всяком случае полуоси $-\infty < v < -a$. Доказательство закончено.

Аналогично доказывается, что β) влечет α).

5. Обратимся к выводу леммы Левнера из теоремы 1. Пусть $G(z) \in S(a, b)$ и пусть $G(\zeta) = \Omega$. Положим $\tilde{G}(z) = G(z) - b - a$, так что $\tilde{G}(z) \in S(a, -a)$, и пусть $\tilde{G}(\zeta) = \tilde{\Omega} = \Omega - a - b$. В соответствии с леммой предыдущего n° введем функцию

$$F(z) = \frac{z\tilde{G}(z) - 1}{\tilde{G}(z) + z},$$

которая принадлежит $S(a, \infty)$ и для которой

$$F(i) = i, \quad F(\zeta) = \omega = \frac{\zeta\tilde{\Omega} - 1}{\tilde{\Omega} + \zeta},$$

откуда

$$\tilde{\Omega} = \frac{1+\zeta\omega}{\zeta-\omega}.$$

Область $D(a, \varsigma)$, в которой изменяется ω, известна по теореме 1. Нахождение области $\tilde{\Delta}(a, \zeta)$, в которой изменяется $\tilde{\Omega}$, сводится к конформному отображению угла в плоскости t, изображенного на фиг. 1, при помощи функции

$$\tilde{\Omega} = \frac{1+\zeta^2+\dfrac{1+\zeta^2}{t-\zeta^2}\,\zeta}{-\dfrac{1+\zeta^2}{t-\zeta}} = -t.$$

Мы получаем в качестве области $\tilde{\Delta}(a, \zeta)$ угол величины φ с вершиной в точке $w = -a$, одной стороной которого является полуось $-\infty < \mathrm{R}w < -a$.

Искомая область $\Delta(a, b; \zeta)$ изменения точки Ω есть угол величины φ с вершиной в точке $w = b$, одной стороной которого является полуось $-\infty < \mathrm{R}w < b$.

В этом состоит основная часть леммы Левнера.

* В противном случае в некоторой точке x из $(-\infty, a)$ мы имели бы равенство

$$\frac{F(x)-F(i)}{F(x)-\overline{F(i)}} = 1,$$

которое невозможно, так как $F(i) \neq \overline{F(i)}$, а $F(x)$ в интервале $(-\infty, a)$ регулярна.

6. Всякая функция класса $S(a, \infty)$ допускает представление

$$g(z)=\alpha+\mu+\int_a^\infty \frac{1+zt}{t-z}\,d\sigma(t) \qquad (\mathrm{I}z>0)$$

где $\mu \geqslant 0$ и α — вещественные константы, а $\sigma(t)$ — ограниченная неубывающая функция. Если положить $a=-\infty$, то мы получим представление функции класса S. Эти представления единственны, если ввести понятную нормировку функции $\sigma(t)$.

Теорема 1 является частным случаем $(n=1)$ следующего предложения.

Теорема 2. Для того чтобы существовала функция $F(z)\in S(a, \infty)$, удовлетворяющая условиям

$$F(z_\alpha)=w_\alpha \qquad (\mathrm{I}z_\alpha>0, \quad \alpha=1, 2, \ldots n),$$
$$F(z_{n+1})=F(i)=iT=w_{n+1}\,(T>0)^*,$$

необходимо и достаточно, чтобы при любых ξ_α, η_β

$$\left.\begin{aligned}&\sum_{\alpha,\beta=1}^{n+1}\frac{w_\alpha-\overline{w}_\beta}{z_\alpha-\overline{z}_\beta}\xi_\alpha\overline{\xi}_\beta\geqslant 0\\ &\sum_{\alpha,\beta=1}^{n}\frac{\Omega_\alpha-\overline{\Omega}_\beta}{z_\alpha-\overline{z}_\alpha}\eta_\alpha\overline{\eta}_\beta\geqslant 0\end{aligned}\right\}, \tag{1}$$

где

$$\Omega_\alpha=\frac{(w_\alpha-Tz_\alpha)(z_\alpha-a)}{1+z^2{}_\alpha} \qquad (\alpha=1, 2, \ldots, n).$$

Доказательство А. Необходимость. Пусть требуемая функция

$$F(z)=\mu z+\int_a^\infty \frac{1+tz}{t-z}\,d\sigma(t)$$

существует. Тогда

$$\sum_{\alpha,\beta=1}^{n+1}\frac{w_\alpha-\overline{w}_\beta}{z_\alpha-\overline{z}_\beta}\xi_\alpha\overline{\xi}_\beta=\mu\left|\sum_{\alpha=1}^{n+1}\xi_\alpha\right|^2+\int_a^\infty\left|\sum_{\alpha=1}^{n+1}\frac{\xi_\alpha}{t-z}\right|^2(1+t^2)\,d\sigma(t)\geqslant 0. \tag{2}$$

С другой стороны,

$$\frac{\{F(z)-Tz\}(z-a)}{1+z^2}=-\int_a^\infty d\sigma(t)=\int_a^\infty\frac{(t-a)\,d\sigma(t)}{t-z}$$

и значит

$$\sum_{\alpha,\beta=1}^{n}\frac{\Omega_\alpha-\overline{\Omega}_\beta}{z_\alpha-\overline{z}_\beta}\eta_\alpha\overline{\eta}_\beta=\int_a^\infty\left|\sum_{\alpha=1}^{n}\frac{\eta_\alpha}{t-z_\alpha}\right|^2(t-a)\,d\sigma(t)\geqslant 0. \tag{3}$$

В. Достаточность мы докажем, опираясь на следующий факт функционального анализа, относящийся к пространству $C[l, \infty]$ непрерывных функций $\varphi(t)$ в замкнутом интервале $[l, \infty]$*: если Φ есть линейный функционал в подпространстве $H\subset C(l, \infty)(a\leqslant l<\infty)$ с нормой $\|\Phi\|_H$, то существует такая функция ограниченной вариации $\sigma(t)$ и такое число λ, что

$$|\lambda|+\operatorname{var}\sigma(t)=\|\Phi\|_H$$

и

$$\Phi(\varphi)=\lambda\varphi(\infty)+\int_l^\infty\varphi(t)\,d\sigma(t) \qquad (\varphi(t)\in H);$$

если к тому же любая функция $\varphi(t)\in H$ равна нулю при $t=\infty$, то $\lambda=0$.

Обозначим через H линейную оболочку совокупности функций

$$1,\ \frac{1+z_mt}{t-z_m},\ \frac{1+\overline{z}_mt}{t-\overline{z}_m} \qquad \begin{matrix}(a\leqslant t\leqslant\infty)\\ (m=1, 2, \ldots n).\end{matrix}$$

Определим в H аддитивный и однородный функционал Φ, полагая

$$\Phi(1)=T,\quad \Phi\left(\frac{1+z_mt}{t-z_m}\right)=w_m,\quad \Phi\left(\frac{1+\overline{z}_mt}{t-\overline{z}_m}\right)=\overline{w}_m.$$

Условие (1) выражает, что Φ есть позитивный функционал в H. Действительно, пусть

$$g(t)=A_0+\sum_{k=1}^{n}\left\{A_k\frac{1+z_kt}{t-z_k}+\overline{A}_k\frac{1+\overline{z}_kt}{t-\overline{z}_k}\right\}\geqslant 0 \qquad (a\leqslant t\leqslant\infty).$$

Отсюда следует, что

$$g(t)=\frac{|P_n(t)|^2}{\prod\limits_{\alpha=1}^{n}|t-z_\alpha|^2}+\frac{(t-a)\,|Q_{n-1}(t)|^2}{\prod\limits_{\alpha=1}^{n}|t-z_\alpha|^2}=g_1(t)+g_2(t),$$

где $P_n(t)$, $Q_{n-1}(t)$ многочлены степени n и $n-1$. Так как

$$\frac{g_1(t)}{1+t^2}=\left|\sum_{k=1}^{n+1}\frac{\xi_k}{z-z_k}\right|^2=\sum_{\alpha,\beta=1}^{n+1}\frac{\xi_\alpha\overline{\xi}_\beta}{(t-z_\alpha)(t-\overline{z}_\beta)},$$

то

$$g_1(t)=\sum_{\alpha,\beta=1}^{n+1}\frac{1}{z_\alpha-\overline{z}_\beta}\left\{\frac{1+tz_\alpha}{t-z_\alpha}-\frac{1+t\overline{z}_\beta}{t-\overline{z}_\beta}\right\}\xi_\alpha\overline{\xi}_\beta$$

и значит

$$\Phi(g_1)=\sum_{\alpha,\beta=1}^{n+1}\frac{w_\alpha-\overline{w}_\beta}{z_\alpha-\overline{z}_\beta}\xi_\alpha\overline{\xi}_\beta\geqslant 0.$$

С другой стороны

$$g_2(t)=(t-a)\left|\sum_{\alpha=1}^{n}\frac{\eta_\alpha}{t-z_\alpha}\right|^2=\sum_{\alpha,\beta=1}^{n}\frac{\eta_\alpha\overline{\eta}_\beta}{z_\alpha-\overline{z}_\beta}\left\{\frac{z_\alpha-a}{t-z_\alpha}-\frac{\overline{z}_\beta-a}{t-\overline{z}_\beta}\right\}.$$

А так как

$$\frac{1}{t-z_\alpha}=\frac{1}{1+z_\alpha^2}\left\{\frac{1+tz_\alpha}{t-z_\alpha}-z_\alpha\right\},$$

* Делаемое нами предположение, что $z_{n+1}=i$, $w_{n+1}=iT$ $(T>0)$, очевидно не ограничивает общности.

* Если $a=-\infty$, будем требовать, чтобы $\varphi(-\infty)=\varphi(\infty)$.

то

$$\Phi\left(\frac{z_\alpha - a}{t - z_\alpha}\right) = \frac{z_\alpha - a}{1 + z_\alpha^2}(w_\alpha - z_\alpha T) = \Omega_\alpha$$

и, следовательно,

$$\Phi(g_2) = \sum_{\alpha,\, \beta=1}^{n} \frac{\Omega_\alpha - \overline{\Omega}_\beta}{z_\alpha - \overline{z}_\beta} \eta_\alpha \overline{\eta}_\beta \geqslant 0.$$

Из позитивности функционала $\Phi(g)\,(g \in H)$ легко заключить, что он ограничен, и что $\|\Phi\|_H = T$. В самом деле, пусть $g(t) \in H$ и $|g(t)| \leqslant M\,(a \leqslant t \leqslant \infty)$. В таком случае при любом вещественном θ

$$\mathrm{R}\{e^{i\theta} g(t)\} + M \geqslant 0 \qquad (a \leqslant t \leqslant \infty)$$

и в силу позитивности функционала

$$\mathrm{R}\{e^{i\theta}\Phi(g)\} + MT \geqslant 0,$$

откуда

$$|\Phi(g)| \leqslant \|g\| \cdot T,$$

А так как

$$\Phi(1) = T,$$

то

$$\|\Phi\|_H = T.$$

На основании приведенного выше общего предложения существует такая константа μ и такая функция ограниченной вариации

$$\sigma(t) \qquad (a \leqslant t \leqslant \infty),$$

что

$$\Phi(g) = \mu g(\infty) + \int_a^\infty g(t)\, d\sigma(t) \qquad (g(t) \in H),$$

то

$$|\mu| + \operatorname{var} \sigma(t) = T.$$

Но $\Phi(1) = T$. Значит $\sigma(t)$ — неубывающая функция, а $\mu \geqslant 0$. Теперь остается положить

$$F(z) = \mu z + \int_a^\infty \frac{1 + zt}{t - z}\, d\sigma(t).$$

7. Формулы (2), (3) позволяют сделать следующее

Добавление к теореме 2. Если формы (1) неотрицательны и при некоторой нетривиальной системе чисел ξ_α или η_β одна из них обращается в нуль, то функция $F(z) \in S(a, \infty)$ единственна и имеет вид

$$F(z) = \mu z + \sum_{k=1}^{n} \lambda_k \frac{1 + t_k z}{t_k - z},$$

где

$$\mu \geqslant 0, \quad \lambda_k \geqslant 0, \quad a \leqslant t_1 < t_2 < \ldots < t_n < \infty.$$

Если речь идет о классе S вместо класса $S(a, \infty)$, то доказательство теоремы 2 упрощается, а второе из условий (1) отпадает, и мы получаем известную теорему [2] (которая в несколько более узкой форме была впервые доказана Пиком) о том, что первое из условий (1) необходимо и достаточно, чтобы $F(z) \in S$ и $F(z_m) = w_m$ $(m = 1, 2, \ldots, n+1)$.

Поэтому из теоремы 2 вытекает

Следствие. Для того чтобы функция $F(z)$ принадлежала классу $S(a, \infty)$ необходимо и достаточно, чтобы принадлежали классу S обе функции $F(z)$ и

$$\{F(z) - \mathrm{R}\,F(i)\}\frac{z - a}{1 + z^2} + \frac{\mathrm{I}F(i)}{1 + z^2}(1 + az).$$

В заключение отметим, что классы $S(a, \infty)$ и $S(a, b)$ в связи с некоторыми проблемами моментов изучались нами в наших прежних работах [3].

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

1. Неванлинна. Однозначные аналитические функции, ОГИЗ, стр. 54 и 58, 1941.
2. Н. Ахиезер и М. Крейн. О некоторых вопросах теории моментов. Харьков, стр. 147, 1938.
3. Н. Ахиезер и М. Крейн. Сообщения Харьковского Математич. Общества, 4, томы IX, X.

ЗАПИСКИ МАТЕМАТИЧЕСКОГО ОТДЕЛЕНИЯ ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКОГО ФАКУЛЬТЕТА ХГУ И ХАРЬКОВСКОГО МАТЕМАТИЧЕСКОГО ОБЩЕСТВА

Том XXIII 1952

К ПРОБЛЕМЕ Н. Г. ЧЕБОТАРЕВА ОБ ОБОБЩЕННЫХ ПОВЕРХНОСТЯХ ПЕРЕНОСА

Я. П. Бланк

(Харьков)

1. Н. Г. Чеботареву [1] принадлежит широкое обобщение поверхностей переноса, заключающееся в следующем. Дана группа преобразований G. Рассматриваются поверхности, допускающие семейства импримитивности относительно G, т. е. несущие семейства кривых, переводящихся друг в друга преобразованиями из G.

В случае трехчленной группы траектории точек линий импримитивности группы G являются линиями импримитивности для группы H взаимной с G и совпадающей с нею только в случае коммутативности G.

Обобщая теорему Ли о поверхностях переноса двойного образования, Н. Г. Чеботарев доказал, что обобщенная поверхность переноса может иметь или континуум систем импримитивности, или не более четырех.

Однако неизвестно, существуют ли обобщенные поверхности переноса, которые имеют все четыре системы импримитивности, или континуум таких систем.

Примером обобщенной в смысле Чеботарева поверхности переноса может служить поверхность сдвига эллиптического пространства [2], [3]. Здесь G и H две трехчленных группы клиффордовых сдвигов.

Цель настоящей заметки на примере поверхностей сдвига эллиптического пространства ответить на один из вышеуказанных вопросов, а именно, выяснить, существуют ли поверхности, несущие континуум сетей сдвига*.

2. Поверхностью сдвига эллиптического пространства называется поверхность, допускающая такое каноническое представление:

$$X = Y(u) \cdot Z(v), \tag{1}$$

где Y и Z кватернионы, зависящие от одного параметра каждый, X квартернион, компоненты которого служат координатами поверхности, при этом координатная сеть u, v — сеть сдвига.

В статье [3] мы показали, что сеть сдвига характеризуется тем, что она одновременно чебышевская и клиффордово-сопряженная. Последнее условие аналитически выражается так:

$$b_{ik}\, du^i \delta u^k = \pm g\,(du^1 \delta u^2 - du^2 \delta u^1), \tag{2}$$

где g_{ik} и b_{ik} первый и второй тензоры поверхности.

* В нашей статье [3] этот вопрос был поставлен, но остался открытым.

Отнесем поверхность к асимптотическим линиям. Этого нельзя сделать для поверхностей, развертывающихся на эллиптическую плоскость, но последние не имеют сетей сдвига.

Положив

$$1-K^2=\frac{1}{\rho^2}, \tag{3}$$

где K — гауссова кривизна поверхности, имеем [2]:

$$\rho b_{12}=\sqrt{g},\quad \Gamma^1_{12}=\frac{\rho_1}{2\rho},\quad \Gamma^2_{12}=\frac{\rho^2}{2\rho}. \tag{4}$$

Условие (2) к-сопряженности, сети

$$\frac{du^2}{du^1}=\varphi(u^1,u^2),\quad \frac{\delta u^2}{\delta u^1}=\psi(u^1,u^2) \tag{5}$$

принимает вид:

$$\varphi(1+\rho)+\psi(1-\rho)=0,$$

или

$$\varphi=\sigma(\rho-1),\quad \psi=\sigma(\rho+1). \tag{6}$$

Чтобы сеть (6) была сетью сдвига, необходимо и достаточно, чтобы она была чебышевской, т. е. имели место уравнения Сервана—Бианки [4]:

$$\frac{\partial^2 u^k}{\partial v^1\partial v^2}+\Gamma^k_{\alpha\beta}\frac{\partial u^\alpha}{\partial v^1}\cdot\frac{\partial u^\beta}{\partial v^2}=0. \tag{7}$$

Здесь u^i асимптотические параметри, v^i — параметри сети сдвига, следовательно по [5], [6]:

$$\frac{\partial u^2}{\partial v^2}-\sigma(\rho-1)\frac{\partial u^1}{\partial v^2}=0,\quad \frac{\partial u^2}{\partial v^1}-\sigma(\rho+1)\frac{\partial u^1}{\partial v^1}=0. \tag{8}$$

Вычислив $\frac{\partial^2 u^k}{\partial v^1\partial v^2}$ и подставив в (7), получаем:

$$\Gamma^2_{\alpha\beta}\frac{\partial u^\alpha}{\partial v^1}\frac{\partial u^\beta}{\partial v^2}=\sigma(\rho-1)\,\Gamma^1_{\alpha\beta}\frac{\partial u^\alpha}{\partial v^1}\frac{\partial u^\beta}{\partial v^2}-\frac{\partial u^1}{\partial v^2}\frac{\partial}{\partial v^1}[\sigma(\rho-1)], \tag{9}$$

$$\Gamma^2_{\alpha\beta}\frac{\partial u^\alpha}{\partial v^1}\frac{\partial u^\beta}{\partial v^2}=\sigma(\rho+1)\,\Gamma^1_{\alpha\beta}\frac{\partial u^\alpha}{\partial v^1}\frac{\partial u^\beta}{\partial v^2}-\frac{\partial u^1}{\partial v^1}\frac{\partial}{\partial v^2}[\sigma(\rho+1)]. \tag{10}$$

Вычитая и складывая уравнения (9) и (10) и воспользовавшись (8) и (4), находим, что функция σ должна удовлетворять системе из двух дифференциальных уравнений первого порядка:

$$\sigma_1=\Gamma^1_{11}\sigma+2\rho_2\sigma^2+\Gamma^1_{22}(\rho^2-1)\sigma^3, \tag{11}$$

$$\sigma_2=\left(\frac{2\rho\rho_2}{1-\rho^2}\right)\sigma+\frac{2\rho_1}{1-\rho^2}+\frac{\Gamma^2_{11}}{1-\rho^2}\frac{1}{\sigma}. \tag{12}$$

Совместность системы (11), (12) есть условие необходимое и достаточное для того, чтобы на поверхности, заданной двумя дифференциальными формами в асимптотических параметрах, существовала сеть сдвига. При этом сама сеть сдвига определяется уравнениями (5), (6).

3. Условие интегрируемости системы (11), (12) имеет вид:

$$A\sigma^4+B\sigma^3+C\sigma^2+D\sigma+E=0, \tag{13}$$

где

$$\left.\begin{aligned}
A&=2(\rho^2-1)\left(\frac{2\rho\rho_2}{1-\rho^2}-\Gamma^2_{22}\right)\Gamma^1_{22}+[(\rho^2-1)\Gamma^1_{22}]_2,\\
B&=2\rho_2\left(\frac{2\rho\rho_2}{1-\rho^2}-\Gamma^2_{22}\right)+2\rho_{22}-6\rho_1\Gamma^1_{22},\\
C&=\frac{8\rho_1\rho_2}{1-\rho^2}-4\Gamma^1_{22}\Gamma^2_{11}+(\Gamma^1_{11})_2-\left(\frac{2\rho\rho_2}{1-\rho^2}-\Gamma^2_{22}\right)_1,\\
D&=\frac{2\rho_1\Gamma^1_{11}}{1-\rho^2}+\frac{6\rho_2\Gamma^2_{11}}{1-\rho^2}-2\left(\frac{\rho_1}{1-\rho^2}\right)_1,\\
E&=2\frac{\Gamma^1_{11}\Gamma^2_{11}}{1-\rho^2}-\left(\frac{\Gamma^2_{11}}{1-\rho^2}\right)_1
\end{aligned}\right\}. \tag{14}$$

Из (13) и следует, что если на поверхности имеется больше четырех сетей сдвига, то существует континуум таких сетей.

Возникает вопрос: существуют ли поверхности, несущие континуум сетей сдвига.

Чтобы на поверхности существовал континуум сетей сдвига необходимо, чтобы условие интегрируемости (13) выполнялось тождественно, следовательно имеем следующие пять уравнений:

$$\left(\frac{\Gamma^1_{22}}{1-\rho^2}\right)_2=\Gamma^2_{22}\Gamma^1_{22}\cdot\frac{2}{1-\rho^2}, \tag{15}$$

$$\left(\frac{\Gamma^2_{11}}{1-\rho^2}\right)_1=\Gamma^1_{11}\Gamma^2_{11}\cdot\frac{2}{1-\rho^2}, \tag{16}$$

$$\rho_{22}+\frac{2\rho\rho_2^2}{1-\rho^2}=\Gamma^2_{22}\rho_2+3\Gamma^1_{22}\rho_1, \tag{17}$$

$$\rho_{11}+\frac{2\rho\rho_1^2}{1-\rho^2}=\Gamma^1_{11}\rho_1+3\Gamma^2_{11}\rho_2, \tag{18}$$

$$[\lg(1-\rho^2)]_{12}+\frac{8\rho_1\rho_2}{1-\rho^2}+(\Gamma^1_{11})_2+(\Gamma^2_{22})_1-4\Gamma^2_{11}\Gamma^1_{22}=0. \tag{19}$$

Первые два уравнения интегрируются непосредственно, действительно: воспользовавшись формулой Фосса—Вейля:

$$(\lg\sqrt{g})_\alpha=\Gamma^\lambda_{\alpha\lambda}$$

и (4), имеем:

$$\Gamma^1_{11}=\left(\lg\sqrt{\frac{g}{\rho}}\right)_1,\quad \Gamma^2_{22}=\left(\lg\sqrt{\frac{g}{\rho}}\right)_2. \tag{20}$$

Внеся эти значения в (15), (16) получаем:

$$\left.\begin{aligned}
\Gamma^1_{22}&=\frac{1-\rho^2}{\rho}\,g\,U(u),\\
\Gamma^2_{11}&=\frac{1-\rho^2}{\rho}\,gV(v)
\end{aligned}\right\}. \tag{21}$$

Если функции U или V отличны от нуля, их можно привести к единице.

Действительно, при замене параметров:

$$U^*=U^*(u),\quad V^*=V^*(v)$$

имеем

$$g=g^*U^{*\prime 2}V^{*\prime 2}$$

$$\Gamma^1_{22}=\Gamma^{1*}_{22}\frac{V^{*\prime 2}}{U^{*\prime}},\quad \Gamma^2_{11}=\Gamma^{2*}_{11}\cdot\frac{U^{*\prime 2}}{V^{*\prime}},$$

следовательно

$$\Gamma_{22}^{1*} = \frac{1-\rho^2}{\rho} g^* U^{*\prime 3} U, \quad \Gamma_{11}^{2*} = \frac{1-\rho^2}{\rho} g^* V^{*\prime 3} V$$

и, положив

$$U^{*\prime} = U^{-\frac{1}{3}}, \quad V^{*\prime} = V^{-\frac{1}{3}},$$

приведем U^*, V^* к единице.

