

2009-28

*На правах рукописи*



Эшаров Элзарбек Асанович

**ОПТИМИЗАЦИЯ РЕКУРРЕНТНЫХ МОДЕЛЕЙ  
ВРЕМЕННЫХ РЯДОВ НА ОСНОВЕ  
B-СПЛАЙНОВ 2-го и 3-го ПОРЯДКОВ**

05.13.01 – Системный анализ, управление и обработка информации  
(в отраслях информатики, вычислительной техники и автоматизации)

**АВТОРЕФЕРАТ**  
диссертации на соискание ученой степени  
кандидата физико-математических наук

Томск 2008

Работа выполнялась на кафедре вычислительной математики и компьютерного моделирования в ГОУ ВПО «Томский государственный университет» и на кафедре прикладной математики в ГОУ ВПО «Томский государственный архитектурно-строительный университет»

**Научный руководитель:** доктор физико-математических наук,  
профессор  
Шумилов Борис Михайлович

**Официальные оппоненты:** доктор технических наук, профессор  
Лившиц Климентий Исаакович  
кандидат физико-математических наук, доцент  
Шевелев Геннадий Ефимович

**Ведущая организация:** Институт математики  
им. С.Л. Соболева СО РАН,  
г. Новосибирск


Защита состоится 25 декабря 2008 г. в 10.30 час. на заседании диссертационного совета Д 212.267.12 при ГОУ ВПО «Томский государственный университет» по адресу: 634050, г. Томск, пр. Ленина, 36.

С диссертацией можно ознакомиться в Научной библиотеке ГОУ ВПО «Томский государственный университет» по адресу: 634050, г. Томск, пр. Ленина, 34 а.

Автореферат разослан

24 ноября 2008 г.

Ученый секретарь  
диссертационного совета  
д.т.н., профессор



В.И. Смагин

## ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

**Актуальность работы.** При решении широкого круга научно-технических задач встречаются явления, которые интересно и важно проследить в их развитии и изменении во времени. Например, в задачах мониторинга окружающей среды, при обработке данных траекторных наблюдений, в задачах слежения и управления на рынке недвижимости. При этом весьма желательно получать результаты обработки получаемых временных рядов с некоторым опережением, т.е. в режиме прогнозирования. Это приводит к необходимости выделения *трендов*, то есть некоторых функций времени, описывающих изменение характеристик изучаемых явлений (Т. Андерсон, Б.Е. Тривоженко и др.).

Пусть предполагается, что измеряемый процесс  $f(t)$  регистрируется в моменты времени  $t_i, i=1, 2, \dots$ , со случайной погрешностью  $\xi_i$ :

$$y_i = f(t_i) + \xi_i.$$

Различают две задачи оценивания  $f(t)$ : восстановление значений тренда в моменты времени  $t_i, i=1, 2, \dots$ , при последующей их интерполяции, и восстановление функциональной зависимости  $f(t)$  по ограниченному набору измерений  $y_i$ , при последующем ее аналитическом продолжении (Альберт А., Себер Дж.).

Типичной является ситуация, когда параметрическая модель может содержать лишь ограниченное число базисных функций и поэтому не всегда адекватно описывать процесс  $f(t)$ . Использовать ее для целей прогнозирования можно только тогда, когда изменение тенденции не ожидается.

В противном случае целесообразно использовать параметрические модели, но с переменными параметрами на последовательности разбиений интервала измерения.

Среди моделей с переменными параметрами особый интерес для систем реального времени представляют модели с кусочно-постоянными параметрами и полиномиальным базисом. Этот вид аппроксимации широко используется в различных прикладных задачах вследствие простоты реализации на ЭВМ и возможности использования в системах реального времени. Однако на границах отрезков полученные многочлены являются разрывными функциями. Это порождает нежелательные свойства восстановленной зависимости, так как затрудняет интерпретацию и исследование динамики процесса. Дополнительное требование непрерывности аппроксимирующей функции на границах участков и определенной степени гладкости приводит к использованию сплайн-функций, хорошо зарекомендовавших себя в вычислительной математике.

В данной работе рассматриваются рекуррентные модели временных рядов, представленные в виде полиномиального сплайна. Известные методы

построения рекуррентных сплайнов не учитывают свойство точности на многочленах. Поэтому с повышением степени точность аппроксимационного сплайна, как правило, понижается. Более того, трудности с обеспечением сшивки соседних звеньев многочленов полиномиального сплайна не позволяют построить рекуррентные схемы глубины выше 1, что не позволяет в достаточной мере использовать память рекуррентного алгоритма. Поэтому возникает необходимость разработки алгоритмов построения рекуррентных полиномиальных сплайнов, свободных от указанных недостатков.

**Цель работы** – разработка методов оптимизации рекуррентных моделей временных рядов на основе  $B$ -сплайнов 2-го и 3-го порядков. В связи с этим в работе поставлены следующие задачи:

- Построить серию вычислительных схем рекуррентной аппроксимации сплайнами 2-й и 3-й степени разной глубины.
- Провести оптимизацию рекуррентной аппроксимации сплайнами 2-й и 3-й степени с использованием критерия минимума остаточной дисперсии оценок.
- Разработать теоретическое обоснование использования рекуррентных сплайнов в решении проблемы точечного и интервального прогнозирования
- Исследовать возможность применения рекуррентных методов сплайн-аппроксимации для краткосрочного прогнозирования на рынке жилья при разработке Web-приложений.

**Научная новизна.** Кратко можно выделить следующие результаты, которые были получены в ходе выполнения работы:

- Построены рекуррентные схемы, точные на многочленах: случаи 1-ой, 2-ой и 3-ей степени, обоснована устойчивость рекуррентных схем глубины 1, 2 с применением спектральных свойств устойчивости разностных схем и устойчивость рекуррентных схем произвольной глубины  $p$  с применением принципа диагонального преобладания эквивалентных разностных уравнений.
- Вычислена остаточная дисперсия рекуррентных оценок аппроксимационных сплайнов и выполнена оптимизация построенных схем по критерию минимума остаточной дисперсии оценок.
- Обоснована несмещенность рекуррентных сплайн-аппроксимаций для всех рассмотренных случаев.
- Построен интервальный прогноз для случая сплайнов 1-ой степени.

**Практическое значение работы** состоит в том, что метод рекуррентной сплайн-аппроксимации применен к разработке систем автоматизации

проектирования автомобильных дорог и для краткосрочного прогнозирования цен на рынке жилья при создании Web-приложения.

