2009-48

НАЦИОНАЛЬНАЯ АКАДЕМИЯ НАУК КЫРГЫЗСКОЙ РЕСПУБЛИКИ

ИНСТИТУТ ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ И ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ

Диссертационный совет 01.07.362

На правах рукописи

МУРАТАЛИЕВА ВЕНЕРА ТОЛОГОНОВНА

ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДА ДОПОЛНИТЕЛЬНОГО АРГУМЕНТА К ИССЛЕДОВАНИЮ НЕЛИНЕЙНЫХ ИНТЕГРО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ТИПА БОЛЬЦМАНА

01.01.02 – дифференциальные уравнения

АВТОРЕФЕРАТ

диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Бишкек - 2009

Работа выполнена в Жалал-Абадском государственном университете

Научный руководитель:	доктор физико-математических наук **Алексеенко С.Н.**
Официальные оппоненты:	доктор физико-математических наук **Иманалиев Т.М.,** кандидат физико-математических наук, доцент **Байзаков А.Б.**
Ведущая организация:	Институт математики МОН РК, г. Алматы, ул. Жамбыла, 25

Защита диссертации состоится "9" июня 2009 г. в 14^{00} часов на заседании диссертационного совета Д 01.07.362 по защите диссертаций на соискание ученой степени доктора (кандидата) физико-математических наук при Институте теоретической и прикладной математики НАН Кыргызской Республики по адресу: Кыргызстан, 720071, г.Бишкек–71, проспект Чуй, 265-а.

С диссертацией можно ознакомиться в Центральной научной библиотеке НАН Кыргызской Республики, Кыргызстан, 720071, г.Бишкек-71, проспект Чуй, 265-а.

Автореферат разослан "8" мая 2009 г.

Ученый секретарь
диссертационного совета
д.ф.-м.н., с.н.с. Искандаров С.

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Актуальность темы. В различных физических задачах возникают явления типа переноса (изменения скоростей частиц, появления и исчезновения частиц в результате их взаимодействия). Такие явления описываются интегро-дифференциальными уравнениями типа Больцмана.

Обзор литературы показал, что ранее не были найдены достаточные условия существования решений интегро-дифференциальных уравнений типа Больцмана в одномерном случае с переменными коэффициентами общего вида при частных производных, а также не была исследована асимптотика этих решений.

Для поиска таких условий существования и построения асимптотики мы решили применить и развить метод дополнительного аргумента, считая его наиболее эффективным для данного класса задач.

Ранее было разработано несколько разных методов для исследования разрешимости нелинейных дифференциальных уравнений в частных производных первого порядка: метод характеристик, метод Галеркина, метод дополнительного аргумента. Каждый из них налагает свои требования на вид уравнения. Метод характеристик не требует дополнительных предположений лишь в случае, когда коэффициенты перед производными не содержат неизвестных функций. А при применении метода характеристик для квазилинейных уравнений в соответствующем интегральном уравнении появляется суперпозиция неизвестных функций. Далее, в методе характеристик условием разрешимости исходной задачи является условие существования обратной функции для решения характеристического уравнения.

Рассмотрим, для примера, задачу Коши

$$\frac{\partial z(x,t)}{\partial x}+a\left(x,t,z(x,t)\right)\frac{\partial z(x,t)}{\partial t}=f\left(x,t,z(x,t)\right),\; x\in R,\; t\in[0,T],\; T=const, \tag{1}$$

$$z(x,0)=z_0(x),\; x\in R. \tag{2}$$

Метод характеристик приводит к следующей системе уравнений

$$\frac{d\eta(s)}{ds}=a(s,\eta(s),z(s,\eta(s))), \tag{3}$$

$$\frac{d\,z(s,\eta(s))}{ds}=f\,(s,\eta(s),z(s,\eta(s))). \tag{4}$$

Исследование системы (3) - (4) сводится к исследованию нелинейной системы интегральных уравнений, где всегда присутствует суперпозиция неизвестных функций. И найдя решение в характеристических переменных, для получения решения исходной задачи (1) - (2) требуется перейти от характеристических переменных к переменным *(x, t)*. Последняя задача во многих случаях бывает настолько сложной, что её не решают, а принимают допустимость обратного преобразования переменных в качестве условия.

В ряде работ М. И. Иманалиева, П. С. Панкова, Т. М. Иманалиева, С.Н. Алексеенко, Ш. А. Эгембердиева был развит метод дополнительного аргумента, при помощи которого был получен ряд результатов по существованию решений различных типов уравнений с частными производными.

Наиболее общая схема метода дополнительного аргумента была предложена П. С. Панковым, Т. М. Иманалиевым. Сделан вывод, что основным в методе дополнительного аргумента является то, что дифференциальные операторы с частными производными являются, в некотором смысле, перестановочными с интегральными операторами.

На основе вышеизложенного была предложена общая схема для интегро-дифференциальных уравнений типа Больцмана, которая изложена в диссертации и использована в одномерном случае.