Поэтому могут представиться три случая:

$$1^\circ \quad U = V = 0,$$
$$2^\circ \quad U = 0, \quad V = 1,$$
$$3^\circ \quad U = 1, \quad V = 1.$$

Из деривационных формул:

$$x_{uu} = \Gamma_{11}^1 x_u + \Gamma_{11}^2 x_v - g_{11} x,$$
$$x_{vv} = \Gamma_{22}^1 x_u + \Gamma_{22}^2 x_v - g_{22} x$$

следует, что в случае 1° асимптотические обеих семейств прямые — имеем поверхности второго порядка, в случае 2° асимптотические линии одного семейства прямые — имеем линейчатые поверхности, в случае 3° асимптотические обеих семейств криволинейны, но так как $\Gamma_{22}^1 = \Gamma_{11}^2$ поверхности изотермо-асимптотические.

4. Замечание. Прием, которым были получены дифференциальные уравнения (11), (12) сети сдвига можно применить и для получения дифференциальных уравнений сети переноса обычного пространства. Вместо (3) имеем $K = -\frac{1}{\rho^2}$, (4) и (5) сохраняются, вместо к-сопряженности имеем дюпенову сопряженность:

$$\varphi + \psi = 0,$$

или

$$\psi = -\varphi = \sigma. \tag{6'}$$

Уравнения (11), (12) заменяются уравнениями:

$$\sigma_1 = \Gamma_{11}^1 \sigma - \Gamma_{22}^1 \sigma^3,$$
$$\sigma_2 = -\Gamma_{22}^2 \sigma + \Gamma_{11}^2 \frac{1}{\sigma}. \tag{12'}$$

Условие интегрируемости:

$$A_1 \sigma^4 + C_1 \sigma^2 + E_1 = 0, \tag{13'}$$

где

$$\left.\begin{aligned} A_1 &= 2\Gamma_{22}^1 \Gamma_{22}^2 = (\Gamma_{22}^1)_2, \\ C_1 &= (\Gamma_{11}^1)_2 + (\Gamma_{22}^2)_1 - 4\Gamma_{11}^2 \Gamma_{22}^1 \\ E_1 &= 2\Gamma_{11}^2 \Gamma_{11}^1 - (\Gamma_{11}^2)_1. \end{aligned}\right\} \tag{14'}$$

Уравнения (20) сохраняются и здесь.

Для поверхностей с ∞ сетей переноса имеем три условия:

$$A_1 = C_1 = E_1 = 0.$$

Первые два условия в силу (20) дают:

$$\left.\begin{aligned} \Gamma_{22}^1 &= \frac{g}{\rho} U, \\ \Gamma_{11}^2 &= \frac{g}{\rho} V \end{aligned}\right\}. \tag{20'}$$

Третье:

$$\left(\lg \frac{g}{\rho}\right)_{12} = 4 \frac{g^2}{\rho^2} UV.$$

И здесь имеем три случая:

$$1^\circ \quad U = V = 0,$$
$$2^\circ \quad U = 0, \quad V = 1,$$
$$3^\circ \quad U = V = 1.$$

Все они действительно дают поверхности с ∞ сетей переноса, а именно: в случае 1° получаются параболоиды, в 2° — линейчатые поверхности переноса (геликоиды и поверхность Кейли) и в 3° — поверхности, с точностью до афинного преобразования определяемые уравнением: $e^x + e^y + e^z = 1$.

5. Займемся исследованием совместности системы (15 — 19), характеризующей поверхности с ∞ сетей сдвига.

Обозначим:

$$\frac{g}{\rho} = e^{2\theta};$$

уравнения (15), (16) эквивалентны уравнениям (21) или:

$$\left.\begin{aligned} \Gamma_{22}^1 &= (1-\rho^2) e^{2\theta} U, \\ \Gamma_{11}^2 &= (1-\rho^2) e^{2\theta} V \end{aligned}\right\} \tag{23}$$

Уравнения (20) запишутся так:

$$\Gamma_{11}^1 = \theta_1, \ \Gamma_{22}^2 = \theta_2. \tag{24}$$

Уравнения (17), (18) и (19) можно записать следующим образом:

$$\left(\frac{\rho_2}{1-\rho^2}\right)_2 = \theta_2 \frac{\rho^2}{1-\rho^2} + 3\rho_1 e^{2\theta} U, \tag{25}$$

$$\left(\frac{\rho_1}{1-\rho^2}\right)_1 = \theta_1 \frac{\rho_1}{1-\rho^2} + 3\rho_2 e^{2\theta} V, \tag{26}$$

$$[\lg(1-\rho^2)]_{12} + \frac{8\rho_1\rho_2}{1-\rho^2} + 2\theta_{12} - 4(1-\rho^2)^2 e^{4\theta} UV = 0. \tag{27}$$

Символы Кристоффеля выражаются по формулам (24), (23), (4) через ρ, θ. Последние должны удовлетворять системе из трех уравнений (25), (26) и (27).

Если эта система совместна, то чтобы существовала поверхность искомого вида, необходимо и достаточно, чтобы тензор Риччи удовлетворял условиям:

$$R_{jk|l} = \frac{K_l}{K} R_{jk}, \tag{28}$$

$$R_{11} R_{22} - R_{12}^2 = K^2 \cdot g, \tag{29}$$

где K определено по (3), (5).

Для компонентов тензора Риччи имеем следующие значения:

$$-R_{11} = [(1-\rho^2) e^{2\theta} V]_2 + (1-\rho^2) e^{2\theta} V \left(\theta - \frac{1}{2} \lg\rho\right)_2 - $$
$$- \frac{1}{2} (\lg\rho)_{11} + \frac{1}{2} (\lg\rho)_1 \left(\theta - \frac{1}{2}\lg\rho\right)_1, \tag{30}$$

$$-R_{22} = [(1-\rho^2) e^{2\theta} U]_1 + (1-\rho^2) e^{2\theta} U \left(\theta - \frac{1}{2} \lg\rho\right)_1 - $$
$$- \frac{1}{2} (\lg\rho)_{22} + \frac{1}{2} (\lg\rho)_2 \left(\theta - \frac{1}{2}\lg\rho\right)_2, \tag{31}$$

$$R_{12}=\left(\theta-\frac{1}{2}\lg\rho\right)_{12}-\frac{1}{4}(\lg\rho)_1(\lg\rho)_2+(1-\rho^2)^2e^{4\theta}UV. \tag{32}$$

Рассмотрим случай 1° $U=V=0$, поверхности второго порядка. Если $K=0$, имеем поверхность Клиффорда, которая допускает сдвиг любой расположенной на ней кривой вдоль образующих как первой, так и второй серии.

Пусть $K\neq 0$, докажем, что $\rho_1\neq 0$, $\rho_2\neq 0$.

Действительно, пусть $\rho_1=0$. По (27): $\theta_{12}=0$, по (32): $R_{12}=0$, по (30): $R_{11}=0$, следовательно, по (29): $K=0$, что противоречит нашему допущению.

Из (25), (26) следует:

$$U_0'\rho_2=V_0'\rho_1=e^{\theta}(1-\rho^2), \tag{33}$$

следовательно:

$$\rho=\rho(U_0+V_0),\quad e^{\theta}=\frac{\rho'}{1-\rho^2}U_0'V_0'. \tag{34}$$

Введем новые переменные:

$$U^*=U_0,\quad V^*=V_0.$$

Заметив, что $g=g^*U_0'^2V_0'^2$, и воспользовавшись (22), получим вместо (34):

$$\rho=\rho(u+v),\quad e^{\theta}=\frac{\rho'}{1-\rho^2}, \tag{35}$$

где знак (*) опущен.

По (30) и (35):

$$R_{11}=-\frac{1}{4}\frac{\rho'^2}{\rho^2}-\frac{\rho'^2}{1-\rho^2}. \tag{36}$$

По (28):

$$R_{11|1}=\frac{K_1}{K}R_{11}, \tag{37}$$

или в развернутом виде, в силу (23) и (24):

$$\frac{K'}{K}=\frac{R_{11}'}{R_{11}}-2\theta'. \tag{38}$$

Интегрируя, получаем:

$$R_{11}=CKe^{2\theta}. \tag{39}$$

Внеся сюда значение K по (3) и e^{θ} по (35), получаем:

$$R_{11}=-C\frac{\rho'^2}{\rho^2(1-\rho^2)}. \tag{40}$$

Из сравнения (40) и (36) следует, что $\rho'=\mathrm{const}$, что противоречит условию $K\neq 0$.

Итак, кроме поверхностей Клиффорда не существует поверхностей второго порядка с ∞ сетей сдвига.

Случай 2°: $U=0$, $V=1$, линейчатые поверхности.

Если $K=0$, имеем линейчатые поверхности с образующими параллелями Клиффорда. Эти поверхности допускают сдвиг произвольной, расположенной на них кривой, вдоль образующих.

Пусть $K\neq 0$, докажем, что $\rho_1\neq 0$, $\rho_2\neq 0$.

Действительно, пусть $\rho_2=0$. (Из $\rho_1=0$ следует по (26) $\rho_2=0$). Имеем по (27): $\Theta_{12}=0$, по (31) и (32): $R_{22}=R_{12}=0$, следовательно, по (29): $K=0$, что противоречит нашему допущению.

В силу (25) имеем:

$$U_0'\rho_2=(1-\rho^2)e^{\theta}. \tag{41}$$

Можно U_0' привести к единице. Действительно, сделаем замену $u^*=U_0$, при этом по (22): $e^{\theta}=U_0'e^{\theta^*}$, следовательно, по (41), опустив знак (*):

$$\rho_2=(1-\rho^2)e^{\theta}. \tag{42}$$

Подставив значение e^{θ} из (42) в (31) получаем:

$$-R_{22}=\frac{\rho_2^2}{1-\rho^2}+\frac{1}{4}\frac{\rho_2^2}{\rho^2}. \tag{43}$$

По (28):

$$R_{22|2}=\frac{K_2}{K}R_{22},$$

или в развернутом виде в силу (23) и (24):

$$\frac{(R_{22})_2}{R_{22}}=2\theta_2+\frac{K_2}{K}. \tag{44}$$

Проинтегрировав, находим:

$$R_{22}=U_1Ke^{2\theta}. \tag{45}$$

Подставив вместо K и $e^{2\theta}$ их выражения по (3) и (42) и сопоставив (45) с (43), получаем:

$$\rho_2\left(\frac{3}{4}\rho^2+\frac{1}{4}-U_1\right)^{\cdot}=0,$$

т. е. $\rho_2=0$, что противоречит условию $K\neq 0$.

Итак, за исключением линейчатых поверхностей с образующими параллелями Клиффорда, не существует линейчатых поверхностей с ∞ сетей сдвига.

Случай 3°: $U=1$, $V=1$, изотермо-асимптотические поверхности.

Если $K=0$ поверхности имеют единственную сеть сдвига, именно асимптотическую, следовательно, $K\neq 0$ [3].

Докажем, что $\rho_1\neq 0$, $\rho_2\neq 0$.

Действительно, пусть, например, $\rho_1=0$. Из (26) следует $\rho_2=0$. Из (27):

$$\theta_{12}=2(1-\rho^2)^2e^{4\theta}. \tag{46}$$

Из (30), (31), (32) следует:

$$-R_{11}=3(1-\rho^2)e^{2\theta}\theta_2,\quad -R_{22}=3(1-\rho^2)e^{2\theta}\theta_1,$$
$$R_{12}=3(1-\rho^2)^2e^{4\theta}. \tag{47}$$

По (28):

$$R_{12|1}=R_{12|2}=0,$$

или, в развернутом виде, в силу (4), (23), (24) и (47):

$$\theta_1=\theta_2=0,$$

следовательно, по (46): $\rho^2=1$, т. е $K=0$, что невозможно.

Обозначив

$$(1-\rho^2)e^{2\theta}=\vartheta,\quad \rho=\sin\tau, \tag{48}$$

перепишем уравнения (25), (26), (27) следующим образом:

$$\left(\frac{1}{\vartheta}\right)_2+\frac{2}{\vartheta}\frac{\tau_{22}}{\tau_2}=6\frac{\tau_1}{\tau_2}, \tag{49}$$

$$\left(\frac{1}{\vartheta}\right)_1 + \frac{2}{\vartheta}\frac{\tau_{11}}{\tau_1} = 6\frac{\tau_2}{\tau_1}, \tag{50}$$

$$(\lg\vartheta)_{12} + 8\tau_1\tau_2 - 4\vartheta^2 = 0. \tag{51}$$

Уравнение (51) в силу (49) и (50) можно записать в одном из следующих двух видов:

$$16\vartheta^2 - \left[6\frac{\tau_{11}}{\tau_2} + 3\left(\frac{\tau_1}{\tau_2}\right)_1\right]\vartheta + \left(\frac{\tau_{22}}{\tau_2}\right)_1 + 4\tau_1\tau_2 = 0, \tag{52}$$

$$16\vartheta^2 - \left[6\frac{\tau_{22}}{\tau_1} + 3\left(\frac{\tau_2}{\tau_1}\right)_2\right]\vartheta + \left(\frac{\tau_{11}}{\tau_1}\right)_2 + 4\tau_1\tau_2 = 0. \tag{53}$$

Если из (52) вычтем (53), получаем:

$$\frac{1}{\vartheta}\left(\lg\frac{\tau_2}{\tau_1}\right)_{12} + 9\left(\frac{\tau_{22}}{\tau_1} - \frac{\tau_{11}}{\tau_2}\right) + 3\tau_{12}\left(\frac{\tau_1}{\tau_2^2} - \frac{\tau_2}{\tau_1^2}\right) = 0. \tag{54}$$

К этому же уравнению приходим, если приравняем оба значения смешанной производной $\frac{1}{\vartheta}$, получаемые из (49) и (50). Уравнение (54) должно выполняться тождественно относительно $\frac{1}{\vartheta}$, в противном случае, определив из него ϑ и подставив в (52) и в (49), (50), (28), (29) можем определить все третьи частные производные τ в функции вторых и первых и условия интегрируемости приводят к тому, что $\tau_1 = \mathrm{const}$, $\tau_2 = \mathrm{const}$, что невозможно.

Следовательно,

$$\left(\lg\frac{\tau_2}{\tau_1}\right)_{12} = 0, \tag{55}$$

$$3\left(\frac{\tau_{22}}{\tau_1} - \frac{\tau_{11}}{\tau_2}\right) + \tau_{12}\left(\frac{\tau_1}{\tau_2^2} - \frac{\tau_2}{\tau_1^2}\right) = 0. \tag{56}$$

Интегрируя (55) получаем:

$$\tau = \tau(U + V). \tag{57}$$

Подстановка этого значения в (50) дает:

$$2\frac{\tau''}{\tau'}(V'^3 - U'^3) + 3(V'V'' - U'U'') = 0. \tag{58}$$

Из (58) следует:

$$\left(\frac{\tau''}{\tau'}\right)''(V'^3 - U'^3) + 3\left(\frac{\tau''}{\tau'}\right)'(V'V'' - U'U'') = 0. \tag{59}$$

Пусть $V'^3 - U'^3 \neq 0$. Имеем:

$$2\frac{\tau''}{\tau'}\left(\frac{\tau''}{\tau'}\right)' - \left(\frac{\tau''}{\tau'}\right)'' = 0. \tag{60}$$

Для $\frac{\tau''}{\tau'}$ имеем одно из следующих четырех значений:

1) $\frac{\tau''}{\tau'} = 0$, 2) $\frac{\tau''}{\tau'} = a\ (a \neq 0)$, 3) $\frac{\tau''}{\tau'} = a\frac{1 + be^{2a(U+V)}}{1 - be^{2a(U+V)}}$, $a \neq 0$, $b \neq 0$

4) $\frac{\tau''}{\tau'} = \frac{1}{c - (U + V)}$.

В случаях 1), 2) и 3), определив τ, и из (58) — U, V и подставив найденные значения τ в (49), (50), (52), убеждаемся, что эта система несовместна.

В случае 4), определив τ, U, V, ϑ из системы (52), (49), (50), которая в этом случае имеет решение, и вычислив компоненты тензора Риччи, приходим к противоречию с (29).

В случае $V'^3 - U'^3 = 0$, имеем:

$$\tau = \tau(u + v). \tag{61}$$

Уравнения (49) и (50) сводятся к одному:

$$\left(\lg\frac{\tau'^2}{\vartheta}\right)' = 6\vartheta.$$

Положив $\frac{\tau'^2}{\vartheta} = \lambda$, имеем:

$$\tau'^2 = \frac{\lambda'}{6}, \quad \vartheta = \frac{\lambda'}{6\lambda}.$$

Внеся эти значения в (52), получаем:

$$9\lambda^2\left(\frac{\lambda''}{\lambda'}\right)' - 9\lambda\lambda'' + 8\lambda'^2 + 12\lambda^2\lambda' = 0.$$

Отсюда:

$$\lambda' = c\lambda^{4/3} + c_0\lambda^{2/3} - \frac{3}{2}\lambda^2,$$

или положив $\lambda = \lambda_1^3$:

$$\lambda_1' = c_1\lambda_1^2 + c_2 - \frac{1}{2}\lambda_1^4, \tag{62}$$

$$\vartheta = \frac{\lambda_1'}{2\lambda_1}, \tag{63}$$

$$\tau = \int\frac{\lambda_1 d\lambda_1}{\sqrt{2c_1\lambda_1^2 + 2c_2 - \lambda_1^4}}. \tag{64}$$

По (28):

$$R_{11/_1} = (R_{11})' - 2\Gamma^1_{11}R_{11} - 2\Gamma^2_{11}R_{12} = \frac{K'}{K}R_{11},$$

$$R_{11/_2} = (R_{11})' - 2\Gamma^1_{12}R_{11} - 2\Gamma^2_{12}R_{12} = \frac{K'}{K}R_{11}.$$

Вычтя и подставив значения символов Кристоффеля, получаем:

$$R_{11}\left(\theta' - \frac{\rho'}{2\rho}\right) + \left(\vartheta - \frac{\rho'}{2\rho}\right)R_{12} = 0.$$

Подставив значения R_{ik}, именно:

$$-R_{11} = \left(\vartheta - \frac{\rho'}{2\rho}\right)' + \left(\vartheta + \frac{\rho'}{2\rho}\right)\left(\theta' - \frac{\rho'}{2\rho}\right),$$

$$R_{12} = \left(\theta' - \frac{\rho'}{2\rho}\right)' + \vartheta^2 - \frac{\vartheta'^2}{4\rho^2},$$

получаем:

$$\left(\frac{\theta' - \frac{\rho'}{2\rho}}{\vartheta - \frac{\rho'}{2\rho}}\right)' + \left(\vartheta + \frac{\rho'}{2\rho}\right)\left[1 - \left(\frac{\theta' - \frac{\rho'}{2\rho}}{\vartheta - \frac{\rho'}{2\rho}}\right)^2\right] = 0. \tag{65}$$

Воспользовавшись (63), можно проинтегрировать (65), получаем:

$$\left(\vartheta + \theta' - \frac{\rho'}{\rho}\right)\rho\lambda_1 = c(\vartheta - \theta'). \tag{66}$$

Подставив сюда значения ρ, θ из (48) и (49), значения ϑ и τ из (63) и (64) и заменив λ_1' из (62), получаем уравнение относительно λ_1, которое должно выполняться тождественно, однако, это не имеет места, следовательно система несовместна.

Мы получили следующий результат: единственными поверхностями, на которых имеется континуум сетей сдвига, служат линейчатые поверхности с образующими — параллелями Клиффорда (цилиндрические поверхности эллиптического пространства).

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

1. Н. Г. Чеботарев. О поверхностях, содержащих системы импримитивности относительно заданной группы непрерывных преобразований (обобщенные поверхности переноса). Матем. сборн, 34, 149—206, 1927. Н. Г. Чеботарев. Математическая автобиография. У. М. Н. III вып. 4 (26). 3—66. 1948.
2. L. Bianchi. Lezioni di geometria differenziale т. II, P. 2, 1924.
3. Я. П. Бланк. Поверхности сдвига элиптического пространства. Записки н.-и. инст. мат. и мех. и Харьк. мат. об-ва с. 4, т. 20, 61, 1950.
4. В. Ф. Каган. Основы теории поверхностей, т. I, 1947.
5. В. Ф. Каган. Основы теории поверхностей, т. II, 1948.

ЗАПИСКИ МАТЕМАТИЧЕСКОГО ОТДЕЛЕНИЯ ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКОГО ФАКУЛЬТЕТА ХГУ И ХАРЬКОВСКОГО МАТЕМАТИЧЕСКОГО ОБЩЕСТВА

Том XXIII 1952

КОНИЧЕСКИЕ СЕТИ

Я. П. Бланк

(Харьков)

Конической сетью поверхности называется сопряженная сеть, образованная линиями касания описанных около поверхности конусов.

Поверхности, несущие на себе коническую сеть, впервые рассматривал К. М. Петерсон [1]. Поверхности Петерсона допускают следующее каноническое представление:

$$\rho x_i = u_i(u) + v_i(v), \quad i = 1,\ 2,\ 3,\ 4, \tag{*}$$

если коническую сеть принять за координатную. При этом вершины конусов расположены на кривых

$$\rho x_i = \frac{du_i}{du}, \ \rho x_i = \frac{dv_i}{dv}. \tag{**}$$

Если кривые (**) лежат в бесконечно удаленной плоскости, коническая сеть переходит в цилиндрическую, а поверхность Петерсона — в поверхность переноса.

Проблема определения поверхностей, несущих две или больше конические сети, решена для случая поверхностей переноса [2], для случая плоских конических сетей [3] и конических сетей, у которых кривые (**), порождающие сеть, плоские и расположены в общей плоскости, различной для каждой из обеих сетей [4].

Общей проблеме посвящены две работы Б. Гамбье [5], в которых доказывается, что проблему можно свести к решению функционального уравнения вида $\sum X_i Y_i = 0$, где X_i — функции одного переменного x, Y_i — функции переменного y; x и y — переменные независимые, но не получено новых решений.

Настоящая работа посвящена определению поверхностей, несущих континуум конических сетей.

§ 1. Дифференциальные уравнения конической сети

Для получения дифференциальных уравнений, определяющих коническую сеть, естественно воспользоваться аппаратом проективно-дифференциальной геометрии, аналогично тому, как вывод дифференциальных уравнений поверхностей переноса был получен впервые методами афинной дифференциальной геометрии [6].

Канонические уравнения поверхности Петерсона:

$$\lambda x^i = X^i + Y^i, \quad i = 1,\ 2,\ 3,\ 4, \tag{1}$$

где X^i — функции одного параметра x, Y^i — функции параметра y. Координатная сеть x, y — сопряженная, коническая (сеть Петерсона).

В произвольных координатах u^1, u^2 сеть Петерсона определяется уравнением

$$\tau = \varphi_{ik} du^i du^k = 0. \tag{2}$$

Второй дифференциальный параметр Бельтрами, примененный к функциям λx^i относительно квадратичной дифференциальной формы τ, обращается в нуль.

Действительно,

$$\Delta(\lambda x^i) = \frac{1}{\sqrt{\varphi_{11}\varphi_{22} - \varphi_{12}^2}} \left\{ \left(\frac{\varphi_{11}(\lambda x^i)_2 - \varphi_{12}(\lambda x^i)_1}{\sqrt{\varphi_{11}\varphi_{22} - \varphi_{12}^2}} \right)_2 + \left(\frac{\varphi_{22}(\lambda x^i)_1 - \varphi_{12}(\lambda x^i)_2}{\sqrt{\varphi_{11}\varphi_{22} - \varphi_{12}^2}} \right)_1 \right\}. \tag{3}$$

В случае канонических координат $\varphi_{11} = \varphi_{22} = 0$, $(\lambda x^i)_{12} = 0$, следовательно,

$$\Delta(\lambda x^i) = 0. \tag{4}$$

По свойству дифференциального параметра это имеет место для любого выбора координат.