Работа выполнялась на кафедре вычислительной математики и компьютерного моделирования Томского государственного университета в соответствии с основными направлениями НИР в рамках темы 1.12.06 ЕЗН Министерства образования РФ, а также на кафедре прикладной математики Томского государственного архитектурно-строительного университета по научным проектам, поддержанным грантами РГНФ (№ 06-02-64202 а/Т, № 07-02-94773 и/м), РФФИ (№ 07-01-90812 моб\_ст.).

**Методы исследования.** При решении поставленных задач применялись методы теории аппроксимации, теории матриц, теории разностных уравнений, теории вероятностей и математической статистики, а также численное моделирование на компьютере.

**Научные положения, выносимые на защиту:**

- Построение рекуррентных схем, точных на многочленах: случаи 1-ой, 2-ой и 3-ей степени.
- Обоснование устойчивости рекуррентных схем глубины 1 и глубины 2 с применением спектральных свойств разностных схем и устойчивости рекуррентных схем произвольной глубины  $p$  с применением свойства диагонального преобладания.
- Вычисление остаточной дисперсии рекуррентных оценок аппроксимационных сплайнов и оптимизация построенных схем по критерию минимума остаточной дисперсии оценок.
- Обоснование несмещенности рекуррентных сплайн-аппроксимаций для всех рассмотренных случаев.
- Построение точечного и интервального прогнозов временных рядов на основе рекуррентных сплайнов первой степени.

**Достоверность и обоснованность** научных положений и выводов, полученных в диссертационной работе, основана на утверждениях, доказанных с использованием аппарата символьных вычислений, и подтверждается согласием численных результатов с результатами теоретических расчетов.

**Апробация работы.** Часть работы выполнялась в рамках научных стажировок в Институте математики СО РАН (г. Новосибирск) при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований и Российского гуманитарного научного фонда. Основные результаты работы докладывались и обсуждались на научных семинарах кафедры вычислительной математики и компьютерного моделирования механико-механического факультета ТГУ (рук. проф. Старченко А.В.), факультета прикладной математики и кибернетики ТГУ (рук. проф. Горцев А.М.),

кафедры прикладной математики ТГАСУ (рук. проф. Колупаева С.Н.) и лаборатории численных методов математического анализа Института математики СОРАН (рук. доц. Мирошниченко В.Л.), а также на ряде всероссийских и международных научных конференций:

VI Всероссийской конференции молодых ученых по математическому моделированию и информационным технологиям (с участием иностранных ученых), Кемерово, 2005; Всероссийской научной конференции молодых ученых «Наука. Технологии. Инновации», Новосибирск, 2005; Международной научно-практической конференции «Наука та інновації – 2005». – Дніпропетровськ: Наука і освіта, 2005; VII Всероссийской конференции молодых ученых по математическому моделированию и информационным технологиям (с участием иностранных ученых), Красноярск, 2006; V международной научно-практической конференции «Информационные технологии и математическое моделирование (ИТММ-2006)», Томск, 2006; V Всероссийской научно-практической конференции студентов, аспирантов и молодых ученых «Молодежь и современные информационные технологии», Томск, 2007; XIII Международной научно-практической конференции студентов и молодых ученых "Современные техника и технологии", Томск, 2007; VII Международной научно-практической конференции «Интеллектуальные информационно-телекоммуникационные системы». Томск, 2007; XLV Международной научной студенческой конференции «Студент и научно-технический прогресс», Новосибирск, 2007; Всероссийской конференции по вычислительной математике КВМ-2007, Новосибирск. 2007; Третьей азиатской международной школе-семинаре «Проблемы оптимизации сложных систем», Новосибирск. 2007; Четвертой сибирской школе-семинаре по параллельным и высокопроизводительным вычислениям, Томск, 2007.

**Публикации.** По результатам выполненной работы опубликовано 14 печатных работ, из них 1 в журнале, рекомендованном ВАК. Список работ приведен в конце автореферата.

**Личным вкладом** диссертанта является вывод теоретических результатов, разработка вычислительных алгоритмов рекуррентной аппроксимации сплайнами третьей степени, а также численное моделирование и анализ полученных результатов.

Постановка изложенных в диссертации задач и формулировка общего подхода к их решению принадлежит научному руководителю соискателя.

В совместной работе с Ярушкиной Н.А. автору принадлежит разработка численных методов рекуррентной аппроксимации сплайнами второй степени и их компьютерная реализация. Экономическая интерпретация полученных результатов выполнена соавтором.

Совместная работа с Ивачевой Т.Е. представляет результаты дипломной работы, выполненной под руководством автора на ММФ ТГУ.

**Структура и объем работы.** Диссертационная работа состоит из введения, четырех глав, заключения, списка литературы и приложений. Материал изложен на 179 страницах, содержит 13 таблиц, 38 рисунков и 3 приложения. Список цитируемой литературы содержит 86 наименований.

## ОСНОВНОЕ СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ

**Во введении** обоснована актуальность темы диссертации, показана необходимость получения рекуррентных формул, определены цели и методы исследования и основные отличия работы от работ других авторов, показаны научная новизна и практическая значимость работы, приведены основные результаты апробации работы и краткое содержание диссертации.

**В первой главе** приведены основные понятия, необходимые для дальнейшего использования при построении рекуррентных сплайн-схем, а также в демонстрационных целях обоснован вывод рекуррентной формулы аппроксимационного сплайна степени 1 глубины 2 и выполнена её оптимизация на основе минимума остаточной дисперсии полученных оценок коэффициентов сплайна.

*Определение.* Рекуррентным аппроксимационным сплайном  $S_n(t)$  назовем функцию вида

$$S_n(t) = \sum_{j=-n}^N y_j B_n'(t), \quad a \leq t \leq b,$$

с коэффициентами  $y_j$ , удовлетворяющими рекуррентному соотношению

$$y_j = \lambda_j(f) - \sum_{i=1}^p \alpha_i' y_{j-i}, \quad j = p-n, \dots, N-1,$$

и начальным условиям  $d_j = \lambda_j(f)$ ,  $j = -n, \dots, p-n-1$ .

Здесь  $B_n'(t), i = -n, N-1$  – нормализованные  $B$ -сплайны,  $\{\lambda_j(f), j = -n, \dots, N-1\}$  – множество линейных непрерывных функционалов, определенных по значениям функции  $f(t)$  на  $[a, b]$ . Величину  $p \geq 1$  можно определить как память алгоритма.