П. С. Панковым, Т. М. Иманалиевым, Г.М. Кененбаевой показано, что метод дополнительного аргумента может применяться и для численного решения, при этом он имеет преимущества перед методами, использующими фиксированные сетки (не производится численное дифференцирование) и перед методами типа метода характеристик (расчет ведется не вдоль ломаных, а вдоль прямых). Кроме того, этот метод, как использующий интегральные уравнения, более удобен для получения гарантированных результатов.

В диссертации применена соответствующая численная схема для интегро-дифференциальных уравнений типа Больцмана.

Упомянем результаты, имеющие отношение к теме диссертации.

В монографии М. И. Иманалиева (1992 г.) исследовано операторно-дифференциальное уравнение вида

$$\frac{\partial z(x,t)}{\partial t} + Q(x,t,z(x,t))\,\frac{\partial z(x,t)}{\partial x} = f(x,t,z(x,t))$$

с начальным условием (2).

М. И. Иманалиев, С.Н. Алексеенко (1992-2001 гг.) исследовали разрешимость начальной задачи для одного уравнения и систем уравнений типа Уизема:

$$\frac{\partial z(x,t)}{\partial t} + z(t,x)\,\frac{\partial z(x,t)}{\partial x} = f\left(x,t,z(x,t);\quad \int_{-\infty}^{\infty} K(x,\xi)\,z(\xi,t)\,d\xi\right)$$

с начальным условием (2), и для уравнения

$$\frac{\partial z(x,t)}{\partial t} + z(x,t)\,\frac{\partial z(x,t)}{\partial x} = f(x,t,z(x,t))$$

с условием типа Коши

$z(0,x)=\varphi(x)$, $u(t,0)=\psi(t)$, $x\in[0, X]$, $t\in[0,T]$, $T, X=const > 0$.

М. И. Иманалиев, П. С. Панков, Т. М. Иманалиев (1995-2002 гг.) изучили дифференциальные уравнения типа Кортевега - де Фриза и волновые уравнения.

Т. М. Иманалиев (1991-1994 гг.) исследовал интегро-дифференциальное уравнение типа Вольтерра.

С. Н. Алексеенко, Ш. А. Эгембердиев (1997-1998 гг.) исследовали дифференциальные уравнения одномерной модельной редукции задачи протекания идеальной жидкости или газа. Алексеенко С.Н., Панков П.С., Будникова О.Д. (2003 г.) - дифференциальные уравнения движения волн Римана. С.Н.Алексеенко (2002 г.) определил границы интервала существования гладкого ограниченного решения задачи Коши для нелинейного дифференциального уравнения типа Гамильтона-Якоби.

Во всех этих работах исследовались системы уравнений с одним характеристическим направлением. Иманалиев М.И., Алексеенко С.Н. (2001 г.) разработали способ применения метода дополнительного аргумента к системам дифференциальных уравнений первого порядка с разными характеристическими направлениями.

С.Н. Алексеенко, П.С.Панков, С.Г. Косов (2004 г.) исследовали разрешимость системы дифференциальных уравнений, описывающей изоэнтропическое течение баротропного газа, а также построили ее численное решение.

С.Н.Алексеенко, Н.А.Грекова (2005 г.) показали существование решения задачи Коши для системы дифференциальных уравнений стационарного движения баротропного газа при сверхзвуковых скоростях.

Метод дополнительного аргумента также был применен к другим задачам теории: А. Асанов, Б.Э. Сулейманов (1998-2003 гг.) - к исследованию существования и единственности решения обратных задач для дифференциальных и интегро-дифференциальных уравнений в частных производных первого порядка; М. И. Иманалиев, П. С. Панков, Т. М. Иманалиев (1995 г.) - к изучению уравнений высших порядков.

Переходим к обзору работ по теоретической физике.

Винг Дж.М. (1963 г.) свел нестационарную миграцию нейтронов в бесконечной пластине к интегро-дифференциальному уравнению типа Больцмана с постоянными коэффициентами

$$\frac{1}{v}\frac{\partial z(r,\mu,t)}{\partial t} = Az \equiv \mu\frac{\partial z(r,\mu,t)}{\partial r} + \sigma\, z(r,\mu,t) + c_2\int_{-1}^{1} z(r,\mu',t)\,d\mu', \qquad (5)$$

$r\in R$, $\mu\in[-1;1]$,

где $\sigma = const$ – полное поперечное сечение взаимодействия,

$c_2 = const$ – среднее число нейтронов, возникающих при столкновении,

μ – косинус угла между направлением движения частицы и положительным направлением оси r,

$v=const$ – скорость (все возможные скорости приближенно заменены их средним значением),

$z(r,\mu,t)$ – плотность нейтронов в точке r, движущихся под углом μ к оси в момент времени t.