Отнесем поверхность к асимптотическим координатам u, v. В силу сопряженности сети (2): $\varphi_{12} = 0$. Положив

$$\frac{\varphi_{22}}{\sqrt{-\varphi_{11}\varphi_{22}}} = e^{\sigma}, \quad \frac{\varphi_{11}}{\sqrt{-\varphi_{11}\varphi_{22}}} = -e^{-\sigma}, \tag{5}$$

получаем по (3), (4):

$$[e^{\sigma}(\lambda x^i)_u]_u - [e^{-\sigma}(\lambda x^i)_v]_v = 0. \tag{6}$$

Заменив в (6) вторые производные координат поверхности по основным дифференциальным уравнениям проективно-дифференциальной теории поверхностей [7]:

$$\left.\begin{aligned} x^i_{uu} &= \theta_u x^i_u + \beta x^i_v + p_{11} x^i \\ x^i_{vv} &= \gamma x^i_u + \theta_v x^i_v + p_{22} x^i \end{aligned}\right\}, \tag{7}$$

получаем

$$\left.\begin{aligned} &2\lambda_u + \lambda(\theta_u - \gamma e^{-2\sigma} + \sigma_u) = 0, \\ &2\lambda_v + \lambda(\theta_v - \beta e^{2\sigma} - \sigma_v) = 0, \\ &(-\lambda_{vv} + \sigma_v\lambda_v - \lambda p_{22}) e^{-\sigma} + (\lambda_{uu} + \sigma_u\lambda_u + \lambda p_{11}) e^{\sigma} = 0. \end{aligned}\right\} \tag{8}$$

Приравняв оба значения $(\lg \lambda)_{uv}$, которые получаем из (8_1) и (8_2), приходим к уравнению:

$$\sigma_{uv} = A, \tag{9}$$

где

$$A = \frac{1}{2}(\gamma e^{-2\sigma})_v - \frac{1}{2}(\beta e^{2\sigma})_u. \tag{10}$$

Подставив в (8_3) значения первых и вторых производных функции λ из (8_1), (8_2), получаем уравнение:

$$\sigma_{vv} + e^{2\sigma}\sigma_{uu} = B, \tag{11}$$

где

$$B = \frac{1}{2}(\sigma_v^2 - e^{2\sigma}\sigma_u^2) - 2(\lambda\sigma_u + \beta\sigma_v e^{2\sigma}) - \frac{1}{2}\beta^2 e^{4\sigma} + \frac{1}{2}\gamma^2 e^{-2\sigma} - e^{2\sigma}(L + 2\beta_v) + {} + M + 2\gamma_u. \tag{12}$$

Здесь L, M — известные проективные инварианты [7]

$$\left.\begin{aligned} L &= \theta_{uu} - \frac{1}{2}\theta_u^2 - \beta\theta_v - \beta_v - 2p_{11} \\ M &= \theta_{vv} - \frac{1}{2}\theta_v^2 - \gamma\theta_u - \gamma_u - 2p_{22} \end{aligned}\right\}. \tag{13}$$

Обратно, если функция σ удовлетворяет уравнениям (9), (11), система (8) совместна и определяет λ вплоть до постоянного множителя. Из (8) с помощью (7) получаем (6), или эквивалентное уравнение (4). Наконец, если перейти от асимптотических параметров к параметрам сети $du^2 - e^{2\sigma}dv^2 = 0$, приходим к уравнению (1).

Мы получили следующий результат: чтобы на поверхности, отнесенной к асимптотическим параметрам, существовала сеть Петерсона:

$$du^2 - e^{2\sigma}dv^2 = 0, \tag{2'}$$

необходимо и достаточно, чтобы функция σ удовлетворяла системе из двух дифференциальных уравнений с частными производными второго порядка (9), (11).

2. Другой вывод дифференциальных уравнений (9), (11) конической сети получим, если потребуем, чтобы сопряженная сеть

$$du = \varepsilon e^{\sigma} dv, \quad \varepsilon^2 = 1 \tag{14}$$

удовлетворяла дифференциальному уравнению конических линий

$$(\xi\, d\xi\, d^2\xi\, d^3\xi) = 0, \tag{15}$$

где ξ — тангенциальные координаты поверхности.

Воспользуемся выражением $(\xi\, d\xi\, d^2\xi\, d^3\xi)$, вычисленным Фубини [8]:

$$\frac{(\xi\, d\xi\, d^2\xi\, d^3\xi)}{(\xi\, \xi_u\, \xi_v\, \xi_{uv})} = -2\,du\,dv \begin{bmatrix} du\,\delta^3 v - dv\,\delta^3 u - 3(\beta du^2\delta^2 u - \gamma dv^2\delta^2 v) \\ -(\beta_u - 2\beta\theta_u)du^4 + (\gamma_v - 2\gamma\theta_v)dv^4 \\ +(3p_{11} - \pi_{11})dv\,du^3 + (\pi_{22} - 3p_{22})du\,dv^2 \end{bmatrix}$$
$$+ [3(du\delta^2 v + dv\delta^2 u - \beta du^3 - \gamma dv^3)][du\delta^2 v - dv\delta^2 u - \beta du^3 + \gamma dv^3], \tag{16}$$

где δ — символ контравариантного дифференциала относительно квадратичной дифференциальной формы F_2:

$$\delta u = du, \ \delta^2 u = d^2u + \theta_u du^2, \ \delta^3 u = d^3u + 3\theta_u du\, d^2u + \theta_{uv} du^2 dv + {} + (\theta_{uu} + \theta_u^2) du^3,$$

аналогично для v.

По (14):

$$d^2u = (\varepsilon e^{\sigma}\sigma_v + e^{2\sigma}\sigma_u) dv^2$$

$$d^3u = [\varepsilon e^{\sigma}(\sigma_{vv} + \sigma_v^2) + e^{2\sigma}(2\sigma_{uv} + 3\sigma_u\sigma_v) + \varepsilon e^{3\sigma}(\sigma_{uu} + 2\sigma_u^2)] dv^3.$$

Внеся эти значения в (15), складывая и вычитая полученные два уравнения соответственно двум значениям ε, вновь приходим к системе (9), (11).

§ 2. Поверхность с ∞^4 конических сетей

1. Легко убедиться, что максимальное число параметров, от которых может зависеть коническая сеть на данной поверхности, равно четырем.

Действительно, любые две кривые C_1, C_2, принадлежащие одному и тому же семейству сети, определяют всю сеть, так как развертывающиеся поверхности, у которых прямолинейными образующими служат касательные к C_1, C_2, пересекаются по одной из кривых Г, порождающей сеть. Если из различных точек кривой Г опишем около поверхности касательные конусы, то линии касания образуют одно семейство сети, а сопряженные линии образуют второе семейство сети.

Пусть M_1, M_2 — две произвольные точки поверхности и C_1, C_2 — проходящие через них линии одного из семейств сети. Вершина конуса, описанного около поверхности вдоль C_i, лежит в плоскости, касательной к поверхности в M_i, и требует для своего определения двух параметров. Следовательно, сеть может зависеть не больше чем от четырех параметров[1].

Поверхности второго порядка обладают как раз четырехпараметрическим множеством конических сетей, так как произвольная прямая пространства и прямая, сопряженная с ней относительно поверхности второго порядка, определяют два плоских пучка, которые пересекают поверхность по конической сети.

Докажем, что это свойство характеризует поверхности второго порядка.

Дифференцируя (9), (11), имеем:

$$\sigma_{uuu} = e^{-2\sigma}(B_u - A_v) - 2\sigma_u\sigma_{uu}, \quad \sigma_{uuv} = A_u, \qquad (17)$$
$$\sigma_{uvv} = A_v, \quad \sigma_{vvv} = B_v - e^{2\sigma}A_u - 2e^{2\sigma}\sigma_v\sigma_{uu}.$$

Вычисляя двумя различными способами σ_{uuuv} (или σ_{vvvu}), получаем следующее условие интегрируемости системы (9), (11):

$$[e^{-2\sigma}(B_u - A_v)]_v = (A_u + 2A\sigma_u)_u, \qquad (18)$$

Это условие имеет вид:

$$A\sigma_{uu} + C = 0, \qquad (18^*)$$

где C не содержит производных функции σ выше первого порядка.

Чтобы на поверхности существовала ∞^4 конических сетей, необходимо, чтобы уравнение (18*) было тождеством относительно σ_{uu}. Следовательно, A должно быть равно нулю и, кроме того, не должно содержать σ, σ_u, σ_v.

Отсюда, согласно (10), $\beta = \gamma = 0$, что характеризует поверхности второго порядка.

2. Докажем, что не существует поверхностей с ∞^3 конических сетей.

В случае поверхности с ∞^3 конических сетей из уравнения (18*) можно определить σ_{uu}.

Действительно, если $A = 0$, то либо $\beta = \gamma = 0$ и поверхность несет ∞^4 сетей, либо одна из производных σ_u, σ_v определяется в функции σ и второй производной и число параметров, определяющих сети, не превышает двух.

Определим из уравнения (18*) σ_{uuv} и приравняем соответствующему значению из (17); имеем:

$$R = \left(\frac{C}{A}\right)_v + A_u = 0. \qquad (19)$$

Обозначим A_1, B_2, C_3 совокупность старших относительно σ_u, σ_v членов в выражениях A, B, C (индекс совпадает со степенью этих членов).

Положим:

$$p = \sigma_u, \quad q = \sigma_v. \qquad (20)$$

[1] Это следует также из дифференциальных уравнений (9), (11) конической сети, так как, если задать произвольно значения σ, σ_u, σ_v и σ_{uu} в некоторой точке u, v, остальные частные производные определятся.

Имеем по уравнениям (18), (18*):

$$C_3 = -\frac{1}{8}(5\gamma e^{-4\sigma}q^3 - \beta pq^2 + 3\gamma e^{-2\sigma}p^2q + 9\beta e^{2\sigma}p^3) \qquad (21)$$

и по уравнению (19), положив $R^* = A^3R$,

$$R_6^* = \left(A_1\frac{\partial C_3}{\partial q} - C_3\frac{\partial A_1}{\partial q}\right)(A_1B_2 + e^{2\sigma}C_3) + qA_1\left(A_1\frac{\partial C_3}{\partial \sigma} - C_3\frac{\partial A_1}{\partial \sigma}\right). \qquad (22)$$

По уравнениям (10), (12) и (21):

$$A_1\frac{\partial C_3}{\partial q} - C_3\frac{\partial A_1}{\partial q} = \frac{1}{4}(5\gamma^2e^{-6\sigma}q^3 + 7\beta\gamma e^{-2\sigma}pq^2 - \beta^2e^{2\sigma}p^2q - 3\beta\gamma p^3),$$
$$A_1B_2 + e^{2\sigma}C_3 = \frac{1}{8}(-9\gamma e^{-2\sigma}q^3 - 3\beta e^{2\sigma}pq^2 + \gamma p^2q - 5\beta e^{4\sigma}p^3), \qquad (23)$$
$$A_1\frac{\partial C_3}{\partial \sigma} - C_3\frac{\partial A_1}{\partial \sigma} = \frac{1}{4}(-5\gamma^3e^{-6\sigma}q^4 - 16\beta\gamma e^{-2\sigma}pq^3 + \beta^2e^{2\sigma}p^2q^2 + 12\beta\gamma p^3q).$$

Подставив эти значения в (22), получаем:

$$32e^{8\sigma}R_6^* = -5\gamma^3q^6 + 90\beta\gamma^2e^{4\sigma}q^5p + (108\beta^2\gamma e^{8\sigma} + 5\gamma^3e^{2\sigma})q^4p^2 -$$
$$-(87\beta\gamma^2e^{6\sigma} + 5\beta^3e^{12\sigma})q^3p^3 - 123\beta^2\gamma e^{10\sigma}q^2p^4 - (3\beta\gamma^2e^{8\sigma} - 5\beta^3e^{14\sigma})qp^5 +$$
$$+15\beta^2\gamma e^{12\sigma}p^6. \qquad (24)$$

Чтобы на поверхности существовала ∞^3 конических сетей, необходимо, чтобы все коэффициенты многочлена R_6^* были равны нулю. Поэтому $\beta = \gamma = 0$, и мы приходим к поверхностям второго порядка. Следовательно, поверхностей с ∞^3 конических сетей не существует.

§ 3. Поверхности с ∞^2 конических сетей

1. Чтобы на поверхности существовала ∞^2 конических сетей, необходимо, чтобы уравнение (18*) не содержало σ_{uu}:

$$A = C = 0.$$

Доказательство. Пусть $A \neq 0$. Тогда имеет место уравнение (19), а также уравнение

$$S = 0, \qquad (25)$$

которое получается из (19), если в нем поменять местами u и v, β и γ, L и M и заменить σ на $-\sigma$, так как уравнения (9), (11) сети Петерсона инвариантны относительно такой замены.

Уравнение (25) получим также, если из (18*) вычислим σ_{uuu} и приравняем соответствующему значению из (17):

$$Se^{2\sigma} = \left(\frac{C}{A}\right)_u + 2p\frac{C}{A} + e^{-2\sigma}(B_u - A_v) = 0. \qquad (25^*)$$

Положив $S^* = -A^3S$, имеем по (24):

$$\left.\begin{aligned} 32e^{-8\sigma}S_6^* = -5\beta^3p^6 + 90\beta^2\gamma e^{-4\sigma}p^5q + (108\beta\gamma^2e^{-8\sigma} + 5\beta^3e^{-2\sigma})p^4q^2 - \\ -(87\beta^2e^{-6\sigma} + 5\gamma^3e^{-12\sigma})p^3q^3 - 123\beta\gamma^2e^{-10\sigma}p^2q^4 - \\ -(3\beta^2\gamma e^{-8\sigma} - 5\gamma^3e^{-14\sigma})pq^5 + 15\beta\gamma^2e^{-12\sigma}q^6 \end{aligned}\right\} \qquad (26)$$

R^* и S^*, рассматриваемые как многочлены относительно p и q, должны иметь общего делителя, так как в противном случае (19) и (25) определяют p и q, и число сетей не превышает ∞^1.

Пусть T — общий наибольший делитель R^* и S^*. Совокупность старших относительно p, q членов T служит общим делителем многочленов R_6^*, S_6. Поэтому займемся отысканием общего наибольшего делителя этих последних многочленов.

Общий наибольший делитель многочленов R_6^* и S_6^* служит также делителем многочлена $Q = 32\,e^{6\sigma}(pe^{2\sigma}R_6^* + qS_6^*)$.

Имеем по (24), (26):

$$\left.\begin{aligned} Q = 3\,\beta\gamma^2 e^{2\sigma} q\,(5q^6 - 11e^{2\sigma}p^2q^4 + 7e^{4\sigma}p^4q^2 - e^{6\sigma}p^6) - \\ - 3\,\beta^2\gamma e^{6\sigma} p\,(q^6 - 7e^{2\sigma}q^4p^2 + 11e^{4\sigma}q^2p^4 - 5\,e^{6\sigma}p^6) \end{aligned}\right\} \qquad (27)$$

или

$$Q = 3\,\beta\gamma e^{2\sigma}(q^2 - e^{2\sigma}p^2)^2\,[\gamma q\,(5q^2 - e^{2\sigma}p^2) - \beta p e^{4\sigma}(q^2 - 5e^{2\sigma}p^2)].$$

Q исчезает, если $\beta\gamma = 0$, поэтому случай линейчатых поверхностей подвергнем отдельному рассмотрению и положим пока $\beta\gamma \neq 0$.

Легко видеть, что $q^2 - e^{2\sigma}p^2$ служит общим наибольшим делителем R_6^* и S_6^*.

Действительно, имеем:

$$\left.\begin{aligned} R_6^* = (q^2 - e^{2\sigma}p^2)\,H_4, \\ S_6^* = (q^2 - e^{2\sigma}p^2)\,K_4, \end{aligned}\right\} \qquad (28)$$

где:

$$\left.\begin{aligned} H_4 = -\tfrac{1}{32}e^{-8\sigma}\,[\,5\gamma^3q^4 - 90\,\beta\gamma^2e^{4\sigma}q^3p - 108\,\beta^2\gamma e^{8\sigma}q^2p^2 - \\ - (3\,\beta\gamma^2e^{4\sigma} - 5\,\beta^3e^{12\sigma})\,qp^3 + 15\,\beta^2\gamma e^{10\sigma}p^4] \\ K_4 = \tfrac{1}{32}\,[5\,\beta^3e^{12\sigma}p^4 - 90\,\gamma\beta^2e^{8\sigma}p^3q - 108\,\gamma^2\beta e^{4\sigma}p^2q^2 - \\ - (3\,\beta^2\gamma e^{6\sigma} - 5\,\gamma^2)\,pq^3 + 15\,\beta\gamma^2e^{2\sigma}q^4]\,e^{-6\sigma}. \end{aligned}\right\} \qquad (29)$$

Многочлен H_4 — взаимно простой как с $q^2 - e^{2\sigma}p^2$, так и с $P = \gamma q\,(5\,q^2 - e^{2\sigma}p^2) - \beta p e^{4\sigma}(q^2 - 5e^{2\sigma}p^2)$.

Первое утверждение следует из того, что, подставив в H_4 $q = \varepsilon e^{\sigma}p$, где $\varepsilon^2 = 1$, получаем многочлен относительно e^{σ}, который обращается в нуль тождественно относительно σ только при условии $\beta = \gamma = 0$.

Чтобы убедиться во втором утверждении, составим многочлен.

$$32\,e^{8\sigma}H_4 + 3\,\beta\gamma e^{4\sigma}pP =$$

$$= -5q\,(\gamma q + \beta p e^{4\sigma})\,(\gamma q + h_1\beta p e^{4\sigma})\,(\gamma q + h_2\beta p e^{4\sigma}),$$

где h_1, h_2 — корни уравнения $h^2 + 22h + 1 = 0$, но $\gamma q + \lambda\beta e^{4\sigma}p$, где $\lambda = 0,\ 1,\ h_1,\ h_2$, не служит делителем P (при условии $\beta\gamma \neq 0$).

Теперь рассмотрим многочлен $G = R^*K_4 - S^*H_4$.

Так как T служит делителем G, совокупность старших членов T должна служить делителем совокупности старших членов G, т. е $G_9 = R_5^*K_4 - S_5^*H_4$ должно иметь делителем $q - \varepsilon e^{\sigma}p$, $\varepsilon^2 = 1$.

Это, однако, не имеет места. Чтобы в этом убедиться, вычислим R_5^*.

С этой целью отберем в выражении C из формул (18), (18*) члены второго измерения:

$$\left.\begin{aligned} C_2 = \tfrac{1}{48}\,[(45\,\gamma_v e^{-4\sigma} + 3\,\beta_u - 48\,\beta\gamma e^{-2\sigma})\,q^2 + (12\,\beta_v - 16\,\beta^2e^{2\sigma} - \\ - 80\,\gamma^2e^{-4\sigma} - 12\,\gamma_u e^{2\sigma})\,pq + (9\,\gamma_v e^{-2\sigma} - 57\,\beta_u e^{2\sigma} - 48\,\beta\gamma)\,p^2] \end{aligned}\right\} \qquad (30)$$

и, подставив в (19), получаем:

$$R_5^* = r_0q^5 + r_1pq^4 + r_2p^2q^3 + r_3p^3q^2 + r_4p^4q + r_5p^5, \qquad (31)$$

причем значения коэффициентов r_i следующие:

$$\left.\begin{aligned}
r_0 &= -\tfrac{29}{8}\gamma^2\beta_u e^{-4\sigma} + \tfrac{5}{4}\beta\gamma^3e^{-6\sigma} + \tfrac{11}{8}\gamma^2\gamma_v e^{-8\sigma} \\
r_1 &= -\tfrac{25}{8}\beta\gamma\beta_u - \tfrac{5}{4}\beta^2\gamma^2e^{-2\sigma} + \left(\tfrac{25}{4}\beta\gamma\gamma_v - \tfrac{55}{16}\gamma^2\beta_v\right)e^{-4\sigma} + \tfrac{5}{16}\gamma^2\gamma_u e^{-6\sigma} - \\
&\qquad - \tfrac{5}{2}\gamma^4e^{-8\sigma} \\
r_2 &= \tfrac{15}{64}\beta^2\beta_u e^{4\sigma} - \tfrac{37}{12}\beta^3\gamma e^{2\sigma} + \left(\tfrac{385}{64}\beta^2\gamma_v - \tfrac{47}{32}\beta\gamma\beta_v\right) + \\
&\qquad + \left(\tfrac{57}{64}\gamma^2\beta_u - \tfrac{9}{32}\beta\gamma\gamma_u\right)e^{-2\sigma} - \tfrac{161}{12}\beta\gamma^3e^{-4\sigma} + \tfrac{5}{16}\gamma^2\gamma_v e^{-6\sigma} \\
r_3 &= \tfrac{5}{12}\beta^4e^{6\sigma} + \tfrac{15}{32}\beta^2\beta_v e^{4\sigma} + \left(\tfrac{461}{64}\beta\gamma\beta_u - \tfrac{31}{32}\beta^2\gamma_u\right)e^{2\sigma} - \tfrac{227}{12}\beta^2\gamma^2 + \\
&\qquad + \tfrac{3}{4}\gamma^2\beta_v - \tfrac{237}{64}\beta\gamma\gamma_v e^{-2\sigma} \\
r_4 &= -\tfrac{25}{64}\beta^2\beta_u e^{6\sigma} - \tfrac{107}{12}\beta^3\gamma e^{4\sigma} + \left(\tfrac{31}{32}\beta\gamma\beta_v - \tfrac{215}{64}\beta^2\gamma_v\right)e^{2\sigma} + \\
&\qquad + \left(\tfrac{1}{8}\gamma^2\beta_u - \tfrac{7}{32}\beta\gamma\gamma_u\right) + \tfrac{1}{6}\beta\gamma^3e^{-2\sigma} \\
r_5 &= -\tfrac{35}{12}\beta^4e^{8\sigma} - \tfrac{5}{32}\beta^2\beta_v e^{6\sigma} + \left(\tfrac{5}{32}\beta^2\gamma_u - \tfrac{85}{64}\beta\gamma\beta_u\right)e^{4\sigma} + \\
&\qquad + \tfrac{7}{6}\beta^2\gamma^2e^{2\sigma} - \tfrac{3}{64}\beta\gamma\gamma_v.
\end{aligned}\right\} \qquad (32)$$

Аналогично имеем:

$$S_5^* = s_0p^5 + s_1p^4q + s_2p^3q^2 + s_3p^2q^3 + s_4pq^4 + s_5q^5, \qquad (33)$$

причем s_i получаются из r_i, если поменять местами u и v, β и γ и заменить σ на $-\sigma$. Так как нам понадобятся лишь старшие относительно e^{σ} члены, мы выпишем только эти члены в выражениях s_i:

$$\left.\begin{aligned}
s_0 &= \tfrac{11}{8}\beta^2\beta_u e^{8\sigma} + \ldots & s_3 &= \left(\tfrac{3}{4}\beta^2\gamma_u - \tfrac{237}{64}\beta\gamma\beta_u\right)e^{2\sigma} + \ldots \\
s_1 &= -\tfrac{5}{2}\beta^4e^{8\sigma} + \ldots & s_4 &= \tfrac{1}{6}\beta^3\gamma e^{2\sigma} + \ldots \\
s_2 &= \tfrac{5}{16}\beta^2\beta_u e^{6\sigma} + \ldots & s_5 &= -\tfrac{3}{64}\beta\gamma\beta_u + \ldots
\end{aligned}\right\} \qquad (34)$$

Подставим теперь $q = \varepsilon e^{\sigma}p$ в G_9 и выделим в полученном многочлене относительно e^{σ} старшую степень e^{σ}.