**Лемма 1.1.** Для того чтобы сплайн  $S_n(t)$  вида (1) с коэффициентами (2) тождественно совпадал с  $f(t)$  для любой функции  $f(t)$  из пространства многочленов степени не выше  $l$ ,  $p \leq l \leq n$ , необходимо и достаточно выполнения при  $\mu=0, 1, \dots, l$  равенств

$$\lambda_i(T_\mu) = \pi_i^\mu, \quad i = -n, \dots, p-n-1,$$

$$\lambda_i(T_n) - \sum_{j=1}^p \alpha_j \eta_{i-j}^n = \eta_i^n, \quad i = p-n, \dots, N-1,$$

где  $T_n(t) = t^n$ ,  $\eta_i^n = (-1)^n \frac{\mu^i}{n!} \psi_i^{n-n}(0)$ ,  $\psi_i(v) = (v-t_{i+1}) \dots (v-t_{i+n})$ ,  $[t_{i+1}, t_{i+n}]$  – узлы в носителе  $B$ -сплайна степени  $n$  дефекта 1;

Функционалы  $\lambda_i(f)$  удобно конструировать в виде

$$\lambda_i(y) = \sum_{q=0}^k \sum_{r=0}^m a_{q,r} y_{(i+l+q)(m+1)+r}, \quad i = p-n, \dots,$$

где произвольное  $m > 0$  – коэффициент сжатия,  $k > 0$  – ширина шаблона усреднения,  $l$  – сдвиг шаблона усреднения, коэффициенты  $a_{i,r}$  – свободные параметры усредняющего алгоритма,  $y_{(i+l+q)(m+1)+r}$  – наблюдения.

Полученные формулы будем называть далее рекуррентными формулами аппроксимационного сплайна степени  $n$ .

В частности, при  $k=0$ ,  $l=0$  диапазон усреднения сосредоточен на одном звене сплайна – получаются схемы рекуррентной аппроксимации со сжатием вида

$$\hat{y}_i = \sum_{q=1}^p \lambda_q \hat{y}_{i-q} + \sum_{r=0}^m a_r y_{(m+1)+r}, \quad i = p-n, \dots,$$

исследованные при  $p=1$ ,  $n=1$  в работе Лившица К.И.

При  $k > 0$ ,  $l=0$ ,  $p=1$ ,  $n=1$  получается семейство рекуррентных алгоритмов с «забеганием» вперед (Лившиц К.И.):

$$\hat{y}_i = \lambda \hat{y}_{i-1} + \sum_{q=0}^k \sum_{r=0}^m a_{q,r} y_{(i+q)(m+1)+r}, \quad i = 0, 1, \dots$$

Если  $m=0$ , то рекуррентный алгоритм будет использовать только заданные значения сплайна в узлах сетки – при  $p > 0$  эта схема представляет собой обобщение локальной аппроксимации сплайнами

$$\hat{y}_i = \sum_{j=1}^p \lambda_j \hat{y}_{i-j} + \sum_{q=0}^k a_q y_{i+l+q}, \quad i = p-3, p-2, \dots$$

При  $k=0$ ,  $l=-1$ ,  $p=1$ ,  $n=1$  получается рекуррентная схема прогнозирования сплайнами первой степени

$$\hat{y}_{i+1} = \lambda \hat{y}_i + \sum_{r=0}^m a_r y_{(m+1)+r}, \quad i = 0, 1, \dots$$

Вторая глава посвящена конкретизации общей схемы рекуррентной аппроксимации сплайнами на основе свойства точности на многочленах для сплайнов второй и третьей степени.

В разделе 1 рассматриваются рекуррентные формулы аппроксимации со сжатием (рис. 1) сплайнами степени 2 глубины  $p = 1, 2$ . Приведено доказательство теоремы точности на многочленах второй степени.

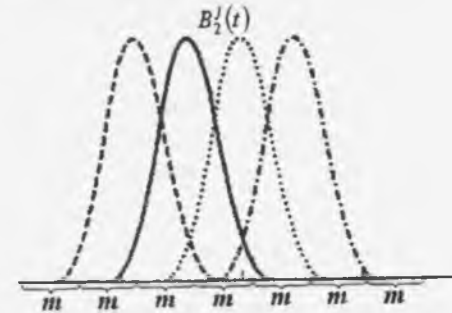


Рис. 1. График функций  $B_2^i(t)$

**Постановка задачи.** Пусть измеряемый процесс  $f(t)$  регистрируется в равноотстоящие моменты времени  $t$  с шагом измерения  $\Delta t/m$ , причем  $f(t)$  допускает адекватное представление в виде сплайна второй степени и между соседними узлами имеется  $m-1$  измерение. Тогда измеренные значения  $y_{i,k}$  могут быть представлены в виде разложения по  $B$ -сплайнам на отрезках  $[t_k, t_{k+1/2}]$ ,  $k=0, 1, \dots$ , вида:

$$y_{i,k} = \frac{1}{2} \left( \frac{1}{2} - \frac{i}{m} \right)^2 y_{k-2} + \left( \frac{3}{4} - \left( \frac{i}{m} \right)^2 \right) y_{k-1} + \frac{1}{2} \left( \frac{1}{2} + \frac{i}{m} \right)^2 y_k + \xi_{i,k}, \quad (1)$$

где  $i=0, \dots, m/2$  и на отрезках  $[t_{k+1/2}, t_{k+1}]$  – вида:

$$y_{i,k} = \frac{1}{2} \left( \frac{3}{2} - \frac{i}{m} \right)^2 y_{k-1} + \left( \frac{3}{4} - \left( \frac{i}{m} + 1 \right)^2 \right) y_k + \frac{1}{2} \left( \frac{1}{2} - \frac{i}{m} \right)^2 y_{k+1} + \xi_{i,k}, \quad (2)$$

где  $i=m/2+1, \dots, m$ ,  $\xi_{i,k}$  – погрешность измерения.

Сначала для нахождения оценок  $\hat{y}_k$  коэффициентов разложения квадратического сплайна будем использовать рекуррентный фильтр глубины 1, требующий вычисления оценки очередного коэффициента  $\hat{y}_k$  через уже известный  $\hat{y}_{k-1}$  с учетом наблюдений, поступивших с  $k$ -го этапа. При этом  $k$ -я группа наблюдений не влияет на значения оценок коэффициентов  $\hat{y}_0, \dots, \hat{y}_{k-1}$ , вычисленных ранее. Такой фильтр можно определить соотношением

$$\hat{y}_k = \lambda_1 \hat{y}_{k-1} + \sum_{i=1}^m a_i y_{i,k}, \quad k = 1, 2, \dots, \quad (3)$$

где  $\hat{y}_0$  – начальное условие, которое может быть получено по МНК на первом шаге,  $m$  – количество измерений на каждом звене сплайна,  $y_{i,k}$  – наблюдения, поступающие с  $k$ -го этапа, коэффициенты  $\lambda_1, a_i$  – свободные параметры рекуррентного усредняющего алгоритма.