Граничные условия:

$$z(-a,\mu,t)=0,\ \mu>0,\ t>0,\ z(a,\mu,t)=0,\ \mu<0,\ t>0. \tag{6}$$

Начальные условия (начальное распределение нейтронов в пластине):

$$z(r,\mu,\ 0)=z_0(r,\mu),\ |\ r\ |\le a,\ |\ \mu\ |\le 1. \tag{7}$$

Решение представлено в форме интеграла Лапласа

$z(r,\mu,t)=\lim\limits_{\omega\to\infty}\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma-i\omega}^{\gamma-i\omega}e^{\lambda t}(R_\lambda z_0)\,d\lambda,\ t>0$, где $\gamma>\lambda_1$ – первое собственное значение оператора A, R_λ – резольвента.

К одномерному случаю этот результат не сводится.

Suhadolc A., Vidav I. (1970-1971 гг.) исследовали задачу переноса, описанную интегро-дифференциальным уравнением:

$$\frac{\partial z}{\partial t}=A\,z\equiv-\mu\frac{\partial z}{\partial r}+K\int\limits_{-1}^{1}z(r,\mu',t)\,d\mu',$$

когда $r\in[-a,a]$, $\mu\in[-1;1]$, $K=const$, с граничными условиями (6).

Исследованы свойства спектра оператора A, существование решений не исследовано.

В работах Рафатова Р. (1976-1993 гг.) развиты математические методы анализа и синтеза оптимальных управлений процессами теплопроводности, диффузии и переноса при различных критериях эффективности в системах интегро-дифференциальных уравнений Больцмана.

Султангазин У.М. (1979 г.) доказал существование решения интегро-дифференциального уравнения типа Больцмана, когда ядро зависит только от угла между направлениями скоростей до и после столкновения в многомерном пространстве, т.е. на одномерный случай этот результат не переносится.

Weis L.W. (1988 г.) изучил спектральные свойства оператора A для абстрагированного уравнения переноса нейтронов с ядром общего вида:

$$\frac{\partial z(r,v,t)}{\partial t}=Az\equiv-v\,grad_r z(r,v,t)-\sigma(r,v)z(r,v,t)+\int_V K(r,v,v')\,z(r,v',t)\,dv',$$

где $r\in D$ и $v\in V$, где D (пространство положения) и V (пространство скоростей) – открытые подмножества в R^n. Существование решений не исследовано.

Frazali G., Van der Mee C.V.M. и Paveri-Fontana S.L. (1989 г.) рассмотрели для функции распределения следующее уравнение

$$\frac{\partial z(v,t)}{\partial t}=A\,z\equiv a\frac{\partial z(v,t)}{\partial v}+b(v)\,z(v,t)+\int\limits_{-\infty}^{+\infty}K(v,v')b(v')z(v',t)\,dv', \tag{8}$$

$v\in R$, где $a=const$,

с начальным условием $z\,(v,0)=z_0\,(v),\ v\in R.$ (9)

При предположениях

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty}K(v,v')dv'\equiv 1,\quad K(v,v')\ge 0,\quad K(-v,-v')=K(v,v'),\ b(-v)=b(v)$$

утверждается, что решение задачи (8) - (9) при $t\to\infty$ сходится к некоторой положительной функции, доказательства не приведено.

Кенжебаевым Ш.К. (1990 г.) предложены методы приближенного решения и формулы для собственных значений операторов типа оператора A, теорем о существовании решения нет.

Poupaud F. (1990 г.) для нелинейной системы специального вида с произведениями двух неизвестных функций доказал существование и единственность решения при специальных условиях типа равенства.

Lods B. (2004 г.) изучил сингулярные абстрагированные уравнения переноса, усложненные неограниченными сечениями взаимодействия

$$\frac{\partial z(r,v,t)}{\partial t}=A\,z\equiv-v\ \nabla_r\ z(r,v,t)-\sigma(v)z(r,v,t)+\int_V K(r,v,v')z(r,v',t)d\mu(v')$$

с начальным условием $z(r,v,0)=z_0(r,v)$, $(r,v)\in\Omega\times V\subset R^n\times R^n$ и граничным условием: $z=0$ на части границы области. Изучаются спектральные свойства оператора A, существование решения не рассматривается.

В обзорной статье B. Perthame (2004 г.) упомянуты результаты о существовании решения для специального вида уравнения Больцмана алгебраическими методами. На более общий случай эти методы не переносятся.

После нашей публикации [5] были опубликованы статьи Омурова Т.Д., Туганбаева М.М. Интегральные преобразования в теории уравнений переноса. Исследования по интегро-дифференциальным уравнениям. - Вып. 35 (2006 г.); Интегральное преобразование линейного интегро-дифференциального уравнения типа Больцмана. Наука и новые технологии. - № 3-4 (2006 г.), в которых для интегро-дифференциальных уравнений типа Больцмана доказываются условная ограниченность и единственность (при предположении, что решение существует).

Таким образом, ранее не были найдены достаточные условия существования решения интегро-дифференциальных уравнений типа Больцмана в одномерном случае с переменными коэффициентами общего вида при частных производных, не была установлена асимптотика этих решений.

<u>**Связь с государственными программами.**</u> Работа по теме диссертации выполнялась в рамках проекта "Развитие и приложения аналитических, асимптотических и вычислительных методов в теории динамических систем" Института математики НАН КР, № гос. регистрации 0003851.