Так как после указанной подстановки в H_4 член с высшей степенью e^{σ} будет $-\frac{5}{32}\varepsilon\beta^3e^{5\sigma}p^4$, в K_4 член с высшей степенью e^{σ} равен $\frac{5}{32}\beta^3e^{6\sigma}p^4$, а в R_5^* старший член содержится по (31) и (32) в слагаемом $r_3q^2p^3$ и равен $\frac{5}{12}\beta^4e^{8\sigma}p^5$ и в S_5^* старший член содержится по (33), (34) в слагаемом s_1p^4q и равен $-\frac{5}{2}\varepsilon\beta^4e^{9\sigma}p^5$, находим для старшего члена в $G_9 = R_5^*K_4 - S_5^*H_4$ выражение $-\frac{125}{384}\beta^7e^{14\sigma}p^9$. Но в силу нашего допущения

$\beta \neq 0$; следовательно, R и S — взаимно простые многочлены относительно p, q, что и доказывает необходимость условия $A = 0$ для нелинейчатых поверхностей с ∞^2 сетей Петерсона.

2. В случае линейчатых поверхностей один из коэффициентов β, γ равен нулю. Пусть $\gamma = 0$. По (24) и (26):

$$\left.\begin{aligned} R_6^* &= -\frac{5}{32}\beta^3 e^{4\sigma} q p^3 (q^2 - e^{2\sigma} p^2), \\ S_6^* &= \frac{5}{32}\beta^3 e^{6\sigma} p^4 (q^2 - e^{2\sigma} p^2). \end{aligned}\right\} \tag{35}$$

Общий наибольший делитель R_6^* и S_6^*: $p^3(q^2 - e^{2\sigma}p^2)$, но так как теперь по (10) A не содержит q, знаменатель в выражении (19) для R содержит A не в третьей степени, а во второй и многочлен $R^* = A^3 R$ имеет A делителем. Следовательно, совокупность старших членов T может иметь своими делителями p в степени не выше второй и $q - \varepsilon e^{\sigma} p$, где $\varepsilon^2 = 1$.

Покажем, что последнее не имеет места. Для этого составим многочлен $F = pe^{2\sigma}R^* + qS^*$ и отберем его старшие члены $F_6 = pe^{2\sigma}R_5^* + qS_5^*$. По (32) и (34) теперь $r_0 = r_1 = s_3 = s_4 = s_5 = 0$; следовательно,

$$\left.\begin{aligned} R_5^* &= p^2(r_2 q^3 + r_3 q^2 p + r_4 q p^2 + r_5 p^3). \\ S_5^* &= p^3(s_0 p^2 + s_1 p q + s_2 q^2), \end{aligned}\right\} \tag{36}$$

причем:

$$\begin{aligned} r_2 &= \frac{15}{64}\beta^2\beta_u e^{4\sigma}, & s_0 &= \frac{11}{8}\beta^2\beta_u e^{8\sigma} \\ r_3 &= \frac{5}{12}\beta^4 e^{6\sigma} + \frac{15}{32}\beta^2\beta_v e^{4\sigma}, & s_1 &= -\frac{5}{2}\beta^4 e^{8\sigma} + \frac{5}{16}\beta^2\beta_v e^{6\sigma}, \\ r_4 &= -\frac{25}{64}\beta^2\beta_u e^{6\sigma}, & s_2 &= \frac{5}{16}\beta^2\beta_u e^{6\sigma}. \\ r_5 &= -\frac{35}{12}\beta^4 e^{8\sigma} - \frac{5}{32}\beta^2\beta_v e^{6\sigma} \end{aligned}$$

Подставив значения R_5^* и S_5^* в F_6 и положив $q = \varepsilon e^{\sigma} p$, получаем:

$$F_6 = p^6[\varepsilon(r_2 e^{2\sigma} + s_2)e^{3\sigma} + (r_3 e^{2\sigma} + s_1)e^{2\sigma} + \varepsilon e^{\sigma}(r_4 e^{2\sigma} + s_0) + r_5 e^{2\sigma}]. \tag{37}$$

Для члена с высшей степенью относительно e^{σ} находим выражение $-5\beta^4 e^{10\sigma} p^6$; следовательно, $q - \varepsilon e^{\sigma} p$ не служит делителем совокупности старших членов T.

Таким образом, либо $T = p^2 + ap + bq + c$, либо $T = p + c$. Однако, легко видеть, что второе предположение невозможно и что $b \neq 0$. Действительно, если T не содержит q, из $T = 0$ следует $p = \varphi(u, v, \sigma)$.

Дифференцируя по v, получаем:

$$A = -\frac{1}{2}\beta_u e^{2\sigma} - \beta e^{2\sigma} p = \varphi_\sigma q + \varphi_v.$$

Это последнее уравнение не должно содержать q, так как иначе p и q определяются и число сетей не превосходит ∞^1. Следовательно, $\varphi_\sigma = 0$ и

$$p = \varphi(u, v) = -\frac{\beta_u}{2\beta} - \frac{\varphi_v}{\beta} e^{-2\sigma}, \tag{38}$$

поэтому $\varphi_v = 0$, но тогда и $A = 0$.

Мы получаем для T единственно возможное значение следующего вида:

$$T = q - \lambda_0 p^2 - \lambda_1 p - \lambda_2, \quad \lambda_0 \neq 0. \tag{39}$$

Из $q = \lambda_0 p^2 + \lambda_1 p + \lambda_2$ следует после дифференцирования по u и замены σ_{uu} его значением из (18*):

$$A^2 + C(2\lambda_0 p + \lambda_1) - A\left[\left(\frac{\partial\lambda_0}{\partial u} + \frac{\partial\lambda_0}{\partial\sigma}p\right)p^2 + \left(\frac{\partial\lambda_1}{\partial u} + \frac{\partial\lambda_1}{\partial\sigma}p\right)p + \right.$$
$$\left. + \left(\frac{\partial\lambda_2}{\partial u} + \frac{\partial\lambda_2}{\partial\sigma}p\right)\right] = 0. \tag{40}$$

Это уравнение не должно содержать p. По (21):

$$C_3 = \frac{1}{8}(\beta p q^2 - 9\beta e^{2\sigma} p^3).$$

Подставляя сюда вместо q его значение по (39), получаем:

$$C_3 = \frac{1}{8}\lambda_0^2 \beta p^5 + \ldots$$

Следовательно, в уравнении (40) старший относительно p член $\frac{1}{4}\lambda_0^3 p^6$ и так как $\lambda_0 \neq 0$, то уравнение (40) содержит p.

Тем самым доказана необходимость условия $A = 0$ и для линейчатых поверхностей с ∞^2 сетей Петерсона.

3. По крайней мере, один из коэффициентов β, γ отличен от нуля. Пусть $\beta \neq 0$. Из условия $A = 0$ по (10) следует:

$$p = -\frac{\gamma}{\beta} e^{-4\sigma} q + \ldots \tag{41}$$

Подставив в уравнение $C = 0$, получаем следующее уравнение третьей степени относительно q:

$$\left(-9\gamma e^{-4\sigma} + 9\frac{\gamma^3}{\beta^2} e^{-10\sigma}\right) q^3 + \Omega = 0, \tag{42}$$

где Ω содержит q в степени не выше второй.

Уравнение (42) должно выполняться тождественно относительно q, σ. Следовательно,

$$\gamma = 0, \tag{43}$$

а искомые поверхности линейчатые.

Из $A = 0$, $\gamma = 0$ следует по (10):

$$p = -\frac{1}{2}\frac{\beta_u}{\beta}. \tag{44}$$

Подставив полученное значение p в (9), получаем:

$$(\lg \beta)_{uv} = 0 \tag{45}$$

и так как $\beta \frac{du^2}{dv}$ инвариантно относительно замены параметров вида $U = U(u)$, $V = V(v)$, можно β привести к единице:

$$\beta = 1. \tag{46}$$

Из (44) следует:

$$p = 0. \tag{47}$$

Условия интегрируемости [7]:

$$\left.\begin{aligned} L_v = -2\beta\gamma_u - \gamma\beta_u, \quad M_u = -2\gamma\beta_v - \beta\gamma_v \\ \beta M_v + 2M\beta_v + \beta_{vvv} = \gamma L_u + 2L\gamma_u + \gamma_{uuu} \end{aligned}\right\} \tag{48}$$

дают: $M = \text{const}$, $L = L(u)$, а из (17_1) следует, что L не зависит и от u:

$$L = \text{const}.$$

Итак, если на поверхности существует ∞^2 сетей Петерсона, можно так выбрать параметры, что выполняются условия:

$$\gamma=0,\quad \beta=1,\quad L=\text{const},\quad M=\text{const} \tag{49}$$

при этом

$$p=0\,. \tag{50}$$

Но эти условия и достаточны, так как система (9), (11) сводится при этом к одному уравнению второго порядка:

$$\frac{d^2\sigma}{dv^2}=\frac{1}{2}\left(\frac{d\sigma}{dv}\right)^2-2e^{2\sigma}\frac{d\sigma}{dv}-\frac{1}{2}e^{4\sigma}-Le^{2\sigma}+M, \tag{51}$$

которое и определяет ∞^2 конических сетей.

4. Первые два условия (49) характеризуют линейчатые поверхности, принадлежащие линейной конгруэнции.

Остается выяснить, для каких линейчатых поверхностей, принадлежащих линейной конгруэнции, $\frac{dL}{du}=0$.

Имеем два случая: 1° — линейная конгруэнция неособенная; следовательно, ее директрисы различны, 2° — линейная конгруэнция особенная, директрисы — совпадают.

В случае 1° примем директрисы за противоположные ребра координатного тетраэдра. Уравнение поверхностей принимает вид:

$$z=f\left(\frac{y}{x}\right), \tag{52}$$

или в асимптотических параметрах:

$$x=v\sqrt{f'(u)},\quad y=uv\sqrt{f'(u)},\quad z=f(u),\quad t=1\,. \tag{53}$$

Имеем по (7), (13):

$$\theta_u=\frac{f''}{f'},\ \theta_v=\gamma=p_{11}=p_{22}=0,\quad \beta=\frac{v}{2}\left(\frac{f'''}{f'}-\frac{3}{2}\frac{f''^2}{f'^2}\right), \tag{54}$$

$$L=\frac{1}{2}\left(\frac{f'''}{f'}=\frac{3}{2}\frac{f''^2}{f'^2}\right),\quad M=0\,.$$

Заменив параметры по формулам:

$$\left(\frac{dU}{du}\right)^2=\frac{1}{2}\left(\frac{f'''}{f'}-\frac{3}{2}\frac{f''^2}{f'^2}\right),\quad \frac{dV}{dv}=\frac{1}{v}, \tag{55}$$

получаем

$$\bar\beta=1\,.$$

Выражение:

$$L\,du^2+M\,dv^2-\left[\left(\lambda_{uu}-\frac{1}{2}\lambda_u^2\right)du^2+\left(\mu_{vv}-\frac{1}{2}\mu_v^2\right)dv^2\right],$$

где

$$\lambda=\lg\sqrt{\beta},\quad \mu=-\lg\beta$$

инвариантно относительно замены параметров [7].

Так как

$$L=\left(\frac{dU}{du}\right)^2,\quad \beta=v\left(\frac{dU}{du}\right)^2,$$

имеем

$$\left(U'^2-\frac{U'''}{U'}+\frac{3}{2}\frac{U''^2}{U'^2}\right)du^2-\frac{1}{2}\frac{dv^2}{v^2}=\bar L\,dU^2+\bar M\,dV^2.$$

Следовательно,

$$1-\bar L=\frac{U'''}{U'^3}-\frac{3}{2}\frac{U''^2}{U'^4},\quad \bar M=-\frac{1}{2}\,. \tag{56}$$

Для определения $f(u)$ мы получили уравнения (55_1), (56_1), причем $\bar L$ — постоянная.

Из уравнения (56_1) получаем для U'^2 одно из следующих трех значений:

$$1)\quad U'^2=\frac{C_1}{\left[\left(\frac{C_1u+C_2}{2}\right)^2-2C\right]^2}\qquad C=1-\bar L \tag{57}$$

$$2)\quad U'^2=\frac{1}{(\sqrt{2C}\,u+C_2)^2} \tag{58}$$

$$3)\quad U'^2=\text{const} \tag{59}$$

В уравнении (55_1) правая часть есть шварцева производная функции f. Следовательно, общее решение представляет собой дробно-линейную функцию частного решения.

Подставив в (55_1) найденное значение U'^2 из (57) и заменив независимую переменную u по формуле:

$$C_1u+C_2=2u_1,\quad \frac{u_1-a}{u_1+a}=u_2,\quad 2C=a^2, \tag{60}$$

приведем (55_1) к виду:

$$\frac{\dddot f}{\dot f}-\frac{3}{2}\frac{\ddot f^2}{\dot f^2}=\frac{2}{C_1a^2u_2^2}\,. \tag{61}$$

Это уравнение имеет частные решения:

$$f=u_2^n\left(C_1a^2=\frac{4}{1-n^2},\quad n\neq0,\quad n\neq1\right) \tag{62}$$

и

$$f=\lg u_2\ (\text{если } c_1a^2=4)\,. \tag{63}$$

Если $C=1-\bar L=0$, вместо подстановки (60_2) полагаем $u_2=\frac{1}{u_1}$ и снова приходим к уравнению типа (61). Выражение (58) для U'^2 эквивалентно с правой частью (61).

Выражение (59) для U'^2 приводит к частному решению:

$$f=e^u. \tag{64}$$

Следовательно, искомые поверхности надлежащим проективным преобразованием (вещественным или мнимым) приводятся к виду:

$$z=\left(\frac{y}{x}\right)^n \tag{65}$$

и

$$Z=\lg\frac{y}{x}\ \left(\text{или } z=\operatorname{arctg}\frac{y}{x}\right). \tag{66}$$

5. Линейчатая поверхность, принадлежащая особенной линейной конгруэнции, может быть при соответствующем выборе координатного тетраэдра представлена уравнением:

$$z=\frac{y}{x}+F(x), \tag{67}$$

а в асимптотических параметрах — уравнениями:

$$x=u,\ y=uv+\frac{1}{2}(u^2F'-uF),\ z=v+\frac{1}{2}(F+uF'),\quad t=1\,. \tag{68}$$

Подставив в уравнение (79) $\theta = \frac{e^{2\sigma}}{w}$, перепишем его в виде:

$$2\frac{d\theta}{d\sigma} = 3\theta(1 + 8\theta + 12\theta^2), \tag{82}$$

откуда

$$e^{\sigma} = c_1\theta^{2/3}\left(\theta + \frac{1}{2}\right)^{1/3}\left(\theta + \frac{1}{6}\right)^{-1}. \tag{83}$$

Но $dv = \theta e^{-2\sigma}d\sigma$. Подставив сюда вместо σ его выражение через θ по (83), получаем:

$$18c_1^2\frac{dv}{d\theta} = \theta^{-\frac{4}{3}}\left(\theta + \frac{1}{2}\right)^{-2/3}\left(\theta + \frac{1}{6}\right). \tag{84}$$

Сделав в (84) подстановку $\theta + \frac{1}{2} = \theta\tau^3$ и проинтегрировав, получаем

$$9c_1^2 v = \tau^{-2} - \tau + c_2$$

и, внеся в уравнение сети $du^2 - e^{2\sigma}dv^2 = 0$:

$$\pm 3c_1 u = \tau^{-1} + c_0.$$

Обозначим $3c_1 = k$, $\frac{4}{\mu^3} = m$, $\frac{c_2}{k^2} = l$ и подставим найденные значения u, v в уравнения поверхности. Обозначив λ, μ параметры сети, получаем следующие ∞^2 канонических представлений поверхности Кэйли как поверхности Петерсона:

$$\begin{gathered} x = \lambda^2 - \mu^2, \quad y = \left(\lambda^3 + l\lambda - \frac{m}{2}\right) - (\mu^3 + l\mu), \\ z = (\lambda^4 + 2l\lambda^2 + m\lambda) - (\mu^4 + 2l\mu^2 + m\mu), \quad t = \lambda - \mu. \end{gathered} \tag{85}$$

Кривые, порождающие конические сети, определяются уравнениями:

$$\begin{gathered} \xi_1 = 2\lambda, \quad \eta_1 = 3\lambda^2 + l, \quad \zeta_1 = 4\lambda^3 + 4l\lambda - m, \quad \tau_1 = 1, \\ \xi_2 = 2\mu, \quad \eta_2 = 3\mu^2 + l, \quad \zeta_2 = 4\mu^3 + 4l\mu + m, \quad \tau_2 = 1. \end{gathered}$$

Это две конгруэнции пространственных кривых третьего порядка. Пары кривых, порождающие сеть, различны при $m \neq 0$; при $m = 0$ они совпадают и образуют асимптотические линии поверхности Кэйли.

Рассмотрим произвольную точку M поверхности Кэйли. Касательная плоскость ω в точке M пересекает поверхность по кривой третьего порядка, которая распадается на прямую a и коническое сечение C. Произвольная асимптотическая линия Γ — пространственная кривая третьего порядка и пересекает ω в трех точках, из которых одна точка (P_3) расположена на образующей и две другие (P_1, P_2) — на коническом сечении C. Эти последние служат вершинами конусов, описанных около поверхности вдоль кривых сети Петерсона, проходящих через точку M. Касательные MP_1 и MP_2 сопряжены и гармонически разделяют асимптотические касательные, т. е. образующую a и касательную к коническому сечению C, проведенную в точке M. Следовательно, P_1 и P_2 на коническом сечении C гармонически разделяют точки пересечения C и a. На поверхности Кэйли, таким образом, имеет место следующий аналог теоремы Дезарга: асимптотические линии пересекают каждое коническое сечение, расположенное на поверхности в парах точек, принадлежащих одной инволюции.

Здесь роль пучка кривых второго порядка, о котором идет речь в теореме Дезарга, играет семейство кривых третьего порядка — асимптотических линий поверхности, роль прямых теоремы Дезарга — конические сечения, расположенные на поверхности (и тех и других ∞^2).

Других конических сетей на поверхности Кэйли не существует. Действительно, пусть $\sigma_u \neq 0$. Условие интегрируемости (18) в нашем случае имеет вид:

$$8\sigma_{uu} + 9\sigma_u^2 + 16\sigma_v + 36e^{2\sigma} - e^{-2\sigma}\sigma_v^2 = 0. \tag{86}$$

Уравнения (9), (11):

$$\sigma_{uv} + 6e^{2\sigma}\sigma_u = 0 \tag{87}$$

$$8\sigma_{vv} = 3\sigma_v^2 + 5e^{2\sigma}\sigma_u^2 - 80e^{2\sigma}\sigma_v - 108e^{4\sigma}. \tag{88}$$

Интегрируя уравнение (87), получаем:

$$\sigma_v = -3e^{2\sigma} + V.$$

Подставив в (88), получим:

$$\sigma_u^2 = -3e^{2\sigma} + 10V - \frac{1}{5}e^{-2\sigma}(8V' - 3V^2). \tag{89}$$

Дифференцируем по u и подставляем в (86). Получаем:

$$72e^{2\sigma} - \frac{1}{5}e^{-2\sigma}(8V' - 3V^2) - 112V + e^{-2\sigma}V^2 = 0.$$

Отсюда следует: $\sigma_u = 0$, что противоречит нашему предположению.

7. Общую линейчатую поверхность третьего порядка

$$zx^2 - ty^2 = 0$$

в асимптотических параметрах можно записать так:

$$x = e^{u+v}, \quad y = e^{3u+v}, \quad z = e^{4u}, \quad t = 1. \tag{90}$$

Здесь

$$\gamma = p_{11} = p_{22} = 0, \quad \theta_v = 1, \quad \theta_u = 4, \quad \beta = -3, \quad L = -5, \quad M = -\frac{1}{2}.$$

Для определения ∞^2 сетей Петерсона имеем уравнение $\sigma_u = 0$ и по (11):

$$2\frac{d^2\sigma}{dv^2} - \left(\frac{d\sigma}{dv}\right)^2 - 12e^{2\sigma}\frac{d\sigma}{dv} + 9e^{4\sigma} - 10e^{2\sigma} + 1 = 0. \tag{91}$$

Положив $\frac{d\sigma}{dv} = w$, $e^{2\sigma} = \lambda$, получаем:

$$4\lambda w\,dw = (12\lambda w - 9\lambda^2 + 10\lambda + w^2 - 1)\,d\lambda, \tag{92}$$

или в однородных координатах $x_1 : x_2 : x_3 = \lambda : w : 1$,

$$4x_1x_2(x_3dx_2 - x_2dx_3) = (12x_1x_2 - 9x_1^2 + 10x_1x_3 + x_2^2 - x_3^2)(x_3dx_1 - x_1dx_3). \tag{92*}$$

Уравнение типа Дарбу. Имеем следующие пять частных решений:

$$1^\circ\ g_1 = x_3 = 0, \quad 2^\circ\ g_2 = x_1 = 0, \quad 3^\circ\ g_3 = x_2 - x_1 + x_3 = 0.$$

$$4^\circ\ g_4 = (x_2 - 3x_1 - x_3)^2 - 16x_1x_3 = 0, \quad 5^\circ\ g_5 = (x_2 - 3x_1 + x_3)^2 - 4x_1x_3 = 0.$$

Этого достаточно, чтобы написать общее решение в виде:

$$g_1^{\alpha_1}g_2^{\alpha_2}g_3^{\alpha_3}g_4^{\alpha_4}g_5^{\alpha_5} = \text{const}.$$

Для определения α_i имеем уравнения:

$$\Sigma h_i\alpha_i = 0, \quad \Sigma k_i\alpha_i = 0,$$

приводит к следующему каноническому представлению поверхности:

$$x = \frac{4c}{\tau_1}, \quad y = 4c\tau_2, \quad z = 3\tau_2^2 + \tau_1^2, \quad t = \frac{3}{\tau_1^2} + \frac{1}{\tau_2^2}. \tag{102}$$

Здесь уравнения кривых, принадлежащих ∞^1 конических сетей:

$$\left.\begin{aligned} x_1 = -\frac{4c}{\tau_1^2}, \quad y_1 = 0, \quad z_1 = 2\tau_1, \quad t_1 = -\frac{6}{\tau_1^3}, \\ x_2 = 0, \quad y_2 = 4c, \quad z_2 = 6\tau_2, \quad t_2 = -\frac{2}{\tau_2^3}. \end{aligned}\right\} \tag{103}$$

Это плоские кривые четвертого порядка. Кривые (103_1) расположены в плоскости $y = 0$. Кривые (103_2) — в плоскости $x = 0$.

8. В числе найденных поверхностей с ∞^2 конических сетей содержится также геликоид.

Уравнения геликоида в асимптотических параметрах можно записать так:

$$x = e^v \cos u, \quad y = e^v \sin u, \quad z = u. \tag{104}$$

Здесь

$$\gamma = \theta_u = 0, \quad \theta_v = 1, \quad \beta = -1, \quad L = 1, \quad M = -\frac{1}{2}.$$

Система (9) и (11) имеет решение $\sigma_u = 0$, удовлетворяющее обыкновенному дифференциальному уравнению второго порядка:

$$\frac{d^2\sigma}{dv^2} = \frac{1}{2}\left(\frac{d\sigma}{dv}\right)^2 + 2e^{2\sigma}\frac{d\sigma}{dv} - \frac{1}{2}e^{4\sigma} - e^{2\sigma} - \frac{1}{2}.$$

Если положить:

$$\frac{d\sigma}{dv} = w, \quad e^{2\sigma} = \lambda, \tag{105}$$

получаем уравнение типа Дарбу:

$$4\lambda w \frac{dw}{d\lambda} = w^2 + 4\lambda w - \lambda^2 - 2\lambda - 1, \tag{106}$$

или в однородных координатах $x_1 : x_2 : x_3 = \lambda : w : 1$

$$4x_1x_2(x_3dx_2 - x_2dx_3) = [x_2^2 + 4x_1x_2 - (x_1 + x_3)^2](x_3dx_1 - x_1dx_3). \tag{106*}$$

Имеем частные решения:

1° $x_1 = 0$, 2° $x_3 = 0$, 3° $x_2 - x_1 - x_3 = 0$, 4° $(x_2 - x_1 + x_3)^2 + 4x_1x_3 = 0$.