**Теорема 2.1.** Пусть для заданного  $m$  коэффициенты  $\lambda_1, a_i$  удовлетворяют условиям

$$\sum_{i=0}^m a_i = 1 - \lambda_1, \quad \sum_{i=0}^m a_i (i/m) = 1, \quad \sum_{i=0}^m a_i (i/m)^2 = (\lambda_1 - 3)/4, \quad (4)$$

$$|\lambda_1| < 1. \quad (5)$$

Тогда коэффициенты  $\hat{y}_k$  аппроксимационного сплайна степени 2 глубины 1, определенные по алгоритму (3) вычисляются устойчивым образом.

Сплайн, построенный в условиях теоремы 2.1, обеспечивает точность на многочленах второй степени.

В отличие от рекуррентного фильтра глубины 1, для нахождения оценок  $\hat{y}_k$  коэффициентов разложения квадратического сплайна будем использовать рекуррентный фильтр глубины 2, требующий вычисления оценки очередного коэффициента  $\hat{y}_k$  через уже известные коэффициенты  $\hat{y}_{k-1}, \hat{y}_{k-2}$  с учетом наблюдений поступивших с  $k$ -го этапа. При этом  $k$ -я группа наблюдений не влияет на значения оценок коэффициентов  $\hat{y}_0, \dots, \hat{y}_{k-1}$ , вычисленных ранее. Такой фильтр можно определить соотношением

$$\hat{y}_k = \lambda_1 \hat{y}_{k-1} + \lambda_2 \hat{y}_{k-2} + \sum_{i=0}^m a_i y_{i,k}, \quad k = 1, 2, \dots, \quad (6)$$

где  $\hat{y}_0, \hat{y}_1$  – начальные условия, которое может быть получено по МНК на первом шаге,  $m$  – количество измерений на каждом звене сплайна,  $y_{i,k}$  – наблюдения, поступающие с  $k$ -го этапа, коэффициенты  $\lambda_1, \lambda_2, a_i$  – свободные параметры рекуррентного усредняющего алгоритма.

**Теорема 2.2.** Пусть для заданного  $m$  коэффициенты  $\lambda_1, \lambda_2, a_i$  удовлетворяют условиям

$$\sum_{i=0}^m a_i = 1 - \lambda_1 - \lambda_2, \quad \sum_{i=0}^m a_i \frac{i}{m} = 1 + \lambda_2, \quad \sum_{i=0}^m a_i \left(\frac{i}{m}\right)^2 = \frac{\lambda_1 - 3\lambda_2 - 3}{4}. \quad (7)$$

$$\lambda_1^2 + 4\lambda_2 > 0; \quad |\lambda_1| + |\lambda_2| < 1. \quad (8)$$

Тогда коэффициенты  $\hat{y}_k$  аппроксимационного сплайна степени 2 глубины 2, определенные по алгоритму (6) вычисляются устойчивым образом.

Сплайн, построенный в условиях теоремы 2.2, обеспечивает точность на многочленах второй степени.

В разделе 2 рассматриваются рекуррентные формулы аппроксимации со сжатием сплайнами степени 3, численные примеры и эксперименты.

В диссертации отдельно рассмотрены рекуррентные формулы аппроксимации сплайнами третьей степени глубины  $p=1, 2$  и произвольной глубины  $p$ . Здесь сразу представлены рекуррентные формулы аппроксимации сплайнами степени 3 произвольной глубины  $p$ .

**Постановка задачи.** Пусть процесс  $f(t)$  допускает адекватное представление в виде разложения по  $B$ -сплайнам третьей степени. Тогда измеренные значения  $y_{i,k}$  на отрезках  $[t_k, t_{k+1}]$ ,  $k=0, 1, \dots$ , имеют вид:

$$y_{i,k} = \frac{1}{6} \left(1 - \frac{i}{m}\right)^3 y_{k-1} + \left[\frac{2}{3} - \left(\frac{i}{m}\right)^2 + \frac{1}{2} \left(\frac{i}{m}\right)^3\right] y_k + \frac{1}{2} \left[\frac{1}{3} + \frac{i}{m} + \left(\frac{i}{m}\right)^2 - \left(\frac{i}{m}\right)^3\right] y_{k+1} + \frac{1}{6} \left(\frac{i}{m}\right)^3 y_{k+2} + \xi_{i,k}. \quad (9)$$

где  $\xi_{i,k}$  – погрешности измерения.

Для нахождения оценок  $\hat{y}_k$  коэффициентов сплайна в общем случае будем использовать рекуррентный фильтр глубины  $p$ , с шаблоном усреднения ширины  $m+1$ :

$$\hat{y}_k = \sum_{q=1}^p \lambda_q \hat{y}_{k-q} + \sum_{i=0}^m a_i y_{i,k+1}, \quad k = p-1, p, \dots, \quad (10)$$

где начальные условия  $\hat{y}_k$ ,  $k = -1, 0, \dots, p-2$ , определяются по измеренным значениям  $y(t)$  на начальных отрезках, например, по способу наименьших квадратов,  $m$  – количество измерений на каждом звене сплайна,  $y_{i,k+1}$  – наблюдения, поступающие с  $(k+1)$ -го этапа, коэффициенты  $\lambda_q, a_i$  – свободные параметры рекуррентного усредняющего алгоритма.

**Теорема 2.5.** Пусть для заданного  $m$  коэффициенты  $\lambda_q, a_i$  алгоритма (10) удовлетворяют условиям

$$\sum_{i=0}^m a_i = 1 - \sum_{q=1}^p \lambda_q, \quad \sum_{i=0}^m a_i (i/m)^2 = 2/3 - \sum_{q=1}^p \lambda_q (2 + 6q + 3q^2)/3, \quad (11)$$

$$\sum_{i=0}^m a_i (i/m) = \sum_{q=1}^p \lambda_q (1+q) - 1, \quad \sum_{i=0}^m a_i (i/m)^3 = \sum_{q=1}^p \lambda_q (2q + 3q^2 + 3q^3),$$

$$\sum_{q=1}^p |\lambda_q| < 1 \quad (12)$$

Тогда коэффициенты  $\hat{y}_k$  аппроксимационного сплайна степени 3 произвольной глубины  $p$ , вычисляются устойчивым образом.

Сплайн, построенный в условиях теоремы 2.5, обеспечивает точность на многочленах третьей степени.

В разделе 3 рассмотрена рекуррентная аппроксимация кубическими сплайнами по заданным значениям в узлах сетки.