<u>**Цель работы**</u> заключается в развитии и модификации метода дополнительного аргумента для построения общих схем исследования и получении

достаточных условий существования решений интегро-дифференциальных уравнений типа Больцмана и построение асимптотики этих решений.

Методика исследований. Развивается и применяется метод дополнительного аргумента к исследованию нелинейных интегро-дифференциальных уравнений типа Больцмана. Существование решений доказывается с помощью метода последовательных приближений. Сходимость метода последовательных приближений и утверждения качественного характера доказываются с использованием оценок решений интегральных уравнений. Также применяется метод интервальных оценок.

Научная новизна работы. Получены следующие результаты:

1. построена общая схема для установления достаточных условий существования решения интегро-дифференциальных уравнений типа Больцмана;
2. построены интервальные расширения для унимодальных функций;
3. построена общая схема для установления достаточных условий затухания решения интегро-дифференциальных уравнений типа Больцмана на бесконечности;
4. найдены конкретные достаточные условия локального существования решения начальной задачи для квазилинейных и существенно нелинейных интегро-дифференциальных уравнений типа Больцмана;
5. найдены конкретные достаточные условия затухания на бесконечности решения интегро-дифференциальных уравнений типа Больцмана с начальной функцией, затухающей на бесконечности;
6. с помощью численных расчетов показано, что предложенные схемы могут применяться и для приближенного решения других видов интегро-дифференциальных уравнений типа Больцмана;
7. при помощи вычислительных экспериментов обнаружено явление расщепления максимума унимодального начального условия в решении интегро-дифференциальных уравнений типа Больцмана, обусловленное наличием интегрального члена.

Теоретическая и практическая ценность. Результаты работы представляют, прежде всего, теоретический интерес. Они подводят математическую основу для исследований, проведенных в рамках теоретической физики, поскольку доказательства существования решения являются косвенным подтверждением адекватности математической модели.

Построенные схемы могут быть применены и для других видов интегро-дифференциальных уравнений типа Больцмана.

Основные положения, выносимые на защиту:

1. общая схема для установления достаточных условий существования решения интегро-дифференциальных уравнений типа Больцмана;

2. общая схема для установления достаточных условий затухания решения интегро-дифференциальных уравнений типа Больцмана на бесконечности;
3. достаточные условия локального существования решения начальной задачи для квазилинейных и существенно нелинейных интегро-дифференциальных уравнений типа Больцмана;
4. достаточные условия затухания на бесконечности решения интегро-дифференциальных уравнений типа Больцмана с начальной функцией, затухающей на бесконечности;
5. явление расщепления максимума унимодального начального условия, обусловленное наличием интегрального члена.

Личный вклад автора. Постановки задач принадлежат научному руководителю С.Н. Алексеенко, а получение основных результатов осуществлено автором.

Апробация результатов. Результаты работы сообщались: на международной научной конференции «Асимптотические, топологические и компьютерные методы в математике» (г. Бишкек – с.Бозтери, 2006 г.), на республиканской научно-практической конференции «Проблемы образования и воспитания в региональных высших учебных заведениях» (г.Жалалабат, апрель 2008 г.), на семинаре кафедры «Геометрия и прикладная математика» механико-математического факультета Национального Университета Узбекистана им. М. Улугбека (октябрь 2008 г.), на семинаре лаборатории «Функциональный анализ» Института математики МОН Республики Казахстан (март 2009 г.), регулярно обсуждались на семинаре кафедры «Высшая математика» ЖАГУ (2005-2009 гг.). Докладывались на семинаре Института математики НАН КР (2008 г.).

Публикации. Основное содержание настоящей работы опубликовано в 8 работах [1-8], приведенных в конце автореферата. В совместных статьях с Алексеенко С.Н. [1-3] постановка задач и обсуждение результатов принадлежит Алексеенко С.Н., а получение результатов осуществлено автором.

Структура и объем диссертации. Диссертация состоит из введения, где дается краткое содержание работы, трех глав, состоящих из 9 параграфов, заключения, списка используемой литературы, содержащего 56 наименований, и двух приложений, где имеются 14 рисунков и программа вычислений. Объем текста 127 страниц.

КРАТКОЕ СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ

Во введении дается обоснование актуальности темы диссертации, указаны цель и краткое содержание работы по главам.

В первой главе, состоящей из двух параграфов, содержится подробный обзор работ других авторов по тематике диссертации.

В §1.1 – обзор работ по методу дополнительного аргумента.

В §1.2 – обзор работ по интегро-дифференциальным уравнениям типа Больцмана.

В главе II построены схемы исследования интегро-дифференциальных уравнений типа Больцмана.