По теореме Дарбу этого достаточно, чтобы с помощью одной квадратуры найти интегрирующий множитель.

Частное решение 3° дает известные ∞^1 сетей переноса геликоида. Действительно, из $w = \lambda + 1$, $du^2 = \lambda\, dv^2$ и (104) следует:

$$u = \frac{\tau_1 + \tau_2}{2}, \quad e^v = C \sin\frac{\tau_2 - \tau_1}{2}$$

и подстановка в (104) дает:

$$x = \frac{C}{2}(\sin\tau_2 - \sin\tau_1), \quad y = \frac{C}{2}(\cos\tau_1 - \cos\tau_2), \quad z = \frac{\tau_1 + \tau_2}{2}. \tag{107}$$

Частное решение 4° дает следующую ∞^1 канонических представлений геликоида как поверхности Петерсона:

$$\left.\begin{aligned} x = C(e^{-i\tau_1} + e^{i\tau_2}), \quad y = C_i(e^{-i\tau_1} - e^{i\tau_2}), \\ z = \tau_1(2 - i\tau_1) + \tau_2(2 + i\tau_2), \quad t = 2(1 - i\tau_1) + 2(1 + i\tau_2). \end{aligned}\right\} \tag{108}$$

Здесь кривые, порождающие ∞^1 конических сетей, определяются уравнениями:

$$\left.\begin{aligned} x_1 = -Cie^{-i\alpha}, \quad y_1 = Ce^{-i\alpha}, \quad z_1 = 2 - 2i\alpha, \quad t_1 = -2i, \\ x_2 = Cie^{i\beta}, \quad y_2 = Ce^{i\beta}, \quad z_2 = 2 + 2i\beta, \quad t_2 = 2i. \end{aligned}\right\} \tag{109}$$

Оба семейства плоские, но трансцендентные; первое расположено в плоскости $x + iy = 0$, второе — в плоскости $x - iy = 0$.

§ 4. Поверхности с ∞^1 конических сетей

1. Рассмотрим дифференциальные уравнения (9), (11) конической сети $du^2 - e^{2\sigma}dv^2 = 0$:

$$p_v = q_u = A, \tag{9'}$$

$$q_v + e^{2\sigma}p_u = B, \tag{11'}$$

где $p = \sigma_u$, $q = \sigma_v$ и A, B определены по (10), (12).

Условием совместности системы (9), (10) служит (18):

$$Ap_u + C = 0. \tag{18'}$$

Если $A \neq 0$, уравнения (9'), (11') и (18') определяют p_u, p_v, q_u и q_v как функции p, q, σ, u, v. Условиями интегрируемости $p_{uv} = p_{vu}$ и $q_{uv} = q_{vu}$ служат (19) и (25) или, обозначив $R^* = A^3R$ и $S^* = -A^3S$:

$$R^* = 0, \tag{19'}$$

$$S^* = 0, \tag{25'}$$

где R^* и S^* — многочлены 6-ой степени относительно p и q.

В § 3 было доказано, что R^* и S^* в случае нелинейчатых поверхностей многочлены взаимно простые относительно p и q.

Следовательно, существуют разложения p и q по убывающим (или возрастающим) степеням e^σ:

$$p = \sum_{k=0}^{\infty} \pi_k e^{\lambda_k \sigma}, \quad \lambda_0 > \lambda_1 > \ldots, \quad \pi_0 \neq 0, \tag{110}$$

$$q = \sum_{k=0}^{\infty} \varkappa_k e^{\mu_k \sigma}, \quad \mu_0 > \mu_1 > \ldots, \quad \varkappa_0 \neq 0. \tag{111}$$

Аналогичные разложения имеют место и в случае линейчатых поверхностей при условии $A \neq 0$.

Действительно, в § 3, п. 2 было доказано, что если в рассматриваемом случае и существует общий наибольший делитель T многочленов R^* и S^*, то либо $T = p + c$, либо $T = p^2 + ap + bq + c$.

Если $T \neq 0$, из $R^* = S^* = 0$ следует разложения вида (110), (111).

Если $T = 0$, то, дифференцируя его по v или u и воспользовавшись (9'), (11'), (18'), получаем второе условие в виде равенства нулю некоторого многочлена и из рассуждения, проведенного в конце § 3 п. 2, следует, что эти два условия действительно определяют p и q при $A \neq 0$.

В случае $A = 0$ искомые поверхности, несущие ∞^1 конических сетей, не могут быть линейчатыми.

Действительно, пусть $A = 0$, $\gamma = 0$.

Имеем по (10):

$$\sigma = V - \frac{1}{2}\lg\beta.$$

Так как $\sigma_{uv} = 0$, то $(\lg\beta)_{uv} = 0$.

Отсюда, по (7) и (13):

$$\theta_u=\theta_v=\gamma=p_{11}=p_{22}=L=M=0,\quad \beta=\frac{1}{2}(uF)'''. \tag{69}$$

Заменив переменные u, v по формулам:

$$\left(\frac{dU}{du}\right)^2=\frac{1}{2}(uF)'''=\beta,\quad V=v, \tag{70}$$

в силу

$$\bar\beta\,\frac{dU^2}{dV}=\beta\,\frac{du^2}{dv}$$

получаем

$$\bar\beta=1.$$

И так как

$$Ldu^2+Mdv^2-\left(\varphi_{uu}-\frac{1}{2}\varphi_u^2\right)du^2-\left(\varphi_{vv}-\frac{1}{2}\psi_v^2\right)dv^2,$$

где

$$\varphi=\lg\sqrt{\beta}=\lg U',\quad \psi=-\lg\beta=-2\lg U,$$

инвариантно относительно замены параметра, имеем:

$$\bar L dU^2+\bar M dV^2=-\left(\frac{U'''}{U'}-\frac{3}{2}\frac{U''^2}{U'^2}\right)du^2.$$

Следовательно,

$$\bar M=0,\quad \bar L=-\left(\frac{U'''}{U'^3}-\frac{3}{2}\frac{U''^2}{U'^4}\right). \tag{72}$$

Поэтому искомая функция $F(u)$ определяется из уравнений:

$$[uF(u)]\,U'^3=2U'^2, \tag{73}$$

$$\frac{U'''}{U'^3}-\frac{3}{2}\frac{U''^2}{U'^4}=C. \tag{74}$$

Последнее уравнение совпадает с (56_1), следовательно, значения U'^2 определяются формулами (57), (58), (59).

Подставив эти значения в (73), определяем $F(u)$ и по (67) находим следующие уравнения искомых поверхностей с точностью до коллинеаций:

$$z=\frac{y}{x}+\lg x \tag{75}$$

$$z=\frac{y}{x}+x^2. \tag{76}$$

Резюмируем результаты данного параграфа в виде следующей теоремы:

Теорема. Поверхности с ∞^2 конических сетей суть линейчатые, принадлежащие линейной конгруэнции и с точностью до коллинеаций (вещественных или мнимых) исчерпываются следующими типами:

$$z=\left(\frac{y}{x}\right)^n,\quad z=\operatorname{arctg}\frac{y}{x},\quad z=\frac{y}{x}+x^2,\quad z=\frac{y}{x}+\lg x.$$

6. В числе этих поверхностей содержатся, в частности, все косые линейчатые поверхности третьего порядка, уравнения которых при

надлежащем выборе координатного тетраэдра приводятся, как известно, к следующему виду:

$1°$ $z=\dfrac{y}{x}+x^2$ (поверхность Кэйли)

и

$2°$ $z=\dfrac{y^2}{x^3}$ (общая линейчатая поверхность).

Поверхность Кэйли, как показал еще С. Ли [2], принадлежит к поверхностям переноса с ∞^1 сетей переноса. Найдем ∞^2 ее конических сетей.

Записав ее уравнение в виде $z=2xy-x^3$, перейдем к асимптотическим параметрам:

$$x=2u,\quad y=3u^2+v,\quad z=4u^3+4uv,\quad t=1. \tag{77}$$

Здесь

$$\theta_u=\theta_v=p_{11}=p_{22}=\gamma=L=M=0,\quad \beta=6.$$

Уравнение (11) принимает вид:

$$\frac{d^2\sigma}{dv^2}=\frac{1}{2}\left(\frac{d\sigma}{dv}\right)^2-12e^{2\sigma}\frac{d\sigma}{dv}-18e^{4\sigma}. \tag{78}$$

Положив $\sigma'=w$, перепишем (78) так:

$$2w\frac{dw}{d\sigma}=w^2-24e^{2\sigma}w-36e^{4\sigma}. \tag{79}$$

Это уравнение допускает два частных решения вида $w=ke^{2\sigma}$, где $k=\mathrm{const}$. Действительно, подставляя в (79), получаем

$$w_1=-6e^{2\sigma},\quad w_2=-2e^{2\sigma}.$$

Отсюда в первом случае имеем:

$$e^{-2\sigma}+12v=\mathrm{const},$$

во втором случае:

$$e^{-2\sigma}+4v=\mathrm{const}.$$

Внеся эти значения в дифференциальные уравнения конической сети $du^2-e^{2\sigma}dv^2$, проинтегрировав и приняв линии сети за параметрические, получаем следующие два канонических представления поверхности Кэйли:

$$x=\frac{\lambda+\mu}{6},\quad y=\frac{\lambda^2+\mu^2-2c}{24},\quad z=\frac{\lambda^3+\mu^3-3c(\lambda+\mu)}{108} \tag{80}$$

и

$$x=\frac{4(\lambda^2-\mu^2)}{8(\lambda-\mu)},\quad y+\frac{c}{4}=\frac{2(\lambda^3-\mu^3)}{8(\lambda-\mu)},\quad z=\frac{\lambda^4-\mu^4+2c(\lambda^2-\mu^2)}{8(\lambda-\mu)}. \tag{81}$$

Уравнения (80) дают все ∞^1 представлений поверхности Кэйли как поверхности переноса.

Уравнения (81) дают ∞^1 представлений ее как поверхности Петерсона, причем сети Петерсона порождаются кривыми:

$$\xi=8\lambda,\quad \eta=6\lambda^2-2c,\quad \zeta=4\lambda^3-4c\lambda,\quad \tau=8,$$

на которых расположены вершины конусов, описанных около поверхности вдоль кривых сети.

Легко видеть, что эти пространственные кривые третьего порядка расположены на самой поверхности и служат ее асимптотическими линиями второго семейства (непрямолинейными).

Подставив в уравнение (79) $\theta = \frac{e^{2\sigma}}{w}$, перепишем его в виде:

$$2\frac{d\theta}{d\sigma} = 3\theta(1 + 8\theta + 12\theta^2), \tag{82}$$

откуда

$$e^{\sigma} = c_1\theta^{2/3}\left(\theta + \frac{1}{2}\right)^{1/3}\left(\theta + \frac{1}{6}\right)^{-1}. \tag{83}$$

Но $dv = \theta e^{-2\sigma}d\sigma$. Подставив сюда вместо σ его выражение через θ по (83), получаем:

$$18c_1^2\frac{dv}{d\theta} = \theta^{-\frac{4}{3}}\left(\theta + \frac{1}{2}\right)^{-5/3}\left(\theta + \frac{1}{6}\right). \tag{84}$$

Сделав в (84) подстановку $\theta + \frac{1}{2} = \theta\tau^3$ и проинтегрировав, получаем

$$9c_1^2 v = \tau^{-2} - \tau + c_2$$

и, внеся в уравнение сети $du^2 - e^{2\sigma}dv^2 = 0$:

$$\pm 3c_1 u = \tau^{-1} + c_0.$$

Обозначим $3c_1 = k$, $\frac{4}{\mu^3} = m$, $\frac{c_2}{k^2} = l$ и подставим найденные значения u, v в уравнения поверхности. Обозначив λ, μ параметры сети, получаем следующие ∞^2 канонических представлений поверхности Кэйли как поверхности Петерсона:

$$\begin{aligned} x &= \lambda^2 - \mu^2, \quad y = \left(\lambda^3 + l\lambda - \frac{m}{2}\right) - (\mu^3 + l\mu), \\ z &= (\lambda^4 + 2l\lambda^2 + m\lambda) - (\mu^4 + 2l\mu^2 + m\mu), \quad t = \lambda - \mu. \end{aligned} \tag{85}$$

Кривые, порождающие конические сети, определяются уравнениями:

$$\xi_1 = 2\lambda, \quad \eta_1 = 3\lambda^2 + l, \quad \zeta_1 = 4\lambda^3 + 4l\lambda - m, \quad \tau_1 = 1,$$
$$\xi_2 = 2\mu, \quad \eta_2 = 3\mu^2 + l, \quad \zeta_2 = 4\mu^3 + 4l\mu + m, \quad \tau_2 = 1.$$

Это две конгруэнции пространственных кривых третьего порядка. Пары кривых, порождающие сеть, различны при $m \neq 0$; при $m = 0$ они совпадают и образуют асимптотические линии поверхности Кэйли.

Рассмотрим произвольную точку M поверхности Кэйли.

Касательная плоскость ω в точке M пересекает поверхность по кривой третьего порядка, которая распадается на прямую a и коническое сечение C. Произвольная асимптотическая линия Γ — пространственная кривая третьего порядка и пересекает ω в трех точках, из которых одна точка (P_3) расположена на образующей и две другие (P_1, P_2) — на коническом сечении C. Эти последние служат вершинами конусов, описанных около поверхности вдоль кривых сети Петерсона, проходящих через точку M. Касательные MP_1 и MP_2 сопряжены и гармонически разделяют асимптотические касательные, т. е. образующую a и касательную к коническому сечению C, проведенную в точке M. Следовательно, P_1 и P_2 на коническом сечении C гармонически разделяют точки пересечения C и a. На поверхности Кэйли, таким образом, имеет место следующий аналог теоремы Дезарга: асимптотические линии пересекают каждое коническое сечение, расположенное на поверхности в парах точек, принадлежащих одной инволюции.

Здесь роль пучка кривых второго порядка, о котором идет речь в теореме Дезарга, играет семейство кривых третьего порядка — асимптотических линий поверхности, роль прямых теоремы Дезарга — конические сечения, расположенные на поверхности (и тех и других ∞^2).

Других конических сетей на поверхности Кэйли не существует. Действительно, пусть $\sigma_u \neq 0$. Условие интегрируемости (18) в нашем случае имеет вид:

$$8\sigma_{uu} + 9\sigma_u^2 + 16\sigma_v + 36e^{2\sigma} - e^{-2\sigma}\sigma_v^2 = 0. \tag{86}$$

Уравнения (9), (11):

$$\sigma_{uv} + 6e^{2\sigma}\sigma_u = 0 \tag{87}$$

$$8\sigma_{vv} = 3\sigma_v^2 + 5e^{2\sigma}\sigma_u^2 - 80e^{2\sigma}\sigma_v - 108e^{4\sigma}. \tag{88}$$

Интегрируя уравнение (87), получаем:

$$\sigma_v = -3e^{2\sigma} + V.$$

Подставив в (88), получим:

$$\sigma_u^2 = -3e^{2\sigma} + 10V - \frac{1}{5}e^{-2\sigma}(8V' - 3V^2). \tag{89}$$

Дифференцируем по u и подставляем в (86). Получаем:

$$72e^{2\sigma} - \frac{1}{5}e^{-2\sigma}(8V' - 3V^2) - 112V + e^{-2\sigma}V^2 = 0.$$

Отсюда следует: $\sigma_u = 0$, что противоречит нашему предположению.

7. Общую линейчатую поверхность третьего порядка

$$zx^2 - ty^2 = 0$$

в асимптотических параметрах можно записать так:

$$x = e^{u+v}, \quad y = e^{3u+v}, \quad z = e^{4u}, \quad t = 1. \tag{90}$$

Здесь

$$\gamma = p_{11} = p_{22} = 0, \quad \theta_v = 1, \quad \theta_u = 4, \quad \beta = -3, \quad L = -5, \quad M = -\frac{1}{2}.$$

Для определения ∞^2 сетей Петерсона имеем уравнение $\sigma_u = 0$ и по (11):

$$2\frac{d^2\sigma}{dv^2} - \left(\frac{d\sigma}{dv}\right)^2 - 12e^{2\sigma}\frac{d\sigma}{dv} + 9e^{4\sigma} - 10e^{2\sigma} + 1 = 0. \tag{91}$$

Положив $\frac{d\sigma}{dv} = w$, $e^{2\sigma} = \lambda$, получаем:

$$4\lambda w\,dw = (12\lambda w - 9\lambda^2 + 10\lambda + w^2 - 1)\,d\lambda, \tag{92}$$

или в однородных координатах $x_1 : x_2 : x_3 = \lambda : w : 1$,

$$4x_1x_2(x_3dx_2 - x_2dx_3) = (12x_1x_2 - 9x_1^2 + 10x_1x_3 + x_2^2 - x_3^2)(x_3dx_1 - x_1dx_3). \tag{92*}$$

Уравнение типа Дарбу. Имеем следующие пять частных решений:

$$1^\circ\ g_1 = x_3 = 0, \quad 2^\circ\ g_2 = x_1 = 0, \quad 3^\circ\ g_3 = x_2 - x_1 + x_3 = 0.$$
$$4^\circ\ g_4 = (x_2 - 3x_1 - x_3)^2 - 16x_1x_3 = 0, \quad 5^\circ\ g_5 = (x_2 - 3x_1 + x_3)^2 - 4x_1x_3 = 0.$$

Этого достаточно, чтобы написать общее решение в виде:

$$g_1^{\alpha_1}g_2^{\alpha_2}g_3^{\alpha_3}g_4^{\alpha_4}g_5^{\alpha_5} = \mathrm{const}.$$

Для определения α_i имеем уравнения:

$$\Sigma h_i\alpha_i = 0, \quad \Sigma k_i\alpha_i = 0,$$

где:

$$h_1 = h_2 = h_3 = 1, \quad h_4 = h_5 = 2, \quad k_1 = 0, \quad k_2 = -4x_2,$$

$$k_3 = 9x_1 - x_2 + x_3, \quad k_4 = -6x_1 - 2x_2 - 2x_3, \quad k_5 = -6x_1 - 2x_2 + 2x_3.$$

Следовательно,

$$\alpha_1 = -3, \quad \alpha_2 = -1, \quad \alpha_3 = -2, \quad \alpha_4 = 1, \quad \alpha_5 = 2,$$

и общее решение в неоднородных координатах:

$$[(w - 3\lambda - 1)^2 - 16\lambda]\,[(w - 3\lambda + 1)^2 - 4\lambda]^2 = C\lambda\,(w - \lambda + 1)^2. \tag{93}$$

Положив

$$(w - 3\lambda + 1)^2 - 4\lambda = \tau\,(w - \lambda + 1), \tag{94}$$

получаем:

$$w\,(\tau - 4) - \lambda\left(\frac{c}{\tau^2} + \tau\right) + \tau = 0. \tag{95}$$

Определим из (94) и (95) λ и w в функции τ.

Пусть

$$w = \frac{d\sigma}{dv} = \varphi(\tau), \quad \lambda = e^{2\sigma} = \psi(\tau). \tag{96}$$

Для сети Петерсона имеем:

$$du = \pm\,\frac{\psi(\tau)\,\psi'(\tau)\,d\tau}{2\varphi(\tau)}, \quad dv = \frac{\psi'(\tau)\,d\tau}{\psi(\tau)\,\varphi(\tau)}. \tag{97}$$

Следовательно, определение ∞^2 конических сетей на общей линейчатой поверхности третьего порядка привелось к двум квадратурам.

Частное решение 3° определяет ∞^1 конических сетей, порождаемых асимптотическими линиями. Действительно, из $\lambda = w + 1$ получим:

$$2dv = \frac{d\lambda}{\lambda(\lambda - 1)}.$$

Следовательно,

$$Ce^{2v} + e^{-2\sigma} - 1 = 0.$$

Подставив в $du^2 = e^{2\sigma}\,dv^2$, получаем:

$$e^{2u} = \sqrt{\tau_1\tau_2}, \quad e^{v} = \frac{2\sqrt{\tau_1\tau_2}}{c\tau_2 + \tau_1},$$

и из уравнения (20) — следующие канонические представления поверхности:

$$x = \frac{c}{\tau_1} - \frac{1}{\tau_2}, \quad y = -\tau_1 + c\tau_2, \quad z = -\frac{\tau_1^2}{2} + \frac{c^2\tau_2^2}{2}, \quad t = \frac{c^2}{2\tau_1^2} - \frac{1}{2\tau_2^2}. \tag{98}$$

Уравнения кривых, порождающих сети Петерсона, здесь:

$$\left.\begin{aligned} x_1 &= \frac{c}{\tau_1^2}, \quad y_1 = 1, \quad z_1 = \tau_1, \quad t_1 = \frac{c^3}{\tau_1^3}, \\ x_2 &= \frac{1}{\tau_2^2}, \quad y_2 = c, \quad z_2 = c^2\tau_2, \quad t_2 = \frac{1}{\tau_2^3}. \end{aligned}\right\} \tag{99}$$

Обе эти кривые (при одинаковых значениях c) тождественны и расположены на самой поверхности.

Эти уникурсальные пространственные кривые четвертого порядка — асимптотические линии поверхности. Каждая асимптотическая Г пересекает касательную плоскость ω, проведенную в точке M поверхности в четырех точках P_1, P_2, P_3 и P_4, из которых две (P_3 и P_4) расположены на образующей a, проходящей через точку M и две другие (P_1 и P_2) расположены на коническом сечении C, которое вместе с a образует полное пересечение нашей поверхности плоскостью ω. Так как P_3 и P_4 — вершины конусов, касающихся поверхности вдоль кривых сети Петерсона, проходящих через точку M, то касательные MP_1 и MP_2 гармонически разделяют касательную в точке M к C и образующую a. Поэтому P_1 и P_2 гармонически разделяют точки пересечения C и a. Следовательно, и на общей линейчатой поверхности третьего порядка имеет место аналог теоремы Дезарга.

Теорема. Асимптотические линии линейчатой поверхности третьего порядка пересекают каждое коническое сечение, расположенное на поверхности в парах точек, принадлежащих одной инволюции.

Рассмотрим частное решение 4°:

$$(w - 3\lambda - 1)^2 - 16\lambda = 0$$

или

$$\frac{d\sigma}{dv} = 3\lambda + 1 \pm 4\sqrt{\lambda}, \quad \left(\frac{du}{dv}\right)^2 = \lambda, \quad \lambda = e^{2\sigma}.$$

Интегрируя, получаем:

$$e^{v} = C\,\frac{\sqrt{\lambda}\,(\sqrt{\lambda} + 1)^{1/2}}{\left(\sqrt{\lambda} + \frac{1}{3}\right)^{3/2}}, \quad e^{u} = \tau_1\left(\frac{\sqrt{\lambda} + \frac{1}{3}}{\sqrt{\lambda} + 1}\right)^{1/2} = \tau_2\left(\frac{\sqrt{\lambda} + 1}{\sqrt{\lambda} + \frac{1}{3}}\right)^{1/2},$$

откуда

$$e^{2u} = \tau_1\tau_2, \quad e^{u+v} = \frac{\tau_1 C}{2}\left(3 - \frac{\tau_1}{\tau_2}\right).$$

Внеся эти значения в уравнения (90), получаем следующие канонические представления поверхности:

$$x = \frac{C}{2}\left(\frac{3}{\tau_1} - \frac{1}{\tau_2}\right), \quad y = \frac{C}{2}\,(3\tau_2 - \tau_1), \quad z = \tau_2^2, \quad t = \frac{1}{\tau_1^2}. \tag{100}$$

Уравнения кривых, порождающих эти ∞^1 конических сетей,

$$\left.\begin{aligned} x_1 &= -\frac{3C}{2\tau_1^2}, \quad y_1 = -\frac{C}{2}; \quad z_1 = 0, \quad t_1 = -\frac{2}{\tau_1^3}, \\ x_2 &= \frac{C}{2\tau_2^2}, \quad y_2 = \frac{3C}{2}, \quad z_2 = 2\tau_2, \quad t_2 = 0. \end{aligned}\right\} \tag{101}$$

Это плоские кривые третьего порядка с точкой возврата. Кривые (101_1) расположены в плоскости $z = 0$, кривые (101_2) — в плоскости $t = 0$.