Пусть  $S_3(t)$  – кубический сплайн с узлами на сетке  $\Delta: t_i = a + ih$ ,  $i = 0, 1, \dots, N$ ,  $h = (b-a)/N$  и запишем по системе центрированных кубических  $B$ -сплайнов (см. рис. 2)

$$S_3(t) = \sum_{j=1}^{M+1} y_j B_3^j(t), \quad t \in [a, b].$$

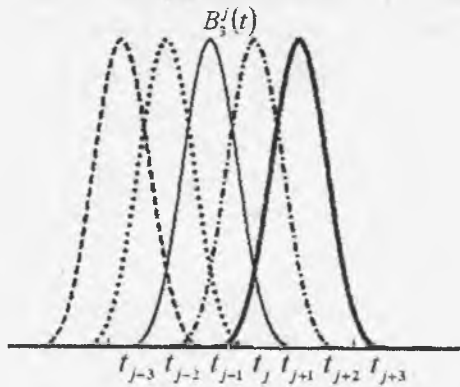


Рис. 2. Графики функций  $B_3^j(t)$

Коэффициенты сплайна задаются в виде рекуррентной зависимости

$$y_j = \sum_{q=1}^p \lambda_q y_{j-q} + \sum_{i=0}^m a_i f(t_{j-k+i}), \quad j = p-1, p, \dots, \quad (13)$$

где произвольное  $p$  – глубина рекурсии,  $m$  – ширина шаблона усреднения,  $k$  – сдвиг шаблона усреднения, коэффициенты  $\lambda_q, a_i$ , – свободные параметры рекуррентного усредняющего алгоритма.

**Теорема 2.6.** Пусть для заданного шага сетки  $h$  и ширины шаблона усреднения  $m$ , коэффициенты сплайна  $y_j$  определяются по алгоритму (13), где коэффициенты  $\lambda_q$  и  $a_i$  удовлетворяют условиям

$$\sum_{i=0}^m a_i = 1 - \sum_{q=1}^p \lambda_q, \quad \sum_{i=0}^m a_i (i-k)^2 = -\frac{1}{3} - \sum_{q=1}^p \lambda_q \left( q^2 - \frac{1}{3} \right), \quad (14)$$

$$\sum_{i=0}^m a_i (i-k) = \sum_{q=1}^p q \lambda_q, \quad \sum_{i=0}^m a_i (i-k)^3 = \sum_{q=1}^p \lambda_q (q - q^3)$$

при 
$$\sum_{q=1}^p |\lambda_q| < 1. \quad (15)$$

Тогда коэффициенты  $y_j$  аппроксимационного сплайна степени 3 вычисляются устойчивым образом и являются асимптотически несмещенными при  $j \rightarrow \infty$ .

Сплайн, построенный в условиях теоремы 2.6, обеспечивает точность на многочленах третьей степени.

Приведены численные примеры, которые представляют собой обобщение известной схемы локальной аппроксимации, когда глубина  $p = 0$  (рекурсивное слабое отсутствует) и  $p=1$ .

**Случай 1.** Пусть  $p=0$ , значения  $m=3, k=2$ . В результате имеем 4 неизвестных значения  $a_0, a_1, a_2, a_3$  для определения которых требуется решить систему линейных алгебраических уравнений вида

$$\begin{cases} a_0 + a_1 + a_2 + a_3 = 1, \\ -2a_0 - a_1 + a_3 = 0, \\ 4a_0 + a_1 + a_3 = -1/3, \\ -8a_0 - a_1 + a_3 = 0. \end{cases}$$

Детерминант матрицы системы равен 12, поэтому существует единственное решение  $a_0=0, a_1=-1/6, a_2=4/3, a_3=-1/6$ , и оно совпадает с локальной аппроксимацией.

**Случай 2.** Пусть  $p=1, m=2, k=1$ . В результате имеем 4 неизвестных значения  $a_0, a_1, a_2, \lambda_1$ , для определения которых требуется решить систему линейных алгебраических уравнений

$$\begin{cases} a_0 + a_1 + a_2 + \lambda_1 = 1, \\ -a_0 + a_2 - \lambda_1 = 0, \\ a_0 + a_2 + \frac{\lambda_1}{3} = -\frac{1}{3}, \\ -a_0 + a_2 = 0. \end{cases}$$

Детерминант матрицы системы равен 2, поэтому существует единственное решение  $a_0=-1/6, a_1=4/3, a_2=-1/6, \lambda_1=0$ , и оно также совпадает с локальной аппроксимацией.

**Случай 3.** Пусть теперь  $p=1, m=3, k=3$ . В результате имеем 5 неизвестных значений  $a_0, a_1, a_2, a_3, \lambda_1$ , для определения которых требуется решить недоопределенную систему 4-х линейных алгебраических уравнений

$$\begin{cases} a_0 + a_1 + a_2 + a_3 = 1 - \lambda_1, \\ -3a_0 - 2a_1 - a_2 = \lambda_1, \\ 9a_0 + 4a_1 + a_2 = -1/3 - \lambda_1/3, \\ -27a_0 - 8a_1 - a_2 = 0. \end{cases}$$

Детерминант матрицы системы равен 12, поэтому существует общее решение, зависящее от параметра  $\lambda_1$ :

$$a_0 = \frac{1}{6}, \quad a_1 = -\frac{2}{6} + \frac{1}{6} \lambda_1, \quad a_2 = \frac{5}{6} - \frac{4}{3} \lambda_1, \quad a_3 = \frac{2}{3} + \frac{1}{6} \lambda_1.$$

В частности, при  $\lambda_1 = 0$  получаем неизвестную ранее 4-х точечную схему локальной аппроксимации

$$a_0 = 1/6, \quad a_1 = -2/3, \quad a_2 = 5/6, \quad a_3 = 2/3.$$



**Случай 4.** Пусть теперь  $p=1, m=3, k=2$ . В результате имеем 4 неизвестных значений  $a_0, a_1, a_2, a_3, \lambda_1$ , для определения которых требуется решить недоопределенную систему 4-х линейных алгебраических уравнений

$$\begin{cases} a_0 + a_1 + a_2 + a_3 + \lambda_1 = 1, \\ -2a_0 - a_1 + a_3 - \lambda_1 = 0, \\ 4a_0 + a_1 + a_3 + 2\lambda_1/3 = -1/3, \\ -8a_0 - a_1 + a_3 = 0. \end{cases}$$

Детерминант матрицы системы равен 12. Существует общее решение, зависящее от параметра  $\lambda_1$ :

$$a_0 = -\frac{\lambda_1}{6} - \frac{1}{24}, \quad a_1 = \frac{2\lambda_1}{3} + \frac{1}{12}, \quad a_2 = -\frac{5\lambda_1}{6} + \frac{29}{24}, \quad a_3 = \frac{-2\lambda_1}{3} - \frac{1}{4}.$$

В частности, при  $\lambda_1 = 0$  получаем еще одну неизвестную ранее 4-х точечную схему локальной аппроксимации

$$a_0 = -1/24, \quad a_1 = 1/12, \quad a_2 = 29/24, \quad a_3 = -1/4.$$

Графики полученных значений коэффициентов в зависимости от  $\lambda_1$  при  $|\lambda_1| < 1$  представлены на рис. 3.