В §2.1 построена общая схема для доказательства существования решения для квазилинейного интегро-дифференциального уравнения типа Больцмана

$$\frac{\partial z(v,t)}{\partial t}+a(v,t,z(v,t))\frac{\partial z(v,t)}{\partial v}+b(v,t)z(v,t)=\int_{-\infty}^{\infty}K(v,v',t,z(v',t))dv', \qquad (10)$$

$v\in R,\ t\in[0,T]$

с начальным условием

$$z(v,0)=z_0(v),\ v\in R. \qquad (11)$$

Здесь $z\in\overline{C}^{1,1}(R\times[0,T])$ - неизвестная функция, известные функции

$$a(v,t,z)\in\overline{C}^{1,0,1}(R\times[0,T]\times R_+),\ z_0(v)\in\overline{C}^{1}(R),$$
$$b(v,t)\in\overline{C}^{1,0}(R\times[0,T]),\ K(v,v',t)\in\overline{C}^{1,0,0}(R\times R\times[0,T]). \qquad (12)$$

Везде: в соответствии с физическим смыслом, заданные функции a, b, K и решение z предполагаются положительными.

Здесь и далее чертой сверху обозначаются пространства ограниченных функций.

Также требуется, чтобы

$$\int_{-\infty}^{\infty}K(v,v',t)\,dv'\le C \text{ для всех } v,\ t. \qquad (13)$$

В соответствии с методом дополнительного аргумента, записывается расширенная характеристическая система:

$$\frac{d\eta(v,t,s)}{ds}=a(\eta(v,t,s),s,w(v,t,s)),$$

$$\frac{d\,w(v,t,s)}{d\,s}=-b(\eta(v,t,s),s)w(v,t,s)+\int_{-\infty}^{\infty}K(\eta(v,t,s),v',s)\,w(v',s,s)\,dv', \qquad (14)$$

с условиями типа Коши:

$$\eta(v,t,s)\big|_{s=t}=v, \qquad (15)$$
$$w(v,t,0)=z_0(\eta(v,t,0)). \qquad (16)$$

ТЕОРЕМА 2.1.1. Если функции $w(v,t,s)\in\overline{C}^{1,1,1}(Q_T)$, $\eta(v,t,s)\in\overline{C}^{1,1,1}(Q_T)$, где $Q_T:=\{(v,t,s):v\in R,\quad 0\le s\le t\le T\}\subset R^3$, удовлетворяют системе интегральных уравнений:

$$\eta(v,t,s)=v-\int_s^t a(\eta(v,t,\rho),\rho,w(v,t,\rho))d\rho, \qquad (17_1)$$

$$w(v,t,s)=exp\left(-\int_0^s b(\eta(v,t,\rho),\rho)d\rho\right)z_0\left(v-\int_0^t a(\eta(v,t,\rho),\rho,w(v,t,\rho))d\rho\right)+$$
$$+\exp\left(-\int_0^s b(\eta(v,t,\rho),\rho)\,d\rho\right)\int_0^s\int_{-\infty}^{\infty}K(\eta(v,t,\rho),v',\rho)\,w(v',\rho,\rho)\exp\left(\int_0^\rho b(\eta(v,t,\xi),\xi)\,d\xi\right)dv'\,d\rho \qquad (17_2)$$

(из наложенных условий следует сходимость интегралов) и T достаточно мало, то компонента $w(v,t,s)$ решения интегрального уравнения (17_2) при $s=t$ является решением задачи Коши (10)-(11).

В §2.2 построена общая схема для исследования асимптотики решения.

Предполагается, что существует такая функция $\varphi(v)$, что

$$K(v,v',t)\le\varphi(v-v'),$$
$$|K_1(v,v',t)|\le\varphi(v-v'). \qquad (18)$$

Сделав в (17) замену: $\mu(v,t,s)=v-\eta(v,t,s)$ получаем:

$$\mu(v,t,s)=M(v,t,s,\mu,w(\cdot))\equiv\int_s^t a(v-\mu(v,t,\rho),\rho,w(v,t,\rho))d\rho,$$

$$w(v,t,s)=W(v,t,s,\mu,w(\cdot))\equiv\exp\left(-\int_0^s b(v-\mu(v,t,\rho),\rho)d\rho\right)\times$$
$$\times z_0\left(v-\int_0^t a(v-\mu(v,t,\rho),\rho,w(v,t,\rho))d\rho\right)+$$
$$+\int_0^s\int_{-\infty}^{\infty}K(v-\mu(v,t,\rho),v',\rho)\,w(v',\rho,\rho)\exp\left(\int_\rho^s b(v-\mu(v,t,\xi),\xi)\,d\xi\right)dv'd\rho. \qquad (19)$$

ТЕОРЕМА 2.2.1. Если

1) существует такое $\lambda > 0$, что $\int_{-\infty}^{\infty} \varphi(v') \exp(\lambda |v'|) dv' < \infty$, $\varphi(v) \in U(R)$;
2) существует такое $\psi_0 \in E_\lambda(R)$, что $z_0(v) \le \psi_0(v)$ для всех $v \in R$;
3) выполняются условия (12), (13) и (18), наложенные на функции $a(v,t,z)$, $b(v,t)$, $K(v,v',t)$, то для достаточно малого $T^* \le T$ система (19) имеет решение (μ, w), при $t \le T^*$ удовлетворяющее следующему условию по второй компоненте: $w(v,t,s) \le 2\psi_0(v)$.