Аналогично, частное решение 5°:

$$(w - 3\lambda + 1)^2 - 4\lambda = 0$$

после интеграции дает:

$$e^{\sigma} = \frac{C}{\sqrt{\lambda}}\left[(\sqrt{\lambda} + 1)\left(\sqrt{\lambda} - \frac{1}{3}\right)^3\right]^{\frac{1}{4}},$$

$$e^{u} = \tau_1\left(\frac{\sqrt{\lambda} - \frac{1}{3}}{\sqrt{\lambda} + 1}\right)^{\frac{1}{4}} = \tau_2\left(\frac{\sqrt{\lambda} + 1}{\sqrt{\lambda} - \frac{1}{3}}\right)^{\frac{1}{4}}$$

приводит к следующему каноническому представлению поверхности:

$$x=\frac{4c}{\tau_1},\quad y=4c\tau_2,\quad z=3\tau_2^2+\tau_1^2,\quad t=\frac{3}{\tau_1^2}+\frac{1}{\tau_2^2}. \tag{102}$$

Здесь уравнения кривых, принадлежащих ∞^1 конических сетей:

$$\left.\begin{aligned} &x_1=-\frac{4c}{\tau_1^2},\quad y_1=0,\quad z_1=2\tau_1,\quad t_1=-\frac{6}{\tau_1^3},\\ &x_2=0,\quad y_2=4c,\quad z_2=6\tau_2,\quad t_2=-\frac{2}{\tau_2^3}.\end{aligned}\right\} \tag{103}$$

Это плоские кривые четвертого порядка. Кривые (103_1) расположены в плоскости $y=0$. Кривые (103_2) — в плоскости $x=0$.

8. В числе найденных поверхностей с ∞^2 конических сетей содержится также геликоид.

Уравнения геликоида в асимптотических параметрах можно записать так:

$$x=e^v\cos u,\quad y=e^v\sin u,\quad z=u. \tag{104}$$

Здесь

$$\gamma=\theta_u=0,\quad \theta_v=1,\quad \beta=-1,\quad L=1,\quad M=-\frac{1}{2}.$$

Система (9) и (11) имеет решение $\sigma_u=0$, удовлетворяющее обыкновенному дифференциальному уравнению второго порядка:

$$\frac{d^2\sigma}{dv^2}=\frac{1}{2}\left(\frac{d\sigma}{dv}\right)^2+2e^{2\sigma}\frac{d\sigma}{dv}-\frac{1}{2}e^{4\sigma}-e^{2\sigma}-\frac{1}{2}.$$

Если положить:

$$\frac{d\sigma}{dv}=w,\quad e^{2\sigma}=\lambda, \tag{105}$$

получаем уравнение типа Дарбу:

$$4\lambda w\frac{dw}{d\lambda}=w^2+4\lambda w-\lambda^2-2\lambda-1, \tag{106}$$

или в однородных координатах $x_1:x_2:x_3=\lambda:w:1$

$$4x_1x_2(x_3dx_2-x_2dx_3)=[x_2^2+4x_1x_2-(x_1+x_3)^2](x_3dx_1-x_1dx_3). \tag{106*}$$

Имеем частные решения:

1° $x_1=0$, 2° $x_3=0$, 3° $x_2-x_1-x_3=0$, 4° $(x_2-x_1+x_3)^2+4x_1x_3=0$.

По теореме Дарбу этого достаточно, чтобы с помощью одной квадратуры найти интегрирующий множитель.

Частное решение 3° дает известные ∞^1 сетей переноса геликоида. Действительно, из $w=\lambda+1$, $du^2=\lambda dv^2$ и (104) следует:

$$u=\frac{\tau_1+\tau_2}{2},\quad e^v=C\sin\frac{\tau_2-\tau_1}{2}$$

и подстановка в (104) дает:

$$x=\frac{C}{2}(\sin\tau_2-\sin\tau_1),\quad y=\frac{C}{2}(\cos\tau_1-\cos\tau_2),\quad z=\frac{\tau_1+\tau_2}{2}. \tag{107}$$

Частное решение 4° дает следующую ∞^1 канонических представлений геликоида как поверхности Петерсона:

$$\left.\begin{aligned} &x=C(e^{-i\tau_1}+e^{i\tau_2}),\quad y=C_i(e^{-i\tau_1}-e^{i\tau_2}),\\ &z=\tau_1(2-i\tau_1)+\tau_2(2+i\tau_2),\ t=2(1-i\tau_1)+2(1+i\tau_2).\end{aligned}\right\} \tag{108}$$

Здесь кривые, порождающие ∞^1 конических сетей, определяются уравнениями:

$$\left.\begin{aligned} &x_1=-Cie^{-i\alpha},\quad y_1=Ce^{-i\alpha},\quad z_1=2-2i\alpha,\quad t_1=-2i,\\ &x_2=Cie^{i\beta},\quad y_2=Ce^{i\beta},\quad z_2=2+2i\beta,\quad t_2=2i.\end{aligned}\right\} \tag{109}$$

Оба семейства плоские, но трансцендентные; первое расположено в плоскости $x+iy=0$, второе — в плоскости $x-iy=0$.

§ 4. Поверхности с ∞^1 конических сетей

1. Рассмотрим дифференциальные уравнения (9), (11) конической сети $du^2-e^{2\sigma}dv^2=0$:

$$p_v=q_u=A, \tag{9'}$$

$$q_v+e^{2\sigma}p_u=B, \tag{11'}$$

где $p=\sigma_u$, $q=\sigma_v$ и A, B определены по (10), (12).

Условием совместности системы (9), (10) служит (18):

$$Ap_u+C=0. \tag{18'}$$

Если $A\neq 0$, уравнения (9'), (11') и (18') определяют p_u, p_v, q_u и q_v как функции p, q, σ, u, v. Условиями интегрируемости $p_{uv}=p_{vu}$ и $q_{uv}=q_{vu}$ служат (19) и (25) или, обозначив $R^*=A^3R$ и $S^*=-A^3S$:

$$R^*=0, \tag{19'}$$

$$S^*=0, \tag{25'}$$

где R^* и S^* — многочлены 6-ой степени относительно p и q.

В § 3 было доказано, что R^* и S^* в случае нелинейчатых поверхностей многочлены взаимно простые относительно p и q.

Следовательно, существуют разложения p и q по убывающим (или возрастающим) степеням e^σ:

$$p=\sum_{k=0}^{\infty}\pi_k e^{\lambda_k\sigma},\quad \lambda_0>\lambda_1>\ldots,\quad \pi_0\neq 0, \tag{110}$$

$$q=\sum_{k=0}^{\infty}\varkappa_k e^{\mu_k\sigma},\quad \mu_0>\mu_1>\ldots,\quad \varkappa_0\neq 0. \tag{111}$$

Аналогичные разложения имеют место и в случае линейчатых поверхностей при условии $A\neq 0$.

Действительно, в § 3, п. 2 было доказано, что если в рассматриваемом случае и существует общий наибольший делитель T многочленов R^* и S^*, то либо $T=p+c$, либо $T=p^2+ap+bq+c$.

Если $T\neq 0$, из $R^*=S^*=0$ следует разложения вида (110), (111).

Если $T=0$, то, дифференцируя его по v или u и воспользовавшись (9'), (11'), (18'), получаем второе условие в виде равенства нулю некоторого многочлена и из рассуждения, проведенного в конце § 3 п. 2, следует, что эти два условия действительно определяют p и q при $A\neq 0$.

В случае $A=0$ искомые поверхности, несущие ∞^1 конических сетей, не могут быть линейчатыми.

Действительно, пусть $A=0$, $\gamma=0$.

Имеем по (10):

$$\sigma=V-\frac{1}{2}\lg\beta.$$

Так как $\sigma_{uv}=0$, то $(\lg\beta)_{uv}=0$.

Заменой параметров можно β привести к единице, откуда следует $p=0$. Из (11), (12) следует, что β есть функция одного v, откуда $L_u=0$. Но при этих условиях, как было установлено в § 3 п. 3, поверхность несет ∞^2 конических сетей.

Покажем, что и в случае $A=0$ имеют место разложения вида (110), (111).

Действительно, из $A=0$ следует:

$$p=h_0q+h_1,$$
$$q=k_0p+k_1,$$

где

$$h_0=-\frac{\gamma}{\beta}e^{-4\sigma},\quad h_1=\frac{\gamma_v}{2\beta}e^{-4\sigma}-\frac{\beta_u}{2\beta},\quad k_0=-\frac{\beta}{\gamma}e^{4\sigma},\quad k_1=-\frac{\beta_u}{2\gamma}e^{4\sigma}+\frac{\gamma_v}{2\gamma}.$$

Вычислив r и t и подставив в (11′), получим, исключивши q:

$$H_0p^2+H_1p+H_2=0,$$

где

$$H_0=-7\frac{\beta^2}{\gamma^2}e^{10\sigma}+7e^{4\sigma},$$

а H_1 и H_2 — многочлены относительно e^σ.

В этом случае вместо двух взаимно простых многочленов 6-го порядка $R^*=0$ и $S^*=0$ имеем один линейный многочлен $A=0$ и один квадратный $-H_0p^2+H_1p+H_2=0$, что и приводит к разложениям вида (110), (111).

2. Чтобы на поверхности существовала ∞^1 конических сетей, разложения (110), (111) для p и q должны удовлетворять дифференциальным уравнениям (9′) и (11′) тождественно относительно σ.

Рассмотрим сначала нелинейчатые поверхности ($\beta\gamma\neq0$).

Определим наибольшие показатели λ и μ_0 в разложениях (110), (111) и коэффициенты π_0, $\varkappa_0$.

Подстановка разложений p и q в дифференциальные уравнения (9′) и (11′) дает:

$$\beta\pi_0e^{(\lambda_0+2)\sigma}+\gamma\varkappa_0e^{(\mu_0-2)\sigma}+\lambda_0\pi_0\varkappa_0e^{(\lambda_0+\mu_0)\sigma}+\frac{\beta_u}{2}e^{2\sigma}+\ldots=0, \tag{112}$$

$$\frac{\partial\pi_0}{\partial v}e^{\lambda_0\sigma}-\frac{\partial\varkappa_0}{\partial u}e^{\mu_0\sigma}+\pi_0\varkappa_0(\lambda_0-\mu_0)e^{(\lambda_0+\mu_0)\sigma}+\ldots=0, \tag{113}$$

$$\left.\begin{aligned}&\frac{\partial\varkappa_0}{\partial v}e^{\mu_0\sigma}+\varkappa_0^2\mu_0e^{2\mu_0\sigma}+\frac{\partial\pi_0}{\partial u}e^{(\lambda_0+2)\sigma}+\pi_0^2\lambda_0e^{(2\lambda_0+2)\sigma}+\ldots=\\&=-\frac{1}{2}\pi_0^2e^{(2\lambda_0+2)\sigma}+\frac{1}{2}\varkappa_0^2e^{2\mu_0\sigma}-2\gamma\pi_0e^{\lambda_0\sigma}-2\beta\varkappa_0e^{(\mu_0+2)\sigma}-\frac{\beta^2}{2}e^{4\sigma}+\ldots\end{aligned}\right\} \tag{114}$$

Мы можем считать $\beta_u\neq0$, так как при замене параметров $\beta^*\frac{dv^{*2}}{du^*}=\beta\frac{dv^2}{du}$.

Докажем, что

$$\lambda_0=0. \tag{115}$$

Действительно, пусть $\lambda_0\neq0$. Тогда в (112) все выписанные коэффициенты отличны от нуля. Два из четырех показателей

$$\lambda_0+2,\quad \mu_0-2,\quad \lambda_0+\mu_0,\quad 2$$

должны быть равны между собой и не меньше остальных.

Рассмотрим все мыслимые комбинации.

а) $\lambda_0+2=\mu_0-2\geqslant\left.\begin{matrix}\lambda_0+\mu_0\\2\end{matrix}\right\}$,

б) $\lambda_0+2=\lambda_0+\mu_0\geqslant\left.\begin{matrix}\mu_0-2\\2\end{matrix}\right\}$,

в) $\lambda_0+2=2\geqslant\left.\begin{matrix}\mu_0-2\\\lambda_0+\mu_0\end{matrix}\right\}$,

г) $\mu_0-2=\lambda_0+\mu_0\geqslant\left.\begin{matrix}\lambda_0+2\\2\end{matrix}\right\}$,

д) $\mu_0-2=2\geqslant\left.\begin{matrix}\lambda_0+2\\\lambda_0+\mu_0\end{matrix}\right\}$,

е) $\lambda_0+\mu_0=2\geqslant\left.\begin{matrix}\lambda_0+2\\\mu_0-2\end{matrix}\right\}$,

Случай а) исключается, так как приводит к невозможному неравенству.

Случай б) исключается, так как противоречит допущению $\lambda_0\neq0$.

В случае в) $\mu_0=2$, $\lambda_0>0$. Старший член в (113): $\pi_0\varkappa_0(\lambda_0-\mu_0)e^{(\lambda_0+\mu_0)\sigma}$; следовательно, $\lambda_0=\mu_0=2$. Но при этом старший член в (114): $\pi_0^2\left(\lambda_0+\frac{1}{2}\right)e^{(2\lambda_0+2)\sigma}$ отличен от нуля, что невозможно.

В остальных случаях г), д) и е) имеем $\lambda_0<0$ и $\mu_0>2$; следовательно, старший член в (114): $\varkappa_0^2\left(\mu_0-\frac{1}{2}\right)e^{2\mu_0\sigma}$ отличен от нуля, что невозможно. Этим доказано, что $\lambda_0=0$.

Для определения μ_0 рассмотрим уравнение (114); оно теперь принимает вид:

$$\varkappa_0^2\left(\mu_0-\frac{1}{2}\right)e^{2\mu_0\sigma}+2\beta\varkappa_0e^{(\mu_0+2)\sigma}+\frac{\beta^2}{2}e^{4\sigma}+\ldots=0. \tag{114′}$$

Здесь три первых коэффициента отличны от нуля; следовательно, два из трех показателей

$$2\mu_0,\quad \mu_0+2,\ 4$$

должны быть равны между собой и не меньше третьего. Это приводит к единственно возможному значению для μ_0:

$$\mu_0=2. \tag{116}$$

При этом

$$3\varkappa_0^2+4\beta\varkappa_0+\beta^2=0.$$

Следовательно,

$$\varkappa_0=k_i\beta,\quad i=1,2,$$

где

$$k_1=-1,\quad k_2=-\frac{1}{3}.$$

Из (112) определяем коэффициент π_0:

$$\pi_0=\frac{\beta_u}{2\beta}. \tag{119}$$

3. Рассмотрим случай, когда число членов в разложениях p и q по степеням e^σ конечно:

$$p=\pi_0+\pi_1e^{\lambda_1\sigma}+\ldots+\pi_me^{\lambda_m\sigma}, \tag{110′}$$

$$q = \varkappa_0 e^{2\sigma} + \varkappa_1 e^{\mu_1\sigma} + \ldots + \varkappa_n e^{\mu_n\sigma}, \tag{111'}$$

где

$$0 > \lambda_1 > \ldots > \lambda_m$$

$$2 > \mu_1 > \ldots > \mu_n$$

и

$$\pi_m \neq 0, \quad \varkappa_n \neq 0.$$

Докажем, что в этом случае существуют решения и найдем их. Определим наименьшие показатели λ_m и μ_u и коэффициенты π_m и $\varkappa_n$. Докажем, что

$$\mu_n = 0. \tag{120}$$

Действительно, пусть $\mu_n \neq 0$.

Если в уравнении $q_u = A$ расположить члены по возрастающим степеням e^σ, получим:

$$\varkappa_n \mu_n \pi_m e^{(\mu_n+\lambda_m)\sigma} + \gamma\varkappa_n e^{(\mu_n-2)\sigma} - \frac{\gamma_v}{2} e^{-2\sigma} + \ldots = 0. \tag{121}$$

Мы можем считать, отвлекаясь от случая линейчатых поверхностей, что $\gamma_v \neq 0$, поэтому в (121) все выписанные коэффициенты отличны от нуля. Так как (121) должно выполняться тождественно относительно σ, два из трех показателей

$$\mu_n + \lambda_m, \quad \mu_n - 2, \; -2,$$

должны быть равны между собой и не больше третьего.

Рассмотрим все мыслимые комбинации:

1° $\mu_n + \lambda_m = \mu_n - 2 \leqslant -2$,
2° $\mu_n + \lambda_m = -2 \leqslant \mu_n - 2$,
3° $\mu_n - 2 = -2 \leqslant \mu_n + \lambda_m$.

Случай 3° противоречит допущению $\mu_n \neq 0$. В случае 1°: $\lambda_m = -2$, $\mu_n < 0$. Из условия $q_u = p_v$ следует:

$$\pi_m \varkappa_n (\mu_n - \lambda_m) e^{(\lambda_m+\mu_n)\sigma} + \frac{\partial\varkappa_n}{\partial u} e^{\mu_n\sigma} - \frac{\partial\pi_\mu}{\partial v} e^{\lambda_m\sigma} + \ldots = 0.$$

Так как $\mu_n < 0$, член с наименьшей степенью $e^{(\lambda_m+\mu_n)\sigma}$ и его коэффициент должен быть равен нулю:

$$\mu_n = \lambda_m = -2.$$

Условие $q_v + e^{2\sigma} p_u = B$ дает:

$$\left.\begin{aligned} &\frac{\partial\varkappa_n}{\partial v} e^{\mu_n\sigma} + \varkappa_n^2\left(\mu_n - \frac{1}{2}\right) e^{2\mu_n\sigma} + \pi_m^2\left(\lambda_m + \frac{1}{2}\right) e^{(2\lambda_m+2)\sigma} + \\ &\qquad + 2\gamma\pi_m e^{\lambda_m\sigma} - \frac{\gamma^2}{2} e^{-2\sigma} + \ldots = 0. \end{aligned}\right\} \tag{122}$$

В случае 1° член с наименьшей степенью $e^{2\mu_n\sigma}$ имеет коэффициент отличный от нуля; следовательно, случай 1° невозможен.

В случае 2° $\mu_n > 0$, $\lambda_m < -2$; член с наименьшей степенью $e^{(2\lambda_m+2)\sigma}$ имеет также коэффициент отличный от нуля; следовательно, и случай 2° невозможен.

Этим доказана справедливость (120).

Теперь (121) принимает следующий вид:

$$-\frac{\gamma^2}{2} e^{-2\sigma} + 2\gamma\pi_m e^{\lambda_m\sigma} + \pi_m^2\left(\lambda_m + \frac{1}{2}\right) e^{(2\lambda_m+2)\sigma} + \ldots = 0. \tag{122'}$$

Все три выписанные коэффициента отличны от нуля.

Из трех показателей

$$-2, \quad \lambda_m, \quad 2\lambda_m + 2$$

два должны быть равны между собою и не больше третьего.

Это приводит к единственно возможному значению для λ_m:

$$\lambda_m = -2. \tag{123}$$

Для π_m получаем уравнение:

$$3\pi_m^2 - 4\gamma\pi_m + \gamma^2 = 0,$$

откуда

$$\pi_m = h_t\gamma, \quad t = 1, 2$$

$$h_1 = 1, \quad h_2 = \frac{1}{3}. \tag{124}$$

Наконец, из (121) следует

$$\varkappa_n = \frac{\gamma_v}{\gamma}. \tag{125}$$

Мы определили λ_0 и λ_m. Определим λ_1.
Для этого отберем старшие члены в $(9') - p_v = A$.
Имеем:

$$\frac{\partial\pi_0}{\partial v} + \mu\pi_0 + \pi_1(\lambda_1\varkappa_0 + \beta) e^{(\lambda+2)\sigma} + \ldots = 0. \tag{126}$$

Но $\pi_1 \neq 0$, $\lambda_1\varkappa_0 + \beta = \beta(1 + k_i\lambda_1) \neq 0$, следовательно,

$$\lambda_1 \leqslant -2. \tag{127}$$

Сопоставляя (117) с (123), приходим к выводу, что

$$\left.\begin{aligned} &p = -\frac{\beta_u}{2\beta} + L_i\gamma e^{-2\sigma}, \quad i = 1, 2 \\ &h_1 = 1, \; h_2 = \frac{1}{3}. \end{aligned}\right\} \tag{128}$$

Аналогично получаем

$$\left.\begin{aligned} &q = \frac{\gamma_v}{2\gamma} + k_i\beta e^{2\sigma}, \; i = 1, 2 \\ &k_1 = -1, \; k_2 = -\frac{1}{3} \end{aligned}\right\} \tag{129}$$

Непосредственной подстановкой в уравнения (9), (11), учитывая условия интегрируемости (48), убеждаемся, что возможны лишь следующие два случая:

$$\left.\begin{aligned} &1^\circ \; p = -\frac{\beta_u}{2\beta} + \gamma e^{-2\sigma}, \quad q = \frac{\gamma_v}{2\gamma} - \beta e^{2\sigma}, \\ &2^\circ \; p = -\frac{\beta_u}{2\beta} + \frac{\gamma}{3} e^{-2\sigma}, \quad q = \frac{\gamma_v}{2\gamma} - \frac{\beta}{3} e^{2\sigma}. \end{aligned}\right\} \tag{130}$$

Подставив эти значения p и q в (9) и (11), получаем в случае 1°:

$$\left.\begin{aligned} &(\lg\beta)_{uv} = (\lg\gamma)_{uv} = 4\beta\gamma \\ &2L = (\lg\beta)_{uu} - \frac{1}{4}(\lg\beta)_u^2 - \beta(\lg\gamma)_v - 2\beta_v \\ &2M = (\lg\gamma)_{vv} - \frac{1}{4}(\lg\gamma)_v^2 - \gamma(\lg\beta)_u - 2\gamma_u. \end{aligned}\right\} \tag{131}$$

Следовательно, по (13):

$$\left.\begin{aligned} 4p_{11} &= 2\theta_{uu} - \theta_u^2 - (\lg\beta)_{uu} + \frac{1}{4}(\lg\beta)_u^2 + \beta(\lg\gamma)_v - 2\beta\theta_v \\ 4p_{22} &= 2\theta_{vv} - \theta_v^2 - (\lg\gamma)_{vv} + \frac{1}{4}(\lg\gamma)_v^2 + \gamma(\lg\beta)_u - 2\gamma\theta_u \end{aligned}\right\} \tag{132}$$

и в случае 2°:

$$(\lg\beta)_{uv} = (\lg\gamma)_{uv} = \frac{4}{9}\beta\gamma,$$

$$\left.\begin{aligned} 2L &= \frac{\beta_{uu}}{\beta} - \frac{5}{4}\left(\frac{\beta_u}{\beta}\right)^2 - \frac{5}{3}\frac{\beta}{\gamma}\gamma_v - \frac{10}{3}\beta_v, \\ 2M &= \frac{\gamma_{vv}}{\gamma} - \frac{5}{4}\left(\frac{\beta_v}{\gamma}\right)^2 - \frac{5}{3}\frac{\gamma}{\beta}\beta_u - \frac{10}{3}\gamma_u. \end{aligned}\right\} \tag{133}$$

Следовательно, по (13):

$$\left.\begin{aligned} 4p_{11} &= 2\theta_{uu} - \theta_u^2 - (\lg\beta)_{uu} + \frac{1}{4}(\lg\beta)_u^2 + \frac{1}{3}\beta(\lg\beta^4\gamma^5)_v - 2\beta\theta_v \\ 4p_{22} &= 2\theta_{vv} - \theta_v^2 - (\lg\gamma)_{vv} + \frac{1}{4}(\lg\gamma)_v^2 + \frac{1}{3}\gamma(\lg\gamma^4\beta^5)_u - 2\gamma\theta_u. \end{aligned}\right\} \tag{134}$$

4. Выбор функции θ сводится к нормированию однородных координат поверхности. Положив в случае 1°

$$2d\theta = (\lg\beta)_u\, du + (\lg\gamma)_v\, dv, \tag{135}$$

(правая часть есть полный дифференциал), получаем по (132)

$$p_{11} = p_{22} = 0. \tag{136}$$

Следовательно, координаты неоднородны; можно считать $t = 1$. И по (131) и (135):

$$2\theta_u = (\lg\beta)_u, \quad 2\theta_v = (\lg\gamma)_v, \quad \theta_{uv} = 2\beta\gamma. \tag{137}$$

Уравнения (130), принимают вид:

$$p = \gamma e^{-2\sigma} - \theta_u, \quad q = -\beta e^{2\sigma} + \theta_v, \tag{138}$$

а уравнения (137) означают, что система (138) вполне интегрируема и определяет ∞^1 сетей.