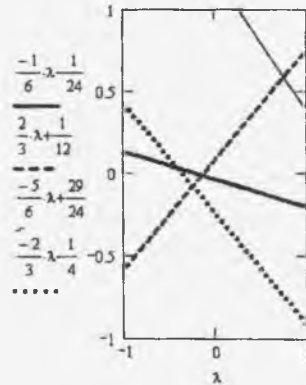


Рис. 3. Графики коэффициентов  $a_0, a_1, a_2$  и  $a_3$  в зависимости от  $\lambda_1$  при  $|\lambda_1| < 1$

Таким образом, получено два класса рекуррентных вычислительных процессов, удовлетворяющих условию устойчивости  $|\lambda_1| < 1$ , оценки коэффициентов  $\hat{y}_j$  экспериментальной зависимости, представленной в виде сплайна третьей степени. Это допускает проведение дополнительной оптимизации по  $\lambda_1$  (например, согласно критерию минимума погрешности аппроксимации на многочленах четвертой степени). При этом минимальное запаздывание  $-h$  обеспечивается для второй схемы при  $a_3=0$  (соответственно,  $\lambda_1 = -3/8, |\lambda_1| < 1$ ), что предоставляет возможность устойчивого прогнозирования измеренных сеточных значений на шаг вперед.

В третьей главе рассмотрено математическое описание рекуррентного сплайн-преобразования данных с погрешностями.

Пусть в модели измерения (1), (2) погрешности  $\xi_{i,k}$  – некоррелированные случайные величины с нулевым средним и конечной дисперсией  $\sigma^2$ , т.е. удовлетворяют условиям  $M(\xi_{i,k})=0, M(\xi_{i,k}\xi_{j,l})=\delta_{ij}\delta_{kl}\sigma^2$ . Здесь  $M$  означает операцию вычисления математического ожидания,  $\delta_{ij}$  – символ Кронекера.

**Теорема 3.1.** В условиях теоремы 2.2 оценки  $\hat{y}_k$  параметров квадратического сплайна (3) являются несмещенными и имеют дисперсию при  $k \rightarrow \infty$

$$D\{\hat{y}_k\} = \frac{\sigma^2}{1-\lambda_1^2} \sum_{i=0}^m a_i^2. \quad (16)$$

Так как остаточная дисперсия оценок зависит от коэффициентов  $\lambda_1, a_i$  и дисперсии  $\sigma^2$ , то естественно определить такие параметры, которые минимизировали бы величину

$$V(\lambda_1) = \frac{1}{1-\lambda_1^2} \sum_{i=0}^m a_i^2, \quad (17)$$

удовлетворяя при этом условиям точности на многочленах (4) и устойчивости (5). Решение поставленной задачи дает следующая теорема.

**Теорема 3.2.** При заданной дисперсии ошибок измерения  $\sigma^2$  оптимальные параметры алгоритма (3), минимизирующие (17) при условиях (4) и (5), имеют вид:

а) при  $m=2$

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= -2\sqrt{2} + 3 \approx 0.172, \\ a_i &= \frac{3\sqrt{2}i + \sqrt{2} - 2 - 2\sqrt{2}i^2 - 2i + 2i^2}{4}, \quad i=0, 1, 2. \end{aligned} \quad (18, a)$$

Дисперсия, соответствующая оптимальным параметрам (18, а), имеет значение

$$D\{\hat{y}_k\} = \frac{\sqrt{2}}{2} \sigma^2 \approx 0.707 \sigma^2;$$

б) при  $m=10$

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= \frac{2}{17} \sqrt{34710} - \frac{373}{17} \approx -0.023, \\ a_i &= 1.8845i - 0.596i^2 - 0.596, \quad i=0, 10, \end{aligned} \quad (18, б)$$

Дисперсия, соответствующая оптимальным параметрам (18, б), имеет значение



$$D\{\hat{y}_k\} = \frac{\sqrt{34710}}{429m} \sigma^2 \approx 0.043 \sigma^2;$$

в) при  $m \rightarrow \infty$

$$\lambda_1 = -7 + 4\sqrt{3} \approx -0.072, \quad a_i = \alpha \frac{i}{m} + \alpha \lambda_1 \frac{m-i}{m} + \delta \left( \frac{i}{m} - \frac{1}{2} \right)^2. \quad (18, \text{в})$$

Дисперсия, соответствующая оптимальным параметрам (18, в), имеет значение

$$D\{\hat{y}_k\} = \frac{3\sqrt{3}}{m} \sigma^2 \approx \frac{5.196 \sigma^2}{m}. \quad (19)$$

**Теорема 3.3.** Пусть в модели измерения (1), (2) погрешности  $\xi_{i,k}$  – некоррелированные случайные величины с нулевым средним и конечной дисперсией  $\sigma^2$ , т.е. удовлетворяют условиям  $M(\xi_{i,k})=0$ ,  $M(\xi_{i,k}\xi_{j,k})=\delta_{i,j}\sigma^2$ .

Тогда в условиях теоремы 2.2 оценки являются несмещенными и имеют дисперсию

$$D\{\hat{y}_k\} = \frac{\sigma^2}{1-\lambda_1^2-\lambda_2^2} \sum_{i=0}^m a_i^2. \quad (20)$$

Так как остаточная дисперсия оценок  $D\{\hat{y}_k\}$  зависит от коэффициентов  $\lambda_1, \lambda_2, a_i$  и дисперсии  $\sigma^2$ , то естественно определить такие параметры, которые минимизировали бы величину

$$V(\lambda_1, \lambda_2, a_i) = \frac{1}{1-\lambda_1^2-\lambda_2^2} \sum_{i=0}^m a_i^2, \quad (21)$$

удовлетворяя при этом условиям точности на многочленах (7) и устойчивости (8). Решение поставленной задачи дает следующая теорема.

**Теорема 3.4.** При заданной дисперсии ошибок измерения  $\sigma^2$  оптимальные параметры алгоритма (6), минимизирующие остаточную дисперсию оценок (21) при условиях (7) и (8), имеют вид при  $m \rightarrow \infty$

$$\lambda_1 = \frac{-23}{1468} \approx -0.016, \quad \lambda_2 = \frac{-69}{1468} \approx -0.047, \quad (22)$$

$$a_i = \alpha \frac{i}{m} + \beta \frac{m-i}{m} + \delta \left( \frac{i}{m} - \frac{1}{2} \right)^2.$$

Дисперсия, соответствующая оптимальным параметрам, имеет значение

$$D\{\hat{y}_k\} \approx \frac{3.223 \sigma^2}{m}. \quad (23)$$

Полученных результатов достаточно, чтобы сделать вывод о том, что остаточная дисперсия оценок уменьшается с увеличением глубины сплайн-фильтра.