Для доказательства теоремы доказаны следующие четыре леммы. Используются обозначения интервального анализа.

ЛЕММА 2.2.1. Если $p(v) \in E_\lambda(R)$, $\varphi(v) \in C(R)$ и

$$\Phi_0 = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(v') \exp(\lambda |v'|) dv' < \infty, \text{ то } \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(v - v') p(v') dv' \le \Phi_0 \, p(v).$$

ЛЕММА 2.2.2. Для $\psi(x) \in U(R)$ и интервала $[x_-; x_+]$ имеем:

$$\psi_+(x + [x_-; x_+]) = \begin{cases} \psi(x + x_+), & \text{если } -\infty < x < -x_+ \\ \psi(0), & \text{если } -x_+ \le x \le -x_- \\ \psi(x + x_-), & \text{если } -x_- < x < \infty \end{cases}$$

ЛЕММА 2.2.3. Для $\psi(x) \in U(R)$ и интервала $[x_-; x_+]$ имеем:

$$\psi_-(x + [x_-; x_+]) = \begin{cases} \psi(x + x_-), & \text{если } -\infty < x < -x_+ \\ \psi(x_- - x_+) = \psi(x_+ - x_-), & \text{если } -x_+ \le x \le -x_- \\ \psi(x + x_+), & \text{если } -x_- < x < \infty \end{cases}$$

ЛЕММА 2.2.4. Если $\varphi(v) \in U(R)$ и выполняются условия леммы 2.2.1, то

$$\lim_{\Delta \to 0} \Phi_\Delta = \Phi_0, \text{ где обозначено } \Phi_\Delta = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(v' + [0, \Delta]) \exp(\lambda |v'|) dv'.$$

Построен следующий пример, показывающий существенность условия унимодальности в Лемме 2.2.4, а также – что его нельзя заменить на условие «малости в далеких точках»:

Обозначим непрерывную функцию

$$\sigma(v,\gamma) = \begin{cases} 0, & \text{если } -\infty < v \le -\gamma, \\ 1 + \frac{1}{\gamma} v, & \text{если } -\gamma < v \le 0, \quad \gamma > 0. \\ 1 - \frac{1}{\gamma} v, & \text{если } 0 < v \le \gamma, \\ 0, & \text{если } \gamma < v < \infty. \end{cases}$$

Имеем: $\int_{-\infty}^{\infty} \sigma(v,\gamma) dv = \gamma$. Выберем $\lambda = 1$.

Положим $\varphi(v) = \sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k} e^{-\left(k + \frac{1}{k}\right)} \sigma\left(v - k, \frac{1}{k}\right) \in \overline{C}(R)$, тогда

$$\Phi_0 = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(v) e^{|v|} dv = \sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k} e^{-\left(k + \frac{1}{k}\right)} \int_{k - \frac{1}{k}}^{k + \frac{1}{k}} \sigma\left(v - k, \frac{1}{k}\right) e^{|v|} dv \le$$

$$\le \sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k} e^{-\left(k + \frac{1}{k}\right)} \frac{1}{k} e^{k + \frac{1}{k}} = \sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k^2} < \infty \text{ (интеграл сходится).}$$

Вместе с тем, $\varphi(k) = \frac{1}{k} e^{-\left(k + \frac{1}{k}\right)}$ для любого натурального k, отсюда для любого $\Delta > 0$, и $\Delta < 0.5$, имеем: верхняя граница для $\varphi(v + [0, \Delta]) = \frac{1}{k} e^{-\left(k + \frac{1}{k}\right)}$ $(k - \Delta \le v \le k)$ и оценка верхней границы для Φ_Δ:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \varphi(v + [0, \Delta]) dv \ge \sum_{k=2}^{\infty} \int_{k-\Delta}^{k} \frac{1}{k} e^{-\left(k + \frac{1}{k}\right)} e^{|v|} dv \ge \sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k} e^{-\left(k + \frac{1}{k}\right)} e^{k - \Delta} \Delta =$$

$$= \sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k} e^{-\frac{1}{k}} e^{-\Delta} \Delta \ge \Delta e^{-\frac{1}{2}} e^{-\Delta} \sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k} = \infty$$

для любого, сколь угодно малого, Δ. То есть, Φ_Δ не сходится к Φ_0 при $\Delta \to \infty$.

В главе III доказывается существование и наличие соответствующей асимптотики решений интегро-дифференциальных уравнений типа Больцмана.

В §3.1 доказывается локальное существование решения для уравнения типа Больцмана с линейным интегральным членом следующего вида:

$$\frac{\partial z(v,t)}{\partial t}+a(v,t,z(v,t))\frac{\partial z(v,t)}{\partial v}+b(v,t)z(v,t)=\int_{-\infty}^{+\infty}K(v,v')b(v',t)z(v',t)dv', \quad (20)$$

$v\in R$ и $t\in[0,T]$, с начальным условием (11).