Внеся эти значения (p, q) в уравнение (8), получаем $\lambda_u = \lambda_v = 0$. Так как $t = 1$, то из уравнения (1) видим, что полученные поверхности представляют собой нелинейчатые поверхности переноса с ∞^1 сетей переноса. Эти поверхности были впервые найдены С. Ли.

Уравнения (137), (138) характеризуют поверхности переноса с бесконечным числом сетей переноса и только обозначениями отличаются от уравнений, полученных Рейдемейстером [6].

5. Второй найденный тип поверхностей с ∞^1 сетей Петерсона является новым. Можно получить в конечном виде уравнения этих поверхностей, если воспользоваться следующей теоремой E. Lane'а [9]: нелинейчатые поверхности третьего порядка характеризуются условиями (134) и условием $\left(\lg\frac{\beta}{\gamma}\right)_{uv} = 0$.

В нашем случае к этим условиям добавляется еще по (133) условие:

$$(\lg\beta\gamma)_{uv} = \frac{8}{9}\beta\gamma. \tag{139}$$

Следовательно, остается установить, для каких нелинейчатых поверхностей третьего порядка выполняется условие (139).

Такими поверхностями являются: 1) поверхности третьего порядка с четырьмя коническими точками, 2) поверхности с двумя коническими точками и одной бипланарной, которая получается от слияния двух конических, 3) поверхности с одной конической точкой и одной бипланарной, которая получается от слияния трех конических.

6. Поверхность третьего порядка с четырьмя коническими точками при соответствующем выборе координатного тетраэдра определяется уравнением:

$$yzt + ztx + txy + xyz = 0. \tag{140}$$

В асимптотических координатах

$$x = \frac{1}{(u+v)^2}, \quad y = \frac{-1}{(u-v)^2}, \quad z = \frac{1}{(uv-1)^2}, \quad t = \frac{-1}{(uv+1)^2}. \tag{141}$$

Здесь

$$\beta = \frac{3v(1-v^4)}{(1-u^2v^2)(u^2-v^2)}, \quad \gamma = \frac{-3u(1-u^4)}{(1-u^2v^2)(u^2-v^2)}. \tag{142}$$

Уравнение (139) выполняется.

Для определения ∞^1 сетей Петерсона надо проинтегрировать вполне интегрируемую систему (130_2). Переписав первое уравнение так:

$$2e^{2\sigma}\sigma_u = \frac{2}{3}\gamma - \frac{1}{2}(\lg\beta)_u e^{2\sigma},$$

и проинтегрировав, находим:

$$\frac{4}{3}\beta e^{2\sigma} = (\lg\beta\gamma)_v + V. \tag{143}$$

Подставив во второе уравнение, получаем для определения V уравнение:

$$2V' + V^2 + (\lg\beta)_{vv} - \frac{1}{2}(\lg\beta\gamma)_v^2 = 0,$$

или по (142):

$$2V' + V^2 = \frac{3(1 + 14v^4 + v^8)}{v^2(1-v^4)^2}. \tag{144}$$

Это уравнение Риккати имеет следующие частные решения:

$$V_1 = \frac{v^4+3}{v(1-v^4)}, \quad V_2 = \frac{-3v^4 - 8v^2 - 1}{v(1-v^4)}, \quad V_3 = \frac{-3v^4 + 8v^2 - 1}{v(1-v^4)}. \tag{145}$$

Подставив в (143) первое частное решение, получаем

$$e^{2\sigma} = \left(\frac{du}{dv}\right)^2 = \frac{u^2}{v^2}. \tag{146}$$

Эта сопряженная сеть составлена из кривых одновременно и плоских и конических (двойная сеть Кенигса) и образуется пересечением поверхности двумя пучками плоскостей с осями $x = y = 0$ и $z = t = 0$.

Второе частное решение определяет сеть

$$\left(\frac{du}{dv}\right)^2 = \left(\frac{u^2-1}{v^2-1}\right)^2. \tag{147}$$

Это двойная сеть Кенигса с осями $y = z = 0$ и $x = t = 0$. Третье частное решение дает:

$$\left(\frac{du}{dv}\right)^2 = \left(\frac{u^2-1}{v^2-1}\right)^2. \tag{148}$$

двойную сеть Кенигса с осями $x = z = 0$ и $y = t = 0$.

Общим решением служит:

$$V = \frac{c(v^2+1)^2 + (v^2-1)^2}{c(v^2+1)^2 - (v^2-1)^2} - \frac{3v^4+1}{v(1-v^4)} + \frac{8v}{1-v^4}. \tag{149}$$

Подставив в (143), получаем:

$$\frac{du^2}{dv^2}=\frac{(1-u^2)^2-c^2(1+u^2)^2}{(1-v^2)^2-c^2(1+v^2)^2}. \tag{150}$$

Положив

$$u^2=ku_1^2,\quad v^2=kv_1^2,\quad k=\frac{1+c}{1-c}, \tag{151}$$

имеем по (150):

$$\left.\begin{aligned}\int\frac{du_1}{\sqrt{(1-u_1^2)(1-ku_1^2)}}-\int\frac{dv_1}{\sqrt{(1-v_1^2)(1-kv_1^2)}}&=2\mu_1,\\ \int\frac{du_1}{\sqrt{(1-u_1^2)(1-ku_1^2)}}+\int\frac{dv_1}{\sqrt{(1-v^2)(1-kv_1^2)}}&=2\mu_2,\end{aligned}\right\} \tag{152}$$

откуда

$$u_1=sn(\mu_1+\mu_2),\quad v_1=sn(\mu_2-\mu_1). \tag{153}$$

Внеся эти значения в (141) и воспользовавшись теоремой сложения эллиптических функций, находим:

$$\left.\begin{aligned}x&=\frac{1}{4\,ksn^2\mu_2 cn^2\mu_1\,dn^2\mu_2},\quad y=\frac{-1}{4\,ksn^2\mu_1\,cn^2\mu_2\,dn^2\mu_2}\\ z&=\frac{1}{(1+ksn^2\mu_1)^2(1-ksn^2\mu_2)^2},\quad t=\frac{-1}{(1-ksn^2\mu_1)^2(1+ksn^2\mu_2)^2}\end{aligned}\right\} \tag{154}$$

Положив

$$sn^2\mu_1=\tau_1,\quad sn^2\mu_2=\tau_2,$$

получаем:

$$\left.\begin{aligned}x&=\frac{1}{4k\tau_2(1-\tau_1)(1-k^2\tau_2)},\quad y=\frac{-1}{4k\tau_1(1-\tau_2)(1-k^2\tau_2)},\\ z&=\frac{1}{(1+k\tau_1)^2(1-k\tau_2)^2},\quad z=\frac{-1}{(1-k\tau_1)^2(1+k\tau_2)^2}.\end{aligned}\right\} \tag{155}$$

Этим уравнениям можно придать следующий вид, обнаруживающий все ∞^1 способов ее канонического представления как поверхности Петерсона:

$$\left.\begin{aligned}x&=\frac{(1+k)^2(1-k\tau_1)^2}{(1-\tau_1)(1-k^2\tau_2)}-\frac{(1+k\tau_2)^2}{\tau_2},\\ y&=\frac{(1-k\tau_1)^2}{\tau_1}-\frac{(1-k)^2(1+k\tau_2)^2}{(1-\tau_2)(1-k^2\tau_2)},\\ z&=\frac{-(1+k)^2(1-k\tau_1)^2}{(1+k\tau_1)^2}+\frac{(1-k)^2(1+k\tau_2)^2}{(1-k\tau_2)^2}\\ t&=-\frac{(1-k)^2(1+k\tau_1)^2}{(1-k\tau_1)^2}+\frac{(1+k)^2(1-k\tau_2)^2}{(1+k\tau_2)^2}\end{aligned}\right\} \tag{156}$$

Для кривых, порождающих сети Петерсона, получаем следующие уравнения:

$$\left.\begin{aligned}x_1&=\frac{(1-k^2)^2(1-k^2\tau_1^2)}{(1-\tau_1^2)(1-k^2\tau_1)^2},\quad &x_2&=\frac{1-k^2\tau_2^2}{\tau_2^2},\\ y_1&=-\frac{1-k^2\tau^2}{\tau_1^2},\quad &y_2&=\frac{(1-k^2)^2(1-k^2\tau_2^2)}{(1-\tau_2)^2(1-k^2\tau_2)^2},\\ z_1&=4k(1+k)^2\frac{1-k\tau_1}{(1+k\tau_1)^3},\quad &z_2&=-4k(1-k^2)\frac{1+k\tau_2}{(1-k\tau_2)^3},\\ t_1&=-4k(1-k)^2\frac{1+k\tau_1}{(1-k\tau_1)^3},\quad &t_2&=\frac{4k(1-k)^2(1-k\tau_2)}{(1+k\tau_2)^3}.\end{aligned}\right\} \tag{157}$$

Эти кривые расположены на самой поверхности

$$\frac{1}{x_i}+\frac{1}{y_i}+\frac{1}{z_i}+\frac{1}{t_i}=0\quad i=1,2,$$

и являются ее асимптотическими линиями. Действительно, имеем:

$$\frac{z_1}{t_1}=-\frac{(1+k^2)(1-k\tau_1)^4}{(1-k^2)(1+k\tau_1)^4},\quad \frac{z}{t}=-\frac{(1-k\tau_1)^2(1+k\tau_2)^2}{(1+k\tau_1)^2(1-k\tau_2)^2};$$

приравняв эти значения, получаем:

$$1-(\tau_1+\tau_2)+k^2\tau_1\tau_2=0,$$

либо

$$1-k^2(\tau_1+\tau_2)+k^2\tau_1\tau_2=0.$$

В первом случае:

$$sn\,\mu_1\,dn\,\mu_2=\varepsilon\,cn\,\mu_2,\quad \varepsilon^2=1,$$
$$sn\,\mu_2\,dn\,\mu_1=\omega\,cn\,\mu_1,\quad \omega^2=1.$$

Поэтому

$$sn=(\mu_1\pm\mu_2)=\frac{\varepsilon\,cn^2\mu_1\pm cn^2\mu_2}{cn^2\mu_1+cn^2\mu_2}.$$

Если $\varepsilon=\omega$, имеем:

$$sn^2(\mu_1+\mu_2)=u_1^2=1.$$

Следовательно, по (151):

$$u^2=k,$$

асимптотические линии одного семейства.

Если $\varepsilon=-\omega$, имеем:

$$sn^2(\mu_2-\mu_1)=v_1^2=1,\quad v^2=k,$$

асимптотические линии второго семейства.

Аналогично получаем во втором случае асимптотические $u^2=\frac{1}{k}$ или $v^2=\frac{1}{k}$.

7. Уравнение поверхности третьего порядка с двумя коническими точками и одной бипланарной, в которую слились две конические, можно представить при соответствующем выборе координатного тетраэдра уравнением:

$$xyz+xt^2-yt^2=0 \tag{158}$$

и в асимптотических координатах:

$$x=\frac{1}{(u+v)^2},\quad y=\frac{1}{(u-v)^2},\quad z=4uv,\quad t=1. \tag{159}$$

Здесь

$$\beta=\frac{3v}{u^2-v^2},\quad \gamma=-\frac{3u}{u^2-v^2}. \tag{160}$$

Условие (139) выполняется.

Внеся значения β, γ в (130_2), получаем:

$$\sigma_u=\frac{u}{u^2-v^2}(1-e^{-2\sigma}),\quad \sigma_v=\frac{v}{u^2-v^2}(1-e^{2\sigma}). \tag{161}$$

Проинтегрировав систему (161), находим:

$$e^{2\sigma}=\left(\frac{du}{dv}\right)^2=\frac{u^2-k}{v^2-k}. \tag{162}$$

Проинтегрировав (162), получаем:

$$u=\frac{1}{2}\left(\sqrt{\tau_1\tau_2}+\frac{k}{\sqrt{\tau_1\tau_2}}\right),$$

$$v=\frac{1}{2}\left(\sqrt{\frac{\tau_2}{\tau_1}}+k\sqrt{\frac{\tau_1}{\tau_2}}\right). \tag{163}$$

Внеся эти значения в (159), получаем следующие канонические представления поверхности как поверхности Петерсона, содержащие параметр k:

$$\left.\begin{aligned} x&=\frac{4\tau_1}{(1+\tau_1)^2}-\frac{4k\tau_2}{(\tau_2+k)^2}, \quad y=\frac{4\tau_1}{(\tau_1-1)^2}-\frac{4k\tau_2}{(\tau_2-k)^2},\\ z&=\left(\tau_2+\frac{k^2}{\tau_2}\right)^2-\left(k\tau_1+\frac{k}{\tau_1}\right)^2, \quad t=\tau_2+\frac{k^2}{\tau^2}-\left(k\tau_1+\frac{k}{\tau_1}\right).\end{aligned}\right\} \tag{164}$$

Уравнения кривых, порождающих сети Петерсона:

$$\left.\begin{aligned} x_1&=\frac{4(1-\tau_1)}{(1+\tau_1)^3}, \quad y_1=\frac{4(1+\tau_1)}{(1-\tau_1)^3}, \quad z_1=\frac{2k^2(1-\tau_1^4)}{\tau_1^3}, \quad t_1=\frac{k(1-\tau_1^2)}{\tau_1^2},\\ x_2&=\frac{4k(\tau_2-k)}{(\tau_2+k)^3}, \quad y_2=\frac{4k(\tau_2+k)}{(\tau_2-k)^3}, \quad z_2=\frac{2(\tau^4-k^4)}{\tau^3}, \quad t_2=\frac{\tau^2-k^2}{\tau^2}.\end{aligned}\right\} \tag{165}$$

Они расположены на самой поверхности и служат ее асимптотическими линиями. Действительно, $z_i=\frac{1}{x_i}-\frac{1}{y_i}$, $i=1, 2$. Приравняв $\frac{x_i}{t_i}$ и $\frac{x}{t}$, получаем либо $\tau_1\tau_2=k$, либо $\frac{\tau_2}{\tau_1}=k$. Следовательно, $u=$ $=\text{const}$ или $v=\text{const}$.

Среди найденных сетей содержится и двойная сеть Кенигса, образованная пучками плоскостей с осями $z=t=0$ и $x=y=0$. Она получается при $k=0$.

Вторая двойная сеть Кенигса получается из (161) при $\sigma=0$. Осями пучков плоскостей служат прямые $x=t=0$ и $y=t=0$.

8. Поверхность третьего порядка с одной конической точкой и одной бипланарной, которая получается от слияния трех конических, может быть при надлежащем выборе координатного тетраэдра представлена уравнением:

$$xzt+xy^2-t^3=0. \tag{166}$$

В асимптотических параметрах:

$$x=\frac{1}{(v-u)^3}, \quad y=2(u+v), \quad z=-3u^2-3v^2-10\,uv. \tag{167}$$

Здесь:

$$\beta=\frac{3}{2(u-v)}, \quad \gamma=-\frac{3}{2(u-v)}. \tag{168}$$

Уравнение (139) выполняется.

Уравнения (130_2) сети принимают вид:

$$\sigma_u=\frac{1-e^{-2\sigma}}{2(u-v)}, \quad \sigma_v=\frac{1-e^{2\sigma}}{2(u-v)}. \tag{169}$$

Проинтегрировав, находим:

$$e^{2\sigma}=\frac{du^2}{dv^2}=\frac{u+c}{v+c}, \tag{170}$$

$$u=(\tau_1+\tau_2)^2-c, \quad v=(\tau_2-\tau_1)^2-c. \tag{171}$$

Канонические представления поверхности:

$$\left.\begin{aligned} x&=\frac{1}{16\tau_2^2}-\frac{1}{16\tau_1^2}, \quad y=4\tau_1^4-4c\,\tau_1^2-4\tau_2^4+4c\,\tau_2^2,\\ z&=16(\tau_2^6-2\tau_2^4+c^2\tau_2^2)-16(\tau_1^6-2\tau_1^4+c^2\tau_1^2), \quad t=\tau_1^2-\tau_2^2.\end{aligned}\right\} \tag{172}$$

Кривые, порождающие сети:

$$\left.\begin{aligned} x_1&=\frac{1}{8\tau_1^3}, \; y_1=16\,\tau_1^3-8c\tau_1, \; z_1=-96\,\tau_1^5+128\,\tau_1^3-32c^2\tau_1, \; t_1=2\tau_1,\\ x_2&=-\frac{1}{8\tau_2^3}, \; y_2=-16\tau_2^3-8c\tau_2, \; z_2=96\tau_2^5-128\tau_2^3+32c^2\tau_2, \; t=-2\tau_2,\end{aligned}\right\} \tag{173}$$

расположены на самой поверхности.

Отождествляя $\frac{x}{t}$ и $\frac{x_l}{t_l}$, имеем $\tau_1\pm\tau_2=0$. Следовательно, либо $u+c=0$, либо $v+c=0$, т. е. эти линии служат асимптотическими.

9. Мы рассмотрели случай, когда разложения p и q по степеням e^σ содержат конечное число членов.

В случае бесконечного числа членов хотя бы одного из разложений (110), (111), подставив эти разложения в систему трех дифференциальных уравнений (9′), (11′) и определив последовательно показатели λ_k, μ_k и коэффициенты π_k, $\varkappa_k$, получаем для β, γ, L, M систему дифференциальных уравнений, несовместную с системой (48).

В случае линейчатых поверхностей изложенный метод при конечном числе членов разложения (110), (111) приводит к поверхностям, несущим ∞^2 конических сетей, а при бесконечном числе — к несовместной системе дифференциальных уравнений.

Следовательно, поверхности, несущие ∞^1 конических сетей, исчерпываются полученными выше двумя типами.

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

1 К. М. Петерсон. Математический сборник, I, 391—438, 1866.

2. S. Lie. Собрание сочинений, I, статья 27, II, статьи 10, 13, 14. Geometrie der Berührungstransformationen I, 1896.

3. Я. П. Бланк. Труды 2-го Всесоюзного съезда математиков в Ленинграде, 1934.

Сообщение Харьк. Матем. Об-ва, 11, 55—68, 1935.

4. Я. П. Бланк. Записки Инст. матем. и мех. ХГУ и ХМО, 19, 121—140, 1948.

5. B. Gambier. Ann. Ecole norm., III, 83—118, 1938. Journ. de math. p. et appl., 19, 63—82, 1940.

6. K. Reidemeister. Hamb. Abh., I, 127—138, 1922.

7. G. Fubini — E. Cech. Introduction a la géométrie projective différentielle des surfaces, 1931.

8. G. Fubini — E. Cech. Geometria projettiva diffrenziale, I, 1926.

9. E. Lane. Atreatise on projective differential geometry, стр. 131, 1942.

ЗАПИСКИ МАТЕМАТИЧЕСКОГО ОТДЕЛЕНИЯ ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКОГО ФАКУЛЬТЕТА ХГУ И ХАРЬКОВСКОГО МАТЕМАТИЧЕСКОГО ОБЩЕСТВА

Том XXIII 1952

К ТЕОРИИ СИНГУЛЯРНЫХ ИНТЕГРАЛОВ

М. С. Шун

(Харьков)

§ 1

Мы будем рассматривать возможность представления функции $f(x)$ интегралом вида:

$$I = \int_a^b f(t)\, d_t\, \Phi_n(x, t) = I_n(f, x), \tag{1}$$

где $\Phi_n(x, t)$ — функция ограниченной по t вариации.

Функции $f(x)$ принадлежат U_1, т. е. существуют $f(x+0)$ и $f(x-0)$ для любого $x \in [a, b]$, при этом значение функции $f(x)$ в точке разрыва, и, следовательно, в любой точке определим так:

$$f^*(x) = \alpha f(x-0) + \beta f(x+0), \tag{2}$$

где: $\alpha, \beta > 0$, $\alpha + \beta = 1$.

В дальнейшем под $f(x)$ будем понимать $f^*(x)$.

Пусть $\Phi_n(x, t)$ разложена на функцию скачков и непрерывную компоненту:

$$\Phi_n(x, t) = C_n(x, t) + D_n(x, t).$$

Тогда интеграл (1) определим как сумму:

$$I = \int_a^b f(t)\, d_t\, C_n(x, t) + \sum_k f(x_k)\, \Delta D_n(x, x_k). \tag{3}$$

где x_k — точки роста функции скачков $D_n(x, t)$.

Теорема. Для того, чтобы:

$$\lim_{n\to\infty} I_n(f, x) = f(x),$$

необходимо и достаточно:

1) $\lim\limits_{n\to\infty} \operatorname{Var} \Phi_n(x, t) \Big|_{x+0}^{x+\delta_1} = \beta.$

2) $\lim\limits_{n\to\infty} \operatorname{Var} \Phi_n(x, t) \Big|_{x-\delta_2}^{x-0} = \alpha,$

где: $\delta_{1,2} > 0$ и $x + \delta_1$, $x - \delta_2 \in [a, b]$.

Примечание. Воспользовавшись теоремой Хелли, находим предельную функцию $\Phi_\infty(x, t)$, при этом:

$$\Phi_\infty(x, t) = \begin{cases} 0, & t < x \\ \alpha = 1 - \beta, & t = x \\ 1 & t < x \end{cases}$$

Для доказательства необходимости $f(x)$ выбираем последовательно так:

$$1)\ f(x)=\begin{cases}1, & x_0\leqslant x\leqslant x_0+\delta_1\\ 0, & x<x_0,\ x>x_0+\delta_1,\end{cases}$$

$$2)\ f(x)=\begin{cases}1, & x_0-\delta_2\leqslant x\leqslant x_0\\ 0, & x>x_0,\ x<x_0-\delta_2.\end{cases}$$

Следствие:

$$\lim \operatorname{Var}_t \Phi_n(x_0, t)=0 \tag{4}$$

для

$$t\in[x_0-\delta_2,\ x_0+\delta_1].$$

Докажем достаточность.

Пусть $\delta(x_0)=f(x+0)-f(x-0)$.

Тогда из (2) следует:

$$f(x_0)=f(x_0-0)+\beta\delta(x_0)=f(x_0+0)-\alpha\delta(x_0). \tag{5}$$

Рассмотрим остаток:

$$\Delta_n(f, x_0)=f(x_0)-I_n(f, x_0).$$

Из 1) и 2) следует:

$$\Delta_n(f, x_0)=\int\limits_a^b[f(x_0)-f(t)]\,d_t\Phi_n(x_0, t)+\varepsilon_n=$$

$$=\left(\int\limits_{x_0-\delta_2}^{x_0}+\int\limits_{x_0}^{x_0+\delta_1}\right)[f(x_0)-f(t)]\,d_t\Phi_n(x_0, t)+\varepsilon_n'.$$

Рассмотрим $I_1=\int\limits_{x_0}^{x_0+\delta_1}[f(x_0)-f(t)]\,d_t\Phi_n(x_0, t)$.