Аналогичные теоремы доказываются для кубического сплайна.

Пусть в модели измерения (9) погрешности  $\xi_{i,k}$  – некоррелированные случайные величины с нулевым средним и конечной дисперсией  $\sigma^2$ , т.е. удовлетворяют условиям  $M(\xi_{i,k})=0$ ,  $M(\xi_{i,k}\xi_{j,k})=\delta_{i,j}\sigma^2$ . Здесь  $M$  означает операцию вычисления математического ожидания,  $\delta_{i,j}$  – символ Кронекера.

**Теорема 3.5.** В условиях теоремы 2.3 оценки  $\hat{y}_k$  параметров кубического сплайна (10) являются несмещенными и имеют дисперсию при  $k \rightarrow \infty$

$$D\{\hat{y}_k\} = \frac{\sigma^2}{1-\lambda_1^2} \sum_{i=1}^m a_i^2. \quad (24)$$

Так как остаточная дисперсия оценок зависит от коэффициентов  $\lambda_1, a_i$  и дисперсии  $\sigma^2$ , то естественно определить такие параметры, которые минимизировали бы величину

$$V(\lambda_1) = \frac{1}{1-\lambda_1^2} \sum_{i=0}^m a_i^2, \quad (25)$$

удовлетворяя при этом условиям точности на многочленах (11) и устойчивости (12). Решение поставленной задачи дает следующая теорема.

**Теорема 3.6.** При заданной дисперсии ошибок измерения  $\sigma^2$  оптимальные параметры алгоритма (10), минимизирующие остаточную дисперсию оценок (24) при условиях (11) и (12), имеют вид при  $m \rightarrow \infty$

$$\lambda_1 = \frac{19568 - \sqrt{357171295}}{5073} \approx 0.132, \quad a_i = \alpha + \beta \frac{i}{m} + \delta \left( \frac{i}{m} \right)^2 + \mu \left( \frac{i}{m} \right)^3. \quad (26)$$

Дисперсия, соответствующая оптимальным параметрам (26), имеет значение

$$D\{\hat{y}_k\} \approx \frac{188.285}{m} \sigma^2. \quad (27)$$

Пусть в модели измерения (9) погрешности  $\xi_{i,k}$  – некоррелированные случайные величины с нулевым средним и конечной дисперсией  $\sigma^2$ , т.е. удовлетворяют условиям  $M(\xi_{i,k})=0$ ,  $M(\xi_{i,k}\xi_{j,k})=\delta_{i,j}\sigma^2$ . Здесь  $M$  означает операцию вычисления математического ожидания,  $\delta_{i,j}$  – символ Кронекера.

**Теорема 3.7.** В условиях теоремы 2.5 оценки  $\hat{y}_k$  параметров кубического сплайна (10) являются несмещенными и имеют дисперсию при  $k \rightarrow \infty$

$$D\{\hat{y}_k\} = \frac{\sigma^2}{1-\sum_{q=1}^p \lambda_q^2} \sum_{i=1}^m a_i^2. \quad (28)$$

Таким образом, получен устойчивый рекуррентный вычислительный процесс оценки параметров  $\hat{y}_k$  экспериментальной зависимости, представленной в виде сплайна третьей степени.

Так как остаточная дисперсия оценок  $D\{\hat{y}_k\}$  зависит от коэффициентов  $\lambda_q$ ,  $a_i$  и дисперсии  $\sigma^2$ , то естественно определить такие параметры, которые минимизировали бы величину

$$V(\lambda_1, \lambda_2, a_i) = \frac{1}{1 - \sum_{q=1}^p \lambda_q^2} \sum_{i=0}^m a_i^2, \quad (29)$$

удовлетворяя при этом условиям точности на многочленах (11) и устойчивости (12). Решение поставленной задачи для случая  $p=2$  дает следующая теорема.

**Теорема 3.8.** При заданной дисперсии ошибок измерения  $\sigma^2$  оптимальные параметры алгоритма (10), минимизирующие остаточную дисперсию оценок (29) при условиях (11) и (12), имеют вид при  $m \gg 1$

$$a_i = \alpha + \beta \frac{i}{m} + \delta \left(\frac{i}{m}\right)^2 + \mu \left(\frac{i}{m}\right)^3, \quad (30)$$

где

$$\alpha = \frac{296 - 1976\lambda_1 - 5816\lambda_2}{m}, \quad \beta = \frac{-3120 + 22500\lambda_1 - 67440\lambda_2}{m},$$

$$\delta = \frac{7260 - 54600\lambda_1 - 165300\lambda_2}{m}, \quad \mu = \frac{-4620 + 35700\lambda_1 + 108780\lambda_2}{m}.$$

Дисперсия, соответствующая оптимальным параметрам (30), ограничена сверху значением

$$D\{\hat{y}_k\} < \frac{88.863}{m} \sigma^2.$$

В четвертой главе рассмотрена рекуррентная схема прогнозирующего сплайна 1-й степени и выполнена её оптимизация на основе минимума остаточной дисперсии коэффициентов, разработан метод краткосрочного прогнозирования цен на рынке жилья на основе рекуррентных сплайнов. Рассмотрено построение точечного и интервального прогнозов на основе сплайнов 1-й степени и рассматриваются результаты численных экспериментов. Проводится сравнение полученных результатов с другими методами прогнозирования.

С целью прогнозирования можно рекомендовать любую рекуррентную схему, для которой дополнительно на каждом участке выполняется линейное продолжение (рис. 4).

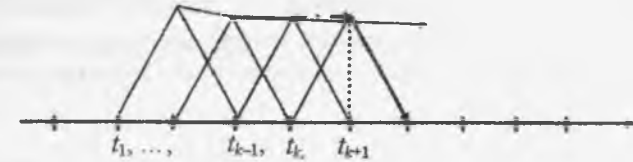


Рис. 4. — Прогноз по линейному продолжению рекуррентного сплайна;  
- - Расчет коэффициента B-сплайна по схеме прогнозирования

Оптимальные результаты дает применение рекуррентного сплайн-фильтра по схеме прогнозирования (рис. 4), когда для нахождения оценок  $\hat{y}_{k+1}$  коэффициентов сплайна используется рекуррентный алгоритм глубины 1, требующий пересчета коэффициента  $\hat{y}_{k+1}$  через известный  $\hat{y}_k$  с учетом наблюдений, поступивших с  $(k-1)$ -го участка

$$\hat{y}_{k+1} = \lambda_1 \hat{y}_k + \sum_{i=0}^m a_i y_{(k-1)m+i}, \quad k = 1, 2, \dots \quad (31)$$

(см. рис. 5, где изображены также графики соответствующих B-сплайнов 1-й степени).