В соответствии с общей схемой для существования решения записывается система интегральных уравнений:

$$\eta(v,t,s)=v-\int_s^t a(\eta(v,t,\rho),\rho,w(v,t,\rho))d\rho,$$

$$w(v,t,s)=\exp\left(-\int_0^s b(\eta(v,t,\rho),\rho)d\rho\right)\left[z_0\left(v-\int_0^t a(\eta(v,t,\rho),\rho,w(v,t,\rho))d\rho\right)+\right.$$

$$\left.+\int_0^s\int_{-\infty}^{\infty}k(\eta(v,t,\rho),v')b(v',\rho)w(v',\rho,\rho)\exp\left(\int_0^\rho b(\eta(v,t,\xi),\xi)d\xi\right)dv'd\rho\right] \quad (21)$$

<u>ТЕОРЕМА 3.1.1.</u> Существует такое $T_1\in(0,T]$, что задача Коши (20), (11) при $0\le t\le T_1$ имеет единственное решение $z(v,t)\in\overline{C}^{1,1}(R\times[0;T_1])$, которое совпадает со вторым компонентом решения системы (21), если в последнем считать $s=t$: $z(v,t)=w(v,t,t)$.

Основные этапы доказательства теоремы 3.1.1 представлены в виде двух лемм.

Для того, чтобы искать решение в классе ограниченных функций, произведена замена в системе (21): $\mu(v,t,s)=v-\eta(v,t,s)$.

$$\mu(v,t,s)=\int_s^t a(v-\mu(v,t,\rho),\rho,w(v,t,\rho))d\rho, \quad (22_1)$$

$$w(v,t,s)=\exp\left(-\int_0^s b(v-\mu(v,t,\rho),\rho)d\rho\right)\left[z_0\left(v-\int_0^t a(v-\mu(v,t,\rho),\rho,w(v,t,\rho))d\rho\right)+\right.$$

$$\left.+\int_0^s\int_{-\infty}^{\infty}K(v-\mu(v,t,\rho),v')b(v',\rho)w(v',\rho,\rho)\exp\left(\int_0^\rho b(v-\mu(v,t,\xi),\xi)d\xi\right)dv'd\rho\right] \quad (22_2)$$

<u>ЛЕММА 3.1.1.</u> Пусть T_* - положительный корень следующего уравнения относительно t:

$$\max\left\{\left(N_b'N_0+N_0'(N_\eta+N_w)+2N_0N_bC_kK_0+N_bK_0\right)t+N_b'N_bN_0K_0t^2,\quad 2N_bK_0t\right\}=1.$$

Тогда при $0\le t\le T_1$ система уравнений (22) имеет единственное решение $\mu(v,t,s)\in\overline{C}(Q_T)$ и $w(v,t,s)\in\overline{C}(Q_T)$,

где T_1 - любое число из интервала $(0,T]\cap(0,T_*)$.

<u>ЛЕММА 3.1.2</u>. При выполнении условий леммы 3.1.1, $w(v,t,s)\in\overline{C}^{1,1,1}(Q_{T_1})$ и $\mu(v,t,s)\in\overline{C}^{1,1,1}(Q_{T_1})$.

В §3.2 доказывается существование решения для уравнения типа Больцмана с нелинейным интегральным членом

$$\frac{\partial z(v,t)}{\partial t}+a(v,t,z(v,t))\frac{\partial z(v,t)}{\partial v}+b(v,t)z(v,t)=$$

$$=\int_{-\infty}^{\infty}K(v,v')b(v',t)z(v',t)(1-z(v',t))dv' \quad (23)$$

и с начальным условием (11).

В соответствии с общей схемой для существования решения записывается система интегральных уравнений:

$$\eta(v,t,s)=v-\int_s^t a(\eta(v,t,\rho),\rho,w(v,t,\rho))d\rho,$$

$$w(v,t,s)=exp\left(-\int_0^s b(\eta(v,t,\rho),\rho)d\rho\right)\left[z_0\left(v-\int_0^t a(\eta(v,t,\rho),\rho,w(v,t,\rho))d\rho\right)+\right.$$

$$\left.+\int_0^s\int_{-\infty}^{\infty}K(\eta(v,t,\rho),v')b(v',\rho)w(v',\rho,\rho)(1-w(v',\rho,\rho))exp\left(\int_0^\rho b(\eta(v,t,\xi),\xi)d\xi\right)dv'd\rho\right] \quad (24)$$

<u>ТЕОРЕМА.3.2.1.</u> Пусть $z_0\in\overline{C}(R)$, $\int_{-\infty}^{\infty}K(v,v')dv'\le K_0$.

Тогда существует такое $T_1\in(0,T]$, что задача Коши (23), (11) при $0\le t\le T_1$ имеет единственное решение $z(v,t)\in C^{1,1}(R\times[0;T_1])$, которое совпадает со вторым компонентом решения системы (24), если в последнем считать $s=t$: $z(v,t)=w(v,t,t)$.

Основные этапы доказательства теоремы 3.2.1 представлены в виде нижеследующих лемм.