Воспользовавшись (5), имеем:

$$I_1=-\alpha\delta(x_0)\cdot\operatorname{Var}\Phi_n(x_0, t)\Big|_{x_0+0}^{x_0+\delta_1}+\int\limits_{x_0}^{x_0+\delta}[f(x_0+0)-f(t)]\,d_t\Phi_n(x_0, t).$$

Выбирая достаточно малым δ_1 и используя 1), получаем:

$$I_1=-\alpha\delta(x_0)(\beta+\varepsilon_n''),$$

аналогичный подсчет для I_2 дает:

$$I_2=\beta\cdot\delta(x_0)(\alpha+\varepsilon_n''').$$

Соединяя полученные оценки, получаем:

$$\lim_{n\to\infty}\Delta_n(f, x_0)=0.$$

§ 2

Если непрерывная компонента ядра отсутствует, то мы приходим к суммарным формулам.

В качестве примера мы рассмотрим интерполяционный процесс Фейера.

В этом случае:

$$I_n(f, x)=\sum_1^n f(x_k^{(n)})h_k^{(n)}(x),$$

где:

$$h_k^{(n)}=\frac{1-xx_k^{(n)}}{n^2}\left[\frac{T_n(x)}{x-x^{(n)}}\right]^2,\quad T_n(x)=\cos(n\arccos x).$$

Покажем, что этот процесс расходится даже для функций ограниченной вариации, для чего нужно определить асимптотическое поведение сумм:

$$\sum_{x_k<x}h_k^{(n)}(x)=\operatorname{Var}\Phi_n(x, t)\Big|_a^{x-0},\quad \sum_{x>x_k}h_k^{(n)}(x)=\operatorname{Var}\Phi_n(x, t)\Big|_{k+0}^{b}.$$

Положим:

$$x=\cos\theta,\quad x_k=\cos\theta_k,\quad \theta_k=\left(k-\frac{1}{2}\right)l,\quad l=\frac{\pi}{n},\quad \theta_k<\theta<\theta_{k+1},$$

следовательно,

$$\theta=\theta_k+\tau_n l.$$

Тогда

$$h_k^{(n)}(x)=\frac{1-\cos\theta\cos\theta_k}{(\cos\theta-\cos\theta_k)^2}\cdot\frac{\sin^2\pi\tau_n}{n^2}=\frac{\sin^2\pi\tau_n}{n^2}\left[\frac{1}{(\theta-\theta_k)^2}+0(1)\right].$$

Итак, остается оценить сумму $\sum\limits_{s=1}^{k}\frac{1}{(\theta-\theta_s)^2}$.

Так как при фиксированном $x\neq\pm1$ $k\to\infty$ вместе с n, то

$$\sum_{s=1}^{k}\frac{1}{(\theta-\theta_s)^2}=\frac{1}{l^2}\sum_{s=1}^{k}\frac{1}{(k-s+\tau_n)^2}=\frac{n^2}{\pi^2}\left[\sum_{s=1}^{n}\frac{1}{(s+\tau_n)^2}+\varepsilon_n\right]=$$

$$=\frac{n^2}{\pi^2}\left\{\frac{d^2\ln\Gamma(\tau_n)}{d\tau_n^2}+\varepsilon_n'\right\}.$$

Поэтому:

$$\operatorname{Var}\Phi_n(x, t)\Big|_{x+0}^{b}=\frac{\sin^2\pi\tau_n}{n^2}\cdot\frac{n^2}{\pi^2}\left\{\frac{d^2\ln\Gamma(\tau_n)}{d\tau_n^2}+\varepsilon_n'\right\}=\varphi(\tau_n)+\varepsilon_n''.$$

Но функция $\varphi(t)=\frac{\sin^2\pi t}{\pi^2}\frac{d^2\ln\Gamma(t)}{dt^2}$ удовлетворяет соотношению

$$\varphi(t)+\varphi(1-t)\equiv1,$$

поэтому $\varphi(t)$ в интервале (0,1) монотонно убывает от 1 до 0.

Значит, уравнение $\varphi(t)=\beta$ имеет единственный корень t_0 $(0<t_0\leqslant1)$. Но для произвольного x, $\lim\limits_{n\to\infty}\tau_n\neq0$, что доказывает расходимость процесса.

Можно только утверждать, что для любых α и β $(0\leqslant\alpha, \beta, \alpha+\beta=1)$ и для любых $x\in[-1, +1]$ существуют подпоследовательности $I_{n_p}(x, f)$, сходящееся к $\alpha f(x+0)+\beta f(x-0)$ для каждой функции ограниченной вариации.

Для доказательства достаточно заметить, что можно выбрать последовательность сегментов $[\theta_k^{(np)}, \theta_{k+1}^{(np)}]$, стягивающихся к θ и таких, что

$$\theta_k^{(n_p)}+\theta_{k+1}^{(n_p)}=2\theta+(1-2t_0+\varepsilon_{n_p})\,l,$$

где

$$\varphi(t_0)=\beta.$$

В этом случае $\tau_n\to\beta$, что обеспечивает выполнение условий 1) и 2).

ЗАПИСКИ МАТЕМАТИЧЕСКОГО ОТДЕЛЕНИЯ ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКОГО ФАКУЛЬТЕТА ХГУ И ХАРЬКОВСКОГО МАТЕМАТИЧЕСКОГО ОБЩЕСТВА

Том XXIII 1952

ХРОНИКА

Конференция, посвященная вопросам марксистско-ленинской философии в математике и ее преподавании

В ноябре 1952 года состоялась конференция, организованная физико-математическим факультетом ХГУ и Харьковским математическим обществом, посвященная вопросам марксистско-ленинской философии в математике и ее преподавании. Конференция продолжалась два дня (15 и 18 ноября) и привлекла внимание широкого круга преподавателей математики высших и средних школ г. Харькова, а также студентов университета и педагогического института. На каждом заседании присутствовало до 400 человек.

На конференции были прочитаны следующие доклады:

1. Марксистско-ленинская философия и математика—проф. А. Д. Александров* и проф. А. В. Погорелов.

2. Некоторые выводы из основных положений марксистско-ленинской философии для математики и ее преподавания—проф. Г. И. Дринфельд.

3. О формализме в математике — доц. Д. З. Гордевский.

4. Критика фашистско-идеалистической теории „Кибернетика" — проф. А. Я. Повзнер.

Со вступительным словом выступил ректор университета проф. И. Н. Буланкин. В прениях выступили проф. К. Д. Синельников, проф. И. М. Лифшиц, проф. Б. Я. Левин, проф. Я. П. Бланк, проф. В. А. Марченко, доц. А. С. Лейбин, доц. Л. Я. Гиршвальд, доц. Спенглер.

Из перечня докладов видно, что на конференции сравнительно меньше внимания было уделено вопросам борьбы против идеализма в математике. Это обстоятельство вызвано тем, что вся программа предыдущей конференции, состоявшейся в 1949 году, была посвящена исключительно вопросам борьбы против идеализма в математике. Поэтому представлялось более естественным и актуальным посвятить специальную конференцию обмену мнениями по вопросам, сформулированным в перечисленных докладах.

Во вступительном слове ректор университета проф. И. Н. Буланкин подчеркнул, что самой актуальной задачей в развитии творческих проблем советской науки является овладение основами марксистско-ленинской философии, проникновение этой философии во все отрасли науки и, в первую очередь, в такие важные, как математика и физика, которые стали главнейшим двигателем современной техники.

* Проф. А. Д. Александров не присутствовал на конференции, но принял большое участие в подготовке доклада, прочитанного проф. А. В. Погореловым.

Проф. И. Н. Буланкин подчеркнул также, что, стремясь выполнить указание XIX съезда КПСС о дальнейшем развитии передовой советской науки с тем, чтобы она заняла первое место в мире,—советские ученые, в том числе и математики, должны вооружиться марксистско-ленинской философией и вести самую беспощадную борьбу с идеализмом в любой отрасли науки, помня, что идеализм является идеологией современной фашиствующей буржуазии.

В докладе проф. А. Д. Александрова и проф. А. В. Погорелова вступительная часть была также посвящена значению борьбы за овладение марксистско-ленинской философией, против враждебной идеологии. В докладе было подчеркнуто, что твердую основу и верное руководство для понимания как математики в целом, так и отдельных ее теорий и проблем, для преодоления всяких ошибочных и враждебных взглядов и течений мы находим в гениальных трудах классиков марксизма-ленинизма.

В коротком анализе классического определения Энгельсом предмета математики докладчик особо отметил три момента: материальность предмета, абстрактность и сложность пути развития этой науки.

Подробно остановившись на роли абстракции в познании природы, А. В. Погорелов подчеркнул еще более важную роль практики, с которой математика связана в основном через точное естествознание.

Напомнив основные положения марксистского диалектического метода, А. В. Погорелов указал, что эти положения означают для математики следующее:

а) математические теории, понятия и выводы могут быть поняты и обоснованы только в том случае, если рассматривать их во взаимной связи и обусловленности, в их связях с естествознанием, в их обусловленности задачами других наук и практики;

б) математику, отдельные математические теории можно понять правильно только, если рассматривать их в развитии;

в) развитие математики не сводится к простому накоплению отдельных результатов, но содержит существенные качественные изменения, которые на некоторых этапах коренным образом изменяют характер всей математики;

г) внутренним содержанием развития математики является взаимодействие противоположностей — абстрактного и конкретного, формального и содержательного, конечного и бесконечного, дискретного и непрерывного.

А. В. Погорелов остановился затем на некоторых идеалистических течениях в философии математики и показал, что все они связаны с отрывом математических абстракций от реальной действительности. Тем самым была подчеркнута необходимость для советских математиков избегать такого отрыва.

Докладчик на ряде примеров показал, что необходимо критически относиться ко многим переводным курсам и монографиям. Он отметил также, что многие курсы и монографии советских авторов, хотя и не содержат идеалистических ошибок, но недостаточно воспитывают учащихся в духе марксизма-ленинизма.

В заключение доклада А. В. Погорелов отметил необходимость развертывания критики и самокритики на кафедрах, Ученом совете, в печати. Критика должна быть острой, обоснованной и конструктивной, вскрывающей ошибки и указывающей пути их исправления.

В докладе „Некоторые выводы для математики и ее преподавания из основных положений марксистско-ленинской философии" проф. Г. И. Дринфельд прежде всего отметил, что нынешний уровень научной и философской подготовки советских математиков позволяет им без боязни неудач касаться вопросов философии и в преподавании и в печатных работах. Советским математикам ясна также их обязанность заботиться о том, чтобы подготавливаемые ими специалисты были вооружены знанием марксизма-ленинизма, знанием диалектического материализма и умели пользоваться этими знаниями. То, что советские математики в преподавании и исследовательской работе уделяют недостаточное внимание марксистско-ленинской философии, докладчик объяснил беспечностью, дурными традициями, робостью, недостаточностью опыта и литературы, посвященной разработке марксистско-ленинской философии математики.

В качестве примеров беспечности докладчик привел не отмеченные переводчиками и редакторами идеалистические высказывания в книгах Харди, Кармана-Био, Тарского и др.

К числу дурных традиций докладчик отнес и некоторое высокомерие, присущее, по его мнению, многим математикам. Докладчик указал на необходимость многократно и в различных курсах останавливаться на вопросе о предмете математики. Ссылаясь на современные печатные заявления буржуазных ученых, докладчик показал, что они не устают выдумывать и внушать идеалистические определения предмета математики. Отсюда следует, что советские педагоги не имеют права лишь во вступительных лекциях говорить о марксистском определении предмета математики.

Докладчик остановился на вопросе о понятии пространства. Он указал, что здесь необходима совместная работа философов, физиков и математиков, но что последние делают в этом вопросе слишком мало. В частности, Г. И. Дринфельд отметил необходимость подчеркивать, что физические, а следовательно, и математические представления о пространстве и времени, изменяются и углубляются по мере развития человеческих знаний.

Перейдя к вопросу о критерии практики, докладчик отметил, что, с одной стороны, многие путают понятие практики с утилитарностью, критерий практики — с повседневным непосредственным опытом. Отсюда недооценка теорем существования, теорем о невозможности, необоснованные требования немедленных приложений каждого нового математического понятия, каждой новой теории.

С другой стороны, забвение критерия практики абсолютно недопустимо. Вопрос об истинности математической теории, т. е. вопрос о том, являются ли лежащие в основе этой теории понятия и аксиомы истинными, отражающими объективную реальность, не может быть рассматриваем без привлечения критерия практики. В этой связи докладчик напомнил, что даже вопрос о непротиворечивости нельзя решить с помощью одних только формально логических рассуждений.

Трудно указать будущность той или иной математической теории, жизненность тех или иных математических исследований. Однако трудность не есть невозможность. Важнейшим путем преодоления этой трудности является развертывание критики и самокритики, дискуссии по вопросам развития той или иной области математики.

Напомнив о вредности начетничества, докладчик остановился на трактовке отдельных положений марксистско-ленинской философии в математике, борьбе нового и старого, неодолимости нового, на роли абстракций в науке вообще и в математике в частности, на вопросе о формальной и диалектической логике.

Доклад доцента Д. З. Гордевского „О формализме в математике" не имел своей главной целью борьбу против формализма как идеалистического философского течения в математике. Доклад был направлен против формализма как бесплодного теоретизирования в математических исследованиях и против формализма в преподавании математики. В частности, докладчик сформулировал такие требования к изложению отдельных тем или курса:

1. Идейно-политическая направленность.
2. Оценка темы, объяснение ее теоретической и практической важности, указание связи ее с другими темами.
3. История возникновения и развития излагаемого вопроса, указание на роль отечественных ученых.
4. Доступность и ясность изложения.
5. Приведение примеров.
6. Освещение философской стороны излагаемого вопроса.

Эти требования докладчик подкрепил высказываниями В. И. Ленина, ссылкой на стиль и форму изложения в „Кратком курсе истории ВКП(б)". Докладчик сослался также на опыт великих русских ученых: Д. И. Менделеева, Н. Е. Жуковского и др., выдающихся советских ученых и педагогов.

Доклад проф. А. Я. Повзнера был посвящен критике книги „Кибернетика" известного американского математика Винера. Докладчик критиковал Винера за антинаучные установки типа: „Нет ничего в счетной машине, что препятствовало бы ей обладать условными рефлексами" и пророчества вроде: „...современная техническая революция направлена к обесцениванию человеческих мозгов. Когда эта революция будет осуществлена, среднее человеческое существо с обычным образованием не будет иметь ничего такого для продажи, что стоило бы купить".

В выступлении проф. Б. Я. Левина наиболее важными были его замечания по поводу теорем существования. Если Г. И. Дринфельд в своем докладе обратил внимание на познавательное значение этих теорем, то Б. Я. Левин подчеркнул связь таких теорем с практикой. На примерах задачи об устойчивости стержневых систем и задачи об устойчивости движения Б. Я. Левин показал, что существуют задачи, требующие доказательств теорем существования, а не вычислений. На ряде других примеров (закон Фурье о распространении тепла, примеры акад. Мандельштама и акад. Андронова) Б. Я. Левин подчеркнул, что теоремы существования часто представляют собой проверку наших абстракций и теоретических схем.

Б. Я. Левин остановился также на вопросе о строгости доказательства и на ряде убедительных примеров (возникновение и развитие теории комплексных чисел, возникновение геометрии Лобачевского и др.) показал, что стремление математиков к строгости, являясь закономерным для развития науки, способствует и практике.

На конференции дважды выступал действительный член АН УССР, проф. К. Д. Синельников. Он привел ряд интересных соображений по поводу важности абстрактных построений, которые, как он сказал, сегодня кажутся никому ненужными, а завтра могут лечь в основу новых физических теорий. Это, однако, не означает, что математика работает только на будущее. Советские математики и физики должны работать и работают на будущее и на светлое настоящее. Как физик, К. Д. Синельников высказал пожелание, чтобы был подвергнут марксистско-философскому анализу вопрос о том, „что подразумевается под сущностью математики, достаточна ли для обоснования того или иного раздела математики одна лишь внутренняя непротиворечивость?"

К. Д. Синельников выразил сомнение в том, что современная теория множеств может быть полностью принята учеными — материалистами, и высказал пожелание, чтобы по этому вопросу была организована дискуссия.

Вторым физиком, выступившим на конференции, был член-корреспондент АН УССР проф. И. М. Лифшиц. Он отметил, в частности, что ошибочные толкования различных математических положений возникают на стыке чисто математических построений с их реализацией, т. е. на стыке между математикой и естественными науками.

И. М. Лифшиц остановился также на вопросе о плодотворности с точки зрения физики различных областей математики и, указав важность развития эффективных методов, отметил, что современная физика пользуется в качестве эффективного инструмента такими теориями, как теория групп, теория линейных пространств и т. п., которые во время своего возникновения не были связаны с конкретными потребностями физики.

И. М. Лифшиц на ряде примеров показал также, что современная теоретическая физика все меньше способна прибегать к „физической интуиции" и что в ней также возрастает требовательность к строгости доказательств.

Проф. В. А. Марченко, частично дискутируя с докладчиками, дополнил их выступления, обратив особое внимание на вопросы философского и методического характера, связанные с изложением теории иррациональных чисел, теории линейных пространств и ряда других вопросов. В. А. Марченко отметил также, что в средней школе надо постепенно готовить учащихся к восприятию абстрактных понятий. Например, преподаватель математики уже в пятом классе должен готовить учащихся к восприятию понятия предела.

Вопросам преподавания математики в средней и высшей школе полностью посвятил свое выступление доцент Л. Я. Гиршвальд. Отметив важность этих вопросов в свете решений XIX съезда КПСС, Л. Я. Гиршвальд подробно остановился на необходимости в преподавании математики проводить ленинскую формулу: от живого созерцания — к абстрактному мышлению и от него — к практике.

Проф. Я. П. Бланк прежде всего остановился на вопросе о влиянии философских взглядов на развитие математики. Он показал на ряде примеров (запоздалое признание геометрии Лобачевского и др.), что неправильные философские установки могут тормозить развитие науки. Далее Я. П. Бланк, подробно проанализировав учебники Э. Ландау („Основы анализа" и „Введение в дифференциальное и интегральное исчисление"), показал, что А. В. Погорелов, квалифицировавший издание этих книг на русском языке как нелепость, прав, если рассматривать эти книги как учебники. Однако, по мнению Я. П. Бланка, книги Ландау интересны для тех, кто хочет иметь достаточное представление о логическом скелете анализа.

Выступление доцента А. С. Лейбина в главной своей части касалось вопроса об абстракциях вообще и абстракциях высшего порядка. Возражая Г. И. Дринфельду, А. С. Лейбин утверждал, что нет необходимости каждый раз, когда вводятся в рассмотрение такие абстракции, указывать их материальное происхождение.

В целом, доклады и дискуссии принесли несомненную пользу многочисленным участникам конференции, но, как справедливо отмечалось некоторыми из них, многие вопросы, затронутые в докладах и выступлениях, не были освещены с достаточной полнотой и ясностью.

Заседания научной секции Харьковского математического общества

Из докладов, заслушанных в последние годы на заседаниях научной секции Харьковского математического общества, наибольший интерес вызвали следующие:

Д. З. Гордевский. Аксиома и аксиоматический метод.

А. В. Погорелов. Об аналитической природе решений дифференциальных уравнений эллиптического типа.

Б. Я. Левин. К теории целых функций конечной степени.

В. А. Марченко. К вопросу о дифференциальном операторе второго порядка.

А. Н. Творитин. Асимптотическое представление степенных рядов и рядов Дирихле.

А. Ф. Тиман. Некоторые вопросы теории аппроксимации функций.

З. С. Агранович и А. Я. Повзнер. Резольвентный метод в операционном исчислении.

А. Ф. Тиман. О некоторых вопросах теории наилучшего приближения периодических функций.

Е. С. Ляпин. О некоторых ассоциативных системах операторов.

А. В. Погорелов. Изгибание гладких поверхностей.

Н. И. Ахиезер. О некоторых экстремальных свойствах целых функций конечной степени.

Б. Я. Левин. О полноте некоторой системы функций в полосе на комплексной плоскости.

В. В. Сташевская. Обратная задача спектрального анализа для одного класса дифференциальных операторов.

А. В. Погорелов. Гладкие поверхности ограниченной внешней кривизны.

С. А. Орлов. Построение резольвент и спектральных матриц — функций одномерного самосопряженного сингулярного дифференциального оператора любого четного порядка.

Н. Н. Моисеев. О движении твердого тела, содержащего полости, наполненные жидкостью.

Лекции для школьников

В весеннем семестре 1952/53 учебного года Комиссия содействия средней школе при физико-математическом факультете ХГУ им. А. М. Горького организовала цикл лекций по математике для учащихся старших классов средних школ г. Харькова. Лекции читались в помещении факультета доцентами и профессорами математических кафедр и кафедры механики.

Ряд лекций носил общеобразовательный характер и предназначался для учащихся всех трех старших классов. К числу таких лекций относятся следующие (в скобках указана фамилия лектора):

1. Геометрические построения на плоскости и в пространстве (А. С. Лейбин).
2. Гироскоп и его технические применения (М. Д. Дольберг).
3. О понятии предела (Г. И. Дринфельд).
4. О длине окружности и площади круга (А. В. Погорелов).

Остальные лекции предназначались для учеников десятых классов и имели своей целью помочь им в подготовке к выпускным экзаменам по математике. Лекции такого рода читались на следующие темы:

1. Обратные тригонометрические функции (Л. Я. Гиршвальд).
2. Комплексные числа (В. К. Балтага).
3. Тригонометрические уравнения (В. А. Марченко).
4. О неравенствах (Я. П. Бланк).

Лекция о гироскопе сопровождалась демонстрацией приборов, имеющихся в кабинете механики факультета.

Кроме лекций для школьников, комиссия содействия средней школе при факультете по просьбе Харьковского института усовершенствования учителей организовала две лекции для учителей математики старших классов. Одна из этих лекций была посвящена методу математической индукции (В. А. Марченко), другая — алгебраическим уравнениям высших степеней (Г. И. Дринфельд). Лекции для учителей читались на общегородском семинаре учителей математики.

Доцентами и профессорами физико-математического факультета ХГУ лекции по математике для школьников читались также и в Харьковском Дворце пионеров. Эти лекции были организованы Харьковским отделением Общества по распространению политических и научных знаний совместно с физико-математическим факультетом ХГУ. Они были рассчитаны на учеников 9—10-х классов и имели своей целью улучшить их подготовку к экзаменам.

В течение марта—апреля было прочитано шесть таких лекций:

1. Логарифмы (Л. Я. Гиршвальд).
2. Функция и ее график (Я. П. Бланк).
3. Обратные тригонометрические функции (В. А. Марченко).
4. Великие отечественные математики, их роль в развитии мировой науки (Д. З. Гордевский).
5. Исследование уравнений (В. К. Балтага).
7. Ошибки по математике, допускаемые поступающими в ВУЗы на приемных экзаменах. Требования по математике к поступающим в ВУЗы (Г. И. Дринфельд).

Лекции, читавшиеся и в университете и в Дворце пионеров, охотно посещались учащимися; на них в университете обычно собиралось 30—40 человек, в Дворце пионеров — около 100 человек, а в некоторых случаях и больше.

Следует еще отметить, что на факультете работали два кружка математики для учащихся 9-х и (отдельно) 10-х классов. Работой кружков руководили студенты-математики старших курсов. Темы занятий составлялись ими совместно с преподавателями факультета.

СОДЕРЖАНИЕ

Техн. редактор *А. Р. Гончаренко*
Корректор *Б. М. Кромида*

БЦ 15152. Подписано к печати 10/VI 1954 г. Бумага 70 × 108 1/16. Печ. листов 13,35. Уч.-изд. 14,38. В 1 печ. л. 42600 зн. Зак. 1526. Тир. 500
Цена 7 р.

Типография № 4 Углетехиздата. Харьков, ул. Энгельса, 11.