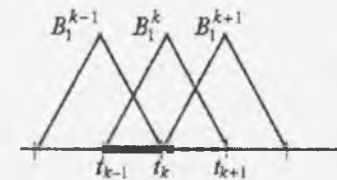


Рис. 5. Жирным – выделен участок расчета коэффициента  $(k+1)$ -го B-сплайна,  
пунктиром – участок прогноза с использованием найденного коэффициента

При этом  $(k-1)$ -я группа измерений не влияет на значения оценок коэффициентов  $\hat{y}_0, \dots, \hat{y}_k$ , вычисленных ранее, причем значения  $\hat{y}_0, \hat{y}_1$ , определяются, например, по МНК на начальном шаге сплайна.

**Теорема 4.1.** Пусть параметры алгоритма (31) удовлетворяют условиям

$$\sum_{i=0}^m a_i = 1 - \lambda_1, \quad \sum_{i=0}^m \frac{i}{m} a_i = 2 - \lambda_1, \quad (32)$$

$$|\lambda_1| < 1. \quad (33)$$

Тогда оценки  $\hat{y}_k$  вычисляются устойчивым образом, являются при  $\Delta t \rightarrow 0$  асимптотически несмещенными и имеют дисперсию при  $k \rightarrow \infty$

$$D\{\hat{y}_k\} = \frac{\sigma^2}{1 - \lambda_1^2} \sum_{i=0}^m a_i^2. \quad (34)$$

При этом сплайн, построенный в условиях теоремы 4.1, то есть у которого оценки коэффициентов  $\hat{y}_k$  определены соотношением (31), обеспечивает точность на многочленах первой степени.

Дисперсия (34) оценок коэффициентов  $\hat{y}_k$  в условиях теоремы 1 зависит при  $k \gg 1$  только от параметров самого алгоритма  $\lambda_1$  и  $a_i$  и дисперсии  $\sigma^2$ . Поэтому естественно определить такие параметры алгоритма, которые минимизировали бы величину

$$V(\lambda_1, a_i) = \frac{1}{1 - \lambda_1^2} \sum_{i=0}^m a_i^2, \quad (35)$$

давая при этом несмещенные оценки коэффициентов, то есть, удовлетворяя условиям (32) и оставаясь при этом устойчивыми (33). Решение поставленной задачи дает следующая теорема.

**Теорема 4.2.** Оптимальные параметры алгоритма (31), минимизирующие (35) при условиях (32), (33), при  $m \gg 1$  имеют вид

$$\lambda_1 = \frac{13 - \sqrt{78}}{7}, \quad a_i = \frac{(8 + \sqrt{78})(6i + 6m - m\sqrt{78})}{7m^2}. \quad (36)$$

Дисперсия, соответствующая оптимальным параметрам (36) имеет вид

$$D\{\hat{y}_k\} = \sigma^2 \frac{-819 + 14\sqrt{78}}{(-3909 + 445\sqrt{78})m}. \quad (37)$$

В разделе 2 рассмотрено построение точечного и интервального прогнозов на основе сплайнов 1-й степени.

Принципиальная разница между прогнозированием по  $B$ -сплайну и прогнозированием по многочлену состоит в том, что прогнозирование по  $B$ -сплайну сходит на нуль, а прогноз по многочлену выполняется его линейным продолжением (рис. 4).

При наличии случайной колеблемости уровней коэффициенты уравнения сплайна содержат ошибки. Тогда можно рассчитать доверительные границы, внутри которых с заданной, достаточно большой вероятностью проходит линия тренда. Такой прогноз называется *интервальным прогнозом* (рис. 6).

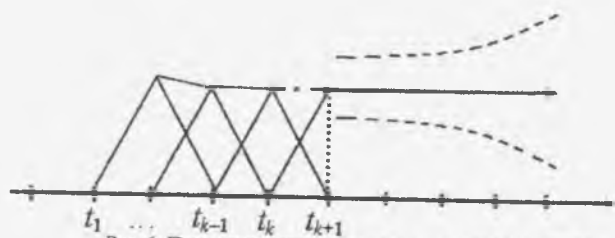


Рис. 6. Прогноз по многочлену и интервальный прогноз

**Теорема 4.3.** Пусть тренд выполняется линейным продолжением рекуррентного сплайна 1-й степени. В точке  $t_k$  средняя квадратическая ошибка положения линии тренда равна ошибке коэффициента сплайна, т.е.  $\frac{2\sqrt{351}}{\sqrt{m}}\sigma$ , а в

любой иной точке тренда его средняя ошибка вычисляется как

$$\omega_y = \frac{\sigma}{\Delta t} \sqrt{\frac{4\sqrt{351}}{m} [t_{k+1} - \lambda_1 t_k - t(1 - \lambda)]^2 + \frac{936(8 - \sqrt{39})}{25(m+3)} (t - t_k)^2}.$$

Вывод: дисперсия коэффициента оптимальной схемы меньше, чем дисперсия продолжения сплайна на шаг вперед по простой схеме, хотя исходные данные берутся одинаковые.

В диссертационной работе приведены сравнения результатов, полученных по простому и оптимальному рекуррентным алгоритмам, методу Брауна и «наивному методу», а также получена итоговая погрешность применяемых методов по СКО и статистике Тейла.

В заключении сформулированы основные результаты по диссертационной работе, приводимые ниже.

В соответствии с поставленными целями в работе получены следующие результаты:

1. Предложена и исследована серия вычислительных схем рекуррентной аппроксимации, точной на многочленах, сплайнами 2-й и 3-й степени разной глубины.
2. Показана общая схема рекуррентной аппроксимации сплайнами на основе свойства точности на многочленах, получены условия характеристики для рекуррентного сплайн-фильтра степени 2 глубины 1, 2 и степени 3 глубины 1, 2 и произвольной глубины  $p$ .
3. Доказаны теоремы устойчивости, несмещенности и оценки дисперсии коэффициентов рекуррентных сплайнов степени 2 глубины 1, 2 и степени 3 глубины 1 и произвольной глубины  $p$ .
4. Выполнена оптимизация рекуррентных сплайнов по критерию минимума дисперсии коэффициентов и получены оценки дисперсии коэффициентов оптимальных рекуррентных сплайнов степени 2 и 3 глубины  $p=1, 2$ .
5. Разработан метод краткосрочного прогнозирования временных рядов на основе рекуррентных сплайнов.

Приложение состоит из трех частей:

Приложение 1. Табличные данные.

Приложение 2. Разработанное Web-приложение. Страницы пользователя.

Приложение 3. Акты внедрения