Для того, чтобы искать решение в классе ограниченных функций, произведена замена в системе (24): $\mu(v,t,s) = v - \eta(v,t,s)$.

$$\mu(v,t,s) = \int_s^t a\left(v - \mu(v,t,\rho), \rho, w(v,t,\rho)\right) d\rho,$$

$$w(v,t,s) = exp\left(-\int_0^s b(v - \mu(v,t,\rho), \rho) d\rho\right) \left[z_0\left(v - \int_0^s a(v - \mu(v,t,\rho), \rho, w(v,t,\rho)) d\rho\right) + \right.$$

$$\left. + \int_0^s \int_{-\infty}^{\infty} K(v - \mu(v,t,\rho), v')\, b(v',\rho)\, w(v',\rho,\rho)\, (1 - w(v',\rho,\rho)) exp\left(\int_0^\rho b(v - \mu(v,t,\xi), \xi) d\xi\right) dv' d\rho \right] \qquad (25)$$

ЛЕММА 3.2.1. Пусть T_* – положительный корень уравнения относительно t

$$\max\left\{ \left(N_* N_0 + \left(N_0' + 1\right)\left(N_\eta + N_w\right) + 2 N_b N_0 + (1 + 2 N_0)(2 N_b N_0 K_0 + N_b)\right) t + \right.$$

$$\left. + N_b N_0 N_* K_0 (1 + 2 N_0) t^2, \quad 2 N_b K_0 (1 + 2 N_0) t \right\} = 1.$$

Тогда при $0 \le t \le T_1$ система уравнений (25) имеет единственное решение $\mu(v,t,s) \in \bar{C}(Q_{T_1})$ и $w(v,t,s) \in \bar{C}(Q_{T_1})$,

где T_1 – любое число из интервала $(0, T] \cap (0, T_*)$.

ЛЕММА 3.2.2. При выполнении условий леммы 3.2.1, $w(v,t,s) \in \bar{C}^{1,1,1}(Q_{T_1})$ и $\mu(v,t,s) \in \bar{C}^{1,1,1}(Q_{T_1})$.

В §3.3 доказано существование следующей асимптотики решения для уравнения типа Больцмана с условием унимодальности.

ТЕОРЕМА 3.3.1. Если существуют такие $C > 0$, $\lambda_1 > 0$, $\lambda_2 > 0$ - *const* и

1) выполняются условия (12), (13);
2) $K(v,v',t) \le C\, exp(-\lambda_1 |v - v'|^2)$;
3) $|K_1(v,v',t)| \le C\, exp(-\lambda_1 |v - v'|^2)$;
4) $z_0(v) \le C\, exp(-\lambda_2 |v|)$, то для достаточно малого T задача Коши (10) - (11) имеет решение, удовлетворяющее неравенству «малости в далеких точках» $z(v,t) \le 2C\, exp(-\lambda_2 |v|)$. (26)

В §3.4 построена программа для приближенного решения уравнения типа Больцмана на языке программирования *Microsoft Visual C++ 6.0*.

В §3.5 содержится методика приближенного решения начальных задач изученных типов.

Приложение 1 содержит текст программы на языке программирования *Microsoft Visual C++ 6.0*.

В приложении 2 приведены результаты расчетов для различных исходных данных. Из этих результатов видно, что имеет место явление расщепления максимума унимодального начального условия: с течением времени единый максимум разделяется на два локальных максимума, приблизительно одинаковой величины.

Пользуясь случаем, выражаю глубокую благодарность моему научному руководителю доктору физико-математических наук Сергею Николаевичу Алексеенко за постановки задач, ценные советы и постоянное внимание при проведении настоящих исследований.

Основное содержание диссертации опубликовано в следующих работах:

1. Мураталиева В.Т. Определение условий существования ограниченного решения для квазилинейного упрощенного уравнения Больцмана // Исследования по интегро-дифференциальным уравнениям. - Бишкек: Илим, 2006. - Вып. 34. - С. 55-64.

2. Алексеенко С.Н., Мураталиева В.Т. Экспоненциальное убывание на бесконечности решений квазилинейного интегро-дифференциального уравнения типа Больцмана // Исследования по интегро-дифференциальным уравнениям. - Бишкек: Илим, 2006. - Вып. 35. - С. 55-61.

3. Мураталиева В.Т. Применение метода дополнительного аргумента для построения численного решения линейного упрощенного решения уравнения Больцмана // Наука и новые технологии. - Бишкек: МОНиМП, 2006. - № 1. - С. 175-179.

4. Алексеенко С.Н., Мураталиева В.Т. Абсолютная интегрируемость решений линейного интегро-дифференциального уравнения типа Больцмана // Асимптотические, топологические и компьютерные методы в математике: Тез. докл. международной научн. конф. - Бишкек, 2006. - С. 48.

5. Алексеенко С.Н., Мураталиева В.Т. Применение метода дополнительного аргумента к исследованию интегро-дифференциальных уравнений с ядром, имеющим интегрируемую особенность // Исследования по интегро-дифференциальным уравнениям. - Бишкек: Илим, 2007. - Вып. 36.- С. 39-44.

6. Мураталиева В.Т. Определение условий существования ограниченного решения для упрощенного уравнения Больцмана с нелинейным интеграль-